

レオロジーをはじめる前に

佐々木 裕¹

東亜合成株式会社

¹hiroshi_sasaki@mail.toagosei.co.jp

Outline

① 数学的な事項の確認から

- 関数について
- 線型という意味を理解しよう

② 物理的に考えましょう

- 物理モデルと線型性
- 物理モデルを理解するために、「量」、「次元」、「単位」

この章でのお話

ここでは、「レオロジーをはじめる前に」として、レオロジーを理解するために必要となる準備を行っていきます。具体的には、数学及び物理の基本となるような考え方についての確認から手を付けていきます。

- 数学的な事項の確認
 - 数学的に書き表すときに基本となる「関数」について
 - 事象を単純化して考えるときに重要な「線型性」
- 物理的に考えるときに必要になること
 - 物理モデルと線形性
 - 物理モデルを理解するために、「量」、「次元」、「単位」

① 数学的な事項の確認から

- 関数について
- 線型という意味を理解しよう

② 物理的に考えましょう

- 物理モデルと線型性
- 物理モデルを理解するために、「量」、「次元」、「単位」

関数について

まず、関数を直感的に理解することから始めましょう。

関数の直感的理解

- 関数とは、
 - 2つの変数 x と y があるとしたら、
 - 入力を x で表したときに、
 - その出力 y を決定する規則というようなイメージ
- 一般に、関数は、
 - 英語の function の頭文字を使って f と表記。
 - そのときに、入力の変数を明示的に $f(x)$ と表す。

関数について

関数のイメージ

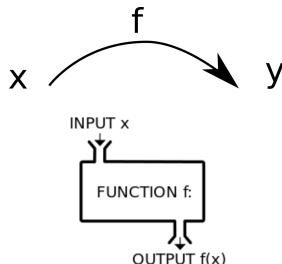
- ある変数 x に依存して決まる出力 y を
決める方法 (図の右上)
- 入力 x に対して出力 y を与える
変換装置 (図の右下)

数式では

入力 x と出力 y との関係を
表現する数式

$$y = f(x)$$

出力 = 関数 (入力)

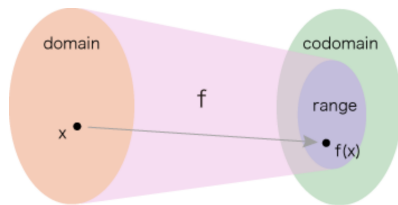


関数と写像

関数は、2つの数の集合に値の関連性を与える取る写像の一種と考えることもできます。

集合と写像

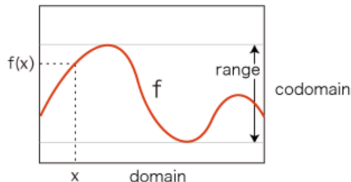
- 左の集合から
- 右の集合へ
- 射影する方法



関数とグラフ

グラフとは

- 入力と出力との関係を平面図に示したもの
- 視覚的に入力と出力との関係を理解しやすくしたもの
- 具体的には、
 - 入力 x に対応して決まる出力の点を平面上に書き込む
 - それを連続的に（直線または曲線で）つないだもの
- 関数を表すグラフ
 - 横軸が入力
 - 縦軸が出力
 - 赤い曲線が関数



線型性とは

線型という言葉を手感的にイメージすると、
「**グラフに表した時に原点を通る直線となる性質**」
と捉えることができます。

数学的な線型性の定義

演算（写像） f が、以下に示した2つの性質を満たすとき

- 加法性：任意の x, y に対して、

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

- 斉次性：任意の x, a に対して、

$$f(ax) = af(x)$$

線型性とは

- 線型性を示す関数はたくさんあります。
 - 以下の一次方程式が代表的

$$y = ax$$

- 比例の関係：入力の大きさが二倍 \Leftrightarrow 出力も二倍
- 加法性を利用し、小学校の応用問題としての旅人算も

旅人算の例

例えば、「A 君と B 君が 3km 離れた地点から向かい合って同時に出発しました。A 君は毎分 30m、B 君は毎分 70m で歩いたとすると、二人が出会うのは出発してから何分後ですか。」というような問題です。

