レオロジーのはじめの一歩

佐々木 裕 [1]

東亜合成株式会社

[1] hiroshi_sasaki@mail.toagosei.co.jp

Outline

この章でのお話

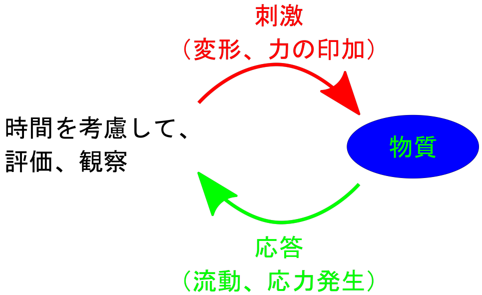
ここでは、固体と液体という基本的な物質の有り様について、考えていきます。

- 固体の最も基本的なモデルである弾性体という状態を考えます。
- 刺激と応答を表すために、ひずみと応力を使うことで力学モデルが書けることを学びます。
- つづいて、液体が流れるということを考えます。
- 液体の力学モデルが、「ひずみ速度」で表されることを学びます。

レオロジーのやり方の再確認

レオロジーのやり方

レオロジーとは物質に刺激を与えてその応答を評価観察することで、その特性を評価できるのでした。
ここでは、わかり易い例として、物質の力学的なレオロジー評価を考えてみましょう。



- 力学的な刺激
  - 外力による物質の変形
- 変形の結果として
  - 応力が発生
  - 流動が生じる場合も。

力とは

「力」とは

「物体の状態を変化させる原因となる作用で、その作用の大きさを表す物理量」

「状態の変化」に関して二通り

- 静力学
  - 静的状態（時間によって系の位置が変化しない状態）に働く力に関して、
  - 主として、力の釣り合いを議論。
- 動力学
  - 運動量の変化を伴う質点の移動について議論し、
  - 相互作用する物体系の運動について議論。

力とは

「力」とは

「物体の状態を変化させる原因となる作用で、
その作用の大きさを表す物理量」

「状態の変化」に関して二通り

- 静力学
  - 静的状態（時間によって系の位置が変化しない状態）に働く力に関して、
  - 主として、力の釣り合いを議論。
- 動力学
  - 運動量の変化を伴う質点の移動について議論し、
  - 相互作用する物体系の運動について議論。

物質の変形と仕事

静的な釣り合いとしての力

- 物質の外から加えた力を外力として、
- 物質の内部に、外力に抵抗する力として内力が生じ、
- 外力と内力が釣り合う。$\Leftrightarrow$ 「作用・反作用の原理」

外力に対応して物質は変形

- 釣り合いのもとでの物質の変形も、仕事となる。
- この場合、外力が物質の内部に蓄積された（弾性）エネルギーに相当する量の仕事を行ったと考える。
- この事の詳細は、また後ほど。

弾性体の力学的な刺激と応答

弾性体とは：

- 最も簡単な固体のモデル
- 変形を受けても
  - その起源となる外力を除去すれば、
  - 全く元の状態に戻るような性質

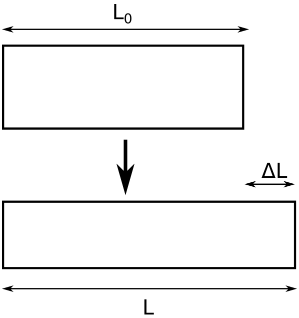
弾性体の力学的な刺激と応答

- 外力による物質の変形
  - 引張変形
  - せん断変形
- 変形の結果として
  - 物質はひずむ
  - 内部で応力が発生

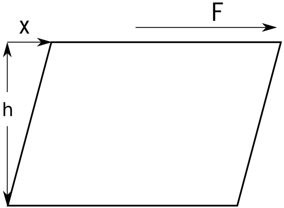
二つの変形とひずみ

外力と加えたときに弾性体に生じる変形を、
以下の二つに単純化

- 物質を一つの軸に沿って引き伸ばす「引張変形」
- トランプのカードを横にずらしたような「せん断変形」



「引張変形」

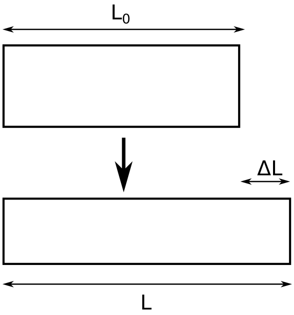


「せん断変形」

引張変形とコーシーひずみ

引張変形による物質のひずみを記述する最も単純なものが、「コーシーひずみ」
(一般に、伸長ひずみはギリシア文字の ε)

