

Formalización del Teorema de Existencia de Modelo en Isabelle/HOL



Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Trabajo Fin de Máster

Sofía Santiago Fernández

El presente Trabajo Fin de Máster se ha realizado en el Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Sevilla y ha sido supervisado por José Antonio Alonso Jiménez y María José Hidalgo Doblado.

Índice

Sumario	5
Introducción	7
1 Notación uniforme	11
2 Propiedad de consistencia proposicional	31
3 Colecciones de conjuntos cerradas bajo subconjuntos y de carácter finito	51
4 Teorema de existencia de modelo	91
4.1 Sucesiones de conjuntos	91
4.2 El Teorema de Existencia de Modelo	101
4.3 Teorema de Compacidad	117
A Lemas de HOL usados	155
A.1 La base de lógica de primer orden (1)	155
A.2 Teoría de órdenes (3)	159
A.3 Teoría de retículos (5)	159
A.4 Teoría de conjuntos (6)	159
A.5 Retículos completos (10)	163
A.6 Números naturales (15)	163
A.7 Conjuntos finitos (17)	164
A.8 Retículos condicionalmente completos (89)	164

Bibliografía**165**

Sumario

El objetivo de la Lógica es la formalización del conocimiento y su razonamiento. Este trabajo constituye una continuación del Trabajo de Fin de Grado *Elementos de lógica formalizados en Isabelle/HOL* [4], donde se estudiaron la sintaxis, semántica y *Lema de Hintikka* de la Lógica Proposicional desde la perspectiva teórica de *First–Order Logic and Automated Theorem Proving* [5] de Melvin Fitting. Manteniendo dicha perspectiva, nos centraremos en la demostración del *Teorema de Existencia de Modelo*, concluyendo con el *Teorema de Compacidad* como consecuencia del mismo. Siguiendo la inspiración de *Propositional Proof Systems* [10] por Julius Michaelis y Tobias Nipkow, los resultados expuestos serán formalizados mediante Isabelle: un demostrador interactivo que incluye herramientas de razonamiento automático para guiar al usuario en el proceso de formalización, verificación y automatización de resultados. Concretamente, Isabelle/HOL es una especialización de Isabelle para la lógica de orden superior. Las demostraciones de los resultados en Isabelle/HOL se elaborarán siguiendo dos tácticas distintas a lo largo del trabajo. En primer lugar, cada lema será probado de manera detallada prescindiendo de toda herramienta de razonamiento automático, como resultado de una búsqueda inversa en cada paso de la prueba. En contraposición, elaboraremos una demostración automática alternativa de cada resultado que utilice todas las herramientas de razonamiento automático que proporciona el demostrador. De este modo, se evidenciará la capacidad de razonamiento automático de Isabelle.

Logic’s purpose is about knowledge’s formalisation and its reasoning. This project is a continuation of *Elementos de lógica formalizados en Isabelle/HOL* [4] in which we studied Syntax, Semantics and a propositional version of Hintikka’s lemma from the theoretical perspective of *First–Order Logic and Automated Theorem Proving* [5] by Melvin Fitting. Following the same perspective, we will focus on the demonstration of *Propositional Model Existence* theorem, concluding with the *Propositional Compactness* theorem as a consequence. Inspired by *Propositional Proof Systems* [10] by Julius Michaelis and Tobias Nipkow, these results will be formalised using Isabelle: a proof assistant including automatic reasoning tools to guide the user on formalising, verifying and automating results. In particular, Isabelle/HOL is the specialization of Isabelle for High-Order Logic. The processing of the results formalised in Isabelle/HOL follows two directions. In the

first place, each lemma will be proved on detail without any automation, as the result of an inverse research on every step of the demonstration until it is only completed with deductions based on elementary rules and definitions. Conversely, we will alternatively prove the results using all the automatic reasoning tools that are provide by the proof assistant. In this way, Isabelle's power of automatic reasoning will be shown as the contrast between these two different proving tactics.

Introducción

El objetivo de la Lógica es la formalización del conocimiento y el razonamiento sobre el mismo. Tiene su origen en la lógica silogística de Aristóteles (384 a.C - 322 a.C) que consistía en la deducción de conclusiones a partir de dos premisas iniciales, recogida en su obra *Organon*. Posteriormente, los estoicos (400-200 a.C) comenzaron a plantearse cuestiones semánticas relacionadas con la naturaleza de la verdad.

En el siglo XVII el matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) instaura un programa lógico que propone la búsqueda de un sistema simbólico del lenguaje natural junto con la matematización del concepto de validez, lo que motivó el desarrollo de la lógica moderna del siglo XIX por parte de matemáticos y filósofos como Bernard Bolzano (1781 – 1848), George Boole (1815 – 1864), Charles Saunders Pierce (1839 – 1914) y Gottlob Frege (1848 – 1925). Este último introdujo el primer tratamiento sistemático de la lógica proposicional dentro de la escuela del logicismo, cuyo objetivo consistía en investigar los fundamentos de las matemáticas para formalizarlos lógicamente con el fin de realizar deducciones y razonamientos válidos.

En las últimas décadas, el desarrollo de la computación y la inteligencia artificial ha permitido la formalización de las matemáticas y la lógica mediante el lenguaje computacional. Concretamente, el razonamiento automático es un área que investiga los distintos aspectos del razonamiento para crear programas y algoritmos que permitan realizarlo de manera eficiente y automática. Se fundamenta en el programa lógico desarrollado por Leibniz, estructurado en base a dos principios: la formalización rigurosa de resultados y el desarrollo de algoritmos que permitan manipular y razonar a partir de dichas formalizaciones. Entre las principales aplicaciones de este área se encuentra la verificación y síntesis automáticas de programas que permite la validación de razonamientos junto con la creación de herramientas de razonamiento automático que permitan el desarrollo de nuevos resultados.

En este contexto nace Isabelle en 1986, desarrollada por Larry Paulson de la Universidad de Cambridge y Tobias Nipkow del Technische Universität München. Isabelle es un demostrador interactivo que, desde el razonamiento automático, facilita la formalización lógica de resultados y proporciona herramientas para realizar deducciones. En particular, Isabelle/HOL es la especialización de Isabelle para la lógica de orden su-

perior. Junto con Coq, ACL2 y PVS, entre otros, constituye uno de los demostradores interactivos más influyentes.

Como demostrador interactivo, Isabelle permite automatizar razonamientos guiados por el usuario, verificando cada paso de una deducción de manera precisa. Además, incorpora herramientas de razonamiento automático para mejorar la productividad del proceso de demostración. Para ello, cuenta con una extensa librería de resultados lógicos y matemáticos que han sido formalizados y continúan en desarrollo por parte de proyectos como *The Alexandria Project: Large-Scale Formal Proof for the Working Mathematician*. Este proyecto comienza en 2017, dirigido por Lawrence Paulson desde la Universidad de Cambridge. Tiene como finalidad la formalización de distintas teorías para ampliar la librería de Isabelle, junto con la creación de herramientas interactivas que asistan a los matemáticos en el proceso de formalización, demostración y búsqueda de nuevos resultados.

Este trabajo constituye una continuación del Trabajo de Fin de Grado *Elementos de lógica formalizados en Isabelle/HOL* [4] dedicado al estudio y formalización de la sintaxis, semántica y lema de Hintikka de la lógica proposicional. Inspirado en la primera sección de la publicación *Propositional Proof Systems* [10] de Julius Michaelis y Tobias Nipkow, y basando su contenido teórico en el libro *First-Order Logic and Automated Theorem Proving* [5] de Melvin Fitting, este trabajo tiene como objetivo la demostración y formalización del *Teorema de Existencia de Modelo*, concluyendo con el *Teorema de Compacidad* como consecuencia del mismo. Para ello, consta de cuatro capítulos. En el primero se introduce la notación uniforme para fórmulas proposicionales, en el segundo capítulo se define la propiedad de consistencia proposicional para colecciones de conjuntos de fórmulas, en el tercero se definen las colecciones cerradas bajo subconjuntos y de carácter finito y en el último capítulo se demuestra finalmente *Teorema de Existencia de Modelo*, concluyendo con la prueba del *Teorema de Compacidad*.

El primer capítulo introduce la notación uniforme para las fórmulas proposicionales, lo que permite reducir el número de casos a considerar sobre la estructura de las fórmulas. Para justificar la clasificación del conjunto de fórmulas proposicionales en dos tipos, se introduce la definición de fórmulas semánticamente equivalentes como aquellas que tienen el mismo valor para toda interpretación. De este modo, las fórmulas proposicionales pueden ser de tipo conjuntivo (las fórmulas α) y de tipo disyuntivo (las fórmulas β), asociándose dos componentes a cada fórmula según el tipo al que correspondan. Intuitivamente, una fórmula de tipo α es semánticamente equivalente a la conjunción de sus componentes conjuntivas, y una fórmula de tipo β es semánticamente equivalente a la disyunción de sus componentes disyuntivas. En Isabelle, se formalizarán sintácticamente los conjuntos de fórmulas de tipo α y de tipo β como predicados inductivos, simplificando la intuición original al prescindir de la noción de equivalencia semántica que permite clasificar la totalidad de las fórmulas proposicionales. Final-

mente, el capítulo concluye con un lema de caracterización de los conjuntos de Hintikka mediante la notación uniforme.

En el siguiente capítulo se define la propiedad de consistencia proposicional para colecciones de conjuntos de fórmulas. Al final del capítulo se caracteriza dicha propiedad mediante notación uniforme, lo que facilita las demostraciones de los resultados posteriores.

En el tercer capítulo se definen las colecciones de conjuntos de fórmulas cerradas bajo subconjuntos y de carácter finito. Una colección de conjuntos es cerrada bajo subconjuntos si todo subconjunto de cada conjunto de la colección pertenece a la colección, mientras que una colección es de carácter finito si para todo conjunto son equivalentes que el conjunto pertenezca a la colección y que todo subconjunto finito del mismo pertenezca a la colección. Por una parte, se probará que toda colección de carácter finito es cerrada bajo subconjuntos. Por otro lado, en este capítulo se introducirán dos resultados sobre extensiones de colecciones de conjuntos de fórmulas. El primero de ellos permite extender una colección con la propiedad de consistencia proposicional a otra que también la verifique y sea cerrada bajo subconjuntos. Finalmente, se demostrará que una colección cerrada bajo subconjuntos que verifique la propiedad de consistencia proposicional se puede extender a otra que también verifique dicha propiedad y sea de carácter finito.

Por último, en el cuarto capítulo se centra en la demostración del *Teorema de Existencia de Modelo*, exponiendo posteriormente la prueba del *Teorema de Compacidad* como consecuencia de éste. El capítulo está dividido en tres apartados: el primero donde se definen ciertas sucesiones de conjuntos de fórmulas a partir de una colección y un conjunto, el segundo apartado dedicado a la demostración del *Teorema de Existencia de Modelo* y el tercer apartado donde se demuestra el *Teorema de Compacidad*.

Para demostrar el *Teorema de Existencia de Modelo*, dada una colección y un conjunto perteneciente a ella, se dedicará el primer apartado del cuarto capítulo a la definición de ciertas sucesiones monótonas de conjuntos de fórmulas. Del mismo modo, se probarán distintos resultados relativos a este tipo de sucesiones. En primer lugar, se demostrará que todo conjunto de la sucesión pertenece a la colección si esta verifica la propiedad de consistencia proposicional. Por otro lado, se caracterizará cada conjunto de la sucesión mediante la unión generalizada de los conjuntos anteriores de la sucesión. Como es habitual, se definirá el límite de este tipo de sucesiones, probándose que cada conjunto de la sucesión está contenido en él. En particular, si una fórmula pertenece al límite se demostrará que pertenece a algún conjunto de la sucesión. Finalmente, se probará que todo subconjunto finito del límite está contenido en algún conjunto de la sucesión.

Por otro lado, en la segunda parte del cuarto capítulo se desarrolla la demostración del *Teorema de Existencia de Modelo* que prueba que todo conjunto de fórmulas perteneciente a una colección que verifique la propiedad de consistencia proposicional es satis-

facible. Dada una colección C en estas condiciones y un conjunto $S \in C$, la clave de la demostración consiste en probar que S está contenido en un conjunto de Hintikka que, por el *Teorema de Hintikka*, es satisfacible. Para ello, empleando los resultados expuestos en el segundo capítulo, extenderemos la colección C a otra C' que tenga la propiedad de consistencia proposicional, sea cerrada bajo subconjuntos y sea de carácter finito. De este modo, se considerará la sucesión definida a partir de S y C' según el primer apartado del cuarto capítulo, probando que el límite de dicha sucesión es un conjunto de Hintikka que contiene a S . Para ello, previamente se demostrará que el límite de este tipo de sucesiones es un elemento maximal de la colección que lo define si esta es cerrada bajo subconjuntos y verifica la propiedad de consistencia proposicional. Por otro lado se demostrará que, si además la colección es de carácter finito, el límite pertenece a ella.

Por último, el apartado final del capítulo se dedica a la demostración del *Teorema de Compacidad* que prueba que todo conjunto de fórmulas finitamente satisfacible es satisfacible. Para su demostración consideraremos la colección formada por los conjuntos de fórmulas finitamente satisfacibles. Probaremos que dicha colección verifica la propiedad de consistencia proposicional y, por el *Teorema de Existencia de Modelo*, todo conjunto perteneciente a ella será satisfacible.

En lo referente a las demostraciones asistidas por Isabelle/HOL de los resultados formalizados a lo largo de las secciones, se elaborarán dos tipos de pruebas correspondientes a dos tácticas distintas. En primer lugar, se probará cada resultado siguiendo un esquema de demostración detallado. En él utilizaremos únicamente y de manera precisa las reglas de simplificación y definiciones incluidas en la librería de Isabelle, prescindiendo de las herramientas de razonamiento automático del demostrador. Para ello, se realiza una búsqueda inversa en cada paso de la demostración automática hasta llegar a un desarrollo de la prueba basado en deducciones a partir de resultados elementales que la completen de manera rigurosa. En contraposición, se evidenciará la capacidad de razonamiento automático de Isabelle/HOL mediante la realización de una prueba alternativa siguiendo un esquema de demostración automático. Para ello se utilizarán las herramientas de razonamiento que han sido elaboradas en Isabelle/HOL con el objetivo de realizar deducciones de la manera más eficiente.

Este trabajo está disponible en la plataforma GitHub mediante el siguiente enlace:

<https://github.com/sofsanfer/TFM>

Capítulo 1

Notación uniforme

En este capítulo introduciremos la notación uniforme inicialmente desarrollada por R. M. Smullyan [12]. La finalidad de dicha notación es reducir el número de casos a considerar sobre la estructura de las fórmulas al clasificar estas en dos categorías, facilitando las demostraciones y métodos empleados en adelante.

De este modo, las fórmulas proposicionales pueden ser de dos tipos: las de tipo conjuntivo (las fórmulas α) y las de tipo disyuntivo (las fórmulas β). Cada fórmula de tipo α , o β respectivamente, tiene asociada sus dos componentes α_1 y α_2 , o β_1 y β_2 respectivamente. Para justificar dicha clasificación, introduzcamos inicialmente la definición de fórmulas semánticamente equivalentes.

Definición 1.0.1 *Dos fórmulas son semánticamente equivalentes si tienen el mismo valor para toda interpretación.*

En Isabelle podemos formalizar la definición de la siguiente manera.

definition *semanticEq* $F\ G \equiv \forall \mathcal{A}. (\mathcal{A} \models F) \longleftrightarrow (\mathcal{A} \models G)$

Según la definición del valor de verdad de una fórmula proposicional en una interpretación dada, podemos ver los siguientes ejemplos de fórmulas semánticamente equivalentes.

lemma *semanticEq* $(Atom\ p) ((Atom\ p) \vee (Atom\ p))$
by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma *semanticEq* $(Atom\ p) ((Atom\ p) \wedge (Atom\ p))$
by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma *semanticEq* $\perp (\perp \wedge \perp)$

by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma *semanticEq* \perp ($\perp \vee \perp$)

by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma *semanticEq* \perp ($\neg \top$)

by (*simp add: semanticEq-def top-semantics*)

lemma *semanticEq* F ($\neg(\neg F)$)

by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma *semanticEq* ($\neg(\neg F)$) ($F \vee F$)

by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma *semanticEq* ($\neg(\neg F)$) ($F \wedge F$)

by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma *semanticEq* ($\neg F \wedge \neg G$) ($\neg(F \vee G)$)

by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma *semanticEq* ($F \rightarrow G$) ($\neg F \vee G$)

by (*simp add: semanticEq-def*)

En contraposición, también podemos dar ejemplos de fórmulas que no son semánticamente equivalentes.

lemma \neg *semanticEq* (*Atom* p) ($\neg(\text{Atom } p)$)

by (*simp add: semanticEq-def*)

lemma \neg *semanticEq* $\perp \top$

by (*simp add: semanticEq-def top-semantics*)

Por tanto, diremos intuitivamente que una fórmula es de tipo α con componentes α_1 y α_2 si es semánticamente equivalente a la fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Del mismo modo, una fórmula será de tipo β con componentes β_1 y β_2 si es semánticamente equivalente a la fórmula $\beta_1 \vee \beta_2$.

Definición 1.0.2 Las fórmulas de tipo α (fórmulas conjuntivas) y sus correspondientes componentes α_1 y α_2 se definen como sigue: dadas F y G fórmulas cualesquiera,

1. $F \wedge G$ es una fórmula de tipo α cuyas componentes son F y G .
2. $\neg(F \vee G)$ es una fórmula de tipo α cuyas componentes son $\neg F$ y $\neg G$.

3. $\neg(F \longrightarrow G)$ es una fórmula de tipo α cuyas componentes son F y $\neg G$.

De este modo, de los ejemplos anteriores podemos deducir que las fórmulas atómicas son de tipo α y sus componentes α_1 y α_2 son la propia fórmula. Del mismo modo, la constante \perp también es una fórmula conjuntiva cuyas componentes son ella misma. Por último, podemos observar que dada una fórmula cualquiera F , su doble negación $\neg(\neg F)$ es una fórmula de tipo α y componentes F y F .

Formalizaremos en Isabelle el conjunto de fórmulas α como un predicato inductivo. De este modo, las reglas anteriores que construyen el conjunto de fórmulas de tipo α se formalizan en Isabelle como reglas de introducción. Además, añadiremos explícitamente una cuarta regla que introduce la doble negación de una fórmula como fórmula de tipo α . De este modo, facilitaremos la prueba de resultados posteriores relacionados con la definición de conjunto de Hintikka, que constituyen una base para la demostración del *Teorema de Existencia de Modelo*.

inductive Con :: 'a formula => 'a formula => 'a formula => bool **where**
 Con (And F G) F G |
 Con (Not (Or F G)) (Not F) (Not G) |
 Con (Not (Imp F G)) F (Not G) |
 Con (Not (Not F)) F F

Las reglas de introducción que proporciona la definición anterior son las siguientes.

Con $(F \wedge G)$ F G
 Con $(\neg (F \vee G))$ $(\neg F)$ $(\neg G)$
 Con $(\neg (F \rightarrow G))$ F $(\neg G)$
 Con $(\neg (\neg F))$ F F (Con.intros)

Por otro lado, definamos las fórmulas disyuntivas.

Definición 1.0.3 Las fórmulas de tipo β (fórmulas disyuntivas) y sus correspondientes componentes β_1 y β_2 se definen como sigue: dadas F y G fórmulas cualesquiera,

1. $F \vee G$ es una fórmula de tipo β cuyas componentes son F y G .
2. $F \longrightarrow G$ es una fórmula de tipo β cuyas componentes son $\neg F$ y G .
3. $\neg(F \wedge G)$ es una fórmula de tipo β cuyas componentes son $\neg F$ y $\neg G$.

De los ejemplos dados anteriormente, podemos deducir análogamente que las fórmulas atómicas, la constante \perp y la doble negación sob también fórmulas disyuntivas con las mismas componentes que las dadas para el tipo conjuntivo.

Del mismo modo, su formalización se realiza como un predicado inductivo, de manera que las reglas que definen el conjunto de fórmulas de tipo β se formalizan en Isabelle como reglas de introducción. Análogamente, introduciremos de manera explícita una regla que señala que la doble negación de una fórmula es una fórmula de tipo disyuntivo.

inductive *Dis* :: 'a formula => 'a formula => 'a formula => bool **where**

Dis (Or F G) F G |
Dis (Imp F G) (Not F) G |
Dis (Not (And F G)) (Not F) (Not G) |
Dis (Not (Not F)) F F

Las reglas de introducción que proporciona esta formalización se muestran a continuación.

Dis (F \vee G) F G

Dis (F \rightarrow G) (\neg F) G

Dis (\neg (F \wedge G)) (\neg F) (\neg G)

Dis (\neg (\neg F)) F F

(*Dis.intros*)

Cabe observar que las formalizaciones de la definiciones de fórmulas de tipo α y β son definiciones sintácticas, pues construyen los correspondientes conjuntos de fórmulas a partir de una reglas sintácticas concretas. Se trata de una simplificación de la intuición original de la clasificación de las fórmulas mediante notación uniforme, ya que se prescinde de la noción de equivalencia semántica que permite clasificar la totalidad de las fórmulas proposicionales.

Veamos la clasificación de casos concretos de fórmulas. Por ejemplo, según hemos definido la fórmula \top , es sencillo comprobar que se trata de una fórmula disyuntiva.

lemma *Dis* \top ($\neg \perp$) \perp

unfolding *Top-def* **by** (*simp only: Dis.intros*(2))

Por otro lado, se observa a partir de las correspondientes definiciones que la conjunción generalizada de una lista de fórmulas es una fórmula de tipo α y la disyunción generalizada de una lista de fórmulas es una fórmula de tipo β .

lemma *Con* (\wedge (F#Fs)) F (\wedge Fs)

by (*simp only: BigAnd.simps Con.intros*(1))

lemma *Dis* ($\forall(F\#Fs)$) F ($\forall Fs$)
by (*simp only*: *BigOr.simps Dis.intros(1)*)

Finalmente, de las reglas que definen las fórmulas conjuntivas y disyuntivas se deduce que la doble negación de una fórmula es una fórmula perteneciente a ambos tipos.

lemma *notDisCon*: *Con* (*Not* (*Not* F)) F *Dis* (*Not* (*Not* F)) F F
by (*simp only*: *Con.intros(4) Dis.intros(4)*) $+$

A continuación vamos a introducir el siguiente lema que caracteriza las fórmulas de tipo α y β , facilitando el uso de la notación uniforme en Isabelle.

lemma *con-dis-simps*:
 $Con\ a1\ a2\ a3 = (a1 = a2 \wedge a3 \vee$
 $(\exists F\ G.\ a1 = \neg(F \vee G) \wedge a2 = \neg F \wedge a3 = \neg G) \vee$
 $(\exists G.\ a1 = \neg(a2 \rightarrow G) \wedge a3 = \neg G) \vee$
 $a1 = \neg(\neg a2) \wedge a3 = a2)$
 $Dis\ a1\ a2\ a3 = (a1 = a2 \vee a3 \vee$
 $(\exists F\ G.\ a1 = F \rightarrow G \wedge a2 = \neg F \wedge a3 = G) \vee$
 $(\exists F\ G.\ a1 = \neg(F \wedge G) \wedge a2 = \neg F \wedge a3 = \neg G) \vee$
 $a1 = \neg(\neg a2) \wedge a3 = a2)$
by (*simp-all add*: *Con.simps Dis.simps*)

Por último, introduzcamos un resultado que permite caracterizar los conjuntos de Hintikka empleando la notación uniforme.

Lema 1.0.4 (Caracterización de los conjuntos de Hintikka mediante la notación uniforme)

Dado un conjunto de fórmulas proposicionales S , son equivalentes:

1. *S es un conjunto de Hintikka.*
2. *Se verifican las condiciones siguientes:*
 - \perp no pertenece a S .
 - Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
 - Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 se verifica que si la fórmula pertenece a S , entonces α_1 y α_2 también.
 - Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 se verifica que si la fórmula pertenece a S , entonces o bien β_1 pertenece a S o bien β_2 pertenece a S .

En Isabelle/HOL se formaliza del siguiente modo.

lemma *Hintikka* $S = (\bot \notin S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S))$
oops

Procedamos a la demostración del resultado.

Demostración: Para probar la equivalencia, veamos cada una de las implicaciones por separado.

1) \implies 2)

Supongamos que S es un conjunto de Hintikka. Vamos a probar que, en efecto, se verifican las condiciones del enunciado del lema.

Por definición de conjunto de Hintikka, S verifica las siguientes condiciones:

1. $\bot \notin S$.
2. Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
3. Si $G \wedge H \in S$, entonces $G \in S$ y $H \in S$.
4. Si $G \vee H \in S$, entonces $G \in S$ o $H \in S$.
5. Si $G \rightarrow H \in S$, entonces $\neg G \in S$ o $H \in S$.
6. Si $\neg(\neg G) \in S$, entonces $G \in S$.
7. Si $\neg(G \wedge H) \in S$, entonces $\neg G \in S$ o $\neg H \in S$.
8. Si $\neg(G \vee H) \in S$, entonces $\neg G \in S$ y $\neg H \in S$.
9. Si $\neg(G \rightarrow H) \in S$, entonces $G \in S$ y $\neg H \in S$.

De este modo, el conjunto S cumple la primera y la segunda condición del enunciado del lema, que se corresponden con las dos primeras condiciones de la definición de conjunto de Hintikka. Veamos que, además, verifica las dos últimas condiciones del resultado.

En primer lugar, probemos que para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 se verifica que si la fórmula pertenece al conjunto S , entonces α_1 y α_2 también. Para ello, supongamos que una fórmula cualquiera de tipo α pertenece a S . Por definición de este tipo de fórmulas, tenemos que α puede ser de la forma $G \wedge H$, $\neg(\neg G)$,

$\neg(G \vee H)$ o $\neg(G \longrightarrow H)$ para fórmulas G y H cualesquiera. Probemos que, para cada tipo de fórmula α perteneciente a S , sus componentes α_1 y α_2 están en S .

- *Fórmula del tipo $G \wedge H$* : Sus componentes conjuntivas son G y H . Por la tercera condición de la definición de conjunto de Hintikka, obtenemos que si $G \wedge H$ pertenece a S , entonces G y H están ambas en el conjunto, lo que prueba este caso.

- *Fórmula del tipo $\neg(\neg G)$* : Sus componentes conjuntivas son ambas G . Por la sexta condición de la definición de conjunto de Hintikka, obtenemos que si $\neg(\neg G)$ pertenece a S , entonces G pertenece al conjunto, lo que prueba este caso.

- *Fórmula del tipo $\neg(G \vee H)$* : Sus componentes conjuntivas son $\neg G$ y $\neg H$. Por la octava condición de la definición de conjunto de Hintikka, obtenemos que si $\neg(G \vee H)$ pertenece a S , entonces $\neg G$ y $\neg H$ están ambas en el conjunto, lo que prueba este caso.

- *Fórmula del tipo $\neg(G \longrightarrow H)$* : Sus componentes conjuntivas son G y $\neg H$. Por la novena condición de la definición de conjunto de Hintikka, obtenemos que si $\neg(G \longrightarrow H)$ pertenece a S , entonces G y $\neg H$ están ambas en el conjunto, lo que prueba este caso.

Finalmente, probemos que para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 se verifica que si la fórmula pertenece al conjunto S , entonces o bien β_1 pertenece al conjunto o bien β_2 pertenece a conjunto. Para ello, supongamos que una fórmula cualquiera de tipo β pertenece a S . Por definición de este tipo de fórmulas, tenemos que β puede ser de la forma $G \vee H$, $G \longrightarrow H$, $\neg(\neg G)$ o $\neg(G \wedge H)$ para fórmulas G y H cualesquiera. Probemos que, para cada tipo de fórmula β perteneciente a S , o bien su componente β_1 pertenece a S o bien su componente β_2 pertenece a S .

- *Fórmula del tipo $G \vee H$* : Sus componentes disyuntivas son G y H . Por la cuarta condición de la definición de conjunto de Hintikka, obtenemos que si $G \vee H$ pertenece a S , entonces o bien G está en S o bien H está en S , lo que prueba este caso.

- *Fórmula del tipo $G \longrightarrow H$* : Sus componentes disyuntivas son $\neg G$ y H . Por la quinta condición de la definición de conjunto de Hintikka, obtenemos que si $G \longrightarrow H$ pertenece a S , entonces o bien $\neg G$ pertenece al conjunto o bien H pertenece al conjunto, lo que prueba este caso.

- *Fórmula del tipo $\neg(\neg G)$* : Sus componentes conjuntivas son ambas G . Por la sexta condición de la definición de conjunto de Hintikka, obtenemos que si $\neg(\neg G)$ pertenece a S , entonces G pertenece al conjunto. De este modo, por la regla de introducción a la disyunción, se prueba que o bien una de las componentes está en el conjunto o bien lo está la otra pues, en este caso, coinciden.

- *Fórmula del tipo $\neg(G \wedge H)$* : Sus componentes conjuntivas son $\neg G$ y $\neg H$. Por la séptima condición de la definición de conjunto de Hintikka, obtenemos que si $\neg(G \wedge H)$ pertenece a S , entonces o bien $\neg G$ pertenece al conjunto o bien $\neg H$ pertenece

al conjunto, lo que prueba este caso.

2) \implies 1)

Supongamos que se verifican las condiciones del enunciado del lema:

- \perp no pertenece a S .
- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 se verifica que si la fórmula pertenece a S , entonces α_1 y α_2 también.
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 se verifica que si la fórmula pertenece a S , entonces o bien β_1 pertenece a S o bien β_2 pertenece a S .

Vamos a probar que S es un conjunto de Hintikka.

Por la definición de conjunto de Hintikka, es suficiente probar las siguientes condiciones:

1. $\perp \notin S$.
2. Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
3. Si $G \wedge H \in S$, entonces $G \in S$ y $H \in S$.
4. Si $G \vee H \in S$, entonces $G \in S$ o $H \in S$.
5. Si $G \rightarrow H \in S$, entonces $\neg G \in S$ o $H \in S$.
6. Si $\neg(\neg G) \in S$, entonces $G \in S$.
7. Si $\neg(G \wedge H) \in S$, entonces $\neg G \in S$ o $\neg H \in S$.
8. Si $\neg(G \vee H) \in S$, entonces $\neg G \in S$ y $\neg H \in S$.
9. Si $\neg(G \rightarrow H) \in S$, entonces $G \in S$ y $\neg H \in S$.

En primer lugar se observa que, por hipótesis, se verifican las dos primeras condiciones de la definición de conjunto de Hintikka. Veamos que, en efecto, se cumplen las demás.

- 3) Supongamos que $G \wedge H$ está en S para fórmulas G y H cualesquiera. Por definición, $G \wedge H$ es una fórmula de tipo α con componentes G y H . Por lo tanto, por hipótesis se cumple que G y H están en S .
- 4) Supongamos que $G \vee H$ está en S para fórmulas G y H cualesquiera. Por definición, $G \vee H$ es una fórmula de tipo β con componentes G y H . Por lo tanto, por hipótesis se cumple que o bien G está en S o bien H está en S .
- 5) Supongamos que $G \longrightarrow H$ está en S para fórmulas G y H cualesquiera. Por definición, $G \longrightarrow H$ es una fórmula de tipo β con componentes $\neg G$ y H . Por lo tanto, por hipótesis se cumple que o bien $\neg G$ está en S o bien H está en S .
- 6) Supongamos que $\neg(\neg G)$ está en S para una fórmula G cualquiera. Por definición, $\neg(\neg G)$ es una fórmula de tipo α cuyas componentes son ambas G . Por lo tanto, por hipótesis se cumple que G está en S .
- 7) Supongamos que $\neg(G \wedge H)$ está en S para fórmulas G y H cualesquiera. Por definición, $\neg(G \wedge H)$ es una fórmula de tipo β con componentes $\neg G$ y $\neg H$. Por lo tanto, por hipótesis se cumple que o bien $\neg G$ está en S o bien $\neg H$ está en S .
- 8) Supongamos que $\neg(G \vee H)$ está en S para fórmulas G y H cualesquiera. Por definición, $\neg(G \vee H)$ es una fórmula de tipo α con componentes $\neg G$ y $\neg H$. Por lo tanto, por hipótesis se cumple que $\neg G$ y $\neg H$ están en S .
- 9) Supongamos que $\neg(G \longrightarrow H)$ está en S para fórmulas G y H cualesquiera. Por definición, $\neg(G \longrightarrow H)$ es una fórmula de tipo α con componentes G y $\neg H$. Por lo tanto, por hipótesis se cumple que G y $\neg H$ están en S .

Por tanto, queda probado el resultado. □

Para probar de manera detallada el lema en Isabelle vamos a demostrar cada una de las implicaciones de la equivalencia por separado.

La primera implicación del lema se basa en dos lemas auxiliares. El primero de ellos prueba que la tercera, sexta, octava y novena condición de la definición de conjunto de Hintikka son suficientes para probar que para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 se verifica que si la fórmula pertenece al conjunto S , entonces α_1 y α_2 también. Su demostración detallada en Isabelle se muestra a continuación.

lemma Hintikka-alt1Con:

assumes $(\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$
 $\wedge (\forall G. \neg(\neg G) \in S \longrightarrow G \in S)$
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S)$
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \longrightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S)$

shows $\text{Con } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$

proof (*rule implI*)

assume $\text{Con } F \ G \ H$

then have $F = G \wedge H \vee$

$((\exists G1 \ H1. F = \neg (G1 \vee H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1) \vee$

$(\exists H2. F = \neg (G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg (\neg G) \wedge H = G)$

by (*simp only: con-dis-simps(1)*)

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$

proof (*rule disjE*)

assume $F = G \wedge H$

have $\forall G \ H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$

using *assms* **by** (*rule conjunct1*)

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$

using $\langle F = G \wedge H \rangle$ **by** (*iprover elim: allE*)

next

assume $(\exists G1 \ H1. F = \neg (G1 \vee H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1) \vee$

$((\exists H2. F = \neg (G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg (\neg G) \wedge H = G)$

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$

proof (*rule disjE*)

assume $E1: \exists G1 \ H1. F = \neg (G1 \vee H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1$

obtain $G1 \ H1$ **where** $A1: F = \neg (G1 \vee H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1$

using $E1$ **by** (*iprover elim: exE*)

then have $F = \neg (G1 \vee H1)$

by (*rule conjunct1*)

have $G = \neg G1$

using $A1$ **by** (*iprover elim: conjunct1*)

have $H = \neg H1$

using $A1$ **by** (*iprover elim: conjunct1*)

have $\forall G \ H. \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S$

using *assms* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$

using $\langle F = \neg (G1 \vee H1) \rangle \langle G = \neg G1 \rangle \langle H = \neg H1 \rangle$ **by** (*iprover elim: allE*)

next

assume $(\exists H2. F = \neg (G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg (\neg G) \wedge H = G$

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$

proof (*rule disjE*)

assume $E2: \exists H2. F = \neg (G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2$

```

obtain  $H2$  where  $A2:F = \neg (G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2$ 
  using  $E2$  by (rule exE)
have  $F = \neg (G \rightarrow H2)$ 
  using  $A2$  by (rule conjunct1)
have  $H = \neg H2$ 
  using  $A2$  by (rule conjunct2)
have  $\forall G H. \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S$ 
  using assms by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
thus  $F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
  using  $\langle F = \neg (G \rightarrow H2) \rangle \langle H = \neg H2 \rangle$  by (iprover elim: allE)
next
assume  $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
then have  $F = \neg (\neg G)$ 
  by (rule conjunct1)
have  $H = G$ 
  using  $\langle F = \neg (\neg G) \wedge H = G \rangle$  by (rule conjunct2)
have  $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ 
  using assms by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
then have  $\neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ 
  by (rule allE)
then have  $F \in S \longrightarrow G \in S$ 
  by (simp only: \langle F = \neg (\neg G) \rangle)
then have  $F \in S \longrightarrow G \in S \wedge G \in S$ 
  by (simp only: conj-absorb)
thus  $F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
  by (simp only: \langle H=G \rangle)
qed
qed
qed
qed

```

Por otro lado, el segundo lema auxiliar prueba que la cuarta, quinta, sexta y séptima condición de la definición de conjunto de Hintikka son suficientes para probar que para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 se verifica que si la fórmula pertenece al conjunto S , entonces o bien β_1 pertenece al conjunto o bien β_2 pertenece al conjunto. Veamos su prueba detallada en Isabelle/HOL.

lemma *Hintikka-alt1Dis*:

```

assumes  $(\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S)$ 

```

shows $\text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$

proof (*rule impl*)

assume $\text{Dis } F \ G \ H$

then have $F = G \vee H \vee$

$(\exists G1 \ H1. F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1) \vee$

$(\exists G2 \ H2. F = \neg (G2 \wedge H2) \wedge G = \neg G2 \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg (\neg G) \wedge H = G$

by (*simp only: con-dis-simps(2)*)

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$

proof (*rule disjE*)

assume $F = G \vee H$

have $\forall G \ H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$

using *assms* **by** (*rule conjunct1*)

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$

using $\langle F = G \vee H \rangle$ **by** (*iprover elim: allE*)

next

assume $(\exists G1 \ H1. F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1) \vee$

$(\exists G2 \ H2. F = \neg (G2 \wedge H2) \wedge G = \neg G2 \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg (\neg G) \wedge H = G$

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$

proof (*rule disjE*)

assume $E1: \exists G1 \ H1. F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1$

obtain $G1 \ H1$ **where** $A1: F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1$

using $E1$ **by** (*iprover elim: exE*)

have $F = G1 \rightarrow H1$

using $A1$ **by** (*rule conjunct1*)

have $G = \neg G1$

using $A1$ **by** (*iprover elim: conjunct1*)

have $H = H1$

using $A1$ **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have $\forall G \ H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S$

using *assms* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$

using $\langle F = G1 \rightarrow H1 \rangle \langle G = \neg G1 \rangle \langle H = H1 \rangle$ **by** (*iprover elim: allE*)

next

assume $(\exists G2 \ H2. F = \neg (G2 \wedge H2) \wedge G = \neg G2 \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg (\neg G) \wedge H = G$

thus $F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$

proof (*rule disjE*)

assume $E2: \exists G2 \ H2. F = \neg (G2 \wedge H2) \wedge G = \neg G2 \wedge H = \neg H2$

```

obtain G2 H2 where A2:F =  $\neg (G2 \wedge H2) \wedge G = \neg G2 \wedge H = \neg H2$ 
  using E2 by (iprover elim: exE)
have F =  $\neg (G2 \wedge H2)$ 
  using A2 by (rule conjunct1)
have G =  $\neg G2$ 
  using A2 by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have H =  $\neg H2$ 
  using A2 by (iprover elim: conjunct1)
have  $\forall G H. \neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S$ 
  using assms by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
thus  $F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
  using  $\langle F = \neg(G2 \wedge H2) \rangle \langle G = \neg G2 \rangle \langle H = \neg H2 \rangle$  by (iprover elim: allE)
next
assume  $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
then have  $F = \neg (\neg G)$ 
  by (rule conjunct1)
have  $H = G$ 
  using  $\langle F = \neg (\neg G) \wedge H = G \rangle$  by (rule conjunct2)
have  $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ 
  using assms by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
then have  $\neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ 
  by (rule allE)
then have  $F \in S \longrightarrow G \in S$ 
  by (simp only:  $\langle F = \neg (\neg G) \rangle$ )
then have  $F \in S \longrightarrow G \in S \vee G \in S$ 
  by (simp only: disj-absorb)
thus  $F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
  by (simp only:  $\langle H = G \rangle$ )
qed
qed
qed
qed

```

Finalmente, podemos demostrar detalladamente esta primera implicación de la equivalencia del lema en Isabelle.

lemma *Hintikka-alt1*:

assumes *Hintikka S*

shows $\perp \notin S$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$

$\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S)$

proof –

```

have Hk: ( $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S))$ 
  using assms by (rule auxEq)
then have C1:  $\perp \notin S$ 
  by (rule conjunct1)
have C2:  $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ 
  using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have C3:  $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
proof (rule allI)+
  fix F G H
  have C31:  $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
    using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
  have C32:  $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ 
    using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
  have C33:  $\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S$ 
    using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
  have C34:  $\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S$ 
    using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
  have ( $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ )
     $\wedge (\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S)$ 
     $\wedge (\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
     $\wedge (\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
    using C31 C32 C33 C34 by (iprover intro: conjI)
  thus  $\text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
    by (rule Hintikka-alt1Con)
qed
have C4:  $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
proof (rule allI)+
  fix F G H
  have C41:  $\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
    using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
  have C42:  $\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S$ 

```

```

using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have C43:  $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ 
using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have C44:  $\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S$ 
using Hk by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have ( $\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ )
   $\wedge$  ( $\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S$ )
   $\wedge$  ( $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ )
   $\wedge$  ( $\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S$ )
using C41 C42 C43 C44 by (iprover intro: conjI)
thus Dis F G H  $\longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
by (rule Hintikka-alt1Dis)
qed
show  $\perp \notin S$ 
 $\wedge$  ( $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ )
 $\wedge$  ( $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ )
 $\wedge$  ( $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ )
using C1 C2 C3 C4 by (iprover intro: conjI)
qed

```

Por último, probamos la implicación recíproca de forma detallada en Isabelle mediante el siguiente lema.

