

CFT 10 章: モジュラー不変性

の直訳や意識だったり単なる学習内容のまとめだったりするもの

担当: 八木春樹

目次

1. トーラス上の共形場理論	2
1.1. 分配関数	2
1.2. モジュラー不変性	2
1.3. $SL(2, \mathbb{Z})$ の生成元と基本領域	3
2. トーラス上の自由ボソンの理論	4
2.1. モジュラー不変性	4
2.2. 経路積分形式による導出	5
3. トーラス上の自由フェルミオンの理論	8
4. $c = 1$ の模型	11
4.1. コンパクト化されたボソン	11
4.2. 多成分カイラルボソン	13
4.3. \mathbb{Z}_2 Orbifold	15
5. ミニマル模型: モジュラー不変性と演算子	16
6. ミニマルモデル: モジュラー変換と指標	18
7. ミニマルモデル: モジュラー不変な分配関数	20
8. フュージョン則とモジュラー不変性	20
8.1. ミニマル模型に対する Verlinde 公式	20
8.2. 共形ブロックの数え上げ	21
8.3. Verlinde 公式の一般的な証明	22
8.4. 拡張対称性・有理型共形場理論など	26
9. θ 関数とかの定義とか公式とか	26

1. トーラス上の共形場理論

$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ とは異なるトポロジーの上の2次元CFTを考えたいので、トーラスを例に取る。2つの点 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ が原点と一直線上にならないように選ばれている場合、それらと原点を頂点とする平行四辺形が指定される。この平行四辺形の向かい合う辺を同一視することでトーラスが構成できる。

物理的に自然な設定は、トーラスで定義されたCFTの特性は格子の全体的なスケール格子ベクトルの絶対値・方向にも依存せず、ただ1つのパラメーター $\tau = \omega_2/\omega_1$ にのみ依存するべきであろう。 τ はモジュラーパラメーターと呼ばれる。簡単のために $\omega_1 \in \mathbb{R}$ と取ることにする(一般性を失わない)。

1.1. 分配関数

トーラス上の理論を経路積分形式で扱う事を考える。 \mathbb{C} との本質的な違いは、周期性条件に従う局所場が発生することである。これにより、(共形場が周期的であるというわけではないが)作用汎関数は、 ω_1, ω_2 周期による並進に関して不変になる。たとえば、トーラスに住んでいる実フェルミオンは、並進すると係数-1を獲得する。これは、Neveu-Schwarz(NS)条件を構成するが、Ramond(R)条件はフェルミオンが周期的であることを要求する。2つの周期があるため、フェルミオン場は、(R,R), (R,NS), (NS,R), (NS,NS)の4つのタイプの境界条件に従って定義できる。いずれにせよ、選択された境界条件が作用を不変のままにすることが条件。

しかし、主に演算子形式で作業する。この方法で登場する量とその関係は、分配関数 Z (またはミンコフスキー時空の真空関数)と、そのモジュラーパラメーター τ への依存性のみ。分配関数のVirasoro生成子 L_0 および \bar{L}_0 による表式を特定する。時間と空間の方向および2つの周期の方向が定まっているとすると、 H, P をそれぞれハミルトニアンと運動量とすると、 τ の向きに平行にユークリッド時空での距離 $a \in \mathbb{R}$ だけ系を変換する演算子は

$$\exp\left(-i\frac{a}{|\tau|}(\text{Re } \tau \cdot P - \text{Im } \tau \cdot H)\right)$$

のような形を取る。 $a = |\tau|$ を採用してそのトレースを分配関数としてみる。つまり

$$Z(\tau) = \text{Tr } e^{-i(\text{Re } \tau \cdot P - \text{Im } \tau \cdot H)}.$$

これを L_0, \bar{L}_0 を用いて表そう。トーラスを端が接着された有限長のシリンダーと見なす。円周 L のシリンダーでは、ハミルトニアンは $H = \frac{2\pi}{L}(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12})$ であり、 \mathbb{C} 全体で定義されている(定数項は真空エネルギー密度が $L \rightarrow \infty$ の極限で消滅するように付加されている)。同様に、シリンダーの円周に沿って並進を生成する運動量は、 $P = \frac{2\pi i}{L}(L_0 - \bar{L}_0)$ である。 $L = 1$ を選びこれらを代入して

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \text{Tr } e^{-i(\text{Re } \tau \cdot P - \text{Im } \tau \cdot H)} \\ &= \text{Tr } e^{-i(\text{Re } \tau \cdot 2\pi i(L_0 - \bar{L}_0) - \text{Im } \tau \cdot 2\pi(L_0 + \bar{L}_0 - c/12))} = \text{Tr } e^{2\pi[(\text{Re } \tau + i \text{Im } \tau)L_0 - (\text{Re } \tau - i \text{Im } \tau)\bar{L}_0 - i \text{Im } \tau c/12]} \\ &= \text{Tr } e^{2\pi[\tau L_0 - \bar{\tau} \bar{L}_0 - (\tau - \bar{\tau})c/24]} = \text{Tr } e^{2\pi\tau(L_0 - \frac{c}{24}) - 2\pi\bar{\tau}(\bar{L}_0 - c/24)} \\ &= \text{Tr } q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \end{aligned}$$

と導かれる。ここで $q = \exp(2\pi i \tau)$ とした。複素共役は $\bar{q} = \exp(-2\pi i \bar{\tau})$ である。分配関数が τ のみに依存すること($\bar{\tau}$ には依存しないこと)と、7章で定義した指標

$$\chi_{c,h}(q) = \text{Tr } q^{L_0 - \frac{c}{24}}$$

に類似していて何か関係ありそうなことに注意されたい。

1.2. モジュラー不変性

トーラス上のCFTの主な利点は、特定のトーラスに対して、分配関数が周期 ω_1, ω_2 の選択に依存しないという条件から演算子に制約がかかることである。

ω_1, ω_2 を固定するとこれらの複素数を基本並進ベクトルとする2次元格子が決定される。ここで同じ格子を生成する複素数 ω'_1, ω'_2 を考えると、それらはモジュラー変換と呼ばれる行列変換

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \text{where } ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

で結びついていなければならない。どのような基本並進ベクトルに対しても単位胞のサイズを変えないために行列式が1であり、逆行列が存在するのでこの行列変換は群をなし、その群は $\Gamma := SL(2, \mathbb{Z})$ である。

モジュラーパラメータはこの変換のもとで

$$\tau \rightarrow \frac{c\tau + d}{a\tau + b}$$

と変換することになる。この場合 a, b, c, d と $-a, -b, -c, -d$ によって τ は値を変えないので両者は同一視され、部分群 $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2 = PSL(2, \mathbb{Z})$ を考えることがリーズナブルである。こちらはモジュラー群と呼ばれる。

分配関数が τ のモジュラー変換のもとで不変である場合はきっと興味深い。

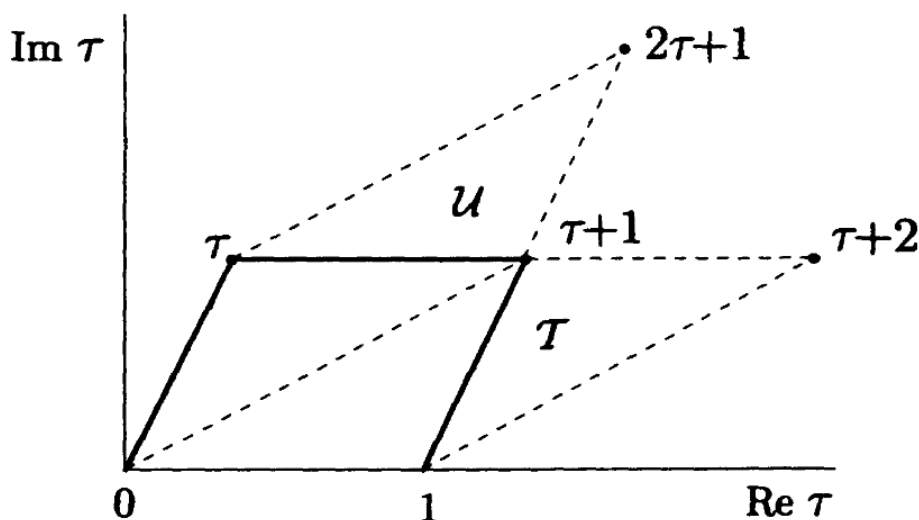
1.3. $SL(2, \mathbb{Z})$ の生成元と基本領域

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \tau \rightarrow \tau + 1,$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$$

はいずれもモジュラー変換になっている。 $(\mathcal{ST})^3 = \mathcal{S}^2 = -1$ を満たすので、モジュラーパラメータ τ に対しては $(\mathcal{ST})^3(\tau) = \mathcal{S}^2(\tau) = \tau$ のように恒等演算子になる。

この結果は、いわゆる Dehn のひねりを考慮することにより、幾何学的に理解しやすくなる。 ω_1 および ω_2 の周期で指定されたトーラスに対し、モジュラー変換 $\mathcal{T} : \tau \rightarrow \tau + 1$ は、穴の周りを回るループが、更にハンドルに巻き付く形に変更される様子 $\omega_2 \rightarrow \omega_2 + \omega_1$ である。2つの周期を入れ替えて同じ操作をやるためには $\mathcal{U} = \mathcal{T}\mathcal{S}\mathcal{T} : \tau \rightarrow \tau/(\tau+1)$ を行う。トーラス上のこれら2つの操作は、Dehn のひねりと呼ばれる。下図参照。



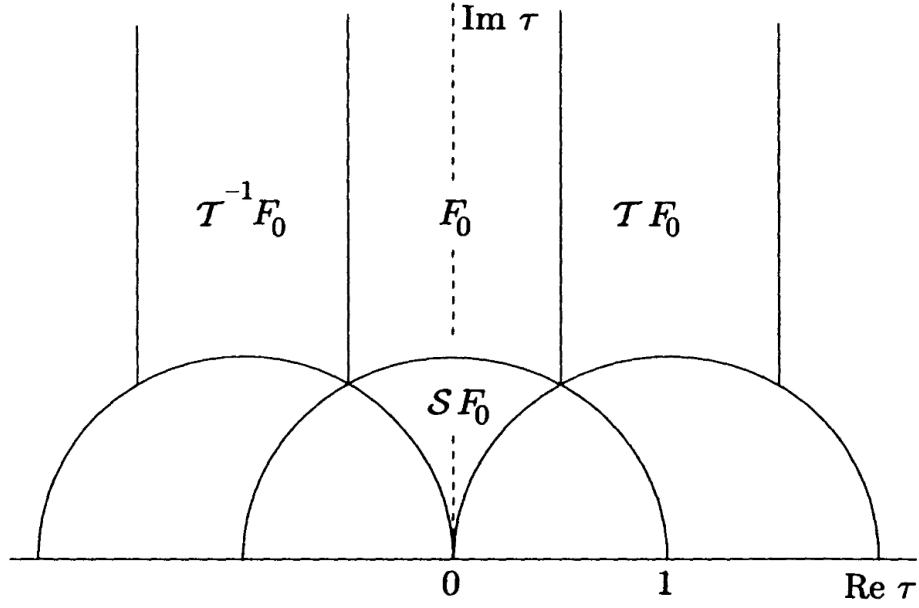
\mathbb{R} の上半平面でのモジュラー群 Γ の作用はかなり複雑である。 Γ の基本領域とは、

