এনিমেশন (Animation)

প্রশ্ন ১: এনিমেশন (Animation) কি? বিভিন্ন প্রকার এনিমেশন সম্পর্কে সংক্ষেপে আলোচনা করুন। (What is Animation? Explain different types of Animation.)

উত্তর: এনিমেশন (Animation): এনিমেশন হল, গ্রাফিক্সেরই একটি অংশ। এনিমেশন শব্দটি এনিমেটিং (Animating) শব্দ থেকে এসেছে। যার অর্থ উজ্জীবিত (Enlivening) করা। আর এনিমেটিং শব্দটি এসেছে ল্যাটিন এনিমেশিও (Animātiō) শব্দ থেকে। যার অর্থ "প্রাণবন্ত" বা "জীবন্ত"। সুতরাং কোনো শিল্পকর্ম, প্রতিচ্ছবি বা মডেলের ক্রম বিন্যাসের স্থানকে ক্রমাগত পরিবর্তন করে প্রাণবন্ত আকারে প্রদর্শন করার কৌশলকে এনিমেশন বলে। অন্যভাবে বলা যায়, কম্পিউটারের মাধ্যমে কোনো লেখা, টেক্সট, ড্রয়িং, ইমেজ, পেইন্টিং ইত্যাদি স্থির বস্তুকে বিভিন্ন ডাইমেন্টশনে, বিভিন্ন স্টাইলে চলমান বা গতিশীল করার কৌশলকে এনিমেশন বলা হয়। এনিমেশন কাজকে চারটি পর্বে ভাগ করা যেতে পারে। যেমন:

ক. বস্তু তৈরি ও সম্পাদনা।
খ. দৃশ্য তৈরি ও সম্পাদনা।
গ. গতিময়তা (১টি বস্তুকে ১টি নির্দিষ্ট পথে ঘুরানো)।
ঘ. রেন্ডারিং।

এনিমেশন সাধারণত ৫ প্রকারের হয়ে থাকে। যেমন:

১. ট্র্যাডিশনাল এনিমেশন (Traditional Animation)
২. দ্বিমাত্রিক এনিমেশন (2D animation)
৩. ত্রিমাত্রিক এনিমেশন (3D Animation)
৪. মোশন গ্রাফিক্স এনিমেশন (Motion Graphics)
৫. স্টপ মোশন (Stop Motion)

ট্র্যাডিশনাল এনিমেশন (Traditional Animation): এটাকে আপনি হয়তো 2D এনিমেশন ও বলতে পারেন, কিন্তু সত্যিকার অর্থে এটি নানা ধরনের লেয়ার এবং 2D এনিমেশন এর মিশ্রন । এটি বর্তমান এনিমেশন এর সবচেয়ে প্রাচীন পদ্ধতি । যেখানে এনিমেটরকে প্রতিটা ফ্রেম হাতে আঁকতে হয়। Traditional এনিমেশনে আঁকার জন্য একটি বড় লাইট টেবিল ব্যবহার করে থাকেন এনিমেটররা । যার ফলে এনিমেটর তার পূর্ববর্তী অংকনের সাথে মিলিয়ে তার পরবর্তী ফ্রেম আঁকতে পারেন । এটাকে অনিয়ন স্কিনিং (Onion Skinnig) বলা হয়। বর্তমানে Traditional Animation গ্রাফিক্স ট্যাব এর মাধ্যমে খুব সহজেই করা যায়। এই এনিমেশনে প্রতি সেকেন্ডে ১২ টি ফ্রেম ব্যবহার করা হয়।

দ্বিমাত্রিক এনিমেশন (2D Animation): দ্বিমাত্রিক ছবি সংযোগ এবং সম্পাদনা করে 'দ্বিমাত্রিক এনিমেশন' নির্মাণ করা হয়। দ্বিমাত্রিক ছবিটি কম্পিউটারের সফটওয়্যার ব্যবহার করে আঁকা হতে পারে বা হাতে এঁকে স্ক্যান করে নেওয়াও হতে পারে। অবশ্য প্রয়োজনীয় ফ্রেম হাতে এঁকে স্ক্যান করলে সেইটি সঠিক অর্থে কম্পিউটার এনিমেশন নয়। সাধারণত মূল ফ্রেমগুলি হাতে এঁকে মাঝের ফ্রেমটি কম্পিউটারের সহায়তায় এঁকে নেওয়া (inbetweening, morphing) অথবা কম্পিউটারের দ্বারা 'রটোস্কোপ' করে নেওয়া ইত্যাদিকে কম্পিউটার এনিমেশন বলা হয়। কম্পিউটারে দ্বিমাত্রিক এনিমেশন সৃষ্টির জন্য বহু সফটওয়্যার পাওয়া যায়। 'ফ্লাশ' (Flash) একটি বহুল ব্যবহৃত তেমনি সফটওয়্যার।

ত্রিমাত্রিক এনিমেশন (3D Animation): ত্রিমাত্রিক এনিমেশন আগে উল্লেখ করা 'মডেল অ্যানিমেশন'-এর কম্পিউটার রূপ বলা যায়। ত্রিমাত্রিক এনিমেশন নির্মাণ করার জন্য কম্পিউটার সফটওয়্যারে ত্রিমাত্রিক মডেল (3D Model) সাজিয়ে নেওয়া হয়। সেই মডেলকে সফটওয়্যারে সময়ের হিসেবে গতি দিয়ে এই এনিমেশন তৈরি করা হয়। খুব ভাল করে বানানো ত্রিমাত্রিক এনিমেশন 'জীবন্ত গতি'র সঙ্গে টক্কর দিতে পারে। আজ কাল বহু চলচ্চিত্রে 'জীবন্ত গতি'র সাথে স্পেশাল এফেক্ট হিসাবে ত্রিমাত্রিক এনিমেশন প্রয়োগ করা হয়।

মোশন গ্রাফিক্স এনিমেশন (Motion Graphics Animation): মোশন গ্রাফিক্স অন্য সকল এনিমেশন থেকে আলাদা। এটা কোন ক্যারেক্টার বা গল্পকে সামনে রেখে তৈরি এনিমেশন না। মোশন গ্রফিক্স বিভিন্ন আর্ট, আর্টিকেল, গ্রাফিক্যাল ইলিমেন্ট এর মিশ্রন । এই ধরনের এনিমেশন সধারনত কমার্শিয়াল এবং প্রমোশন্যাল কাজে ব্যবহার করা হয়। এনিমেটেড লোগো, Commercial Application, টিভি প্রমো

স্টপ মোশন এনিমেশন (Stop Motion Animation): এই এনিমেশন এর সকল ক্যারেক্টার ও অবজেক্ট বাস্তব। এই এনিমেশনের প্রথম প্রক্রিয়া শুরু হয় বস্তুটির ছবি তোলার মাধ্যমে। বস্তুটিকে বিভিন্ন জায়গায় সরিয়ে বার বার ফটো তোলা হয়। এইভাবে তৈরি হয় স্টপ মোশন এনিমেশন।

রেন্ডারিং (Rendering)

প্রশ্ন ১: রেন্ডারিং (Rendering) কি? (What is Rendering?)

উত্তর: রেন্ডারিং (Rendering): Scenes থেকে images তৈরির প্রক্রিয়াকে রেন্ডারিং বলা হয়। সহজভাবে বলতে গেলে (আফটার ইফেক্টস এর ক্ষেত্রে) আফটার ইফেক্টস এ কোন কোন প্রজেক্টের কাজ শেষে তা ইমেজ (jpg,png ইত্যাদি) অথবা ভিডিও (avi, flv,mp4 ইতদ্যাদি) ফরম্যাটে এক্সপোর্ট করাই মূলত রেন্ডারিং। সম্প্রতি কম্পিউটারে 3-D images তৈরিতে রেন্ডারিং জনপ্রিয়। রেন্ডারিং প্রসেস নিম্নলিখিত চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করা হল ।

