

この章の内容

この章では、「レオロジーのはじめの一步」として、もう少し具体的な内容について議論を始めていきましょう。固体と液体という基本的な物質のふるまいを書き表す一番単純なモデルを説明していきます。

以下に、この章で議論する内容について簡単にまとめました。

- 固体の最も基本的なモデルである弾性体という状態を考えます。
- 刺激と応答を表すために、ひずみと応力を使うことで力学モデルが書けることを学びます。
- つづいて、液体の流れるということを考えます。
- 液体の力学モデルが、「ひずみ速度」で表されることを学びます。

1 レオロジーのはじめの一步

1.1 レオロジーのやり方の再確認

レオロジーのイメージを再確認するために、以前に示した図を再掲します。図 1 に示したように、レオロジーとは物質に刺激を与えてその応答を評価観察することで、その特性を評価できるのです。

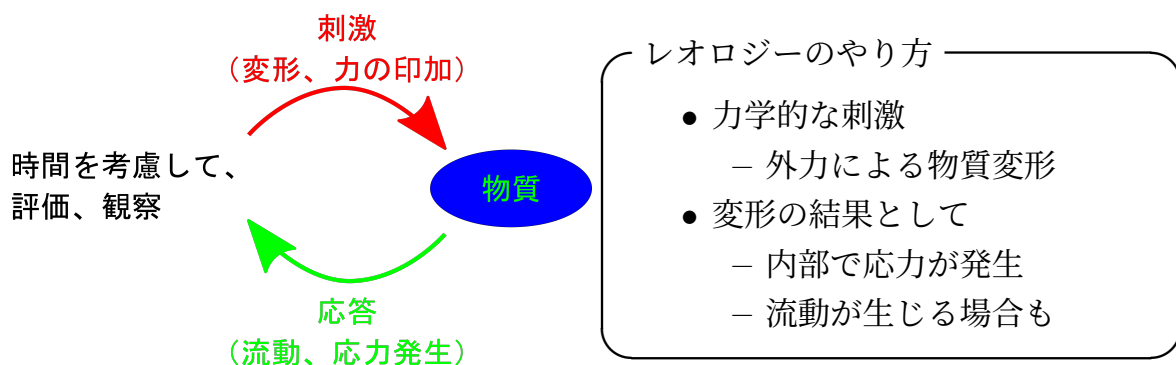


図 1 レオロジーのやりかた

yarikata2

ここでは、わかり易い例として、物質の力学的なレオロジー評価を考えてみましょう。物質に力学的な刺激を与えるということは、「外力によって物質を変形」させるということに対応します。このとき、変形の結果として「物質の内部で応力」という応答が生じ、また、流動が生じる場合もあります。

1.2 力について

まず、刺激の源となる「力」というものについての確認から始めていきましょう。

力は以下のように定義されています。そして、その対象となるものの状態に応じて、「静力学」と「動力学」の 2 つに分けて考えることができます。

力の定義

「物体の状態を変化させる原因となる作用で、その作用の大きさを表す物理量」

- 静力学
 - － 静的状態（時間によって系の位置が変化しない状態）に働く力に関して、
 - － 主として、力の釣り合いを議論。
- 動力学
 - － 運動量の変化を伴う質点の移動について議論し、
 - － 相互作用する物体系の運動について議論。

この章でのお話としては、まずは、力の釣り合いを取り扱う静力学としてのアプローチから始めていきます。

1.3 物質の変形と仕事

静的な釣り合いとして物質に力を加えることを考えた場合、物質の外から加えた力を「外力」と呼び、そして物質の内部に外力に抵抗する力として「内力」が生じます。このとき、外力と内力が釣り合うという、「作用・反作用の原理」が成り立ちます。

静的な釣り合いとしての力

- 物質の外から加えた力を外力として、
- 物質の内部に、外力に抵抗する力として内力が生じ、
- 外力と内力が釣り合う。⇔ 「作用・反作用の原理」

同時に、外力に対応して、物質は変形します。この釣り合いのもとでの物質の変形も、仕事となります。この場合、外力が物質の内部に蓄積された（弾性）エネルギーに相当する量の仕事を行ったと考える事ができます^{*1}。