lemma Hintikka-alt2:

```

assumes  $\perp \notin S$ 
 $\wedge$  ( $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ )
 $\wedge$  ( $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ )
 $\wedge$  ( $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ )
shows Hintikka S
proof –
have Con:  $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
using assms by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have Dis:  $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
using assms by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have  $\perp \notin S$ 
 $\wedge$  ( $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S$ )
 $\wedge$  ( $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S$ )

```

```

 $\wedge (\forall G H. \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
proof –
  have C1:  $\perp \notin S$ 
    using assms by (rule conjunct1)
  have C2:  $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ 
    using assms by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
  have C3:  $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
proof (rule allI) +
  fix  $G H$ 
  show  $G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
proof (rule impI)
  assume  $G \wedge H \in S$ 
  have  $\text{Con } (G \wedge H) G H$ 
    by (simp only: Con.intros(1))
  have  $\text{Con } (G \wedge H) G H \longrightarrow G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
    using  $\text{Con}$  by (iprover elim: allE)
  then have  $G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S$ 
    using  $\langle \text{Con } (G \wedge H) G H \rangle$  by (rule mp)
  thus  $G \in S \wedge H \in S$ 
    using  $\langle G \wedge H \in S \rangle$  by (rule mp)
  qed
qed
have C4:  $\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
proof (rule allI) +
  fix  $G H$ 
  show  $G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
proof (rule impI)
  assume  $G \vee H \in S$ 
  have  $\text{Dis } (G \vee H) G H$ 
    by (simp only: Dis.intros(1))
  have  $\text{Dis } (G \vee H) G H \longrightarrow G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
    using  $\text{Dis}$  by (iprover elim: allE)
  then have  $G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S$ 
    using  $\langle \text{Dis } (G \vee H) G H \rangle$  by (rule mp)
  thus  $G \in S \vee H \in S$ 
    using  $\langle G \vee H \in S \rangle$  by (rule mp)
  qed
qed
have C5:  $\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S$ 
proof (rule allI) +

```

```

fix G H
show  $G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S$ 
proof (rule impI)
  assume  $G \rightarrow H \in S$ 
  have  $\text{Dis } (G \rightarrow H) (\neg G) H$ 
    by (simp only: Dis.intros(2))
  have  $\text{Dis } (G \rightarrow H) (\neg G) H \longrightarrow G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S$ 
    using Dis by (iprover elim: allE)
  then have  $G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S$ 
    using  $\langle \text{Dis } (G \rightarrow H) (\neg G) H \rangle$  by (rule mp)
  thus  $\neg G \in S \vee H \in S$ 
    using  $\langle G \rightarrow H \in S \rangle$  by (rule mp)
qed
qed
have C6:  $\forall G. \neg(\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ 
proof (rule allI)
  fix G
  show  $\neg(\neg G) \in S \longrightarrow G \in S$ 
  proof (rule impI)
    assume  $\neg(\neg G) \in S$ 
    have  $\text{Con } (\neg(\neg G)) G G$ 
      by (simp only: Con.intros(4))
    have  $\text{Con } (\neg(\neg G)) G G \longrightarrow (\neg(\neg G)) \in S \longrightarrow G \in S \wedge G \in S$ 
      using Con by (iprover elim: allE)
    then have  $(\neg(\neg G)) \in S \longrightarrow G \in S \wedge G \in S$ 
      using  $\langle \text{Con } (\neg(\neg G)) G G \rangle$  by (rule mp)
    then have  $G \in S \wedge G \in S$ 
      using  $\langle \neg(\neg G) \in S \rangle$  by (rule mp)
    thus  $G \in S$ 
      by (simp only: conj-absorb)
  qed
qed
have C7:  $\forall G H. \neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S$ 
proof (rule allI)+
  fix G H
  show  $\neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S$ 
  proof (rule impI)
    assume  $\neg(G \wedge H) \in S$ 
    have  $\text{Dis } (\neg(G \wedge H)) (\neg G) (\neg H)$ 
      by (simp only: Dis.intros(3))

```

```

have Dis ( $\neg(G \wedge H)$ ) ( $\neg G$ ) ( $\neg H$ )  $\longrightarrow \neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S$ 
  using Dis by (iprover elim: allE)
then have  $\neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S$ 
  using (Dis ( $\neg(G \wedge H)$ ) ( $\neg G$ ) ( $\neg H$ )) by (rule mp)
thus  $\neg G \in S \vee \neg H \in S$ 
  using ( $\neg(G \wedge H) \in S$ ) by (rule mp)
qed
qed
have C8:  $\forall G H. \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S$ 
proof (rule allI)+
  fix  $G H$ 
  show  $\neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S$ 
  proof (rule impI)
    assume  $\neg(G \vee H) \in S$ 
    have Con ( $\neg(G \vee H)$ ) ( $\neg G$ ) ( $\neg H$ )
      by (simp only: Con.intros(2))
    have Con ( $\neg(G \vee H)$ ) ( $\neg G$ ) ( $\neg H$ )  $\longrightarrow \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S$ 
      using Con by (iprover elim: allE)
    then have  $\neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S$ 
      using (Con ( $\neg(G \vee H)$ ) ( $\neg G$ ) ( $\neg H$ )) by (rule mp)
    thus  $\neg G \in S \wedge \neg H \in S$ 
      using ( $\neg(G \vee H) \in S$ ) by (rule mp)
  qed
qed
have C9:  $\forall G H. \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S$ 
proof (rule allI)+
  fix  $G H$ 
  show  $\neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S$ 
  proof (rule impI)
    assume  $\neg(G \rightarrow H) \in S$ 
    have Con ( $\neg(G \rightarrow H)$ )  $G$  ( $\neg H$ )
      by (simp only: Con.intros(3))
    have Con ( $\neg(G \rightarrow H)$ )  $G$  ( $\neg H$ )  $\longrightarrow \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S$ 
      using Con by (iprover elim: allE)
    then have  $\neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S$ 
      using (Con ( $\neg(G \rightarrow H)$ )  $G$  ( $\neg H$ )) by (rule mp)
    thus  $G \in S \wedge \neg H \in S$ 
      using ( $\neg(G \rightarrow H) \in S$ ) by (rule mp)
  qed
qed

```

```

have A:  $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S)$ 
  using C1 C2 C3 C4 C5 by (iprover intro: conjI)
have B:  $(\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
  using C6 C7 C8 C9 by (iprover intro: conjI)
have ( $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S))$ 
 $\wedge ((\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S))$ 
  using A B by (rule conjI)
thus  $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow G \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \vee \neg H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \neg G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow G \in S \wedge \neg H \in S)$ 
  by (iprover intro: conj-assoc)
qed
thus Hintikka S
unfolding Hintikka-def by this
qed

```

En conclusión, el lema completo se demuestra detalladamente en Isabelle/HOL como sigue.

```

lemma Hintikka S = ( $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$ 

```

$\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S))$
proof (*rule iff1*)
 assume *Hintikka S*
 thus $(\perp \notin S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S))$
 by (*rule Hintikka-alt1*)
next
 assume $(\perp \notin S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S))$
 thus *Hintikka S*
 by (*rule Hintikka-alt2*)
qed

Por último, veamos su demostración automática.

lemma *Hintikka-alt: Hintikka S =* $(\perp \notin S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \wedge H \in S)$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow G \in S \vee H \in S))$
apply(*simp add: Hintikka-def con-dis-simps*)
apply(*rule iff1*)
subgoal by *blast*
subgoal by *safe metis+*
done

Capítulo 2

Propiedad de consistencia proposicional

En este capítulo se define la *propiedad de consistencia proposicional* para una colección de conjuntos de fórmulas proposicionales y se caracteriza la propiedad de consistencia proposicional mediante la notación uniforme.

Definición 2.0.1 Sea C una colección de conjuntos de fórmulas proposicionales. Decimos que C verifica la propiedad de consistencia proposicional si, para todo conjunto S perteneciente a la colección, se verifica:

1. $\perp \notin S$.
2. Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
3. Si $F \wedge G \in S$, entonces el conjunto $\{F, G\} \cup S$ pertenece a C .
4. Si $F \vee G \in S$, entonces o bien el conjunto $\{F\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{G\} \cup S$ pertenece a C .
5. Si $F \rightarrow G \in S$, entonces o bien el conjunto $\{\neg F\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{G\} \cup S$ pertenece a C .
6. Si $\neg(\neg F) \in S$, entonces el conjunto $\{F\} \cup S$ pertenece a C .
7. Si $\neg(F \wedge G) \in S$, entonces o bien el conjunto $\{\neg F\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{\neg G\} \cup S$ pertenece a C .
8. Si $\neg(F \vee G) \in S$, entonces el conjunto $\{\neg F, \neg G\} \cup S$ pertenece a C .
9. Si $\neg(F \rightarrow G) \in S$, entonces el conjunto $\{F, \neg G\} \cup S$ pertenece a C .

Veamos, a continuación, su formalización en Isabelle mediante el tipo *definition*.

```
definition pcp C  $\equiv$  ( $\forall S \in C.$ 
   $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall F G. F \wedge G \in S \longrightarrow \{F, G\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G. F \vee G \in S \longrightarrow \{F\} \cup S \in C \vee \{G\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G. F \rightarrow G \in S \longrightarrow \{\neg F\} \cup S \in C \vee \{G\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F. \neg (\neg F) \in S \longrightarrow \{F\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G. \neg (F \wedge G) \in S \longrightarrow \{\neg F\} \cup S \in C \vee \{\neg G\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G. \neg (F \vee G) \in S \longrightarrow \{\neg F, \neg G\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G. \neg (F \rightarrow G) \in S \longrightarrow \{F, \neg G\} \cup S \in C))$ 
```

Observando la definición anterior, se prueba fácilmente que la colección trivial formada por el conjunto vacío de fórmulas verifica la propiedad de consistencia proposicional.

```
lemma pcp  $\{\{\}\}$ 
unfolding pcp-def by simp
```

Del mismo modo, aplicando la definición, se demuestra que los siguientes ejemplos de colecciones de conjuntos de fórmulas proposicionales verifican igualmente la propiedad.

```
lemma pcp  $\{\{\text{Atom } 0\}\}$ 
unfolding pcp-def by simp
```

```
lemma pcp  $\{\{(\neg (\text{Atom } 1)) \rightarrow \text{Atom } 2\},$ 
 $\{((\neg (\text{Atom } 1)) \rightarrow \text{Atom } 2), \neg (\neg (\text{Atom } 1))\},$ 
 $\{((\neg (\text{Atom } 1)) \rightarrow \text{Atom } 2), \neg (\neg (\text{Atom } 1)), \text{Atom } 1\}\}$ 
unfolding pcp-def by auto
```

Por último, en contraposición podemos ilustrar un caso de colección que no verifique la propiedad con la siguiente colección obtenida al modificar el último ejemplo. De esta manera, aunque la colección verifique correctamente la quinta condición de la definición, no cumplirá la sexta.

```
lemma  $\neg$  pcp  $\{\{(\neg (\text{Atom } 1)) \rightarrow \text{Atom } 2\},$ 
 $\{((\neg (\text{Atom } 1)) \rightarrow \text{Atom } 2), \neg (\neg (\text{Atom } 1))\}\}$ 
unfolding pcp-def by auto
```

Por otra parte, veamos un resultado que permite la caracterización de la propiedad de consistencia proposicional mediante la notación uniforme.

Lema 2.0.2 (Caracterización de P.C.P mediante la notación uniforme) *Dada una colección C de conjuntos de fórmulas proposicionales, son equivalentes:*

1. C verifica la propiedad de consistencia proposicional.
2. Para cualquier conjunto de fórmulas S de la colección, se verifican las condiciones:
 - \perp no pertenece a S .
 - Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
 - Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C .
 - Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a S , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C .

En Isabelle/HOL se formaliza el resultado como sigue.

lemma $pcp\ C = (\forall S \in C. \perp \notin S$
 $\wedge (\forall k. Atom\ k \in S \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in S \longrightarrow False)$
 $\wedge (\forall F\ G\ H. Con\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall F\ G\ H. Dis\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C))$
oops

En primer lugar, veamos la demostración del lema.

Demostración: Para probar la equivalencia, veamos cada una de las implicaciones por separado.

1) \implies 2)

Supongamos que C es una colección de conjuntos de fórmulas proposicionales que verifica la propiedad de consistencia proposicional. Vamos a probar que, en efecto, cumple las condiciones de 2).

Consideremos un conjunto de fórmulas S perteneciente a la colección C . Por hipótesis, de la definición de propiedad de consistencia proposicional obtenemos que S verifica las siguientes condiciones:

1. $\perp \notin S$.
2. Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
3. Si $G \wedge H \in S$, entonces el conjunto $\{G, H\} \cup S$ pertenece a C .

4. Si $G \vee H \in S$, entonces o bien el conjunto $\{G\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{H\} \cup S$ pertenece a C .
5. Si $G \rightarrow H \in S$, entonces o bien el conjunto $\{\neg G\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{H\} \cup S$ pertenece a C .
6. Si $\neg(\neg G) \in S$, entonces el conjunto $\{G\} \cup S$ pertenece a C .
7. Si $\neg(G \wedge H) \in S$, entonces o bien el conjunto $\{\neg G\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{\neg H\} \cup S$ pertenece a C .
8. Si $\neg(G \vee H) \in S$, entonces el conjunto $\{\neg G, \neg H\} \cup S$ pertenece a C .
9. Si $\neg(G \rightarrow H) \in S$, entonces el conjunto $\{G, \neg H\} \cup S$ pertenece a C .

Las dos primeras condiciones se corresponden con los dos primeros resultados que queríamos demostrar. De este modo, falta probar:

- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C .
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a S , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C .

En primer lugar, vamos a deducir el primer resultado correspondiente a las fórmulas de tipo α de las condiciones tercera, sexta, octava y novena de la definición de propiedad de consistencia proposicional. En efecto, consideremos una fórmula de tipo α cualquiera con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S . Sabemos que la fórmula es de la forma $G \wedge H$, $\neg(\neg G)$, $\neg(G \vee H)$ o $\neg(G \rightarrow H)$ para ciertas fórmulas G y H . Vamos a probar que para cada caso se cumple que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a la colección:

- *Fórmula de tipo $G \wedge H$* : En este caso, sus componentes conjuntivas α_1 y α_2 son G y H respectivamente. Luego tenemos que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C por la tercera condición de la definición de propiedad de consistencia proposicional.
- *Fórmula de tipo $\neg(\neg G)$* : En este caso, sus componentes conjuntivas α_1 y α_2 son ambas G . Como el conjunto $\{\alpha_1\} \cup S$ es equivalente a $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ ya que α_1 y α_2 son iguales, tenemos que este último pertenece a C por la sexta condición de la definición de propiedad de consistencia proposicional.
- *Fórmula de tipo $\neg(G \vee H)$* : En este caso, sus componentes conjuntivas α_1 y α_2 son $\neg G$ y $\neg H$ respectivamente. Luego tenemos que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C por la octava condición de la definición de propiedad de consistencia proposicional.

• *Fórmula de tipo $\neg(G \longrightarrow H)$* : En este caso, sus componentes conjuntivas α_1 y α_2 son G y $\neg H$ respectivamente. Luego tenemos que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C por la novena condición de la definición de propiedad de consistencia proposicional.

Finalmente, el resultado correspondiente a las fórmulas de tipo β se obtiene de las condiciones cuarta, quinta, sexta y séptima de la definición de propiedad de consistencia proposicional. Para probarlo, consideremos una fórmula cualquiera de tipo β perteneciente al conjunto S y cuyas componentes disyuntivas son β_1 y β_2 . Por simplificación, sabemos que dicha fórmula es de la forma $G \vee H$, $G \longrightarrow H$, $\neg(\neg G)$ o $\neg(G \wedge H)$ para ciertas fórmulas G y H . Deduzcamos que, en efecto, tenemos que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ está en C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ está en C .

• *Fórmula de tipo $G \vee H$* : En este caso, sus componentes disyuntivas β_1 y β_2 son G y H respectivamente. Luego tenemos que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C por la cuarta condición de la definición de propiedad de consistencia proposicional.

• *Fórmula de tipo $G \longrightarrow H$* : En este caso, sus componentes disyuntivas β_1 y β_2 son $\neg G$ y H respectivamente. Luego tenemos que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C por la quinta condición de la definición de propiedad de consistencia proposicional.

• *Fórmula de tipo $\neg(\neg G)$* : En este caso, sus componentes disyuntivas β_1 y β_2 son ambas G . Luego tenemos que, en particular, el conjunto $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C por la sexta condición de la definición de propiedad de consistencia proposicional. Por tanto, se verifica que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ está en C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ está en C .

• *Fórmula de tipo $\neg(G \wedge H)$* : En este caso, sus componentes disyuntivas β_1 y β_2 son $\neg G$ y $\neg H$ respectivamente. Luego tenemos que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C por la séptima condición de la definición de propiedad de consistencia proposicional.

De este modo, queda probada la primera implicación de la equivalencia. Veamos la prueba de la implicación contraria.

2) \implies 1)

Supongamos que, dada una colección de conjuntos de fórmulas proposicionales C , para cualquier conjunto S de la colección se verifica:

- \perp no pertenece a S .
- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C .

- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a S , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C .

Probemos que C verifica la propiedad de consistencia proposicional. Por la definición de la propiedad basta probar que, dado un conjunto cualquiera S perteneciente a C , se verifican las siguientes condiciones:

1. $\perp \notin S$.
2. Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
3. Si $G \wedge H \in S$, entonces el conjunto $\{G, H\} \cup S$ pertenece a C .
4. Si $G \vee H \in S$, entonces o bien el conjunto $\{G\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{H\} \cup S$ pertenece a C .
5. Si $G \rightarrow H \in S$, entonces o bien el conjunto $\{\neg G\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{H\} \cup S$ pertenece a C .
6. Si $\neg(\neg G) \in S$, entonces el conjunto $\{G\} \cup S$ pertenece a C .
7. Si $\neg(G \wedge H) \in S$, entonces o bien el conjunto $\{\neg G\} \cup S$ pertenece a C , o bien el conjunto $\{\neg H\} \cup S$ pertenece a C .
8. Si $\neg(G \vee H) \in S$, entonces el conjunto $\{\neg G, \neg H\} \cup S$ pertenece a C .
9. Si $\neg(G \rightarrow H) \in S$, entonces el conjunto $\{G, \neg H\} \cup S$ pertenece a C .

En primer lugar, se observa que por hipótesis se cumplen las dos primeras condiciones de la definición.

Por otra parte, vamos a deducir las condiciones tercera, sexta, octava y novena de la definición de la propiedad de consistencia proposicional a partir de la hipótesis sobre las fórmulas de tipo α .

- 3): Supongamos que la fórmula $G \wedge H$ pertenece a S para fórmulas G y H cualesquiera. Observemos que se trata de una fórmula de tipo α de componentes conjuntivas G y H . Luego, por hipótesis, tenemos que $\{G, H\} \cup S$ pertenece a C .
- 6): Supongamos que la fórmula $\neg(\neg G)$ pertenece a S para la fórmula G cualquiera. Observemos que se trata de una fórmula de tipo α cuyas componentes conjuntivas son ambas la fórmula G . Por hipótesis, tenemos que el conjunto $\{G, G\} \cup S$ pertenece a C y, puesto que dicho conjunto es equivalente a $\{G\} \cup S$, tenemos el resultado.

- 8): Supongamos que la fórmula $\neg(G \vee H)$ pertenece a S para fórmulas G y H cualesquiera. Observemos que se trata de una fórmula de tipo α de componentes conjuntivas $\neg G$ y $\neg H$. Luego, por hipótesis, tenemos que $\{\neg G, \neg H\} \cup S$ pertenece a C .
- 9): Supongamos que la fórmula $\neg(G \longrightarrow H)$ pertenece a S para fórmulas G y H cualesquiera. Observemos que se trata de una fórmula de tipo α de componentes conjuntivas G y $\neg H$. Luego, por hipótesis, tenemos que $\{G, \neg H\} \cup S$ pertenece a C .

Finalmente, deduzcamos el resto de condiciones de la definición de propiedad de consistencia proposicional a partir de la hipótesis referente a las fórmulas de tipo β .

- 4): Supongamos que la fórmula $G \vee H$ pertenece a S para fórmulas G y H cualesquiera. Observemos que se trata de una fórmula de tipo β de componentes disyuntivas G y H . Luego, por hipótesis, tenemos que o bien $\{G\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{H\} \cup S$ pertenece a C .
- 5): Supongamos que la fórmula $G \longrightarrow H$ pertenece a S para fórmulas G y H cualesquiera. Observemos que se trata de una fórmula de tipo β de componentes disyuntivas $\neg G$ y H . Luego, por hipótesis, tenemos que o bien $\{\neg G\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{H\} \cup S$ pertenece a C .
- 7): Supongamos que la fórmula $\neg(G \wedge H)$ pertenece a S para fórmulas G y H cualesquiera. Observemos que se trata de una fórmula de tipo β de componentes disyuntivas $\neg G$ y $\neg H$. Luego, por hipótesis, tenemos que o bien $\{\neg G\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{\neg H\} \cup S$ pertenece a C .

De este modo, hemos probado a partir de la hipótesis todas las condiciones que garantizan que la colección C cumple la propiedad de consistencia proposicional. Por lo tanto, queda demostrado el resultado. □

Para probar este resultado de manera detallada en Isabelle vamos a demostrar cada una de las implicaciones de la equivalencia por separado. La primera implicación del lema se basa en dos lemas auxiliares. El primero de ellos deduce la condición de 2) sobre fórmulas de tipo α a partir de las condiciones tercera, sexta, octava y novena de la definición de propiedad de consistencia proposicional. Su demostración detallada en Isabelle se muestra a continuación.

lemma *pcp-alt1Con*:

assumes $(\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall G. \neg(\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C)$
shows $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

proof –

have C1: $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

using *assms* **by** (*rule conjunct1*)

have C2: $\forall G. \neg(\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$

using *assms* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have C3: $\forall G H. \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$

using *assms* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have C4: $\forall G H. \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C$

using *assms* **by** (*iprover elim: conjunct2*)

show $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

proof (*rule allI*) +

fix $F G H$

show $\text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

proof (*rule impI*)

assume $\text{Con } F G H$

then have $F = G \wedge H \vee$

$((\exists G1 H1. F = \neg(G1 \vee H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1) \vee$

$(\exists H2. F = \neg(G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg(\neg G) \wedge H = G)$

by (*simp only: con-dis-simps(1)*)

thus $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

proof (*rule disjE*)

assume $F = G \wedge H$

show $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

using C1 $\langle F = G \wedge H \rangle$ **by** (*iprover elim: allE*)

next

assume $(\exists G1 H1. F = \neg(G1 \vee H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1) \vee$

$(\exists H2. F = \neg(G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg(\neg G) \wedge H = G$

thus $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

proof (*rule disjE*)

assume $E1: \exists G1 H1. F = \neg(G1 \vee H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1$

obtain $G1 H1$ **where** $A1: F = \neg(G1 \vee H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1$

using $E1$ **by** (*iprover elim: exE*)

have $F = \neg(G1 \vee H1)$

using $A1$ **by** (*rule conjunct1*)

have $G = \neg G1$

```

    using A1 by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
  have H =  $\neg$  H1
    using A1 by (iprover elim: conjunct2)
  show  $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
    using C3  $\langle F = \neg (G1 \vee H1) \rangle \langle G = \neg G1 \rangle \langle H = \neg H1 \rangle$  by (iprover elim: allE)
next
  assume  $(\exists H2. F = \neg (G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2) \vee$ 
     $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
  thus  $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
  proof (rule disjE)
    assume E2:  $\exists H2. F = \neg (G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2$ 
    obtain H2 where A2:  $F = \neg (G \rightarrow H2) \wedge H = \neg H2$ 
      using E2 by (rule exE)
    have  $F = \neg (G \rightarrow H2)$ 
      using A2 by (rule conjunct1)
    have  $H = \neg H2$ 
      using A2 by (rule conjunct2)
    show  $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
      using C4  $\langle F = \neg (G \rightarrow H2) \rangle \langle H = \neg H2 \rangle$  by (iprover elim: allE)
  next
    assume A3:  $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
    then have  $F = \neg (\neg G)$ 
      by (rule conjunct1)
    have  $H = G$ 
      using A3 by (rule conjunct2)
    have  $F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$ 
      using C2  $\langle F = \neg (\neg G) \rangle$  by (iprover elim: allE)
    then have  $F \in S \longrightarrow \{G, G\} \cup S \in C$ 
      by (simp only: insert-absorb2)
    thus  $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
      by (simp only:  $\langle H = G \rangle$ )
  qed
qed
qed
qed
qed
qed

```

Finalmente, el siguiente lema auxiliar deduce la condición de 2) sobre fórmulas de tipo β a partir de las condiciones cuarta, quinta, sexta y séptima de la definición de propiedad de consistencia proposicional.

lemma *pcp-alt1Dis*:

assumes $(\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall G. \neg(\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C)$
shows $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof –

have $C1: \forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$
using *assms* **by** (*rule conjunct1*)
have $C2: \forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$
using *assms* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)
have $C3: \forall G. \neg(\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$
using *assms* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)
have $C4: \forall G H. \neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$
using *assms* **by** (*iprover elim: conjunct2*)
show $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof (*rule allI*) +

fix $F G H$

show $\text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof (*rule impI*)

assume $\text{Dis } F G H$

then have $F = G \vee H \vee$

$(\exists G1 H1. F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1) \vee$

$(\exists G2 H2. F = \neg(G2 \wedge H2) \wedge G = \neg G2 \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg(\neg G) \wedge H = G$

by (*simp only: con-dis-simps(2)*)

thus $F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof (*rule disjE*)

assume $F = G \vee H$

show $F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

using $C1 \langle F = G \vee H \rangle$ **by** (*iprover elim: allE*)

next

assume $(\exists G1 H1. F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1) \vee$

$(\exists G2 H2. F = \neg(G2 \wedge H2) \wedge G = \neg G2 \wedge H = \neg H2) \vee$

$F = \neg(\neg G) \wedge H = G$

thus $F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof (*rule disjE*)

assume $E1: \exists G1 H1. F = (G1 \rightarrow H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1$

obtain $G1 H1$ **where** $A1: F = (G1 \rightarrow H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1$

using $E1$ **by** (*iprover elim: exE*)

```

have F = (G1 → H1)
  using A1 by (rule conjunct1)
have G = ¬ G1
  using A1 by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have H = H1
  using A1 by (iprover elim: conjunct2)
show F ∈ S → {G} ∪ S ∈ C ∨ {H} ∪ S ∈ C
  using C2 ⟨F = (G1 → H1)⟩ ⟨G = ¬ G1⟩ ⟨H = H1⟩ by (iprover elim: allE)
next
assume (∃ G2 H2. F = ¬ (G2 ∧ H2) ∧ G = ¬ G2 ∧ H = ¬ H2) ∨
  F = ¬ (¬ G) ∧ H = G
thus F ∈ S → {G} ∪ S ∈ C ∨ {H} ∪ S ∈ C
proof (rule disjE)
  assume E2: ∃ G2 H2. F = ¬ (G2 ∧ H2) ∧ G = ¬ G2 ∧ H = ¬ H2
  obtain G2 H2 where A2: F = ¬ (G2 ∧ H2) ∧ G = ¬ G2 ∧ H = ¬ H2
    using E2 by (iprover elim: exE)
  have F = ¬ (G2 ∧ H2)
    using A2 by (rule conjunct1)
  have G = ¬ G2
    using A2 by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
  have H = ¬ H2
    using A2 by (iprover elim: conjunct2)
  show F ∈ S → {G} ∪ S ∈ C ∨ {H} ∪ S ∈ C
    using C4 ⟨F = ¬ (G2 ∧ H2)⟩ ⟨G = ¬ G2⟩ ⟨H = ¬ H2⟩ by (iprover elim: allE)
next
assume A3: F = ¬ (¬ G) ∧ H = G
then have F = ¬ (¬ G)
  by (rule conjunct1)
have H = G
  using A3 by (rule conjunct2)
have F ∈ S → {G} ∪ S ∈ C
  using C3 ⟨F = ¬ (¬ G)⟩ by (iprover elim: allE)
then have F ∈ S → {G} ∪ S ∈ C ∨ {G} ∪ S ∈ C
  by (simp only: disj-absorb)
thus F ∈ S → {G} ∪ S ∈ C ∨ {H} ∪ S ∈ C
  by (simp only: ⟨H = G⟩)
qed
qed
qed
qed

```

qed
qed

De esta manera, mediante los anteriores lemas auxiliares podemos probar la primera implicación detalladamente en Isabelle.

lemma *pcp-alt1*:

assumes *pcp C*

shows $\forall S \in C. \perp \notin S$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

proof (*rule ballI*)

fix *S*

assume $S \in C$

have $(\forall S \in C.$

$\perp \notin S$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C))$

using *assms* **by** (*simp only: pcp-def*)

then have *pcpS*: $\perp \notin S$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C)$

using $(S \in C)$ **by** (*rule bspec*)

then have *C1*: $\perp \notin S$

by (*rule conjunct1*)

have *C2*: $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$

using *pcpS* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have *C3*: $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

using *pcpS* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

```

have C4:  $\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
  using pcpS by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have C5:  $\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
  using pcpS by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have C6:  $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$ 
  using pcpS by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have C7:  $\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$ 
  using pcpS by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have C8:  $\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$ 
  using pcpS by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have C9:  $\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C$ 
  using pcpS by (iprover elim: conjunct2)
have ( $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ )
 $\wedge$  ( $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C$ )
  using C3 C6 C8 C9 by (iprover intro: conjI)
then have Con:  $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
  by (rule pcp-alt1Con)
have ( $\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ )
 $\wedge$  ( $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$ )
 $\wedge$  ( $\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$ )
  using C4 C5 C6 C7 by (iprover intro: conjI)
then have Dis:  $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
  by (rule pcp-alt1Dis)
thus  $\perp \notin S$ 
 $\wedge$  ( $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ )
 $\wedge$  ( $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ )
 $\wedge$  ( $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ )
  using C1 C2 Con Dis by (iprover intro: conjI)
qed

```

Por otro lado, veamos la demostración detallada de la implicación recíproca de la equivalencia. Para ello, utilizaremos distintos lemas auxiliares para deducir cada una de las condiciones de la definición de propiedad de consistencia proposicional a partir de las hipótesis sobre las fórmulas de tipo α y β . En primer lugar, veamos los lemas que se deducen condiciones a partir de la hipótesis referente a las fórmulas de tipo α .

lemma pcp-alt2Con1:

assumes $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$
shows $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

```

proof (rule allI)+
  fix G H
  show  $G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
  proof (rule impI)
    assume  $G \wedge H \in S$ 
    then have  $\text{Con } (G \wedge H) \text{ } G \text{ } H$ 
      by (simp only: Con.intros(1))
    let ?F= $G \wedge H$ 
    have  $\text{Con } ?F \text{ } G \text{ } H \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
      using assms by (iprover elim: allE)
    then have  $?F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
      using (Con (G ∧ H) G H) by (rule mp)
    thus  $\{G, H\} \cup S \in C$ 
      using ((G ∧ H) ∈ S) by (rule mp)
  qed
qed

```

lemma pcp-alt2Con2:

```

assumes  $\forall F \text{ } G \text{ } H. \text{Con } F \text{ } G \text{ } H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
shows  $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$ 
proof (rule allI)
  fix G
  show  $\neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$ 
  proof (rule impI)
    assume  $\neg (\neg G) \in S$ 
    then have  $\text{Con } (\neg (\neg G)) \text{ } G \text{ } G$ 
      by (simp only: Con.intros(4))
    let ?F= $\neg (\neg G)$ 
    have  $\forall G \text{ } H. \text{Con } ?F \text{ } G \text{ } H \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
      using assms by (rule allE)
    then have  $\forall H. \text{Con } ?F \text{ } G \text{ } H \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
      by (rule allE)
    then have  $\text{Con } ?F \text{ } G \text{ } G \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{G, G\} \cup S \in C$ 
      by (rule allE)
    then have  $?F \in S \longrightarrow \{G, G\} \cup S \in C$ 
      using (Con (¬(¬G)) G G) by (rule mp)
    then have  $\{G, G\} \cup S \in C$ 
      using ((¬(¬G)) ∈ S) by (rule mp)
    thus  $\{G\} \cup S \in C$ 
      by (simp only: insert-absorb2)
  qed

```

qed
qed

lemma *pcp-alt2Con3*:

assumes $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

shows $\forall G H. \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$

proof (*rule allI*)+

fix $G H$

show $\neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$

proof (*rule impI*)

assume $\neg(G \vee H) \in S$

then have $\text{Con } (\neg(G \vee H)) (\neg G) (\neg H)$

by (*simp only: Con.intros(2)*)

let $?F = \neg(G \vee H)$

have $\text{Con } ?F (\neg G) (\neg H) \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$

using *assms* **by** (*iprover elim: allE*)

then have $?F \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$

using $\langle \text{Con } (\neg(G \vee H)) (\neg G) (\neg H) \rangle$ **by** (*rule mp*)

thus $\{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$

using $\langle \neg(G \vee H) \in S \rangle$ **by** (*rule mp*)

qed

qed

lemma *pcp-alt2Con4*:

assumes $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

shows $\forall G H. \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C$

proof (*rule allI*)+

fix $G H$

show $\neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C$

proof (*rule impI*)

assume $\neg(G \rightarrow H) \in S$

then have $\text{Con } (\neg(G \rightarrow H)) G (\neg H)$

by (*simp only: Con.intros(3)*)

let $?F = \neg(G \rightarrow H)$

have $\text{Con } ?F G (\neg H) \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C$

using *assms* **by** (*iprover elim: allE*)

then have $?F \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C$

using $\langle \text{Con } (\neg(G \rightarrow H)) G (\neg H) \rangle$ **by** (*rule mp*)

thus $\{G, \neg H\} \cup S \in C$

using $\langle \neg(G \rightarrow H) \in S \rangle$ **by** (*rule mp*)

qed
qed

Por otro lado, los siguientes lemas auxiliares prueban el resto de condiciones de la definición de propiedad de consistencia proposicional a partir de la hipótesis referente a fórmulas de tipo β .

lemma *pcp-alt2Dis1:*

assumes $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

shows $\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof (*rule allI*)+

fix $G H$

show $G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof (*rule impI*)

assume $G \vee H \in S$

then have $\text{Dis } (G \vee H) G H$

by (*simp only: Dis.intros(1)*)

let $?F = G \vee H$

have $\text{Dis } ?F G H \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

using *assms* **by** (*iprover elim: allE*)

then have $?F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

using $\langle \text{Dis } (G \vee H) G H \rangle$ **by** (*rule mp*)

thus $\{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

using $\langle (G \vee H) \in S \rangle$ **by** (*rule mp*)

qed

qed

lemma *pcp-alt2Dis2:*

assumes $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

shows $\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof (*rule allI*)+

fix $G H$

show $G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

proof (*rule impI*)

assume $G \rightarrow H \in S$

then have $\text{Dis } (G \rightarrow H) (\neg G) H$

by (*simp only: Dis.intros(2)*)

let $?F = G \rightarrow H$

have $\text{Dis } ?F (\neg G) H \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

using *assms* **by** (*iprover elim: allE*)

then have $?F \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$

using $\langle \text{Dis } (G \rightarrow H) (\neg G) H \rangle$ **by** (*rule mp*)

```

thus  $\{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
using  $\langle (G \rightarrow H) \in S \rangle$  by (rule mp)
qed
qed

```

lemma *pcp-alt2Dis3*:

```

assumes  $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
shows  $\forall G H. \neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$ 
proof (rule allI)+
  fix  $G H$ 
  show  $\neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$ 
  proof (rule impI)
    assume  $\neg(G \wedge H) \in S$ 
    then have  $\text{Dis } (\neg(G \wedge H)) (\neg G) (\neg H)$ 
      by (simp only: Dis.intros(3))
    let  $?F = \neg(G \wedge H)$ 
    have  $\text{Dis } ?F (\neg G) (\neg H) \longrightarrow ?F \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$ 
      using assms by (iprover elim: allE)
    then have  $?F \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$ 
      using  $\langle \text{Dis } (\neg(G \wedge H)) (\neg G) (\neg H) \rangle$  by (rule mp)
    thus  $\{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$ 
      using  $\langle \neg(G \wedge H) \in S \rangle$  by (rule mp)
  qed
qed

```

De este modo, procedemos a la demostración detallada de esta implicación en Isabelle.

lemma *pcp-alt2*:

```

assumes  $\forall S \in C. \perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
shows pcp  $C$ 
unfolding pcp-def
proof (rule ballI)
  fix  $S$ 
  assume  $S \in C$ 
  have  $H: \perp \notin S$ 
     $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
     $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
     $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 

```

```

using assms ( $S \in C$ ) by (rule bspec)
then have Con:  $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
by (iprover elim: conjunct1 conjunct2)
have Dis:  $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
using H by (iprover elim: conjunct1 conjunct2)
have 1:  $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
using H by (iprover elim: conjunct1)
have 2:  $\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
using Con by (rule pcg-alt2Con1)
have 3:  $\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
using Dis by (rule pcg-alt2Dis1)
have 4:  $\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
using Dis by (rule pcg-alt2Dis2)
have 5:  $\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C$ 
using Con by (rule pcg-alt2Con2)
have 6:  $\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C$ 
using Dis by (rule pcg-alt2Dis3)
have 7:  $\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C$ 
using Con by (rule pcg-alt2Con3)
have 8:  $\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C$ 
using Con by (rule pcg-alt2Con4)
have A:  $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
using 1 2 3 4 by (iprover intro: conjI)
have B:  $(\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C)$ 
using 5 6 7 8 by (iprover intro: conjI)
have ( $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge ((\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg (G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C)$ 

```

```

 $\wedge (\forall G H. \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C))$ 
using  $A B$  by (rule conjI)
thus  $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. Atom\ k \in S \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in S \longrightarrow False)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \wedge H \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \vee H \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. G \rightarrow H \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G. \neg (\neg G) \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \wedge H) \in S \longrightarrow \{\neg G\} \cup S \in C \vee \{\neg H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \vee H) \in S \longrightarrow \{\neg G, \neg H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall G H. \neg(G \rightarrow H) \in S \longrightarrow \{G, \neg H\} \cup S \in C)$ 
by (iprover intro: conj-assoc)
qed

```

Una vez probadas detalladamente en Isabelle cada una de las implicaciones de la equivalencia, podemos finalmente concluir con la demostración del lema completo.

```

lemma  $pcp\ C = (\forall S \in C. \perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. Atom\ k \in S \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in S \longrightarrow False)$ 
 $\wedge (\forall F G H. Con\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G H. Dis\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C))$ 
proof (rule iffI)
  assume  $pcp\ C$ 
  thus  $\forall S \in C. \perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. Atom\ k \in S \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in S \longrightarrow False)$ 
 $\wedge (\forall F G H. Con\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G H. Dis\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
  by (rule pcp-alt1)
next
  assume  $\forall S \in C. \perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. Atom\ k \in S \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in S \longrightarrow False)$ 
 $\wedge (\forall F G H. Con\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G H. Dis\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
  thus  $pcp\ C$ 
  by (rule pcp-alt2)
qed

```

La demostración automática del resultado en Isabelle/HOL se muestra finalmente a continuación.

```

lemma  $pcp-alt: pcp\ C = (\forall S \in C.$ 
 $\perp \notin S$ 

```

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C))$
apply(simp add: pcp-def con-dis-simps)
apply(rule iffI; unfold Ball-def; elim all-forward)
by (auto simp add: insert-absorb split: formula.splits)

Capítulo 3

Colecciones de conjuntos cerradas bajo subconjuntos y de carácter finito

En este capítulo se estudian las colecciones de conjuntos *cerradas bajo subconjuntos* y de *carácter finito*, y se demuestran tres resultados sobre las mismas. El primero de ellos permite extender una colección con la propiedad de consistencia proposicional a otra que también la verifique y sea cerrada bajo subconjuntos. Posteriormente probaremos que toda colección de carácter finito es cerrada bajo subconjuntos. Finalmente, se demuestra que una colección cerrada bajo subconjuntos que verifique la propiedad de consistencia proposicional se puede extender a otra que también verifique dicha propiedad y sea de carácter finito.

Definición 3.0.1 *Una colección de conjuntos es cerrada bajo subconjuntos si todo subconjunto de cada conjunto de la colección pertenece a la colección.*

En Isabelle se formaliza de la siguiente manera.

definition *subset-closed* $C \equiv (\forall S \in C. \forall S' \subseteq S. S' \in C)$

Mostremos algunos ejemplos para ilustrar la definición. Para ello, veamos si las colecciones de conjuntos de fórmulas proposicionales expuestas en los ejemplos anteriores son cerradas bajo subconjuntos.

lemma *subset-closed* $\{\{\}\}$

unfolding *subset-closed-def* **by** *simp*

lemma \neg *subset-closed* $\{\{Atom\ 0\}\}$

unfolding *subset-closed-def* **by** *auto*

Observemos que, puesto que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto,

una condición necesaria para que una colección sea cerrada bajo subconjuntos es que contenga al conjunto vacío.

lemma *subset-closed* $\{\{Atom\ 0\},\{\}\}$
unfolding *subset-closed-def* **by** *auto*

De este modo, se deduce fácilmente que el resto de colecciones expuestas en los ejemplos anteriores no son cerradas bajo subconjuntos.

lemma \neg *subset-closed* $\{\{(\neg (Atom\ 1)) \rightarrow Atom\ 2\},$
 $\{((\neg (Atom\ 1)) \rightarrow Atom\ 2), \neg(\neg (Atom\ 1))\},$
 $\{((\neg (Atom\ 1)) \rightarrow Atom\ 2), \neg(\neg (Atom\ 1)), Atom\ 1\}\}$
unfolding *subset-closed-def* **by** *auto*

lemma \neg *subset-closed* $\{\{(\neg (Atom\ 1)) \rightarrow Atom\ 2\},$
 $\{((\neg (Atom\ 1)) \rightarrow Atom\ 2), \neg(\neg (Atom\ 1))\}\}$
unfolding *subset-closed-def* **by** *auto*

Continuemos con la noción de propiedad de carácter finito.

