LAPORAN TUGAS BESAR 1

IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri

Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Disusun oleh:

Muhammad Rifko Favian (13521075)

Moch. Sofyan Firdaus (13521083)

Fazel Ginanda (13521098)

Semester I Tahun 2022/2023

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}B$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, kami diminta membuat satu atau lebih library aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, menggunakan library tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi.

BAB II

TEORI SINGKAT

A. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss adalah metode penyelesaian sistem persamaan linier menggunakan operasi baris terhadap suatu matriks dari sistem persamaan linier. Langkah menerapkan metode eliminasi Gauss, yaitu: 1) menyatakan sistem persamaan linier dalam bentuk matriks *augmented*, 2) menerapkan operasi baris elementer pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris, 3) memecahkan persamaan yang berkoresponden pada matriks eselon baris dengan Teknik penyulihan mundur.

B. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss. Langkah penerapan metode eliminasi Gauss, yaitu fase maju dan fase mundur. Pada fase maju, dilakukan eliminasi Gauss, sehingga menghasilkan nilai-nilai 0 di bawah 1 utama. Pada langkah mundur, dilakukan operasi baris elementer lanjutan sehingga diperoleh nilai-nilai 0 di atas 1 utama.

C. Determinan

Determinan diasosiasikan sebagai nilai skalar dari suatu matriks. Determinan dari suatu matriks dapat ditentukan dengan cara melakukan operasi baris elementer sehingga diperoleh matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah. Kemudian, nilai dari determinan diperoleh dengan mengalikan semua elemen pada diagonal utama. Dalam melakukan operasi baris elementer terhadap suatu matriks, terdapat beberapa aturan mengenai determinan, yaitu: 1) jika sebuah baris dikalikan dengan konstanta k, maka determinan matriks tersebut menjadi nilai awal dikali dengan k, 2) jika dua baris dipertukarkan, maka determinan matriks tersebut tetap bernilai sama, namun berubah tanda menjadi negatif, 3) jika sebuah baris ditambahkan dengan baris yang lain, maka nilai determinan tetap seperti semula.

D. Matriks Balikan

Matriks balikan dimiliki oleh semua matriks nonsingular. Jika suatu matriks dikalikan dengan invers dari matriks tersebut, maka akan menghasilkan matriks identitas. Matriks balikan dapat dihitung dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Langkahnya adalah menuliskan matriks yang akan ditentukan balikannya di samping matriks identitas. Kemudian, diterapkan metode eliminasi Gauss-Jordan secara simultan terhadap kedua matriks tersebut sehingga matriks yang dicari balikannya menjadi matriks identitas dan matriks di sebelahnya merupakan balikan dari matriks awal tersebut. Matriks balikan juga dapat digunakan sebagai metode penyelesaian sistem persamaan linear.

E. Matriks Kofaktor

Kofaktor adalah bilangan yang diperoleh dengan mengeliminasi baris dan kolom tertentu yang membentuk segiempat. Pada Tinjau matriks A berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Minor entri dari matriks adalah sebagai berikut.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(5) = 26$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(1) = 10$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (2)(1) = 8$$

Demikian seterusnya untuk $M_{21,}M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}$.

Dapat disimpulkan, minor entri dari suatu elemen a_{ij} pada matriks didefinisikan sebagai upa-matriks yang elemen-elemennya tidak berada pada baris i dan kolom j. Selanjutnya nilai kofaktor dari suatu entri didefinisikan sebagai berikut.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Misalkan A adalah suatu matriks berukuran n x n dan C_{ij} adalah kofaktor entri a_{ij}. Maka, matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

F. Matriks Adjoin

Matriks adjoin dari suatu matriks adalah transpos matriks kofaktor dari matriks tersebut. Misalkan A adalah suatu matriks berukuran n x n dan C_{ij} adalah kofaktor entri a_{ij}. Maka, matriks adjoin dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

G. Kaidah Cramer

Jika Ax = b adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah sedemikian sehingga det(A) = 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

yang dalam hal ini, Aj adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

H. Interpolasi Polinom

Interpolasi adalah metode numerik untuk menemukan titik-titik data baru berdasarkan titik-titik data yang sudah diketahui. Diberikan persoalan berikut. Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn). Tentukan polinom pn(x) yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga

$y_n = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n

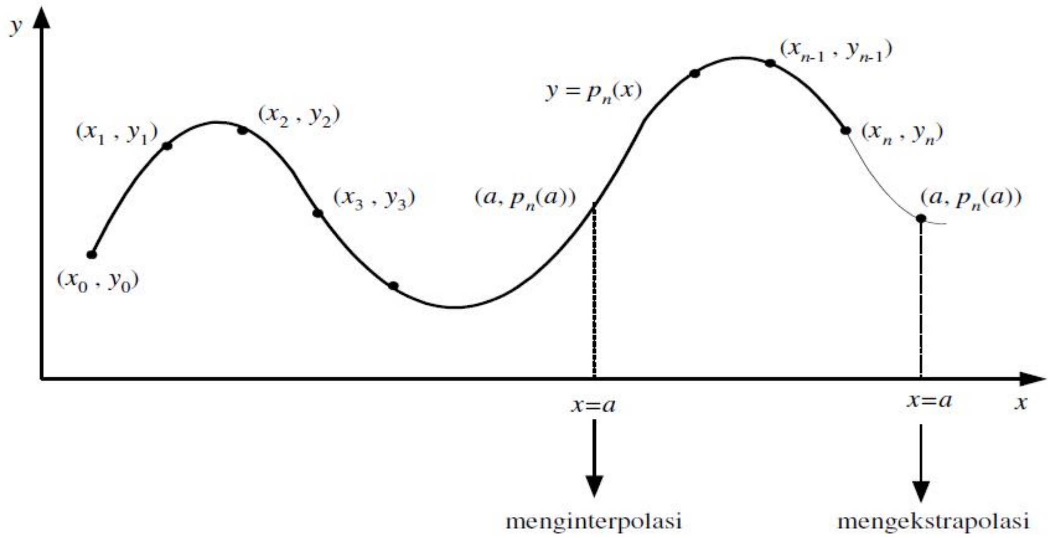
Nilai y_i dapat berasal dari fungsi f(x) sedemikian sehingga $y_i = f(x_i)$, atau, y_i berasal dari nilai empiris yang diperoleh melalui percobaan atau pengamatan. $p_n(x)$ disebut fungsi hampiran terhadap f(x).

Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di x = a, yaitu y = $p_n(a)$.

Bergantung pada letaknya, nilai x = a mungkin terletak di dalam rentang titik-titik data ($x_0 < a < x_n$) atau di luar rentang titik-titik data ($a < x_0$ atau $a > x_n$):

1) jika $x_0 < a < x_k$ maka yk = $p(x_k)$ disebut nilai interpolasi (interpolated value)

2) jika $x_0 < x_k$ atau $x_0 < x_n$ maka $y_k = p(x_k)$ disebut nilai ekstrapolasi (extrapolated value).



I. Interpolasi Bicubic

Interpolasi bicubic merupakan teknik interpolasi pada data dua dimensi. Permukaan interpolasi lebih mulus dibandinng permukaan yang diperoleh dengan interpolasi bilinear ataupun interpolasi nearest-neighbor. Teknik ini umumnya digunakan dalam pembesaran citra yang merupakan pengembangan dari interpolasi linear dan kubik.

Perhitungan komputasi dari interpolasi bicubic dapat dilakukan melalui pemodelan. Misalkan fungsi f diketahui pada empat titik di suatu permukaan yaitu f(0,0), f(0,1), f(1,0), dan f(1,1). Permukaan interpolasi dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{3} \sum_{i=0}^{3} a_{ij} x^i y^j$$

Selanjutnya, nilai-nilai yang diketahui pada matriks 4x4 tersebut disubstitusi ke persamaan f(x,y) yang akan menghasilkan matriks persamaan. Elemen pada matriks yang dihasilkan tersebut adalah koefisien a_{ij} yang diperoleh dari persaamaan f(x,y) di atas. Kemudian, diterapkan operasi inverse untuk menentukan vektor a dari persamaan tersebut. Vektor a tersebut digunakan sebagai nilai variabel dalam f(x,y) yang menjadi fungsi interpolasi sesuai pemodelan awal.

J. Regresi Linier Berganda

Regresi linier merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan Normal Estimation Equation
for Multiple Linear Regression sebagai berikut:

$$nb_0 + b_1 \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} {x_{1i}}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}\, x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}\, x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}\, y_i$$

$$\vdots$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} {x_{ki}}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}\, x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} {x_{ki}}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}\, y_i$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi
Gauss.

BAB III

IMPLEMENTASI PUSTAKA DAN PROGRAM DALAM BAHASA JAVA

Pada hasil pengerjaan tugas besar ini, terdapat 6 kelas yaitu Row.class, Matrix.class, Expr.class, LinearEquationSolver.class, User.class, dan Main.class. Di dalam Main.class, terdapat fungsi main() yang menjadi program utama dalam tugas besar ini.

