الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التكوين والتعليم المهنيين
Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de l'Enseignement Professionnel à Distance (CNEPD)

المركز الوطني للتعليم المهني عن بعد
(م.و.ت.م.ب)

COURS DE MATHÉMATIQUES

SÉRIE 02

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE :

À l'issue de ce cours vous serez capable d'étudier la notion de la logique binaire et la table de vérité.

PLAN DE LA LEÇON:

I- CONJONCTION
II- DISJONCTION
III- NÉGATION

1- Négation d'une phrase
2- Négation d'une proposition

IV- PROPOSITION ET TABLE DE VÉRITÉ

1- Description proposition
2- Table de vérité

V-TAUTOLOGIE ET CONTRADICTION

VI- ÉQUIVALENCE LOGIQUE : ALGÈBRE DES PROPOSITIONS

VII- RAISONNEMENT ET IMPLICATION LOGIQUE

1- Raisonnements
2- Implication logique

I- CONJONCTION :

L'assertion « *P* et *Q* » (aussi notée « *P* ∧ *Q* ») est vraie si et seulement si *P* et *Q* sont toutes deux vraies :

P	Q	P∧Q
Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

On appelle cette assertion la **conjonction** de *P* et de *Q*
Formes normales conjonctives

(p ou !q) et (q ou !r),   (p ou !q) et (q ou !r) et (r et !p),

II- DISJONCTION :

Elle est définie de la manière suivante : *a* OU *b* est VRAI si et seulement si *a* est VRAI ou *b* est VRAI. (En particulier, si *a* est vrai et que *b* est vrai aussi, alors *a* OU *b* est vrai.) Cette loi est aussi notée

- $+$
- «∨» («∨ ») en mathématiques (et en logique mathématique) ou en APL.
- « | » ou « || » dans certains langages de programmation
- En toute lettre «or» ou «OR» en logique ou dans certains langages de programmation.

On privilégiera dans la suite la notation $+$ mais on prendra garde que cette loi n'est pas l'addition usuelle dans **Z**/2**Z**. C'est pourquoi, en mathématiques et en logique mathématique, la notation $+$n'est pas utilisée pour désigner le "ou inclusif" : elle est réservée au "ou exclusif", opération qui (jointe au "et") fait de toute algèbre de Boole un anneau de Boole, en particulier une **Z**/2**Z**-algèbre.

Table de la loi OU		
b\a	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

III- NÉGATION :

1- Négation d'une phrase :

1- Proposition En mathématiques, une proposition est une phrase mathématique.
Une proposition peut être vraie ou fausse.

Dans les phrases qui suivent, la lettre x représente un nombre réel.

	Négation de la proposition A	Vrai ou faux
B1	Il existe réel x qui a un carré strictement négatif	
B2	$x > 5$	
B3	Tous les rectangles sont des parallélogrammes	

2- Négation d'une proposition :

Soit une phrase A
La phrase B est la négation de la phrase A lorsque:
Si A est vraie alors B est fausse et si A est fausse alors B est vrai.
La négation des phrases du I-1 sont:

On note non *P* ou ¬*P*, la négation de « P » :

P	Non *P* (¬*P*)
Vrai	**Faux**
Faux	**Vrai**

IV- PROPOSITION ET TABLE DE VÉRITÉ :

1- Description proposition :

Écrivez une proposition logique des trois variables **p**, **q** et **r**.
Les variables sont **'p'**, '**q**' et '**r**'.
Les symboles de constantes sont '1' ou 'V' pour Vrai, '0' ou 'F' pour Faux.

'!' est l'opérateur unaire de négation (!p est la négation de p, on peut aussi utiliser les signes -, /, \).
Les connecteurs 'ou' (disjonction, inclusive) 'et' (conjonction) peuvent être respectivement remplacés par '+' et par '.', '*', 'x'.

Les autres connecteurs binaires sont '=>', '<=', '<=> Les parenthèses '(', ')' ou les crochets '[', ']' peuvent être utilisés dans l'écriture de la formule propositionnelle.

