この章の内容

この章では、「レオロジーをはじめる前に」として、レオロジーを理解するために必要となる準備を行っていきます。具体的には、数学及び物理の基本となるような考え方についての確認から手を付けていきます。

以下に、この章で議論する内容について簡単にまとめました。

- 数学的な事項の確認
  - 数学的に書き表すときに基本となる「関数」について
  - 事象を単純化して考えるときに重要な「線型性」
- 物理的に考えるときに必要になること
  - 物理モデルと線形性
  - 物理モデルを理解するために、「量」、「次元」、「単位」

1　数学的な事項の確認から

具体的なレオロジーの議論に入る前に、これからの議論に必要となる数学の基礎的な事項について確認していきましょう。ここでは、それほど難しいものを考えているわけではありません。レオロジーを理解するために、どうしても必要となる中学から高校レベルの基本的なことを思い出していただくことになります。

具体的には、「関数と線型性」ということについて少しずつイメージを明確にしていくようにしましょう。

1.1　関数について

1.1.1　直感的理解

まず、関数を直感的に理解することから始めます。

関数とは？

- ある変数 x に依存して決まる出力 y を決める方法（右上）
- 入力 x に対して出力 y を与える変換装置（ブラックボックス）のようなもの（右下）

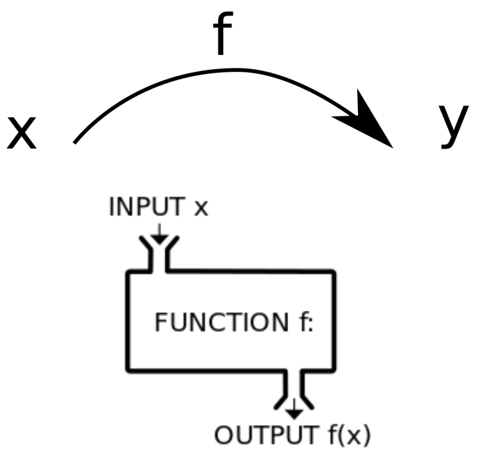

図 1 関数とは

function

関数とは、2 つの変数 x と y があり、入力を x で表したときに、その出力 y を決定する規則というようなイメージと捉えることができます。一般に、関数は、英語の function の頭文字を使って f で表され、

どの変数を入力として用いている関数であるかをカッコの中に変数を書くことにより示します。

$$y = f(x)$$
$$\text{出力} = \text{関数}\left(\text{入力}\right)$$

関数の役割を考えてみると、入力を変換装置に入れた結果として出力が現れるわけですから、入力と出力との間の関係を表していると考えることもできます。

1.1.2 関数と写像

また、関数というのは、数の集合に値を取る写像の一種と考えることもできます。

定義域と呼ばれる左の集合から、値域となる右の集合への射影を行う方法が、関数ということになります。

集合と関数

- 左の集合（定義域）から
- 右の集合（値域）へ
- 射影する方法が関数

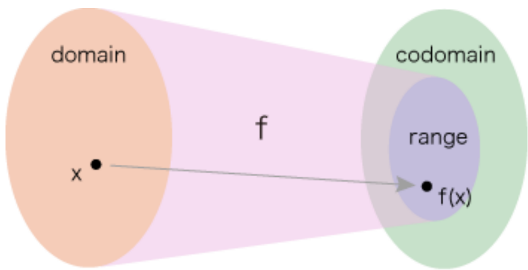

図 2 関数と写像

function_2

1.1.3 グラフとは

グラフとは、入力と出力との関係を平面図[*1]に示したものであり、視覚的にその関係を理解しやすくしたものと考えることができます。

具体的には、入力 x に対応して決まる出力の点を平面上にたくさん書き込んで、それを連続的に（直線または曲線で）つないだものがグラフとなります。

関数を表すグラフ

- 横軸が入力
- 縦軸が出力
- 関数の値を連続的に

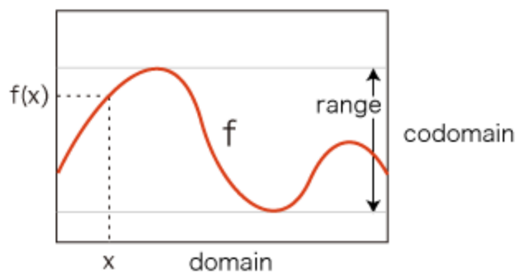

図 3 関数とグラフ

function_3

図 2 の右に示した集合間の写像を二次元のグラフに表すと、図 3 のように値を決める赤い曲線が関数を表すというイメージとなります。このグラフに表した関数の形を見ることで、入力と出力との関係を直感的に理解することができます。

