

4 ミニマルモデル II

第一節では規約 Verma 加群の構造や指標の導出を見ていく。第二節では null 状態について掘り下げる。Kac determinant の導出はしないが、特別な場合 (Kac table の端) における null 状態の表式を導出する。第三節では null 状態による 2 点、4 点相関関数が満たすべき微分方程式について詳しく見る。最後の節では前章で導入した fusion についてももう少し詳しいことを扱う。

4.1 既約加群とミニマル指標

前章ではいくつかの中心電荷と共形次元の表式を見た。 $\tan \theta = t$ が有理数 (ミニマルモデル) p/p' の場合、 $p\alpha_- + p'\alpha_+ = 0$ なる p, p' がとれて、

$$c = 1 - 6 \frac{(p - p')^2}{pp'} \quad (4.1)$$

$$h_{r,s} = \frac{(pr - p's)^2 - (p - p')^2}{4pp'} \quad 1 \leq r \leq p' - 1, 1 \leq s \leq p - 1$$

を満たすのであった。 p, p' が $t = \tan \theta$ 、つまりミニマルモデル (Kac table) を決定し、その中で r, s がプライマリー場 (共形族、Verma 加群) を指定するラベルである。Kac の公式から、共形次元 h は (4.1) のときのみ表現が可約である。

4.1.1 ミニマルモデルにおける可約 Verma 加群の構造

式 (4.1) で指定されるミニマルモデルの可約 Verma 加群の構造を考える。ここでは Verma 加群 $V_{r,s}$ は $V_{c(p,p'), h_{r,s}(p,p')}$ を表す。対称性/周期性から

$$h_{r,s} = h_{p'-r, p-s} \quad (4.2)$$

$$h_{r,s} + rs = h_{p'+r, p-s} = h_{p'-r, p+s} \quad (4.3)$$

$$h_{r,s} + (p' - r)(p - s) = h_{r, 2p-s} = h_{2p'-r, s} \quad (4.4)$$

下二つの式は最高ウェイト状態 $h_{r,s}$ から生成したレベル $rs, (p' - r)(p - s)$ の状態の共形次元がまた Kac 公式をみたし、したがって最高ウェイト状態になっている。この二つの部分加群は元の Verma 加群に包含されているので、

$$V_{p'+r, p-s} \cup V_{r, 2p-s} \subset V_{r,s} \quad (4.5)$$

となる。既約表現 (既約 Virasoro 加群 $M_{r,s}$) を構成するために、二つの部分加群の直和で割ることを考える。

$$M_{r,s} = V_{r,s} / [V_{p'+r, p-s} \oplus V_{r, 2p-s}] \quad (4.6)$$

しかし、この直和は単純ではない。というのも、二つの部分加群がまたそれらの部分加群を二つ共有しているからである。部分加群 $V_{p'+r, p-s} \equiv V_{p'-r, p+s}$ に式 (4.3) を適用すると、レベル $(p' + r)(p - s)$ と $(p' - r)(p + s)$ にそれぞれ部分加群 $V_{2p'+r, s}, V_{2p'-r, -s} \equiv V_{r, 2p+s}$ がある。つまり

$$V_{2p'+r, s} \cup V_{r, 2p+s} \subset V_{p'+r, p-s} \quad (4.7)$$

である。同様のことを $V_{r, 2p-s} \equiv V_{2p'-r, s}$ に適用してやると、レベル $r(2p - s), (2p' - r)s$ にそれぞれ Verma 部分加群 $V_{p'+r, -p+s} \equiv V_{p'-r, 3p-s}$ と $V_{3p'-r, p-s}$ があるので、

$$V_{p'-r, 3p-s} \cup V_{3p'-r, p-s} \subset V_{r, 2p-s} \quad (4.8)$$

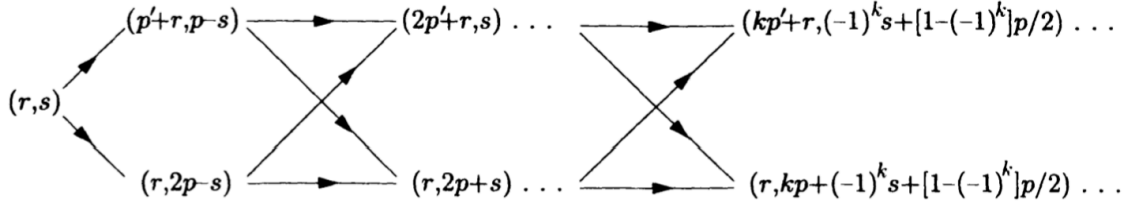


Figure 1:

となっている。対称性の性質 (4.2) と並行移動から、 $V_{2p'+r,s} \equiv V_{-p'-r,p-s} \equiv V_{p'-r,3p-s}$ であり、 $V_{r,2p+s} \equiv V_{p'-r,-p-s} \equiv V_{3p'-r,p-s}$ となるので、式 (4.7)(4.8) の右辺の二つは左辺の二つの共通部分加群になっている。したがって、部分加群の直和は

$$V_{p'+r,p-s} \oplus V_{r,2p-s} = V_{p'+r,p-s} \cup V_{r,2p-s} / [V_{2p'+r,s} \oplus V_{r,2p+s}] \quad (4.9)$$

となる。しかしこの右辺の直和にもまた二つの (極大) 部分加群があり・・・という梯子構造が無限に続いている。図 1 を参照。結局既約表現は

$$M_{r,s} = V_{r,s} - (V_{p'+r,p-s} \cup V_{r,2p-s}) + (V_{2p'+r,s} \cup V_{r,2p+s}) - \dots \quad (4.10)$$

というふうに足し引きをして得られる。

4.1.2 指標

この無限に続く差し引きをシンプルに表現する方法として、既約表現 $M_{r,s}$ の指標がある。可約/既約を気にしない場合、Virasoro 指標は

$$\chi_{(c,h)}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(h+n) q^{h+n-c/24} = \frac{q^{h-c/24}}{\varphi(q)} \quad (4.11)$$

と書けるのであった。式 (4.10) より、既約表現の指標は

$$\chi_{(r,s)}(q) = \frac{q^{-c/24}}{\varphi(q)} \left[q^{h_{r,s}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ q^{h_{r+kp',(-1)^k s + [1 - (-1)^k] p/2}} + q^{h_{r,kp + (-1)^k s + [1 - (-1)^k] p/2}} \right\} \right] \quad (4.12)$$

上式は関数

$$K_{r,s}^{(p,p')}(q) = \frac{q^{-1/24}}{\varphi(q)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(2pp'n + pr - p's)^2 / 4pp'} \quad (4.13)$$

によって

$$\chi_{(r,s)}(q) = K_{r,s}^{(p,p')}(q) - K_{r,-s}^{(p,p')}(q) \quad (4.14)$$

(p, p')	$h_{r,s}$	$q^{-h_{rs}+c/24}\chi_{r,s}(q)$
(5, 2)	$h_{1,1} = 0$	$1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6 + \dots$
Yang-Lee	$h_{1,2} = -2/5$	$1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \dots$
(4, 3)	$h_{1,1} = 0$	$1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \dots$
Ising	$h_{2,1} = 1/16$	$1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \dots$
	$h_{1,2} = 1/2$	$1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 4q^6 + \dots$
(5, 4)	$h_{1,1} = 0$	$1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 4q^6 + \dots$
Tricrit.	$h_{2,1} = 7/16$	$1 + q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 6q^6 + \dots$
Ising	$h_{1,2} = 1/10$	$1 + q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 6q^6 + \dots$
	$h_{1,3} = 3/5$	$1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 4q^4 + 5q^5 + 7q^6 + \dots$
	$h_{2,2} = 3/80$	$1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 8q^6 + \dots$
	$h_{3,1} = 3/2$	$1 + q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 6q^6 + \dots$
(6, 5)	$h_{1,1} = 0$	$1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 4q^6 + \dots$
3-state	$h_{2,1} = 2/5$	$1 + q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 6q^6 + \dots$
Potts	$h_{3,1} = 7/5$	$1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 4q^4 + 5q^5 + 8q^6 + \dots$
	$h_{1,3} = 2/3$	$1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 4q^4 + 5q^5 + 8q^6 + \dots$
	$h_{4,1} = 3$	$1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 5q^5 + 8q^6 + \dots$
	$h_{2,3} = 1/15$	$1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 10q^6 + \dots$

