UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

INF480

REDES COMPLEJAS

Tarea 2

Florencia Ramírez, ROL: 202073522-0
Sofía Riquelme, ROL: 202073615-4

1. La matriz laplaciana del grafo es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

El valor de Fiedler para esta matriz es $0{,}34032095848177074$ y el vector propio asociado es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} -0{,}46724728 \\ -0{,}46724728 \\ -0{,}30823323 \\ 0{,}11469308 \\ 0{,}27370712 \\ 0{,}33957289 \\ 0{,}5147547 \end{bmatrix}$$

Luego, el gráfico de la red con sus comunidades es el siguiente:

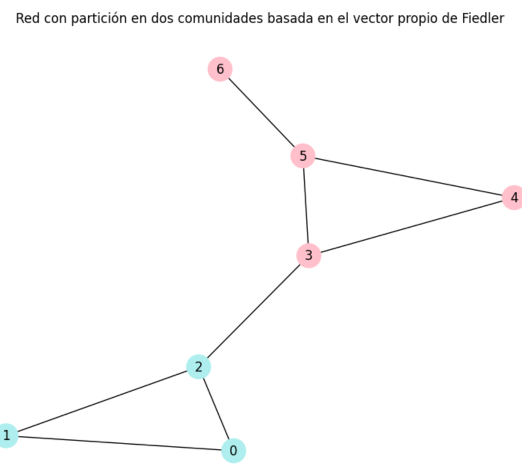

Figura 1: Gráfico de red

2. *a)* Para que P sea una distribución de probabilidad, debe ocurrir lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = 1$$

Luego, dado que $P(k) = C \times \alpha^k$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} C\alpha^k = 1$$

Esto es una serie geométrica. La serie geométrica infinita $(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k)$ converge a $(\frac{1}{1-\alpha})$ siempre que $(|\alpha| < 1)$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C\alpha^k = C\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = 1$$

Despejando C:

$$C = 1 - \alpha$$

b) La función generadora de un grafo, es $G_p(x) = \sum p_k x^k$. Como se vio en el ítem anterior, tenemos que $P(k) = C\alpha^k$ y $C = 1-\alpha$.

Si sustituimos, se tiene que:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha)\alpha^k x^k$$

$$G(x) = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha x)^k$$

Utilizando la misma convergencia de series geométricas, se tiene que la expresión generadora para la distribución de grados es:

$$G(x) = (1-\alpha)\left(\frac{1}{1-\alpha x}\right)$$

c) Al solamente tener información de la distribución de grados, se tiene una componente gigante en el grafo cuando se cumple:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-2)P(i) > 0$$

Sustituimos $P(k) = C\alpha^k$ y $C = 1-\alpha$ en la expresión:

$$\sum i_{i=0}^{\infty}(i-2)(1-\alpha)\alpha^i > 0$$

$$(1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty} i(i-2)\alpha^i > 0$$

$$(1-\alpha)(\sum_{i=0}^{\infty} i^2\alpha^i - 2\sum_{i=0}^{\infty} i\alpha^i) > 0$$

$$(1-\alpha)(\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} - 2\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}) > 0$$

$$(1-\alpha)(\frac{3\alpha^2-\alpha}{(1-\alpha)^3}) > 0$$

$$\frac{3\alpha^2-\alpha}{(1-\alpha)^2} > 0$$

Con lo cual se puede despejar α, obteniendo que:

$$\frac{3\alpha^2 - \alpha}{(1-\alpha)^2} > 0$$

$$3\alpha^2 - \alpha > 0$$

$$\alpha(3\alpha - 1) > 0$$

$$\alpha > \frac{1}{3}$$

Finalmente como tenemos $0 < \alpha < 1$, para que exista una componente gigante en el grafo se tiene que cumplir que $\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

3. Al hacer las eliminaciones se obtuvieron los siguientes resultados:

Red	**Nodos Iniciales**	**Aleatorio**	**Por Grado**	**Por Betweenness**
Piratas	795	32,08 %	3,02 %	3,14 %
Delfines	62	38,71 %	24,19 %	12,90 %
ER Piratas	795	29,94 %	8,18 %	5,16 %
ER Delfines	62	48,39 %	30,65 %	29,03 %

Cuadro 1: Resumen de Eliminaciones en Diferentes Redes

Se puede observar que en el caso de la red Piratas (la original y la ER), al eliminar por grado y por betweenness se requiere un bajo porcentaje de nodos para que la componente gigante baje considerablemente su tamaño. Sin embargo, en las redes de Delfines, en todos los casos se requiere eliminar un porcentaje no menor. Esto sugiere que la red de piratas es extremadamente vulnerable a ataques dirigidos, lo cual se puede deber a que tiene una estructura centralizada, a diferencia de la red de delfines. Asimismo las redes ER, muestran una mayor fragilidad por su estructura más homogénea.