[*1] 本当は、二次元とは限らずに多次元空間で表したグラフも使われていますが、直感的な理解は平面図にまさるものはありません。

1.2　線型という意味を理解しよう

1.2.1　線型とは？

線型という言葉を直感的にイメージすると、グラフに表した時に原点を通る直線となるような性質と捉えることができます。

数学的にもう少しだけきちんというと、関数などの演算（写像）f が以下に示した 2 つの性質を満たすときに、f のそのような性質を線型性と呼ぶことになります。

線型を表す性質

- 加法性：任意の x, y に対して、
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
- 斉次性：任意の x, a に対して、
$$f(ax) = af(x)$$

線型性を示す関数はたくさんありますが、以下のように表される一次方程式が代表的なものとなります[*2]。

$$y = ax$$

これは、入力の大きさが二倍になれば、出力も二倍になるという比例の関係を表しています[*3]。また、加法性を利用して、小学校の応用問題としての旅人算[*4]にも使われます。

1.2.2　線型性の意味

では、線型性が成立することで何が嬉しいのでしょうか。

小学校レベルの簡単な問題を考えてみましょう。「水道の栓を開けて、浴槽に水を溜めています。5 分間流して、100L の水が溜まりました。」このとき、「1 分間流したときには、何 L 溜まっていたでしょう？」と聞かれたとすると、比例の関係から 1 分 $\times$ $100L/5$ 分 $= 20L$ と答えることができ、これは、**過去を推定**していることになります。同様に、「10 分では、何 L 溜まるでしょう？」では、**未来のことを予測**することができます[*5]。

また、「浴槽に二つの蛇口から水を溜めていきます。A という蛇口からは 1 分間で 20 L、B という蛇口からは 5 分間で 150 L の水を貯めることができます。両方の蛇口から同時に水を溜めたとき、10 分間では何 L の水が溜まるでしょう？」というような問題でも、加法性と斉次性を利用すれば簡単に解くことができます。

すなわち、線型性が成立する（と仮定する）ことで、**事象を重ね合わせながら過去や未来の値を決めることが容易にできるわけです**。

[*2] 定数項が入った $y = ax + b$ は同様に直線関係を表しますが、このままでは斉次性が成り立たないことに注意してください。なお、$y' = y - b$ と変数変換すれば、$y' = ax$ となり線型となります。

[*3] 比例の関係を式に表すという授業は、今は小学校 5 年生で習っているようです。

[*4] 例えば、「A 君と B 君が 3km 離れた地点から向かい合って同時に出発しました。A 君は毎分 30m、B 君は毎分 70m で歩いたとすると、二人が出会うのは出発してから何分後ですか。」というような問題です。

[*5] これは、暗黙のうちに斉次性を利用していることになります。

線形性の意味

- 比例の関係を利用して、
  - 過去を推定。
  - 未来を予測。
- 加法性と斉次性を利用して、
  - 事象を重ね合わせて、推定や予測。

2　物理的に考えるときに必要になること

2.1　物理モデルと線型性

続いて、物理モデルという言葉について考えてみましょう。

2.1.1　物理モデルとは

なお、ここまでにもモデルという言葉は特別に定義することなく使ってきましたが、「事象や理論の成り立ちを説明するための簡単で理解しやすい概念」と解説されることもよくあります。例えば、「地動説」を説明するために、太陽の周りを惑星が回るという「太陽系モデル」が提案され、経済活動においても利益を最大化するためにいろいろな「ビジネスモデル」が考案されるわけです。また、「モデルとは、対象とする事象を簡略化して、その本質を表したもの」という表現をされることもあります。

そして、対象を物理現象にとったとき、「物理モデル」という表現が使われます。我々の議論においては、レオロジーに関連する理論を説明するために使える考え方やイメージ図として物理モデルを利用して理解を深めていくわけです。そして、定量的な解析を行うために、数学を応用した「数理モデル」という考え方で、上述のモデル化で使った概念を数式表現へと落とし込むことがよく行われています。