- 領域内部の2点はどのようなモジュラー変換によっても同一視できない
- 領域外部の点はどのようにしてモジュラー変換で領域内部の点と同一視できる

ような領域である¹。もちろん、基本領域でのモジュラー変換の作用は、別の基本ドメインを生成する。通常、下図の F_0 に示されている基本的なドメインを選択する²。

¹三角関数でいう $[-\pi, \pi)$ のような、コピペで済ませることができる最小の領域である。

²基本領域をモジュラー変換していったら上半平面を埋め尽くす面白いゲームがあった。



F_0 は以下のように定義される領域である:

$$F_0 = \begin{cases} \text{Im } z > 0, & -\frac{1}{2} \leq \text{Re } z \leq 0 \quad \text{and} \quad |z| \geq 1 \\ \text{or} \\ \text{Im } z > 0, & 0 \leq \text{Re } z \leq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad |z| > 1 \end{cases}$$

2. トーラス上の自由ボソンの理論

この節では、自由ボソンの分配関数を計算する。

2.1. モジュラー不変性

分配関数が発散したりなどの変な振る舞いをしないことを保証するため、ゼロモードにある程度の注意が必要となる。ゼロモードを破棄することと、恒等演算子が作用するフォック空間（つまり電荷ゼロの頂点作用素）にわたってトレース

$$Z(\tau) = \text{Tr } q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}$$

を評価することが等価でなくてはならない。結論から言えば、この分配関数の定義および Virasoro 指標

$$\chi_{c,h}(\tau) = \text{Tr } q^{L_0 - \frac{c}{24}} = \frac{q^{h+(1-c)/24}}{\eta(\tau)}, \quad \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

から、自由ボソンの分配関数は $Z_{\text{bos}}(\tau) \propto |\eta(\tau)|^{-2}$ のようになることを見る。

ところがどっこい、この分配関数はモジュラー不変ではないので比例定数が重要である！実際、Dedekind の η 関数はモジュラー変換で以下のように変換する:

$$\begin{aligned} \eta(\tau+1) &= e^{i\pi/12} \eta(\tau) \\ \eta(-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau} \eta(\tau). \end{aligned}$$

$|\eta(\tau)|$ をモジュラー不変にするように係数を調節した $(\text{Im } \tau)^{\frac{1}{4}} |\eta(\tau)|$ は実際に分配関数を構成し、

$$Z_{\text{bos}}(\tau) = \frac{1}{(\text{Im } \tau)^{\frac{1}{2}} |\eta(\tau)|^2}.$$

この節の残りの部分では、いかにしてこの分配関数が経路積分形式から導かれるのかについて議論する。

2.2. 経路積分形式による導出

ゼロモードを排除した自由ボソンの分配関数は以下のように導出される。

$$Z_{\text{bos}}(\tau) = \int [d\varphi] \sqrt{A} \delta\left(\int d^2x \varphi \varphi_0\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2x (\nabla\varphi)^2\right)$$

ここで、座標積分はトーラス上で行われ、 A はトーラスの面積であり $\text{Im}(\omega_2\omega_1^*)$ に等しく、 $\varphi_0 = A^{-1/2}$ はゼロモードの正規化された固有関数。デルタ関数の引数は、任意の場の配位におけるゼロモードの係数であると解釈できる。適切に正規化された引数を持つデルタ関数は、ゼロモードが積分から排除されていることを保証するためのものである。係数 \sqrt{A} は分配関数を無次元化するために導入されている。

φ をラプラシアン ∇^2 の正規化された(固有値 $-\lambda_n$)固有関数 φ_n で展開する:

$$\varphi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x).$$

ノンゼロモード($\lambda_n \neq 0$)に関する汎関数積分は

$$\begin{aligned} Z_{\text{bos}}(\tau) &= \sqrt{A} \int \prod_i dc_i \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2\right) \\ &= \sqrt{A} \prod_n \left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\propto \sqrt{A} \prod_n \frac{1}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

と与えられる。一般にこの積は発散するため正規化される必要がある。いわゆる ζ 関数

$$G(s) = \sum'_n \frac{1}{\lambda_n^s}$$

を用いてこの積分を正則化する。 \sum' はゼロモードを除いていることを意味する。 G は s が十分大きいときに解析的であり、 $s=0$ などの関数がよく定義されていない小さい値に対しては解析接続で考える。これを用いて分配関数は形式的には

$$\begin{aligned} Z_{\text{bos}}(\tau) &= \sqrt{A} \exp\left(\frac{1}{2} G'(0)\right) \\ &= \sqrt{A} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n'} \ln \lambda_n\right) \end{aligned}$$

と書くことができる。トーラス上のラプラシアンについては固有関数は2つの平面波の積であるから、固有値・固有状態を指定するラベルは2つあればよい。これを $n, m \in \mathbb{Z}$ とすると、固有値は

$$\lambda_{n,m} = (2\pi)^2 \left| \frac{-i\omega_2}{A} n + \frac{i\omega_1}{A} m \right|^2$$

と書けるので³、以下が従う:

³ ω_1, ω_2 が直交している場合はこれは明らかであるが、直交していなくてもこれが言えるかどうかよく分かっていない...

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2\pi\omega_1}{A} \right|^{2s} G(s) &= \sum'_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{|m+n\tau|^{2s}} \\
&= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|m+n\tau|^{2s}} \\
&= 2\zeta(2s) + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|m+n\tau|^{2s}}.
\end{aligned}$$

第二項は $n\tau$ を整数で割らず作用に対して不変な関数であるから Fourier 展開できる。

$$\begin{aligned}
\sum_p e^{2\pi i p(n \operatorname{Re} \tau - y)} &= \delta(n \operatorname{Re} \tau - y), \quad f(n \operatorname{Re} \tau) = \int dy \delta(n \operatorname{Re} \tau - y) f(y), \\
\frac{1}{z^s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-zt}
\end{aligned}$$

と Gauss 積分を用いることで、

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|m+n\tau|^{2s}} &= \sum_p \int_0^1 dy e^{2\pi i p(n \operatorname{Re} \tau - y)} \sum_m \frac{1}{[(m+y)^2 + n^2(\operatorname{Im} \tau)^2]^s} \\
&= \sum_p \sum_m \int_m^{m+1} dy e^{2\pi i p(n \operatorname{Re} \tau - y)} \frac{1}{[y^2 + n^2(\operatorname{Im} \tau)^2]^s} \\
&= \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{2\pi i p(n \operatorname{Re} \tau - y)} \frac{1}{[y^2 + n^2(\operatorname{Im} \tau)^2]^s} \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{2\pi i p(n \operatorname{Re} \tau - y)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t(y^2 + n^2(\operatorname{Im} \tau)^2)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_p \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{\infty} dy t^{s-1} e^{-t(y^2 + n^2(\operatorname{Im} \tau)^2) + 2\pi i p(n \operatorname{Re} \tau - y)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_p \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{\infty} dy t^{s-1} e^{-t(y^2 + 2\pi i p y/t + \pi^2 p^2/t^2)} e^{-tn^2(\operatorname{Im} \tau)^2 + 2\pi i p n \operatorname{Re} \tau} \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_p \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{\infty} dy t^{s-1} e^{-t((y+\pi i p/t)^2 + \pi^2 p^2/t^2)} e^{-tn^2(\operatorname{Im} \tau)^2 + 2\pi i p n \operatorname{Re} \tau} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_p \int_0^\infty dt t^{s-\frac{3}{2}} e^{-tn^2(\operatorname{Im} \tau)^2 + 2\pi i p n \operatorname{Re} \tau - \pi^2 p^2/t}
\end{aligned}$$

と計算できる。(多分、単に $p=0$ が支配的という理由で) $p=0$ の寄与のみを考慮する。

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-\frac{3}{2}} e^{-tn^2(\operatorname{Im} \tau)^2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) |n \operatorname{Im} \tau|^{1-2s}
\end{aligned}$$

これを元の式に代入して、つまり $n \neq 0$ で足し上げて

$$\begin{aligned}
\sum'_n \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) |n \operatorname{Im} \tau|^{1-2s} &= 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} |\operatorname{Im} \tau|^{1-2s} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{2s-1}} \\
&= 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} |\operatorname{Im} \tau|^{1-2s} \zeta(2s-1).
\end{aligned}$$

というわけで、 $\operatorname{Im} \tau > 0$ だと考えたと

$$\begin{aligned}
& \Gamma(s) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{s-\frac{1}{2}} \left| \frac{2\pi\omega_1}{A} \right|^{2s} G(s) \\
&= 2\Gamma(s)\zeta(2s) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{s-\frac{1}{2}} + \Gamma(s) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{s-\frac{1}{2}} \sum'_{n=-\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|m+n\tau|^{2s}} \\
&= 2\Gamma(s)\zeta(2s) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{s-\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\pi}\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{s-\frac{1}{2}} |\text{Im } \tau|^{1-2s} \zeta(2s-1) \\
&\quad + \sqrt{\pi} \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{s-\frac{1}{2}} \sum'_{n,p} \int_0^\infty dt \, t^{s-\frac{3}{2}} e^{-tn^2(\text{Im } \tau)^2 - 2\pi i p n \text{Re } \tau - \pi^2 p^2/t} \\
&= 2\Gamma(s)\zeta(2s) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{s-\frac{1}{2}} + 2\Gamma(1-s)\zeta(2-2s) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}-s} \\
&\quad + \sqrt{\pi} \sum'_{n,p} e^{2\pi i p n \text{Re } \tau} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{s-\frac{1}{2}} e^{-tn^2(\text{Im } \tau)^2 - \pi^2 p^2/t} \\
&= 2\Gamma(s)\zeta(2s) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{s-\frac{1}{2}} + 2\Gamma(1-s)\zeta(2-2s) \left(\frac{\text{Im } \tau}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}-s} \\
&\quad + \sqrt{\pi} \sum'_{n,p} e^{2\pi i p n \text{Re } \tau} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{s-\frac{1}{2}} \left| \frac{p}{n} \right|^{s-\frac{1}{2}} e^{-|np|(\text{Im } \tau)(t+1/t)}.
\end{aligned}$$

