

# Matlab/Simulink для телекоммуникационных задач

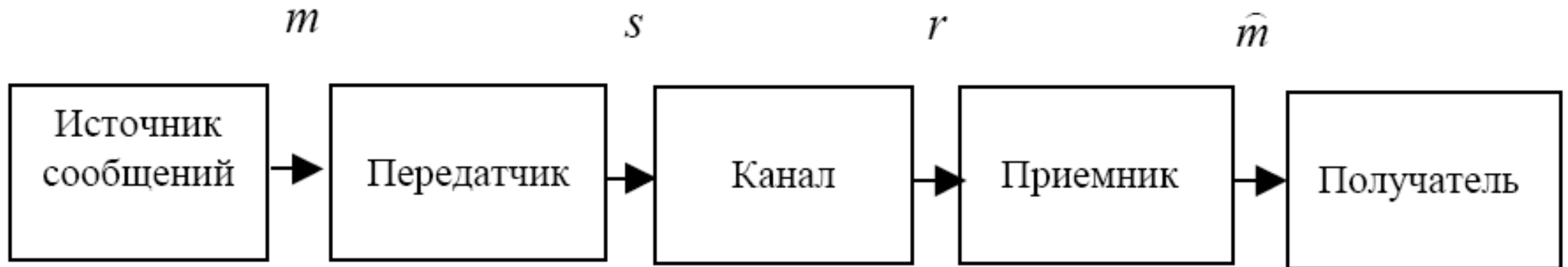
Лекторы:

Янситов Константин Константинович

# Общая структура систем передачи информации

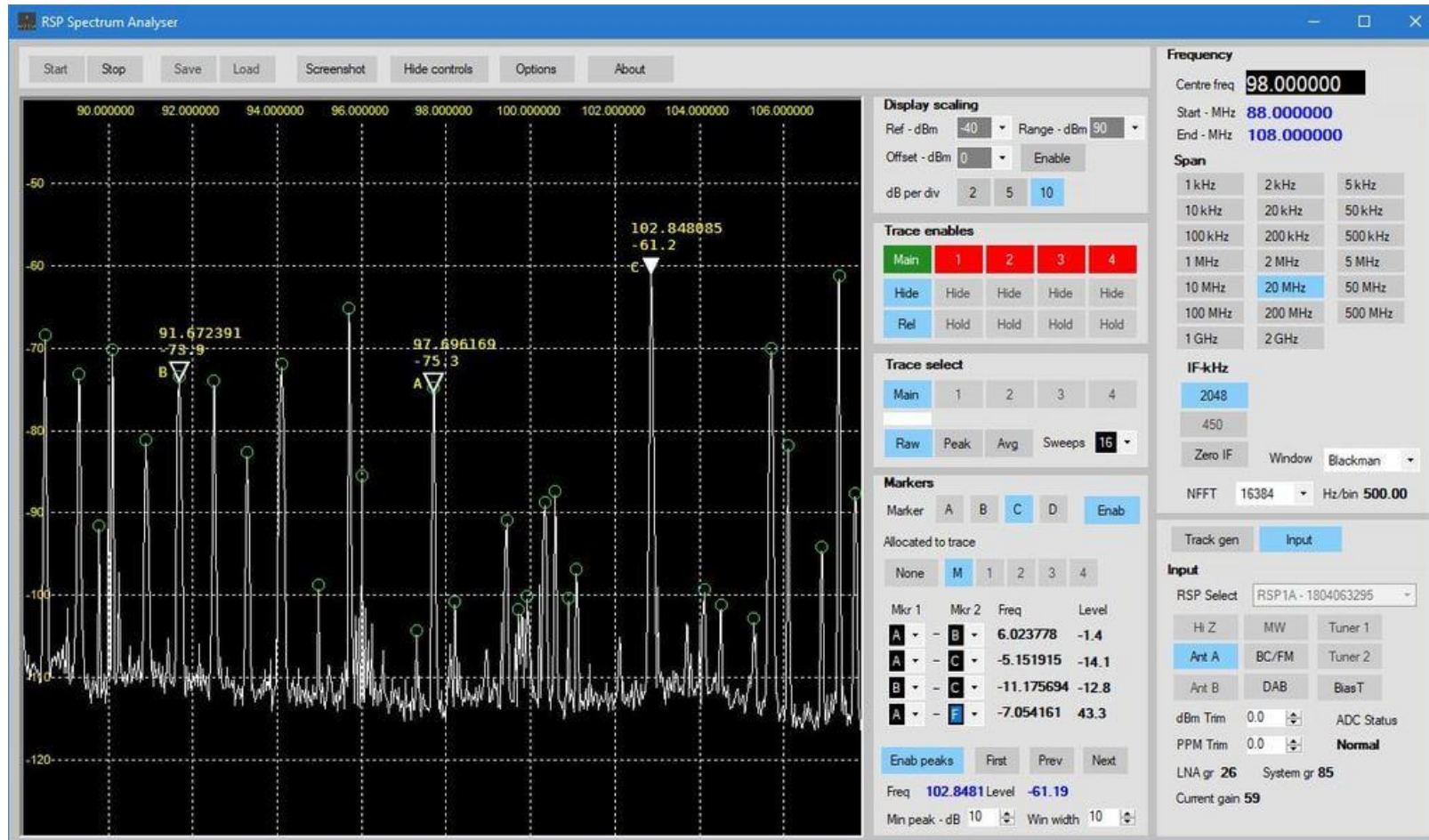
## Система передачи информации

- Задача, решаемая системой передачи, состоит в том, чтобы передать сообщение  $m$  от источника к получателю.
- Канал – часть системы передачи, природа и характеристики которой заданы, а их изменение нежелательно, затруднено или невозможно.
- Сообщение источника может быть представлено в такой форме, в которой невозможна его эффективная передача по каналу. Поэтому в систему обычно включаются устройства передачи и приема, которые выполняют преобразование сообщения  $m$  в сигнал  $s$  и преобразование принятого сигнала  $r$  в принятое сообщение  $\hat{m}$ .



# Общая структура систем передачи информации

## Ограниченность спектрального ресурса



# Общая структура систем передачи информации

## Модуляция

- Процесс формирования сигнала по сообщению называется *модуляцией*. В процессе модуляции выполняется изменение параметров сигнала в соответствии с сообщением, подлежащим передаче.

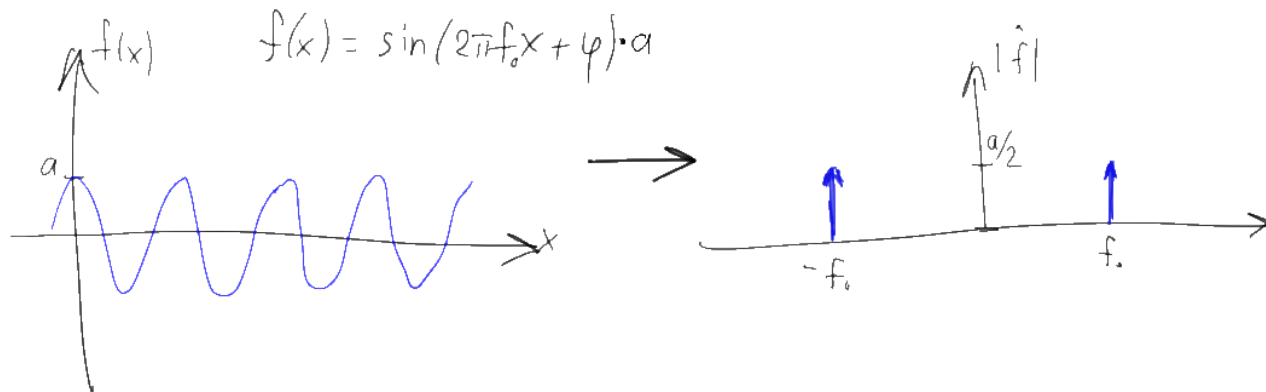
$$s(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi)$$

$$[s(t) = A \Psi(f, t, \phi)]$$

$A$  – амплитуда несущего сигнала

$f$  – частота колебания

$\varphi$  – начальная фаза

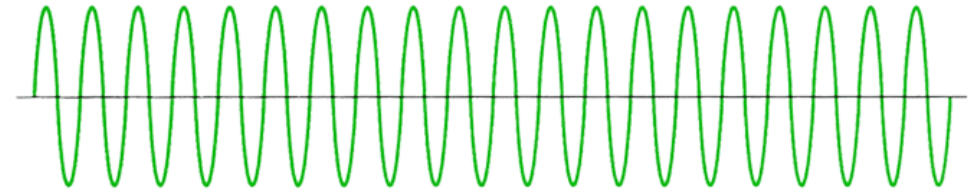


# Аналоговая передача информации

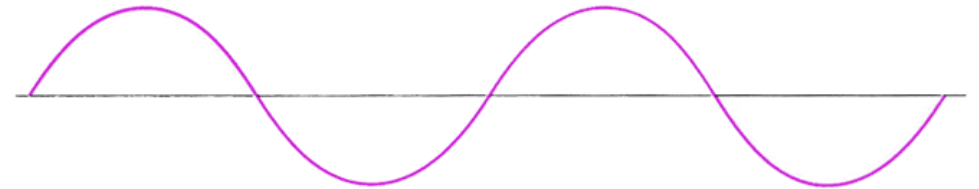
Амплитудная модуляция. AM

$$s(t) = A(t) \cos(2\pi f t + \varphi)$$

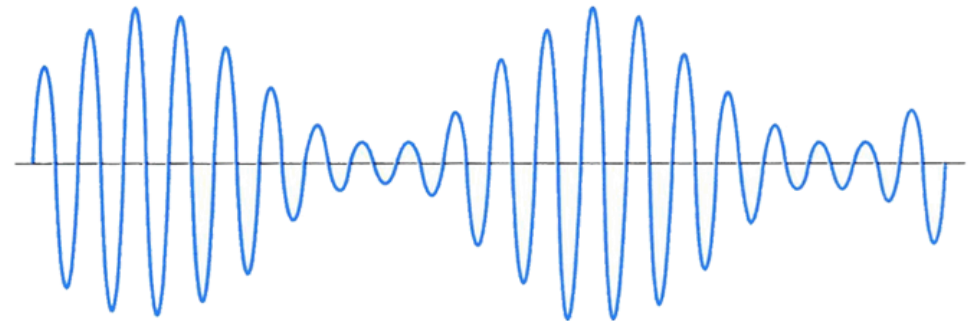
Несущая частота



Сигнал



Амплитудная модуляция



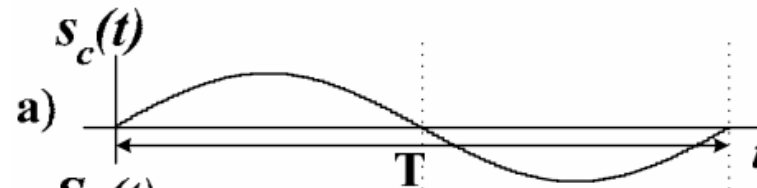
# Аналоговая передача информации

## Амплитудная модуляция. АМ. Спектр

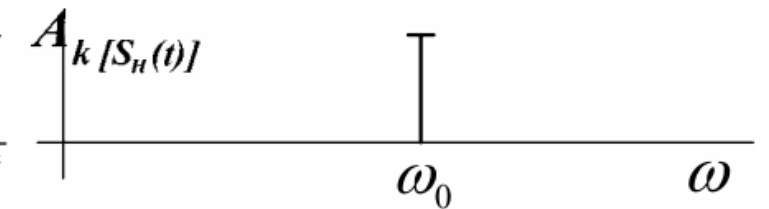
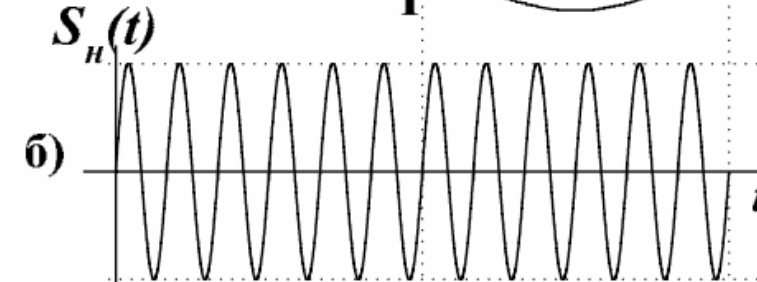
Форма сигнала во  
временной области

Форма сигнала в  
частотной области

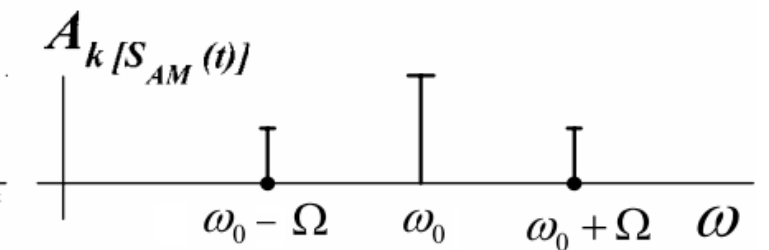
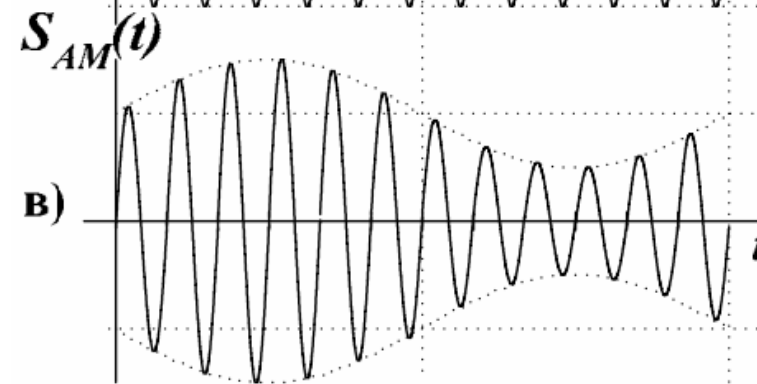
Информационное  
колебание



Несущее  
колебание



Итоговое  
колебание

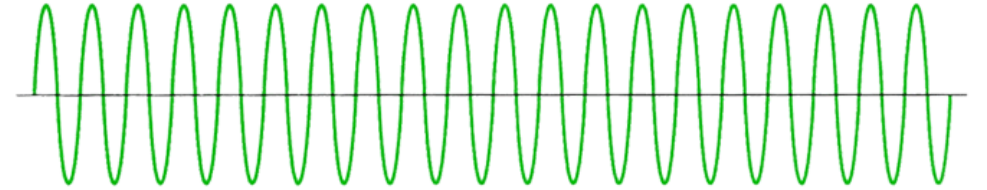


# Аналоговая передача информации

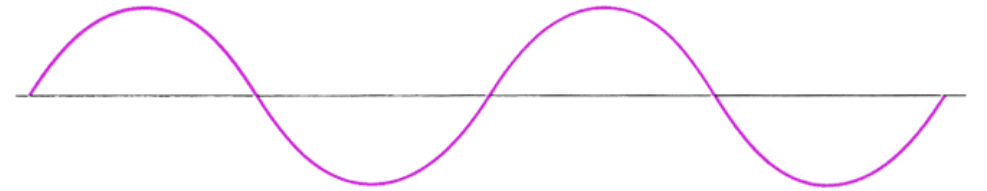
Частотная модуляция. ЧМ(FM)

$$s(t) = A \cos(2\pi \underbrace{f(t)}_{\text{ЧМ}} t + \varphi)$$

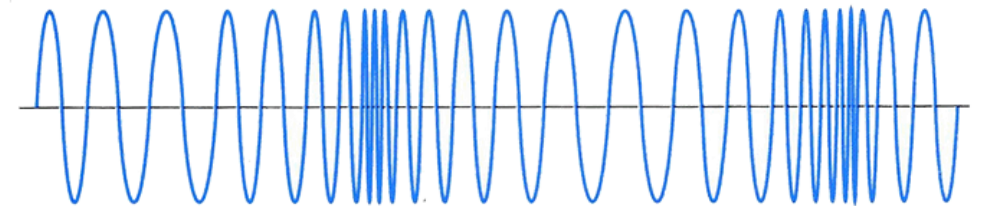
Несущая частота



Сигнал

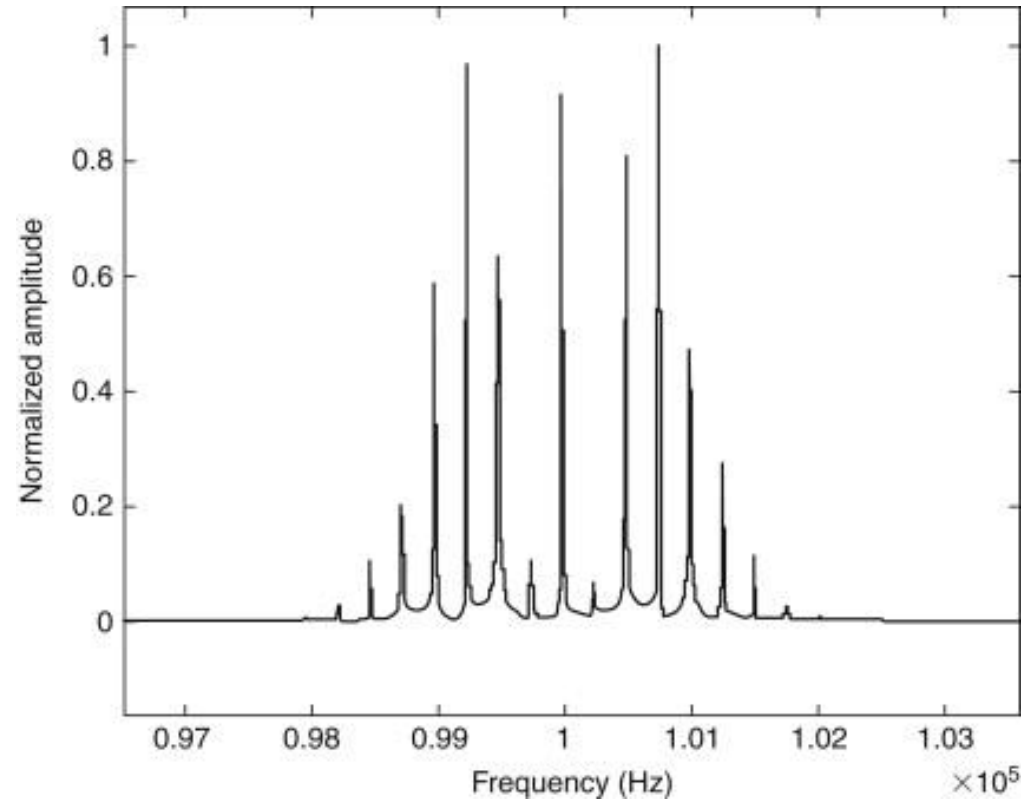


Частотная модуляция



# Аналоговая передача информации

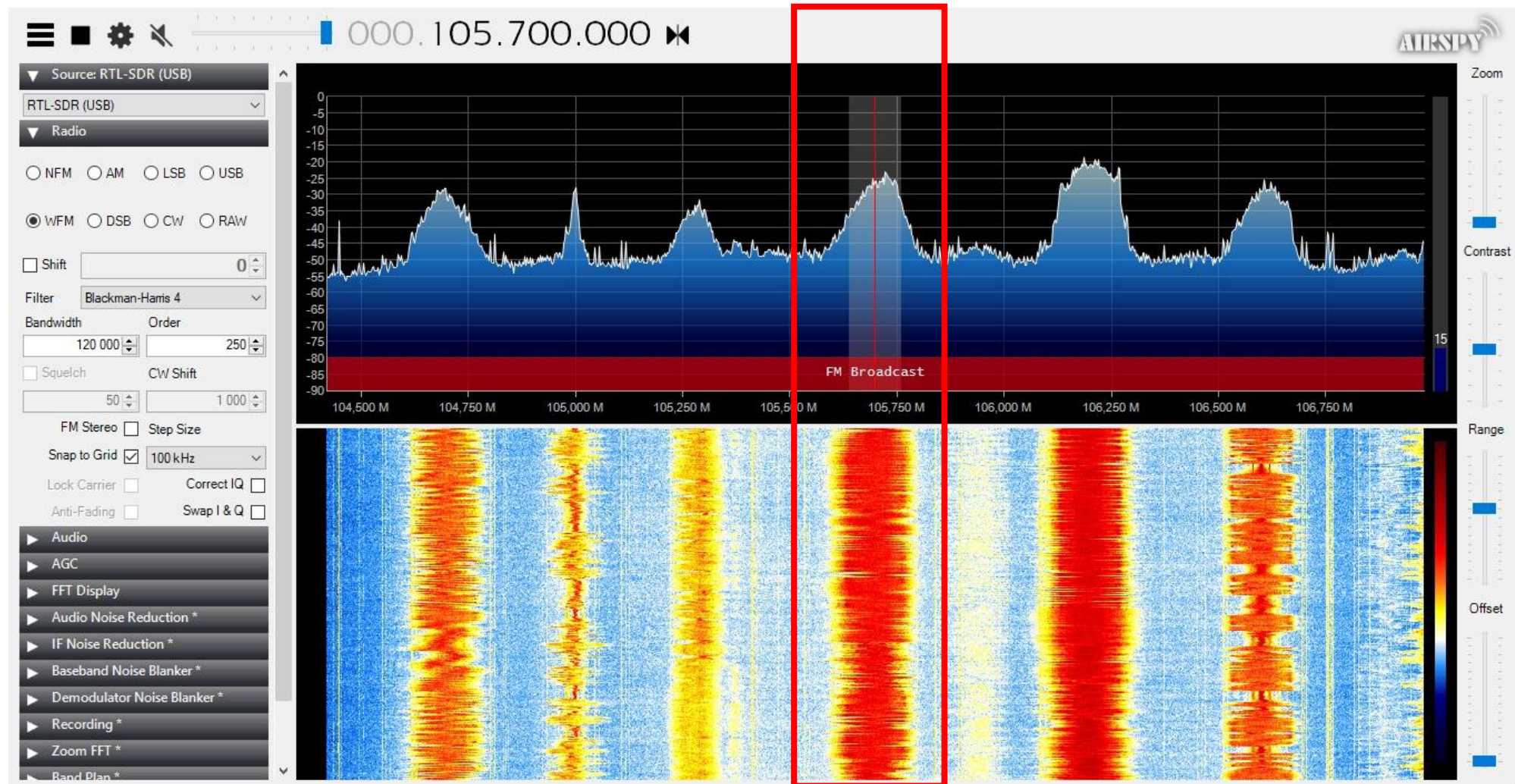
Частотная модуляция. ЧМ(FM)