Definición 3.0.2 Una colección de conjuntos tiene la propiedad de carácter finito si para cualquier conjunto son equivalentes:

1. El conjunto pertenece a la colección.
2. Todo subconjunto finito suyo pertenece a la colección.

La formalización en Isabelle/HOL de dicha definición se muestra a continuación.

definition *finite-character* $C \equiv$
 $(\forall S. S \in C \longleftrightarrow (\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C))$

Distingamos las colecciones de los ejemplos anteriores que tengan la propiedad de carácter finito. Análogamente, puesto que el conjunto vacío es finito y subconjunto de cualquier conjunto, se observa que una condición necesaria para que una colección tenga la propiedad de carácter finito es que contenga al conjunto vacío.

lemma *finite-character* $\{\{\}\}$
unfolding *finite-character-def* **by** *auto*

lemma \neg *finite-character* $\{\{Atom\ 0\}\}$
unfolding *finite-character-def* **by** *auto*

lemma *finite-character* $\{\{Atom\ 0\},\{\}\}$
unfolding *finite-character-def* **by** *auto*

Lema 3.0.3 *Toda colección de conjuntos con la propiedad de consistencia proposicional se puede extender a una colección que también verifique la propiedad de consistencia proposicional y sea cerrada bajo subconjuntos.*

En Isabelle se formaliza el resultado de la siguiente manera.

lemma *pcp* $C \implies \exists C'. C \subseteq C' \wedge \text{pcp } C' \wedge \text{subset-closed } C'$
oops

Procedamos con su demostración.

Demostración: Dada una colección de conjuntos cualquiera C , consideremos la colección formada por los conjuntos tales que son subconjuntos de algún conjunto de C . Notemos esta colección por $C' = \{S'. \exists S \in C. S' \subseteq S\}$. Vamos a probar que, en efecto, C' verifica las condiciones del lema.

En primer lugar, veamos que C está contenida en C' . Para ello, consideremos un conjunto cualquiera perteneciente a C . Puesto que la propiedad de contención es reflexiva, dicho conjunto es subconjunto de sí mismo. De este modo, por definición de C' , se verifica que el conjunto pertenece a C' .

Por otro lado, comprobemos que C' tiene la propiedad de consistencia proposicional. Por el lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional mediante la notación uniforme basta probar que, para cualquier conjunto de fórmulas S de C' , se verifican las condiciones:

- \perp no pertenece a S .
- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C' .
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a S , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C' o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C' .

De este modo, sea S un conjunto de fórmulas cualquiera de la colección C' . Por definición de dicha colección, existe un conjunto S' perteneciente a C tal que S está contenido en S' . Como C tiene la propiedad de consistencia proposicional por hipótesis, verifica las condiciones del lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional mediante la notación uniforme. En particular, puesto que S' pertenece a C , se verifica:

- \perp no pertenece a S' .

- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S'$ y $\neg p \in S'$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S' , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S'$ pertenece a C .
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a S' , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S'$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S'$ pertenece a C .

Por tanto, como S está contenida en S' , se verifica análogamente que \perp no pertenece a S y que dada una fórmula atómica cualquiera p , no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$. Veamos que se verifican el resto de condiciones del lema de caracterización:

• *Condición para fórmulas de tipo α* : Sea una fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S . Como S está contenida en S' , tenemos que la fórmula pertenece también a S' . De este modo, se verifica que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S'$ pertenece a la colección C . Por otro lado, como el conjunto S está contenido en S' , se observa fácilmente que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ está contenido en $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S'$. Por lo tanto, el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ está en C' por definición de esta, ya que es subconjunto de $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S'$ que pertenece a C .

• *Condición para fórmulas de tipo β* : Sea una fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que la fórmula pertenece a S . Como el conjunto S está contenido en S' , tenemos que la fórmula pertenece, a su vez, a S' . De este modo, se verifica que o bien $\{\beta_1\} \cup S'$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S'$ pertenece a C . Por eliminación de la disyunción anterior, vamos a probar que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C' o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C' .

- Supongamos, en primer lugar, que $\{\beta_1\} \cup S'$ pertenece a C . Puesto que el conjunto S está contenido en S' , se observa fácilmente que $\{\beta_1\} \cup S$ está contenido en $\{\beta_1\} \cup S'$. Por definición de la colección C' , tenemos que $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C' , ya que es subconjunto de $\{\beta_1\} \cup S'$ que pertenece a C . Por tanto, hemos probado que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C' o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C' .
- Supongamos, finalmente, que $\{\beta_2\} \cup S'$ pertenece a C . Análogamente obtenemos que $\{\beta_2\} \cup S$ está contenido en $\{\beta_2\} \cup S'$, luego $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C' por definición. Por tanto, o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C' o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C' .

De esta manera, queda probado que dada una fórmula de tipo β y componentes β_1 y β_2 tal que pertenezca al conjunto S , se verifica que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C' o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C' .

En conclusión, por el lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional mediante la notación uniforme, queda probado que C' tiene la propiedad de consistencia proposicional.

Finalmente probemos que, además, C' es cerrada bajo subconjuntos. Por definición de ser cerrado bajo subconjuntos, basta probar que dado un conjunto perteneciente a C' verifica que todo subconjunto suyo pertenece a C' . Consideremos S un conjunto cualquiera de C' . Por definición de C' , existe un conjunto S' perteneciente a la colección C tal que S es subconjunto de S' . Sea S'' un subconjunto cualquiera de S . Como S es subconjunto de S' , se tiene que S'' es, a su vez, subconjunto de S' . De este modo, existe un conjunto perteneciente a la colección C del cual S'' es subconjunto. Por tanto, por definición de C' , S'' pertenece a la colección C' , como quería demostrar. \square

Procedamos con las demostraciones del lema en Isabelle/HOL.

En primer lugar, vamos a introducir dos lemas auxiliares que emplearemos a lo largo de esta sección. El primero se trata de un lema similar al lema *ballI* definido en Isabelle pero considerando la relación de contención en lugar de la de pertenencia.

lemma *sallI*: $(\bigwedge S. S \subseteq A \implies P S) \implies \forall S \subseteq A. P S$
by *simp*

Por último definimos el siguiente lema auxiliar similar al lema *bspec* de Isabelle/HOL considerando, análogamente, la relación de contención en lugar de la de pertenencia.

lemma *sspec*: $\forall S \subseteq A. P S \implies S \subseteq A \implies P S$
by *simp*

Veamos la prueba detallada del lema en Isabelle/HOL. Esta se fundamenta en tres lemas auxiliares: el primero prueba que la colección C está contenida en C' , el segundo que C' tiene la propiedad de consistencia proposicional y, finalmente, el tercer lema demuestra que C' es cerrada bajo subconjuntos. En primer lugar, dada una colección cualquiera C , definiremos en Isabelle su extensión C' como sigue.

definition *extensionSC* :: $((\text{'a formula}) \text{ set}) \text{ set} \Rightarrow ((\text{'a formula}) \text{ set}) \text{ set}$
where *extensionSC*: $\text{extensionSC } C = \{s. \exists S \in C. s \subseteq S\}$

Una vez formalizada la extensión en Isabelle, comencemos probando de manera detallada que toda colección está contenida en su extensión así definida.

lemma *ex1-subset*: $C \subseteq (\text{extensionSC } C)$

proof (*rule subsetI*)

fix s

assume $s \in C$

have $s \subseteq s$

by (*rule subset-refl*)

then have $\exists S \in C. s \subseteq S$

using $\langle s \in C \rangle$ **by** (*rule bexI*)

thus $s \in (\text{extensionSC } C)$
by (*simp only: mem-Collect-eq extensionSC*)
qed

Prosigamos con la prueba del lema auxiliar que demuestra que C' tiene la propiedad de consistencia proposicional. Para ello, emplearemos un lema auxiliar que amplía el lema de Isabelle *insert-is-Un* para la unión de dos elementos y un conjunto, como se muestra a continuación.

lemma *insertSetElem*: $\text{insert } a (\text{insert } b C) = \{a,b\} \cup C$
by *simp*

Una vez introducido dicho lema auxiliar, podemos dar la prueba detallada del lema que demuestra que C' tiene la propiedad de consistencia proposicional.

lemma *ex1-pcp*:
assumes *pcp* C
shows *pcp* ($\text{extensionSC } C$)
proof –
have $C1: C \subseteq (\text{extensionSC } C)$
by (*rule ex1-subset*)
show *pcp* ($\text{extensionSC } C$)
proof (*rule pcp-alt2*)
show $\forall S \in (\text{extensionSC } C). (\perp \notin S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G,H\} \cup S \in (\text{extensionSC } C))$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in (\text{extensionSC } C) \vee \{H\} \cup S \in$
 $(\text{extensionSC } C)))$
proof (*rule ballI*)
fix S'
assume $S' \in (\text{extensionSC } C)$
then have $1: \exists S \in C. S' \subseteq S$
unfolding *extensionSC* **by** (*rule CollectD*)
obtain S **where** $S \in C \wedge S' \subseteq S$
using 1 **by** (*rule bexE*)
have $\forall S \in C.$
 $\perp \notin S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G,H\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$
using *assms* **by** (*rule pcp-alt1*)
then have $H: \perp \notin S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$

```

 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
using  $\langle S \in C \rangle$  by (rule bspec)
then have  $\perp \notin S$ 
by (rule conjunct1)
have  $S1: \perp \notin S'$ 
using  $\langle S' \subseteq S \rangle \langle \perp \notin S \rangle$  by (rule contra-subsetD)
have  $\text{Atom}: \forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ 
using  $H$  by (iprover elim: conjunct1 conjunct2)
have  $S2: \forall k. \text{Atom } k \in S' \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S' \longrightarrow \text{False}$ 
proof (rule allI)
  fix  $k$ 
  show  $\text{Atom } k \in S' \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S' \longrightarrow \text{False}$ 
  proof (rule implI)+
    assume  $\text{Atom } k \in S'$ 
    assume  $\neg (\text{Atom } k) \in S'$ 
    have  $\text{Atom } k \in S$ 
    using  $\langle S' \subseteq S \rangle \langle \text{Atom } k \in S' \rangle$  by (rule set-mp)
    have  $\neg (\text{Atom } k) \in S$ 
    using  $\langle S' \subseteq S \rangle \langle \neg (\text{Atom } k) \in S' \rangle$  by (rule set-mp)
    have  $\text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ 
    using  $\text{Atom}$  by (rule allE)
    then have  $\neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ 
    using  $\langle \text{Atom } k \in S \rangle$  by (rule mp)
    thus  $\text{False}$ 
    using  $\langle \neg (\text{Atom } k) \in S \rangle$  by (rule mp)
  qed
qed
have  $\text{Con}: \forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
using  $H$  by (iprover elim: conjunct1 conjunct2)
have  $S3: \forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
proof (rule allI)+
  fix  $F G H$ 
  show  $\text{Con } F G H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
  proof (rule implI)+
    assume  $\text{Con } F G H$ 
    assume  $F \in S'$ 
    have  $F \in S$ 
    using  $\langle S' \subseteq S \rangle \langle F \in S' \rangle$  by (rule set-mp)
    have  $\text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 

```

```

    using Con by (iprover elim: allE)
  then have  $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
    using  $\langle \text{Con } F \ G \ H \rangle$  by (rule mp)
  then have  $\{G, H\} \cup S \in C$ 
    using  $\langle F \in S \rangle$  by (rule mp)
  have  $S' \subseteq \text{insert } H \ S$ 
    using  $\langle S' \subseteq S \rangle$  by (rule subset-insertI2)
  then have  $\text{insert } H \ S' \subseteq \text{insert } H \ (\text{insert } H \ S)$ 
    by (simp only: insert-mono)
  then have  $\text{insert } H \ S' \subseteq \text{insert } H \ S$ 
    by (simp only: insert-absorb2)
  then have  $\text{insert } G \ (\text{insert } H \ S') \subseteq \text{insert } G \ (\text{insert } H \ S)$ 
    by (simp only: insert-mono)
  have  $A: \text{insert } G \ (\text{insert } H \ S') = \{G, H\} \cup S'$ 
    by (rule insertSetElem)
  have  $B: \text{insert } G \ (\text{insert } H \ S) = \{G, H\} \cup S$ 
    by (rule insertSetElem)
  have  $\{G, H\} \cup S' \subseteq \{G, H\} \cup S$ 
    using  $\langle \text{insert } G \ (\text{insert } H \ S') \subseteq \text{insert } G \ (\text{insert } H \ S) \rangle$  by (simp only: A B)
  then have  $\exists S \in C. \{G, H\} \cup S' \subseteq S$ 
    using  $\langle \{G, H\} \cup S \in C \rangle$  by (rule bexI)
  thus  $\{G, H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
    unfolding extensionSC by (rule CollectI)
qed
qed
have Dis:  $\forall F \ G \ H. \text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
  using H by (iprover elim: conjunct2)
have S4:  $\forall F \ G \ H. \text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C) \vee \{H\} \cup S' \in$ 
(extensionSC C)
proof (rule allI)+
  fix F G H
  show  $\text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C) \vee \{H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
  proof (rule impI)+
    assume Dis F G H
    assume  $F \in S'$ 
    have  $F \in S$ 
      using  $\langle S' \subseteq S \rangle \langle F \in S' \rangle$  by (rule set-mp)
    have  $\text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
      using Dis by (iprover elim: allE)

```

```

then have  $F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
  using  $\langle \text{Dis } F \ G \ H \rangle$  by (rule mp)
then have 9:  $\{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
  using  $\langle F \in S \rangle$  by (rule mp)
show  $\{G\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C) \vee \{H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
  using 9
proof (rule disjE)
  assume  $\{G\} \cup S \in C$ 
  have  $\text{insert } G \ S' \subseteq \text{insert } G \ S$ 
    using  $\langle S' \subseteq S \rangle$  by (simp only: insert-mono)
  have C:  $\text{insert } G \ S' = \{G\} \cup S'$ 
    by (rule insert-is-Un)
  have D:  $\text{insert } G \ S = \{G\} \cup S$ 
    by (rule insert-is-Un)
  have  $\{G\} \cup S' \subseteq \{G\} \cup S$ 
    using  $\langle \text{insert } G \ S' \subseteq \text{insert } G \ S \rangle$  by (simp only: C D)
  then have  $\exists S \in C. \{G\} \cup S' \subseteq S$ 
    using  $\langle \{G\} \cup S \in C \rangle$  by (rule bexI)
  then have  $\{G\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
    unfolding extensionSC by (rule CollectI)
  thus  $\{G\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C) \vee \{H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
    by (rule disjI1)
next
  assume  $\{H\} \cup S \in C$ 
  have  $\text{insert } H \ S' \subseteq \text{insert } H \ S$ 
    using  $\langle S' \subseteq S \rangle$  by (simp only: insert-mono)
  have E:  $\text{insert } H \ S' = \{H\} \cup S'$ 
    by (rule insert-is-Un)
  have F:  $\text{insert } H \ S = \{H\} \cup S$ 
    by (rule insert-is-Un)
  then have  $\{H\} \cup S' \subseteq \{H\} \cup S$ 
    using  $\langle \text{insert } H \ S' \subseteq \text{insert } H \ S \rangle$  by (simp only: E F)
  then have  $\exists S \in C. \{H\} \cup S' \subseteq S$ 
    using  $\langle \{H\} \cup S \in C \rangle$  by (rule bexI)
  then have  $\{H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
    unfolding extensionSC by (rule CollectI)
  thus  $\{G\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C) \vee \{H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
    by (rule disjI2)
qed
qed

```

```

qed
show  $\perp \notin S'$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S' \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S' \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C))$ 
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G\} \cup S' \in (\text{extensionSC } C) \vee \{H\} \cup S' \in$ 
 $(\text{extensionSC } C))$ 
using S1 S2 S3 S4 by (iprover intro: conjI)
qed
qed
qed

```

Finalmente, el siguiente lema auxiliar prueba que C' es cerrada bajo subconjuntos.

lemma *ex1-subset-closed*:

```

assumes pcp C
shows subset-closed (extensionSC C)
unfolding subset-closed-def
proof (rule ballI)
  fix  $S'$ 
  assume  $S' \in (\text{extensionSC } C)$ 
  then have  $H: \exists S \in C. S' \subseteq S$ 
    unfolding extensionSC by (rule CollectD)
  obtain  $S$  where  $\langle S \in C \rangle$  and  $\langle S' \subseteq S \rangle$ 
    using  $H$  by (rule bexE)
  show  $\forall S'' \subseteq S'. S'' \in (\text{extensionSC } C)$ 
  proof (rule sallI)
    fix  $S''$ 
    assume  $S'' \subseteq S'$ 
    then have  $S'' \subseteq S$ 
      using  $\langle S' \subseteq S \rangle$  by (rule subset-trans)
    then have  $\exists S \in C. S'' \subseteq S$ 
      using  $\langle S \in C \rangle$  by (rule bexI)
    thus  $S'' \in (\text{extensionSC } C)$ 
      unfolding extensionSC by (rule CollectI)
  qed
qed

```

En conclusión, la prueba detallada del lema completo se muestra a continuación.

lemma *ex1*:

```

assumes pcp C
shows  $\exists C'. C \subseteq C' \wedge \text{pcp } C' \wedge \text{subset-closed } C'$ 
proof –

```

```

have C1:C  $\subseteq$  (extensionSC C)
  by (rule ex1-subset)
have C2:pcp (extensionSC C)
  using assms by (rule ex1-pcp)
have C3:subset-closed (extensionSC C)
  using assms by (rule ex1-subset-closed)
have C  $\subseteq$  (extensionSC C)  $\wedge$  pcp (extensionSC C)  $\wedge$  subset-closed (extensionSC C)
  using C1 C2 C3 by (iprover intro: conjI)
thus ?thesis
  by (rule exI)
qed

```

Continuemos con el segundo resultado de este apartado.

Lema 3.0.4 *Toda colección de conjuntos con la propiedad de carácter finito es cerrada bajo subconjuntos.*

En Isabelle, se formaliza como sigue.

```

lemma
  assumes finite-character C
  shows subset-closed C
oops

```

Procedamos con la demostración del resultado.

Demostración: Consideremos una colección de conjuntos C con la propiedad de carácter finito. Probemos que, en efecto, es cerrada bajo subconjuntos. Por definición de esta última propiedad, basta demostrar que todo subconjunto de cada conjunto de C pertenece también a C .

Para ello, tomemos un conjunto S cualquiera perteneciente a C y un subconjunto cualquiera S' de S . Probemos que S' está en C . Por hipótesis, como C tiene la propiedad de carácter finito, verifica que, para cualquier conjunto A , son equivalentes:

1. A pertenece a C .
2. Todo subconjunto finito de A pertenece a C .

Para probar que el subconjunto S' pertenece a C , vamos a demostrar que todo subconjunto finito de S' pertenece a C .

De este modo, consideremos un subconjunto cualquiera S'' de S' . Como S' es subconjunto de S , por la transitividad de la relación de contención de conjuntos, se tiene

que S'' es subconjunto de S . Aplicando la definición de propiedad de carácter finito de C para el conjunto S , como este pertenece a C , verifica que todo subconjunto finito de S pertenece a C . En particular, como S'' es subconjunto de S , verifica que, si S'' es finito, entonces S'' pertenece a C . Por tanto, hemos probado que cualquier conjunto finito de S' pertenece a la colección. Finalmente por la propiedad de carácter finito de C , se verifica que S' pertenece a C , como queríamos demostrar. \square

Veamos, a continuación, la demostración detallada del resultado en Isabelle.

lemma

assumes *finite-character C*

shows *subset-closed C*

unfolding *subset-closed-def*

proof (*intro ballI sallI*)

fix $S' S$

assume $\langle S \in C \rangle$ **and** $\langle S' \subseteq S \rangle$

have $H: \forall A. A \in C \longleftrightarrow (\forall A' \subseteq A. \text{finite } A' \longrightarrow A' \in C)$

using *assms* **unfolding** *finite-character-def* **by** *this*

have $QPQ: \forall S'' \subseteq S'. \text{finite } S'' \longrightarrow S'' \in C$

proof (*rule sallI*)

fix S''

assume $S'' \subseteq S'$

then have $S'' \subseteq S$

using $\langle S' \subseteq S \rangle$ **by** (*simp only: subset-trans*)

have $1: S \in C \longleftrightarrow (\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C)$

using H **by** (*rule allE*)

have $\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$

using $\langle S \in C \rangle$ **1** **by** (*rule back-subst*)

thus $\text{finite } S'' \longrightarrow S'' \in C$

using $\langle S'' \subseteq S \rangle$ **by** (*rule sspec*)

qed

have $S' \in C \longleftrightarrow (\forall S'' \subseteq S'. \text{finite } S'' \longrightarrow S'' \in C)$

using H **by** (*rule allE*)

thus $S' \in C$

using QPQ **by** (*rule forw-subst*)

qed

Finalmente, su prueba automática en Isabelle/HOL es la siguiente.

lemma *ex2:*

assumes *fc: finite-character C*

shows *subset-closed C*

```

unfolding subset-closed-def
proof (intro ballI salI)
  fix S' S
  assume e:  $\langle S \in C \rangle$  and s:  $\langle S' \subseteq S \rangle$ 
  hence *:  $S'' \subseteq S' \implies S'' \subseteq S$  for S'' by simp
  from fc have  $S'' \subseteq S \implies \text{finite } S'' \implies S'' \in C$  for S''
  unfolding finite-character-def using e by blast
  hence  $S'' \subseteq S' \implies \text{finite } S'' \implies S'' \in C$  for S'' using * by simp
  with fc show  $\langle S' \in C \rangle$  unfolding finite-character-def by blast
qed

```

Introduzcamos el último resultado de la sección.

Lema 3.0.5 *Toda colección de conjuntos con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos se puede extender a una colección que también verifique la propiedad de consistencia proposicional y sea de carácter finito.*

Demostración: Dada una colección de conjuntos C en las condiciones del enunciado, vamos a considerar su extensión C' definida como la unión de C y la colección formada por aquellos conjuntos cuyos subconjuntos finitos pertenecen a C . Es decir, $C' = C \cup E$ donde $E = \{S. \forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C\}$. Es evidente que es extensión pues contiene a la colección C . Vamos a probar que, además es de carácter finito y verifica la propiedad de consistencia proposicional.

En primer lugar, demostremos que C' es de carácter finito. Por definición de dicha propiedad, basta probar que, para cualquier conjunto, son equivalentes:

1. El conjunto pertenece C' .
2. Todo subconjunto finito suyo pertenece a C' .

Comencemos probando $1) \implies 2)$. Para ello, sea un conjunto S de C' de modo que S' es un subconjunto finito suyo. Como S pertenece a la extensión, por definición de la misma tenemos que o bien S está en C o bien S está en E . Vamos a probar que S' está en C' por eliminación de la disyunción anterior. En primer lugar, si suponemos que S está en C , como se trata de una colección cerrada bajo subconjuntos, tenemos que todo subconjunto de S está en C . En particular, S' está en C y, por definición de la extensión, se prueba que S' está en C' . Por otro lado, suponiendo que S esté en E , por definición de dicha colección tenemos que todo subconjunto finito de S está en C . De este modo, por las hipótesis se prueba que S' está en C y, por tanto, pertenece a la extensión.

Por último, probemos la implicación $2) \implies 1)$. Sea un conjunto cualquiera S tal que todo subconjunto finito suyo pertenece a C' . Vamos a probar que S también pertenece

a C' . En particular, probaremos que pertenece a E . Luego basta probar que todo subconjunto finito de S pertenece a C . Para ello, consideremos S' un subconjunto finito cualquiera de S . Por hipótesis, tenemos que S' pertenece a C' . Por definición de la extensión, tenemos entonces que o bien S' está en C (lo que daría por concluida la prueba) o bien S' está en E . De este modo, si suponemos que S' está en E , por definición de dicha colección tenemos que todo subconjunto finito suyo está en C . En particular, como todo conjunto es subconjunto de sí mismo y como hemos supuesto que S' es finito, tenemos que S' está en C , lo que prueba la implicación.

Probemos, finalmente, que C' verifica la propiedad de consistencia proposicional. Para ello, vamos a considerar un conjunto cualquiera S perteneciente a C' y probaremos que se verifican las cuatro condiciones del lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional mediante la notación uniforme. Como el conjunto S pertenece a C' , se observa fácilmente por definición de la extensión que, o bien S está en C o bien S está en E . Veamos que, para ambos casos, se verifican dichas condiciones.

En primer lugar, supongamos que S está en C . Como C verifica la propiedad de consistencia proposicional por hipótesis, verifica el lema de caracterización en particular para el conjunto S . De este modo, se cumple:

- \perp no pertenece a S .
- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C .
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a S , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C .

Por lo tanto, puesto que C está contenida en la extensión C' , se verifican las cuatro condiciones del lema para C' .

Supongamos ahora que S está en E . Probemos que, en efecto, verifica las condiciones del lema de caracterización.

En primer lugar vamos a demostrar que $\perp \notin S$ por reducción al absurdo. Si suponemos que $\perp \in S$, se deduce que el conjunto $\{\perp\}$ es un subconjunto finito de S . Como S está en E , por definición tenemos que $\{\perp\} \in C$. De este modo, aplicando el lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional para la colección C y el conjunto $\{\perp\}$, por la primera condición obtenemos que $\perp \notin \{\perp\}$, llegando a una contradicción.

Demostremos que se verifica la segunda condición del lema para las fórmulas atómicas. De este modo, vamos a probar que dada p una fórmula atómica cualquiera,

no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$. La prueba se realizará por reducción al absurdo, luego supongamos que para cierta fórmula atómica se verifica $p \in S$ y $\neg p \in S$. Análogamente, se observa que el conjunto $\{p, \neg p\}$ es un subconjunto finito de S , luego pertenece a C . Aplicando el lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional para la colección C y el conjunto $\{p, \neg p\}$, por la segunda condición obtenemos que no se tiene simultáneamente $q \in \{p, \neg p\}$ y $\neg q \in \{p, \neg p\}$ para ninguna fórmula atómica q , llegando así a una contradicción para la fórmula atómica p .

Por otro lado, vamos a probar que se verifica la tercera condición del lema de caracterización sobre las fórmulas de tipo α . Consideremos una fórmula cualquiera F de tipo α y componentes α_1 y α_2 , y supongamos que $F \in S$. Demostraremos que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S \in C'$.

Para ello, probaremos inicialmente que todo subconjunto finito S' de S tal que $F \in S'$ verifica $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S' \in C$. Consideremos S' subconjunto finito cualquiera de S en las condiciones anteriores. Como $S \in E$, por definición tenemos que $S' \in C$. Aplicando el lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional para la colección C y el conjunto S' , por la tercera condición obtenemos que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S' \in C$ ya que hemos supuesto que $F \in S'$.

Una vez probado el resultado anterior, demostremos que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S \in E$ y, por definición de C' , obtendremos $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S \in C'$. Además, por definición de E , basta probar que todo subconjunto finito de $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C . Consideremos S' un subconjunto finito cualquiera de $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$. Como $F \in S$, es sencillo comprobar que el conjunto $\{F\} \cup (S' - \{\alpha_1, \alpha_2\})$ es un subconjunto finito de S . Por el resultado probado anteriormente, tenemos que el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup (\{F\} \cup (S' - \{\alpha_1, \alpha_2\})) = \{F, \alpha_1, \alpha_2\} \cup S'$ pertenece a C . Además, como C es cerrada bajo subconjuntos, todo conjunto de C verifica que cualquier subconjunto suyo pertenece a la colección. Luego, como S' es un subconjunto de $\{F, \alpha_1, \alpha_2\} \cup S'$, queda probado que $S' \in C$.

Finalmente, veamos que se verifica la última condición del lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional referente a las fórmulas de tipo β . Consideremos una fórmula cualquiera F de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que $F \in S$. Vamos a probar que se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S \in E$ o bien $\{\beta_1\} \cup S \in E$. En tal caso, por definición de C' se cumple que o bien $\{\beta_1\} \cup S \in C'$ o bien $\{\beta_1\} \cup S \in C'$. La prueba se realizará por reducción al absurdo. Para ello, probemos inicialmente dos resultados previos.

- 1) En las condiciones anteriores, si consideramos S_1 y S_2 subconjuntos finitos cualesquiera de S tales que $F \in S_1$ y $F \in S_2$, entonces existe una fórmula $I \in \{\beta_1, \beta_2\}$ tal que se verifica que tanto $\{I\} \cup S_1$ como $\{I\} \cup S_2$ están en C .

Para probar 1), consideremos el conjunto finito $S_1 \cup S_2$ que es subconjunto de S por las hipótesis. De este modo, como $S \in E$, tenemos que $S_1 \cup S_2 \in C$. Aplicando el lema

de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional para la colección C y el conjunto $S_1 \cup S_2$, por la última condición sobre las fórmulas de tipo β , como $F \in S_1 \cup S_2$ por las hipótesis, se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S_1 \cup S_2 \in C$ o bien $\{\beta_2\} \cup S_1 \cup S_2 \in C$. Por tanto, existe una fórmula $I \in \{\beta_1, \beta_2\}$ tal que $\{I\} \cup S_1 \cup S_2 \in C$. Sea I la fórmula que cumple lo anterior. Como C es cerrada bajo subconjuntos, los subconjuntos $\{I\} \cup S_1$ y $\{I\} \cup S_2$ de $\{I\} \cup S_1 \cup S_2$ pertenecen también a C . Por tanto, hemos probado que existe una fórmula $I \in \{\beta_1, \beta_2\}$ tal que $\{I\} \cup S_1 \in C$ y $\{I\} \cup S_2 \in C$.

Por otra parte, veamos el segundo resultado.

- 2) En las condiciones de 1) para conjuntos cualesquiera S_1 y S_2 , si además suponemos que $\{\beta_1\} \cup S_1 \notin C$ y $\{\beta_2\} \cup S_2 \notin C$, llegamos a una contradicción.

Para probarlo, utilizaremos 1) para los conjuntos $\{F\} \cup S_1$ y $\{F\} \cup S_2$. Como es evidente, puesto que $F \in S$, se verifica que ambos conjuntos son subconjuntos de S . Además, como S_1 y S_2 son finitos, se tiene que $\{F\} \cup S_1$ y $\{F\} \cup S_2$ también lo son. Por último, es claro que F pertenece a ambos conjuntos. Por lo tanto, por 1) tenemos que existe una fórmula $I \in \{\beta_1, \beta_2\}$ tal que $\{I\} \cup \{F\} \cup S_1 \in C$ y $\{I\} \cup \{F\} \cup S_2 \in C$. Por otro lado, podemos probar que $\{\beta_1\} \cup \{F\} \cup S_1 \notin C$. Esto se debe a que, en caso contrario, como C es cerrado bajo subconjuntos, tendríamos que el subconjunto $\{\beta_1\} \cup S_1$ pertenecería a C , lo que contradice las hipótesis. Análogamente, obtenemos que $\{\beta_2\} \cup \{F\} \cup S_2 \notin C$. De este modo, obtenemos que para toda fórmula $I \in \{\beta_1, \beta_2\}$ se cumple que o bien $\{I\} \cup \{F\} \cup S_1 \notin C$ o bien $\{I\} \cup \{F\} \cup S_2 \notin C$. Esto es equivalente a que no existe ninguna fórmula $I \in \{\beta_1, \beta_2\}$ tal que $\{I\} \cup \{F\} \cup S_1 \in C$ y $\{I\} \cup \{F\} \cup S_2 \in C$, lo que contradice lo obtenido para los conjuntos $\{F\} \cup S_1$ y $\{F\} \cup S_2$ por 1).

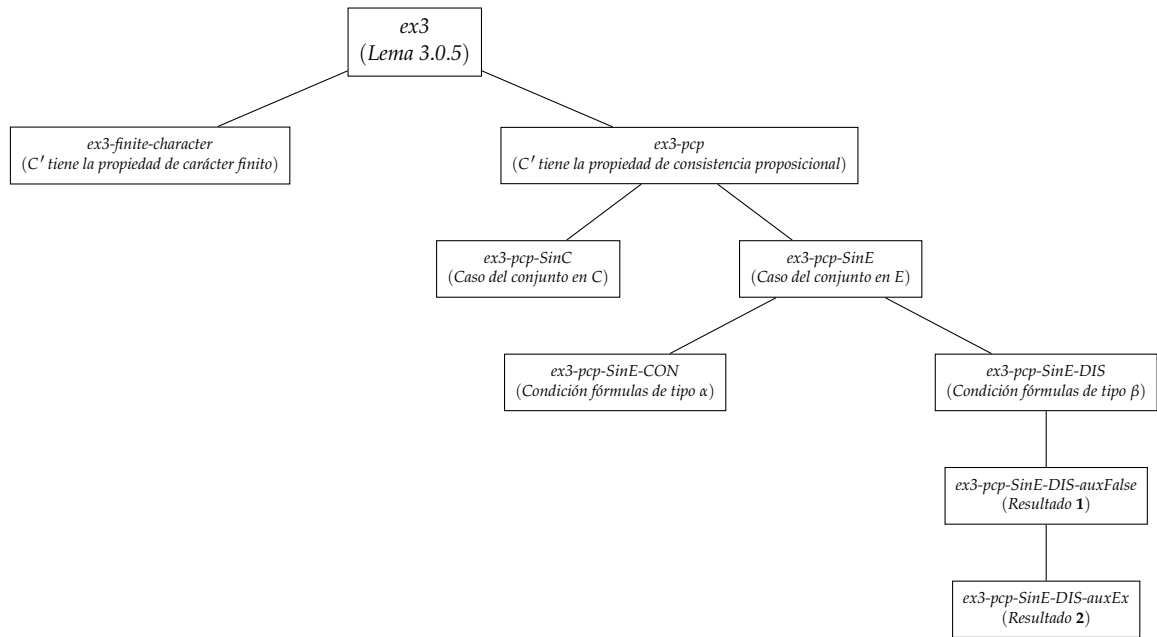
Finalmente, con los resultados anteriores, podemos probar que o bien $\{\beta_1\} \cup S \in E$ o bien $\{\beta_2\} \cup S \in E$ por reducción al absurdo. Supongamos que $\{\beta_1\} \cup S \notin E$ y $\{\beta_2\} \cup S \notin E$. Por definición de E , se verifica que existe algún subconjunto finito de $\{\beta_1\} \cup S$ y existe algún subconjunto finito de $\{\beta_2\} \cup S$ tales que no pertenecen a C . Notemos por S_1 y S_2 respectivamente a los subconjuntos anteriores. Vamos a aplicar 2) para los conjuntos $S_1 - \{\beta_1\}$ y $S_2 - \{\beta_2\}$ para llegar a la contradicción.

Para ello, debemos probar que se verifican las hipótesis del resultado para los conjuntos señalados. Es claro que tanto $S_1 - \{\beta_1\}$ como $S_2 - \{\beta_2\}$ son subconjuntos de S , ya que S_1 y S_2 son subconjuntos de $\{\beta_1\} \cup S$ y $\{\beta_2\} \cup S$ respectivamente. Además, como S_1 y S_2 son finitos, es evidente que $S_1 - \{\beta_1\}$ y $S_2 - \{\beta_2\}$ también lo son. Queda probar que los conjuntos $\{\beta_1\} \cup (S_1 - \{\beta_1\}) = \{\beta_1\} \cup S_1$ y $\{\beta_2\} \cup (S_2 - \{\beta_2\}) = \{\beta_2\} \cup S_2$ no pertenecen a C . Como ni S_1 ni S_2 están en la colección C cerrada bajo subconjuntos, se cumple que ninguno de ellos son subconjuntos de S . Sin embargo, se verifica que S_1 es subconjunto de $\{\beta_1\} \cup S$ y S_2 es subconjunto de $\{\beta_2\} \cup S$. Por tanto, se cumple que

$\beta_1 \in S_1$ y $\beta_2 \in S_2$. Por lo tanto, tenemos finalmente que los conjuntos $\{\beta_1\} \cup S_1 = S_1$ y $\{\beta_2\} \cup S_2 = S_2$ no pertenecen a C . Finalmente, como se cumplen las condiciones del resultado 2), llegamos a una contradicción para los conjuntos $S_1 - \{\beta_1\}$ y $S_2 - \{\beta_2\}$, probando que o bien $\{\beta_1\} \cup S \in E$ o bien $\{\beta_1\} \cup S \in E$. Por lo tanto, obtenemos por definición de C' que o bien $\{\beta_1\} \cup S \in C'$ o bien $\{\beta_1\} \cup S \in C'$.

□

Finalmente, veamos la demostración detallada del lema en Isabelle. Debido a la cantidad de lemas auxiliares empleados en la prueba detallada, para facilitar la comprensión mostraremos a continuación un grafo que estructura las relaciones de necesidad de los lemas introducidos.



De este modo, la prueba del lema 1.3.5 se estructura fundamentalmente en dos lemas auxiliares. El primero, formalizado como *ex3-finite-character* en Isabelle, prueba que la extensión $C' = C \cup E$, donde E es la colección formada por aquellos conjuntos cuyos subconjuntos finitos pertenecen a C , tiene la propiedad de carácter finito. El segundo, formalizado como *ex3-pcp*, demuestra que C' verifica la propiedad de consistencia proposicional demostrando que cumple las condiciones suficientes de dicha propiedad por el lema de caracterización 1.2.5. De este modo, considerando un conjunto $S \in C'$, *ex3-pcp* precisa, a su vez, de dos lemas auxiliares que prueben las condiciones suficientes de 1.2.5: uno para el caso en que $S \in C$ (*ex3-pcp-SinC*) y otro para el caso en que $S \in E$ (*ex3-pcp-SinE*). Por otro lado, para el último caso en que $S \in E$, utilizaremos dos lemas auxiliares. El primero, formalizado como *ex3-pcp-SinE-CON*, prueba que para C una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, $S \in E$ y sea F una fórmula de tipo α y componentes α_1 y α_2 , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S \in C'$. El segundo lema, formalizado como *ex3-pcp-SinE-DIS*, prueba que

para C una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, $S \in E$ y sea F una fórmula de tipo β y componentes β_1 y β_2 , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S \in C'$ o bien $\{\beta_2\} \cup S \in C'$. Por último, este segundo lema auxiliar se probará por reducción al absurdo, precisando para ello de los siguientes resultados auxiliares:

Resultado 1 Formalizado como *ex3-pcp-SinE-DIS-auxEx*. Prueba que dada C una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, $S \in E$ y sea F es una fórmula de tipo β de componentes β_1 y β_2 , si consideramos S_1 y S_2 subconjuntos finitos cualesquiera de S tales que $F \in S_1$ y $F \in S_2$, entonces existe una fórmula $I \in \{\beta_1, \beta_2\}$ tal que se verifica que tanto $\{I\} \cup S_1$ como $\{I\} \cup S_2$ están en C .

Resultado 2 Formalizado como *ex3-pcp-SinE-DIS-auxFalse*. Utiliza *ex3-pcp-SinE-DIS-auxEx* como lema auxiliar. Prueba que, en las condiciones del **Resultado 1**, si además suponemos que $\{\beta_1\} \cup S_1 \notin C$ y $\{\beta_2\} \cup S_2 \notin C$, llegamos a una contradicción.

