

## 6. ДАТЧИКИ ТЕМПЕРАТУРЫ

Из всех физических величин, несомненно, наиболее часто измеряемой является температура. Действительно, температура представляет собой очень важную характеристику состояния вещества, которая отражает как непрерывные изменения состояния, например изменения давления и объема газа, так и скачкообразные, например фазовые превращения или магнитные и электрические точки Кюри.

Поэтому в науке и промышленности необходимы тщательный контроль и точные измерения температур. Однако определение числового значения температуры представляет собой фундаментальную проблему. Действительно, числовые значения большинства физических величин можно определить как отношение измеряемой величины к соответствующей величине, принятой в качестве единицы измерения. Такие величины иногда называют экстенсивными, поскольку существование единицы измерения облегчает, по крайней мере в принципе, определение их кратных и дольных значений. Этот подход неприменим в случае температуры, которая является величиной, называемой интенсивной, поскольку деление или умножение температуры априорно не имеет реального физического смысла. Поэтому сначала необходимо исследовать вопрос о физических принципах системы определения числовых значений температур, т. е. рассмотреть вопрос о шкале температур.

Благодаря многообразию свойств веществ и физических явлений, зависящих от температуры, было создано большое количество методов измерений: оптические методы, основанные на изменении спектрального распределения испускаемого излучения или уширения спектральных линий вследствие эффекта Доплера, обусловленного тепловым движением молекул; механические методы, основанные на расширении твердого тела, жидкости или газа при постоянном давлении, на изменении давления насыщенного пара или скорости звука; электрические методы, основанные на зависимости от температуры сопротивления или его собственного шума, на эффекте Зеебека или на зависимости частоты колебаний кварцевого кристалла от температуры.

При использовании оптических и акустических методов наблюдения за состоянием среды, где измеряется температура, не вносят в нее никаких возмущений, но область их применения ограничена, и осуществление измерений этими методами связано с определенными трудностями. Электрические методы, которые рассматриваются в этой главе, напротив, имеют широкую область применения и сравнительно просто реализуются, но взаимное влияние датчика и исследуемой среды часто при выполнении точных измерений ставит трудную задачу по определению отличия измеряемой температуры от фактически измеренной, которая является температурой датчика.

### 6.2. Измеренная и измеряемая температуры

Температура  $T_c$ , измеренная с помощью резистора или термопары, фактически является температурой датчика. Она, конечно, зависит от температуры  $T_x$  среды, в которую погружен датчик, но также и от существующего теплообмена. При формулировании упрощенной модели процесса измерения предполагается, что в условиях измерений погрешность  $T_x - T_c$  мала.

#### 6.2.1. Расчет показания датчика

**Общая модель.** Тепловой поток  $P_{ab}$  между двумя поверхностями  $\Sigma_a$  и  $\Sigma_b$  с температурами  $T_a$  и  $T_b$  определяется тепловым законом Ома, который может быть представлен любым из двух соотношений:

$$T_a - T_b = R_{\theta ab} P_{ab},$$

$$P_{ab} = G_{\theta ab} (T_a - T_b),$$

где  $R_{\theta ab}$  и  $G_{\theta ab}$  — взаимно-обратные величины, представляющие собой, соответственно, тепловое сопротивление ( $^{\circ}\text{C}/\text{Вт}$ ) и тепловую проводимость ( $\text{Вт}/^{\circ}\text{C}$ ) между поверхностями  $\Sigma_a$  и  $\Sigma_b$ .

Зонд для измерения температуры, состоящий из датчика с теплоемкостью  $K$  и (обычно) покрытия или защитной оболочки, помещается в исследуемую среду с температурой  $T_x$ . Пусть  $G_{\theta xc}$  — тепловая проводимость между этой средой и датчиком. Кроме того, датчик всегда связан с внешней средой соединительными электрическими проводами и, в большинстве случаев, своей защитной оболочкой. Пусть  $G_{\theta ac}$  — тепловая проводимость между датчиком и внешней средой с температурой  $T_a$ .

Количество тепла, получаемое датчиком за 1 с, определяется уравнением

$$dQ_c/dT = K (dT_c/dt)$$

и равно сумме тепловых потоков к датчику от двух рассматриваемых сред: потока от исследуемой среды  $G_{\theta xc}(T_x - T_c)$  и потока от внешней среды  $G_{\theta ac}(T_a - T_c)$ . Скорость изменения температуры датчика  $T_c$  выражается уравнением теплового баланса

$$K (dT_c/dt) = G_{\theta xc} (T_x - T_c) + G_{\theta ac} (T_a - T_c).$$

*Случай постоянной температуры исследуемой среды.* В этом случае общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения имеет вид

$$T_c(t) = \frac{G_{\theta xc} T_x + G_{\theta ac} T_a}{G_{\theta xc} + G_{\theta ac}} - \frac{G_{\theta xc} (T_x - T_{c0}) + G_{\theta ac} (T_a - T_{c0})}{G_{\theta xc} + G_{\theta ac}} e^{-t/\tau},$$

где  $T_{c0}$  — начальная температура датчика ( $t=0$ ) и  $\tau = K(G_{\theta xc} + G_{\theta ac})$  — постоянная времени измерительного зонда в условиях опыта. Вид функции  $T_c(t)$  показан на рис. 6.1.

После нестационарного режима, продолжительность которого определяется временем запаздывания  $\tau$ , температура датчика приобретает равновесное значение

$$T_c = \frac{G_{\theta xc} T_x + G_{\theta ac} T_a}{G_{\theta xc} + G_{\theta ac}}.$$

Отличие этого значения от температуры исследуемой среды определяется выражением

$$T_x - T_c = \frac{G_{\theta ac}}{G_{\theta xc} + G_{\theta ac}} (T_x - T_a).$$

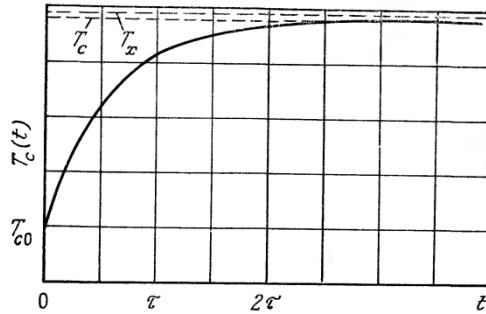


Рис. 6.1. Изменение температуры датчика  $T_c$  при резком увеличении измеряемой температуры  $T_x$  (скакок температуры).

Наименьшая погрешность достигается при условии

$$G_{\theta xc} \gg G_{\theta ac}.$$

Следовательно, необходимо стремиться к увеличению теплообмена между датчиком и исследуемой средой и уменьшению теплообмена между датчиком и внешней средой. Инерционность датчика определяется постоянной времени запаздывания  $\tau$ . Равновесная температура устанавливается тем быстрее, чем меньше теплоемкость датчика  $K$  и чем выше тепловая проводимость  $G_{\theta_{xc}}$  между датчиком и исследуемой средой. Проводимость  $G_{\theta_{xc}}$  максимальна в случае датчика без защитной оболочки, однако такая конструкция используется редко, поскольку датчик необходимо защищать от химического воздействия, конденсации вредных паров на изоляторах, ударов и вибрации. Поэтому датчик обычно снабжается защитным корпусом, конструкция которого выбирается из компромиссных соображений обеспечения необходимой прочности при минимальном тепловом сопротивлении в поперечном направлении.

