粘弾性の基礎

佐々木 裕[1]

東亜合成株式会社

[1]hiroshi_sasaki@mail.toagosei.co.jp

Outline

この章でのお話

この章では、いよいよレオロジーの主たる対象である粘性と弾性を併せ持った粘弾性という性質についてです。

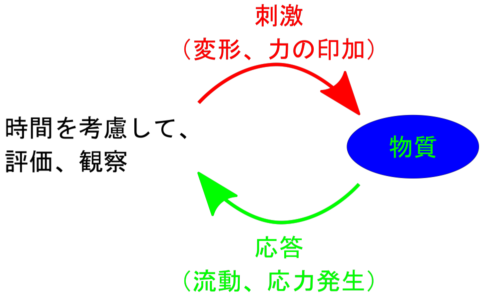
- 粘性と弾性についての再確認
  - 固体と液体の応答について振り返り、
  - その組み合わせとして粘弾性
- 粘弾性のモデル化
  - 粘弾性の単純なモデルをつくって、
  - 応力緩和と緩和時間
- 少しだけ実事象に近づけると
  - 複数の緩和時間を一般化マックスウェルモデル
  - 応力緩和で見た固体と液体

1. 粘性と弾性についての再確認
   - 固体と液体の応答について
   - 実事象は複雑
   - 粘弾性について考えてみましょう
2. 粘弾性のモデル化
   - 粘弾性の単純なモデル
   - 応力緩和
   - 緩和時間
3. 少しだけ実事象に近づけると
   - 複数の緩和時間
   - 一般化マックスウェルモデルについて
   - 応力緩和で見た固体と液体

レオロジーのやり方の再確認

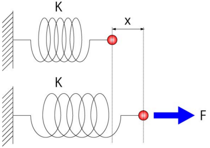
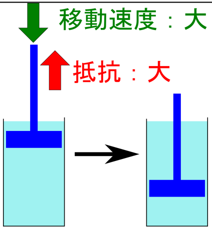
レオロジーのやり方

レオロジーとは、物質に刺激を与えてその応答を評価観察することで、その特性を評価できるのでした。
ここでは、物質の力学的な応答である弾性と粘性について検討を進めます。



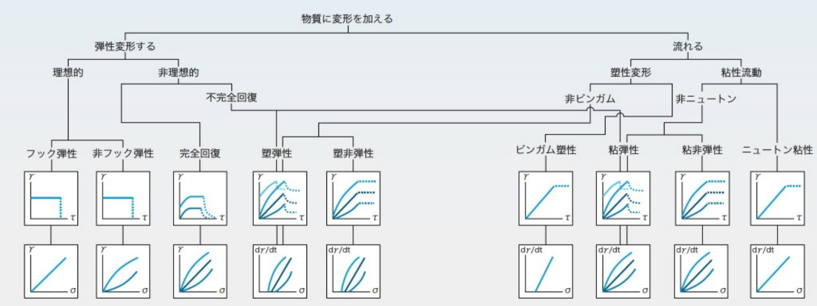
- 力学的な刺激
  - 外力による物質の変形
- 変形の結果として
  - 応力が発生
- 弾性と粘性

固体と液体の応答について

固体のモデル	液体のモデル
応力は**ひずみに比例** 応力 = 弾性率 × ひずみ	応力は**ひずみ速度に比例** 応力 = 粘度 × ひずみ速度
比例定数が弾性率 弾性率の単位は、[Pa]	比例定数が粘度 粘度の単位は、[Pa·s]
 	
