الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التكوين والتعليم المهنيين
Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels
Centre National de l'Enseignement Professionnel à Distance (CNEPD)
المركز الوطني للتعليم المهني عن بعد
(م.و.ت.م.ب)

COURS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SERIE N°01

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE:

À la fin de cette série, le stagiaire doit être capable de:

1- Définir la recherche opérationnelle
2- Définir un programme linéaire
3- Résoudre graphiquement un programme linéaire à 2 inconnues

LECON N°1: INTRODUCTION A LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET À LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

PLAN DE LA LECON:

I- LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

1- Préceptes de la recherche opérationnelle
2- Démarche

II- LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

1- Introduction générale
2- Qu'est ce qu'un programme linéaire
3- Résolution par la méthode graphique d'un programme linéaire

CONCLUSION

EXERCICES CORRIGÉS

I- LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE :

1- <u>Préceptes de la recherche opérationnelle</u>:

- Réfléchir avant d'agir ;
- Ne pas se fier au bon sens. Appuyez ses décisions sur des bases rationnelles ;
- Tirer le meilleur parti des moyens dont on dispose dans des circonstances données.

Ces préceptes qui pouvaient être ceux du parfait manager, sont ceux de la recherche opérationnelle.

La RO consiste en l'application de méthodes scientifiques pour élaborer des décisions et chercher à résoudre ainsi des problèmes complexes se rencontrant dans la direction et la gestion de grands systèmes d'hommes, de machines, de matériaux et d'argent dans l'industrie, le commerce, l'administration et la défense. La R.O propose une véritable démarche scientifique pour les aborder.

- Chercher à comprendre et à structurer un système complexe en construisant un « modèle » ;
- Utiliser cette compréhension et ce modèle pour prédire est améliorer les performances du système discipline carrefour, la recherche opérationnelle utilise pour arriver à ses fins des techniques propres à d'autres disciplines scientifiques: Mathématiques, Statistiques, Economique, Informatique.

2- <u>Démarche</u>:

Un premier exemple issu d'un grand domaine d'application de la RO, la logistique, va nous servir à illustrer cette démarche.

Une entreprise doit livrer chaque matin quatre clients à partir d'un dépôt central. Un livreur à bord d'un camion se rend donc dans les magasins des clients pour décharger ses marchandises avant de retourner à son point de dépôt.

L'entreprise dans un 1er temps, cherche à organiser la tournée du livreur. Plus celle-ci est courte, non seulement plus vite elle permet au livreur de participer à d'autres tâches, mais surtout plus elle sera économique pour l'entreprise.

Dans ce cas, tout le système, représenté, par le livreur, les clients, l'entreprise et son environnement, doit être pris en compte.

Après appréciation du coût de voyage entre deux (02) clients, exprimé en temps ou en unités monétaires, le critère choisi à été unique: tournée dont la somme des coûts des liaisons empruntées est la plus petite possible.

L'incertitude de certaines données pourraient être prise en compte, le temps de liaison entre 2 clients peut fluctuer suivant les heures de la journée, seule une valeur probable peut être connue. D'autres contraintes peuvent exister. Que se passe-t-il si le volume de marchandises à livrer aux clients excède la capacité du camion? Si certains clients ne sont présents que pendant une certaine période de la matinée? Tout ceci montre que la construction d'un modèle est délicate. Le problème posé est: Dans quel ordre le camion doit-il visiter les clients pour accomplir une tournée de coût total minimal (le plus petit possible)? Les tournées possibles sont au nombre de 24 :(1 2 3 4, 1 2 4 3, 1 3 2 4, 1 3 4 2, 2 1 3 4, 2 1 4 3, ……….), quelle est donc celle qui fournit le circuit le moins coûteux. En énumérant ces 24 solutions et en calculant le coût total des liaisons à assurer, la tournée cherchée sera nécessairement trouvée. En calculant à la main, plus on moins maladroitement, cela prendra 5 minutes.

Passons maintenant à un ordre de grandeur supérieure, plus proche que la réalité: Vingt cinq clients, par exemple, chiffre encore assez faible par rapport à une clientèle donnée réelle. Les tournées possibles sont au nombre de 25! = 25 x 24x 23 x….x 2x 1, plus question de calcul manuel, alors peut être un ordinateur? Mais pas d'illusions, même un ordinateur calculant assez rapidement prendrait un temps équivalent à plusieurs siècles pour trouver la meilleure tournée entre les 25 clients. Ceci est surprenant et montre qu'il faut parcourir à un modèle mathématique (exprimant le problème) et ensuite le résoudre.

L’élaboration d’un modèle consiste en la définition de variables de décision, associées ici par exemple au choix ou nom d’une liaison à emprunter entre 2 clients, la définition des contraintes (passer par chaque client une et une seule fois) et de l’objectif représenté par un but à optimiser (coût minimal) et ceci en fonction de ces variables.

Une fois le problème ainsi posé ; commence l’étude de la conception et de la mise en œuvre informatique d’une méthode de résolution. Ce problème de tournée est appelé problème du voyageur de commerce, il a acquis sa renommée pour plusieurs raisons qui ont éclairé d’autres aspects de la R.O.

II- LA PROGRAMMATION LINÉAIRE :

1- <u>Introduction générale à la programmation linéaire</u> :

Établir un schéma de fabrication qui utilise de manière optimale un stock de matière première limité, transporter des denrées de différents entrepôts vers différents magasins au meilleur coût possible, tout en satisfaisant la demande des magasins et respectant la disponibilité de chaque entrepôt : Voilà quelques exemples classiques de problèmes économiques pour lesquels il importe de disposer de modèles mathématiques à la fois simples, puissants et informatisables (en égard au nombre considérable de données à traiter). On parle traditionnellement à leur sujet de programmation mathématique sans que le mot « programmation » ne fasse en quelque manière que ce soit, référence à l’aspect informatique : il s’agit dans chaque cas d’établir un schéma ou « programme » de fabrication, de transport, optimisant une fonction économique (fonction bénéfice, fonction coût) dans laquelle les variables sont soumises à des contraintes (limitation de stock de matière premières) respect de l’offre et de la demande …).