*Случай переменной температуры исследуемой среды.* Условия снижения погрешности  $T_x - T_c$  остаются такими же, как и для случая постоянной температуры  $T_x$ . Так, например, при линейном изменении температуры среды

$$T_x = T_{x_0} + AT$$

решение дифференциального уравнения нагрева датчика имеет вид

$$T_c = \frac{G_{\theta_{xc}}}{G_{\theta_{xc}} + G_{\theta_{ac}}} \left[ AT + \left( T_{x_0} - At + \frac{G_{\theta_{ac}}}{G_{\theta_{xc}}} T_a \right) (1 - e^{-t/\tau}) \right] + T_{c_0} e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = K / (G_{\theta_{xc}} + G_{\theta_{ac}})$  — время запаздывания,  $T_a$  — температура внешней среды и  $T_{c_0}$  — температура датчика в начальный момент  $t=0$ .

При условии  $G_{\theta_{xc}} \gg G_{\theta_{ac}}$  погрешность постоянна и равна

$$T_x - T_c = A\tau.$$

Погрешность возрастает с увеличением времени запаздывания  $\tau$  и скорости изменения температуры исследуемой среды.

### 6.3. Термометры сопротивления

#### 6.3.1. Чувствительность к температуре

Обычно величина электрического сопротивления материала зависит от его температуры  $T$ :

$$R(T) = R_0 F(T - T_0),$$

где  $R_0$  — сопротивление при температуре  $T_0$ , а функция  $F$  является характеристикой материала и равна 1 при  $T=T_0$ . Так, для металлов  $R(T) = R_0(1 + AT + BT^2 + CT^3)$ , где температура  $T$  выражается в  $^{\circ}\text{C}$ , а  $T_0 = 0^{\circ}\text{C}$ . Для термисторов, изготовленных из смесей полупроводниковых оксидов,

$$R(T) = R_0 \exp [B(1/T - 1/T_0)],$$

где  $T$  — абсолютная температура. Коэффициенты в законе изменения  $R$  обычно известны из серии измерений при нескольких температурах; поэтому, измерив величину  $R$ , можно определить температуру термометра.

Для малых изменений температуры  $\Delta T$  в окрестности значения  $T$  общую зависимость изменения сопротивления от температуры можно линеаризовать:

$$R(T + \Delta T) = R(T)(1 + \alpha_R \Delta T),$$

где  $\alpha_R = \frac{1}{RT} \frac{dR}{dT}$  — температурный коэффициент сопротивления, или чувствительность при температуре  $T$ . Величина  $\alpha_R$ , очевидно, зависит от температуры и материала термометра.

Например, при температуре 0 °C для платины  $\alpha_R = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ °C}^{-1}$ ; для некоторых термисторов  $\alpha_R \approx 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ °C}^{-1}$ . При измерении температуры в окрестности 0 °C с помощью моста Уитстона, одним из плеч которого является термометр сопротивления, а три других представляют собой резисторы с постоянными сопротивлениями (равными  $R_0$  — сопротивлению термометра при температуре 0 °C), напряжение разбаланса моста будет равно

$$v_m = (E_s/4) (\Delta R/R_0) = (E_s/4) \alpha_R \Delta T.$$

При  $E_s = 2$  В и  $\Delta T = 1$  °C имеем  $v_m = 1,9$  мВ для платиновых резисторов и  $v_m = 26$  мВ для упомянутого выше термистора. Эти значения значительно превышают э. д. с. термопар, равные  $v_m = 0,05$  мВ для термопары железо — константан и  $v_m = -0,005$  мВ для термопары платинородий (10% Rh) — платина.

### 6.3.3. Методы измерения

С резисторными датчиками используют чаще всего схемы формирования сигнала, описанные в гл. 3 (потенциометрическая схема с симметричным питанием, мост Уитстона с тремя или четырьмя проводами, источник постоянного тока). Первые две схемы позволяют использовать как нулевой метод отсчета, так и отсчет по разбалансу; при этом в последнем случае следует учитывать нелинейность, когда изменения сопротивления датчика в зависимости от температуры существенны.

Для высокоточных измерений используют компенсационный метод, который позволяет исключить влияние соединительных проводов. К измеряемому сопротивлению должны быть подсоединенены четыре провода — два для тока и два для измерения напряжения на его выводах. Схема представлена на рис. 6.7.

### 6.3.4. Влияние измеряемого тока

При желании добиться высокой чувствительности измерений приходится существенно увеличивать ток через термометр сопротивления. В результате этого происходит нагрев датчика вследствие эффекта Джоуля, которым уже нельзя пренебречь и который необходимо уметь оценивать и уменьшать до минимума. По этой причине измеряемый ток обычно ограничивают значением порядка 1 мА (реже 10 мА).

Итак, нагрев датчика измеряемым током  $i$  вызывает соответствующее изменение его температуры

$$\Delta T_c = T_{ci} - T_c,$$

где  $T_{ci}$  — температура датчика, по которому течет ток  $i$ , а  $T_c$  — неизвестная температура, которую имел бы датчик, если бы тока не было. Температура  $T_{ci}$  определяется балансом нескольких тепловых потоков:  $P_{xc} = G_{\theta xc}(T_x - T_{ci})$  — теплового потока от исследуемой среды;  $P_{ac} = G_{\theta ac}(T_a - T_{ci})$  — теплового потока во внешнюю среду;  $P_J = R_{ci}i^2$  — теплового потока, обусловленного эффектом Джоуля от измеряемого тока. Величина  $R_{ci}$  представляет собой электрическое сопротивление датчика при температуре  $T_{ci}$ . Тепловые проводимости  $G_{\theta xc}$  и  $G_{\theta ac}$  определены в разд. 6.2.1.

При тепловом равновесии сумма этих тепловых потоков равна нулю, из чего следует

$$T_{ci} = \frac{G_{\theta xc}T_x + G_{\theta ac}T_a + R_{ci}i^2}{G_{\theta xc} + G_{\theta ac}},$$

$$\Delta T_c = \frac{R_{ci}i^2}{G_{\theta xc} + G_{\theta ac}}, \text{ поскольку } T_c = \frac{G_{\theta xc}T_x G_{\theta ac}T_a}{G_{\theta xc} + G_{\theta ac}}.$$

Как было показано в разд. 6.2.1, для хорошо спроектированного температурного зонда

$$G_{\theta xc} \gg G_{\theta ac}.$$

В этом случае изменение температуры датчика, обусловленное измеряемым током, равно

$$\Delta T_c = R_{\theta_{xc}} R_{ci} i^2.$$

### 6.3.5. Металлические термометры сопротивления

**Элементарная теория электропроводности металлов.** Электрический ток в металлах представляет собой движение свободных электронов. Идеальная кристаллическая решетка не

создает сопротивления для их движения, и ее электрическое сопротивление равно нулю. Причиной сопротивления является неидеальная периодичность кристаллической решетки, которая обуславливается, с одной стороны, тепловыми колебаниями атомов, и, с другой стороны, нарушениями периодичности, или дефектами кристаллической решетки. Согласно классической теории, электрон (массой  $m$  с зарядом  $q$ ), ускоренный электрическим полем  $E$ , претерпевает столкновения, при которых его скорость каждый раз обращается в нуль. Обозначим

**Критерий выбора металла.** В зависимости от диапазона температур и других предъявляемых требований, термометры сопротивления изготавливаются из платины, никеля и, реже, из меди и вольфрама. Можно получить платину очень высокой чистоты (99,999%), что позволяет очень точно определять ее электрические характеристики. Химическая пассивность платины и отсутствие кристаллических изменений обеспечивают стабильность электрических свойств. Благодаря точности определения электрических характеристик и их стабильности обеспечивается взаимозаменяемость платиновых термометров сопротивления. Они используются в интервале температур от  $-200$  до  $1000^\circ\text{C}$ , если это позволяет защитный корпус.

