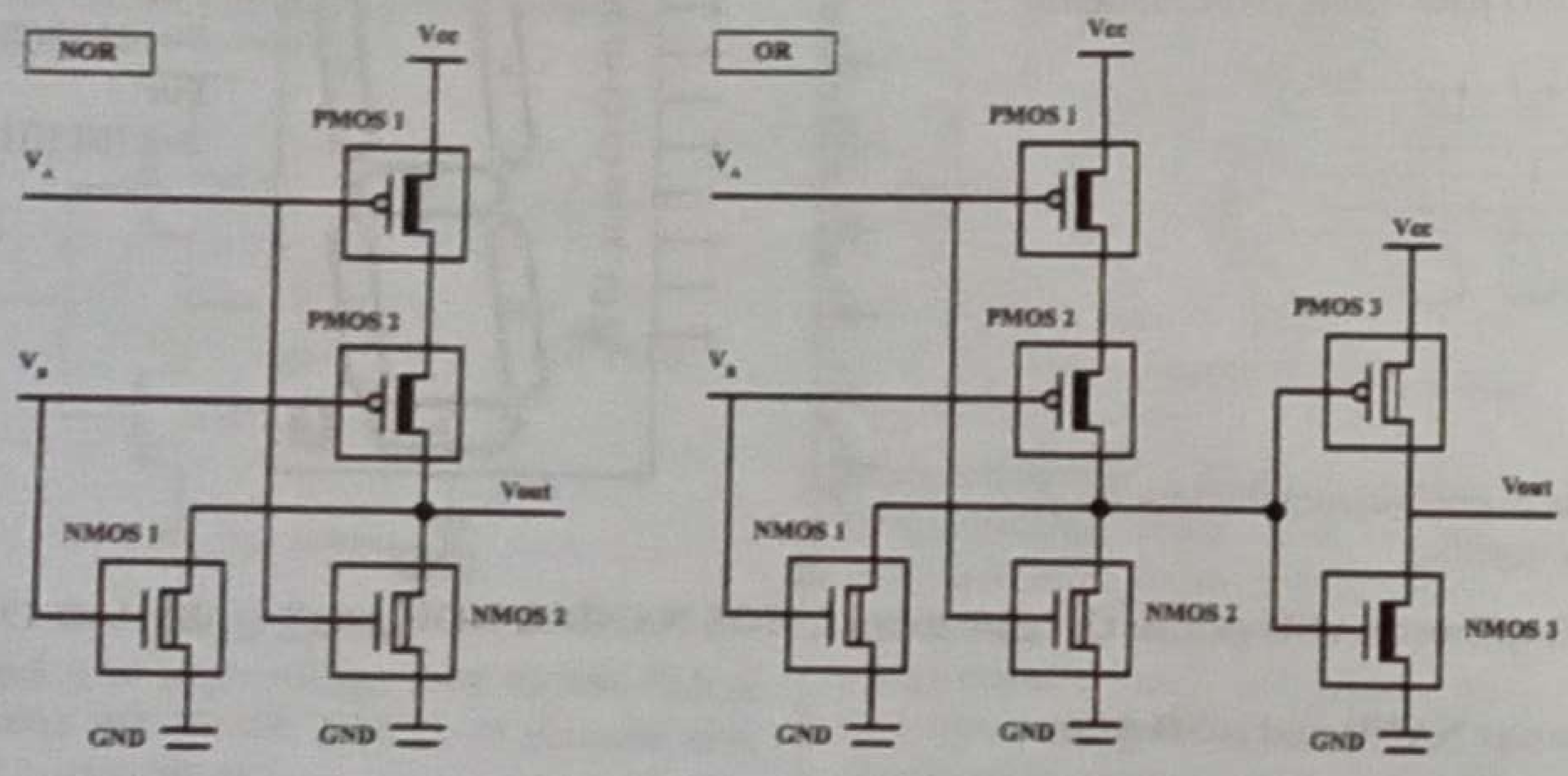
The two-input NAND2 gate shown on the left is built from four transistors. The series-connection of the two n-channel transistors between GND and the gate-output ensures that the gate-output is only driven low (logical 0) when both gate inputs A or B are high (logical 1). The complementary parallel connection of the two transistors between VCC and gate-output means that the gate-output is driven high (logical 1) when one or both gate inputs are low (logical 0). The net result is the logical NAND function:

NAND		
A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

AND		
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

As shown on the right, the corresponding AND gate is constructed from the NAND followed by a standard static inverter.

b) CMOS two-input NOR and OR gates:



Circuit Description: This applet demonstrates the static two-input NOR and OR gates in CMOS technology. Click the input switches or type the ('a','b') and ('c','d') bindkeys to control the two gates.

The two-input NOR2 gate shown on the left is built from four transistors. The parallel connection of the two n-channel transistors between GND and the gate-output ensures that the gate-output is driven low (logical 0) when either gate input A or B is high (logical 1). The complementary series-connection of the two transistors between VCC and gate-output means that the gate-output is driven high (logical 1) when both gate inputs are low (logical 0). The net result is the logical NOR function:

NOR		
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

OR		
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

As shown on the right, the corresponding OR gate is constructed from the NOR2 followed by a standard static inverter.

Discrete Mathematics

[**Syllabus: BPSC CS:** Propositional and predicate calculus: Basic concept. Theory of sets: set operations, algebra of sets. Mathematical induction. Basic concept of relations and its representation. Functions and its classification and pictorial representation. Graph theory and its application. Elementary number system. Principles of counting. Reversion, generating functions, recurrence relation.

NTRCA CS: Set Theory, Relations, Functions, Graph Theory, Algebraic Systems, group theory, homomorphism, Mathematical reasoning, Theories with induction. Recurrence functions.]

Basic Theory

প্রশ্ন ১. Discrete Mathematics কি? What is Discrete Mathematics)

Ans: Discrete বলতে কোন অবজেক্ট বা বিষয় বস্তুকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্তকরণ বা বিভাজন প্রক্রিয়াকে বুঝায়। Discrete mathematics হল কোন সমস্যাকে কয়েকটি ছোট ছোট অংশে ভাগ করে, গাণিতিক ভাবে সমাধান করার পদ্ধতি বা কৌশল।

Example: একজন ছাত্র যখন ঘন্টায় 25 কি. মি বেগে একটি মোটর সাইকেল চালায়, প্রতি কিলোমিটারে পেট্রোল খরচ হয় 8.00 টাকা; যখন সে ঘন্টায় 40 কি. মি বেগে চালায়, তখন প্রতি কি. মি এ পেট্রোল খরচ হয় 10 টাকা। পেট্রোল কেনার জন্য তার নিকট 200 টাকা আছে। স্বাভাবিক ভাবে ছাত্রটি এক ঘন্টায় 200.00 টাকা খরচ করে সর্বাধিক দূরত্ব যেতে চাইবে। এর সমাধান Discrete Mathematics দ্বারা অতি সহজেই সমাধান করা যায়।

প্রশ্ন ২. Discrete Mathematics এর বিষয় বস্তু বা আলোচ্য বস্তু বা আলোচ্য বিষয়গুলো কি কি? (What are the topics of Discrete Mathematics?)

Ans: Discrete mathematics এর বিষয় বস্তু বা আলোচ্য বিষয়গুলো হলো-

(i) Set theory
(ii) Relation
(iii) Function and algorithm
(iv) Logic and propositional calculus
(v) Vector and Matrix
(vi) Counting
(vii) Probability theory
(ix) Graph theory
(x) Trees
(xi) Boolean algebra

প্রশ্ন ৩. Discrete Mathematics এর প্রয়োগ ক্ষেত্রগুলো লিখ? (Write the Application fields of Discrete Mathematics?)

Ans: প্রয়োগক্ষেত্রগুলি নিম্নরূপঃ-

1.একটি Computer System এ কি কি উপায়ে ভ্যালিড পাসওয়ার্ড (Valid Password) বাছাই করা যায়।
2.একটি লটারী জেতার সম্ভাব্যতা কতটুকু।
3.একটি নেটওয়ার্কে দুটি Computer এর মধ্যে কোন যোগসূত্র আছে কিনা।
4.যোগাযোগের ক্ষেত্রে দুটি শহরের মধ্যে সংক্ষিপ্ত পথ কোনটি।
5.কিভাবে পূর্ণ সংখ্যার তালিকা বর্ধিত ক্রমে সাজানো যায়।
6.সাজানোর ক্ষেত্রে কতগুলো পর্যায় দরকার।
7.দুটি পূর্ণ সংখ্যার সংযোগে কিভাবে একটি সার্কিট প্রণয়ন করা যায়?
8.কতগুলো ভ্যালিড ইন্টারনেট Address রয়েছে।

FUNCTION

প্রশ্ন ১. ফাংশন কী ? ফাংশন কত প্রকার ও কি কি ? আলোচনা করুন।(What is Function? Describe How many types of functions and what are they.) [NTRCA-2015]

উত্তরঃ ফাংশনঃ একটি অন্বয় যদি এরূপ হয় যে **A** সেটের প্রত্যেক উপাদান **B** সেটের অন্যান্য উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট থাকে, তাহলে ঐ অন্বয়কে **A** সেট থেকে **B** সেটের একটি ফাংশন বলা হয়। মনে করি **A** এবং **B** যে কোন দুটি সেট। **A** থেকে **B** সেটে ফাংশন f হচ্ছে AxB এর এমন একটি উপসেট যেন

i. প্রতিটি $a\in A$ এর জন্য একটি উপাদান $b\in B$ থাকে যেখানে $(a,b)\in f$ এবং
ii. যদি $(a,b)\in f$ হয় এবং $(a,b')\in f$ হয় তবে অবশ্যই $b=b'$ হবে।
iii. A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন হলে আমরা লিখি $f: A\rightarrow B$.

ফাংশন বিভিন্ন প্রকার। যথাঃ

i. One-to-One (Injective) Function
ii. Onto (Surjective) Function
iii. Bijective (One-to-One & Onto) Function
iv. Composite Function
v. Inverse Function

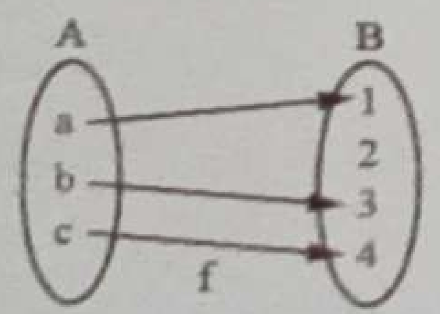
■ **ফাংশনের ডোমেন , কো-ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of Function)**

ডোমেনঃ A সেট থেকে B সেটে f যদি একটি ফাংশন হয় তবে A সেটটিকে f ফাংশনের ডোমেন বলা হবে।

কো-ডোমেনঃ A সেট থেকে B সেটে f যদি একটি ফাংশন হয় তবে B সেটটিকে f ফাংশনের কো-ডোমেন বলা হবে।

রেঞ্জঃ B সেটের যে সমস্ত উপাদান সকল $a\in A$- এর প্রতিচ্ছবি রূপে পাওয়া যায় ঐ উপাদানগুলোই f এর রেঞ্জ। সুতরাং, রেঞ্জ $f\subset B$।

উদাহরণঃ নিচের f এর ডোমেন, কো-ডোমেন এবং রেঞ্জ বের করুন।
Let $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$
$f=\{(a,1),(b,3),(c,4)\}$

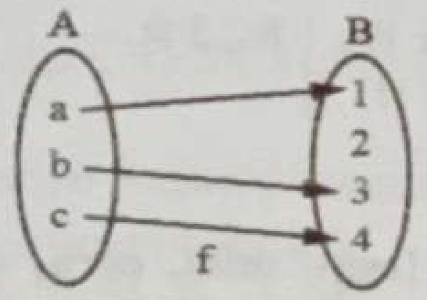


Domain: $\{a,b,c\}$, Range: $\{1,3,4\}$
Co-domain: $\{1,2,3,4\}$

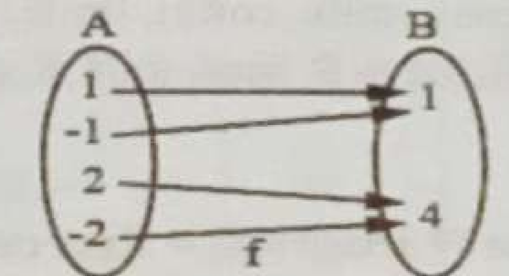
■ **এক-এক ফাংশন এবং সার্বিক বা অনটু ফাংশন (One-One Function and onto function):** এবার আমরা এক এক ফাংশন (One to one function) এবং অনটু ফাংশন (Onto function) নিয়ে আলোচনা করব।

■ **এক-এক ফাংশন (One-to-One Function):** কোন ফাংশন $f: A\rightarrow B$ কে এক - এক ফাংশন বলা হবে যদি ডোমেন A এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ভিন্ন ভিন্ন (distinct) ইমেজ বিদ্যমান থাকে।

নিম্নের A সেট এবং B সেটে লক্ষ করি ঃ

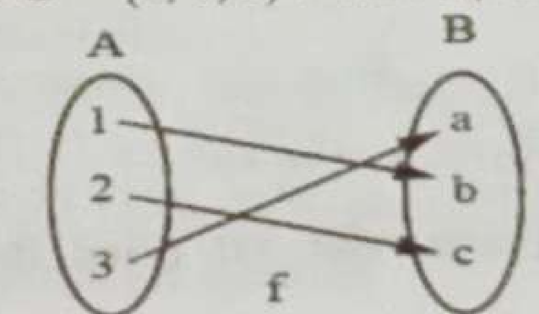


এখানে f একটি এক-এক ফাংশন, কারণ A সেটের একটি উপাদান a এর ইমেজ 1। এখানে a উপাদানের কেবলমাত্র একটি ইমেজ। ঠিক একইভাবে b এবং c এরও একটি করে ইমেজ। একারণে ফাংশন f একটি এক-এক ফাংশন। ধরা যাক ফাংশন $f(x) = x^2$। এখানে যদি আমরা $x = 1$ বসাই, তবে $f(1) =1$ পাই। অনুরূপভাবে আরো মান বসিয়ে আমরা নিচের A এবং B সেট পাই

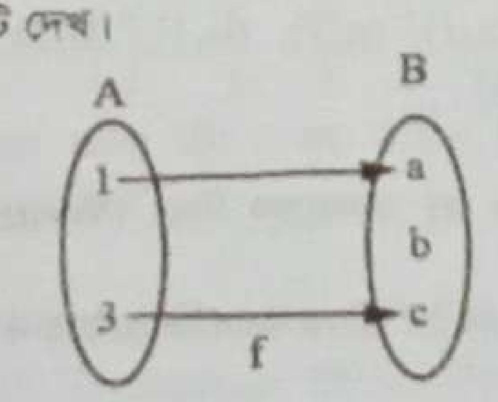


উপরে বর্ণিত চিত্রটি লক্ষ্য করি, এখানে A একটি সেট এবং B একটি সেট। A সেটের উপাদান 1 এর ইমেজ হলো 1 আবার -1 এর ইমেজ হলো 1। অর্থাৎ A সেটের দু'টি উপাদানের একই ইমেজ। অতএব এখানে ফাংশন f এক-এক (One to One) ফাংশন নয়।

■ **সার্বিক বা অনটু ফাংশন (Onto Function) :** ধরা যাক একটি সেট A এবং অন্য সেট B। ফাংশন $f: A\rightarrow B$ অনটু ফাংশন হবে, যদি B সেটের প্রত্যেকটি উপাদান, A সেটের কোন না কোন উপাদানের ইমেজ হয়। ধরা যাক একটি সেট $A = \{1, 2, 3\}$ এবং আরো একটি সেট $B = \{a, b, c)$। এবার নিম্নের চিত্রটি দেখ-



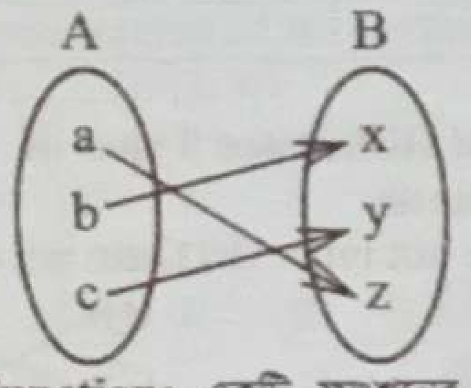
উপরে বর্ণিত চিত্রটি লক্ষ্য কর। এখানে A একটি সেট এবং B একটি সেট। B সেটের 3টি উপাদান। B সেটের প্রত্যেকটি উপাদান A সেটের কোন না কোন উপাদানের ইমেজ। সে কারণে f একটি অনটু (Onto) ফাংশন। এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, f ফাংশনটি একদিকে অনটু ফাংশন, আবার অন্যদিকে এক-এক (One to One) ফাংশন। ধরা যাক একটি সেট $A=\{1, 2\}$ এবং সেট $B=\{a, b, c)$ এবার নিম্নের চিত্রটি দেখ।



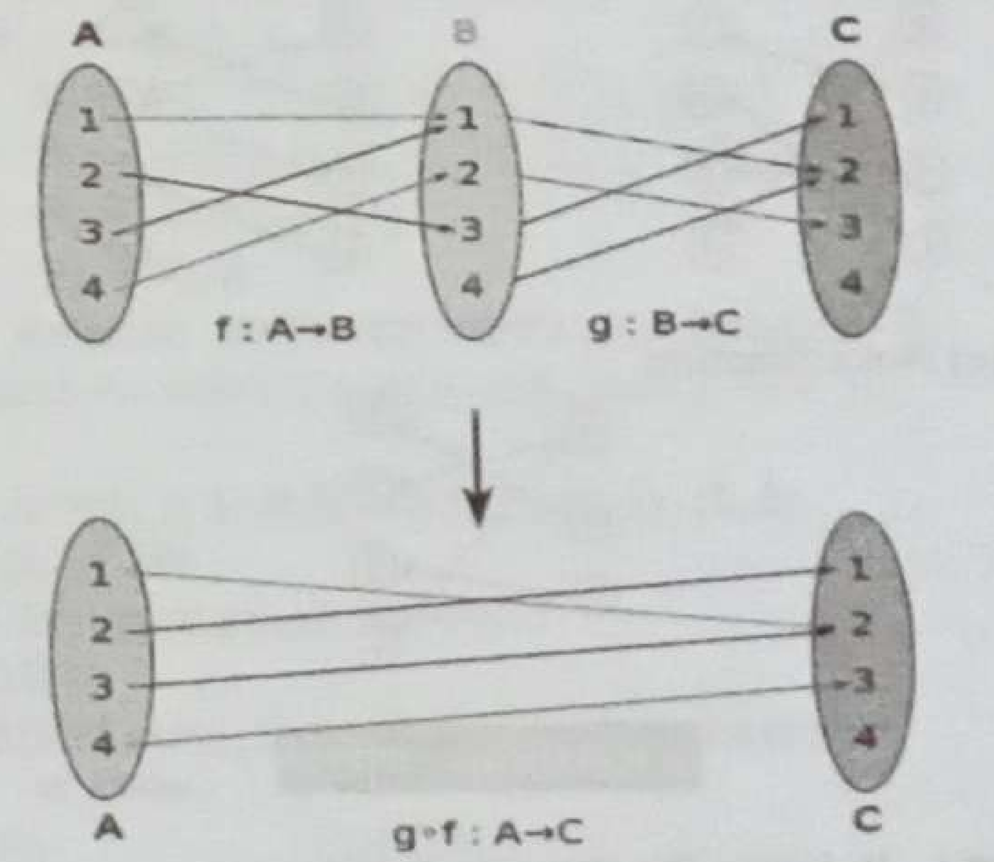
উপরে বর্ণিত চিত্রে A একটি সেট এবং B আরো একটি সেট। B সেটের একটি উপাদান b, A সেটের কোন উপাদানের ইমেজ নয়। সে কারণে f অনটু ফাংশন (Onto function) নয়। এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, এখানে f ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

Forma-25/B

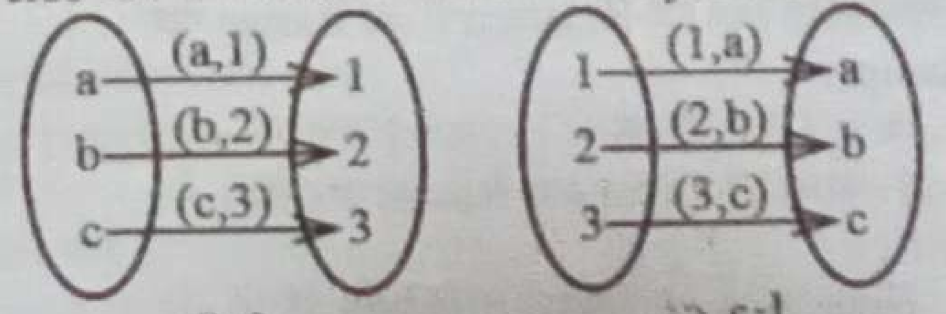
Bijective/One-to-One and Onto Correspondent: একটি ফাংশন $f: A\rightarrow B$ Bijective or One-to-One Correspondent হবে যদি এবং কেবল যদি f One-to-One এবং Onto উভয়ই হয়।
উদাহরণঃ



Composite Function: একটি ফাংশনের রেঞ্জ অপর একটি ফাংশনের সাথে ডোমেন হিসাবে সংযোজিত হয়ে যে নতুন ফাংশনের সৃষ্টি হয় তাকে সংযোজিত ফাংশন (Composite function) বলা হয়। ধরি, $f: A\rightarrow B$ এবং $g: B\rightarrow C$ একটি ফাংশন। f এবং g এর Composite function কে $g^\circ f$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $g^\circ f: A\rightarrow C$, $(g^\circ f)(a) = g(f(a))$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।
উদাহরণঃ



Inverse Function: একটি Inverse ফাংশন কে $f^{-1}(x)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়, ইহাকে $f(x)$ এর Inverse হিসাবে সংজ্ঞায়িত করা যদি ইহা ধারাবাহিকভাবে $f(x)$ এর বিপরীত প্রক্রিয়া হয়। সুতরাং যদি $f(x)$, a থেকে b তে পরিণত হয় তখন $f^{-1}(x)$ অবশ্যই b থেকে a তে পরিণত হবে। আরো সংক্ষেপে বলতে গেলে $f(x)$ এর Inverse ফাংশন হলো $f^{-1}(x)$ যদি $f(f^{-1}(x)) = x$ হয়। একটি ফাংশন Inverse হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি ইহা Bijective হয়।



i) f　　ii) f^{-1}

উদাহরণঃ ধরি, f কে সেটের মান হিসাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় যা নিচে দেখানো হলো।

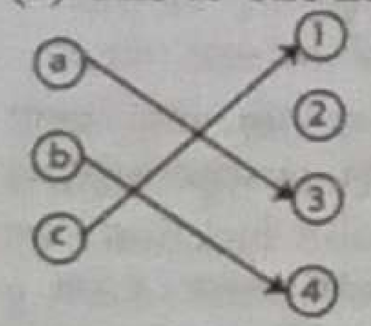
x-values	–2	0	4	7
y-values	0	4	–5	10

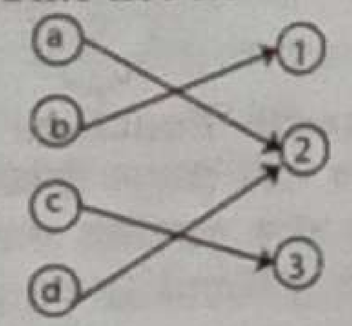
ধরি, f^{-1} কে সেটের মান হিসাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় যা নিচে দেখানো হলো।

x-values	0	4	–5	10
y-values	–2	0	4	7

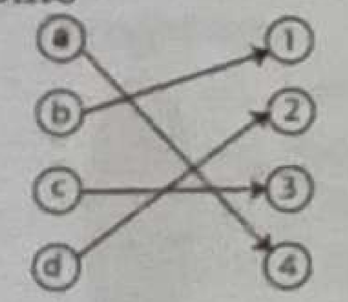
■ **Example of Difference Types of Correspondences:**

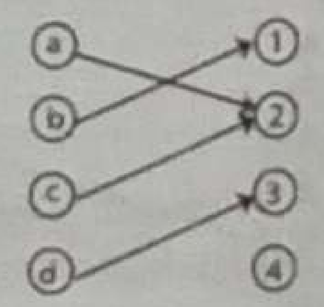
(a) One-to-one not onto (b) Onto not one-to-one



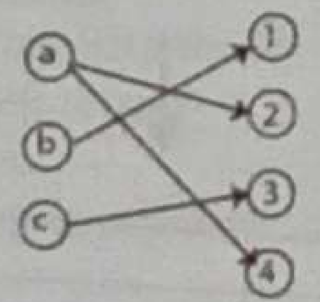


(c) One-to-one and onto (d) Neither one-to-one nor onto





(e) Not a function



Relations (অন্বয়)

প্রশ্ন 1. Relation কি? (What is Relation)

Ans: A ও B দুটি সেট হলে গুণ্য সেট A×B এর কোন অশূন্য উপসেটকে A থেকে B তে একটি Relation বলে।

প্রশ্ন 2. Domain এবং Range কি? (What is Domain and Range of Relation).