Por otro lado, para facilitar la notación, dada una colección cualquiera C , formalizamos las colecciones E y C' como *extF* C y *extensionFin* C respectivamente como se muestra a continuación.

definition *extF* :: ((*'a formula*) set) set \Rightarrow ((*'a formula*) set) set
where *extF*: *extF* $C = \{S. \forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C\}$

definition *extensionFin* :: ((*'a formula*) set) set \Rightarrow ((*'a formula*) set) set
where *extensionFin*: *extensionFin* $C = C \cup (\text{extF } C)$

Una vez hechas las aclaraciones anteriores, procedamos ordenadamente con la demostración detallada de cada lema auxiliar que conforma la prueba del lema 1.3.5. En primer lugar, probemos detalladamente que la extensión C' tiene la propiedad de carácter finito.

lemma *ex3-finite-character*:

assumes *subset-closed* C

shows *finite-character* (*extensionFin* C)

proof —

show *finite-character* (*extensionFin* C)

unfolding *finite-character-def*

proof (*rule allI*)

fix S

show $S \in (\text{extensionFin } C) \longleftrightarrow (\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in (\text{extensionFin } C))$

proof (*rule iffI*)

assume $S \in (\text{extensionFin } C)$

```

show  $\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in (\text{extensionFin } C)$ 
proof (intro sallI impI)
  fix  $S'$ 
  assume  $S' \subseteq S$ 
  assume finite  $S'$ 
  have  $S \in C \vee S \in (\text{extF } C)$ 
    using  $\langle S \in (\text{extensionFin } C) \rangle$  by (simp only: extensionFin Un-iff)
  thus  $S' \in (\text{extensionFin } C)$ 
proof (rule disjE)
  assume  $S \in C$ 
  have  $\forall S \in C. \forall S' \subseteq S. S' \in C$ 
    using assms by (simp only: subset-closed-def)
  then have  $\forall S' \subseteq S. S' \in C$ 
    using  $\langle S \in C \rangle$  by (rule bspec)
  then have  $S' \in C$ 
    using  $\langle S' \subseteq S \rangle$  by (rule sspec)
  thus  $S' \in (\text{extensionFin } C)$ 
    by (simp only: extensionFin UnI1)
next
  assume  $S \in (\text{extF } C)$ 
  then have  $\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$ 
    unfolding extF by (rule CollectD)
  then have finite  $S' \longrightarrow S' \in C$ 
    using  $\langle S' \subseteq S \rangle$  by (rule sspec)
  then have  $S' \in C$ 
    using  $\langle \text{finite } S' \rangle$  by (rule mp)
  thus  $S' \in (\text{extensionFin } C)$ 
    by (simp only: extensionFin UnI1)
qed
qed
next
  assume  $\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in (\text{extensionFin } C)$ 
  then have  $F: \forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C \vee S' \in (\text{extF } C)$ 
    by (simp only: extensionFin Un-iff)
  have  $\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$ 
proof (rule sallI)
  fix  $S'$ 
  assume  $S' \subseteq S$ 
  show finite  $S' \longrightarrow S' \in C$ 
proof (rule impI)

```

```

assume finite S'
have finite S'  $\longrightarrow S' \in C \vee S' \in (\text{extF } C)$ 
  using F  $\langle S' \subseteq S \rangle$  by (rule sspec)
then have  $S' \in C \vee S' \in (\text{extF } C)$ 
  using  $\langle \text{finite } S' \rangle$  by (rule mp)
thus  $S' \in C$ 
proof (rule disjE)
  assume  $S' \in C$ 
  thus  $S' \in C$ 
  by this
next
  assume  $S' \in (\text{extF } C)$ 
  then have  $S': \forall S'' \subseteq S'. \text{finite } S'' \longrightarrow S'' \in C$ 
    unfolding extF by (rule CollectD)
  have  $S' \subseteq S'$ 
    by (simp only: subset-refl)
  have  $\text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$ 
    using  $S' \langle S' \subseteq S' \rangle$  by (rule sspec)
  thus  $S' \in C$ 
    using  $\langle \text{finite } S' \rangle$  by (rule mp)
qed
qed
qed
then have  $S \in \{S. \forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C\}$ 
  by (rule CollectI)
thus  $S \in (\text{extensionFin } C)$ 
  by (simp only: extF extensionFin UnI2)
qed
qed
qed

```

Por otro lado, para probar que $C' = C \cup E$ verifica la propiedad de consistencia proposicional, consideraremos un conjunto $S \in C'$ y utilizaremos fundamentalmente dos lemas auxiliares: uno para el caso en que $S \in C$ y otro para el caso en que $S \in E$.

En primer lugar, vamos a probar el primer lema auxiliar para el caso en que $S \in C$, formalizado como *ex3-pcp-SinC*. Dicho lema prueba que, si C es una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, y sea $S \in C$, se verifican las condiciones del lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional para la extensión C' :

- $\perp \notin S$.

- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C' .
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a S , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C' o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C' .

lemma *ex3-pcp-SinC*:

assumes *pcp* C

subset-closed C

$S \in C$

shows $\perp \notin S \wedge$

$(\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}) \wedge$

$(\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)) \wedge$

$(\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C))$

proof –

have *PCP*: $\forall S \in C.$

$\perp \notin S$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

using *assms*(1) **by** (*rule pcp-alt1*)

have *H*: $\perp \notin S$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

using *PCP* $\langle S \in C \rangle$ **by** (*rule bspec*)

then have *A1*: $\perp \notin S$

by (*rule conjunct1*)

have *A2*: $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$

using *H* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have *S3*: $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$

using *H* **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have *A3*: $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$

proof (*rule allI*) +

fix $F G H$

show $\text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$

proof (*rule impI*) +

assume $\text{Con } F G H$

```

assume  $F \in S$ 
have  $\text{Con } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
  using  $S3$  by (iprover elim: allE)
then have  $F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C$ 
  using  $\langle \text{Con } F \ G \ H \rangle$  by (rule mp)
then have  $\{G, H\} \cup S \in C$ 
  using  $\langle F \in S \rangle$  by (rule mp)
thus  $\{G, H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ 
  unfolding extensionFin by (rule UnI1)
qed
qed
have  $S4: \forall F \ G \ H. \text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
  using  $H$  by (iprover elim: conjunct2)
have  $A4: \forall F \ G \ H. \text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in$ 
(extensionFin  $C$ )
proof (rule allI) +
  fix  $F \ G \ H$ 
  show  $\text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in (\text{extensionFin}$ 
 $C)$ 
proof (rule impI) +
  assume  $\text{Dis } F \ G \ H$ 
  assume  $F \in S$ 
  have  $\text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
    using  $S4$  by (iprover elim: allE)
  then have  $F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
    using  $\langle \text{Dis } F \ G \ H \rangle$  by (rule mp)
  then have  $\{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C$ 
    using  $\langle F \in S \rangle$  by (rule mp)
  thus  $\{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ 
proof (rule disjE)
  assume  $\{G\} \cup S \in C$ 
  then have  $\{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ 
    unfolding extensionFin by (rule UnI1)
  thus  $\{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ 
    by (rule disjI1)
next
  assume  $\{H\} \cup S \in C$ 
  then have  $\{H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ 
    unfolding extensionFin by (rule UnI1)
  thus  $\{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ 

```



```

    by (rule disjI2)
  qed
qed
qed
show  $\perp \notin S \wedge$ 
  ( $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ )  $\wedge$ 
  ( $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ )  $\wedge$ 
  ( $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in$ 
  ( $\text{extensionFin } C$ ))
  using A1 A2 A3 A4 by (iprover intro: conjI)
qed

```

Como hemos señalado con anterioridad, para probar el caso en que $S \in E$, donde E es la colección formada por aquellos conjuntos cuyos subconjuntos finitos pertenecen a C , precisaremos de distintos lemas auxiliares. El primero de ellos demuestra detalladamente que si C es una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, $S \in E$ y sea F una fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 , se verifica que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a la extensión $C' = C \cup E$.

lemma *ex3-pcp-SinE-CON*:

```

  assumes pcp C
    subset-closed C
     $S \in (\text{extF } C)$ 
     $\text{Con } F G H$ 
     $F \in S$ 
  shows  $\{G, H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ 
proof -
  have PCP:  $\forall S \in C.$ 
     $\perp \notin S$ 
     $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
     $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
     $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
  using assms(1) by (rule pcp-alt1)
  have 1:  $\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in C$ 
proof (rule sallI)
  fix S'
  assume  $S' \subseteq S$ 
  show  $\text{finite } S' \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in C$ 
proof (rule implI)+
  assume finite S'
  assume  $F \in S'$ 
  have E:  $\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$ 

```

```

using assms(3) unfolding extF by (rule CollectD)
then have finite S' → S' ∈ C
  using  $\langle S' \subseteq S \rangle$  by (rule sspec)
then have  $S' \in C$ 
  using  $\langle \text{finite } S' \rangle$  by (rule mp)
have  $\perp \notin S'$ 
   $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S' \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S' \longrightarrow \text{False})$ 
   $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in C)$ 
   $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G\} \cup S' \in C \vee \{H\} \cup S' \in C)$ 
  using PCP  $\langle S' \in C \rangle$  by (rule bspec)
then have  $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in C$ 
  by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
then have  $\text{Con } F G H \longrightarrow F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in C$ 
  by (iprover elim: allE)
then have  $F \in S' \longrightarrow \{G, H\} \cup S' \in C$ 
  using assms(4) by (rule mp)
thus  $\{G, H\} \cup S' \in C$ 
  using  $\langle F \in S' \rangle$  by (rule mp)
qed
qed
have  $\{G, H\} \cup S \in (\text{extF } C)$ 
  unfolding mem-Collect-eq Un-iff extF
proof (rule sallI)
  fix  $S'$ 
  assume  $H: S' \subseteq \{G, H\} \cup S$ 
  show finite S' → S' ∈ C
  proof (rule impI)
    assume finite S'
    have  $S' - \{G, H\} \subseteq S$ 
      using H by (simp only: Diff-subset-conv)
    have  $F \in S \wedge (S' - \{G, H\} \subseteq S)$ 
      using assms(5)  $\langle S' - \{G, H\} \subseteq S \rangle$  by (rule conjI)
    then have  $\text{insert } F (S' - \{G, H\}) \subseteq S$ 
      by (simp only: insert-subset)
    have  $F1: \text{finite } (\text{insert } F (S' - \{G, H\})) \longrightarrow F \in (\text{insert } F (S' - \{G, H\})) \longrightarrow \{G, H\} \cup$ 
       $(\text{insert } F (S' - \{G, H\})) \in C$ 
      using 1  $\langle \text{insert } F (S' - \{G, H\}) \subseteq S \rangle$  by (rule sspec)
    have finite  $(S' - \{G, H\})$ 
      using  $\langle \text{finite } S' \rangle$  by (rule finite-Diff)
    then have finite  $(\text{insert } F (S' - \{G, H\}))$ 

```

```

    by (rule finite.insertI)
  have F2:  $F \in (\text{insert } F \ (S' - \{G, H\})) \longrightarrow \{G, H\} \cup (\text{insert } F \ (S' - \{G, H\})) \in C$ 
    using F1  $\langle \text{finite } (\text{insert } F \ (S' - \{G, H\})) \rangle$  by (rule mp)
  have F  $\in (\text{insert } F \ (S' - \{G, H\}))$ 
    by (simp only: insertI1)
  have F3:  $\{G, H\} \cup (\text{insert } F \ (S' - \{G, H\})) \in C$ 
    using F2  $\langle F \in \text{insert } F \ (S' - \{G, H\}) \rangle$  by (rule mp)
  have IU1:  $\text{insert } F \ (S' - \{G, H\}) = \{F\} \cup (S' - \{G, H\})$ 
    by (rule insert-is-Un)
  have IU2:  $\text{insert } F \ (\{G, H\} \cup S') = \{F\} \cup (\{G, H\} \cup S')$ 
    by (rule insert-is-Un)
  have GH:  $\text{insert } G \ (\text{insert } H \ S') = \{G, H\} \cup S'$ 
    by (rule insertSetElem)
  have  $\{G, H\} \cup (\text{insert } F \ (S' - \{G, H\})) = \{G, H\} \cup (\{F\} \cup (S' - \{G, H\}))$ 
    by (simp only: IU1)
  also have  $\dots = \{F\} \cup (\{G, H\} \cup (S' - \{G, H\}))$ 
    by (simp only: Un-left-commute)
  also have  $\dots = \{F\} \cup (\{G, H\} \cup S')$ 
    by (simp only: Un-Diff-cancel)
  also have  $\dots = \text{insert } F \ (\{G, H\} \cup S')$ 
    by (simp only: IU2)
  also have  $\dots = \text{insert } F \ (\text{insert } G \ (\text{insert } H \ S'))$ 
    by (simp only: GH)
  finally have F4:  $\{G, H\} \cup (\text{insert } F \ (S' - \{G, H\})) = \text{insert } F \ (\text{insert } G \ (\text{insert } H \ S'))$ 
    by this
  have C1:  $\text{insert } F \ (\text{insert } G \ (\text{insert } H \ S')) \in C$ 
    using F3 by (simp only: F4)
  have  $S' \subseteq \text{insert } F \ S'$ 
    by (rule subset-insertI)
  then have C2:  $S' \subseteq \text{insert } F \ (\text{insert } G \ (\text{insert } H \ S'))$ 
    by (simp only: subset-insertI2)
  let ?S =  $\text{insert } F \ (\text{insert } G \ (\text{insert } H \ S'))$ 
  have  $\forall S \in C. \forall S' \subseteq S. S' \in C$ 
    using assms(2) by (simp only: subset-closed-def)
  then have  $\forall S' \subseteq ?S. S' \in C$ 
    using C1 by (rule bspec)
  thus  $S' \in C$ 
    using C2 by (rule sspec)
qed
qed

```

thus $\{G, H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$
unfolding *extensionFin* **by** (rule *UnI2*)
qed

Seguidamente, vamos a probar el lema auxiliar *ex3-pcp-SinE-DIS*. Este demuestra que si C es una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, $S \in E$ y sea F una fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 , se verifica que o bien $\{\beta_1\} \cup S \in C'$ o bien $\{\beta_2\} \cup S \in C'$. Dicha prueba se realizará por reducción al absurdo. Para ello precisaremos de dos lemas previos que nos permitan llegar a una contradicción: *ex3-pcp-SinE-DIS-auxEx* y *ex3-pcp-SinE-DIS-auxFalse*.

En primer lugar, veamos la demostración del lema *ex3-pcp-SinE-DIS-auxEx*. Este prueba que dada C una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, $S \in E$ y sea F es una fórmula de tipo β de componentes β_1 y β_2 , si consideramos S_1 y S_2 subconjuntos finitos cualesquiera de S tales que $F \in S_1$ y $F \in S_2$, entonces existe una fórmula $I \in \{\beta_1, \beta_2\}$ tal que se verifica que tanto $\{I\} \cup S_1$ como $\{I\} \cup S_2$ están en C .

lemma *ex3-pcp-SinE-DIS-auxEx*:

assumes *pcp* C
 subset-closed C
 $S \in (\text{extF } C)$
 $\text{Dis } F \ G \ H$
 $S_1 \subseteq S$
 finite S_1
 $F \in S_1$
 $S_2 \subseteq S$
 finite S_2
 $F \in S_2$
shows $\exists I \in \{G, H\}. \text{insert } I \ S_1 \in C \wedge \text{insert } I \ S_2 \in C$

proof –

let $?S = S_1 \cup S_2$
have $S_1 \subseteq ?S$
 by (*simp only: Un-upper1*)
have $S_2 \subseteq ?S$
 by (*simp only: Un-upper2*)
have *finite* $?S$
 using *assms*(6) *assms*(9) **by** (rule *finite-UnI*)
have $?S \subseteq S$
 using *assms*(5) *assms*(8) **by** (*simp only: Un-subset-iff*)
have $\forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$
 using *assms*(3) **unfolding** *extF* **by** (rule *CollectD*)

then have $\text{finite } ?S \longrightarrow ?S \in C$
using $\langle ?S \subseteq S \rangle$ **by** (rule *sspec*)
then have $?S \in C$
using $\langle \text{finite } ?S \rangle$ **by** (rule *mp*)
have $F \in ?S$
using *assms*(7) **by** (rule *UnI1*)
have $\forall S \in C. \perp \notin S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$
using *assms*(1) **by** (rule *pcp-alt1*)
then have $\perp \notin ?S$
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in ?S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in ?S \longrightarrow \text{False})$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in ?S \longrightarrow \{G, H\} \cup ?S \in C)$
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in ?S \longrightarrow \{G\} \cup ?S \in C \vee \{H\} \cup ?S \in C)$
using $\langle ?S \in C \rangle$ **by** (rule *bspec*)
then have $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in ?S \longrightarrow \{G\} \cup ?S \in C \vee \{H\} \cup ?S \in C$
by (*iprover elim: conjunct2*)
then have $\text{Dis } F G H \longrightarrow F \in ?S \longrightarrow \{G\} \cup ?S \in C \vee \{H\} \cup ?S \in C$
by (*iprover elim: allE*)
then have $F \in ?S \longrightarrow \{G\} \cup ?S \in C \vee \{H\} \cup ?S \in C$
using *assms*(4) **by** (rule *mp*)
then have $\text{insIsUn}:\{G\} \cup ?S \in C \vee \{H\} \cup ?S \in C$
using $\langle F \in ?S \rangle$ **by** (rule *mp*)
have $\text{insG}:\text{insert } G ?S = \{G\} \cup ?S$
by (rule *insert-is-Un*)
have $\text{insH}:\text{insert } H ?S = \{H\} \cup ?S$
by (rule *insert-is-Un*)
have $\text{insert } G ?S \in C \vee \text{insert } H ?S \in C$
using *insG insH* **by** (*simp only: insIsUn*)
then have $(\text{insert } G ?S \in C \vee \text{insert } H ?S \in C) \vee (\exists I \in \{\}. \text{insert } I ?S \in C)$
by (*simp only: disjI1*)
then have $\text{insert } G ?S \in C \vee (\text{insert } H ?S \in C \vee (\exists I \in \{\}. \text{insert } I ?S \in C))$
by (*simp only: disj-assoc*)
then have $\text{insert } G ?S \in C \vee (\exists I \in \{H\}. \text{insert } I ?S \in C)$
by (*simp only: bex-simps*(5))
then have $1:\exists I \in \{G, H\}. \text{insert } I ?S \in C$
by (*simp only: bex-simps*(5))
obtain I **where** $I \in \{G, H\}$ **and** $\text{insert } I ?S \in C$
using 1 **by** (rule *bexE*)

```

have SC:  $\forall S \in C. \forall S' \subseteq S. S' \in C$ 
  using assms(2) by (simp only: subset-closed-def)
then have 2:  $\forall S' \subseteq (\text{insert } I ?S). S' \in C$ 
  using  $\langle \text{insert } I ?S \in C \rangle$  by (rule bspec)
have  $\text{insert } I S1 \subseteq \text{insert } I ?S$ 
  using  $\langle S1 \subseteq ?S \rangle$  by (rule insert-mono)
have  $\text{insert } I S1 \in C$ 
  using 2  $\langle \text{insert } I S1 \subseteq \text{insert } I ?S \rangle$  by (rule sspec)
have  $\text{insert } I S2 \subseteq \text{insert } I ?S$ 
  using  $\langle S2 \subseteq ?S \rangle$  by (rule insert-mono)
have  $\text{insert } I S2 \in C$ 
  using 2  $\langle \text{insert } I S2 \subseteq \text{insert } I ?S \rangle$  by (rule sspec)
have  $\text{insert } I S1 \in C \wedge \text{insert } I S2 \in C$ 
  using  $\langle \text{insert } I S1 \in C \rangle \langle \text{insert } I S2 \in C \rangle$  by (rule conjI)
thus  $\exists I \in \{G, H\}. \text{insert } I S1 \in C \wedge \text{insert } I S2 \in C$ 
  using  $\langle I \in \{G, H\} \rangle$  by (rule bexI)
qed

```

Finalmente, el lema *ex3-pcp-SinE-DIS-auxFalse* prueba que dada una colección C con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, $S \in E$ y sea F es una fórmula de tipo β de componentes β_1 y β_2 , si consideramos S_1 y S_2 subconjuntos finitos cualesquiera de S tales que $F \in S_1, F \in S_2, \{\beta_1\} \cup S_1 \notin C$ y $\{\beta_2\} \cup S_2 \notin C$, llegamos a una contradicción.

lemma *ex3-pcp-SinE-DIS-auxFalse*:

```

assumes pcp C
  subset-closed C
   $S \in (\text{extF } C)$ 
  Dis F G H
   $F \in S$ 
   $S1 \subseteq S$ 
  finite S1
   $\text{insert } G S1 \notin C$ 
   $S2 \subseteq S$ 
  finite S2
   $\text{insert } H S2 \notin C$ 
shows False

```

proof —

```

let  $?S1 = \text{insert } F S1$ 
let  $?S2 = \text{insert } F S2$ 
have SC:  $\forall S \in C. \forall S' \subseteq S. S' \in C$ 
  using assms(2) by (simp only: subset-closed-def)

```

```

have 1:  $?S1 \subseteq S$ 
  using  $\langle F \in S \rangle \langle S1 \subseteq S \rangle$  by (simp only: insert-subset)
have 2: finite  $?S1$ 
  using  $\langle \text{finite } S1 \rangle$  by (simp only: finite-insert)
have 3:  $F \in ?S1$ 
  by (simp only: insertI1)
have 4:  $\text{insert } G ?S1 \notin C$ 
proof (rule ccontr)
  assume  $\neg(\text{insert } G ?S1 \notin C)$ 
  then have  $\text{insert } G ?S1 \in C$ 
    by (rule notnotD)
  have SC1:  $\forall S' \subseteq (\text{insert } G ?S1). S' \in C$ 
    using SC  $\langle \text{insert } G ?S1 \in C \rangle$  by (rule bspec)
  have  $\text{insert } G S1 \subseteq \text{insert } F (\text{insert } G S1)$ 
    by (rule subset-insertI)
  then have  $\text{insert } G S1 \subseteq \text{insert } G ?S1$ 
    by (simp only: insert-commute)
  have  $\text{insert } G S1 \in C$ 
    using SC1  $\langle \text{insert } G S1 \subseteq \text{insert } G ?S1 \rangle$  by (rule sspec)
  show False
    using assms(8)  $\langle \text{insert } G S1 \in C \rangle$  by (rule notE)
qed
have 5:  $?S2 \subseteq S$ 
  using  $\langle F \in S \rangle \langle S2 \subseteq S \rangle$  by (simp only: insert-subset)
have 6: finite  $?S2$ 
  using  $\langle \text{finite } S2 \rangle$  by (simp only: finite-insert)
have 7:  $F \in ?S2$ 
  by (simp only: insertI1)
have 8:  $\text{insert } H ?S2 \notin C$ 
proof (rule ccontr)
  assume  $\neg(\text{insert } H ?S2 \notin C)$ 
  then have  $\text{insert } H ?S2 \in C$ 
    by (rule notnotD)
  have SC2:  $\forall S' \subseteq (\text{insert } H ?S2). S' \in C$ 
    using SC  $\langle \text{insert } H ?S2 \in C \rangle$  by (rule bspec)
  have  $\text{insert } H S2 \subseteq \text{insert } F (\text{insert } H S2)$ 
    by (rule subset-insertI)
  then have  $\text{insert } H S2 \subseteq \text{insert } H ?S2$ 
    by (simp only: insert-commute)
  have  $\text{insert } H S2 \in C$ 

```

```

    using SC2 (insert H S2  $\subseteq$  insert H ?S2) by (rule sspec)
  show False
    using assms(11) (insert H S2  $\in$  C) by (rule notE)
qed
have Ex:  $\exists I \in \{G, H\}. \text{insert } I ?S1 \in C \wedge \text{insert } I ?S2 \in C$ 
  using assms(1) assms(2) assms(3) assms(4) 1 2 3 5 6 7 by (rule ex3-pcp-SinE-DIS-auxEx)
have  $\forall I \in \{G, H\}. \text{insert } I ?S1 \notin C \vee \text{insert } I ?S2 \notin C$ 
  using 4 8 by simp
then have  $\forall I \in \{G, H\}. \neg(\text{insert } I ?S1 \in C \wedge \text{insert } I ?S2 \in C)$ 
  by (simp only: de-Morgan-conj)
then have  $\neg(\exists I \in \{G, H\}. \text{insert } I ?S1 \in C \wedge \text{insert } I ?S2 \in C)$ 
  by (simp only: bex-simps(8))
thus False
  using Ex by (rule notE)
qed

```

Una vez introducidos los lemas anteriores, podemos probar el lema *ex3-pcp-SinE-DIS* que demuestra que si C es una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, $S \in E$ y sea F una fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 , se verifica que o bien $\{\beta_1\} \cup S \in C'$ o bien $\{\beta_2\} \cup S \in C'$. Además, para dicha prueba necesitaremos los siguientes lemas auxiliares en Isabelle.

lemma *sall-simps-not-all*:

```

  assumes  $\neg(\forall x \subseteq A. P\ x)$ 
  shows  $\exists x \subseteq A. (\neg P\ x)$ 
  using assms by blast

```

lemma *subxE*: $\exists x \subseteq A. P\ x \implies (\bigwedge x. x \subseteq A \implies P\ x \implies Q) \implies Q$
 by blast

De este modo, procedamos con la demostración detallada de *ex3-pcp-SinE-DIS*.

lemma *ex3-pcp-SinE-DIS*:

```

  assumes pcp C
    subset-closed C
     $S \in (\text{extF } C)$ 
     $\text{Dis } F\ G\ H$ 
     $F \in S$ 
  shows  $\{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)$ 
proof –
  have  $(\text{extF } C) \subseteq (\text{extensionFin } C)$ 
    unfolding extensionFin by (rule Un-upper2)
  have PCP:  $\forall S \in C.$ 

```

```

 $\perp \notin S$ 
 $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$ 
 $\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$ 
 $\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$ 
using assms(1) by (rule pcp-alt1)
have  $E: \forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$ 
using assms(3) unfolding extF by (rule CollectD)
then have  $E': \forall S'. S' \subseteq S \longrightarrow \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$ 
by blast
have  $SC: \forall S \in C. \forall S' \subseteq S. S' \in C$ 
using assms(2) by (simp only: subset-closed-def)
have  $\text{insert } G S \in (\text{extF } C) \vee \text{insert } H S \in (\text{extF } C)$ 
proof (rule ccontr)
assume  $\neg(\text{insert } G S \in (\text{extF } C) \vee \text{insert } H S \in (\text{extF } C))$ 
then have  $\text{Conj}: \neg(\text{insert } G S \in (\text{extF } C)) \wedge \neg(\text{insert } H S \in (\text{extF } C))$ 
by (simp only: simp-thms(8,25) de-Morgan-disj)
then have  $\neg(\text{insert } G S \in (\text{extF } C))$ 
by (rule conjunct1)
then have  $\neg(\forall S' \subseteq (\text{insert } G S). \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C)$ 
unfolding extF by (simp add: mem-Collect-eq)
then have  $\text{Ex1}: \exists S' \subseteq (\text{insert } G S). \neg(\text{finite } S' \longrightarrow S' \in C)$ 
by (rule sall-simps-not-all)
obtain  $S1$  where  $S1 \subseteq \text{insert } G S$  and  $\neg(\text{finite } S1 \longrightarrow S1 \in C)$ 
using  $\text{Ex1}$  by (rule subexE)
have  $\text{finite } S1 \wedge S1 \notin C$ 
using  $\neg(\text{finite } S1 \longrightarrow S1 \in C)$  by (simp only: simp-thms(8) not-imp)
then have  $\text{finite } S1$ 
by (rule conjunct1)
have  $S1 \notin C$ 
using  $\text{finite } S1 \wedge S1 \notin C$  by (rule conjunct2)
then have  $\text{insert } G S1 \notin C$ 
proof –
have  $S1 \subseteq S \longrightarrow \text{finite } S1 \longrightarrow S1 \in C$ 
using  $E'$  by (rule allE)
then have  $\neg S1 \subseteq S$ 
using  $\neg(\text{finite } S1 \longrightarrow S1 \in C)$  by (rule mt)
then have  $(S1 \subseteq \text{insert } G S) \neq (S1 \subseteq S)$ 
using  $S1 \subseteq \text{insert } G S$  by simp
then have  $\text{notSI}: \neg(S1 \subseteq \text{insert } G S \longleftrightarrow S1 \subseteq S)$ 
by blast

```

```

have subsetInsert:  $G \notin S1 \implies S1 \subseteq \text{insert } G \ S \longleftrightarrow S1 \subseteq S$ 
  by (rule subset-insert)
have  $\neg(G \notin S1)$ 
  using notSI subsetInsert by (rule contrapos-nn)
then have  $G \in S1$ 
  by (rule notnotD)
then have  $\text{insert } G \ S1 = S1$ 
  by (rule insert-absorb)
show ?thesis
  using  $\langle S1 \notin C \rangle$  by (simp only: simp-thms(8)  $\langle \text{insert } G \ S1 = S1 \rangle$ )
qed
let ?S1 =  $S1 - \{G\}$ 
have  $\text{insert } G \ S = \{G\} \cup S$ 
  by (rule insert-is-Un)
have  $S1 \subseteq \{G\} \cup S$ 
  using  $\langle S1 \subseteq \text{insert } G \ S \rangle$  by (simp only:  $\langle \text{insert } G \ S = \{G\} \cup S \rangle$ )
have 1:  $?S1 \subseteq S$ 
  using  $\langle S1 \subseteq \{G\} \cup S \rangle$  by (simp only: Diff-subset-conv)
have 2: finite ?S1
  using  $\langle \text{finite } S1 \rangle$  by (simp only: finite-Diff)
have  $\text{insert } G \ ?S1 = \text{insert } G \ S1$ 
  by (simp only: insert-Diff-single)
then have 3:  $\text{insert } G \ ?S1 \notin C$ 
  using  $\langle \text{insert } G \ S1 \notin C \rangle$  by (simp only: simp-thms(6,8)  $\langle \text{insert } G \ ?S1 = \text{insert } G \ S1 \rangle$ )
have  $\text{insert } H \ S \notin (\text{extF } C)$ 
  using Conj by (rule conjunct2)
then have  $\neg(\forall S' \subseteq (\text{insert } H \ S). \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C)$ 
  unfolding extF by (simp add: mem-Collect-eq)
then have Ex2:  $\exists S' \subseteq (\text{insert } H \ S). \neg(\text{finite } S' \longrightarrow S' \in C)$ 
  by (rule sall-simps-not-all)
obtain S2 where  $S2 \subseteq \text{insert } H \ S$  and  $\neg(\text{finite } S2 \longrightarrow S2 \in C)$ 
  using Ex2 by (rule subexE)
have  $\text{finite } S2 \wedge S2 \notin C$ 
  using  $\langle \neg(\text{finite } S2 \longrightarrow S2 \in C) \rangle$  by (simp only: simp-thms(8,25) not-imp)
then have finite S2
  by (rule conjunct1)
have  $S2 \notin C$ 
  using  $\langle \text{finite } S2 \wedge S2 \notin C \rangle$  by (rule conjunct2)
then have  $\text{insert } H \ S2 \notin C$ 
proof –

```

```

have  $S2 \subseteq S \longrightarrow \text{finite } S2 \longrightarrow S2 \in C$ 
  using  $E'$  by (rule allE)
then have  $\neg S2 \subseteq S$ 
  using  $\neg (\text{finite } S2 \longrightarrow S2 \in C)$  by (rule mt)
then have  $(S2 \subseteq \text{insert } H \ S) \neq (S2 \subseteq S)$ 
  using  $\langle S2 \subseteq \text{insert } H \ S \rangle$  by simp
then have notSI:  $\neg (S2 \subseteq \text{insert } H \ S \longleftrightarrow S2 \subseteq S)$ 
  by blast
have subsetInsert:  $H \notin S2 \implies S2 \subseteq \text{insert } H \ S \longleftrightarrow S2 \subseteq S$ 
  by (rule subset-insert)
have  $\neg (H \notin S2)$ 
  using notSI subsetInsert by (rule contrapos-nn)
then have  $H \in S2$ 
  by (rule notnotD)
then have  $\text{insert } H \ S2 = S2$ 
  by (rule insert-absorb)
show ?thesis
  using  $\langle S2 \notin C \rangle$  by (simp only: simp-thms(8)  $\langle \text{insert } H \ S2 = S2 \rangle$ )
qed
let ?S2 =  $S2 - \{H\}$ 
have  $\text{insert } H \ S = \{H\} \cup S$ 
  by (rule insert-is-Un)
have  $S2 \subseteq \{H\} \cup S$ 
  using  $\langle S2 \subseteq \text{insert } H \ S \rangle$  by (simp only:  $\langle \text{insert } H \ S = \{H\} \cup S \rangle$ )
have 4:  $?S2 \subseteq S$ 
  using  $\langle S2 \subseteq \{H\} \cup S \rangle$  by (simp only: Diff-subset-conv)
have 5:  $\text{finite } ?S2$ 
  using  $\langle \text{finite } S2 \rangle$  by (simp only: finite-Diff)
have  $\text{insert } H \ ?S2 = \text{insert } H \ S2$ 
  by (simp only: insert-Diff-single)
then have 6:  $\text{insert } H \ ?S2 \notin C$ 
  using  $\langle \text{insert } H \ S2 \notin C \rangle$  by (simp only: simp-thms(6,8)  $\langle \text{insert } H \ ?S2 = \text{insert } H \ S2 \rangle$ )
show False
using assms(1) assms(2) assms(3) assms(4) assms(5) 1 2 3 4 5 6 by (rule ex3-pcp-SinE-DIS-auxFalse)
qed
thus ?thesis
proof (rule disjE)
  assume  $\text{insert } G \ S \in (\text{extF } C)$ 
have insG:  $\text{insert } G \ S \in (\text{extensionFin } C)$ 
  using  $\langle (\text{extF } C) \subseteq (\text{extensionFin } C) \rangle$   $\langle \text{insert } G \ S \in (\text{extF } C) \rangle$  by (simp only: in-mono)

```

```

have insert G S = {G} ∪ S
  by (rule insert-is-Un)
then have {G} ∪ S ∈ (extensionFin C)
  using insG ⟨insert G S = {G} ∪ S⟩ by (simp only: insG)
thus ?thesis
  by (rule disjI1)
next
assume insert H S ∈ (extF C)
have insH: insert H S ∈ (extensionFin C)
  using ⟨(extF C) ⊆ (extensionFin C)⟩ ⟨insert H S ∈ (extF C)⟩ by (simp only: in-mono)
have insert H S = {H} ∪ S
  by (rule insert-is-Un)
then have {H} ∪ S ∈ (extensionFin C)
  using insH ⟨insert H S = {H} ∪ S⟩ by (simp only: insH)
thus ?thesis
  by (rule disjI2)
qed
qed

```

Probados los lemas *ex3-pcp-SinE-CON* y *ex3-pcp-SinE-DIS*, podemos demostrar que $C' = C \cup E$ verifica las condiciones del lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional para el caso en que $S \in E$, formalizado como *ex3-pcp-SinE*. Dicho lema prueba que, si C es una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, y sea $S \in E$, se verifican las condiciones:

- $\perp \notin S$.
- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in S$ y $\neg p \in S$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a S , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup S$ pertenece a C' .
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a S , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup S$ pertenece a C' o bien $\{\beta_2\} \cup S$ pertenece a C' .

lemma *ex3-pcp-SinE*:

```

assumes pcp C
  subset-closed C
  S ∈ (extF C)
shows  $\perp \notin S \wedge$ 
   $(\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}) \wedge$ 

```

$(\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in (\text{extensionFin } C)) \wedge$
 $(\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in (\text{extensionFin } C) \vee \{H\} \cup S \in$
 $(\text{extensionFin } C))$

proof –

have $PCP: \forall S \in C.$

$\perp \notin S \wedge$
 $(\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}) \wedge$
 $(\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C) \wedge$
 $(\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

using $\text{assms}(1)$ **by** $(\text{rule } \text{pcp-alt1})$

have $E: \forall S' \subseteq S. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$

using $\text{assms}(3)$ **unfolding** extF **by** $(\text{rule } \text{CollectD})$

have $\{\} \subseteq S$

by $(\text{rule } \text{empty-subsetI})$

have $C1: \perp \notin S$

proof $(\text{rule } \text{ccontr})$

assume $\neg(\perp \notin S)$

then have $\perp \in S$

by $(\text{rule } \text{notnotD})$

then have $\perp \in S \wedge \{\} \subseteq S$

using $\langle \{\} \subseteq S \rangle$ **by** $(\text{rule } \text{conjI})$

then have $\text{insert } \perp \{\} \subseteq S$

by $(\text{simp only: insert-subset})$

have $\text{finite } \{\}$

by $(\text{rule } \text{finite.emptyI})$

then have $\text{finite } (\text{insert } \perp \{\})$

by $(\text{rule } \text{finite.insertI})$

have $\text{finite } (\text{insert } \perp \{\}) \longrightarrow (\text{insert } \perp \{\}) \in C$

using $E \langle (\text{insert } \perp \{\}) \subseteq S \rangle$ **by** simp

then have $(\text{insert } \perp \{\}) \in C$

using $\text{finite } (\text{insert } \perp \{\})$ **by** $(\text{rule } \text{mp})$

have $\perp \notin (\text{insert } \perp \{\}) \wedge$

$(\forall k. \text{Atom } k \in (\text{insert } \perp \{\}) \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in (\text{insert } \perp \{\}) \longrightarrow \text{False}) \wedge$
 $(\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in (\text{insert } \perp \{\}) \longrightarrow \{G, H\} \cup (\text{insert } \perp \{\}) \in C) \wedge$
 $(\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in (\text{insert } \perp \{\}) \longrightarrow \{G\} \cup (\text{insert } \perp \{\}) \in C \vee \{H\} \cup$
 $(\text{insert } \perp \{\}) \in C)$

using $PCP \langle (\text{insert } \perp \{\}) \in C \rangle$ **by** blast

then have $\perp \notin (\text{insert } \perp \{\})$

by $(\text{rule } \text{conjunct1})$

have $\perp \in (\text{insert } \perp \{\})$

```

  by (rule insertI1)
show False
  using  $\langle \perp \notin (\text{insert } \perp \ \{\}) \rangle \langle \perp \in (\text{insert } \perp \ \{\}) \rangle$  by (rule notE)
qed
have C2:  $\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ 
proof (rule allI)
  fix k
  show  $\text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False}$ 
  proof (rule impI)+
    assume  $\text{Atom } k \in S$ 
    assume  $\neg (\text{Atom } k) \in S$ 
    let ?A = insert (Atom k) (insert ( $\neg (\text{Atom } k)$ )  $\{\}$ )
    have  $\text{Atom } k \in ?A$ 
      by (simp only: insert-iff simp-thms)
    have  $\neg (\text{Atom } k) \in ?A$ 
      by (simp only: insert-iff simp-thms)
    have inSubset: insert ( $\neg (\text{Atom } k)$ )  $\{\} \subseteq S$ 
      using  $\langle \neg (\text{Atom } k) \in S \rangle \langle \{\} \subseteq S \rangle$  by (simp only: insert-subset)
    have  $?A \subseteq S$ 
      using inSubset  $\langle \text{Atom } k \in S \rangle$  by (simp only: insert-subset)
    have finite  $\{\}$ 
      by (simp only: finite.emptyI)
    then have finite (insert ( $\neg (\text{Atom } k)$ )  $\{\}$ )
      by (rule finite.insertI)
    then have finite ?A
      by (rule finite.insertI)
    have finite ?A  $\longrightarrow ?A \in C$ 
      using E  $\langle ?A \subseteq S \rangle$  by (rule sspec)
    then have ?A  $\in C$ 
      using (finite ?A) by (rule mp)
    have  $\perp \notin ?A$ 
       $\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in ?A \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in ?A \longrightarrow \text{False})$ 
       $\wedge (\forall F \ G \ H. \text{Con } F \ G \ H \longrightarrow F \in ?A \longrightarrow \{G, H\} \cup ?A \in C)$ 
       $\wedge (\forall F \ G \ H. \text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in ?A \longrightarrow \{G\} \cup ?A \in C \vee \{H\} \cup ?A \in C)$ 
      using PCP  $\langle ?A \in C \rangle$  by (rule bspec)
    then have  $\forall k. \text{Atom } k \in ?A \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in ?A \longrightarrow \text{False}$ 
      by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
    then have  $\text{Atom } k \in ?A \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in ?A \longrightarrow \text{False}$ 
      by (iprover elim: allE)
    then have  $\neg (\text{Atom } k) \in ?A \longrightarrow \text{False}$ 

```

```

    using ⟨Atom k ∈ ?A⟩ by (rule mp)
  thus False
    using ⟨¬(Atom k) ∈ ?A⟩ by (rule mp)
qed
qed
have C3: ∀ F G H. Con F G H ⟶ F ∈ S ⟶ {G,H} ∪ S ∈ (extensionFin C)
proof (rule allI)+
  fix F G H
  show Con F G H ⟶ F ∈ S ⟶ {G,H} ∪ S ∈ (extensionFin C)
proof (rule impI)+
  assume Con F G H
  assume F ∈ S
  show {G,H} ∪ S ∈ (extensionFin C)
  using assms(1) assms(2) assms(3) ⟨Con F G H⟩ ⟨F ∈ S⟩ by (simp only: ex3-pcp-SinE-CON)
qed
qed
have C4: ∀ F G H. Dis F G H ⟶ F ∈ S ⟶ {G} ∪ S ∈ (extensionFin C) ∨ {H} ∪ S ∈ (extensionFin C)
proof (rule allI)+
  fix F G H
  show Dis F G H ⟶ F ∈ S ⟶ {G} ∪ S ∈ (extensionFin C) ∨ {H} ∪ S ∈ (extensionFin C)
proof (rule impI)+
  assume Dis F G H
  assume F ∈ S
  show {G} ∪ S ∈ (extensionFin C) ∨ {H} ∪ S ∈ (extensionFin C)
  using assms(1) assms(2) assms(3) ⟨Dis F G H⟩ ⟨F ∈ S⟩ by (rule ex3-pcp-SinE-DIS)
qed
qed
show ?thesis
  using C1 C2 C3 C4 by (iprover intro: conjI)
qed

```

En conclusión, la prueba detallada completa en Isabelle que demuestra que la extensión C' verifica la propiedad de consistencia proposicional dada una colección C que también la verifique y sea cerrada bajo subconjuntos es la siguiente.

```

lemma ex3-pcp:
  assumes pcp C
    subset-closed C
  shows pcp (extensionFin C)
unfolding pcp-alt

```

proof (rule ballI)

have $PCP: \forall S \in C.$

$\perp \notin S$

$\wedge (\forall k. Atom\ k \in S \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in S \longrightarrow False)$

$\wedge (\forall F\ G\ H. Con\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall F\ G\ H. Dis\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C)$

using *assms*(1) **by** (rule *pcp-alt1*)

fix S

assume $S \in (extensionFin\ C)$

then have $S \in C \vee S \in (extF\ C)$

unfolding *extensionFin* **by** (simp only: *Un-iff*)

thus $\perp \notin S \wedge$

$(\forall k. Atom\ k \in S \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in S \longrightarrow False) \wedge$

$(\forall F\ G\ H. Con\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in (extensionFin\ C)) \wedge$

$(\forall F\ G\ H. Dis\ F\ G\ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in (extensionFin\ C) \vee \{H\} \cup S \in$

$(extensionFin\ C))$

proof (rule *disjE*)

assume $S \in C$

show ?thesis

using *assms* $\langle S \in C \rangle$ **by** (rule *ex3-pcp-SinC*)

next

assume $S \in (extF\ C)$

show ?thesis

using *assms* $\langle S \in (extF\ C) \rangle$ **by** (rule *ex3-pcp-SinE*)

qed

qed

Por último, podemos dar la prueba completa del lema 3.0.5 en Isabelle.

lemma *ex3*:

assumes *pcp* C

subset-closed C

shows $\exists C'. C \subseteq C' \wedge pcp\ C' \wedge finite-character\ C'$

proof –

let $?C' = extensionFin\ C$

have $C1: C \subseteq ?C'$

unfolding *extensionFin* **by** (simp only: *Un-upper1*)

have $C2: finite-character\ (?C')$

using *assms*(2) **by** (rule *ex3-finite-character*)

have $C3: pcp\ (?C')$

using *assms* **by** (rule *ex3-pcp*)

have $C \subseteq ?C' \wedge pcp\ ?C' \wedge finite-character\ ?C'$


```
    using C1 C2 C3 by (iprover intro: conjI)
  thus ?thesis
    by (rule exI)
qed
```


Capítulo 4

Teorema de existencia de modelo

En este capítulo se demuestra el *Teorema de Existencia de Modelo* para la Lógica Proposicional y el *Teorema de Compacidad*. Para ello, definiremos ciertas sucesiones monótonas de conjuntos de fórmulas a partir de una colección y un conjunto perteneciente a ella.

