الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التكوين والتعليم المهنيين
Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de l'Enseignement Professionnel à Distance (CNEPD)

المركز الوطني للتعليم المهني عن بعد
(م.و.ت.م.ب)

COURS DE MATHÉMATIQUES

SÉRIE 05

LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE :

À la fin de cette série, le stagiaire doit être capable d'appliquer la résolution d'un système d'équations linéaires mathématiques.

PLAN DE LA LEÇON :

INTRODUCTION

I- LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À UNE INCONNUE
II-LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À DEUX INCONNUES
III- SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

1- Définitions
2- Rang d'un système d'équations linéaires
3- Système de Cramer
4- Méthode de Gauss

a- Triangulation
b- Résolution du système triangulaire

RÉSUMÉ

INTRODUCTION :

Le chercheur dans tous les domaines, se trouve souvent confronté à des problèmes dont la résolution passe par celle d'un système d'équations qui modélisent les divers éléments considérés.

On se rend facilement compte que la résolution d'un système d'équations linéaires est aisée. Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes de résolutions :

a- Méthodes directes : Qui conduisent à la solution en un nombre d'opérations connues comme :

La méthode de CRAMER
La méthode de GAUSS
La méthode de JORDAN
La méthode de CHOLEVSKY …

b- Méthodes itératives : Qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaires étant difficile à prévoir et dépendant de la structure de la matrice associée au système (qu'on définira plus tard).

Il existe plusieurs méthodes itératives :

- La méthode de JACOBI
- La méthode de GAUSS-SEIDEL
- La méthode de la RELAXATION

Mais dans cette leçon, on va présenter seulement les méthodes directes suivantes :

- MÉTHODE DE CRAMER
- MÉTHODE DE GAUSS

I- LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À UNE INCONNUE :

Dans tout ce chapitre, les équations considérées seront, sauf indication contraire, des équations à résoudre dans $\Re$

Soit l'équation linéaire suivante :

$$ax + b = 0$$

La solution de cette équation se fait comme suit :

Si $\quad a \neq 0 \Rightarrow ax = -b$

D'où $\qquad x = \frac{-b}{a}$

Si $\; a = 0 \begin{cases} b = 0 & (1) \\ b \neq 0 & (2) \end{cases}$

(1) : On a une infinité de solutions et x est totalement indéterminé
(2) : On n'a pas de solutions c'est-à-dire l'équation est impossible.

Exemple :

Soit l'équation :

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{6}(2x - 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

En multipliant les deux membres par 18 on obtient l'équation équivalente :

$$9x - 3(2x - 1) = 6\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

D'où $\quad 9x - 6x + 3 = 9 - 2x$

$\qquad 3x + 3 - 9 + 2x = 0$

D'où $\quad x = \frac{6}{5}$

II-LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À DEUX INCONNUES :

1- Équation homogène : $ax + by = 0$

Cette équation n'est jamais impossible, sa résolution est résumée ci-dessous :

- **a et b non nuls tous les deux :**

$$\begin{cases} x = \lambda b \\ y = \lambda a \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

- **a = b = 0 on a une double infinité de solutions, x et y arbitraires tous les deux :**

2- Équation affinée : $ax + by = c$

La résolution de cette équation se fait comme suit :

- **a et b non nuls tous les deux :**

Les solutions de l'équation sont infinies, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de solutions, l'une des solutions était arbitraire.

- **$a = b = 0$:**

C = 0 : Double infinité de solutions, x et y était arbitraires tous les deux.

C = 0 : L'équation est donc impossible.

Remarque :

Dans le cas ou a et b non nuls, si (x_0 , y_0) est une solution particulière (arbitraire) de l'équation, toutes les autres solutions seront données par les formules :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda b \\ y = y_0 - \lambda a \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Exemple :

Résoudre dans Z*Z l'équation :

$$7x + 3y = 4$$

De l'équation donnée, on tire y en supposant x connue :

$$y = \left(\frac{7x-4}{3}\right) = \left(\frac{6x+3+x-1}{3}\right)$$

$$y = 2x - 1 + \left(\frac{x-1}{3}\right)$$

Mais x et y appartiennent à Z, cela implique que :

X – 1 est un multiple de 3 c'est-à-dire :
X – 1 = 3K $\quad k \in Z$.

