1. A probléma

Egy hétfős társaságot szeretnénk egy apró – három sorban öt-öt székkel rendelkező – színház nézőterére leültetni. Ehhez mindannyijuk igényeit figyelembe kell venni:

- Anna nem ül Balázzsal egy sorba,
- Csanád Anna mellé szeretne ülni,
- Eszter Csanád mellé szeretne ülni,
- Anna nem ül a harmadik sorba,
- Ferenc Eszter elé ülne,
- Gábor Balázs elé ülne,
- Dezső csak az első sor szélére ül, továbbá
- nem ülhetnek hárman egymás mögött (egy oszlopban).

Tovább nehezíti a helyzetet, hogy az első sor második és harmadik széke, továbbá a második sor bal széle már foglalt.

2. Állapottér reprezentáció

A probléma egy-egy állapotát jellemezhetjük úgy, hogy külön-külön megadjuk, hogy a három sor öt-öt székének foglaltsága hogy alakul (foglalt volt-e már eleve, le tudtunk-e ültetni valakit oda a társaságból, vagy még szabad).

$$H = \{\text{Anna}, \text{Balázs}, \text{Csanád}, \text{Dezső}, \text{Eszter}, \text{Ferenc}, \text{Gábor}\} \cup \{\text{foglalt}, 0\}$$

ahol a 0 azt jelöli, hogy az adott szék sorsa még nem dőlt el (szabad).

2.1. Állapottér

Az állapottér a H halmaz elemeiből képzett 3×5-ös mátrixokból áll:

$$A \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,5} \end{pmatrix} : a_{1,1} \in H \wedge \cdots \wedge a_{3,5} \in H \right\}$$

Ahol $a_{s,o}$ megmutatja hogy az s. sor a o. oszlopának székére kit ültettünk (feltéve hogy nem volt eleve foglalt). A lehetséges állapotok halmaza szűkíthető, amennyiben megkötjük, hogy sorfolytonosan haladunk a helyek feltöltésében, azaz ha valamely sorban egy székhez már rendeltünk valakit a társaságból, akkor a megelőző sorban vagy ugyanezen sor balra lévő szabadon maradt székeihez már nem rendelhetünk senkit. Csak olyan mátrixot tekintünk állapotnak, amely olyan ültetési rendnek felel meg, mely mindenki kívánalmainak megfelel azok közül, akiket leültettünk, de még nem feltétlenül határoztuk meg mindenki ülőhelyét. A probléma operátorait úgy fogjuk meghatározni, hogy állapotból állapotot állítsanak elő. Ennek előnye, hogy az implementációból a kényszerfeltételek elhagyhatók és ezért ezek megfogalmazására sincs most szükség.

2.2. Kezdőállapot

A probléma kezdőállapota olyan ültetési rend, melyben a hétfős társaságból még senki sem szerepel, csak az eleve foglalt helyeket jelöljük meg:

$$kezdő = \begin{pmatrix} 0 & \text{foglalt} & \text{foglalt} & 0 & 0 \\ \text{foglalt} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3. Célállapotok halmaza

A probléma célállapota olyan ültetési rendnek megfelelő mátrix, melyben mindenkinek találtunk megfelelő helyet.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,5} \end{pmatrix} : \left| \{a_{1,1}, \dots, a_{3,5}\} \setminus \{\text{foglalt}, 0\} \right| = 7 \right\}$$

2.4. Operátorok

Az operátorok feladata egy újabb szék lefoglalása a hétfős társaság egyik tagja számára.

$$O = \{o_{s,i,n} : s \in \{1,2,3\} \wedge i \in \{1,2,\dots,5\} \wedge n \in H \setminus \{\text{foglalt}, 0\}\}$$

Amennyiben az $o_{s,i,n} \in O$ operátort alkalmazzuk, az azt jelenti, hogy az n nézőt a s. sorban az i. székre ültetjük.