Row.class hanya memiliki satu atribut yaitu data. Sementara itu, matrix.class hanya memiliki satu attribute yaitu row. Hal ini dibuat berdasarkan pertimbangan penyederhanaan dalam melakukan operasi baris terhadap matriks.

```
public class Row {
    private double[] data;
    public Row(int length) {
        data = new double[length];
    }
    public Row(double[] elements) {
        data = elements;
    }
```

```
public class Matrix {
  private Row[] data;

  public Matrix(int row, int column) {
    this.data = new Row[row];
    for (int i = 0; i < data.length; i++) {
      data[i] = new Row(column);
    }
```

Pada matrix.class terdapat beberapa method yang bertujuan untuk memudahkan operasi pada matriks, yaitu concatRows, concatCols, replaceColumn, expandRows, expandCols, setElement, setAll, dan getElement.

Untuk melakukan penghitungan determinan matriks, dibuat implementasi dari operasi yang dibutuhkan pada matrix,class tersebut. Determinan matriks diperoleh dengan cara mengubah matriks terlebih dahulu menjadi matriks segitiga.

```
public double getDeterminantGauss() {
    double result = 1;
    Matrix triangular = new Matrix(data);
    for (int j = 0; j < triangular.getCol() - 1; j++) {
      for (int i = j+1; i < triangular.getRow(); i++) {
        double val = triangular.getElement(j, j);
        if (Math.abs(val) <= 1e-7) {
          boolean zero = true;
          for (int k = i; k < triangular.getRow() && zero; k++) {
            if (Math.abs(triangular.getElement(k, j)) > 1e-7) {
              triangular.swapRow(k, j);
              result *= -1;
              zero = false;
              i--;
            }
          }
        } else {
          double t = -triangular.getElement(i, j)/triangular.getElement(j, j);
          triangular.data[i] = addMul(triangular.data[i], triangular.data[j], t);
        }
      }
    }
    for (int i = 0; i < triangular.getRow(); i++) {
      result *= triangular.getElement(i, i);
    }
    return result;
```

Pada kelas Expr.class terdapat dua subkelas yaitu Prod.class dan Var.class. Prod.class bertujuan untuk menyelesaikan operasi perkalian antar variabel dalam masalah interpolasi bicubic.

```
public static class Var {
    private String name;
    private double coeff;
    private int degree;

    public Var(String name, double coeff) {
      this(name, coeff, 1);
    }
    public Var(String name, double coeff, int degree) {
      this.name = name;
      this.coeff = coeff;
      this.degree = degree;
    }
```

```
public static class Prod {
    private double coeff;
    private ArrayList<Var> vars;

    public Prod(Var var, Var... rest) {
      vars = new ArrayList<>(1 + rest.length);
      vars.add(var(var.name, 1, var.degree));
      coeff = var.coeff;
      for (Var v : rest) {
        vars.add(var(v.name, 1, v.degree));
        coeff *= v.coeff;
      }
    }
```

Penyelesaian SPL dirumuskan dalam suatu kelas tersendiri, yaitu LinearEquationSolver.class. Pada class tersebut dimanfaatkan tipe data bentukan yang sudah diimplementasikan pada kelas lain yaitu Expr. Selain itu, juga ditambahkan tipe data HashMap.

```
public class LinearEquationSolver {

  public static Expr solve(Expr lhs, Expr rhs, String target, HashMap<String, Expr>
valueMap) {
    Expr temp = new Expr(rhs.getConstant()-lhs.getConstant());
    for (int i = 0; i < lhs.getVariables().size(); i++) {
      Var v = lhs.getVariables().get(i);
      if (!v.getName().equals(target)) {
        temp.subtract(new Expr(0, v));
      }
    }
    for (int i = 0; i < rhs.getVariables().size(); i++) {
      Var v = rhs.getVariables().get(i);
      if (!v.getName().equals(target)) {
        temp.add(new Expr(0, v));
      }
    }
    double coeff1 = lhs.getVariable(target) != null ? lhs.getVariable(target).getCoefficient() :
0;
    double coeff2 = rhs.getVariable(target) != null ? rhs.getVariable(target).getCoefficient() :
0;
    double delta = coeff1 - coeff2;

    Expr solution = new Expr(temp.getConstant());
```

BAB IV

EKSPERIMEN

Studi Kasus No. 1a

```
Matriks yang Anda masukkan ialah :
[[  1,    1,   -1,   -1,    1]
 [  2,    5,   -7,   -5,   -2]
 [  2,   -1,    1,    3,    4]
 [  5,    2,   -4,    2,    6]]
```

```
Hasil Solusi SPL-nya ialah :
null
```

Studi Kasus No. 1b

```
Matriks yang Anda masukkan ialah :
[[   1,   -1,   0,    0,    1,    3]
 [   1,    1,   0,   -3,    0,    6]
 [   2,   -1,   0,    1,   -1,    5]
 [  -1,    2,   0,   -2,   -1,   -1]]
```

```
Hasil Solusi SPL-nya ialah :
{x1=x5 + 3, x2=2x5, x3=x3, x4=x5 - 1, x5=x5}
```