2 弾性体の力学的な刺激と応答

この節では、わかり易い例として最も単純な固体のモデルである弾性体を対象として、力学的な刺激と応答ということについて、考えていきます。なお、弾性体という考え方は、変形を受けてもその起源となる外力を除去すれば、全く元の状態に戻るような性質をあらわしています。さらに、簡単のために時間の因子も除いて考えることにします。

2.1 物質のひずみと応力

ここでは、力学的な刺激として、「外力による物質の変形」を考え、その応答として、「内部での応力発生」を考えます。

外力を与えた結果として変形が生じたとき、物質はひずみ、内部で応力が発生します。

^{*1} 仕事という概念については、次の第 4 章で議論を進めますので、少しお待ち下さい。

外力による物質の変形

- 引張変形
- せん断変形

変形の結果として

- 物質はひずむ
- 内部で応力が発生

2.2 二つの変形とひずみ

変形を考えていくために、まず、変形を物質を一つの軸に沿って引き伸ばす「引張変形」とトランプのカードを横にずらしたような「せん断変形」の二つに単純化します。

この「せん断変形」のイメージが湧きにくいかもしれません。たとえば、紙をハサミで切るときにそれぞれの刃が向かい合う方向に移動して紙に力を与えているような状況を想像していただければと思います。このように互い違いの方向に同じ大きさの力が作用することを、偶力と呼びます。「せん断変形」は、偶力が働いた結果として生じる変形であると理解してください。

2.2.1 伸張ひずみ

引張変形に対応する物質のひずみを記述する最も単純なものが、棒状のものを一方向にだけ変形させたときのコーシーひずみ（図 2）になります。このとき、変形量を変形前の長さで除したものがひずみ（一般に、コーシーひずみのような伸長ひずみはギリシア文字の ε と表記）となります。

コーシーひずみ：

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= \frac{\text{変形量}}{\text{変形前の長さ}} \\ &= \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}\end{aligned}$$

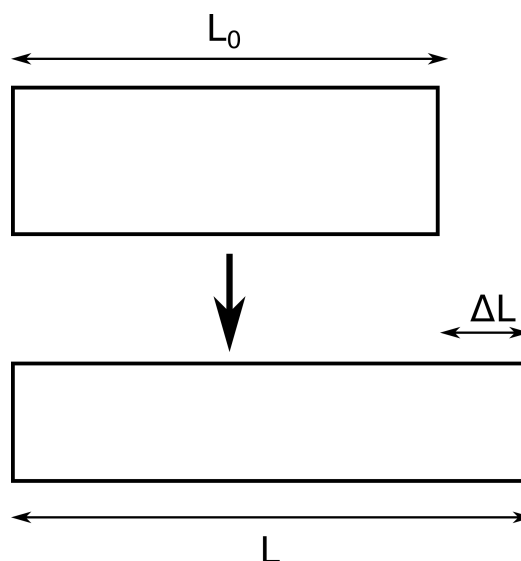


図 2 コーシーひずみ

causy

2.2.2 せん断ひずみ

また、せん断変形によるひずみ（せん断ひずみはギリシア文字の γ と表記）は、図 3 に示したように、変形方向への変形量をサンプルの厚みで除した形で表すことになります。このとき、高さ h を一定とし、変形前後での体積変化もないものと考えています。

