



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

INF480

REDES COMPLEJAS

Tarea 2

Florencia Ramírez, ROL: 202073522-0
Sofía Riquelme, ROL: 202073615-4

1. La matriz laplaciana del grafo es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

El valor de Fiedler para esta matriz es 0,34032095848177074 y el vector propio asociado es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} -0,46724728 \\ -0,46724728 \\ -0,30823323 \\ 0,11469308 \\ 0,27370712 \\ 0,33957289 \\ 0,5147547 \end{bmatrix}$$

Luego, el gráfico de la red con sus comunidades es el siguiente:

Red con partición en dos comunidades basada en el vector propio de Fiedler

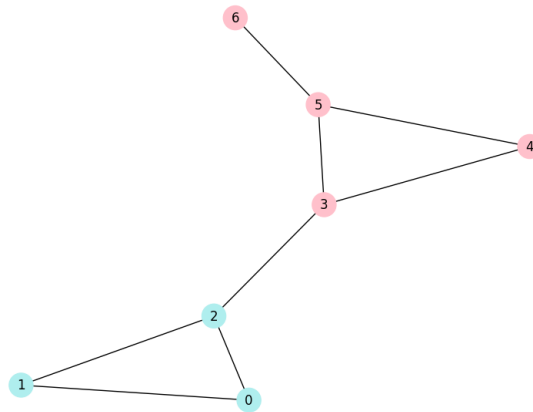


Figura 1: Gráfico de red

2. a) Para que P sea una distribución de probabilidad, debe ocurrir lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = 1$$

Luego, dado que $P(k) = C \times \alpha^k$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} C\alpha^k = 1$$

Esto es una serie geométrica. La serie geométrica infinita $(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k)$ converge a $(\frac{1}{1-\alpha})$ siempre que $(|\alpha| < 1)$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C\alpha^k = C \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) = 1$$

Despejando C :

$$C = 1 - \alpha$$

- b) La función generadora de un grafo, es $G_p(x) = \sum p_k x^k$. Como se vio en el ítem anterior, tenemos que $P(k) = C\alpha^k$ y $C = 1 - \alpha$. Si sustituimos, se tiene que:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha) \alpha^k x^k$$

$$G(x) = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x)^k$$

Utilizando la misma convergencia de series geométricas, se tiene que la expresión generadora para la distribución de grados es:

$$G(x) = (1 - \alpha) \left(\frac{1}{1 - \alpha x} \right)$$

- c) Al solamente tener información de la distribución de grados, se tiene una componente gigante en el grafo cuando se cumple:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-2)P(i) > 0$$

Sustituimos $P(k) = C\alpha^k$ y $C = 1 - \alpha$ en la expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} i(i-2)(1-\alpha)\alpha^i &> 0 \\ (1-\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} i(i-2)\alpha^i &> 0 \\ (1-\alpha) \left(\sum_{i=0}^{\infty} i^2\alpha^i - 2 \sum_{i=0}^{\infty} i\alpha^i \right) &> 0 \\ (1-\alpha) \left(\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} - 2 \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \right) &> 0 \\ (1-\alpha) \left(\frac{3\alpha^2 - \alpha}{(1-\alpha)^3} \right) &> 0 \\ \frac{3\alpha^2 - \alpha}{(1-\alpha)^2} &> 0 \end{aligned}$$

Con lo cual se puede despejar α , obteniendo que:

$$\begin{aligned} \frac{3\alpha^2 - \alpha}{(1-\alpha)^2} &> 0 \\ 3\alpha^2 - \alpha &> 0 \\ \alpha(3\alpha - 1) &> 0 \\ \alpha &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalmente como tenemos $0 < \alpha < 1$, para que exista una componente gigante en el grafo se tiene que cumplir que $\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