Nous ferons lors de la modélisation, une hypothèse simplificatrice supplémentaire: « tout est linéaire », la fonction économique et les contraintes. Cette réduction sévère couvre toutefois une gamme importante d’applications pratiques et constitue le prix à payer pour obtenir le modèle simple et puissant recherché: La programmation linéaire.

2- Qu'est ce qu'un programme linéaire ?

Pour illustrer cette définition commençons par un exemple.

2.1- Un premier exemple-type: Maximisation d'un bénéfice:

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 à l'aide de 3 matières premières M_1, M_2 et M_3 dont on dispose en quantités limitées. Sous tous les cieux, et tous les régimes se pose le problème de l'utilisation optimale de ce stock de matières premières, c'est à dire la détermination d'un schéma (programme) de fabrication tel que:

- Les contraintes de ressources en matières premières sont respectées ;
- Le bénéfice réalisé par la vente de la production est maximum.

Modèle mathématique:

a- Données numériques des contraintes :

- **La disponibilité en matières premières :**

18 unités de M_1
8 unités de M_2
14 unités de M_3

- Les caractéristiques techniques de la fabrication sont données dans le tableau ci-après ; y figurent les quantités de matières premières nécessaires à la fabrication d'une unité de chaque produit P_i.

	M_1	M_2	M_3
P_1	1	1	2
P_2	3	1	1

b- **Hypothèses de linéarité du modèle** :

(L$_1$) Linéarité des contraintes:

On suppose que la fabrication est à rendement constant ; c'est à dire, d'après le tableau ci-dessus pour fabriquer x_1 unités de (P_1) il faut $\times_1$ unités de M_1, $\times_1$ unités de M_2 et 2 $\times_1$ unités de M_3, de même, la fabrication de $\times_2$ unités du produit P_2, nécessite 3 $\times_2$ de M_1, $\times_2$ unités de M_2 et $\times_2$ unités de M_3.

(L$_2$) Linéarité de la fonction économique:

On suppose que le bénéfice peut être exprimé à l'aide des bénéfices unitaires c_1 et c_2 sous la forme $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$.

c_1 est le bénéfice unitaire.

C'est à dire : bénéfice réalisé par la fabrication d'une unité du produit P_1, le bénéfice réalisé par la fabrication de x_1 unités du produit P_1 est alors $c_1 x_1$. De même que pour le produit P_2, le bénéfice réalisé par la fabrication de $\times_1$ unités de P_1 et $\times_2$ unités de P_2 est $Z = c_1 \times_1 + c_2 \times_2$ ce qu'on a appelé fonction économique.

c- **Réalisabilité d'un schéma de production** :

Un schéma de production est un couple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ désignant les quantités de P_1 et P_2 fabriquées, il doit évidemment vérifier les contraintes $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Un tel schéma est-il réalisable? A-t-on suffisamment de matières premières pour assurer une telle production? Le niveau de fabrication nécessite $x_1 + 3x_2$ unités de M_1, $x_1 + x_2$ unités de M_2, $2x_1 + x_2$ unités de M_3 .

Les disponibilités en matières premières montrent que le schéma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ n'est réalisable que lorsque x_1 et x_2 vérifient

Les inéquations :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{array}}$$

e- <u>Le problème à résoudre est</u> :

Trouver deux nombres x_1, x_2 tels que:

1- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\quad x_1 + 3x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$2x_1 + x_2 \leq 14$

2- $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ est le plus grand possible

Soit le s matrices: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$

$C = (c_1, c_2)$ le problème s'écrit matriciellement sous la forme:

Trouver $X \geq o$ tel que $A\ x \leq B$ et $C\ x$ maximum ; ce que nous noterons

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ A \times \leq b \\ c \times = z \ (\max) \end{cases}$$

2.2 - <u>Un deuxième exemple-type: Minimisation d'un coût</u>:

Dans une raffinerie, la distillation de deux types de pétroles bruts B_1 et B_2 fournit 3 qualités d'essences E_1, E_2 et E_3.

La raffinerie doit approvisionner un distributeur d'essences ; le problème consiste à déterminer le meilleur schéma de distillation, c'est-à-dire les quantités de bruts à distiller telles que :

1- Les quantités d'essences obtenues satisfont la demande ;
2- Le coût des quantités de bruts est minimum.

Modèle mathématique:

a- Données numériques de contraintes :

- La demande du distributeur est : 500 litres de E_1, 400 litres de E_2 et 600 litres de E_3 ;
- La distillation de B_1 et B_2 fournit respectivement :

B_1 : 10% de E_1, 10% de E_2, et 30% de E_3.
B_2 : 50% de E_1, 20% de E_2, et 20% de E_3.

b- Hypothèses de linéarité du modèle :

(L_1) linéarité des contraintes :

On suppose que la qualité des bruts est toujours la même, et que la distillation s'opère à rendement constant.

Exemple 1 :

La distillation d'un m^3 de B_1 produit 0,1 m^3 de E_1, 0,1 m^3 de E_2, et 0,3 m^3 de E_3.

La distillation de x_1 m^3 de B_1 produit alors 0,1 $\times_1$ m^3 de E_1 et alors $0{,}1x_1$ m^3 de E_2 et 0,3 x_1 m^3 de E_3.