2.4.1. Operátoralkalmazási előfeltételek

Az $o_{s,i,n} \in O$ operátor akkor alkalmazható egy $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,5} \end{pmatrix} \in A$ állapotra, ha a következő feltételek mindegyike együttesen teljesül:

- az s. sor i. széke még szabad
$$a_{s,i} = 0$$
- az s. sor i. székét sorfolytonosan követő helyekre még nem ültettünk senkit (persze ettől foglalt még lehet)
$$\bigwedge_{p=1}^{3} \bigwedge_{q=1}^{5} \Big((p > s \vee (p = s \wedge q > i)) \supset a_{p,q} \in \{\text{foglalt}, 0\} \Big)$$
- az n nézőnek még nem találtunk ülőhelyet
$$\bigwedge_{p=1}^{3} \bigwedge_{q=1}^{5} \Big(a_{p,q} \neq n \Big)$$
- ha tudjuk hol ül Balázs, akkor Annát nem ültetjük vele egy sorba
$$\bigwedge_{p=1}^{3} \bigwedge_{q=1}^{5} \Big(a_{p,q} = \text{Balázs} \wedge n = \text{Anna} \supset p \neq s \Big)$$
- ha tudjuk hol ül Anna, akkor Balázst nem ültetjük vele egy sorba
$$\bigwedge_{p=1}^{3} \bigwedge_{q=1}^{5} \Big(a_{p,q} = \text{Anna} \wedge n = \text{Balázs} \supset p \neq s \Big)$$
- ha tudjuk, hol ül Anna, akkor Csanád csak mellé kerülhet
$$\bigwedge_{p=1}^{3} \bigwedge_{q=1}^{5} \Big(a_{p,q} = \text{Anna} \wedge n = \text{Csanád} \supset p = s \wedge |q - i| = 1 \Big)$$
- ha tudjuk, hol ül Csanád, akkor Anna csak mellé kerülhet
$$\bigwedge_{p=1}^{3} \bigwedge_{q=1}^{5} \Big(a_{p,q} = \text{Csanád} \wedge n = \text{Anna} \supset p = s \wedge |q - i| = 1 \Big)$$
- ha tudjuk, hol ül Eszter, akkor Csanád csak mellé kerülhet
$$\bigwedge_{p=1}^{3} \bigwedge_{q=1}^{5} \Big(a_{p,q} = \text{Eszter} \wedge n = \text{Csanád} \supset p = s \wedge |q - i| = 1 \Big)$$

- ha tudjuk, hol ül Csanád, akkor Eszter csak mellé kerülhet

$$\bigwedge_{p=1}^{3}\bigwedge_{q=1}^{5}\left(a_{p,q}=\text{Csanád}\wedge n=\text{Eszter}\supset p=s\wedge|q-i|=1\right)$$

- Anna nem ülhet a harmadik sorba

$$n=Anna\supset s\neq 3$$

- ha tudjuk, hogy hol ül Eszter akkor Ferencet csak elé ültethetjük

$$\bigwedge_{p=1}^{3}\bigwedge_{q=1}^{5}\left(a_{p,q}=\text{Eszter}\wedge n=\text{Ferenc}\supset q=i\wedge p=s+1\right)$$

- ha tudjuk, hogy hol ül Fernec akkor Esztert csak mögé ültethetjük

$$\bigwedge_{p=1}^{3}\bigwedge_{q=1}^{5}\left(a_{p,q}=\text{Ferenc}\wedge n=\text{Eszter}\supset q=i\wedge p=s-1\right)$$

- ha tudjuk, hogy hol ül Balázs akkor Gábort csak elé ültethetjük

$$\bigwedge_{p=1}^{3}\bigwedge_{q=1}^{5}\left(a_{p,q}=\text{Balázs}\wedge n=\text{Gábor}\supset q=i\wedge p=s+1\right)$$

- ha tudjuk, hogy hol ül Gábor akkor Balázst csak mögé ültethetjük

$$\bigwedge_{p=1}^{3}\bigwedge_{q=1}^{5}\left(a_{p,q}=\text{Gábor}\wedge n=\text{Balázs}\supset q=i\wedge p=s-1\right)$$

- Dezső csak az első sor szélére ültethető

$$n=\text{Dezső}\supset s=1\wedge i\in 1,5$$

- a harmadik sor székére csak akkor ültethetünk valakit, ha előtte legalább egy szék üresen maradt

$$s=3\supset\bigvee_{j=1}^{3}\left(j<i\wedge a_{j,i}=0\right)$$

2.4.2. Operátor hatásdefiníció

Az $o_{s,i,n}\in O$ operátor hatásdefiníciója:

$$o_{s,i,n}\left(\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,5}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,5}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,5}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{3,1} & b_{3,2} & \dots & b_{3,5}\end{pmatrix}$$

$$b_{p,q}=\begin{cases}n & \text{ha } p=s\wedge q=i\\ a_{p,q} & \text{egyébként}\end{cases}$$