Q1)

(a) $(u, v) = AU \cdot AV$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= 24 + 10$$

$$\Rightarrow 34$$

(b) (kv, w)

$kv = (9, 6)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 \\ 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= -24 - 15$$

$$\Rightarrow -39$$

(c) $(u+v, w)$

$u+v = (4, 3)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= -11 - 7$$

$$\Rightarrow -18$$

(d) $\|v\|$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{64 + 25}$$

$$\Rightarrow \sqrt{89}$$

(e) $d(u, v)$

$$= \| u - v \|$$

$$u - v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{25 + 9} \Rightarrow \sqrt{34}$$

(f) $\| u - kv \|$

$$kv = 3(3, 2) = (9, 6)$$

$$u - kv = (-8, -5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -21 \\ -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -21 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{820}$$

Q2) $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$

(a) $\langle u, v \rangle$

$2(1)(3) + 3(1)(2) \Rightarrow 12$

(b) $\langle kv, w \rangle$

$k\langle v, w \rangle$

$3\left[2(3)(0) + 3(2)(-1)\right]$

$\Rightarrow -18$

(c) $\langle u+v, w \rangle$

$u+v = (4, 3)$

$2(4)(0) + 3(3)(-1)$

$\Rightarrow -9$

(d) $\|v\|$

$\sqrt{2(3)(3) + 3(2)(2)}$

$= \sqrt{30}$

(e) $d(u, v)$

$\|u-v\|$

$u-v = (-2, -1)$

$\sqrt{2(-2)(-2) + 3(-1)(-1)}$

$\Rightarrow \sqrt{11}$

(f) $\|u - kv\|$

$(-8, -5)$, $(-8, -5)$

$\sqrt{2(-8)(-8) + 3(-5)(-5)}$

$= \sqrt{203}$

Q3

(a) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

Q4.

AU . AV

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow -42$

Q5.

$\cancel{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$

$\cancel{\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}}$

$\cancel{-3 + (-6) + 4 + 8} \Rightarrow 3$

$tr(U^T V)$

$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1+2 \Rightarrow 3$

Q6.

1. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$

$(p, q) = -8 + 0 - 21 \Rightarrow -29$

2. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$(p, q) = -15 + 4 - 4 \Rightarrow -15$

Q7.

(a) ① Inner product

$-6 + 0 - 0 + 6 \Rightarrow 0$

(orthogonal)

② Inner product.

$5 - 3 - 2 + 0 \Rightarrow 0$

(orthogonal)

(b) ⓐ $(U_1 \times 0) + (U_2 \times 0) + (U_3 \times 0)$

$\Rightarrow 0$ (orthogonal)

ⓑ $(-4 \times 2) + (6 \times 1) + (-10 \times -2) + (1 \times 9)$

$= 27$

$\therefore \neq 0$ (not orthogonal)

ⓒ $(a \times -c) + (b \times 0) + (c \times a)$

$-ac + ac = 0$

(orthogonal)

(c) $P_1 = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ $P_2 = \begin{bmatrix} l & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

P_1 & P_3

$(2 \times 1) + (k \times 2) + (6 \times 3) = 0$

$2 + 2k + 18 = 0$

$k = -10$

P_2 & P_3

$l + (2 \times 5) + (3 \times 3) = 0$

$l = -19$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = 2 + (-10x) + 6x^2 \\ P_2 = -19 + 5x + 3x^2 \end{array}\right]$$

checking for orthogonality

$(2 \times -19) + (-10 \times 5) + (6 \times 3) = -70$

$\neq 0$ (not orthogonal)

Hence no scalar value for k & l exists to satisfy orthogonal.