0.1　分子量分布の分散

数微分分布関数 $f_n(M)$ の標準偏差は、下式の一行目で定義され、以下のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
s_n^2 &= \int_0^\infty (M - \bar{M}_n)^2 f_n(M)\,\mathrm{d}M \\
&= \int_0^\infty (M^2 - 2M\bar{M}_n + \bar{M}_n^2) f_n(M)\,\mathrm{d}M \\
&= \int_0^\infty M^2 f_n(M)\,\mathrm{d}M - 2\bar{M}_n \int_0^\infty M f_n(M)\,\mathrm{d}M + \bar{M}_n^2 \int_0^\infty f_n(M)\,\mathrm{d}M \\
&= \int_0^\infty M^2 f_n(M)\,\mathrm{d}M - 2\bar{M}_n\bar{M}_n + \bar{M}_n^2 \\
&= \int_0^\infty M^2 f_n(M)\,\mathrm{d}M - \bar{M}_n^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

なお、四行目への展開においては、$\int_0^\infty M f_n(M)\,\mathrm{d}M = \bar{M}_n$ と $\int_0^\infty f_n(M)\,\mathrm{d}M = 1$ を用いた。

ここで、(2) 式より、

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_w &= \frac{\sum_i n_i M_i^2}{\sum_i n_i M_i} \\
&= \frac{\sum_i n_i M_i^2}{\sum_i n_i} \times \frac{\sum_i n_i}{\sum_i n_i M_i} \\
&= \int_0^\infty M^2 f_n(M)\,\mathrm{d}M \times \frac{1}{\bar{M}_n} \\
\therefore \int_0^\infty M^2 f_n(M)\,\mathrm{d}M &= \bar{M}_n\bar{M}_w \qquad (2)
\end{aligned}
$$

なお、三行目への展開では、数微分分布関数 $f_n(M)$ の二次のモーメントであることを用いている。

この結果を代入して、

$$
\begin{aligned}
s_n^2 &= \bar{M}_n\bar{M}_w - \bar{M}_n^2 \\
\therefore \frac{s_n}{\bar{M}_n} &= \left(\frac{\bar{M}_w}{\bar{M}_n} - 1\right)^{-1/2} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

を得る。なお、二行目へは、両辺を $\bar{M}_n^2$ で除した後に、平方根を取っている。