Интерес к никелю обусловлен его высокой чувствительностью к температуре. В интервале температур  $0$ – $100^\circ\text{C}$  его сопротивление увеличивается в 1,67 раза, тогда как у платины — в 1,385 раза. Однако его химическая активность, в частности способность к окислению, может приводить к изменению электрических свойств. Поэтому применение никеля обычно ограничивается температурами ниже  $250^\circ\text{C}$ .

Медь в качестве материала термометра сопротивления применяется потому, что зависимость ее сопротивления от температуры линейна с очень высокой точностью. Однако химическая активность меди не позволяет применять ее при температурах выше  $180^\circ\text{C}$ . Кроме того, из-за малого удельного сопротивления, при прочих равных условиях, приходится использовать более длинные проводники, что может приводить к недопустимо большим габаритам измерительной установки.

Удельное сопротивление вольфрама более чувствительно к температуре, чем у платины, при температурах ниже 100 К. Вольфрам может применяться при более высоких температурах, чем платина, и имеет лучшую линейность удельного сопротивления. Из него можно изготавливать очень тонкие проволоки, позволяющие получать большие сопротивления или, при заданном сопротивлении, — минимальные размеры датчика. Однако внутренние напряжения, возникающие в процессе волочения проволоки, трудно полностью устранить и при отжиге вольфрама, поэтому стабильность его электрических характеристик ниже, чем у платины.

**Зависимость сопротивления от температуры. Платина.** В диапазоне температур приблизительно от  $-200$  до  $650^\circ\text{C}$  по величине сопротивления проволоки из очень чистой платины можно определить температуру (с погрешностью, не превышающей  $\sim 0,1^\circ\text{C}$ ) по формуле Календара — ван Дюсена<sup>1)</sup>:

$$\frac{R(T)}{R(0)} = 1 + \alpha \left[ T - \delta \frac{T - 100}{100} \frac{T}{100} - \beta \frac{T - 100}{100} \left( \frac{T}{100} \right)^3 \right],$$

где  $T$  выражается в  $^{\circ}\text{C}$  и  $\beta=0$  при  $T>0$   $^{\circ}\text{C}$ . Экстраполяция этой формулы до температуры затвердевания золота, равной 1064,43  $^{\circ}\text{C}$  при нормальном атмосферном давлении, приводит к погрешностям, не превышающим 2  $^{\circ}\text{C}$ . Формула Календара — ван Дюсена эквивалентна соотношению

$$R(T)/R(0) = 1 + AT + BT^2 + C(T - 100)T^3,$$

где  $A=\alpha(1+\delta/100)$ ,  $B=-\alpha\delta \cdot 10^4$ ,  $C=-\alpha\beta \cdot 10^{-8}$  при  $T<0$   $^{\circ}\text{C}$  и  $C=0$  при  $T>0$   $^{\circ}\text{C}$ . Четыре значения сопротивления  $R$ , измеренные при точно известных температурах, позволяют определить требуемые характеристики. Здесь  $R(0)$  — сопротивление, измеренное при температуре 0  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\alpha$  вычисляется по предыдущей величине и сопротивлению, измеренному при температуре 100  $^{\circ}\text{C}$ :  $\alpha=[R(100)-R(0)]/100R(0)$ ;  $\delta$  можно вычислить, измерив сопротивление, например, при температуре кипения серы (444,4  $^{\circ}\text{C}$  при нормальном атмосферном давлении).

Величина  $\beta$  определяется путем измерений при низкой температуре, обычно при температуре кипения кислорода ( $-182,97$   $^{\circ}\text{C}$  при нормальном атмосферном давлении).

Для резисторов из платины высокой чистоты, не имеющей внутренних механических напряжений, изготовитель датчиков (фирма Rosemount) приводит следующие значения:  $\alpha=-0,00392$ ,  $\delta=1,492$ ,  $\beta=0,11$  при  $T<0$   $^{\circ}\text{C}$  и  $\beta=0$  при  $T>0$   $^{\circ}\text{C}$ . Отсюда  $A=3,90802 \cdot 10^{-3}$ ;  $B=5,80195 \cdot 10^{-7}$ ;  $C=-4,27350 \cdot 10^{-12}$  при  $T<0$   $^{\circ}\text{C}$  и  $C=0$  при  $T>0$   $^{\circ}\text{C}$ .

### 6.3.6. Термисторы

**Общие характеристики.** Основное отличие термометров сопротивления этого типа состоит в том, что их чувствительность к температуре значительно выше (приблизительно в 10 раз), чем металлических. Кроме того, их температурный коэффициент обычно отрицательный и сильно зависит от температуры. Они изготавливаются из смесей поликристаллических полупроводниковых оксидов металлов ( $\text{MgO}$ ,  $\text{MgAl}_2\text{O}_4$ ,  $\text{Mn}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ,  $\text{Co}_2\text{O}_3$ ,  $\text{NiO}$ ,  $\text{ZnTiO}_4$ ).

Порошки оксидов спекаются в форме под давлением и упрочняются посредством поверхностного обжига при температурах порядка 1000  $^{\circ}\text{C}$  в контролируемой атмосфере. Метал-

лические выводы припаиваются к двум точкам предварительно металлизированной поверхности полупроводника. Термисторы выпускаются в виде дисков, цилиндров, колец, шариков. Чувствительный элемент может иметь защитный корпус или капсулу. Высокие значения удельного сопротивления используемых материалов позволяют получить необходимые сопротивления при малой массе и, следовательно, малых размерах (порядка 1 мм). Вследствие этого термисторы имеют малые габариты, что позволяет проводить измерения температуры практически в точке, и малую теплоемкость, т. е. малую инерционность.

Надежность термистора зависит от его конструкции и условий эксплуатации. Защитный корпус или капсула термистора защищает его от химического воздействия и повышает надежность. Следует избегать тепловых ударов, поскольку они могут привести к растрескиванию материала термистора. Температурный диапазон применения термисторов различных типов — от нескольких градусов абсолютной температуры приблизительно до 300  $^{\circ}\text{C}$ . Их можно применять и за пределами этого диапазона, но при этом возникает серьезная опасность существенного изменения номинального сопротивления датчика.

Без специального отбора взаимозаменяемость термисторов одного и того же типа весьма посредственна, поскольку обычные отклонения сопротивления от номинальной величины составляют  $\pm 10\%$ .

