INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO
EL LIBERTADOR

# FICHA PEDAGÓGICA

| DATOS GENERALES | |
|---|---|
| **Asignatura** | Cálculo Diferencial e integral |
| **Unidad** | **DOS:** Derivadas |
| **Objetivo** | Resolver ejercicios y problemas de Derivadas y aplicarlos a casos reales. |
| **Resultado de Aprendizaje** | Resuelve ejercicios de Derivadas con operaciones, demostraciones de las leyes y reglas de la derivación. |
| **Docente** | MSc. Alex Galarza Luna |

| CONTENIDOS | |
|---|---|
| **Temas** | 1.-Derivada<br>2.- Determinación de la pendiente de una recta tangente.<br>3.- Uso de la definición para encontrar la derivada.<br>4.- Determinación de una ecuación de una recta tangente<br>5.- Determinación de la pendiente de una curva en un punto<br>6.- Reglas de la Derivación (Diferenciación) |

## DESARROLLO DE LA UNIDAD

### LA DERIVADA

Uno de los problemas principales de que se ocupa el cálculo es el de encontrar la pendiente de la *recta tangente* a un punto sobre una curva. Quizá en geometría usted vio que una recta tangente, o *tangente*, a un círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto (véase la fig. 10.1). Sin embargo, esta idea de una tangente no es muy útil en otras clases de curvas. Por ejemplo, en la figura 10.2(a) las rectas $L_1$ y $L_2$ intersecan a la curva en exactamente un solo punto, $P$. Si bien $L_2$ no la veríamos como la tangente en este punto, $L_1$ sí lo es. En la figura 10.2(b) podríamos considerar de manera intuitiva que $L_3$ es la tangente en el punto $P$, aunque $L_3$, interseca a la curva en otros puntos.

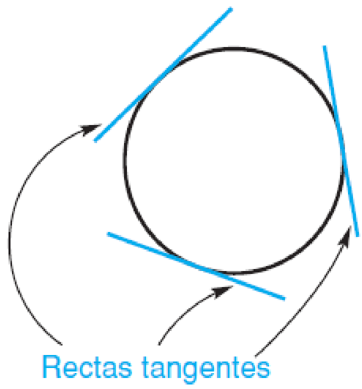


**FIGURA 10.1** Rectas tangentes a un círculo.

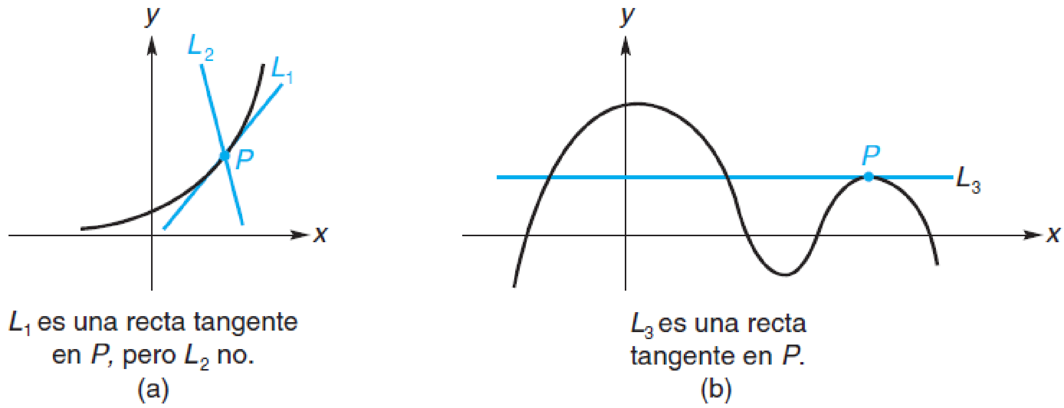


**FIGURA 10.2** Recta tangente en un punto.

De los ejemplos anteriores, usted puede ver que debemos abandonar la idea de que una tangente es simplemente una línea que interseca una curva en sólo un punto. Para obtener una definición conveniente de recta tangente, utilizamos el concepto de límite y la noción geométrica de *recta secante.* Una **recta secante** es una línea que interseca una curva en dos o más puntos.