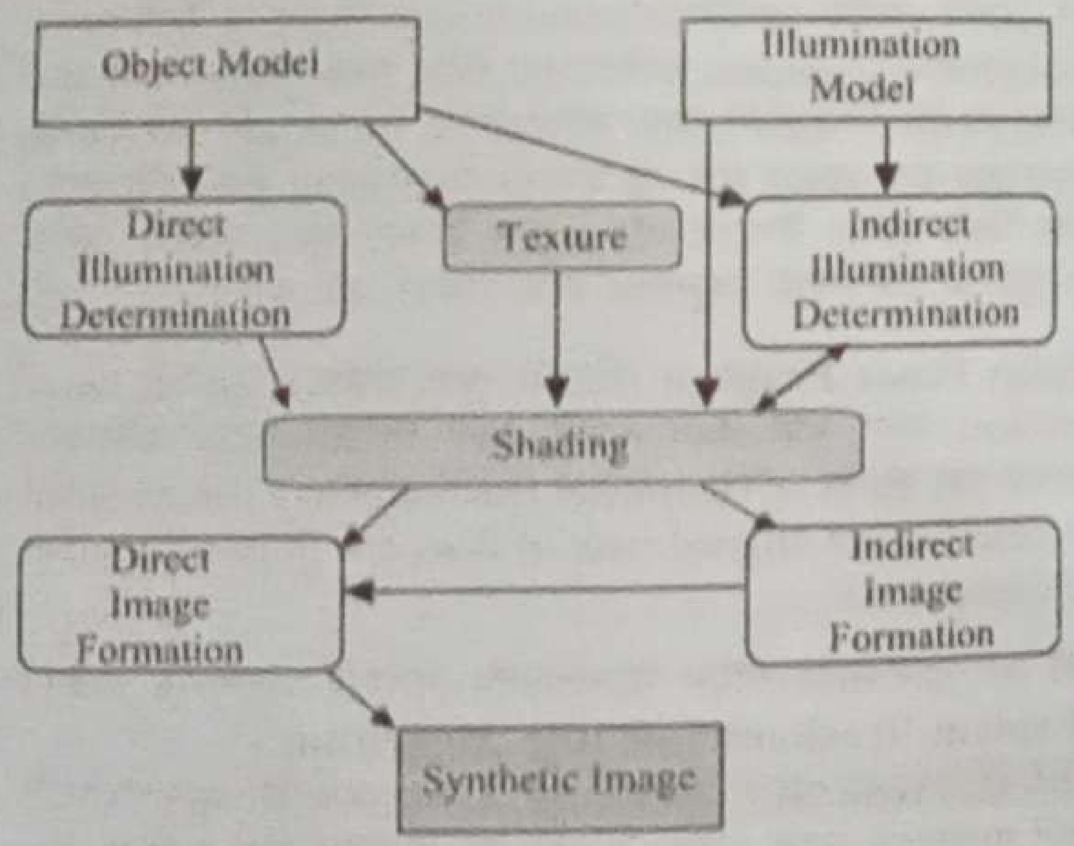


Fig: Rendering

Numerical analysis

[Syllabus: BPSC CS: Solving linear systems with Gaussian elimination and Gauss-Jordan elimination method. Interpolation: Newton's formula, Lagrange's formula. Numerical differentiations and integrations: Trapezoidal, Simpson's 1/3rd and 3/8 th rule. Romberg integration. Solutions and Newton-Ralphson's method. Solution of ordering differential equation and least square approximation of functions.

NTRCA CS: Numerical solution of polynomials, Numerical solution of simultaneous linear equation: Numerical solution of ordinary differential equation, Direct methods for systems of linear equations, Iterative techniques for systems of linear equations.]

Roots of Nonlinear Equation

প্রশ্ন ১. Bisection Method Algorithm বর্ণনা করুন? (Describe Bisection Method Algorithm)

উত্তরঃ Bisection Method Algorithm:

i. দুইটি বাস্তব সংখ্যা a এবং b নির্ধারণ করতে হবে যেখানে $f(a)*f(b) < 0$ হয়। [যেখানে $a < b$]

ii. Root $c = \frac{(a+b)}{2}$ নির্ণয় করতে হবে।

iii. f(c) বের করতে হবে।

iv. যদি $f(a)*f(c) <= 0$ হয় তবে b=c হবে অন্যথায় a=c হবে। [Step 1-এ ফিরে যেতে হবে যতক্ষণ পর্যন্ত না Root-এর মান দুইবার একই পাওয়া যাবে।]

প্রশ্ন ২. কোন একটি সমীকরণের মূল নির্ণয়ের জন্য Numerical Analysis -এ ব্যবহৃত বিভিন্ন পদ্ধতির নাম লিখুন এবং Bisection পদ্ধতি ব্যবহার করে 3x–cosx–1=0 সমীকরনটির মূল নির্ণয়ের পদ্ধতি ব্যাখ্যা করুন। (To determine the root of an equation, name the different methods used in numerical analysis and use the bisection method 3x–cosx–1=0. Explain the basic method of finding the equation.) [NTRCA-2019]

উত্তরঃ কোন একটি সমীকরণের মূল নির্ণয়ের জন্য Numerical Analysis -এ ব্যবহৃত বিভিন্ন পদ্ধতির নাম গুলো নিম্নে দেওয়া হলঃ

a) Bracketing Method
   i. Bisection Method
   ii. Regular Falsi Method
b) Open End Method
   i. Newton Raphson Method
   ii. Secant Method
   iii. Fixed Point Method
c) System of Non-linear Equation
d) Roots of Polynomials
   i. Jacobi Method

ধরি, $f(x) = 3x - \cos x - 1 = 0$

$a=0, b=1$ [0,1]

$\therefore f(a) = f(0) = 3*0 - \cos 0 - 1 = -2.$

$\therefore f(b) = f(1) = 3*1 - \cos(1*57.3) - 1 = 1.46$ [$\because 1^c = \frac{180}{\pi} = 1.46^0$]

$\therefore f(a)*f(b) < 0.$

a	b	f(a)	f(b)	$c = \frac{(a+b)}{2}$	f(c)
0	1	−2	−1.46	0.5	−0.38
0.5	1	−0.38	−1.46	0.75	0.52
0.5	0.75	−0.38	0.52	0.625	0.06
0.5	0.625	−0.38	0.06	0.56	−0.16
0.56	0.625	−0.16	0.06	0.59	−0.05
0.59	0.625	−0.05	0.06	0.61	0.00
0.59	0.61	−0.05	0.00	0.60	−0.02
0.60	0.61	−0.02	0.00	0.61	−0.01

$\therefore$ So the root is 0.61 (Answer).

প্রশ্ন ৩. Bisection পদ্ধতি ব্যবহার করে $x^3 - 4x - 9=0$ সমীকরনটির মূল নির্ণয়ের পদ্ধতি ব্যাখ্যা করুন। (Explain the basic method of finding the equation $x^3 - 4x - 9=0$ using the Bisection method.)

উত্তরঃ The root is 2.718

প্রশ্ন ৪. নিউটন র‍্যাপসন মেথড বর্ণনা করুন ? (Explain the Newton Raphson method.) [NTRCA-2012]

উত্তরঃ নিউটন র‍্যাপসন মেথড হল Open End Method। নিউটন র‍্যাপসন মেথডের মাধ্যমে যেকোন সমীকরণের রুট বের করা যায়। রুট বের করার জন্য নিম্নের অ্যালগরিদম ব্যবহার করতে হবে ।

i. $f'(x_n)$ বের করতে হবে।

ii. a এবং b বের করতে হবে যেখানে $f(a)*f(b) < 0$ হয়।

iii. মনে করি, $x_0 = a$

iv. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ বের করতে হবে।

v. $x_1, x_2, x_3,$ -------- x_n. বের করতে হবে। [যতক্ষন পর্যন্ত না ২ টি পর্যায় ক্রমিক রুটের মান একই হয়।]

প্রশ্ন ৫. নিউটন র‍্যাপসন মেথড ব্যবহার করে $3x^3 + 5x - 40 = 0$ সমীকরণের রুটের এর মান বের কর। (Explain the basic method of finding the equation $x^3 - 4x - 9=0$ using the Newton Raphson method.)