Figure 2:

と表される。表 2 に幾つかのミニマルモデルにおける指標の展開を示す。generic な (null 状態がない) 表現の指標は

$$\frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)} = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + \dots \quad (4.15)$$

であることと表を見比べると、レベル rs で係数が落ちていることが確認できる。

4.2 explicit form of singular vectors

本節では Verma 加群 $V_{r,s=1}$ のレベル r における null 状態を具体的に構成する。戦略としては、各要素が L_n の線型結合で構成されるような行列を最高ウェイト状態に作用させ、その逆行列のようなものを考えるというものである。この行列はスピン $(r-1)/2$ 、すなわち $SU(2)$ の r 次元

表現である。

$$[J_0]_{i,j} = \frac{1}{2}(r-2i+i)\delta_{i,j}$$

$$[J_-]_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j+1} & (j=1,2,\dots,r-1) \\ 0 & (j=r) \end{cases} \quad (4.16)$$

$$[J_+]_{i,j} = \begin{cases} i(r-1)\delta_{i+1,j} & (j=1,2,\dots,r-1) \\ 0 & (j=r) \end{cases} \quad (4.17)$$

これらは交換関係

$$[J_+, J_-] = 2J_0, \quad [J_0, J_\pm] = \pm J_\pm \quad (4.18)$$

を満たす。例えば $r=4$ の場合、

$$J_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}, J_- = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 3 & & \\ & 0 & 4 & \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

である。これは通常の角運動量の昇降演算子とは異なる。しかし、昇降演算子はそれぞれ上三角・下三角なので冪零 $J_+^r = J_-^r = 0$ である。ここで、次の $r \times r$ 行列を考える。

$$D_{r,1}(t) = -J_- + \sum_{m=0}^{\infty} (-tJ_+)^m L_{-m-1} \quad (4.20)$$

この演算子は各成分が状態となっているような r 成分ベクトル $(f_1, \dots, f_r)^T$ に作用する。ここで、演算子 D の行列式を形式的に定義しよう。まず、次の線型方程式

$$D_{r,1}(t) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

を考える。この方程式から、 f_0, \dots, f_{r-1} を f_r で表すことができる。例えば D の一番下の行は $[D]_{r,r-1} = -1, [D]_{r,r} = L_{-1}$ でそのほかの要素は零であるから、

$$f_{r-1} = L_{-1}f_r \quad (4.22)$$

となる。下から二行目はもう一つ非ゼロの要素が増えるので、 f_r, f_{r-1}, f_{r-2} の間の関係式になるが、前の結果 (4.22) を使って f_{r-2}, f_r だけの関係式にできる。このようにして、

$$f_{r-2} = [L_{-1}^2 - t(r-1)L_{-2}]f_r \quad (4.23)$$

$$f_{r-3} = [L_{-1}^3 - t(r-1)L_{-1}L_{-2} - 2t(r-2)L_{-2}L_{-1} + 2t^2(r-1)(r-2)L_{-3}]f_r$$

と順次関係式を作れる。演算子の形式的な行列式を

$$f_0 = \Delta_{r,1}(t)f_r \quad (4.24)$$

で表す。記号の扱いは乱暴であるが、この Δ を

$$\Delta_{r,1}(t) = \det \left[-J_- + \sum_{m=0}^{\infty} (-tJ_+)^m L_{-m-1} \right] \quad (4.25)$$

と定義する。例えば、

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1}(t) &= L_{-1} \\ \Delta_{2,1}(t) &= L_{-1}^2 - tL_{-2} \\ \Delta_{3,1}(t) &= L_{-1}^3 - 2t(L_{-1}L_{-2} + L_{-2}L_{-1}) + 4t^2L_{-3} \end{aligned} \quad (4.26)$$

である。状態

$$|\chi_r\rangle = \Delta_{r,1}(t) |h_{r,1}(t)\rangle \quad (4.27)$$

は Verma 加群 $V_{r,1}$ のレベル r の null 状態であることを示すことができる。これを示すには L_0 の固有値 $h+r$ の固有状態 $L_0 |\chi_r\rangle = (h_{r,1} + r) |\chi_r\rangle$ であり、 L_1, L_2 に対して消えることを言えば良い。

(i) L_0 について、その構成方法から、 $f_r = |h_{r,1}\rangle$ と最高ウェイト状態から始まり、 f_j はレベル $r-j$ に属することがわかる。言い換えると、式 (4.26) は昇降演算子の線型結合になっているが、どの項も同じレベルの状態を生成する。したがって $f_0 = \Delta_{r,1} |h\rangle$ はレベル r に属し、 $L_0 |\chi_r\rangle = (h_{r,1} + r) |\chi_r\rangle$ である。

(ii) L_1 を f_j に作用させると、 $j = 0, \dots, r-1$ に対して、

$$L_1 f_j = \frac{j(r-j)}{2} [(2j+3-r)t-2] f_{j+1} \quad (4.28)$$

となる。例えば $j = r-2$ の場合、Virasoro 代数を使って

$$\begin{aligned} L_1 f_{r-2} &= L_1 [L_{-1}^2 - t(r-1)L_{-2}] |h_{r,1}\rangle \\ &= L_{-1} L_1 L_{-1} + 2L_0 L_{-1} - 3t(r-1)L_{-1} |h_{r,1}\rangle \\ &= 2L_{-1} L_0 + 2L_{-1} L_0 + 2L_{-1} - 3t(r-1)L_{-1} |h_{r,1}\rangle \\ &= (4h+2-3t(r-1)) f_{r-1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

と計算できる。この式自体は帰納的に示すことができる。 $j = 0$ のとき、まさに $L_1 f_0 = 0$ である。

(iii) L_2 に関しても、 f_i に作用すると

$$L_2 f_j = \frac{t}{4} j(r-j)(j+1)(r-j-1) [(4j+6-r)t-7] f_{j+2} \quad (4.30)$$

となることが示せる。 $j = 0$ が求める式である。いくつかコメントをし、本節を終える。

(a) Verma 系列 $V_{1,s}$ に関しても同様の関係式を導くことができる。この際には $r \rightleftharpoons s, t \rightleftharpoons 1/t$ と変換をすれば良い。

(b) Δ に関して具体的に書き下すことができ、null 状態は次のように書ける。

$$|\chi_r\rangle = \sum_{\substack{p_i \geq 1 \\ p_1 + \dots + p_k = r}} \frac{[(r-1)!]^2 (-t)^{r-k}}{\prod_{i=1}^{k-1} (p_1 + \dots + p_i)(r - p_1 - \dots - p_i)} L_{-p_1} \dots L_{-p_k} |h_{r,1}(t)\rangle \quad (4.31)$$

(c) $n > 2$ に関して L_n の $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_r)^T$ に対する作用をあらわに書くことができる。

$$L_n \mathbf{f} = \left[\left(J_0 - \frac{3n+1}{2} \right) + \frac{3n+1}{4t} \right] (-tJ_+)^n \mathbf{f} \quad (4.32)$$