Ans: F set এর অন্তর্ভূক্ত ক্রমগুলোর প্রথম উপাদানসমূহের set কে Relation F এর Domain বলে। F set এ অন্তর্ভূক্ত ক্রমগুলোর ২য় উপাদানসমূহের Set কে Relation F এর Range বলে।

Example:

Let, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x, y, z\}$ এবং $R = \{(1,y), (1,z), (3,y)\}$. এদের Domain এবং Range বের কর।

Sol^n:

Here, $A = \{1,2,3\}$

$B = \{x, y, z\}$

$R = \{(1, y), (1,z), (3,y)\}$

$R = A \times B$ এর উপসেট

আমরা লিখতে পারি $1\,R_x$, $1\,R_z$, $3\,R_y$

R এর Domain $= \{1, 3\}$

Range $= \{y, z\}$

প্রশ্ন ৩. যদি A = {eggs, milk, corn} এবং B ={Cows, goats, hens} হয় তবে A ও B এর মধ্যে Relation নির্ণয় কর।(If A={eggs, milk, corn} and B={Cows, goats, hens} then find the relation between A and B.)

Sol^n:

A = {eggs, milk, corn}

B = {Cows, goats, hens}

R = {(eggs, hens), (milk, cows), (milk, goats)}

Relation অনুযায়ী, Eggs R hens, milk R cows, Milk R goats

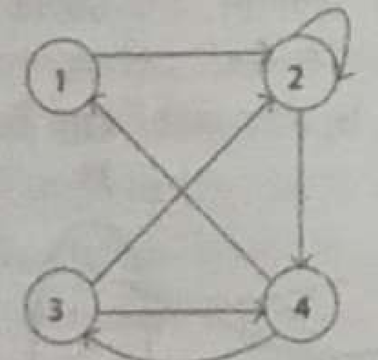
প্রশ্ন 4. Relation কে Diagraph এ Representation কর। (Represent the relation in the diagraph)

Ans: ধরি, A একটি সসীম সেট। A সেট হতে A সেটে Relation R কে ছবির মাধ্যমে উপস্থাপন করাকে Diagraph বলে। এই Diagram কে Relation এর Directed graph বলা হয়।

Let,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

And $R = \{(1,2), (2,2), (2,4), (3, 2), (3,4), (4, 1), (4,3)\}$



প্রশ্ন ৫. কার্তেসীর গুণজ বাহির কর? (Find the Cartesian Product)

(i) Let,

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

Sol^n: $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

(ii) Let,

$A = \{a, b, c\}$ and $B = \{1, 2, 3\}$ হলে $A \times B = ?$

Sol^n: $\{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2), (c,3)\}$

প্রশ্ন 6. Relation এর প্রকারভেদ লিখ? (Write the types of Relation?)

Ans: Relation এর বৈশিষ্ট্যের উপর ভিত্তি করে 4 প্রকার।

Sol^n:

(i)Reflexive Relation: কোন Set A এর Relation R কে Reflexive বলা হবে যদি $(a, a) \in R$ হয় যখন a হলো A এর element অর্থাৎ $(a \in A)$

Let,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

This is a Reflexive Relation because (1, 1), (2, 2), (3, 3) and $(4, 4) \in R_1$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (1, 2)\}$

R_2 is not reflexive because (2,2) and $(4,4) \notin R_2$

■ **Determine Reflexive Relation by matrix Representation.**

Let,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$

$$MR = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal element গুলো যদি 1 হয় তাহলে Relation টি Reflexive Relation.

(ii) Symmetric relation: একটি Set A এর Relation R কে Symmetric Relation বলা হবে যদি $(a,b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$ হয়।

Let,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

এটি Symmetric না কারণ $(1, 2) \in R_1$ কিন্তু $(2, 1) \notin R_1$ নয়।

$R_2 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

R_2 is a Symmetric Relation.

■ **Matrix Representation of Symmetric Relation:**

"For R_2 Relation"

$$MR_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

"Diagonal element গুলো যদি 0 হয় তাহলে Relation টি Symmetric Relation হবে"

(iii) Anti- Symmetric Relation: কোন Set A এর Relation R কে Anti Symmetric বলা হবে যদি $[(a, b) \in R$ এবং $(b, a) \in R] \rightarrow a = b$ হয় যেখানে $a, b \in A$

let, $A = \{3,5,9\}$

$R_1 = \{(3,5)\}$

$R_2 = \{(3,3), (5,5), (9,9)\}$

$R_3 = \{(3,5), (5,3), (5,5)\}$

$R = \{(1,3), (3,1), (2,3)\}$

$R' = \{(1,1), (2,2)\}$

R, R_1 Not Anti-Symmetric

R_2, R_3, R Symmetric and Anti-symmetric

প্রশ্ন 7. Matrix representation of Anti-Symmetric:

Let, $R = \{(1,2), (2,2), (3,3)\}$

$$MR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

যদি $m_{ij} = 1 \rightarrow m_{ji} = 0$ হয় যেখানে $i \neq j$ তাহলে উক্ত Relation কে anti-symmetric Relation বলে।

(iv) Transitive Relation: কোন Set A এর Relation R কে transitive বলা হবে যদি $[(a,b) \in R$ and $(b,c) \in R] \rightarrow (a, c) \in R$ for all $a,b,c \in A$

ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1, 1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$R_3 = \{(1,3), (2,1)\}$

$R_5 = A \times A$

উপরের Relation গুলোর মধ্যে শুধুমাত্র R_3 Relation টি Transitive না। কারণ $(2,1), (1,3) \in R_3$ but $(2, 3) \notin R_3$

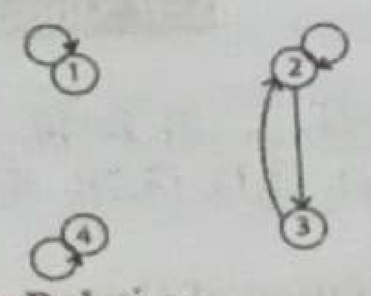
প্রশ্ন ৮. A ={1, 2, 3, 4} R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3,2), (4,4)} হলে ,

(i) Directed graph অংকন কর ?

(ii) R কি ?

(iii)Reflexive, Symmetric, Anti-symmetric কি না দেখাও।

Sol^n: (i)



(ii) R হল A set এর Relation

(iii) R Reflexive নয় কারণ $(3, 3) \notin R$ but R symmetric and anti-symmetric

■ **Combining Relation:**

ধরি, A ও B দুটি Set হয় তাহলে A to B Subset হলো A ও B এর গুনজ Set। এই Subset এর Relation কে Combining Relation বলে।

Let, $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{u, v\}$

$R_1 = \{(1, u), (2, u), (2, v), (3, v)\}$

$R_2 = \{(1, v), (3, u), (3, v)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(1, u), (1, v), (2, u), (2, v), (3, u), (3, v)\}$
$R_1 \cap R_2 = \{(3, v)\}$
$R_1 - R_2 = \{(1, u), (2, u), (2, v)\}$
$R_2 - R_1 = \{(1, v), (3, u)\}$

প্রশ্ন ৯. Let A = {1, 2, 3} AND B = { 1, 2, 3, 4}. The relation R_1 = {(1,1), (2,2), (3,3)} and R_2 = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)} can be combined to obtain.
(i) $R_1 \cup R_2$ (ii) $R_1 \cap R_2$ (iii) $R_1 - R_2$ (iv) $R_2 - R_1$
Soln:
(i) $R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3)\}$
(ii) $R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$
(iii) $R_1 - R_2 = \{(2,2), (3,3)\}$
(iv) $R_2 - R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$

■ **Composite Relation:** ধরি, A, B, C 3টি Set। R হল A থেকে B এর Relation এবং S হলো B থেকে C এর Relation। R ও S Relation কে একত্রে Composite Relation বলে। একে R_oS এভাবে লিখা হয়। $R_oS\{(a,c): a \in A, b \in B, c \in C, (a,b) \in R$ এবং $(b,c) \in S\}$
প্রশ্ন ১০.

R	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	0	1
4	1	0	1	1

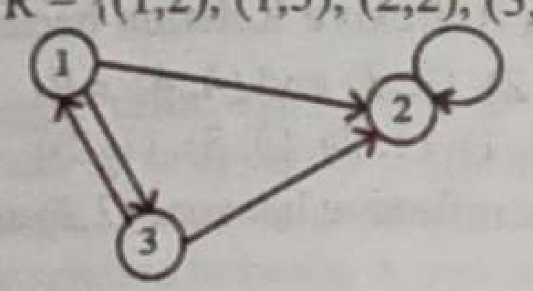
$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}\ c = \{x, y, z\}$
$R = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$
$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$
$S_oR = \{(2, z), (2, x), (3, y), (4, z)\}$

Self Study

প্রশ্ন ১. Let A={1, 2, 3} B={0, 1, 2} and C={a, b} R={(1,0), (1,2), (3,1), (3,2)} S={(0,b), (1,a), (2,b)} হলে S_oR=?

■ **Implementation of Composite:**
ধরি, R হলো একটি Relation Set A এর Power R^n যেখানে n = 1, 2, 3 ----------
$R^1 = R$ and $R^{n+1} = R^n{}_oR$
let,
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,3)\}$
$R^1 = R$
$R^2 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (3,3)\} = R^1{}_oR$
$R^3 = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$
$R^4 = \{(1, 3), (2,3), (3,3)\}$

■ **Directed graphs of relation on Sets:**
Let , A = {1, 2, 3}
R = {(1,2), (1,3), (2,2), (3,1), (3, 2)}



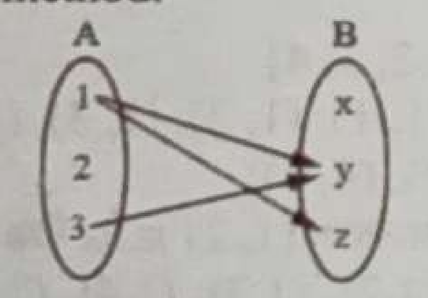
প্রশ্ন ২.সসীম সেটের Relation উপস্থাপন করার পদ্ধতি কত প্রকার ও কি কি?
(i) Array method
(ii) Arrow method

Example: Let , A = {1, 2, 3}
B = { x, y, z }
R = {(1, y), (1, z), (3, y)}

(i) Array method:

	x	y	z
1	o	1	1
2	o	o	o
3	o	1	o

(ii) Arrow method:



■ **Inverse Relation:** F যদি A থেকে B Set এর কোন Relation হয় তবে F এর বিপরীত Inverse Relation হচ্ছে B থেকে A Set এর একটি Relation. F^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
Let ,
$F = \{(1,a), (1,b), (3,a)\}$
$F^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)$

Theory of SET ন

প্রশ্ন ১. সেট কাকে বলে ? (What is called Set?)[Food Ministry (SAE)-2021]
উত্তরঃ বাস্তব বা চিন্তা জগতের সু-সংজ্ঞায়িত বস্তুর সমাবেশ বা সংগ্রহকে সেট বলে। যেমন বাংলা, ইংরেজী ও গণিত বিষয়ে তিনটি পাঠ্যবইয়ের সেট। প্রথম দশটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, পূর্ণসংখ্যার সেট, বাস্তব সংখ্যার সেট ইত্যাদি। সেটকে সাধারণত ইংরেজী বর্ণমালার বড় হাতের অক্ষর A,B,C..........X,Y,Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন 2,4,6 সংখ্যা তিনটির সেট A={2,4,6}। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৪-১৯১৮) সেট সম্পর্কে প্রথম ধারণা ব্যাখ্যা করেন। সেটকে দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। যথাঃ (১) তালিকা পদ্ধতি

(Roster Method বা Tabular Method) (২) সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method).
তালিকা পদ্ধতিঃ এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনী {} এর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদান থাকলে 'কমা' ব্যবহার করে উপাদানগুলোকে আলাদা করা হয়। যেমন A={a,b}, B={2,4,6}, C={রাকিব, জামাল, আরিফ} ইত্যাদি।
সেট গঠন পদ্ধতিঃ এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ না করে উপাদান নির্ধারণের জন্য সাধারণ ধর্মের উল্লেখ থাকে। যেমন A={x:x, স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা}, B={ x:x, নবম শ্রেণীর প্রথম পাঁচজন শিক্ষার্থী} ইত্যাদি। এখানে ':' দ্বারা 'এরূপ' বা সংক্ষেপে 'যেন' (such that) বোঝায়। এ পদ্ধতিকে Rule Method ও বলা হয়।

প্রশ্ন ২. A={x:x, 28 এর গুণনীয়ক}সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর|(A={x:x, Multiplier of 28}, Express the set in the Tabular method)
উত্তরঃ এখানে, 28=1×28
=2×14
=4×7
∴ 28 এর গুণনীয়কসমূহ 1,2,4,7,14,28.
নির্ণেয় সেট A={1,2,4,7,14,28}.

প্রশ্ন ৩. A={7,14,21,28}সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।(A={7,14,21,28}}, Express the set in the Set builder method)
উত্তরঃ A সেটের উপাদানসমূহ 7,14,21,28. এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 7 দ্বারা বিভাজ্য, অর্থাৎ 7 এর গুণিতক এবং 28 এর বড় নয়।
∴ A={x:x, 7 এর গুণিতক এবং x ≤ 28}

প্রশ্ন ৪. সসীম (Finite) সেট কাকে বলে ? (What is called Finite set?)
উত্তরঃ যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, তাকে সসীম সেট বলে। যেমন, B={x,y,z}, C={2,4,6.......50} ইত্যাদি সসীম সেট।

প্রশ্ন ৫. অসীম (Infinite) সেট কাকে বলে ? (What is called Infinite set?)
উত্তরঃ যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না, তাকে অসীম সেট বলে। যেমন, A={x:x, বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা }, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N={1,2,3,4,.........} ইত্যাদি অসীম সেট।

প্রশ্ন ৬. উপসেট (Subset) কাকে বলে ? (What is called Subset?)
উত্তরঃ কোনো সেটের উপাদান নিয়ে যতগুলো সেট গঠন করা যায় এদের প্রত্যেকটি সেটকে ঐ সেটের উপসেট বলা হয়। উপসেটকে ⊂ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন A={a,b} একটি সেট। A সেটের উপাদান থেকে {a},{b},{a,b} সেটগুলো গঠন করা যায়। আবার কোনো উপাদান না নিয়েও Ø সেট গঠন করা যায়। এখানে গঠিত {a},{b},{a,b}, Ø প্রত্যেকটি A সেটের উপসেট। যদি B সেট A এর উপসেট হয় তবে B⊂ A লেখা হয়।

প্রশ্ন ৭. প্রকৃত (Proper Subset) উপসেট কাকে বলে ? (What is called Proper Subset)[Food Ministry (SAE)-2021]
উত্তরঃ কোন সেট থেকে গঠিত উপসেটের মধ্যে যে উপসেট গুলোর উপাদান সংখ্যা প্রদত্ত সেটের উপাদান সংখ্যা অপেক্ষা কম এদের কে প্রকৃত উপসেট বলে। যেমন A={3,4,5} এবং B={3,5} দুইটি সেট। এখানে B এর সব উপাদান A সেটে বিদ্যমান। ∴ B⊂ A. আবার, B সেটের উপাদান সংখ্যা A সেটের উপাদান সংখ্যার চেয়ে কম। ∴ A এর একটি প্রকৃত উপসেট হল B এবং B⊊ A লিখে প্রকাশ করা হয়।

প্রশ্ন ৮. সেটের সমতা (Equvalent Set) কাকে বলে ? (What is called equvalent set?)
উত্তরঃ দুই বা ততোধিক সেটের উপাদান একই হলে এদেরকে সেটের সমতা বলা হয়। যেমন A={3,5,7} এবং B={5,3,7} দুইটি সমান সেট এবং এদেরকে A=B চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়।

প্রশ্ন ৯. সেটের অন্তর (Difference of Set) কাকে বলে ? (What is called set difference?)
উত্তরঃ কোনো সেট থেকে অন্য একটি সেট বাদ দিলে যে সেট গঠিত হয় তাকে অন্তর সেট বা বাদ সেট বলে। মনে করি, A={1,2,3,4,5} এবং B={2,4} দুইটি সেট। সেট A থেকে সেট B এর উপাদান গুলো বাদ দিয়ে লেখা যায় A–B বা A\B ={1,2,3,4,5}–{2,4}={1,3,5}.

প্রশ্ন ১০. পূরক সেট (Complement of a Set) কাকে বলে ? (What is Complement set?)
উত্তরঃ সার্বিক সেট U এর উপসেট A হলে, A সেটের সদস্য ব্যতীত U সেটের অন্যান্য সদস্যদের নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলা হয় এবং একে A^c বা A' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করি, U={1,2,3,4,5,6} এবং A={2,4,6} তাহলে A^c = U \ A={1,2,3,4,5,6}\{2,4,6}={1,3,5}.

প্রশ্ন ১১. Partially Ordered Set (POSET) কাকে বলে? উদাহরণ দাও। (What is Partially ordered set?)
উত্তরঃ একটি আংশিক অর্ডার সেট বাইনারি সম্পর্কযুক্ত একটি সেট ধারণ করে যেটি reflexive, antisymmetric এবং transitive বৈশিষ্ট যুক্ত।
উদাহরণঃ
1. বাইনারি অপারেশনের অধীনে ছোট বা সমান একটি Real সংখ্যার সেট হলো একটি POSET.
ধরি, একটি সেট S={1,2,3} এবং তাদের অপারেশন হবে <=
তাদের রিলেশন হবে {(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,3)}
এই রিলেশন R এর Reflexive {(1,1),(2,2),(3,3)}∈R হবে।
এই রিলেশন R এর anti-symmetric {(1,2), (1,3), (2,3)} ∈ R Ges {(1,2), (1,3), (2,3)} ∉ R হবে। এই রিলেশন R এর transitive {(1,2),(2,3),(1,3)}∈R হবে।

∴ ইহা একটি Partially Ordered Set (POSET). Reachability অপারেশনের অধীন directed acyclic graph এর ভার্টেক্স সেট হলো Partially Ordered Set (POSET).

প্রশ্ন ১২. যদি $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, f, h\}$, $C=\{c, d, e, f\}$ হলে, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $B\cap B$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(If $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, f, h\}$, $C=\{c, d, e, f\}$, then find the $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $B\cap B$ and show that, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$)

Sol^n:

$A\cap B = \{b, d\}$, $A\cap C = \{c, d\}$, $B\cap C = \{d, f\}$

$B\cap B = \{b, d, f, h\}$

লক্ষণীয় যে, $B\cap B = B$,

$(A\cap B)\cap C = \{b, d\}\cap\{c, d, e, f\} = \{d\}$

$A\cap(B\cap C) = (a, b, c, d\} \cap\{d, f\} = \{d\}$

$\therefore (A\cap B) \cap C = A\cap(B\cap C)$.

প্রশ্ন ১৩. যদি $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = (4, 6, 8, 10\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ হলে, $A - B$, $C - A$, $B - C$, $B - A$, $B - B$ নির্ণয় কর।

Sol^n: $A - B = \{3, 4, 5, 6\} - \{4, 6, 8, 10\} = \{3, 5\}$

$C - A = \{5, 6, 7, 8\} - \{3, 4, 5, 6\} = \{7, 8\}$

$B - C = \{4, 6, 8, 10\} - \{5, 6, 7, 8\} = \{4, 10\}$

$B - A = \{4, 6, 8, 10\} - \{3, 4, 5, 6\} = \{8, 10\}$

$B - B = \{4, 6, 8, 10\} - \{4, 6, 8, 10\}=\{\}$

প্রশ্ন ১৪. মনে করি, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; A', B', $(A\cap C)'$, $(A\cup B)'$, $(A)'$ $(B - C)'$ নির্ণয় কর।

Sol^n:

$A' = U - A$

$= \{1, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = U - B$

$= \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

$A\cap C = \{3, 4, 5\}$

$\therefore (A\cap C)' = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$

$A\cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$\therefore (A\cup B)' = \{1, 7, 9\}$

$A' = U - A$

$= \{1, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore (A')' = A$

$= \{2, 3, 4, 5\}$

লক্ষণীয় যে, $(A')' = A$

$B - C = \{4, 6, 8\} - \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{8\}$

$\therefore (B - C)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

প্রশ্ন ১৫. শক্তি সেট (Power Set) কাকে বলে ? (What do you mean Power Set and Empty Set? Write with it's example.)[Food Ministry (SAE)-2021, NTRCA-২০১৭]

উত্তরঃ Power Set: যে কোনো সেট A এর সকল উপসেটকে A সেটের শক্তি সেট বা (Power Set) বলা হয়। A সেটের শক্তি সেটকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে তার শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে 2^n সংখ্যক।

যেমন $A=\{a,b,c\}$ হলে,

$P(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}, \emptyset\}$.

উদাহরণঃ যদি $A=\{a,b\}$ হয়,তাহলে A সেটের পাওয়ার সেট হবে $P(A) =\{\{a\},\{b\},\{a,b\}, \emptyset\}$.

ফাঁকা সেটঃ যে সেটের কোন উপাদান নেই তাকে ফাঁকা বা শূন্য (Empty) সেট বলে। ফাঁকা সেটকে Ø দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণঃ $\{x:x$ স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা এবং $\{11< x < 13\}\}$

■ **যদি $A= \{1,2,3\}$ হয়, তাহলে A এর Power Set নির্ণয় কর।**

Ans: $A=\{1,2,3\}$ হয়, তাহলে A এর Power Set , $P(A) = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\}\{3\},\{\}\}$

Lows of Algebra Sets :

a) Commutative Laws: For any two finite sets A&B
   i. $A\cup B = B\cup A$
   ii. $A\cap B = B\cap A$

b) Associative Laws: For any three finite sets A,B&C
   i. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$
   ii. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

c) Idempotent Laws: For any finite set A
   i. $(A\cup A) = A$
   ii. $(A\cap A) = A$

d) Distributive Laws: For any three finite sets A,B&C
   i. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
   ii. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

e) De Morgan's Laws: For any two finite sets A&B
   i. $(A\cup B)' = A'\cap B'$
   ii. $(A\cap B)' = A'\cup B'$

f) Identity Laws:
   i. $A\cup\emptyset = A$
   ii. $A\cap U = A$

g) Complement Laws:
   i. $A\cup A' = U$
   ii. $A\cap A' = \emptyset$

h) Absorption Laws:

   i. $A\cup(A\cap B) = A$
   ii. $A\cap (A\cup B) = A$

i) Domination Laws:
   i. $A\cup U = U$
   ii. $A\cap\emptyset = \emptyset$

Double Complement or Involution Law:
   i. $A'' = A$

j) More Laws of Algebra of Sets:
   i. $A - B = A\cap B'$
   ii. $B - A=B\cap A'$
   iii. $A - (B\cap C) = (A - B)\cup(A - C)$
   iv. $A - (B\cup C) = (A - B)\cap(A - C)$

প্রশ্ন ১৬. ভেন ডায়াগ্রাম কী ? (What is Ven Diagram) [NTRCA-2010, 2014]

উত্তরঃ ভেন ডায়াগ্রামঃ সেটের সংযোগ, ছেদ, উপসেট, অন্তর, পূরক ইত্যাদি প্রক্রিয়া বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র যেমন আয়তকার ক্ষেত্র, বৃত্তাকার ক্ষেত্র ও ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করার মাধ্যমকে ভেনচিত্র বলে। জনভেন (১৮৩৪-১৯২৩) সর্বপ্রথম সেটের কার্যবিধি জ্যামিতিক চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করে। তাই তার নাম অনুসারে এ পদ্ধতিটির নাম ভেনচিত্র। উদাহরণঃ যদি **$A=\{1,2,3\}$** এবং **$B=\{3,4,5\}$** সেট হয়, তবে ইহাদের ভেন ডায়াগ্রাম নিম্ন লিখিতভাবে চিত্রিত করা যায় ।

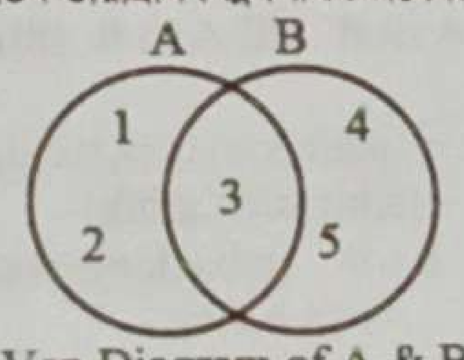


Fig. Ven Diagram of A & B set .

প্রশ্ন ১৭. $A=\{1,4,10\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$ এবং $C=\{2,4,6,8\}$ হলে $A\cap(B\cup C)$ এবং $(A\cap B)\cup C$ এর মান নির্ণয় করুন । [NTRCA-2010, 2014]

উত্তরঃ $(B\cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cup \{2,4,6,8\}$

$=\{1,2,3,4,5,6.8\}$

$(A\cap B) = \{1,4,10\} \cap \{1,2,3,4,5\}$

$= \{1,4\}$

$A\cap(B\cup C) = \{1,4,10\} \cap \{1,2,3,4,5,6,8\}$

$= \{1,4\}$

$(A\cap B)\cup C = \{ 1,4\} \cup \{2,4,6,8\}$

$= \{1,2,4,6,8\}$

প্রশ্ন ১৮. $A=\{1,4,7,10\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$, $C=\{2,4,8\}$ হলে $(A\cap B) - C$ এবং $(A\cup B) - (C-B)$ এর মান নির্ণয় করুন। [NTRCA-2011]

উত্তরঃ $(A\cap B) = \{1,4,7,10\} \cap \{1,2,3,4,5\}$

$=\{1,4\}$

$(A\cup B) = \{1,4,7,10\} \cup \{1,2,3,4,5\}$

$= \{1,2,3,4,5,7,10\}$

$(C - B) = \{2,4,8\} - \{1,2,3,4,5\}$

$= \{8\}$

$(A\cap B) - C = \{1,4\} - \{2,4,8\}$

$= \{1\}$

$(A\cup B) - (C-B) = \{1,2,3,4,5,7,10\} - \{8\}$

$= \{1,2,3,4,5,7,10\}$

প্রশ্ন ১৯. যে কোন সেট A এবং B এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে, $A - (A\cap B) = A - B$ [NTRCA- 2012, 2014]

উত্তরঃ ধরি, সেট $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2\}$

$(A\cap B) = \{1,2,3,4\} \cap \{1,2\}$

$= \{1,2\}$

বামপক্ষ $= A - (A\cap B)$

$= \{1,2,3,4\} - \{1,2\}$

$= \{3,4\}$

ডানপক্ষ $= A - B$

$= \{1,2,3,4\} - \{1,2\}$

$= \{3,4\}$

সুতরাং বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত).