উত্তরঃ ধরি, $f(x) = 3x^3 + 5x - 40 = 0$

$\therefore f'(x) = 3*3x^2 + 5 = 9x^2 + 5$

এখন, $x = 0, \quad f(0) = 3*0 + 5*0 - 40 = -40$

$x = 1, \quad f(1) = 3*1^3 + 5*1 - 40 = -32$

$x = 2, \quad f(2) = 3*2^3 + 5*2 - 40 = -6$

$x = 3, \quad f(3) = 3*3^3 + 5*3 - 40 = 56$

$\therefore$ একটি বাস্তব রুট ২ এবং ৩ এর মধ্যে বিদ্যমান আছে। সুতরাং প্রথম আনুমানিক রুট হলো, $x_0 = 2$. রুট নির্ণয়ের ক্ষেত্রে যে মানটা শূন্যের কাছাকাছি সেইটা নির্বাচন করলে ধাপ সংখ্যা কমে যায়। তবে যে কোনো রুট দিয়ে শুরু করলেও কোনো সমস্যা নেই।

$x_0 = 2, \; f(x_0) = 3x_0^3 + 5x_0 - 40 = 3*2^3 + 5*2 - 40 = -6$

$f'(x_0) = 9x_0^2 + 5 = 9*2^2 + 5 = 41$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - (\frac{-6}{41}) = 2 + \frac{6}{41} = 2.1463$

$f(x_1) = 3*(2.1463)^3 + 5*2.1463 - 40 = 0.393$

$f'(x_1) = 9*(2.1463)^2 + 5 = 46.459$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.1463 - \frac{0.393}{46.459} = 2.1378$

$f(x_2) = 3*(2.1378)^3 + 5*2.1378 - 40 = -0.000551$

$f'(x_2) = 9*(2.1378)^2 + 5 = 46.132$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.1378 - (\frac{-0.000551}{46.132}) = 2.1378$

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
	−6	41	2.1463
2	0.393	46.459	2.1378
2.1463 / 2.1378	– 0.000551	46.132	2.1378

$\therefore$ So the root is 2.1378 (Answer).

প্রশ্ন ৬. নিউটন র‍্যাপসন মেথড ব্যবহার করে 3x–cosx–1=0 সমীকরণের রুটের এর মান বের কর। (Explain the basic method of finding the equation 3x–cosx–1=0 using the Newton Raphson method.)

উত্তরঃ The root is 0.61

Roots of Linear Equation

প্রশ্ন ১. Gaussian Elimination মেথড বর্ণনা কর ? (Explain the Gaussian Elimination method.)

উত্তরঃ Gaussian Elimination এমন একটি মেথড যার সাহায্যে আমরা কোন বহুপদী রাশিকে ম্যাট্রিক্স আকারে সাজিয়ে তারপর সেই ম্যাট্রিক্সকে আপার ট্রায়াঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স বানিয়ে বহুপদীর মূল নির্ণয় করা যায়। প্রথমে সমীকরণ থেকে Augmented Matrix তৈরি করে নিতে হবে। অর্থাৎ ধরা যাক নিম্নরূপ একটি বহুপদী রাশির সমীকরণ আছে -

$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots\ldots\ldots = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots\ldots\ldots = d_2$

....

....

....

$a_nx + b_ny + c_nz + \ldots\ldots\ldots\ldots = d_n$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Coefficient	Variable	Constant

আপার ট্রায়াঙ্গুলার বানানোর জন্য a_2, a_3, b_3 কে শূন্য বানাতে হবে। কোন কলামের কোন উপাদানকে শূন্য বানাতে চাইলে ওই উপাদানকে ম্যাট্রিক্সটির কর্ন বরাবর ওই কলামের যে মানটি পরেছে তা দ্বারা ভাগ দিয়ে ওই কর্ন বরাবর মানটির রো দ্বারা গুন দিতে হবে এবং যে উপাদানটি কে শূন্য বানাবো তার রো থেকে পুরো গুনফলকে বিয়োগ করতে হবে। যেমন a_2 কে শূন্য বানাতে চাইলে,

$R_2 - (\frac{a_2}{a_1}) R_1$, a_3 কে শূন্য বানাতে চাইলে, $R_3 - (\frac{a_3}{a_1}) R_1$, b_3 কে শূন্য বানাতে চাইলে, $R_3 - (\frac{b_3}{b_2}) R_2$.

এখানে বলে রাখা ভালো যে Coefficient এবং Constant গুলো নিয়ে যে ম্যাট্রিক্স তৈরি হয়েছে রো পরিবর্তনের ফলে তাদের মানের পরিবর্তন হতে পারে কিন্তু অজানা রাশি গুলোর স্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

প্রশ্ন ২. নিচের সমীকরণ হতে Gaussian Elimination মেথড ব্যবহার করে x,y,z এর মান নির্ণয় কর। (Find the value of x,y,z using Gaussian Elimination method from the following equation.)

$x + 2y - z = -3$

$3x + y + z = 4$

$x - y + 2z = 6$

উত্তরঃ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

আপার ট্রায়াঙ্গুলার বানানোর জন্য প্রথমে x_{21} এর মান অর্থাৎ 3 এর মান শূন্য করতে হবে।

$= [3 \;\; 1 \;\; 1] - (\frac{3}{1}) * [1 \;\; 2 \;\; -1]$ [$\because R_2 - (\frac{x_{21}}{x_{11}}) R_1$]

$= [3 \;\; 1 \;\; 1] - [3 \;\; 6 \;\; -3]$

$= [0 \;\; -5 \;\; 4]$

এবং $4 - (\frac{3}{1}) * -3 = 4 + 9 = 13$. [$\because R_2 - (\frac{x_{21}}{x_{11}}) R_1$]

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}$

আবার x_{31} এর মান অর্থাৎ 1 এর মান শূন্য করতে হবে।

$= [1 \;\; -1 \;\; 2] - (\frac{1}{1}) * [1 \;\; 2 \;\; -1]$

$= [1 \;\; -1 \;\; 2] - [1 \;\; 2 \;\; -1]$

$= [0 \;\; -3 \;\; 3]$

এবং $6 - (\frac{1}{1}) * -3 = 6 + 3 = 9$.

$\therefore \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}$

আবার x_{32} এর মান অর্থাৎ −3 এর মান শূন্য করতে হবে।

$= [0 \;\; -3 \;\; 3] - (\frac{-3}{-5}) * [0 \;\; -5 \;\; 4]$

$= [0 \;\; -3 \;\; 3] - [0 \;\; -3 \;\; \frac{12}{5}]$

$= [0 \;\; 0 \;\; \frac{3}{5}]$

এবং $9 - (\frac{-3}{-5}) * 13 = 9 + (\frac{39}{5}) = \frac{6}{5}$.

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ 0 - 5y + 4z \\ 0 + 0 + \frac{3z}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

$x + 2y - z = -3$ .... (i)

$-5y + 4z = 13$ .... (ii)

$\therefore \frac{3z}{5} = \frac{6}{5}$

$= 3z = 6$

$\therefore z = 2$ (Ans.)

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$-5y + 4z = 13$

$= -5y + 4*2 = 13$

$= -5y = 13 - 8$

$= -5y = 5$

$\therefore y = -1$ (Ans.)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x + 2y - z = -3$

$= x + 2*(-1) - 2 = -3$

$= x = -3 + 2 + 2$

$\therefore x = 1$ (Ans.)

প্রশ্ন ৩. নিচের সমীকরণ হতে Gaussian Elimination মেথড ব্যবহার করে x_1,x_2,x_3 এর মান নির্ণয় কর। (Find the value of x_1,x_2,x_3 using Gaussian Elimination method from the following equation.)

$3x_1 + 6x_2 + x_3 = 16$
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9$

উত্তরঃ $\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\2 & 4 & 3\\1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\13\\9\end{bmatrix}$

আপার ট্রায়াঙ্গুলার বানানোর জন্য প্রথমে x_{21} এর মান অর্থাৎ 2 এর মান শূন্য করতে হবে।

$=[2\ \ 4\ \ 3]-(\frac{2}{3})*[3\ \ 6\ \ 1]$ $[\because R_2-(\frac{x_{21}}{x_{11}})R_1]$
$=[2\ \ 4\ \ 3]-[2\ \ 4\ \ \frac{2}{3}]$
$=[0\ \ 0\ \ \frac{7}{3}]$

এবং $13-(\frac{2}{3})*16=13-\frac{32}{3}=\frac{7}{3}$ $[\because R_2-(\frac{x_{21}}{x_{11}})R_1]$

$\therefore \begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\0 & 0 & \frac{7}{3}\\1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\\frac{7}{3}\\9\end{bmatrix}$

আবার x_{31} এর মান অর্থাৎ 1 এর মান শূন্য করতে হবে।

$=[1\ \ 3\ \ 2]-(\frac{1}{3})*[3\ \ 6\ \ 1]$
$=[1\ \ 3\ \ 2]-[1\ \ 2\ \ \frac{1}{3}]$
$=[0\ \ 1\ \ \frac{5}{3}]$

এবং $9-(\frac{1}{3})*16=9-\frac{16}{3}=\frac{11}{3}$

$\therefore \begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\0 & 0 & \frac{7}{3}\\0 & 1 & \frac{5}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\\frac{7}{3}\\\frac{11}{3}\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\0 & 1 & \frac{5}{3}\\0 & 0 & \frac{7}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\\frac{11}{3}\\\frac{7}{3}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3x_1+6x_2+x_3\\0+x_2+\frac{5x_3}{3}\\0+0+\frac{7x_3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\\frac{11}{3}\\\frac{7}{3}\end{bmatrix}$

$3x_1+6x_2+x_3=16$ ....(i)
$x_2+\frac{5x_3}{3}=\frac{11}{3}$ ....(ii)

$\therefore \frac{7x_3}{5}=\frac{7}{5}$
$\therefore x_3=1$ (Ans.)