# Аналоговая передача информации

## Частотная модуляция. ЧМ(FM)



# Аналоговая передача информации

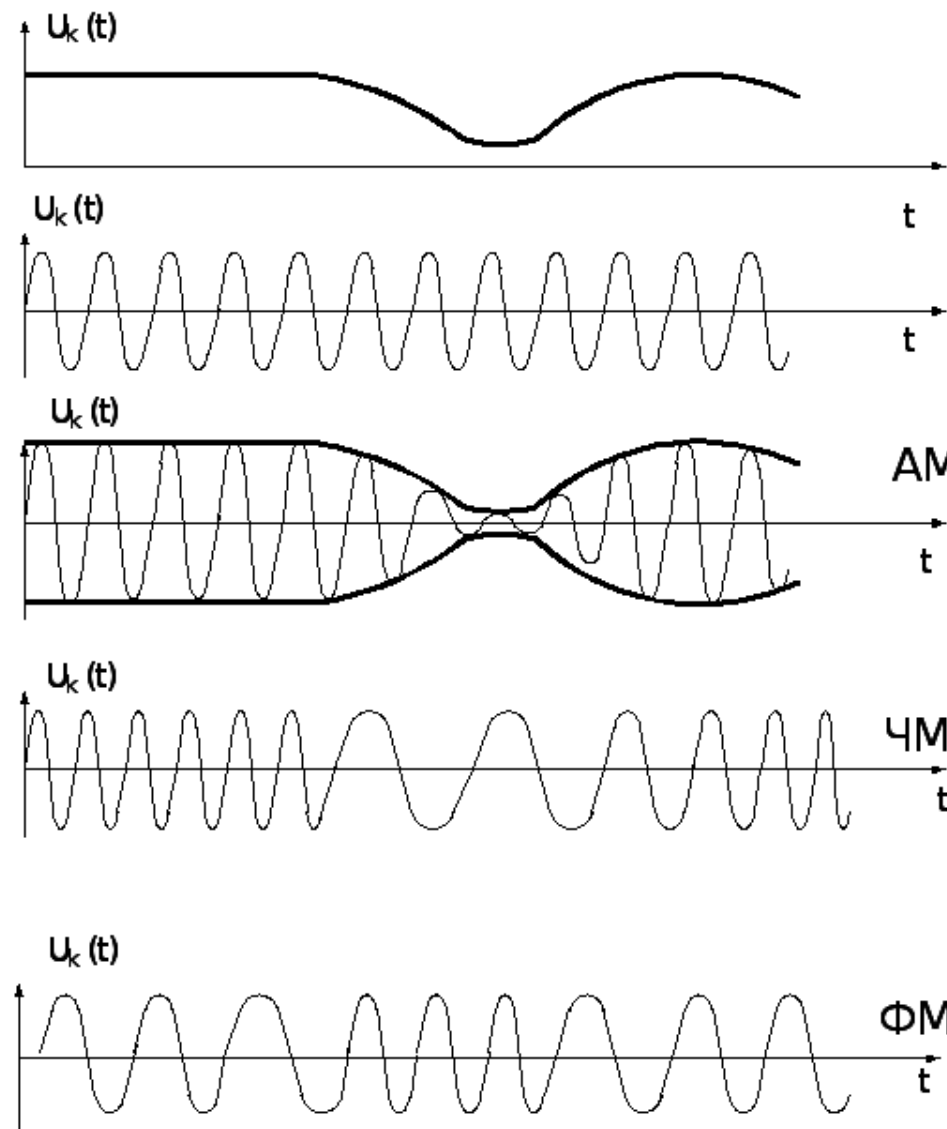
Фазовая модуляция. ФМ

$$s(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi(t))$$

# Аналоговая передача информации

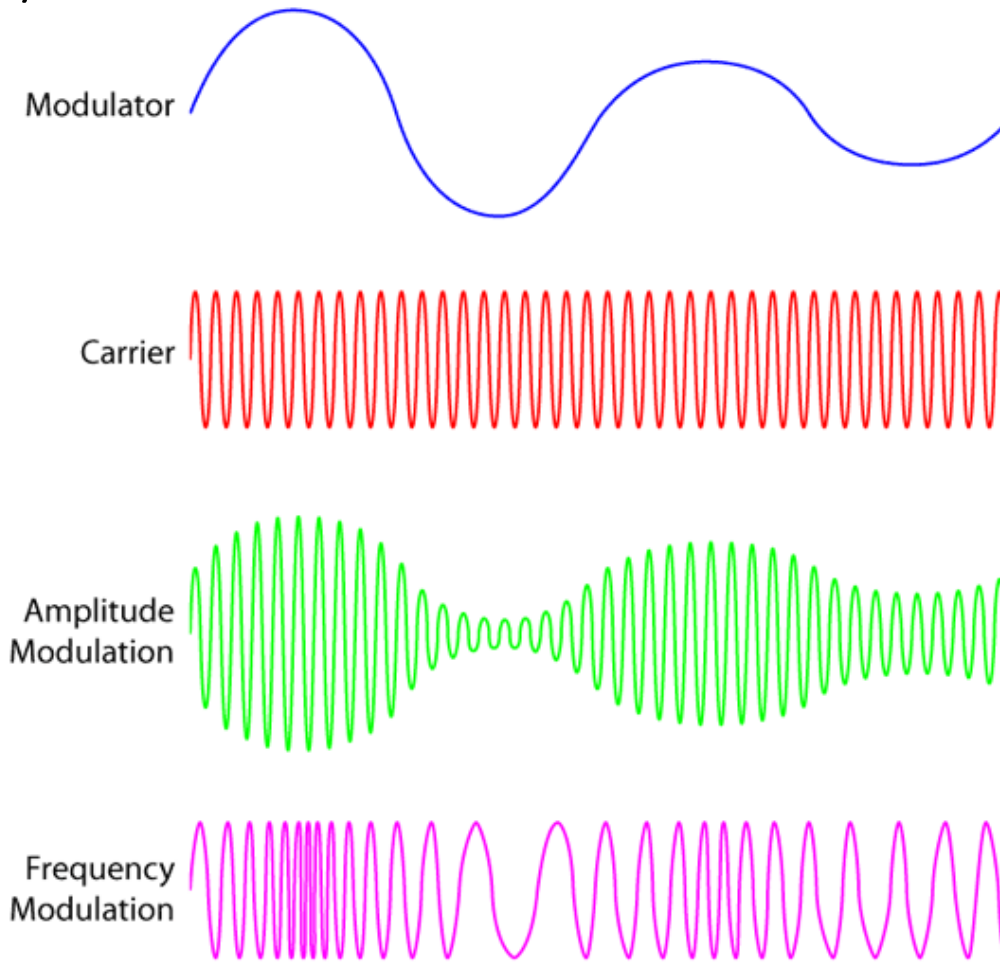
## Сравнение АМ/ЧМ/ФМ

- Если выбрана фазовая модуляция и модулируемый сигнал непрерывный и принимает большие значения, то ФМ в пределе переходит в частотную модуляцию. Но это относится только к непрерывным изменениям функции фазы.



# Аналоговая передача информации

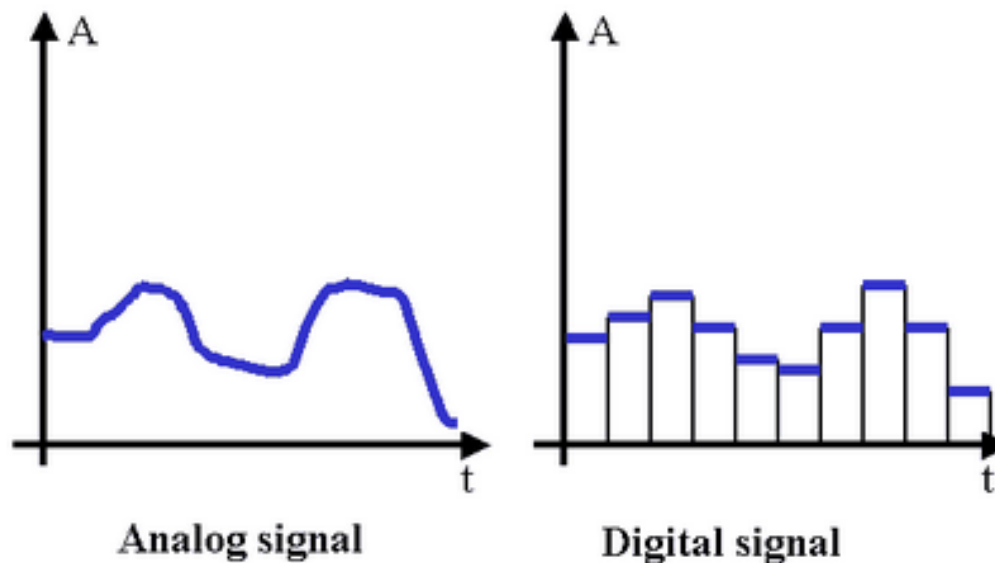
## Сравнение АМ/ЧМ/ФМ



# Цифровая передача информации

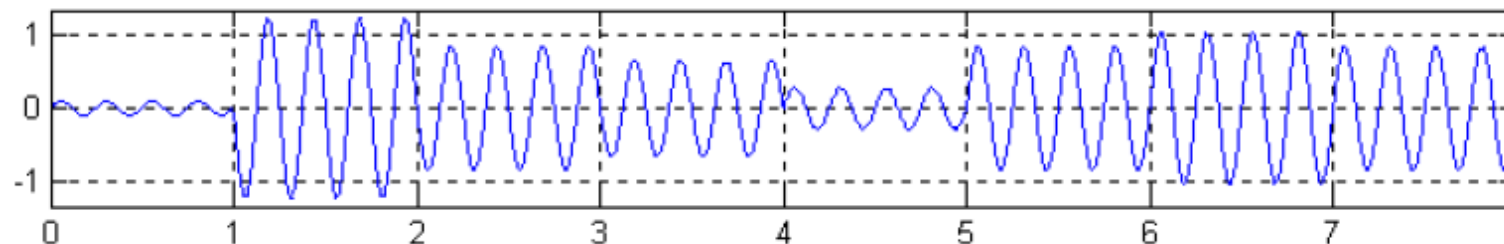
## Аналоговый сигнал и цифровой сигнал

- Различия между аналоговым и цифровым сигналами:
- Аналоговый непрерывен по времени и по уровню, в то время как цифровой – дискретен по времени и по уровню (квантован). То есть характеристики колебаний изменяются на каждом отсчете (дискрете, выборке). Цифровой сигнал состоит из символов. Символом называется сигнал на интервале времени между двумя последовательными отсчетами.

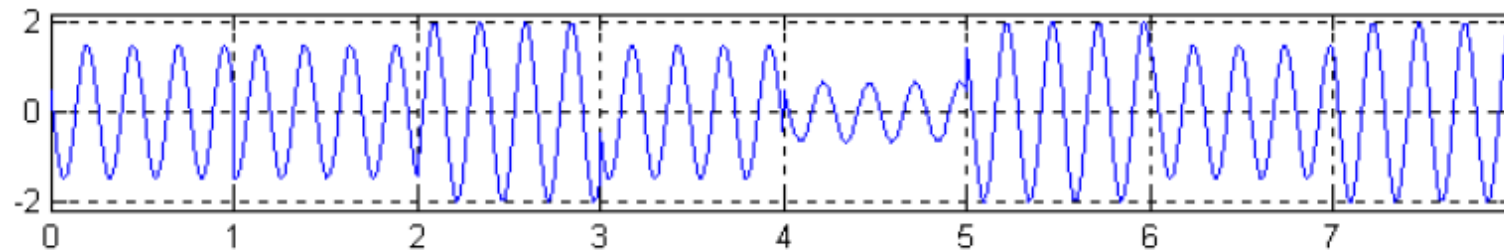


# Цифровая передача информации

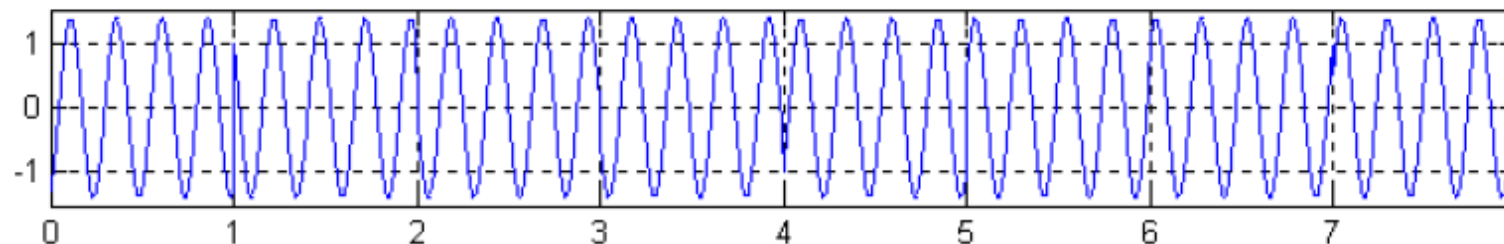
Аналоговый сигнал и цифровой сигнал



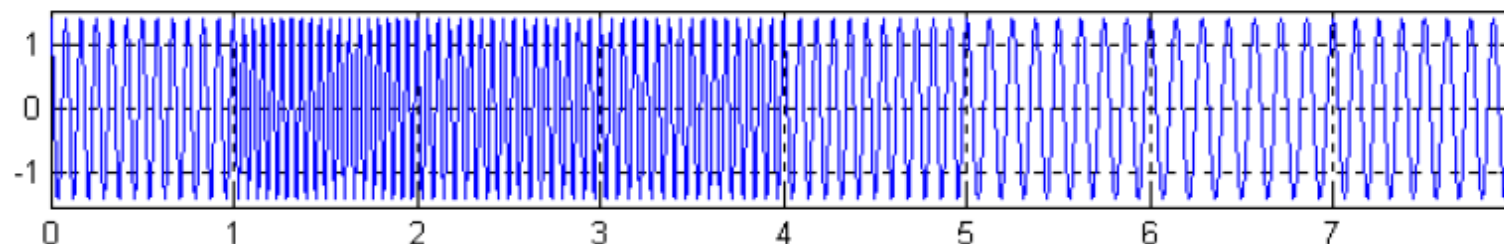
Амплитудная модуляция



Квадратурно-амплитудная  
модуляция



Фазовая модуляция



Частотная модуляция

# Цифровая передача информации

## Дискретная амплитудная модуляция

Сигналы дискретной амплитудой модуляции (АМ) имеют вид:

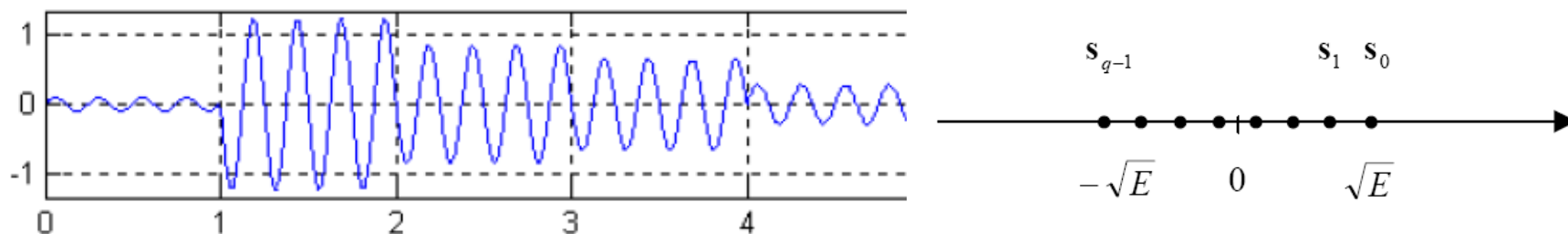
$$s_i(t) = A_i \varphi(t),$$

где  $\varphi(t)$  – некоторая нормированная функция, заданная на интервале  $[0, T]$  и определяющая форму сигнала  $i = 0, 1, 2, \dots, q - 1$

Набор амплитуд сигнала  $A_i$  можно определить как:

$$A_i = \sqrt{E} \left( 1 - \frac{2i}{q-1} \right)$$

Тогда  $A_0 = \sqrt{E}$ ,  $A_{q-1} = -\sqrt{E}$  и все промежуточные значения амплитуд располагаются равномерно в интервале  $[-\sqrt{E}; \sqrt{E}]$



# Цифровая передача информации

## Дискретная частотная модуляция

Сигналы частотной модуляции (ЧМ) (frequency shift keying, FSK) имеют вид:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t), 0 < t < T,$$

где  $E$  – энергия сигнала

$T$  – период следования сигналов (период символа)

$f_i = \frac{l_i}{T}$  – центральная частота  $i$ -ого сигнала

$l_i$  - целое число.

Для сохранения ортогональности ЧМ-сигнала, величины  $l_i$  должны быть различны при различных  $i$



# Цифровая передача информации

## Дискретная частотная модуляция

Пусть базисные функции :

$$\varphi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_i t)$$

Тогда, докажем, что функции будут ортогональны друг другу:

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \sin \frac{(2\pi(l_i + l_k))}{2\pi(l_i + l_k)} + \sin \frac{(2\pi(l_i - l_k))}{2\pi(l_i - l_k)} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

Количество базис-функций совпадает с количеством сигналов и можно записать, что

$s_i(t) = \sqrt{E} \varphi_i(t)$  , а сигнальные точки тогда будут иметь вид:

$$s_0 = (\sqrt{E}, 0, 0, \dots, 0)$$

$$s_1 = (0, \sqrt{E}, 0, \dots, 0)$$

...

$$s_{q-1} = (0, 0, 0, \dots, \sqrt{E})$$

# Цифровая передача информации

## Дискретная фазовая модуляция

Сигнал фазовой модуляции (ФМ, phase shift keying, PSK) имеет следующий вид:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_0 t - \theta_i), 0 < t < T$$

где  $E$  – энергия сигнала

$T$  – период следования сигналов (период символа)

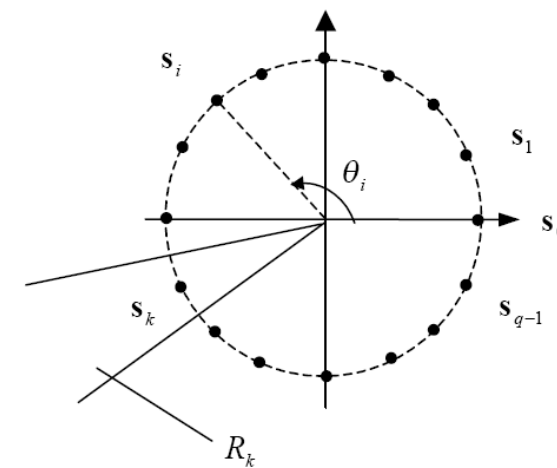
$f_0 = \frac{1}{T}$  – несущая частота сигнала

$$s_i(t) = \sqrt{E} \cos(\theta_i) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t) + \sqrt{E} \sin(\theta_i) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t) = s_{i_1} \varphi_1(t) + s_{i_2} \varphi_2(t)$$

где  $s_{i_1} = \sqrt{E} \cos(\theta_i)$  и  $s_{i_2} = \sqrt{E} \sin(\theta_i)$  – коэффициенты разложения по ортонормированным функциям

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t)$$



# Цифровая передача информации

## Синфазный и квадратурный сигнал. I/Q-сигнал

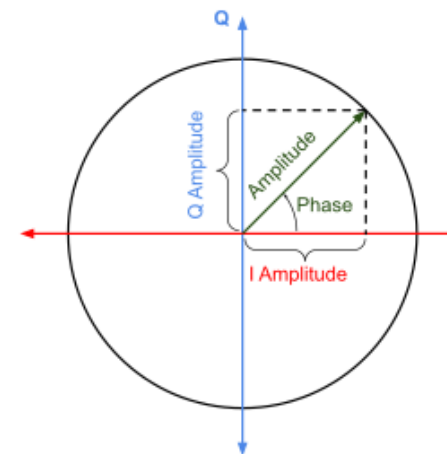
- I/Q сигнал – это аббревиатура от «in-phase» (синфазный) и «quadrature» (квадратурный).
- Комплексный сигнал можно представить на квадратурную и синфазную составляющую:

$$s(t) = I(t) \cos(2\pi f t + \varphi) + Q(t) \cos\left(2\pi f t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) =$$

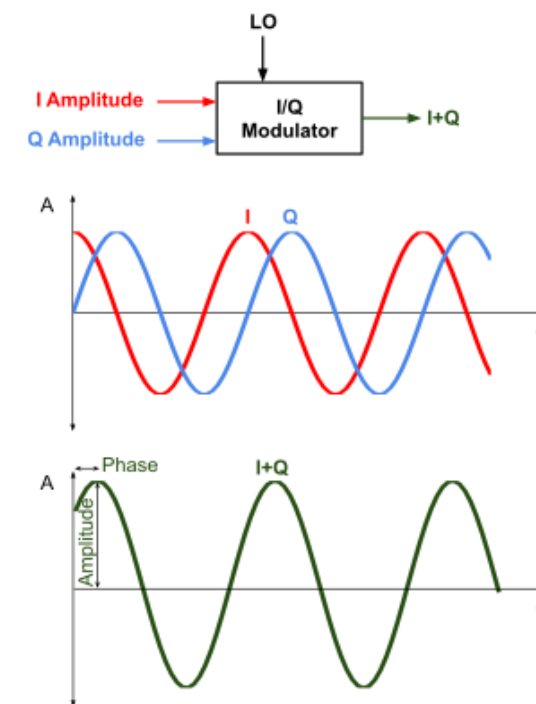
$$= I(t) \cos(2\pi f t + \varphi) - Q(t) \sin(2\pi f t + \varphi)$$

«In-phase»  
I-component  
Синфазный

«Quadrature»  
Q-component  
Квадратурный



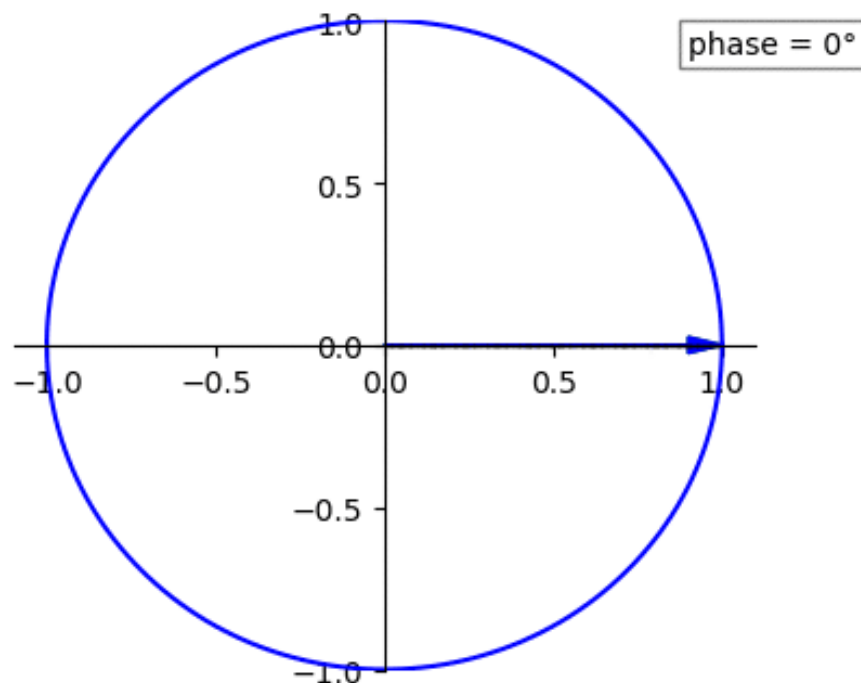
I Amplitude (V)	Q Amplitude (V)	I+Q	
		Amplitude (V)	Phase (°)
1	0	1	0
0	1	1	90
-1	0	1	180
0	-1	1	270