なお、ひずみは、長さを長さで割ったものとなりますので、次元を持たない無次元量であることに注意してください。

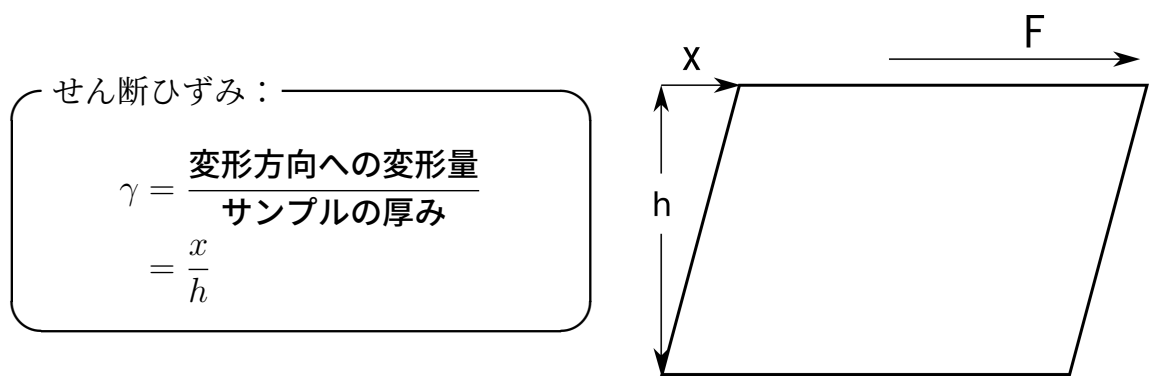


図3 せん断ひずみ

shear

2.3 応力のイメージ

応力とは、物質の内部に生じている力の大きさを表す物理量であり、その表す意味は単位面積あたりに働く内部の力ということになります。したがって、その次元は以下のように書けます。

応力の次元 —

$$[\text{応力}] = \frac{[\text{力}]}{[\text{面積}]} = \frac{[\text{N}]}{[\text{m}]^2} = [\text{Pa}]$$

棒状の物質に引っ張り変形を与えた場合の、外力と応力のイメージを図4に示しました。このとき、棒の長手方向にはどの位置で切断したとしても、同一の応力が働いていることに注意してください。