4.1 Sucesiones de conjuntos

A partir de una colección C y un conjunto $S \in C$, vamos a definir una sucesión monótona $\{S_n\}$ de conjuntos de fórmulas proposicionales. Se demostrarán las siguientes propiedades:

- Si C verifica la propiedad de consistencia proposicional, entonces todo elemento de la sucesión $\{S_n\}$ pertenece a C .
- Para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica $\bigcup_{n \leq m} S_n = S_m$
- Definiremos el límite de dichas sucesiones, probando que todo conjunto de $\{S_n\}$ está contenido en el límite.
- Si una fórmula pertenece al límite de la sucesión $\{S_n\}$, entonces pertenece a algún conjunto de dicha sucesión.
- Si S' es un subconjunto finito del límite de la sucesión $\{S_n\}$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $S' \subseteq S_k$.

Recordemos que el conjunto de las fórmulas proposicionales se define recursivamente a partir de un alfabeto numerable de variables proposicionales. Por lo tanto, el conjunto de fórmulas proposicionales es igualmente numerable, de modo que es posible enumerar sus elementos. Una vez realizada esta observación, veamos la definición

de sucesión de conjuntos de fórmulas proposicionales a partir de una colección y un conjunto de la misma.

Definición 4.1.1 Sea C una colección de conjuntos de fórmulas proposicionales, $S \in C$ y $F_1, F_2, F_3 \dots$ una enumeración de las fórmulas proposicionales. Se define la sucesión de conjuntos de C a partir de S como sigue:

$$S_0 = S$$

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{F_n\} & \text{si } S_n \cup \{F_n\} \in C \\ S_n & \text{c.c} \end{cases}$$

Para su formalización en Isabelle se ha introducido una instancia en la teoría de *Sintaxis* que indica explícitamente que el conjunto de las fórmulas proposicionales es numerable, probado mediante el método *countable-datatype* de Isabelle.

instance formula :: (countable) countable by countable-datatype

De esta manera se genera en Isabelle una enumeración predeterminada de los elementos del conjunto, junto con herramientas para probar propiedades referentes a la numerabilidad. En particular, en la formalización de la definición 4.1.1 se utilizará la función *from-nat* que, al aplicarla a un número natural n , nos devuelve la n -ésima fórmula proposicional según una enumeración predeterminada en Isabelle.

Puesto que la definición de las sucesiones en 4.1.1 se trata de una definición recursiva sobre la estructura recursiva de los números naturales, se formalizará en Isabelle mediante el tipo de funciones primitivas recursivas de la siguiente manera.

primrec *pcp-seq* **where**

pcp-seq $C\ S\ 0 = S \mid$
pcp-seq $C\ S\ (\text{Suc } n) = (\text{let } S_n = \text{pcp-seq } C\ S\ n; S_{n1} = \text{insert } (\text{from-nat } n)\ S_n \text{ in}$
 if $S_{n1} \in C$ *then* S_{n1} *else* $S_n)$

Veamos el primer resultado sobre dichas sucesiones.

Lema 4.1.2 Sea C una colección de conjuntos con la propiedad de consistencia proposicional, $S \in C$ y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S construida según la definición 4.1.1. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $S_n \in C$.

Procedamos con su demostración.

Demostración: El resultado se prueba por inducción en los números naturales que conforman los subíndices de la sucesión.

En primer lugar, tenemos que $S_0 = S$ pertenece a C por hipótesis.

Por otro lado, supongamos que $S_n \in C$. Probemos que $S_{n+1} \in C$. Si suponemos que $S_n \cup \{F_n\} \in C$, por definición tenemos que $S_{n+1} = S_n \cup \{F_n\}$, luego pertenece a C . En caso contrario, si suponemos que $S_n \cup \{F_n\} \notin C$, por definición tenemos que $S_{n+1} = S_n$, que pertenece igualmente a C por hipótesis de inducción. Por tanto, queda probado el resultado. \square

La formalización y demostración detallada del lema en Isabelle son las siguientes.

lemma

assumes $pcp\ C$

$S \in C$

shows $pcp\text{-}seq\ C\ S\ n \in C$

proof (*induction n*)

show $pcp\text{-}seq\ C\ S\ 0 \in C$

by (*simp only: pcp-seq.simps(1) (S ∈ C)*)

next

fix n

assume $HI: pcp\text{-}seq\ C\ S\ n \in C$

have $pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) = (let\ Sn = pcp\text{-}seq\ C\ S\ n;\ Sn1 = insert\ (from\text{-}nat\ n)\ Sn\ in\ if\ Sn1 \in C\ then\ Sn1\ else\ Sn)$

by (*simp only: pcp-seq.simps(2)*)

then have $SucDef: pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) = (if\ insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n) \in C\ then\ insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n)\ else\ pcp\text{-}seq\ C\ S\ n)$

by (*simp only: Let-def*)

show $pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) \in C$

proof (*cases*)

assume $1: insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n) \in C$

have $pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) = insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n)$

using $SucDef\ 1$ **by** (*simp only: if-True*)

thus $pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) \in C$

by (*simp only: 1*)

next

assume $2: insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n) \notin C$

have $pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) = pcp\text{-}seq\ C\ S\ n$

using $SucDef\ 2$ **by** (*simp only: if-False*)

thus $pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) \in C$

by (*simp only: HI*)

qed

qed

Del mismo modo, podemos probar el lema de manera automática en Isabelle.

lemma *pcp-seq-in*: $pcp\ C \implies S \in C \implies pcp\text{-}seq\ C\ S\ n \in C$

proof(*induction n*)

case (*Suc n*)

hence $pcp\text{-}seq\ C\ S\ n \in C$ **by** *simp*

thus ?*case* **by** (*simp add: Let-def*)

qed *simp*

Por otro lado, veamos la monotonía de dichas sucesiones.

Lema 4.1.3 *Toda sucesión de conjuntos construida a partir de una colección y un conjunto según la definición 4.1.1 es monótona.*

En Isabelle, se formaliza de la siguiente forma.

lemma $pcp\text{-}seq\ C\ S\ n \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n)$

oops

Procedamos con la demostración del lema.

Demostración: Sea una colección de conjuntos $C, S \in C$ y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1. Para probar que $\{S_n\}$ es monótona, basta probar que $S_n \subseteq S_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, el resultado es inmediato al considerar dos casos para todo $n \in \mathbb{N}$: $S_n \cup \{F_n\} \in C$ o $S_n \cup \{F_n\} \notin C$. Si suponemos que $S_n \cup \{F_n\} \in C$, por definición tenemos que $S_{n+1} = S_n \cup \{F_n\}$, luego es claro que $S_n \subseteq S_{n+1}$. En caso contrario, si $S_n \cup \{F_n\} \notin C$, por definición se tiene que $S_{n+1} = S_n$, obteniéndose igualmente el resultado por la propiedad reflexiva de la contención de conjuntos. □

La prueba detallada en Isabelle se muestra a continuación.

lemma $pcp\text{-}seq\ C\ S\ n \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n)$

proof –

have $pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) = (let\ Sn = pcp\text{-}seq\ C\ S\ n;\ Sn1 = insert\ (from\text{-}nat\ n)\ Sn\ in\ if\ Sn1 \in C\ then\ Sn1\ else\ Sn)$

by (*simp only: pcp-seq.simps(2)*)

then have $SucDef: pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) = (if\ insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n) \in C\ then\ insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n)\ else\ pcp\text{-}seq\ C\ S\ n)$

by (*simp only: Let-def*)

thus $pcp\text{-}seq\ C\ S\ n \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n)$

proof (*cases*)

assume $1: insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n) \in C$

have $pcp\text{-}seq\ C\ S\ (Suc\ n) = insert\ (from\text{-}nat\ n)\ (pcp\text{-}seq\ C\ S\ n)$

using *SucDef 1* **by** (*simp only: if-True*)

```

thus  $pcp-seq\ C\ S\ n \subseteq pcp-seq\ C\ S\ (Suc\ n)$ 
by (simp only: subset-insertI)
next
assume  $2:insert\ (from-nat\ n)\ (pcp-seq\ C\ S\ n) \notin C$ 
have  $pcp-seq\ C\ S\ (Suc\ n) = pcp-seq\ C\ S\ n$ 
using SucDef 2 by (simp only: if-False)
thus  $pcp-seq\ C\ S\ n \subseteq pcp-seq\ C\ S\ (Suc\ n)$ 
by (simp only: subset-refl)
qed
qed

```

Del mismo modo, se puede probar automáticamente en Isabelle/HOL.

lemma *pcp-seq-monotonicity*: $pcp-seq\ C\ S\ n \subseteq pcp-seq\ C\ S\ (Suc\ n)$
by (*smt eq-iff pcp-seq.simps(2) subset-insertI*)

Por otra lado, para facilitar posteriores demostraciones en Isabelle/HOL, vamos a formalizar el lema anterior empleando la siguiente definición generalizada de monotonía.

lemma *pcp-seq-mono*:
assumes $n \leq m$
shows $pcp-seq\ C\ S\ n \subseteq pcp-seq\ C\ S\ m$
using *pcp-seq-monotonicity* *assms* **by** (*rule lift-Suc-mono-le*)

A continuación daremos un lema que permite caracterizar un elemento de la sucesión en función de los anteriores.

Lema 4.1.4 *Sea C una colección de conjuntos, $S \in C$ y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S construida según la definición 4.1.1. Entonces, para todos $n, m \in \mathbf{N}$ se verifica $\bigcup_{n \leq m} S_n = S_m$*

Demostración: En las condiciones del enunciado, la prueba se realiza por inducción en $m \in \mathbf{N}$.

En primer lugar, consideremos el caso base $m = 0$. El resultado se obtiene directamente:

$$\bigcup_{n \leq 0} S_n = \bigcup_{n=0} S_n = S_0 = S_m$$

Por otro lado, supongamos por hipótesis de inducción que $\bigcup_{n \leq m} S_n = S_m$. Veamos que se verifica $\bigcup_{n \leq m+1} S_n = S_{m+1}$. Observemos que si $n \leq m+1$, entonces se tiene que, o bien $n \leq m$, o bien $n = m+1$. De este modo, aplicando la hipótesis de inducción, deducimos lo siguiente.

$$\bigcup_{n \leq m+1} S_n = \bigcup_{n \leq m} S_n \cup \bigcup_{n=m+1} S_n = \bigcup_{n \leq m} S_n \cup S_{m+1} = S_m \cup S_{m+1}$$

Por la monotonía de la sucesión, se tiene que $S_m \subseteq S_{m+1}$. Luego, se verifica:

$$\bigcup_{n \leq m+1} S_n = S_m \cup S_{m+1} = S_{m+1}$$

Lo que prueba el resultado. □

Para formalizar dicho resultado y su demostración en Isabelle, hay que tener en cuenta cómo está formalizada la *Teoría de Conjuntos* [Set.thy](#). Los conjuntos están formalizados como predicados, junto con la función *Collect* y el predicado *member*, verificando los siguientes axiomas:

mem-Collect-eq: "*member a (Collect P) = P a*"

Collect-mem-eq: "*Collect (λx. member x A) = A*"

Se demuestra también que el tipo de los conjuntos constituye un álgebra de *Boole*, en el que el supremo de dos conjuntos es la unión y el ínfimo es la intersección. De esta forma, podemos usar la unión generalizada, definida en la teoría de retículos completos de Isabelle [Complete-Lattices.thy](#).

Veamos la prueba detallada del resultado en Isabelle/HOL.

```

lemma  $\bigcup \{pcp-seq\ C\ S\ n \mid n. n \leq m\} = pcp-seq\ C\ S\ m$ 
proof (induct m)
  have  $\bigcup \{pcp-seq\ C\ S\ n \mid n. n \leq 0\} = \bigcup \{pcp-seq\ C\ S\ n \mid n. n = 0\}$ 
    by (simp only: le-zero-eq)
  also have  $\dots = \bigcup ((pcp-seq\ C\ S)' \{n. n = 0\})$ 
    by (simp only: image-Collect)
  also have  $\dots = \bigcup \{pcp-seq\ C\ S\ 0\}$ 
    by (simp only: singleton-conv image-insert image-empty)
  also have  $\dots = pcp-seq\ C\ S\ 0$ 
    by (simp only: cSup-singleton)
  finally show  $\bigcup \{pcp-seq\ C\ S\ n \mid n. n \leq 0\} = pcp-seq\ C\ S\ 0$ 
    by this
next
  fix m
  assume HI:  $\bigcup \{pcp-seq\ C\ S\ n \mid n. n \leq m\} = pcp-seq\ C\ S\ m$ 
  have  $m \leq Suc\ m$ 
    by (simp only: add-0-right)
  then have  $Mon: pcp-seq\ C\ S\ m \subseteq pcp-seq\ C\ S\ (Suc\ m)$ 
    by (rule pcp-seq-mono)
  have  $\bigcup \{pcp-seq\ C\ S\ n \mid n. n \leq Suc\ m\} = \bigcup ((pcp-seq\ C\ S)' (\{n. n \leq Suc\ m\}))$ 
    by (simp only: image-Collect)

```



```

also have ... =  $\bigcup ((pcp-seq \ C \ S)'(\{Suc \ m\} \cup \{n. \ n \leq m\}))$ 
by (simp only: le-Suc-eq Collect-disj-eq Un-commute singleton-conv)
also have ... =  $\bigcup (\{pcp-seq \ C \ S \ (Suc \ m)\} \cup \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq m\})$ 
by (simp only: image-Un image-insert image-empty image-Collect)
also have ... =  $\bigcup \{pcp-seq \ C \ S \ (Suc \ m)\} \cup \bigcup \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq m\}$ 
by (simp only: Union-Un-distrib)
also have ... =  $(pcp-seq \ C \ S \ (Suc \ m)) \cup \bigcup \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq m\}$ 
by (simp only: cSup-singleton)
also have ... =  $(pcp-seq \ C \ S \ (Suc \ m)) \cup (pcp-seq \ C \ S \ m)$ 
by (simp only: HI)
also have ... =  $pcp-seq \ C \ S \ (Suc \ m)$ 
using Mon by (simp only: Un-absorb2)
finally show  $\bigcup \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq (Suc \ m)\} = pcp-seq \ C \ S \ (Suc \ m)$ 
by this
qed

```

Análogamente, podemos dar una prueba automática.

```

lemma pcp-seq-UN:  $\bigcup \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq m\} = pcp-seq \ C \ S \ m$ 
proof(induction m)
case (Suc m)
have  $\{f \ n \mid n. \ n \leq Suc \ m\} = insert \ (f \ (Suc \ m)) \ \{f \ n \mid n. \ n \leq m\}$ 
for f using le-Suc-eq by auto
hence  $\{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq Suc \ m\} =$ 
   $insert \ (pcp-seq \ C \ S \ (Suc \ m)) \ \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq m\} .$ 
hence  $\bigcup \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq Suc \ m\} =$ 
   $\bigcup \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ n \leq m\} \cup pcp-seq \ C \ S \ (Suc \ m)$  by auto
thus ?case using Suc pcp-seq-mono by blast
qed simp

```

Finalmente, definamos el límite de las sucesiones presentadas en la definición 4.1.1.

Definición 4.1.5 Sea C una colección, $S \in C$ y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1. Se define el límite de la sucesión de conjuntos de C a partir de S como $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$

La definición del límite se formaliza utilizando la unión generalizada de Isabelle como sigue.

definition $pcp-lim \ C \ S \equiv \bigcup \{pcp-seq \ C \ S \ n \mid n. \ True\}$

Veamos el primer resultado sobre el límite.

Lema 4.1.6 Sea C una colección de conjuntos, $S \in C$ y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1. Entonces, para todo $n \in \mathbf{N}$, se verifica:

$$S_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$$

Demostración: El resultado se obtiene de manera inmediata ya que, para todo $n \in \mathbf{N}$, se verifica que $S_n \in \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$. Por tanto, es claro que $S_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. □

Su formalización y demostración detallada en Isabelle se muestran a continuación.

```

lemma pcp-seq C S n  $\subseteq$  pcp-lim C S
  unfolding pcp-lim-def
proof –
  have  $n \in \{n \mid n. \text{True}\}$ 
    by (simp only: simp-thms(21,38) Collect-const if-True UNIV-I)
  then have pcp-seq C S n  $\in$  (pcp-seq C S)' $\{n \mid n. \text{True}\}$ 
    by (simp only: imageI)
  then have pcp-seq C S n  $\in$  {pcp-seq C S n  $\mid$  n. True}
    by (simp only: image-Collect simp-thms(40))
  thus pcp-seq C S n  $\subseteq$   $\bigcup \{pcp-seq C S n \mid n. \text{True}\}$ 
    by (simp only: Union-upper)
qed

```

Podemos probarlo de manera automática como sigue.

```

lemma pcp-seq-sub: pcp-seq C S n  $\subseteq$  pcp-lim C S
  unfolding pcp-lim-def by blast

```

Mostremos otro resultado.

Lema 4.1.7 Sea C una colección de conjuntos de fórmulas proposicionales, $S \in C$ y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1. Si F es una fórmula tal que $F \in \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, entonces existe un $k \in \mathbf{N}$ tal que $F \in S_k$.

Demostración: La prueba es inmediata de la definición del límite de la sucesión de conjuntos $\{S_n\}$: si F pertenece a la unión generalizada $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, entonces existe algún conjunto S_k tal que $F \in S_k$. Es decir, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $F \in S_k$, como queríamos demostrar. □

Su prueba detallada en Isabelle/HOL es la siguiente.

```

lemma
  assumes  $F \in \text{pcp-lim } C S$ 

```

```

shows  $\exists k. F \in \text{pcp-seq } C \ S \ k$ 
proof –
  have  $F \in \bigcup ((\text{pcp-seq } C \ S) ' \{n \mid n. \text{True}\})$ 
    using assms by (simp only: pcp-lim-def image-Collect simp-thms(40))
  then have  $\exists k \in \{n. \text{True}\}. F \in \text{pcp-seq } C \ S \ k$ 
    by (simp only: UN-iff simp-thms(40))
  then have  $\exists k \in \text{UNIV}. F \in \text{pcp-seq } C \ S \ k$ 
    by (simp only: UNIV-def)
  thus  $\exists k. F \in \text{pcp-seq } C \ S \ k$ 
    by (simp only: bex-UNIV)
qed

```

Mostremos, a continuación, la demostración automática del resultado.

lemma *pcp-lim-inserted-at-ex*:

```

 $S' \in \text{pcp-lim } C \ S \implies \exists k. S' \in \text{pcp-seq } C \ S \ k$ 
unfolding pcp-lim-def by blast

```

Por último, veamos la siguiente propiedad sobre conjuntos finitos contenidos en el límite de las sucesiones definido en 4.1.5.

Lema 4.1.8 *Sea C una colección, $S \in C$ y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1. Si S' es un conjunto finito tal que $S' \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $S' \subseteq S_k$.*

Demostración: La prueba del resultado se realiza por inducción sobre la estructura recursiva de los conjuntos finitos.

En primer lugar, probemos el caso base correspondiente al conjunto vacío. Supongamos que $\{\}$ está contenido en el límite de la sucesión de conjuntos de C a partir de S . Como $\{\}$ es subconjunto de todo conjunto, en particular lo es de $S = S_0$, probando así el primer caso.

Por otra parte, probemos el paso de inducción. Sea S' un conjunto finito verificando la hipótesis de inducción: si S' está contenido en el límite de la sucesión de conjuntos de C a partir de S , entonces también está contenido en algún $S_{k'}$ para cierto $k' \in \mathbb{N}$. Sea F una fórmula tal que $F \notin S'$. Vamos a probar que si $\{F\} \cup S'$ está contenido en el límite, entonces está contenido en S_k para algún $k \in \mathbb{N}$.

Como hemos supuesto que $\{F\} \cup S'$ está contenido en el límite, entonces se verifica que F pertenece al límite y S' está contenido en él. Por el lema 4.1.7, como F pertenece al límite, deducimos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $F \in S_k$. Por otro lado, como S' está contenido en el límite, por hipótesis de inducción existe algún $k' \in \mathbb{N}$ tal que $S' \subseteq S_{k'}$. El resultado se obtiene considerando el máximo entre k y k' , que notaremos por k'' . En

efecto, por la monotonía de la sucesión, se verifica que tanto S_k como $S_{k'}$ están contenidos en $S_{k''}$. De este modo, como $S' \subseteq S_{k'}$, por la transitividad de la contención de conjuntos se tiene que $S' \subseteq S_{k''}$. Además, como $F \in S_k$, se tiene que $F \in S_{k''}$. Por lo tanto, $\{F\} \cup S' \subseteq S_{k''}$, como queríamos demostrar. \square

Procedamos con la demostración detallada en Isabelle.

lemma

assumes *finite* S'

$S' \subseteq \text{pcp-lim } C S$

shows $\exists k. S' \subseteq \text{pcp-seq } C S k$

using *assms*

proof (*induction* S' *rule: finite-induct*)

case *empty*

have $\text{pcp-seq } C S 0 = S$

by (*simp only: pcp-seq.simps(1)*)

have $\{\} \subseteq S$

by (*rule order-bot-class.bot.extremum*)

then have $\{\} \subseteq \text{pcp-seq } C S 0$

by (*simp only: 'pcp-seq C S 0 = S'*)

then show ?*case*

by (*rule exI*)

next

case (*insert* $F S'$)

then have $\text{insert } F S' \subseteq \text{pcp-lim } C S$

by (*simp only: insert.premis*)

then have $C:F \in (\text{pcp-lim } C S) \wedge S' \subseteq \text{pcp-lim } C S$

by (*simp only: insert-subset*)

then have $S' \subseteq \text{pcp-lim } C S$

by (*rule conjunct2*)

then have $EX1:\exists k. S' \subseteq \text{pcp-seq } C S k$

by (*simp only: insert.IH*)

obtain $k1$ **where** $S' \subseteq \text{pcp-seq } C S k1$

using $EX1$ **by** (*rule exE*)

have $F \in \text{pcp-lim } C S$

using C **by** (*rule conjunct1*)

then have $EX2:\exists k. F \in \text{pcp-seq } C S k$

by (*rule pcp-lim-inserted-at-ex*)

obtain $k2$ **where** $F \in \text{pcp-seq } C S k2$

using $EX2$ **by** (*rule exE*)

have $k1 \leq \max k1 k2$

```

  by (simp only: linorder-class.max.cobounded1)
then have  $pcp\text{-}seq\ C\ S\ k1 \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2)$ 
  by (rule pcp-seq-mono)
have  $k2 \leq \max\ k1\ k2$ 
  by (simp only: linorder-class.max.cobounded2)
then have  $pcp\text{-}seq\ C\ S\ k2 \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2)$ 
  by (rule pcp-seq-mono)
have  $S' \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2)$ 
  using  $\langle S' \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ k1 \rangle \langle pcp\text{-}seq\ C\ S\ k1 \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2) \rangle$  by (rule subset-trans)
have  $F \in pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2)$ 
  using  $\langle F \in pcp\text{-}seq\ C\ S\ k2 \rangle \langle pcp\text{-}seq\ C\ S\ k2 \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2) \rangle$  by (rule rev-subsetD)
then have  $1:\text{insert}\ F\ S' \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2)$ 
  using  $\langle S' \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2) \rangle$  by (simp only: insert-subset)
thus ?case
  by (rule exI)
qed

```

Finalmente, su demostración automática en Isabelle/HOL es la siguiente.

lemma *finite-pcp-lim-EX*:

assumes *finite* S'

$S' \subseteq pcp\text{-}lim\ C\ S$

shows $\exists k. S' \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ k$

using *assms*

proof(*induction* S' *rule*: *finite-induct*)

case (*insert* $F\ S'$)

hence $\exists k. S' \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ k$ **by** *fast*

then guess $k1 \dots$

moreover obtain $k2$ **where** $F \in pcp\text{-}seq\ C\ S\ k2$

by (*meson* *pcp-lim-inserted-at-ex* *insert.prem*s *insert-subset*)

ultimately have $\text{insert}\ F\ S' \subseteq pcp\text{-}seq\ C\ S\ (\max\ k1\ k2)$

by (*meson* *pcp-seq-mono* *dual-order.trans* *insert-subset* *max.bounded-iff* *order-refl* *subsetCE*)

thus ?case **by** *blast*

qed *simp*

4.2 El Teorema de Existencia de Modelo

En esta sección demostraremos el *Teorema de Existencia de Modelo*, que prueba que todo conjunto de fórmulas S perteneciente a una colección C que verifique la propiedad de consistencia proposicional es satisfacible. Para probarlo, extenderemos la colección C a

otra C' que tenga la propiedad de consistencia proposicional, sea cerrada bajo subconjuntos y sea de carácter finito. Pare ello, introduciremos distintos resultados sobre colecciones C' con las características anteriores. En primer lugar, probaremos que el límite de la sucesión definida según la definición 4.1.1 a partir de C' pertenece a C' . De hecho, probaremos que dicho límite es un elemento maximal de la colección que lo define si esta es cerrada bajo subconjuntos y verifica la propiedad de consistencia proposicional. Por otra parte demostraremos que el límite es un conjunto de *Hintikka* si está definido a partir de una colección C' con las propiedades descritas. Por tanto, por el *Teorema de Hintikka*, en las condiciones anteriores el límite es un conjunto satisfacible. Finalmente, como $S \in C$ pertenece también a la extensión C' , se verifica que está contenido en el límite de la sucesión definida según la definición 4.1.1 a partir de C' y $S \in C'$. Por tanto, quedará demostrada la satisfacibilidad del conjunto S al heredarla por contención del límite, lo que prueba el *Teorema de Existencia de Modelo*.

En primer lugar, probemos que si C es una colección que verifica la propiedad de consistencia proposicional, es cerrada bajo subconjuntos y es de carácter finito, entonces el límite de toda sucesión de conjuntos de C según la definición 4.1.1 pertenece a C .

Lema 4.2.1 *Sea C una colección de conjuntos que verifica la propiedad de consistencia proposicional, es cerrada bajo subconjuntos y es de carácter finito. Sea $S \in C$ y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1. Entonces, el límite de la sucesión está en C .*

Demostración: Por definición, como C es de carácter finito, para todo conjunto son equivalentes:

1. El conjunto pertenece a C .
2. Todo subconjunto finito suyo pertenece a C .

De este modo, para demostrar que el límite de la sucesión $\{S_n\}$ pertenece a C , basta probar que todo subconjunto finito suyo está en C .

Sea S' un subconjunto finito del límite de la sucesión. Por el lema 1.4.8, existe un $k \in \mathbf{N}$ tal que $S' \subseteq S_k$. Por tanto, como $S_k \in C$ para todo $k \in \mathbf{N}$ y C es cerrada bajo subconjuntos, por definición se tiene que $S' \in C$, como queríamos demostrar. □

En Isabelle se formaliza y demuestra detalladamente como sigue.

lemma

assumes *pcp C*

$S \in C$

```

    subset-closed C
    finite-character C
  shows pcp-lim C S ∈ C
proof –
  have ∀ S. S ∈ C ⟷ (∀ S' ⊆ S. finite S' ⟶ S' ∈ C)
    using assms(4) unfolding finite-character-def by this
  then have FC1: pcp-lim C S ∈ C ⟷ (∀ S' ⊆ (pcp-lim C S). finite S' ⟶ S' ∈ C)
    by (rule allE)
  have SC: ∀ S ∈ C. ∀ S' ⊆ S. S' ∈ C
    using assms(3) unfolding subset-closed-def by this
  have FC2: ∀ S' ⊆ pcp-lim C S. finite S' ⟶ S' ∈ C
  proof (rule sallI)
    fix S' :: 'a formula set
    assume S' ⊆ pcp-lim C S
    show finite S' ⟶ S' ∈ C
    proof (rule impI)
      assume finite S'
      then have EX: ∃ k. S' ⊆ pcp-seq C S k
        using ⟨S' ⊆ pcp-lim C S⟩ by (rule finite-pcp-lim-EX)
      obtain k where S' ⊆ pcp-seq C S k
        using EX by (rule exE)
      have pcp-seq C S k ∈ C
        using assms(1) assms(2) by (rule pcp-seq-in)
      have ∀ S' ⊆ (pcp-seq C S k). S' ∈ C
        using SC ⟨pcp-seq C S k ∈ C⟩ by (rule bspec)
      thus S' ∈ C
        using ⟨S' ⊆ pcp-seq C S k⟩ by (rule sspec)
    qed
  qed
  show pcp-lim C S ∈ C
    using FC1 FC2 by (rule forw-subst)
qed

```

Por otra parte, podemos dar una prueba automática del resultado.

```

lemma pcp-lim-in:
  assumes c: pcp C
  and el: S ∈ C
  and sc: subset-closed C
  and fc: finite-character C
  shows pcp-lim C S ∈ C (is ?cl ∈ C)
proof –

```

```

from pcp-seq-in[OF c el, THEN allI] have  $\forall n. \text{pcp-seq } C \ S \ n \in C$  .
hence  $\forall m. \bigcup \{ \text{pcp-seq } C \ S \ n \mid n. n \leq m \} \in C$  unfolding pcp-seq-UN .
have  $\forall S' \subseteq ?cl. \text{finite } S' \longrightarrow S' \in C$ 
proof safe
  fix  $S' :: 'a \text{ formula set}$ 
  have  $\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{Max } (\text{to-nat } 'S')))) \subseteq \text{pcp-lim } C \ S$ 
    using pcp-seq-sub by blast
  assume  $\langle \text{finite } S' \rangle \langle S' \subseteq \text{pcp-lim } C \ S \rangle$ 
  hence  $\exists k. S' \subseteq \text{pcp-seq } C \ S \ k$ 
  proof(induction  $S'$  rule: finite-induct)
    case (insert  $x \ S'$ )
    hence  $\exists k. S' \subseteq \text{pcp-seq } C \ S \ k$  by fast
    then guess  $k1 ..$ 
    moreover obtain  $k2$  where  $x \in \text{pcp-seq } C \ S \ k2$ 
    by (meson pcp-lim-inserted-at-ex insert.premis insert-subset)
    ultimately have  $\text{insert } x \ S' \subseteq \text{pcp-seq } C \ S \ (\text{max } k1 \ k2)$ 
    by (meson pcp-seq-mono dual-order.trans insert-subset max.bounded-iff order-refl subsetCE)
    thus ?case by blast
  qed simp
  with pcp-seq-in[OF c el] sc
  show  $S' \in C$  unfolding subset-closed-def by blast
qed
thus  $?cl \in C$  using fc unfolding finite-character-def by blast
qed

```

Probemos que, además, el límite de la sucesión definida en 4.1.1 se trata de un elemento maximal de la colección que lo define si esta verifica la propiedad de consistencia proposicional y es cerrada bajo subconjuntos.

Lema 4.2.2 *Sea C una colección de conjuntos que verifica la propiedad de consistencia proposicional y es cerrada bajo subconjuntos, S un conjunto y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1. Entonces, el límite de la sucesión $\{S_n\}$ es un elemento maximal de C .*

Demostración: Por definición de elemento maximal, basta probar que para cualquier conjunto $K \in C$ que contenga al límite de la sucesión se tiene que K y el límite coinciden.

La demostración se realizará por reducción al absurdo. Consideremos un conjunto $K \in C$ que contenga estrictamente al límite de la sucesión $\{S_n\}$. De este modo, existe una fórmula F tal que $F \in K$ y F no está en el límite. Supongamos que F es la n -ésima fórmula según la enumeración de la definición 4.1.1 utilizada para construir la sucesión.

Por un lado, hemos probado que todo elemento de la sucesión está contenido en el límite, luego en particular obtenemos que S_{n+1} está contenido en el límite. De este modo, como F no pertenece al límite, es claro que $F \notin S_{n+1}$. Además, $\{F\} \cup S_n \notin C$ ya que, en caso contrario, por la definición 4.1.1 de la sucesión obtendríamos que $S_{n+1} = \{F\} \cup S_n$, lo que contradice que $F \notin S_{n+1}$.

Por otro lado, como S_n también está contenida en el límite que, a su vez, está contenido en K , se obtiene por transitividad que $S_n \subseteq K$. Además, como $F \in K$, se verifica que $\{F\} \cup S_n \subseteq K$. Como C es una colección cerrada bajo subconjuntos por hipótesis y $K \in C$, por definición se tiene que $\{F\} \cup S_n \in C$, llegando así a una contradicción con lo demostrado anteriormente. □

Su formalización y prueba detallada en Isabelle/HOL se muestran a continuación.

lemma

assumes $pcp\ C$

$subset-closed\ C$

$K \in C$

$pcp-lim\ C\ S \subseteq K$

shows $pcp-lim\ C\ S = K$

proof (rule ccontr)

assume $H: \neg(pcp-lim\ C\ S = K)$

have $CE: pcp-lim\ C\ S \subseteq K \wedge pcp-lim\ C\ S \neq K$

using $assms(4)\ H$ **by** (rule conjI)

have $pcp-lim\ C\ S \subseteq K \wedge pcp-lim\ C\ S \neq K \longleftrightarrow pcp-lim\ C\ S \subset K$

by (simp only: psubset-eq)

then have $pcp-lim\ C\ S \subset K$

using CE **by** (rule iffD1)

then have $\exists F. F \in (K - (pcp-lim\ C\ S))$

by (simp only: psubset-imp-ex-mem)

then have $E: \exists F. F \in K \wedge F \notin (pcp-lim\ C\ S)$

by (simp only: Diff-iff)

obtain F **where** $F: F \in K \wedge F \notin pcp-lim\ C\ S$

using E **by** (rule exE)

have $F \in K$

using F **by** (rule conjunct1)

have $F \notin pcp-lim\ C\ S$

using F **by** (rule conjunct2)

have $pcp-seq\ C\ S\ (Suc\ (to-nat\ F)) \subseteq pcp-lim\ C\ S$

by (rule pcp-seq-sub)

then have $F \in pcp-seq\ C\ S\ (Suc\ (to-nat\ F)) \longrightarrow F \in pcp-lim\ C\ S$

```

  by (rule in-mono)
then have 1:  $F \notin \text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F))$ 
  using  $\langle F \notin \text{pcp-lim } C \ S \rangle$  by (rule mt)
have 2:  $\text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \notin C$ 
proof (rule ccontr)
  assume  $\neg(\text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \notin C)$ 
  then have  $\text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \in C$ 
    by (rule notnotD)
  then have  $C:\text{insert } (\text{from-nat } (\text{to-nat } F)) \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \in C$ 
    by (simp only: from-nat-to-nat)
  have  $\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F)) = (\text{let } S_n = \text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F);$ 
     $S_{n1} = \text{insert } (\text{from-nat } (\text{to-nat } F)) \ S_n \text{ in if } S_{n1} \in C \text{ then } S_{n1} \text{ else } S_n)$ 
    by (simp only: pcp-seq.simps(2))
  then have  $\text{SucDef:pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F)) = (\text{if insert } (\text{from-nat } (\text{to-nat } F)) \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \in C$ 
     $C \ S \ (\text{to-nat } F)) \in C$ 
    then  $\text{insert } (\text{from-nat } (\text{to-nat } F)) \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \text{ else } \text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F))$ 
    by (simp only: Let-def)
  then have  $\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F)) = \text{insert } (\text{from-nat } (\text{to-nat } F)) \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F))$ 
    by (simp only: insertI1)
  using  $C$  by (simp only: if-True)
  then have  $\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F)) = \text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F))$ 
    by (simp only: from-nat-to-nat)
  then have  $F \in \text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F))$ 
    by (simp only: insertI1)
  show False
  using  $\langle F \notin \text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F)) \rangle \langle F \in \text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F)) \rangle$  by (rule notE)
qed
have  $\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F) \subseteq \text{pcp-lim } C \ S$ 
  by (rule pcp-seq-sub)
then have  $\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F) \subseteq K$ 
  using  $\text{assms}(4)$  by (rule subset-trans)
then have  $\text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \subseteq K$ 
  using  $\langle F \in K \rangle$  by (simp only: insert-subset)
have  $\forall S \in C. \forall s \subseteq S. s \in C$ 
  using  $\text{assms}(2)$  by (simp only: subset-closed-def)
then have  $\forall s \subseteq K. s \in C$ 
  using  $\text{assms}(3)$  by (rule bspec)
then have 3:  $\text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \in C$ 
  using  $\langle \text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \subseteq K \rangle$  by (rule sspec)
show False

```

using 2 3 **by** (rule notE)
qed

Análogamente a resultados anteriores, veamos su prueba automática.

lemma *cl-max*:

assumes *c*: *pcp* *C*

assumes *sc*: *subset-closed* *C*

assumes *el*: $K \in C$

assumes *su*: *pcp-lim* *C* *S* $\subseteq K$

shows *pcp-lim* *C* *S* = *K* (**is** ?*e*)

proof (rule *ccontr*)

assume $\langle \neg ?e \rangle$

with *su* **have** *pcp-lim* *C* *S* $\subset K$ **by** *simp*

then obtain *F* **where** *e*: $F \in K$ **and** *ne*: $F \notin \text{pcp-lim } C \ S$ **by** *blast*

from *ne* **have** $F \notin \text{pcp-seq } C \ S \ (\text{Suc } (\text{to-nat } F))$ **using** *pcp-seq-sub* **by** *fast*

hence 1: $\text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \notin C$ **by** (*simp add: Let-def split: if-splits*)

have $\text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \subseteq K$ **using** *pcp-seq-sub* *e* *su* **by** *blast*

hence $\text{insert } F \ (\text{pcp-seq } C \ S \ (\text{to-nat } F)) \in C$ **using** *sc*

unfolding *subset-closed-def* **using** *el* **by** *blast*

with 1 **show** *False* ..

qed

A continuación mostremos un resultado sobre el límite de la sucesión de 4.1.1 que es consecuencia de que dicho límite sea un elemento maximal de la colección que lo define si esta verifica la propiedad de consistencia proposicional y es cerrada bajo subconjuntos.

Corolario 4.2.3 *Sea C una colección de conjuntos que verifica la propiedad de consistencia proposicional y es cerrada bajo subconjuntos, S un conjunto, $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1 y F una fórmula proposicional. Entonces, si $\{F\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n \in C$, se verifica que $F \in \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$.*

Demostración: Como *C* es una colección que verifica la propiedad de consistencia proposicional y es cerrada bajo subconjuntos, se tiene que el límite $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ es maximal en *C*. Por lo tanto, si suponemos que $\{F\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n \in C$, como el límite está contenido en dicho conjunto, se cumple que $\{F\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, luego *F* pertenece al límite, como queríamos demostrar. □

Veamos su formalización y prueba detallada en Isabelle/HOL.

lemma

```

assumes pcp C
assumes subset-closed C
shows insert F (pcp-lim C S)  $\in$  C  $\implies$  F  $\in$  pcp-lim C S
proof –
assume insert F (pcp-lim C S)  $\in$  C
have pcp-lim C S  $\subseteq$  insert F (pcp-lim C S)
  by (rule subset-insertI)
have pcp-lim C S = insert F (pcp-lim C S)
  using assms(1) assms(2)  $\langle$ insert F (pcp-lim C S)  $\in$  C $\rangle$   $\langle$ pcp-lim C S  $\subseteq$  insert F (pcp-lim C S) $\rangle$  by (rule cl-max)
then have insert F (pcp-lim C S)  $\subseteq$  pcp-lim C S
  by (rule equalityD2)
then have F  $\in$  pcp-lim C S  $\wedge$  pcp-lim C S  $\subseteq$  pcp-lim C S
  by (simp only: insert-subset)
thus F  $\in$  pcp-lim C S
  by (rule conjunct1)
qed

```

Mostremos su demostración automática.

lemma *cl-max'*:

```

assumes c: pcp C
assumes sc: subset-closed C
shows insert F (pcp-lim C S)  $\in$  C  $\implies$  F  $\in$  pcp-lim C S
using cl-max[OF assms] by blast+

```

El siguiente resultado prueba que el límite de la sucesión definida en 4.1.1 es un conjunto de Hintikka si la colección que lo define verifica la propiedad de consistencia proposicional, es es cerrada bajo subconjuntos y es de carácter finito. Como consecuencia del *teorema de Hintikka*, se trata en particular de un conjunto satisfacible.