力の釣り合い	**時間の因子が重要**

各種の応答特性の分類

- 図の左側が弾性応答
- 右側が流動特性
- 単純に二分されるわけでもなく、粘性と弾性を併せ持ったものが多く存在。



Nature 1942 v149-3790, p702

粘弾性について

粘弾性とは？

- 液体の流れる性質「粘性」と、
- 固体の変形する性質「弾性」を
- 合わせ持つ複雑な性質が、
- 「粘弾性」という事になります

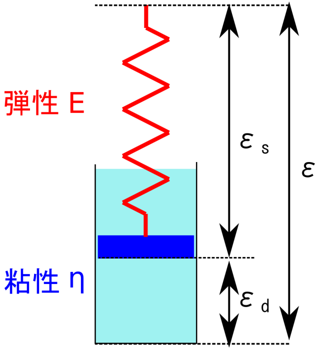
単純に考えて、

- 弾性を表すバネを用いたモデル
- 粘性を表すダッシュポットを用いたモデル
- 2 つを組み合わせたモデル

マックスウェルモデル

マックスウェルモデルとは

- 弾性を表すバネと、
- 粘性を表すダッシュポットを、
- 直列に連結したモデル。
- 外部からの刺激に対して、
- それぞれのユニットが、
  錬成して応答



マックスウェルモデル

マックスウェルモデルとは

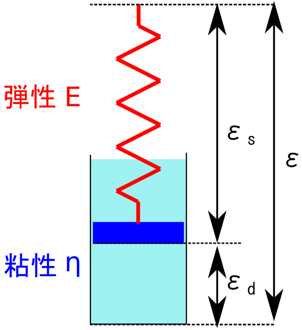
- 弾性モデル

$$\sigma_s(t) = E\varepsilon_s(t)$$

- 粘性モデル

$$\sigma_d(t) = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_d(t)$$

- 直列に連結だから、
    - 応力は共通
    - ひずみはそれぞれの和



$$\begin{cases} \sigma = \sigma_s = \sigma_d \\ \varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d \end{cases}$$

マックスウェルモデルの方程式

$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$ を微分して、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_d$$

一方、弾性モデルの $\sigma_s(t) = E\varepsilon_s(t)$ を微分して、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma = E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_s$$

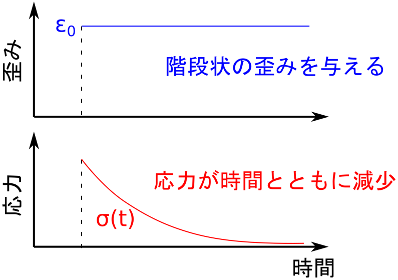
これらを、粘性モデルの $\sigma_d(t) = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_d(t)$ に代入して、以下の微分方程式として、マックスウェルの方程式を得る。

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma}{\eta}$$

応力緩和

マクロには

- 物質に、（瞬間的に）ひずみを与えて、
- その状態に維持。
- 応力が次第に減少。



ミクロには

- 居心地のいい状態にいた粒子が、突然、居心地が変化。
- 少しずつ、居心地を改善していく。
- 局所的な応力が消失。

マックスウェルモデルで応力緩和を

数式展開（途中まで）

応力緩和ではひずみ一定（ひずみの微分が 0）なので、
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon = 0$ をマックスウェル方程式に代入して、

$$\frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma}{\eta} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\frac{E}{\eta}\sigma$$ （上式の第一項を右辺に移行）

$$\int \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}\sigma = -\frac{E}{\eta}\int \mathrm{d}t$$ （変数を振り分けてから、両辺を積分）

$$\ln\sigma = -\frac{E}{\eta}t + C$$ （**積分の公式**に従い、積分定数を追加）

マックスウェルモデルで応力緩和を

数式展開（続き）

$t=0$ での初期応力を σ_0 とすると、$C = \ln \sigma_0$ となり、

$$\ln \sigma = -\frac{E}{\eta} t + \ln \sigma_0$$

$$\ln \sigma - \ln \sigma_0 = -\frac{E}{\eta} t$$

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = -\frac{E}{\eta} t$$ （対数の引き算は、真数の割り算）

対数を指数に変換して、$\tau = \dfrac{\eta}{E}$ と書き換えて、

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

応力緩和の挙動

指数関数的減少とは？

- 下式をグラフに表すと、右図となる。

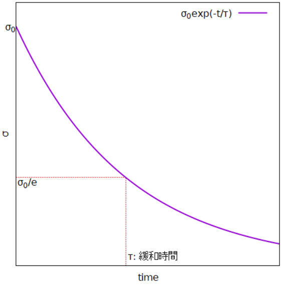
$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

- 時間経過に伴い応力が減少し $t = \tau$ において

$$\sigma(\tau) = \sigma_0 \exp(-1) = \frac{\sigma_0}{e}$$

緩和時間とは、

時間の次元を持つ τ は、初期の $\frac{1}{e}$ となる時間



緩和時間

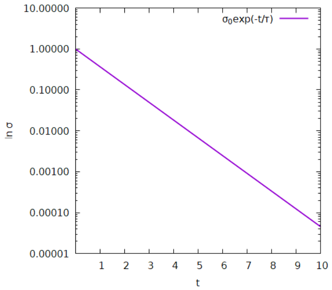
$$(\text{緩和時間})\ \tau = \frac{\eta}{E}\ \left(\frac{\text{粘度}}{\text{弾性率}}\right)$$

- 緩和時間とは
  - 弾性モデルにおける弾性率 E の単位は Pa、
  - 粘性モデルにおける粘度 η の単位は Pa·s、
  - その比である τ は時間の次元 [T] を持ち、緩和時間と呼ばれる。
  - 緩和時間とは、物質のひずみに対する力学応答が、指数関数的に減少するさまを表す特徴的な時間。
- 緩和時間の振る舞い
  - 弾性応答の性質を表す弾性率に反比例し、
  - 粘性応答の度合いを表す粘度に比例する。