本節では Verma 加群 $V_{r,1}$ の null 状態を導出したが、一般的な加群 $V_{r,s}$ について、null 状態の閉じた表式は知られていない。しかし全く太刀打ちできないこともなく、Appendix 8.A で長大な導出が書かれている。

4.3 相関関数における微分方程式

ミニマルモデルにおけるプライマリー場は Virasoro 代数の最高ウェイト状態にアタッチされるが、その表現が既約であることを要請するために全ての null 状態は 0 にセットされなければならない。これにより相関関数や演算子積展開に非自明な制約を与える。本節ではプライマリー場の相関関数がどのような制限を受けるのかを見ていく。その前に反正則部分に関するコメントをしておく。これまで正則部分に集中してみたいが、実際には反正則部分も付け加えてやらねばならない。ミニマルモデルにおいては正則・反正則部分に対応する Verma 加群のペアを考えることになる。二つの Verma 加群はどちらも Kac table にあり、それぞれが既約であるために null 状態をゼロにセットする。これらは独立しており、正則部分と反正則部分で独立に制限がされる。複雑な部分は次章で扱う。

4.3.1 特異ベクトルによる微分方程式

場の理論における相関関数の計算の主要な道具な Ward 恒等式である。descendant 場の相関関数をプライマリー場で表す際にも用いられたのであった。

$$\left\langle \phi_0^{-r_1, \dots, -r_k}(z_0) \phi_1(z_1) \dots \right\rangle = \mathcal{L}_{-r_1}(z_0) \dots \mathcal{L}_{-r_k}(z_0) \langle \phi_0(z_0) \phi_1(z_1) \dots \rangle \quad (4.33)$$

$$\mathcal{L}_{-r}(z) = \sum_{i \geq 1} \left\{ \frac{(r-1)h_i}{(z_i - z)^r} - \frac{1}{(z_i - z)^{r-1}} \partial_{z_i} \right\} \quad (4.34)$$

左 (=正則) Virasoro 表現 ϕ_0 は可約 Verma 加群 $V(c, h_0)$ であり、レベル n_0 の null 状態は

$$|c, h_0 + n_0\rangle = \sum_{Y, |Y|=n_0} \alpha_Y L_{-Y} |c, h_0\rangle \quad (4.35)$$

で与えられるとする。ここで Y は

$$Y = \{r_1, \dots, r_k\} \quad \text{with} \quad 1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k \quad (4.36)$$

$$|Y| = r_1 + \dots + r_k \quad (4.37)$$

$$L_{-Y} = L_{-r_1} L_{-r_2} \dots L_{-r_k} \quad (4.38)$$

を省略している。特異ベクトルをゼロになることを要請すると、 $\sum \alpha L_{-Y} \phi_0 = 0$ であり、相関関数では

$$\sum_Y \alpha_Y \mathcal{L}_{-Y}(z_0) \langle \phi_0(z_0) \phi_1(z_1) \cdots \rangle = 0 \quad (4.39)$$

となる。ここで特異ベクトル (の相関関数) が消える条件を微分方程式で表現するため、Ward 恒等式 (4.33) を用いた。前節に従って、 $\Delta_0 = \sum_Y \alpha_Y L_{-Y}$ を Verma 加群 $V(c, h_0)$ の特異ベクトルを生成する演算子とする。相関関数の満たすべき微分方程式は相関関数 $\langle \phi_0(z_0) \phi_1(z_1) \cdots \rangle$ に微分演算子

$$\gamma_0(z_i, \partial_{z_i}) = \Delta_0(L_{-r} \rightarrow \mathcal{L}_{-r}(z_0)) \quad (4.40)$$

を作用させると得られる。 L は Virasoro 代数の演算子で \mathcal{L} は (4.34) で定義される場に作用する演算子である。微分方程式 (4.39) は大域共形変換による相関関数の不変性を用いるとさらにシンプルになる。少し大域共形不変性による相関関数の形を復習しておく。大域共形変換 ($SL(2, \mathbb{C})$) の Ward 恒等式による相関関数が満たす微分方程式は

$$\begin{aligned} \sum_{i=0,1,\dots} \partial_{z_i} \langle \phi_0(z_0) \phi_1(z_1) \cdots \rangle &= 0 \\ \sum_{i=0,1,\dots} (z_i \partial_{z_i} + h_i) \langle \phi_0(z_0) \phi_1(z_1) \cdots \rangle &= 0 \\ \sum_{i=0,1,\dots} (z_i^2 \partial_{z_i} + 2z_i h_i) \langle \phi_0(z_0) \phi_1(z_1) \cdots \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

であった。これは解くことができ、

$$\langle \phi_0(z_0) \phi_1(z_1) \cdots \rangle = \left\{ \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\mu_{ij}} \right\} G(z_{ij}^{kl}) \quad (4.42)$$

となるのであった。ここで μ_{ij} は

$$\sum_{j \neq i} \mu_{ij} = 2h_i \quad (4.43)$$

の任意の解で、 G は anharmonic ratio

$$z_{ij}^{kl} = \frac{(z_i - z_j)(z_k - z_l)}{(z_i - z_l)(z_k - z_j)} \quad (4.44)$$

の任意の関数である。よって式 (4.39) の相関関数は大域共形変換の不変性によって、(4.42) に微分演算子が作用したものとなる。

式 (4.39) の具体例を二つ見る。一つ目はシンプルなケースで、Verma 加群 $V(c, h) = V_{r=2, s=1}$ を考える。最初の null 状態はレベル $rs = 2$ に現れ、 Δ_0 は

$$\Delta_0 \equiv \Delta_{2,1}(t) = L_{-1}^2 - tL_{-2} \quad (4.45)$$

である。従って相関関数の満たす微分方程式は

$$\left\{ \partial_z^2 - t \sum_{i=1,2,\dots} \left[\frac{h_i}{(z_i - z)^2} - \frac{1}{z_i - z} \partial_{z_i} \right] \right\} \langle \phi_{(2,1)}(z) \phi_1(z_1) \cdots \rangle = 0 \quad (4.46)$$

となる。これは2階の偏微分方程式であり、二つの線型独立な解がある。さらに高いレベルの null 状態に対する制限もまた考えることができる。

もう一つの例は $V(c, h) = V_{r,1}$ の場合で、レベル $rs = r$ で初めて null 状態が現れる。前節から、微分作用素の具体的な表式を書くことができ、

$$\gamma_{r,1}(z_i, \partial_{z_i}) \equiv \det D_{r,1}(z_i, \partial_{z_i}) \quad (4.47)$$

$$= \det \left[-J_- + \partial_{z_0} + \sum_{m \geq 1} (-tJ_+)^m \sum_{j \geq 1} \left(\frac{mh_i}{(z_i - z)^{m+1}} - \frac{1}{(z_i - z)^m} \partial_{z_i} \right) \right] \quad (4.48)$$

であり、 r 階の偏微分方程式は

$$\gamma_{r,1}(z_i, \partial_{z_i}) \langle \phi_{r,1}(z_0) \phi_1(z_1) \cdots \rangle = 0 \quad (4.49)$$

となる。前節で determinant を形式的に定義したが、今回はそれに基づいてベクトルと行列作用素の方程式に戻すことができる。

$$D_{r,1}(z_i, \partial_{z_i}) \mathbf{f} = 0 \quad (4.50)$$

ここで f ベクトルの最後の要素が

$$f_r = \langle \phi_0(z_0) \phi_1(z_1) \cdots \rangle \quad (4.51)$$

となっている。

4.3.2 ミニマルモデルにおける2点関数の微分方程式

これまでにみたように、大域共形変換の普遍性から2点、3点相関関数は係数を除いて完全に決定されるのであった。本節では null 状態がゼロであるという条件から、係数に関する条件である一種の sum rule を導くことができる。スタート地点は2点関数の表式

$$\langle \phi_{h_0}(z) \phi_{h_1}(0) \rangle = \delta_{h_0, h_1} z^{-2h_0} \quad (4.52)$$

