ANN0001 Análise Numérica
Prof. Fernando Deeke Sasse
PROFMAT - UDESC
Prova 1 - 2025/2

Informações úteis

1. Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ os nós de interpolação, o polinômio interpolador na forma de Lagrange é:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} a_n L_n(t)\,,$$

sendo os polinômios de Lagrange dados por

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ os nós de interpolação, e valores conhecidos da função $f(x)$, dados por $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_n)$. O polinômio interpolador na forma de Newton é dado por

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \pi_k(x)\,,$$

sendo $\pi_i(x)$ os polinômios da base de Newton são dados por:

$$\begin{aligned}
\pi_0(x) &= 1,\\
\pi_1(x) &= (x-x_0),\\
\pi_2(x) &= (x-x_0)(x-x_1),\\
\pi_3(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Os coeficientes a_j de $P(x)$ são as diferenças divididas de ordem j avaliadas na lista de nós $(x_0, \ldots, x_n)$:

$$a_j \;=\; f[x_0, \ldots, x_j]\,,$$

definidas recursivamente por

$$\begin{aligned}
f[x_k] &:= f(x_k),\\
f[x_0, x_1, \ldots, x_n] &:= \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.
\end{aligned}$$

Questões

Nota: As questões abaixo devem ser resolvidas manualmente, **passo a passo**, de modo claro, objetivo e inteligível, com auxílio de calculadora. Pode ser resolvido individualmente ou em duplas. Soluções com alguma parte clonada de outros colegas, implicarão em nota zero para ambas as partes.

1. **Método da Bissecção** [1.5]
(i) Determine, usando bissecção, a menor raiz real positiva da equação $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1/2) - 2\sin(x^2) - 2 = 0$. Utilize precisão de 4 digitos. O gráfico de $f(x)$ é mostrado na Fig. 1.
(ii) Quantas iterações seriam necessárias para determinar tal raiz com uma acurácia da ordem de 10^{-5}, partindo do intervalo [1,2]? Sugestão: a cada iteração o tamanho do intervalo diminui pela metade. O tamanho do intervalo que contém a raiz é uma boa medida para acurácia do resultado.

2. **Método de Newton-Raphson** [1.5]
   (i) Deduza analiticamente o método de Newton-Raphson.
   (ii) Usando calculadora, com uma precisão de ao menos 4 dígitos, determine segunda maior raiz real positiva mostrada na Fig. 1. Itere até a convergência na quarta casa decimal for atingida.

3. **Método das Secantes** [1.5]
   (i) Deduza analiticamente o método das secantes.
   (ii) Usando calculadora, com uma precisão de ao menos 4 dígitos, determine terceira maior raiz real positiva mostrada na Fig. 1. Itere até a convergência na quarta casa decimal for atingida.

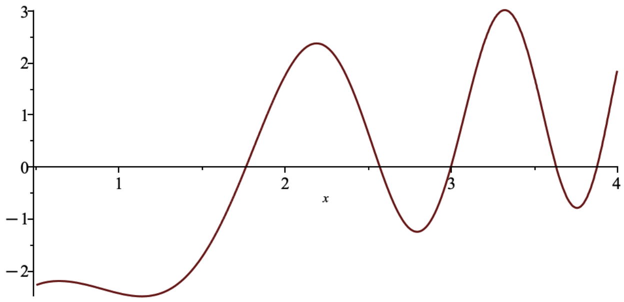

Figure 1: Gráfico de $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x - 1/2\right) - 2\sin\left(x^2\right) - 2$.

4. **Interpolação Simples** [1.5]
   Dados os pontos mostrados na Tabela 1, sendo T a variável independente e F a variável dependente, determine o polinômio $P(t)$ interpolador, usando a base monomial.

T	1.1	2.7	3.1
F	2.5	5.7	3.4

Table 1: Tabela de dados para interpolação simples.

5. **Interpolação de Lagrange** [1.5]
   Dados os pontos mostrados na Tabela 2, determine, o polinômio interpolante na forma

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} x_n L_n(t)\,,$$

sendo L_i os polinômios de Lagrange.

T	1.7	2.9	3.8	4.1
F	4.0	6.1	3.5	2.3

Table 2: Dados para interpolação de Lagrange.

6. **Interpolação de Newton** [2.5]
   Seja função $f(t) = \sin(t^2 + t - 1)$ definida no intervalo $[0, 1]$. Queremos aproximar esta função por um polinômio interpolante, usando 5 intervalos uniformente espaçados.
   (i) Utilizando diferenças divididas, construa o polinômio interpolante $P_5(t)$. Use 4 dígitos significativos, ao menos.
   (ii) Calcule $P'(0.5)$ e compare com $f'(0.5)$.
   (iii) Determine a aproximação:

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \approx \int_0^1 P_5(t)\mathrm{d}t\,.$$