الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التكوين والتعليم المهنيين

Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de l'Enseignement Professionnel à Distance (CNEPD)

المركز الوطني للتعليم المهني عن بعد (م.و.ت.م.ب)

COURS DE MATHÉMATIQUES

SÉRIE 04

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE :

À l'issue de cette série le stagiaire doit être capable de faire des repères et les coordonnées dans son plan.

PLAN DE LA LEÇON :

INTRODUCTION :

Un vecteur est une flèche – les vecteurs sont utiles en sciences physiques pour représenter une force, un déplacement, une vitesse. En Maths ils servent surtout à créer des repères pour repérer avec des coordonnées dans un plan ou dans l'espace.

1- Définition :

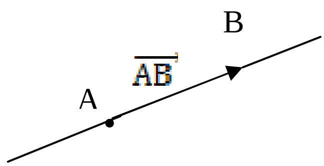
Un vecteur est constitué de trois données :

- Une longueur,
- Une direction (droite portant le vecteur),
- Un sens.

Exemple :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente donc :

AB ou $\|\overrightarrow{AB}\|$: La distance entre A et B
(AB) : La direction représentée par la droite passant par A et B
Le sens de A vers B



O n a : - A est l'origine du vecteur

- B est l'extrémité du vecteur

II-OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS :

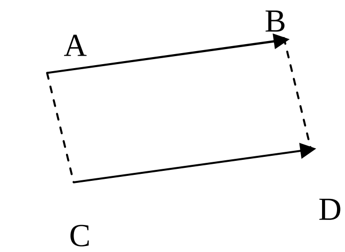
1- Egalité deux vecteurs :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux (et on écrit : $\vec{u} = \vec{v}$) si et seulement si :

- Ils ont la même longueur : $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|$.
- Ils ont la même direction : Les droits portants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles.
- Ils ont le même sens : Le sens des deux vecteurs est identique.

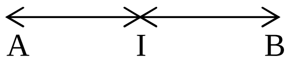
Conséquences :

1- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à ABCD est un parallélogramme

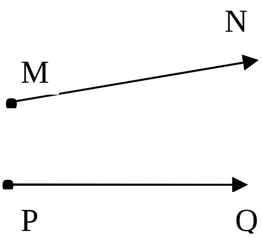


2- I est le milieu du segment $[AB]$ est équivalent à :

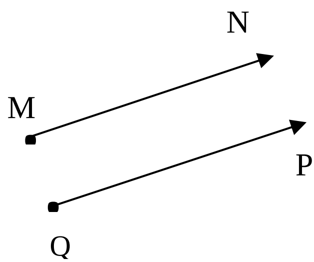
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA}$



Exemple :



Cas n°1



Cas n°2

Cas n° 1 : Les deux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ ne sont pas égaux

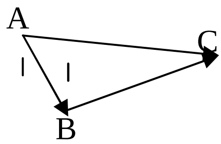
Cas n° 2 : Les deux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont égaux

2- Somme de deux vecteurs :

La somme de deux vecteurs qui sont placés l’un au bout de l’autre est le vecteur qui part de l’origine du premier et qui arrive à l’extrémité de l’autre

Si A, B et C sont 3 points on a toujours $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (c’est la relation de Chasles)

La somme des deux vecteurs rouges est le vecteur bleu



3- Différences de deux vecteurs :

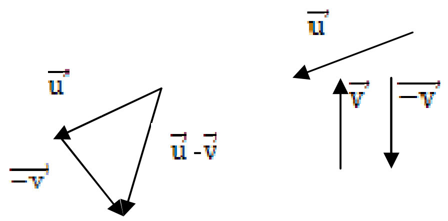
La différence de deux vecteurs c’est la somme du premier et de l’opposé du second.

L’opposé du vecteur $\vec{u}$ c’est un vecteur de même longueur et de même direction que $\vec{u}$ mais de sens opposé (la flèche est tournée de l’autre coté).

Si A et B sont deux points, on a toujours $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Exemple :

$\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE}$



Pour construire $\vec{u}-\vec{v}$, on construit $\vec{u}+(-\vec{v})$

4- Produit d’un vecteur par un réel :

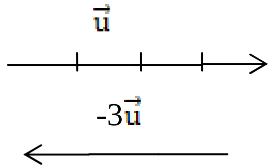
Le produit (on le quotient) d’un vecteur $\vec{u}$ par un nombre k est un vecteur de même direction que $\vec{u}$, de longueur multipliée par k, et de sens contraire à celui de $\vec{u}$ si K est négatif.

On note : $\vec{v} = k\,\vec{u}$. $\vec{u}$

Exemples :

$4\vec{u} = \vec{u}+\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$

$-3\vec{u} = 3(-\vec{u})$

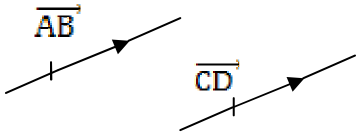


Remarque :

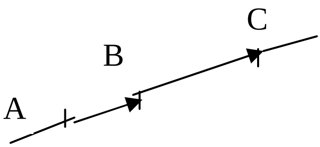
1- Si deux vecteurs ont la même direction, on dit qu’ils sont **colinéaires**

2- Il n’est pas possible d’additionner ou de soustraire des nombres avec des vecteurs

3- Si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires alors : (AB) // (CD)



4- Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires alors les points A, B et C sont alignés



REPÉRAGE DANS UN PLAN :

On note $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal .

On note A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) deux points de ce repère.