これは微分方程式 (4.39) を満たすことをチェックできる。

$$\Delta_0 \left(L_{-r} \rightarrow \frac{(r-1)h_0}{(w-z)^r} - \frac{1}{(w-z)^{r-1}} \partial_w \right) \langle \phi_0(z) \phi_0(w) \rangle = 0 \quad (4.53)$$

並進対称性から2点関数は $x = z - w$ の関数になっており、

$$\Delta_0 \left(L_{-r} \rightarrow \frac{(-1)^r}{x^r} [(r-1)h_0 - x \partial_x] \right) \langle \phi_0(x) \phi_0(0) \rangle = 0 \quad (4.54)$$

非減少な整数列 Y に対し、相関関数の \mathcal{L}_{-Y} の相関関数への作用は

$$\langle \phi_0(x) \phi_0(0) \rangle = x^{-2h_0} \bar{x}^{-2\bar{h}_0}, \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{|Y|}}{x^{|Y|}} \prod_{i=1}^k [(r_i - 1)h_0 - x \partial_x] \langle \phi_0(x) \phi_0(0) \rangle \\ &= \frac{(-1)^{|Y|}}{x^{|Y|}} \prod_{i=1}^k [(r_i + 1)h_0 + r_{i+1} + \cdots + r_k] = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

式 (4.53) が満たされる必要十分条件は $\Delta_0 = \sum_Y \alpha_Y L_{-Y}$ の係数に関する次の sum rule が満たされることである。

$$\sum_{\substack{i \leq r_1 \leq \dots \leq r_k \\ \sum r_i = n_0}} \alpha_{r_1, r_2, \dots, r_k} \prod_{i=1}^k [(r_i + 1)h_0 + r_{i+1} + \dots + r_k] = 0 \quad (4.57)$$

実はこれは null 状態が満たすべき性質の一つ

$$L_1^{n_0} \sum_{Y, |Y|=n_0} \alpha_Y L_{-Y} |c, h_0\rangle = 0 \quad (4.58)$$

から得られる結果となっている。まず、任意の整数列 $r_1, \dots, r_k, r_1 + \dots + r_k = n_0$ に対して

$$L_1^{n_0} L_{-r_1} \dots L_{-r_k} |c, h_0\rangle = P(r_1, \dots, r_k; h_0) |c, h_0\rangle \quad (4.59)$$

となっていることは明らかだろう。つまり最高ウェイト状態から出発して、 $r_1 + \dots + r_k = n_0$ 段降りた後 n_0 だけ戻ってきたら係数つきで最高ウェイト状態に戻っている。ここで P は h_0, r に関する多項式である。 P に関して少し考察を進めてみる。 $L_1^{n_0} = L_1^{n_0-1} L_1$ とかくと、 P に関する関係式を導くことができる。一つの L_1 を交換関係を使って右に出していく。その過程で k 個の nonzero な項が出てくる。これにより、

$$P(r_1, \dots, r_k; h_0) = \sum_{i=1}^k (r_i + 1) P(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i - 1, r_{i+1}, \dots, r_k; h_0) \quad (4.60)$$

これを用いて P の中の引数を一つ減らすことができる。では $r_i = 0$ となる場合にはどうなるであろうか。これは定義式 (4.59) で $r_i = 0$ 、つまり L_0 を間に挿入していることに対応しているので、そこまで降りたレベルの数 $+h$ が出てくる。ゆえに

$$P(r_1, \dots, r_{i-1}, 0, r_{i+1}, \dots, r_k; h_0) = [h_0 + r_{i+1} + \dots + r_k] P(r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_k; h_0) \quad (4.61)$$

となる。 $k = 1, n_0 = r_1 = r$ とした時の結果

$$L_1^r L_{-1}^r |c, h_0\rangle = P(r; h_0) |c, h_0\rangle = (r + 1)! h_0 |c, h_0\rangle \quad (4.62)$$

から P を完全に決定することができて、

$$P(r_1, \dots, r_k; h_0) = (n_0!) \prod_{i=1}^k [(r_i + 1)h_0 + r_{i+1} + \dots + r_k] \quad (4.63)$$

となる。式 (4.58) からこれは $n_0!$ を別にして sum rule を再現している。2 点相関関数の係数が決定されたら、全ての相関関数の比例係数が fix される。

4.3.3 ミニマルモデルにおける 4 点関数の微分方程式

本節ではミニマルモデル $\phi_{2,1}$ における 4 点相関関数が満たす微分方程式を見ていく。結果として、超幾何関数が満たす方程式である超幾何方程式を得る。

4 点相関関数は 2,3 点関数とは異なり、大域共形不変性では angharmonic ratio に関する任意の関数というところまでしか決定されないのであった。具体的には

$$\langle \phi_0(z_0)\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3) \rangle = \prod_{0 \leq i < j \leq 3} (z_i - z_j)^{\mu_{ij}} G(z) \quad (4.64)$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^4 h_k \right) - h_i - h_j \quad (4.65)$$

$$z = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} \quad (4.66)$$

であった。ここから微分方程式 (4.39) の帰結を見ていく。最終的に G の常微分方程式に帰着する。これを (比較的) 簡単な場合である $V_{2,1}$ のレベル 2 についてみていく。この簡単なミニマルモデルの場合の相関関数が満たす微分方程式は式 (4.46) であった。これに (4.64) を代入すれば良い。 ∂_{z_i} の (4.64) への作用は、

$$\begin{aligned} \partial_{z_0} &= \frac{\mu_{01}}{z_0 - z_1} + \frac{\mu_{02}}{z_0 - z_2} + \frac{\mu_{03}}{z_0 - z_3} + \partial_{z_0}(z)\partial_z, & \partial_{z_0}(z) &= \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)(z_0 - z_3)^2} \\ \partial_{z_1} &= -\frac{\mu_{01}}{z_0 - z_1} + \frac{\mu_{12}}{z_1 - z_2} + \frac{\mu_{13}}{z_1 - z_3} + \partial_{z_1}(z)\partial_z, & \partial_{z_1}(z) &= \frac{(z_0 - z_2)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)^2} \\ \partial_{z_2} &= -\frac{\mu_{02}}{z_0 - z_2} - \frac{\mu_{12}}{z_1 - z_2} + \frac{\mu_{23}}{z_2 - z_3} + \partial_{z_2}(z)\partial_z, & \partial_{z_2}(z) &= -\frac{(z_1 - z_3)(z_0 - z_1)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)^2} \\ \partial_{z_3} &= -\frac{\mu_{03}}{z_0 - z_3} - \frac{\mu_{13}}{z_1 - z_3} - \frac{\mu_{23}}{z_2 - z_3} + \partial_{z_3}(z)\partial_z, & \partial_{z_3}(z) &= \frac{(z_2 - z_0)(z_0 - z_1)}{(z_2 - z_1)(z_0 - z_3)^2} \end{aligned} \quad (4.67)$$

である。また $\partial_{z_0}^2$ の作用は

$$\begin{aligned} \partial_{z_0}^2 &= \frac{\mu_{01}(\mu_{01} - 1)}{(z_0 - z_1)^2} + \frac{\mu_{02}(\mu_{02} - 1)}{(z_0 - z_2)^2} + \frac{\mu_{03}(\mu_{03} - 1)}{(z_0 - z_3)^2} \\ &\quad + 2 \left[\frac{\mu_{01}}{z_0 - z_1} + \frac{\mu_{02}}{z_0 - z_2} + \frac{\mu_{03}}{z_0 - z_3} \right] \partial_{z_0}(z)\partial_z \\ &\quad + \partial_{z_0}^2(z)\partial_z + (\partial_{z_0}(z))^2\partial_z^2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