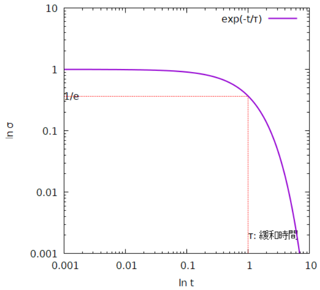
緩和挙動のイメージ

プロットのヒント

- 軸のスケールで見た目のイメージは変る。



片対数グラフ：傾きが緩和時間に対応

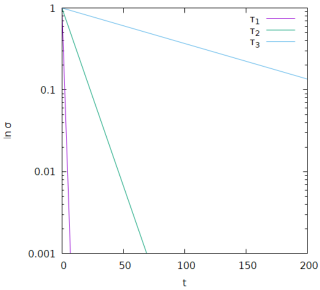


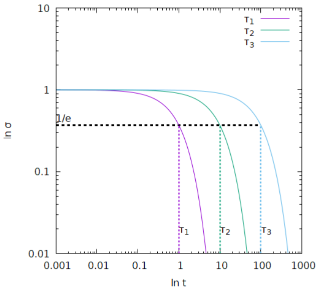
両対数グラフ：緩和時間近傍で応力が急激に低下

緩和時間が異なると

緩和時間の異なるものを比較

- 軸のスケールで見た目のイメージは変る。





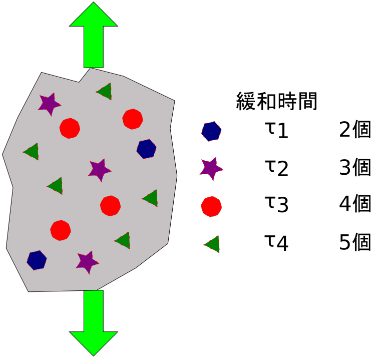
片対数グラフ：傾きが緩和時間に対応

両対数グラフ：緩和時間近傍で応力が急激に低下

1. 粘性と弾性についての再確認
   - 固体と液体の応答について
   - 実事象は複雑
   - 粘弾性について考えてみましょう
2. 粘弾性のモデル化
   - 粘弾性の単純なモデル
   - 応力緩和
   - 緩和時間
3. 少しだけ実事象に近づけると
   - 複数の緩和時間
   - 一般化マックスウェルモデルについて
   - 応力緩和で見た固体と液体

複数の緩和時間

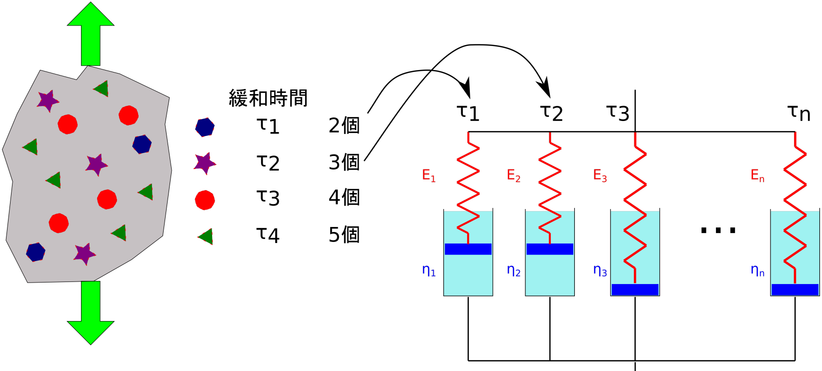
- 実際の物質の内部は、大抵の場合、均一とは言えないことが多い。
- その結果として、マクロには複雑な緩和挙動を示す。
- 仮想的に、内部に複数の緩和時間を考えよう。
- 右図のようにモデル化できる。



複数のマックスウェルモデル

一般化マックスウェルモデル

- それぞれの緩和時間に対応するように、複数のマックスウェルモデルを想定し、
- すべてを、並列に連結。



一般化マックスウェルモデルの考え方

- マックスウェルモデルを並列に連結したのだから、
  - 応力はそれぞれのものの総和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{0,i} \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)$$

  - ひずみ ε はそれぞれに共通なので、両辺を除して、

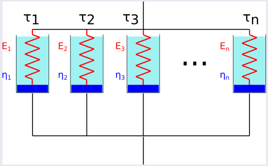
$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{0,i}}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)$$

$$\therefore\ E(t) = \sum_{i=1}^{n} E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)$$