(L_2) Linéarité de la fonction économique :

Les coûts des bruts sont de 20 \$ / m^3 pour B_1 et de 25 \$ / m^3 pour B_2 ;

On suppose une fois de plus qu'il n'y a pas de tarif dégressif.

c- **Réalisabilité d'un schéma de distillation** :

Un schéma de distillation est un couple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ désignant les quantités (en m^3) de B_1 et B_2 distillés; il doit évidemment vérifier les contraintes $x_1 \geq o$ et $x_2 \geq o$; un tel schéma est réalisable lorsqu'il permet de satisfaire la demande du distributeur. Pour cela x_1 et x_2 doivent vérifier :

$$\boxed{\begin{array}{l} 0{,}1\, x_1 + 0{,}5\, x_2 \geq 0{,}5 \\ 0{,}1\, x_1 + 0{,}2\, x_2 \geq 0{,}4 \\ 0{,}3\, x_1 + 0{,}2\, x_2 \geq 0{,}6 \end{array}}$$

Remarques:

1- Attention aux unités ! La demande du distributeur indiquée plus haut est exprimée en litres, les quantités de bruts sont en m^3 ;

2- Pour trouver les inéquations précédentes ; complétons, l'exemple précèdent : La distillation de x_2 m^3 de B^2 produit 0,5 x_2 m^3 de E_1, 0,2 x_2 m^3 de E_2, 0,2 x_2 m^3 de E_3. Donc la distillation de x_1 m^3 de B_1 et de x_2 m^3 de B^3 produit (0,1 x_1 + 0,5 x_2) m^3 de E_1 et (0,1 x_1 + 0,2 x_2) m^3 de E_2, et (0,3 x_1 + 0,2 x_2) de E_3. Ces quantités doivent être supérieures ou égales à la demande.

d- **Le problème à résoudre est** :

(P)

Trouver deux nombres x_1 et x_2 tels que:

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \\ 0{,}1\, x_1 + 0{,}5\, x_2 \geq 0{,}5 \\ 0{,}1\, x_1 + 0{,}2\, x_2 \geq 0{,}4 \\ 0{,}3\, x_1 + 0{,}2\, x_2 \geq 0{,}6 \end{array}$$

$Z = 20\, x_1 + 25\, x_2$ est le plus petit possible

(Z représente le coût total des bruts distillés)

Matriciellement ce problème s'écrit :

Trouver $X \geq 0$ tel que $A X \geq B$ et $C X$ minimum avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \; ; \; A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 20{,}25 \end{bmatrix}$$

Ce que nous noterons :

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ A\ X \geq B \\ C\ X \geq Z\ (\min) \end{cases}$$

e- <u>Changement d'unités</u>:

Formellement, d'un point de vue strictement mathématique, le problème (P) peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

(P′)

Trouver 2 nombres x_1 et x_2 tels que

$$\begin{aligned} & x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \\ & x_1 + 5 x_2 \geq 5 \\ & x_1 + 2 x_2 \geq 4 \\ & 3 x_1 + 2 x_2 \geq 6 \end{aligned}$$

$Z = 20 x_1 + 25 x_2$ est le plus petit possible

3- Résolution par la méthode graphique:

Soit le modèle du 1er exemple :

$$\begin{cases} x_1 + 3\,x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8\,, \quad x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \\ 2\,x_1 + x_2 \leq 14 \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 = Z\ (\max) \end{cases}$$

Soit : $C_1 = 3$ et $C_2 = 2$;

Résoudre graphiquement ce modèle revient à trouver les valeurs de x_1 et x_2 qui vérifient le système d'inéquations et donne la plus grande valeur à la fonction économique Z.

On construit d'abord les droites d'équations respectives.

$$x_1 + 3\,x_2 = 18$$
$$x_1 + x_2 = 8$$
$$2\,x_1 + x_2 = 14$$

Et éliminer, pour chacune de ces droites, le demi-plan dont les points ont des coordonnées qui ne satisfont pas à l'inéquation correspondante.

Rappel: Toute droite D d'équation a x + by + c = o

L'expression a x + by + c est strictement positive dans l'un et négative dans l'autre, des deux demi-plans de frontière D ; que la droite d'unité partage le plan en 3 parties :

- Les points appartenant à la droite et ayant des coordonnées vérifiant a x + by + c = o.
- Les 2 demi-plans délimités par (D) et dans lesquels, l'expression a x + by + c garde un signe constant (nous l'admettrons sans démonstration).

Pratiquement, on trace les droites et on utilise les coordonnées de l'origine (o, o) pour chacune des inéquations afin de vérifier que le signe de la région contenant ladite origine convient ou non au sens de l'inéquation. On hachure ensuite la partie qui ne convient pas comme ci-dessous indiqué:

$D_1 : x_1 + 3x_2 = 18$ passe par A $\begin{bmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 6 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} X_1 = 18 \\ X_2 = 0 \end{bmatrix}$

$D_2 : x_1 + x_2 = 8$ passe par C $\begin{bmatrix} X_1 = 8 \\ X_2 = 0 \end{bmatrix}$ D $\begin{bmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 8 \end{bmatrix}$

$D_3 : 2x_1 + x_2 = 14$ passe par E $\begin{bmatrix} X_1 = 7 \\ X_2 = 0 \end{bmatrix}$ F $\begin{bmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 14 \end{bmatrix}$