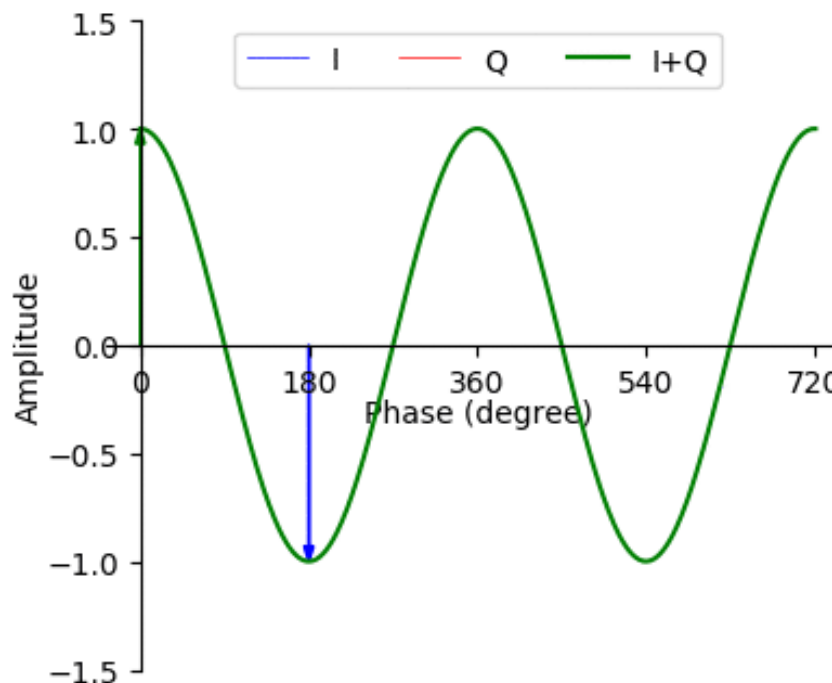
# Цифровая передача информации

Синфазный и квадратурный сигнал. I/Q-сигнал

Фазовая диаграмма

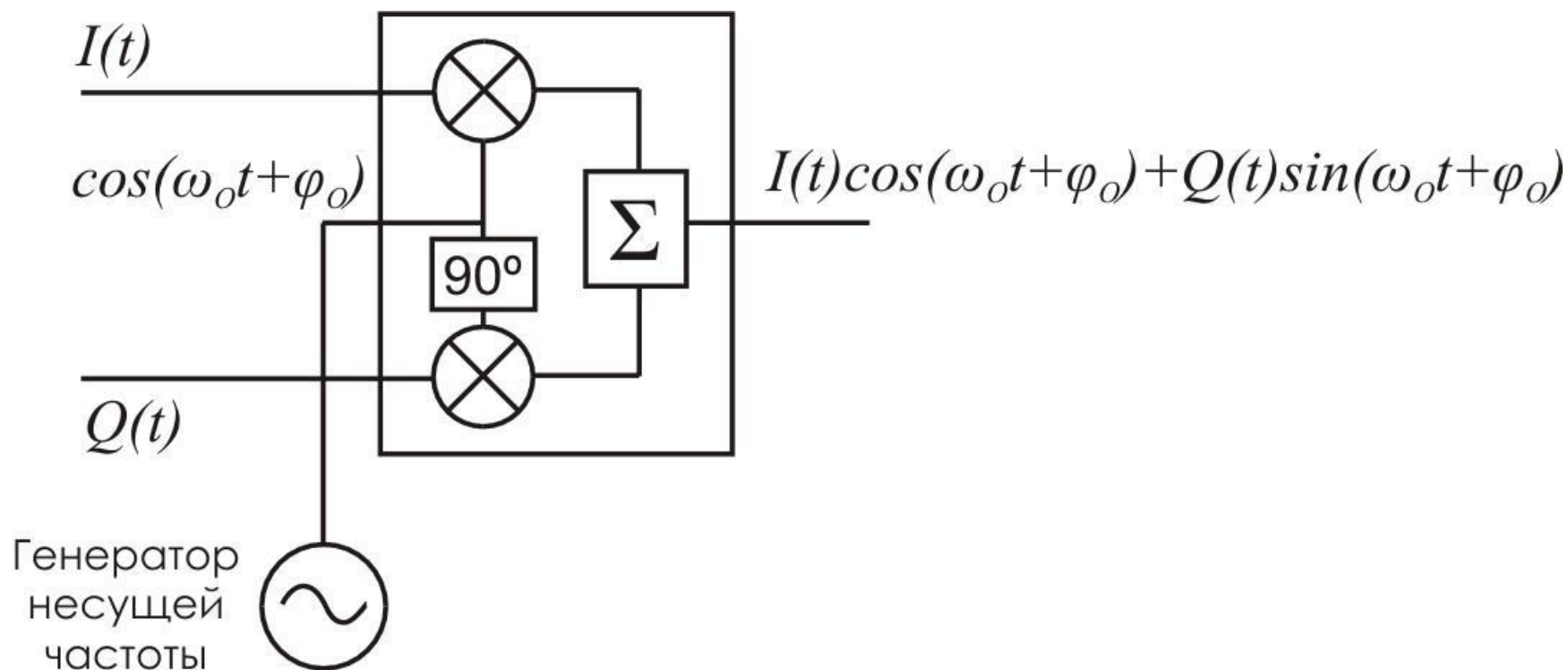


Форма сигнала



# Цифровая передача информации

## Квадратурный модулятор



# Цифровая передача информации

## Квадратурный демодулятор

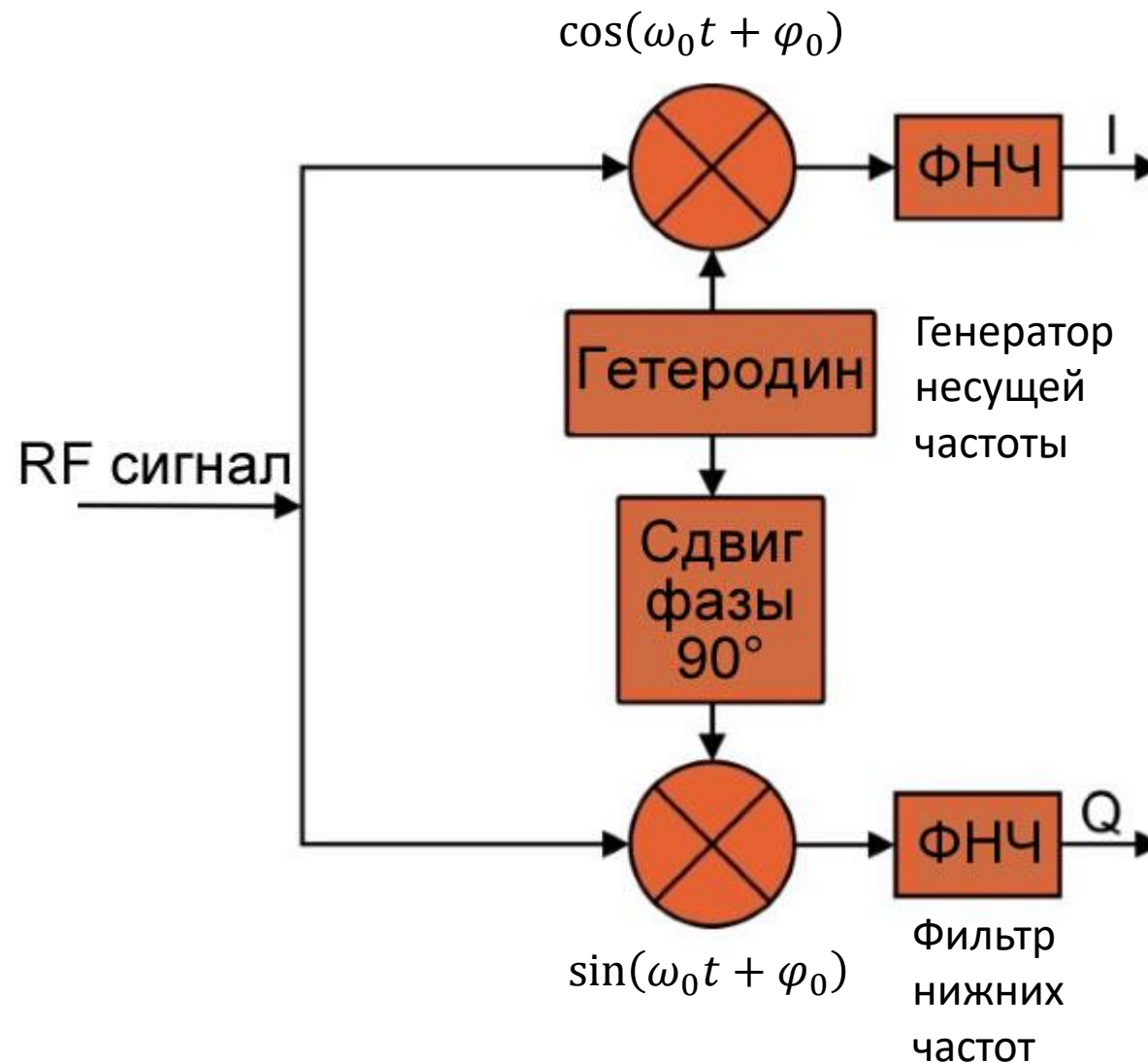
$$s(t) = I(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + Q(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Необходимые тригонометрические формулы:

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

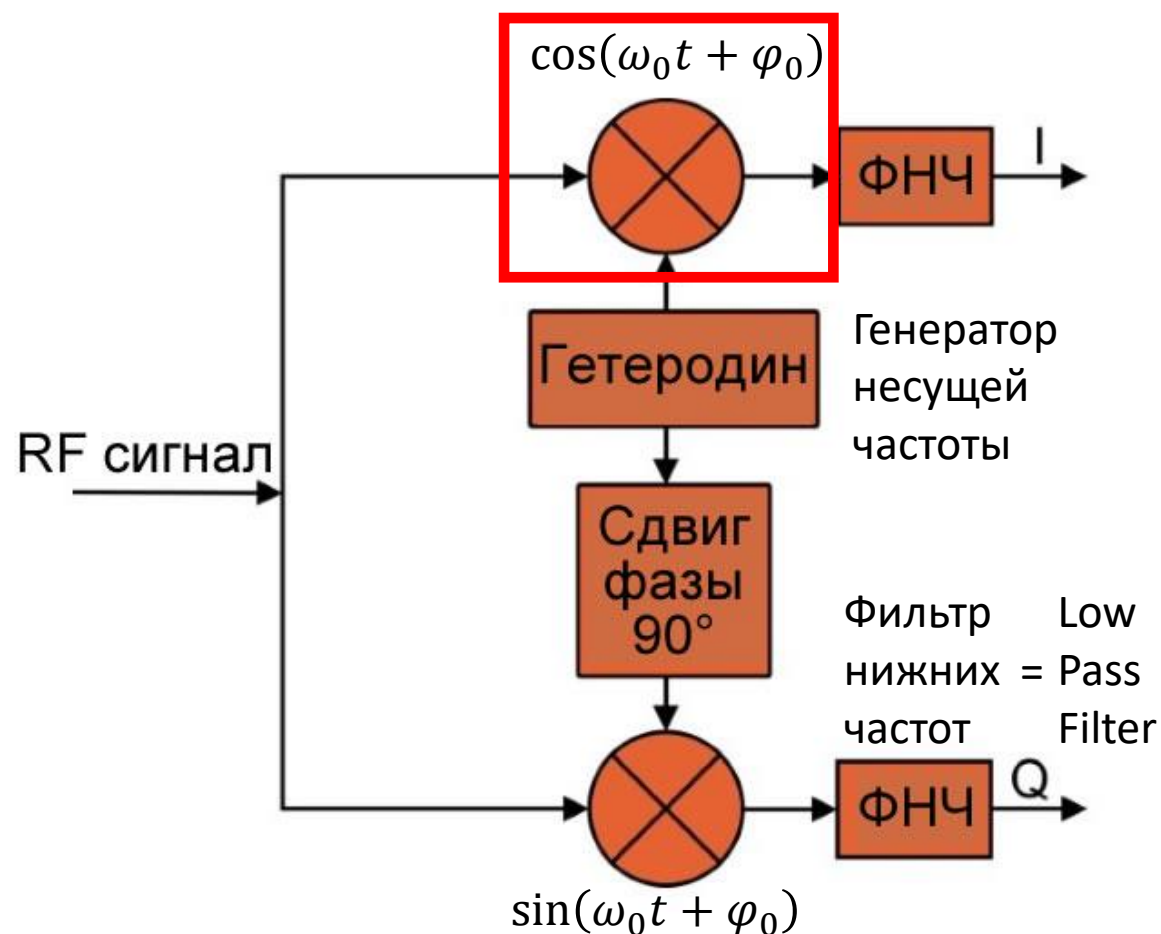
$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$



# Цифровая передача информации

## Квадратурный демодулятор



$$\begin{aligned}
 s(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) &= \\
 [I(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + Q(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) &= \\
 = I(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + Q(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) &= \\
 = I(t) \frac{1}{2} [\cos(\omega_0 t + \varphi_0 - (\omega_0 t + \varphi_0)) + \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + (\omega_0 t + \varphi_0))] + &+ \\
 + Q(t) [\sin(\omega_0 t + \varphi_0 - (\omega_0 t + \varphi_0)) + \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + (\omega_0 t + \varphi_0))] &= \\
 = I(t) \frac{1}{2} [\cos(0) + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] + Q(t) \frac{1}{2} [\sin(0) + \sin(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] &= \\
 = I(t) \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] + Q(t) \frac{1}{2} [0 + \sin(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] &= \\
 = LPF(Low Pass Filter) &= \\
 = I(t) \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] + Q(t) \frac{1}{2} [0 + \sin(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] &= \\
 = I(t) \frac{1}{2} &
 \end{aligned}$$

# Цифровая передача информации

## Квадратурная амплитудная модуляция

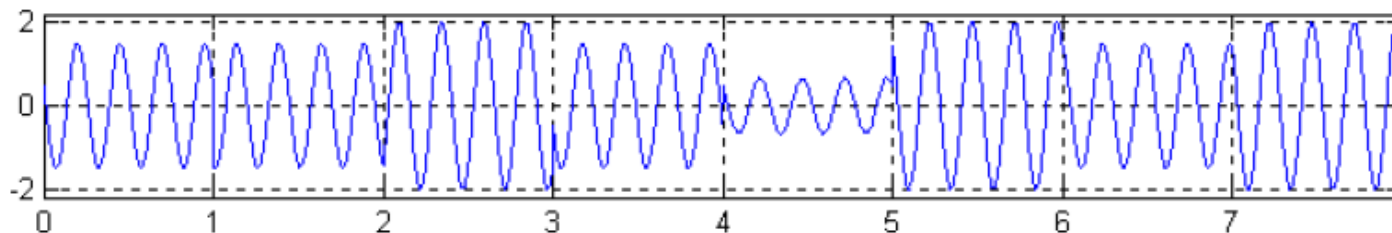
Сигнал квадратурной амплитудной модуляции (КАМ, quadrature amplitude modulation, QAM) можно описать как:

$$s_i(t) = s_{i_1}\varphi_1(t) + s_{i_2}\varphi_2(t),$$

где  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  – ортонормированные функции, заданные на интервале  $[0, T]$  и определяющие форму сигнала,  $i = 0, 1, 2, \dots, q - 1$

$s_{i_1}$  и  $s_{i_2}$  – амплитудные множители, которые принимают дискретные значения, равномерно расположенные на некотором конечном интервале, и таким образом QAM-сигнал представляет собой сумму двух ортонормированных АМ сигналов

$$s_{i_1} = A \left( 1 - \frac{2i_1}{\sqrt{q} - 1} \right)$$
$$s_{i_2} = A \left( 1 - \frac{2i_2}{\sqrt{q} - 1} \right)$$



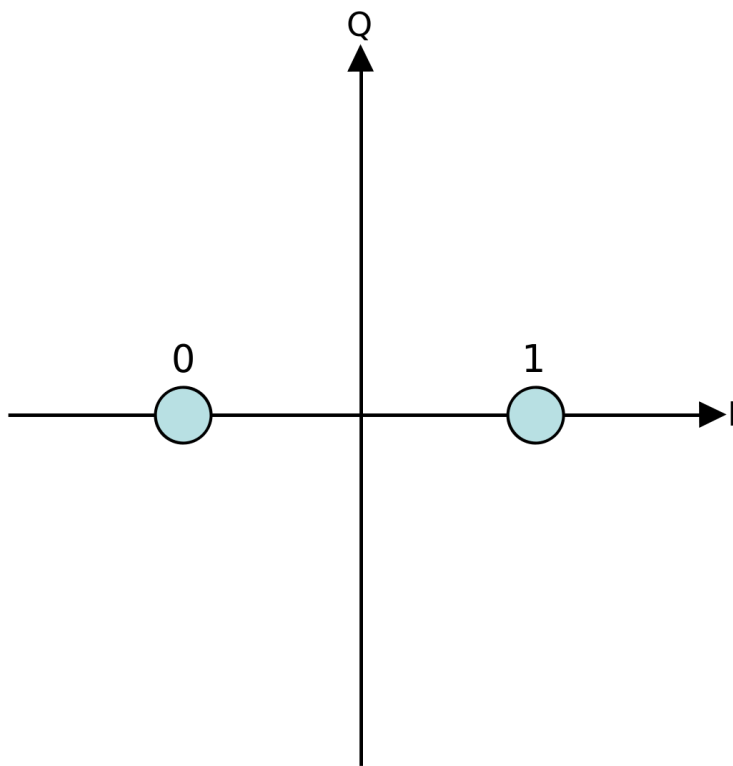


# Цифровая передача информации

Сигнальные созвездия

*Двоичная фазовая манипуляция*

*BPSK — binary phase-shift keying*

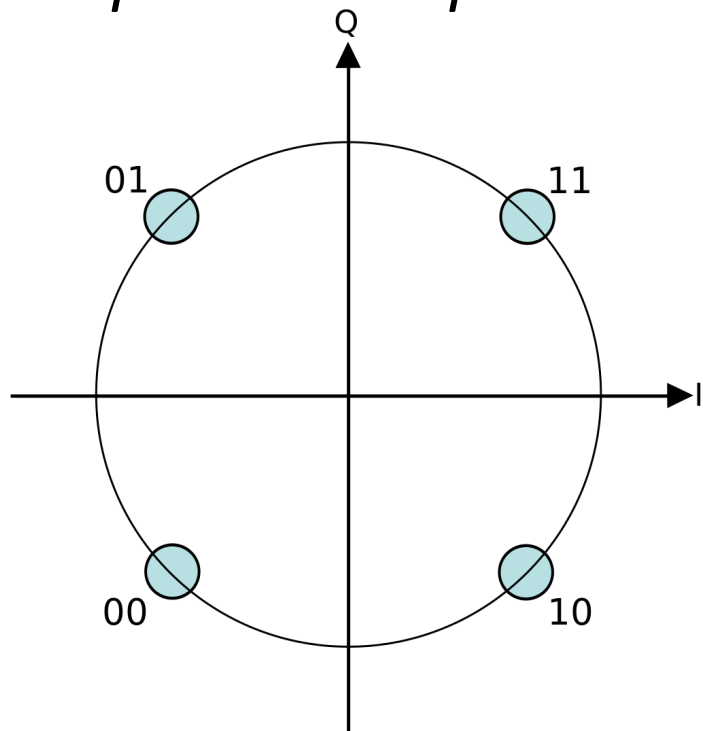


Координаты	
Последовательность бит	Координаты в IQ
0	(-1; 0)
1	( 1; 0)

# Цифровая передача информации

## Сигнальные созвездия

*Квадратурная фазовая манипуляция*  
*QPSK - quadrature phase-shift keying*

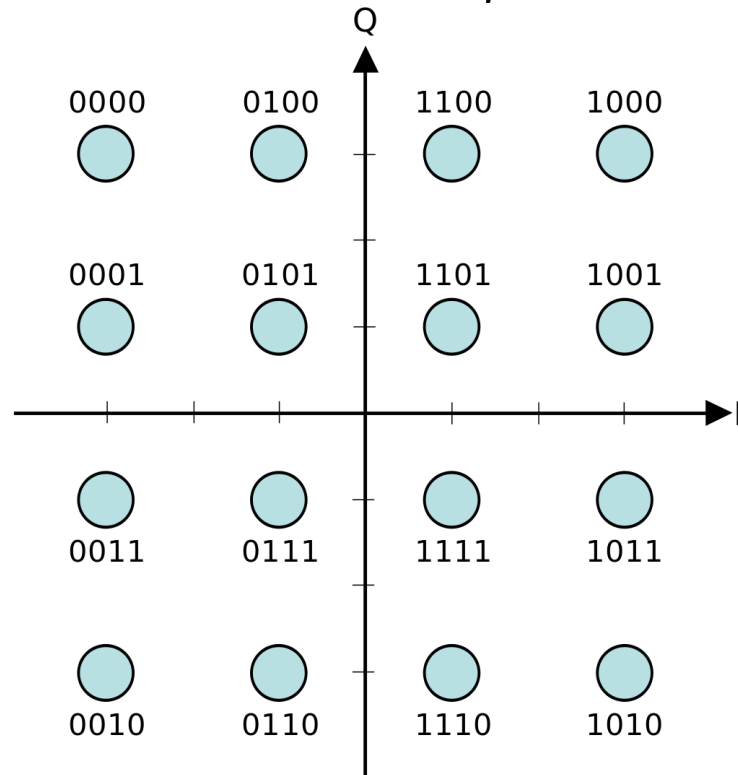


Координаты	
Последовательность бит	Координаты в IQ
00	(-1; -1)
01	(-1; 1)
10	( 1; -1)
11	( 1; 1)

# Цифровая передача информации

## Сигнальные созвездия

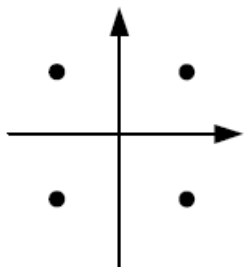
*Квадратурная модуляция*  
*16 QAM - Quadrature Amplitude Modulation*



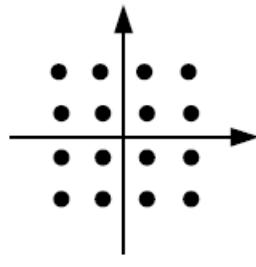
Координаты	
Последовательность бит	Координаты в IQ
0000	(-3; 3)
0001	(-3; 1)
0010	(-3; -3)
0011	(-3; -1)
0100	(-1; 3)
0101	(-1; 1)
0110	(-1; -3)
0111	(-1; -1)
1000	( 3; 3)
1001	( 3; 1)
1010	( 3; -3)
1011	( 3; -1)
1100	( 1; 3)
1101	( 1; 1)
1110	( 1; -3)
1111	( 1; -1)