この表示は $s \rightarrow 1-s$ という変換に対し不変で便利である。当然 $s > 1$ でしか $G(s)$ は well-defined ではないので、この表示から $G(0), G'(0)$ の情報を抽出する。積分は $s=0$ の周辺で行うので、最後の積分は $s=0$ の場合のみ考えればよく

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{-\frac{1}{2}} e^{-|np|(\text{Im } \tau)(t+1/t)} = \frac{1}{|pn|^{\frac{1}{2}}} e^{-2\pi|pn|\text{Im } \tau}$$

を得る(未確認)。 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ を代入して

$$G(s) = -1 - 2s \ln |\sqrt{A \text{Im } \tau}| + \frac{1}{3} s \pi \text{Im } \tau + s \sum'_{p,n} \frac{1}{|p|} e^{2\pi i p n \text{Re } \tau - 2\pi|pn|\text{Im } \tau} + \mathcal{O}(s^2)$$

となる(未確認)。二重和については以下のように書ける:

$$\begin{aligned}
s \sum'_{p,n} \frac{1}{|p|} e^{2\pi i p n \text{Re } \tau - 2\pi|pn|\text{Im } \tau} &= s \sum_{n,p>0} \frac{2}{p} (e^{2\pi i p n \tau} + e^{-2\pi i p n \bar{\tau}}) \\
&= s \sum_{n,p>0} \frac{2}{p} (q^{pn} + \bar{q}^{pn}) \\
&= -2s \sum_{n>0} (\ln(1-q^n) + \ln(1-\bar{q}^n)) \\
&= -2s \ln |\eta(q)|^2 - \frac{1}{3} s \pi \text{Im } \tau
\end{aligned}$$

つまり

$$G(s) = -1 - 2s \ln \sqrt{A \text{Im } \tau} |\eta(q)|^2$$

これを用いて $G'(0)$ を評価すれば、

$$\begin{aligned}
Z_{\text{bos}}(\tau) &= \sqrt{A} \exp\left(\frac{1}{2} G'(0)\right) \\
&= \sqrt{A} \exp\left(\frac{1}{2} \left(-2 \ln(\sqrt{A \text{Im } \tau} |\eta(\tau)|^2)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\text{Im } \tau} |\eta(\tau)|^2}
\end{aligned}$$

という形で分配関数が求まる。以前確かめたようにこの分配関数はモジュラー不変である。

3. トーラス上の自由フェルミオンの理論

自由フェルミオンの分配関数の経路積分計算は、原則として、自由ボソンと同じ方法で得られる。実際、自由フェルミオン作用は以下のように書かれている (cf. 5.3.2 節)：

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left(\bar{\psi} \partial \bar{\psi} + \psi \bar{\partial} \psi \right).$$

2つの場 $\psi, \bar{\psi}$ はデカップルされているので、分配関数は2つの Pfaffian の積になる⁴

$$Z = \text{Pf}(\partial) \text{Pf}(\bar{\partial}) = \text{Pf}(\partial \bar{\partial} = \nabla^2) = \det(\nabla^2)^{\frac{1}{2}}.$$

さて、冒頭に述べた周期的境界条件の取り方の指定について考える。これらはラプラシアンやその行列式に許容される固有値に影響を与える。ここでは、フェルミオンは1周すると以下のように位相を拾うと仮定する：

$$\psi(z + \omega_1) = e^{2\pi i v} \psi(z), \quad \psi(z + \omega_2) = e^{2\pi i u} \psi(z).$$

反正則部分に関しては同様に定まっているとする。作用の周期性から以下の4通りが可能である：

$$(v, u) = \begin{cases} (0, 0) = (R, R) \\ (0, \frac{1}{2}) = (R, NS) \\ (\frac{1}{2}, 0) = (NS, R) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (NS, NS) \end{cases}$$

R は Ramond, NS は Neveu-Schwarz の略。境界条件 (v, u) の分配関数を $Z_{v,u}$ で表す。周期性条件の組 (v, u) はフェルミオンのスピン構造と呼ばれる。正則・反正則のデカップリングのため、片方の分配関数 $d_{v,u}$ を導入して $Z_{v,u} = |d_{v,u}|^2$ を考えれば良い。

ラプラシアンの固有関数 φ が境界条件 (v, u) を満たす場合、

$$\varphi(z + k\omega_1 + l\omega_2) = e^{2\pi i(kv + lu)} \varphi(z)$$

を満たし、関連する固有値は

$$\frac{i}{A}((m+u)\omega_1 + (n+v)\omega_2)$$

の形を取る。ボソンのときと同様に、 ζ 関数の手法を用いて

$$G_{u,\nu}(s) = \left(\frac{A}{2\pi\omega_1} \right) \sum_{m,n} \frac{1}{[m + n\tau + (u + v\tau)]^{2s}}$$

とすることで分配関数は

$$Z_{v,u} = \exp\left(-\frac{1}{2}G'_{v,u}(0)\right)$$

を用いて計算できる。

もし $(v, u) \neq (0, 0)$ であれば、ラプラシアンに零固有値は存在せず、ボソンのときのような微妙な問題は考えなくても良くなる。 $(0, 0)$ のときのみ零固有値は存在でき、分配関数はなんと

$$Z_{0,0} = 0$$

となってしまう (\det はすべての固有値の積だから)！なので経路積分形式は使用せずに

⁴Pfaffian 公式を思い出す：

$$\int \prod_i dc_i e^{-\sum_{i,j} c_i J_{ij} c_j} = \text{Pf } J$$

$$Z(\tau) = \text{Tr} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \right)$$

を使用する。

そのため、演算子形式内の時間方向に周期性条件を実装する必要がある。これらの条件は、場の理論の文脈ではかなり珍しいものだが、トーラス上の相関関数の条件として表される場合がある。非ゼロの値を考えるために X を奇数個のフェルミオン場として、フェルミオンの一般的な相関関数

$$\langle \psi(z) X \rangle$$

を考える。このフェルミオンを位置 z から $z + \omega_2$ に何らかの連続した path を介して移動させる。演算子形式では時間順序のため、 X の他のすべてのフェルミオンを通過する必要がある。その過程で毎回負号が生じ、経路積分アプローチとハミルトニアンアプローチの間の対応は反周期条件 ($u = \frac{1}{2}$) に帰着する。この不一致を解決するために、周期的境界条件に関してはフェルミオン数 $F := \sum_{k \geq 0} b_{-k} b_k$ (およびその反正則バージョン \bar{F}) で grade された相関関数

$$\langle (-)^F \dots \rangle$$

を考えるのがよい。 $F_k := b_{-k} b_k$ と定める。

この処方により、正則部分の分配関数は以下のように求められる (正則部分のみ取り、 $c = \frac{1}{2}$ を代入するためこうなる):

$$\begin{cases} d_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr} (-)^F q^{L_0 - \frac{1}{48}} \\ d_{0,\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr} q^{L_0 - \frac{1}{48}} \\ d_{\frac{1}{2},0} = \text{Tr} (-)^F q^{L_0 - \frac{1}{48}} \\ d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \text{Tr} q^{L_0 - \frac{1}{48}}. \end{cases}$$

$\sqrt{2}$ の因子は慣習であり、後でモジュラー性の解析を楽にするために導入されている。以降、式(6.114)による L_0 の表示

$$L_0 = \begin{cases} \sum_{k>0} k b_{-k} b_k & \text{for } NS : k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \\ \sum_{k>0} k b_{-k} b_k + \frac{1}{16} & \text{for } R : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

を用いる。

これらの分配関数は、 q^{L_0} が演算子の無限個のフェルミオンモードの積に因数分解できるため簡単に計算される (F があってもこのテクニックは使える)。例えば、

$$\begin{aligned} d_{\frac{1}{2},0} &= q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr} \prod_{k>0} q^{k b_{-k} b_k} (-)^{F_k} \\ &= q^{-\frac{1}{48}} \prod_{k>0} \text{Tr} (q^{k b_{-k} b_k} (-)^{F_k}) \end{aligned}$$

であり、ここでそれぞれのフェルミオンモード上のトレースは2次元空間の上で取ればいいだけなので、

$$\begin{aligned} \text{Tr} q^{k b_{-k} b_k} &= 1 + q^k \\ \text{Tr} q^{k b_{-k} b_k} (-)^{F_k} &= 1 - q^k \end{aligned}$$

のように計算される。したがって分配関数は以下ようになる:

$$\begin{cases} d_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n) = 0 \\ d_{0,\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n) = \sqrt{\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}} \\ d_{\frac{1}{2},0} = \frac{1}{\sqrt{2}} q^{-\frac{1}{48}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 - q^r) = \sqrt{\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}} \\ d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} q^{-\frac{1}{48}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 + q^r) = \sqrt{\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}}. \end{cases}$$

θ は Jacobi の θ 関数であり、Section 9 で説明する。

これが Virasoro 指標とどう関係するのだろうか？ これらの指標はトーラスを念頭に置いて定義されていないため、時間方向の周期性を考慮していない。R セクターと NS セクターを区別し、それぞれに対して L_0 の式

$$L_0 = \begin{cases} \sum_{k>0} k b_{-k} b_k & \text{for } NS : k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \\ \sum_{k>0} k b_{-k} b_k + \frac{1}{16} & \text{for } R : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

の助けを借りつつ

$$\chi_{c,h}(\tau) = \text{Tr } q^{L_0 - \frac{c}{24}}$$

に従って指標を定義する。この系では $c = c(4,3) = \frac{1}{2}$ なので、Kac テーブルによると、可能な共形ウェイトは $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$ である。それぞれ $(r,s) = (1,1), (2,1), (1,2)$ の場合である。

最初に NS セクターを検討する。 L_0 の固有値とその固有状態は

$$b_{-k_1-1/2} b_{-k_2-1/2} \cdots |0\rangle = \sum_i \left(k_i + \frac{1}{2} \right) |0\rangle$$

で与えられ、固有値は整数・半整数値が可能であるから、最高ウェイトが $0, \frac{1}{2}$ の部分空間を考えれば良い。これは $(r,s) = (1,1)$ に対応する。

$$\begin{aligned} \chi_{1,1} &= q^{-\frac{1}{48}} \frac{1}{2} \text{Tr} (1 + (-1)^F) q^{L_0} \\ \chi_{2,1} &= q^{-\frac{1}{48}} \frac{1}{2} \text{Tr} (1 - (-1)^F) q^{L_0} \end{aligned}$$

のように、フェルミオンパリティで分解すればそれぞれの固有値の空間の指標になっている。分配関数と比べることで

$$\begin{aligned} \chi_{1,1} &= \frac{1}{2} (d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + d_{\frac{1}{2},0}) \\ \chi_{2,1} &= \frac{1}{2} (d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - d_{\frac{1}{2},0}) \end{aligned}$$