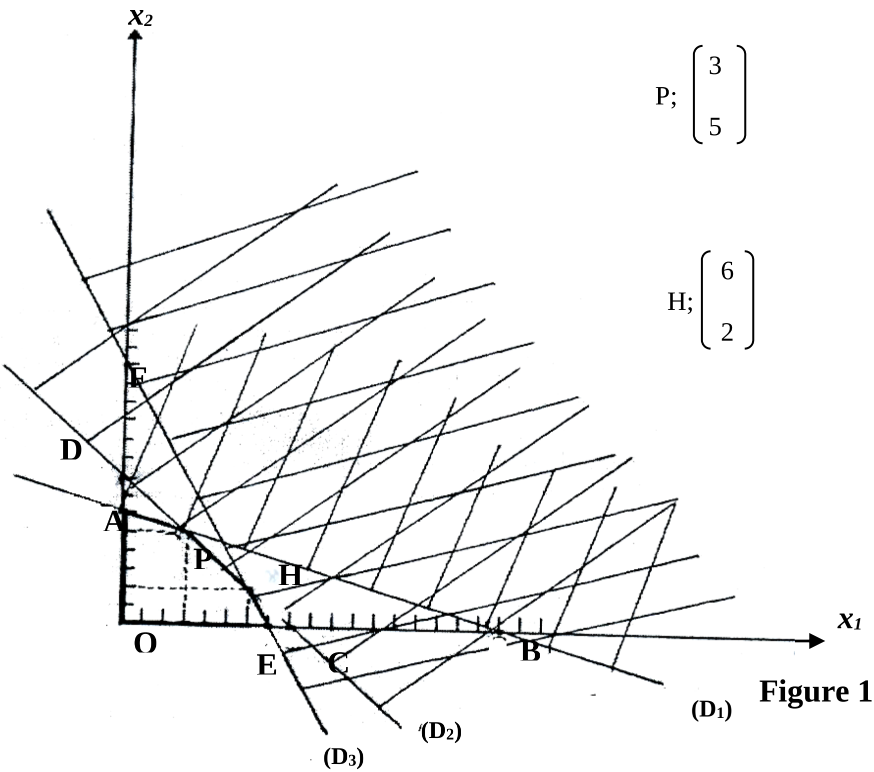


Figure 1

(OAPHE) contient
Toutes les solutions possibles (réalisables)

Les coordonnées des points intérieurs et sur les côtés vérifient les contraintes, il faut donc chercher celui qui donne le bénéfice le plus élevé.

Pour le savoir, on remplacera dans la fonction économique.

$Z = 3\ x_1 + 2\ x_2$ les coordonnées de chacun des points du domaine des solutions réalisables, on obtient alors :

$Z_O = 3\ (0) + 2\ (0) = 0$
$Z_A = 3\ (0) + 2\ (6) = 12$
$Z_P = 3\ (3) + 2\ (5) = 19$

$\boxed{Z_H = 3\ (6) + 2\ (2) = 22}$ *

$Z_E = 3\,(7) + 2\,(0) = 21$

L'optimum est atteint au point H avec :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \\ Z_H = 22 \text{ u. m} \end{array}}$$

<u>Un autres exemple</u>:

Soit le modèle ($P^{/}$), comme il est à 2 inconnues, on peut facilement le résoudre par la méthode graphique.

On construit d'abord les droites d'équations respectives :

$$x_1 + 5\,x_2 = 5$$
$$x_1 + 2\,x_2 = 4$$
$$3\,x_1 + 2\,x_2 = 6$$

Et éliminer pour chacune de ces droites, le demi-plan dont les points ont des coordonnées qui ne satisfont pas à l'inéquation correspondante.

$D_1 = x_1 + 5\,x_2 = 5$ passe par les points A $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, B $\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$

$D_2 = x_1 + 2\,x_2 = 4$ passe par les points C $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$, D $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$

$D_3 = 3\,x_1 + 2\,x_2 = 6$ passe par les points E $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$, F $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

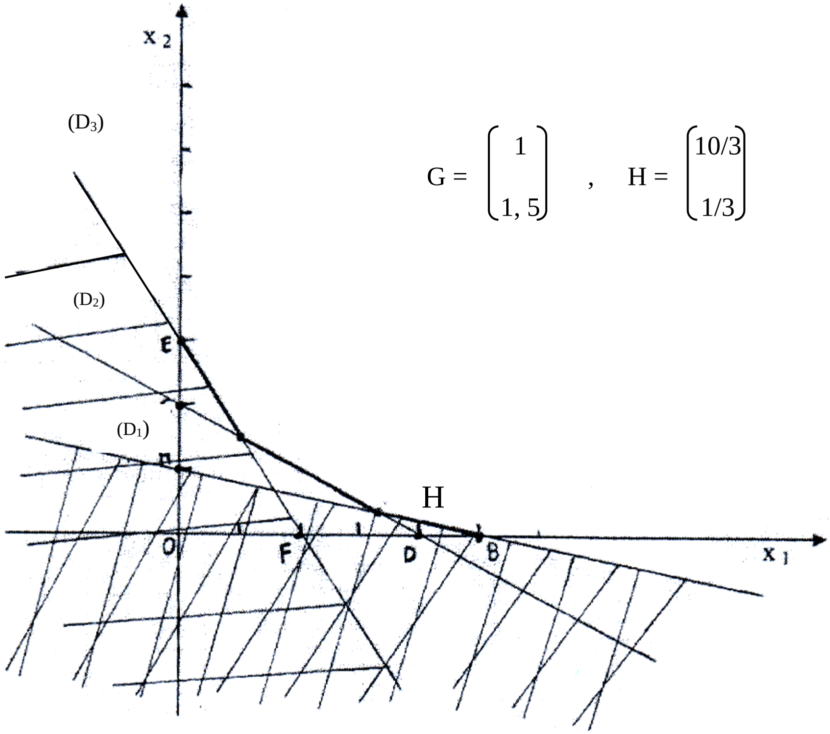


Figure 2

Remarque:

Comme dans l'exemple précèdent, après avoir tracé les droites, on utilise les coordonnées de l'origine (0,0) pour chacune des inéquations afin de vérifier le signe de la région contenant ladite origine convient ou non au sens de l'inéquation, on hachure ensuite la partie qui ne convient pas soit la première inéquation : $x_1 + 5\, x_2 \geq 5$, le point d'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne vérifie pas cette inéquation car 0 + 5 (0) ≥ 5 n'est pas vérifiée, on hachure alors la région qui contient ce point, dans la figure précédente la partie non hachurée représente le domaine des solutions possibles (réalisables).

Quel est le point qui minimise le coût total des bruts distillés ? pour répondre à cette question, on remplace dans la fonction économique : $20\ x_1 + 25\ x_2$ les coordonnées de chacun des points : E, G, H, B

$Z_E = 20\ (0) + 25\ (3) = 75\ \$$

$$\boxed{Z_G = 20\ (1) + 25\ (3/2) = 115/2 = 57{,}5\$} \quad *$$

$Z_H = 20\ (10/3) + 25\ (1/3) = 225/3 = 75\ \$$

$Z_B = 20\ (5) + 25\ (0) = 100\ \$$

Le minimum est atteint au point $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3/2 \\ Z_G = 57{,}5\ \$ \end{array}}$$

<u>Remarque</u>:

Comment calculer un point d'intersection entre deux droites ? Il suffit de résoudre le système d'équations constitué des équations des 2 droites. Prenons l'exemple de la figure 2.