# Цифровая передача информации

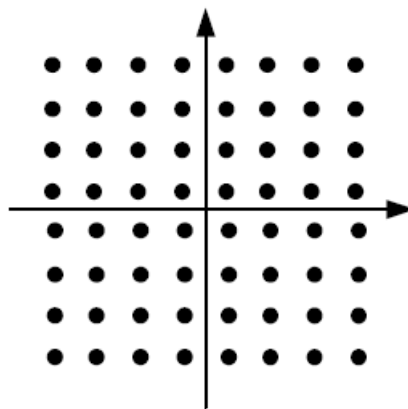
## Сигнальные созвездия



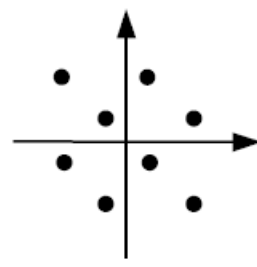
а



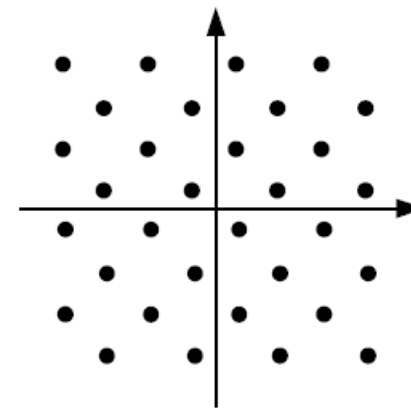
б



в



а



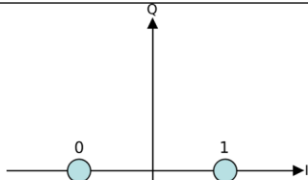
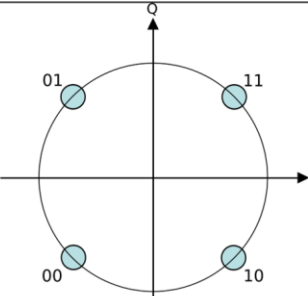
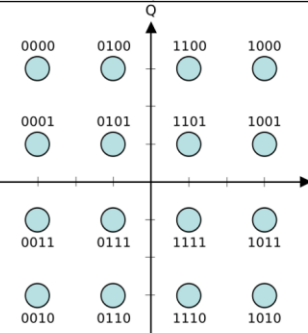
б

Сигнальное множество КАМ а)  $q = 4$ , б)  $q = 16$ , в)  $q = 64$

Сигнальное множество КАМ а)  $q = 8$ , б)  $q = 32$

# Цифровая передача информации

## Сигнальные созвездия

Название созвездия	Изображение	$N_{Constellation}$	$N_{\text{bit per point}}$
BPSK		2	1
QPSK		4	2
16-QAM		16	

$$N_{\text{bit per point}} = \log_2 N_{Constellation}$$

$N_{\text{bit per point}}$  – количество бит, с помощью которых можно закодировать IQ-точку в выбранном созвездии, или же количество бит, которые можно передать одной точкой созвездия

$N_{Constellation}$  – количество всех точек созвездия

# Цифровая передача информации

## Сигнальные созвездия

$a_i$  - точки созвездия

$N$  - число точек созвездия

$P$  - мощность

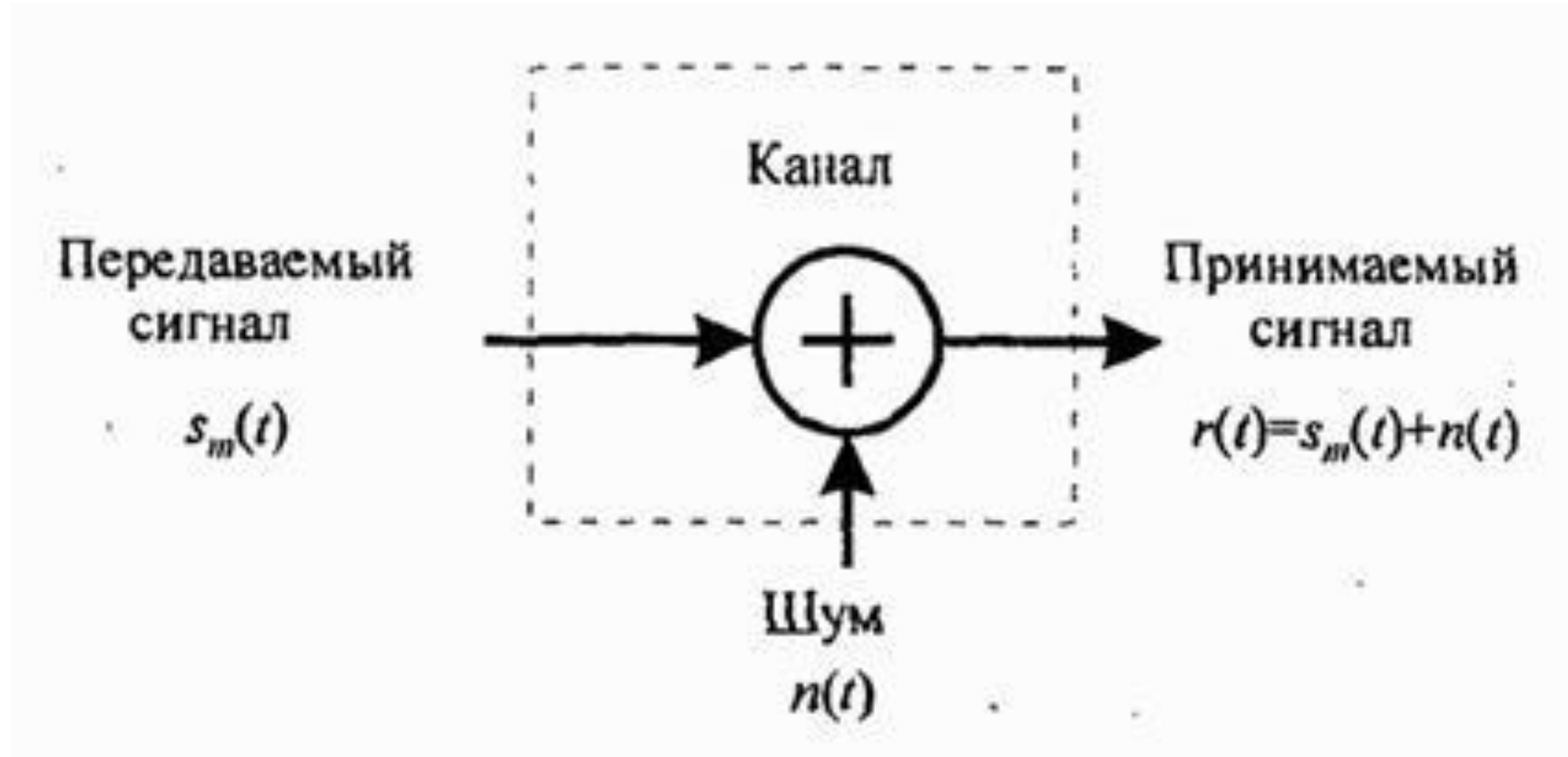
$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \cdot \text{conj}(a_i) = 1$$
$$a_i = \frac{z_i}{n}$$

$n$  – нормировка

$$n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N z_i \cdot \text{conj}(z_i)}{N}}$$

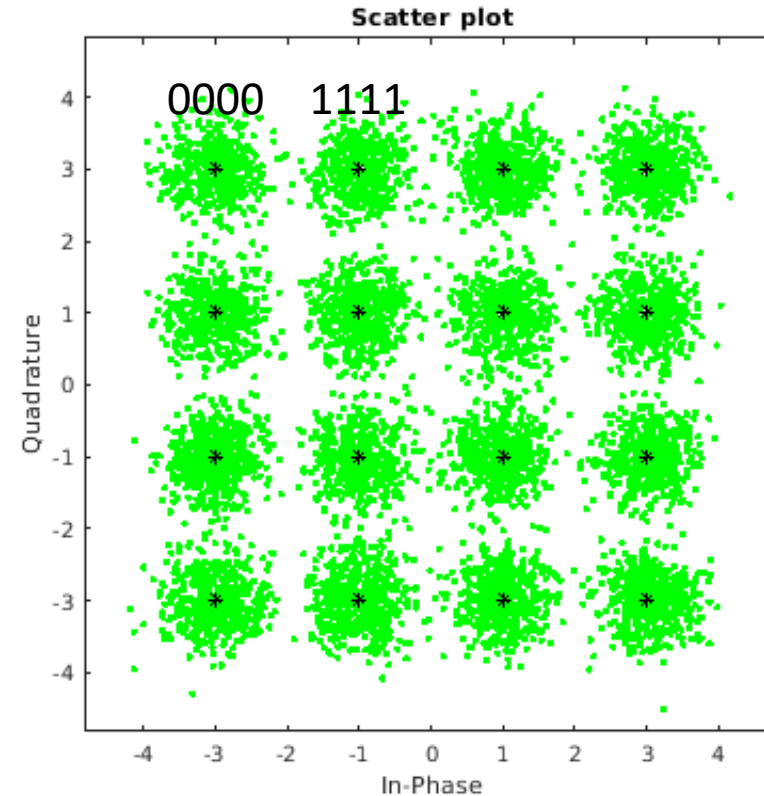
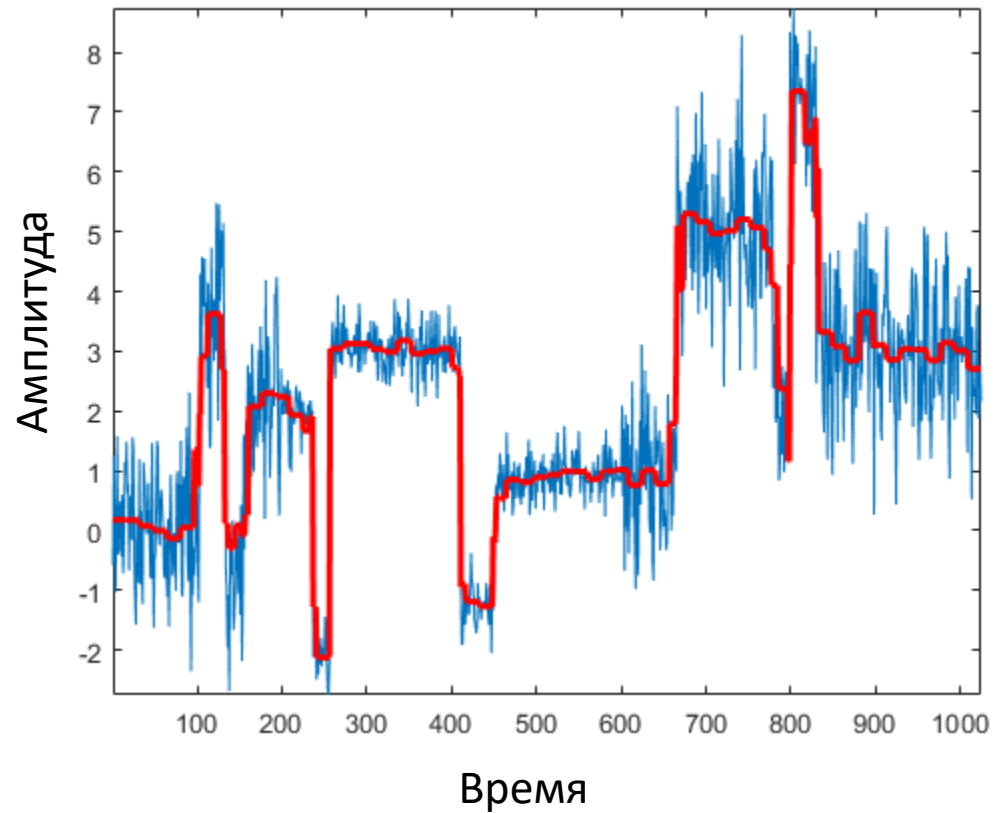
# Сигнальные созвездия и помехи

Отображение Грея



# Сигнальные созвездия и помехи

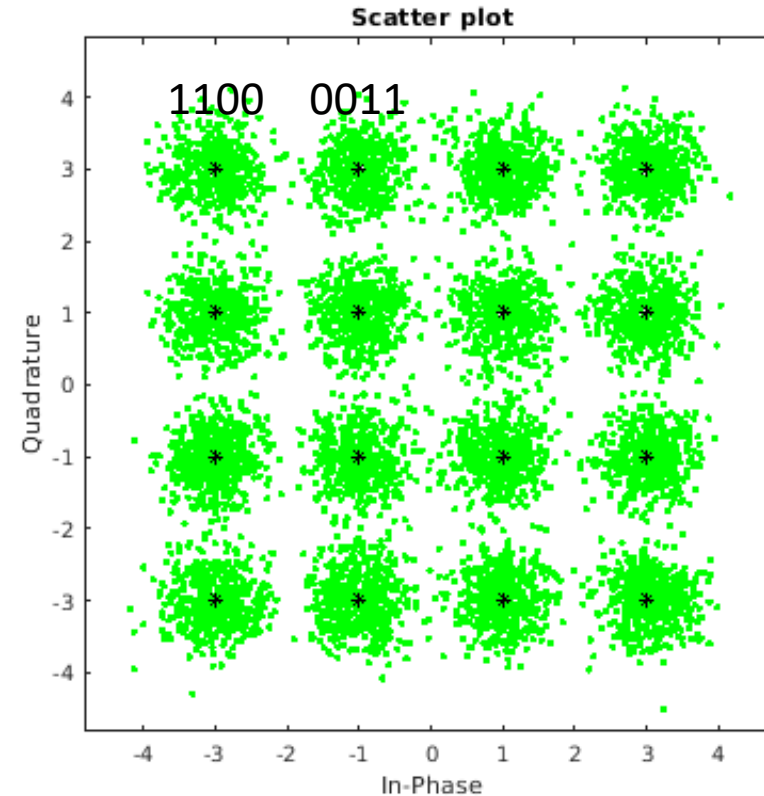
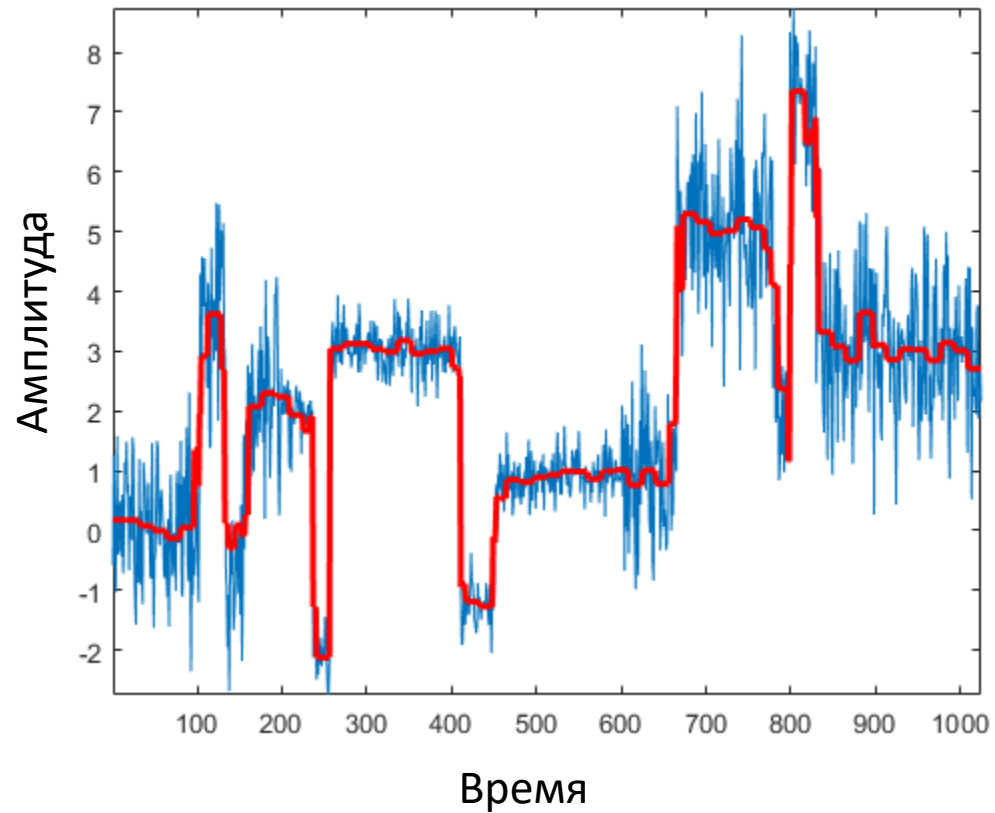
Отображение Грея





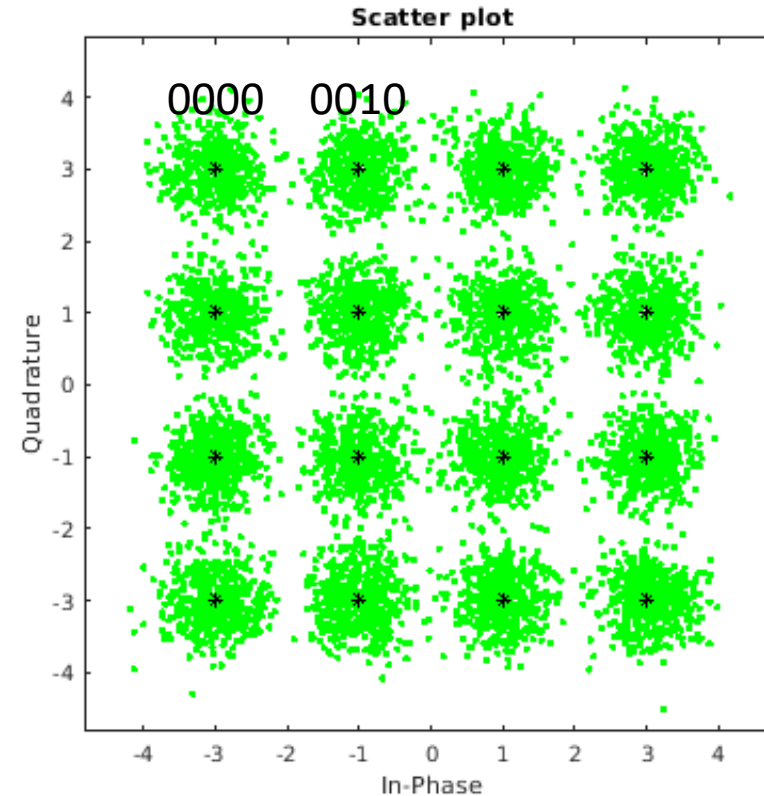
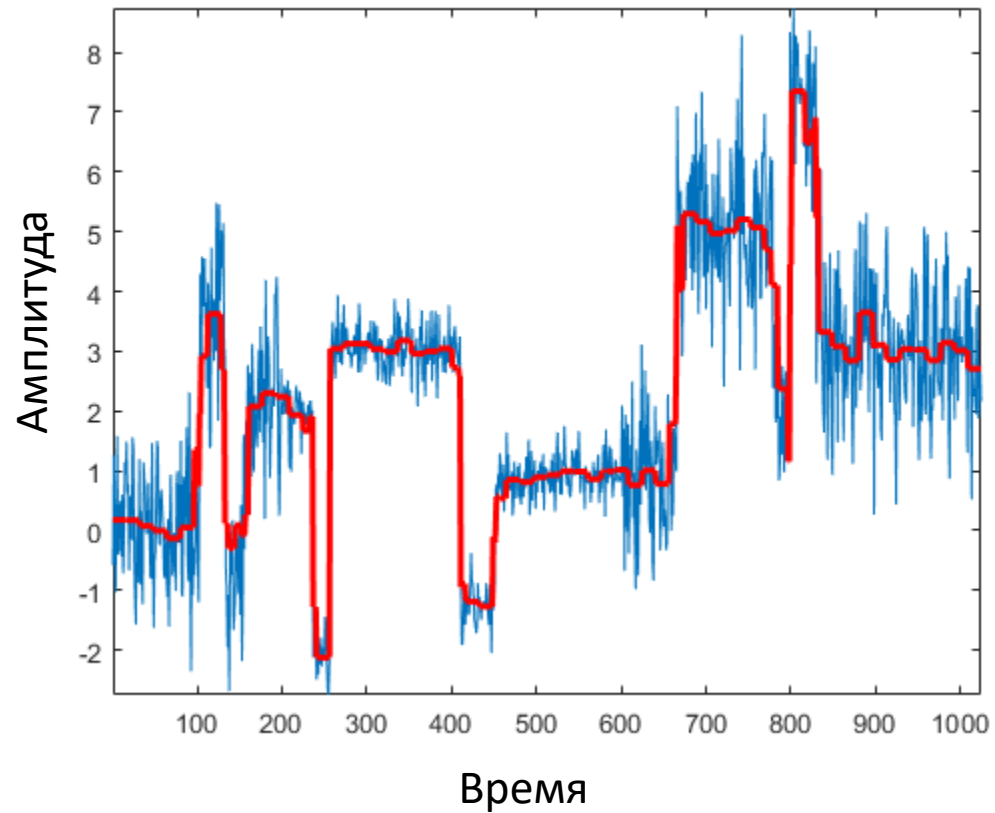
# Сигнальные созвездия и помехи