প্রশ্ন ২০. $A=\{1,2\}$ এবং $B=\{a,b\}$ এর কার্টিসিয়ান গুণফল কি হবে ? **[NTRCA-2012]**

উত্তরঃ $A\times B = \{1,2\}\times\{a,b\}$

$= \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

প্রশ্ন ২১. A,B,C যে কোনো তিনটি সেট হলে, প্রমাণ করুন যে, $(A-B) \cap(A-C) = A - (B\cup C)$ **[NTRCA-2013]**

উত্তরঃ ধরি, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{3,4,5,6\}$

$A - B=\{1,2,3\}-\{2,3,4\}=\{1\}$

$A - C=\{1,2,3\}-\{3,4,5,6\}=\{1,2\}$

$(B\cup C) = \{2,3,4\} \cup \{3,4,5,6\}$

$= \{2,3,4,5,6\}$

বামপক্ষ $= (A-B) \cap(A-C) =\{1\} \cap \{1,2\}=\{1\}$

ডানপক্ষ $= A - (B\cup C) =\{1,2,3\} - \{2,3,4,5,6\}=\{1\}$

সুতরাং বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত).

বিকল্প পদ্ধতিঃ

ডানপক্ষ $= A - (B\cup C)$

$= A\cap(B\cup C)'$ [Subtraction Rule]

$= A\cap (B'\cap C')$ **[DeMorgan Law]**

$= (A\cap B') \cap (A\cap C')$**[Distributive Law]**

$= (A-B) \cap (A-C)$ [Subtraction Rule]

বামপক্ষ $= (A-B) \cap(A-C)$

$= (A\cap B') \cap (A\cap C')$

$= A\cap (B'\cap C')$

$= A\cap(B\cup C)'$

$= A - (B\cup C)$

সুতরাং বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত).

প্রশ্ন ২২. উদাহরণসহ সংজ্ঞা দিনঃ [NTRCA-2014]

i. Disjoint Set [NTRCA-2016,2019]

ii. Universal Set

iii. Intersection of Set

উত্তরঃ Disjoint Set: দুটি সেটের মধ্যে যখন কোন সাধারণ উপাদান (Common) না থাকে, তখন সেট দুটিকে নিশ্চেদ বা Disjoint Set সেট বলে।

উদাহরণঃ ধরি, $A=\{2,3\}$ এবং $B=\{4,5\}$ দুটি সেট

$\therefore (A \cap B) = \{2,3\} \cap \{4,5\} = \emptyset$

Universal Set: Universal Set হল এমন এক ধরনের সেট যা অন্য সেটগুলোর সকল উপাদান ধারণ করে। সকল সেটগুলো Universal Set বা সার্বিক সেট এর উপসেট হিসেবে থাকে। Universal Set কে U দ্বারা প্রকাশ করা হয়। উদাহরণঃ ধরি,

$A=\{1,4,7\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$, $C=\{2,4,6\}$

$\therefore U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Intersection of Set: সকল সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে Intersection of Set বলে। উদাহরণঃ ধরি,

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,6\}$

$\therefore (A \cap B) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{2,4,6\} = \{2,4\}$

প্রশ্ন ২৩. মনে করুন, A,B,C তিনটি সেট। প্রমাণ করুন $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$ (Suppose A,B,C is three different set. Prove that, $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$) [**NTRCA-2014**]

উত্তরঃ

ডানপক্ষ $= (A-C)-(B-C)$

$= (A \cap C')-(B \cap C')$

$= (A \cap C') \cap (B \cap C')'$

$= (A \cap C') \cap (B' \cup (C')')$

$= (A \cap C') \cap (B' \cup C)$

$= (A \cap C' \cap B') \cup (A \cap C' \cap C)$

$= (A \cap C' \cap B') \cup \emptyset \ [(C' \cap C) = \emptyset]$

$= (A \cap C' \cap B')$

$= (A \cap B') \cap C'$

$= (A-B)-C$

= বামপক্ষ

সুতরাং বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত).

বিকল্প পদ্ধতিঃ ৬ নং প্রশ্নের সমাধানের মত আপনি A,B,C সেটের মান ধরেও প্রমাণ করতে পারেন বা বাম পক্ষ থেকে ডানপক্ষ প্রমাণ করতে পারেন।

প্রশ্ন ২৪. প্রমাণ কর যে, $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B)-(A \cap B)-(A \cap B)$ যেখানে, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$.

Sol^n:

$A-B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 4\}$

$B-A = \{2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 4, 5\} = \{6, 7\}$

$\therefore (A-B) \cup (B-A) = \{1, 4\} \cup \{6, 7\} = \{1, 4, 6, 7\}$

আবার,

$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং $A \cap B = \{2, 3, 5\}$

$\therefore (A \cup B\}-(A \cap B\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 3, 5\}$
$= \{1, 4, 6, 7\}$

অতএব, $(A-B) \cup (B-A) = (A-B)-(A \cap B)$

প্রশ্ন ২৫. যদি $A = \{3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ এবং $C = \{3, 6, 7, 8\}$ হয়, তবে A-B, B-C, $B \cup C$, $A \cup B$, $A \cap B$ এবং $(A \cup B) \cap C$ নির্ণয় কর।

Sol^n:

$A-B=\{3, 4, 5, 6\} - \{4, 5, 6, 7\}=\{3\}$

$B-C=\{4,5,6,7\}-\{3,6,7,8\}=\{4,5\}$

$B \cup C = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{3, 6, 7, 8\}$
$= \{3, 4, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{4, 5, 6, 7\}$
$= \{4, 5, 6\}$

এবং $(A \cap B) \cap C = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 6, 7, 8\}$
$= \{3, 6, 7\}$

প্রশ্ন ২৬. যদি $B=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ এবং $A=\{a,b,c,e,k\}$ বাহির কর। (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) A-B (iv) B-A

Sol^n:

(i) $A \cup B = \{a,b,c,k,e\} \cup \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$
$=\{a,b,c,d,e,f,g,h,k\}$

(ii) $A \cap B = \{a,b,c,k,e\} \cap \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$
$=\{a,b,c,e\}$

(iii) $A-B = \{a,b,c,k,e\}-\{a,b,c,d,e,f,g,h\}= \{k\}$

(iv) $B-A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}-\{a,b,c,k,e\}$
$= \{d,f,g,h\}$

প্রশ্ন ২৭. সংযোগ সেট বলতে কি বুঝায়? **What is called Union Set?)** [NTRCA-2016]

উত্তরঃ সংযোগ সেটঃ দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলা হয়। ধরি, $A=\{2,3\}$, $B= \{4,5\}$ দুইটি সেট। তাহলে A এবং B সেটের সংযোগ সেট হবে

$(A \cup B) =\{2,3\} \cup \{4,5\}=\{2,3,4,5\}$

প্রশ্ন ২৮. সার্বিক সেট U এর যে কোনো উপসেট A ও B এর জন্য দেখাও যে, $A|B = A \cap B'$. (**Show that $A|B = A \cap B'$ For any subset A&B of Universal set U.)** [NTRCA-2018]

উত্তরঃ ধরি, $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$

$B'=U-B=\{1,2,3,4,5\} - \{3,4,5\}=\{1,2\}$

L.H.S$= A|B=\{1,2,3\} - \{3,4,5\}=\{1,2\}$

R.H.S$= A \cap B'=\{1,2,3\} \cap \{1,2\}=\{1,2\}$

$\therefore$ L.H.S=R.H.S (Showed).

প্রশ্ন ২৯. যে কোন সেট A,B,C এর জন্য দেখান যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. [NTRCA-2019]

উত্তরঃ ধরি, $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ এবং $C = \{5,6\}$

L.H.S $= A \times (B \cup C) = A \times \{3,4\} \cup \{5,6\}$

$=\{1,2\} \times \{3,4,5,6\}$

$= (1,3),(1,4),(1,5)(1,6),(2,3),(2,4), (2,5),(2,6)\}$

R.H.S $= (A \times B) \cup (A \times C)$

$= \{1,2\} \times \{3,4\} \cup \{1,2\} \times \{5,6\}$

$=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \cup \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$

$=\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$

$\therefore$ L.H.S=R.H.S (Showed).

প্রশ্ন ৩০. যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$,$B = \{a, b, c, d\}$ $C = \{x, y, z\}$,$R = \{(1,a), (2,a), (2,d), (3,c), (4,d)\}$ $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d,z)\}$ তবে $M_R \times M_S = ?$

Sol^n:

$$M=M_R \times M_S=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

প্রশ্ন ৩১. যদি $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, f, h\}$, $C=\{c, d, e, f\}$ হলে, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \cap B$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে,$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$

Sol^n:

$A \cap B = \{b, d\}$, $A \cap C = \{c, d\}$, $B \cap C = \{d, f\}$

$B \cap B = \{b, d, f, h\}$

লক্ষণীয় যে, $B \cap B = B$,

$(A \cap B) \cap C = \{b, d\} \cap \{c, d, e, f\} = \{d\}$

$A \cap (B \cap C) = (a, b, c, d\} \cap \{d, f\} = \{d\}$

$\therefore (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

প্রশ্ন ৩২. যদি $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = (4, 6, 8, 10\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ হলে, A - B, C - A, B - C, B - A, B - B নির্ণয় কর।

Sol^n: $A-B = \{3, 4, 5, 6\} - \{4, 6, 8, 10\} = \{3, 5\}$

$C-A = \{5, 6, 7, 8\} - \{3, 4, 5, 6\} = \{7, 8\}$

$B-C = \{4, 6, 8, 10\} - \{5, 6, 7, 8\} = \{4, 10\}$

$B-A = \{4, 6, 8, 10\} - \{3, 4, 5, 6\} = \{8, 10\}$

$B-B = \{4, 6, 8, 10\} - \{4, 6, 8, 10\}=\{\}$

প্রশ্ন ৩৩. মনে করি, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; A', B', $(A \cap C)'$, $(A \cup B)'$, $(A)'$ $(B-C)'$ নির্ণয় কর।

Sol^n:

$A' = U - A$
$= \{1, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = U - B$
$= \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

$A \cap C = \{3, 4, 5\}$

$\therefore (A \cap C)' = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$\therefore (A \cup B)' = \{1, 7, 9\}$

$A' = U - A$
$= \{1, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore (A')' = A$
$= \{2, 3, 4, 5\}$

লক্ষণীয় যে, $(A')' = A$

$B-C = \{4, 6, 8\} - \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{8\}$

$\therefore (B-C)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

প্রশ্ন ৩৪. প্রমাণ কর যে, $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B)-(A \cap B)-(A \cap B)$ যেখানে, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$.

Sol^n:

$A-B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 4\}$

$B-A = \{2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 4, 5\} = \{6, 7\}$

$\therefore (A-B) \cup (B-A) = \{1, 4\} \cup \{6, 7\} = \{1, 4, 6, 7\}$

আবার,

$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং $A \cap B = \{2, 3, 5\}$

$\therefore (A \cup B\}-(A \cap B\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 3, 5\}$
$= \{1, 4, 6, 7\}$

অতএব, $(A-B) \cup (B-A) = (A-B)-(A \cap B)$

প্রশ্ন ৩৫. যদি $A = \{3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ এবং $C = \{3, 6, 7, 8\}$ হয়, তবে A-B, B-C, $B \cup C$, $A \cup B$, $A \cap B$ এবং $(A \cup B) \cap C$ নির্ণয় কর।

Sol^n:

$A-B=\{3, 4, 5, 6\} - \{4, 5, 6, 7\}=\{3\}$

$B-C=\{4,5,6,7\}-\{3,6,7,8\}=\{4,5\}$

$B \cup C = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{3, 6, 7, 8\}$
$= \{3, 4, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{4, 5, 6, 7\}$
$= \{4, 5, 6\}$

এবং $(A \cap B) \cap C = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 6, 7, 8\}$
$= \{3, 6, 7\}$

প্রশ্ন ৩৬. যদি $B=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ এবং $A=\{a,b,c,e,k\}$ বাহির কর। (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A-B$ (iv) $B-A$

Sol^n:

(i) $A \cup B = \{a,b,c,k,e\} \cup \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$
$= \{a,b,c,d,e,f,g,h,k\}$

(ii) $A \cap B = \{a,b,c,k,e\} \cap \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$
$= \{a,b,c,e\}$

(iii) $A-B = \{a,b,c,k,e\}-\{a,b,c,d,e,f,g,h\} = \{k\}$

(iv) $B-A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}-\{a,b,c,k,e\}$
$= \{d,f,g,h\}$

প্রশ্ন ৩৭. সার্বজনীন সেট, $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ (i) $B' \cup C$ ii) $(A-B')'$ (iii) $(A \cap A')'$ (iv) $A'-B$ নির্ণয় করুন। [NTRCA - 2015]

উত্তরঃ ধরি, সেট $A=\{a,b,c\}$, $B=\{b,c,d,e\}$, $C=\{d,e,f,g\}$

$A' = U-A = \{a,b,c,d,e,f,g\} - \{a,b,c\} = \{d,e,f,g\}$

$B' = U-B = \{a,b,c,d,e,f,g\} - \{b,c,d,e\} = \{a,f,g\}$

$(A-B') = \{a,b,c\} - \{a,f,g\} = \{b,c\}$

$(A \cap A') = \{a,b,c\} \cap \{d,e,f,g\} = \emptyset$

(i) $(B' \cup C) = \{a,f,g\} \cup \{d,e,f,g\} = \{a,d,e,f,g\}$

(ii) $(A-B')' = U-(A-B')$
$= \{a,b,c,d,e,f,g\} - \{b,c\} = \{a,d,e,f,g\}$

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$B \cap C$	$A\cup(B\cap C)$	$(\bar{C}\cup\bar{B})$	$\overline{A\cup(B\cap C)}$	$(\bar{C}\cup\bar{B})\cap\bar{A}$
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0

(iii) $(A \cap A')' = U-(A \cap A') = \{a,b,c,d,e,f,g\} - \emptyset$
$= \{a,b,c,d,e,f,g\}$

(v) $(A'-B) = \{d,e,f,g\} - \{b,c,d,e\} = \{f,g\}$

প্রশ্ন ৩৮. যদি $A=\{m,n\}$, $B=\{x,y\}$, $C=\{y,w\}$ হয়, তবে নিচের মান বের করুনঃ [NTRCA-2016]

i. $A \times (B \cup C)$

ii. $(A\times B) \cup (A\times C)$ এবং $(A\times B) \cap (A\times C)$

iii. $A\times (B \cap C)$

উত্তরঃ

$(B \cup C) = \{x,y\} \cup \{y,w\} = \{x,y,w\}$

$(B \cap C) = \{x,y\} \cap \{y,w\} = \{y\}$

$(A\times B) = \{m,n\} \times \{x,y\} = \{(m,x),(m,y),(n,x),(n,y)\}$

$(A\times C) = \{m,n\} \times \{y,w\} = \{(m,y),(m,w),(n,y),(n,w)\}$

(i) $A \times (B \cup C) = \{m,n\} \times \{x,y,w\}$
$= \{(m,x),(m,y),(m,w),(n,x),(n,y),(n,w)\}$

(ii) $(A\times B) \cup (A\times C) = \{(m,x),(m,y),(n,x),(n,y)\} \cup \{(m,y),(m,w),(n,y),(n,w)\}$
$= \{(m,x),(m,y),(n,x),(n,y),(m,w),(n,w)\}$

$\therefore (A\times B) \cap (A\times C) = \{(m,x),(m,y),(n,x),(n,y)\} \cap \{(m,y),(m,w),(n,y),(n,w)\}$
$= \{(m,y),(n,y)\}$

(iii) $A\times (B \cap C) = \{m,n\} \times \{y\}$
$= \{(m,y),(n,y)\}$

প্রশ্ন ৩৯. **Membership table** এর মাধ্যমে প্রমাণ করুন যে, $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$, এখানে A, B, C একেকটি **Sets.** [Food Ministry (SAE)-2021]

উত্তরঃ $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ নিম্নরূপঃ এখানে, $\cup$ = intersection বা logical OR এবং $\cap$ = disjoint বা logical AND হিসেবে কাজ করে। $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$. (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৪০. **Using mathematical induction, show that 3^n-1 is multiple of 2 for n>=1.**

উত্তরঃ 3^n-1, 2 এর গুনিতক; যখন n>=১;

n=1, 2, 3, 4, 5, বসিয়ে ২ দ্বারা ভাগশেষ নির্ণয় করি।

n=1 হলে; $(3^n-1)\%2=(3^1-1)\%2=0$

n=2 হলে; $(3^n-1)\%2=(3^2-1)\%2=0$

n=3 হলে; $(3^n-1)\%2=(3^3-1)\%2=0$

n=4 হলে; $(3^n-1)\%2=(3^4-1)\%2=0$

.

.

.

n=n হলে; $(3^n-1)\%2=(3^4-1)\%2=0$ হবে;

যেহেতু সকল ক্ষেত্রে ভাগশেষ শূন্য। সুতরাং 3^n-1 সংখ্যাটি ২ এর গুনিতক। (দেখানো হলো)

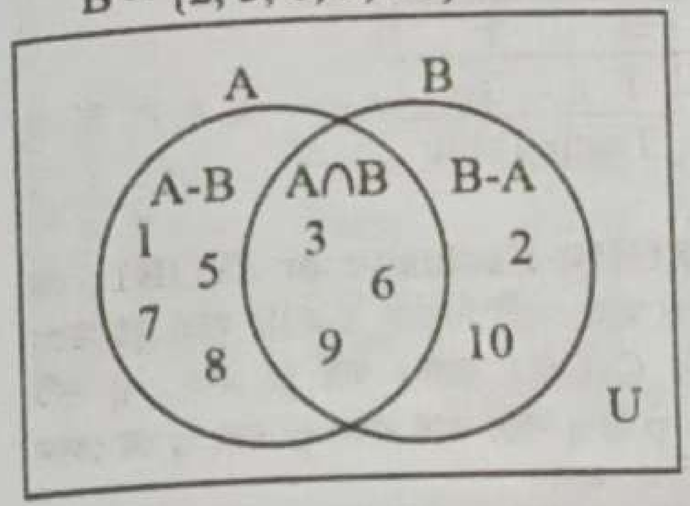
প্রশ্ন ৪১. যদি $A-B=\{1,5,7,8\}$, $B-A=\{2,10\}$ এবং $A \cap B=\{3,6,9\}$ হয়, তবে A, B এর মান কত? [Food Ministry (SAE)-2021] [Ministry of Agriculture (SAE)-2021]

উত্তরঃ ভেনচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করিঃ

ভেনচিত্র হতে পাই,

$A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \{2, 3, 6, 9, 10\}$



প্রশ্ন ৪২. দশটি পরিবারের মধ্যে ছয়টি পরিবারে কুকুর, চারটি পরিবারে বিড়াল এবং দুটির কোনোটিই বিড়াল বা কুকুর নেই। বিড়াল এবং কুকুর উভয় আছে যে পরিবারের তাদের সংখ্যা খুঁজে বের করুন? **(Out of ten families, six families have dogs, four have cats and two have neither cats nor dogs. Find the number of families that have both cats and dogs?)** [Ministry of Agriculture (SAE)-2021

উত্তরঃ

ধরি, dogs আছে= P(D) =৬ টি পরিবারে;

cats আছে= P(C)=৪ টি পরিবারে

P(D∪C)= dogs অথবা cats আছে= ১০-২=৮ টি পরিবারে;

P(D∩C) = dogs এবং cats আছে= ?

আমরা জানি,

$P(D \cup C)= P(D) + P(C)- P(D\cap C)$

বা, $8=6+4- P(D\cap C)$

বা, $P(D\cap C)=10-8$

বা, $P(D\cap C)=2$ টি পরিবারের (উত্তর)

Self Study

প্রশ্ন ১.যদি $A = \{1,2,3\}$, $B = (a,b)$ হয় তাহলে $n(A\times B)$ এবং $n(A\times B)$ বাহির কর। **Ans:** $\{(1,a), (1,b), (2,a),(2,b), (3,a), (3,b)\}$, 6

প্রশ্ন ২.যদি $\{5, 6, 7, 8\}$ এবং $B = \{1,2,3,4,5\}$ হয় তাহলে $(A\cup B)$, $(A \cap B)$. **Ans:** $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $\{5\}$

প্রশ্ন ৩.যদি $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$, $R_2 = \{(1,1), (1,2)\}$ হয় তাহলে (i) $R_1 \cup R_2$ (ii) $R_1 \cap R_2$ (iii) R_1-R_2 (iv) R_2-R_1

প্রশ্ন ৪.যদি $R = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$ $S = \{(1,0), (2, 0), (3,1), (3,2), (4,1)\}$ হয় ,তাহলে R_0S বা R ও S এর **Composite** বাহির কর।

Ans: $\{(3,1), (3,4), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

প্রশ্ন ৫. যদি $A =\{1,2,3\}$, $B = \{x,y,z\}$ **Set** দুটি **Relation** $R =\{(1,y), (1,z), (3,y)\}$ চিত্রের সাহায্যে দেখাও।

প্রশ্ন ৬. $A = \{a,b,c\}$ **Set** হতে $B = \{1,2\}$ **Set** এর মধ্যে মোট **Relation** সংখ্যা বের কর। **Ans:** 6

প্রশ্ন ৭. দেখাও যে $A = \{1,2,3,4\}$ নিচের রিলেশনটির জন্য **Directed graph** তৈরি করঃ $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,2), (4,4)\}$

প্রশ্ন ৮. $A = \{(x,y,z)$, $B = \{1,2,3\}$ **Set** দুটির **Relation R** $= \{(x,z), (x,3), (z,2)\}$ চিত্রের সাহায্যে দেখাও।

প্রশ্ন ৯. দুটি **Set** $= \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$ এবং $R = \{(1,a), (1,b), (3,a)\}$ **Relation** টিকে **Array method** এ দেখাও।

প্রশ্ন ১০. যদি $A = \{a,b,c\}$ $R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,c)\}$ হয় তাহলে নির্ণয় করঃ

(i) Reflexive Relation
(ii) Symmetric Relation
(iii) Transitive Relation.

Ans: (i) No, (ii) No, (iii) No.

প্রশ্ন ১১. যদি $A = \{1,2,3,4\}$ এবং **Relation** $R = \{(1,3), (1,4), (3,2), (3,3),(3,4)\}$ হয় তবে **R Relation** এর **Domain and Range** নির্ণয় কর। **Ans:** D = (1,3) and R =(2,3,4)

Proposition

প্রশ্ন 1. **প্রোপজিশন (Proposition) কাকে বলে ? (What is Proposional Logic? Write down with example)** [ICT Division (ANE)-2020, Different Minisrty (AME)-2020, 36 BCS]

উত্তরঃ Proposition (বিবৃত বা প্রতিজ্ঞা) হল এমন একটি ঘোষণা মূলক কথা বা বাক্য বা প্রতিজ্ঞা, যা সত্য বা মিথ্যা (True or False) কিন্তু উভয় নয়।

উদাহরণঃ (1) সে ডুয়েটে (**DUET**) পড়ে।
(2) চট্টগ্রাম বাংলাদেশের রাজধানী

উপরোক্ত (1) এবং (2) বাক্যটি সত্য বা মিথ্যা হতে পারে। তাই এগুলো বিবৃত বা Proposition । কিন্তু

(1) তুমি কিসে পড়?
(2) a + b = c
(3) Please give me a glass of water.

উপরোক্ত (1), (2) ও (3) বাক্যটি প্রতিজ্ঞা নয়। কারণ তারা বিবৃতি (Statement) নয়।

আবার, y>5 ইহা একটি Statement বা বিবৃতি কিন্তু ইহা Proposition নয়। কারণ ইহা একই সাথে সত্য এবং মিথ্যা দুটোই প্রকাশ করে। যেহেতু এখানে y এর মান যে কোন মান হতে পারে $(-\infty \ to +\infty)$

প্রশ্ন 2. Compound Proposition (যৌগিক বিবৃতি) কাকে বলে ? (What is called Compound Proposition?)