Observe la gráfica de la función $y = f(x)$ en la figura 10.3. Queremos definir la recta tangente en el punto $P$. Si $Q$ es un punto diferente sobre la curva, la línea $PQ$ es una línea secante. Si $Q$ se mueve a lo largo de la curva y se acerca a $P$ por la derecha (véase la fig. 10.4), $PQ'$, $PQ''$, etc., son líneas secantes características. Si $Q$ se acerca a $P$ por la izquierda, $PQ_1$, $PQ_2$, etc., son las secantes. *En ambos casos, las líneas secantes se acercan a la misma posición límite.* Esta posición límite común de las líneas secantes se define como la **recta tangente** a la curva en $P$. Esta definición parece razonable, y se aplica a curvas en general y no sólo a círculos.

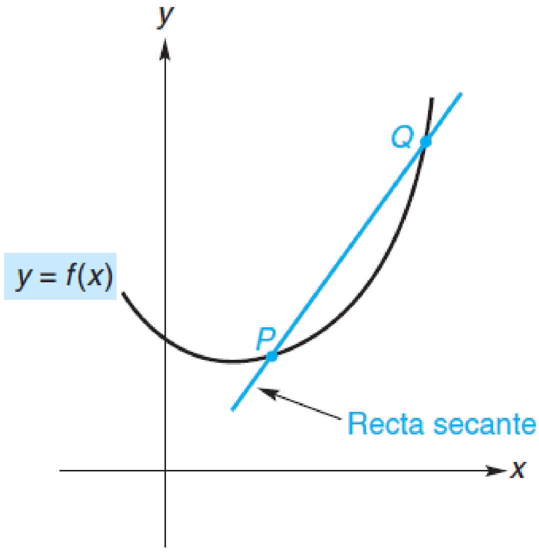


**FIGURA 10.3** Recta tangente $PQ$.

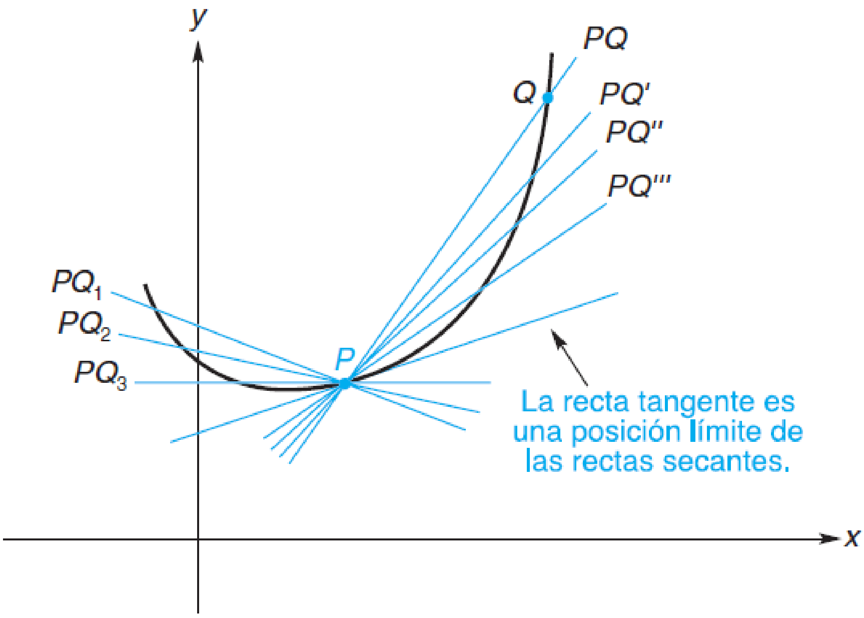


**FIGURA 10.4** La recta tangente es una posición límite de las rectas secantes.

### *Definición*

La ***pendiente de una curva*** en un punto $P$ es la pendiente, en caso de que exista, de la recta tangente en $P$.