- 結局、緩和時間の異なるそれぞれのモデルごとの、弾性率の緩和の総和とかける。

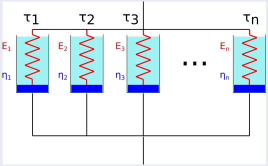
緩和のイメージ

初期状態

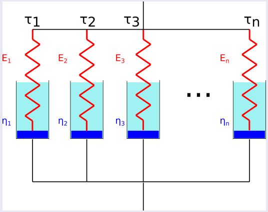


緩和のイメージ

初期状態

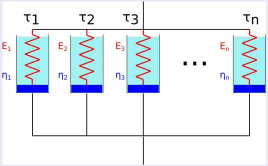


変形直後

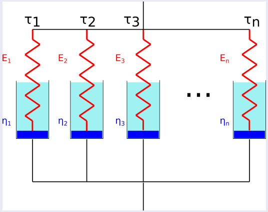


緩和のイメージ

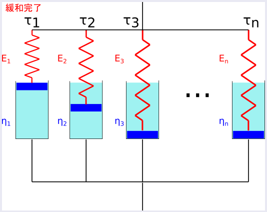
初期状態



変形直後

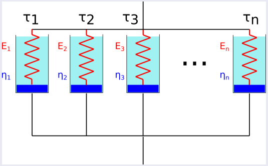


$t > \tau_1$ 経過後

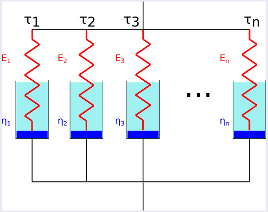


緩和のイメージ

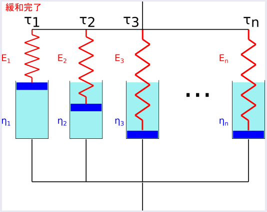
初期状態



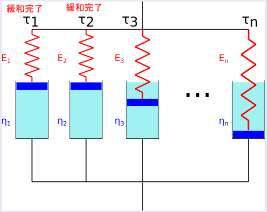
変形直後



$t > \tau_1$ 経過後



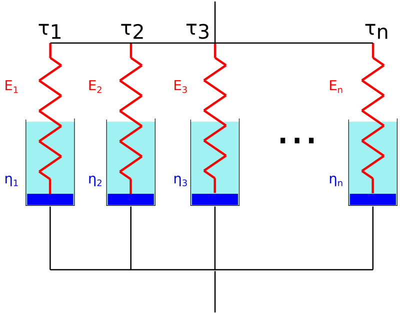
$t > \tau_2$ 経過後

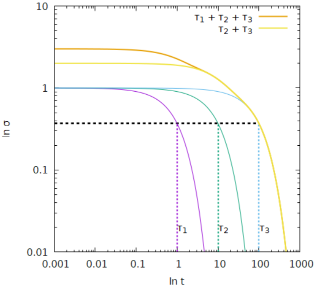


緩和のプロット

一般化マックスウェルの緩和挙動

- 個々のマックスウェルモデルの緩和挙動の和となる。
- 仮に緩和強度が同一とすると、右図のように和となる。
- 時間経過に従い、順次緩和。

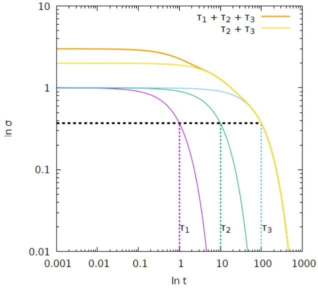


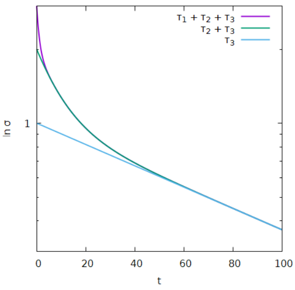


緩和のプロット

一般化マックスウェルの緩和挙動

- 個々のマックスウェルモデルの緩和挙動の和となる。
- 仮に緩和強度が同一とすると、右図のように和となる。
- 時間経過に従い、順次緩和。

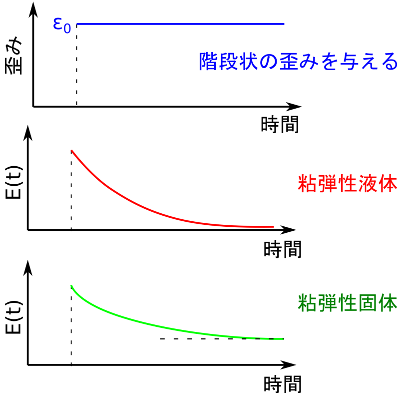




応力緩和で見た固体と液体

粘弾性体の特徴

- ステップひずみの
- 長時間の緩和において、
- $E \to 0$
  流動する粘弾性液体
- 固体は緩和しない成分が残存



まとめ

- 粘性と弾性についての再確認
  - 固体と液体の応答について振り返り、
  - その組み合わせとして粘弾性
- 粘弾性のモデル化
  - 粘弾性の単純なモデルをつくって、
  - 応力緩和と緩和時間
- 少しだけ実事象に近づけると
  - 複数の緩和時間を一般化マックスウェルモデル
  - 応力緩和で見た固体と液体