3. Al hacer las eliminaciones se obtuvieron los siguientes resultados:

Red	Nodos Iniciales	Aleatorio	Por Grado	Por Betweenness
Piratas	795	32,08 %	3,02 %	3,14 %
Delfines	62	38,71 %	24,19 %	12,90 %
ER Piratas	795	29,94 %	8,18 %	5,16 %
ER Delfines	62	48,39 %	30,65 %	29,03 %

Cuadro 1: Resumen de Eliminaciones en Diferentes Redes

Se puede observar que en el caso de la red Piratas (la original y la ER), al eliminar por grado y por betweenness se requiere un bajo porcentaje de nodos para que la componente gigante baje considerablemente su tamaño. Sin embargo, en las redes de Delfines, en todos los casos se requiere eliminar un porcentaje no menor. Esto sugiere que la red de piratas es extremadamente vulnerable a ataques dirigidos, lo cual se puede deber a que tiene una estructura centralizada, a diferencia de la red de delfines. Asimismo las redes ER, muestran una mayor fragilidad por su estructura más homogénea.

- 4.
- 5.
6. a) El gráfico de la red es el siguiente:

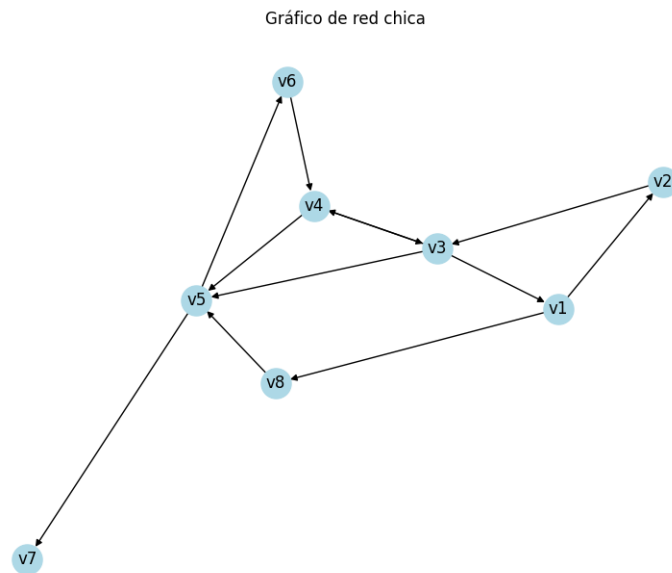


Figura 2: Gráfico de red chica

Los valores del grado de entrada, betweenness y PageRank de cada nodo son:

Nodo	Grado de entrada	Betweenness	PageRank
v1	1	0,238095	0,077725
v2	1	0,047619	0,064579
v3	2	0,428571	0,162980
v4	2	0,309524	0,180098
v5	3	0,357143	0,209159
v6	1	0,214286	0,120440
v7	1	0,000000	0,120440
v8	1	0,071429	0,064579

Cuadro 2: Valores de grado de entrada, betweenness y PageRank

b) El ranking de los nodos según su grado de entrada sería:

- 1) v5 (3).
- 2) v3 y v4 (2).
- 3) v1, v2, v6, v7 y v8 (1).

Luego, el ranking de los nodos según su betweenness sería:

- 1) v3 (0,428571).
- 2) v5 (0,357143).
- 3) v4 (0,309524).
- 4) v1 (0,238095).
- 5) v6 (0,214286).
- 6) v8 (0,071429).
- 7) v2 (0,047619).
- 8) v7 (0,000000).

Finalmente, el ranking de los nodos según su valor de Page-Rank sería:

- 1) v5 (0,209159).
- 2) v4 (0,180098).
- 3) v3 (0,162980).
- 4) v6 y v7 (0,120440).
- 5) v1 (0,077725).
- 6) v2 y v8 (0,064579).

- c) Se puede observar una relación entre grado de entrada, betweenness y valor de PageRank, los nodos con mayor grado de entrada también tienden a tener mayor valores de betweenness y PageRank, que se puede observar en los nodos v3, v4 y v5.
más chamullo :>

7.