Les solutions recherchées sont donc données par les formules :

$$\begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 7k - 1 \end{cases} \quad k \in Z$$

III- SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES :

1- Définition :

- On appelle système de **« n »** équations linéaires à **« p »** inconnues à coefficients dans un corps **K**, tout système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \cdots + a_{1p} * x_p = b_1 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \cdots + a_{2p} * x_p = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + \cdots + a_{np} * x_p = b_n \end{array}\right. \quad \textbf{(1)}$$

- On appelle solution du système (1) tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in k^p$ qui vérifie le système (1).

- On appelle système homogène associé au système **(1)**, le système déduit de **(1)** avec $b_i = 0$ avec $i = 1, n$.

- On appelle matrice associée à **(1)** la matrice des coefficients des X_i :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \ddots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = [a_{ij}] = A \qquad (2)\ AX = B$$

2- Rang du système linéaire :

A la matrice A associée au système (1) correspond l'application linéaire :

$f: k^p \rightarrow k^n$ par rapport aux bases canonique de :

$\{B\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in k^n$ et $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \in k^p$

Alors le système (1) se met sous la forme fonctionnelle :

$\boldsymbol{f(x) = b}$ et sous la forme matricielle

$\boldsymbol{AX = B}$

Où $\{X\}$ et $\{B\}$ sont des matrices colonnes d'éléments **X_i et B_J**

- On appelle « RANG » du système d'équations linéaire le rang de la matrice A associé à (1) :

$r(1) = r[A] = r(f)$

RANG D'UNE MATRICE :

a-Définition 1 :

La famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de K^n, est une famille libre (linéairement indépendante) si toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille a ses coefficients nuls c'est-à-dire :

Pour $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Exemple :

Soient $u_i\,(0,1,-1); u_2(-1,0,1); u_3(1,-1,0) \in \Re^3$

Montrer que ces vecteurs sont deux à deux linéairement indépendants, il faut que ?

Pour que $\mathbf{u_1}$ **et** $\mathbf{u_2}$ soient linéairement indépendants, il faut que :

$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$

Où $a_1\ et\ a_2 \in \Re\ et\ a_1 = a_2 = 0$

$\Leftrightarrow$

$$a_1\,(0,1,-1) + a_2\,(-1,0,1) = (0,0,0)$$

D'où $\begin{cases} a_1\,(0) + a_2\,(-1) = 0 \\ a_1\,(1) + a_2\,(0) = 0 \\ a_1\,(-1) + a_2\,(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$

$a_1 = a_2 = 0$

Ainsi : $a_1\,u_1 + a_2\,u_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$

b- Définition 2 :

On appelle rang d'une matrice A le rang des vecteurs colonnes de A. autrement dit, le rang de A est le nombre maximum de vecteurs colonnes de A linéairement indépendants.

On note : r [A] le rang de la matrice A.

Exemple :

Trouver le rang de la matrice suivante :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

On applique la définition du rang d'une matrice. Considérons les vecteurs colonnes :

$$\begin{cases} u_1 = (2,3,-1,0) \\ u_2 = (-3,1,0,2) \\ u_3 = (4,5,-1,4) \end{cases}$$

On va étudier leurs indépendances linéaires.
Soient a_1, a_2, a_3 des éléments de $\Re$ tel que :

$$a_1\,u_1 + a_2\,u_2 + a_3\,u_3 = 0$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2a_1 - 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 5a_3 = 0 \\ -a_1 - a_3 = 0 \\ 2a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases}$$