Lema 4.2.4 *Sea C una colección de conjuntos que verifica la propiedad de consistencia proposicional, es es cerrada bajo subconjuntos y es de carácter finito. Sea S \in C y $\{S_n\}$ la sucesión de conjuntos de C a partir de S según la definición 4.1.1. Entonces, el límite de la sucesión $\{S_n\}$ es un conjunto de Hintikka.*

Demostración: Para facilitar la lectura, vamos a notar por L_{SC} al límite de la sucesión $\{S_n\}$ descrita en el enunciado.

Por resultados anteriores, como C verifica la propiedad de consistencia proposicional, es es cerrada bajo subconjuntos y es de carácter finito, se tiene que $L_{SC} \in C$. En particular, por verificar la propiedad de consistencia proposicional, por el lema de

caracterización de dicha propiedad mediante notación uniforme, se cumplen las siguientes condiciones para L_{SC} :

- $\perp \notin L_{SC}$.
- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in L_{SC}$ y $\neg p \in L_{SC}$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a L_{SC} , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup L_{SC}$ pertenece a C .
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a L_{SC} , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup L_{SC}$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup L_{SC}$ pertenece a C .

Veamos que L_{SC} es un conjunto de Hintikka probando que cumple las condiciones del lema de caracterización de los conjuntos de Hintikka mediante notación uniforme, es decir, probaremos que L_{SC} verifica:

- $\perp \notin L_{SC}$.
- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in L_{SC}$ y $\neg p \in L_{SC}$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 se verifica que si la fórmula pertenece a L_{SC} , entonces α_1 y α_2 también.
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 se verifica que si la fórmula pertenece a L_{SC} , entonces o bien β_1 pertenece a L_{SC} o bien β_2 pertenece a L_{SC} .

Observemos que las dos primeras condiciones coinciden con las obtenidas anteriormente para L_{SC} por el lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional mediante notación uniforme. Veamos que, en efecto, se cumplen el resto de condiciones.

En primer lugar, probemos que para una fórmula F de tipo α y componentes α_1 y α_2 tal que $F \in L_{SC}$ se verifica que tanto α_1 como α_2 pertenecen a L_{SC} . Por la tercera condición obtenida anteriormente para L_{SC} por el lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional mediante notación uniforme, se cumple que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup L_{SC} \in C$. Observemos que se verifica $L_{SC} \subseteq \{\alpha_1, \alpha_2\} \cup L_{SC}$. De este modo, como C es una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, por el lema 4.2.2 se tiene que los conjuntos L_{SC} y $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup L_{SC}$ coinciden. Por tanto, es claro que $\alpha_1 \in L_{SC}$ y $\alpha_2 \in L_{SC}$, como queríamos demostrar.

Por último, demostremos que para una fórmula F de tipo β y componentes β_1 y β_2 tal que $F \in L_{SC}$ se verifica que o bien $\beta_1 \in L_{SC}$ o bien $\beta_2 \in L_{SC}$. Por la cuarta condición obtenida anteriormente para L_{SC} por el lema de caracterización de la propiedad de consistencia proposicional mediante notación uniforme, se cumple que o bien $\{\beta_1\} \cup L_{SC} \in C$ o bien $\{\beta_2\} \cup L_{SC} \in C$. De este modo, si suponemos que $\{\beta_1\} \cup L_{SC} \in C$, como C tiene la propiedad de consistencia proposicional y es cerrada bajo subconjuntos, por el corolario 4.2.3 se tiene que $\beta_1 \in L_{SC}$. Por tanto, se cumple que o bien $\beta_1 \in L_{SC}$ o bien $\beta_2 \in L_{SC}$. Si suponemos que $\{\beta_2\} \cup L_{SC} \in C$, se observa fácilmente que llegamos a la misma conclusión de manera análoga. Por lo tanto, queda probado el resultado. \square

Veamos su formalización y prueba detallada en Isabelle.

lemma

assumes *pcp C*

assumes *subset-closed C*

assumes *finite-character C*

assumes $S \in C$

shows *Hintikka (pcp-lim C S)*

proof (*rule Hintikka-alt2*)

let $?cl = \text{pcp-lim } C \ S$

have $?cl \in C$

using *assms(1) assms(4) assms(2) assms(3)* **by** (*rule pcp-lim-in*)

have $(\forall S \in C.$

$\perp \notin S$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in S \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in S \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall F \ G \ H. \text{Con } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G, H\} \cup S \in C)$

$\wedge (\forall F \ G \ H. \text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in S \longrightarrow \{G\} \cup S \in C \vee \{H\} \cup S \in C))$

using *assms(1)* **by** (*rule pcp-alt1*)

then have $d: \perp \notin ?cl$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in ?cl \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in ?cl \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall F \ G \ H. \text{Con } F \ G \ H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow \{G, H\} \cup ?cl \in C)$

$\wedge (\forall F \ G \ H. \text{Dis } F \ G \ H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow \{G\} \cup ?cl \in C \vee \{H\} \cup ?cl \in C)$

using $(?cl \in C)$ **by** (*rule bspec*)

then have $H1: \perp \notin ?cl$

by (*rule conjunct1*)

have $H2: \forall k. \text{Atom } k \in ?cl \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in ?cl \longrightarrow \text{False}$

using d **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have $\text{Con}: \forall F \ G \ H. \text{Con } F \ G \ H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow \{G, H\} \cup ?cl \in C$

using d **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have $H3: \forall F \ G \ H. \text{Con } F \ G \ H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow G \in ?cl \wedge H \in ?cl$

proof (*rule allI*) +

```

fix F G H
show Con F G H  $\longrightarrow$   $F \in ?cl \longrightarrow G \in ?cl \wedge H \in ?cl$ 
proof (rule impI)+
  assume Con F G H
  assume  $F \in ?cl$ 
  have Con F G H  $\longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow \{G,H\} \cup ?cl \in C$ 
    using Con by (iprover elim: allE)
  then have  $F \in ?cl \longrightarrow \{G,H\} \cup ?cl \in C$ 
    using (Con F G H) by (rule mp)
  then have  $\{G,H\} \cup ?cl \in C$ 
    using ( $F \in ?cl$ ) by (rule mp)
  have (insert G (insert H ?cl)) =  $\{G,H\} \cup ?cl$ 
    by (rule insertSetElem)
  then have (insert G (insert H ?cl))  $\in C$ 
    using ( $\{G,H\} \cup ?cl \in C$ ) by (simp only: (insert G (insert H ?cl)) =  $\{G,H\} \cup ?cl$ )
  have  $?cl \subseteq \text{insert } H ?cl$ 
    by (rule subset-insertI)
  then have  $?cl \subseteq \text{insert } G (\text{insert } H ?cl)$ 
    by (rule subset-insertI2)
  have  $?cl = \text{insert } G (\text{insert } H ?cl)$ 
    using assms(1) assms(2) (insert G (insert H ?cl)  $\in C$ ) ( $?cl \subseteq \text{insert } G (\text{insert } H ?cl)$ ) by
(rule cl-max)
  then have  $\text{insert } G (\text{insert } H ?cl) \subseteq ?cl$ 
    by (simp only: equalityD2)
  then have  $G \in ?cl \wedge \text{insert } H ?cl \subseteq ?cl$ 
    by (simp only: insert-subset)
  then have  $G \in ?cl$ 
    by (rule conjunct1)
  have  $\text{insert } H ?cl \subseteq ?cl$ 
    using ( $G \in ?cl \wedge \text{insert } H ?cl \subseteq ?cl$ ) by (rule conjunct2)
  then have  $H \in ?cl \wedge ?cl \subseteq ?cl$ 
    by (simp only: insert-subset)
  then have  $H \in ?cl$ 
    by (rule conjunct1)
  show  $G \in ?cl \wedge H \in ?cl$ 
    using ( $G \in ?cl$ ) ( $H \in ?cl$ ) by (rule conjI)
qed
qed
have Dis: $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow \{G\} \cup ?cl \in C \vee \{H\} \cup ?cl \in C$ 
  using d by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)

```

```

have H4:  $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow G \in ?cl \vee H \in ?cl$ 
proof (rule allI)+
  fix F G H
  show  $\text{Dis } F G H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow G \in ?cl \vee H \in ?cl$ 
  proof (rule impI)+
    assume  $\text{Dis } F G H$ 
    assume  $F \in ?cl$ 
    have  $\text{Dis } F G H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow \{G\} \cup ?cl \in C \vee \{H\} \cup ?cl \in C$ 
      using  $\text{Dis}$  by (iprover elim: allE)
    then have  $F \in ?cl \longrightarrow \{G\} \cup ?cl \in C \vee \{H\} \cup ?cl \in C$ 
      using  $\langle \text{Dis } F G H \rangle$  by (rule mp)
    then have  $\{G\} \cup ?cl \in C \vee \{H\} \cup ?cl \in C$ 
      using  $\langle F \in ?cl \rangle$  by (rule mp)
    thus  $G \in ?cl \vee H \in ?cl$ 
  proof (rule disjE)
    assume  $\{G\} \cup ?cl \in C$ 
    have  $\text{insert } G ?cl = \{G\} \cup ?cl$ 
      by (rule insert-is-Un)
    have  $\text{insert } G ?cl \in C$ 
      using  $\langle \{G\} \cup ?cl \in C \rangle$  by (simp only:  $\langle \text{insert } G ?cl = \{G\} \cup ?cl \rangle$ )
    have  $\text{insert } G ?cl \in C \implies G \in ?cl$ 
      using  $\text{assms}(1)$   $\text{assms}(2)$  by (rule cl-max')
    then have  $G \in ?cl$ 
      by (simp only:  $\langle \text{insert } G ?cl \in C \rangle$ )
    thus  $G \in ?cl \vee H \in ?cl$ 
      by (rule disjI1)
  next
    assume  $\{H\} \cup ?cl \in C$ 
    have  $\text{insert } H ?cl = \{H\} \cup ?cl$ 
      by (rule insert-is-Un)
    have  $\text{insert } H ?cl \in C$ 
      using  $\langle \{H\} \cup ?cl \in C \rangle$  by (simp only:  $\langle \text{insert } H ?cl = \{H\} \cup ?cl \rangle$ )
    have  $\text{insert } H ?cl \in C \implies H \in ?cl$ 
      using  $\text{assms}(1)$   $\text{assms}(2)$  by (rule cl-max')
    then have  $H \in ?cl$ 
      by (simp only:  $\langle \text{insert } H ?cl \in C \rangle$ )
    thus  $G \in ?cl \vee H \in ?cl$ 
      by (rule disjI2)
  qed
qed

```


qed

show $\perp \notin ?cl \wedge$

$(\forall k. Atom\ k \in ?cl \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in ?cl \longrightarrow False) \wedge$
 $(\forall F\ G\ H. Con\ F\ G\ H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow G \in ?cl \wedge H \in ?cl) \wedge$
 $(\forall F\ G\ H. Dis\ F\ G\ H \longrightarrow F \in ?cl \longrightarrow G \in ?cl \vee H \in ?cl)$

using $H1\ H2\ H3\ H4$ **by** (*iprover intro: conjI*)

qed

Del mismo modo, podemos probar el resultado de manera automática como sigue.

lemma *pcp-lim-Hintikka*:

assumes c : *pcp* C

assumes sc : *subset-closed* C

assumes fc : *finite-character* C

assumes el : $S \in C$

shows *Hintikka* (*pcp-lim* $C\ S$)

proof –

let $?cl = \text{pcp-lim}\ C\ S$

have $?cl \in C$ **using** *pcp-lim-in*[*OF* $c\ el\ sc\ fc$].

from c [*unfolded pcp-alt, THEN bspec, OF this*]

have d : $\perp \notin ?cl$

$Atom\ k \in ?cl \implies \neg (Atom\ k) \in ?cl \implies False$

$Con\ F\ G\ H \implies F \in ?cl \implies insert\ G\ (insert\ H\ ?cl) \in C$

$Dis\ F\ G\ H \implies F \in ?cl \implies insert\ G\ ?cl \in C \vee insert\ H\ ?cl \in C$

for $k\ F\ G\ H$ **by** *force+*

with $d(1,2)$ **show** *Hintikka* $?cl$ **unfolding** *Hintikka-alt*

using $c\ cl\text{-max}\ cl\text{-max}'\ d(4)\ sc$ **by** *blast*

qed

Finalmente, vamos a demostrar el *teorema de existencia de modelo*. Para ello precisaremos de un resultado que indica que la satisfacibilidad de conjuntos de fórmulas se hereda por la contención.

Lema 4.2.5 *Todo subconjunto de un conjunto de fórmulas satisfacible es satisfacible.*

Demostración: Sea B un conjunto de fórmulas satisfacible y $A \subseteq B$. Veamos que A es satisfacible. Por definición, como B es satisfacible, existe una interpretación \mathcal{A} que es modelo de cada fórmula de B . Como $A \subseteq B$, en particular \mathcal{A} es modelo de toda fórmula de A . Por tanto, A es satisfacible, ya que existe una interpretación que es modelo de todas sus fórmulas.

□

Su prueba detallada en Isabelle/HOL es la siguiente.

```

lemma sat-mono:
  assumes  $A \subseteq B$ 
    sat B
  shows sat A
unfolding sat-def
proof –
have satB:  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in B. \mathcal{A} \models F$ 
  using assms(2) by (simp only: sat-def)
obtain  $\mathcal{A}$  where  $\forall F \in B. \mathcal{A} \models F$ 
  using satB by (rule exE)
have  $\forall F \in A. \mathcal{A} \models F$ 
proof (rule ballI)
  fix  $F$ 
  assume  $F \in A$ 
  have  $F \in A \longrightarrow F \in B$ 
  using assms(1) by (rule in-mono)
  then have  $F \in B$ 
  using  $\langle F \in A \rangle$  by (rule mp)
  show  $\mathcal{A} \models F$ 
  using  $\langle \forall F \in B. \mathcal{A} \models F \rangle \langle F \in B \rangle$  by (rule bspec)
qed
thus  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in A. \mathcal{A} \models F$ 
by (simp only: exI)
qed

```

De este modo, procedamos finalmente con la demostración del teorema.

Teorema 4.2.6 (Teorema de Existencia de Modelo) *Todo conjunto de fórmulas perteneciente a una colección que verifique la propiedad de consistencia proposicional es satisfacible.*

Demostración: Sea C una colección de conjuntos de fórmulas proposicionales que verifique la propiedad de consistencia proposicional y $S \in C$. Vamos a probar que S es satisfacible.

En primer lugar, como C verifica la propiedad de consistencia proposicional, por el lema 3.0.3 podemos extenderla a una colección C' que también verifique la propiedad y sea cerrada bajo subconjuntos. A su vez, por el lema 3.0.5, como la extensión C' es una colección con la propiedad de consistencia proposicional y cerrada bajo subconjuntos, podemos extenderla a otra colección C'' que también verifica la propiedad de consistencia proposicional y sea de carácter finito. De este modo, por la transitividad de la contención, es claro que C'' es una extensión de C , luego $S \in C''$ por hipótesis. Por

otro lado, por el lema 3.0.4, como C'' es de carácter finito, se tiene que es cerrada bajo subconjuntos.

En suma, C'' es una extensión de C que verifica la propiedad de consistencia proposicional, es cerrada bajo subconjuntos y es de carácter finito. Luego, por el lema 4.2.4, el límite de la sucesión $\{S_n\}$ de conjuntos de C'' a partir de S según la definición 4.1.1 es un conjunto de Hintikka. Por tanto, por el *teorema de Hintikka*, se trata de un conjunto satisfacible.

Finalmente, puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que S_n está contenido en el límite, en particular el conjunto S_0 está contenido en él. Por definición de la sucesión, dicho conjunto coincide con S . Por tanto, como S está contenido en el límite que es un conjunto satisfacible, queda demostrada la satisfacibilidad de S . □

Mostremos su formalización y demostración detallada en Isabelle.

theorem

fixes $S :: 'a :: \text{countable formula set}$

assumes $\text{pcp } C$

assumes $S \in C$

shows $\text{sat } S$

proof –

have $\text{pcp } C \implies \exists C'. C \subseteq C' \wedge \text{pcp } C' \wedge \text{subset-closed } C'$

by (*rule ex1*)

then have $E1: \exists C'. C \subseteq C' \wedge \text{pcp } C' \wedge \text{subset-closed } C'$

by (*simp only: assms(1)*)

obtain Ce' **where** $H1: C \subseteq Ce' \wedge \text{pcp } Ce' \wedge \text{subset-closed } Ce'$

using $E1$ **by** (*rule exE*)

have $C \subseteq Ce'$

using $H1$ **by** (*rule conjunct1*)

have $\text{pcp } Ce'$

using $H1$ **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have $\text{subset-closed } Ce'$

using $H1$ **by** (*iprover elim: conjunct2 conjunct1*)

have $E2: \exists Ce. Ce' \subseteq Ce \wedge \text{pcp } Ce \wedge \text{finite-character } Ce$

using $\langle \text{pcp } Ce' \rangle \langle \text{subset-closed } Ce' \rangle$ **by** (*rule ex3*)

obtain Ce **where** $H2: Ce' \subseteq Ce \wedge \text{pcp } Ce \wedge \text{finite-character } Ce$

using $E2$ **by** (*rule exE*)

have $Ce' \subseteq Ce$

using $H2$ **by** (*rule conjunct1*)

then have $\text{Subset}: C \subseteq Ce$

using $\langle C \subseteq Ce' \rangle$ **by** (*simp only: subset-trans*)

```

have Pcp:pcp Ce
  using H2 by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
have FC:finite-character Ce
  using H2 by (iprover elim: conjunct2 conjunct1)
then have SC:subset-closed Ce
  by (rule ex2)
have  $S \in C \longrightarrow S \in Ce$ 
  using  $\langle C \subseteq Ce \rangle$  by (rule in-mono)
then have  $S \in Ce$ 
  using assms(2) by (rule mp)
have Hintikka (pcp-lim Ce S)
  using Pcp SC FC  $\langle S \in Ce \rangle$  by (rule pcp-lim-Hintikka)
then have sat (pcp-lim Ce S)
  by (rule Hintikkaslemma)
have pcp-seq Ce  $S \ 0 = S$ 
  by (simp only: pcp-seq.simps(1))
have pcp-seq Ce  $S \ 0 \subseteq$  pcp-lim Ce S
  by (rule pcp-seq-sub)
then have  $S \subseteq$  pcp-lim Ce S
  by (simp only:  $\langle$ pcp-seq Ce  $S \ 0 = S\rangle$ )
thus sat S
  using  $\langle$ sat (pcp-lim Ce S) $\rangle$  by (rule sat-mono)
qed

```

Finalmente, demostremos el teorema de manera automática.

theorem pcp-sat:

fixes $S :: 'a :: \text{countable formula set}$

assumes c : pcp C

assumes el : $S \in C$

shows sat S

proof –

from c **obtain** Ce **where**

$C \subseteq Ce$ pcp Ce subset-closed Ce finite-character Ce

using $ex1[\text{where } 'a = 'a]$ $ex2[\text{where } 'a = 'a]$ $ex3[\text{where } 'a = 'a]$

by (meson dual-order.trans ex2)

have $S \in Ce$ **using** $\langle C \subseteq Ce \rangle$ el ..

with pcp-lim-Hintikka \langle pcp Ce \rangle \langle subset-closed Ce \rangle \langle finite-character Ce \rangle

have Hintikka (pcp-lim Ce S) .

with Hintikkaslemma **have** sat (pcp-lim Ce S) .

moreover **have** $S \subseteq$ pcp-lim Ce S

using pcp-seq.simps(1) pcp-seq-sub **by** fast

ultimately show ?thesis **unfolding** sat-def **by** fast
qed

4.3 Teorema de Compacidad

En esta sección vamos demostrar el *Teorema de Compacidad* para la lógica proposicional como consecuencia del *Teorema de Existencia de Modelo*.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Compacidad) *Todo conjunto de fórmulas finitamente satisfacible es satisfacible.*

Para su demostración consideraremos la colección formada por los conjuntos de fórmulas finitamente satisfacibles. Probaremos que dicha colección verifica la propiedad de consistencia proposicional y, por el *Teorema de Existencia de Modelo*, todo conjunto perteneciente a ella será satisfacible, demostrando así el teorema.

Mostremos previamente dos resultados sobre subconjuntos finitos que emplearemos en la demostración del teorema.

Lema 4.3.2 *Sea S un conjunto finito tal que $S \subseteq \{a\} \cup B$. Entonces, existe un conjunto finito $S' \subseteq B$ tal que o bien $S = \{a\} \cup S'$ o bien $S = S'$.*

Demostración: La prueba se realiza considerando dos casos: $a \in S$ o $a \notin S$.

Por un lado, si consideramos que $a \in S$, basta tomar el conjunto $S' = S - \{a\}$. De este modo, como $S \subseteq \{a\} \cup B$, es claro que $S' \subseteq B$. Además, puesto que S es finito, se tiene que S' también lo es. Finalmente, se observa fácilmente que cumple que $S = S' \cup \{a\}$.

Por otro lado, supongamos que $a \notin S$. En este caso, si tomamos $S' = S$ se verifica que $S' \subseteq B$ ya que $S \subseteq \{a\} \cup B$ y $a \notin S$. Además, S' es finito por serlo S . Luego cumple las condiciones del resultado, como queríamos demostrar. □

Procedamos con la prueba detallada y formalización en Isabelle. Para ello, hemos utilizado el siguiente lema auxiliar.

lemma subexI [intro]: $P \ A \implies A \subseteq B \implies \exists A \subseteq B. P \ A$
by blast

De este modo, probemos detalladamente el resultado.

lemma finite-subset-insert1:

```

assumes finite S
   $S \subseteq \text{insert } a \ B$ 
shows  $\exists S' \subseteq B. \text{finite } S' \wedge (S = \text{insert } a \ S' \vee S = S')$ 
proof (cases  $a \in S$ )
  assume  $a \in S$ 
  then have  $S = \text{insert } a \ (S - \{a\})$ 
    by (simp only: insert-Diff[THEN sym])
  then have  $1: S = \text{insert } a \ (S - \{a\}) \vee S = S - \{a\}$ 
    by (rule disjI1)
  have  $2: \text{finite } (S - \{a\})$ 
    using assms(1) by (rule finite-Diff)
  have  $3: (S - \{a\}) \subseteq B$ 
    using assms(2) by (simp add: Diff-subset-conv)
  have  $\text{finite } (S - \{a\}) \wedge (S = \text{insert } a \ (S - \{a\}) \vee S = S - \{a\})$ 
    using  $2 \ 1$  by (rule conjI)
  thus ?thesis using  $3$  by (rule subexI)
next
  assume  $a \notin S$ 
  then have  $1: S \subseteq B$ 
    using assms(2) by blast
  have  $2: S = \text{insert } a \ S \vee S = S$ 
    by (simp only: disjI1 simp-thms)
  have  $\text{finite } S \wedge (S = \text{insert } a \ S \vee S = S)$ 
    using assms(1)  $2$  by (rule conjI)
  thus ?thesis
    using  $1$  by (rule subexI)
qed

```

Veamos otro resultado sobre subconjuntos finitos que emplearemos en las demostraciones posteriores.

Lema 4.3.3 *Sea S un conjunto finito tal que $S \subseteq \{a, b\} \cup B$. Entonces, existe un conjunto finito $S' \subseteq B$ tal que se verifica una de las condiciones siguientes: $S = \{a, b\} \cup S'$ o $S = \{a\} \cup S'$ o $S = \{b\} \cup S'$ o $S = S'$.*

Demostración: La prueba se realiza considerando cuatro casos:

1. $a \in S$ y $b \in S$.
2. $a \in S$ y $b \notin S$.
3. $a \notin S$ y $b \in S$.

4. $a \notin S$ y $b \notin S$.

En primer lugar, supongamos que a y b están en S . En este caso, basta tomar el conjunto $S' = S - \{a, b\}$. Como $S \subseteq \{a, b\} \cup B$, es claro que $S' \subseteq B$. Además, como S es finito, se tiene que S' también es finito. Por último, verifica que $S = \{a, b\} \cup S'$, lo que prueba el resultado para este caso.

Supongamos ahora que $a \in S$ y $b \notin S$: considerando el conjunto $S' = S - \{a\}$ se tiene el resultado. Como $S \subseteq \{a, b\} \cup B$ y $a \in S$ pero $b \notin S$, es claro que $S' \subseteq B$. Como S es finito, S' también lo es. Por último, se tiene que $S = \{a\} \cup S'$, lo que verifica el resultado.

Consideremos el caso $a \notin S$ y $b \in S$. Basta tomar el conjunto $S' = S - \{b\}$ y, de manera completamente análoga al caso anterior, se demuestra el resultado para dicho caso.

Finalmente, supongamos que $a \notin S$ y $b \notin S$. Veamos que tomando el conjunto $S' = S$ se cumple el resultado. Como $S \subseteq \{a, b\} \cup B$ y ni a ni b están en S , es claro que $S' \subseteq B$. Finalmente, como S es finito, es claro que S' también lo es. Por lo tanto, queda probado el resultado. □

Su formalización y prueba detallada en Isabelle/HOL son las siguientes.

lemma *finite-subset-insert2*:

assumes *finite S*

$S \subseteq \{a, b\} \cup B$

shows $\exists S' \subseteq B. \text{finite } S' \wedge (S = \{a, b\} \cup S' \vee S = \{a\} \cup S' \vee S = \{b\} \cup S' \vee S = S')$

proof (*cases a ∈ S ∨ b ∈ S*)

assume $a \in S \vee b \in S$

thus *?thesis*

proof (*rule disjE*)

assume $a \in S$

show *?thesis*

proof (*cases b ∈ S*)

assume $b \in S$

have $1: S - \{a, b\} \subseteq B$

using *assms(2)* **by** *blast*

have $\{a, b\} \cup S = S$

using $\langle a \in S \rangle \langle b \in S \rangle$ **by** *blast*

then have $S = \{a, b\} \cup (S - \{a, b\})$

by *blast*

then have $2: S = \{a, b\} \cup (S - \{a, b\}) \vee S = \{a\} \cup (S - \{a, b\}) \vee S = \{b\} \cup (S - \{a, b\}) \vee S = (S - \{a, b\})$

```

    by (iprover intro: disjI1)
  have finite ( $S - \{a,b\}$ )
    using assms(1) by (rule finite-Diff)
  then have finite ( $S - \{a,b\}$ )  $\wedge$  ( $S = \{a,b\} \cup (S - \{a,b\}) \vee S = \{a\} \cup (S - \{a,b\}) \vee S = \{b\} \cup (S - \{a,b\}) \vee S = (S - \{a,b\})$ )
    using 2 by (rule conjI)
  thus ?thesis
    using 1 by (rule subexI)
next
  assume  $b \notin S$ 
  then have 1:  $S - \{a\} \subseteq B$ 
    using assms(2) by blast
  have  $\{a\} \cup S = S$ 
    using  $\langle a \in S \rangle$  by blast
  then have  $S = \{a\} \cup (S - \{a\})$ 
    by blast
  then have 2:  $S = \{a,b\} \cup (S - \{a\}) \vee S = \{a\} \cup (S - \{a\}) \vee S = \{b\} \cup (S - \{a\}) \vee S = (S - \{a\})$ 
    by (iprover intro: disjI1)
  have finite ( $S - \{a\}$ )
    using assms(1) by (rule finite-Diff)
  then have finite ( $S - \{a\}$ )  $\wedge$  ( $S = \{a,b\} \cup (S - \{a\}) \vee S = \{a\} \cup (S - \{a\}) \vee S = \{b\} \cup (S - \{a\}) \vee S = (S - \{a\})$ )
    using 2 by (rule conjI)
  thus ?thesis
    using 1 by (rule subexI)
qed
next
  assume  $b \in S$ 
  show ?thesis
  proof (cases  $a \in S$ )
    assume  $a \in S$ 
    have 1:  $S - \{a,b\} \subseteq B$ 
      using assms(2) by blast
    have  $\{a,b\} \cup S = S$ 
      using  $\langle a \in S \rangle \langle b \in S \rangle$  by blast
    then have  $S = \{a,b\} \cup (S - \{a,b\})$ 
      by blast
    then have 2:  $S = \{a,b\} \cup (S - \{a,b\}) \vee S = \{a\} \cup (S - \{a,b\}) \vee S = \{b\} \cup (S - \{a,b\}) \vee S = (S - \{a,b\})$ 

```



```

    by (iprover intro: disjI1)
  have finite (S - {a,b})
    using assms(1) by (rule finite-Diff)
  then have finite (S - {a,b}) ∧ (S = {a,b} ∪ (S - {a,b}) ∨ S = {a} ∪ (S - {a,b}) ∨ S
= {b} ∪ (S - {a,b}) ∨ S = (S - {a,b}))
    using 2 by (rule conjI)
  thus ?thesis
    using 1 by (rule subexI)
next
  assume a ∉ S
  then have 1: S - {b} ⊆ B
    using assms(2) by blast
  have {b} ∪ S = S
    using ⟨b ∈ S⟩ by blast
  then have S = {b} ∪ (S - {b})
    by blast
  then have 2: S = {a,b} ∪ (S - {b}) ∨ S = {a} ∪ (S - {b}) ∨ S = {b} ∪ (S - {b}) ∨
S = (S - {b})
    by (iprover intro: disjI1)
  have finite (S - {b})
    using assms(1) by (rule finite-Diff)
  then have finite (S - {b}) ∧ (S = {a,b} ∪ (S - {b}) ∨ S = {a} ∪ (S - {b}) ∨ S =
{b} ∪ (S - {b}) ∨ S = (S - {b}))
    using 2 by (rule conjI)
  thus ?thesis
    using 1 by (rule subexI)
qed
qed
next
  assume ¬(a ∈ S ∨ b ∈ S)
  then have a ∉ S ∧ b ∉ S
    by (simp only: de-Morgan-disj simp-thms(8))
  then have 1: S ⊆ B
    using assms(2) by blast
  have 2: S = {a,b} ∪ S ∨ S = {a} ∪ S ∨ S = {b} ∪ S ∨ S = S
    by (iprover intro: disjI1 simp-thms)
  have finite S ∧ (S = {a,b} ∪ S ∨ S = {a} ∪ S ∨ S = {b} ∪ S ∨ S = S)
    using assms(1) 2 by (rule conjI)
  thus ?thesis
    using 1 by (rule subexI)

```

qed

Una vez introducidos los resultados anteriores, procedamos con la prueba del *Teorema de Compacidad*.

Demostración: Consideremos la colección C formada por los conjuntos de fórmulas finitamente satisfacibles. Recordemos que un conjunto de fórmulas es finitamente satisfacible si todo subconjunto finito suyo es satisfacible. Vamos a probar que dicha colección verifica la propiedad de consistencia proposicional y, por el *Teorema de Existencia de Modelo*, quedará probado que todo conjunto de C es satisfacible, lo que demuestra el teorema.

Para probar que C verifica la propiedad de consistencia proposicional, por el lema 2.0.2 de caracterización mediante notación uniforme, basta demostrar que se verifican las siguientes condiciones para todo conjunto $W \in C$:

- $\perp \notin W$.
- Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in W$ y $\neg p \in W$.
- Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a W , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W$ pertenece a C .
- Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a W , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup W$ pertenece a C o bien $\{\beta_2\} \cup W$ pertenece a C .

De este modo, consideremos un conjunto cualquiera $W \in C$ y procedamos a probar cada una de las condiciones anteriores.

La primera condición se demuestra por reducción al absurdo. En efecto, si suponemos que $\perp \in W$, es claro que $\{\perp\}$ es un subconjunto finito de W . Como W es un conjunto finitamente satisfacible por pertenecer a C , se tiene por lo anterior que $\{\perp\}$ es satisfacible. De este modo, llegamos a una contradicción pues, por definición, no existe ninguna interpretación que sea modelo de \perp .

A continuación probaremos que, si $W \in C$, entonces dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in W$ y $\neg p \in W$. Veamos dicho resultado por reducción al absurdo, suponiendo que tanto p como $\neg p$ están en W . En este caso, $\{p, \neg p\}$ sería un subconjunto finito de W y, por ser W finitamente satisfacible ya que $W \in C$, obtendríamos que $\{p, \neg p\}$ es satisfacible. Sin embargo esto no es cierto ya que, en ese caso, existiría una interpretación que sería modelo tanto de p como de $\neg p$, llegando así a una contradicción.

Probemos ahora que dada una fórmula F de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que $F \in W$, se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W$ pertenece a C . Por definición de la colección, basta

probar que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W$ es finitamente satisfacible, es decir, que todo subconjunto finito suyo es satisfacible. Consideremos un subconjunto finito S de $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W$. En estas condiciones, por el lema 4.3.3, existe un subconjunto finito W_0 de W tal que $S = \{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W_0$, $S = \{\alpha_1\} \cup W_0$, $S = \{\alpha_2\} \cup W_0$ o $S = W_0$. Para probar que S es satisfacible en cada uno de estos posibles casos, basta demostrar que el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible. De este modo, puesto que todas las opciones posibles de S están contenidas en dicho conjunto, se tiene la satisfacibilidad de cada una de ellas.

Para probar que el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible en estas condiciones, demostremos que se verifica para cada caso de la fórmula F de tipo α :

1) $F = G \wedge H$, para ciertas fórmulas G y H : Observemos que, como W_0 es un subconjunto finito de W y $F \in W$ por hipótesis, tenemos que $\{F\} \cup W_0$ es un subconjunto finito de W . Como W es finitamente satisfacible ya que pertenece a C , se tiene que $\{F\} \cup W_0$ es satisfacible. Luego, por definición, existe una interpretación \mathcal{A} que es modelo de todas sus fórmulas y, en particular, \mathcal{A} es modelo de F . Como $F = G \wedge H$, obtenemos por definición del valor de una fórmula en una interpretación que \mathcal{A} es modelo de G y de H . En este caso, las componentes conjuntivas son $\alpha_1 = G$ y $\alpha_2 = H$, luego \mathcal{A} es modelo de ambas componentes. Por lo tanto, \mathcal{A} es modelo de todas las fórmulas del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$, lo que prueba que se trata de un conjunto satisfacible.

2) $F = \neg(G \vee H)$, para ciertas fórmulas G y H : Análogamente al caso anterior, obtenemos que el conjunto $\{F\} \cup W_0$ es satisfacible. Luego, por definición, existe una interpretación \mathcal{A} que es modelo de todas sus fórmulas y, en particular, de F . Por definición del valor de una fórmula en una interpretación, como $F = \neg(G \vee H)$, obtenemos que no es cierto que \mathcal{A} sea modelo de $G \vee H$. Aplicando de nuevo la definición del valor de una fórmula en una interpretación, se obtiene que no es cierto que \mathcal{A} sea modelo de G o de H . Por las leyes de *Morgan*, obtenemos equivalentemente que \mathcal{A} no es modelo de G y \mathcal{A} no es modelo de H . Por lo tanto, por el valor de una fórmula en una interpretación, obtenemos que \mathcal{A} es modelo de $\neg G$ y \mathcal{A} es modelo de $\neg H$. Como las componentes conjuntivas en este caso son $\alpha_1 = \neg G$ y $\alpha_2 = \neg H$, es claro que \mathcal{A} es modelo de α_1 y de α_2 . Por lo tanto, la interpretación \mathcal{A} es modelo de todas las fórmulas del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$, lo que prueba por definición que se trata de un conjunto satisfacible.

3) $F = \neg(G \longrightarrow H)$, para ciertas fórmulas G y H : Como hemos visto que $\{F\} \cup W_0$ es un conjunto satisfacible, existe una interpretación \mathcal{A} que es modelo de todas sus fórmulas. En particular, \mathcal{A} es modelo de F luego, por definición del valor de una fórmula en una interpretación, es claro que \mathcal{A} no es modelo de $G \longrightarrow H$. De nuevo por el valor de una fórmula en una interpretación, obtenemos que no es cierto que si \mathcal{A} es modelo de G , entonces sea modelo de H . Equivalentemente, \mathcal{A} es modelo de G y no es modelo de H . Por lo tanto, por la definición del valor de una fórmula en una interpretación, se obtiene que \mathcal{A} es modelo de G y de $\neg H$. Como en este caso las componentes conjuntivas son $\alpha_1 = G$ y $\alpha_2 = \neg H$, es claro que \mathcal{A} es modelo de α_1 y de α_2 . Por lo tanto, \mathcal{A} es modelo

de todas las fórmulas del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$, probando así su satisfacibilidad.

4) $F = \neg(\neg G)$, para cierta fórmula G : Análogamente a los casos anteriores, se prueba que existe una interpretación \mathcal{A} que es modelo de todas las fórmulas del conjunto $\{F\} \cup W_0$ por ser este satisfacible. En particular, \mathcal{A} es modelo de F luego, por definición del valor de una fórmula en una interpretación, obtenemos que no es cierto que \mathcal{A} no es modelo de G . Es decir, \mathcal{A} es modelo de G y, como en este caso ambas componentes disyuntivas son G , es claro que \mathcal{A} es modelo de α_1 y de α_2 . Por tanto, \mathcal{A} es modelo de todas las fórmulas del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$, lo que prueba su satisfacibilidad.

Por lo tanto, $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$ es un conjunto satisfacible para todos los casos de la fórmula F de tipo α . De este modo, como el subconjunto finito S de $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W$ es de la forma $S = \{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W_0$, $S = \{\alpha_1\} \cup W_0$, $S = \{\alpha_2\} \cup W_0$ o $S = W_0$, se prueba la satisfacibilidad de S para cada uno de los casos por estar contenidos en el conjunto satisfacible $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$. Por lo tanto, $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W$ es finitamente satisfacible y, por definición de la colección C , pertenece a ella como queríamos demostrar.

Finalmente probemos que para toda fórmula F de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que $F \in W$, se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup W \in C$ o bien $\{\beta_2\} \cup W \in C$. La demostración se realizará por reducción al absurdo, luego supongamos en estas condiciones que $\{\beta_1\} \cup W \notin C$ y $\{\beta_2\} \cup W \notin C$.

En primer lugar, veamos que si $\{\beta_i\} \cup W \notin C$, entonces existe un subconjunto finito W_i de W tal que el conjunto $\{\beta_i\} \cup W_i$ no es satisfacible. En efecto, si $\{\beta_i\} \cup W \notin C$, por definición de la colección C tenemos que $\{\beta_i\} \cup W$ no es finitamente satisfacible. Por lo tanto, existe un subconjunto finito W_i' de $\{\beta_i\} \cup W$ que no es satisfacible. Por el lema 4.3.2, obtenemos que existe un subconjunto finito W_i de W tal que o bien $W_i' = \{\beta_i\} \cup W_i$ o bien $W_i' = W_i$. En efecto, si $W_i' = \{\beta_i\} \cup W_i$, como W_i' no es satisfacible, se obtiene el resultado para W_i . Por otro lado, supongamos que $W_i' = W_i$. Como W_i' no es satisfacible, entonces $\{\beta_i\} \cup W_i$ tampoco es satisfacible ya que, en caso contrario, obtendríamos que $W_i = W_i'$ es satisfacible. Luego se verifica también el resultado para W_i .

De este modo, como $\{\beta_1\} \cup W \notin C$ y $\{\beta_2\} \cup W \notin C$, obtenemos que existen subconjuntos finitos W_1 y W_2 de W tales que los conjuntos $\{\beta_1\} \cup W_1$ y $\{\beta_2\} \cup W_2$ no son satisfacibles. Consideremos el conjunto $W_0 = W_1 \cup W_2$. Es claro que se tiene que $\{\beta_1\} \cup W_1 \subseteq \{\beta_1, F\} \cup W_0$ y que $\{\beta_2\} \cup W_2 \subseteq \{\beta_2, F\} \cup W_0$. Por lo tanto, los conjuntos $\{\beta_1, F\} \cup W_0$ y $\{\beta_2, F\} \cup W_0$ no son satisfacibles ya que, en caso contrario, $\{\beta_1\} \cup W_1$ y $\{\beta_2\} \cup W_2$ serían satisfacibles. Para llegar a la contradicción, basta probar que o bien $\{\beta_1, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{\beta_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible. Para ello, veamos que se verifica el resultado para cada uno de los casos posibles fórmula de tipo β para F .