Le point d'intersection H entre les deux droites (D_2) et (D_1) : le calcul des coordonnées du point H consiste à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + 5\ x_2 = 5 \\ x_1 + 2\ x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10/3 \\ x_2 = 1/3 \end{cases}$$

CONCLUSION:

Nous avons appris à modéliser un problème de maximisation ou de minimisation et de le résoudre par la méthode graphique, modéliser un problème consiste à l'exprimer par un modèle mathématique qu'on appellera, dans la leçon suivante, un programme linéaire. La résolution par la méthode graphique n'est facile que si le modèle contient au plus deux inconnues.

Dans la leçon suivante on introduira une méthode de résolution quand le modèle est à plus que deux inconnues.

EXERCICES CORRIGÉS :

EXERCICE N°1:

Résoudre graphiquement les programmes linéaires suivants

$$(P_1)\begin{cases} \text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$(P_2)\begin{cases} \text{Max } Z = x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$(P_3)\begin{cases} \text{Min } Z = -x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

EXERCICE N°2 :

Un laboratoire pharmaceutique doit élaborer un fortifiant à l'aide de 3 produits P_1, P_2, P_3, des normes en vigueur imposent au fortifiant une teneur minimal en vitamines V_1 et V_2, plus précisément 8 unités de V_1 et 12 unités de V_2. Les teneurs en vitamines de chacun des produits sont :

	P_1	P_2	P_3
V_1	3	1	8
V_2	4	2	9

Les coûts unitaires de chacun des produits sont : $C_1 = 24$, $C_2 = 10$, $C_3 = 72$. Evidemment, le laboratoire cherche à fabriquer son fortifiant au coût minimal, tout en respectant les normes.

Exprimer ce problème sous forme d'un programme linéaire.

NB: Il n'est pas demandé de résoudre le programme linéaire.

EXERCICE N°3:

Soit deux produits P_1, P_2 fabriqués sur deux machines M_1, M_2 la production d'une unité de P_1 exige 4 heures machines sur M_1 et 2 heures machines sur M_2, La production d'une unité de P_2 exige 8 heures machines sur M_1 et 2 heures machines sur M_2.

	M_1	M_2	Profit unitaire
P_1	4	2	4
P_2	8	2	6
Disponibilités des M_i	84	24	

1- Modéliser mathématiquement ce problème sous forme d'un programme linéaire noté (P) sachant que l'objectif est de maximiser le profit.

2- Résoudre (P) par la méthode graphique.

SOLUTION DES EXERCICES:

EXERCICE N°1:

Résolution de (P_1):

On commence par tracer les droites d'équations respectives :

$D_1 : x_1 + 2\,x_2 = 4$ passe par les points $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D_2 : 2\,x_1 + x_2 = 4$ passe par les points $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, D =

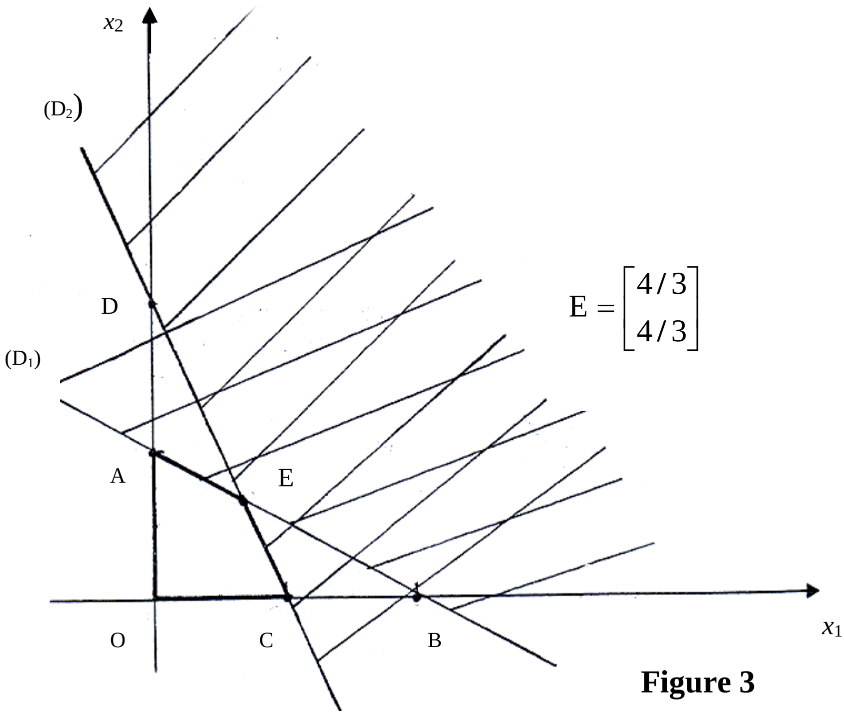


Figure 3

Pour chacune des droites tracées, on hachure la partie du plan dont les points ne vérifient pas l'inéquation correspondante (OAEC) décrit le domaine des solutions réalisables, on l'appelle aussi le domaine d'acceptabilité.

On compare les points O, A, C et E, on remplace leurs coordonnées dans la fonction économique.