Il en résulte du système précédent que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$
Ainsi, les trois vecteurs sont linéairement indépendants et le rang de la matrice A est égale à **3**.
Soit ‟ r ″ le rang du système linéaire (1), les cas possible sont :

a) $p = n \; et \; \{r = p \; où \; r < p\}$
b) $p < n \; et \; \{r = p \; où \; r < p\}$
c) $p > n \; et \; \{r = n \; où \; r < n\}$

3- Système de Cramer (p=n=r) :

Quand le système (1) admet une solution celle-ci est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME (1) :

Soit le système de "n" équations à "n" inconnues :

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \cdots + a_{1n} * x_n = b_1 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \cdots + a_{2n} * x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + \cdots + a_{nn} * x_n = b_n \end{cases} \quad (I)$$

Soit : A la matrice associée au système

X la matrice colonne des $\mathbf{X_i}$
B celle des $\mathbf{b_i}$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Le rang du système est égal à "n".
b) Le système admet une solution unique pour tout $b_i \in K$ égale à $X = A^{-1} B$.

c) Le système homogène c'est-à-dire (B = 0) n'admet que la solution X = 0 dite solution triviale.
d) Ma matrice A est inversible.

Définition :

Un système de "n" équations linéaires à "n" inconnues dans un corps K qui vérifie l'une des quatre (04) propriétés équivalentes du théorème (1) est appelé "SYSTEME DE CRAMER".
Pour calculer cette solution unique :

$$X = [A^{-1}]\, B$$

Qui se met aussi sous la forme $\mathbf{x} = f^{-1}(B)$, on désigne les vecteurs colonnes de la matrice A par $(u_i) i = i, n$

Alors me système (I) s'écrit :

$$x_1(u_1) + x_2(u_2) + \cdots + x_n(u_n) = B$$

Pour obtenir le coefficient x_1, on remplace dans le déterminant det $((u_1), (u_2), \ldots, (u_n))$ le vecteur (u_i) par le vecteur B, on obtient :

$$\begin{aligned} det((u_1), \ldots, B, \ldots, (u_n)) &= det((u_1), \ldots, x_1(u_1), \ldots, x_n(u_n), \ldots, (u_n)) \\ &= x_1 det((u_1), \ldots, (u_i), \ldots, (u_n)) \\ &= x_i \det[A] \end{aligned}$$

On déduit les formules donnant la solution du système de CRAMER

$$X_1 = \frac{det[A]}{det[A]}; X_2 = \frac{det[A_2]}{det[A]}; \ldots; X_i = \frac{\det[A_i]}{\det[A]}; \ldots; X_n = \frac{det[A_n]}{det[A]}$$

Où a_i est la matrice déduite de la matrice AA en remplaçant la colonne "i" par la colonne B.

Exemple :

Résoudre le système des 4 équations linéaires suivantes à 4 inconnues :

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -33 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -49 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 16 \\ 7x_1 + 5x_2 - 18x_3 + 6x_4 = 101 \end{cases} \quad \ldots(*)$$

La matrice associée au système (*) est :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & -18 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -33 \\ -49 \\ 16 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Le calcul du déterminant donne : $det[A] = -2$

Donc A est inversible et le système est un système de CRAMER, il admet une solution unique

$$x_1 = \frac{det[A_1]}{det[A]}; x_2 = \frac{det[A_2]}{det[A]}; x_3 = \frac{det[A_3]}{det[A]}; \ldots; x_4 = \frac{det[A_4]}{det[A]}$$

$$A = \begin{bmatrix} -33 & 3 & 5 & -2 \\ -49 & 4 & 8 & -3 \\ 19 & 3 & -4 & 1 \\ 101 & 5 & -18 & 6 \end{bmatrix} \text{ d'où } det[A_1] = -4$$

$$\Rightarrow x_1 = 2$$

De la même manière, on peut trouver le reste des solutions :

$$x_2 = -3 \quad , x_3 = -4 \quad , x_4 = 5$$

Remarque :

Les cas où : **a)** n = p et r < n
b) p < n et (r = n où r < p)
c) p > n et (r = n où r < n)

Le système (I) n'est pas de CRAMER, selon les cas il admet soit une infinité de solutions soit n'admet pas du tout de solutions.