が成り立っていることがわかる。

では次に R セクターを検討する。残っているのは固有値が $\mathbb{Z} + \frac{1}{16}$ の空間である。2 重縮退している基底状態がフェルミオンパリティでラベルされている。明らかに

$$\chi_{1,2} = \frac{d_{0,\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

である。

詳細は Section 9 に記述があるが、これらの分配関数は S 変換で不変である：

$$d\left(-\frac{1}{\tau}\right) = d(\tau).$$

一方で T 変換に対しては

$$\begin{aligned} d_{0,\frac{1}{2}}(\tau+1) &= e^{i\frac{\pi}{8}} d_{0,\frac{1}{2}}(\tau) \\ d_{\frac{1}{2},0}(\tau+1) &= e^{-i\frac{\pi}{24}} d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\tau) \\ d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\tau+1) &= e^{-i\frac{\pi}{24}} d_{\frac{1}{2},0}(\tau) \end{aligned}$$

となっており、不変ではないが、全体の分配関数は $Z = |d|^2$ で与えられるので全体では不変である。結局、トーラス上のフェルミオンの分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + Z_{0,\frac{1}{2}} + Z_{\frac{1}{2},0} \\ &= |d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}|^2 + |d_{0,\frac{1}{2}}|^2 + |d_{\frac{1}{2},0}|^2 \\ &= |\chi_{1,1} + \chi_{2,1}|^2 + |\chi_{1,1} - \chi_{2,1}|^2 + |\sqrt{2}\chi_{1,2}|^2 \\ &= 2(|\chi_{1,1}|^2 + |\chi_{2,1}|^2 + |\chi_{1,2}|^2) \\ &= \left|\frac{\theta_2}{\eta}\right| + \left|\frac{\theta_3}{\eta}\right| + \left|\frac{\theta_4}{\eta}\right| \end{aligned}$$

となる。したがって、モジュラー不変性は $c = \frac{1}{2}$ に関連する 3 つの共形場すべてが理論に実際に存在することを要求し、分配関数は単にトーラス上の Ising 模型の分配関数の 2 倍になる。

4. $c = 1$ の模型

4.1. コンパクト化されたボソン

6.3.5 章で、半径 R の円への自由ボソンの変域の制限により、頂点演算子の電荷 α の可能な値が制限されるシナリオと、非ゼロ巻き付き数の新しい構成法が許されるシナリオを学んだ。

トーラスでは、そのような巻き付きは、 z から等価な $z + \omega_1$ および $z + \omega_2$ に移動するときに発生する可能性がある。したがって、巻線には 2 種類のタイプがあり、次の境界条件で構成を考慮する必要がある:

$$\varphi(z + k\omega_1 + k'\omega_2) = \varphi(z) + 2\pi R(km + k'm'), \quad k, k' \in \mathbb{Z}.$$

整数組 (m, m') は、上記の周期性条件に従う構成のトポロジークラスを指定し、分配関数 $Z_{m,m'}$ は、そのようなクラスの配位の積分によって定義される。積分は、 φ を特別な配位: 運動方程式の古典解 $\varphi_{m,m'}^{\text{cl}}$ (Laplacian が消えるので正則関数の虚部にとる) と単に周期的な場 $\tilde{\varphi}$ (自由な部分) に分解することによって計算できる。答えを書けば

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{m,m'}^{\text{cl}} + \tilde{\varphi} \\ \varphi_{m,m'}^{\text{cl}} &= 2\pi R \left(\frac{z}{\omega_1} \frac{m\bar{\tau} - m'}{\bar{\tau} - \tau} - \frac{\bar{z}}{\bar{\omega}_1} \frac{m\tau - m'}{\bar{\tau} - \tau} \right) \end{aligned}$$

となる。以下でこの配位が実際に周期性を持つことを確かめる。

まず、 $S[\varphi] = S[\varphi_{m,m'}^{\text{cl}}] + S[\tilde{\varphi}]$ を示す。作用は場の二次形式なので、交差項が消えることを確かめれば良い。実際 $\nabla^2 \varphi_{m,m'}^{\text{cl}} = 0$ より

$$\int d^2x \nabla \varphi_{m,m'}^{\text{cl}} \nabla \tilde{\varphi} = - \int d^2x \tilde{\varphi} \nabla^2 \varphi_{m,m'}^{\text{cl}} = 0$$

となって確かに消える。古典解に対する作用は

$$\begin{aligned}
S[\varphi_{m,m'}^{\text{cl}}] &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \left(\nabla \varphi_{m,m'}^{\text{cl}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dz d\bar{z} \left(\partial \varphi_{m,m'}^{\text{cl}} \right) \left(\bar{\partial} \varphi_{m,m'}^{\text{cl}} \right) \\
&= 2\pi R^2 \frac{A}{|\omega_1|^2} \left| \frac{m\tau - m'}{\bar{\tau} - \tau} \right|^2 \\
&= \pi R^2 \left| \frac{m\tau - m'}{2 \text{Im} \tau} \right|^2
\end{aligned}$$

となる。自由部分による分配関数は以前論じたように

$$Z_{\text{bos}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\text{Im} \tau} |\eta(\tau)|^2}$$

が与えるので、結局

$$Z(\tau) = Z_{\text{bos}}(\tau) e^{-\pi R^2 \frac{|m\tau - m'|^2}{2 \text{Im} \tau}}$$

を得る。この分配関数のモジュラー変換に対する変化は、自由部分が不変であるので古典解の部分を見れば良く、それは

$$\begin{aligned}
\frac{|m\tau - m'|^2}{2 \text{Im} \tau} &\rightarrow \frac{\left| m \frac{a\tau + b}{c\tau + d} - m' \right|^2}{2 \text{Im} \frac{a\tau + b}{c\tau + d}} \\
&= \frac{\left| m \frac{a\tau + b}{c\tau + d} - m' \right|^2 |c\tau + d|^2}{2 \text{Im}[(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d)]} \\
&= \frac{|m(a\tau + b) - m'(c\tau + d)|^2}{2 \text{Im} \tau}
\end{aligned}$$

と変換する。ここで

$$\begin{aligned}
\text{Im}[(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d)] &= \text{Im}[ac\tau\bar{\tau} + ad\tau + bc\bar{\tau} + bd] \\
&= (ad - bc) \text{Im} \tau
\end{aligned}$$

を用いた。つまり、モジュラー変換のもとで

$$\begin{pmatrix} m \\ m' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ m' \end{pmatrix}$$

のように変換することになる。これはもとのモジュラー変換行列の逆行列による変換であり、モジュラーパラメータ τ の2つの周期に対して波数のように変換し、双対格子を構成する。このモジュラー逆変換が群を構成することはすべての (m, m') に関して足し上げた分配関数が不変になることを意味し、それは実際

$$\begin{aligned}
Z_{m,m'}(\tau + 1) &= Z_{m,m'-m}(\tau) \\
Z_{m,m'}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= Z_{-m',m}(\tau)
\end{aligned}$$

となることから理解でき、分配関数は

$$Z(R) = \frac{R}{\sqrt{2}} Z_{\text{bos}}(\tau) \sum_{m,m'} e^{-\pi R^2 \frac{|m\tau - m'|^2}{2 \text{Im} \tau}}$$

となる。最初の因子 $\frac{R}{\sqrt{2}}$ はゼロモードを注意深く積分すれば求められる。Poisson の resummation formula (Section 9) を用いてこの分配関数を

$$Z(R) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{e,m \in \mathbb{Z}} q^{(e/R + mR/2)^2/2} \bar{q}^{(e/R - mR/2)^2/2}$$

と書くことができる。この表示は式(6.94)

$$L_0 = \sum_{n>0} a_{-n} a_n + 2\pi g \left(\frac{n}{4\pi g R} + \frac{1}{2} m R \right)^2$$

$$\bar{L}_0 = \sum_{n>0} \bar{a}_{-n} \bar{a}_n + 2\pi g \left(\frac{n}{4\pi g R} - \frac{1}{2} m R \right)^2$$

で $g = 1/4\pi$ としたものに対応している。これは頂点演算子の可能な電荷と $c = 1$ Virasoro 指標の巻き付き数の足し上げの合計であり、それらの共形次元は

$$h_{e,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{R} + \frac{mR}{2} \right)^2, \quad h_{e,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{R} - \frac{mR}{2} \right)^2$$

である。これらの次元はプライマリ場のスペクトルを与える。 $m \neq 0$ の場合は φ の渦、つまり $2\pi m R$ の不連続性がある線を表す。 $e \neq 0$ の場合は電荷を持つ頂点演算子に対応する。一般の $e, m \neq 0$ の場合はそれらの重ね合わせのようになっているものである。これらの相関関数の計算は 12 章を参照。スケーリング次元とスピンは

$$\Delta_{e,m} = \frac{e^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{4}, \quad s_{e,m} = em$$

である。ボソン場の理論なのでスピンは整数でなければならない。スケーリング次元は非負であり R によって連続的に変化する。系は驚くべき電磁二重性を示し、その結果、分配関数とスペクトルは $R \leftrightarrow \frac{2}{R}$ の変換のもとで不変となる。

$$Z\left(\frac{2}{R}\right) = Z(R)$$

4.2. 多成分カイラルボソン

この節では、コンパクト化された自由ボソンの構成からモジュラー不変の分配関数を構成する方法を示す。

まず、次元 n の多次元格子 Γ とは、 n 個の基底ベクトル ϵ_i の整数係数線形結合で表されるような \mathbb{R}^n 上の点の集合である：

$$\Gamma = \left\{ x ; x = \sum_i x_i \epsilon_i, x_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

符号 (s, \bar{s}) を持つ Lorentzian 格子とは、計量が $\begin{pmatrix} s & \\ & \bar{s} \end{pmatrix}$ の indefinite な内積を持つ格子である。もし $\bar{s} = 0$ なら格子は Euclid と呼ばれる。 $x \cdot y$ で 2 つのベクトルの内積を表す。ユニットセルの体積 $\text{vol } \Gamma$ は、基底ベクトルで構成される行列の行列式である。双対格子 Γ^* とは、 $p \cdot x \in \mathbb{Z}$ となるような p の集合であり、双対基底 ϵ_i により生成される多次元格子である。双対格子のユニットセルの体積はもとの格子のユニットセルの体積の逆数である。 $\Gamma = \Gamma^*$ の場合、格子は自己双対であるという。もちろんこのときユニットセルの体積は 1 である。整数格子は、すべての点の内積が \mathbb{Z} の要素である場合であり $\Gamma \subset \Gamma^*$ が従う。偶数格子とは $x \cdot x \in 2\mathbb{Z}$ である場合である。