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,
$x_2+\frac{5x_3}{3}=\frac{11}{3}$
$=x_2+\frac{5*1}{3}=\frac{11}{3}$
$=x_2=\frac{11}{3}-\frac{5}{3}=\frac{6}{3}=2$ (Ans.)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,
$3x_1+6x_2+x_3=16$
$=3x_1+6*2+1=16$
$=3x_1=16-13$
$=3x_1=3$
$\therefore x_1=1$ (Ans.)

প্রশ্ন ৪. Gauss-Jardan Elimination মেথড বর্ণনা কর? (Explain the Gauss-Jardan Elimination method.)

উত্তরঃ Gauss-Jardan Elimination মেথড হচ্ছে এমন একটি মেথড যার সাহায্যে কোন বহুপদী রাশির variable গুলোর মান বের করা হয়। এ উদ্দেশ্যে আমাদেরকে প্রথমে বহুপদী রাশির সমীকরণ গুলোকে দিয়ে Augmented Matrix তৈরি করে Row Operation এর সাহায্যে সেই Augmented Matrix এর বাম পক্ষকে Identity Matrix (একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স) এ রূপান্তর করতে হবে, ফলে ডান পাশে যে মান পাওয়া যাবে তাই-ই আমাদের variable গুলোর মান হবে। অর্থাৎ ধরা যাক নিম্নরূপ একটি বহুপদী রাশির সমীকরণ আছে-

$a_1x+b_1y+c_1z+$ .... $=d_1$
$a_2x+b_2y+c_2z+$ .... $=d_2$
....
....
....
$a_nx+b_ny+c_nz+$ .... $=d_n$

$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$

[এখানে বলে রাখা ভালো যে Gauss-Jardan Elimination মেথড এর নির্দিষ্ট কোন নিয়ম নেই তাই যে কোন টেকনিক অনুসরণ করে Identity Matrix তৈরি করলেই হবে।]

$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$

$\therefore x=d_1, y=d_2, z=d_3$

প্রশ্ন ৫. নিচের সমীকরণ হতে Gauss-Jardan Elimination মেথড ব্যবহার করে x,y,z এর মান নির্ণয় কর। (Find the value of x,y,z using Gauss-Jardan Elimination method from the following equation.)

$x+y+z=9$
$2x-3y+4z=13$
$3x+4y+5z=40$

উত্তরঃ $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -3 & 4\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\13\\40\end{bmatrix}$

Apply, R_2-2R_1, R_3-3R_1
$C_{21}=2-2*1=0, C_{22}=-3-2*1=-5, C_{23}=4-2*1=2$
$C_{31}=3-3*1=0, C_{32}=4-3*1=1, C_{33}=5-3*1=2$
এবং $R_2=13-2*9=-5, R_3=40-3*9=13.$

$\therefore \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -5 & 2\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-5\\13\end{bmatrix}$

Again apply, $R_3+\frac{1}{5}R_2$
$C_{31}=0+(\frac{1}{5})*0=0, C_{32}=1+(\frac{1}{5})*(-5)=0, C_{33}=2+(\frac{1}{5})*2=\frac{12}{5}$
এবং $R_3=13+(\frac{1}{5})*(-5)=12$

$\therefore \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -5 & 2\\0 & 0 & \frac{12}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-5\\12\end{bmatrix}$

Again apply, $-R_2, 5R_3$

$\therefore \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 5 & -2\\0 & 0 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\5\\60\end{bmatrix}$

Again apply, $R_2+\frac{1}{6}R_3, \frac{1}{12}R_3$
$C_{21}=0+(\frac{1}{6})*0=0, C_{22}=5+(\frac{1}{6})*0=5, C_{23}=-2+(\frac{1}{6})*12=0, C_{31}=0*(\frac{1}{12})=0, C_{32}=0*(\frac{1}{12})=0, C_{33}=12*(\frac{1}{12})=1$
এবং $R_2=5+(\frac{1}{6})*(60)=15$, এবং $R_3=(\frac{1}{12})*60=5$

$\therefore \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\15\\5\end{bmatrix}$

Again apply, $\frac{1}{5}R_2$

$\therefore \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\3\\5\end{bmatrix}$

Again apply, $R_1-R_2-R_3$
$C_{11}=1-0-0=1, C_{12}=1-1-0=0, C_{13}=1-1-1=0$
এবং $R_1=9-3-5=1$

$\therefore \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$

$\therefore x=1, y=3, z=5$ (Ans.)

প্রশ্ন ৬. নিচের সমীকরণ হতে Gauss-Jardan Elimination মেথড ব্যবহার করে x_1,x_2,x_3 এর মান নির্ণয় কর। (Find the value of x_1,x_2,x_3 using Gauss-Jardan Elimination method from the following equation.)

$2x_1+4x_2-6x_3=-8$
$x_1+3x_2+x_3=10$
$2x_1-4x_2-2x_3=-12$

উত্তরঃ $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ (Ans.)

Curve Fitting Interpolation

প্রশ্ন ১. Newton's Forward Inerpolatuion Method বর্ণনা কর?। (Explain the Newton's Forward Inerpolatuion method.)

উত্তরঃ মনে করি, $y=f(x)$ একটি ফাংশন। যেখানে x এর মান গুলো জানা থাকবে। $x=x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ পয়েন্ট গুলোর মান জানা থাকবে। Newton's Forward Inerpolatuion Method এর শর্ত অনুসারে পাশাপাশি x এর দুইটা পয়েন্টের ইন্টারভাল সব সময় একই হবে। $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ হলে তাদের ইন্টারভাল হবে $x_2-x_1=1, x_3-x_2=1$

Newton's Forward Inerpolation Method হতে পাই,

$f(x)=y_0+u\,\Delta y_0+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{u(u-1)(u-2)\ldots\ldots\{u-(n-1)\}}{n!}\Delta^n y_0$

$y_0=$ ফাংশন থেকে পাওয়া x_0 এর Corresponding value.

$\therefore u=\frac{x-x_0}{h}$ এখানে x হল প্রশ্নে যার মান বের করতে বলবে। অর্থাৎ f(1.3) এর মান বের করতে বললে x এর মান হবে 1.3

$x_0=$ যে ফাংশন দেওয়া আছে তার প্রথম মান।

$h=$ Interval. অর্থাৎ $h=x_1-x_0$

ধরি, ফাংশন $x=1,2,3$ এবং তার Corresponding value $y=3,4,5$ এবং $f(1.3)=?$

Difference table:

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
1	3		
		1	
2	4		0
		1	
3	5		

প্রথমে Difference table হতে পাশাপাশি y এর ইন্টারভাল বের করতে হবে । যতক্ষণ পর্যন্ত একটি মান না আসে ততক্ষণ পর্যন্ত Difference করতে হবে। অর্থাৎ

$\Delta y_0=4-3=1$ এবং $\Delta y_0=5-4=1$ এবং
$\Delta^2 y_0=1-1=0$

ফাংশনের মানটি Difference table এর যে দুটি পয়েন্টের মাঝে পরবে তাদের মধ্যবিন্দু বের করতে হবে এবং ফাংশনের মানটি যে পয়েন্টের কাছাকাছি তাকে x_0 ধরতে হবে এবং x_0 এর Corresponding y_0 ধরতে হবে। তার অর্থ হলো $1<1.3<2$

$\therefore$ 1 এবং 2 এর এর মধ্যবিন্দু 1.5 । 1.3 যেহেতু 1.5 এর চেয়ে ছোট তাই $x_0=1$ হবে এবং $y_0=3$ হবে ।