Отображение Грея



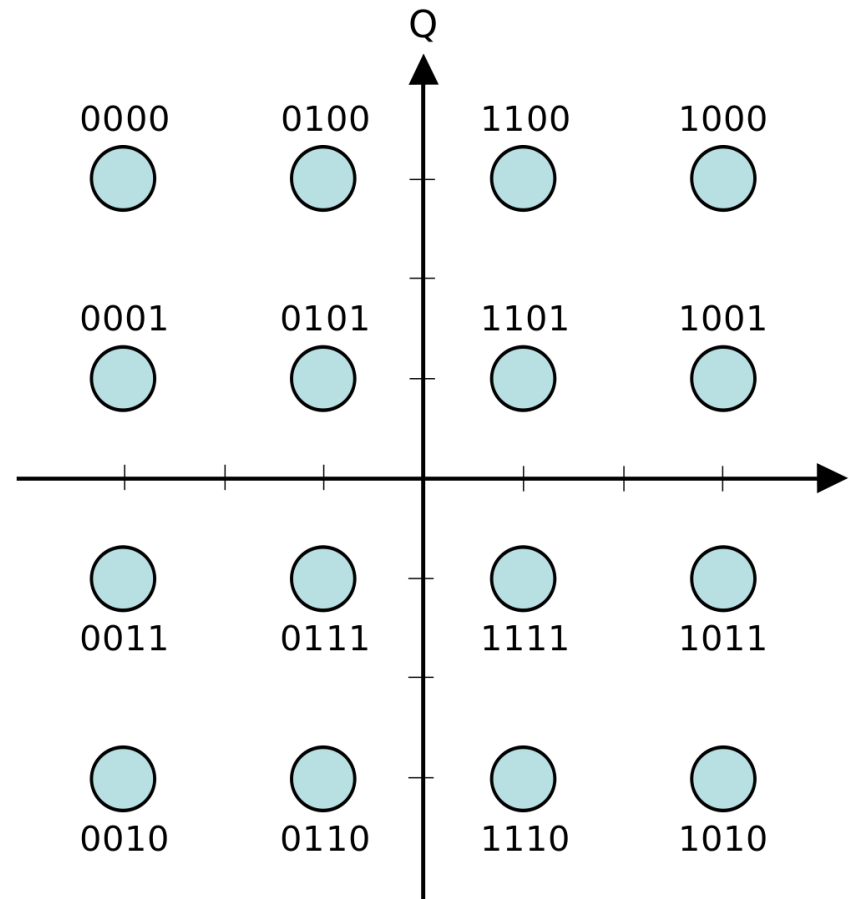
# Сигнальные созвездия и помехи

Отображение Грея



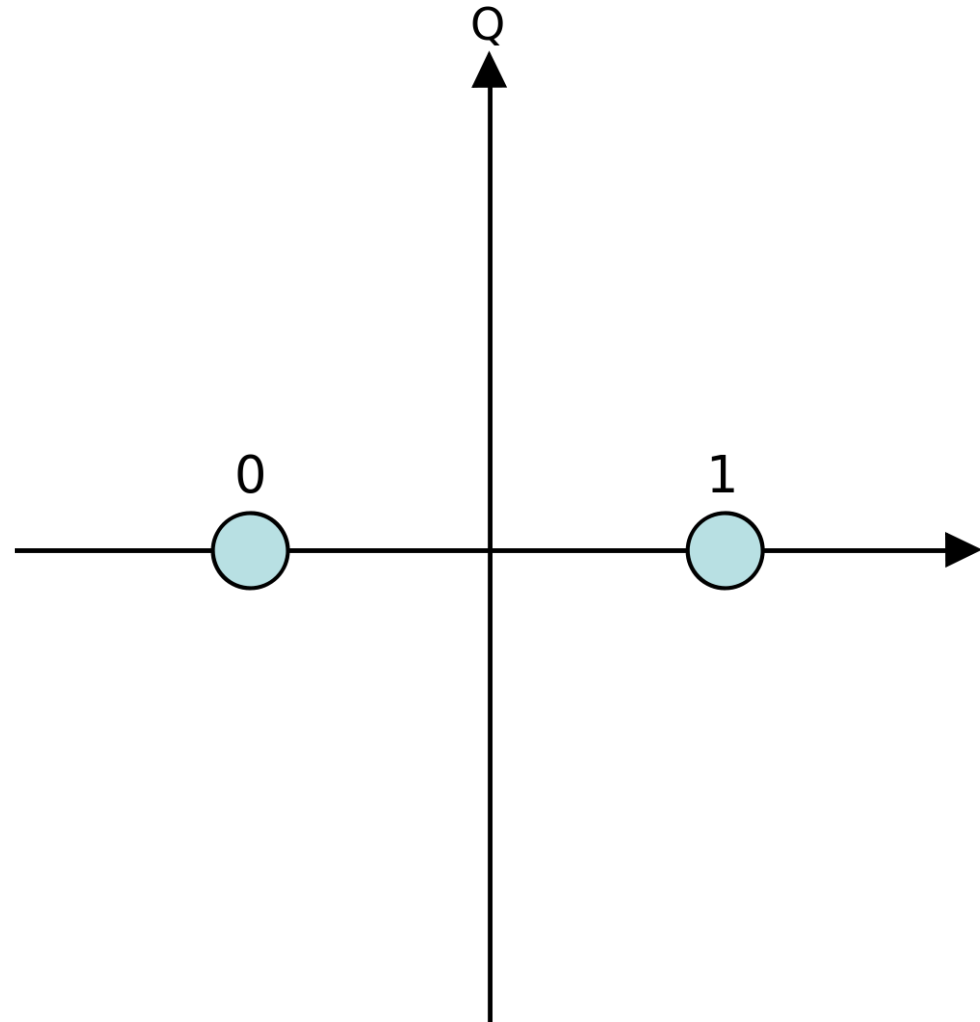
# Сигнальные созвездия и помехи

Отображение Грея



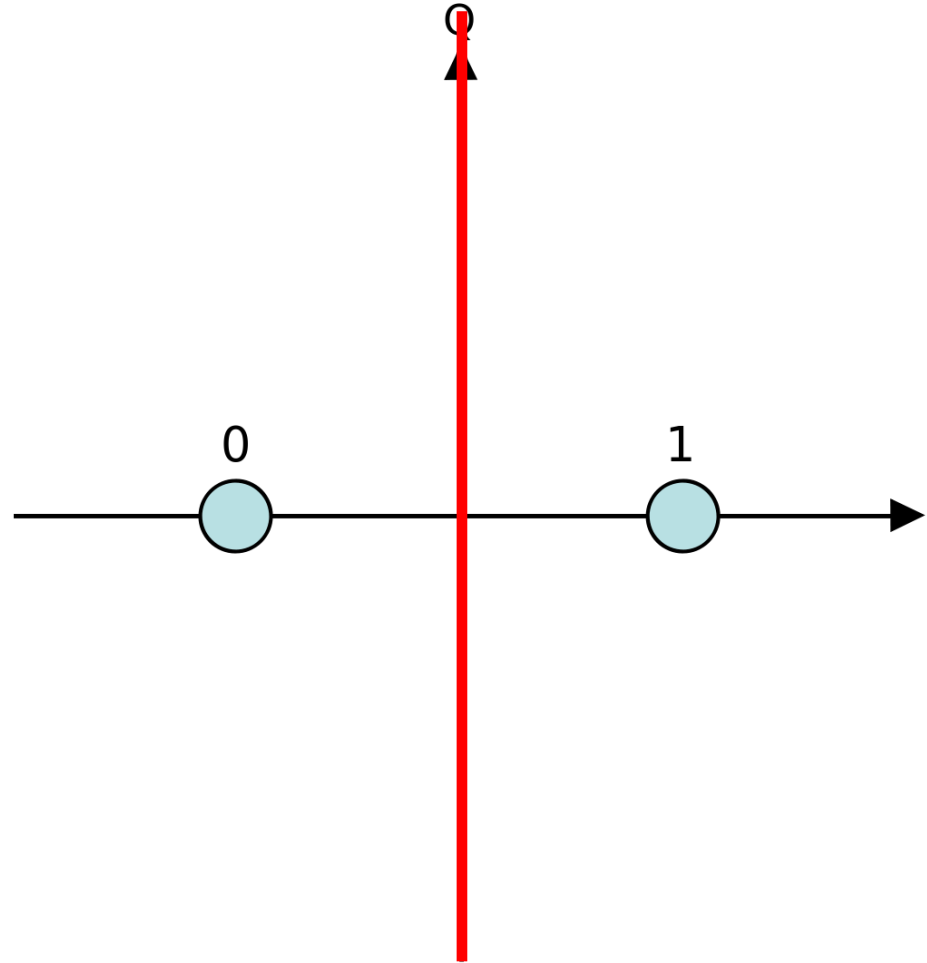
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 1



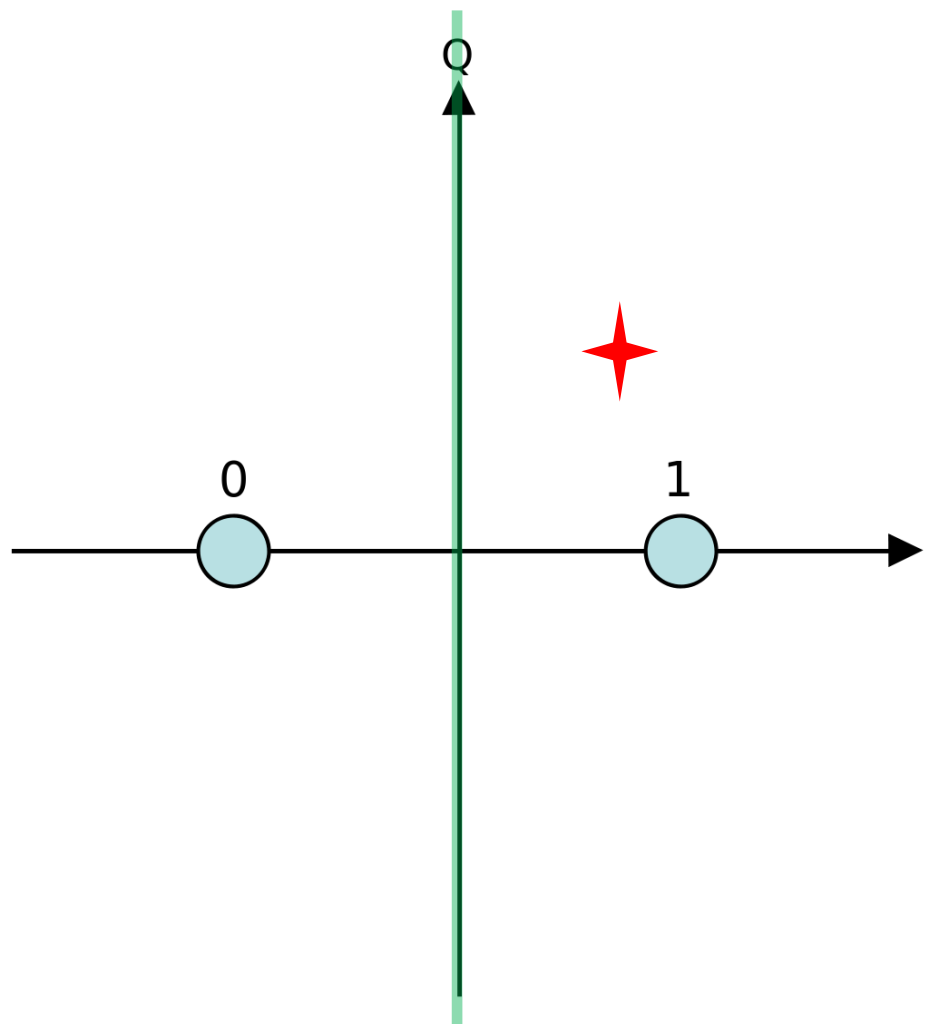
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 1



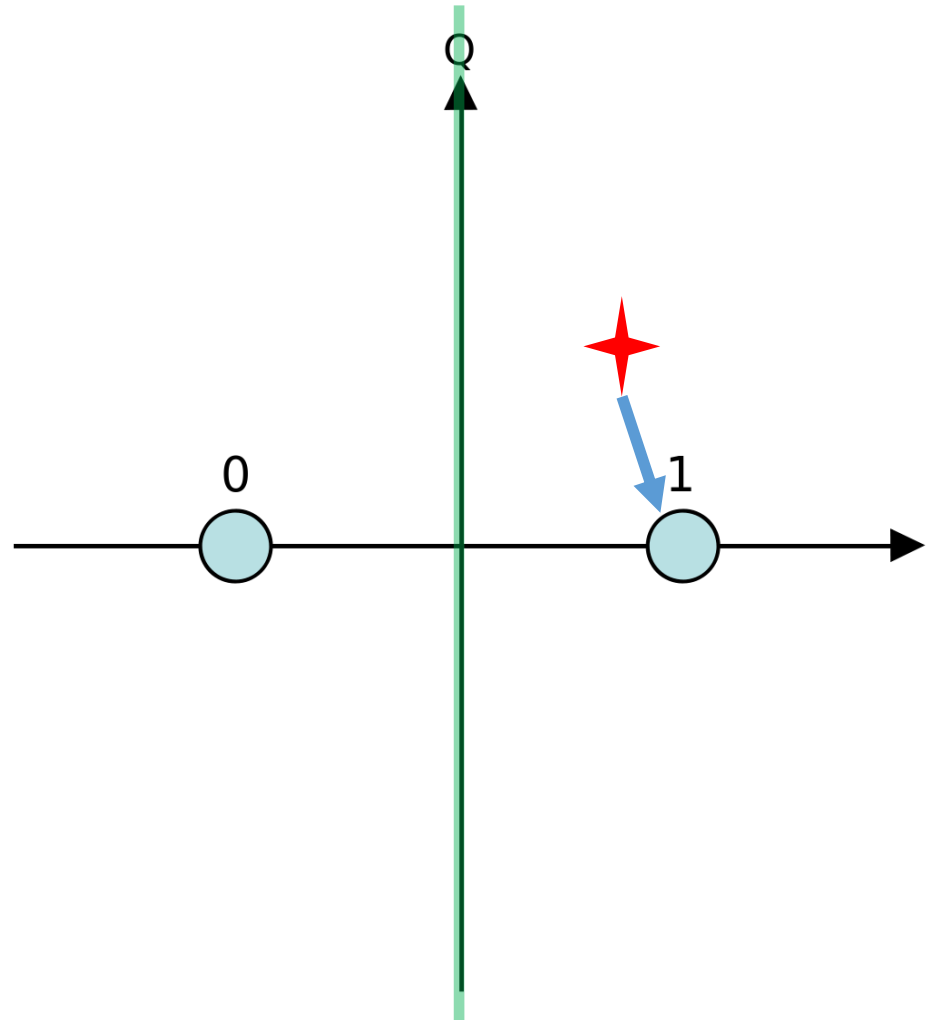
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 1



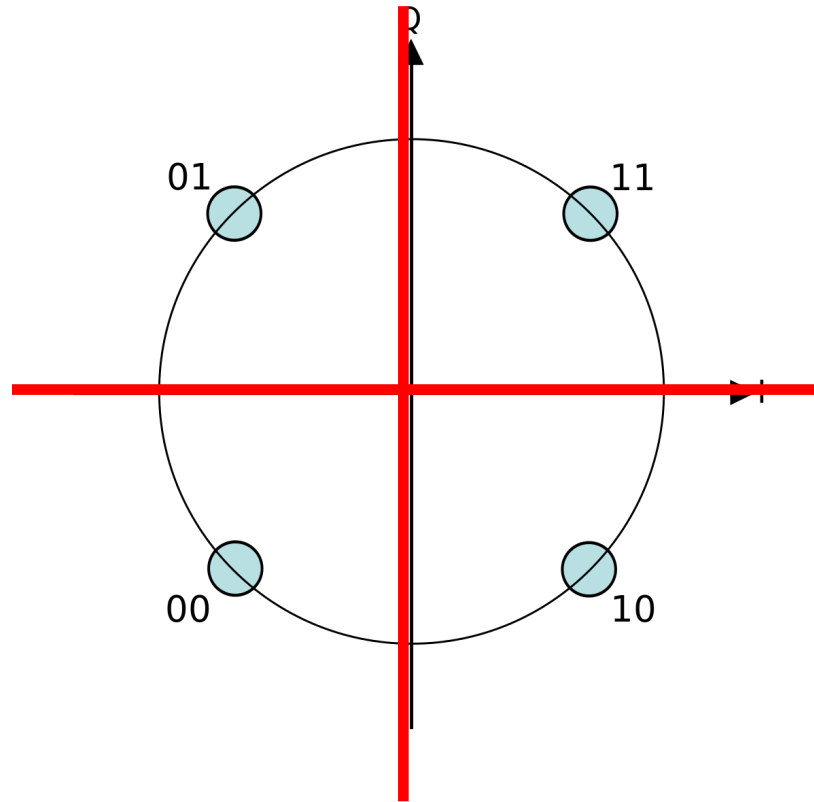
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 1



# Цифровая передача информации

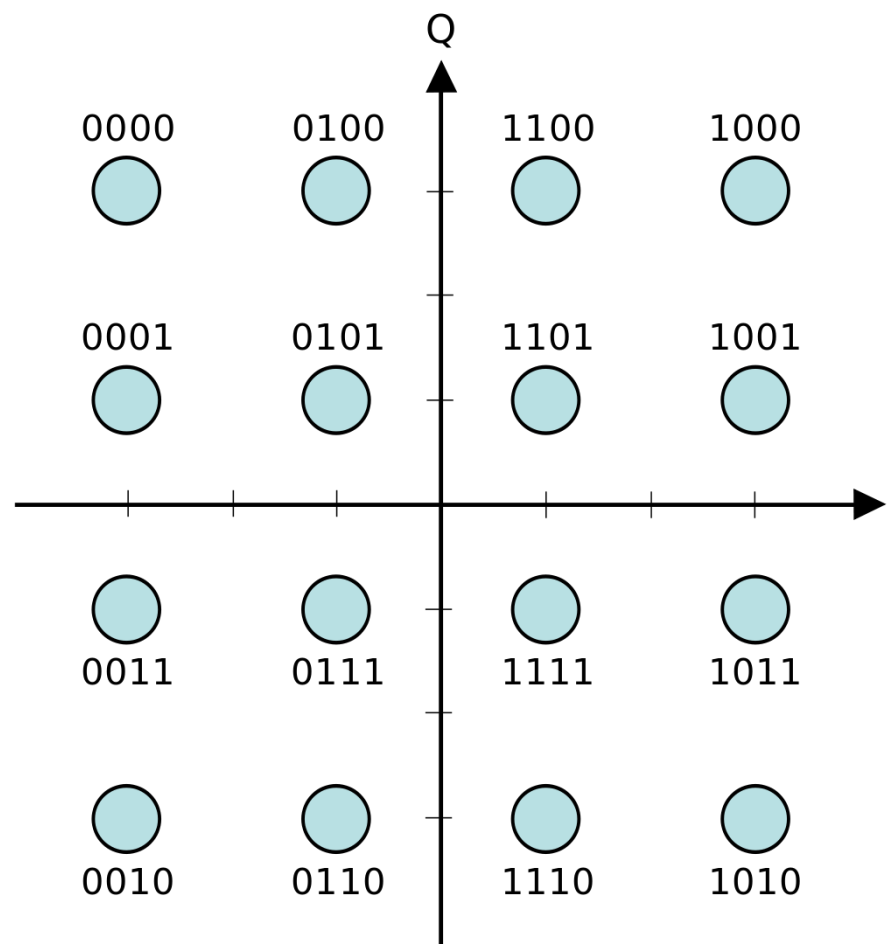
Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 1





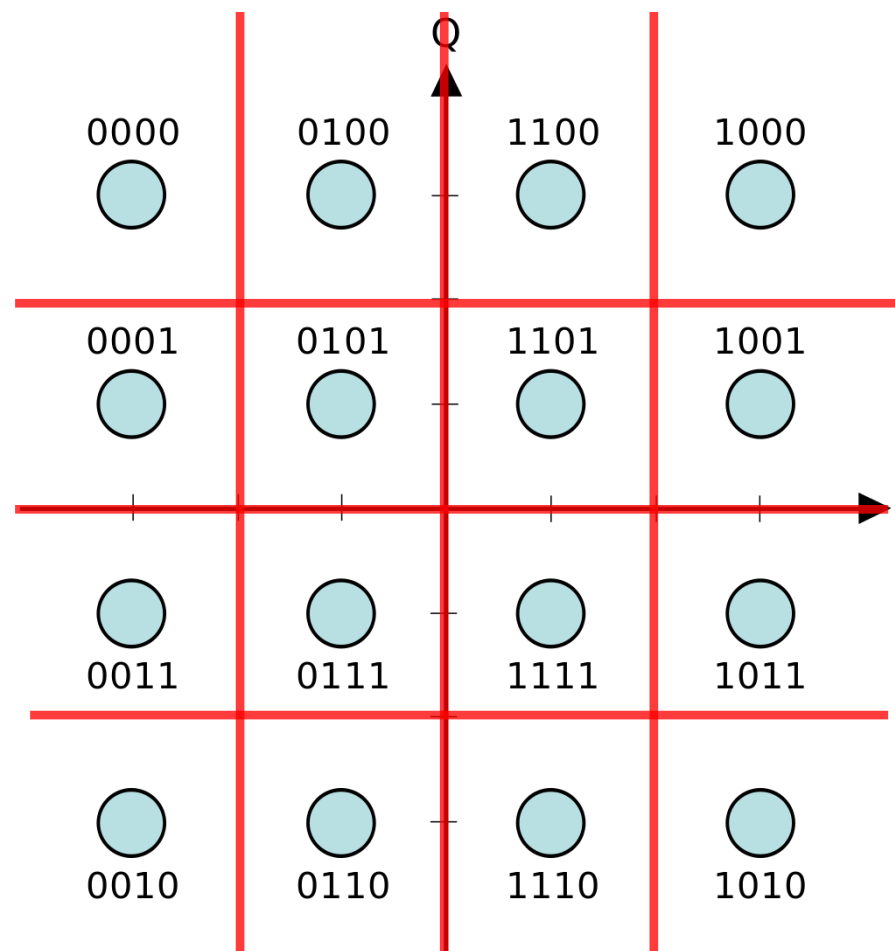
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 1



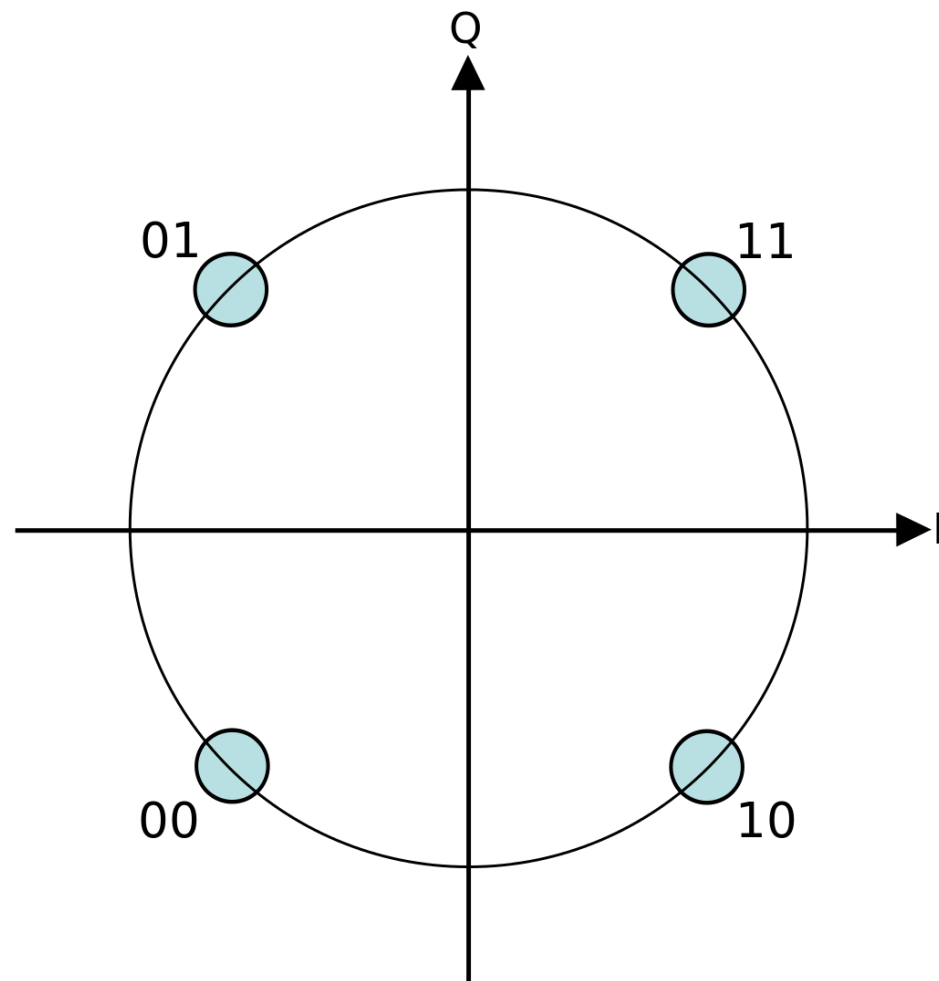
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 1