Exemples à 0 ou 1 variable :

F ou F, F ou V, V ou V, F et F, F et V, V et V,
F => V, V => V, V => F, V <=> V, F <=> F, V <= F,
p ou F, p ou V, p et F, p et V, p ou p, p et p, p ou !p, p et !p,
p => p, !p => p, p => !p, p <=> p, p <=> !p

Exemples à 2 variables :

Commutativité ou non q ou p, q et p, (q => p) <=> (p => q), (q <=> p) <=> (p <=> q).

2- Table de vérité :

Une **table de vérité** est une manière sémantique de représenter le calcul propositionnel classique. Ces outils sont couramment utilisés en électronique (porte logique) et en informatique (tests).

- Cet outil de travail nous permettra d’identifier toutes les possibilités que les actionneurs peuvent exécuter, que soit une sortie active (1) ou non active (0).

- Dans la première les actionneurs sont identifiés par des variables. Une table de vérité se divise en deux c'est-à-dire, les variables d'entrées (Bouton poussoir, contact, etc..) et les variables de sorties (relais, moteurs, lumière, solénoïdes, etc...)

- Les variables d'entrées sont identifiés par des lettres de l'alphabet de A à W. Les variables de sorties sont identifiées par la terminologie « sortie » pour seulement une variable et par des lettres non utilisées par les variables d'entrées pour plus d'une sortie (ex: X, Y, Z).

A	B	Sortie
Etats	**Etats**	**Etat**

- **Conception d'une table de vérité :**

Pour concevoir une table de vérité il faut en premier lieu identifier le nombre de variable d'entrée. Cette information nous permettra de déterminer toutes les possibilités possibles que peuvent exécuter les variables entre elles.

Faut comprendre que les variables n'ont que deux possibilités 0 ou 1, active ou désactive, ont dit d'eux qu'ils sont binaire (seulement deux possibilités).

On peut donc affirmer que le nombre de possibilités d'une variable exposant le nombre de variable déterminera les nombres de combinaisons possibles.

Sachant le nombre de variable (2 exposant à la n), nous pourrons déterminer le nombre de division de la table de vérité.

Exemple voir table précédente:

Variable A et B = 2^2 = 4 lignes et 2 colonnes, la troisième colonne servira à identifier la sortie.

Puis on identifiera chacun des casiers dans un ordre binaire. Exemple à la page suivante.

Premier case = 00
Second case = 01
Troisième case = 10
Quatrième case = 11

Table de vérité, identification de la sortie :

A	B	Sortie
0	0	0
0	1	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

La colonne Sortie sera indiqué par un nombre binaire 0 ou 1. Le nombre indiquer (0 ou 1) dans cette case dépendra de l'énoncé ou de la composante à laquelle les conditions des variables activeront oui ou non la sortie.

Exemple:

La compagnie vous informes que le moteur (Sortie) devra s'activer uniquement si le bouton A est enfoncé et pas le bouton B. Ce qui signifie que la première ligne de la colonne sortie, on indiquera 0, la seconde un 0, la troisième 1 et la dernière 0.

Table de vérité à plusieurs de sortie :

- Il est possible qu'il soit nécessaire d'avoir plusieurs sorties à partir d'une table de vérité.

- Un bon exemple serait l'utilisation de deux moteurs électrique à partir d'un même circuit électrique. Reprenons l'exemple précédent et ajoutons que le deuxième moteur s'activera uniquement si les boutons A et B sont enfoncés.

A	B	Sortie X	Sortie Y
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- **Table de vérité, type de montage :**

Les sorties sont variables en fonctions du type de montage.

Exemple : A + B = A ou B, circuit en OU

À la première ligne binaire si A = 0 et B = 0, la sortie sera = 0
À la deuxième ligne binaire si A = 0 et B = 1, la sortie sera = 1
Etc.

A	B	Sortie
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemple composé :

Table de vérité de a. (b+c)			
a	**b**	**c**	**a. (b+c)**
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

Le '**.**' se dit *et*, le '**+**' se lit *ou*.

On lit dans ce tableau: **a** *et* (**b** *ou* **c**)

Pour valider cette table, il faut donc que le **a** soit à l'état 1, ainsi que **b** *ou* **c**.