4- Méthode de GAUSS :

Cette méthode est souvent utilisée, est constituée de deux étapes :

- La triangularisation,
- L'élimination.

a- Triangularisation :

Cette étape consiste à transformer le système (I) qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$AX = B$

En un système triangulaire :

$[_0 \ddots\ ]X = B'$ (II) (*4-4-a*)

b- Résolution du système triangulaire supérieur précédent :

Cette étape consiste à calculer les inconnues x_n de la dernière à la première par la résolution du système triangulaire (*4-4-a*). Cette méthode est dite : "Méthode d'élimination par la remontée" ou "Méthode d'élimination de GAUSS" ou en anglais "Back substitutions".

Remarque :

On notera : $[_0 \ddots\ ] = [S]$

- **Triangularisation** :

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad \text{(III)}$$

La triangularisation consiste à "éliminer" successivement les inconnues x_k ; k = 1,2,…,n-1 dans les équations k+1 à n.

L'élimination de x_k se fais de la manière suivante :

- Exprimer x_k en fonction de $x_{k+1,}x_{k+2,\dots,}x_n$ et b_k en utilisant l'équation "k".
- Reporter l'expression de x_k précédente dans les équations "k+2", "k+2",…,"n".

Après élimination des inconnues x_1 à x_{n-1} la matrice A est triangulaire supérieure puisqu'elle ne comporte plus que des zéros sous la diagonale.

L'élimination de chaque inconnue x_k modifie [A] et $\{B\}$; notons $[A^k]$ et $\{B^k\}$ la matrice et le second membre après élimination des inconnues 1,2,3,…,k. La matrice A^0 étant la matrice initiale A.

A = A^0 et B = B^0 est le système original.

Eliminer x_1 dans les équations 2 à n

A^1 et B^1

Eliminer x_2 dans les équations 3 à n

A^2 et B^2

……………………………………….

Eliminer x_k dans les équations k+1 à n

A^k et B^k

…………………………………………

Eliminer x_{n-1} dans les équations n

$S = A^{n-1} et\ B^{n-1} = B'$ ******système triangulaire supérieur.

- **Méthode d'élimination :**

Pour éliminer la variable x_1 du système (III) nous utiliserons la première équation sous la forme suivante :

$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n)$ et reportons cette expression de x_1 dans les équations 2, 3,4,…, n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{2n}\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}\frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{nn}\frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1n} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \vdots \\ b_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}b_1 \end{matrix}\right\}$$

Ce que nous noterons comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{matrix}\right\}$$

Où

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{ij} \\ b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1 \end{cases} \qquad \text{i, j = 2,…,n}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{kj}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}b_k^{(k-1)} \end{cases} \qquad \text{i, j = k+1,…,n}$$

Le système final s’écrit alors :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}{}^{(1)} & \cdots & a_{2k}{}^{(1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}{}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}{}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}{}^{(n-1)} \end{bmatrix} \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2{}^{(1)} \\ \vdots \\ b_k{}^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n{}^{(n-1)} \end{bmatrix}\right\}$$

$$\left[{}_0 \ddots {}^{a^{(n-1)}}\right] \{X_n\} = \{B^{(n-1)}\}$$

Soit

$$\left[{}_0 \ddots\right] \{X_n\} = \{B'\} \qquad \textbf{\textit{(IV)}}$$

Avec : $a_{11} = s_{11}, a_{12} = b_{12}, \ldots$

$a_{22}{}^{(1)} = s_{22}, \ldots, a_{2k}{}^{(1)} = b_{2k}$

…………………………………...