প্রশ্ন ২. Newton's Forward Inerpolatuion Method ব্যবহার করে y এর মান বের কর? যেখানে x = 1.2 দেওয়া আছে। (Find the value of y using Newton's Forward Inerpolatuion Method)

x	0	1	2	3	4
y	1.00	1.50	2.20	3.10	4.60

উত্তরঃ দেওয়া আছে, $y=f(x)$, $x=1.2$

Difference table:

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
0	1.00				
		0.50			
			0.20		
1	1.50				
		0.70		0	
			0.20		0.40
2	2.20				

		0.90		0.40	
3	3.10		0.60		
		1.50			
4	4.60				

$\therefore x_0 = 1, y_0 = 1.50, \Delta y_0 = 0.70, \Delta^2 y_0 = 0.20, \Delta^3 y_0 = 0.40$

$\therefore h = 3 - 2 = 1$

$\therefore u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.2 - 1}{1} = 0.2$

Newton's Forward Inerpolation Method হতে পাই,

$f(x) = y_0 + u \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \Delta^3 y_0$

$f(1.2) = 1.50 + 0.2*0.70 + \{ \frac{0.2(0.2-1)}{2!} \}* 0.20 + \{ \frac{0.2(0.2-1)(0.2-2)}{3!} \}* 0.40$

$= 1.50 + 0.14 - 0.016 + 0.0192 = 1.6432$

$\therefore f(1.2) = 1.6432$ (Ans.)

প্রশ্ন ৩. Newton's Forward Inerpolatuion Method ব্যবহার করে y এর মান বের কর ? যেখানে x = 21 দেওয়া আছে। (Find the value of y using Newton's Forward Inerpolatuion Method)

x	20	23	26	29
y	0.342	0.3907	0.4384	0.4848

উত্তরঃ y (21) = 0.3583 (Ans).

প্রশ্ন ৪. Lagrange Inerpolatuion Formula বর্ণনা কর ?। (Explain the Lagrange Inerpolatuion Formula.)

উত্তরঃ ধরি, y = f(x) একটি ফাংশন যেটি পর্যন্ত মান ধারণ করে।

$\therefore y_0, y_1, \ldots\ldots\ldots y_n$. Corresponding to $x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$.

ধরি, y = f(x) এর একটি Polynomial form হল –

$= a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots\ldots (x - x_n) + a_1 (x - x_0)(x - x_2) \ldots\ldots\ldots (x - x_n) + a_2 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots\ldots\ldots (x - x_n) + \ldots\ldots\ldots + a_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots\ldots (x - x_{n-1}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

Putting $x = x_0$, $y = y_0$ in equestion (i)

$y_0 = a_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots\ldots\ldots (x_0 - x_n)$

$\therefore a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots\ldots(x_0 - x_n)}$

Similarly, Putting $x = x_1$, $y = y_1$ in equestion (i)

$\therefore a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots\ldots(x_1 - x_n)}$

Putting $x = x_2$, $y = y_2$ in equestion (i)

$\therefore a_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)\ldots\ldots(x_2 - x_n)}$

……………………………………

……………………………………

Putting $x = x_n$, $y = y_n$ in equestion (i)

$\therefore a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})}$

Using values of $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ in equestion (i)

$y = f(x)$

$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots\ldots(x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots(x_1 - x_n)} y_1 + \ldots\ldots\ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})} y_n$. This is the Lagrange Formula.

প্রশ্ন ৫. Lagrange Inerpolatuion Formula ব্যবহার করে f(10) এর মান বের কর ? দেওয়া আছে (Find the value of f(10) using Lagrange Inerpolatuion Formula)

x	5	6	9	11
y	12	13	14	16

উত্তরঃ দেওয়া আছে, y = f(10), x= 10

Lagrange Inerpolatuion Formula হতে পাই,

$y(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$

$y(10) = \frac{(10-6)(10-9)(10-11)}{(5-6)(5-9)(5-11)} (12) + \frac{(10-5)(10-9)(10-11)}{(6-5)(6-9)(6-11)} (13) + \frac{(10-5)(10-6)(10-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)} (14) + \frac{(10-5)(10-6)(10-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)} (16)$

$= 2 - \frac{13}{3} + \frac{35}{3} + \frac{16}{3} = \frac{44}{3}$ (Ans.)

প্রশ্ন ৬. Lagrange Inerpolatuion Formula ব্যবহার করে y এর মান বের কর ? যেখানে x = 5 দেওয়া আছে।(Find the value of y using Lagrange Inerpolatuion Formula)

x	2	3	6	7	9
y	15	39	243	375	771

উত্তরঃ y(5) = 147 (Ans.)

Numerical Integration

প্রশ্ন ১. Trapezoidal Rule বর্ণনা কর ?। (Explain the Trapezoidal Rule)

উত্তরঃ Trapezoidal Rule এর দুইটি Assumption আছে।

১। উভয় লিমিট সসীম হতে হবে।

২। a এবং b এর ভিতরে f(x) ফাংশনটি চলমান হতে হবে।

Trapezoidal Rule এর কিছু স্টেপ-

i. n = No. of Interval নিতে হবে।

ii. $h = \frac{b-a}{n}$ নির্ণয় করতে হবে।

iii. $x_i = a + i\,h$ নির্ণয় করতে হবে। [i = 0,1,2,3……., n]

iv. y = f (x) ব্যবহার করে , $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$ নির্ণয় করতে হবে।

v. $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2} \{ y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots + y_{n-1}) + y_n \}$ নির্ণয় করতে হবে।

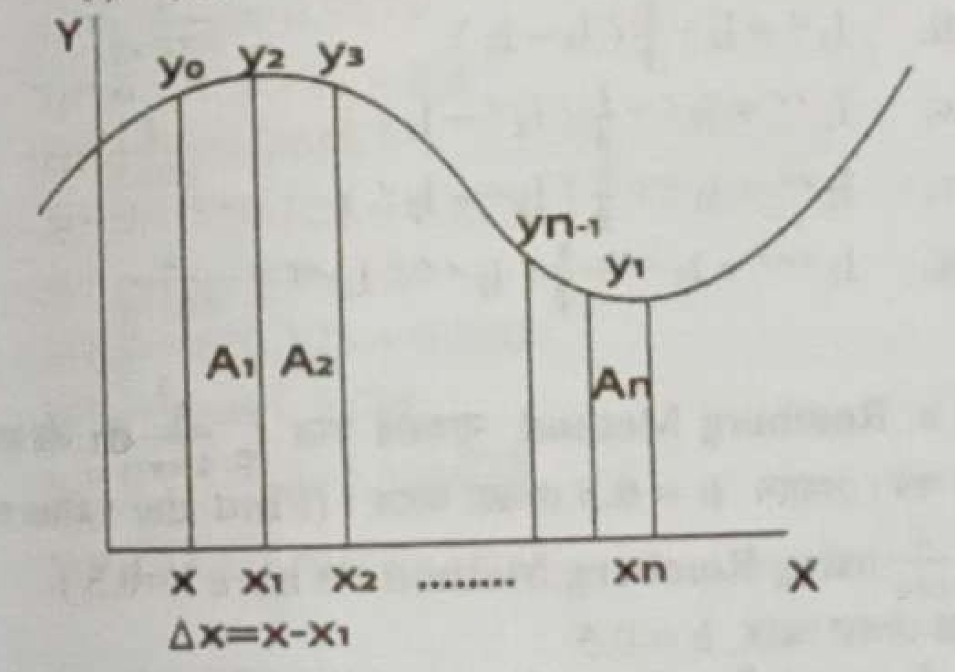


Fig: Trapezoidal Rule

চিত্রে a এবং b এর মধ্যে অনেক গুলো ছোট ছোট ট্রাপিজয়েড আছে। ট্রাপিজিয়ামের সূত্র থেকে পাই, $\frac{1}{2}$ × সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব × (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের যোগফল)। ধরি, ট্রাপিজিয়ামের মোট ক্ষেত্রফল

$A = \int_a^b f(x)\,dx$

$= A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots\ldots + A_n$

$\therefore h = \frac{b-a}{n}$ [∴ h = Interval Gap, n = No. of Interval, a = Lower Limit, b = Upper Limit]