1) $F = G \vee H$, para ciertas fórmulas G y H : Observemos que $W_0 = W_1 \cup W_2$ es un subconjunto finito de W por ser W_1 y W_2 subconjuntos finitos de W . Además, como

$F \in W$ por hipótesis, tenemos que $\{F\} \cup W_0$ es un subconjunto finito de W . Como W es finitamente satisfacible ya que pertenece a C , se tiene que $\{F\} \cup W_0$ es satisfacible. Luego, por definición, existe una interpretación \mathcal{A} que es modelo de todas sus fórmulas y, en particular, \mathcal{A} es modelo de F . Por definición del valor de una fórmula en una interpretación, obtenemos que o bien \mathcal{A} es modelo de G o bien \mathcal{A} es modelo de H . Como en este caso las componentes disyuntivas son $\beta_1 = G$ y $\beta_2 = H$, se tiene que o bien \mathcal{A} es modelo de β_1 o bien \mathcal{A} es modelo de β_2 . Por lo tanto, es claro que o bien \mathcal{A} es modelo de todas las fórmulas del conjunto $\{\beta_1, F\} \cup W_0$ o bien es modelo de todas las fórmulas de $\{\beta_2, F\} \cup W_0$. Luego, por definición de conjunto satisfacible tenemos que o bien $\{\beta_1, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{\beta_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible, como queríamos demostrar.

2) $F = G \longrightarrow H$, para ciertas fórmulas G y H : Análogamente se tiene que el conjunto $\{F\} \cup W_0$ es satisfacible, luego existe una interpretación \mathcal{A} que es modelo de todas sus fórmulas. En particular, \mathcal{A} es modelo de F y, por definición del valor de una fórmula en una interpretación, se obtiene que si \mathcal{A} es modelo de G , entonces es modelo de H . Equivalentemente, tenemos que \mathcal{A} no es modelo de G o \mathcal{A} es modelo de H . Por un lado, si suponemos que \mathcal{A} no es modelo de G , por definición obtenemos que \mathcal{A} es modelo de $\neg G$. Como en este caso tenemos que $\beta_1 = \neg G$, es claro que \mathcal{A} es modelo de β_1 . Por tanto, es modelo de todas las fórmulas de $\{\beta_1, F\} \cup W_0$, luego es un conjunto satisfacible y se verifica el resultado para este caso. Por otro lado, si suponemos que \mathcal{A} es modelo de H , como $\beta_2 = H$, obtenemos que \mathcal{A} es modelo de β_2 . Luego, análogamente, \mathcal{A} es modelo de toda fórmula de $\{\beta_2, F\} \cup W_0$, lo que prueba que se trata de un conjunto satisfacible por definición, probando el resultado.

3) $F = \neg(G \wedge H)$, para ciertas fórmulas G y H : Como $\{F\} \cup W_0$ es satisfacible, existe una interpretación \mathcal{A} que es modelo de todas sus fórmulas y, en particular, de F . Luego, por definición del valor de una fórmula en una interpretación, obtenemos que \mathcal{A} no es modelo de $G \wedge H$. De nuevo por definición, esto implica que no es cierto que \mathcal{A} sea modelo de G y de H . Es decir, o bien \mathcal{A} no es modelo de G o bien \mathcal{A} no es modelo de H . Si suponemos que no es modelo de G , por definición se obtiene que \mathcal{A} es modelo de $\neg G$. Como en este caso la componente disyuntiva β_1 es $\neg G$, se deduce que \mathcal{A} es modelo de β_1 . Por tanto, \mathcal{A} es modelo de todas las fórmulas del conjunto $\{\beta_1, F\} \cup W_0$, por lo que se demuestra que dicho conjunto es satisfacible, probando el resultado. Por otro lado, si suponemos que \mathcal{A} no es modelo de H , se tiene que sí lo es de $\neg H$. Como β_2 es $\neg H$ en este caso, obtenemos que \mathcal{A} es modelo de β_2 . Luego \mathcal{A} es modelo de todas las fórmulas de $\{\beta_2, F\} \cup W_0$, demostrando así que es un conjunto satisfacible. Por tanto, se demuestra el resultado en ambos casos.

4) $F = \neg(\neg G)$, para cierta fórmula G : Puesto que $\{F\} \cup W_0$ es satisfacible, existe una interpretación \mathcal{A} modelo de todas sus fórmulas y, en particular, modelo de F . Luego, por definición del valor de una fórmula en una interpretación obtenemos que no es cierto

que \mathcal{A} no sea modelo de G , es decir, \mathcal{A} es modelo de G . Como las componentes β_1 y β_2 son ambas G en este caso, se obtiene que \mathcal{A} es modelo suyo. En particular, lo es de β_1 , de modo que \mathcal{A} es modelo de todas las fórmulas de $\{\beta_1, F\} \cup W_0$, probando así que es satisfacible. Por lo tanto, se verifica el resultado.

En conclusión, hemos probado que o bien $\{\beta_1, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{\beta_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible. Por lo tanto, se tiene que no es cierto que ninguno de los dos conjuntos sea insatisfacible. Esto contradice lo demostrado anteriormente, llegando así a una contradicción que prueba por reducción al absurdo la última condición del lema 2.0.2. De este modo, queda probado que la colección formada por los conjuntos de fórmulas finitamente satisfacibles verifica la propiedad de consistencia proposicional y, por el *Teorema de Existencia de Modelo*, todo conjunto perteneciente a ella es satisfacible, lo que demuestra el teorema. □

Procedamos con la demostración detallada del *Teorema de Compacidad* en Isabelle/HOL. Para ello, definamos la colección de conjuntos finitamente satisfacibles en Isabelle/HOL. En adelante notaremos por C a dicha colección.

definition *colecComp* :: ('a formula set) set
where *colecComp*: *colecComp* = $\{W. \text{fin-sat } W\}$

Para facilitar la demostración introduciremos el siguiente lema auxiliar que prueba que todo subconjunto finito de un conjunto perteneciente a la colección anterior es satisfacible.

lemma *colecComp-subset-finite*:

assumes $W \in \text{colecComp}$

$W_0 \subseteq W$

finite W_0

shows *sat* W_0

proof —

have $\forall W_0 \subseteq W. \text{finite } W_0 \longrightarrow \text{sat } W_0$

using *assms*(1) **unfolding** *colecComp fin-sat-def* **by** (*rule CollectD*)

then have *finite* $W_0 \longrightarrow \text{sat } W_0$

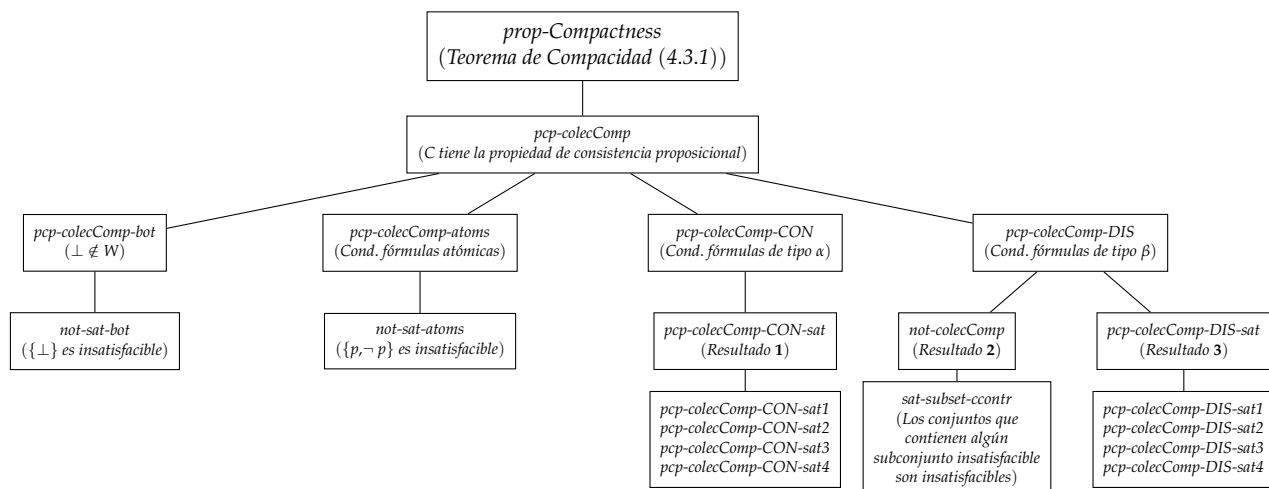
using $\langle W_0 \subseteq W \rangle$ **by** (*rule sspec*)

thus *sat* W_0

using $\langle \text{finite } W_0 \rangle$ **by** (*rule mp*)

qed

Para facilitar la comprensión de la demostración, mostraremos a continuación un grafo que estructura las relaciones de necesidad de los lemas auxiliares empleados.



De este modo, el *Teorema de Compacidad* se demuestra aplicando el *Teorema de Existencia de Modelo* a la colección C . Por tanto, basta probar que la colección C verifica la propiedad de consistencia proposicional (formalizado como *pcp-colecComp*), de modo que todo $W \in C$ será satisfacible. Para ello, por el lema 2.0.2, es suficiente probar las siguientes condiciones dado un conjunto $W \in C$ cualquiera:

1. $\perp \notin W$. (\implies formalizado como *pcp-colecComp-sat*)
2. Dada p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in W$ y $\neg p \in W$. (\implies formalizado como *pcp-colecComp-atoms*)
3. Para toda fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que α pertenece a W , se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W \in C$. (\implies formalizado como *pcp-colecComp-CON*)
4. Para toda fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que β pertenece a W , se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup W \in C$ o bien $\{\beta_2\} \cup W \in C$. (\implies formalizado como *pcp-colecComp-DIS*)

A su vez, cada uno de los lemas auxiliares que prueban las condiciones anteriores precisa de los siguientes lemas:

- *pcp-colecComp-sat*: Se prueba por reducción al absurdo mediante el lema *not-sat-bot* que demuestra la insatisfacibilidad del conjunto $\{\perp\}$.
- *pcp-colecComp-atoms*: Su demostración es por reducción al absurdo empleando el lema *not-sat-atoms* que prueba la insatisfacibilidad del conjunto $\{p, \neg p\}$ para cualquier fórmula atómica p .
- *pcp-colecComp-CON*: Para su prueba, se precisa del *resultado 1*, formalizado como *pcp-colecComp-CON-sat*. Este demuestra que dados $W \in C$, $F \in W$ una fórmula

de tipo α con componentes α_1 y α_2 y W_0 un subconjunto finito de W , se verifica que $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible. Para probar dicho resultado se emplean a su vez los lemas auxiliares *pcp-colecComp-CON-sat1*, *pcp-colecComp-CON-sat2*, *pcp-colecComp-CON-sat3* y *pcp-colecComp-CON-sat4* que demuestran el enunciado para cada tipo de fórmula α .

- *pcp-colecComp-DIS*: La prueba se realizará por reducción al absurdo. Para ello precisa de dos resultados.
 - *Resultado 2*: Dados $W \in C$ y β_i una fórmula cualquiera tal que $\{\beta_i\} \cup W \notin C$, entonces existe un subconjunto finito W_i de W tal que el conjunto $\{\beta_i\} \cup W_i$ no es satisfacible. En Isabelle ha sido formalizado como *not-colecComp*. A su vez, ha precisado para su prueba del lema auxiliar *sat-subset-ccontr* que demuestra que todo conjunto de fórmulas que tenga un subconjunto insatisfacible es también insatisfacible.
 - *Resultado 3*: Dados $W \in C$, F una fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , entonces se tiene que o bien $\{\beta_1, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{\beta_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible. En Isabelle se ha formalizado como *pcp-colecComp-DIS-sat*. Para su prueba, ha precisado de cuatro lemas auxiliares que prueban el resultado para cada caso de fórmula de tipo β : *pcp-colecComp-DIS-sat1*, *pcp-colecComp-DIS-sat2*, *pcp-colecComp-DIS-sat3*, *pcp-colecComp-DIS-sat4*.

Comencemos con las demostraciones de los lemas auxiliares empleados en la demostración del teorema. Para probar que C verifica la propiedad de consistencia proposicional, dado un conjunto $W \in C$ probaremos por separado que se verifican cada una de las condiciones del lema 2.0.2.

En primer lugar, veamos que $\perp \notin W$ si $W \in C$. Para ello, precisaremos del siguiente lema auxiliar que prueba que el conjunto $\{\perp\}$ no es satisfacible.

lemma *not-sat-bot*: $\neg \text{sat } \{\perp\}$

proof (*rule ccontr*)

assume $\neg(\neg \text{sat } \{\perp :: 'a \text{ formula}\})$

then have $\text{sat } \{\perp :: 'a \text{ formula}\}$

by (*rule notnotD*)

then have $\text{Ex}:\exists \mathcal{A}. \forall F \in \{\perp :: 'a \text{ formula}\}. \mathcal{A} \models F$

by (*simp only: sat-def*)

obtain \mathcal{A} **where** $1:\forall F \in \{\perp :: 'a \text{ formula}\}. \mathcal{A} \models F$

using Ex **by** (*rule exE*)

have $2:\perp \in \{\perp :: 'a \text{ formula}\}$

by (*simp only: singletonI*)


```

have  $\mathcal{A} \models \perp$ 
  using 1 2 by (rule bspec)
thus False
  by (simp only: formula-semantics.simps(2))
qed

```

Por tanto, probemos que si $W \in C$, entonces $\perp \notin W$.

```

lemma pcp-colecComp-bot:
  assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
  shows  $\perp \notin W$ 
proof (rule ccontr)
  assume  $\neg(\perp \notin W)$ 
  then have  $\perp \in W$ 
    by (rule notnotD)
  have  $\{\} \subseteq W$ 
    by (simp only: empty-subsetI)
  have  $\perp \in W \wedge \{\} \subseteq W$ 
    using  $\langle \perp \in W \rangle \langle \{\} \subseteq W \rangle$  by (rule conjI)
  then have  $\{\perp\} \subseteq W$ 
    by (simp only: insert-subset)
  have finite  $\{\perp\}$ 
    by (simp only: finite.emptyI finite-insert)
  have sat  $\{\perp :: 'a \text{ formula}\}$ 
    using assms  $\langle \{\perp\} \subseteq W \rangle \langle \text{finite } \{\perp\} \rangle$  by (rule colecComp-subset-finite)
  have  $\neg \text{sat } \{\perp :: 'a \text{ formula}\}$ 
    by (rule not-sat-bot)
  then show False
    using  $\langle \text{sat } \{\perp :: 'a \text{ formula}\} \rangle$  by (rule notE)
qed

```

Por otro lado, vamos a probar que dado un conjunto $W \in C$ y p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in W$ y $\neg p \in W$. Para ello, emplearemos el siguiente lema auxiliar que prueba que el conjunto $\{p, \neg p\}$ es insatisfacible para cualquier fórmula atómica p .

```

lemma not-sat-atoms:  $\neg \text{sat}(\{ \text{Atom } k, \neg (\text{Atom } k) \})$ 
proof (rule ccontr)
  assume  $\neg \neg \text{sat}(\{ \text{Atom } k, \neg (\text{Atom } k) \})$ 
  then have  $\text{sat}(\{ \text{Atom } k, \neg (\text{Atom } k) \})$ 
    by (rule notnotD)
  then have Sat:  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in \{ \text{Atom } k, \neg (\text{Atom } k) \}. \mathcal{A} \models F$ 
    by (simp only: sat-def)

```

```

obtain  $\mathcal{A}$  where  $H: \forall F \in \{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\}. \mathcal{A} \models F$ 
  using Sat by (rule exE)
have  $Atom\ k \in \{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\}$ 
  by simp
have  $\mathcal{A} \models Atom\ k$ 
  using  $H\ \langle Atom\ k \in \{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\} \rangle$  by (rule bspec)
have  $\neg(Atom\ k) \in \{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\}$ 
  by simp
have  $\mathcal{A} \models \neg(Atom\ k)$ 
  using  $H\ \langle \neg(Atom\ k) \in \{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\} \rangle$  by (rule bspec)
then have  $\neg \mathcal{A} \models Atom\ k$ 
  by (simp only: simp-thms(8) formula-semantics.simps(3))
thus False
  using  $\langle \mathcal{A} \models Atom\ k \rangle$  by (rule notE)
qed

```

De este modo, podemos demostrar detalladamente la condición: dados $W \in \mathcal{C}$ y p una fórmula atómica cualquiera, no se tiene simultáneamente que $p \in W$ y $\neg p \in W$.

lemma *pcp-colecComp-atoms*:

```

assumes  $W \in colecComp$ 
shows  $\forall k. Atom\ k \in W \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in W \longrightarrow False$ 
proof (rule allI)
  fix  $k$ 
  show  $Atom\ k \in W \longrightarrow \neg (Atom\ k) \in W \longrightarrow False$ 
  proof (rule impI) +
    assume  $1: Atom\ k \in W$ 
    assume  $2: \neg (Atom\ k) \in W$ 
    have  $\{\} \subseteq W$ 
      by (simp only: empty-subsetI)
    have  $Atom\ k \in W \wedge \{\} \subseteq W$ 
      using  $1\ \langle \{\} \subseteq W \rangle$  by (rule conjI)
    then have  $\{Atom\ k\} \subseteq W$ 
      by (simp only: insert-subset)
    have  $\neg (Atom\ k) \in W \wedge \{\} \subseteq W$ 
      using  $2\ \langle \{\} \subseteq W \rangle$  by (rule conjI)
    then have  $\{\neg(Atom\ k)\} \subseteq W$ 
      by (simp only: insert-subset)
    have  $\{Atom\ k\} \cup \{\neg(Atom\ k)\} \subseteq W$ 
      using  $\langle \{Atom\ k\} \subseteq W \rangle\ \langle \{\neg(Atom\ k)\} \subseteq W \rangle$  by (simp only: Un-least)
    then have  $\{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\} \subseteq W$ 
      by simp

```

```

have finite  $\{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\}$ 
by blast
have sat  $(\{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\})$ 
  using assms  $\langle \{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\} \subseteq W \rangle$  finite  $\{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\}$  by (rule
colecComp-subset-finite)
have  $\neg\ sat\ (\{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\})$ 
by (rule not-sat-atoms)
thus False
using  $\langle sat\ (\{Atom\ k, \neg(Atom\ k)\}) \rangle$  by (rule notE)
qed
qed

```

Demostremos la tercera condición del lema 2.0.2: dados $W \in C$ y F una fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que $F \in W$, se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W \in C$. Para probar dicho resultado, emplearemos un lema auxiliar que demuestra que dado un subconjunto finito W_0 de W se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$ es un conjunto satisfacible. Mostraremos la prueba para cada caso de fórmula de tipo α . Para ello, precisaremos del siguiente lema auxiliar que demuestra que dado un conjunto $W \in C$, F una fórmula perteneciente a W y W_0 un subconjunto finito de W , entonces $\{F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-elem-sat*:

```

assumes  $W \in colecComp$ 
   $F \in W$ 
  finite  $W_0$ 
   $W_0 \subseteq W$ 
shows sat  $(\{F\} \cup W_0)$ 

```

proof –

```

have  $1: insert\ F\ W_0 = \{F\} \cup W_0$ 
by (rule insert-is-Un)
have finite  $(insert\ F\ W_0)$ 
using assms(3) by (simp only: finite-insert)
then have finite  $(\{F\} \cup W_0)$ 
by (simp only: 1)
have  $F \in W \wedge W_0 \subseteq W$ 
using assms(2) assms(4) by (rule conjI)
then have  $insert\ F\ W_0 \subseteq W$ 
by (simp only: insert-subset)
then have  $\{F\} \cup W_0 \subseteq W$ 
by (simp only: 1)
show sat  $(\{F\} \cup W_0)$ 
using assms(1)  $\langle \{F\} \cup W_0 \subseteq W \rangle$  finite  $(\{F\} \cup W_0)$  by (rule colecComp-subset-finite)

```

qed

De este modo, vamos a probar para cada caso de fórmula α que dados $W \in C$, F una fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , se verifica que $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible. Para ello, emplearemos el siguiente lema auxiliar en Isabelle.

lemma *ball-Un*:

```
assumes  $\forall x \in A. P\ x$ 
          $\forall x \in B. P\ x$ 
shows  $\forall x \in (A \cup B). P\ x$ 
using assms by blast
```

En primer lugar, probemos que dados $W \in C$, una fórmula $F = G \wedge H$ para ciertas fórmulas G y H tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , se verifica que $\{G, H, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-CON-sat1*:

```
assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
          $F = G \wedge H$ 
          $F \in W$ 
         finite  $W_0$ 
          $W_0 \subseteq W$ 
shows sat  $(\{G, H, F\} \cup W_0)$ 
```

proof –

```
have sat  $(\{F\} \cup W_0)$ 
  using assms(1,3,4,5) by (rule pcp-colecComp-elem-sat)
have  $F \in \{F\} \cup W_0$ 
  by (simp add: insertI1)
have  $Ex1: \exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $\langle \text{sat } (\{F\} \cup W_0) \rangle$  by (simp only: sat-def)
obtain  $\mathcal{A}$  where Forall1:  $\forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $Ex1$  by (rule exE)
have  $\mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1  $\langle F \in \{F\} \cup W_0 \rangle$  by (rule bspec)
then have  $\mathcal{A} \models (G \wedge H)$ 
  using assms(2) by (simp only:  $\langle \mathcal{A} \models F \rangle$ )
then have  $\mathcal{A} \models G \wedge \mathcal{A} \models H$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(4))
then have  $\mathcal{A} \models G$ 
  by (rule conjunct1)
then have  $1: \forall F \in \{G\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
have  $\mathcal{A} \models H$ 
```

```

using  $\langle \mathcal{A} \models G \wedge \mathcal{A} \models H \rangle$  by (rule conjunct2)
then have  $2: \forall F \in \{H\}. \mathcal{A} \models F$ 
by simp
have  $\forall F \in (\{G\} \cup \{H\}) \cup (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
using Forall1 1 2 by (iprover intro: ball-Un)
then have  $\forall F \in (\{G, H, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
by simp
then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{G, H, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
by (iprover intro: exI)
thus sat  $(\{G, H, F\} \cup W_0)$ 
by (simp only: sat-def)
qed

```

A continuación veamos la prueba detallada del resultado para el segundo caso de fórmula de tipo α : dados $W \in C$, una fórmula $F = \neg(G \vee H)$ para ciertas fórmulas G y H tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , se verifica que $\{\neg G, \neg H, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-CON-sat2*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
 $F = \neg(G \vee H)$ 
 $F \in W$ 
finite  $W_0$ 
 $W_0 \subseteq W$ 
shows sat  $(\{\neg G, \neg H, F\} \cup W_0)$ 

```

proof –

```

have sat  $(\{F\} \cup W_0)$ 
using assms(1,3,4,5) by (rule pcp-colecComp-elem-sat)
have  $F \in \{F\} \cup W_0$ 
by (simp add: insertI1)
have  $Ex1: \exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
using (sat  $(\{F\} \cup W_0)$ ) by (simp only: sat-def)
obtain  $\mathcal{A}$  where Forall1:  $\forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
using  $Ex1$  by (rule exE)
have  $\mathcal{A} \models F$ 
using Forall1  $(F \in \{F\} \cup W_0)$  by (rule bspec)
then have  $\mathcal{A} \models \neg(G \vee H)$ 
using assms(2) by (simp only:  $\langle \mathcal{A} \models F \rangle$ )
then have  $\neg(\mathcal{A} \models (G \vee H))$ 
by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\neg(\mathcal{A} \models G \vee \mathcal{A} \models H)$ 
by (simp only: formula-semantics.simps(5) simp-thms(8))

```

```

then have  $\neg \mathcal{A} \models G \wedge \neg \mathcal{A} \models H$ 
  by (simp only: de-Morgan-disj simp-thms(8))
then have  $\mathcal{A} \models \neg G \wedge \mathcal{A} \models \neg H$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\mathcal{A} \models \neg G$ 
  by (rule conjunct1)
then have  $1: \forall F \in \{\neg G\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
have  $\mathcal{A} \models \neg H$ 
  using  $\langle \mathcal{A} \models \neg G \wedge \mathcal{A} \models \neg H \rangle$  by (rule conjunct2)
then have  $2: \forall F \in \{\neg H\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
have  $\forall F \in (\{\neg G\} \cup \{\neg H\}) \cup (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1 1 2 by (iprover intro: ball-Un)
then have  $\forall F \in (\{\neg G, \neg H, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{\neg G, \neg H, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by (iprover intro: exI)
thus sat  $(\{\neg G, \neg H, F\} \cup W_0)$ 
  by (simp only: sat-def)
qed

```

Probemos detalladamente el resultado para el tercer caso de fórmula de tipo α : dados $W \in C$, una fórmula $F = \neg(G \rightarrow H)$ para ciertas fórmulas G y H tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , se verifica que $\{G, \neg H, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-CON-sat3*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
   $F = \neg (G \rightarrow H)$ 
   $F \in W$ 
  finite  $W_0$ 
   $W_0 \subseteq W$ 
shows sat  $(\{G, \neg H, F\} \cup W_0)$ 

```

proof –

```

have sat  $(\{F\} \cup W_0)$ 
  using assms(1,3,4,5) by (rule pcp-colecComp-elem-sat)
have  $F \in \{F\} \cup W_0$ 
  by (simp add: insertI1)
have  $Ex1: \exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $\langle \text{sat } (\{F\} \cup W_0) \rangle$  by (simp only: sat-def)
obtain  $\mathcal{A}$  where Forall1:  $\forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $Ex1$  by (rule exE)

```

```

have  $\mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1  $\langle F \in \{F\} \cup W_0 \rangle$  by (rule bspec)
then have  $\mathcal{A} \models \neg(G \rightarrow H)$ 
  using assms(2) by (simp only:  $\langle \mathcal{A} \models F \rangle$ )
then have  $\neg(\mathcal{A} \models (G \rightarrow H))$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\neg(\mathcal{A} \models G \longrightarrow \mathcal{A} \models H)$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(6) simp-thms(8))
then have  $\mathcal{A} \models G \wedge \neg \mathcal{A} \models H$ 
  by (simp only: not-imp simp-thms(8))
then have  $\mathcal{A} \models G \wedge \mathcal{A} \models \neg H$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\mathcal{A} \models G$ 
  by (rule conjunct1)
then have  $1: \forall F \in \{G\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
have  $\mathcal{A} \models \neg H$ 
  using  $\langle \mathcal{A} \models G \wedge \mathcal{A} \models \neg H \rangle$  by (rule conjunct2)
then have  $2: \forall F \in \{\neg H\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
have  $\forall F \in (\{G\} \cup \{\neg H\}) \cup (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1 1 2 by (iprover intro: ball-Un)
then have  $\forall F \in \{G, \neg H, F\} \cup W_0. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{G, \neg H, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by (iprover intro: exI)
thus sat  $(\{G, \neg H, F\} \cup W_0)$ 
  by (simp only: sat-def)
qed

```

Por último probemos que dados $W \in C$, una fórmula $F = \neg(\neg G)$ para cierta fórmula G tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , se verifica que $\{G, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-CON-sat4*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
   $F = \neg(\neg G)$ 
   $F \in W$ 
  finite  $W_0$ 
   $W_0 \subseteq W$ 
shows sat  $(\{G, F\} \cup W_0)$ 

```

proof –

```

have  $\text{sat} (\{F\} \cup W_0)$ 
  using  $\text{assms}(1,3,4,5)$  by (rule pcp-colecComp-elem-sat)
have  $F \in \{F\} \cup W_0$ 
  by (simp add: insertI1)
have  $\text{Ex1}:\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $\langle \text{sat} (\{F\} \cup W_0) \rangle$  by (simp only: sat-def)
obtain  $\mathcal{A}$  where  $\text{Forall1}:\forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $\text{Ex1}$  by (rule exE)
have  $\mathcal{A} \models F$ 
  using  $\text{Forall1} \langle F \in \{F\} \cup W_0 \rangle$  by (rule bspec)
then have  $\mathcal{A} \models \neg(\neg G)$ 
  using  $\text{assms}(2)$  by (simp only:  $\langle \mathcal{A} \models F \rangle$ )
then have  $\neg \mathcal{A} \models \neg G$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\neg \neg \mathcal{A} \models G$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\mathcal{A} \models G$ 
  by (rule notnotD)
then have  $1:\forall F \in \{G\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
have  $\forall F \in (\{G\}) \cup (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $\text{Forall1 } 1$  by (iprover intro: ball-Un)
then have  $\forall F \in \{G,F\} \cup W_0. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{G,F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by (iprover intro: exI)
thus  $\text{sat} (\{G,F\} \cup W_0)$ 
  by (simp only: sat-def)
qed

```

Por tanto, por las pruebas detalladas de los casos anteriores, podemos demostrar que dados $W \in C$, $F \in W$ una fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 y W_0 un subconjunto finito de W , se verifica que $\{\alpha_1, \alpha_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-CON-sat*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
   $\text{Con } F \ G \ H$ 
   $F \in W$ 
  finite  $W_0$ 
   $W_0 \subseteq W$ 
shows  $\text{sat} (\{G,H,F\} \cup W_0)$ 

```

proof —


```

have  $\{G, H\} \cup Wo \subseteq \{G, H, F\} \cup Wo$ 
  by blast
have  $F = G \wedge H \vee$ 
   $(\exists F1\ G1. F = \neg (F1 \vee G1) \wedge G = \neg F1 \wedge H = \neg G1) \vee$ 
   $(\exists H1. F = \neg (G \rightarrow H1) \wedge H = \neg H1) \vee$ 
   $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
  using assms(2) by (simp only: con-dis-simps(1))
thus sat ( $\{G, H, F\} \cup Wo$ )
proof (rule disjE)
  assume  $F = G \wedge H$ 
  show sat ( $\{G, H, F\} \cup Wo$ )
    using assms(1)  $\langle F = G \wedge H \rangle$  assms(3,4,5) by (rule pcp-colecComp-CON-sat1)
next
assume  $(\exists F1\ G1. F = \neg (F1 \vee G1) \wedge G = \neg F1 \wedge H = \neg G1) \vee$ 
   $(\exists H1. F = \neg (G \rightarrow H1) \wedge H = \neg H1) \vee$ 
   $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
thus sat ( $\{G, H, F\} \cup Wo$ )
proof (rule disjE)
  assume  $Ex2: \exists F1\ G1. F = \neg (F1 \vee G1) \wedge G = \neg F1 \wedge H = \neg G1$ 
  obtain  $F1\ G1$  where  $2: F = \neg (F1 \vee G1) \wedge G = \neg F1 \wedge H = \neg G1$ 
    using  $Ex2$  by (iprover elim: exE)
  have  $G = \neg F1$ 
    using 2 by (iprover elim: conjunct1)
  have  $H = \neg G1$ 
    using 2 by (iprover elim: conjunct2)
  have  $F = \neg (F1 \vee G1)$ 
    using 2 by (rule conjunct1)
  have sat ( $\{\neg F1, \neg G1, F\} \cup Wo$ )
    using assms(1)  $\langle F = \neg (F1 \vee G1) \rangle$  assms(3,4,5) by (rule pcp-colecComp-CON-sat2)
thus sat ( $\{G, H, F\} \cup Wo$ )
  by (simp only:  $\langle G = \neg F1 \rangle \langle H = \neg G1 \rangle$ )
next
assume  $(\exists H1. F = \neg (G \rightarrow H1) \wedge H = \neg H1) \vee$ 
   $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
thus sat ( $\{G, H, F\} \cup Wo$ )
proof (rule disjE)
  assume  $Ex3: \exists H1. F = \neg (G \rightarrow H1) \wedge H = \neg H1$ 
  obtain  $H1$  where  $3: F = \neg (G \rightarrow H1) \wedge H = \neg H1$ 
    using  $Ex3$  by (rule exE)
  have  $H = \neg H1$ 

```

```

    using 3 by (rule conjunct2)
    have  $F = \neg(G \rightarrow H1)$ 
    using 3 by (rule conjunct1)
    have sat ( $\{G, \neg H1, F\} \cup Wo$ )
    using assms(1)  $\langle F = \neg(G \rightarrow H1) \rangle$  assms(3,4,5) by (rule pcp-colecComp-CON-sat3)
    thus sat ( $\{G,H,F\} \cup Wo$ )
    by (simp only:  $\langle H = \neg H1 \rangle$ )
next
assume  $F = \neg(\neg G) \wedge H = G$ 
then have  $H = G$ 
  by (rule conjunct2)
then have C4:  $\{G,F\} \cup Wo = \{G,H,F\} \cup Wo$ 
  by blast
have  $F = \neg(\neg G)$ 
  using  $\langle F = \neg(\neg G) \wedge H = G \rangle$  by (rule conjunct1)
have sat ( $\{G,F\} \cup Wo$ )
  using assms(1)  $\langle F = \neg(\neg G) \rangle$  assms(3,4,5) by (rule pcp-colecComp-CON-sat4)
thus sat ( $\{G,H,F\} \cup Wo$ )
  by (simp only: C4)
qed
qed
qed
qed

```

Finalmente, con el resultado anterior, podemos probar la tercera condición del lema 2.0.2: dados $W \in C$ y F una fórmula de tipo α con componentes α_1 y α_2 tal que $F \in W$, se tiene que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cup W \in C$.

lemma *pcp-colecComp-CON*:

assumes $W \in \text{colecComp}$

shows $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G,H\} \cup W \in \text{colecComp}$

proof (rule allI)+

fix $F G H$

show $\text{Con } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G,H\} \cup W \in \text{colecComp}$

proof (rule impI)+

assume $\text{Con } F G H$

assume $F \in W$

show $\{G,H\} \cup W \in \text{colecComp}$

unfolding *colecComp fin-sat-def*

proof (rule CollectI)

show $\forall S \subseteq \{G,H\} \cup W. \text{finite } S \longrightarrow \text{sat } S$

proof (rule sallI)

```

fix S
assume  $S \subseteq \{G, H\} \cup W$ 
then have  $S \subseteq \{G\} \cup (\{H\} \cup W)$ 
  by blast
show finite S  $\longrightarrow$  sat S
proof (rule impl)
  assume finite S
  have  $Ex: \exists Wo \subseteq W. \text{finite } Wo \wedge (S = \{G, H\} \cup Wo \vee S = \{G\} \cup Wo \vee S = \{H\} \cup Wo \vee S = Wo)$ 
    using finite S  $\langle S \subseteq \{G, H\} \cup W \rangle$  by (rule finite-subset-insert2)
  obtain Wo where  $Wo \subseteq W$  and  $1: \text{finite } Wo \wedge (S = \{G, H\} \cup Wo \vee S = \{G\} \cup Wo \vee S = \{H\} \cup Wo \vee S = Wo)$ 
    using Ex by (rule subexE)
  have finite Wo
    using 1 by (rule conjunct1)
  have sat  $(\{G, H, F\} \cup Wo)$ 
    using  $\langle W \in \text{colecComp} \rangle \langle \text{Con } F \text{ } G \text{ } H \rangle \langle F \in W \rangle \langle \text{finite } Wo \rangle \langle Wo \subseteq W \rangle$  by (rule pcp-colecComp-CON-sat)
  have  $S = \{G, H\} \cup Wo \vee S = \{G\} \cup Wo \vee S = \{H\} \cup Wo \vee S = Wo$ 
    using 1 by (rule conjunct2)
  thus sat S
proof (rule disjE)
  assume  $S = \{G, H\} \cup Wo$ 
  then have  $S \subseteq \{G, H, F\} \cup Wo$ 
    by blast
  show sat S
    using  $\langle \text{sat}(\{G, H, F\} \cup Wo) \rangle \langle S \subseteq \{G, H, F\} \cup Wo \rangle$  by (simp only: sat-mono)
next
  assume  $S = \{G\} \cup Wo \vee S = \{H\} \cup Wo \vee S = Wo$ 
  thus sat S
proof (rule disjE)
  assume  $S = \{G\} \cup Wo$ 
  then have  $S \subseteq \{G, H, F\} \cup Wo$ 
    by blast
  thus sat S
    using  $\langle \text{sat}(\{G, H, F\} \cup Wo) \rangle$  by (rule sat-mono)
next
  assume  $S = \{H\} \cup Wo \vee S = Wo$ 
  thus sat S
proof (rule disjE)

```

```

    assume  $S = \{H\} \cup W_0$ 
    then have  $S \subseteq \{G, H, F\} \cup W_0$ 
      by blast
    thus sat  $S$ 
      using  $\langle \text{sat}(\{G, H, F\} \cup W_0) \rangle$  by (rule sat-mono)
  next
    assume  $S = W_0$ 
    then have  $S \subseteq \{G, H, F\} \cup W_0$ 
      by (simp only: Un-upper2)
    thus sat  $S$ 
      using  $\langle \text{sat}(\{G, H, F\} \cup W_0) \rangle$  by (rule sat-mono)
  qed
qed
qed
qed
qed
qed
qed
qed

```

Por último, probemos la cuarta condición del lema 2.0.2: dados $W \in C$ y F una fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que $F \in W$, se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup W \in C$ o bien $\{\beta_2\} \cup W \in C$.