**Взаимосвязь между сопротивлением и температурой.** Формула проводимости  $\sigma$ , приведенная в предыдущем разделе, позволяет представить сопротивление в виде

$$R(T) = R_0 (T/T_0)^{-b} \exp [\beta (1/T - 1/T_0)],$$

где  $R_0$  — сопротивление при температуре  $T_0$ , выраженное в кельвинах. В соответствии с этой формулой чувствительность к температуре равна

$$\alpha_R = -(\beta + bT)/T^2.$$

Поскольку в выражении для сопротивления экспоненциальный член является определяющим, это выражение обычно записывают в упрощенной форме

$$R(T) = R_0 \exp B (1/T - 1/T_0)$$

и полагают, что величина  $B$  не зависит от температуры. В этом случае чувствительность к температуре описывается соотношением

$$\alpha_R = -B/T^2,$$

где  $B$  обычно составляет от 3000 до 5000 К.

На рис. 6.11, а дан пример зависимости сопротивления одного термистора (марки UUA 32 J4 фирмы Omega) от  $1/T$  (в полулогарифмической системе координат). На рис. 6.11, б приведена зависимость  $\alpha_R$  от  $T$  для того же термистора. Величина  $\alpha_R$  уменьшается с ростом температуры, но все же ее значения в рабочем диапазоне остаются значительно выше,

чем у металлических термометров сопротивления.

Высокая чувствительность термисторов к температуре позволяет применять их для обнаружения и измерения очень малых изменений температуры (от  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$  К). Термисторы можно использовать в диапазоне от нескольких градусов абсолютной температуры приблизительно до  $300^\circ\text{C}$  без каких-либо серьезных трудностей, связанных с обеспечением надежности. За пределами этого диапазона необходимо выбирать специальные материалы, например карбид кремния, и использовать защиту от химического воздействия.

### 6.3.7. Кремниевые термометры сопротивления

Полупроводниковые датчики температуры этого типа отличаются от рассмотренных выше термисторов следующими особенностями. У кремниевых датчиков температурный коэффициент сопротивления положительный и имеет величину порядка  $0,7\%/\text{ }^\circ\text{C}$  при температуре  $25^\circ\text{C}$ ; более слабая зависимость сопротивления от температуры позволяет осуществить линеаризацию характеристики датчика с высокой точностью во всем рабочем диапазоне температур при помощи единственного резистора с постоянным сопротивлением, присоединенного, в зависимости от схемы измерения, последовательно или параллельно (рис. 6.12). Взаимозаменяемость этих резисторов очень хорошая; она обеспечивается высокой точностью и стабильностью технологии изготовления. Рабочий диапазон температур от  $-50$  до  $120^\circ\text{C}$ .

## 6.5. Измерение температуры с помощью диодов и транзисторов

### 6.5.1. Общие положения. Чувствительность к температуре

Используемые элементы — диоды или кремниевые транзисторы, включенные по схеме диода (коллектор замкнут на базу), — питаются постоянным током  $I$  в прямом направлении; напряжение  $v$  на выводах, зависящее от температуры, является выходной электрической величиной датчика температуры, который образуют указанные элементы (рис. 6.27, а, б).

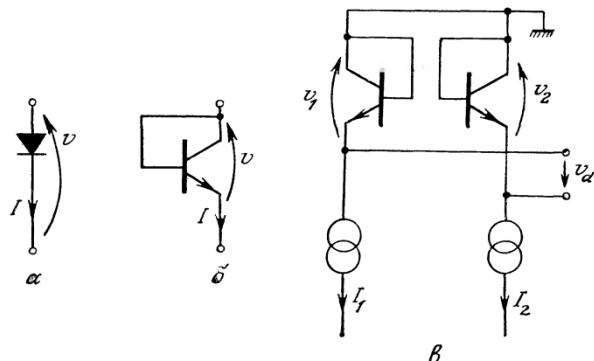


Рис. 6.27. Элементы, используемые в датчиках температуры.  
а — диод; б — транзистор, включенный по схеме диода; в — пара транзисторов, включенных по схеме диода.

Чувствительность к температуре  $S$  диода или транзистора, включенного по схеме диода, определяется как  $S = dv/dT$ . Ее величина имеет порядок  $-2,5 \text{ мВ/}^{\circ}\text{C}$ , но она не является совершенно независимой от температуры. Кроме того, чувствительность, как и напряжение  $v$ , зависит от обратного тока  $I_0$ , который может быть существенно разным у различных элементов. Поэтому взаимозаменяемость можно обеспечить только посредством отбора элементов, имеющих одинаковые определяющие параметры (одинаковые значения  $v$  при одинаковом токе и одинаковые значения  $I_0$ ).

Значительное улучшение линейности и взаимозаменяемости достигается посредством использования спаренных транзисторов, включенных по схеме диода и питаемых постоянными токами  $I_1$  и  $I_2$ , на которых измеряется разность напряжений между базой и эмиттером (рис. 6.27, в). Это позволяет исключить влияние тока  $I_0$ . Чувствительность такой схемы выражается формулой

$$S = \frac{d(v_1 - v_2)}{dT},$$

или  $S = 86,56 \lg(I_1/I_2)$ ,  $\text{мкВ}\cdot\text{K}^{-1}$ . Это обычно больше чувствительности термопар, и для измерения не требуется знать температуру опорного спая, но тем не менее указанное значение ниже чувствительности термометров сопротивления с устройством формирования сигнала. Изменение электрических параметров при высоких и низких температурах определяет рабочий диапазон измеряемых температур, который охватывает температуры от  $-50$  до  $+150^{\circ}\text{C}$ . В этом диапазоне датчики отличаются очень высокой стабильностью.

### 6.5.2. Зависимость напряжения от температуры

Диод или транзистор, включенный по схеме диода (рис. 6.27, а, б). Ток  $I$  связан с напряжением  $v$  классическим соотношением

$$I = I_0 [\exp(qv/kT) - 1],$$

где  $T$  выражается в кельвинах. Это соотношение при прямом направлении тока ( $I > I_0$ ) сводится к формуле

$$I = I_0 \exp(qv/kT),$$

где

$$I_0 = CT^m \exp(-qv_\Phi/kT).$$

Здесь  $v_\Phi$  — ширина запрещенной зоны в вольтах, равная для кремния 1,12 В;  $m$  — величина, обычно близкая к 3;  $C$  — константа, не зависящая от  $T$ , но зависящая от геометрии перехода и уровней легирования. Из предыдущих соотношений для напряжения  $v$  получаем следующее выражение:

$$v = v_\Phi + (kT/q) \lg I - (kT/q) m \lg T - (kT/q) \lg C.$$

Константу  $C$  и ток  $I$  можно исключить, если известно напряжение  $v_1$  при том же токе  $I$ , но при температуре  $T_1$  имеем:

$$v = v_1 (T/T_1) + v_\Phi (1 - T/T_1) + m (kT/q) \lg (T_1/T).$$

Это соотношение нелинейно относительно температуры, но тем не менее оно выявляет члены, определяющие взаимозаменяемость: напряжение  $v_1$  при  $T = T_1$  и величину  $m$ .

На рис. 6.28, а представлено отклонение от линейной зависимости в диапазоне от  $-20$  до  $+150$  °С для транзистора MTS 102 (фирма Motorola). Она такого же порядка, как и у платинового термометра сопротивления, и значительно меньше, чем у термопары.

