Universidade do Estado de Santa Catarina

ANN0001 Análise Numérica

Simulado para a Prova 4

Fernando Deeke Sasse

29 de novembro de 2025

Instruções gerais

- A prova é individual.
- A prova deve ser resolvida com o auxílio de calculadora.
- Todos os passos dos cálculos devem ser apresentados de forma legível e organizada.
- Utilize pelo menos quatro casas decimais nas respostas numéricas finais.

1. Resolva o sistema linear a seguir utilizando apenas o método de eliminação de Gauss *sem* qualquer tipo de pivotação. Mostre todas as operações elementares de linha realizadas.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 12. \end{cases}$$

2. Resolva o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss com pivotação parcial por linhas, indicando em cada passo quais linhas foram trocadas e qual é o pivô escolhido.

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

3. Para o sistema

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 + 0x_3 = 7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4, \\ 5x_1 - 1x_2 + 5x_3 = 6, \end{cases}$$

aplique o método de eliminação de Gauss usando pivotação parcial por linhas, com escalas.

(i) Calcule os fatores de escala de cada linha.

(ii) Em cada etapa, mostre como é escolhido o pivô usando a razão $|a_{ij}|/s_i|$.

(iii) Resolva o sistema até obter a solução por retrosubstituição.

4. Encontre a fatoração LU, no sentido de Doolittle (isto é, L com diagonal unitária), da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, use a fatoração $A = LU$ para resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix},$$

explicitando as etapas de solução dos sistemas triangulares $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine matrizes P, L e U tais que $PA = LU$, usando o esquema de Doolittle (diagonal de L igual a 1).

(ii) Utilize a fatoração $PA = LU$ para resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

6. Seja o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com

$$A = L + D + U,$$

sendo D é a parte diagonal de A, L a parte estritamente triangular inferior e U a parte estritamente triangular superior.

(i) Mostre como escrever o método de Jacobi-Richardson na forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}.$$

(ii) Expresse explicitamente a matriz de iteração B e o vetor $\mathbf{c}$ em função de D, L e U.

(iii) Escreva a fórmula componente a componente para $x_i^{(k+1)}$.

7. Considere novamente o método de Jacobi-Richardson para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(i) Explique por que o método de Jacobi pode ser interpretado como a resolução, em cada iteração, de um sistema em que apenas a diagonal de A é considerada implicitamente.

(ii) Compare, em termos conceituais, o método de Jacobi com o método de Gauss-Seidel, discutindo o uso de valores novos e antigos em cada iteração.

(iii) Discuta uma vantagem e uma desvantagem do método de Jacobi em relação a métodos diretos, como a eliminação de Gauss.

8. Aplique o método de Jacobi-Richardson para aproximar a solução do sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 3, \\ -2x_1 + 5x_2 = -1. \end{cases}$$

utilizando o vetor inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^T$.

(i) Escreva explicitamente a matriz de iteração B e o vetor $\mathbf{c}$.

(ii) Calcule $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$.

(iii) Compare o valor de $\mathbf{x}^{(3)}$ com a solução exata (que pode ser obtida por eliminação de Gauss) e estime o erro em norma infinito.

9. Considere o sistema

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15. \end{cases}$$

(i) Verifique (por inspeção) se o sistema é estritamente diagonalmente dominante por linhas.

(ii) Escreva as fórmulas de iteração do método de Jacobi para cada variável x_i.

(iii) Usando $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$, calcule apenas a primeira iteração $\mathbf{x}^{(1)}$ (duas casas decimais são suficientes).

10. Seja um método iterativo da forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c},$$

com matriz de iteração

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

(i) Calcule explicitamente os autovalores de B.

(ii) Determine o raio espectral $\rho(B)$.

(iii) Com base em $\rho(B)$, discuta se o método iterativo correspondente converge para qualquer vetor inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

11. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 4x_2 = 2. \end{cases}$$

(i) Escreva o sistema na forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, identificando A e $\mathbf{b}$.

(ii) A partir da decomposição $A = D - (L + U)$, construa o método de Jacobi-Richardson para esse sistema na forma
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c},$$
determinando explicitamente a matriz de iteração B.

(iii) Calcule a norma de B induzida pela norma $\|\cdot\|_1$ (norma da coluna).

(iv) Calcule a norma de B induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$ (norma da linha).

(v) Use os valores obtidos para discutir se é possível garantir a convergência do método de Jacobi-Richardson apenas a partir das desigualdades $\|B\|_1 < 1$ ou $\|B\|_\infty < 1$.

12. Considere um método iterativo de Jacobi para o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e suponha que A possa ser decomposta como $A = L + D + U$.

(i) Enuncie o critério de convergência baseado na dominância diagonal por linhas para o método de Jacobi.

(ii) Enuncie um critério análogo baseado na dominância diagonal por colunas.

(iii) Explique por que esses critérios são suficientes (mas não necessários) para a convergência.

13. Analise a convergência do método de Jacobi para o sistema

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 7. \end{cases}$$

(i) Escreva a matriz de coeficientes A do sistema.

(ii) Verifique se A é estritamente diagonalmente dominante por linhas.

(iii) Verifique se A é estritamente diagonalmente dominante por colunas.

(iv) Conclua, com base nos critérios das linhas e das colunas, se o método de Jacobi converge para qualquer vetor inicial.

14. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 1. \end{cases}$$

(i) Escreva a matriz de coeficientes A.

(ii) Calcule os coeficientes de Sassenfeld β_1, β_2 e β_3 na ordem natural das equações.

(iii) Verifique se $\max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} < 1$ e conclua sobre a convergência do método de Gauss-Seidel para esse sistema.

(iv) Discuta se a mudança de ordem das equações poderia melhorar ou piorar os coeficientes de Sassenfeld.