$$\varepsilon_c = \frac{\text{変形量}}{\text{変形前の長さ}} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$



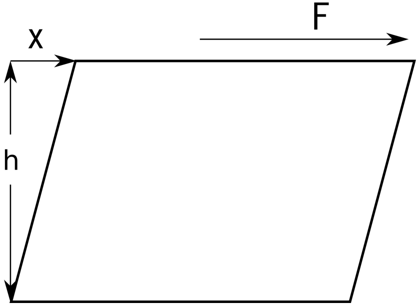
「ひずみは、長さを長さで割っているので、次元を持たない無次元量」

せん断変形とせん断ひずみ

せん断変形によるひずみは、
(せん断ひずみはギリシア文字の γ)

- 高さ h を一定
- 横に x 変形

$$\gamma = \frac{\text{変形方向への変形量}}{\text{サンプルの厚み}} = \frac{x}{h}$$



「ひずみは、長さを長さで割っているので、次元を持たない無次元量」

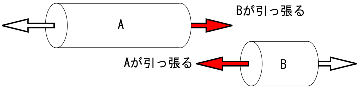
応力のイメージ

応力とは、

- 物質の内部に生じている力の大きさを表す物理量
- 単位面積あたりに働く内部の力

棒の長手方向にはどの位置で切断したとしても、
同一の応力が働いていることに注意

$$[\text{応力}] = \frac{[\text{力}]}{[\text{面積}]} = \frac{[N]}{[m]^2} = [\mathrm{Pa}]$$



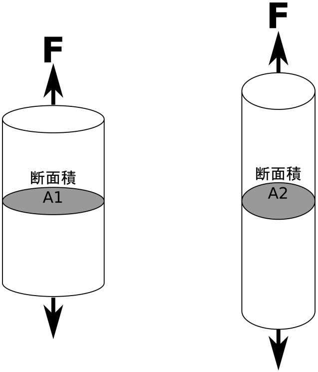
$$\text{応力} = \frac{\text{力}}{\text{面積}}$$

伸長応力 σ

伸長時に働く応力は、一般に、ギリシア文字の σ と表記

$$\sigma = = \frac{\text{与えた力}}{\text{断面積}} = \frac{F}{A}[\mathrm{Pa}]$$

- F は外部からの外力
- A は内部の断面積



$\sigma_1 = \frac{F}{A_1}$ $\sigma_1 < \sigma_2$ $\sigma_2 = \frac{F}{A_2}$

同一の外力でも

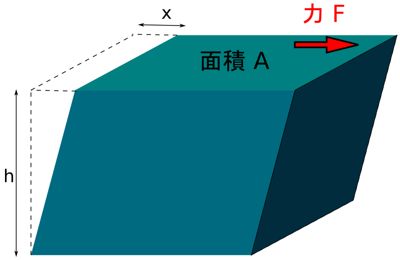
- 断面積が小さくなれば、
- 反比例して応力は増加

せん断応力 τ

- 互いに向かい合う同じ大きさの力である偶力 F を作用
- せん断の場合は、応力を τ と表記

$$\tau = \frac{\text{与えた力}}{\text{働かせた面積}} = \frac{F}{A}[\mathrm{Pa}]$$

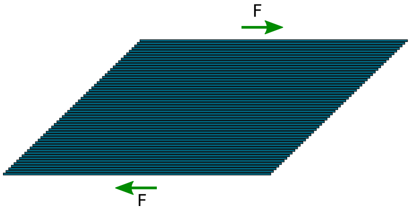
力を働かせた上面の面積が
A であることに注意



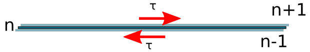
せん断応力のイメージ

- サンプルの厚さ方向には、
  - どの位置であっても同一のせん断応力が作用
  - どの位置で切断したとしても同一の偶力が作用
- トランプのカードが重なったデッキを想像
  - デッキの間に挟まったカードは、
  - 一枚上のカードと下のカードによって応力を受ける