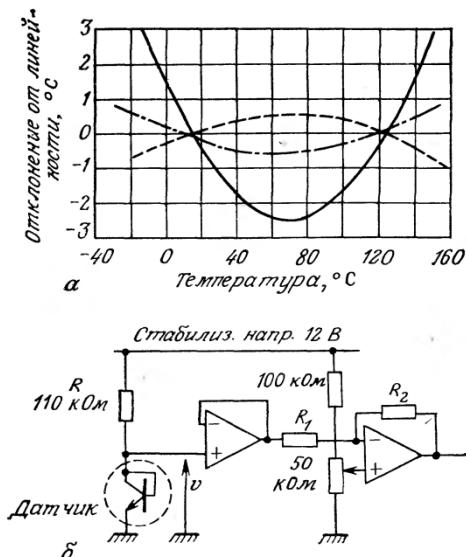


Рис. 6.28. Транзисторный датчик температуры.  
а — сравнение нелинейностей; б — измерительная схема; — — платиновый термометр сопротивления; — транзистор MTS 102; - · - термопара типа Т.

**Разность напряжений на двух параллельных транзисторах** (рис. 6.27, в). Два транзистора  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 6.29, а) с одинаковым значением тока  $I_0$  питаются параллельно постоянными токами  $I_1$  и  $I_2$ . Для этой схемы справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 \exp(qv_1/kT), \quad \text{или} \quad v_1 = (kT/q) \lg (I_1/I_0), \\ I_2 &= I_0 \exp(qv_2/kT), \quad \text{или} \quad v_2 = (kT/q) \lg (I_2/I_0). \end{aligned}$$

Измерение разности напряжений  $v_d = v_1 - v_2$  позволяет исключить влияние  $I_0$ :

$$v_d = (kT/q) \lg (I_1/I_2) = (kT/q) \lg n,$$

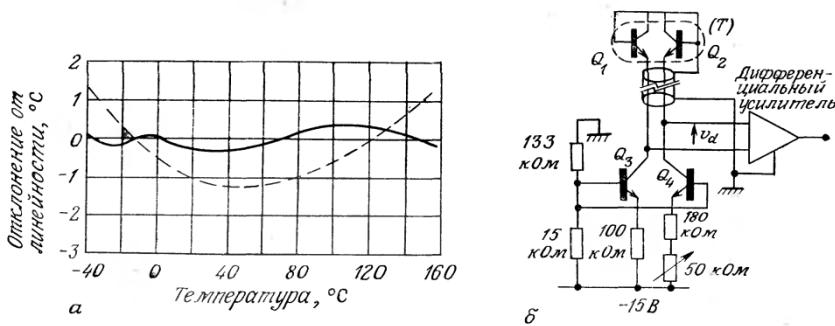


Рис. 6.29. Датчик температуры на спаренных транзисторах (материалы фирмы Р.М.И.).

*a* — сравнение величинностей; *б* — схема измерения. — пара транзисторов ( $\Delta V_{BE}$ ); —— одиничный транзистор ( $V_{BE}$ ).

где  $n$  — отношение величин постоянных токов. С числовыми коэффициентами эта формула имеет следующий вид:

$$v_d = 86,56T \lg n,$$

где  $v_d$  выражается в мкВ,  $T$  — в кельвинах. Для  $n=2$  разность напряжений  $v_d=59,73 T$ .

Чувствительность к температуре выражается формулой

$$S = dv_d/dT = (k/q) \lg n,$$

или численно:

$$S = 86,56 \lg n, \text{ мкВ} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Чувствительность к температуре данной дифференциальной схемы меньше чувствительности схемы с одним диодом или транзистором, но она существенно меньше зависит от  $T$ . Линейность существенно улучшается, как это показано на рис. 6.29.

### 6.5.3. Интегральные датчики температуры

Микроэлектронная технология позволяет изготавливать оба транзистора рассмотренной пары в виде интегральной схемы на одном кристалле; это очень удобно для применения в качестве датчиков температуры, основанных на измерении роста напряжений транзисторов  $V_{BE}$  в зависимости от температуры. Главное достоинство интегральных датчиков, которые создают ток или напряжение, пропорциональные абсолютной температуре, и обеспечивают очень высокую линейность, состоит в простоте их использования. Однако они имеют ограниченный рабочий диапазон — от  $-50$  до  $150^{\circ}\text{C}$ .

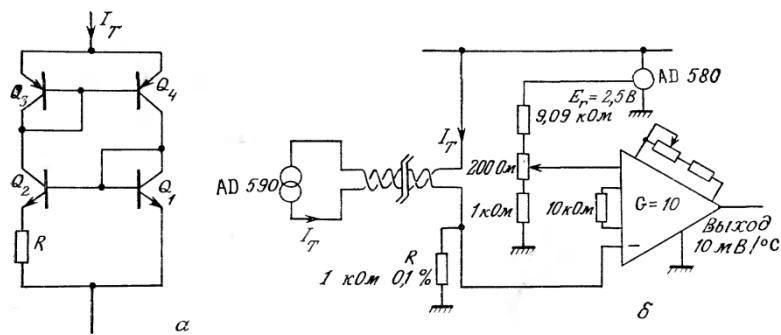


Рис. 6.30. Интегральный датчик температуры типа AD 590 (документация фирмы Analog Devices).

*a* — упрощенная принципиальная схема; *б* — схема измерения температуры; *в* — схема

*Примеры датчиков. Датчик AD590 (фирма Analog Devices).* Этот датчик представляет собой источник тока, линейно изменяющегося в зависимости от температуры. Он особенно удобен для измерений на большом расстоянии, поскольку падение напряжения в соединительных проводах не влияет на сигнал датчика. Упрощенная схема датчика представлена на рис. 6.30, а. Дифференциально включенные транзисторы  $Q_3$  и  $Q_4$  имеют одинаковые напряжения  $V_{BE}$  и через них протекают одинаковые токи, равные  $I_T/2$ . Ток, проходящий через  $Q_4$ , является также током эмиттера  $Q_1$  и определяет напряжение между базой и эмиттером транзистора  $Q_1$ :

$$V_{BE1} = (kT/q) \lg (I_T/2I_0).$$

Ток  $I_T/2$  транзистора  $Q_3$  проходит также через  $Q_2$ , который в действительности представляет собой блок восьми параллельно соединенных транзисторов, идентичных  $Q_1$ , через каждый из которых проходит ток  $I_T/16$ . Для них общее напряжение между базой и эмиттером равно

$$V_{BE2} = (kT/q) \lg (I_T/16I_0).$$

На клеммах резистора  $R$ , через который течет ток  $I_T/2$ , возникает напряжение, равное разности  $V_{BE1}$  и  $V_{BE2}$ , которое определяется как

$$V_{BE1} - V_{BE2} = (kT/q) \lg 8 \quad \text{и} \quad V_{BE1} - V_{BE2} = RT_T/2,$$

откуда  $I_T = (2/R)(kT/q) \lg 8$ , или  $I_T/T = 1$  мкА/К при  $R = 358$  Ом.

