Sofia Soares e Elane Souza - P3 ANN

1.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$f(x)$	0,0	0,0998	0,1987	0,2855	0,3794	0,4894	0,5746	0,6442	0,7351

i) Diferenças finitas avançadas de ordem $O(h^2)$ com Taylor:

$$f''(x) = \frac{2f(x) - 5f(x+h) + 4f(x+2h) - f(x+3h)}{h^2} + O(h^2)$$

Aplicando essa fórmula para $f''(0)$, com $h = 0,1$, temos:

$$f''(0) = \frac{2f(0) - 5f(0,1) + 4f(0,2) - f(0,3)}{0,01} =$$

logo $f''(0) \approx \boxed{1,03}$

ii) Utilizando diferenças finitas centrais de ordem $O(h^2)$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Aplicando essa fórmula para $f'(0,5)$ com $h = 0,1$, temos:

$$f'(0,5) = \frac{f(0,6) - f(0,4)}{0,2} = \frac{0,5746 - 0,3794}{0,2} =$$

logo $f'(0,5) \approx \boxed{0,976}$

iii) $h_2 = h_1/2$ onde $h_2 = 0{,}1$ e $h_1 = 0{,}2$

$G = \dfrac{2^p g_1(h_1/2) - g_2(h_1)}{2^p - 1}$ onde em $g(h)$ aplicamos diferenças finitas centrais

como queremos $f'(0{,}4)$ nas diferenças centrais temos: (com $O(h^2)$)

$$g(h) = \frac{f(0{,}4+h) - f(0{,}4-h)}{2h}$$

- Para $h_2 = \frac{h_1}{2} = 0{,}1$ temos $g_1(h_1/2) = \dfrac{f(0{,}5) - f(0{,}3)}{0{,}2} = 1{,}0195$
- Para $h_1 = 0{,}2$ temos $g_2(h_1) = \dfrac{f(0{,}6) - f(0{,}2)}{0{,}2} = 0{,}93975$

Substituindo na fórmula, com $\boxed{p=2}$ pois o erro de Richardson seria $O(h^{2 \cdot p})$ e queremos $O(h^4)$

$$G = \frac{2^2 \cdot g_1(h/2) - g_2(h)}{2^2 - 1} \approx \frac{2^2(1{,}0195) - 0{,}93975}{3} = \boxed{1{,}046083333}$$

2. i) fórmula do método dos trapézios compostos é:

$$\int_a^b f(x)dx = I_{aprox} = \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

ii) Como $h = \frac{b-a}{n}$, com $n = 4$ temos que $h = \frac{1-0}{4} = \boxed{0,25}$

$$I_{aprox} = \frac{0,25}{2} \left[f(0) + 2 \cdot f(0,25) + 2 \cdot f(0,5) + 2 \cdot f(0,75) + f(1) \right]$$

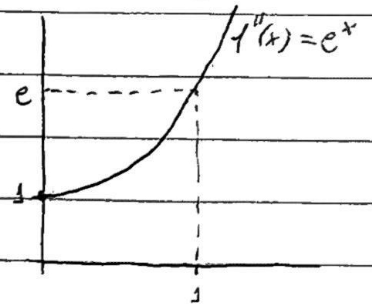
$$I_{aprox} = 0,125 \cdot \left[1 + 2 \cdot (1,2840) + 2 \cdot (1,6487) + 2 \cdot (2,1170) + e \right]$$

logo $I_{aprox} = \boxed{1,727221905}$

iii) Comparação I_{EXATO} com I_{aprox}

$$E_n = |I_{EXATO} - I_{aprox}| = |(e-1) - 1,727221905| = \boxed{8,940076541 \cdot 10^{-3}}$$

iv) $E_T = -\frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 |f''(\xi)|$, $\xi \in (a,b)$



Analisando o gráfico da segunda derivada de e^x concluímos que $x = 1$ será um máx no intervalo $[0,1]$

Substituindo os valores na fórmula de ET, com $h = 0,25$ temos:

$$ET = -\frac{(1-0)}{12} \cdot (0,25)^2 \cdot e^1 = \boxed{1,4157717 \cdot 10^{-2}}$$

3.

i) $$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} + f_n\right]$$

como $N=4$ então $h = \frac{\pi/2 - 0}{4} = \pi/8$

$$I = \frac{\pi}{16}\left[f(0) + 2f(\pi/8) + 2f(\pi/4) + 2f(3\pi/8) + f(\pi/2)\right]$$

$$I = \boxed{0{,}987115801}$$

ii) (x_0, x_1, x_2), (x_2, x_3, x_4), onde $h = \frac{\pi/2}{4} = \pi/8$

$$I_1 = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$I_2 = \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

logo $$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

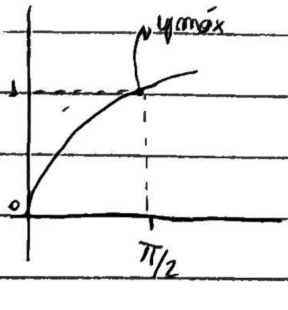
como $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/8$, $x_2 = \pi/4$, $x_3 = 3\pi/8$ e $x_4 = \pi/2$
temos que:

$$I = \frac{\pi}{24}\left[f(0) + 4f(\pi/8) + 2f(\pi/4) + 4f(3\pi/8) + f(\pi/2)\right]$$

$$I = \boxed{1{,}000134585}$$

iii) Trapezoidal $\rightarrow 1 - 0{,}987115801 = 0{,}012884199 = E_1$
Simpson 1/3 $\rightarrow 1 - 1{,}000134585 = -1{,}34585 \cdot 10^{-4}$

iv) como $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$ $E_S = \frac{-(b-a)}{180} \cdot h^4 f^4(\xi)$, $\xi \in [a,b]$



Substituindo com $h = \pi/8 \Rightarrow E_S = -\frac{(\pi/2 - 0)}{180} \cdot (\pi/8)^4 \cdot 1^4 =$

$$E_S = \boxed{2{,}075328808 \cdot 10^{-4}}$$

* O erro real do trapézio é mais de 100x maior que o real de Simpson

Sofia Soares e Elane Souza

$x_0=0, \quad x_1=1, \quad x_2=2, \quad x_3=3$

4.