উত্তর: দুই বা ততোধিক উক্তি (Propositions) এর একত্রকরণ কে Compound Proposition বা যৌগিক বিবৃতি বলে।

উদাহরণ: "রাকিব ভালো ছাত্র অথবা সে ভালো রেজাল্ট করে"। ইহা যৌগিক বিবৃতি, ইহা দুটি উপবিবৃতি "রাকিব ভালো ছাত্র" এবং "সে ভালো রেজাল্ট করে" নিয়ে গঠিত।

প্রশ্ন 3. Propositions এর Basic Logical operation গুলো কী কী, উদাহরণ সহ দেখাও।(What is basic logic operation of Proposition. Show with it's example)

উত্তর: Propositions এর Basic operation গুলো নিচে দেওয়া হলো:

প্রতীক	অর্থ	নাম
$\sim / \neg$	না/নয় (NOT)	না করণ/Negation
$\wedge$	এবং (AND)	যোজন/যোজক Conjunction
$\vee$	অথবা- (OR)	বিয়োজন/ Disjunction
$\rightarrow$	যদি-তবে (If-Then)	শর্তায়ন conditional /implication
$\leftrightarrow$	যদি এবং শুধুমাত্র যদি (If and Only if)	দ্বিমুখী শর্তায়ন/ Biconditional
$\oplus$	Ex-OR	Exclusive OR

■ **Conjunction (যোজন):** Conjunction কে প্রকাশ করা হয় "$\wedge$" চিহ্ন দ্বারা। যে কোন দুটি বিবৃতি AND দ্বারা যুক্ত হলে তাকে Conjunction বা যোজন বিবৃতি বলে।

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Truth Table

এখানে p ও q উভয়ই সত্য হলে যোজন বিবৃতি $p \wedge q$ সত্য হবে। অন্যথায় $p \wedge q$ মিথ্যা।

■ **Disjunction (বিয়োজন) : Disjunction** কে প্রকাশ করা হয় "$\vee$" চিহ্ন দ্বারা। যে কোন দুটি বিবৃতি (OR) দ্বারা যুক্ত হলে তাকে Disjunction (বিয়োজন) বলা হয়।

P	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Truth Table

এখানে p ও q উভয়ই মিথ্যা হলে যোজন বিবৃতি $p \vee q$ মিথ্যা হবে। অন্যথায় $p \vee q$ সত্য।

■ **Negation (অস্বীকার করণ): Negation** কে প্রকাশ করা হয় "$\neg$" বা "$\sim$" চিহ্ন দ্বারা। যদি p একটি Proposition তবে $\neg p$ বা $\sim p$ কে Negation বলে।

p	$\neg p$
T	F
F	T

Truth Table

■ **Exclusive or (XOR): Exclusive or (XOR)** কে প্রকাশ করা হয় "$\oplus$" চিহ্ন দ্বারা। দুটি বিবৃতি X-OR দ্বারা যুক্ত হলে তাকে Exclusive OR (XOR) বলে। ধরি p এবং q দুটি Proposition হয়, তবে $p \oplus q$ সত্য হবে যখন p এবং q যে কোন একটা সত্য এবং অপরটি মিথ্যা হবে।

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Truth Table

■ **Conditional বা (if then) Implication:** যদি p সত্য (True) এবং q মিথ্যা (False) হয়, তবে Proposition টি False (মিথ্যা) হবে, অন্যথায় সত্য (True) হবে। ইহাকে $(p \rightarrow q)$ এভাবে প্রকাশ করা হয়।

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Truth Table

■ **Bi-Conditional (if and only if):** যদি p ও q একই হয় তবে Proposition টি সত্য (True) হবে। অন্যথায় False হবে। Bi-Conditional কে $p \leftrightarrow q$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

p	q		$p \leftrightarrow q$
T	T		T
T	F		F
F	T		F
F	F		T

Truth Table

■ **Tautology:** Tautology হল এমন একটি বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা যাহা সব সময় সত্য (True) হবে।

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Truth Table

■ **Contradiction (অস্বীকার):** Contradiction হলো এমন একটি বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা যাহা সব সময় মিথ্যা (False) হবে।

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$[(\neg A) \wedge (\neg B)]$
T	T	True	False	False	False	False
T	F	True	False	False	True	False
F	T	True	False	True	False	False
F	F	False	True	True	True	True

Truth Table

প্রশ্ন 4. Conditional Statement এর বিভিন্ন Conversion বা রূপ।(Different Coversion / form of Conditional Statement.)

Let $p \rightarrow q$ is a conditional proposition

$\Rightarrow$ *Converse*: $(q \rightarrow p)$

$\Rightarrow$ Contrapositive: $\neg q \rightarrow \neg p$

$\Rightarrow$ Inverse: $\neg p \rightarrow \neg q$

[বিদ্র.: Contrapositive এবং Conditional statement $(p \rightarrow q)$ একই জিনিস।]

প্রশ্ন 5. Contingency কি? (What is Contingency?)

Contingency: যে Proposition Tautology ও না, Contradiction ও না তাকে Contigency বলে।

e.g. (i) $p \wedge q$, (ii) $p \vee q$ (iii) $\neg p$ etc.

প্রশ্ন 6. p ও q Proposition এর Conjunction বাহির কর।(Find out the Conjunction of P&Q Proposition)

যেখানে, p = "আজকে শুক্রবার" এবং q = "আজকে বৃষ্টি হইতেছে"।

Sol^n: $p \wedge q$ = আজকে শুক্রবার এবং আজকে বৃষ্টি হইতেছে।

প্রশ্ন 7. Let 'p' be the statement "Rayhan learns discrete Mathematics" and 'q' the statement "Rayhan find a good job". Express the statement $p \rightarrow q$ as a statement?

Sol^n: "If Rayhan learns discrete mathematics, then he will find a good job".

প্রশ্ন 8. Simple proposition কি tautology হতে পারে কি? ব্যাখ্যা কর? (Could a simple proposition be tautology? describe it.)

উত্তর: Simple proposition tautology হতে পারে না। একটা Simple proposition সত্য বা মিথ্যা হতে পারে। কিন্তু tautology সব সময় সত্য হবে ,তাই simple proposition tautology হতে পারেনা।

প্রশ্ন 9. Propositional Equivalences বলতে কি বুঝায়। উদাহরণসহ লিখ? What do you understand Propositional Equivalence? Write with it's example.)

উত্তর: দুটি বিবৃতি x এবং y যৌক্তিকভাবে সমতুল্য হবে যদি নিম্ন লিখিত দুটি শর্তের যে কোন একটি ধারণ করে।

i. প্রতিটি বিবৃতিতে সত্যক সারণি গুলির একই সত্যক মান রয়েছে।

ii. একটি বাই-কন্ডিশনাল বিবৃতি $x \leftrightarrow y$ হল একটি টোটোলজি।

উদাহরণ: প্রমাণ কর $\neg(A \vee B)$ এবং $[(\neg A) \wedge (\neg B)]$ সমতুল্য।

Testing by 1^st method (Matching truth table)

এখানে আমরা দেখতে পাচ্ছি $\neg(A \vee B)$ এবং $[(\neg A) \wedge (\neg B)]$ এর সত্য মানগুলি একই, সুতরাং বিবৃতিগুলি সমান।

Testing by 2^nd method (Bi-conditionality)

A	B	$\neg(A \vee B)$	$[(\neg A) \wedge (\neg B)]$	$[\neg(A \vee B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \wedge (\neg B)]$
T	T	False	False	True
T	F	False	False	True
F	T	False	False	True
F	F	True	True	True

যেহেতু $[\neg(A \vee B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ একটি টোটোলজি, সুতরাং বিবৃতিগুলি সমতুল্য।

প্রশ্ন 10. Conditional Statement, Inverse, Converse, and Contra-positive, Duality Principle বলতে কি বুঝায়। উদাহরণসহ লিখ? (What do you understand Conditional Statement, Inverse, Converse, and Contra-positive, Duality Principle? Write with it's example.)

উত্তর: Conditional Statement: Implication / if-then $(\rightarrow)$ একে শর্তাধীন বিবৃতিও বলা হয়। ইহার দুইটি অংশ আছে -

i. Hypothesis, p

ii. Conclusion, q

এটিকে $p \rightarrow q$ হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ: "If you do your homework, you will not be punished." এখানে, "আপনি নিজের গৃহকর্মটি করেন" হলেন Hypothesis, p এবং "আপনাকে শাস্তি দেওয়া হবে না" Conclusion, q.

Inverse: Inverse হল Conditional Statement এর hypothesis এবং conclusion উভয়ের না বোধক। যদি বিবৃতিটি "If p, then q" হয়, তবে Inverse "If not p, then not q" হবে। সুতরাং $p \rightarrow q$ এর Inverse হবে $\neg p \rightarrow \neg q$.

উদাহরণ: "If you do your homework, you will not be punished" এর Inverse হবে "If you do not do your homework, you will be punished."

Converse: Conditional statement এর Converse, hypothesis এবং conclusion এর বিনিময় দ্বারা গণনা করা হয়। যদি বিবৃতিটি "If p, then q" হয়, তবে Converse "If q, then p" হবে। সুতরাং $p \rightarrow q$ এর Converse হবে $q \rightarrow p$.
উদাহরণঃ "If you do your homework, you will not be punished" এর Converse হবে "If you will not be punished, you do your homework".

Contra-positive: Conditional statement এর Contra-positive, hypothesis এবং conclusion এর বিপরীত বিনিময় দ্বারা গণনা করা হয়। যদি বিবৃতিটি "If p, then q" হয়, তবে Contra-positive "If not q then not p" হবে। সুতরাং $p \rightarrow q$ এর Contra-positive হবে $\neg q \rightarrow \neg p$.
উদাহরণঃ "If you do your homework, you will not be punished" এর Contra-positive হবে "If you are punished, you did not do your homework".

Duality Principle: দ্বৈত নীতিতে বলা হয়েছে যে, কোন সত্য বিবৃতির জন্য ইউনিয়ন (Union) সেট, ছেদ (Intersection) সেট এ (এবং বিপরীতক্রমে) এবং ইউনিভার্সাল (Universal) সেট, নাল (Null) সেট এ (এবং বিপরীতক্রমে) বিনিময় দ্বারা প্রাপ্ত দ্বৈত বিবৃতিটিও সত্য। যদি কোন বিবৃতি নিজেই দ্বৈত বিবৃতি হয়, তবে এটি কে স্ব-দ্বৈত বিবৃতি বলা হয়।
উদাহরণঃ $(A \cap B) \cup C$ এর Dual হল $(A \cup B) \cap C$.

প্রশ্ন 11. Predicate Logic বলতে কি বুঝায়। উদাহরণসহ লিখ? (What is Predicate Logic? Write down with example)

Predicate Logic: একটি প্রিডিকেট হল কিছু নির্দিষ্ট ডোমেনে সংজ্ঞায়িত এক বা একাধিক ভেরিয়েবলের একটি অভিব্যক্তি। ভেরিয়েবল সহ একটি প্রিডিকেট ভেরিয়েবলের জন্য একটি মান নির্ধারণ বা ভেরিয়েবলের পরিমাণ নির্ধারণের জন্য proposition তৈরি করে। নিম্নে কয়েকটি প্রিডিকেট এর উদাহরণ দেওয়া হল -

i. Let $E(x, y)$ denote "$x = y$"
ii. Let $X(a, b, c)$ denote "$a + b + c = 0$"
iii. Let $M(x, y)$ denote "x is married to y"

Well Formed Formula (wff): Well Formed Formula(wff) হল প্রিডিকেট যা নিচের যে কোন একটি কে ধারণ করে -

i. সকল propositional constants এবং propositional variables হল wffs.
ii. যদি X একটি চলক হয় এবং Y একটি wff হয়, তবে $\forall x Y$ এবং $\exists x Y$ ও wff হবে।
iii. সত্য মান এবং মিথ্যা মানগুলি wffs হয়।
iv. প্রতিটি পারমাণবিক সূত্র একটি wff.
v. wffs সংযোগকারী সমস্ত সংযোগগুলি wffs হয়।

প্রশ্ন ১২. Propositional Logic এবং Predicate Logic উদাহরণসহ বুঝিয়ে লিখুন। (What is Propositional Logic and Predicate Logic? Write down with example)
[Different Minisrty (AME)-2020, ICT Division (ANE)-2020, 36th BCS]

উত্তরঃ

Propositional Logic: Proposition হল একটি statement, যা True অথবা False হয়। Propositional logic হল knowledge উপস্থাপন (represent) করার জন্য এবং logical সিদ্ধান্ত (inference) নেওয়ার জন্য একটি formal language। এর উদ্দেশ্য হল statement গুলি individually বা composite পদ্ধতিতে বিশ্লেষণ করা।

উদাহরণঃ

- "Man is Mortal", it returns truth value "TRUE"
- "$12 + 9 = 3 - 2$", it returns truth value "FALSE"

সাধারণত, এতে ৫টি connectivity বিদ্যমান। যথাঃ

- OR ($\vee$)
- AND ($\wedge$)
- Negation/ NOT ($\neg$)
- Implication / if-then ($\rightarrow$)
- If and only if ($\Leftrightarrow$).

Predicate Logic: Predicate হল একটি statement, যা variable (predicate variables) contain করে এবং H variable এর উপর ভিত্তি করে True অথবা False হয়। Predicate logic হল Propositional logic এর extension।

উদাহরণঃ

Let $P(x, y) =$ "$x > y$".
Domain: Integers, i.e. both x and y are integers.

- $P(4, 3)$ means "$4 > 3$", so $P(4, 3)$ is TRUE;
- $P(1, 2)$ means "$1 > 2$", so $P(1, 2)$ is FALSE;
- $P(3,4)$ is false (in general, $P(x,y)$ and $P(y,x)$ not equal).

প্রশ্ন 13. Quantifier বলতে কি বুঝায়। উদাহরণসহ লিখ?
উত্তরঃ প্রিডিকেট এর চলকটি কোয়ান্টিফায়ার গুলো দ্বারা পরিমিত হয়। প্রিডিকেট লজিকে ২ ধরনের কোয়ান্টিফায়ার আছে।

i. Universal Quantifier
ii. Existential Quantifier

Universal Quantifier: ইউনিভার্সাল কোয়ান্টিফায়ার প্রকাশ করে যে এর ক্ষেত্রের মধ্যে থাকা বিবৃতিগুলি নির্দিষ্ট ভেরিয়েবলের প্রতিটি মানের জন্য সত্য। ইহাকে $\forall$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\forall x P(x)$ ইহাকে পড়া হয় x এর প্রতিটি মানের জন্য $P(x)$ সত্য।
উদাহরণঃ "Man is mortal" এর রূপান্তরিত প্রোপোজিশনাল ফর্ম হলো $\forall x P(x)$, যেখানে $P(x)$ হলো প্রিডিকেট যেটি x কে mortal হিসাবে প্রকাশ করে এবং Universe of Discourse হলো all men.

Existential Quantifier: Existential Quantifier প্রকাশ করে যে এর ক্ষেত্রের মধ্যে থাকা বিবৃতিগুলি নির্দিষ্ট ভেরিয়েবলের কিছু মানের জন্য সত্য। ইহাকে $\exists$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\exists x P(x)$ ইহাকে পড়া হয় x এর কিছু মানের জন্য $P(x)$ সত্য।
উদাহরণঃ "Some people are dishonest" এর রূপান্তরিত প্রোপোজিশনাল ফর্ম হলো $\exists x P(x)$, যেখানে $P(x)$ হলো প্রিডিকেট যেটি x কে dishonest হিসাবে প্রকাশ করে এবং Universe of Discourse হলো some people.

Nested Quantifiers: যদি আমরা কোন কোয়ানটিফায়ার ব্যবহার করি যা অন্য কোয়ান্টিফায়ার এর ক্ষেত্রের মধ্যে উপস্থিত থাকে তবে তাকে নেস্টেড কোয়ান্টিফায়ার বলে।

উদাহরণঃ

i. $\forall a \exists b\, P(x,y)$ যেখানে $P(a,b)$ নির্দেশ করে $a+b=0$
ii. $\forall a \forall b \forall c P(a,b,c)$ যেখানে $P(a,b)$ নির্দেশ করে $a+(b+c)=(a+b)+c$

[Note – $\forall a \exists b P(x,y) \neq \exists a \forall b P(x,y)$]

প্রশ্ন 14. Counting বলতে কি বুঝায়। উদাহরণসহ লিখ?
উত্তরঃ Counting মূলত fundamental counting rule, permutation rule এবং combination rule কে অন্তর্ভুক্ত করে।

The Rules of Sum and Product:
যোগ এবং গুণনের নিয়ম ব্যবহৃত হয় জটিল কাউন্টিং সমস্যা গুলো কে সাধারণ সমস্যায় পরিণত করতে।

i. **The Rules of Sum:** যদি কাজের ক্রম $T_1, T_2, \ldots, T_m$ হয় এবং যথাক্রমে $w_1, w_2, \ldots w_m$ উপায়ে সম্পন্ন করতে পারে (শর্তটি হল কোন কাজ এক সাথে করা যাবে না), তখন কার্যগুলোর মধ্যে যে কোন একটি করার বিভিন্ন উপায় হলো $W_1 + W_2 + \ldots\ldots + W_m$. মনে করি, দুইটি কাজ A এবং B যারা পরস্পর বিচ্ছিন্ন (i.e. $A \cap B = \emptyset A \cap B = \emptyset$), তখন গাণিতিকভাবে $|A \cup B| = |A| + |B|$

ii. **The Rules of Product:** যদি কাজের ক্রম $T_1, T_2, \ldots, T_m$ হয় এবং যথাক্রমে $w_1, w_2, \ldots w_m$ উপায়ে সম্পন্ন করতে পারে এবং পূর্ববর্তী কাজটি ঘটার পরে প্রতিটি কাজ উপস্থিত হয় তখন $W_1 \times W_2 \times \ldots\ldots \times W_m$ উপায়ে কাজটি সম্পন্ন হয়। গাণিতিকভাবে, যদি একটি কাজ A এর পরে কাজ B আসে তখন $|A \times B| = |A| \times |B|$ হবে।

প্রশ্ন 15. একটি ছেলে X এ বসবাস করে এবং স্কুল Z এ যেতে চায়। তার বাড়ী X থেকে প্রথমে Y তে এবং তারপর Y থেকে Z এ পৌছাতে হবে। সে X থেকে ৩ টি বাসের রাস্তা বা ২ টি ট্রেনের রাস্তা দিয়ে Y তে যেতে পারে। সেখান থেকে তিনি ৪ টি বাসের রাস্তা বা ৫ টি ট্রেনের রাস্তা দিয়ে Z এ পৌছানোর জন্য বেছে নিতে পারেন। X থেকে Z এ যাওয়ার জন্য কত গুলো রাস্তা আছে? (A boy lives in X and wants to go to school Z. Her home must be reached first from X to Y and from Y to Z. He can go to Y by 3 bus routes or 2 train routes from X. From there he can choose to reach Z by 4 bus routes or 5 train routes. How many roads are there from X to Z?)
উত্তরঃ X থেকে Y তে ৩+২= ৫ (Rule of Sum) উপায়ে যেতে পারে। এরপরে তিনি ৪+৫= ৯ (Rule of Sum) উপায়ে Y থেকে Z এ যেতে পারেন। এতএব X থেকে Z পর্যন্ত তিনি $5 \times 9 = 45$ (Rule of Product) উপায়ে যেতে পারেন।

প্রশ্ন ১৬. Prove that: $p \leftrightarrow q$ has exactly the same truth value as $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Sol^n:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

প্রশ্ন ১৭. Proved that $\sim p \vee \sim q$ is tautology or not? (প্রমান কর যে $\sim p \vee \sim q$ tautology কি না ?)

Sol^n:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

$\sim p \vee \sim q$ tautology নয়।

প্রশ্ন ১৮. Prove that, $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T

উপরের Truth Table থেকে বলা যায় $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$. (proved)

প্রশ্ন ১৯. Prove that $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ is tautology.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

উপরের truth table হতে পাই $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ হচ্ছে tautology.(proved)

প্রশ্ন ২০. $\neg p \vee q = p \rightarrow q$ একটি Implication প্রমাণ কর।

p	q	¬p	¬p∨q	p→q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\neg p \vee q = p \rightarrow q$ একটি Implication.(proved)

প্রশ্ন ২১. Show that $(p \wedge p) \wedge \neg(p \vee q)$ বিবৃতি একটি Contradiction statement

p	q	p∧q	p∨p	¬(p∨q)	(p∧q)∧¬(p∨q)
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

প্রশ্ন ২২. Show that $\neg(p \oplus q)$ and $p \leftrightarrow q$ are Logically equivalent.

p	q	(p⊕q)	¬(p⊕q)	p↔q
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	T

প্রশ্ন ২৩. $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \sim q)$ proposition টির truth table তৈরি কর।

p	q	~q	p⊕q	p⊕~q	(p⊕q)∧(p⊕~q)
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

প্রশ্ন ২৪. Show that $\neg(p \vee q)$ and $\neg p \wedge \neg q$ are equivalent ?

p	q	¬p	¬q	p∨q	¬(p∨q)	¬p∧¬q
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

প্রশ্ন ২৫. Truth table দ্বারা প্রমাণ কর যে, $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ একটি tautology।

A	B	A → B	(A → B) ∧ A	((A → B) ∧ A) → B
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

উপরের Truth Table থেকে বলা যায় $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ একটি tautology।

প্রশ্ন ২৬. নিচের এক্সপ্রেশন টি Simplify কর? (Simplify the following expression) $\neg(\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \vee \neg p$.) [BCC 4 TDC (AP)-2019]

Ans: $\neg(\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \vee \neg p$

$= (q \vee \neg(\neg p \vee q)) \vee \neg p$

$= (q \vee (p \wedge \neg q)) \vee \neg p$

$= ((q \vee p) \wedge (q \vee \neg q)) \vee \neg p$

$= ((q \vee p) \wedge T) \vee \neg p$

$= (q \vee p) \vee \neg p$

$= (q \vee \neg p) \vee (p \vee \neg p)$

$= (q \vee \neg p) \vee T$

$= T$

২৭)(ক) দেখাও যে, $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ is a tautology. (Show that $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ is a Tautology)[Food Ministry (SAE)-2021]

উত্তর: $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ এর Truth table নিচে দেখান হল

p	q	(p∧q)	(p∨q)	(p∧q)→(p∨q)
F	F	F	F	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

যেহেতু, $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ এর সবক্ষেত্রেই সত্য। সুতরাং, ইহা একটি tautology। (দেখানো হল)

Self Study

প্রশ্ন ১. Show that $(p \leftrightarrow q)$ and $\neg p \leftrightarrow \neg q$ are logically equivalent

প্রশ্ন ২. Show that $p \vee (q \wedge r)$ and $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ logically equivalent.

প্রশ্ন ৩. Show that $\sim(p \vee (\sim p \wedge q))$ and $(\sim p \wedge \sim q)$ logically equivalent.

প্রশ্ন ৪. Determine whether $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ is a tautology

প্রশ্ন ৫. Show that $p \vee (q \wedge r)$ and $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ logically equivalent

প্রশ্ন ৬. Show that $\neg(p \vee (p \wedge q))$ and $(\neg p \wedge \neg q)$ logically equivalent

প্রশ্ন ৭. Show that $P \vee \sim(p \wedge q)$ একটি টটোলজি।

প্রশ্ন ৮. Show that $\neg(p \wedge q)$ and $(\neg p \vee \neg q)$ বিবৃতিদ্বয় যৌক্তিকভাবে সমতুল্য।

প্রশ্ন ৯. Prove that $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ are logically equivalent.

প্রশ্ন ১০. Prove that $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ are logically equivalent.

প্রশ্ন ১১. Prove that $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ are logically equivalent

প্রশ্ন ১২. Show that each of these conditional statements is a tautology by using truth table.

(a) $(p \wedge q) \rightarrow p$
(b) $p \rightarrow (p \vee q)$
(c) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$
(d) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$
(e) $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
(f) $\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$

প্রশ্ন ১৩. Show that conditional statements are equivalent:

(a) $\neg p \leftrightarrow q$ and $p \leftrightarrow \neg p$
(b) $\neg(p \oplus q)$ and $p \leftrightarrow q$
(c) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ and $P \rightarrow (q \wedge r)$
(d) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ and $(p \wedge q) \rightarrow r$
(e) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ and $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

প্রশ্ন ১৪. Prove that $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.

প্রশ্ন ১৫. Show that

(i) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ is tautology.
(ii) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ is tautology.
(iii) $(P \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ is tautology.

প্রশ্ন ১৬. Laws of Algebra of Proposition:

ক. Idempotent laws:-
(i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$

খ. Associative laws:-
(i) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
(ii) $(p \wedge q) \wedge r \equiv P \wedge (q \wedge r)$

গ. Commatative laws:
(i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

ঘ. Distributive laws:-
(i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ঙ. Identity laws:-
(i) $P \wedge T = P$ (ii) $P \vee F = P$
(iii) $P \vee T = T$ (iv) $P \wedge F = F$

চ. Compliment laws:-
(i) $P \vee \sim P \equiv T$ (ii) $P \wedge \sim P \equiv F$
(iii) $\sim T \equiv F$ (iv) $\sim F \equiv T$

ছ. Demorgan's laws:-
(i) $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
(ii) $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

প্রশ্ন ১৭. বীজগণিতের সূত্রাবলীর সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

(i) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$

Sol^n: L.H.S $\equiv \sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
$\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q)$
$\equiv \sim p \wedge T$
$\equiv \sim p =$ **R.H.S (Proved)**

(ii) $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
Sol^n: L.H.S $\equiv \neg(p \rightarrow q)$
$\equiv \neg(\neg p \vee q)$
$\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q$
$\equiv p \wedge \neg q$ **(Proved)**

(iii) $(\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$
L.H.S $\equiv \neg(p \vee (\neg p \wedge q))$
$\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$
$\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q]$
$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$
$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\equiv \neg p \wedge \neg q$ **(Proved)**

(iv) Show that $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ is a Tautology.
Sol^n: $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
$\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$
$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$
$\equiv T \vee T$
$\equiv T$

So it is Tautology. **(Proved)**

Self Study

Solve Problem In Algebra Of Proposition.