Como la tangente en $P$ es una posición límite de las líneas secantes $PQ$, consideremos la pendiente de la tangente como el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme $Q$ se acerca a $P$. Por ejemplo, consideremos la curva $f(x) = x^2$ y las pendientes de algunas rectas secantes $PQ$, donde $P = (1, 1)$. Para el punto $Q = (2.5, 6.25)$, la pendiente de $PQ$ (véase la fig. 10.6) es

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6.25 - 1}{2.5 - 1} = 3.5.$$

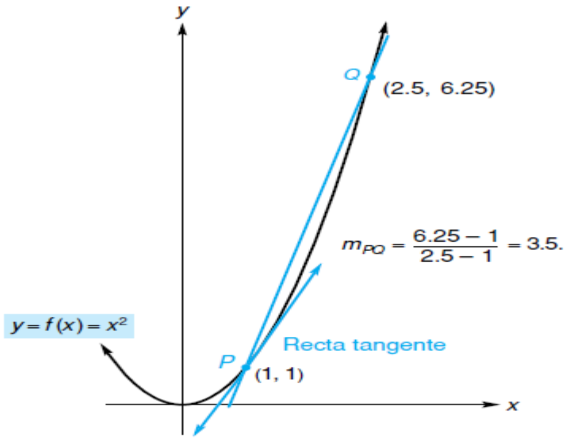


**FIGURA 10.6** Recta secante a $f(x) = x^2$ que pasa por $(1, 1)$ y $(2.5, 6.25)$.

### *Definición*

La ***derivada*** de una función $f$ es la función, denotado por $f'$ (léase "$f$ prima"), y definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

siempre que este límite exista. Si $f'(x)$ puede encontrarse, se dice que $f$ es ***diferenciable*** y $f'(x)$ se llama derivada de $f$ en $x$, o derivada de $f$ con respecto a $x$. El proceso de encontrar la derivada se llama ***diferenciación.***

En la definición de la derivada, la expresión

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

se llama **cociente de diferencia** (cociente diferencial). Así, $f'(x)$ es el límite de un cociente de diferencia cuando $h \to 0$.

**Uso de la definición para encontrar la derivada**

*Si $f(x) = x^2$, encontrar la derivada de $f$.*

***Solución:*** al aplicar la definición de derivada se obtiene

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x.
\end{aligned}$$

Observe que al tomar el límite tratamos a $x$ como una constante, porque es $h$ y no $x$ la que está cambiando. Observe también que $f'(x) = 2x$ define una función de $x$, que podemos interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en $(x, f(x))$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces la pendiente es $f'(1) = 2(1) = 2$

Además de la notación $f'(x)$, otras formas para denotar a la derivada de $y = f(x)$ en $x$ son

| | |
|---|---|
| $\dfrac{dy}{dx}$ | (se lee "de ye, de equis"), |
| $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ | [de $f(x)$, de equis], |
| $y'$ | ($y$ prima), |
| $D_x y$ | (de $x$ de $y$), |
| $D_x[f(x)]$ | [de $x$ de $f(x)$]. |

**Advertencia** La notación $\dfrac{dy}{dx}$, que se denomina *notación de Leibniz*, **no** debe considerarse como una fracción, aunque parezca una. Es un símbolo sencillo para una derivada. Aún no hemos dado un significado a los símbolos individuales como $dy$ y $dx$.

### Determinación de una ecuación de una recta tangente

Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, *encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f$ *en* $(1, 7)$.

***Solución:***

**Estrategia:** primero determinamos la pendiente de la recta tangente calculando la derivada y evaluándola en $x = 1$. Usamos este resultado y el punto $(1, 7)$ en la forma punto-pendiente de la ecuación para una línea recta, y así obtenemos la ecuación de la recta tangente.

Tenemos,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3] - (2x^2 + 2x + 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 3 - 2x^2 - 2x - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (4x + 2h + 2).
\end{aligned}$$

Por lo que $\quad f'(x) = 4x + 2$

y $\quad f'(1) = 4(1) + 2 = 6.$

Así, la recta tangente a la gráfica en $(1, 7)$ tiene pendiente de 6. Una forma punto-pendiente de esta tangente es

$$y - 7 = 6(x - 1).$$

Acostumbraremos expresar una ecuación de la recta tangente en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned}
y - 7 &= 6x - 6, \\
y &= 6x + 1.
\end{aligned}$$

**Advertencia** En el ejemplo 3 ***no*** es correcto decir que como la derivada es $4x + 2$, la recta tangente en $(1, 7)$ es $y - 7 = (4x + 2)(x - 1)$. La derivada debe **evaluarse** en el punto de tangencia para determinar la pendiente de la recta tangente.