Схема измерения температуры (рис. 6.30, б). Ток  $I_T$  создает на клеммах резистора  $R$  (1 кОм) разность потенциалов (мВ), численно равную  $T$ , где  $T$  — величина абсолютной температуры датчика. Источник опорного напряжения (AD580L,  $E_r = 2,5$  В) с помощью потенциометрического делителя позволяет получить необходимое напряжение смещения на другом входе усилителя, которое численно должно как можно точнее совпадать с величиной 273,15 мВ, соответствующей температуре 0 °C в кельвинах. Измерительный усилитель с усилением  $G = 10$  дает на выходе напряжение  $V_0$ , пропорциональное температуре датчика в °C:

$$V_0 = 10(T - 273,15) \text{ мВ} = 10(T, \text{ }^{\circ}\text{C}) \text{ мВ}.$$

## 6.6. Измерение температуры по тепловому шуму

### 6.6.1. Принцип измерения

Тепловые движения носителей заряда создают в резисторе флюктуации напряжения или тока, которые зависят от температуры  $T$  и имеют мгновенные значения, соответственно,  $E_{bR}$  и  $I_{bR}$ . Эффективное значение шумового напряжения, равное корню квадратному из среднеквадратического значения  $E_{bR}$ , выражается формулой

$$\sqrt{E_{bR}} = \sqrt{4kTRB},$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж·К<sup>-1</sup> — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура в кельвинах и  $B$  — полоса пропускания измерительной аппаратуры.

По схеме Тевенина этот источник напряжения включен последовательно с резистором  $R$  (рис. 6.32, а). По концепции НORTONA источник тока включается параллельно резистору  $R$  (рис. 6.32, б), и эффективное значение тока выражается формулой

$$\sqrt{I^2_{bR}} = \sqrt{4kTB/R}.$$

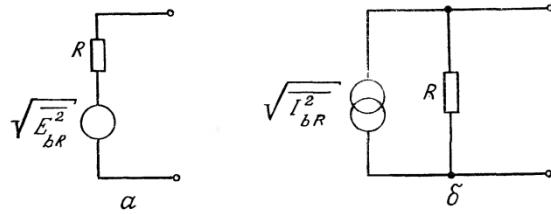


Рис. 6.32. Эквивалентная электрическая схема резистора с источником теплового шума.

*a* — схема Тевенина; *b* — схема Нортона.

Мощность шума в резисторе не зависит от величины сопротивления  $R$ :

$$P_b = \overline{E^2_{bR}}/R = \overline{I^2_{bR}}R = 4kTB = \sqrt{\overline{E^2_{bR}} \overline{I^2_{bR}}}.$$

Измерение  $\sqrt{\overline{E^2_{bR}}}$  с помощью вольтметра, регистрирующего эффективное значение напряжения, позволяет при известных  $R$  и  $B$  определить  $T$ ; измерение  $P_b$  дает дополнительное удобство, поскольку в этом случае не требуется знать  $R$ .

### 6.6.2. Методы измерения

**Определение шумового напряжения методом балансировки.** Пусть изменяемое сопротивление  $R_c$  имеет неизвестную температуру  $T_c$ . Среднеквадратическое шумовое напряжение на этом резисторе равно

$$\overline{E^2_{bR}} = 4kT_c R_c B.$$

Переменное сопротивление резистора, находящегося при температуре  $T_1$ , устанавливается при таком значении  $R_1$ , при котором его шумовое напряжение и шумовое напряжение на резисторе  $R_c$  одинаковы, т. е.

$$4kT_c R_c B = 4kT_1 R_1 B,$$

$$\text{или } T_c = (R_1/R_c) T_1.$$

При использовании этого метода необходимо предварительно определить  $R_c$ ,  $R_1$  и  $T_1$ . Кроме того, в этих двух измерениях должна быть одинаковой полоса пропускания, что достигается посредством регулирования емкости  $C_c$ , параллельной резистору  $R_c$ , таким образом, чтобы выполнялось соотношение, учитывающее емкость  $C_1$ , параллельную  $R_1$ :

$$R_c C_c = R_1 C_1.$$

**Определение мощности шума.** Мощность шума определяется посредством последовательных измерений эффективного значения шумового напряжения разомкнутой цепи

$$\sqrt{\overline{E^2_{bR}}} = \sqrt{4kTRB}$$

и эффективного значения шумового тока короткозамкнутой цепи

$$\sqrt{\overline{I^2_{bR}}} = \sqrt{4kTB/R}.$$

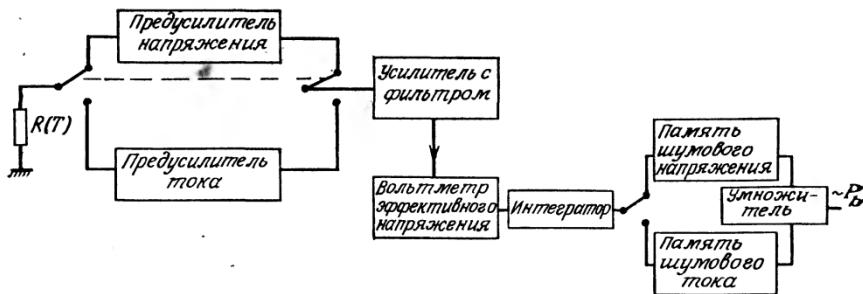


Рис. 6.33. Схема измерения мощности теплового шума сопротивления (по Борковскому и Блейлоку).

Затем производится умножение результатов этих измерений. На рис. 6.33 представлена схема измерений.

Необходимо соблюдать предосторожность, чтобы собственный шум приборов или внешних помех был значительно ниже уровня теплового шума измерительного резистора. Погрешность измерений температуры в такой схеме может быть меньше 1%.

Этот метод интересен тем, что он не требует никаких предварительных измерений и, кроме того, измерение не зависит от величины сопротивления  $R_T$ . Последняя особенность важна в случае измерений при высоких температурах и в агрессивных средах, например в ядерных реакторах, где возможны изменения электрических параметров (сопротивления, э. д. с.) используемых датчиков.

## 6.7. Кварцевые термометры

Классическим применением кварца является создание генераторов частоты с очень высокой стабильностью, в частности, температурной. Для этого пластинку кварца выбирают с такой кристаллографической ориентацией, при которой влияние изменений температуры на частоту кварцевого генератора минимально. При использовании кварца в качестве датчика температуры, наоборот, пластинку выбирают с такой кристаллографической ориентацией, при которой частота генератора является квазилинейной функцией температуры кварцевой пластиинки. Изготовленный таким образом датчик обладает высокими точностью и чувствительностью. Дополнительными достоинствами кварцевого термометра являются высокая точность измерений, независимость от шума, который вносит передача информации, и простота преобразования частотной информации в цифровую.

### 6.7.1. Электромеханический резонанс кварца

Кристалл кварца  $\text{SiO}_2$  имеет форму призмы с пирамидальными концами и гексагональным поперечным сечением (рис. 6.34, а). Его структура и анизотропия физических свойств характеризуется тремя системами осей: а) оптической осью, или осью  $Z$ , которая соединяет вершины кристалла, и ортогональными осями, расположенными в плоскости, перпендикулярной оси  $Z$  (рис. 6.34, б); б) тремя осями (называемыми электронными)  $X, X', X''$ , которые соединяют каждые две противоположные вершины в поперечном шестиугольном сечении; в) тремя осями (называемыми механическими)  $Y, Y', Y''$ , каждая из которых перпендикулярна противоположным сторонам поперечного сечения.

