

# Análise Numérica

## Prova 1 - Simulado

29 de agosto de 2025

### Informações úteis

#### 1. Interpolação de Lagrange

Sejam  $t_1, t_2, \dots, t_n$  os nós de interpolação, o polinômio interpolador na forma de Lagrange é:

$$P(t) = \sum_{k=1}^n a_k L_k(t),$$

sendo os polinômios de Lagrange dados por

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

#### 2. Interpolação de Newton

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  os nós de interpolação, e valores conhecidos da função  $f(x)$ , dados por  $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$ . O polinômio interpolador na forma de Newton temos

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \pi_k(x),$$

sendo que os polinômios  $\pi_i$  da base de Newton são dados por:

$$\begin{aligned} \pi_0(x) &= 1, \\ \pi_1(x) &= (x - x_0), \\ \pi_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\ \pi_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

os coeficientes  $a_j$  de  $P(x)$  são as diferenças divididas de ordem  $j$  avaliadas na lista de nós  $(x_0, \dots, x_n)$ :

$$a_j = f[x_0, \dots, x_j].$$

definidas recursivamente por

$$\begin{aligned} f[x_k] &:= f(x_k), \\ f[x_0, x_1, \dots, x_n] &:= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x - 1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

**1. Método da Bissecção:**

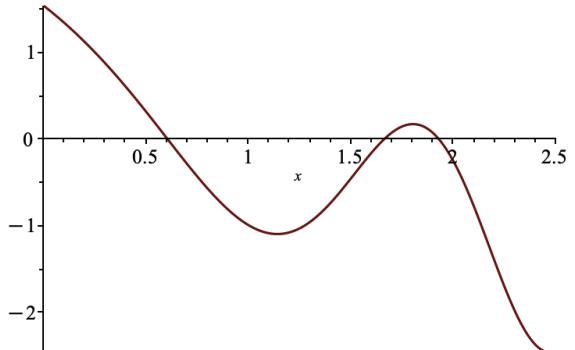
- (i) Determine, usando bissecção, a menor raiz real positiva da equação  $f(x) = \cos(x^2 + x + 1) - x + 1 = 0$ . Utilize precisão de 4 dígitos. O gráfico de  $f(x)$  é mostrado na Fig. 1.
- (ii) Quantas iterações seriam necessárias para determinar tal raiz com uma acurácia da ordem de  $10^{-5}$ , partindo do intervalo  $[0,1]$ ? Sugestão. A cada iteração o tamanho do intervalo diminui pela metade. O tamanho do intervalo que contém a raiz é uma boa medida para acurácia do resultado.

**2. Método de Newton-Raphson:**

- (i) Deduza analiticamente ou geometricamente o método de Newton-Raphson.
- (ii) Usando calculadora, com uma precisão de ao menos 4 dígitos, determine segunda maior raiz real positiva mostrada na Fig. 1. Itere até a convergência na quarta casa decimal for atingida.

**3. Método das Secantes:**

- (i) Deduza analiticamente ou geometricamente o método das secantes.
- (ii) Usando calculadora, com uma precisão de ao menos 4 dígitos, determine terceira maior raiz real positiva mostrada na Fig. 1. Itere até a convergência na quarta casa decimal for atingida.

Figura 1: Gráfico de  $f(x) = \cos(x^2 + x + 1) - x + 1$ .**4. Interpolação Simples:**

Dados os pontos mostrados na Tabela 1, sendo  $T$  a variável independente e  $F$  a variável dependente, determine o polinômio  $P(t)$  interpolador, usando a base monomial.

$T$	1.3	3.7	6.1
$F$	4.5	5.6	3.1

Tabela 1: Tabela de dados para interpolação simples.

**5. Interpolação de Lagrange:**

Dados os pontos mostrados na Tabela 2, determine, o polinômio na forma

$$P(t) = \sum_{k=1}^n x_n L_n(t),$$

sendo  $L_i$  os polinômios de Lagrange, que interpola os pontos tabelados.

$T$	1.2	2.3	3.5	4.7
$F$	4.0	5.1	3.5	2.3

Tabela 2: Dados para interpolação de Lagrange.

**6. Interpolação de Newton:**

Seja função  $f(t) = \cos(t^2 + t - 1)$  definida no intervalo  $[0, 1]$ . Queremos aproximar esta função por um polinômio interpolante, usando 5 intervalos uniformemente espaçados.

- (i) Utilizando diferenças divididas, construa o polinômio interpolante  $P_5(t)$ . Use 4 dígitos significativos, ao menos.
- (ii) Calcule  $P'(0.5)$  e compare com  $f'(0.5)$ .
- (iii) Determine a aproximação:

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \int_0^1 P_5(t) dt.$$