1- Longueur d'un vecteur :

La longueur d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc AB, est donnée par la formule :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

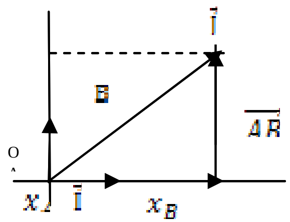
2- Direction d'un vecteur :

La direction du vecteur AB est la droite (AB) et son équation est : $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_B - x_A) + y_A$

3- Coordonnée d'un vecteur :

Si M (x, y) est un point du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ alors

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$



Exemple :

- A (-1,2) $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\,\vec{j}$
- B (2.5) $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 5\,\vec{j}$

4- Coordonnées d'un vecteur :

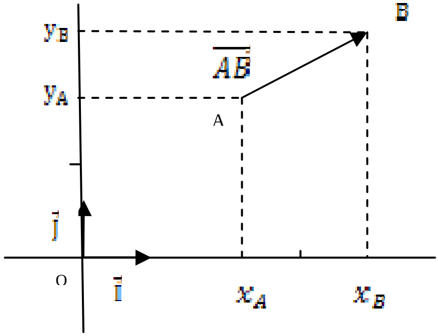
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par la formule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc on aura = $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}$

Exemple :

A (2,3) et B (4,4) donc

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{i} + 1\,\vec{j}$

$= 2\vec{i} + \vec{j}$



Propriété :

Si deux vecteurs sont égaux alors ils ont les mêmes coordonnées.

5- Coordonnées et vecteurs colinéaires :

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : $\vec{u} = k\,\vec{v}$

On a donc : $k = \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$ car $\begin{cases} x_u = k\,x_v \\ Y_u = k\,y_v \end{cases}$

$\Longrightarrow x_u \times y_v = x_v \cdot y_u$

$\Longrightarrow x_u \times y_v - x_v \cdot y_u = 0$

Donc on peut dire que :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors :

$x_1\,y_2 - x_2\,y_2 = 0$

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

Résultat :

Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors ses coordonnées sont :

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

IV-EXERCICES D'APPLICATION ET CORRIGÉS:

EXERCICES N° 01 :

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-30\\10\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Combien vaut y ?

SOLUTION :

On a :

$12\times 10 - y.(-30) = 0 \Longrightarrow 120 + 30y = 0$

$\Longrightarrow Y = -\frac{120}{30} \Longrightarrow \boxed{Y = -4}$

EXERCICES N° 02 :

Dans un repère, A (7, -3), B (-3,-14) et C (27,17) .Les points A, B et C sont-ils alignés ?

SOLUTION :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-7\\-14+3\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-10\\-11\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}27-7\\17+3\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}20\\20\end{pmatrix}$

$(-10)\times 20 - (-11)\times 20 = -200 + 220 = 20 \neq 0$

Alors A, B et C ne sont pas alignés

EXERCICE N°03 :

Dans un repère A (-3,5) et B (1,1). Le point C est aligné avec A et B. Il a pour abscisse 17 .Quelle est son ordonnée ?

SOLUTION :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+3\\1-5\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}17+3\\yc+5\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}20\\y_c-5\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors **:**

$4\,(y_c\,-5) - (-4)\,(20) = 0 \Longrightarrow 4y_c\,-20+80 = 0$

$\Longrightarrow 4y_c\,+60 = 0$

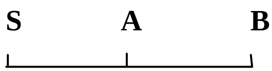
$\Longrightarrow Y_c\ = -\frac{60}{4} \Longrightarrow \boxed{Y_c = -15}$ donc : C (17,-15)

<u>EXERCICE N° 04</u> :

Dans un repère A (-37-11) et B (-12,11). Quelle sont les coordonnées du point S symétrique de B par rapport à A?

SOLUTION :

A est le milieu du segment SB alors :



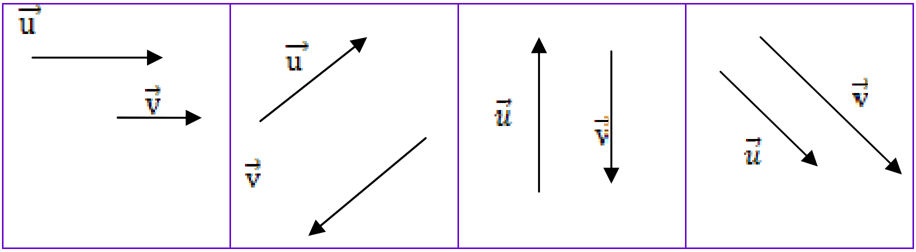
A $\left(\frac{x_s+x_B}{2}\ ,\frac{y_s+y_B}{2}\right)$

On a alors : $\begin{cases}\frac{x_s+x_B}{2} = -37\\ \frac{y_s+y_B}{2} = -11\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_s\,-12 = -74\\ y_s\,+11 = -22\end{cases}$

On trouve $\begin{cases}x_s = 62\\ Y_s = -33\end{cases}$ alors : $\boxed{S\ (62,-33)}$

EXERCICE N° 05 :

Dans chaque cas, déterminer à partir du graphique une relation du type $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou k est un réel :



1 **2** **3** **4**

SOLUTION :

1- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, et sont de même sens donc $k > 0$

$\vec{u} = \frac{6}{4}\vec{v}$ donc $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$

2- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, et sont de sens contraire donc

$k < 0$ $\vec{u} = -\frac{3}{4}\vec{v}$

3- Ici : $K < 0$ donc : $\vec{u} = -\frac{7}{6}\vec{v}$

4- Ici : $K > 0$ donc : $\vec{u} = \frac{5}{8}\vec{v}$