Por un lado, precisaremos para ello de un lema auxiliar que demuestre que dado $W \in C$ y β_i una fórmula cualquiera tal que $\{\beta_i\} \cup W \notin C$, entonces existe un subconjunto finito W_i de W tal que el conjunto $\{\beta_i\} \cup W_i$ no es satisfacible. A su vez, para su demostración emplearemos un lema que prueba que todo conjunto que contiene un subconjunto insatisfacible es también insatisfacible.

lemma *sat-subset-ccontr*:

```

  assumes  $A \subseteq B$ 
     $\neg \text{sat } A$ 
  shows  $\neg \text{sat } B$ 

```

proof –

```

  have  $A \subseteq B \wedge \text{sat } B \longrightarrow \text{sat } A$ 
    using sat-mono by blast
  then have  $\neg(A \subseteq B \wedge \text{sat } B)$ 
    using assms(2) by (rule mt)
  then have  $\neg(A \subseteq B) \vee \neg(\text{sat } B)$ 
    by (simp only: de-Morgan-conj)
  thus ?thesis

```

```

proof (rule disjE)
  assume  $\neg(A \subseteq B)$ 
  thus ?thesis
    using assms(1) by (rule notE)
next
  assume  $\neg(\text{sat } B)$ 
  thus ?thesis
    by this
qed
qed

```

De este modo, podemos demostrar que dados $W \in C$ y β_i una fórmula cualquiera tal que $\{\beta_i\} \cup W \notin C$, entonces existe un subconjunto finito W_i de W tal que el conjunto $\{\beta_i\} \cup W_F$ no es satisfacible.

lemma *not-colecComp*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
   $\{\beta_i\} \cup W \notin \text{colecComp}$ 
  shows  $\exists W_i \subseteq W. \text{finite } W_i \wedge \neg(\text{sat } (\{\beta_i\} \cup W_i))$ 
proof –
  have  $W \text{Col} : \forall S' \subseteq W. \text{finite } S' \longrightarrow \text{sat } S'$ 
    using assms(1) unfolding colecComp fin-sat-def by (rule CollectD)
  have  $\neg(\forall W_o \subseteq \{\beta_i\} \cup W. \text{finite } W_o \longrightarrow \text{sat } W_o)$ 
    using assms(2) unfolding colecComp fin-sat-def by (simp only: mem-Collect-eq simp-thms(8))
  then have  $\exists W_o \subseteq \{\beta_i\} \cup W. \neg(\text{finite } W_o \longrightarrow \text{sat } W_o)$ 
    by (rule sll-simps-not-all)
  then have  $Ex1 : \exists W_o \subseteq \{\beta_i\} \cup W. \text{finite } W_o \wedge \neg(\text{sat } W_o)$ 
    by (simp only: not-imp)
  obtain  $W_o$  where  $W_o \subseteq \{\beta_i\} \cup W$  and  $C1 : \text{finite } W_o \wedge \neg(\text{sat } W_o)$ 
    using Ex1 by (rule subexE)
  have finite  $W_o$ 
    using C1 by (rule conjunct1)
  have  $\neg(\text{sat } W_o)$ 
    using C1 by (rule conjunct2)
  have  $W_o \subseteq \text{insert } \beta_i W$ 
    using  $\langle W_o \subseteq \{\beta_i\} \cup W \rangle$  by blast
  have  $Ex2 : \exists W_o' \subseteq W. \text{finite } W_o' \wedge (W_o = \text{insert } \beta_i W_o' \vee W_o = W_o')$ 
    using  $\langle \text{finite } W_o \rangle \langle W_o \subseteq \text{insert } \beta_i W \rangle$  by (rule finite-subset-insert1)
  obtain  $W_o'$  where  $W_o' \subseteq W$  and  $C2 : \text{finite } W_o' \wedge (W_o = \{\beta_i\} \cup W_o' \vee W_o = W_o')$ 
    using Ex2 by blast
  have finite  $W_o'$ 
    using C2 by (rule conjunct1)

```

```

have  $Wo = \{Gi\} \cup Wo' \vee Wo = Wo'$ 
  using C2 by (rule conjunct2)
thus ?thesis
proof (rule disjE)
  assume  $Wo = \{Gi\} \cup Wo'$ 
  then have  $\neg(\text{sat } (\{Gi\} \cup Wo'))$ 
    using  $\langle \neg \text{sat } Wo \rangle$  by (simp only:  $\langle Wo = \{Gi\} \cup Wo' \rangle$  simp-thms(8))
  have  $\text{finite } Wo' \wedge \neg(\text{sat } (\{Gi\} \cup Wo'))$ 
    using  $\langle \text{finite } Wo' \rangle \langle \neg(\text{sat } (\{Gi\} \cup Wo')) \rangle$  by (rule conjI)
  thus ?thesis
    using  $\langle Wo' \subseteq W \rangle$  by (rule subexI)
next
  assume  $Wo = Wo'$ 
  then have  $\neg(\text{sat } Wo')$ 
    using  $\langle \neg \text{sat } Wo \rangle$  by (simp only:  $\langle Wo = Wo' \rangle$  simp-thms(8))
  have  $Wo' \subseteq \{Gi\} \cup Wo'$ 
    by blast
  then have  $\neg(\text{sat } (\{Gi\} \cup Wo'))$ 
    using  $\langle \neg(\text{sat } Wo') \rangle$  by (rule sat-subset-contr)
  have  $\text{finite } Wo' \wedge \neg(\text{sat } (\{Gi\} \cup Wo'))$ 
    using  $\langle \text{finite } Wo' \rangle \langle \neg(\text{sat } (\{Gi\} \cup Wo')) \rangle$  by (rule conjI)
  thus ?thesis
    using  $\langle Wo' \subseteq W \rangle$  by (rule subexI)
qed
qed

```

Por otro lado, para demostrar la cuarta condición del lema 2.0.2 que demuestra que C verifica la propiedad de consistencia proposicional, precisaremos de un lema auxiliar que prueba que dados $W \in C$, F una fórmula de tipo β y componentes β_1 y β_2 tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , entonces se tiene que o bien $\{\beta_1, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{\beta_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible. Vamos a probar que, en efecto, se tiene el resultado para cada tipo de fórmula β .

En primer lugar, probemos que dados $W \in C$, una fórmula $F = G \wedge H$ para ciertas fórmulas G y H tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , entonces se tiene que o bien $\{G, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{H, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-DIS-sat1*:

assumes $W \in \text{colecComp}$

$F = G \vee H$

$F \in W$

finite Wo

$Wo \subseteq W$
shows $sat (\{G, F\} \cup Wo) \vee sat (\{H, F\} \cup Wo)$
proof –
have $sat (\{F\} \cup Wo)$
using $assms(1,3,4,5)$ **by** $(rule\ pcp-colecComp-elem-sat)$
have $F \in \{F\} \cup Wo$
by $simp$
have $Ex1: \exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{F\} \cup Wo). \mathcal{A} \models F$
using $\langle sat (\{F\} \cup Wo) \rangle$ **by** $(simp\ only: sat-def)$
obtain \mathcal{A} **where** $Forall1: \forall F \in (\{F\} \cup Wo). \mathcal{A} \models F$
using $Ex1$ **by** $(rule\ exE)$
have $\mathcal{A} \models F$
using $Forall1 \langle F \in \{F\} \cup Wo \rangle$ **by** $(rule\ bspec)$
then have $\mathcal{A} \models (G \vee H)$
using $assms(2)$ **by** $(simp\ only: \langle \mathcal{A} \models F \rangle)$
then have $\mathcal{A} \models G \vee \mathcal{A} \models H$
by $(simp\ only: formula-semantics.simps(5))$
thus $?thesis$
proof $(rule\ disjE)$
assume $\mathcal{A} \models G$
then have $\forall F \in \{G\}. \mathcal{A} \models F$
by $simp$
then have $\forall F \in (\{G\} \cup (\{F\} \cup Wo)). \mathcal{A} \models F$
using $Forall1$ **by** $(rule\ ball-Un)$
then have $\forall F \in \{G, F\} \cup Wo. \mathcal{A} \models F$
by $simp$
then have $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{G, F\} \cup Wo). \mathcal{A} \models F$
by $(iprover\ intro: exI)$
then have $sat (\{G, F\} \cup Wo)$
by $(simp\ only: sat-def)$
thus $?thesis$
by $(rule\ disjI1)$
next
assume $\mathcal{A} \models H$
then have $\forall F \in \{H\}. \mathcal{A} \models F$
by $simp$
then have $\forall F \in (\{H\} \cup (\{F\} \cup Wo)). \mathcal{A} \models F$
using $Forall1$ **by** $(rule\ ball-Un)$
then have $\forall F \in \{H, F\} \cup Wo. \mathcal{A} \models F$
by $simp$

```

then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{H, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by (iprover intro: exI)
then have sat ( $\{H, F\} \cup W_0$ )
  by (simp only: sat-def)
thus ?thesis
  by (rule disjI2)
qed
qed

```

El siguiente lema auxiliar demuestra que dados $W \in C$, una fórmula $F = G \longrightarrow H$ para ciertas fórmulas G y H tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , entonces se tiene que o bien $\{\neg G, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{H, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-DIS-sat2*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
   $F = G \rightarrow H$ 
   $F \in W$ 
  finite  $W_0$ 
   $W_0 \subseteq W$ 
shows sat ( $\{\neg G, F\} \cup W_0$ )  $\vee$  sat ( $\{H, F\} \cup W_0$ )

```

proof –

```

have sat ( $\{F\} \cup W_0$ )
  using assms(1,3,4,5) by (rule pcp-colecComp-elem-sat)
have  $F \in \{F\} \cup W_0$ 
  by simp
have  $Ex1: \exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using sat ( $\{F\} \cup W_0$ ) by (simp only: sat-def)
obtain  $\mathcal{A}$  where Forall1:  $\forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $Ex1$  by (rule exE)
have  $\mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1 ( $F \in \{F\} \cup W_0$ ) by (rule bspec)
then have  $\mathcal{A} \models (G \rightarrow H)$ 
  using assms(2) by (simp only: AmodelsF)
then have  $\mathcal{A} \models G \longrightarrow \mathcal{A} \models H$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(6))
then have  $(\neg(\neg \mathcal{A} \models G)) \longrightarrow \mathcal{A} \models H$ 
  by (simp only: not-not)
then have  $(\neg \mathcal{A} \models G) \vee \mathcal{A} \models H$ 
  by (simp only: disj-imp)
thus ?thesis
proof (rule disjE)
  assume  $\neg \mathcal{A} \models G$ 

```



```

then have  $\mathcal{A} \models (\neg G)$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\forall F \in \{\neg G\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\forall F \in (\{\neg G\} \cup (\{F\} \cup W_0)). \mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1 by (rule ball-Un)
then have  $\forall F \in \{\neg G, F\} \cup W_0. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{\neg G, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by (iprover intro: exI)
then have sat ( $\{\neg G, F\} \cup W_0$ )
  by (simp only: sat-def)
thus ?thesis
  by (rule disjI1)
next
assume  $\mathcal{A} \models H$ 
then have  $\forall F \in \{H\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\forall F \in (\{H\} \cup (\{F\} \cup W_0)). \mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1 by (rule ball-Un)
then have  $\forall F \in \{H, F\} \cup W_0. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{H, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by (iprover intro: exI)
then have sat ( $\{H, F\} \cup W_0$ )
  by (simp only: sat-def)
thus ?thesis
  by (rule disjI2)
qed
qed

```

Por otro lado probemos que dados $W \in C$, una fórmula $F = \neg(G \wedge H)$ para ciertas fórmulas G y H tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , entonces se tiene que o bien $\{\neg G, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{\neg H, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-DIS-sat3*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
   $F = \neg(G \wedge H)$ 
   $F \in W$ 
  finite  $W_0$ 
   $W_0 \subseteq W$ 
shows sat ( $\{\neg G, F\} \cup W_0$ )  $\vee$  sat ( $\{\neg H, F\} \cup W_0$ )

```

proof –

```

have  $\text{sat} (\{F\} \cup W_0)$ 
  using  $\text{assms}(1,3,4,5)$  by (rule pcp-colecComp-elem-sat)
have  $F \in \{F\} \cup W_0$ 
  by simp
have  $\text{Ex1}:\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $\langle \text{sat} (\{F\} \cup W_0) \rangle$  by (simp only: sat-def)
obtain  $\mathcal{A}$  where  $\text{Forall1}:\forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $\text{Ex1}$  by (rule exE)
have  $\mathcal{A} \models F$ 
  using  $\text{Forall1} \langle F \in \{F\} \cup W_0 \rangle$  by (rule bspec)
then have  $\mathcal{A} \models \neg (G \wedge H)$ 
  using  $\text{assms}(2)$  by (simp only:  $\langle \mathcal{A} \models F \rangle$ )
then have  $\neg (\mathcal{A} \models (G \wedge H))$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\neg (\mathcal{A} \models G \wedge \mathcal{A} \models H)$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(4) simp-thms(8))
then have  $\neg (\mathcal{A} \models G) \vee \neg (\mathcal{A} \models H)$ 
  by (simp only: de-Morgan-conj)
thus ?thesis
proof (rule disjE)
  assume  $\neg (\mathcal{A} \models G)$ 
  then have  $\mathcal{A} \models \neg G$ 
    by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
  then have  $\forall F \in \{\neg G\}. \mathcal{A} \models F$ 
    by simp
  then have  $\forall F \in (\{\neg G\} \cup (\{F\} \cup W_0)). \mathcal{A} \models F$ 
    using  $\text{Forall1}$  by (rule ball-Un)
  then have  $\forall F \in \{\neg G, F\} \cup W_0. \mathcal{A} \models F$ 
    by simp
  then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{\neg G, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
    by (iprover intro: exI)
  then have  $\text{sat} (\{\neg G, F\} \cup W_0)$ 
    by (simp only: sat-def)
  thus ?thesis
    by (rule disjI1)
next
  assume  $\neg (\mathcal{A} \models H)$ 
  then have  $\mathcal{A} \models \neg H$ 
    by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))

```

```

then have  $\forall F \in \{\neg H\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\forall F \in (\{\neg H\} \cup (\{F\} \cup W_0)). \mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1 by (rule ball-Un)
then have  $\forall F \in \{\neg H, F\} \cup W_0. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{\neg H, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by (iprover intro: exI)
then have sat ( $\{\neg H, F\} \cup W_0$ )
  by (simp only: sat-def)
thus ?thesis
  by (rule disjI2)
qed
qed

```

Por último, probemos que dados $W \in C$, una fórmula $F = \neg(\neg G)$ para cierta fórmula G tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , entonces se tiene que $\{G, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-DIS-sat4*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
   $F = \neg(\neg G)$ 
   $F \in W$ 
  finite  $W_0$ 
   $W_0 \subseteq W$ 
shows sat ( $\{G, F\} \cup W_0$ )

```

proof –

```

have sat ( $\{F\} \cup W_0$ )
  using assms(1,3,4,5) by (rule pcp-colecComp-elem-sat)
have  $F \in \{F\} \cup W_0$ 
  by simp
have  $Ex1: \exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using  $\langle \text{sat } (\{F\} \cup W_0) \rangle$  by (simp only: sat-def)
obtain  $\mathcal{A}$  where Forall1:  $\forall F \in (\{F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  using Ex1 by (rule exE)
have  $\mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1  $\langle F \in \{F\} \cup W_0 \rangle$  by (rule bspec)
then have  $\mathcal{A} \models \neg(\neg G)$ 
  using assms(2) by (simp only:  $\langle \mathcal{A} \models F \rangle$ )
then have  $\neg \mathcal{A} \models \neg G$ 
  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\neg \neg \mathcal{A} \models G$ 

```

```

  by (simp only: formula-semantics.simps(3) simp-thms(8))
then have  $\mathcal{A} \models G$ 
  by (rule notnotD)
then have  $\forall F \in \{G\}. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\forall F \in (\{G\} \cup (\{F\} \cup W_0)). \mathcal{A} \models F$ 
  using Forall1 by (rule ball-Un)
then have  $\forall F \in \{G, F\} \cup W_0. \mathcal{A} \models F$ 
  by simp
then have  $\exists \mathcal{A}. \forall F \in (\{G, F\} \cup W_0). \mathcal{A} \models F$ 
  by (iprover intro: exI)
thus ?thesis
  by (simp only: sat-def)
qed

```

De este modo, por los lemas anteriores para los distintos tipos de fórmula β , se demuestra que dados $W \in C$, F una fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que $F \in W$ y W_0 un subconjunto finito de W , entonces se tiene que o bien $\{\beta_1, F\} \cup W_0$ es satisfacible o bien $\{\beta_2, F\} \cup W_0$ es satisfacible.

lemma *pcp-colecComp-DIS-sat*:

```

  assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
    Dis F G H
     $F \in W$ 
    finite  $W_0$ 
     $W_0 \subseteq W$ 
  shows  $\text{sat} (\{G, F\} \cup W_0) \vee \text{sat} (\{H, F\} \cup W_0)$ 
proof -
  have  $(F = G \vee H \vee$ 
     $(\exists G1 H1. F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1) \vee$ 
     $(\exists G1 H1. F = \neg (G1 \wedge H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1) \vee$ 
     $F = \neg (\neg G) \wedge H = G)$ 
  using assms(2) by (simp only: con-dis-simps(2))
  thus ?thesis
proof (rule disjE)
  assume  $F = G \vee H$ 
  show  $\text{sat} (\{G, F\} \cup W_0) \vee \text{sat} (\{H, F\} \cup W_0)$ 
    using assms(1)  $(F = G \vee H)$  assms(3,4,5) by (rule pcp-colecComp-DIS-sat1)
next
  assume  $(\exists G1 H1. F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1) \vee$ 
     $(\exists G1 H1. F = \neg (G1 \wedge H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1) \vee$ 
     $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 

```

```

thus ?thesis
proof (rule disjE)
  assume Ex1: $\exists G1\ H1. F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1$ 
  obtain G1 H1 where C1: $F = G1 \rightarrow H1 \wedge G = \neg G1 \wedge H = H1$ 
    using Ex1 by (iprover elim: exE)
  have  $F = G1 \rightarrow H1$ 
    using C1 by (rule conjunct1)
  have  $G = \neg G1$ 
    using C1 by (iprover elim: conjunct1)
  have  $H = H1$ 
    using C1 by (iprover elim: conjunct2)
  have  $\text{sat} (\{\neg G1, F\} \cup Wo) \vee \text{sat} (\{H1, F\} \cup Wo)$ 
    using assms(1)  $\langle F = G1 \rightarrow H1 \rangle$  assms(3,4,5) by (rule pcp-colecComp-DIS-sat2)
  thus  $\text{sat} (\{G, F\} \cup Wo) \vee \text{sat} (\{H, F\} \cup Wo)$ 
    by (simp only:  $\langle G = \neg G1 \rangle \langle H = H1 \rangle$ )
next
  assume  $(\exists G1\ H1. F = \neg (G1 \wedge H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1) \vee$ 
     $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
  thus ?thesis
  proof (rule disjE)
    assume Ex2: $\exists G1\ H1. F = \neg (G1 \wedge H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1$ 
    obtain G1 H1 where C2: $F = \neg (G1 \wedge H1) \wedge G = \neg G1 \wedge H = \neg H1$ 
      using Ex2 by (iprover elim: exE)
    have  $F = \neg (G1 \wedge H1)$ 
      using C2 by (rule conjunct1)
    have  $G = \neg G1$ 
      using C2 by (iprover elim: conjunct1)
    have  $H = \neg H1$ 
      using C2 by (iprover elim: conjunct2)
    have  $\text{sat} (\{\neg G1, F\} \cup Wo) \vee \text{sat} (\{\neg H1, F\} \cup Wo)$ 
      using assms(1)  $\langle F = \neg (G1 \wedge H1) \rangle$  assms(3,4,5) by (rule pcp-colecComp-DIS-sat3)
    thus  $\text{sat} (\{G, F\} \cup Wo) \vee \text{sat} (\{H, F\} \cup Wo)$ 
      by (simp only:  $\langle G = \neg G1 \rangle \langle H = \neg H1 \rangle$ )
  next
    assume  $F = \neg (\neg G) \wedge H = G$ 
    then have  $F = \neg (\neg G)$ 
      by (rule conjunct1)
    have  $\text{sat} (\{G, F\} \cup Wo)$ 
      using assms(1)  $\langle F = \neg (\neg G) \rangle$  assms(3,4,5) by (rule pcp-colecComp-DIS-sat4)
    thus  $\text{sat} (\{G, F\} \cup Wo) \vee \text{sat} (\{H, F\} \cup Wo)$ 

```

```

    by (rule disjI1)
  qed
qed
qed
qed

```

Finalmente, con los lemas auxiliares anteriores podemos demostrar detalladamente la cuarta condición del lema 2.0.2: dados $W \in C$ y F una fórmula de tipo β con componentes β_1 y β_2 tal que $F \in W$, se tiene que o bien $\{\beta_1\} \cup W \in C$ o bien $\{\beta_2\} \cup W \in C$.

lemma *pcp-colecComp-DIS*:

```

assumes  $W \in \text{colecComp}$ 
shows  $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G\} \cup W \in \text{colecComp} \vee \{H\} \cup W \in \text{colecComp}$ 
proof (rule allI)+
  fix  $F G H$ 
  show  $\text{Dis } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G\} \cup W \in \text{colecComp} \vee \{H\} \cup W \in \text{colecComp}$ 
  proof (rule impI)+
    assume  $\text{Dis } F G H$ 
    assume  $F \in W$ 
    show  $\{G\} \cup W \in \text{colecComp} \vee \{H\} \cup W \in \text{colecComp}$ 
    proof (rule ccontr)
      assume  $\neg(\{G\} \cup W \in \text{colecComp} \vee \{H\} \cup W \in \text{colecComp})$ 
      then have  $C:\{G\} \cup W \notin \text{colecComp} \wedge \{H\} \cup W \notin \text{colecComp}$ 
        by (simp only: de-Morgan-disj simp-thms(8))
      then have  $\{G\} \cup W \notin \text{colecComp}$ 
        by (rule conjunct1)
      have  $\text{Ex1}:\exists W_0 \subseteq W. \text{finite } W_0 \wedge \neg(\text{sat } (\{G\} \cup W_0))$ 
        using  $\text{assms } \langle \{G\} \cup W \notin \text{colecComp} \rangle$  by (rule not-colecComp)
      obtain  $W_1$  where  $W_1 \subseteq W$  and  $C1:\text{finite } W_1 \wedge \neg(\text{sat } (\{G\} \cup W_1))$ 
        using  $\text{Ex1}$  by (rule subexE)
      have  $\text{finite } W_1$ 
        using  $C1$  by (rule conjunct1)
      have  $\neg(\text{sat } (\{G\} \cup W_1))$ 
        using  $C1$  by (rule conjunct2)
      have  $\{H\} \cup W \notin \text{colecComp}$ 
        using  $C$  by (rule conjunct2)
      have  $\text{Ex2}:\exists W_0 \subseteq W. \text{finite } W_0 \wedge \neg(\text{sat } (\{H\} \cup W_0))$ 
        using  $\text{assms } \langle \{H\} \cup W \notin \text{colecComp} \rangle$  by (rule not-colecComp)
      obtain  $W_2$  where  $W_2 \subseteq W$  and  $C2:\text{finite } W_2 \wedge \neg(\text{sat } (\{H\} \cup W_2))$ 
        using  $\text{Ex2}$  by (rule subexE)
      have  $\text{finite } W_2$ 

```

```

    using C2 by (rule conjunct1)
  have  $\neg(\text{sat } (\{H\} \cup W2))$ 
    using C2 by (rule conjunct2)
  let ?Wo =  $W1 \cup W2$ 
  have ?Wo  $\subseteq W$ 
    using  $\langle W1 \subseteq W \rangle \langle W2 \subseteq W \rangle$  by (simp only: Un-least)
  have finite ?Wo
    using  $\langle \text{finite } W1 \rangle \langle \text{finite } W2 \rangle$  by (simp only: finite-Un)
  have  $\{G\} \cup W1 \subseteq (\{G\} \cup W1) \cup W2$ 
    by (simp only: Un-upper1)
  then have  $\{G\} \cup W1 \subseteq \{G\} \cup ?Wo$ 
    by (simp only: Un-assoc)
  then have  $\{G\} \cup W1 \subseteq \{G,F\} \cup ?Wo$ 
    by blast
  then have 1:  $\neg(\text{sat } (\{G,F\} \cup ?Wo))$ 
    using  $\langle \neg \text{sat } (\{G\} \cup W1) \rangle$  by (rule sat-subset-ccontr)
  have  $\{H\} \cup W2 \subseteq (\{H\} \cup W2) \cup W1$ 
    by (simp only: Un-upper1)
  then have  $\{H\} \cup W2 \subseteq \{H\} \cup (W2 \cup W1)$ 
    by (simp only: Un-assoc)
  then have  $\{H\} \cup W2 \subseteq \{H\} \cup ?Wo$ 
    by (simp only: Un-commute)
  then have  $\{H\} \cup W2 \subseteq \{H,F\} \cup ?Wo$ 
    by blast
  then have 2:  $\neg(\text{sat } (\{H,F\} \cup ?Wo))$ 
    using  $\langle \neg \text{sat } (\{H\} \cup W2) \rangle$  by (rule sat-subset-ccontr)
  have  $\neg \text{sat } (\{G,F\} \cup ?Wo) \wedge \neg \text{sat } (\{H,F\} \cup ?Wo)$ 
    using 1 2 by (rule conjI)
  have  $\text{sat } (\{G,F\} \cup ?Wo) \vee \text{sat } (\{H,F\} \cup ?Wo)$ 
    using assms(1)  $\langle \text{Dis } F \ G \ H \rangle \langle F \in W \rangle \langle \text{finite } ?Wo \rangle \langle ?Wo \subseteq W \rangle$  by (rule pcp-colecComp-DIS-sat)
  then have  $\neg \neg(\text{sat } (\{G,F\} \cup ?Wo) \vee \text{sat } (\{H,F\} \cup ?Wo))$ 
    by (simp only: not-not)
  then have  $\neg(\neg(\text{sat } (\{G,F\} \cup ?Wo)) \wedge \neg(\text{sat } (\{H,F\} \cup ?Wo)))$ 
    by (simp only: de-Morgan-disj simp-thms(8))
  thus False
    using  $\langle \neg(\text{sat } (\{G,F\} \cup ?Wo)) \wedge \neg(\text{sat } (\{H,F\} \cup ?Wo)) \rangle$  by (rule notE)
qed
qed
qed

```

En resumen, con los lemas *pcp-colecComp-bot*, *pcp-colecComp-atoms*, *pcp-colecComp-CON*

y *pcp-colecComp-DIS* podemos probar de manera detallada que la colección *C* verifica la propiedad de consistencia proposicional.

lemma *pcp-colecComp*: *pcp colecComp*

proof (*rule pcp-alt2*)

show $\forall W \in \text{colecComp}. \perp \notin W$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in W \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in W \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G, H\} \cup W \in \text{colecComp})$

$\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G\} \cup W \in \text{colecComp} \vee \{H\} \cup W \in \text{colecComp})$

proof (*rule ballI*)

fix *W*

assume *H*: $W \in \text{colecComp}$

have *C1*: $\perp \notin W$

using *H* **by** (*rule pcp-colecComp-bot*)

have *C2*: $\forall k. \text{Atom } k \in W \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in W \longrightarrow \text{False}$

using *H* **by** (*rule pcp-colecComp-atoms*)

have *C3*: $\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G, H\} \cup W \in \text{colecComp}$

using *H* **by** (*rule pcp-colecComp-CON*)

have *C4*: $\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G\} \cup W \in \text{colecComp} \vee \{H\} \cup W \in \text{colecComp}$

using *H* **by** (*rule pcp-colecComp-DIS*)

show $\perp \notin W$

$\wedge (\forall k. \text{Atom } k \in W \longrightarrow \neg (\text{Atom } k) \in W \longrightarrow \text{False})$

$\wedge (\forall F G H. \text{Con } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G, H\} \cup W \in \text{colecComp})$

$\wedge (\forall F G H. \text{Dis } F G H \longrightarrow F \in W \longrightarrow \{G\} \cup W \in \text{colecComp} \vee \{H\} \cup W \in \text{colecComp})$

using *C1 C2 C3 C4* **by** (*iprover intro: conjI*)

qed

qed

Finalmente, mostremos la demostración del *Teorema de Compacidad*.

theorem *prop-Compactness*:

fixes *W* :: 'a :: countable formula set

assumes *fin-sat* *W*

shows *sat* *W*

proof (*rule pcp-sat*)

show $W \in \text{colecComp}$

unfolding *colecComp* **using** *assms* **unfolding** *fin-sat-def* **by** (*rule CollectI*)

show *pcp colecComp*

by (*simp only: pcp-colecComp*)

qed

Apéndice A

Lemas de HOL usados

En este glosario se recoge la lista de los lemas y reglas usadas indicando la página del [libro de HOL](#) donde se encuentran.

A.1 La base de lógica de primer orden (1)

En Isabelle corresponde a la teoría [HOL.thy](#)

- (p.35) $\frac{P}{\overline{Q}} \quad \frac{}{P \longrightarrow Q}$ (*impI*)
- (p.35) $\frac{(P \longrightarrow Q) \wedge P}{Q}$ (*mp*)
- (p.35) $Let\ s\ f \equiv f\ s$ (*Let-def*)
- (p.36) $\frac{a = b \wedge P\ b}{P\ a}$ (*forw-subst*)
- (p.36) $\frac{P\ a \wedge a = b}{P\ b}$ (*back-subst*)
- (p.36) $\frac{Q = P \wedge Q}{P}$ (*iffD1*)

- (p.37)
$$\frac{\forall x. P x \quad \frac{P x}{R}}{R} \quad (allE)$$
- (p.38)
$$\frac{\neg P \wedge P}{R} \quad (notE)$$
- (p.38)
$$\frac{\neg Q \quad \frac{P}{\overline{Q}}}{\neg P} \quad (contrapos-nn)$$
- (p.39)
$$\frac{P \vee Q \quad \frac{P}{R} \quad \frac{Q}{R}}{R} \quad (disjE)$$
- (p.39)
$$\frac{\frac{P}{\overline{Q}} \quad \frac{Q}{\overline{P}}}{P = Q} \quad (iffI)$$
- (p.40)
$$\frac{\bigwedge x. P x}{\forall x. P x} \quad (allI)$$
- (p.40)
$$\frac{P x}{\exists x. P x} \quad (exI)$$
- (p.40)
$$\frac{\exists x. P x \quad \bigwedge x. \frac{P x}{Q}}{Q} \quad (exE)$$
- (p.40)
$$\frac{P \wedge Q}{P \wedge Q} \quad (conjI)$$
- (p.40)
$$\frac{P \wedge Q}{P} \quad (conjunct1)$$
- (p.40)
$$\frac{P \wedge Q}{Q} \quad (conjunct2)$$
- (p.41)
$$\frac{P}{P \vee Q} \quad (disjI1)$$

$$\bullet \text{ (p.41) } \frac{Q}{P \vee Q} \quad (\text{disjI2})$$

$$\bullet \text{ (p.41) } \frac{\frac{\neg P}{\text{False}}}{P} \quad (\text{ccontr})$$

$$\bullet \text{ (p.41) } \frac{\neg \neg P}{P} \quad (\text{notnotD})$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ (p.49) } & (\neg \neg P) = P \\ & ((\neg P) = (\neg Q)) = (P = Q) \\ & (P \neq Q) = (P = (\neg Q)) \\ & (P \vee \neg P) = \text{True} \\ & (\neg P \vee P) = \text{True} \\ & (x = x) = \text{True} \\ & (\neg \text{True}) = \text{False} \\ & (\neg \text{False}) = \text{True} \\ & (\neg P) \neq P \\ & P \neq (\neg P) \\ & (\text{True} = P) = P \\ & (P = \text{True}) = P \\ & (\text{False} = P) = (\neg P) \\ & (P = \text{False}) = (\neg P) \\ & (\text{True} \longrightarrow P) = P \\ & (\text{False} \longrightarrow P) = \text{True} \\ & (P \longrightarrow \text{True}) = \text{True} \\ & (P \longrightarrow P) = \text{True} \\ & (P \longrightarrow \text{False}) = (\neg P) \\ & (P \longrightarrow \neg P) = (\neg P) \\ & (P \wedge \text{True}) = P \\ & (\text{True} \wedge P) = P \\ & (P \wedge \text{False}) = \text{False} \\ & (\text{False} \wedge P) = \text{False} \end{aligned}$$

- $$(P \wedge P) = P$$
- $$(P \wedge P \wedge Q) = (P \wedge Q)$$
- $$(P \wedge \neg P) = \text{False}$$
- $$(\neg P \wedge P) = \text{False}$$
- $$(P \vee \text{True}) = \text{True}$$
- $$(\text{True} \vee P) = \text{True}$$
- $$(P \vee \text{False}) = P$$
- $$(\text{False} \vee P) = P$$
- $$(P \vee P) = P$$
- $$(P \vee P \vee Q) = (P \vee Q)$$
- $$(\forall x. P) = P$$
- $$(\exists x. P) = P$$
- $$\exists x. x = t$$
- $$\exists x. t = x$$
- $$(\exists x. x = t \wedge P x) = P t$$
- $$(\exists x. t = x \wedge P x) = P t$$
- $$(\forall x. x = t \longrightarrow P x) = P t$$
- $$(\forall x. t = x \longrightarrow P x) = P t$$
- $$(\forall x. x \neq t) = \text{False}$$
- $$(\forall x. t \neq x) = \text{False} \quad (\text{simp-thms})$$
- (p.49) $(\neg \neg P) = P$ (not-not)
 - (p.50) $(A \vee A) = A$ (disj-absorb)
 - (p.50) $(A \wedge A) = A$ (conj-absorb)
 - (p.50) $((P \wedge Q) \wedge R) = (P \wedge Q \wedge R)$ (conj-assoc)
 - (p.50) $((P \vee Q) \vee R) = (P \vee Q \vee R)$ (disj-assoc)
 - (p.51) $(\neg (P \vee Q)) = (\neg P \wedge \neg Q)$ (de-Morgan-disj)
 - (p.51) $(\neg (P \wedge Q)) = (\neg P \vee \neg Q)$ (de-Morgan-conj)
 - (p.51) $(\neg (P \longrightarrow Q)) = (P \wedge \neg Q)$ (not-imp)
 - (p.51) $(P \vee Q) = (\neg P \longrightarrow Q)$ (disj-imp)

- (p.52) $(\text{if True then } x \text{ else } y) = x$ (if-True)
- (p.52) $(\text{if False then } x \text{ else } y) = y$ (if-False)

A.2 Teoría de órdenes (3)

En Isabelle se corresponde con la teoría [Orderings.thy](#).

- (p.75) $\text{bot} \leq a$ (extremum)
- (p.76) $x \leq x$ (order-refl)
- (p.77) $\frac{b \leq a \wedge c \leq b}{c \leq a}$ (trans)

A.3 Teoría de retículos (5)

Los resultados expuestos a continuación pertenecen a la teoría de retículos [Lattices.thy](#).

- (p.140) $a \leq \max a b$ (cobounded1)
- (p.140) $b \leq \max a b$ (cobounded2)
- (p.140) $(\max b c \leq a) = (b \leq a \wedge c \leq a)$ (bounded-iff)

A.4 Teoría de conjuntos (6)

Los siguientes resultados corresponden a la teoría de conjuntos [Set.thy](#).

- (p.158) $(a \in \text{Collect } P) = P a$ (mem-Collect-eq)
- (p.159) $\frac{P a}{a \in \{x \mid P x\}}$ (CollectI)

- (p.159) $\frac{a \in \{x \mid P x\}}{P a}$ (CollectD)
- (p.165) $\frac{\bigwedge x. \frac{x \in A}{P x}}{\forall x \in A. P x}$ (ballI)
- (p.165) $\frac{(\forall x \in A. P x) \wedge x \in A}{P x}$ (bspec)
- (p.165) $\frac{P x \wedge x \in A}{\exists x \in A. P x}$ (bexI)
- (p.166) $\frac{\exists x \in A. P x \quad \bigwedge x. \frac{x \in A \wedge P x}{Q}}{Q}$ (bexE)
- (p.167) $\frac{\bigwedge x. \frac{x \in A}{x \in B}}{A \subseteq B}$ (subsetI)
- (p.167) $\frac{c \in A \wedge A \subseteq B}{c \in B}$ (rev-subsetD)
- (p.167) $\frac{A \subseteq B \quad \frac{c \notin A}{P} \quad \frac{c \in B}{P}}{P}$ (subsetCE)
- (p.167) $\frac{A \subseteq B \wedge c \notin B}{c \notin A}$ (contra-subsetD)
- (p.167) $A \subseteq A$ (subset-refl)
- (p.168) $\frac{A \subseteq B \wedge B \subseteq C}{A \subseteq C}$ (subset-trans)
- (p.168) $\frac{A = B}{B \subseteq A}$ (equalityD2)
- (p.169) $\emptyset \subseteq A$ (empty-subsetI)
- (p.169) $UNIV = \{x \mid True\}$ (UNIV-def)

- (p.169) $x \in UNIV$ (UNIV-I)
- (p.169) $Bex UNIV P = Ex P$ (bex-UNIV)
- (p.171) $(c \in A \cup B) = (c \in A \vee c \in B)$ (Un-iff)
- (p.171) $\frac{c \in A}{c \in A \cup B}$ (UnI1)
- (p.171) $\frac{c \in B}{c \in A \cup B}$ (UnI2)
- (p.172) $(c \in A - B) = (c \in A \wedge c \notin B)$ (Diff-iff)
- (p.172) $(a \in \{b\} \cup A) = (a = b \vee a \in A)$ (insert-iff)
- (p.172) $a \in \{a\} \cup B$ (insertI1)
- (p.173) $a \in \{a\}$ (singletonI)
- (p.174) $\{x \mid x = a\} = \{a\}$ (singleton-conv)
- (p.175) $\frac{x \in A}{fx \in f' A}$ (imageI)
- (p.175) $f' (A \cup B) = f' A \cup f' B$ (image-Un)
- (p.176) $f' \emptyset = \emptyset$ (image-empty)
- (p.176) $f' (\{a\} \cup B) = \{fa\} \cup f' B$ (image-insert)
- (p.176) $f' \{x \mid P x\} = \{fx \mid P x\}$ (image-Collect)
- (p.178) $(A \subset B) = (A \subseteq B \wedge A \neq B)$ (psubset-eq)
- (p.179) $\frac{A \subset B}{\exists b. b \in B - A}$ (psubset-imp-ex-mem)
- (p.179) $B \subseteq \{a\} \cup B$ (subset-insertI)
- (p.179) $\frac{A \subseteq B}{A \subseteq \{b\} \cup B}$ (subset-insertI2)
- (p.179) $A \subseteq A \cup B$ (Un-upper1)
- (p.179) $B \subseteq A \cup B$ (Un-upper2)

- (p.179) $\frac{A \subseteq C \wedge B \subseteq C}{A \cup B \subseteq C}$ (Un-least)
- (p.180) $(A - B \subseteq C) = (A \subseteq B \cup C)$ (Diff-subset-conv)
- (p.180) $\{s \mid P\} = (\text{if } P \text{ then UNIV else } \emptyset)$ (Collect-const)
- (p.180) $\{x \mid P x \vee Q x\} = \{x \mid P x\} \cup \{x \mid Q x\}$ (Collect-disj-eq)
- (p.181) $\{a\} \cup A = \{a\} \cup A$ (insert-is-Un)
- (p.181) $\frac{a \in A}{\{a\} \cup A = A}$ (insert-absorb)
- (p.181) $\{x, x\} \cup A = \{x\} \cup A$ (insert-absorb2)
- (p.181) $\{x, y\} \cup A = \{y, x\} \cup A$ (insert-commute)
- (p.181) $(\{x\} \cup A \subseteq B) = (x \in B \wedge A \subseteq B)$ (insert-subset)
- (p.183) $A \cup B = B \cup A$ (Un-commute)
- (p.183) $A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C)$ (Un-left-commute)
- (p.183) $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Un-assoc)
- (p.184) $(A \cup B \subseteq C) = (A \subseteq C \wedge B \subseteq C)$ (Un-subset-iff)
- (p.187) $\{a\} \cup (A - \{a\}) = \{a\} \cup A$ (insert-Diff-single)
- (p.187) $\frac{a \in A}{\{a\} \cup (A - \{a\}) = A}$ (insert-Diff)
- (p.187) $A \cup (B - A) = A \cup B$ (Un-Diff-cancel)
- (p.189) $(\exists x \in A. P x \wedge Q) = ((\exists x \in A. P x) \wedge Q)$
 $(\exists x \in A. P \wedge Q x) = (P \wedge (\exists x \in A. Q x))$
 $(\exists x \in \emptyset. P x) = \text{False}$
 $(\exists x \in \text{UNIV}. P x) = (\exists x. P x)$
 $(\exists x \in \{a\} \cup B. P x) = (P a \vee (\exists x \in B. P x))$
 $(\exists x \in \text{Collect } Q. P x) = (\exists x. Q x \wedge P x)$
 $(\exists x \in f' A. P x) = (\exists x \in A. P (f x))$
 $(\neg (\exists x \in A. P x)) = (\forall x \in A. \neg P x)$ (bex-simps)

- (p.190) $\frac{C \subseteq D}{\{a\} \cup C \subseteq \{a\} \cup D}$ (insert-mono)
- (p.190) $\frac{A \subseteq B}{x \in A \longrightarrow x \in B}$ (in-mono)
- (p.197) $\frac{A \subseteq B \wedge c \in A}{c \in B}$ (set-mp)

A.5 Retículos completos (10)

En Isabelle corresponde a la teoría [Complete-Lattices.thy](#).

- (p.171) $(b \in \bigcup (B \text{ ' } A)) = (\exists x \in A. b \in B \ x)$ (UN-iff)
- (p.241) $\frac{B \in A}{B \subseteq \bigcup A}$ (Union-upper)
- (p.241) $\bigcup (A \cup B) = \bigcup A \cup \bigcup B$ (Union-Un-distrib)

A.6 Números naturales (15)

La teoría de los números naturales en Isabelle se corresponde a la teoría [Nat.thy](#)

- (p.360) $(m \leq \text{Suc } n) = (m \leq n \vee m = \text{Suc } n)$ (le-Suc-eq)
- (p.386) $\frac{\bigwedge n. f \ n \leq f \ (\text{Suc } n) \quad n \leq n'}{f \ n \leq f \ n'}$ (lift-Suc-mono-le)

A.7 Conjuntos finitos (17)

A continuación se muestran resultados relativos a la teoría [Finite-Set.thy](#).

- (p.425) $finite\ A$ (*finite*)
- (p.429) $finite\ (\{a\} \cup A) = finite\ A$ (*finite-insert*)
- (p.429) $\frac{finite\ A}{finite\ (A - B)}$ (*finite-Diff*)

A.8 Retículos condicionalmente completos (89)

El Isabelle se corresponde con la teoría [Conditionally-Complete-Lattices.thy](#).

- (p.1632) $Sup\ \{x\} = x$ (*cSup-singleton*)

Bibliografía

- [1] José A. Alonso. Temas de “Lógica matemática y fundamentos (2018–19)”. Technical report, Univ. de Sevilla, 2019. En <https://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/lmf-18/temas.php>.
- [2] Lawrence C. Paulson Computer Laboratory. Old Introduction to Isabelle. Technical report, University of Cambridge, 2019. En <https://isabelle.in.tum.de/website-Isabelle2019/dist/Isabelle2019/doc/intro.pdf>.
- [3] Christian Doczkal and Gert Smolka. Constructive Formalization of Classical Modal Logic. Technical report, 2011. En http://www.cs.ru.nl/~spitters/coqw_files/paper.1.pdf.
- [4] Sofía Santiago Fernández. *Elementos de lógica formalizados en Isabelle/HOL*. 2020. Trabajo Fin de Grado. En <https://github.com/sofsanfer/TFG>.
- [5] M. Fitting. *First-order Logic and Automated Theorem Proving*. Graduate texts in computer science. Springer, 1996.
- [6] L.T.F Gamut. *Introducción a la lógica*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 2002.
- [7] John Harrison. An overview of automated reasoning. Technical report, 2014. En <https://www.cl.cam.ac.uk/~jrh13/slides/lyon-03feb14/slides.pdf>.
- [8] Angeliki Koutsoukou-Argyaki. Formalising Mathematics -in praxis, 2019. En https://www.researchgate.net/publication/334549483_formalising_mathematics_in_praxis_a_mathematician's_first_experiences_with_isabellehol_and_the_why_and_how_of_getting_started.
- [9] Dr. Kevin P. Lee. A Guide to Writing Mathematics. En <http://cc.kangwon.ac.kr/~kimoon/me/me-132/math-writing.pdf>.
- [10] Julius Michaelis and Tobias Nipkow. Propositional Proof Systems. Technical report, 2020. En https://www.isa-afp.org/browser_info/current/AFP/Propositional_Proof_Systems/document.pdf.

- [11] Tobias Nipkow. What's in Main, 2019. En <https://isabelle.in.tum.de/website-Isabelle2019/dist/Isabelle2019/doc/main.pdf>.
- [12] R. M. Smullyan. *First Order Logic*. Springer-Verlag, 1968.
- [13] Lawrence C. Paulson Tobias Nipkow and Markus Wenzel. *Isabelle/HOL: A proof assistant for Higher-Order Logic*. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2283, Springer-Verlag, 2019. En <https://isabelle.in.tum.de/website-Isabelle2019/dist/Isabelle2019/doc/tutorial.pdf>.
- [14] Floris van Doorn. Propositional Calculus in Coq. Technical report, 2015. En <https://arxiv.org/abs/1503.08744>.
- [15] Makarius Wenzel. The Isabelle/Isar Implementation, 2019. En <https://isabelle.in.tum.de/website-Isabelle2019/dist/Isabelle2019/doc/implementation.pdf>.
- [16] Makarius Wenzel. The Isabelle/Isar Reference Manual, 2019. En <https://isabelle.in.tum.de/website-Isabelle2019/dist/Isabelle2019/doc/isar-ref.pdf>.