$p = \frac{e}{R} + \frac{mR}{2}, \bar{p} = \frac{e}{R} - \frac{mR}{2}$ と定めることで、分配関数は

$$Z(R) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{p, \bar{p}} e^{i\pi \tau p^2 - i\pi \bar{\tau} \bar{p}^2}$$

となる。和は e, m に対して行われていたのので、これを新しい変数について考えることで

$$\epsilon_1 = \left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R} \right), \quad \epsilon_2 = \left(\frac{R}{2}, -\frac{R}{2} \right)$$

が生成する双対格子に関して和を取ることにすればよい。計量を Lorentzian $(+, -)$ にすることで (p, \bar{p}) は自己双対偶数 Lorentzian 格子になる(2つの基底の自分との内積は0で、交差する内積は-1)。これから検証するように、この事実はモジュラー不変性と密接な関連がある。

正則モードのみをもつ n ボソンのセットと、反正則モードのみをもつ \bar{n} ボソンのセットを考慮する。理論は2つの格子点 $p \in \Gamma$ と $\bar{p} \in \bar{\Gamma}$ を用いた以下の Virasoro 生成子で定義されている:

$$L_0 = \frac{1}{2}p^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k>0} a_{-k}^{(i)} a_k^{(i)}$$

$$\bar{L}_0 = \frac{1}{2}\bar{p}^2 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{k>0} \bar{a}_{-k}^{(i)} \bar{a}_k^{(i)}.$$

この系の分配関数は

$$Z_\Gamma(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)^n \bar{\eta}(\tau)^{\bar{n}}} \sum_{p \in \Gamma, \bar{p} \in \bar{\Gamma}} e^{i\pi\tau p^2 - i\pi\bar{\tau}\bar{p}^2}$$

と書かれる。興味があるのはこの分配関数がどのような条件でモジュラー不変になるのかということである。 $\tau \rightarrow \tau + 1$ による変化は、 $p^2 - \bar{p}^2 \in 2\mathbb{Z}$ を仮定すると

$$Z_\Gamma(\tau + 1) = Z_\Gamma(\tau) e^{2\pi i \frac{(n - \bar{n})}{24\pi}}$$

である(つまり $\Gamma \oplus \bar{\Gamma}$ は偶数格子でなくてはならない)。 $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ に対する変化を見るためには Poisson 和公式の一般化を利用する必要がある:

$$\sum_{q \in \Gamma} e^{-\pi a q^2 + q \cdot b} = \frac{1}{\text{vol } \Gamma} \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}} \sum_{p \in \Gamma^*} e^{-\frac{\pi}{a} (p + \frac{b}{2\pi i})^2}.$$

ここで a は $\text{Re } a > 0$ の定数、 b は n 成分ベクトルである。この公式は closure relation

$$\sum_{q \in \Gamma} \delta(x - q) = \frac{1}{\text{vol } \Gamma} \sum_{p \in \Gamma^*} e^{2\pi i x \cdot p}.$$

を使うことで示すことができる⁵:

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \Gamma} e^{-\pi a q^2 + q \cdot b} &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \left[\sum_{q \in \Gamma} \delta(x - q) \right] e^{-\pi a x^2 + x \cdot b} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \left[\frac{1}{\text{vol } \Gamma} \sum_{p \in \Gamma^*} e^{2\pi i x \cdot p} \right] e^{-\pi a x^2 + x \cdot b} \\ &= \frac{1}{\text{vol } \Gamma} \sum_{p \in \Gamma^*} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{-\pi a (x^2 + \frac{2i}{a} x \cdot (p + \frac{b}{2\pi i}))} \\ &= \frac{1}{\text{vol } \Gamma} \sum_{p \in \Gamma^*} e^{-\frac{\pi}{a} (p + \frac{b}{2\pi i})^2} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{-\pi a (x + \frac{i}{a} (p + \frac{b}{2\pi i}))^2} \\ &= \frac{1}{\text{vol } \Gamma} \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}} \sum_{p \in \Gamma^*} e^{-\frac{\pi}{a} (p + \frac{b}{2\pi i})^2}. \end{aligned}$$

$\Gamma = \Gamma^*$ のとき、 $b = 0, a = i\tau$ を代入して両辺を比べることで、 $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ に対する不変性を理解できる。つまり、ボソン数について $n - \bar{n} = 0 \pmod{24}$ の偶数自己双対格子のモデルの分配関数はモジュラー不変である。

多成分ボゾン系のモジュラー不変性のこの問題は、ボゾン弦のコンパクト化に発生するらしい。実際、余分な次元を一貫した方法で圧縮する文脈で指標理論が重要になる。その文脈では、ボソンのターゲット空間 (ボソンがその値をとる空間) は、物理的に非常にコンパクトであると想定されている (プランク長オーダーで)。弦の運動量は離散値を取り非ゼロの巻き付き数を考慮する必要がある。

⁵導出は 14.C を参照とあるが、見覚えがあると思う

4.3. \mathbb{Z}_2 Orbifold

コンパクト化された自由ボソン理論の変分は、場 φ が完全な円上に値をとるのではなく、 $\varphi, -\varphi$ を同一視することによって定義される対象、つまり、 \mathbb{Z}_2 の自然作用による商空間の上に値をとる。このようなオブジェクトは、 \mathbb{Z}_2 Orbifold(軌道体)という。トーラスの周期を通過していくことで場は twist され、より一般の境界条件

$$\varphi(z + k\omega_1 + l\omega_2) = e^{2\pi i(kv+lu)}\varphi(z)$$

が適用可能で、フェルミオンの場合は v, u が $0, \frac{1}{2}$ となることがフェルミオン性の要請だった。これを φ についても考えることになる。これを実現する $G: \varphi \rightarrow -\varphi$ の作用は $G\varphi = -\varphi G$ と書かれる(これは 6.3.4 節で定義したものと同じ)。 G は他にも $Ga_n = -a_n G, G\bar{a}_n = -\bar{a}_n G$ など反可換である。基底に対する作用はインデックス反転である。つまり以上をまとめると

$$\begin{aligned} G\varphi &= -\varphi G \\ Ga_n &= -a_n G \\ G\bar{a}_n &= -\bar{a}_n G \\ G|m, n\rangle &= |-m, -n\rangle \end{aligned}$$

となっている。基底の線形結合

$$|m, n\rangle_{\pm} = |m, n\rangle \pm |-m, -n\rangle$$

は $+$: G 対称、 $-$: G 反対称であり、それぞれの基底がなす空間を \mathcal{F}_{\pm} と書くことにする。 $m = n = 0$ のとき、

$$G|0, 0\rangle_{\pm} = \pm|0, 0\rangle_{\pm}$$

となり真空は 2 重縮退している。

正則関数 $f_{v,u}$ はフェルミオンのときと同じように以下のように計算される:

$$\begin{aligned} f_{0, \frac{1}{2}} &= \text{Tr } Gq^{L_0 - \frac{c}{24}} = \text{Tr } Gq^{\sum_n a_{-n}a_n - \frac{c}{24}} \\ f_{\frac{1}{2}, 0} &= \text{Tr } q^{L_0 - \frac{c}{48}} = \text{Tr } q^{\sum_n a_{-n}a_n + \frac{c}{48}} \\ f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= \text{Tr } Gq^{L_0 - \frac{c}{48}} = \text{Tr } Gq^{\sum_n a_{-n}a_n + \frac{c}{48}}. \end{aligned}$$

ここでトレースは、反周期的境界条件においては 2 重縮退した真空を含みすべての真空を含む必要がある。例えば $f_{0, \frac{1}{2}}$ を考えると、 $|m, n\rangle + |-m, -n\rangle$ と $|m, n\rangle - |-m, -n\rangle$ が同じ L_0 固有値、逆符号の G 固有値を持つことにより、トレースの中に G を含むことで $|0, 0\rangle$ のみが寄与することになる。最終的に

$$f_{0, \frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n} = 2\sqrt{\frac{\eta(\tau)}{\theta_2(\tau)}}$$

になるらしい。同様に

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{2}, 0} &= 2q^{\frac{1}{48}} \prod_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{1}{1-q^r} = 2\sqrt{\frac{\eta(\tau)}{\theta_4(\tau)}} \\ f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= 2q^{\frac{1}{48}} \prod_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{1}{1+q^r} = 2\sqrt{\frac{\eta(\tau)}{\theta_3(\tau)}} \end{aligned}$$

であり、モジュラー不変性はフェルミオンのときと同様の感じ(T に対しては位相因子が出る)で、結局分配関数は

$$\begin{aligned}
Z_{\text{orb}}(R) &= \frac{1}{2} \left(Z_{0,0} + |f_{\frac{1}{2},0}|^2 + |f_{0,\frac{1}{2}}|^2 + |f_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(Z(R) + 4 \left| \frac{\eta}{\theta_2} \right| + 4 \left| \frac{\eta}{\theta_3} \right| + 4 \left| \frac{\eta}{\theta_4} \right| \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(Z(R) + \left| \frac{\theta_2 \theta_3}{\eta^2} \right| + \left| \frac{\theta_3 \theta_4}{\eta^2} \right| + \left| \frac{\theta_4 \theta_2}{\eta^2} \right| \right)
\end{aligned}$$

となるらしい。Section 9 で示すらしい公式 $\theta_2 \theta_3 \theta_4 = 2\eta^3$ を用いた。

5. ミニマル模型: モジュラー不変性と演算子

いろいろな自由場の例を見たので、次にミニマルモデルのモジュラー不変性を考える。このセクションでは、理論が有限数のプライマリ場しか持たないために、分配関数のモジュラー不変性により、中心電荷が厳密に 1 未満になるように制限されることを示す。逆に、中心電荷は互いに素な p, p' によって

$$c = 1 - 6 \frac{(p - p')^2}{pp'}$$

と表されないならば理論がミニマルモデルではなく、無限の数の Virasoro プライマリ場を含むことも示す。

ミニマルモデルの空間は

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{h, \bar{h}} \mathcal{M}(c, h) \otimes \mathcal{M}(c, \bar{h})$$

と分解され、その分配関数は

$$Z(\tau) = \sum_{h, \bar{h}} \mathcal{M}_{h, \bar{h}} \chi_h(\tau) \bar{\chi}_{\bar{h}}(\bar{\tau})$$

と書かれる。ここで $\mathcal{M}_{h, \bar{h}}$ は重複度で、

$$\begin{aligned}
\chi_h(\tau) &= \text{Tr}_{\mathcal{M}(c, h)} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \\
&= q^{h - \frac{c}{24}} \sum_{n \geq 0} d(n) q^n
\end{aligned}$$