モデルについて

- モデルとは
  「事象や理論の成り立ちを説明するための簡単で理解しやすい概念」
- 様々なモデル
  - 地動説を説明する「太陽系モデル」
  - 経済活動にかかわる「ビジネスモデル」
  - 物理現象を対象とする「物理モデル」
  - 数学を応用した「数理モデル」

2.1.2　身の回りの事象と線形性

我々の身の回りに起こっている実際の事柄は、非常に複雑な場合がほとんどです。これを解析しようとしても、評価したい出力（応答）も分かりづらいし、それ以前に入力も不明確だったりすることがよくあります。ところが、非常に都合のいいことに、入力が小さい場合には応答が線型で取り扱える場合が多いことが知られています。線型応答が期待できると加法性や斉次性が使えますから、入力が多種類となってもそれらが分割可能[*6] であれば、系の応答がそれらの重ね合わせになっていると考えることができます。そうすれ

[*6] ここでは、詳しくは説明しませんが、分割できるということは独立に起きている事柄ということになります。

ば、取り扱いたい事象の細かい部分を無視して単純化（近似）して理解することができます[*7]。

この関係を簡単にまとめると、以下のようになります。

身の回りの事象と線形性

- 実際の身の回りの現象
  - 非常に複雑な場合がほとんど。
  - 評価したい応答も分かり難い。
  - 入力すら不明確なときも。
- 線型現象であれば、取り扱いが容易。
  - 微小な刺激に対しては、線形応答が期待できることが多い。
  - 線形応答の重ね合わせで、事象を近似する価値は高い。

ここで、入力と出力の関係を見るときに大事なことを一つだけ。

入力が 1 のときの出力を意識してください。これは、比例定数を求めることにほかなりません。線型性が成り立っているのであれば、比例定数を調べることで物質の性質を容易に比較できることを後ほど示します。

2.2　物理モデルを理解するために、「量」、「次元」、「単位」

ここまでに、小中学校レベルで、数学の本当に基礎的な部分についての確認を行ってきました。

事象の関係性を式で表す関数という考え方から、入力と出力の単純な関係である線型性を再確認して、実際のややこしい身の回りの現象を線型として物理モデルへと近似していく流れを示してきました。

次に、物理的に考えるときに、とても大事になる基本的な考え方である、「量」、「次元」、「単位」という概念について少し振り返りましょう。

2.2.1　量とは

「量」と言う言葉は、広辞苑では「測定の対象となる、ものの大小や多少」とされています。これでは、少しわかりにくいので、日本工業規格 JIS を見てみると、「計測用語」についてまとめた JIS Z 8103 に、以下のように定義されています。

[*7] この感覚は、後ほど触れる「微分」や更にその応用である「テーラー展開」等の概念にもつながってきます。

量について

量　現象、物体又は物質の持つ属性で、定性的に区別でき、かつ、定量的に決定できるもの。

物理量　物理学における一定の理論体系の下で次元が確定し、定められた単位の倍数として表すことができる量。

工学量　複数の物理的性質に関係する量で、測定方法によって定義される工業的に有用な量。硬さ、表面粗さなど。

量の次元　ある量体系に含まれるある一つの量を、その体系の基本量を表す因数のべき乗の積として示す表現。

量体系　一般的な意味で、定まった関係が存在する量の集合。

単位　取決めによって定義され、採用された特定の量であって、同種の他の量の大きさを表すために比較されるもの。

すなわち、我々が物事の評価を行うときに、「定性的に考えて区別」するために、そして、「定量的に決定できる」ものが量となるわけです。そして、物理的に考えるときには、「(後で述べる)次元が決まって」、「定められた単位の倍数として表す」事ができなくてはいけないのです。また、工学的に物理的性質を考えるときにも、「測定方法によって定義」されなくてはいけません。

ですから、量というものを、次元と単位、そして、測定方法を定義しながら、議論することが必要となります。

2.2.2　量の性質

量の性質について、もう少し考えてみましょう。量の演算を以下のように捉えることができます。

量の演算

- 同じ種類の量同士は和と差の演算が定義可能
  - 結果は同じ種類の量
  - 異なる種類の量の和や差には意味がない
- 同じ、あるいは、異なる種類の量同士でも積や商が定義できることがあり、
  - 長さ同士の積は面積
  - 長さの時間による商は速さ