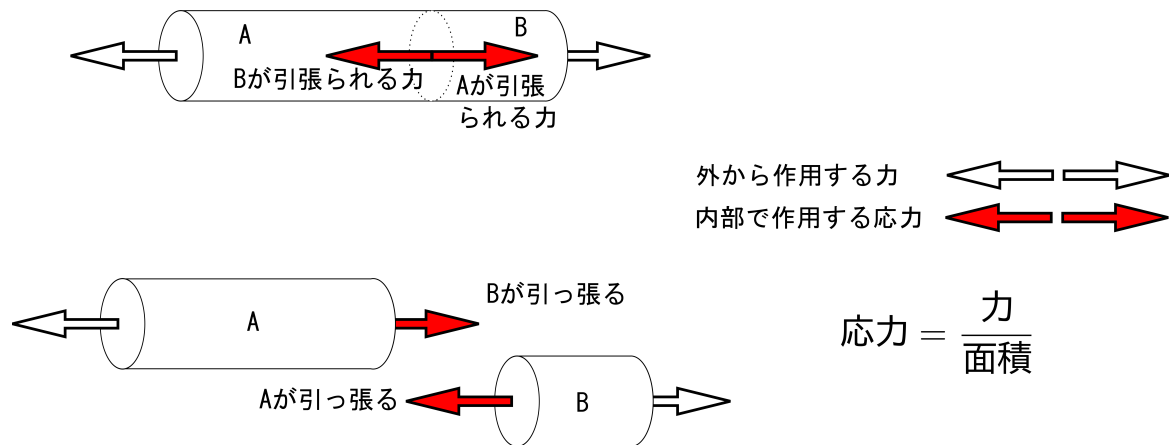


図4 応力のイメージ

stress

2.3.1 伸長応力 σ

伸長時に働く応力は、一般に、ギリシア文字の σ と表記します。表式とすれば、以下のように書くことができます。

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

なお、 F は外部から加えた外力を、 A は内部で応力が働く断面積ということになります。

繰り返しますが、応力は単位面積あたりに働く内部の力ですから、図 5 に示したように細い棒と入れ替えて断面積が小さくなれば、それに反比例して応力は増加します。

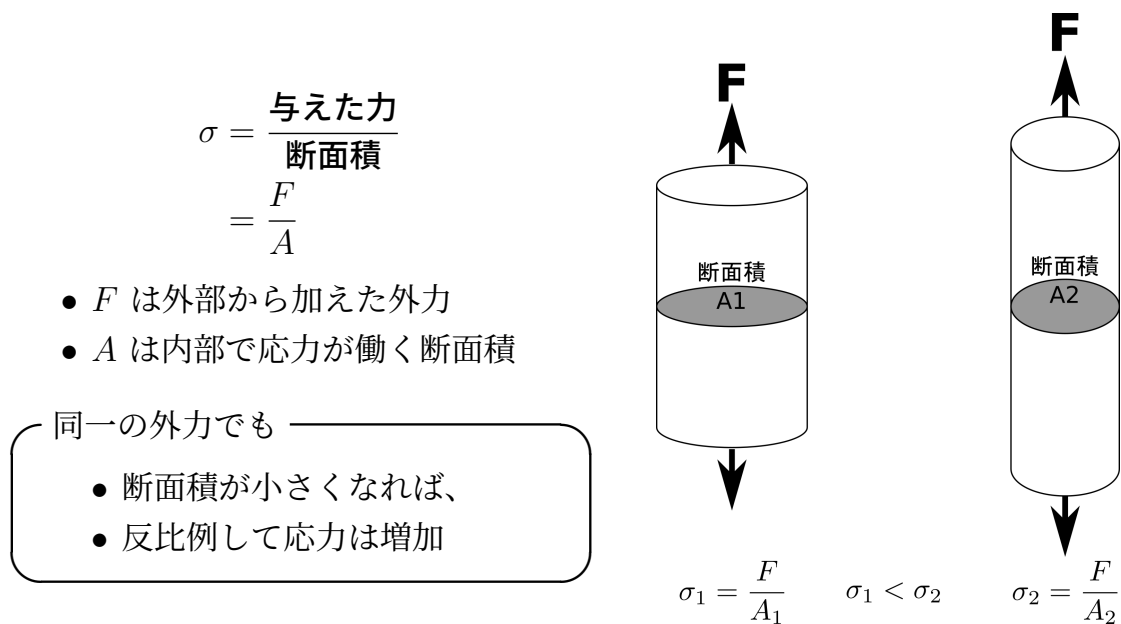


図 5 伸長応力

elong_stress

2.3.2 セン断応力 τ

互いに向かい合う同じ大きさの力である偶力 F を作用させてせん断変形を生じた場合のせん断応力（せん断の場合は、応力を τ と表記）のイメージを、図 6 に示しました。なお、力を働かせた上面の面積が A であることに注意してください。

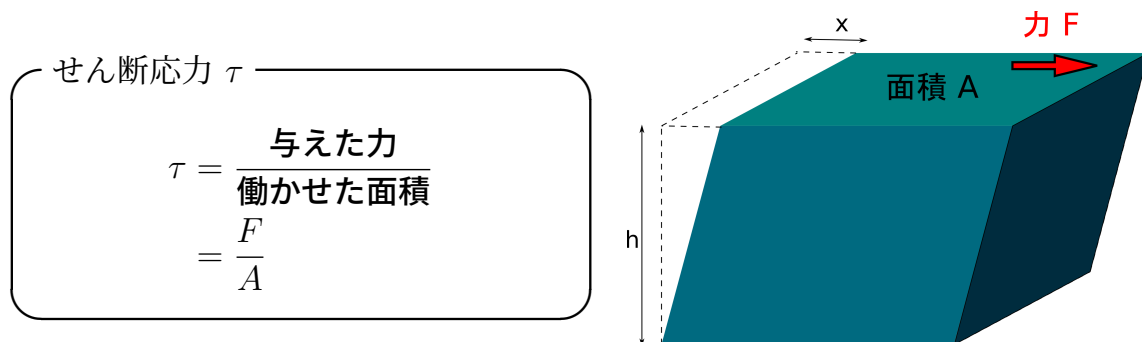


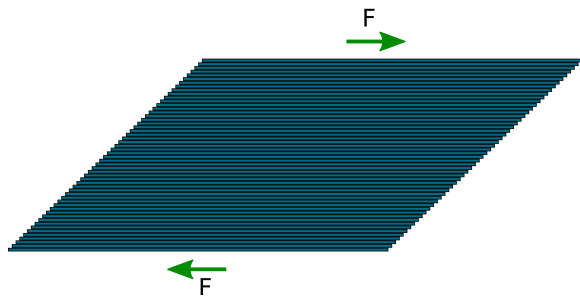
図 6 セン断応力

shear_stress

このとき、サンプルの厚さ方向には、どの位置であっても同一のせん断応力が作用していることになり、伸張ひずみの場合と同様に厚さ方向にはどの位置で切断したとしても同一の偶力が作用していることになります。