一枚の面積がAであるトランプデッキの
上面に力Fを働かせると、偶力が生じる。



n番目のカードに着目すると、
上下のカードとの間に応力τ



$$\tau = \frac{F}{A}$$

弾性体の力学モデル

ここまで刺激と応答の例として使ってきた弾性体を、物質として評価する方法について考えてみましょう。

ここで目指すこと

- 弾性体の力学的な応答を、イメージしたい。
  - 分かりやすいアナロジーでイメージする。
  - 絵として理解したい。
- 異なる物質を定量的に評価したい。
  - 共通な性質を見出す。
  - 力学的な応答を数式として力学モデルとする。

弾性体の力学応答を書き表すことが出来る力学モデルを数式として表すことで、「異なる物質を定量的に比較」できるようになることを目指すわけです。

バネの力学的な振る舞いを表すフックの法則

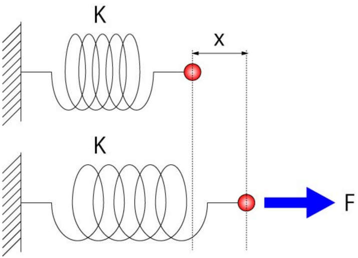
- これまでの経験から、弾性体はバネのように取り扱えることが知られています。
- バネの力学的な振る舞いには、イギリスの物理学者 Robert Hooke が見出した「フックの法則」と呼ばれる以下の関係があることがわかっています。

「フックの法則」

- バネの伸びと力は比例

$$力 = 比例定数 \times 変位量$$

$$F(x) = kx$$



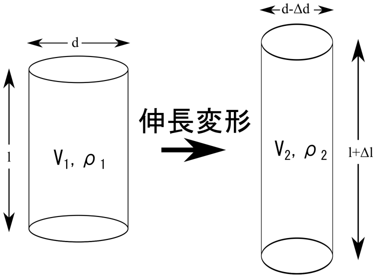
弾性体の力学モデル

伸長変形の力学モデルは、フックの法則に従う形で、

伸張変形の力学モデル

- 変形ひずみ ε と比例して、
- 伸長応力 σ が生じ、
- 比例定数が引張弾性率 E

$$\sigma = E\varepsilon$$



- ひずみは無次元量なので、
- 引張弾性率 E は伸長応力 σ と同じ組立単位 $[\mathrm{Pa}]$

せん断変形の力学モデル

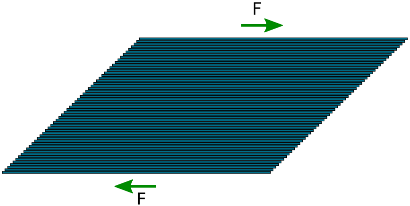
せん断変形の力学モデル

$$\text{せん断応力} = \text{せん断弾性率} \times \text{せん断ひずみ}$$

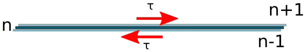
$$\tau = G\gamma$$

比例定数は、せん断弾性率と呼ばれ、$G[Pa]$

一枚の面積がAであるトランプデッキの
上面に力Fを働かせると、偶力が生じる。



n番目のカードに着目すると、
上下のカードとの間に応力τ



$$\tau = \frac{F}{A}$$

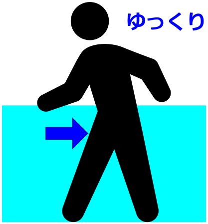
流れるという性質

液体は、変形されたら元には戻れない $\Leftrightarrow$ 「流れる」

流れるという性質

- コップの中ではじっとしている。
- 変形を与えると流れる
    - 元には戻らない。
    - 変形を止めれば、応力も消失
- 応答を見るのが困難
    - 変形を続けながら応力を測る
    - 液体内部の変形と応力を見積る
- 液体の評価
    - その形状を維持しやすい
      「せん断変形」