$Z_O = 2\ (0)\ + 3\ (0) = 0$

$Z_A = 2\ (0)\ + 3\ (2) = 6$

$Z_C = 2\ (2)\ + 3\ (0) = 4$

$$\boxed{Z_E = 2\ (4/3) + 3\ (4/3) = 20 / 3} \quad *$$

La meilleure solution est atteinte au point E = $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

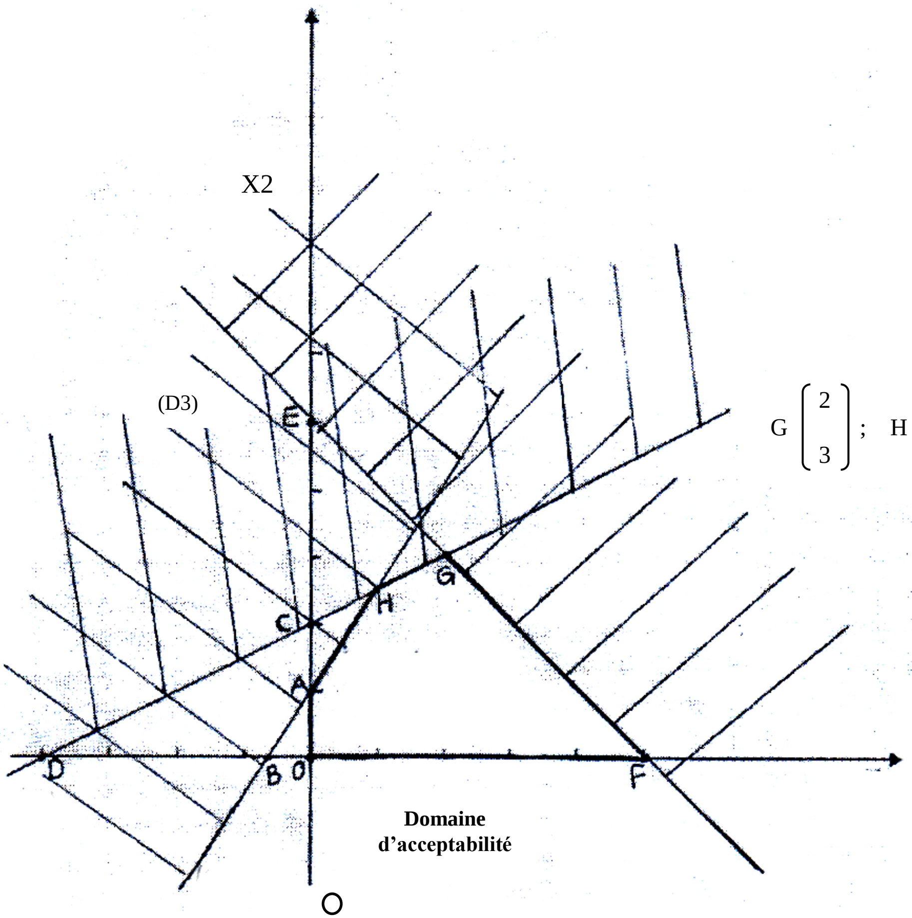
$x_1 = 4/3$
$x_2 = 4/3$
$Z = 20/3$

Résolution de (P_2) :

La droite D_1 : $- 3\ x_1 + 2\ x_2 = 2$ passe par les points A : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, B: $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

La droite D_2 : $- x_1 + 2\ x_2 = 4$ passe par les points C : $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, D : $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

La droite D_3 : $x_1 + x_2 = 5$ passe par les points E : $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, F : $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$



$G\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $H\begin{pmatrix}1\\5/2\end{pmatrix}$

(D2)

x1

-4-الشكل

(D1)

(D

Figure 4

$Z_O = 0 + 2\,(0) = 0$
$Z_A = 0 + 2\,(1) = 2$
$Z_F = 5 + 2\,(0) = 5$

$$\boxed{Z_G = 2 + 2\,(3) = 8}$$

$Z_H = 1 + 2.\,5/2 = 6$

L'optimum est atteint au point $G = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ Z = 2 + 2\,(3) = 8 \end{array}}$$

Résolution de (P_3):

$D_1 = -2\,x_1 + x_2 = 2$ passe par les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D_2 = x_1 - 2\,x_2 = 2$ passe par les points $C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D_3 = x_1 + x_2 = 5$ passe par les points $E \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $F \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $P\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

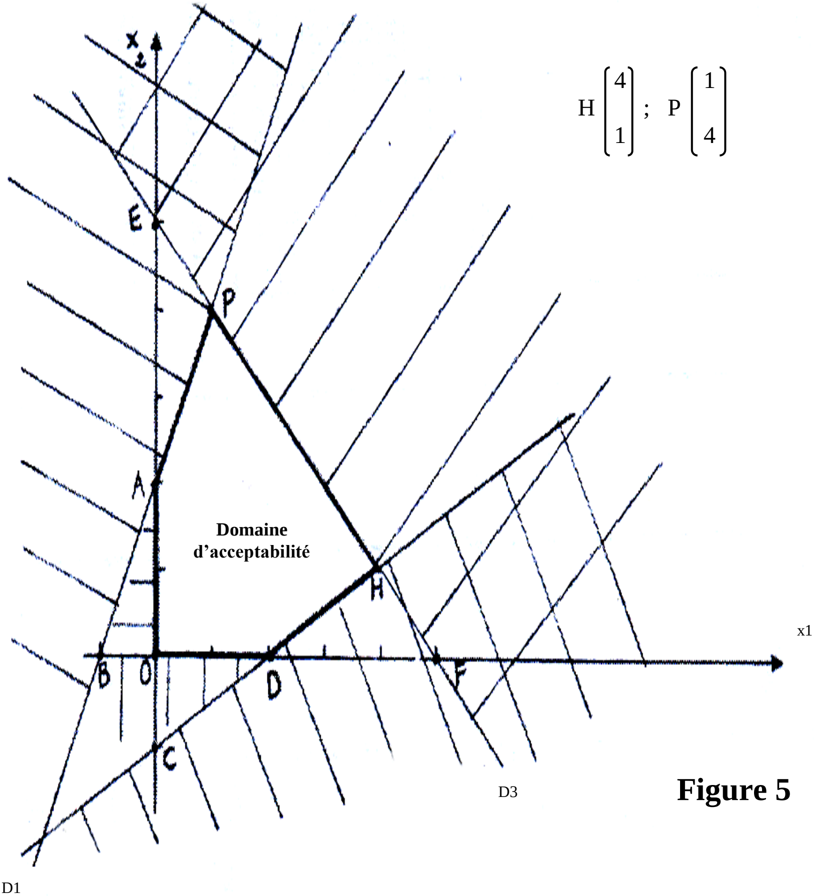


Figure 5

(OAPHD) est le domaine des solutions réalisables.