$A_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$, $A_2 = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$, $A_3 = \frac{h}{2}(y_2 + y_3)$, $A_4 = \frac{h}{2}(y_3 + y_4)$, ……………, $A_n = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$

$\therefore A = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots + y_{n-1}) + y_n]$

প্রশ্ন ২. Trapezoidal Rule ব্যবহার করে $\int_0^{12} \frac{dx}{1+x}$ এর মান নির্ণয় কর ? যেখানে h = 2 দেওয়া আছে। (Find the value of $\int_0^{12} \frac{dx}{1+x}$ using Trapezoidal Rule . Where h=2)

উত্তরঃ দেওয়া আছে, a = 0, b = 12, h = 2

$y = f(x) = \frac{1}{1+x}$, $h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{12-0}{2} = 6$

$x_0 = 0 + 0*2 = 0$ [i=0] $x_1 = 0 + 1*2 = 2$ [i = 1] $x_2 = 0 + 2*2 = 4$ $x_3 = 0 + 3*2 = 6$ $x_4 = 0 + 4*2 = 8$ $x_5 = 0 + 5*2 = 10$ $x_6 = 0 + 6*2 = 12$	$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$ $y_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ $y_2 = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$ $y_3 = \frac{1}{1+6} = \frac{1}{7}$ $y_4 = \frac{1}{1+8} = \frac{1}{9}$ $y_5 = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$ $y_6 = \frac{1}{1+12} = \frac{1}{13}$

∴ Trapezoidal Rule হতে পাই,

$\int_0^{12} f(x)\,dx = \int_0^{12} \frac{1}{1+x}\,dx = \frac{2}{2}[1 + 2*(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}) + \frac{1}{13}] = 2.83334$ (Ans.)

প্রশ্ন ৩. Trapezoidal Rule ব্যবহার করে $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর ? যেখানে n = 10 দেওয়া আছে। (Find the value of $\int_1^2 \frac{1}{x}$ using Trapezoidal Rule . Where n=10)

উত্তরঃ 0.6937

প্রশ্ন ৪. Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule ব্যবহার করে $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর ? যেখানে n = 10 দেওয়া আছে। (Find the value of $\int_1^2 \frac{1}{x}$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule. Where n=10)

উত্তরঃ Trapezoidal Rule এবং Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule এর ক্যালকুলেশন একই রকম। এখানে শুধুমাত্র n এর মান টা সর্বদা জোড় হতে হয়।

Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule :

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots\ldots\ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots\ldots\ldots + y_{n-2}) + y_n]$

দেওয়া আছে, a = 1, b = 2, n = 10

$y = f(x) = \frac{1}{x}$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$

$x_0 = 1 + 0*0.1 = 1$ [i=0]	$y_0 = \frac{1}{1} = 1$
$x_1 = 1 + 1*0.1 = 1.1$ [i = 1]	$y_1 = \frac{1}{1.1} = \frac{10}{11}$
$x_2 = 1 + 2*0.1 = 1.2$	$y_2 = \frac{1}{1.2} = \frac{10}{12}$
$x_3 = 1 + 3*0.1 = 1.3$	$y_3 = \frac{1}{1.3} = \frac{10}{13}$
$x_4 = 1 + 4*0.1 = 1.4$	$y_4 = \frac{1}{1.4} = \frac{10}{14}$
$x_5 = 1 + 5*0.1 = 1.5$	$y_5 = \frac{1}{1.5} = \frac{10}{15}$
$x_6 = 1 + 6*0.1 = 1.6$	$y_6 = \frac{1}{1.6} = \frac{10}{16}$
$x_7 = 1 + 7*0.1 = 1.7$	$y_7 = \frac{1}{1.7} = \frac{10}{17}$

$x_8 = 1+8*0.1 = 1.8$ $\quad y_8 = \frac{1}{1.8} = \frac{10}{18}$

$x_9 = 1+9*0.1 = 1.9$ $\quad y_9 = \frac{1}{1.9} = \frac{10}{19}$

$x_{10} = 1+10*0.1 = 2$ $\quad y_{10} = \frac{1}{2} = 0.5$

$\therefore$ Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule হতে পাই,

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{0.1}{3}[\,1+4(\frac{10}{11}+\frac{10}{13}+\frac{10}{15}+\frac{10}{17}+\frac{10}{19}) + 2(\frac{10}{12}+\frac{10}{14}+\frac{10}{16}+\frac{10}{18}) + 0.5\,] = 0.69315$$

(Ans.)

প্রশ্ন ৫. Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ এর মান নির্ণয় কর ? যেখানে n = 4 দেওয়া আছে। (Find the value of $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule. Where n=4)

উত্তর: 0.785393

প্রশ্ন ৬. Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule ব্যবহার করে $\int_0^3 \frac{1}{1+x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর ? যেখানে n = 6 দেওয়া আছে। (Find the value of $\int_0^3 \frac{1}{1+x}$ using Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule. Where n=6)

উত্তর: Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[\,y_0 + 3(y_1 + y_2 + y_4 + \dots\dots + y_{n-2} + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_6 + y_9 + \dots\dots + y_{n-3}) + y_n\,]$$

দেওয়া আছে, a = 0, b = 3, n = 6

$y = f(x) = \frac{1}{1+x}$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 0.5$

$x_0 = 0+0*0.5 = 0$

$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$

$x_1 = 0+1*0.5 = 0.5$

$y_1 = \frac{1}{1+0.5} = \frac{2}{3}$

$x_2 = 0+2*0.5 = 1$

$y_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$x_3 = 0+3*0.5 = 1.5$

$y_3 = \frac{1}{1+1.5} = \frac{2}{5}$

$x_4 = 0+4*0.5 = 2$

$y_4 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

$x_5 = 0+5*0.5 = 2.5$

$y_5 = \frac{1}{1+2.5} = \frac{2}{7}$

$x_6 = 0+6*0.5 = 3$

$y_6 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule হতে পাই,

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{1}{1+x}\,dx = \frac{3*0.5}{8}[\,1+3(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}) + 2(\frac{2}{5}) + \frac{1}{4}\,] = 1.3888 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৭. Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule ব্যবহার করে $\int_{-3}^3 x^4\,dx$ এর মান নির্ণয় কর ? যেখানে n = 6 দেওয়া আছে। (Find the value of $\int_{-3}^3 x^4$ using Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule. Where n=6)

উত্তর: 99

প্রশ্ন ৮. Romberg Integration Method বর্ণনা কর ?। (Explain the Romberg Integration Method)

উত্তর: Romberg Integration Method ব্যবহার করে কোনো রুটের মান বের করার জন্য Trapezoidal Rule ব্যবহার করে Approximation value গুলো বের করতে হবে। যতক্ষণ পর্যন্ত রুটের মান একই না পাওয়া যাবে ততক্ষণ পর্যন্ত প্রসেস চলতে থাকবে।

h	I_1			
		I_1'		
$\frac{h}{2}$	I_2		I_1''	
		I_2'		I_1'''
$\frac{h}{4}$	I_3		I_2''	
		I_3'		
$\frac{h}{8}$	I_4			

i. $I_1' = I_2 + \frac{1}{3}(I_2 - I_1)$

ii. $I_2' = I_3 + \frac{1}{3}(I_3 - I_2)$

iii. $I_3' = I_4 + \frac{1}{3}(I_4 - I_3)$

iv. $I_1'' = I_2' + \frac{1}{3}(I_2' - I_1')$

v. $I_2'' = I_3' + \frac{1}{3}(I_3' - I_2')$

vi. $I_1''' = I_2'' + \frac{1}{3}(I_2'' - I_1'')$

প্রশ্ন ৯. Romberg Method ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ এর মান বের কর। যেখানে h = 0.5 দেওয়া আছে। (Find the value of $\int_0^1 \frac{1}{1+x}$ using Romberg Method. Where h=0.5)

উত্তর: দেওয়া আছে, h = 0.5

$\therefore \frac{h}{2} = 0.25, \frac{h}{4} = 0.125, \frac{h}{8} = 0.0625$

$\therefore$ Trapezoidal Rule হতে পাই,

Case-1: h = 0.5

$x_0 = 0+0*0.5 = 0$ [i=0]

$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$

$x_1 = 0+1*0.5 = 0.5$ [i = 1]