4. Luego de calcular la modularidad promedio $Q^d(p)$ para las dos posibles particiones se obtuvieron los siguientes resultados:

p	Q_B^d	Q_C^d
0,0	0,12800588	0,00190496
0,1	0,08123612	0,0007397
0,2	0,04913890	0,00231686
0,3	0,02125331	0,00156286
0,4	0,00902243	0,00217117
0,5	0,00398928	0,00112336
0,6	0,00727439	0,00381207
0,7	0,02271023	0,00177777
0,8	0,04808281	0,00401861
0,9	0,08286395	0,00197586
1,0	0,12718032	0,00194545

Cuadro 2: Modularidad dirigida para distintos valores de p

Se muestra uun gráfico mostrando la relación entre estos valores obtenidos para la modularidad en función de p:

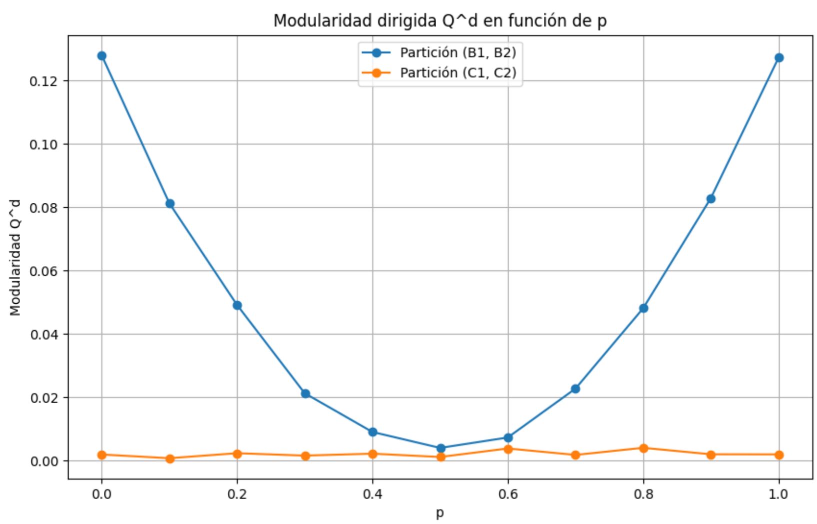

Figura 2: Modularidad por particiones en función de p

5. Dado que todos los nodos tienen grado k, el grado promedio de la red también es k. Dicho esto, queremos que de acuerdo con la

teoría de percolación, queremos que se cumpla lo siguiente:

$$1 - \frac{1}{k} > 0{,}95$$

$$0{,}05 > \frac{1}{k}$$

$$k > \frac{1}{0{,}05}$$

$$k > 20$$

Entonces, k debe ser mayor a 20 para que al eliminar el 95 % de los nodos siga existiendo una componente gigante.

6. *a*) El gráfico de la red es el siguiente:

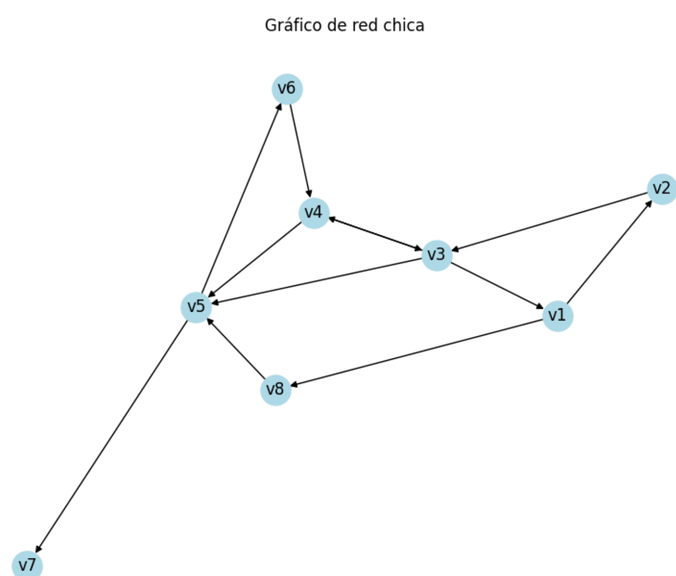

Figura 3: Gráfico de red chica

Los valores del grado de entrada, betweenness y PageRank de cada nodo son:

Nodo	Grado de entrada	Betweenness	PageRank
v1	1	$0,238095$	$0,077725$
v2	1	$0,047619$	$0,064579$
v3	2	$0,428571$	$0,162980$
v4	2	$0,309524$	$0,180098$
v5	3	$0,357143$	$0,209159$
v6	1	$0,214286$	$0,120440$
v7	1	$0,000000$	$0,120440$
v8	1	$0,071429$	$0,064579$

Cuadro 3: Valores de grado de entrada, betweenness y PageRank

b) El ranking de los nodos según su grado de entrada sería:

1) v5 (3).
2) v3 y v4 (2).
3) v1, v2, v6, v7 y v8 (1).

Luego, el ranking de los nodos según su betweenness sería:

1) v3 ($0{,}428571$).
2) v5 ($0{,}357143$).
3) v4 ($0{,}309524$).
4) v1 ($0{,}238095$).
5) v6 ($0{,}214286$).
6) v8 ($0{,}071429$).
7) v2 ($0{,}047619$).
8) v7 ($0{,}000000$).

Finalmente, el ranking de los nodos según su valor de PageRank sería:

1) v5 ($0{,}209159$).
2) v4 ($0{,}180098$).
3) v3 ($0{,}162980$).
4) v6 y v7 ($0{,}120440$).
5) v1 ($0{,}077725$).
6) v2 y v8 ($0{,}064579$).

c) Se puede observar una relación entre grado de entrada, betweenness y valor de PageRank, específicamente para los nodos con altos valores de estos, que es posible notar en los nodos v3, v4 y v5. Se puede decir que los nodos que tienen una mayor cantidad de conexiones de entradas son considerados más importantes en el grafo y, a su vez, son importantes como puente entre otros dos nodos.

   Otro caso interesante es que el nodo v7 tenga un mayor valor de PageRank que los nodos v2 y v8, considerando que su valor de betweenness es 0. Esto se puede deber a que el nodo v7 tiene una conexión de entrada con un nodo con PageRank elevado, en comparación a los nodos v2 y v8 que tienen una conexión de salida con un nodo con PageRank elevado.

7.

8. A continuación se muestra el gráfico de p versus d:

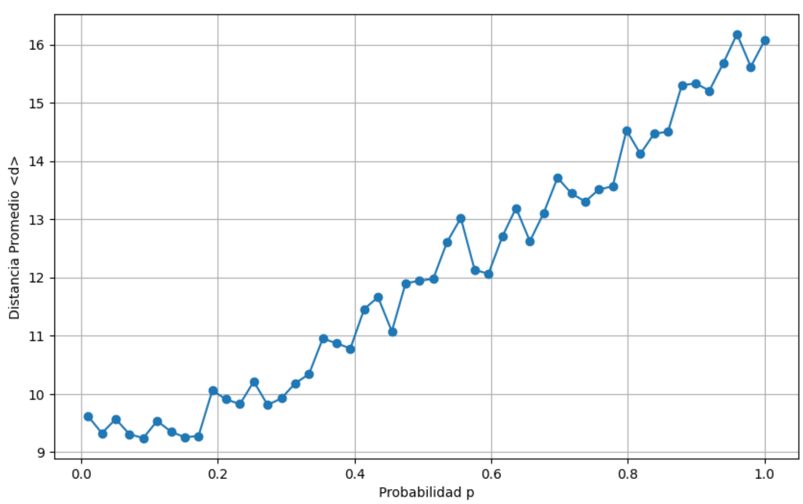

Figura 4: Relación entre p y distancia promedio

Se puede observar que mientras mayor sea la probabilidad p (es decir, $1-p$ es menor), mayor es la distancia promedio. Sin embargo, no se observa un claro cambio de fase entre un mundo grande y un mundo pequeño. Esto puede deberse a que n no es lo suficientemente grande, por lo que sería interesante intentarlo con una mayor cantidad de nodos.