このせん断応力のイメージは、トランプのカードが重なったデッキを想像することで、理解しやすくなるかもしれません。つまり、デッキの間に挟まったカードは、一枚上のカードと下のカードによって偶力を受けることになるわけです。

一枚の面積がAであるトランプデッキの
上面に力Fを働かせると、偶力が生じる。



n番目のカードに着目すると、
上下のカードとの間に応力 τ

$$\tau = \frac{F}{A}$$

図7 内部でのイメージ

trump

3 力学モデルについて

3.1 弾性体のモデル

ここまで刺激と応答の例として使ってきた弾性体を、物質として評価する方法について考えてみましょう。つまり、弾性体の力学応答を書き表すことが出来るモデルを数式として表すことで、異なる物質を定量的に比較できるようになることを目指すわけです。

3.1.1 フックの法則

これまでの経験から、弾性体はあたかもバネのように取り扱うことができることが知られています。そして、バネの力学的な振る舞いには、イギリスの物理学者 Robert Hooke が見出した「フックの法則」と呼ばれる以下の関係があることがわかっています。

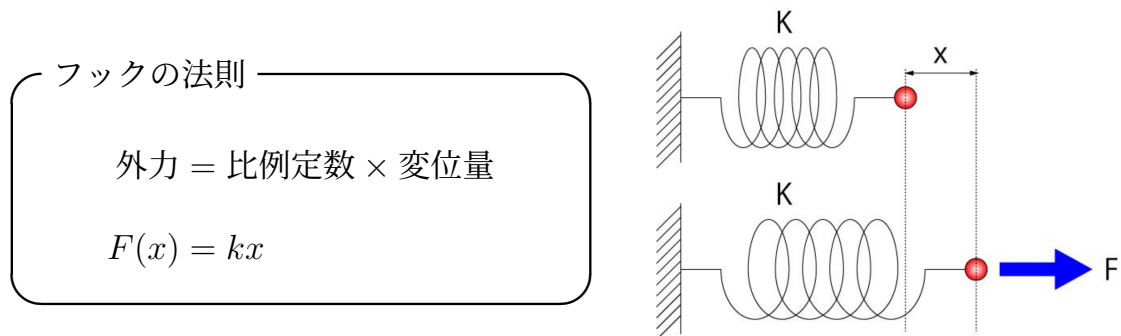


図8 フックの法則

hook

この式は、外力 F と変位置 x が比例（比例定数が k ）することを表しています。

3.1.2 弾性体の力学モデル

弾性体の力学モデルは、上述のフックの法則に従う形で、以下ようになります。

この関係を表式とすれば、下式となります。

伸長応力 = 引張弾性率 × ヘンキーひずみ

$$\sigma = E\varepsilon$$

eq:hookian2
(1)

なお、ひずみは無次元量でしたから、引張弾性率 E は伸長応力 σ と同じ次元である [Pa] となります。

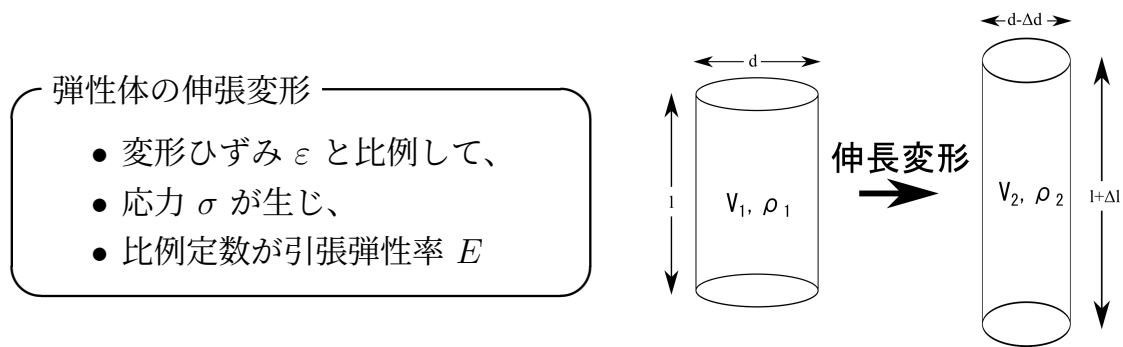


図9 弾性体の伸張変形モデル

eq:hookian

ここで、気をつけていただきたいのは、弾性体のフックモデルでは全体のひずみに比例するのは応力であるということです。何度も繰り返しましたように、応力とは、働いている力を面積で除したものです。したがって、伸張に伴って変化した面積に対応した応力を考える必要があります。