これらを代入すると、実は G の前の $(z_i - z_j)$ を微分方程式の前に括り出すことができる。そうした後、 $z_1 \rightarrow 0, z_2 \rightarrow 1, z_3 \rightarrow \infty, z_0 \rightarrow z$ とすることで $G(z)$ に関する常微分方程式を得ること

ができる。各点を上述の点に飛ばすことで、

$$\begin{aligned}
\partial_{z_0} &= \frac{\mu_{01}}{z} + \frac{\mu_{02}}{z-1} + \partial_z \\
\partial_{z_1} &= -\frac{\mu_{01}}{z} - \mu_{12} + (z-1)\partial_z \\
\partial_{z_2} &= -\frac{\mu_{02}}{z-1} + \mu_{12} + z\partial_z \\
\partial_{z_3} &= 0 \\
\partial_{z_0}^2 &= \frac{\mu_{01}(\mu_{01}-1)}{z^2} + \frac{\mu_{02}(\mu_{02}-1)}{(z-1)^2} \\
&\quad + 2 \left[\frac{\mu_{01}}{z} + \frac{\mu_{02}}{z-1} \right] \partial_z + \partial_z^2
\end{aligned} \tag{4.69}$$

となり、結局 G の微分方程式は

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{1}{t} \partial_z^2 + \left[2 \frac{\mu_{01}}{t(z-1)} + 2 \frac{\mu_{02}}{t(z-1)} + \frac{2z-1}{z(z-1)} \right] \partial_z + \frac{\mu_{01}(\mu_{01}-1)}{tz^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu_{02}(\mu_{02}-1)}{t(z-1)^2} + \frac{\mu_{01}-h_1}{z^2} + \frac{\mu_{02}-h_2}{(z-1)^2} - \frac{\mu_{12}}{z(z-1)} \right\} G(z) = 0
\end{aligned} \tag{4.70}$$

一見長い方程式だが、関数

$$H(z) = z^{\mu_{01}}(1-z)^{\mu_{02}}G(z) \tag{4.71}$$

を導入すると、

$$\left\{ \frac{1}{t} \partial_z^2 + \frac{2z-1}{z(z-1)} \partial_z - \frac{h_1}{z^2} - \frac{h_2}{(z-1)^2} + \frac{h_0+h_1+h_2+h_3}{z(z-1)} \right\} H(z) = 0 \tag{4.72}$$

これは超幾何方程式に変形することができて、超幾何級数が解となる。(演習問題)

一般的に、 $\phi_{r,s}$ があるような相関関数は rs 階の微分方程式を満たさねばならない。それに対応して rs 個の線型独立な解が存在し、それらは相関関数の共形ブロックと呼ばれる。フルな相関関数は正則部分と反正則部分の半双線形形式である。(f が半双線形形式であるとは $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}, x, y, z, w \in V, a, b \in \mathbb{C}$ に対して $f(x+y, z+w) = f(x, w) + f(x, z) + f(y, w) + f(y, z)$ かつ $f(ax, by) = a^*b f(x, y)$ であるような f のこと。) どの正則ブロックとどの反正則ブロックが積を組むかは対称性などによって決められる。これは次章で扱う。

rs は相関関数が満たす微分方程式のうち、最低次(階)でない可能性がある。対称性 $\phi_{p'-r, p-s} \equiv \phi_{r,s}$ は相関関数がまた $(p'-r)(p-s)$ 階の微分方程式も満たすことを示している。この問題を少しだけ簡単にすることができる。まず $rs = N, (p'-r)(p-s) = N+a$ とおく。最初の方程式を a 回微分することで、二つ目の方程式の最高次を消去することができる。このようにして二つ目の方程式の次数を減らしていくと、あるステップで二つの微分方程式が独立でなくなる。その時点で最低次がわかる。

上記のように複数の高次微分方程式を解くことでミニマルモデルにおける相関関数は完全に決定される。しかし、次章で扱う Coulomb gas の formalism はより効率的な相関関数の計算方法を与える。この方法は free boson の相関関数の線積分によって、微分方程式を自動的に満たすような解を導くことができる。

4.4 Fusion rules

ミニマルモデルにおけるプライマリー場は Kac table の最高ウェイト状態に対応しているのであった。本節ではこれらの間の fusion rule、つまり二つの場の短距離積においてどのプライマリー場・descendant 場が出てくるかをみる。前節で見た相関関数が満たす微分方程式は fusion rule を systematic に調べる方法を与える。また (p, p') ミニマルモデルは二つの基本的な場 $\phi_{(2,1)}, \phi_{(1,2)}$ の fusion から生成されることを見る。

4.4.1 微分方程式による Fusion rule

ここでは前節で導出した相関関数の微分方程式から fusion rule を導出する。その前に fusion rule を振り返っておく。レベル 2 の特異ベクトルを持つ時、その特異ベクトルがゼロになるという条件から、3 点相関関数の係数 $g(h, h_1, h_2)$ の三つの共形次元が完全に独立ではなくなり、 h が制限されるのであった。この結果、 $\phi_{2,1}$ と $\phi_{(\alpha)}$ のプライマリー場における演算子積展開を考えるときに展開時に現れるのが許される場が制限されることを fusion rule というのであった。また複数の同値な場の fusion rule を考えることによりさらに制限を強くできて、これを truncation と呼んだ。逆にいうと、fusion rule は一般の演算子積展開

$$\begin{aligned} \phi_0(z)\phi_1(w) &= (z-w)^{h-h_1-h_0} \sum_h g(h_0, h_1, h) \\ &\quad \times \sum_Y (z-w)^{|Y|} \beta_Y(h_0, h_1, h) L_{-Y} \phi(w) \end{aligned} \quad (4.73)$$

の中に現れる $g(h, h_1, h_2)$ のなかの h を h_1, h_2 で表すことに対応する。一方で、上記の演算子積展開を前節で得た相関関数の微分方程式 (4.39) に代入すると、係数 g, h に関する制限を得ることができて、

$$\begin{aligned} \sum_h g(h_0, h_1, h) \sum_Y \beta_Y(h_0, h_1, h) \gamma_0(z_i, \partial_{z_i}) \\ \times (z_0 - z_1)^{h-h_1-h_0+|Y|} \langle [L_{-Y} \phi](z_1) \phi_2(z_2) \cdots \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

となる。 $z_0 \rightarrow z_1$ による極限での主要項は $|Y| = 0, \beta = 1, h$ 最大で、 z_0, z_1 に関する微分が高階であるような項になる。(?) この leading term が h, h_0, h_1 に非自明な関係を与え、fusion rule を与える。

例として Verma 加群 $V_{2,1}$ を考える。4 点相関関数において、式 (4.74) は三つの項からなる。 $\partial_{z_0}^2, (z_0 - z_1)^{-2}, (z_0 - z_1)^{-1} \partial_{z_0}$ である。ここから、

$$\frac{1}{t} (h - h_0 - h_1)(h - 1 - h_0 - h_1) + (h - h_0 - h_1) - h_1 = 0 \quad (4.75)$$

