Universidade do Estado de Santa Catarina

ANN0001 Análise Numérica

Prova 3

Fernando Deeke Sasse

3 de novembro de 2025

Instruções gerais

- A prova deve ser resolvida com o auxílio de calculadora.
- Todos os passos dos cálculos devem ser apresentados de forma legível e organizada.
- Utilize pelo menos quatro casas decimais nas respostas numéricas finais.
- A atividade pode ser realizada em duplas e deve ser entregue, em forma escrita (manual ou pdf gerado por LaTeX) até final da aula do dia 5 de novembro de 2025.
- Resoluções idênticas entre provas diferentes implicarão em nota zero para ambas as partes envolvidas.
- Um aluno de cada dupla poderá ser selecionado para uma breve entrevista sobre a solução apresentada.

1. Dada a tabela abaixo:

x	$f(x)$
0,0	0,0000
0,1	0,0998
0,2	0,1987
0,3	0,2855
0,4	0,3794
0,5	0,4894
0,6	0,5746
0,7	0,6442
0,8	0,7351

(i) Estime $f''(0)$ com ordem $\mathcal{O}(h^2)$.

(ii) Estime $f'(0{,}5)$ com ordem $\mathcal{O}(h^2)$.

(iii) Estime $f'(0{,}4)$ com ordem $\mathcal{O}(h^4)$, usando extrapolação de Richardson.

2. Considere a função

$$f(x) = e^x$$

no intervalo $[0, 1]$. Deseja-se aproximar a integral

$$I = \int_0^1 e^x \, dx$$

usando o método dos trapézios compostos com $n = 4$ subintervalos igualmente espaçados.

(i) Apresente a fórmula geral do método dos trapézios compostos.

(ii) Calcule o valor aproximado de I.

(iii) Compare o resultado com o valor exato $I_{\text{exato}} = e - 1$ e determine o erro absoluto.

(iv) Estime o erro teórico máximo utilizando a fórmula

$$E_T = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b),$$

considerando o pior caso para $f''(x)$ no intervalo.

3. A integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx$$

será aproximada usando os métodos de Simpson 1/3 e dos Trapézios, ambos com $n = 4$ subintervalos igualmente espaçados.

(i) Calcule I pelo método dos trapézios.

(ii) Calcule I pelo método de Simpson 1/3.

(iii) Compare os resultados com o valor exato $I_{\text{exato}} = 1$.

(iv) Estime o erro teórico do método de Simpson 1/3 usando

$$E_S = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b),$$

e discuta a diferença de magnitude entre os erros de ambos os métodos.

4. Use o método de Simpson 3/8 para aproximar a integral

$$I = \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

Utilize $n = 3$ subintervalos igualmente espaçados (passo $h = 1$).

(i) Escreva a fórmula do método de Simpson 3/8 e identifique os pesos de cada ponto.

(ii) Calcule o valor aproximado da integral.

(iii) Compare o resultado com o valor exato $I_{\text{exato}} = \arctan(3)$ e determine o erro absoluto.

(iv) Estime o erro teórico máximo usando

$$E_{3/8} = -\frac{3}{80}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b),$$

e discuta a sensibilidade desse erro em relação à suavidade de $f(x)$.

5. A integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

pode ser aproximada utilizando o método de Romberg, que combina extrapolações sucessivas do método dos trapézios.

(i) Calcule T_1, T_2 e T_3, correspondentes ao método dos trapézios com 1, 2 e 4 subintervalos, respectivamente.

(ii) Construa a tabela de Romberg até o termo $R_{3,2}$.

(iii) Compare o valor obtido com o valor exato $I_{\text{exato}} = \arctan(1) = \pi/4$.

(iv) Use o termo extrapolado de Romberg para estimar o erro residual:

$$E_R \approx \frac{R_{3,2} - R_{2,1}}{4^2 - 1},$$

e discuta o ganho de precisão obtido pela extrapolação.