Из кристалла вырезаются квадратные, прямоугольные или круглые пластинки, свойства которых зависят от их формы, размеров и кристаллографической ориентации. Кварц получается пьезоэлектрическим (разд. 10.1.1), когда главные плоскости пластинки перпендикулярны электрической оси. В этом случае наблюдается появление зарядов противоположного знака на противоположных поверхностях пластинки при приложении силы по нормали к ним. Это явление называется прямым пьезоэлектрическим эффектом. При приложении к противоположным поверхностям пластинки разности потенциалов происходит изменение толщины пластинки (растяжение или сжатие) в зависимости от знака разности потенциалов. Это явление называется обратным пьезоэлектрическим эффектом.

Пластинка может испытывать различные механические колебания, соответствующие различным типам деформации: растяжению, изгибу и сдвигу. Частоты колебаний, которые могут

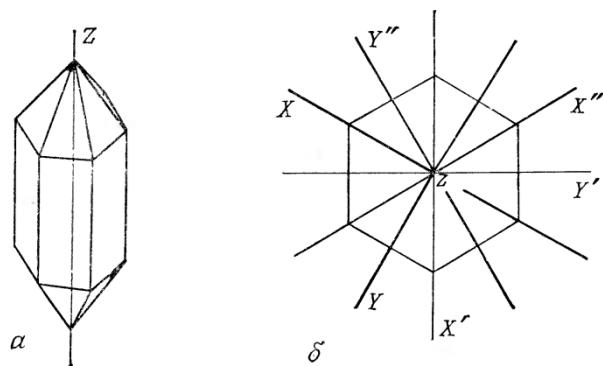


Рис. 6.34. Кристалл кварца.

а — форма кристалла; б — поперечное сечение, перпендикулярное оптической оси.

возникнуть, определяются формой, размерами и кристаллографической ориентацией пластинки. Они определяются общей формулой

$$f = (n/l) \sqrt{c/\rho},$$

где  $c$  — модуль упругости, зависящий от кристаллографической ориентации,  $\rho$  — плотность кварца,  $l$  — размер пластинки в направлении распространения колебаний и  $n$  — целое число (обычно от 1 до 5).

Если к противоположным поверхностям пластинки приложить переменную разность потенциалов, частота которой равна частоте пьезоэлектрического эффекта, пластинка будет вибрировать, и возникнет явление электромеханического резонанса, сопровождающееся периодическим превращением механической энергии в электрическую и обратно с очень малыми потерями. Добротность  $Q$ , характеризующая остроту резонанса, определяется соотношением

$$Q = 2\pi \frac{\text{Максимальная накопленная механическая или электрическая энергия}}{\text{Энергия, рассеиваемая за период}}.$$

Для кварцевой пластинки величина  $Q$  имеет очень высокие значения — обычно  $\sim 10^4 \div 10^5$ .

Ориентация пластинки относительно осей кристалла определяет ее срез. Так, например, в срезе  $X$ , называемом срезом Кюри, поверхности пластинки перпендикулярны одной из осей  $X$  (рис. 6.35, а). Если приложить переменное напряжение к этим поверхностям, то пластинка будет вибрировать, растягиваясь и сжимаясь. Ее две основные резонансные частоты имеют значения

$$f_1 = 2860/e, \quad f_2 = 2860/l,$$

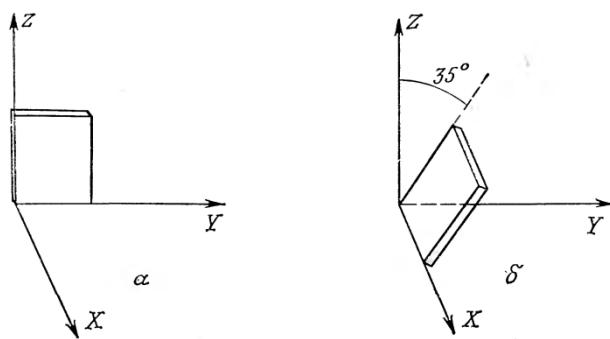


Рис. 6.35. Примеры срезов кристалла кварца.  
а — срез  $X$ ; б — срез  $AT$ .

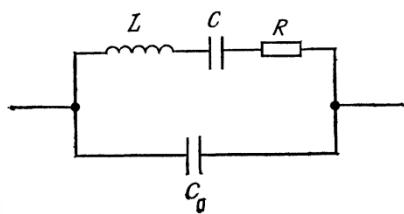


Рис. 6.36. Эквивалентная электрическая схема пластины кварца.

где  $f$  выражена в кГц, а  $e$  и  $l$ , соответственно, толщина и длина пластинки — в мм. В среде  $AT$  плоскости поверхностей повернуты вокруг оси  $X$  и составляют угол приблизительно  $35^\circ$  с осью  $Z$  (рис. 6.35, б). Такая пластинка может совершать сдвиговые колебания с частотами

$$f = (1675/e) n,$$

где  $f$  выражается в кГц,  $e$  — толщина в мм и  $n \leq 5$  — целое число. Используются и различные другие срезы; частоты механических колебаний таких пластинок всегда обратно пропорциональны одному из их размеров.

Электроды, с помощью которых подводится разность потенциалов к пластинке, могут быть напылены в вакууме или выполнены из двух прижатых к пластинке кусочков фольги.

Вблизи одной из этих резонансных частот механических колебаний пластинка кварца с электрической точки зрения представляет собой двухполюсник, состоящий из двух параллельных ветвей (рис. 6.36). Первая ветвь содержит  $L$ ,  $C$ ,  $R$ ; значения ее параметров определяются геометрическими, механическими и кристаллографическими характеристиками пластинки. Величина  $L$  имеет порядок от нескольких Гн до  $10^4$  Гн,  $C$  — от  $10^{-2}$  до  $10^{-1}$  пФ,  $R$  — от нескольких кОм до нескольких десятков кОм. Вторую ветвь образует емкость  $C_0$ , обусловленная наличием металлических электродов. Величина этой емкости  $1 \div 100$  пФ. Отношение  $C/C_0$  обычно находится в пределах  $10^{-2} \div 10^{-3}$ .

Этот двухполюсник имеет две цепи электрического резонанса: последовательную  $L$ ,  $C$ ,  $R$  с резонансной частотой  $f_s = 1/2\pi\sqrt{LC}$  и параллельную с емкостной ветвью  $C_0$  и индуктивной  $L$ ,  $C$ ,  $R$ , резонансная частота которой равна

$$f_p = 1/2\pi \sqrt{LC [1/(1+C/C_0)]}.$$

Эти частоты очень близки:

$$(f_p - f_s)/f_s = (1/2)(C/C_0).$$

Импеданс  $Z_q$  двухполюсника, эквивалентного пластинке кварца, можно представить в виде

$$Z_q = R_a + jX_a,$$

### 6.7.2. Кварцевый генератор частоты

Генератор синусоидальных колебаний состоит из усилителя и цепи обратной связи (рис. 6.38, а).