$y_1 = \frac{1}{1+0.5} = 0.6667$

$x_2 = 0+2*0.5 = 1$

$y_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.5$

$I_1 = \frac{0.5}{2}[\,1+2*0.6667+0.5\,] = 0.70835$

Case-2: h = 0.25

$x_0 = 0+0*0.25 = 0$

$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$

$x_1 = 0+1*0.25 = 0.25$

$y_1 = \frac{1}{1+0.25} = 0.8$

$x_2 = 0+2*0.25 = 0.5$

$y_2 = \frac{1}{1+0.5} = 0.6667$

$x_3 = 0+3*0.25 = 1.75$

$y_3 = \frac{1}{1+0.75} = 0.5714$

$x_4 = 0+4*0.25 = 1$

$y_4 = \frac{1}{1+1} = 0.5$

$I_2 = \frac{0.25}{2}[\,1+2*(0.8+0.6667+0.5714)+0.5\,] = 0.6970$

Case-3: h = 0.125

$x_0 = 0+0*0.125 = 0$

$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$

$x_1 = 0+1*0.125 = 0.125$

$y_1 = \frac{1}{1+0.125} = 0.8889$

$x_2 = 0+2*0.125 = 0.25$

$y_2 = \frac{1}{1+0.25} = 0.8$

$x_3 = 0+3*0.125 = 0.375$

$y_3 = \frac{1}{1+0.375} = 0.7273$

$x_4 = 0+4*0.125 = 0.5$

$y_4 = \frac{1}{1+0.5} = 0.6667$

$x_5 = 0+5*0.125 = 0.625$

$y_5 = \frac{1}{1+0.625} = 0.6154$

$x_6 = 0+6*0.125 = 0.750$

$y_6 = \frac{1}{1+0.75} = 0.5714$

$x_7 = 0+7*0.125 = 0.875$

$y_7 = \frac{1}{1+0.875} = 0.5333$

$x_8 = 0+8*0.125 = 1$

$y_8 = \frac{1}{1+1} = 0.5$

$I_3 = \frac{0.125}{2}[1+2*(0.8889+0.8+0.7273+0.6667+0.6154+0.5714+0.5333)+0.5] = 0.6941$

$I_1' = I_2 + \frac{1}{3}(I_2 - I_1)$
$= 0.6970 + \frac{1}{3}(0.6970 - 0.70835) = 0.6932$

$I_2' = I_3 + \frac{1}{3}(I_3 - I_2)$
$= 0.6941 + \frac{1}{3}(0.6941 - 0.6970) = 0.6931$

$I_1'' = I_2' + \frac{1}{3}(I_2' - I_1')$
$= 0.6931 + \frac{1}{3}(0.6931 - 0.6932) = 0.6931$

(Ans.)

প্রশ্ন ১০. Romberg Integration Method ব্যবহার করে $\int_0^8 x^2\,dx$ এর মান বের কর। যেখানে h = 4 দেওয়া আছে। (Find the value of $\int_0^8 x^2$ using Romberg Method. Where h=4)

উত্তর: $I_1''' = 170.66$ (Ans.)

Solution of Ordering Differential Equation

প্রশ্ন ১. Tailor's Series Method ব্যবহার করে y(0.1) এর মান নির্ণয় করুন। দেওয়া আছে $y' = x^2y - 1$, $y(0) = 1$ (Find the value of f(0,1) using Tailor's Series Method. Where $y' = x^2y - 1$, $y(0) = 1$) [NTRCA-2013,2014]

উত্তর: দেওয়া আছে, y(0) =1, যেখানে $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Tailor's Series Method হতে পাই,

$$y(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{1!}y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y_0''' + \frac{(x-x_0)^4}{4!}y_0^{iv} + \dots\dots\dots \quad \text{(i).}$$

$y' = x^2y - 1$ $\quad \therefore y_0' = x_0^2y_0 - 1 = 0 - 1 = -1.$

$y'' = x^2y' + 2xy - 0$ $\therefore y_0'' = 0+0-0 = 0.$

$y''' = x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y$
$= x^2y'' + 4xy' + 2y$

$\therefore y_0''' = 0+0+2*1 = 2.$

$y^{iv} = x^2y''' + 2xy'' + 4xy'' + 4y' + 2y'$
$= x^2y''' + 6xy'' + 6y'$

$\therefore y_0^{iv} = 0+0+6*(-1) = -6.$

x_0 এবং y_0 এর মান গুলো (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\therefore y(x) = 1 + \frac{(x-0)}{1!}(-1) + \frac{(x-0)^2}{2!}(0) + \frac{(x-0)^3}{3!}(2) + \frac{(x-0)^4}{4!}(-6).$$

$$\therefore y(x) = 1 - x + 0 + \frac{x^3}{6}(2) + \frac{x^4}{24}(-6).$$
$$= 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\therefore y(0.1) = 1 - 0.1 + \frac{(0.1)^3}{3} - \frac{(0.1)^4}{4}$$
$= 0.90030$ (Answer).

প্রশ্ন ২. Tailor's Series Method ব্যবহার করে y(0.1) এর মান নির্ণয় করুন। দেওয়া আছে $\frac{dy}{dx} = x - y^2$, $y(0) = 1$ (Find the value of f(0,1) using Tailor's Series Method. Where $\frac{dy}{dx} = x - y^2$, $y(0) = 1$)

উত্তর: y(0.1) = 0.9138

প্রশ্ন ৩. অয়লার মেথড সম্পর্কে লিখুন। (Explain the EULER's Method) [NTRCA-2010,2014]

উত্তর: ইউলারের পদ্ধতিটি হল সহজতম পদ্ধতি এবং এর কার্যকারিতা কম হওয়ার কারণে এটি সীমিত প্রয়োগ হয়। Taylor Series এর প্রথম দুটি পদ বিবেচনা করুন-

$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$ ——— (i)

ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ হতে,

$y'(x) = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$

আমরা পাই,

$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$

অতএব, (i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)\, f(x_0, y_0)$

$y(x_1) = y(x_0) + (x_1 - x_0)\, f(x_0, y_0)$ [$\therefore x = x_1$ বিন্দুতে]

ধরি, $h = (x_1 - x_0)$, আমরা পাই,

$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$

একইভাবে আমরা পাই,

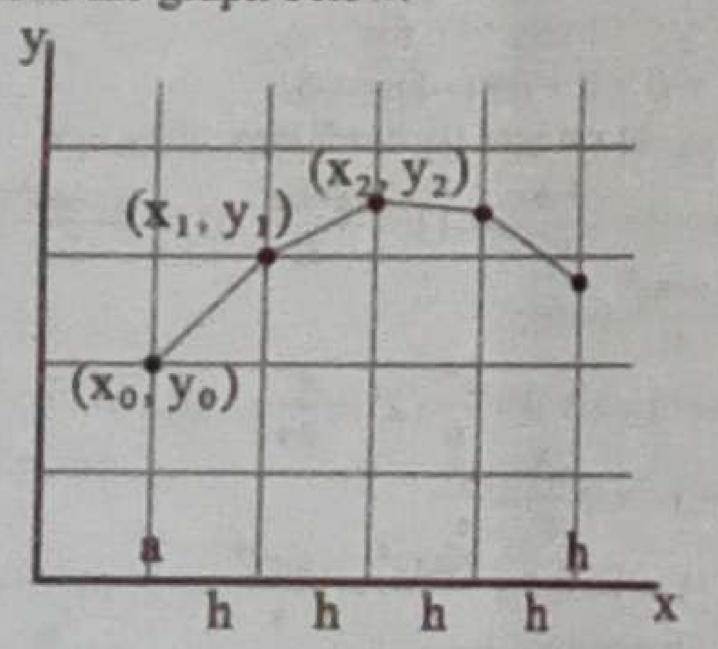
$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1)$ [$\therefore x = x_2$ বিন্দুতে]

সাধারণভাবে, উপরের বিশ্লেষণ হতে আমরা একটি রিকার্সিভ সম্পর্ক পাই,

$y_{i-1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$.

the right hand side of the formula above means, "start at the known y value, the move one step h units to the right in the direction of the slope at that point, which is dy/dx = f(x,y). we will arrive at a good apprximation to the curve's y-value at that new point."

we'll do this for each of the sub-points, h apart, from some starting value x = a to sme finishing value, x = , as shown in the graph below.



প্রশ্ন ৪. অয়লার (EULER's) মেথড ব্যবহার করে সমাধান করুনঃ $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$, যেখানে $y(0) = 2$। বের করুন $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$. **(Find the value of $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ using EULER's Method. Where $y(0) = 2$. Find $f(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$) [NTRCA-2011]**

উত্তরঃ দেওয়া আছে, $y(0) = 2$, যেখানে $x_0 = 0$, $y_0 = 2$. ধরি, $h = 1$.