$a_{nn}{}^{(n-1)} = s_{nn}$

La matrice S état une matrice triangulaire supérieur

- **Résolution du système triangulaire supérieur :**

La résolution du système **(IV)** se fait à partir de la dernière équation, en calculant successivement $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$ d’où le nom de remonté ou back-substitution.

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{s_{nn}} \\ x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - s_{n-1,n}\, x_n}{s_{n-1,n-1}} \\ \qquad \vdots \\ x_1 = \dfrac{b_1 - s_{12} x_2 - s_{13} x_3 - \cdots - s_{1n} x_n}{s_{11}} \end{cases}$$

Exemple :

Soit le système non symétrique suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 11 & 25 \\ 6 & 18 & 46 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 \\ 101 \\ 180 \end{Bmatrix}$$

Résoudre le système précédant par la méthode de GAUSS.

Solution :

1°) Triangularisation du système :

Après élimination de x_1

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 11 - \frac{4}{2}4 & 25 - \frac{4}{2}8 \\ 0 & 18 - \frac{6}{2}4 & 46 - \frac{6}{2}8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 \\ 101 - \frac{4}{2}34 \\ 180 - \frac{6}{2}34 \end{Bmatrix}$$

D'où

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 \\ 33 \\ 78 \end{Bmatrix}$$

Après élimination de x_1 et de x_2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 22 - \frac{6}{3}9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 \\ 33 \\ 78 - \frac{6}{3}33 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 \\ 33 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\left[_0 \ddots\,\right]\{x_n\}=\{B'\}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -34 \\ \quad\quad\;\; 3x_2 + 9x_3 = 33 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 4x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{12}{3} = 3 \\ x_2 = \frac{1}{3}(33 - 9x_2) = 2 \\ x_1 = \frac{1}{2}(34 - 4x_2 - 8x_3) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Remarque importantes :

- La méthode précédente ne fonctionne plus si en cours de la traingularisation le pivot "a_{kk}" est nul. Il faut alors échanger la ligne "k" avec une autre ligne "i>k" telle que "a ik "$\neq$0".

- Dans le cas d'un système symétrique, nous pouvons conserver la symétrie à condition d'échanger également les colonnes "i" et "k", ce qui implique une modification de l'ordre des inconnues. Pour que ceci soit possible il faut que le terme diagonal "a_{ii}" soit non nul.

- Si lorsque "$a_{ii} = 0$", tous les termes "a_{ik}" avec (i>k) ou tous les termes "a_{ik}" avec (i>k) sont nuls, la matrice A es singulière ; Le système ne peut donc pas être résolu. Le déterminant de la matrice A est le produit des termes diagonaux de la matrice triangulaire S.

Trouver le pivot non nul dans la matrice symétrique suivante :

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1^{\text{ère}} \text{ ligne} \\ 2^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ 3^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{array}$$

Solution :

Le premier pivot "a_{11}" étant nul, échangeons la 1ère ligne avec la 2ème ligne, on obtient alors :

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 2^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ 1^{\text{ère}} \text{ ligne} \\ 3^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{array}$$

Cette matrice n'est plus symétrique. Nous ne pouvons dans ce cas échanger les colonnes 1 et 2 car ceci redonnerait un pivot nul en première ligne.

Après élimination de x_1 :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & -12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Après élimination de x_1 et de x_2 :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Le déterminant de [A] est : (4)(4)(-24) = -384

RÉSUMÉ :

Nous résumons la résolution d'une équation à une inconnue de la forme ax + b = 0 par le tableau :

	ax+b=0	
$a \neq 0$	$b \neq 0$	x=b/a
a=0	b=0	Infinité de solutions
	$b \neq 0$	Equation impossible à résoudre

Et la résolution d'une équation à deux inconnues par le tableau :

	ax+by=c		
$a \neq 0$	$b \neq 0$	c=0	$x=\lambda b \quad \lambda \in \Re$ $y=-\lambda a$
		$c \neq 0$	$x=x_0+\lambda b \quad \lambda \in \Re$ $y=y_0-\lambda a \quad (x_0, y_0)$: Solution particulière
		c=0	Double infinité de solutions.
a=0	b=0	$c \neq 0$	Equation impossible à résoudre.