(i) $p \wedge (q \vee (r \wedge T))$ (ii) $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge F)$
(iii) $P \wedge \neg q \wedge \neg r$ (iv) $(p \vee F) \wedge (q \vee T)$

Recurrence Relation

প্রশ্ন 1. Recurrence Relation বলতে কি বুঝায়। উদাহরণসহ লিখ? (What do mean Recurrence Relation? Write with example)

উত্তর: এমন একটি সমীকরণ যা পুনরাবৃত্তভাবে একটি অনুক্রম কে সংজ্ঞায়িত করে যেখানে পরবর্তী টার্ম হলো পূর্ববর্তী টার্মের একটি ফাংশন। { F_n কে প্রকাশ করা হয় কিছু F_i এর মিশ্রণ দ্বারা যেখানে $i<n$ }. Recurrence Relation কে Difference Equation ও বলা হয়।

উদাহরণ: Fibonacci Series- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, Tower of Hanoi- $F_n = 2F_{n-1} + 1$

প্রশ্ন 2. Linear Recurrence Relation বলতে কি বুঝায়। উদাহরণসহ লিখ? (What do mean Linear Recurrence Relation? Write with example)

উত্তরঃ ডিগ্রি K বা অর্ডার K এর একটি Linear Recurrence সমীকরণ হলো পুনরাবৃত্তি সমীকরণ যা First-degree polynomial $x_n = A_1x_{n-1} + A_2x_{n-1} + A_3x_{n-1} + \ldots A_kx_{n-k}$ (A_n হলো কনস্ট্যান্ট এবং $A_k \neq 0$) এর সংখ্যার ক্রম হিসাবে সাজানো থাকে। নিম্নে লিনিয়ার পুনরাবৃত্তি সমীকরণের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হলো –

Recurrence Relations	Initial values	Solutions
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$a_1 = a_2 = 1$	Fibonacci Number
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$a_1 = 1, a_2 = 3$	Locus Number
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$a_1 = a_2 = a_3 = 1$	Padovan Sequence
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$a_1 = 0, a_2 = 1$	Pell Number

মনে করি, দ্বিমাত্রার Linear Recurrence Relation হলো- $\mathbf{F_n = AF_{n-1} + BF_{n-2}}$ যেখানে A এবং B হলো বাস্তব সংখ্যা।
উপরোক্ত Recurrence Relation এর বৈশিষ্ট্যযুক্ত সমীকরণ হলো- $\mathbf{x^2 - Ax - B = 0}$
রুট বের করার জন্য তিনটি ঘটনা ঘটতে পারে-

i. Case-1: যদি এই সমীকরণের উৎপাদক $(x - x_1)(x - x_1) = 0$ হয় এবং ইহা দুইটি পৃথক বাস্তব রুট x_1 এবং x_2 উৎপন্ন করে, তখন এই সমীকরণের সমাধান হবে $F_n = ax_1^n + bx_2^n$ [যেখানে a এবং b হলো ধ্রুবক]
ii. Case-2: যদি এই সমীকরণের উৎপাদক $(x - x_1)^2 = 0$ হয় এবং ইহা একটি পৃথক বাস্তব রুট x_1 উৎপন্ন করে, তখন এই সমীকরণের সমাধান হবে $F_n = ax_1^n + bnx_2^n$
iii. Case-3: যদি এই সমীকরণ দুটি পৃথক জটিল রুট x_1 এবং x_2 পোলার ফর্ম $x_1 = r < \theta$ এবং $x_2 = r < -\theta$ তৈরি করে, তবে এই সমীকরণের সমাধান হবে $F_n = r^n (a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta))$

প্রশ্ন 3. Recurrence Relation এর মাধ্যমে সমাধান কর $F_n = 5F_{n-1} + 6F_{n-2}$? [যেখানে দেওয়া আছে $F_0 = 1$ এবং $F_1 = 4$]
(Solve by Recurrence Relation: $F_n = 5F_{n-1} + 6F_{n-2}$? **Where given,** $F_0 = 1$ **and** $F_1 = 4$)

উত্তরঃ Recurrence Relation এর বৈশিষ্ট্যযুক্ত সমীকরণ হলো-
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$\therefore (x - 3)(x - 2) = 0$
সুতরাং রুট $x_1 = 3$ এবং $x_2 = 2$
এতএব রুট বাস্তব এবং পৃথক। ইহা Case-1 দ্বারা সমাধান করতে হবে।
$\therefore F_n = ax_1^n + bx_2^n$
এখানে, $F_n = a3^n + b2^n$ [যেখানে $x_1 = 3$ এবং $x_2 = 2$]
$1 = F_0 = a3^0 + b2^0 = a + b$ ---------------(i)
$4 = F_1 = a3^1 + b2^1 = 3a + 2b$ -------------(ii)
সমীকরণ (i) এবং (ii) হতে পাই,
$a = 1 - b$
$3(1 - b) + 2b = 4$
$3 - 3b + 2b = 4$
$-b = 1$
$\therefore b = -1$
$\therefore a = 2$
$\therefore$ **the final solution is** $F_n = 2*3^n + (-1)2^n = 2*3^n - 2^n$

প্রশ্ন 4. Generating Function বলতে কি বুঝায়। উদাহরণসহ লিখ? (What do mean Generating Function? Write with example)

উত্তরঃ যখন একটি ক্রমের প্রতিটি পদ একটি পাওয়ার সিরিজে চলক x এর সহগ হিসাবে প্রকাশ করা হয় সেই ক্রম কে Generating Function হিসাবে উপস্থাপন করা হয়। গাণিতিকভাবে, একটি অসীম অনুক্রম $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k, \ldots\ldots$ এর জন্য Generating Function হবে $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

প্রশ্ন 5. অসীম ধারা 1,1,1,1,........? এর Generating Function নির্ণয় কর ? (Determine the Generating function of Infinite series 1,1,1,1,..................?)

উত্তরঃ এখানে $a_k = 1$ [$\therefore 0 \leq k \leq \infty$]
$\therefore G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{(1-x)}$

প্রশ্ন 6. Generating Function এর প্রয়োগ ক্ষেত্র গুলো লিখ? (Write the application of Generating Function?)

উত্তরঃ Generating Function এর প্রয়োগ ক্ষেত্র গুলো নিম্নরূপ-
i. বিভিন্ন গণনা সমস্যা সমাধানের জন্য।
ii. Recurrence Relation সমাধানের জন্য।
iii. কিছু combinatorial identities প্রমাণ করার জন্য।
iv. অনুক্রমের শর্তগুলির জন্য asymptotic সূত্রগুলি সন্ধানের জন্য।

বিন্যাস ও সমাবেশ

ফ্যাক্টরিয়াল মানঃ ধরি n একটা positive integer, তাহলে ফ্যাক্টরিয়াল n কে n! দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
যেখানেঃ n! = n*(n-1)*(n-2)* - - - *3*2*1
5! = 5*4*3*2*1

Permutation বা বিন্যাসঃ বিন্যাস সংখ্যা বের করতে হলে দল গঠন করবই, সাথে সেই দলের সদস্যদের কতরকম ভাবে সাজানো যায়, সেটাও নির্ণয় করব।
nPr = n*(n-1)*(n-2)*----*(n-r+1)
= n!/(n-r)!

Ex1. Cautions শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে ৪টি নিয়ে কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন শব্দ তৈরী করা সম্ভব?
Solⁿ: $^8P_4 = 1680$

বিন্যাস(Some Rules):

RULE-1: এটা বিন্যাসের সবচেয়ে সাধারণ নিয়ম। n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে সাজানোর উপায় সংখ্যা nPr.

RULE-2: n সংখ্যক বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তুকে যতবার ইচ্ছা ততবার নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা n^r(n>r)

Ex2. 0 থেকে 9 পর্যন্ত অংকগুলো যতবার খুশি ব্যবহার করে কোনো শহরে আট অংক বিশিষ্ট কতগুলো টেলিফোন সংযোগ দেয়া যাবে? (How many eight-digit telephones number can be connected in a city using the numbers from 0 to 9 as many times as you like?)
Solⁿ: 10^8 (n=10,r=8).

RULE-3: n সংখ্যক বস্তু থেকে p সংখ্যক একরকম,q সংখ্যক আরেকরকম এবং r সংখ্যক অপর একরকম এবং বাকিগুলো ভিন্ন ভিন্ন বস্তু নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা n!/(p! q! r!)

Ex3. Mississippi শব্দটির সবগুলো অক্ষর এক সাথে নিয়ে মোট কতগুলো বিন্যাস পাওয়া যাবে? (How many total Permutation can be found with all the letters of the word Mississippi together?)
Solⁿ: শব্দটিতে মোট 11টি অক্ষর যার 4টি s,4টি i ,2টি p এবং বাকি একটি স্বতন্ত্র(M)। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা 11!/(4! 4! 2!) = 34650

RULE-4: যেকোনো বস্তু বা বর্ণের অবস্থান স্থির রেখে যদি বিন্যাস সংখ্যা বের করতে বলা হয়,তবে এগুলো ছাড়া বাকিগুলোকে বিন্যস্ত করলেই বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যাবে। উদাহরন দিলে পরিষ্কার হবে বিষয়টি।

Ex4: স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে Director শব্দটির বর্ণগুলোকে কয়ভাবে সাজানো যাবে? (In How many different ways can the letters of the word 'director' be arranged without changing the position of the vowel?)
Solⁿ: এখানে শব্দটিতে স্বরবর্ণ আছে মোট 3টি।এই তিনটি বাদে ব্যাঞ্জনবর্ণ আছে 5টি। সুতরাং বিন্যাস সংখ্যা = 5!/2! = 60 (2! দিয়ে ভাগ হবে,R আছে 2টি,তাই)

RULE-5: p সংখ্যক বস্তু এবং r সংখ্যক বস্তুর আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে যদি তাদের বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করতে বলা হয়,তবে p সংখ্যক এবং r সংখ্যক উভয় বস্তুদের নিজ স্থানে রেখে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করে গুন দিতে হবে।উদাহরন দেখ,স্পষ্ট হবে।

Ex5. স্বরবর্ণ এবং ব্যাঞ্জনবর্নের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে Director শব্দটির অক্ষরগুলোকে কয়ভাবে সাজানো যায়? (In How many different ways can the letter 'director' letters be arranged without changing the relative position of vowels and consonants?)
Solⁿ: শব্দটিতে স্বরবর্ণ 3টি এবং ব্যাঞ্জনবর্ণ 5টি(2টি R) স্বরবর্ণ গুলোকে নিজ স্থানে রেখে সাজানো যায় 3! ভাবে এবং ব্যাঞ্জনবর্ণ গুলোকে 5!/2! ভাবে। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = 3!x(5!/2!) = 360

এই Rule গুলোর অন্তর্গত গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন (For MCQ and Written):

1. একটি তালার চারটি রিং এর প্রতিটিতে পাঁচটি করে অক্ষর আছে।চারটি অক্ষরের মাত্র একটি বিন্যাস এর জন্য তালা খোলা যাবে।কয়টি বিন্যাস এর জন্য খোলা যাবেনা? (Ans 624)
2. শহরের টেলিফোন নাম্বারগুলো 6 অংক বিশিষ্ট। মোট কতটি সংযোগ দেয়া সম্ভব? (কোনো নাম্বারে প্রথমে 0 থাকা যাবেনা) (Ans 90000)
3. বিল্ডিং এর এক কর্নারে লিখা আছে একটি শব্দ "Wastage"। এই শব্দটির বর্ণগুলোকে কয়ভাবে সাজানো যাবে যেন প্রথমে এবং শেষে A থাকে? (Ans 120)
4. 10টি ভিন্ন ভিন্ন বর্ণ থেকে 5টি বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যাবে,যাতে প্রতি শব্দে কমপক্ষে একটি বর্ণের পুনরাবৃত্তি থাকে?(RULE-1,RULE-2 এর সমন্বয়)

Ans: 69760
এখানে, ১০ টি ভিন্ন ভিন্ন বর্ণ থেকে ৫টি করে বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দের সংখ্যা =১০x১০x১০x১০x১০ = ১০০০০টি
কোন রিপিটেড বর্ণ থাকে না এমন শব্দের সংখ্যা= ১০x৯x৮x৭x৬=৩০২৪০
সুতরাং, কমপক্ষে একটি বর্ণের পুনরাবৃত্তি হবে এমন শব্দের সংখ্যা= ১০০০০০-৩০২৪০=৬৯৭৬০

Combination বা সমাবেশঃ সমাবেশ হল শুধুই দল গঠন করে রেখে দেয়া,সেই দলের সদস্যদের সাজাতে হবেনা।
nCr = n!/(r! * (n-r)!)

Ex-1: 15 জন প্লেয়ার হতে 11 জনের একটা ক্রিকেট দল কত ভাবে সাজানো যায়? (In how many different ways can a cricket team of 11 out of 15 players be arranged?)
Soln: 15C11 = 1365

Ex-2: মোট 7 জন পুরুষ এবং 3 জন নারী হতে 5 জন পুরুষ এবং 2 জন নারী নিয়ে কতগুলো গ্রুপ সাজানো সম্ভব? (In how many ways can a group of 5 men and 2 women be made out of a total of 7 men and 3 women?)
Soln: 7C5 * 3C2 = 63

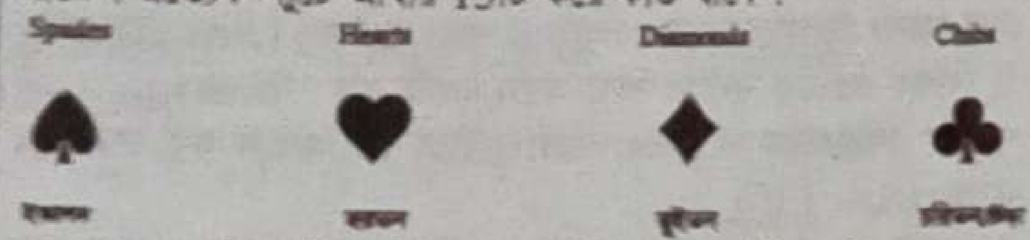
বিন্যাস ও সমাবেশ নিয়ে কিছু কথা
আচ্ছা,কেউ কি বিন্যাস এর মাঝে সমাবেশের গন্ধ পাচ্ছো??? ওকে,এটা নিয়ে তাহলে ব্যাখ্যা করি।

*১০টি বস্তু থেকে ৫টি নিয়ে কয়ভাবে সাজানো যায়?
Solⁿ: এটাতো বিন্যাসের অংক,তাই না? এ ব্যাপারে সন্দেহ নেই। কিন্তু কিন্তু একে সমাবেশের সাহায্যেও সমাধান করতে পারি। সমাবেশ হল দল গঠন করা। সমাবেশ মানে দল গঠন।দল গঠন করা হোক।10টি থেকে 5টি নিয়ে দল গঠন করার উপায় $^{10}C_5$. এবার সেই দলের সদস্যদের সাজানো হোক।

দলের সদস্য 5 জন। 5 জনকে সাজানোর উপায় 5! তাহলে এই অংকের উত্তর $^{10}C_5*5! = 30240$.কিন্তু নরমালি এটা আমরা এভাবে করে ফেলি 10P5. কিন্তু $10P5 = {}^{10}C_5*5!$ (ক্যালকুলেটর দেখ) অর্থাৎ $nPr = nCr \times r!$ সুতরাং বিন্যাস মানেও দল গঠন,তবে গঠনের পর তাদের সাজানো।

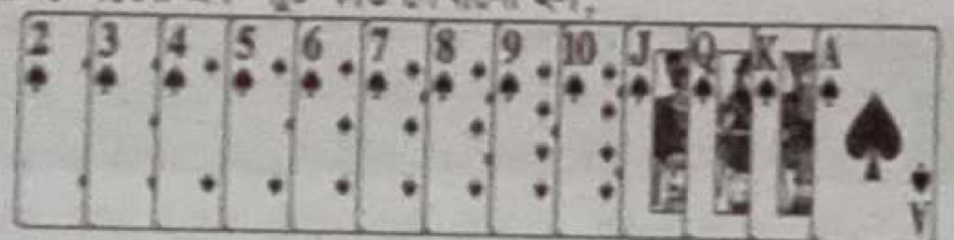
তাস (Play Card) পরিচিতি

এক প্যাকেট প্লেয়িং কার্ডে জোকার বাদে 4 স্যুটের মোট 52টি কার্ড থাকে। প্রত্যেক স্যুটে আবার 13টি করে কার্ড থাকে।



প্রত্যেক কার্ডে একটি সংখ্যা আর একটি করে প্রতীক আঁকা থাকে। প্রতীকগুলা হল, ♠ ♥ ♦ ♣ । এই ৪টি প্রতীকের ভিত্তিতে এক প্যাকেট কার্ডকে চারটি শ্রেণীতে ভাগ করা হয়। এই শ্রেণীকেই ইংরেজিতে আমরা স্যুট বলছি। প্রত্যেক স্যুটে 13টি এবং চার স্যুটে মোট 13 * 4 = 52টি কার্ড থাকে।

এক স্যুটের 13টি কার্ডঃ
এক স্যুটের 13টা কার্ড হল. 2-3-4-5-6-7-8-9-10-J-Q-K-A
J – Jukes = মোট 4টি
Q – Queen = মোট 4টি
K – King = মোট 4টি
A – টেক্কা = মোট 4টি
নিচে স্পেডের এক স্যুট কার্ড দেখানো হল,



Probability Theory

■ **Probability:** Probability হল সম্ভাব্যতা। অর্থাৎ কোন একটি event বা ঘটনা ঘটার অনুকূল বা সফল ফলাফল ও মোট ফলাফলের আনুপাতকে Probability বলে।
সুতরাং কোন ঘটনা ঘটার

$$\text{সম্ভাব্যতা} = \frac{\text{ঐ ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য সকল ফলাফলের সংখ্যা}}$$

উদাহরণ: যদি কোন একটি ঘটনা A এর মোট ফলাফল n এবং অনুকূল ফলাফল m হয় তবে, A ঘটনা ঘটার Probability, $P(A) = \frac{m}{n}$.

সম্ভাব্যতা তত্ত্বের গাণিতিক ও সুস্পষ্ট ব্যাখ্যা দিতে হলে এর কতগুলো সহায়ক উপাদান সম্পর্কে যথাযথ জ্ঞান থাকতে হবে। নিম্নে এসব উপাদানগুলো উল্লেখ করা হল-

1. নমুনাক্ষেত্র (Sample Space) : কোন পরীক্ষায় যে ফলাফলগুলো পাওয়া যায় তাদের প্রত্যেকটিকে একবার নিয়ে যে সেট পাওয়া যায় তাকে ঐ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র বলে । একে 'S' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
উদাহরণ ঃ একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে নমুনাক্ষেত্র হবে $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. নমুনাবিন্দু (Sample point): কোন নমুনাক্ষেত্রে যতগুলো উপাদান বা ফলাফল থাকে তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি নমুনাবিন্দু বলে।
উদাহরণ ঃ একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করা হলে এর নমুনাবিন্দু হবে,
নমুনাক্ষেত্র $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
এখানে, নমুনাবিন্দু 4টি [অর্থাৎ $2^2=4$]

[N.B: নিক্ষেপ করার ক্ষেত্রে নমুনাক্ষেত্র বা নমুনা বিন্দু বের করার নিয়ম।]
যার পিঠ যতটা হবে সেটা হবে তার Base এবং যতবার নিক্ষেপ করা হবে সেটা হবে তার Power.
নমুনাক্ষেত্র বা নমুনাবিন্দু = $(\text{Base})^{\text{Power}}$
(i) কয়েন নিক্ষেপনে এর Base হবে 2। কারণ এর পিঠ 2 টি।
(ii) ডায়াস বা ছক্কা নিক্ষেপণে এর Base হবে 6। কারণ এর পিঠ 6 টি হবে।
উদাঃ একটি কয়েন 5 বার নিক্ষেপে মোট নমুনাবিন্দু $2^5 =$ 32টি।

3. ঘটনা (Event): কোন পরিক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট নমুনাক্ষেত্রে কোন একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে ঘটনা বলে।
উদাহরণঃ একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় প্রাপ্ত ফলাফল সমূহ হল Head এবং Tail। এক্ষেত্রে প্রত্যেকটি এক একটি ঘটনা।

4. সম্পূর্ণ ঘটনা (Exclusive event) : কোন পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি এরূপ হয় যে, পরীক্ষাটি যে কোন অবস্থায় সম্পাদন করলে এদের যে কোন একটি অবশ্যই ঘটবে তবে ঘটনাগুলোকে সম্পূর্ণ ঘটনা বলা হয়।
উদাহরণঃ একটি ছক্কার উপরের পিঠে 1, 2, 3, 4, 5, 6 সংখ্যা গুলের যে কোন একটি আসতে পারে। সুতরাং ছক্কার উপরের পিঠে 1, 2, 3, 4, 5, 6 সংখ্যাগুলোর ঘটনা সম্পূর্ণ ঘটনা।

5. সরল ঘটনা (Simple event) : যদি কোন একটি ঘটনার নমুনাবিন্দু নিয়ে আর কোন ঘটনা লেখা না যায় তবে ঐ ঘটনাকে সরল ঘটনা বলে।
উদাহরণ ঃ একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষার ক্ষেত্রে 1, 2, 3, 4, 5, 6 প্রত্যেকেই একটি সরল ঘটনা। আবার একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় একটি Head নির্দেশকারী ঘটনাটি একটি সরল ঘটনা।

6. যৌগিক ঘটনা (Compound event): কোন পরীক্ষনের যে ঘটনাগুলোকে দুই বা ততোধিক ঘটনায় বা সরল ঘটনায় বিভক্ত করা সম্ভব সেই ঘটনাগুলোকে যৌগিক বা মিশ্র ঘটনা বলে।
উদাহরণ ঃ একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় প্রাপ্ত জোড় সংখ্যার ঘটনা {2, 4, 6} বিজোড় সংখ্যার ঘটনা {1, 3, 5} এবং তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার ঘটনা {3, 6} ইত্যাদি ঘটনাগুলো একটি যৌগিক ঘটনা।

দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপে 'একই পিঠ' এর ঘটনাটি যৌগিক ঘটনা যথাঃ- {HH, TT}

7. নিশ্চিত ঘটনা (Sure event) : যদি কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এক (1) হয় তবে এটাকে নিশ্চিত ঘটনা বলে। অর্থাৎ কোন নমুনাক্ষেত্রের সকল নমুনা বিন্দুই যদি একটি ঘটনার অনুকূলে ঘটে তবে ঐ ঘটনাকে নিশ্চিত ঘটনা বলে। $P(A) = \frac{s}{s} = 1$

উদাহরণ ঃ একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে উপরের পিঠে "যে কোন সংখ্যা" এর ঘটনা একটি নিশ্চিত ঘটনা।

8. সম সম্ভাব্য ঘটনা ঃ (Equally Likely events):
কোন পরীক্ষনে কতগুলো ঘটনার মধ্যে, প্রত্যেকটি সম্ভাব্যতা সমান হলে উক্ত ঘটনা গুলোকে সম সম্ভাব্য ঘটনা বলে।
উদাহরণঃ একটি কয়েন নিক্ষেপনে প্রাপ্ত ফলাফল এর সমসম্ভাব্যতা হল $\frac{1}{2}$ অর্থাৎ Head আসার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$, Tail আসার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$.