'et' et **'ou'** sont les opérateurs d'un état logique. On note les entrées "E" et les sorties "S".

V- TAUTOLOGIES ET DES CONTRADICTIONS[1]:

1- Définition

Une expression propositionnelle est une tautologie si et seulement si pour toutes les affectations possibles de valeurs de vérité à ses variables sa valeur de vérité est T.

Exemple : PV ¬ P

```
PPV ¬ P de P
---------------------
T      F     T
F      T     T
```

[1] **Source :** Lydia Sinapova, CMSC 175 mathématiques discrètes : Leçon 2 : Tautologies et contradictions. Equivalences logiques, sur site : http://faculty.simpson.edu/lydia.sinapova/www/cmsc180/LN180_Johnsonbaugh-07/L02-CompSt.htm

Une expression propositionnelle est une contradiction si et seulement si pour toutes les affectations possibles de valeurs de vérité à ses variables sa valeur de vérité est F.

Exemple : P Λ ¬ P

P ¬ PP Λ ¬ P

T FF
F T F

Utilisation de tautologies et les contradictions - à prouver la validité des arguments; pour la réécriture des expressions utilisant uniquement les connecteurs de base.

VI- ÉQUIVALENCE LOGIQUE : ALGÈBRE DE PROPOSITIONS :

On appelle équivalence de *P* et *Q* l'assertion, notée **«P ⇔ Q»** qui n'est autre que **(P⇒Q) et (Q ⇒Q)**

(P⇔Q) est vraie si et seulement si P et Q ont même valeur de vérité. Dans ce cas on dit que P (resp : Q) est une condition nécessaire et suffisante de Q (resp : P) :

P	Q	P⇒Q	Q ⇒P	P⇔Q
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai

Quelques résultats usuels

Ici *P*, *Q* et *R* désignent des assertions quelconques. Les résultats suivants sont valables :

- non (P et Q) ⇔ (non P ou non Q)
- non (P ou Q) ⇔ (non P et non Q)
- non (P ⇒ Q) ⇔ (P et non Q)
- (P ⇒ Q) ⇔ (non Q ⇒ non P)

VII- RAISONNEMENT ET IMPLICATION LOGIQUE :

1- Raisonnements :

- **Raisonnement déductif :**

Bien sûr, si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$ (et il en va de même pour les équivalences). C'est la base du raisonnement déductif : partant de l'hypothèse, on arrive à la conclusion par une succession d'implications reliées les unes aux autres.

- **Raisonnement par équivalences :**

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation (ou un système d'équation), on veut trouver

Toutes les solutions et que des solutions. Le raisonnement déductif ne sufi pas : on raisonne par équivalence.

- **Raisonnement par l'absurde :**

Soient P et Q deux propositions. Pour montrer $P \Rightarrow Q$ on peut établir qu'il est impossible d'avoir à la fois P vraie et Q fausse

Dans la pratique pour démontrer un résultat par l'absurde, on suppose que l'hypothèse est vraie et que la conclusion est fausse. On montre alors que cette supposition est impossible en arrivant à une absurdité (par exemple **0 = 1)**

2- Implication logique :

En logique mathématique, l'implication est l'un des connecteurs binaires du langage du calcul des propositions, généralement représenté par le symbole **« ⇒ »** et se lisant « seulement si » ou, de façon équivalente, « si …, alors … » comme dans la phrase « s'il pleut, alors mon gazon est arrosé »[1].

L'implication admet des interprétations différentes selon les différents systèmes logiques (logique classique, modale, intuitionniste etc...).

Étant un connecteur, qui produit une proposition à partir de deux autres, et qui est interprété par une opération sur les propositions ou sur les valeurs de vérités, l'implication n'est pas la déduction qui est une relation entre propositions a logique s'intéresse d'une part aux règles de construction des phrases mathématiques, d'autre part à leur vérité.

Soit **X** un ensemble. Un énoncé, ou une proposition, est une phrase mathématique dépendant des éléments de **X**. Un énoncé peut avoir deux valeurs, dépendant des éléments de X:vrai ou faux **(1 ou 0).** On associe à chaque énoncé P la partie de **X** des éléments tels que P est vrai.