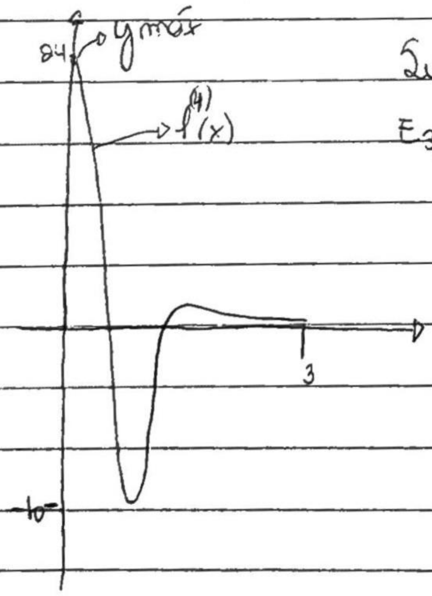
i) $I = \frac{3}{8} h \cdot \sum_{k=1}^{m} [f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})]$

como $n=3m$ então $3m=3$ $\boxed{m=1}$ logo $I = \frac{3}{8} \cdot 1 \cdot [f(0)+3f(1)+3f(2)+f(3)]$

ii) $\frac{3}{8}\left[\frac{1}{1} + 3 \cdot \frac{1}{1+1} + 3 \cdot \frac{1}{1+4} + \frac{1}{1+9}\right] = \boxed{1,2}$

iii) $E = 1,249045772 - 1,2 = \boxed{4,90457724 \cdot 10^{-2}}$

iv) $E_{3/8} = -\frac{3}{80}(b-a) h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b)$



Substituindo na fórmula:

$E_{3/8} = -\frac{3}{80}(3-0) \cdot 1^4 \cdot 24 = \boxed{2,7}$

Neste caso, a $f(x)$ tem uma quarta derivada muito grande em $x=0$ ($y_{máx} = 24$), causando um erro teórico máximo extremamente alto (2,7), apesar de o erro real ser muito menor, no caso, 0,049...

5)

i). $N=1 \rightarrow h = \frac{1-0}{1} = 1$

$$T1 = \frac{1}{2} \cdot [f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right] = 0{,}75$$

$N=2 \rightarrow h = \frac{1-0}{2} = 0{,}5$

$$T_2 = \frac{0{,}5}{2} \cdot [f(0) + 2f(0{,}5) + f(1)] = 0{,}25 \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{1}{1+0{,}5^2} + \frac{1}{2}\right] = 0{,}775$$

$N=4 \rightarrow h = \frac{1-0}{4} = 0{,}25$

$$T3 = \frac{0{,}25}{2} [f(0) + 2f(0{,}25) + 2f(0{,}5) + 2f(0{,}75) + f(1)] = 0{,}7827941176$$

ii)

$h=1$		
$R(0,0)$		
$R(1,0)$	$R(1,1)$	
$R(2,0)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$
$R(3,0)$	$R(3,1)$	$R(3,2)$

$R(0,0) = \frac{1}{2} (1-0) \cdot [f(0) + f(1)] = 0{,}75$ com $h=1$

$$R(1,0) = \frac{1}{2} R(0,0) + \frac{1}{2} \cdot [f(0+0{,}5)] = \frac{1}{2} \cdot 0{,}75 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+0{,}5^2}\right) = 0{,}775$$

$$R(2,0) = \frac{1}{2} R(1,0) + \frac{1}{4} \cdot [f(0+0{,}25) + f(0+0{,}75)] = 0{,}7827941176$$

$$R(3,0) = \frac{1}{2} R(2,0) + \frac{1}{8} \cdot [f(0+0{,}125) + f(0+0{,}375) + f(0+0{,}625) + f(0{,}875)] = 0{,}7847471236$$

$$R(1,1) = \frac{R(0,0) - R(1,0) \cdot 2^2}{1-2^2} = 0{,}7833333333$$

$$R(2,1) = \frac{4}{3} R(2,0) - \frac{1}{3} R(1,0) = 0{,}7853921568$$

$$R(3,1) = \frac{4}{3} R(3,0) - \frac{1}{3} R(2,0) = 0{,}7853981256$$

$R(2,2) = \dfrac{R(1,1) - R(2,1) \cdot 2^4}{1-2^4} = \dfrac{16}{15} R(2,1) - \dfrac{1}{15} R(1,1) = 0{,}7855294117$

$R(3,2) = \dfrac{16}{15} R(3,1) - \dfrac{1}{15} R(2,1) = 0{,}7853985235$

iii) Comparação:

Trapézio → Arctan(1) − 0,78

Romberg → Arctan(1) − 0,7853985235 = $\boxed{3{,}6010255 \cdot 10^{-7}}$

iv) $ER \approx \dfrac{R_{3,2} - R_{2,1}}{4^2 - 1} = \dfrac{0{,}7853985235 - 0{,}7853921568}{15} =$

$ER = \boxed{4.244466667 \cdot 10^{-7}}$