という制限が得られる。 $r = 2, s = 1$ なので、

$$h_0 = h_{2,1}(t) = \frac{3}{4}t - \frac{1}{2} \quad (4.76)$$

であり、 h_1 はミニマル Kac table 中の $h_1 = h_{r,s}(t), t = p'_p$ であるとする。すると (4.75) は変

形できて、

$$\begin{aligned}
\left(h - h_0 - h_1 - \frac{1-t}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + th_1 \\
&= \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4}(r^2 - 1) + \frac{1}{4}(s^2 - 1) - \frac{t}{2}(rs - 1) \\
&= \frac{t^2 r^2 + s^2 - 2trs}{4} \\
&= \left(\frac{tr - s}{2}\right)^2
\end{aligned} \tag{4.77}$$

となる。よって

$$h = h_0 + h_1 + \frac{1-t}{2} \pm \frac{tr-s}{2} = h_{r+\epsilon, s}(t) \quad \epsilon = \pm 1 \tag{4.78}$$

つまり、特異ベクトルがゼロであるという条件を4点相関関数の微分方程式に落とし込み、そこに演算子積展開に使うと三つの共形次元の間の関係式が得られたのである。さらに言えば、三つのうち二つの場をミニマルモデルのプライマリー場とすると、三つ目の場も Kac 公式にのるミニマルモデルとなった。ここから、次の fusion rule がわかる。

$$\phi_{(2,1)} \times \phi_{(r,s)} = \phi_{(r-1,s)} + \phi_{(r+1,s)} \tag{4.79}$$

厳密に言えば、これは微分方程式の主要項のみを見て得られた結果であり、さらに詳しく調べると二つのどちらかが削れるなどがあるかもしれない。しかし、

$$h_{r+1,s}(p, p') - h_{r-1,s}(p, p') = r \frac{p}{p'} - s \tag{4.80}$$

であり、これは Kac table の中で整数を取らない。したがって、descendant 場の寄与などから制限は生まれず、どちらのプライマリー場も残ることになる。

より一般的に $V(c, h) = V_{r,1}$ としよう。こちらは appendix の長い内容を必要とするため簡潔に見ていくことにする。ただしやることは先ほどと同様で、相関関数の微分方程式 (4.40) から始まり、演算子積展開 (4.73) を代入し $z_0 \rightarrow z_1$ による主要項をみる。これが消える必要があることから共形次元の間の制限が得られ、fusion rule を得ることができる。主要項は $\gamma_{r,1}$ の中でも $(z_0 - z_1), \partial_{z_0}, \partial_{z_1}$ を抜き出すことと等価であるので、 $\gamma_{r,1}$ の中の主要項を抜き出した $\tilde{\gamma}_{r,1}$ を

$$\begin{aligned}
L_{-r} &\rightarrow \frac{(r-1)h_1}{(z_1 - z_0)^r} - \frac{1}{(z_1 - z_0)^{r-1}} \partial_{z_1} \\
L_{-1} &\rightarrow \partial_z
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$\Delta_{r,1}(t)$ に代入したもので定義する。演算子 $\tilde{\gamma}_{r,1}$ は演算子積展開の leading term $z^{h-h_0-h_1}$ に作用する。すると、間を割愛するが結果として

$$\begin{aligned}
(\theta_{r,1})^2 &= \prod_{m=1}^r \{ [h_0 + h_1 - h + (r-m)(1-tm)] \\
&\quad \times [h_0 + h_1 - h + (m+1)(1-t(r+1-m))] - 4h_1 t \left(\frac{r+1}{2} - m \right)^2 \}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

として、fusion が許されるのは

$$\theta_{r,1}^2 = 0 \quad (4.83)$$

が必要十分条件となる。ここに $h_0 = h_{r,1}(t)$, $h_1 = h_{k,l}(t)$ を代入すると、結局 $k \geq r, k+r \leq p'$ で許される fusion は

$$\phi_{(r,1)} \times \phi_{(k,l)} = \sum_{\substack{m=k-r+1 \\ m-k+r-\text{even}}}^{k+r-1} \phi_{(m,l)} \quad (4.84)$$

もし k が r か $p' - r$ よりおおきい場合はもう少し複雑な結果となる。

4.4.2 Fusion Algebra

fusion number $\mathcal{N}_{ij}^k \in \{0, 1\}$ を定義する。定義は

$$\mathcal{N}_{ij}^k = \begin{cases} 0 & g(h_i, h_j, h_k) = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.85)$$

である。インデックス i, j, k は Kac table 中のラベリングでも良いが、さらに一般的なプライマリー場のラベルと思って問題ない。反正則部分も考えると fusion number は $\mathcal{N}_{\text{left}} \times \mathcal{N}_{\text{right}}$ となる。fusion number と生成子 $\phi_j, j = 1, \dots, r, \phi_1 = I$ 、それに積により multiplication rule

$$\phi_i \times \phi_j = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k \phi_k \quad (4.86)$$

により fusion algebra と呼ばれる。特に、identity ϕ_1 の積は

$$\mathcal{N}_{i1}^k = \delta_{i,k} \quad (4.87)$$

となり、積の可換性はシンプルに

$$\mathcal{N}_{ij}^k = \mathcal{N}_{ji}^k \quad (4.88)$$

となる。プライマリー場の演算子積展開の結合性も fusion algebra の結合性により表される。

$$\phi_i \times (\phi_j \times \phi_k) = \phi_i \times \sum_l \mathcal{N}_{jk}^l \phi_l \quad (4.89)$$

$$= \sum_{l,m} \mathcal{N}_{jk}^l \mathcal{N}_{il}^m \phi_m \quad (4.90)$$

と

$$(\phi_i \times \phi_j) \times \phi_k = \sum_l \mathcal{N}_{ij}^l \phi_l \times \phi_k \quad (4.91)$$

$$= \sum_{l,m} \mathcal{N}_{ij}^l \mathcal{N}_{lk}^m \phi_m \quad (4.92)$$

から、

$$\sum_l \mathcal{N}_{kj}^l \mathcal{N}_{il}^m = \sum_l \mathcal{N}_{ij}^l \mathcal{N}_{lk}^m \quad (4.93)$$

を得る。Lie 代数において構造定数から随伴表現を構成するように、 $r \times r$ 行列を N_i で定義し、その要素を

$$(N_i)_{j,k} = \mathcal{N}_{ij}^k \quad (4.94)$$

で定義すると、結合性の条件 (4.93) は通常の行列積で言い換えられて、

$$N_i N_k = N_k N_i \quad (4.95)$$

となる。また (4.93) は別のようにも書き換えられて、

$$N_i N_k = \sum_l \mathcal{N}_{ik}^l N_l \quad (4.96)$$

とも表される。したがって \mathcal{N} は fusion 代数の表現をなす。

4.4.3 ミニマルモデルにおける Fusion Rules

ミニマルモデル $\mathcal{M}(p, p')$ における fusion rule に戻ろう。混乱を避けるために、前節で扱った fusion number のインデックスを (r, s) でしっかり書くことにする。例えば

$$\mathcal{N}_{(1,1)(r,s)}^{(m,n)} = \delta_{r,m} \delta_{s,n} \quad (4.97)$$

であり、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{(2,1)(r,s)}^{(m,n)} &= \delta_{s,n} (\delta_{m,r+1} + \delta_{m,r-1}) \\ \mathcal{N}_{(1,2)(r,s)}^{(m,n)} &= \delta_{m,r} (\delta_{n,s+1} + \delta_{n,s-1}) \end{aligned} \quad (4.98)$$

となる。特に $\phi_{2,1}, \phi_{1,2}$ はそれぞれ r, s に対する昇降演算子のような役割を果たしている。本節の主要な結果は、 $\phi_{2,1}, \phi_{1,2}$ の fusion が他のすべてのプライマリー場 (とその共形族) を多項式的に生成するという事実である (Fig. 3)。