অয়লার মেথড হতে পাই,

$x_{i+1} = x_i + h$, $\quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

$x_1 = x_0 + h$, $\quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ [$\therefore i = 0$]

$\therefore f(x_0, y_0) = \frac{dy}{dx}_{(x,y)=0} = (1 + x_0 y_0)$

$x_1 = x_0 + h$ $= 0+1=1$.	$y_1 = y(x_1) = y(0.1) = y_0 + hf(x_0, y_0)$ $= 2+1(1+0*2) = 3$ [$f(x_0, y_0) = (1 + x_0 y_0)$]
$x_2 = x_1 + h$ $= 1+1=2$	$y_2 = y(x_2) = y(0.2) = y_1 + hf(x_1, y_1)$ $= 3+1(1+1*3)=7$
$x_3 = x_2 + h$ $= 2+1=3$	$y_3 = y(x_3) = y(0.3) = y_2 + hf(x_2, y_2)$ $= 7+1(1+2*7)=22$

প্রশ্ন ৫. অয়লার (EULER's) মেথড ব্যবহার করে সমাধান করুনঃ $\frac{dy}{dx} = -xy^2$, যেখানে $y(2) = 1$, $n = 4$। বের করুন $y(2.2)$ **(Find the value of $\frac{dy}{dx} = -xy^2$ using EULER's Method. Where $y(2) = 1$, $n=4$. Find $y(2.2)$)**

উত্তরঃ $y(2.2) = 0.68692$

প্রশ্ন ৬. **Runge-Kutta Second Order এবং Forth Order Method বর্ণনা কর ?। (Explain the Runge-Kutta Second Order and Forth Order Method)**

উত্তরঃ Runge-Kutta Second Order :

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Where,

$k_1 = hf(x_i, y_i)$, $\quad k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$.

Runge-Kutta Forth Order :

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4)$. Where,

$k_1 = hf(x_i, y_i)$, $\quad k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$, $\quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$

$x_{i+1} = x_i + h$.

প্রশ্ন ৭. **Runge-Kutta Second Order Method ব্যবহার করে সমাধান করুনঃ $\frac{dy}{dx} = x + y^2$, $y(0) = 1$, Find $y(0.2)$ (Find the value of $\frac{dy}{dx} = x + y^2$ using Runge-Kutta Second Order Method. Where $y(0)=1$. Find $y(0.2)$)** [NTRCA-2012]

উত্তরঃ দেওয়া আছে, $y(0) = 1$, যেখানে $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

ধরি, $h = 0.1$.

Runge-Kutta Second Order Method হতে পাই,

$f(x, y) = x + y^2$

$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1*(0+1^2) = 0.1$

$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.1*((0+0.1)+(1+0.1)^2)$

$= 0.131$ [We Replace $x_0 = x_0 + h$, $y_0 = y_0 + k_1$].

$\therefore y_1$ or $y(0.1) = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}$ $(0.1+0.131) = 1.1155$

$\therefore y_1 = 1.1155$

$\therefore x_1 = x_0 + h = 0+0.1 = 0.1$

$k_1 = hf(x_1, y_1) = 0.1*(0.1+(1.1155)^2) = 0.1344$

$k_2 = hf(x_1 + h, y_1 + k_1)$

$= 0.1*((0.1+0.1)+(1.1155+0.1344)^2)$

$= 0.1762$

$\therefore y_2$ or $y(0.2) = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1.1155 + \frac{1}{2}$ $(0.1344+0.1762)$

$= 1.2708$ (Answer).

প্রশ্ন ৮. **Runge-Kutta Second Order Method ব্যবহার করে সমাধান করুনঃ $\frac{dy}{dx} = y - x$, $y(0) = 2$, Find $y(0.1)$ এবং $y(0.2)$. (Find the value of $\frac{dy}{dx} = y - x$ using Runge-Kutta Second Order Method. Where $y(0)=2$. Find $y(0.1)$)**

উত্তরঃ $y(0.1) = 2.205$ এবং $y(0.2) = 2.421025$

প্রশ্ন ৯. **Runge-Kutta Forth Order Method ব্যবহার করে সমাধান করুনঃ $\frac{dy}{dx} = xy$, $y(1) = 2$, $h = 0.2$, Find $y(1.2)$. (Find the value of $\frac{dy}{dx} = xy$ using Runge-Kutta Forth Order Method. Where $y(1)=2$, $h = 0.2$. Find $y(1.2)$)**

উত্তরঃ দেওয়া আছে, $y(1) = 2$, যেখানে $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $h = 0.2$

$\therefore f(x,y) = xy$.

Runge-Kutta Forth Order Method হতে পাই,

$K_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2*(1*2) = 0.4$ [$x_0 = 1$, $y_0 = 2$]

$K_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$

$= 0.2*[(1 + \frac{0.2}{2})*(2 + \frac{0.4}{2})] = 0.484$ [$x_0 = x_0 + \frac{h}{2}$, $y_0 = y_0 + \frac{k_1}{2}$]

$K_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$

$= 0.2*[(1 + \frac{0.2}{2})*(2 + \frac{0.484}{2})] = 0.49324$

$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$

$= 0.2*[(1+0.2)*(2+0.49324)] = 0.59837$

$y(1.2) = y(1) + \frac{1}{6}(K_1 + 2*K_2 + 2*K_3 + K_4)$

$y(1.2) = 2 + \frac{1}{6}($ $0.4+2*0.484+2*0.49324+0.59837)$

$= 0.49214$ (Ans.)

প্রশ্ন ১০. **Runge-Kutta Forth Order Method ব্যবহার করে সমাধান করুনঃ $\frac{dy}{dx} = y^2 + xy$, $y(1) = 1$, $h = 0.1$, Find $y(1.1)$. (Find the value of $\frac{dy}{dx} = y^2 + xy$ using Runge-Kutta Forth Order Method. Where $y(1) = 1$, $h = 0.1$. Find $y(1.1)$)**

উত্তরঃ 1.2415 (Ans.)

প্রশ্ন ১১. **Polynomials ফাংশন বলতে কি বোঝেন? (What do you understand Polynomials Function?)**[NTRCA-2011]

উত্তরঃ যে ফাংশনের এর সর্বোচ্চ ঘাত চার বা চারের বেশি তাকে পলিনোমিয়াল ফাংশন বা বহুপদী ফাংশন বলে।বস্তুত, একের অধিক পদবিশিষ্ট ফাংশনকেই পলিনোমিয়াল বা বহুপদ ফাংশন বলে।এক্ষেত্রে দ্বিঘাত, ত্রিঘাত ফাংশনও পলিনোমিয়াল ফাংশনের অন্তর্ভূক্ত। যেমনঃ $f(x) = x^5 + 4x^2 + 4$, ফাংশনের সর্বোচ্চ ঘাত হলো ৫। তাই এটি হলো ৫ ক্রমের পলিনোমিয়াল ফাংশন।

প্রশ্ন ১২. **Binomial Theorem এর বর্ণনা দিন ? (Describe the Binomial Theorem)** [NTRCA-2012]

উত্তরঃ Binomial Theorem বা দ্বিপদী উপপাদ্য হলো একটি বীজগাণিতীয় সূত্র যার সাহায্যে একটি দ্বিপদ রাশির কোন শক্তি বা মূলকে একটি ধারায় প্রকাশ করা যায়।

Binomial Theorem এর বৈশিষ্ট্যঃ

i. ঘাত n হলে পদসংখ্যা হবে n+1.

ii. a এর ঘাত উর্ধ্বমূখী হলে b এর ঘাত হবে নিম্নমূখী এবং a এর ঘাত নিম্নমূখী হলে b এর ঘাত হবে উর্ধ্বমূখী।

iii. সহগের মান বাড়তে বাড়তে একটি নির্দিষ্ট নাম্বারে পৌঁছানোর পর একই Pattern Maintain করে কমতে থাকে।

উদাহরণঃ $(a+b)^n = {}^nc_0\, a^n b^0 + {}^nc_1\, a^{n-1} b^1 + {}^nc_2\, a^{n-2} b^2 + {}^nc_3\, a^{n-3} b^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^nc_n\, a^0 b^n$.