## Reglas de diferenciación

Quizá coincida con nosotros que la diferenciación directa de una función por medio de la definición de la derivada, puede ser un proceso tedioso. Por fortuna, existen reglas que permiten efectuar la diferenciación en forma por completo mecánica y eficiente. Con ellas se evita el uso directo de límites. Veremos algunas de esas reglas en esta sección.

Mostraremos primero que la derivada de una función constante es cero. Recuerde que la gráfica de una función constante, $f(x) = c$, es una línea horizontal (véase la fig. 10.11) que tiene pendiente nula en todo punto. Esto significa que $f'(x) = 0$, independientemente del valor de $x$. Como prueba formal de este resultado, aplicamos la definición de la derivada a $f(x) = c$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

**Regla 1 Derivada de una constante**

Si $c$ es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

**EJEMPLO 1 Derivadas de funciones constantes**

**a.** $\dfrac{d}{dx}(3) = 0$ porque 3 es una función constante.

**b.** Si $g(x) = \sqrt{5}$ entonces $g'(x) = 0$ porque $g$ es una función constante. Por ejemplo, la derivada de $g$ cuando $x = 4$ es $g'(4) = 0$.

**c.** Si $s(t) = (1{,}938{,}623)^{807.4}$, entonces $ds/dt = 0$.

**Regla 2 Derivada de $x^n$**

Si $n$ es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},$$

siempre que $x^{n-1}$ esté definida. Esto es, la derivada de una potencia constante de $x$ es igual al exponente multiplicado por $x$ elevada a una potencia menor en una unidad que la de la potencia dada.

### Derivada de potencias de $x$

**a.** Según la regla 2, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$.

**b.** Si $f(x) = x = x^1$ entonces $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$. Así, la derivada de $x$ con respecto a $x$ es 1.

**c.** Si $f(x) = x^{-10}$, entonces $f'(x) = -10x^{-10-1} = -10x^{-11}$.

**Regla 3 Regla del factor constante**

Si $f$ es una función diferenciable y $c$ una constante, entonces $cf(x)$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

### Diferenciación de una constante multiplicada por una función

*Diferenciar las siguientes funciones.*

$g(x) = 5x^3$.

***Solución:*** aquí $g$ es una constante (5) que multiplica a una función ($x^3$). Así

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 5(3x^{3-1}) = 15x^2 \qquad \text{(Regla 2).}$$

**Regla 4 Derivada de una suma o de una diferencia**

Si $f$ y $g$ son funciones diferenciables, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables y

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x).$$

Esto es, la derivada de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

**Diferenciación de sumas y diferencias de funciones**

*Diferenciar las siguientes funciones.*

$$F(x) = 3x^5 + \sqrt{x}.$$

***Solución:*** aquí $F$ es la suma de las dos funciones, $3x^5$ y $\sqrt{x}$. Por tanto,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{(Regla 4)}$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 3(5x^4) + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{(Regla 2).}$$