同じ種類の量であれば、足したり引いたりすることでその大きさが変化するし、ちがう種類の量であれば大きさの意味が違うので、和や差をを定義することができないわけです。

異なる量の積や商については、次に述べる次元という概念を使うと簡単に理解することができるようになります。

2.2.3　量の次元について

量の次元は、先程示した定義では「ある量体系に含まれるある一つの量を、その体系の基本量を表す因数のべき乗の積として示す表現。」と書かれていましたが、これではちょっとなんのことかよくわかりません。

一旦、直訳っぽく言葉を足して言い換えてみると、「何らかの関係が成り立つ量の集合において、一つの量を、その関係の基本となる量の種類とそのべき乗だけで表す考え方」とでも表現することになります。まだ、わかりにくいですね。

もっと、直感的には、

複合的なイメージとしての「ある量」を、「基本量の積と商で表す」考え方のこと。

とでもなりますか。

具体的に行きましょう。国際量体系（ISQ: International System of Quantities）という体系に従って、表のように７つの基本量が定められています。

表 1 国際量体系での７つの基本量

tab:kihon

基本量	次元の記号	SI 単位	単位の記号
長さ	L	メートル	m
質量	M	キログラム	kg
時間	T	秒	s
電流	I	アンペア	A
熱力学温度	Θ	ケルビン	K
物質量	N	モル	mol
光度	J	カンデラ	cd

2.2.4 次元の関係式

量 Q の次元は、角括弧で括って [Q] で表記することになっています。

このとき、長さという基本量に関わる量体系は、下式のようなものとなり、

$$\begin{cases} [\text{面積}] = [\text{長さ}]^2 = [\mathrm{L}^2] \\ [\text{体積}] = [\text{長さ}]^3 = [\mathrm{L}^3] \end{cases}$$

力学に関係する物理量を表す量体系は異種の基本量の組み合わせで、下式のようになります。

$$\begin{cases} [\text{速さ}] = [\text{長さ}][\text{時間}]^{-1} = [\mathrm{LT}^{-1}] \\ [\text{加速度}] = [\text{長さ}][\text{時間}]^{-2} = [\mathrm{LT}^{-2}] \\ [\text{力}] = [\text{質量}][\text{長さ}][\text{時間}]^{-2} = [\mathrm{MLT}^{-2}] \\ [\text{仕事}] = [\text{質量}][\text{長さ}]^2[\text{時間}]^{-2} = [\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}] \end{cases}$$

ここで大事なのは、次元の関係式とは「定数係数を無視した等式として表すことで物理現象の成り立ちを表している」ということになります。

2.2.5 単位について

最後に、単位です。これは、簡単に言えば、「取決めによって定義された同種の物理量の大きさを表すため」に使われるものです。現在、最も広く使われている（取決めによって定義された）単位系は、国際単位系（SI）[*8]であり、表 1 に示した次元の基本量に対応した７つの基本単位が定められています。

[*8] 仏: Système International d’Unités、英: International System of Units、フランス語の略称なので SI となる。

任意の物理量の値 Q は、その大きさを表す数値 n と単位 U との積として表されることになります。したがって、単位のとり方に依存して、数値は変更を受けることになります[*9]。

また、基本単位の組み合わせとして、固有の名称と記号で表される組立単位というものもあります。SI 組立単位としては、22 個ありますが、レオロジーに関連する主要なものを表 2 に列記します。

表 2 レオロジーで用いられる SI 組立単位の例

tab:kumitate

組立量	名称	記号	SI 基本単位による表現
周波数	ヘルツ (hertz)	Hz	s^{-1}
力	ニュートン (newton)	N	$m{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$
応力	パスカル (pascal)	Pa	$(N/m^2) = m^{-1}{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$
エネルギー	ジュール (joule)	J	$(N{\cdot}m) = m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$
粘度	パスカル秒	Pa·s	$m^{-1}{\cdot}kg{\cdot}s^{-1}$