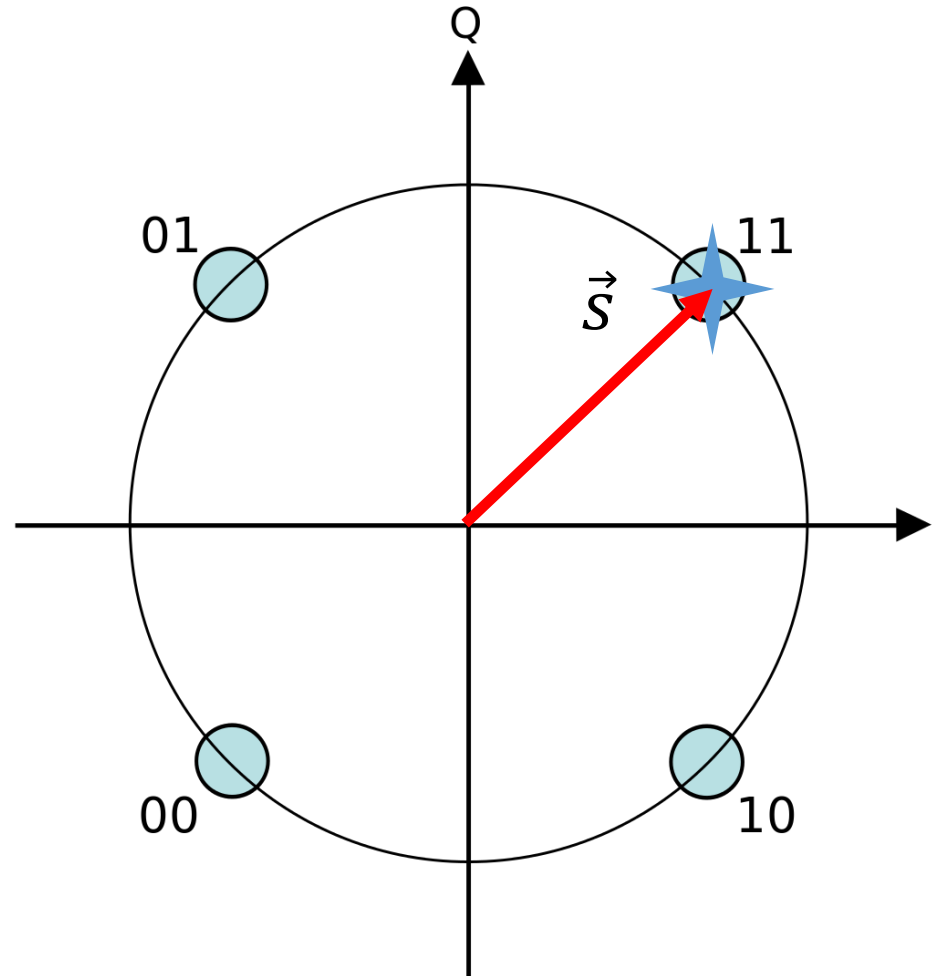
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



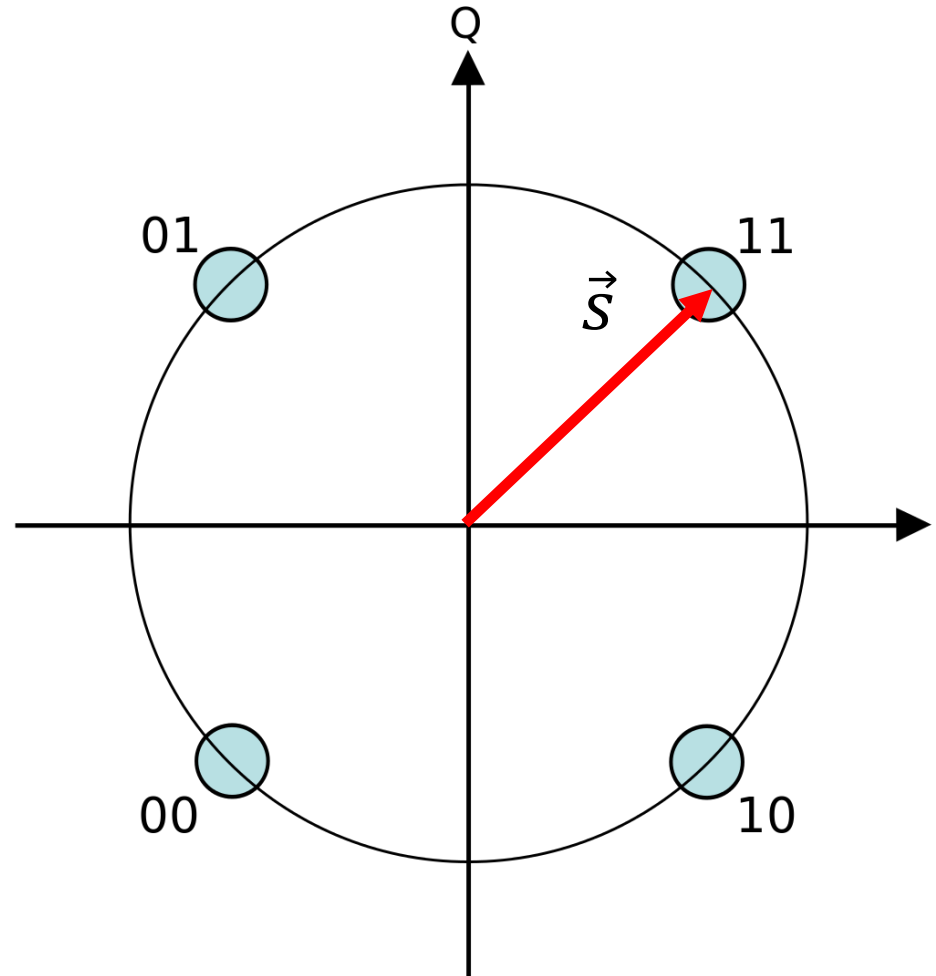
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



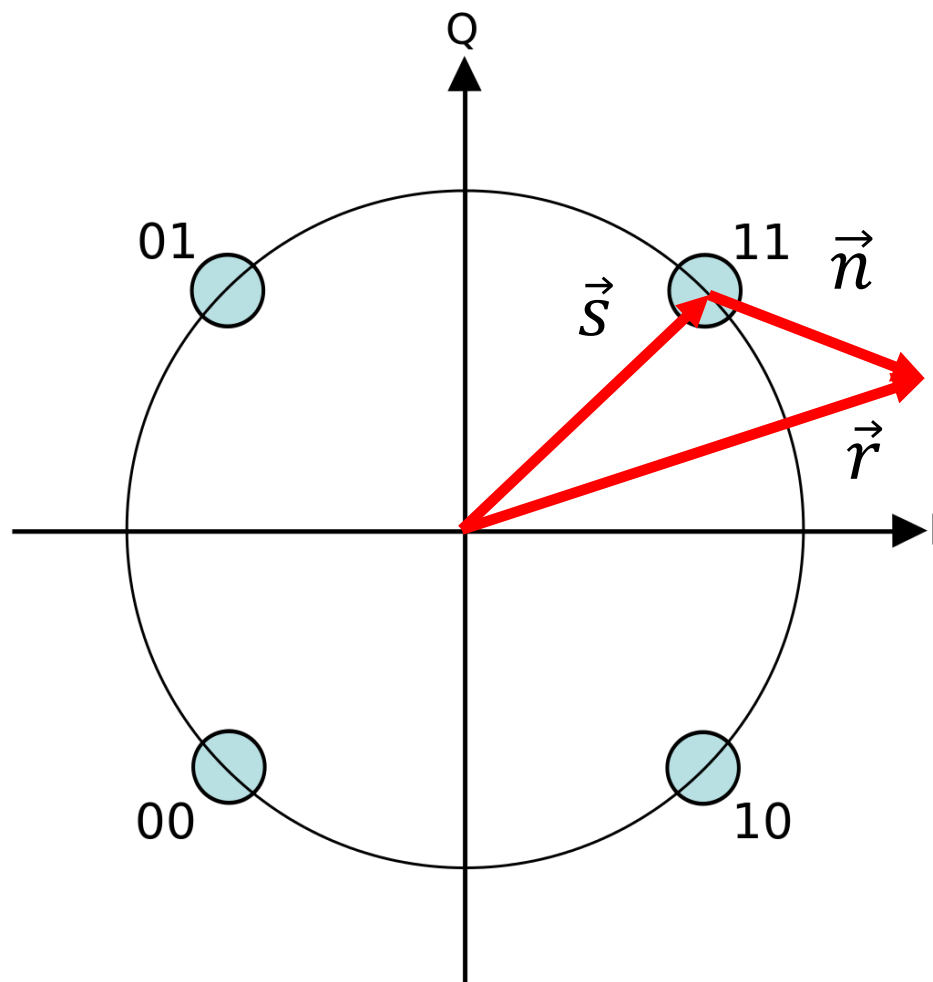
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



# Цифровая передача информации

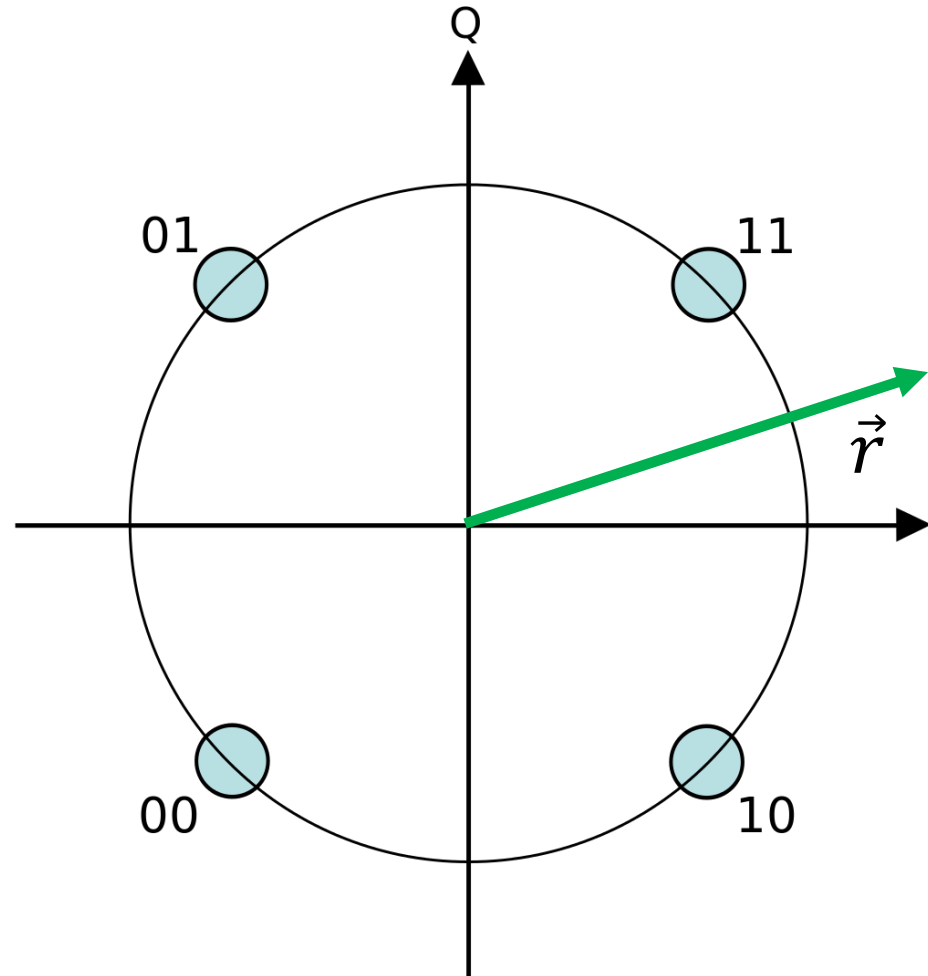
Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



$$\vec{r} = \vec{s} + \vec{n}$$

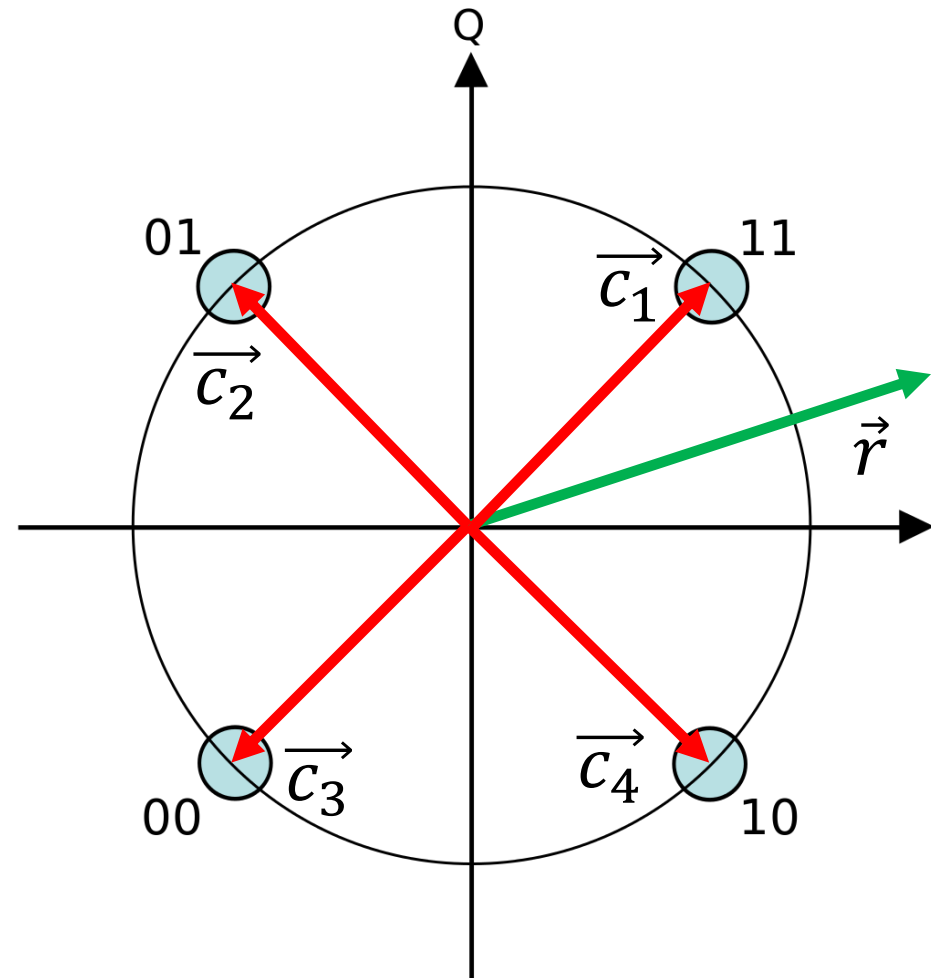
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



# Цифровая передача информации

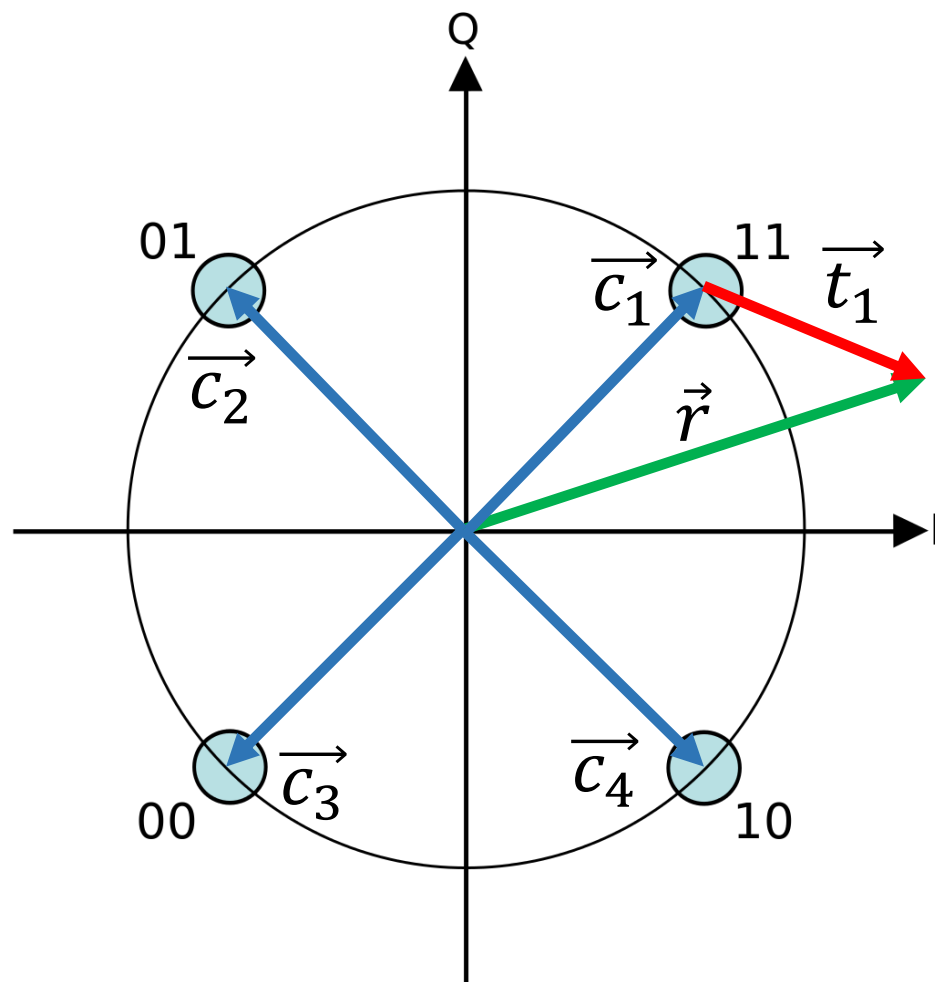
Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2





# Цифровая передача информации

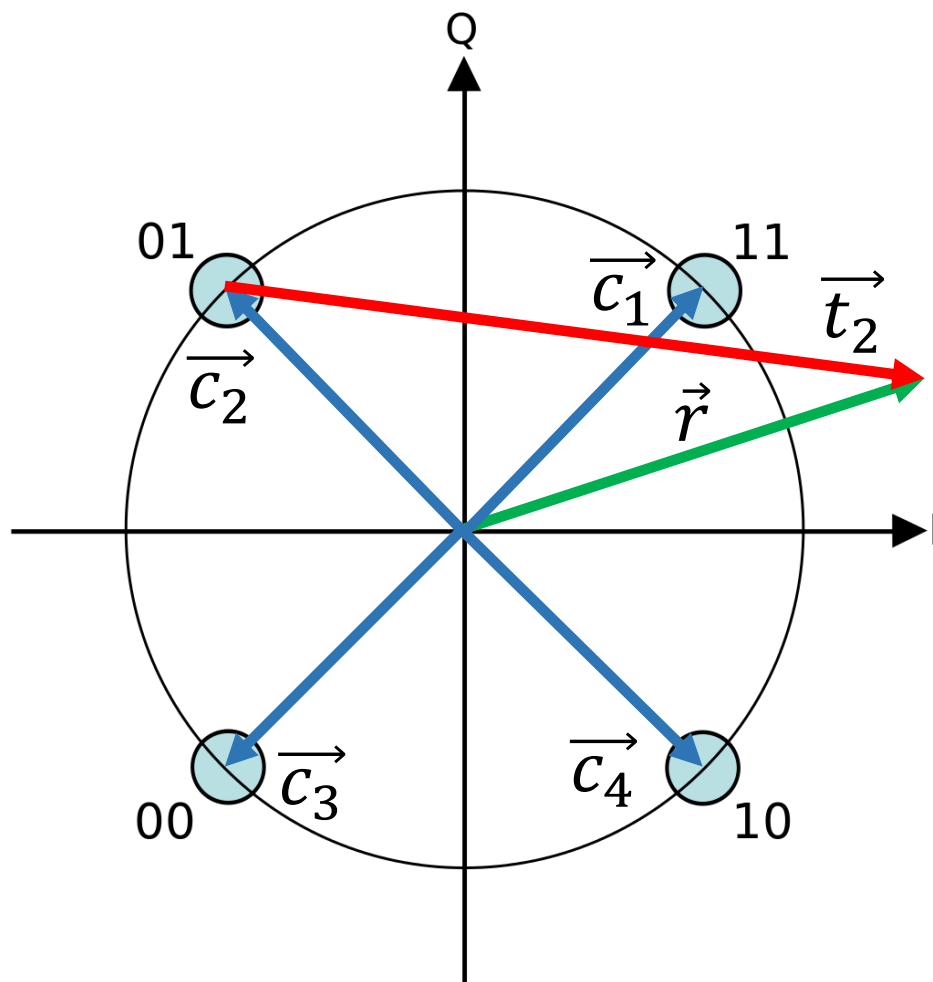
Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



$$\vec{t}_1 = \vec{r} - \vec{c}_1$$

# Цифровая передача информации

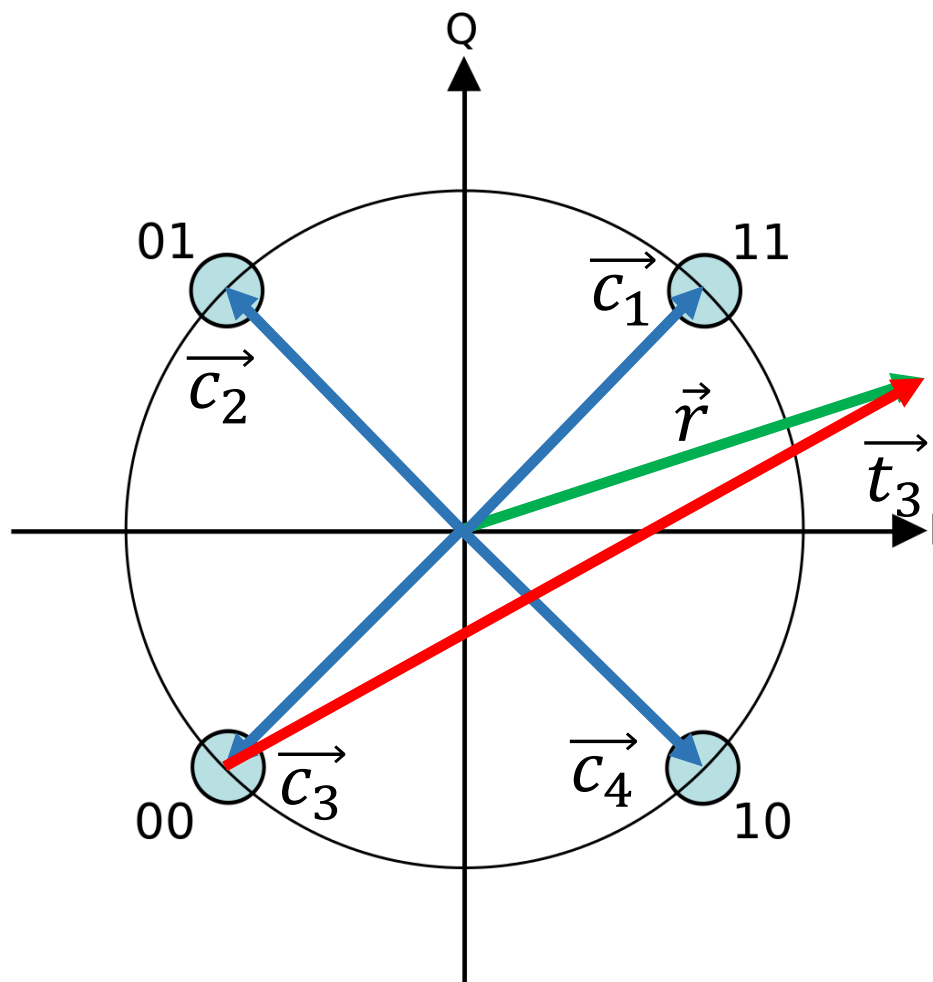
Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



