

Análise Numérica

Prova 1 - Simulado

29 de agosto de 2025

Informações úteis

1. Interpolação de Lagrange

Sejam t_1, t_2, \dots, t_n os nós de interpolação, o polinômio interpolador na forma de Lagrange é:

$$P(t) = \sum_{k=1}^n a_k L_k(t),$$

sendo os polinômios de Lagrange dados por

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2. Interpolação de Newton

Sejam x_0, x_1, \dots, x_n os nós de interpolação, e valores conhecidos da função $f(x)$, dados por $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$. O polinômio interpolador na forma de Newton temos

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \pi_k(x),$$

sendo que os polinômios π_i da base de Newton são dados por:

$$\begin{aligned} \pi_0(x) &= 1, \\ \pi_1(x) &= (x - x_0), \\ \pi_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\ \pi_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

os coeficientes a_j de $P(x)$ são as diferenças divididas de ordem j avaliadas na lista de nós (x_0, \dots, x_n) :

$$a_j = f[x_0, \dots, x_j].$$

definidas recursivamente por

$$\begin{aligned} f[x_k] &:= f(x_k), \\ f[x_0, x_1, \dots, x_n] &:= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

1. Método da Bissecção:

(i) Determine, usando bissecção, a menor raiz real positiva da equação $f(x) = \cos(x^2 + x + 1) - x + 1 = 0$. Utilize precisão de 4 dígitos. O gráfico de $f(x)$ é mostrado na Fig. 1.

(ii) Quantas iterações seriam necessárias para determinar tal raiz com uma acurácia da ordem de 10^{-5} , partindo do intervalo $[0,1]$? Sugestão. A cada iteração o tamanho do intervalo diminui pela metade. O tamanho do intervalo que contém a raiz é uma boa medida para acurácia do resultado.

2. Método de Newton-Raphson:

(i) Deduza analiticamente ou geometricamente o método de Newton-Raphson.

(ii) Usando calculadora, com uma precisão de ao menos 4 dígitos, determine segunda maior raiz real positiva mostrada na Fig. 1. Itere até a convergência na quarta casa decimal for atingida.

3. Método das Secantes:

(i) Deduza analiticamente ou geometricamente o método das secantes.

(ii) Usando calculadora, com uma precisão de ao menos 4 dígitos, determine terceira maior raiz real positiva mostrada na Fig. 1. Itere até a convergência na quarta casa decimal for atingida.

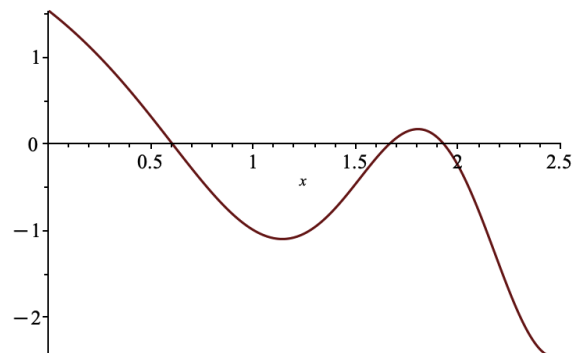


Figura 1: Gráfico de $f(x) = \cos(x^2 + x + 1) - x + 1$.

4. Interpolação Simples:

Dados os pontos mostrados na Tabela 1, sendo T a variável independente e F a variável dependente, determine o polinômio $P(t)$ interpolador, usando a base monomial.

T	1.3	3.7	6.1
F	4.5	5.6	3.1

Tabela 1: Tabela de dados para interpolação simples.

5. Interpolação de Lagrange:

Dados os pontos mostrados na Tabela 2, determine, o polinômio na forma

$$P(t) = \sum_{k=1}^n x_n L_n(t),$$

sendo L_i os polinômios de Lagrange, que interpola os pontos tabelados.

T	1.2	2.3	3.5	4.7
F	4.0	5.1	3.5	2.3

Tabela 2: Dados para interpolação de Lagrange.

6. Interpolação de Newton:

Seja função $f(t) = \cos(t^2 + t - 1)$ definida no intervalo $[0, 1]$. Queremos aproximar esta função por um polinômio interpolante, usando 5 intervalos uniformemente espaçados.

(i) Utilizando diferenças divididas, construa o polinômio interpolante $P_5(t)$. Use 4 dígitos significativos, ao menos.

(ii) Calcule $P'(0.5)$ e compare com $f'(0.5)$. (iii) Determine a aproximação:

$$\int_0^1 f(t)dt \approx \int_0^1 P_5(t)dt.$$