また、このフックモデルは、せん断変形の場合にも使うことができます。このときは、以下に示したように、

$$\begin{aligned} \text{せん断応力} &= \text{せん断弾性率} \times \text{せん断ひずみ} \\ \tau &= G\gamma \end{aligned} \quad (2)$$

せん断変形の場合は、比例定数はせん断弾性率と呼ばれ、 G で表され、せん断応力 τ と同じ次元である [Pa] となります。

3.2 液体の変形と応答

ここまでの議論は、固体のモデルとして弾性体を変形の対象として行ってきました。次に、液体のモデルを考えてみましょう。

3.2.1 流れるという性質

液体と固体の違いについては後ほど詳しく議論しますが、ここでは非常に単純に外力によって変形されたら元には戻れない「流れる」という性質を持った物質と考えてください。この性質を簡単にまとめると以下のようになります。

流れるという性質

- コップの中ではじっとしている。
- 変形を与えると流れる
 - － 元には戻らない。
 - － 変形を止めれば、応力も消失
- 応答を見るのが困難
 - － 変形を続けながら応力を測る
 - － 液体内部の変形と応力を見積る



図10 流れるという性質

fig:flow

この「流れる」という性質のために、流体の応答を測ろうとする場合には、固体と考え方を変える必要があります。したがって、液体の評価は主としてその形状を維持しやすい「せん断変形」により行われる場合が多くなります。そして、測定の間、せん断変形を与え続ける必要があります。

3.2.2 液体の性質を直感的に理解

液体が生じる力を直感的に理解するために、プールでの水中歩行を考えてみましょう。

腰以上に水に浸かって、ゆっくりと移動しているときには、水から受ける抵抗はそれほど大きいものではありません。ところが、速く歩こうとすると、とたんに水の抵抗は大きくなってしまいます。

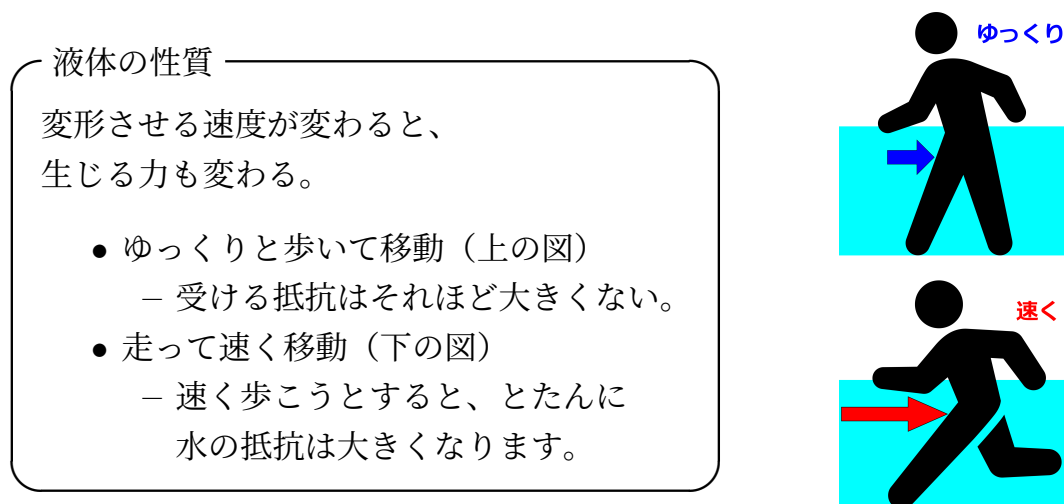


図 11 プールでの水中歩行

pool_walk

このことから、液体の性質として、変形させる速度が変わると生じる力も変わって、速い変形に対しては応力も大きくなることがわかります。

3.3 液体の力学モデル

3.3.1 ニュートンの法則

では、液体の力学的な応答を記述するモデルはどうなるのでしょうか。これは、古典力学の土台を築いた Sir Isaac Newton が、流れのせん断応力 τ とせん断速度 $\dot{\gamma}$ （速度勾配）との間に比例関係を見出しています。