**CUESTIONARIO**

SELECCIONE LA RESPUESTA CORRECTA

**Ejercicio 1**

**Halla la derivada de la función $f(x) = (x-1)^2$ en $x = 2$, aplicando la definición de derivada.**

a) 2
b) 3
c) 4
d) 1

**Respuesta correcta: a)**

**Ejercicio 2**

**Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:**

$$f(x) = x^2 + 1$$

a) 3
b) -2
c) 4
d) 2

**Respuesta correcta: d)**

**Ejercicio 3**

**Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x)=\frac{2}{x}$.**

a) 1
b) -2
c) 0
d) 3

**Respuesta correcta: b)**

**Ejercicio 4**

**Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x)=\frac{x-1}{3}$.**

a) 1/3
b) – 2/3
c) 0
d) 1/2

**Respuesta correcta: a)**

**Ejercicio 5**

**Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(-1)$, siendo $f(x)=\frac{3x+1}{2}$.**

a) 3/4
b) 3/2
c) 2
d) 8

**Respuesta correcta: b)**

**Ejercicio 6**

**Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(x)$ para la función $f(x)=\frac{x+1}{3}$.**

a) 4/3
b) 3/2
c) 1/6
d) 1/3

**Respuesta correcta: d)**

**Ejercicio 7**

**Halla la derivadade la función $f(x) = 2x^2$, aplicandola definiciónde derivada**

a) 4x
b) 4h
c) 2x
d) 2h

**Respuesta correcta: a)**

**Ejercicio 8**

**Halla, utilizando la definición, la derivada de la función:**

$$f(x) = \frac{2x}{3}$$

a) 4/3
b) 3/2
c) 2/3
d) 1/3

**Respuesta correcta: c)**

**Ejercicio 9**

**Halla $f'(x)$, aplicando la definición de derivada, siendo $f(x) = x^2 + 1$.**

a) 4x
b) 4h
c) 2x
d) 2h

**Respuesta correcta: c)**

**Ejercicio 10**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$\mathcal{F}(x) = 5$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4

**Respuesta correcta: a)**

**Ejercicio 11**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$\mathcal{F}$ **(x) = 3/4**

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4

**Respuesta correcta: a)**

**Ejercicio 12**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$\mathcal{F}$ **(x) = (2 + 16)**

a) 4
b) 1
c) 2
d) 0

**Respuesta correcta: d)**

**Ejercicio 13**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$\mathcal{F}$ **(x) = x**

a) 4
b) 1
c) 2
d) 0

**Respuesta correcta: b)**

**Ejercicio 14**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$\mathcal{F}$ **(x) = ( 3x $^{2}$+ 5 x)**

a) 6 x
b) 2 x
c) 6 x + 5

d) $5x - 6$

**Respuesta correcta: c)**

**Ejercicio 15**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$$\mathcal{F}(x) = (5x^3 - 2x^2)(6x^3)$$

a) $180x^5 - 60x^4$
b) $160x^4 - 50x^3$
c) $80x^5 - 70x^4$
d) $100x^5 - 40x^4$

**Respuesta correcta: a)**

**Ejercicio 16**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$$\mathcal{F}(x) = (x + 3)^2$$

a) $3x + 9$
b) $x + 3$
c) $4x - 6$
d) $2x + 6$

**Respuesta correcta: d)**

**Ejercicio 17**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$$\mathcal{F}(x) = (2x^5 - 3x + 4)^4$$

a) $(2x^5 - 3x + 4)^3 (40x^4 - 12)$
b) $(4x^5 - 4x + 4)^3 (30x^4 - 8)$
c) $(3x^5 - 5x + 4)^3 (20x^4 - 12)$
d) $(x^5 - 3x + 4)^3 (50x^4 - 12)$

**Respuesta correcta: a)**

**Ejercicio 18**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$\mathcal{F}$ **(x) = $2x^{2-1}$**

a) 4x
b) 5x
c) 2x
d) 0

**Respuesta correcta: c)**

**Ejercicio 19**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$\mathcal{F}$ **(x) = $x^{-10}$**

a) $-10x^{-11}$
b) $10x^{-11}$
c) $-11x^{-10}$
d) $11x^{-10}$

**Respuesta correcta: a)**

**Ejercicio 20**

**Calcule la derivada aplicando las reglas de derivación de la siguiente función**

$\mathcal{F}$ **(x) = $6x^3 – 2x^2 + 7x - 8$**

a) $9x^2 – 2x + 7$
b) $32x^2 – 4x + 7$
c) $18x^2 – 4x + 7$
d) $x^2 – 2x + 7$

**Respuesta correcta: c)**

| DOCUMENTOS DE APOYO | | |
|---|---|---|
| **Recurso** | **Titulo** | **Link** |
| **Articulo** | Ejercicios de Derivadas | https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/derivadas/ejercicios-de-derivadas.html |
| **Páginas Web** | Plataforma del Instituto Superior Tecnológico Ángel Polibio Cháves | https://superiorapch.edu.ec/ |
| **Video** | Reglas de las derivadas | https://www.youtube.com/watch?v=PZhTK88o1pk |

## BIBLIOGRAFÍA

Haeussler, E. F., & Paul, R. S. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. Pearson educación.