多項式的にというのは、随伴表現を作るように定義した行列 $N_{(r,s)}$ が $N_{(2,1)}, N_{(1,2)}$ の多項式で生成されるという意味である。もう少し具体的に、行列形式では $X = N_{(2,1)}, Y = N_{(1,2)}$ とすると、式 (4.98) は

$$N_{(r+1,1)} = X N_{(r,1)} - N_{(r-1,1)} \quad (4.99)$$

となる。初期条件は

$$N_{(1,1)} = I, \quad \text{and} \quad N_{(2,1)} = X \quad (4.100)$$

である。実はこれは第二種チェビシェフ多項式が満たす漸化式になっている。第二種チェビシェフ多項式は

$$U_m(2 \cos \theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta} \quad (4.101)$$

で定義され、その漸化式は

$$U_m(x) = x U_{m-1}(x) - U_{m-2}(x) \quad (4.102)$$

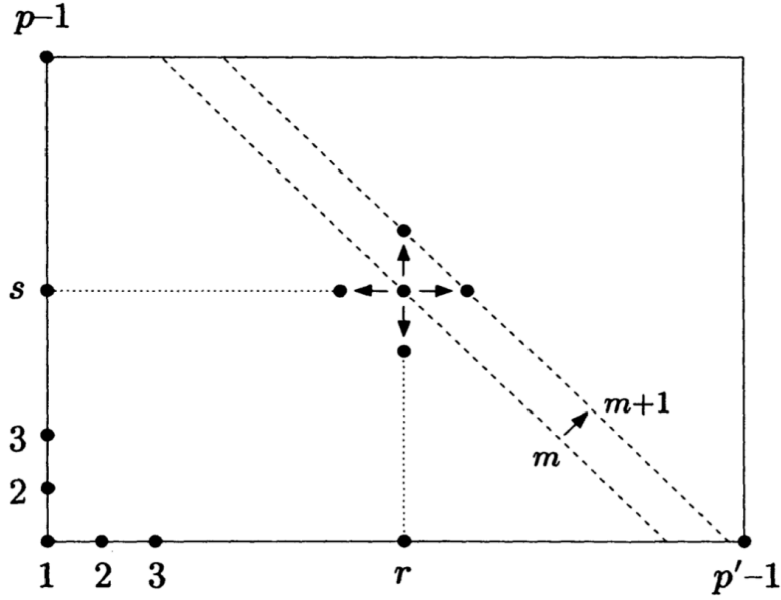


Figure 3:

$$U_0(x) = 1, \quad \text{and} \quad U_1 = x \quad (4.103)$$

であるので、まさしく (4.99) である。したがって、直ちに行列 N がわかって

$$N_{(r,1)} = U_{r-1}(X), \quad N_{(1,s)} = U_{s-1}(Y) \quad (4.104)$$

となる。Kac table は $r = p', s = p$ の長方形の内側であった。したがって、行列の Kac table における境界条件は

$$N_{(r,0)} = N_{(r,p)} = N_{(0,s)} = N_{(p',s)} = 0 \quad (4.105)$$

である。これはチェビシェフ多項式の二つの制限を意味する。

$$U_{p'-1}(X) = 0, \quad U_{p-1}(Y) = 0 \quad (4.106)$$

今 Kac table の $r = 1, s = 1$ の一次元方向にのみ行列を帰納的に構成したが、一般の点についても構成しよう。こちらも簡単で、結果は

$$N_{(r,s)} = U_{r-1}(X)U_{s-1}(Y) \quad (4.107)$$

である。こちらも帰納的に示すことができる。したがって、前述のようにミニマルモデル $\mathcal{M}(p, p')$ における各プライマリー場の fusion(行列) は $(2, 1), (1, 2)$ における行列を生成子としてそれらを第二種チェビシェフ多項式に代入することで得られることがわかった。したがって重要なのは生成子 X, Y である。これらはどのような制限を受けるだろうか。まず式 (4.106) の制限があり、これは X, Y が満たすべき多項式を与える。さらに、Kac table の対称性

$$N_{(p'-r, p-s)} = N_{(r, s)} \quad (4.108)$$

も満たす必要がある。これを行列で焼き直すと

$$U_{p'-r-1}(X)U_{p-s-1}(Y) = U_{r-1}(X)U_{s-1}(Y) \quad (4.109)$$

である。特に $r = 1, s = p - 1$ の table の端の点では

$$U_{p'-2}(X) = U_{p-2}(Y) \quad (4.110)$$

の制限を与える。実は (4.106)(4.110) の二つの条件だけで一般の点の間の対称性 (4.109) を満たすのに十分な条件を与えることを示すことができる。まず (4.106) から、

$$U_{p'-2}(X)U_{r-1}(X) = U_{p'-r-1}(X) \quad (4.111)$$

を帰納的に示すことができる。 $r = 1$ は恒等式で自明である。 r まで成り立っているとすると、

$$\begin{aligned} U_{p'-2}(X)U_r(X) &= U_{p'-2}(X)(XU_{r-1} - U_{r-2}(X)) \\ &= XU_{p'-r-1}(X) - U_{p'-r-2}(X) \\ &= U_{p'-r}(X) \end{aligned} \quad (4.112)$$

であることから示せた。同様にして

$$U_{p-2}(Y)U_{s-1}(Y) = U_{p-s-1}(Y) \quad (4.113)$$

が任意の s について成り立つ。これら (4.111)(4.113) と (4.110) から、

$$\begin{aligned} U_{p'-r-1}(X)U_{s-1}(Y) &= U_{p'-2}(X)U_{r-1}(X)U_{s-1}(Y) \\ &= U_{r-1}(X)U_{p-2}(Y)U_{s-1}(Y) \\ &= U_{r-1}(X)U_{p-s-1}(Y) \end{aligned} \quad (4.114)$$

となる。 $p \rightarrow p - s$ とすると (4.109) を得る。

ここまでの結果をまとめると、中心電荷 $c(p, p')$ におけるプライマリー場 $\phi_{(2,1)}, \phi_{(1,2)}$ を含むミニマルモデルの fusion 代数 $\mathcal{A}_{p,p'}$ は生成子 $X = N_{(2,1)}, Y = N_{(1,2)}$ の第二種チェビシェフ多項式 U によって生成され、一般のプライマリー場における行列は

$$N_{(r,s)} = U_{r-1}(X)U_{s-1}(Y) \quad (4.115)$$

で与えられる。また X, Y は次の三つの条件

$$U_{p'-1}(X) = U_{p-1}(Y) = U_{p'-2}(X) - U_{p-2}(Y) = 0 \quad (4.116)$$

に拘束される。この制限は多項式環 $\mathbb{C}[X, Y]$ におけるイデアル $\mathcal{I}_{p,p'}(X, Y)$ を生成し、fusion 代数は剰余環

$$\mathcal{A}_{p,p'} = \mathbb{C}[X, Y] / \mathcal{I}_{p,p'}(X, Y) \quad (4.117)$$

の構造を持つ。

この結果は $(r, 1)$ による fusion rule (4.84) の結果を再現することを確認してみる。ということで $(r, 1)$ と任意の点の fusion を見ていく。まず任意の m, n に対して

$$N_{(m,n)} = U_{m-1}(X)U_{n-1}(Y) = N_{(m,1)}N_{(1,n)} \quad (4.118)$$

であり、

$$N_{(r,1)}N_{(m,n)} = (N_{(r,1)}N_{(m,1)})N_{(1,n)} \quad (4.119)$$

を計算すれば良いことになる。そのためにまず $(r, 1)$ と $(m, 1)$ の fusion を計算する。利便性のためチェビシェフ多項式のインデックスの定義を負の整数にも拡張しておく。インデックスが負の多項式は漸化式を満たすように定めるとする。例えば $U_{-1}(x) = 0, U_{-2}(x) = -1$ である。すると、

$$U_{-m-2}(X) = -U_m(X) \quad (4.120)$$

である。また帰納的に

$$U_r(X)U_m(X) = \sum_{\substack{k=m-r \\ k-m+r \text{ even}}}^{m+r} U_k(X) \quad (4.121)$$

