Copie de devoirs et des examens　　ورقة الفروض و الامتحانات

les champs d'informations sont obligatoires

Date .... تاريخ

Nom et Prénom .... الاسم و اللقب

Spécialité : BTS Réseaux et Systèmes Informatiques .... تخصص

N° d'inscription: .... رقم التسجيل

Module Mathématiques .... : المادة

Devoir n° 03 .... : فرض رقم

Cycle : 01 : دورة

Wilaya : Dr ALGER : الولاية

Exercice N°01:

• Trouver le rang du système (I) :

$$(I)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

+ La matrice du système (I):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

+ Considérons les vecteurs colonnes : $u_1 = (1, 1, -1, 1)$

+ On va étudier leurs indépendance linéaire. $u_2 = (1, 1, 1, -1)$

$u_3 = (1, 1, 1, 1)$

+ Soit a_1, a_2, a_3, a_4 tel que : $u_4 = (1, -1, -1, 1)$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = 0$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=0 & (1) \Rightarrow a_1+a_2+a_3=-a_4 \\ a_1+a_2+a_3-a_4=0 & (2) \Rightarrow a_1+a_2+a_3=a_4 \\ -a_1+a_2+a_3-a_4=0 & (3) \Rightarrow -a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1-a_2+a_3+a_4=0 & (4) \quad \text{et } a_1+a_2+a_3=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_4=0$; $\Rightarrow a_1=0$

$(2) \Rightarrow a_2+a_3=0 \Rightarrow a_2=-a_3$

$(4) \Rightarrow -a_2+a_3=0 \Rightarrow -a_2=-a_3$

$\Rightarrow a_2=a_3=0$

* Les (04) vecteurs colonnes sont linéairement indépendants, alors le rang du système (1) = 4.

• Resoudre le système (1) par la méthode de Cramer.

* Calculer le determinant : $\det[A]=-8$.

Le système (1) possède une solution unique donnée par les formules :

$$x_1=\frac{\det[A_1]}{\det[A]} ; \quad x_2=\frac{\det[A_2]}{\det[A]} ; \quad x_3=\frac{\det[A_3]}{\det[A]} ; \quad x_4=\frac{\det[A_4]}{\det[A]}$$

$$x_1=\frac{1}{-8}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{-32}{-8}=4 ; \quad x_2=\frac{1}{-8}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{8}{-8}=-1$$

$$x_3=\frac{1}{-8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{8}{-8}=-1 ; \quad x_4=\frac{1}{-8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\frac{16}{-8}=-2$$

* La solution unique $(x_1, x_2, x_3, x_4)=(4, -1, -1, -2)$

Exercice N°02 :

1. Determiner le domaine de définition de $g(x)$:

$g(x)$ est défini ssi : $\ln((x+3)(x+13)(x+1)) \neq \pm\infty$

et : $2e^{2x-4}-e^{x-2}-1 \neq 0$

• $\ln((x+3)(x+13)(x+1)) \neq \pm\infty \Rightarrow (x+3)(x+13)(x+1) > 0$

donc : $x+3>0$, $x+13>0$, $x+1>0$

alors : $x>-3$, $x>-13$, $x>-1$

D'où : $x \in]-13, -3[\cup]-1, +\infty[$ .... (1)

• $2e^{2x-4} - e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow 2e^{2x} \times e^{-4} - e^{x} \times e^{-2} - 1 = 0$

$\Rightarrow 2e^{2x} \times \frac{1}{e^4} - e^x \times \frac{1}{e^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{e^4} \times (e^x)^2 - e^x \times \frac{1}{e^2} - 1 = 0$

On met $t = e^x$, on obtient : $\frac{2}{e^4} \times t^2 - t \times \frac{1}{e^2} - 1 = 0$ ...(E)

On multiplie (E) par e^4 ;

On obtient : $2t^2 - e^2 t - e^4 = 0 \Rightarrow$ on calcule Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac = (e^2)^2 - 4 \times 2 \times -e^4 = e^4 + 8e^4 = 9e^4$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racine t_1, t_2 tel que :

$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e^2 + \sqrt{e^4 + 8e^4}}{4} = \frac{e^2 + 3e^2}{4} = e^2$

$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{e^2 - \sqrt{9e^4}}{4} = \frac{e^2 - 3e^2}{4} = \frac{-e^2}{2}$

On a : $t = e^x$, alors : $t_1 = e^2 = e^x \Rightarrow x = 2$

et : $t_2 = \frac{-1}{2} e^2 = e^x \Rightarrow x \in \emptyset$

D'où : $x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ ......(2)

De (1) et (2) on a : $x \in]-13, -3[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[$

2. Trouver les valeurs de x pour que $g(x) = 0$:

$g(x) = 0$ vaut : $Ln((x+3)(x+13)(x+1)) = 0$

alors $(x+3)(x+13)(x+1) = 1 \Rightarrow x^3 + 17x^2 + 55x + 38 = 0$

Calculons les discriminant Δ_0 et Δ_1 :

$\Delta_0 = b^2 - 3ac = 17^2 - 3 \times 55 \times 1 = 124$

$\Delta_1 = 2b^3 - 9abc + 27a^2 d = 2(17^3) - 9(17 \times 55) + 27(38) = 2437$

Ensuite, on calcule le discriminant cubic Δ :

$\Delta = \frac{(\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3)}{-27a^2} = \frac{(2437)^2 - 4(124)^3}{-27} = 62501$

comme $\Delta > 0$, l'équation admet trois racines réelles :

$x_k = -\frac{1}{3a}\left(b + \varepsilon^k C + \frac{\Delta_0}{\varepsilon^k C}\right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$ et $\varepsilon = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2437 + 3i\sqrt{187503})}$

D'où : $x_1 = \frac{-1}{3a}\left(b + C + \frac{\Delta_0}{C}\right)$; $x_2, x_3 = \frac{-1}{3a}\left(b + C\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right) + \frac{\Delta_0}{C\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)}\right)$

$$x_1 = \frac{-17}{3} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2437 + 3i\sqrt{187503}\right)} - \frac{124}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2437+3i\sqrt{187503}\right)}}$$

$$x_2, x_3 = \frac{-17}{3} - \frac{1}{6}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2437+3i\sqrt{187503}\right)} - \frac{62\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2437+3i\sqrt{187503}\right)}}$$

3. Trouver les valeurs de x pour que $g(x) > 0$:

$$x > \frac{-17}{3} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2437+3i\sqrt{187503}\right)} - \frac{124}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2437+3i\sqrt{187503}\right)}}$$

$x_2 < x < x_3$

Exercice N°03 :

1) L'application f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Au point $x = 2$, l'application f change d'expression.

2) Etudier les variations de f :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} \\ f(x) = x - 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	|	$+$
$f(x)$	$-\infty \searrow$	4	$\nearrow +\infty$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow +\infty$

3) a- Les équation des asymptotes de (C) : $x = 0$, $y = x$, $y = -x$

b- Les équations des tangentes en A à (C_1) et à (C_2) :

$f(x) = 2 - x - \frac{1}{x} \Rightarrow T : y = f'(2)(x-2) - \frac{1}{2}$

$T_1 : y = \frac{-3}{4}(x-2) - \frac{1}{2} = \frac{-3}{4}x + 1.$

$f(x) = x - 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow T : y = f'(2)(x-2) - \frac{1}{2}$

$T_2 : y = \frac{5}{4}(x-2) - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}x - 3$

c- Tracer la courbe (C), ses asymptotes et les tangentes en A :