実際の実験は、図 12 に示したような二重になった円筒中に試料となる液体を入れ、内部の円筒を回転させながらそのときに生じる力を測定します。内部に入った円筒の回転速度を変化させることでせん断速度を変化させ、そのときに生じるせん断応力との間に比例関係があることを見出しました。

この比例関係を式で表せば、

$$\begin{aligned} \text{せん断応力} &= \text{比例定数} \times \text{せん断速度} \\ \tau &= \eta \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (3)$$

式中で示した比例定数が、物質の流れ易さを表す指標である「粘度」となります。

ニュートンの法則

せん断応力 = 比例定数 × せん断速度

$$\tau = \eta \dot{\gamma}$$

比例定数 η が、物質の流れ易さを表す「粘度」

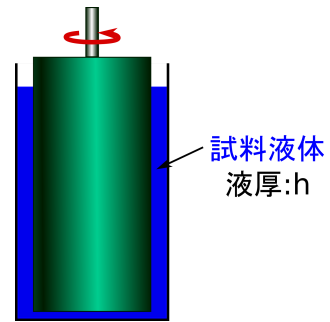


図 12 二重円筒による測定

nijyu

なお、粘度の単位は以下ようになります。

$$\begin{aligned} [\text{粘度}] &= \frac{[\text{せん断応力}]}{[\text{せん断速度}]} \\ &= \frac{[\text{Pa}]}{[\text{s}^{-1}]} = [\text{Pa} \cdot \text{s}] \end{aligned} \quad (4)$$

3.3.2 液体の力学モデル

ニュートンの法則が成り立つような液体の力学モデルをイメージ図とすると、図 13 となります。

液体のモデル

- 液体の振る舞いを表すモデル
- 右図のダッシュポット
- イメージとしては、水鉄砲
- 速くピストンを動かすと、抵抗が大。

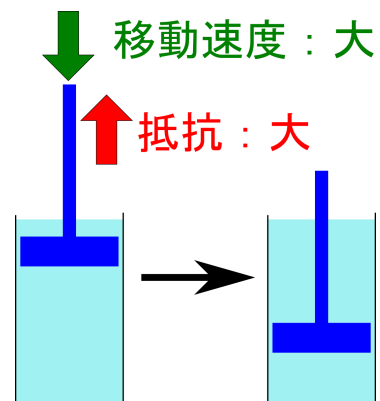


図 13 液体の力学モデル

flow_model

このモデルは、液体の抵抗がその変形速度に比例するというニュートン流体の特性を表しています。

この章のまとめ

この章では、固体と液体という基本的な物質のふるまいを書き表す一番単純なモデルについて、説明を進めました。

- 固体と液体という基本的な物質のありようについて、レオロジー的に考えていきます。
 - － 固体の最も基本的なモデルである弾性体という状態
 - － 刺激と応答を表すために、ひずみと応力を使うことで力学モデルが書けること
 - － 液体の応答について
 - － 液体の力学モデルが、「ひずみ速度」で表されること