を示すことができる。話の中には負のインデックス許容している。 $r = 0$ では自明であり、 r まで成り立っているとすると、

$$\begin{aligned} U_{r+1}(X)U_m(X) &= (XU_r(X) - U_{r-1}(X))U_m(X) \\ &= X \sum_{\substack{k=m-r \\ k-m+r \text{ even}}}^{m+r} U_k(X) - \sum_{\substack{k=m-r+1 \\ k-m+r-1 \text{ even}}}^{m+r-1} U_k(X) \\ &= \sum_{\substack{k=m-r \\ k-m+r \text{ even}}}^{m+r} (XU_k(X) - U_{k-1}(X)) + U_{m-r-1}(X) \\ &= \sum_{\substack{k=m-r-1 \\ k-m+r \text{ even}}}^{m+r+1} U_k(X) - U_{m-r-1}(X) + U_{m-r-1}(X) \\ &= \sum_{\substack{k=m-r-1 \\ k-m+r \text{ even}}}^{m+r+1} U_k(X) \end{aligned} \quad (4.122)$$

より $r \rightarrow r+1$ で成り立っている。したがって帰納的に (4.121) が確認できた。これは式 (4.84) と $r \leq m, m+r < p'$ で同じである。今はインデックスを負に取る可能性を無視したため、式 (4.121) のインデックスが負になるかを確認しなければならない。インデックスは $r > m$ のとき負になるが、(4.120) の性質から負のインデックスの項 $U_{m-r}, U_{m-r+2} \dots$ は正のインデックスの項 $U_{r+2-m}, U_{r-m} \dots$ を打ち消してしまう。したがってインデックスに絶対値を取って

$$U_r(X)U_m(X) = \sum_{\substack{k=|m-r| \\ k-m+r \text{ even}}}^{m+r} U_k(X) \quad (4.123)$$

と修正すれば良い。さらに、その和の範囲の上端側では制限 $U_{p'-1}(X) = 0$ を考えなければならない。 $U_{p'-1}(X) = 0$ の条件は漸化式を通してチェビシェフ多項式の reflection property が与えられて、

$$U_{p'-1+k}(X) = -U_{p'-1-k}(X) \quad (4.124)$$

となる。この性質から、式(4.123)の和の上端部分が p' をはみ出してしまったとき($U_{m+r}, U_{m+r-2}, \dots$)に、はみ出していない部分($U_{2p'-2-m-r}, \dots$)をキャンセルアウトしてしまう。したがって上端も然るべく変更を加えて、

$$U_r(X)U_m(X) = \sum_{\substack{k=|m-r| \\ k-m+r \text{ even}}}^{\min(m+r, 2p'-2-m-r)} U_k(X) \quad (4.125)$$

これに $U_{n-1}(Y)$ を戻すと $(r, 1)$ のfusionが得られて、

$$N_{(r,1)}N_{(m,n)} = \sum_{\substack{k=|m-r|+1 \\ k-m+r-1 \text{ even}}}^{\min(m+r-1, 2p'-1-m-r)} N_{(k,n)} \quad (4.126)$$

を得る。今は r 方向について求めたが、そこから横方向(s 方向)に進めば一般のfusion rule

$$N_{(r,s)}N_{(m,n)} = \sum_{\substack{k=|m-r|+1 \\ k-m+r-1 \text{ even}}}^{\min(m+r-1, 2p'-1-m-r)} \sum_{\substack{l=|n-s|+1 \\ l-n+s-1 \text{ even}}}^{\min(n+s-1, 2p-1-n-s)} N_{(k,l)} \quad (4.127)$$

を得る。これは前章で言及した結果である。

構成方法から分かる通り、fusion代数 $\mathcal{A}_{p,p'}$ は二つの生成子が二次元的に生成する。このことから予想される通り、fusion代数 $\mathcal{A}_{p,p'}$ には $N_{(r,1)}$ と $N_{(1,s)}$ で生成されるいわば一次元的な二つの部分代数 $\mathcal{X}_{p'}, \mathcal{Y}_p$ が存在する。それぞれfusion numberは

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{p'} : \mathcal{N}_{rs}^t(q) &\equiv \mathcal{N}_{(r,1)(s,1)}^{(t,1)} \quad 1 \leq r, s, t, \leq p' - 1 \\ \mathcal{Y}_p : \mathcal{N}_{rs}^t(p) &\equiv \mathcal{N}_{(1,r)(1,s)}^{(1,t)} \quad 1 \leq r, s, t, \leq p - 1 \end{aligned} \quad (4.128)$$

で定義される。さらに、

$$N_{(r,s)} = N_{(r,1)}N_{(1,s)} \quad (4.129)$$

の関係から、fusion代数 $\mathcal{A}_{p,p'}$ は二つの部分代数の積を $N_{(r,s)} = N_{(p'-r, p-s)}$ を同一視することで割ってやったものとなる。ミニマルモデルにおけるテンソル積の構造は10章でまた明らかになる。部分代数 $\mathcal{X}_{p'}, \mathcal{Y}_p$ はミニマルモデルにおける二つのWess-Zumino-Wittenモデルのfusion代数になっている。

少しコメントをして本章を終える。まず前章で扱ったLandau-Ginzburgによる対角なミニマルモデルの記述をfusion ruleの観点から捉え直して見る。すべての構造は $\Phi = \Phi_{(2,2)}$ の冪やdescendantで生成されていた。fusion ruleもこの場から生成されることを期待するが、ミニマルモデルにおける半分のみを生成することが知られている。(演習問題)より正確には、 $\Phi \rightarrow -\Phi$ の対称性が $(m+1, m)$ のミニマルモデルと同定される。 $(2k+1, 2k)$ のミニマルモデルで例を見てみよう。随伴表現における行列 $G = N_{(2,2)}$ の奇数次 G, G^3, \dots, G^{2N-1} を考える。これらは $N = k(k-1)$ まで線型独立になる。これは G の二つの性質による。一つは G の固有値0が k 縮退しており、二つ目は0が唯一縮退する G の固有値だからである。fusion代数の次元(行列 $N_{(r,s)}$ のサイズ)は $k(2k-1)$ であり、Kac tableにある格子点の半分である。したがって、 G の最小多項式(多項式 Π のうち0になる最低次数のもの)は次数

$$k(2k-1) - (k-1) = 2M+1 \quad M = k(k-1) \quad (4.130)$$

となり、 G, G^3, \dots, G^{2M-1} まで線型独立であることを保証する。一方、fusion rule からこれらの奇数次の行列は $N_{(r,s)}$ の線型結合になっている。 $N_{(r,s)}$ は M 個の線型独立な行列を組むため、 Φ の多項式のうち $\Phi \rightarrow -\Phi$ の変換で奇なもので表される。したがって G の奇数次は fusion algebra の \mathbb{Z}_2 -odd セクターを生成する。

最後のコメントは $\phi_{(2,1)}, \phi_{(1,2)}$ に関してである。これらがミニマルモデルに属することを今まで仮定していた。しかし一般的にはそうではない。実際、10 章の modular invariance では D series と呼ばれるさらに多くの解を見つけることになる。それらは $\phi_{(2,1)}, \phi_{(1,3)}$ は含むものの $\phi_{(1,2)}$ を含まないものや、exceptional theories E_6, E_7, E_8 と呼ばれるものである。これらはそれぞれ異なる fusion rule を持つ。

5 クーロンガスの定式化