Введем обозначения:  $A$  — коэффициент усиления усилителя;  $\beta$  — вносимый им сдвиг фазы;  $\beta$  — коэффициент обратной связи, равный отношению амплитуды сигнала, подаваемого на вход усилителя, к амплитуде сигнала на его выходе;  $\varphi_r$  — сдвиг фазы в цепи обратной связи. Согласно критерию Баркхаузена, для возникновения колебательного режима должны выполняться два условия:

$$|A\beta| \geq 1, \quad \varphi_a + \varphi_r = 2\pi.$$

В качестве примера рассмотрим простую схему, в которой усилителем является полевой транзистор, чтобы с ее помощью

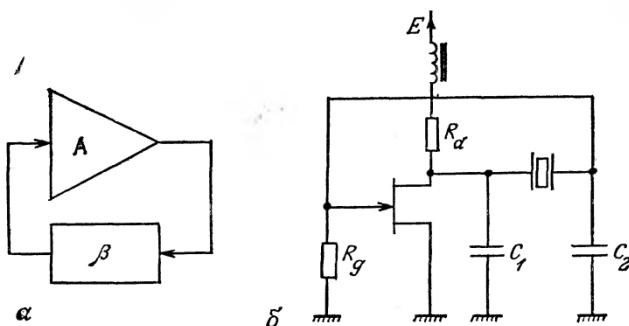


Рис. 6.38. Кварцевый генератор частоты.  
а — принципиальная схема; б — пример простой схемы кварцевого генератора.

объяснить два условия существования колебательного режима (рис. 6.38, б).

Записав условие равенства напряжения возбуждения  $v_g$  на управляющем электроде напряжению на выходе цепи обратной связи, при условии, что  $R_g$  значительно больше  $1/C_2\omega$ , получаем

$$v_g = g_m v_g \frac{1}{C_1 C_2 \omega^2 R_g + j [C_1 C_2 \omega^2 X_q - (C_1 + C_2) \omega]}.$$

или

$$g_m \frac{1}{C_1 C_2 \omega^2 R_g + j [C_1 C_2 \omega^2 X_q - (C_1 + C_2) \omega]} = 1.$$

Отсюда находим условие  $g_m = R_q C_1 C_2 \omega^2$ , которое определяет активную динамическую проводимость, необходимую для поддержания колебаний. Соотношение для реактивного сопротивления кварцевой пластинки  $X_q = (C_1 + C_2)/C_1 C_2 \omega$ , которое должно быть индуктивным, определяет частоту колебаний, заключенную в диапазоне между величинами  $f_s$  и  $f_p$ .

Устойчивость колебаний кварцевого генератора обусловлена очень высокими значениями производных  $dX_q/d\omega$  и  $d\varphi_q/d\omega$  в интервале значений от  $\omega_s$  до  $\omega_p$  ( $\varphi_q = \arctg(X_q/R_q)$ ). Поэтому при случайному отклонении одного из параметров, от которых зависит частота, но не относящихся к кварцу, достаточно незначительного изменения частоты, чтобы величины  $X_q$  и  $\varphi_q$  приобрели значения, необходимые для поддержания колебаний.

### 6.7.3. Чувствительность к температуре

С изменением температуры изменяются размеры пластинки, ее плотность и модули упругости, что сопровождается изменениями частоты механического резонанса  $f = (n/l)\sqrt{c/\rho}$  и значений параметров  $L$ ,  $C$ ,  $R$ , являющихся электрическими характеристиками пластинки.

В общем случае имеем

$$f(T) = f_0 (1 + aT + bT^2 + dT^3),$$

где  $T$  выражается в  $^{\circ}\text{C}$ , или

$$\Delta f/f_0 = aT + bT^2 + dT^3,$$

где  $\Delta f = f(T) - f_0$ . Значения коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $d$  зависят от среза пластинки (рис. 6.39).

Для срезов  $BT$ ,  $CT$ ,  $DT$  доминирующим является коэффициент  $b$ , и тогда зависимость  $\Delta f/f_0$  от температуры имеет вид параболы; чувствительность к температуре минимальна при температуре, соответствующей вершине параболы и зависящей от точной ориентации пластинки.

Для среза  $AT$  определяющую роль играет коэффициент  $d$ , и кривая зависимости  $\Delta f/f_0$  от температуры имеет точку перегиба, в окрестности которой (в пределах нескольких десятков градусов) чувствительность к температуре чрезвычайно мала.

Срез  $LC$  (линейный) характеризуется фактически нулевым значением коэффициентов  $b$  и  $d$ . Поэтому чувствительность резонансной частоты к температуре для него является постоянной величиной

$$S = \Delta f/\Delta T = af_0.$$

При  $a = 35,45 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  и  $f_0 = 28,208 \text{ МГц}$  имеем  $S = 1000 \text{ Гц}/^{\circ}\text{C}$ .

Для кварцевой пластинки, используемой в качестве датчика температуры, выбирают именно срез  $LC$ . На рис. 6.40 пред-

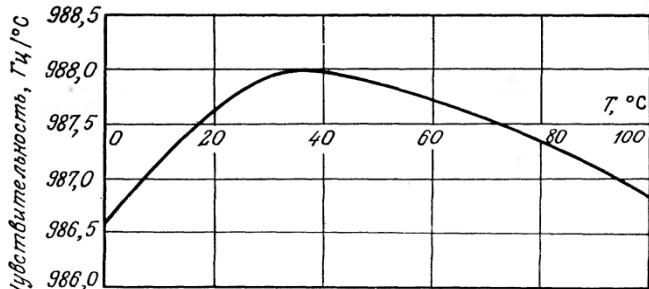


Рис. 6.40. Зависимость чувствительности пластинки кварца на срезе  $LC$  от температуры (данные фирмы Hewlett — Packard).

ставлена зависимость чувствительности от температуры для пластинки кварца (срез  $LC$ ) в интервале температур  $0 \div 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Принимая в качестве среднего значения чувствительности в этом интервале температур величину  $987,5 \text{ Гц}/^{\circ}\text{C}$ , получим погрешность измерения температуры<sup>1)</sup> не более  $\pm 5 \cdot 10^{-4}$ .

#### 6.7.4. Конструкция и метод измерения

Датчик температуры представляет собой пластинку кварца, помещенную в стальной корпус, заполненный гелием для увеличения тепловой проводимости между кварцем и корпусом датчика. Кварцевая пластинка, связанная проводами с активным элементом, образует в совокупности генератор, создающий измерительный сигнал  $e_m$ :

$$e_m = E_m \cos \Omega_m t,$$

где  $\Omega_m = 2\pi f_m$ ,  $f_m = f_0 + \Delta f$  и  $\Delta f = S(T - T_0) = ST$ , если  $T_0 = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Пример. Кварцевый термометр фирмы Hewlett — Packard имеет следующие метрологические параметры: диапазон измерений  $-80 \div +250 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ; нелинейность  $\pm 0,05\%$  в указанном выше диапазоне измерений (что в десять раз меньше соответствующей величины для платинового термометра сопротивления в том же интервале температур); чувствительность  $1000 \text{ Гц}/^{\circ}\text{C}$ ; разрешающая способность  $0,0001 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ; погрешность, обусловленная гистерезисом,  $\pm 0,05 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ; быстродействие (температурная постоянная времени)  $2,5 \text{ с}$  в потоке воды со скоростью  $22 \text{ м/с}$ .