- La valeur minimale de la fonction économique est atteinte au point :

$Z_O = 0 + 0 = 0$
$Z_A = 0 + 2 = 0$
$Z_G = -1 + 4 = 3$

$$\boxed{Z_H = -4 + 1 = -3}$$

$Z_D = -2 + 0 = -2$

La solution optimale se trouve en H :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \\ Z = -3 \end{array}}$$

<u>EXERCICE N°2</u> :

Soient x_1, x_2, x_3 les nombres d'unités utilisées des produits P_1, P_2 et P_3 respectivement : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

- Chaque unité de P_1 contient 3 unités de la vitamine V_1, x_1 unités de V_1 contiennent $3x_1$ unités de la vitamine V_1 ;

- Chaque unité de P_2 contient 1 unité de la vitamine V_1, x_2 unités de P_2 contiennent x_2 unités de la vitamine V_1 ;

- Chaque unité de P_3 contient 8 unités de V_1, x_3 unités de P_3 contiennent 8 x_3 unités de V_1.

Les normes en vigueur imposent au fortifiant une teneur minimale de 8 unités de V_1, c'est-à-dire : le fortifiant doit contenir 8 unités de V_1 ou plus ; soit :

$$3\,x_1 + x_2 + 8\,x_3 \geq 8$$

De même, le fortifiant doit contenir au moins 12 unités de la vitamine V_2, D'après les teneurs des 3 produits en V_2, on a :

$$4\,x_1 + 2x_2 + 9\,x_3 \geq 12$$

La fonction économique à minimiser est $24\,x_1 + 10\,x_2 + 72\,x_3$, le programme linéaire associé à ce problème est :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0\,; \quad x_2 \geq 0\,; \quad x_3 \geq 0 \\ 3\,x_1 + x_2 + 8\,x_3 \geq 8 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 + 9\,x_3 \geq 12 \\ 24\,x_1 + 10\,x_2 + 72\,x_3 = Z(\min) \end{cases}$$

EXERCICE N°3:

1- Modéliser le problème consiste à exprimer les contraintes (sur les heures de disponibilité des machines) et la fonction économique (qui est le profit à maximiser) en fonction des inconnues x_1, x_2 nombres d'unités de P_1, P_2 à produire respectivement.

- Si on décide de produire x_1 unités de P_1 , et x_2 unités de P_2, on a besoin de $4\,x_1 + 8\,x_2$ heures machines sur M_1, et $2x_1 + 2x_2$ heures machine sur M_2.
- Comme le temps de disponibilité des machines est limité : 84 heures sur M_1 et 24 heures sur M_2, on a les contraintes suivantes :

$$4\,x_1 + 8\,x_2 \leq 84$$
$$2\,x_1 + 2x_2 \leq 24$$

- Le profit réalisé est : $4\ x_1 + 6\ x_2$ qui est la fonction économique à maximiser :

$$\text{Alors: } \begin{cases} x_1 \geq 0\ ; \quad x_2 \geq 0 \\ 4\ x_1 + 8\ x_2 \leq 84 \\ 2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 24 \\ 4\ x_1 + 6\ x_2 = Z\ (\max) \end{cases}$$

Est le programme linéaire associé à ce problème.

2- <u>Résolution par la méthode graphique</u> :

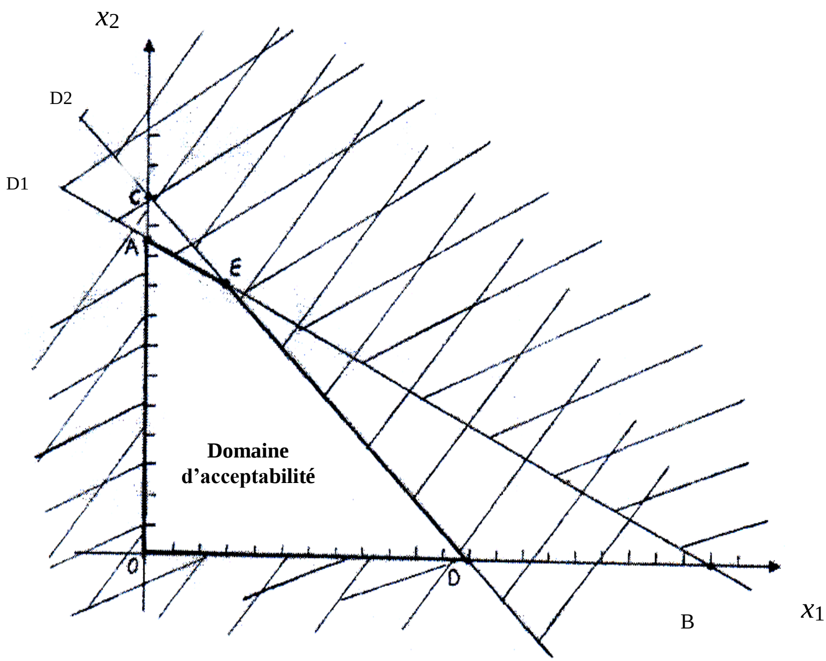


Figure 6

Tracés des droites :

$D_1 : 4\ x_1 + 8\ x_2 = 84$ passe par les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D_2 : 2\ x_1 + 2\ x_2 = 24$ passe par les points $C \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcul de la meilleure solution :

$Z_O = 4\ (0) + 6\ (0) = 0$
$Z_A = 4\ (0) + 6\ (10{,}5) = 63$

$$\boxed{Z_E = 4\ (3) + 6\ (9) = 66}$$

$Z_D = 4\ (12) + 6\ (0) = 48$

L'optimum est donc atteint au point E :

$$\boxed{\begin{array}{r} x_1 = 3\ ;\quad x_2 = 9 \\ Z = 66 \end{array}}$$

<u>LEÇON N°2</u> : ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES GRAPHES

<u>OBJECTIF PÉDAGOGIQUE</u> : À LA fin de cette série le stagiaire doit être capable de définir un graphe, un chemin, et un circuit, et de déterminer les niveaux de génération dans un graphe sans circuit.