Dans cette leçon nous avons ensuite défini un système d'équation linéaires comme étant une suite s'équations linéaire. La représentation matricielle de ce dernier est AX = B ou A es la matrice du système et B et son second membre.

Enfin, on s'est intéressé aux méthodes de résolution directes et plus particulièrement à celle de CRAMER et celle de GAUSS. Nous les résumons par :

1) Méthode de CRAMER : n=p=r det [A]$\neq$0

a- Système non homogène :

$$X_1 = \frac{det[A_1]}{det[A]}; X_2 = \frac{det[A_2]}{det[A]}; \ldots; X_i = \frac{det[A_i]}{det[A]}; \ldots; X_n = \frac{det[A_n]}{det[A]}$$

b- Système homogène :

La solution nulle est la solution triviale (elle est unique).

2) Méthode de GAUSS :

a- Triangularisation de A :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)} \end{cases} \qquad i, j = k+1, \ldots, n$$

b- Résolution du système triangulaire :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{s_{nn}} \\ x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - s_{n-1,n}\, x_n}{s_{n-1,n-1}} \\ \vdots \\ x_1 = \frac{b_1 - s_{12} x_2 - s_{13} x_3 - \cdots - s_{1n} x_n}{s_{11}} \end{cases}$$

EXERCICES D'APPLICATION :

EXERCICE N°01 :

Résoudre le système suivant par la méthode de CRAMER (démonter qu'il est de CRAMER)

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

EXERCICE N°02 :

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de la matrice inverse :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

EXERCICE N°03 :

Résoudre le système des 4 équations linéaires à 4 inconnues suivant par la méthode de CRAMER :

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -33 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -49 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 16 \\ 7x_1 + 5x_2 - 18x_3 + 6x_4 = 101 \end{cases}$$

Résoudre le système suivant par la méthode de GAUSS :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

CORRECTION DES EXERCICES D'APPLICATION:

EXERCICE N°01 :

Calcul du rang du système :

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases} \qquad (1)$$

La matrice A associée au système (1) est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs colonnes de la matrice A sont :

$$u_1 = (2,3,5)$$
$$u_2 = (1,-2,-3)$$
$$u_3 = (-3,2,-1)$$

On va étudier leur indépendance linéaire :

Soient a_1, a_2, a_3 de $\Re$ telle que :

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 - 3a_3 = 0 & (1) \\ 3a_1 - 2a_2 + 2a_3 = 0 & (2) \\ 5a_1 - 3a_2 - a_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow 5a_1 - 3a_2 = a_3$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 - 3\,(5a_1 - 3a_3) = 0 \\ 3a_1 - 2a_2 + 2\,(5a_1 - 3a_3) = 0 \\ 5a_1 - 3a_2 = a_3 \end{cases}$$

D’où :

$$\begin{cases} -13a_1+10a_2 = 0 & (1’) \\ 13a_1 - 8a_2 = 0 & (2’) \\ 5a_1 - 3a_2 = a_3 \end{cases}$$

(1’)+ (2’) $\Leftrightarrow -13a_1+10a_2 + 13a_1 - 8a_2 = 0$

$\Leftrightarrow 2a_2 = 0$

$\Leftrightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

D’où les (03) vecteurs colonnes sont linéairement indépendant donc le rang du système est "3"

La résolution du système :

Le nombre d’équation est égale au nombre d’inconnues et c’est aussi égale au rang du système donc le système est de CRAMER :

Le calcul du déterminant : det [A] = 26 ; non nul.