線型性の意味

- 「水道の栓を開けて、浴槽に水を溜めています。5 分間流して、100L の水が溜まりました。」
 - 「1 分間流したときには、何 L 溜まっていた？」
比例より、 $1 \text{ 分} \times 100\text{L} / 5 \text{ 分} = 20\text{L} \Leftrightarrow$ 過去を推定
 - 「10 分では、何 L 溜まるでしょう？」 \Leftrightarrow 未来を予測
- 「二つの蛇口から水を溜め、A 蛇口からは 1 分間で 20 L、B 蛇口は 5 分間で 150 L の水を貯められる。」
 - 「両方の蛇口から同時だと、10 分間では何 L？」
 - 加法性と斉次性を利用すれば簡単に解ける

線型性の意味

線型性が成立する（と仮定する）ことで、

- 事象を重ね合わせながら
- 過去や未来の値を決定

① 数学的な事項の確認から

- 関数について
- 線型という意味を理解しよう

② 物理的に考えましょう

- 物理モデルと線型性
- 物理モデルを理解するために、「量」、「次元」、「単位」

物理モデルについて

物理モデルという考え方

- モデルという言葉の意味は？
「事象や理論の成り立ちを説明するための
理解しやすい概念（考え方）」
 - 「地動説」を説明するために、「太陽系モデル」が提案
 - 経済活動で利益の最大化に種々の「ビジネスモデル」
- 「モデルとは、対象とする事象を簡略化して、
その本質を表したもの」という表現も。
 - 対象を物理現象にとったとき、「物理モデル」
 - 定量的な解析のために数学を応用した「数理モデル」
⇒ モデル化で使った概念を数式表現へ落とし込む

物理現象と線型応答

- 我々の身の回りに起こっている実際の事柄
 - 非常に複雑な場合がほとんど
 - 評価したい出力（応答）も分かりづらい
 - 入力も不明確だったりする
- 入力が小さい場合
 - 応答が線型で取り扱える場合が多い
 - 加法性や斉次性が使える
 - 入力が多種類となってもそれらが分割可能²
 - 取り扱いたい事象の細かい部分を無視
- 単純化（近似）して理解

²ここでは、詳しくは説明しませんが、分割できるということは独立に起きている事柄ということになります。

物理モデルと線型性

簡単なまとめ

- 実際の身の回りの現象
 - 非常に複雑な場合がほとんど。
 - 評価したい応答も分かり難い。
 - 入力すら不明確なときも。
- 線型現象であれば、取り扱いが容易。
 - 微小な刺激に対しては、線形応答が期待できる。
 - 線形応答の重ね合わせで、事象を近似する価値は高い。
- 線型性が成り立っているのであれば、
 - 比例定数を調べることで
 - 物質の性質を容易に比較できる

ここでは、線型性を仮定できるような単純な物理モデルを利用して理解を深めていきます。

物理モデルを理解するために

まず、天下一に、「量とは」を考えてみます。

量とは

- 我々が物事の評価を行うときに、
 - 「定性的に考えて区別」するために、
 - 「定量的に決定できる」もの
- そして、物理的に考えるときには、
 - 「次元が決まって」、
 - 「定められた単位の倍数」として表す
- 工学的には、「測定方法によって定義」される

ですから、量というものを、次元と単位、そして、測定方法を定義しながら、議論することが必要となります。

「量」、「次元」、「単位」の定義

「計測用語」についてまとめた JIS Z 8103 では

- 量** 現象、物体又は物質の持つ属性で、定性的に区別でき、かつ、定量的に決定できるもの。
- 物理量** 物理学における一定の理論体系の下で次元が確定し、定められた単位の倍数として表すことができる量。
- 工学量** 複数の物理的性質に関係する量で、測定方法によって定義される工業的に有用な量。硬さ、表面粗さ等。
- 量の次元** ある量体系に含まれるある一つの量を、その体系の基本量を表す因数のべき乗の積として示す表現。
- 量体系** 一般的な意味で、定まった関係が存在する量の集合。
- 単位** 取決めによって定義され、採用された特定の量であって、同種の他の量の大きさを表すために比較されるもの。