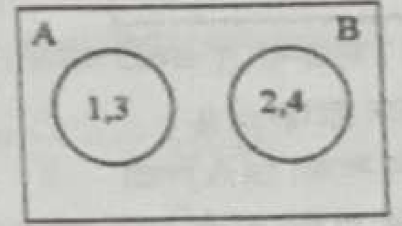
9. স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Events):
দুইটি ঘটনাকে তখনই স্বাধীন বলা হবে যখন এদের একটি পরীক্ষার ফলাফল অপর পরীক্ষার ফলাফলের উপর নির্ভর করবে না।
উদাহরণঃ দুইটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে একটি ছক্কা পড়ার ঘটনা অন্যটিতে ছক্কা পড়ার উপর নির্ভর করে না। এক্ষেত্রে ছক্কা পাওয়ার ঘটনা দু'টি পরস্পর স্বাধীন।
Let Event A ও Event B Independent হবে,
যদি $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ হয়।

10. অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা (Dependent event) :
যদি কোন পরীক্ষনে ২টি ঘটনা এরূপ হয় যে, এদের কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা অন্য ঘটনাটির উপর নির্ভর করে তবে তাকে অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা বলে।
উদাহরণঃ এক প্যাকেট তাস হতে পর পর ২টি তাস নেয়া হলে প্রথম তাসটি যে কোন রংয়ের পাওয়া যেতে পারে এবং দ্বিতীয় তাসটি সেই নির্দিষ্ট রংয়ের হবে তা প্রথম তাসটি প্যাকেটে ফেরত দেয়ার উপর নির্ভর করে। এখানে প্রথম ঘটনাটির উপর দ্বিতীয় ঘটনাটি নির্ভরশীল।

11. অসম্ভব ঘটনা (Impossible event): যদি কোন ঘটনার অনুকূলে কোন ফলাফল না পাওয়া যায় অর্থাৎ কোন একটি ঘটনা পরীক্ষণে যখন কোন অবস্থাতেই ঘটনাটি ঘটবে না তবে তাকে অসম্ভব ঘটনা বলে।
উদাহরণ ঃ একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় উপরের পিঠে 7 পাওয়ার ঘটনা একটি অসম্ভব ঘটনা। $P(A) = \frac{0}{s} = 0$

12. পূরক ঘটনা (Complement events) : একটি পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট যে কোন একটি ঘটনা ঘটা এবং না ঘটার ঘটনাকে পরস্পর পূরক ঘটনা বলা হয়। পূরক ঘটনাদ্বয়ের পৃথক সম্ভাবনার যোগফল 1 হবে। সুতরাং $P(A)+P(A^c) = 1$
উদাহরণ ঃ একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা হবার ঘটনা $A = \{1, 3, 5\}$ এবং A ঘটনার পূরক ঘটনা হবে বিজোড় সংখ্যা না হবার ঘটনা । অর্থাৎ পূরক ঘটনা $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$

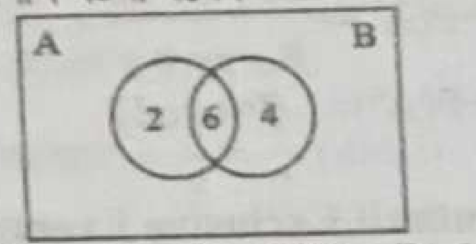
13. বর্জনশীল ঘটনা (Mutually exclusive events) : যদি কতগুলো ঘটনা এমন হয় যে, এদের যে কোন একটি ঘটলে বাকিগুলো ঘটবে না। তবে এই ঘটনাগুলোকে বর্জনশীল ঘটনা বলে।



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

উদাহরণ ঃ ধরি ঘটনা A= {1, 3} এবং B = {2, 4} পরস্পর বর্জনশীল। A ও B বর্জনশীল হলে $A \cap B = \phi$

14. অবর্জনশীল ঘটনা (Not mutually exclusive events) : যদি দুই বা ততোধিক ঘটনার কোন সাধারন বিন্দু থাকে তবে এই ঘটনাগুলোকে অবর্জনশীল ঘটনা বলে।



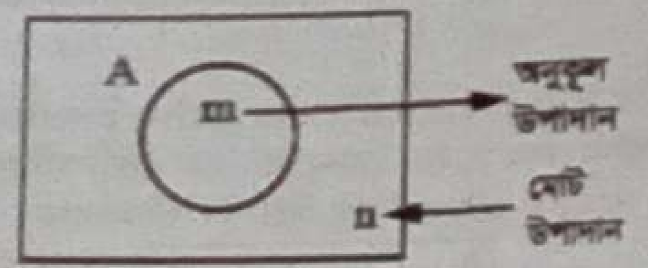
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

উদাহরণ ঃ ধরি ঘটনা A = {2, 4, 6} এবং ঘটনা B = {3, 6} অবর্জনশীল ঘটনা হলে $A \cap B = 6$

15. Conditional Probability: কোন একটি পরীক্ষা ক্ষেত্রে যদি কোন event বা ঘটনা ঘটার Probability অন্য কোন event বা ঘটনা ইতিপূর্বে ঘটেছে কিংবা ঘটেনি তার উপর Depend করে তবে ঐ ঘটনার সম্ভাব্যতাকে Conditional Probability বলে।
অর্থাৎ E ও F দুটি ঘটনার মধ্যে যদি
(i) Event E যদি Event F এর উপর depend করে, তবে
$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$
(ii) Event F যদি Event E এর উপর depend করে, তবে
$$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

16. দৈব পরীক্ষা (Random Experiment): যখন কোন পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল আগে থেকে জানা থাকে কিন্তু পরীক্ষাটিতে কোন একটি নির্দিষ্ট চেষ্টায় কী ফলাফল আসবে তা নিশ্চিত করে বলা যায় না তাকে দৈব পরীক্ষা বলে।
উদাহরণ ঃ একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপ করা হলে {H, T} এর যে কোনো একটি উঠবে এটি নিশ্চিত কিন্তু মুদ্রা নিক্ষেপের পূর্বে নিশ্চিতভাবে বলা যায় না যে কোনটি আসবে।

প্রশ্ন ১. প্রমাণ কর যে, p+q=1 or, সম্ভাব্যতার পূর্বক সূত্রটি প্রমান কর। or, প্রমাণ কর যে, $P(A)+P(A^C)=1$ or, প্রমাণ কর যে, কোন ঘটনা ঘটার বা না ঘটার সম্ভাব্যতার যোগফল 1।
Sol^n:



Let, S একটি নমুনা ক্ষেত্রে যা A একটি ঘটনা।

$\therefore$ মোট উপাদান সংখ্যা = n

অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(A)=m$

প্রতিকূল উপাদান সংখ্যা $n(A^c)=n-m$

$$\therefore P(A)=\frac{m}{n} \text{ .... (i)}$$

$$P(A^c)=\frac{n-m}{n} \text{ .... (ii)}$$

(i) + (ii)

$$\therefore P(A)+P(A^c)=\frac{m}{n}+\frac{n-m}{n}=\frac{m}{n}+\frac{n}{n}-\frac{m}{n}=1$$

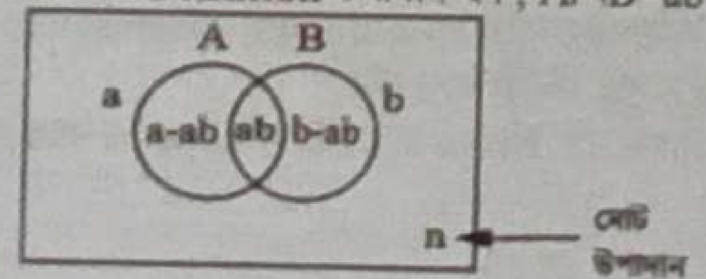
$\therefore P(A)+P(A^c)=1$ (Proved)

প্রশ্ন ২. Not Mutuall Exclusive Events এর সূত্রটি লেখ এবং প্রমান কর। Or, Prove that, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

উপপাদ্যঃ যদি S নমুনাক্ষেত্রে ২টি ঘটনা A ও B হয় তবে $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ হবে।

Sol^n: Let, S একটি নমুনাক্ষেত্র যার মোট উপাদান n এবং A ও B ২টি event যার উপাদান যথাক্রমে a ও b

A ও B এর Common উপাদান হল, $A\cap B=ab$



$$\therefore P(A)=\frac{a}{n},\ P(B)=\frac{b}{n},\quad P(A\cap B)=\frac{ab}{n}$$

ভেনচিত্র হতে পাই,

$$A\cup B=a-ab+ab+b-ab=a+b-ab$$

$$\therefore P(A\cup B)=\frac{a+b-ab}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{ab}{n}$$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (Proved)

প্রশ্ন 3. কোন ঘটনার সম্ভাব্যতা '0' হতে '1' এর মধ্যবর্তী হবে অর্থাৎ $0\le P(A)\le 1$ (The probability of an event will be between '0' and '1' that is $0\le P(A)\le 1$)

প্রমান ঃ Let S কোন নমুনাক্ষেত্র A একটি ঘটনা যার মোট উপাদান n, এবং অনুকূলে উপাদান m

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

যদি A ঘটনা অসম্ভব হয় তবে, A ঘটনার কোন উপাদান থকবে না। অর্থাৎ $m=0$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0 \text{ .... (i)}$$

আবার, যদি A ঘটনা নিশ্চিত হয় তবে, A ঘটনার অনুকূল উপাদান থাকবে, এবং নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান একই হবে, $n=m$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1 \text{ ....(ii)}$$

$0\le P(A)\le 1$ (Proved)

প্রশ্ন 4. কোন ঘটনা না ঘটার সম্ভব্যতা 0 থেকে 1 এর মধ্যে থাকবে। অর্থাৎ $0<q<1$. (The probability that no event will occur will be between '0' and '1' That is $0<q<1$)

প্রমাণ Let S নমুনাক্ষেত্রে A একটি ঘটনা। যার মোট উপাদান = n এবং অনুকূল উপাদান = m, এবং প্রতিকূল উপাদান = n - m.

$$P(\overline{A})=q=\frac{n-m}{n}$$

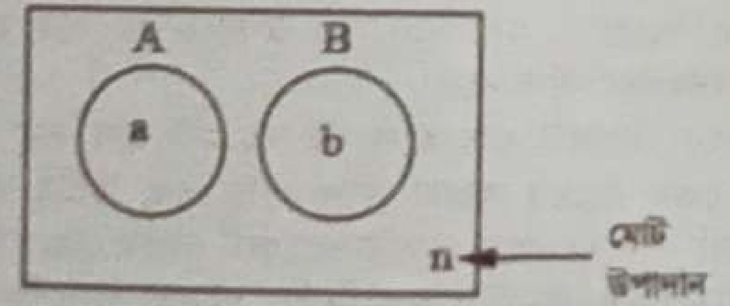
এটা স্পষ্ট যে, n - m, এর মান 0 থেকে n এর মধ্যে থাকবে, অর্থাৎ $0<(n-m)<n$

$$\frac{0}{n}<\frac{n-m}{n}<\frac{n}{n}$$

$0<q<1$ (Proved)

প্রশ্ন 5. Mutually Exclusive Events এর সূত্রটি লেখ এবং প্রমান কর $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$। Or, Prove that, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Sol^n: Let S একটি নমুনাক্ষেত্র যার A ও B 2টি ঘটনা যার মোট উপাদান = n



A এর অনুকূল উপাদান = a

B এর অনুকূল উপাদান = b

$$P(A)=\frac{a}{n}, P(B)=\frac{b}{n}$$

ভেনচিত্র হতে পাই,

$$A\cup B=a+b$$

$$P(A\cup B)=\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=P(A)+P(B)$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (Proved)

বাইনোমিয়াল ট্রায়াল (binomial distribution):

k সংখ্যক সাকসেস এর জন্য বাইনোমিয়াল ট্রায়াল B (n, p) কে $P(k)={}^NC_K\,p^kq^{n-k}$ লেখা হয়।

এখানে, k = সাকসেসের সম্ভব্যতা, P = অনুকূল সম্ভব্যতা q = প্রতিকূল সম্ভব্যতা।

একটি কয়েন পরপর 6 বার ছোড়া হলো। উপরের পিঠে ২ বার Head আসার সম্ভাব্যতা কত?

Sol^n.

$$P(k)={}^NC_k\,p^k\,q^{n-k}$$

$$={}^6C_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{6-2}$$

$$={}^6C_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^6$$

$$=15/64 \text{ (Ans)}$$

$n=6$

$k=2$

$P=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$

মুদ্রা

মনে রাখবেন মুদ্রার অংক মানেই নমুনাক্ষেত্রঃ	2^n

প্রশ্ন 1. 10 টি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল নমুনা বিন্দু কতগুলো হবে বা নমুনাক্ষেত্র কত? (What is the sample point or the sample space when 10 coins are thrown together?)

Sol^n: We Know Total Sample = 2^n

Here, n = 10

নমুনা বিন্দু = $2^{10}=1024$ টি (Ans:)

প্রশ্ন 2. চারটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। (What is the sample space when 4 coins are thrown together?)

Sol^n: নমুনাক্ষেত্র S = {HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT}

প্রশ্ন 3. একটি মুদ্রা উপরের দিকে তিন বার নিক্ষেপ করা হলঃ (A coin is thrown upwards 3 times.)

(i) নমুনাক্ষেত্রগুলো লিখ ও নমুনা বিন্দু কত? ? (Write the sample space and sample point?)

(ii) উপরের পিঠে Head না হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (What is the probability of not having a head on the upper back?)

(iii) উপরের পিঠে কমপক্ষে ২টি Head হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (What is the probability of getting at least 2 heads on the upper back?)

(iv) উপরের পিঠে একটি Head হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (What is the probability of getting 1 head on the upper back?)

(v) উপরের পিঠে বড় জোর 1টি Head হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (What is the probability of getting a maximum of 1 head on the upper back?)

(vi) দুইবার টেইল ও একবার হেড পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (What is the probability of getting tail twice and head once?)

Sol^n: (i) নমুনাক্ষেত্র S={HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

নমুনাবিন্দু = $2^3=8$ টি (Ans :)

(ii) অনুকূল ঘটনা = 1, মোট উপাদান = 8

$$\text{সম্ভাব্যতা}=\frac{1}{8} \text{ (Ans:)}$$

বিকল্প ঃ $\frac{{}^3C_0}{2^3}=\frac{1}{8}$ (Ans:)

(iii) অনুকূল ঘটনা = 4, মোট উপাদান/ফলাফল = 8

$$\text{সম্ভাব্যতা}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \text{ (Ans:)}$$

বিকল্প ঃ $\frac{{}^3C_2}{2^3}+\frac{{}^3C_3}{2^3}=\frac{1}{2}$

(iv) অনুকূল ঘটনা = 3, মোট উপাদান = 8

$$\text{সম্ভাব্যতা}=\frac{3}{8} \text{ (Ans:)}$$

বিকল্প ঃ $\frac{{}^3C_1}{2^3}=\frac{3}{8}$

(v) অনুকূল ঘটনা = 4 মোট উপাদান = 8

$$\text{সম্ভাব্যতা}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \text{ (Ans:)}$$

বিকল্প ঃ- $\frac{{}^3C_1}{2^3}+\frac{{}^3C_0}{2^3}=\frac{1}{2}$

(vi) অনুকূল ঘটনা = 3 মোট উপাদান = 8

সম্ভাব্যতা = 3/8 (Ans)

প্রশ্ন 4. 10 টি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল 3 টি Head পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (What is the probability of getting 3 head when 10 coins are thrown together?)

Sol^n: সম্ভাব্যতা = $\frac{{}^{10}C_3}{1024}=\frac{15}{128}$ (Ans:)

প্রশ্ন 5. একটি কয়েন 6 বার টস করা হল। 2 বার হেড পড়ার সম্ভাবনা কত? কমপক্ষে 4 বার হেড হবার সম্ভাবনা কত? (A coin was tossed 6 times.What is the probability of getting 2 head? What is the probability of getting at least 4 heads?)

মোট উপাদান = $2^6=64$

2 বার হেড পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{{}^6C_2}{64}=\frac{15}{64}$ (Ans :)

কমপক্ষে চার বার হেড পাওয়ার সম্ভাবনা

$$\frac{{}^6C_4}{64}+\frac{{}^6C_5}{64}+\frac{{}^6C_6}{64}=\frac{11}{32} \text{ (Ans:)}$$

প্রশ্ন 6. চারটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। সম্ভাবনাগুলো বের কর? (4 coins are thrown together. Find the probabilities?)

(i) দুইবার Head (ii) কমপক্ষে তিনটি Head (iii) বড় জোর দুইটি Head।

Sol^n: (i) অনুকূল = 6, মোট ফলাফল = 16

$$\text{সম্ভাবনা}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8} \text{ (Ans:)}$$

(ii) অনুকূল $= 5$, মোট ফলাফল $= 16$

সম্ভাবনা $= \frac{5}{16}$ (Ans:)

(iii) অনুকূল $= 11$ মোট ফলাফল $= 16$

সম্ভাবনা $= \frac{11}{16}$ (Ans:)

Self Study

প্রশ্ন ১. একটি সুষম মুদ্রা পরপর তিনবার টস করা হলো। প্রতি টসেই প্রথমে হেড পাবার শর্তে বা ততোধিক বার হেড পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। কোন শর্ত আরোপ না করা হলে 2 বা ততোধিক হেড পাবার সম্ভাবনা কত? **(A balanced exchange was tossed three times in a row. Determine the condition of getting the head in each toss or the condition of getting the head more times. How much is 2 or more heads if no conditions are imposed?)**

Ans: $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$

প্রশ্ন ২. তিনটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। (Write Sample space when 3 coins are thrown) (a) কোন tail না (b) একটি tail (c) কমপক্ষে একটি tail পাওয়ার সম্ভাবনা কত?Ans: (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{7}{8}$

প্রশ্ন ৩. একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপণ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ। (a) 3 টি হেড (b) 2 টি হেড (c) কমপক্ষে 2 টি হেড (d) বড়জোড় 2টি হেড (e) 0 টি হেড আসার সম্ভাব্যতা কত?

Ans: (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{7}{8}$ (e) $\frac{1}{8}$

ছক্কা

মনে রাখবেন ছক্কার অংক মানেই নমুনাক্ষেত্র	6^n

প্রশ্ন ১. যদি একটি ছক্কা নিক্ষেপ করি তাহলে উপরের পিঠে (2) অথবা (3) দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত? ? (What is the probability of getting a number divisible by 2 or 3 on the upper back if we throw a dice?)

Solution:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$= 3/6 + 2/6$$
$$= 2/3 \text{ Ans.}$$

প্রশ্ন ২. একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হল। নমুনাক্ষেত্র ও নমুনাবিন্দু কত? (A dice was thrown once. Write Sample space and Sample point.)

Sol^n: নমুনাক্ষেত্র $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

নমুনাবিন্দু $= 6$(Ans:)

প্রশ্ন ৩. একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হল। নিম্নের সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। (A dice was thrown once.Find the following Probabilities:)

(i) উপরের পিঠে 6 আসার সম্ভাবনা কত ? (What is the probability of coming 6 to the upper back?)

(ii)উপরের পিঠে 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার সম্ভাবনা কত? (What is the probability of a number divisible by 2 on the upper back?)

(iii)উপরের পিঠে যে কোন সংখ্যার সম্ভাবনা কত? (What is the probability of any number coming on the upper bac

(iv)উপরের পিঠে 2এবং3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার সম্ভাবনা কত? (What is the probability of a number divisible by 2 and 3 on the upper back?)

(v) উপরের পিঠে 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত? (What is the probability of a number divisible by 2 or 3 on the upper back?)

(vi)উপরের পিঠে বিজোড় সংখ্যা সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত ? (What is the probability of an Odd number coming on the upper back?)

(vii) উপরের পিঠে জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত? (What is the probability of an Even number coming on the upper back?)

Sol^n: (i) অনুকূল ঘটনা $= 1$,মোট উপাদান $= 6$

সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{6}$ (Ans:)

(ii) 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা $= \{2, 4, 6\} = 3$টি,

অনুকূল ঘটনা $= 3$, মোট উপাদান $= 6$

সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (Ans:)

(iii) সম্ভাব্যতা$= 6/6 = 1$ (Ans:)

(iv) 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা $= \{6\} = 1$টি

অনুকূল ঘটনা $= 1$, মোট উপাদান $= 6$

সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{6}$

$\therefore P(A\cap B) = \frac{1}{6}$ (Ans:)

(v) Let 2 দ্বারা বিভাজ্য $A=\{2, 4, 6\}=3$

$\therefore P(A)=\frac{3}{6}$

3 দ্বারা বিভাজ্য $B=\{3, 6\}=2$

$\therefore P(B)=\frac{2}{6}$

$P(A\cap B) = 1/6$

$\therefore$ সম্ভাব্যতা $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - 1/6$

$= 2/3$ (Ans:)

(vi) বিজোড় সংখ্যা $= \{1, 3, 5\}=3$

সম্ভাব্যতা$= 3/6 = 1/2$ (Ans:)

(vii) জোড় সংখ্যা $= \{2, 4, 6\}=3$

সম্ভাব্যতা$= 3/6 = 1/2$ (Ans:)

প্রশ্ন ৪. দুইটি ছক্কা শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। নমুনাক্ষেত্রটি লিখ, এবং নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা বের কর।(Two dice were thrown in the air. Write the sample space and find out the possibilities of the following field?)

(i) অন্তত একটি 6 পাওয়ার (What are the probabilities of getting at least one six?)

(ii) প্রথম ছক্কার সংখ্যা দ্বিতীয় ছক্কার সংখ্যার দ্বিগুণ।(The number of first sixes is double the number of second sixes.)

Sol^n:

নমুনাক্ষেত্র $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), 1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

নমুনাবিন্দু $6^n = 6^2 = 36$টি।

(i) অনুকূল ফলাফল $= 11$, মোট ফলাফল $= 36$

সম্ভাবনা $= \frac{11}{36}$ (Ans:)

(ii) অনুকূল ফলাফল $= 3$

নমুনাক্ষেত্র $\{(2,1), (4,2), (6, 3)\}$

মোট ফলাফল $= 36$

সম্ভাবনা $= \frac{3}{36}$ (Ans:)

প্রশ্ন ৫. দুটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো উপরের পিঠে - (Two dice were thrown together. On the upper back-)

১.সংখ্যার যোগফল ৭ আসার সম্ভাবতা কত? (What is the probability that the sum of the numbers will be Seven?)

২.সংখ্যার যোগফল ৯ আসার সম্ভাবতা কত?

(What is the probability that the sum of the numbers will be Nine?)

Sol^n: ছক্কা 2টি নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রঃ

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

মোট নমুনাক্ষেত্র $= 36$

উপরের পিঠে 7 হবার সম্ভাব্যতা

$\Rightarrow \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (Ans:)

উপরের পিঠে ৯ আসার সম্ভাবতা

$\Rightarrow \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (Ans:)

প্রশ্ন ৬. দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ। ১ম ছক্কার পাঠ = x এবং ২য় ছক্কার পাঠ = y হলে নিম্নের সম্ভাব্যতা গুলো নির্ণয় কর।(Two dice were thrown together. Write a sample space. If the text of the first six = X and the text of the second six = Y then determine the following possibilities.)

i. $(x=y)$
ii. $x = 2y$
iii. $2x = y$
iv. সম্ভাব্যতা $(x+y = 7)$
v. সম্ভাব্যতা $(x+y > 7)$

Sol^n:

$S(x,y) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6, 3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

(i) $(x=y) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$
$= 6$ টি

$P(x = y) = \frac{6}{36} = 1/6$

(ii) $(x = 2y) = \{(2,1),(4,2),(6,3)\} = 3$ টি

$P(x = 2y) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(iii) $(2x = y) = \{(1,2),(2,4),(3,6)\} = 3$ টি

$P(2x = y) = 3/36 = 1/12$

(iv $P(x + y = 7) = \{(1,6), (2,5), (3,4), (6,1), (5,2), (4,3)\}$
$= 6$ টি

$P(x + y = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(v) $P(x + y > 7) = \{(2,6),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6), (5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5), (6,6)\} = 15$ টি।

$$P(x+y>7)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

প্রশ্ন ৭. একটি ছক্কা দুইবার চাল দেওয়া হলো। প্রথম চালে 4, 5, 6 এবং দ্বিতীয় চালে 1, 2, 3, 4 ওঠার সম্ভাব্যতা বের কর।(**A dice was thrown twice. Find the probability of getting four, five, six in the first throw and one, two, three, four in the second throw?)**

Sol^n: মনে করি, প্রথম চালের ঘটনা $A=\{4, 5, 6\}$ এবং দ্বিতীয় চালের ঘটনা $B=\{1, 2, 3, 4\}$ $P(A)=\frac{3}{6}$ এবং $P(B)=\frac{4}{6}$

সম্ভাব্যতা $=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$

প্রশ্ন ৮. যদি দুটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয়। সমষ্টির সম্ভাবনা কত (**If two dice are thrown. what is the probability that the sum is-)**

i. ৮ এর চেয়ে বড় (**Greater than 8)**
ii. সাতও না এগারও না | (**Neither 7 nor 11)**

Sol^n: ২ টি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রঃ

	১	২	৩	৪	৫	৬
১	(১,১)	(১,২)	(১,৩)	(১,৪)	(১,৫)	(১,৬)
২	(২,১)	(২,২)	(২,৩)	(২,৪)	(২,৫)	(২,৬)
৩	(৩,১)	(৩,২)	(৩,৩)	(৩,৪)	(৩,৫)	(৩,৬)
৪	(৪,১)	(৪,২)	(৪,৩)	(৪,৪)	(৪,৫)	(৪,৬)
৫	(৫,১)	(৫,২)	(৫,৩)	(৫,৪)	(৫,৫)	(৫,৬)
৬	(৬,১)	(৬,২)	(৬,৩)	(৬,৪)	(৬,৫)	(৬,৬)

মোট নমুনাক্ষেত্র = ৩৬

i. যোগফল ৮ এর চেয়ে বড় সংখ্যা গুলো হলোঃ
(৩,৬),(৪,৫),(৪,৬),(৫,৪),(৫,৫),(৫,৬),(৬,৩),(৬,৪),(৬,৫),(৬,৬) = ১০
∴Probability(Greater than 8) = ১০/৩৬ = ৫/১৮ (**Ans.**)

ii. যোগফল ৭ বা ১১ হবে এমন সংখ্যা গুলো হলোঃ
(১,৬),(২,৫),(৩,৪),(৪,৩),(৫,২),(৬,১),(৫,৬), (৬,৫) = ৮

iii. ∴Probability(Neither 7 nor 11) =১-৮/৩৬ = ২৮/৩৬ (**Ans.**)

প্রশ্ন ৯. একটি ছয়মুখী নিরপেক্ষ ছক্কা ছুঁড়ে দিলে যৌগিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (**What is the probability of getting a composite number when a six-faces unbiased dice is tossed.)**

Sol^n: $n(S)=6$, $n(E)=(4,6)=2$
$P(E)=2/6=1/3$ (**Ans.**)

Self Study

প্রশ্ন ১. একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে নিম্ন লিখিত সংখ্যাগুলো উপরের পিঠে পাবার সম্ভাব্যতা কত? (**What is the probability of getting the following numbers in the upper back if a dice is thrown?)**

(a) 3 সংখ্যাটি
(b) 4 অপেক্ষা বড় সংখ্যা
(c) জোড় সংখ্যা
(e) 2 অপেক্ষা ছোট সংখ্যা।

Ans: (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{6}$

প্রশ্ন ২. দুইটি নিরপেক্ষ ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হল। নমুনাক্ষেত্রটি লিখ এবং নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় কর।(**Two neutral dice were thrown together once. Write the sample space and determine the following possibilities?)**

(a) প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের ব্যবধান 4 বা তার বেশি
(b) প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 7 অথবা 6
(c) প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল বড় জোড় 3

Ans: (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{11}{36}$ (c) $\frac{1}{12}$

প্রশ্ন ৩. দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনাক্ষেত্রটি তৈরি কর এবং দুইটি ছক্কারই 6 উঠার সম্ভাব্যতা কত? (**If two dice are thrown together, write their sample space and what is the probability of two dice getting six?)**

Ans: $\frac{1}{36}$

মুদ্রা ও ছক্কা

প্রশ্ন ১. 2টি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে নমুনাবিন্দু কত হবে।(**What would be the sampling point if two coins and a dice were thrown together?)**

(i) নমুনা ক্ষেত্র কত হবে? (**What will be the sample space?)**
(ii) **1টি Head** পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (**What is the probability of getting a head?)**
(iii) **2টি Tail** এবং ছক্কায় **4** পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (**What is the probability of getting two tails in a coin and 4 in a dice?)**
(iv) উভয় পিঠ একই পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (**What is the probability of getting both backs the same?)**

Sol^n:

	1	2	3	4	5	6
TT	TT1	TT2	TT3	TT4	TT5	TT6
TH	TH1	TH2	TH3	TH4	TH5	TH6
HT	HT1	HT2	HT3	HT4	HT5	HT6
HH	HH1	HH2	HH3	HH4	HH5	HH6

(i) নমুনাবিন্দু $=2^2\times6=24$টি
(ii) অনুকূল ঘটনা $=2\times6=12$, মোট উপাদান$=24$

সম্ভাব্যতা$=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ (Ans:)

বিকল্প ঃ $\frac{{}^2C_1\times6}{24}=\frac{1}{2}$

(iii) অনুকূল ঘটনা = 1 মোট উপাদান = 24

সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{24}$ (Ans:)

বিকল্প ঃ ((2C2*6) * (1/6))/24

$\frac{1}{24}$ (Ans:)

(iv) অনুকূল ঘটনা $=2\times6=12$ মোট উপাদান $=24$

সম্ভাব্যতা $=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ (Ans:)

প্রশ্ন ২. একটি ডাইকে গড়াইয়া এবং একই কয়েনকে উপরদিকে ছুড়িয়া দেওয়া হইল। ডাইটি একটি বিজোড় সংখ্যা এবং কয়েনটি একটি হেড প্রদর্শন করিবার সম্ভাবতা বের কর। (**A dice was rolled and a coin was tossed upwards. Find the probability that the dice is an odd number and the coin is a head?)**

Sol^n:নমুনাক্ষেত্র $S=\{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$
মোট ফলাফল = 12
অনুকূল ফলাফল $=\{H1, H3, H5\}=3$
নির্ণয় সম্ভাব্যতা $=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ (Ans)

Self Study

প্রশ্ন ১. 2 টি নিখুঁত মুদ্রা ও একটি নিখুঁত ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হল। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং (**Two perfect coins and a perfect dice were thrown together once. Write the sample space and)**

(a) 2 টি Head ও বিজোড় সংখ্যা(Two heads and an odd number.)
(b) 1 টি Tail ও জোড় সংখ্যা(A tail and even number.)
(c) যে কোন পিঠ ও বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।(Determine the probability of getting any back and odd number.)