Le système donné est de CRAMER donc il possède une solution unique donnée par les formules suivantes :

$$x = \frac{det[A_1]}{det[A]} ; y = \frac{det[A_2]}{det[A]} ; z = \frac{det[A_3]}{det[A]}$$

$$\mathrm{x} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\mathrm{y} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$\mathrm{z} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{bmatrix} = -3$$

La solution unique (x, y, z)= (1,-3,-2).

EXERCICE N°02 :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

La matrice associée au système est $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

L'inverse de $[A]$ est $[A^{-1}]$

$$[A^{-1}] = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\mathrm{x} = [A^{-1}]\{B\}$$

$$\mathrm{x} = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

La solution est :

$$\mathrm{x} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 4/5 \end{Bmatrix}$$

EXERCICE N°03 :

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -33 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -49 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 16 \\ 7x_1 + 5x_2 - 18x_3 + 6x_4 = 101 \end{cases}$$

La matrice associée au système est :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

Le calcul du déterminant donne : det [A]=-2

Donc A est inversible et le système est de CRAMER ; il admet une solution unique :

$$x_1 = \frac{-1}{2} det \begin{bmatrix} -33 & 3 & 5 & -2 \\ -49 & 4 & 8 & -3 \\ 16 & 3 & -4 & 1 \\ 101 & 5 & -18 & 6 \end{bmatrix} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1}{2} det \begin{bmatrix} 3 & -33 & 5 & -2 \\ 5 & -49 & 8 & -3 \\ 2 & 16 & -4 & 1 \\ 7 & 101 & -18 & 6 \end{bmatrix} = -3$$

$$x_3 = \frac{-1}{2} det \begin{bmatrix} 3 & 3 & -33 & -2 \\ 5 & 4 & -49 & -3 \\ 2 & 3 & 16 & 1 \\ 7 & 5 & 101 & 6 \end{bmatrix} = -4$$

$$x_4 = \frac{-1}{2} det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & -33 \\ 5 & 4 & 8 & -49 \\ 2 & 3 & -4 & 16 \\ 7 & 5 & -18 & 101 \end{bmatrix} = 5$$

Solution est : $\{x\}=\{2, -3, -4, 5\}$.

EXERCICE N°04 :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases} \qquad [A]\{X\}=\{B\}$$

a) Triangularisation :

Après élimination de x_1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2-\frac{2}{1}3 & 0-\frac{2}{1}3 \\ 0 & 2-\frac{3}{1}3 & 6-\frac{3}{1}3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2-\frac{2}{1}0 \\ 11-\frac{2}{1}0 \end{Bmatrix}$$

Soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{Bmatrix}$$

Après élimination de x_1 et de x_2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -3-\frac{-7}{-4}6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11-\frac{-7}{-4}2 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{15}{2} \end{Bmatrix}$$

La solution du système triangulaire résultant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_2 - 6x_3 \qquad = 2 \\ \frac{15}{2}x_3 \qquad\qquad = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Par la méthode de GAUSS, on trouve la solution :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{15}{2} / \frac{15}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1}{4}(2 + 6x_3) = -2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ x_1 = -3x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

1- [ZIT.86] ALGÈBRE «COURS DE 1ÈRE ANNÉE DES UNIVERSITÉS »
   a. ZITOUNI Mohamed
   b. Editions O.P.U 1986

2- [BAB.83] ALGÈBRE I MUDULE SEM 300
   a. BABA-HAMED C.
   b. BENHABIB K.
   c. Éditions O.P.U 1983

3- [BOU.93] MÉTHODES NUMÉRIQUES APPLIQUÉES
   a. (Avec nombreux problèmes résolus en fortran 77)
   b. M.BOUMAHRAT
   c. A.GOURDIN
   d. Éditions O.P.U 1993

4- [COM.81] ALGÈBRE (EXERCICE VUIBERT)
   A.COMBES et D.BARGUES 1981

5- [BEN.75] INTRODUTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE
   a. Benali BENZAGHOU
   b. Éditions S N E D 1975

6- [DHA.84] PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
   a- Gouri DHATT
   b- Gilbert TOUZOT 1984