液体の性質を直感的に理解



プールでの水中歩行の例

液体が生じる力を直感的に理解するために、プールでの水中歩行を考えてみます。

- ゆっくりと歩いて移動（上の図）
  - 受ける抵抗はそれほど大きくない。
- 走って速く移動（下の図）
  - 速く歩こうとすると、とたんに水の抵抗は大きくなります。

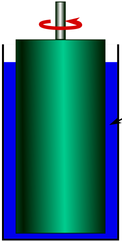
液体の性質

変形させる速度が変わると、生じる力も変わる。

ニュートンの法則

古典力学の土台を築いたニュートンが以下を導出。

- 流れのせん断応力 τ と
- そのせん断速度 $\dot{\gamma}$ との間に
- 比例関係を見出している
- 右図の円筒形の測定装置で、
  - 液厚 h
  - 回転速度 v



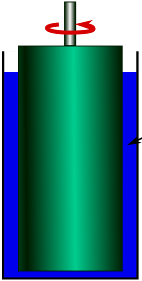
ニュートンの法則

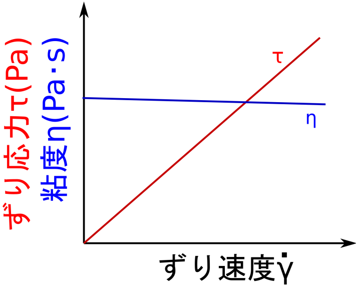
$$\text{せん断応力} = \text{比例定数} \times \text{せん断速度}$$

$$\tau = \eta\dot{\gamma}$$

比例定数が、物質の流れ易さを表す「粘度」 η

ニュートンの法則





ニュートンの法則

$$\text{せん断応力} = \text{比例定数} \times \text{せん断速度}$$

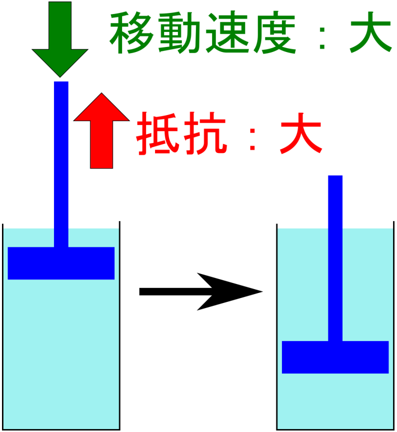
$$\tau = \eta\dot{\gamma}$$

比例定数が、物質の流れ易さを表す「粘度」 η

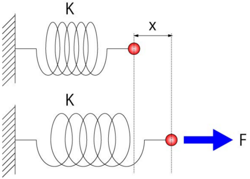
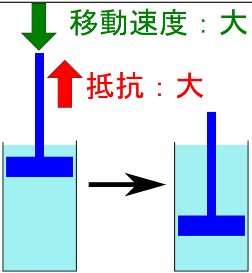
液体の力学モデル

液体のモデル

- 液体の振る舞いを表すモデル
- 右図のダッシュポット
- イメージとしては、水鉄砲
- 速くピストンを動かすと、抵抗が大。



力学モデルのまとめ

固体のモデル	液体のモデル
応力はひずみに比例 応力 = 弾性率 × ひずみ	応力はひずみ速度に比例 応力 = 粘度 × ひずみ速度
比例定数が弾性率 弾性率の単位は、[Pa]	比例定数が粘度 粘度の単位は、[Pa·s]
	

まとめ

この章では、固体と液体という基本的な物質のふるまいを書き表す一番単純なモデルについて、説明を進めました。

- 刺激と応答を表すために、「ひずみと応力」を使うことで力学モデルが書けること
- 固体の力学モデルが、「ひずみ」に比例すること
- 液体の力学モデルが、「ひずみ速度」で表されること