Ans: (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$

প্রশ্ন ২. একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং নিম্নলিখিত ঘটনাগুলির সম্ভাবনা নির্ণয় কর।(**One coin and a dice were thrown together. Write the sample space and Determine the probability of the following events?)**

(a) মুদ্রার হেড ও ছক্কার জোড় সংখ্যা Head of coin and even number of dice)
(b) মুদ্রার টেল ও ছক্কার 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা(Tail of coin and number divisible by 3 of dice)

Ans: (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{6}$

প্রশ্ন ৩. দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। প্রাপ্ত নমুনাক্ষেত্র হতে সম্ভাবনা বের কর।

(a) 2 টি Head ও জোড় সংখ্যা
(b) মুদ্রার একটি পিঠ ও ছক্কার বিজোড় সংখ্যা
(c) যে কোন পিঠ ও জোড় সংখ্যা
(d) মুদ্রার বিপরীত পিঠ ও ছক্কার জোড় সংখ্যা

Ans: (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

প্রশ্ন ৪. একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনাক্ষেত্রটি তৈরি কর এবং ছক্কায় 4 উঠার সম্ভাব্যতা কত? (If a dice and two coins are thrown together, make a sample of them and what is the probability of 4 rising in the dice?) **Ans:** $\frac{1}{6}$

বল

সহজে মনে রাখতেঃ
"এবং" বললে গুনন (*) করতে হবে।
"অথবা/বা" বললে যোগ (+) হবে।

প্রশ্ন ১. একটি বক্সে বিভিন্ন ধরনের 3 টি কলম, 2টি পেন্সিল এবং 7 টি রাবার আছে। দৈবভাবে একটি বস্তু নেয়া হল ঐ বস্তুটি কলম হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (**A box contains 3 different types of pens, 2 pencils and 6 erasers. An object was taken by chance . What is the probability that the object is a pen?)**

Sol^n: মোট উপাদান $={}^{12}C_1=12$
অনুকূল উপাদান $={}^{3}C_1=3$
সম্ভাব্যতা $=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ (Ans:)

প্রশ্ন ২. একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6 টি সাদা বল, 7 টি লাল বল এবং 9 টি কালো বল আছে। দৈবভাবে একটি বল তুলে নেয়া হল বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (**A box has different sizes of 8 white balls , 8 red balls and 9 black balls. A ball was picked up by chance.What is the probability that the ball is red or white?)**

Sol^n:
মোট বল সংখ্যা $=6+7+9=22$
লাল বা সাদা হওয়ার অনুকূল সংখ্যা $={}^7C_1+{}^6C_1=13$
সম্ভাব্যতা $=\frac{13}{22}$ (Ans:)

প্রশ্ন ৩. একটি পাত্রে 6 টি লাল বল এবং 4 টি সাদা বল আছে। তা হতে 2 টি বল নেওয়া হল। বল দুটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (**A container has 6 red balls and 4 white balls. Two balls were taken from it. What is the probability of two balls being white?)**

Sol^n: সম্ভাব্যতা $=\frac{{}^4C_2}{{}^{10}C_2}=\frac{2}{15}$ (Ans:)

প্রশ্ন ৪. একটি পাত্রে 4টি সাদা, 5টি লাল ও 6টি সবুজ বল আছে। উহা হতে 3টি বল দৈবায়িত উপায়ে নির্বাচিত করা হল। নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলোর সম্ভাব্যতা কত? **(A container has 4 white, 5 red and 6 green balls. From that 3 balls were selected by chance. What is the following probability?)**

(i)প্রতিটি বল লাল হবে(Each ball will be red.)
(ii)2টি বল সবুজ হবে(2 balls will be green.)
(iii)বলগুলো ভিন্ন রংয়ের হবে(The balls will be of different colors.)
(iv)কমপক্ষে 2টি বল লাল হবে(At least 2 balls will be red.)

Sol^n:

(i)মোট ঘটনা = $^{15}C_3 = 455$

প্রতিটি বল লাল হবে, P(3টি বল লাল) = $^5C_3$

সম্ভাব্যতা = $\frac{^5C_3}{455} = \frac{2}{91}$ (Ans:)

(ii) 2 সবুজ হওয়ার ঘটনা = $^6C_2 = 15$

1 লাল হওয়ার ঘটনা = $^5C_1 = 5$

1 সাদা হওয়ার ঘটনা = $^4C_1 = 4$

2টি বল সবুজ হলে = P(2টি সবুজ ও 1টি লাল) অথবা (২টি সবুজ ও ১টি সাদা)

সম্ভাব্যতা = $\frac{^6C_2 \times {}^5C_1}{455} + \frac{^6C_2 \times {}^4C_1}{455} = \frac{27}{91}$ (Ans:)

(iii) বল ভিন্ন রঙের হলে= P(১টি সবুজ ও ১টি লাল ও ১টি সাদা)

সম্ভাব্যতা = $\frac{^6C_1 \times {}^5C_1 \times {}^4C_1}{455} = \frac{24}{91}$ (Ans:)

(iv) কমপক্ষে ২টি বল লাল=P{(3টি লাল) বা (২টি লাল ও ১টি সাদা) বা (২টি লাল ও ১টি সবুজ)}

সম্ভাব্যতা = $\frac{^5C_3}{455} + \frac{^5C_2 \times {}^6C_1}{455} + \frac{^4C_1 \times {}^5C_2}{455} = \frac{22}{91}$

প্রশ্ন ৫. একটি ঝুড়িতে 10 টি ডিম আছে। ডিমগুলোর মধ্যে 2 টি ডিম নষ্ট। ঐ ঝুড়ি থেকে প্রথমে একটি ডিম তোলা হল, এর পর আরও একটি ডিম তোলা হল। উত্তোলিত ডিম 2 টি ভাল হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? নষ্ট হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? **(There are 10 eggs in a basket. Two of the eggs were Spoiled. An egg was first taken from that basket. Then another egg was taken. What is the probability that 2 raised eggs are good? What is the probability of Spoiled?)**

Sol^n.

মোট উপাদান $= {}^{10}C_2 = 45$

অনুকূল উপাদান= $^8C_2 = 28$

ভাল হবার সম্ভাব্যতা $P(A) = \frac{28}{45}$

নষ্ট হবার সম্ভাব্যতা $= P(A^c) = 1 - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}$ (Ans)

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A) + P(A^c) = 1 \\ P(A^c) = 1 - P(A) \end{array}}$$

প্রশ্ন ৬.15 জন শিক্ষার্থীর একটি গ্রুপে বিজ্ঞান বিভাগের 5 জন শিক্ষার্থী আছে। 15 জনের মধ্যে তিন জনকে নিলে তাদের সবাই বিজ্ঞান বিভাগের হবার সম্ভাবতা কত? **(There are 5 science students in a group of 15 students. If you take three out of 15 people, what is the probability that all of them will be in the science department?)**

Sol^n: মোট ঘটনা = $^{15}C_3 = 455$

অনুকূল ফলাফল = $^5C_3 = 10$

$P(A) = \frac{^5C_3}{^{15}C_3} = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$ (Ans)

প্রশ্ন ৭. একটি পাত্রে 6 টি সাদা এবং 9 টি কালো বল আছে। একবার 4 টি করে (i) পুনঃস্থাপন সহকারে (ii) পুনঃ স্থাপন ব্যতিরেখে দুবার মোট 8 টি বল উত্তোলন করা হল। প্রথম চারটি বল সাদা এবং দ্বিতীয় চারটি বল কালো হবার সম্ভাব্যতা কত ? **(A container has 6 white and 9 black balls. 4 at a time i) With restoration ii) Eight balls have been picked up twice without restoration. What is the probability that the first four balls are white and the second 4 balls are black?))**

Sol^n: মোট বল = 15 টি

(i) সম্ভাবনা = P(১ম উত্তোলন 4টি সাদা)×P(দ্বিতীয় উত্তোলন 4 টি কালো বল) $= \frac{^6C_4}{^{15}C_4} \times \frac{^9C_4}{^{15}C_4} = \frac{6}{5915}$ (Ans)

(ii) প্রথমবার 15 টি বল হতে উত্তোলন হবে কিন্তু পরের বার (15-4) = 11 টি বল হতে উত্তোলন হবে

সম্ভাবনা = P(১ম উত্তোলন 4 টি সাদা)×P(দ্বিতীয় উত্তোলন 4 টি কালো বল)

$= \frac{^6C_4}{^{15}C_4} \times \frac{^9C_4}{^{11}C_4} = \frac{3}{715}$ (Ans)

প্রশ্ন ৮. একটি পাত্রে 3 টি লাল ও 4 টি কালো বল আছে। অন্য পাত্রে 4 টি লাল ও 5 টি কালো বল আছে। প্রত্যেক পাত্র হতে 1 টি করে বল নেয়া হল-**(A container has 3 red and 4 black balls. The other container has 4 red and 5 black balls. 1 ball was taken from each pot-)**

(i)সব কয়টি কালো(All black)
(ii)2 টি লাল(Two red)
(iii)একই রঙের বল পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (What are the chances of getting the ball of the same color?)

Sol^n:

প্রথম পাত্রে মোট বল = 7

দ্বিতীয় পাত্রে মোট বল = 9

(i) P(সব কয়টি বল কালো) =P(১ম পাত্রে হতে কালো ও ২য় পাত্র হতে কালো)

$= \frac{^4C_1}{^7C_1} \times \frac{^5C_1}{^9C_1} = \frac{20}{63}$ (Ans)

(ii) $\frac{^3C_1}{^7C_1} \times \frac{^4C_1}{^9C_1} = \frac{12}{63}$ (Ans)

(iii) $\left(\frac{^3C_1}{^7C_1} \times \frac{^4C_1}{^9C_1}\right) + \left(\frac{^4C_1}{^7C_1} \times \frac{^5C_1}{^9C_1}\right) = \frac{32}{63}$ (Ans)

প্রশ্ন ৯. একটি পাত্রে 6 টি লাল ও 4 টি সাদা বল আছে। দুইটি বল দৈবায়িতভাবে নেয়া হলো। বল 2 টি (i) একই রঙের (ii) ভিন্ন রঙের (iii) কমপক্ষে একটি লাল হবার সম্ভাবনা বের কর।

Sol^n: পাত্রে লাল বল 6 টি, সাদা বল 4 টি অর্থাৎ মোট বল 10 টি বল থেকে 2 টি বল $^{10}C_2$ উপায়ে নেয়া যায়, মোট ফলাফল=

$^{10}C_2 = 45$

(i) বল 2 টি একই রঙের হবার সম্ভাবনা = P(2 টি লাল) অথবা (2 টি সাদা) = P(2 টি লাল) + P(2 টি সাদা)

$= \frac{^6C_2}{^{10}C_2} + \frac{^4C_2}{^{10}C_2} = \frac{21}{45}$ (Ans)

(ii) বল 2 টি ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা = P(1 টি লাল ও 1 টি সাদা)

$= \frac{^6C_1 \times {}^4C_1}{^{10}C_2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ (Ans)

(iii) কমপক্ষে একটি বল লাল হবার সম্ভাবনা P(1 একটি লাল ও ১ টি সাদা) অথবা (2 টি লাল)

$= \frac{^6C_1 \times {}^4C_1}{^{10}C_2} + \frac{^6C_2}{^{10}C_2} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}$ (Ans)

প্রশ্ন ১০. একটি ঝুড়িতে 3 টি সাদা এবং 2 টি কালো বল আছে। অপর একটি ঝুড়িতে 2 টি সাদা এবং 5 টি কালো বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক ঝুড়ি হতে একটি করে বল তোলা হলো। দুইটি বলের মধ্যে অন্তত একটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর ।**(There are 3 white and 2 black balls in a basket. Another basket has 2 white and 5 black balls. Neutrally one ball was picked up from each basket. Determine the probability of at least one of the two balls being white?)**

Sol^n: ১ম ঝুড়িতে মোট বল 5টি , ২য় ঝুড়িতে মোট বল 7টি দুইটি বলের মধ্যে অন্তত একটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা

$= \left(\frac{^3C_1}{^5C_1} \times \frac{^5C_1}{^7C_1}\right) + \left(\frac{^2C_1}{^5C_1} \times \frac{^2C_1}{^7C_1}\right) + \left(\frac{^3C_1}{^5C_1} \times \frac{^2C_1}{^7C_1}\right) = \frac{5}{7}$

প্রশ্ন ১১. দুইটি বক্সের একটিতে 5 টি লাল এবং 3 টি কালো বল আছে। অপর বক্সে 4 টি লাল এবং 5 টি কালো বল আছে। সম সম্ভব উপায়ে একটি বক্স নির্বাচন করা হলো এবং তা থেকে দুইটি বল তোলা হলে একটি লাল ও একটি কালো হবার সম্ভাব্যতা কত? **(One of the two boxes has 5 red and 3 black balls. The other box has 4 red and 5 black balls. What is the probability that a box is selected in the same possible way and two balls are drawn from it, one is red and one is black?)**

Sol^n:১ম বক্সে মোট বল ৮টি, ২য় বক্সে মোট বল ৯টি বক্স নির্বাচিত করার সম্ভাব্যতা = $\frac{1}{2}$

নির্ণেয় সম্ভাব্যতা =

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{^5C_1 \times {}^3C_1}{^8C_2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{^4C_1 \times {}^5C_1}{^9C_2}\right) = \frac{275}{504}$ (Ans)

প্রশ্ন ১২. 200 জন লোকের রক্তের গ্রুপ নিম্নরূপ 50 জন A গ্রুপের, 65 জন B গ্রুপের, 70 জন O গ্রুপের এবং ১৫ জন AB গ্রুপের । এদের মধ্যে দৈবভাবে এক জনকে নির্বাচন করলে তার রক্তের গ্রুপ O হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ? **(The blood groups of 200 people are as follows: 50 people of group A, 65 people of group B, 70 people of group O and 15 people of group AB. If one of them is chosen by chance, what is the probability of his blood group O?)**

Sol^n: সম্ভাব্যতা $= \frac{^{70}C_1}{^{200}C_1} = \frac{70}{200} = \frac{7}{20}$ (Ans)

Self Study

প্রশ্ন ১. একটি বাক্সে 6 টি লাল ও 4 টি সাদা তা হতে (i) পুনঃস্থাপন করে (ii) পুনঃস্থাপন না করে 2 টি বল নেয়া হল। বল দুইটি সাদা হবার সম্ভাবনা কত? Ans: (i) $\frac{4}{25}$ (ii) $\frac{2}{15}$

প্রশ্ন ২. একটি বাক্সে 4 টি সাদা, 5 টি লাল এবং 6 টি নীল রং এর বল আছে। বাক্স হতে দৈবভাবে 3 টি বল নেয়া হলো নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা গুলো নির্ণয় কর। (i) 3 টি ভিন্ন রং এর বল (ii) 2 টি সাদা ও অন্য রঙের (iii) 3 টি সাদা

Ans: (i) $\frac{24}{91}$ (ii) $\frac{66}{455}$ (iii) $\frac{4}{455}$

প্রশ্ন ৩. একটি পাত্রে 2 টি সাদা এবং 3 টি কালো বল ও অপর পাত্রে 3টি সাদা ও 4 টি কালো বল আছে। পাত্র দুইটি হতে একটি করে বল

উঠানো হলে (a) বল গুলি একই রং এর (b) ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা কত? Ans: (a) $\frac{18}{35}$ (b) $\frac{17}{35}$

প্রশ্ন ৪. একটি ব্যাগে 3 টি কালো এবং 4 টি সাদা বল আছে। দৈবভাবে 2 টি বল তুলে নেয়া হলো। কিন্তু প্রথমটি উঠানোর পর তা ব্যাগে রাখা হলো না। দ্বিতীয় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? Ans: $\frac{4}{7}$

প্রশ্ন ৫.একটি পাত্রে 5 টি লাল এবং 4 টি সাদা বল এবং অপর একটি পাত্রে 3 টি লাল ও 6 টি সাদা বল আছে। প্রত্যেক পাত্র হতে একটি করে বল তোলা হলে দুটি বলের মধ্যে কমপক্ষে একটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{19}{27}$

প্রশ্ন ৬. দুইটি একই রকম বাক্সের প্রথমটিতে 4 টি সাদা ও 3 টি লাল এবং দ্বিতীয়টিতে 3 টি সাদা ও 7 টি লাল বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি বাক্স নির্বাচন করা হলো। ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষভাবে একটি বল উত্তোলন করা হলে, বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ? যদি বলটি সাদা হয়, তাহলে প্রথম বাক্স থেকে নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ?

Ans: $\frac{61}{140}$, $\frac{40}{61}$

প্রশ্ন ৭. প্রথম ব্যাগে 1টি টাকা ও 3টি পয়সা , দ্বিতীয় ব্যাগে 2টি টাকা ও 4টি পয়সা এবং তৃতীয় ব্যাগে 3টি টাকা ও 1টি পয়সা আছে । লটারির মাধ্যমে একটি ব্যাগ বাছাই করে একটি মুদ্রা উত্তোলন করলে সেটি টাকা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর । **Ans:** $\frac{4}{9}$

তাস

প্রশ্ন ১. একটি তাসের প্যাকেট 52 খানা তাস আছে। তা হতে 2 খানা তাস নির্বাচারে টানা হলো, তাস দুটি একই রঙের রাজা হওয়ার সম্ভাবনা কত? **(There are 52 cards in a packet of cards. From that, two cards were drawn in the election, what is the probability that two cards are of the same color king?)**

Sol^n: জানা আছে, মোট তাস 52 টি

মোট রাজা তাস 4 টি (2 টি লাল, 2 টি কালো রাজা)

তাস দুটি একই রঙের রাজা = (২টি লাল রাজা বা ২টি কালো রাজা)

সম্ভাবনা = $\frac{{}^{2}C_2}{{}^{52}C_2} + \frac{{}^{2}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{1}{663}$ (Ans)

প্রশ্ন ২. একটি তাসের প্যাকেট হতে দৈবভাবে একটি তাস নেওয়া হলো। তাসটি লাল বা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত? **(A card was taken from a packet of cards by chance . What is the probability that the card is red or ace?)**

Sol^n: ধরি,

তাসটি লাল হবার সম্ভাবনা = P(A)

তাসটি টেক্কা হবার সম্ভাবনা = P(B)

তাসটি লাল বা টেক্কা হবার সম্ভাবনা = $P(A \cup B)$

তাসটি লাল এবং টেক্কা হবার সম্ভাবনা = $P(A \cap B)$

আমরা জানি,

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{7}{13} \text{ (Ans)}$$

প্রশ্ন ৩. এক প্যাকেট তাস হতে 3টি তাস নির্বিচারে নেওয়া হলো তাস 3 টি (i) টেক্কা হবার (ii) কমপক্ষে একটি রাজা (iii) তাসগুলি একই স্যুটের হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। **(From one packet of cards 3 cards were taken indiscriminately. i) probability of being ace? Ii) At least one king iii) Determine if the cards are in the same suit?)**

Sol^n: এক প্যাকেট তাসে মোট 52 টি তাস থাকে। যার মধ্যে 4 টি টেক্কা ও 4 টি রাজা তাস থাকে।

মোট ফলাফল = ${}^{52}C_3 = 22100$

(i) অনুকূল ফলাফল = ${}^{4}C_3 = 4$,

সম্ভাবনা = $\frac{4}{22100} = \frac{1}{5525}$

(ii) P (একটি রাজা ও 2 টি অন্য তাস) + P (2 টি রাজা ও ১টি অন্য তাস) + P (3টি রাজা তাস)

$$= \frac{{}^{4}C_1 \times {}^{48}C_2}{{}^{52}C_3} + \frac{{}^{4}C_2 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_3} + \frac{{}^{4}C_3}{{}^{52}C_3} = \frac{4804}{22100}$$
$$= \frac{1201}{5525}$$

(iii) তাসগুলি একই স্যুটের হবার সম্ভাবনা = P(3 টি হরতন বা 3 টি ইস্কাটন বা 3 টি রুইতন বা 3 টি চিরতন)

$$= \frac{{}^{13}C_3}{{}^{52}C_3} + \frac{{}^{13}C_3}{{}^{52}C3_3} + \frac{{}^{13}C_3}{{}^{52}C_3} + \frac{{}^{13}C_3}{{}^{52}C_3} = \frac{1144}{22100}$$
$$= \frac{22}{425}$$

প্রশ্ন ৪. 52 খানা তাসের প্যাকেট হতে যেমন খুশি টেনে ধারাবাহিক ভাবে চারখানা টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।**(Find out the probability of getting four aces in a row by pulling as much as you want from a packet of 52 cards?)**

Sol^n: মোট টেক্কা সংখ্যা = 4 টি।

প্রথম বারে টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{4}{52}$

দ্বিতীয় বারে টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{3}{51}$

তৃতীয় বারে একটি টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{2}{50}$

সর্বশেষ একটি টেক্কা পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{1}{49}$

4 টি টেক্কা ধারাবাহিক ভাবে পাওয়ার সম্ভাব্যতা

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{1}{49} = \frac{1}{270725} \text{ (Ans:)}$$

প্রশ্ন ৫. এক প্যাকেট তাস থেকে একটি তাস দৈব ভাবে নেওয়া হল তাসটি (ক) হরতন বা ইস্কাবন (খ) হরতন বা রাজা হবার সম্ভাবনা কত?

Sol^n:(A)= হরতন 13 টি, (B)= ইস্কাবন 13 টি, (C)= রাজা 4টি

(ক)তাসটি হরতন হলে ইস্কাবন হতে পারবে না সুতরাং A ও B পরস্পর বর্জনশীল-

সম্ভাব্যতা = $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

$$= \frac{{}^{13}C_1}{52} + \frac{{}^{13}C_1}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \text{ (Ans:)}$$

(খ) এখানে তাসটি হরতন হলেও তাসটি হরতনের রাজা হতে পারে। সুতরাং A ও C পরস্পর অবর্জনশীল।

$$P(A \cup C) = P(A)+P(C) - P(A \cap C) \quad P(A \cap C) = \frac{1}{52}$$
$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$
$$= \frac{4}{13} \text{ (Ans:)}$$

প্রশ্ন ৬. এক প্যাকেট তাস হতে পর পর তিনখানা তাস।

(i) পুনঃ স্থাপন না করে **(ii)** পুনঃ স্থাপন করে নেয়া হল তাস তিনটি টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত ?