であり、反正則部分も同様である。指標はトーラス上の(正規化されていない)0点関数、つまり分配関数の共形ブロックだと思えることができる。

以降の議論で q を実数にするため、 τ を純虚数 $\tau = i\theta$ にとる(長方トーラスになる)。特異ベクトルが存在することによって、 $\mathcal{M}(c, h)$ の中の独立なディセンダント場の数 $d(n)$ は分割の数 $p(n)$ で抑えられる。これは指標に対する次の不等式を導く:

$$\chi_h(i\theta) = q^{h - \frac{c}{24}} \sum_{n \geq 0} d(n) q^n \leq q^{h - \frac{c}{24}} \sum_{n \geq 0} p(n) q^n = \frac{q^{h - \frac{c-1}{24}}}{\eta(i\theta)}.$$

S 変換を参照すると $\eta(i\theta) = \sqrt{\theta} \eta(i/\theta)$ であり、 $\theta \rightarrow 0^+$ 、つまり $q \rightarrow 1^-$ の極限で、

$$\chi_h(0) \leq \frac{\sqrt{\theta}}{\eta(i\theta)} \simeq \sqrt{\theta} e^{\pi/12\theta}$$

となるらしい(最後はリーディングオーダーを残した)。分配関数のモジュラー不変性より

$$Z(i\theta) = Z(i/\theta) \leq \theta e^{\pi\theta/6} \sum_{h, \bar{h}} \mathcal{M}_{h, \bar{h}} =: \theta e^{\pi/6\theta} \mathcal{M}$$

と抑えられる。一方で $Z(i/\theta)$ の $\lim_{\theta \rightarrow 0^+}$ のリーディングオーダーは次元の最も小さいオペレーターで与えられるので

$$h_{\min} := \frac{1}{2} \min\{h + \bar{h}; \mathcal{M}_{h, \bar{h}} \neq 0\} = h_0 + \bar{h}_0$$

と定めることで

$$Z(i/\theta) \simeq \mathcal{M}_{h_0, \bar{h}_0} e^{-4\pi(h_{\min} - c/24)/\theta}$$

と評価できる。先の不等式と合わせて評価することで

$$0 \leq \mathcal{M}_{h_0, \bar{h}_0} e^{-4\pi(h_{\min} - (c-1)/24)/\theta} \leq \theta \mathcal{M}$$

が得られ、 $\theta \rightarrow 0^+$ においてのふるまいから $h_{\min} > \frac{c-1}{24}$ つまり

$$c < 1 + 24h_{\min}$$

が得られる。恒等演算子に対して $h = \bar{h} = 0$ より、 $h_{\min} \leq 0$ となる(等号成立条件は理論が unitary であること)。よって $c < 1$ が結論付けられる。

この条件がミニマル模型につながるシナリオを考えよう。そのためにはトーラス分配関数の下限が必要になる。中心電荷が

$$c = 1 - 6 \frac{(p - p')^2}{pp'}$$

の形を取らない場合の、分配関数の

$$Z(\tau) = \sum_{h, \bar{h}} \mathcal{M}_{h, \bar{h}} \chi_h(\tau) \bar{\chi}_{\bar{h}}(\bar{\tau})$$

の形を考える。2つの場合がありうる:

- Verma 加群が既約のとき指標は

$$\chi_h(\tau) = \frac{q^{h-(c-1)/24}}{\eta(\tau)}$$

- Verma 加群 $V(c, h)$ にレベル N の唯一の特異ベクトルが存在するとき、既約加群 $M(c, h)$ の指標は

$$\chi_h(\tau) = \frac{q^{h-(c-1)/24}}{\eta(\tau)} (1 - q^N)$$

である。

いずれにせよ、 $N \geq 1$ より

$$\chi_h(i\theta) \geq \frac{q^{h-(c-1)/24}}{\eta(i\theta)} (1 - e^{-2\pi\theta})$$

が得られ、また同様に極限を取ることで⁶

$$\chi_h(i\theta) \geq \sqrt{\theta} e^{\pi/12\theta} (1 - e^{-2\pi\theta}) \geq 2\pi\theta^{\frac{3}{2}} e^{\pi/12\theta}$$

という不等式を示すことができる。これを用いて

$$Z(i\theta) = Z(i/\theta) \geq 4\pi^2\theta^3 e^{\pi/6\theta} \mathcal{M}$$

となるが、 $\theta \rightarrow 0^+$ を評価することで

$$\mathcal{M}_{h_0, \bar{h}_0} e^{-4\pi(h_{\min} - (c-1)/24)/\theta} \geq 4\pi^2\theta^3 e^{\pi/6\theta} \mathcal{M}$$

の右辺は発散し、

⁶ どころから $\sqrt{\theta}$ が出てきたのかわからん。さらに2番目の不等号の向きが逆な気がする。まあいずれにせよ右辺は発散するから問題ないけど...

$$h_{\min} < \frac{c-1}{24}$$

が得られるが、もし理論がミニマル模型であって $c = 1 - 6 \frac{(p-p')^2}{pp'}$ ではないとすると、前に導いた式(不等号の向きが逆)と矛盾する。すべてのミニマル模型は $c = 1 - 6 \frac{(p-p')^2}{pp'}$ となることがわかる。

6. ミニマルモデル: モジュラー変換と指標

$$1 \leq r \leq p-1, 1 \leq s \leq p'-1, p's < pr$$

$$c = 1 - 6 \frac{(p-p')^2}{pp'}$$

のミニマル模型について考える。

$$E_{p,p'} := \{r, s | 1 \leq r \leq p-1, 1 \leq s \leq p'-1, p's < pr\}$$

とおく。 $\lambda_{r,s} = pr - p's$ として

$$\chi_{r,s}(\tau) = \chi_{\lambda_{r,s}}(\tau) = K_{\lambda_{r,s}}(\tau) - K_{\lambda_{r,-s}}(\tau)$$

であり(式(8.17))、 $N = 2pp'$ のもとで

$$K_{\lambda}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(Nn+\lambda)^2/2N}$$

である(式(8.16))。 η のモジュラー変換則と

$$\frac{(Nn+\lambda)^2}{2N} = \frac{\lambda^2}{2N} \pmod{1}$$

を用いて

$$K_{\lambda}(\tau+1) = e^{2\pi i(\lambda^2/2N-1/24)} K_{\lambda}(\tau)$$

が導ける。

$$K_{\lambda_{r,-s}}(\tau+1) = e^{2\pi i(\lambda_{r,s}^2/2N-1/24)} K_{\lambda_{r,-s}}(\tau)$$

に対して

$$\frac{\lambda_{r,-s}^2 - \lambda_{r,s}^2}{2N} = rs = 0 \pmod{1}$$

を用いると、 $K_{r,s}$ と $K_{r,-s}$ が同じように変換されることがわかるので、

$$\chi_{r,s}(\tau+1) = e^{2\pi i(\lambda_{r,s}^2/2N-1/24)} \chi_{r,s}(\tau)$$

と変化することになる。これはもちろん

$$\chi_h(\tau) = \text{Tr } q^{L_0 - \frac{c}{24}} = q^{h - \frac{c}{24}} \sum_{n \geq 0} d(n) q^n$$

の定義から直ちに従うこともあるが。 $T: \tau \rightarrow \tau+1$ の作用を行列で書いて

$$\chi_{r,s}(\tau+1) = \sum_{\rho, \sigma} T_{rs, \rho\sigma} \chi_{\rho, \sigma}(\tau)$$

としておくと、今回は $T_{rs, \rho\sigma} = e^{2\pi i(\lambda_{r,s}^2/2N-1/24)} \delta_{r,\rho} \delta_{s,\sigma}$ であったということである。

S 変換に対してはどのように変化するだろうか。まずインデックスを (r, s) から $\lambda_{r,s} = pr - p's$ に変更できることを見る。互いに素な p, p' に対して、 $E_{p,p'}$ には

$$pr_0 - p's_0 = 1$$

を満たすような一意なペア (r_0, s_0) が存在する。一方で $\omega_0 := pr_0 + p's_0$ と定義する。

$$\begin{aligned}\omega_0 &= pr_0 + p's_0 = 2p's_0 + 1 = 1 \bmod p' \\ \omega_0 &= 2pr_0 - 1 = -1 \bmod p\end{aligned}$$

であるから, $2pp'$ を法として

$$\begin{aligned}\omega_0 \lambda_{r,s} - \lambda_{r,-s} &= \omega_0(pr - p's) - (pr + p's) \\ &= pr(\omega_0 + 1) - p's(\omega_0 + 1) \\ &= 2pp'rk - 2pp'sl \\ &= 2pp'(rk - sl)\end{aligned}$$

が成り立つため, $\omega_0 \lambda_{r,s} = \lambda_{r,-s} \bmod 2pp'$ であり, ω_0 の作用は $s \rightarrow -s$ と変換させることがわかる。指標は

$$\chi_\lambda(\tau) = K_\lambda(\tau) - K_{\omega_0 \lambda}(\tau)$$

と書き直される。定義より明らかに

$$K_{\lambda+N} = K_\lambda = K_{-\lambda}$$

が成り立つので, K_λ は $\frac{N}{2} + 1$ 個の独立な関数を定める。指標は

$$\chi_\lambda(\tau) = \chi_{\lambda+N}(\tau) = \chi_{-\lambda}(\tau) = -\chi_{\omega_0 \lambda}(\tau)$$

であり, χ_λ は $(p-1)(p'-1)/2$ 個の独立な値を取り, これは $E_{p,p'}$ が定める領域である。

この前提の上で, モジュラー変換 S は K に関して線形に作用する。定義より

$$\begin{aligned}K_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{\sqrt{-i\tau}\eta(\tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{2\pi i}{\tau}(Nn+\lambda)^2/2N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-i\tau}\eta(\tau)} \int_{\mathbb{R}} dx \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \left[kx - \frac{N}{2\tau} \left(x + \frac{\lambda}{N}\right)^2 \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-i\tau}\eta(\tau)} \int_{\mathbb{R}} dx \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i \left[\frac{N}{2\tau} \left(x + \frac{\lambda}{N} - \frac{k\tau}{N}\right)^2 - \frac{k^2\tau}{2N} + \frac{k\lambda}{N} \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}\eta(\tau)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i \left[-\frac{k^2\tau}{2N} + \frac{k\lambda}{N} \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}\eta(\tau)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\frac{k^2}{2N}} e^{-2\pi i k\lambda/N}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $k = \mu + Nm, m \in \mathbb{Z}, \mu \in [0, N-1]$ と書き直すことで

$$\begin{aligned}K_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{\sqrt{N}\eta(\tau)} \sum_{\mu, m} q^{\frac{(\mu+Nm)^2}{2N}} e^{-2\pi i \mu \lambda/N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu} e^{-2\pi i \mu \lambda/N} K_\mu(\tau) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu} e^{-2\pi i \mu \lambda/N} K_{-\mu}(\tau) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu} e^{2\pi i \mu \lambda/N} K_\mu(\tau)\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}K_{\omega_0 \lambda}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu} e^{2\pi i \mu \omega_0 \lambda/N} K_\mu(\tau) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu} e^{2\pi i \mu \lambda/N} K_{\omega_0 \mu}(\tau)\end{aligned}$$