$$\vec{t}_2 = \vec{r} - \vec{c}_2$$

# Цифровая передача информации

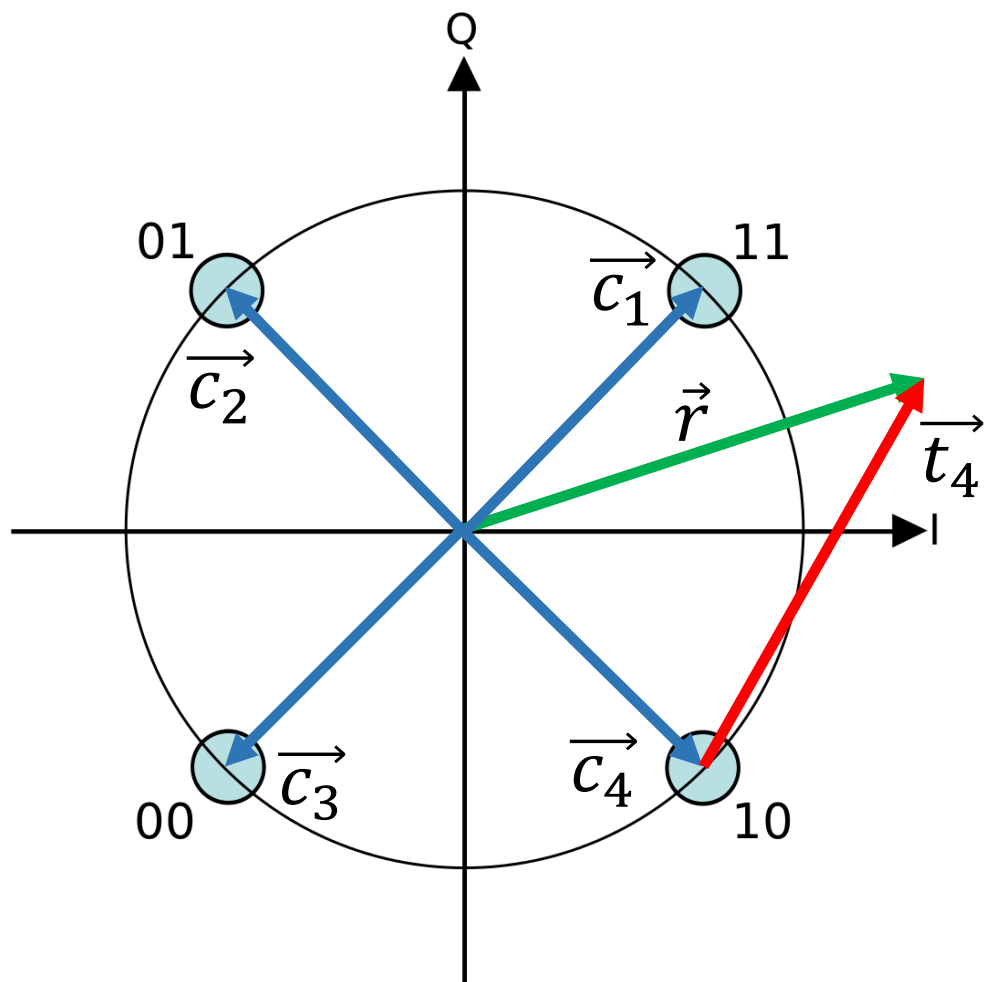
Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



$$\vec{t}_3 = \vec{r} - \vec{c}_3$$

# Цифровая передача информации

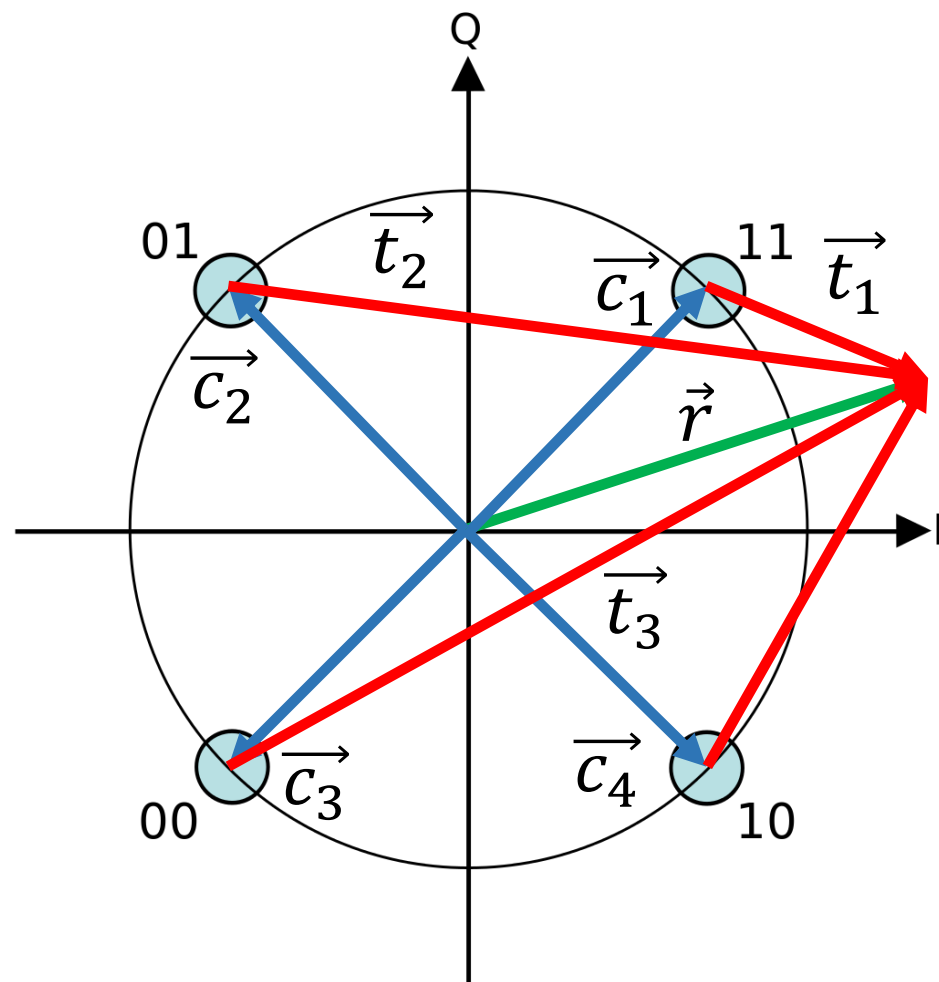
Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



$$\vec{t}_4 = \vec{r} - \vec{c}_4$$

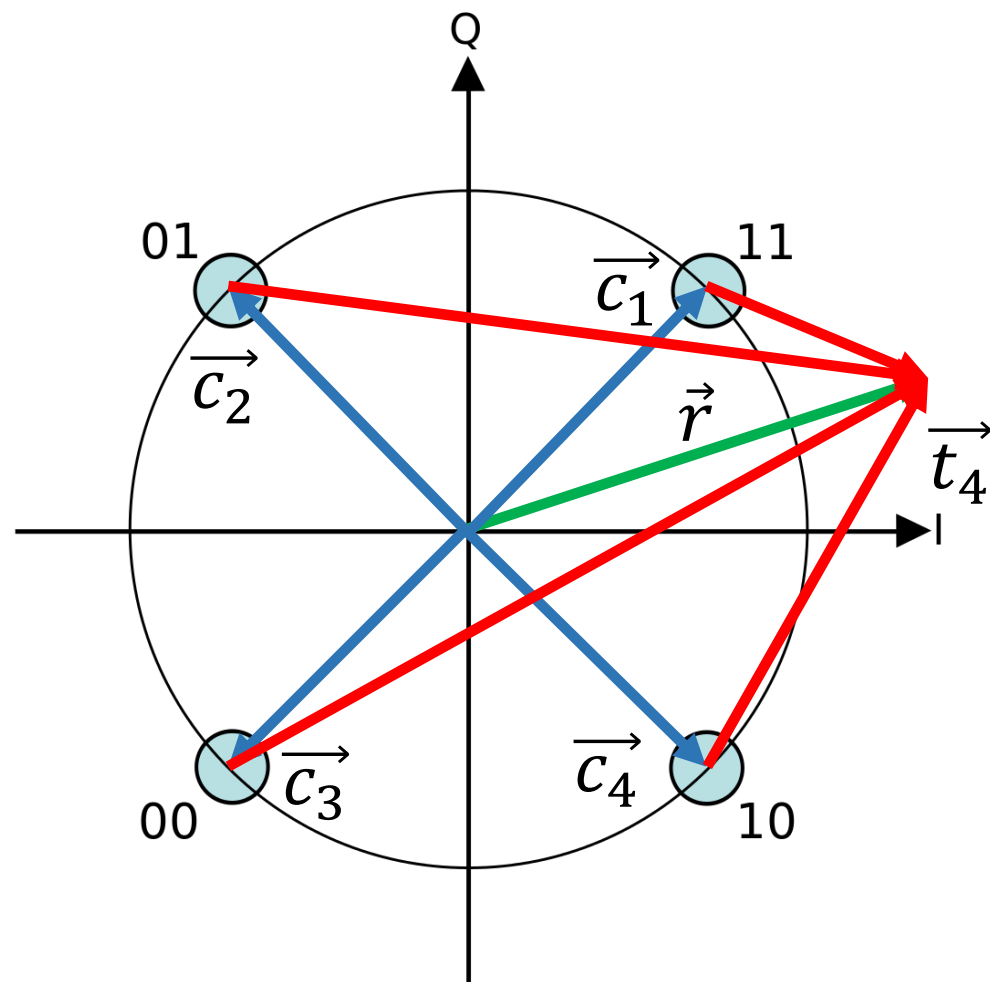
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



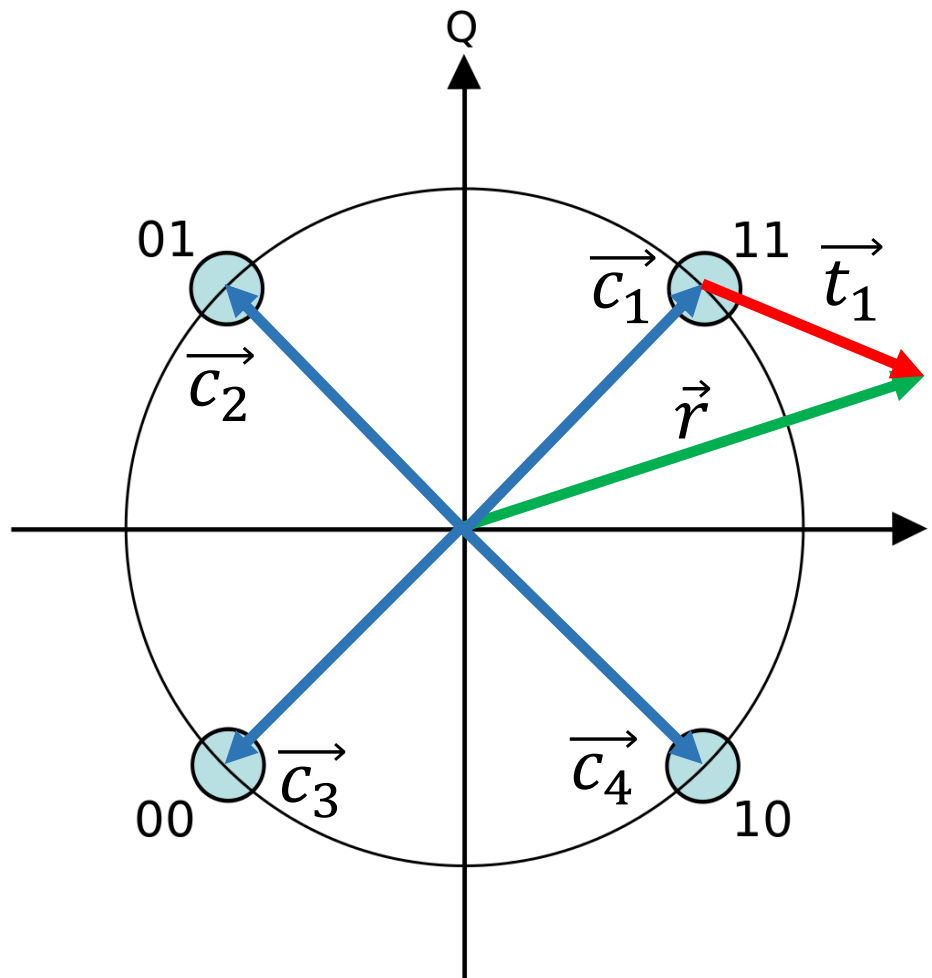
# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



# Цифровая передача информации

Демодулятор с жёстким входом и выходом. Вариант 2



$$\vec{t}_1 = \vec{r} - \vec{c}_1$$

# Отношение сигнал-шум SNR (signal-to-noise ratio)

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left( \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2$$

$$SNR \text{ (дБ)} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)$$

- где,  $P$  – средняя мощность сигнала,
- $A$  – средняя амплитуда сигнала.



Энергия на передачу одного бита в канале

$$P_{signal} = \frac{kE_b}{T} = RE_b$$

где  $k$  – количество бит на символ,

$T$  – длительность символа (с),

$R$  – скорость передачи (бит/с),

$E_b$  – энергия на передачу одного бита.

# Спектральная плотность мощности шума

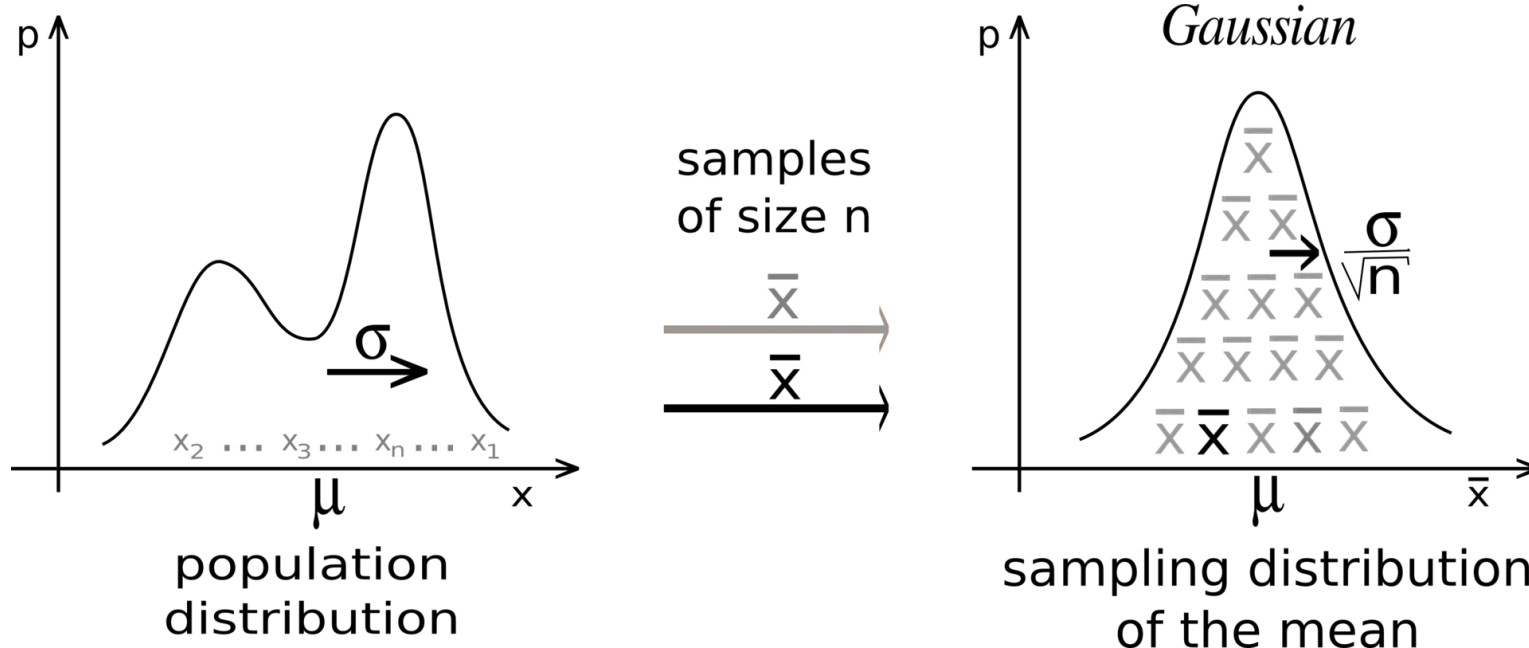
$$P_{noise} = BN_o$$

Где  $B$  – полоса сигнала (Гц),

$N_o$  – спектральная плотность мощности шума (Вт/с)

# Гауссовский канал

*Центральная предельная теорема*



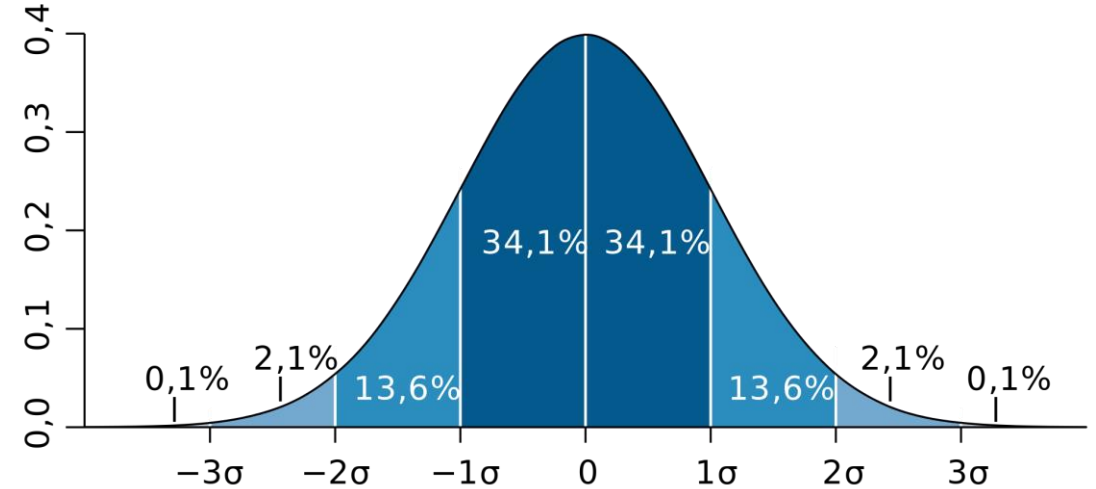
Если  $X_i$  - независимые случайные величины с конечными  $\sigma^2$  и  $\mu$ , то  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$  при  $n \rightarrow \infty$

# Гауссовский канал

*Нормальное распределение*

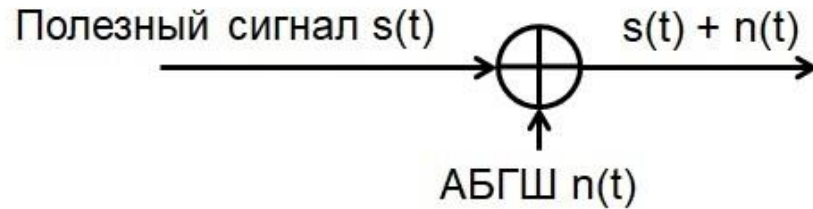
Плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



# Гауссовский канал

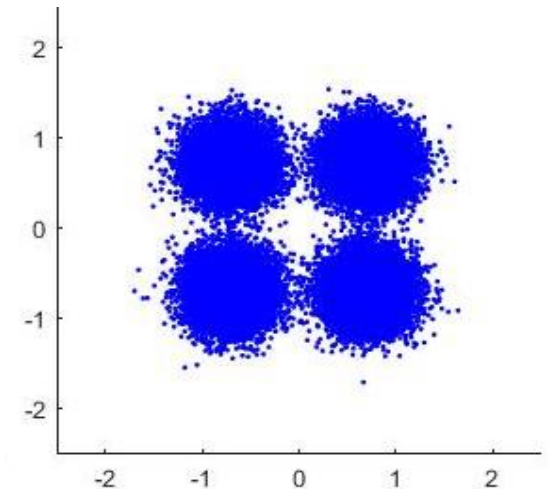
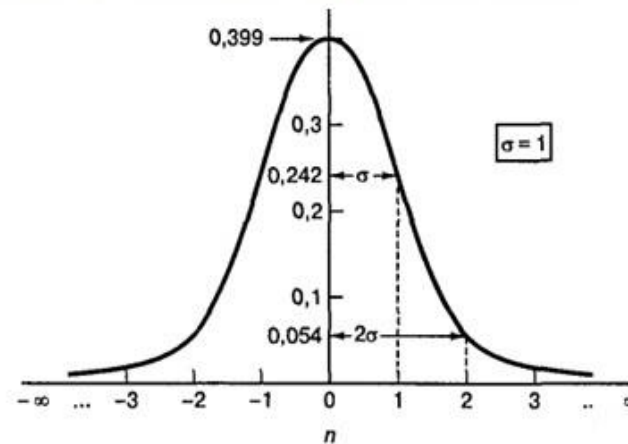
## Нормальное распределение