Sol^n: প্যাকেটে মোট তাস = 52 টি

টেক্কা তাস = 4 টি

(i) $\frac{{}^{4}C_1}{{}^{52}C_1} \times \frac{{}^{3}C_1}{{}^{51}C_1} \times \frac{{}^{2}C_1}{{}^{50}C_1} = \frac{1}{5525}$

এখানে, পুনঃস্থাপন না করে তাস তিনটি নেয়া হয়েছে যেহেতু দ্বিতীয় ও তৃতীয় তাস নেয়ার পূর্বে প্যাকেটে টেক্কা তাস ও মোট তাসের সংখ্যা একটি একটি করে কমতে থাকবে।

(ii) সম্ভাবনা = $\frac{{}^{4}C_1}{{}^{52}C_1} \times \frac{{}^{4}C_1}{{}^{52}C_1} \times \frac{{}^{4}C_1}{{}^{52}C_1} = \frac{1}{2197}$

এখানে, পুনঃস্থাপন প্রক্রিয়ায় তাস তিনটি নেয়া হলে যেহেতু দ্বিতীয় বা তৃতীয় তাস নেয়ার পূর্বে তাস গুলি প্যাকেটে ফেরত দেয়া হয়, সুতরাং প্যাকেটে টেক্কা তাস ও মোট তাসের সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকবে।

প্রশ্ন ৮.ক্লাভস (clubs) এর রাজা (king), রানী (queen) এবং জ্যাক 52 কার্ড থেকে সরানো হলো এবং তারপর ফ্যাটা (shuffle) হলো, যদি একটি কার্ড অবশিষ্ট কার্ড থেকে টানা হয়। তাহলে নিম্নলিখিত বিষয়ের সম্ভাব্যতা বের করঃ

(The King, Queen and Jack of the Claves were removed from the 52-card and then shufflle, if one card was drawn from the remaining cards, find out the probability of the following:)

(i) a hearts (ii) '9' of red color

Sol^n: অবশিষ্ট কার্ড থাকে 49 টি

(i) a hearts সম্ভাব্যতা = $\frac{{}^{13}C_1}{{}^{49}C_1} = \frac{13}{49}$ (Ans)

(ii) '9' of red color সম্ভাব্যতা = $\frac{{}^{2}C_1}{{}^{49}C_1} = \frac{2}{49}$ (Ans)

প্রশ্ন ৯. ৫২টি কার্ডের একটি প্যাক থেকে ছয়টি কার্ড এলোমেলোভাবে আঁকা হয়। ৩টি লাল এবং ৩টি কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত? **(Six cards are drawn at randomly from a pack of 52 cards. What is the probability that 3 will be red and 3 will be black?)**

Sol^n: মোট তাস ৫২ (২৬ টি লাল এবং ২৬ টি কালো) টি ।

মোট সম্ভাবতা = 52_{C6}

∴ ৩টি লাল এবং ৩ টি কালো হওয়ার সম্ভাবতা

$$= \frac{26C3 \times 26C3}{52C6}$$
$$= 0.332 \text{ (Ans.)}$$

Self Study

প্রশ্ন ১.এক প্যাকেট তাস হতে 2 টি তাস দৈবভাবে টানা হলো। তাস 2টি (i) কালো অথবা টেক্কা (ii) হরতন বা রাজা (iii) লাল বা কালো হবার সম্ভাব্যতা কত ?

Ans: (i) $\frac{55}{221}$ (ii) $\frac{14}{221}$ (iii) $\frac{25}{51}$

প্রশ্ন ২. 52 টি তাসের একটি প্যাকেট হতে যে কোন 1 টি তাস টেনে বের করলে রাজা তাসটি বের হওয়ার সম্ভাবনা (Probabuility) কত ? **Ans:** $\frac{1}{13}$

প্রশ্ন ৩. শাফল করা 52 টি তাসের বান্ডেল হতে নিম্নেবর্ণিত একটি তাস টেনে পাবার সম্ভাবনা কত ?

(i) একটি টেক্কা (ii) একটি স্পেড **Ans:** (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{1}{4}$

প্রশ্ন ৪.এক প্যাকেট তাস থেকে দৈবভাবে নেয়া হলো তাসটি

(i) হরতন বা ইসকাবন

(ii) হরতন বা রাজা হবার সম্ভাবনা কত ?**Ans:** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{4}{13}$

প্রশ্ন ৫. এক প্যাকেট কার্ড হতে ইচ্ছামত (Randomnly) একটি কার্ড তোলা হলে কার্ডটি হার্টস (Hearts) হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Ans: $\frac{1}{4}$

প্রশ্ন ৬. এক প্যাকেট তাস হতে দৈবভাবে 2 টি তাস টানা হলে তাস দ্বয় একই রংয়ের হওয়ার সম্ভবনা কত? **Ans:** $\frac{25}{51}$

প্রশ্ন ৭. 52 খানা তাসের মধ্যে হতে 1 টি তাস দৈবভাবে উঠানো হলো। তাসটি লাল টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত ? তাসটি লাল বা টেক্কা হবার সম্ভবনা কত?

Ans: $\frac{1}{26}$ ও $\frac{7}{13}$

Mixed

প্রশ্ন ১. 1,3,5 দ্বারা তিন Digit এর যতগুলো নাম্বার বানানো সম্ভব সেখান থেকে একটি Number Randomly বাচাই করলে সেই সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত? (What is the probability that the number can be divisible by 5 if we save a number randomly from as many three digit numbers as possible by 1,3,5?)

Sol^n.

$3! = 6$ টি [135, 153, 315, 351, 513, 531]

5 দ্বারা বিভাজ্য 2টি $=$ [315, 135]

$\therefore$ সম্ভাব্যতাঃ $2/6 = 1/3$ Ans.

প্রশ্ন ২. 10 জন ব্যক্তি একে অন্যের সাথে Hands Shake করলে Total কতগুলো Hands Shake সংগঠিত হবে? (How many handshakes will be organized if 10 people shake hands with each other?)

Sol^n. $10C2 = 45$ Ans.

প্রশ্ন ৩. 10 জন পেয়ার হতে 5 জন করে নিয়ে কয় ভাবে সাজানো যায়? (How can you arrange 5 people out of 10 peers?)

Sol^n. $10P5 = 30240$ Ans.

প্রশ্ন ৪. একটি Box এ 10টি আপেল আছে এর মধ্যে 2/5 অংশ আপেল পচা। এখন যদি ৩টি আপেল তোলা হয় তাহলে কমপক্ষে ১ আপেল পচা হওয়ার সম্ভাবনা কত? (There are 10 apples in a box. 2/5 of the apples are rotten. Now if 3 apples are picked then what is the probability of at least 1 apple rotting?)

Sol^n.

$10*2/5 = 4$ পচা

ভাল $= 10 - 4 = 6$ টি

এখন, $\dfrac{4C3 + 4C2 * 6C1 + 4C1 * 6C2}{10C3}$

$= 5/6$ Ans.

প্রশ্ন ৫. রাত 11.59 মিনিটে তুমুল ঝড় বৃষ্টি হলে, ঠিক 72 ঘন্টা পর রৌদ্রজ্জ্বল আবহাওয়ার সম্ভাবনা কত? (If there is heavy rain at 11.59 pm, what is the probability of sunny weather after exactly 72 hours?)

Sol^n. রাত 11.59 মিনিটের ঠিক 72 ঘন্টা পর বা ৩ দিন পর আবার রাত ১১.৫৯ মিনিট বাজবে। যেহেতু রাতে রোদ থাকার কোন সম্ভাবনা নেই, তাই রৌদ্রজ্জ্বল আবহাওয়ার থাকার সম্ভাবনা 0%.

প্রশ্ন ৬. একটি পরিবারে দুটি শিশু আছে। যেখানে কমপক্ষে একটি ছেলে শিশু থাকবে। এখন উক্ত পরিবারে দুটি শিশুই ছেলে শিশু এমন শর্তের জন্য Contiditional probability বের কর। ঘটনা দুটি কি independent? (Find out the conditional probability for the condition that there are only two children in a family. Are the two events independent?)

Sol^n. দুটি শিশুর জন্য Sample space {BB, BG, GB, GG}

$\therefore E = \{BB\}$ $\therefore F = \{BB, BG, GB\}$

$(E \cap F) = \{BB\}$

$P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{3}{4}$, $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

$\therefore P(E/F) = \dfrac{1/4}{3/4} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ (Ans:)

Again, $P(E \cap F) = P(E) \times P(F) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$

সুতরাং ঘটনাটি independent নয়। (Ans:)

প্রশ্ন ৪. E = {000, 001, 010, 011} এবং F= {000, 001, 100} হলে

(i) $P(E \cap F)$ (ii) $P(F)$ (iii) $P(E/F)$ Are E & E Independent ?

Sol^n. মোট Sample space {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}

$E = \{000, 001, 010, 011\}$, $F = (000, 001, 100\}$

$E \cap F = \{000, 001\}$

$P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(i) $P(E \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

(ii) $P(F) = \frac{3}{8}$

$P(E/F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3}$

(ii) $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$

$\frac{1}{4} = P(E \cap F) \neq \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$

$P(E \cap F) \neq \frac{3}{16}$ not Inepedent (Ans:)

প্রশ্ন ৫. E = {BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB} এবং F = {BGG, GBG, GGB, GGG}

(i) $P(E/F) = ?$ (ii) Are E & F Independent?

$P(E) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$n(E \cap F) = \{BGG, GBG, GGB\}$

$P(E \cap F) = \frac{3}{8}$

(i) $P(E/F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$

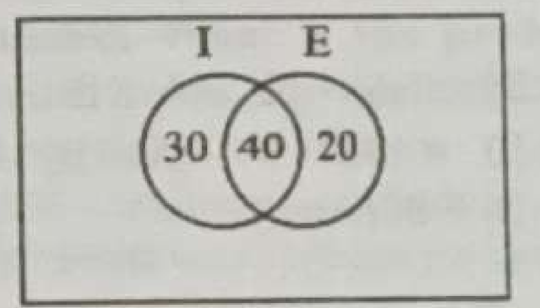
$= \dfrac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$ (Ans)

$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

This is Independent (Ans:)

প্রশ্ন ৮. একটি জরিপে দেখা গেল 70% লোক ইনকিলাব, 60% ইত্তেফাক 40% লোক উভয় পড়ে। যে কোন একজন লোক দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো লোকটির ইনকিলাব বা ইত্তেফাক পড়ার সম্ভবতা কত? (One survey found that 70% of people read Inqilab, 60% Ittefaq and 40% both. Anyone is chosen by chance. What is the probability of the person reading Inqilab or Ittefaq?)

Sol^n:



$P(I) = 70\%$ $P(E) = 60\%$ $P(I \cap E) = 40\%$

$\therefore P(I \cup E) = (P(I) + P(E) - (P(I \cap E)$

$\Rightarrow P(I \cup E) = 70 + 60 - 40$

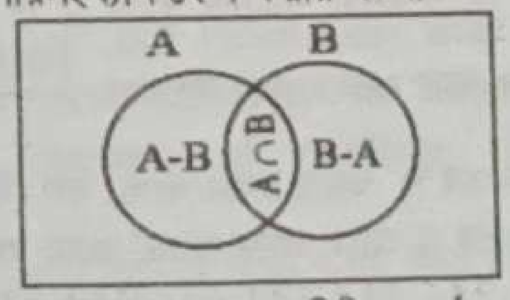
$= 90\%$ (Ans:)

প্রশ্ন ৯. 200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 40 জন অংক, 20 জন পরিসংখ্যান এবং 10 জন উভয় বিষয়ে ফেল করে। একজন পরীক্ষার্থী দৈবভাবে নেওয়া হলো। (i) তার অংকে ফেল ও পরিসংখ্যানে পাশ (ii) কেবল এক বিষয়ে পাশ (iii) বড়জোর এক বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা কত?

Sol^n:

ধরি, A = অংকে ফেল করার ঘটনা

B = পরিসংখ্যান ফেল করার ঘটনা



$\therefore P(A) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$,

$P(A \cap B) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$

(i) $P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = 3/20$

(ii) $P\{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\}$

$= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$

$= \frac{3}{20} + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{20} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$

(iii) $P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$

$= \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$ (Ans:)

প্রশ্ন ১০. দুটি Not mutually Exclusive event এর ক্ষেত্রে

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = 5/6, P(A) = 1/2$

হলে (i) $P(B)$ ও (ii) $P(\overline{A})$ এর মান কত?

(iii) A ও B স্বাধীন কিনা পরীক্ষা কর।

Sol^n:

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow 5/6 = 1/2 + P(B) - 1/3$

$\Rightarrow P(B) = 2/3$ (Ans:)

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1/2 = 1/2$ (Ans:)

(iii) $P(A).P(B) = \frac{1}{2} \times 2/3 = 2/6 = 1/3$

$\therefore P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

$\therefore$ A ও B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন।(Ans:)

প্রশ্ন ১১. প্রথম বর্ষ বিজ্ঞানের মোট 120 জন ছাত্রের মধ্যে 85 জন গণিত, 90 জন পদার্থ ও 62 জন গণিত ও পদার্থ উভয় বিষয়ই নিয়েছে। কতজন ছাত্র গণিত অথবা পদার্থ বিষয় দুটির কোনটিই নেয়নি? (Out of a total of 120 first year science students, 85 have taken Mathematics, 90 have taken Physics, and 62 have taken both Mathematics and Physics. How many students did not take either math or physics?)

উত্তরঃ S মোট ছাত্রের সেট, অতএব, $n(S)=120$; M গণিতের এবং P পদার্থ বিদ্যার ছাত্রদের সেট হলে, $n(M) = 85$ এবং $n(P) = 90$ এবং $n(M \cap P)=62$.

$\therefore n(M \cup P)' = n(S) - n(M) - n(P) + n(M \cap P)$

$= 120 - 85 - 90 + 62$

$= 182 - 175$

$= 7$

7 জন ছাত্র গণিত অথবা পদার্থ কোন বিষয়ই নেয়নি।

প্রশ্ন ১২. কোন শ্রেণিতে ছাত্রদের মধ্যে 28 জন পদার্থ, 23 জন গণিত, 23 জন রসায়ন, 12 জন পদার্থ ও গণিত; 11 জন পদার্থ ও রসায়ন, 8 গণিত ও রসায়ন এবং 5 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। প্রত্যেক ছাত্রকেই

Forma-27/B

উক্ত বিষয়গুলোর অন্তত একটি নিতে হয়েছে। শ্রেণিটির মোট ছাত্র সংখ্যা নির্ণয় কর।(**Among the students in the class, 28 students took Physics, 23 students took Mathematics, 23 students took Chemistry, 12 students took Pyhysics and Mathematics, 11 students took Physics and Chemistry, 8 students took Mathematics and Chemistry and 5 students took three subjects. Every student has to take at least one of those subjects. Determine the total number of students in the class?)**

উত্তর : P, M এবং C যথাক্রমে পদার্থ, গণিত এবং রসায়নের ছাত্রদের সেট হলে, $n(P) = 28, n(M) = 23, n(C) = 23,$
$n(P \cap M) = 12,\ n(P \cap C) = 11,\ n(M \cap C) = 8$ এবং
$n(P \cap M \cap C) = 5$

এখন, $n(P \cup M \cup C) = n(P)+n(M)+n(C) - n(P \cap M) - n(M \cap C) - n(P \cap C) + n(P \cap M \cap C)$
$= 28+23+23 - 12 - 8 - 11+5$
$= 79 - 31$
$= 48$

মোট ছাত্র সংখ্যা 48 জন।

প্রশ্ন ১৩. ইংরেজি বর্ষে ও অধিবর্ষে 53 টি শুক্রবার হওয়ার সম্ভাবতা কত? (What are the probabilities of 53 Fridays in English year and leap year?)
sol^n:
ইংরেজি = 365 দিন ,অধিবর্ষ = 366 দিন । অবশিষ্ট দিন = (365 - 364) এবং (366 - 364) = 1 দিন এবং 2 দিন।
S_1 = { শুক্র, শনি, রবি, সোম, মঙ্গল, বুধ, বৃহঃ}
S_2 = { শুক্র-শনি, শনি-রবি,- রবি-সোম, সোম-মঙ্গল, মঙ্গল-বুধ, বুধ-বৃহঃ}
$\therefore$ P(বঃ ষ) $= \frac{1}{7}$ P (অধিবর্ষে) $= \frac{2}{7}$ (Ans:)

প্রশ্ন ১৪. 1 - 100 পর্যন্ত সংখ্যা গুলোর মধ্যে 2, এবং 5 দ্বার বিভাজ্য সংখ্যা নির্বাচনের সম্ভাবতা কত? (What is the probability of selecting a number divisible by 2 and 5 between the numbers 1-100?)
Sol^n :

2 দ্বারা বিভাজ্য $E_1 = 50, P(E_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

5 দ্বারা বিভাজ্য $E_2 = 20, P(E_2) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$\therefore P(E_1 \cap E_2) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

$\therefore P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$ (Ans:)

প্রশ্ন ১৫. 0000000000 নিম্ন শর্তসমূহের ক্ষেত্রে Probability নির্ণয় কর।
(i) কমপক্ষে 1 টি 0 শূন্য থাকবে।
(ii) কম পক্ষে 3 টি শূন্য থাকবে ।

(i) Sample Space = 2^{10} =1024
অনুকূল Event = $2^{10} - 2^0 = 2^{10} - 1$ =1023
$\therefore$ Probability $= \frac{2^{10}-1}{2^{10}}$ =0.999 (Ans:)

(ii) Sample Space = 2^{10} =1024
অনুকূল Event = $2^{10} - 2^3$ =1016
$\therefore$ Probability $= \frac{2^{10}-2^3}{2^{10}}$ =0.992 (Ans:)

প্রশ্ন ১৬. মনে কর A ও B একটি সেট এবং $|A|=140$,$|B|=90$
(i) যদি $|A \cap B| = 36$ হয় তাহলে $|A \cup B|$ এর মান নির্ণয় কর।
(ii) যদি $|A \cup B| = 150$ হয় তাহলে $|A \cap B|$ এর মান নির্ণয় কর।
Sol^n: We know $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
(i) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
$= 140 + 90 - 36$
$= 194$(Ans:)
(ii) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
$150 = 140 + 90 - |A \cap B|$
$A \cap B| = 80$(Ans:)

প্রশ্ন ১৭. তিনটি দশমিক সংখ্যার কতগুলো string হবে ? যদি string টি
(i) একই অংক তিন বার ধারন না করে।
(ii) বিজোড় অংক দ্বারা শুরু হয় ।
(iii) তিনটি অংকতেই 9 আছে।
(iv) দুইটি অংকতে 4 আছে৷
Sol^n:
(i) তিনটি দশমিক সংখ্যার মোট 10^3=1000 টি string হবে। যার মধ্যে একই অংক তিন বার ধারণ করতে পারে এমন সংখ্যা গুলো হল (000,111,222,333,444,555,666,777,888,999) মোট 10 টি ।
একই অংক তিন বার ধারণ না করে =1000-10=990 বার।
(ii) এখানে 10 টি দশমিক অংকের মধ্যে 5 টি বিজোড়। অতএব বিজোড় অংক দ্বারা শুরু হওয়ার সংখ্যা $= \frac{1000}{2} = 500$ বার ।
(iii) তিনটি অংকতেই 9 আছে এমন সংখ্যা হল (999)=1টি ।
(iv) দুইটি অংকতেই 4 আছে এমন সংখ্যা গুলো হল (044,144,244,344,544,644,744,844,944,440,441,442,443,445,446,447,448,449,404,414,424,434,454,464,474,484,494) মোট 27 টি।

প্রশ্ন ১৮. একজন শিক্ষার্থীর A, B, C এবং D গ্রেড পাওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে ০.৩০, ০.৩৫, ০.২০ এবং ০.১৫। একজন শিক্ষার্থীর অন্তত B গ্রেড পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (The probabilities that a student will receive an A,B,C and D grade are

0.30, 0.35, 0.20 and 0.15 respectively. What is the probability that a student will receive at least a B grade?)
Sol^n: ঘটনাতে অন্তত একটি 'B' গ্রেড মানে হচ্ছে ছাত্রটি কমপক্ষে একটি B গ্রেড পাবে এবং তার চেয়ে উপরের গ্রেড পাবে। সুতরাং
P(at least B grade) = P(B grade) + P(A grade)
=0.35+0.30
= 0.65 (Ans.)

প্রশ্ন ১৯. ৩ জন পুরুষ ও ২ জন মহিলা নিয়ে ৩ সদস্য বিশিষ্ট একটি কমিটি বাছাই করা হবে। কমিটিতে অন্তত একজন নারী থাকার সম্ভাবনা কত? (A committee of 3 members is to be selected of 3 men and 2 women. What is the probability that the committee has at least one women?)
Sol^n: $n(S) = 5_{C3} = 10$
$n(E) = 2_{C1} \times 3_{C2} + 2_{C2} \times 3_{C1} = 9$
P(E) = 9/10 **(Ans.)**

প্রশ্ন ২০. একটি লটারিতে ১০০০০ টি টিকিট বিক্রি হয় এবং ১০টি পুরস্কার দেওয়া হয়। একটি টিকিট কিনলে পুরস্কার না পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (In a lottery 10000 tickets are sold and 10 prizes are awarded. What is the probability of not getting a prize, if you buy one ticket?)
Sol^n: Total lottery ticket = 10000
পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাব্যতা = ১০/১০০০০ = ১/১০০০
$\therefore$ পুরস্কার না পাওয়ার সম্ভাব্যতা = ১- (১/১০০০) = ৯৯৯/১০০০
(Ans.)

প্রশ্ন ২১. ১০ বিট সংখ্যা এলোমেলোভাবে নেওয়া হলো, অন্ড়ত ১ বিট শূন্য হওয়ার সম্ভাব্যতা খুঁজে বের করুন? (10 bits number taken randomly, find the probability at least 1 bit is zero?)
Sol^n: Total number = 2^{10} = 1024
Successive number = 1023
Probability = 1023/1024 = 0.99 **(Ans.)**

প্রশ্ন ২২. আমি ৭ সংখ্যার টেলিফোন নম্বরের শেষ সংখ্যাটি ভুলে গেছি। প্রথম চারটি সঠিকভাবে ডায়াল করার পর যদি আমি এলোমেলোভাবে শেষ ৩টি সংখ্যা ডায়াল করি, তাহলে সঠিক নম্বরটি ডায়াল করার সুযোগ কত? (I forgot the last digit of a 7 digit telephone number. If i randomly dial the final 3 digits after correctly dialing the first four, then what is the chance of dialing the correct number?)
Sol^n: প্রতিটি সংখ্যা ১০টি সংখ্যার মধ্যে ১০টি উপায়ে নির্বাচন করা যেতে পারে।
$\therefore$ Probability = $1/10^3$ = 1/1000 (Ans.)

Self Study

প্রশ্ন ১. A ও B দুইটি সম্পূর্ণ ঘটনার ক্ষেত্রে P(A) = 0.65, P(B) =0.47 হলে A ও B এর স্বাধীন সম্পর্কে মন্তব্য কর। **Ans:** স্বাধীন নয়।

প্রশ্ন ২. যদি $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{3}{4}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ হয়
তবে $(a) P(A/B); (b) P(A/\overline{B})\ (c) P(\overline{A}/\overline{B})$ নির্ণয় কর।
Ans: (a) $\frac{4}{9}$, (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{8}{3}$

প্রশ্ন ৩. $P(A) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{3}{4}$ **A ও B** স্বাধীন হলে $P(A \cap B)$ এবং $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।
Ans: $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$

প্রশ্ন ৪. $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ এবং **P(A) = 1/2** হলে **P(B)** এর মান কত? **Ans:** $\frac{2}{3}$

প্রশ্ন ৫. যদি $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{5}$ এবং $P(A/B) = \frac{3}{8}$ হয় তবে **P(B | A)** এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** $\frac{3}{20}$

প্রশ্ন ৬. দুইটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A) = \frac{1}{2}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ হলে **P(B)** কত?
Ans: $\frac{2}{3}$

প্রশ্ন ৭. যদি $P(A \cup B)$=0.6,P(A)=0.3 হয় তবে P(B) এর মান কত হলে A ও B অবজনশীল ও স্বাধীন হবে? **Ans:** $\frac{3}{10}$

প্রশ্ন ৮. 100 জন ছাত্রের মধ্যে 30 জন গণিত, 20 জন রসায়ন এবং 10 জন গণিত ও রসায়ন উভয় বিষয় নিয়েছে। ছাত্রের গণিত এবং রসায়ন নেবার সম্ভাব্যতা কত ? **Ans:** $\frac{2}{5}$

প্রশ্ন ৯. ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম বিমানে, বাসে, ট্রেনে ও স্টীমারে যাওয়া যায়। একজন লোকের ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম ট্রেনে বা বাসে যাবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। **Ans:** $\frac{1}{2}$

প্রশ্ন ১০. একজন ছাত্রের বাংলায় পাশের সম্ভাব্যতা $\frac{2}{3}$,বাংলা ও গণিত দুইটি বিষয়ে পাশের সম্ভাব্যতা $\frac{14}{45}$ এবং দুইটির যে কোন একটিতে পাশের সম্ভাব্যতা $\frac{4}{5}$ হলে তার গণিতে পাসের সম্ভাব্যতা কত?
Ans: $\frac{4}{9}$

প্রশ্ন ১১. চাকরির জন্য ১৩ জন আবেদনকারীর মধ্যে ৫ জন মহিলা এবং ৮ জন পুরুষ। চাকরির জন্য ২ জনকে বেছে নেওয়ার ইচ্ছা আছে। নির্বাচিত ব্যক্তিদের মধ্যে অন্ড়ত একজন নারী হওয়ার সম্ভাবনা কতটুকু। (Out of 13 applicants for a job, there are 5 women and 8 men. It is desired to select 2 persons for the job. What is The probability that atleast one of the selected persons will be a women.)**Ans: 25/39.**