長さを、その大きさを表す数値とその単位である m との積として表すように、例えば力は、組立単位である N と大きさを表す数値との積で表されることになります。

この章のまとめ

この章では、「レオロジーを始める前に」として、これからのレオロジーの説明のために必要となる最小限の数学及び物理的な事象についての確認から準備をはじめました。

- 数学的な事項の確認
  - 数学的に書き表すときに基本となる「関数」
  - 事象の単純化に重要な「線型性」
- 物理的に考えるときに必要になること
  - 物理モデルと線形性
  - 「量」、「次元」、「単位」

[*9] 本来は、SI 単位で表現する限りにおいては、その基本料を表す単位はユニークですので単位のとり方という問題は生じないのですが、実際問題としては、異なる単位を用いる場合も多々あります。例えば、時間の単位として「秒」で表して定数係数が大きすぎる場合は、「時」、「年」等も用いることもありますので、臨機応変に対応しましょう。

演習問題 1

内容を振り返るために、以下に示した文章例の中から適切な記述のものを複数選んでください。

(1) 関数とグラフを表す正しい言葉はどれでしょうか？

(a) 入力と出力との間の関係を表している変換装置のようなもの。

(b) 数の集合に値を取る写像の一種。

(c) ものの関係を表す数のこと。

(d) グラフとは、入力と出力との関係を視覚的に理解しやすくしたもの。

(2) 線型性と物理モデルを表す正しい言葉はどれでしょうか？

(a) 線形性とは、グラフに表した時に原点を通る直線となるような性質であり、比例の関係を表します。

(b) 線形性とは、放物線と呼ばれる曲線で表される性質であり、反比例の関係を表します。

(c) 物理モデルとは、「事象や理論の成り立ちを説明するための簡単で理解しやすい概念や模型」です。

(d) 我々の身の回りに起こっている実際の事柄は、非常に単純で線形で記述できる場合がほとんどです。

(e) 入力が小さい場合には応答が線型で取り扱える場合が多いことが知られています。

(3) 量について正しい記述を選んでください。

(a) 量とは、定性的に区別でき、かつ、定量的に決定できるものです。

(b) 同じ種類の量同士は「和と差」の演算が定義できて、結果は同じ種類の量となります。

(c) 異なる種類の量であっても、いかなる演算でもできます。

(d) 同じ、あるいは、異なる種類の量同士でも積や商が定義できる場合もあります。

(e) 長さ同士の積は、体積を表します。

(4) 次元について正しい記述を選んでください。

(a) 次元とは、注目する「ある量」が、どのような現象であるかを「基本量の積と商で表す」ような考え方といえます。

(b) 面積という量は、長さという基本量が掛け合わされることで、広さという現象を表しています。

(c) 次元とは、物質の性質を表す量のことです。

(d) 次元の関係式とは「定数係数を無視した等式として表すことで物理現象の成り立ちを表して」います。

(5) 単位について正しい記述を選んでください。

(a) 単位とは、「量の大きさを表すため」に特定の会社間で取り決めによって定義されたものです。

(b) 単位とは、「同種の物理量の大きさを表すため」に取り決めによって定義されたものです。

(c) 現在、最も広く使われている単位系は、国際単位系（SI）です。

(d) JIS と呼ばれる単位系は、日本で広く使われています。

(e) 任意の物理量の値 Q は、その大きさを表す数値 n と単位 U との積として表されることになります。

演習問題 2

以下の穴埋めを行ってください。

(1) 次元について

国際量体系に従って、表のように７つの基本量が定められています。レオロジーでよく使う四つの基本量を埋めてください。

基本量	次元の記号	SI 単位	単位の記号
(a)	L	メートル	m
(b)	M	キログラム	kg
(c)	T	秒	s
電流	I	アンペア	A
(d)	Θ	ケルビン	K
物質量	N	モル	mol
光度	J	カンデラ	cd

(2) 単位について

以下に示した組立単位について、穴を埋めてください。

組立量	名称	記号	SI 基本単位による表現
(e)	ヘルツ (hertz)	Hz	s^{-1}
(f)	ニュートン (newton)	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
(g)	パスカル (pascal)	Pa	$(N/m^2) = m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
(h)	ジュール (joule)	J	$(N \cdot m) = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
(i)	パスカル秒	Pa·s	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$

選択肢

1. 応力　2. 質量　3. 時間　4. エネルギー　5. 粘度
6. 周波数　7. 長さ　8. 熱力学温度　9. 力