と変換する。したがって指標の変換則は

$$\chi_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu} e^{2\pi i \mu \lambda / N} \chi_\mu(\tau)$$

となる。右辺の和の範囲と $E_{p,p'}$ の対応は明らかではないので、その対応を確認する。

$$\omega_0 \mu = \pm \mu \pmod{N}$$

のとき定義より明らかに $\chi_\lambda(\tau) = 0$ となるので、そうならない状態に限って和を取るようになるが、和の範囲をこの条件で割ること

$$\chi_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu} (e^{2\pi i \mu \lambda / N} - e^{2\pi i \omega_0 \mu \lambda / N} + e^{-2\pi i \mu \lambda / N} - e^{-2\pi i \omega_0 \mu \lambda / N}) \chi_\mu(\tau)$$

となり、 $\mu = \mu_{\rho,\sigma} = p\rho - p'\sigma$, $(\rho, \sigma) \in E_{p,p'}$ と対応する。 $\lambda = pr - p's$ と $\mu = p\rho - p'\sigma$ を代入して右辺を整理すること

$$\chi_{r,s}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{pp'}} \sum_{(\rho,\sigma) \in E_{p,p'}} (-1)^{1+s\rho+r\sigma} \sin\left(\pi \frac{p}{p'} r \rho\right) \sin\left(\pi \frac{p'}{p} s \sigma\right) \chi_{\rho,\sigma}(\tau)$$

を得る。普通は

$$\chi_{r,s}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{(\rho,\sigma) \in E_{p,p'}} S_{rs;\rho\sigma} \chi_{\rho,\sigma}(\tau)$$

と書かれる。 $S_{rs;\rho\sigma}$ はモジュラー S 行列などと呼ばれ、いま

$$S_{rs;\rho\sigma} = 2\sqrt{\frac{2}{pp'}} \sum_{(\rho,\sigma) \in E_{p,p'}} (-1)^{1+s\rho+r\sigma} \sin\left(\pi \frac{p}{p'} r \rho\right) \sin\left(\pi \frac{p'}{p} s \sigma\right)$$

である。 S 変換を2度行くと $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \rightarrow -\frac{1}{-\frac{1}{\tau}} = \tau$ となるので、モジュラー S 行列は $S^2 = 1$ を満たす。いまは明らかにモジュラー S 行列は対称行列であるから、モジュラー S 行列はユニタリでもある。

ミニマル模型の具体例として、Yang-Lee 模型、イジング模型、三重臨界イジング模型に対するモジュラー S 行列の例に関しては(10.137)-(10.140)式を参照。

7. ミニマルモデル: モジュラー不変な分配関数

すいませんがここを読むパワーは無かったので飛ばします。要約すると、ミニマル模型 (p, p') のモジュラー不変な分配関数が双対 Coxeter 数 (p, p') の単純リー代数 $(A_n, D_n, E_6, E_7, E_8)$ のペア (G, H) と一対一対応するということだそうです。興味がある方は読んでみてくださいね🙏

8. フュージョン則とモジュラー不変性

最小理論のフュージョン則は8.4で詳細に研究され、9.2で再訪されている。ここでは、モジュラー変換に基づいて、さらに別のアプローチを提案する。全体のアイデアは、一目見れば逆説的に見えるかもしれない。モジュラー不変性は、Virasoro 代数の左右の表現をどのようにペアにするかを述べている。対照的に、フュージョン則は本質的にカイラル、すなわち理論の左（または右）の部分のみに関係する。この見かけの非互換性は、左（または右）の Virasoro 表現の特性がモジュラー群のユニタリー線形表現を形成するという非常に自明で非常に制約的な事実によって解決される。これは、実際には、これらの表現の指標のモジュラー変換特性とフュージョン則の関係の主な理由である。この節では、理論のカイラルな特性のみが使用される。

以下の議論では、指標のモジュラー変換 S と fusion number N の間に明示的な関係があることを見る。これは非常に一般的な事実であることが証明されており、10.7.1 のブロック対角理論にまで拡張され、有理共形場理論 (RCFT) の概念につながる。

8.1. ミニマル模型に対する Verlinde 公式

ミニマル模型における fusion number とモジュラー S 行列には以下の関係があることが明らかになる：

$$N_{rs\ mn}{}^{kl} = \sum_{(i,j) \in E_{p,p'}} \frac{S_{rs,ij} S_{mn,ij} S_{ij,kl}}{S_{11,ij}}$$

この公式は Verlinde 公式として知られており、もちろんモジュラー S 行列の具体的な表式から証明できるが、他の方法として、行列

$$[N_{(r,s)}]_{mn,kl} = N_{rs\ mn}{}^{kl}$$

の同時対角化として解釈することで証明できる。実際、Verlinde 公式は固有方程式

$$\sum_{(k,l) \in E_{p,p'}} [N_{(r,s)}]_{mn,kl} S_{kl,\rho\sigma} = \frac{S_{rs,\rho\sigma}}{S_{11,\rho\sigma}} S_{mn,\rho\sigma}$$

と等価である。この関係を示すために、 $N_{(r,s)}$ という行列は $X = N_{(2,1)}$ と $Y = N_{(1,2)}$ によって多項式 t 系に決定されるという事実を用いる。例えば

$$\begin{aligned} N_{2,1} N_{r,s} &= N_{r+1,s} + N_{r-1,s} \quad \text{with } N_{0,s} = N_{p',s} = 0 \\ N_{1,2} N_{r,s} &= N_{r,s+1} + N_{r,s-1} \quad \text{with } N_{r,0} = N_{r,p} = 0 \end{aligned}$$

のようになる(cf. 式(8.96),(8.97))。ミニマル模型におけるモジュラー S 行列の具体的な表式を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} X_{rs;mn} S_{mn,\rho\sigma} &= S_{r+1,s;\rho,\sigma} + S_{r-1,s;\rho,\sigma} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2pp'}} (-)^{s\rho+1+(r+1)\sigma} \left(\sin \left[\pi \frac{p}{p'} (r+1)\rho \right] + \sin \left[\pi \frac{p}{p'} (r-1)\rho \right] \right) \\ &= 2(-)^\sigma \cos \left[\pi \frac{p}{p'} \rho \right] S_{rs,\rho\sigma} \end{aligned}$$

である。同様にして

$$\sum_{m,n} Y_{rs,mn} S_{mn,\rho\sigma} = 2(-)^\rho \cos \left[\pi \frac{p'}{p} \sigma \right] S_{rs,\rho\sigma}$$

と求まる。したがって、 $S_{rs,\rho\sigma}$ は X, Y の固有ベクトルである。すなわち、 $S_{rs,\rho\sigma}$ は $N_{r,s}$ の固有ベクトルである。どうやら

$$N_{11\ rs}{}^{mn} = \delta_{r,m} \delta_{s,n} = \sum_{(k,l) \in E_{pp'}} S_{11,kl} \gamma_{rs}^{(kl)} S_{kl,mn}$$

になるらしい(2つ目の等号がわからん)。さらに S 行列のユニタリ性を用いて

$$\gamma_{r,s}^{(\rho,\sigma)} = \frac{S_{rs,\rho\sigma}}{S_{11,\rho\sigma}}$$

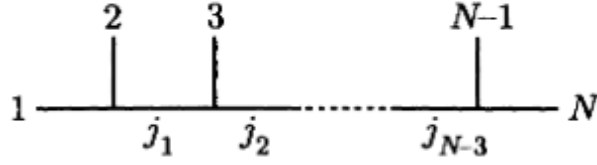
となることがわかる。これによって証明はできたが、より概念的に証明できる。10.8.3 ではその証明を試みるが、10.8.2 では準備として共形ブロックに関するいくつかの事実をリマインドする。

8.2. 共形ブロックの数え上げ

8.9 章では、ミニマル模型の相関関数がどのように、OPE によって可能な様々な中間状態射影に対応する正則×反正則共形ブロックに factorize されるのを見えてきた。より正確には、平面上のプライマリ場の相関関数

$$\langle \phi_1 \cdots \phi_N \rangle$$

に対して、以下の図の共形ブロックが対応する。



つまり、

$$\begin{aligned}\phi_{j_1} &\in \phi_1 \times \phi_2 \\ \phi_{j_2} &\in \phi_{j_1} \times \phi_3 \\ &\vdots \\ \phi_N &\in \phi_{j_{N-3}} \times \phi_{N-1}\end{aligned}$$

のようになっている。

一般、共形ブロックの基底は ϕ^3 -ダイアグラムに関連付けられており、相関関数のフィールドのインデックスをもつ外部の足、および OPE によって許可された中間状態の運ぶ内部の足がある。そのような許可された状態の数は融合数 N_{ij}^k であり、独立したカップリングの数 ijk の数をカウントする。したがって、共形ブロックは、各頂点に係数 N_{ij}^k をインデックス (ijk) を運ぶ脚と関連付け、内部インデックスを合計することによってカウントできる。もちろん、独立した共形ブロックの数は、さまざまな ϕ^3 -ダイアグラムに対応するさまざまな基底で同じでなければならない。

4 点関数 $\langle \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \rangle$ に対しては、共形ブロックの数は

$$N = \sum_m N_{ij}^m N_{mk}^l$$

で与えられ、 $\langle \phi_i \phi_l \phi_k \phi_j \rangle$ に対しては、

$$N = \sum_m N_{il}^m N_{mk}^j$$

で与えられる。2つの共形ブロックの数は一致しなくてはならないが、それは fusion algebra の結合性を意味するものである(fusion category の F-move)。同様に、上の図の共形ブロックの数は

$$N = \sum_{j_1, \dots, j_{N-3}} N_{12}^{j_1} N_{j_1 3}^{j_2} \dots N_{j_{N-3} N-1}^N$$