量の性質

量の演算

- 同じ種類の量同士は和と差の演算が定義可能
 - 結果は同じ種類の量
 - 足したり引いたりすることでその大きさが変化
 - 異なる種類の量の和や差には意味がない
- 同じ、あるいは、異なる種類の量同士でも、積や商が定義できることがあり、
 - 長さ同士の積は面積
 - 長さの時間による商は速さ

量の次元

- 先程示した定義で「量の次元」は、
 - 「ある量体系に含まれるある一つの量を、その体系の基本量を表す因数のべき乗の積として示す表現。」
 - よくわからない。
- 言葉を足して言い換えてみると、
 - 「何らかの関係が成り立つ量の集合において、一つの量を、その関係の基本となる量の種類とそのべき乗だけで表す考え方」
 - これでもわかりにくい

もっと直感的な「次元」のイメージ

「次元」とは、複合的なイメージとしての「ある量」を、「基本量の積と商で表す」考え方のこと。

国際量体系での定義

国際量体系（ISQ: International System of Quantities）の体系に従って、表のように7つの基本量が定められています。

基本量	次元の記号	SI 単位	単位の記号
長さ	L	メートル	m
質量	M	キログラム	kg
時間	T	秒	s
電流	I	アンペア	A
熱力学温度	Θ	ケルビン	K
物質質量	N	モル	mol
光度	J	カンデラ	cd

次元の関係式

- 量 Q の次元は、角括弧で括って $[Q]$ で表記する
- このとき、長さという基本量に関わる量体系は、

$$\begin{cases} [\text{面積}] = [\text{長さ}]^2 = [L^2] \\ [\text{体積}] = [\text{長さ}]^3 = [L^3] \end{cases}$$

- 力学に関係する物理量は異種の基本量の組み合わせで、

$$\begin{cases} [\text{速さ}] = [\text{長さ}][\text{時間}]^{-1} = [LT^{-1}] \\ [\text{加速度}] = [\text{長さ}][\text{時間}]^{-2} = [LT^{-2}] \\ [\text{力}] = [\text{質量}][\text{長さ}][\text{時間}]^{-2} = [MLT^{-2}] \end{cases}$$

- 次元の関係式とは「定数係数を無視した等式として表すことで物理現象の成り立ちを表している」

単位について

- 単位とは、
 - 「取決めによって定義された同種の物理量の大きさを表す」
- 標準となる単位系は、
 - 国際単位系 (SI)³
 - 次元の基本量に対応した7つの基本単位
- 任意の物理量の値 Q は、
 - その大きさを表す数値 n と単位 U との積
 - 単位のとりに方に依存して、数値は変更を受ける
 - 例えば、時間の単位として「秒」で表して定数係数が大きすぎる場合は、「時」、「年」等も用いる
 - 臨機応変に対応しましょう。

³仏: *Système International d'Unités*、英: *International System of Units*、フランス語の略称なので SI となる。

組立単位

● 組立単位


- 基本単位の組み合わせで、
- 固有の名称と記号で表される
- SI 組立単位としては、22 個

レオロジーに関連する主要なものは、

組立量	名称	記号	SI 基本単位による表現
周波数	ヘルツ (hertz)	Hz	s^{-1}
力	ニュートン (newton)	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
応力	パスカル (pascal)	Pa	$(N/m^2) = m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
エネルギー	ジュール (joule)	J	$(N \cdot m) = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
粘度	パスカル秒	Pa·s	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$

まとめ

ここでは、レオロジーを理解するために必要となる準備を行いました。

- 
- 数学的な事項の確認
 - 数学的に書き表すときに基本となる「関数」
 - 事象の単純化に重要な「線型性」
 - 物理的に考えるときに必要になること
 - 物理モデルと線形性
 - 「量」、「次元」、「単位」