$n(t)$  — это случайная функция, значение которой в произвольный момент времени характеризуется гауссовой функцией плотностью вероятности:

$$p(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2\right]$$

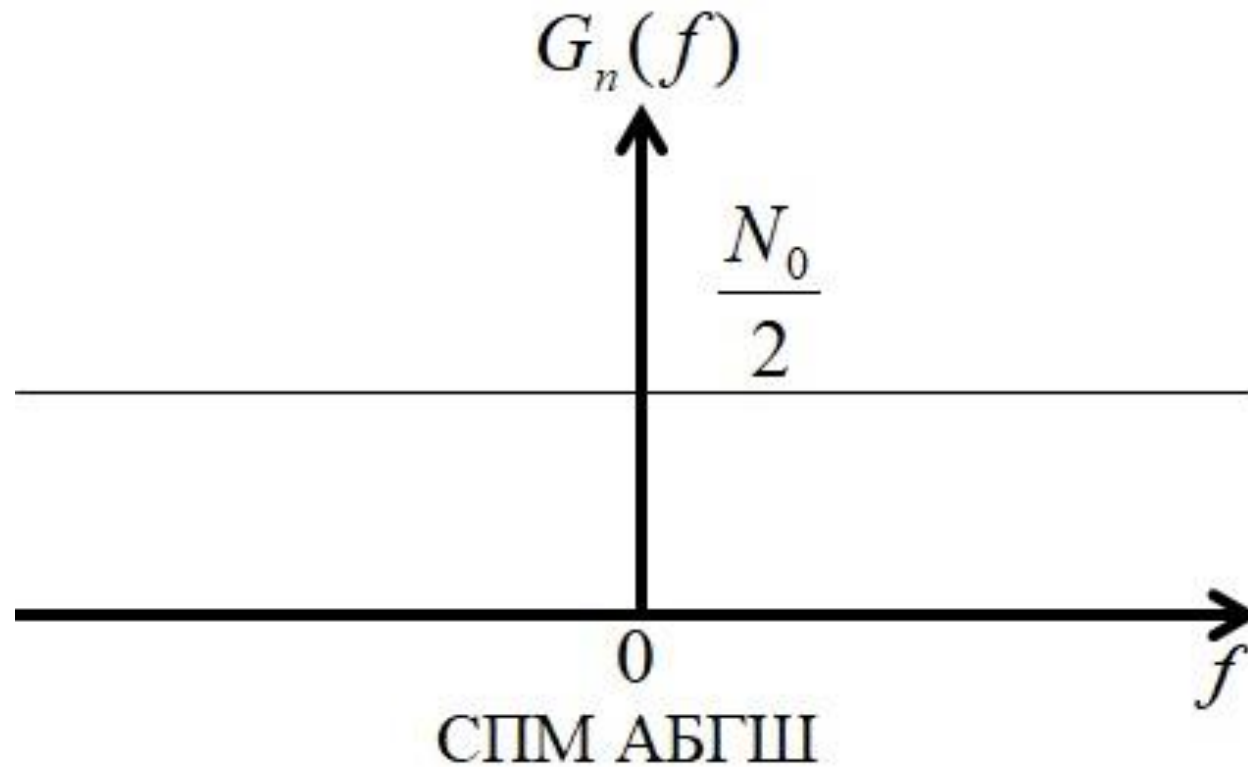
$\sigma$  - Среднее квадратическое отклонение



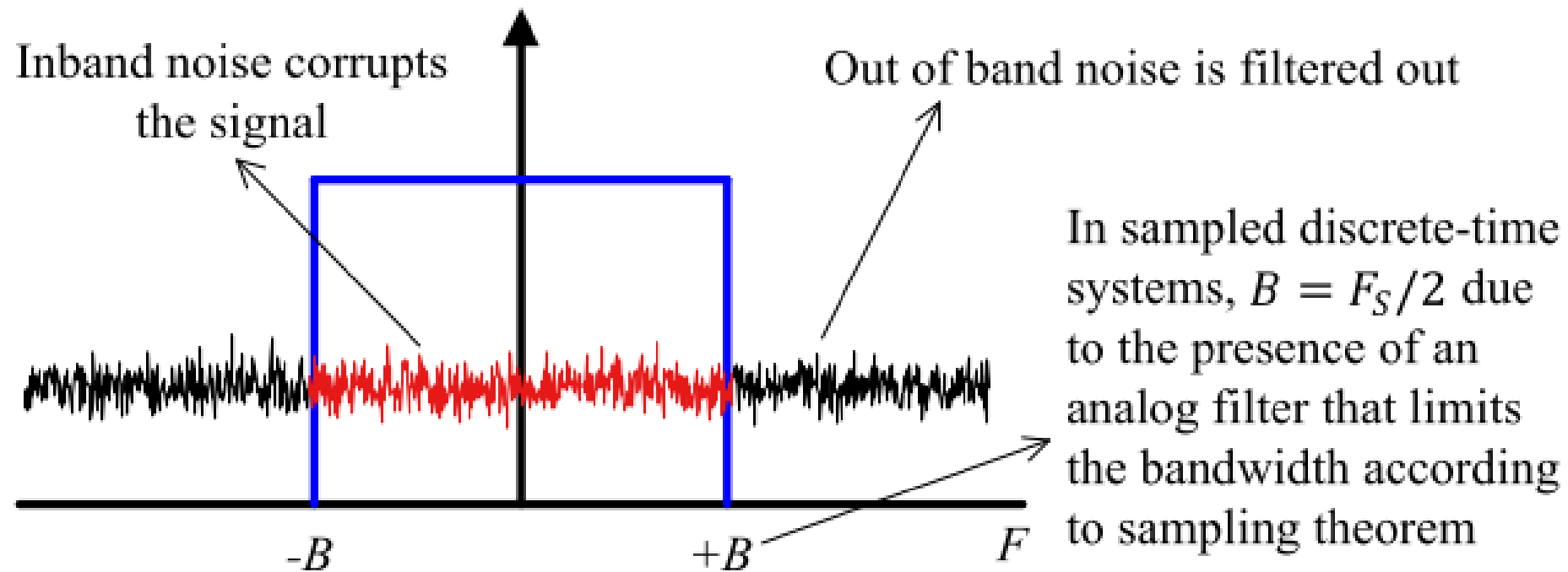
# Гауссовский канал

*Спектральная плотность АБГШ*

Спектральная плотность мощности АБГШ равномерна и бесконечна.



# Считается только шум, входящий в полосу

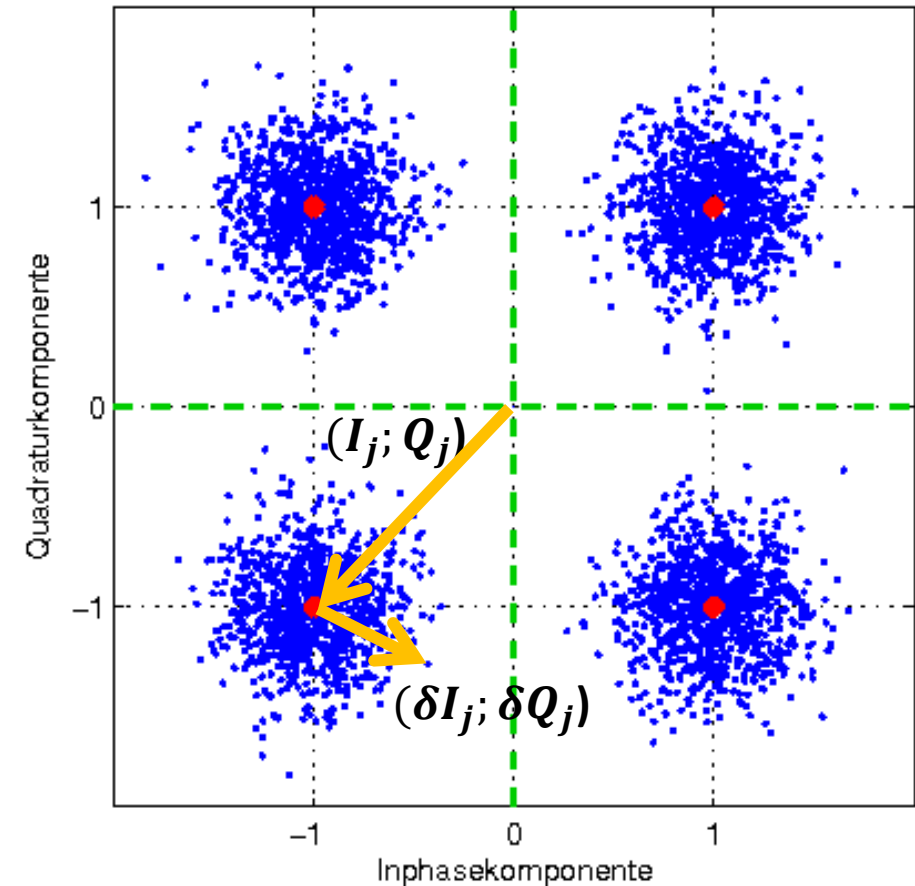


# Гауссовский канал

## *Modulation Error Ratio*

$(I_j; Q_j)$  – координаты идеальной точки созвездия (*отправленная точка созвездия*)  
 $(\delta I_j; \delta Q_j)$  – вектор ошибки (*отклонение точки созвездия от отправленной точки созвездия*)

$$MER = 10 \log_{10} \left[ \frac{\sum_{j=1}^N (I_j^2 + Q_j^2)}{\sum_{j=1}^N (\delta I_j^2 + \delta Q_j^2)} \right] dB$$





# Гауссовский канал

## Bit error rate

Отношение числа ошибочно принятых бит, к общему количеству принятых бит

$$BER = \frac{N_{err}}{N_{bit}}$$

Нормированное отношение сигнал-шум (SNR) на ширину полосы и битовую скорость:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} \left( \frac{W}{R} \right)$$

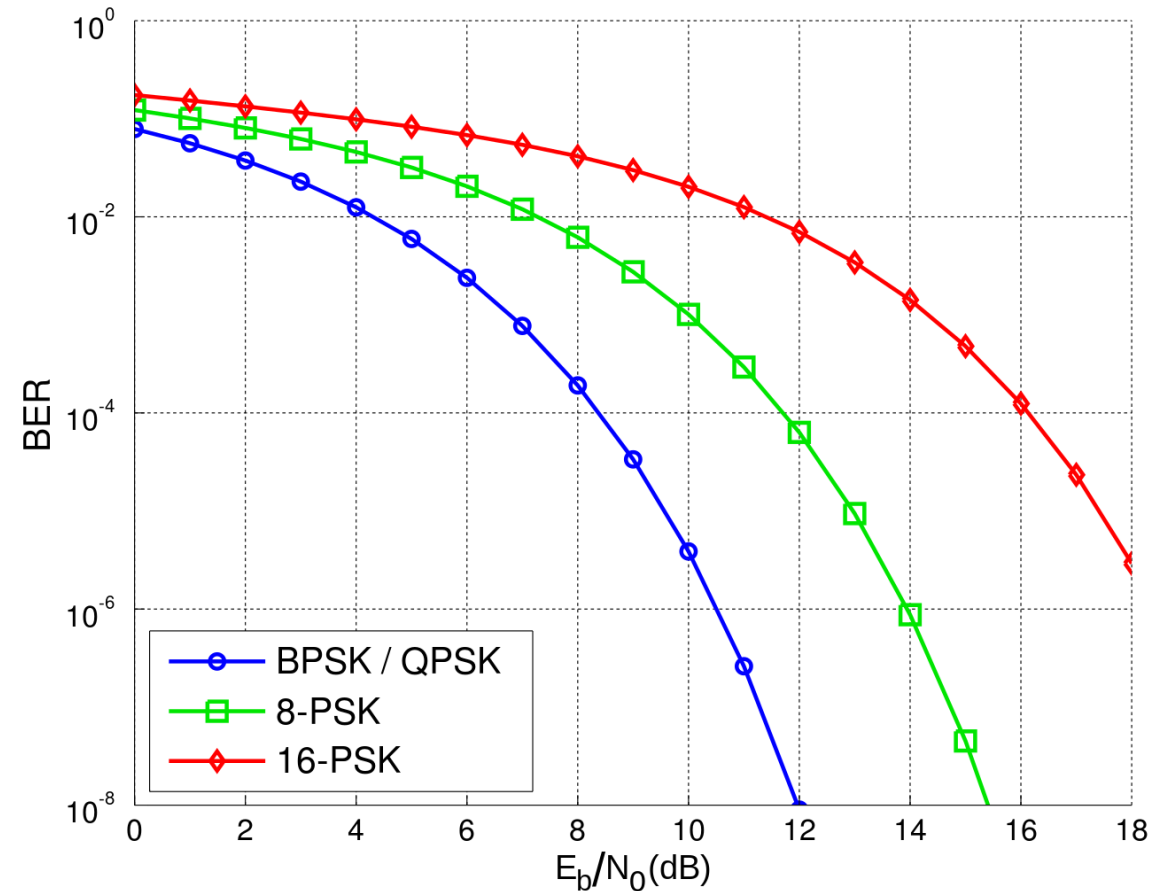
$$E_b = P_{signal} T_{bit} = \frac{P_{signal}}{R} - \text{энергия бита}$$

$$T_{bit} = \frac{1}{R} - \text{время передачи бита информации}$$

$R$  – битовая скорость

$$N_0 = \frac{P_{noise}}{W} - \text{спектральная плотность мощности шума}$$

$W$  – полоса сигнала



# Домашнее задание

Задание:

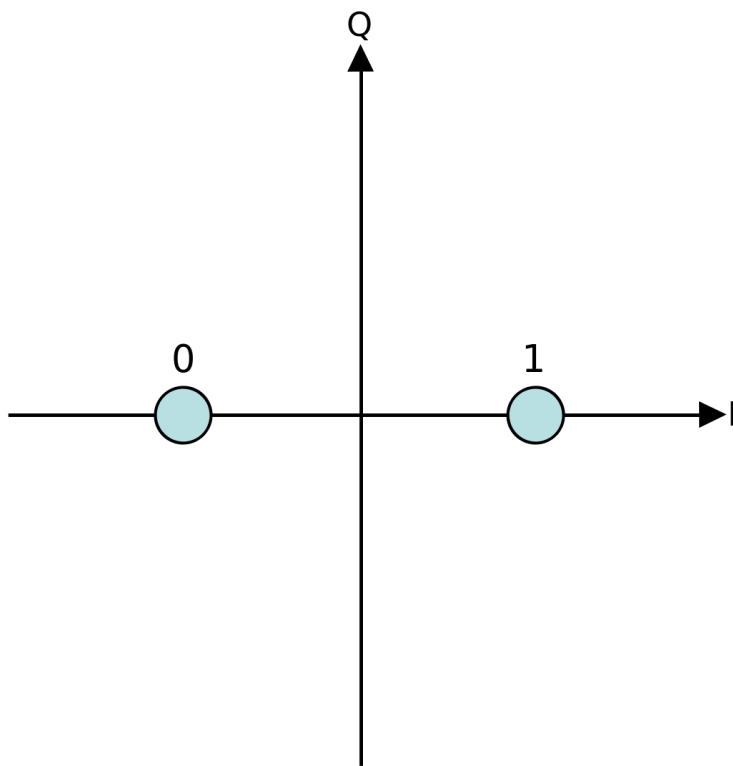
- 1) Написать функцию `mapping()`, которая принимает на вход битовый вектор и отображает его на созвездие (BPSK, QPSK, 8PSK, 16-QAM). Не забыв про нормировку
- 2) Написать скрипт для иллюстрации работы созвездий
- 3) Написать функцию `demapping()`, которая принимает на вход IQ точки в комплексном представлении, а возвращает вектор из бит. Реализовывать необходимо в соответствии с «вариант 2» из лекции.
- 4) Написать функцию `Error_check()`, которая принимает на вход 2 битовых вектора и производит подсчёт количества ошибок в потоке и вероятность ошибки
- 5) Составить скрипт Bit-generator -> Mapping() -> Noise() -> Demapping() -> Error\_check() -> MER()
- 6) Сравнить теоретические зависимости  $BER(E_b/N_0)$  от экспериментальных данных. Сделать выводы
- 7) Провести исследование зависимости битовой ошибки от величины SNR. Построить и интерпретировать 2 графика  $BER(SNR)$  и  $BER(E_b/N_0)$  для всех описанных созвездий
- 8) Дополнительное задание: Написать функцию MER, которая оценивает мощность шума по априорно неизвестному сигналу, но известному созвездию. Исследовать зависимость ошибки оценки MER от шума в канале по SNR для различных созвездий.

# Цифровая передача информации

Сигнальные созвездия

*Двоичная фазовая манипуляция*

*BPSK — binary phase-shift keying*

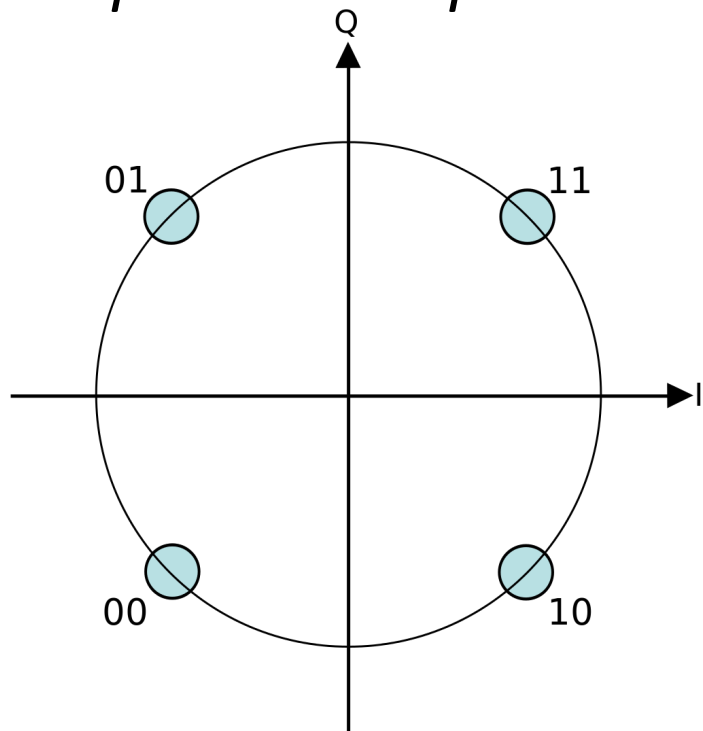


Координаты	
Последовательность бит	Координаты в IQ
0	(-1; 0)
1	( 1; 0)

# Цифровая передача информации

## Сигнальные созвездия

*Квадратурная фазовая манипуляция*  
*QPSK - quadrature phase-shift keying*

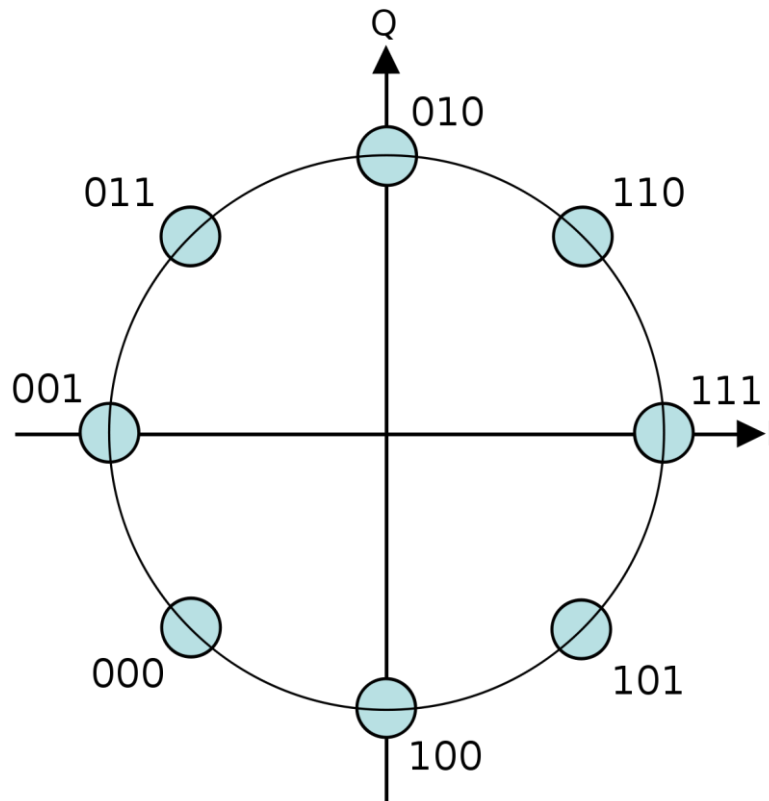


Координаты	
Последовательность бит	Координаты в IQ
00	(-1; -1)
01	(-1; 1)
10	( 1; -1)
11	( 1; 1)

# Цифровая передача информации

## Сигнальные созвездия

### *8PSK – 8 phase shift keying*

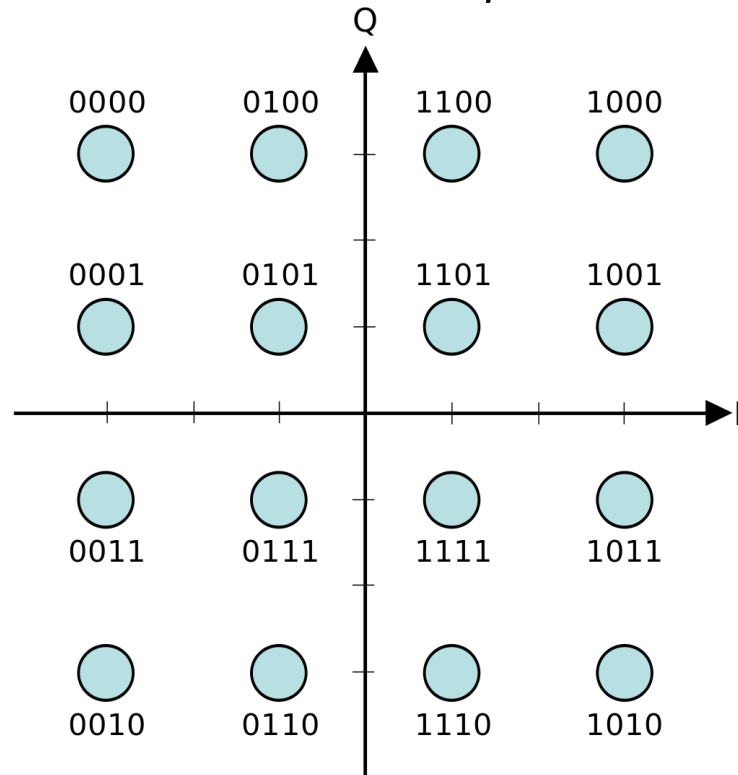


Координаты требуется оценить самостоятельно, зная, что все точки равномерно распределены по окружности единичного радиуса. Всего точек на окружности 8

# Цифровая передача информации

## Сигнальные созвездия

*Квадратурная модуляция*  
*16 QAM - Quadrature Amplitude Modulation*



Координаты	
Последовательность бит	Координаты в IQ
0000	(-3; 3)
0001	(-3; 1)
0010	(-3; -3)
0011	(-3; -1)
0100	(-1; 3)
0101	(-1; 1)
0110	(-1; -3)
0111	(-1; -1)
1000	( 3; 3)
1001	( 3; 1)
1010	( 3; -3)
1011	( 3; -1)
1100	( 1; 3)
1101	( 1; 1)
1110	( 1; -3)
1111	( 1; -1)