で与えられる。

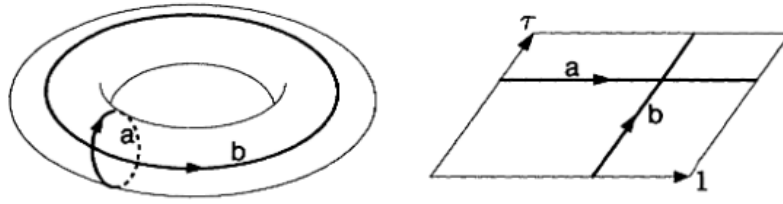
重要なのは、このレシピは任意の genus の Riemann 面で利用できることである。ここでの genus とは ϕ^3 -ダイアグラムの genus のことである。例えばトーラスを例にとると、

$$\rightarrow \mathcal{N} = \sum_i \mathcal{N}_{ij}^i$$

となる。

8.3. Verlinde 公式の一般的な証明

最も一般的な設定で Verlinde 公式を証明しよう。 a, b をトーラスの2つの基本ホモトピーサイクルとする。これらは S 変換の下で移り変わる。



トーラス上の任意のサイクル c に対して、プライマリ場 $\phi_i(c)$ は以下のステップによって ϕ_i に関連づけられた表現の指標 χ_j に作用する演算子を意味する。

1. 指標はトーラスの0点関数である。つまり

$$\chi_j = \bigcirc_j = \text{Tr}_j(\mathbb{I} q^{L_0 - c/24}) = \bigcirc_j^0$$

が成り立つ。ここで円で表したのは b 周期である。いま、 $\phi_0 = \mathbb{I}$ となっているが、これは $\mathbb{I} = \phi_i \cdot \phi_i^*$ ということである。つまり、指標 χ_j を $\langle \phi_i(z) \phi_i^*(w) \rangle$ に関する共形ブロック

$$\mathcal{F}_j^{i,i^*}(z-w) = \begin{array}{c} i \quad i^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \\ | \\ \bigcirc_j \end{array}$$

で置き換えるということである。並進対称性から $z-w$ のみの関数となる。指標は共形ブロックから

$$\lim_{z \rightarrow w} (z-w)^{2h_i} \mathcal{F}_j^{i,i^*}(z-w)$$

のようにして復元できる。因子 $(z-w)^{2h_i}$ は極限が有限であることを保証している。

2. 共形ブロックの中で ϕ_i を c サイクルに沿ってトーラスを一周させ、 c 周りの共形ブロックのものドロミーを計算する。

3. $\lim_{z \rightarrow w}$ の極限を取る。これは $\phi_i(c)\chi_j$ を与える。

$c = a, b$ の場合を調べよう。共形ブロックの文脈における $\phi_i(c)$ の正確な定義と S によって a, b を交換するモジュラー群の作用の間の相互作用が N と S の関係を与える。

$c = a$ のとき、 ϕ_i は空間方向に移動される。つまり下図のように動く。

$$\mathcal{F}_j^{i,i^*}(z+1) = \begin{array}{c} i \quad i^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \\ | \\ \bigcirc_j \end{array}$$

表現 j は影響されていないので、単純に比例定数を得るだけである：

$$\phi_i(a)\chi_j = \gamma_i^j \chi_j$$

$c = b$ のとき、下のように動く：

$$\mathcal{F}_j^{i,i^*}(z+\tau) = \text{Diagram: A dashed circle labeled } b \text{ contains a solid circle labeled } j. \text{ A vertical line connects the top of circle } j \text{ to a vertex labeled } 0. \text{ From vertex } 0, \text{ two lines branch out to labels } i \text{ and } i^*. \text{ A curved arrow points from } i^* \text{ back to } i.$$

$\phi_i(b)$ は χ_0 に作用し、identity 表現を i で置き換える。これは $\phi_i(b)$ の正規化を $\varphi_{i(b)}\chi_0 = \chi_i$ のように変更させる。また、

$$\phi_i(b)\chi_j = \sum_k N_{ij}^k \chi_k.$$

も言えたことになる。

規格化定数を除いて、演算子 $\phi_i(b)$ は以下の2つの操作の合成である：

$$\mu \phi_i(b)|_k : \text{Diagram: A vertex } 0 \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } j \text{ (circle)} \xrightarrow{A} \text{Diagram: A circle } j \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } k \xrightarrow{B} \text{Diagram: A vertex } 0 \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } k \text{ (circle)}$$

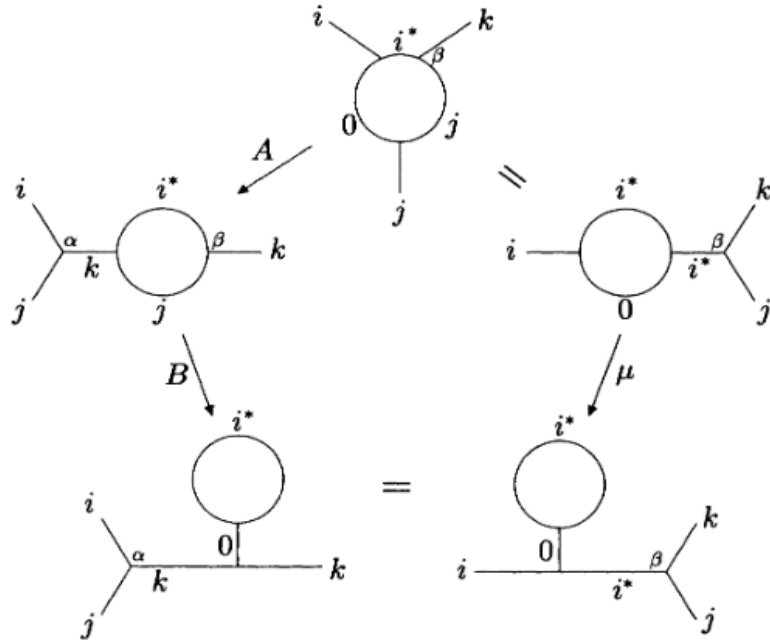
ここで k は fusion 結果のインデックスであり、最終的な結果は全ての k を sum up して得る。A,B は具体的には以下の操作である：

$$\begin{aligned} \text{Diagram: A vertex } 0 \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } j \text{ (circle)} &= \sum_{\alpha} A_{\alpha,\beta} \text{Diagram: A vertex } k \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } j \text{ (circle)} \\ \text{Diagram: A vertex } j \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } k \text{ (circle)} &= B_{\alpha,\beta} \text{Diagram: A vertex } 0 \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } k \text{ (circle)} \\ \text{Diagram: A vertex } 0 \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } i \text{ (circle)} &= \mu \text{Diagram: A vertex } 0 \text{ with inputs } i, i^* \text{ and output } i \text{ (circle)} \end{aligned}$$

μ の定義は

$$\mu = \sum_{\beta=1}^{N_{ij}^k} A_{\alpha,\beta} B_{\alpha,\beta}$$

であり、これはすなわち 2 つの等価な変形の結果であると理解できる:



S 変換は a,b を入れ替えるので、以下が導ける:

$$\phi_i(b) = S\phi(a)S^{-1}$$

これと $\phi_i(a)\chi_j = \gamma_i^j\chi_j$ を比べることで、

$$N_{ij}^k = \sum_m S_{im}\gamma_j^m\bar{S}_{mk}$$

が得られる。identity を $i = 0$ と定義し、 $N_{0i}^k = \delta_{i,k}$ を用いて

$$S_{0m}\gamma_j^m = S_{jm}$$

が得られる。もし $S_{0m} = 0$ なら $S_{jm} = 0$ が恒等的に成り立ち、 S が invertible であるという仮定に反する。したがって $S_{0m} \neq 0$ であり、これを上式に代入することで Verlinde 公式

$$N_{ij}^k = \sum_m \frac{S_{im}S_{jm}\bar{S}_{mk}}{S_{0m}}$$

が得られる。

この証明では、共形ブロックに関する極めて一般的な事実のみを用いた。実際、Verlinde 公式はミニマル模型の範疇を超えて成り立つ。ミニマル模型の場合は S 行列は実であり、以前検討したものに帰着する。

Verlinde 公式により S 行列のユニタリー性を回復でき、さらにそれが対称行列であることも言える。 $N_{ij}^k = N_{ijk^*}$ に注意すると、

$$S_{k,m} = \bar{S}_{m,k^*}$$

が言えるらしい。 $C^2 = 1$ であるような共役行列

$$C_{i,j} = \delta_{j,i^*}$$

を用いることで

$$CS = \bar{S}^t = S^\dagger$$

と書き直すことができる。一方で、 S^2 は $a \rightarrow -a, b \rightarrow -b$ と変換するので、CPT 不変性を仮定すると S^2 は指標をその共役に置き換える作業であり、 $S^2 = C$ と言える。

$CS = S^\dagger, S^2 = C$ を用いると S 行列はユニタリであることがわかる： $SS^\dagger = \mathbb{I}$ 。この性質から

$$\bar{N}_{ijk} = N_{i^*j^*k^*} = N^{ijk} = N_{ijk}$$

と言えるらしい。

Verlinde 公式は行列 N_i が同時対角化可能であることを言っている。これらの行列は非負整数要素のみを持つので Perron-Frobenius の定理を適用することができ、すべての行列に共通の固有ベクトルがそれぞれの行列の最大固有値に対応することがわかる(cf. 量子次元)。

8.4. 拡張対称性・有理型共形場理論など

理論に追加の対称性を加えることで、いくつかの既約表現をまとめたものを拡張ブロックなどによぶ。もし共形場理論の(無限個かもしれない)既約表現の Virasoro 代数の表現が有限個の拡張ブロックで書き尽くせる場合、その共形場理論は有理型共形場理論(Rational CFT, RCFT)と呼ばれる。

すべての RCFT の分類はかなりめんどくさいタスクであり、おそらくしばらくの間、open problem のままであるそう(ChatGPT o3-mimi-high 曰くまだ未完のまらしい)。考えられる戦略は、最初に可能なすべてのフュージョン則を分類することから始め、Verlinde 公式を使用して演算子に関するいくつかの手がかりを得ることだそう。これまでに部分的な結果のみが得られており、詳細については、17 章を待たれたい (が、全く読んでいない)。

9. θ 関数とかの定義とか公式とか

証明をちゃんと追う余裕がなかったので、とりあえずなんか重要そうな式を殴り書きしておいた。

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n-1/2}t)(1 + q^{n-1/2}/t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2} t^n$$

$$\theta_1(z|\tau) = -i \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (-)^{r-\frac{1}{2}} y^r q^{\frac{r^2}{2}} = -iy^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{n=0}^{\infty} (1 - yq^{n+1})(1 - y^{-1}q^n)$$

$$\theta_2(z|\tau) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} y^r q^{\frac{r^2}{2}} = y^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + yq^{n+1})(1 + y^{-1}q^n)$$

$$\theta_3(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y^n q^{\frac{n^2}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{r \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} (1 + yq^r)(1 + y^{-1}q^r)$$

$$\theta_4(z|\tau) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-)^n y^n q^{\frac{n^2}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{r \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} (1 - yq^r)(1 - y^{-1}q^r)$$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \varphi(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

$$2(\eta(\tau))^3 = \theta_2(\tau)\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)$$