演習問題 1

内容を振り返るために、以下に示した文章例の中から適切な記述のものを複数選んでください。

- (1) 力と釣り合いについての、正しい言葉はどれでしょうか？
- (a) 静力学とは、相互作用する物体系の運動について議論します。
 - (b) 物質に力を加えたとき、物質の内部には外力の何倍もの大きな力が生じます。
 - (c) 力とは、物体の状態を変化させる原因となる作用で、その作用の大きさを表す物理量と考えられます。
 - (d) 力の釣り合いを議論するものが静力学です。
 - (e) 作用した力と釣り合う力が生じることを、「作用・反作用の原理」といいます。
- (2) 「力学的な刺激と応答」についての、正しい言葉はどれでしょうか？
- (a) 物質に刺激を与えるということは変形させるということに対応し、変形の結果として応力という応答が生じます。
 - (b) ひずみとは、変形の状態を表す尺度であり、初期状態からどれだけ変位したかを表す無次元量です。
 - (c) ひずみとは、変形度合いを表す長さの次元を持った物理量です。
 - (d) 物質に加えた外力と応力とは、力の大きさを表す全く同一の物理量です。
 - (e) 応力の表す意味は単位面積あたりに働く内部の力ということになります。
- (3) 弾性体のモデルについての、正しい言葉はどれでしょうか？
- (a) 弾性体であっても、いったん外力により変形すると、もう元には戻りません。
 - (b) 弾性体はあたかもバネのように取り扱うことができます。
 - (c) 弾性体を表すモデルはニュートンの法則であり、ダッシュポットでイメージできます。
 - (d) 弾性体のフックモデルでは全体のひずみに比例するのは応力です。
 - (e) フックモデルでの比例定数が弾性率であり、応力と同じ次元 [Pa] です。
- (4) 「液体の変形と応答」についての、正しい言葉はどれでしょうか？
- (a) 液体は、「外力によって変形されたら元には戻れない」流れるという性質を持った物質です。
 - (b) 液体に変形を与えると流れ、変形を止めれば応力も消えます。
 - (c) いったん変形を加えると、液体内部での応力はずっと維持されます。
 - (d) 液体は、変形させる速度が変わると生じる応力も変わります。
 - (e) 水中ではゆっくり歩いても水の抵抗は変化しません。
- (5) 液体のモデルについての、正しい言葉はどれでしょうか？
- (a) 液体の流れるという性質は、ニュートンの法則で整理できます。
 - (b) 液体はせん断速度に反比例して流れやすさが低下します。
 - (c) せん断応力は、せん断速度に比例します。
 - (d) その比例定数が、物質の流れやすさを表す指標である粘度となります。
 - (e) 液体の力学モデルは、ダッシュポットで表されます。

演習問題 2

内容を振り返るために、テキストで用いた言葉を使って簡単な穴埋めを行ってください。

(1) 「弾性体の力学的な刺激と応答」について、以下の (a) から (i) までのカッコを埋めてください。

(a) 変形は、物質を一つの軸に沿って引き伸ばす「 (a) 」とトランプのカードを横にずらしたような「 (b) 」の二つに単純化できます。

(b) 伸張変形では、 (c) を (d) で除したものがひずみとなります。

(c) 応力とは、物質の内部に生じている (e) を表す物理量であり、その表す意味は単位面積あたりの (f) ということになります。

(d) 応力と力の関係は以下のように書けます。

$$(g) = \frac{(h)}{(i)}$$

選択肢

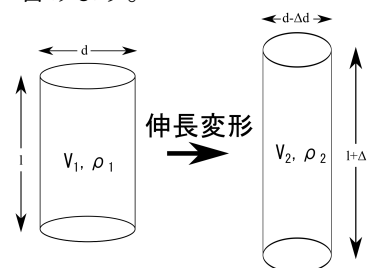
- | | | | | |
|---------|----------|----------|---------|-------|
| 1. 変形量 | 2. せん断変形 | 3. 力の大きさ | 4. 面積 | 5. 応力 |
| 6. 初期長さ | 7. 力 | 8. 伸張変形 | 9. 内部の力 | |

(2) 弾性体と液体の力学応答について、以下の (j) から (p) までのカッコを埋めてください。

(a) 弾性体を表すモデルはフックの法則であり、以下のように書けます。

- (j) ε と比例して、
- (k) σ が生じ、
- 比例定数が (l) E

$$\sigma = E\varepsilon$$



(b) 液体の評価は主としてそのひずみ速度を維持しやすい「 (m) 」により行われる場合が多くなります。

(c) ニュートンの法則の比例関係を式で表せば以下ようになります。

$$(n) = (o) \times (p)$$

$$\tau = \eta \dot{\gamma}$$

選択肢

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| 1. 伸張弾性率 | 2. ひずみ速度 | 3. 伸張ひずみ | 4. せん断応力 |
| 5. 伸張応力 | 6. せん断変形 | 7. 粘度 | |