Studi Kasus No. 1c

```
Matriks yang Anda masukkan ialah :
[[  0,   1,   0,   0,   1,   0,    2]
 [  0,   0,   0,   1,   1,   0,   -1]
 [  0,   1,   0,   0,   0,   1,    1]]
```

```
Hasil Solusi SPL-nya ialah :
{x1=x1, x2=-x6 + 1, x3=x3, x4=-x6 - 2, x5=x6 + 1, x6=x6}
```

Studi Kasus No. 2a

```
Matriks yang Anda masukkan ialah :
[[   1,   -1,    2,   -1,   -1]
 [   2,    1,   -2,   -2,   -2]
 [  -1,    2,   -4,    1,    1]
 [   3,    0,    0,   -3,   -3]]
```

```
{x1=x4 - 1, x2=2x3, x3=x3, x4=x4}
```

Studi Kasus No. 2b

```
Matriks yang Anda masukkan ialah :
[[   2,    0,    8,    0,    8]
 [   0,    1,    0,    4,    6]
 [  -4,    0,    6,    0,    6]
 [   0,   -2,    0,    3,   -1]
 [   2,    0,   -4,    0,   -4]
 [   0,    1,    0,   -2,    0]]
```

```
Hasil Solusi SPL-nya ialah :
{x1=0, x2=2, x3=1, x4=1}
```

Studi Kasus No. 3a

```
Matriks yang Anda masukkan ialah :
[[  8,   1,    3,    2,   0]
 [  2,   9,   -1,   -2,   1]
 [  1,   3,    2,   -1,   2]
 [  1,   0,    6,    4,   3]]
```

```
Hasil Solusi SPL-nya ialah :
{x1=-0.22, x2=0.18, x3=0.71, x4=-0.26}
```

Studi Kasus No. 3b

```
Matriks yang Anda masukkan ialah :
[[  0,   0,   0,   0,   0,   0,   1,   1,   1,   13]
 [  0,   0,   0,   1,   1,   1,   0,   0,   0,   15]
 [  1,   1,   1,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    8]
 [  0,   0,   0.04,   0,   0.04,   0.75,   0.04,   0.75,   0.61,   14.79]
 [  0,   0.25,   0.91,   0.25,   0.91,   0.25,   0.91,   0.25,   0,   14.31]
 [  0,   0.75,   0.04,   0.75,   0.04,   0,   0.04,   0,   0,    3.81]
 [  0,   0,   1,   0,   0,   1,   0,   0,   1,   18]
 [  0,   1,   0,   0,   1,   0,   0,   1,   0,   12]
 [  1,   0,   0,   1,   0,   0,   1,   0,   0,    6]
 [  0.04,   0.75,   0.61,   0,   0.04,   0.75,   0,   0,   0.04,   10.51]
 [  0.91,   0.25,   0,   0.25,   0.91,   0.25,   0,   0.25,   0.91,   16.13]
 [  0.04,   0,   0,   0.75,   0.04,   0,   0.61,   0.75,   0.04,    7.04]]
```

```
Hasil Solusi SPL-nya ialah :
null
```

Analisis terhadap semua studi kasus tersebut memberikan jawaban yang benar terhadap berbagai persoalan yang diujikan.

BAB V
KESIMPULAN

A. Kesimpulan

Pada tugas besar ini, kami telah membuat program untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, determinan, dan aplikasinya. Metode yang digunakan adalah metode-metode yang dipelajari selama perkuliahan yaitu menggunakan operasi matriks. Selain itu, kami juga telah berhasil menentukan solusi parametrik dari sistem persamaan linier

B. Saran

Pada pengerjaan tugas besar, diperlukan eksplorasi dan pembelajaran mandiri yang jauh lebih banyak dibandingkan kegiatan di kelas lainnya. Diperlukan sikap proaktif untuk terus meningkatkan rasa ingin tahu dan pantang menyerah dengan setiap masalah, khususnya permasalahan yang harus diselesaikan dalam tugas besar ini.

C. Refleksi

Dengan selesainya pengerjaan tugas besar ini, kami mendapatkan pelajaran dan pengalaman yang sangat penting untuk masa yang akan datang. Manajemen waktu dan prioritas menjadi hal yang sangat diperlukan demi suksesnya pengerjaan tugas besar ini. Dengan padatnya aktivitas perkuliahan di kelas, komitmen untuk terus menyediakan waktu mengerjakan tugas besar mutlak diperlukan. Oleh karena itu, kesadaran terhadap diri sendiri dan anggota kelompok lainnya menjadi hal yang harus melekat di dalam diri.

Link repository github: https://github.com/sofyanfirdaus/Algeo01-21075

REFERENSI

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2022-2023/algeo22-23.htm

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/MetNum/metnum.htm

https://www.ece.mcmaster.ca/~xwu/interp_1.pdf