<u>PLAN DE LA LEÇON</u> :

INTRODUCTION

I- QU'EST-CE QU'UN GRAPHE ?

1- Définition
2- Exemple

II - VOCABULAIRE DE LA THÉORIE DES GRAPHES

III - CONCEPTS NON- ORIENTÉS

IV - RECHERCHE DE NIVEAU DANS UN GRAPHE SANS CIRCUIT

1. Définition de niveau de génération
2. Méthode de détermination des niveaux de chaque sommet à partir d'un exemple

V- CONCLUSION

EXERCICES CORRIGÉS

INTRODUCTION :

On regroupe généralement sous le titre de théorie des graphes des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristiques communes de pouvoir être visualisés : des points représentant des individus, des objets, des situations…..; sont joints par des flèches ou des lignes symbolisant les relations existants entre eux. Jusqu'au milieu du 20ème siècle, la théorie des graphes s'est développée en liaison avec des problèmes de physique et chimie, mais aussi dans le cadre de recréations mathématiques (jeux). Ce n'est qu'après 1945 qu'on vit apparaître des applications dans le domaine de la gestion, classées avec beaucoup d'autres, sous le titre général de problème de recherche opérationnelle.

À la fin de ce cours le stagiaire doit être capable de définir un graphe, un chemin, et un circuit, et de déterminer les niveaux de génération dans un graphe sans circuit.

I - QU'EST-CE QU'UN GRAPHE ?

Il convient de distinguer les graphes orientés de ceux qui ne le sont pas. Nous nous intéressons ici aux premiers et nous donnerons par la suite quelques exemples des seconds.

1- Définition :

Les graphes orientés que nous traiterons dans cette leçon peuvent être considérés comme des schémas représentant simplement la structure d'un problème. Ils sont généralement déterminés par la donnée de :

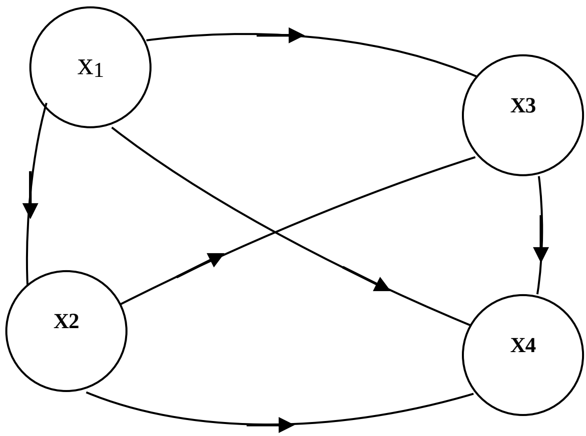
a- Un ensemble fini $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_n\}$ d'éléments appelés **sommets** du graphe ; Si X possède n éléments distincts, le graphe sera dit d'ordre n.

b- Un ensemble fini $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, dont les éléments sont des couples ordonnés de sommets appelés **arcs**.

U est donc une famille d'éléments du produit cartésien $X \bullet X = \{(x, y)/x \in X, Y \in X\}$.

<u>Exemple</u> :

Le graphe G(x, u) suivant, présente les résultats d'un tournoi d'échecs = les sommets x_1, x_2, x_3, x_4 représentent les 4 concurrents, et l'existence d'un arc (x_i, x_j) ou plus exactement la présence dans 4 de l'arc (x_i, x_j) indique que le joueur x_i a remporté la partie unique l'opposant au joueur x_j.



$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$
$$U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_4)\}$$

II- VOCABULAIRE DE LA THÉORIE DES GRAPHES :

Voici, quelques définitions de base relatives aux arcs et aux sommets d'un graphe G (X,U).

1- <u>Extrémités d'un arc</u> :

Un arc u = (x, y) possède une extrémité initiale x et une extrémité terminale y.

2- **Boucle** :

Une boucle est un arc dont les deux extrémités coïncident, elle est de la forme (x, x).

3- **Arcs adjacents (voisins)** :

Deux ou plusieurs arcs sont dits adjacents, s'ils ont au moins une extrémité en commun.

Exemple :

Dans le graphe précédent les arcs (x_1, x_2) et (x_3, x_2) sont voisins, les arcs (x_1, x_4), (x_2, x_4) et (x_3, x_4) sont eux aussi voisins ou adjacents.

4- **Successeur** :

On dit qu'un sommet y est un successeur d'un sommet x, s'il existe un arc ayant x comme extrémité initiale et y comme extrémité terminale. L'ensemble des successeurs d'un sommet x est noté $T^+(x)$.

Exemple :

Dans le graphe précédent ; x_4 est successeur du sommet x_1 ; x_1 n'est pas successeur de x_2 car il n'existe pas un arc (x_2, x_1).

5- **Prédécesseur** :

On dit qu'un sommet y est un prédécesseur du sommet x , s'il existe un arc ayant y comme extrémité initiale et x comme extrémité terminale. L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet x est noté T^- (x).

Exemple :

Dans le graphe précèdent ; x_1 est un prédécesseur du sommet x_2 ; x_1 n'a pas de prédécesseur.

Remarque :

- Si x est prédécesseur de y alors y est successeur de x ;
- Dans quelques ouvrages, vous pouvez trouver que le mot prédécesseur est remplacé par précèdent.

6- Sommets adjacents (voisins) :

Un sommet x est adjacent au sommet y, s'il est prédécesseur ou successeur de y. Ces sommets peuvent aussi être qualifiés de voisins, on peut aussi dire que deux sommets sont voisins s'il existe un arc qui les relie. On note par T(x) l'ensemble des sommets voisins de x, $T(x) = T^{+}(x) \cup T^{-}(x)$.

Exemple :

Dans l'exemple précédent **:**

	x_1	x_2	x_3	x_4
T^+	$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_3, x_4\}$	$\{x_4\}$	ϕ
T^-	φ	$\{x_1\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
T	$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$

7- Sommet isolé :

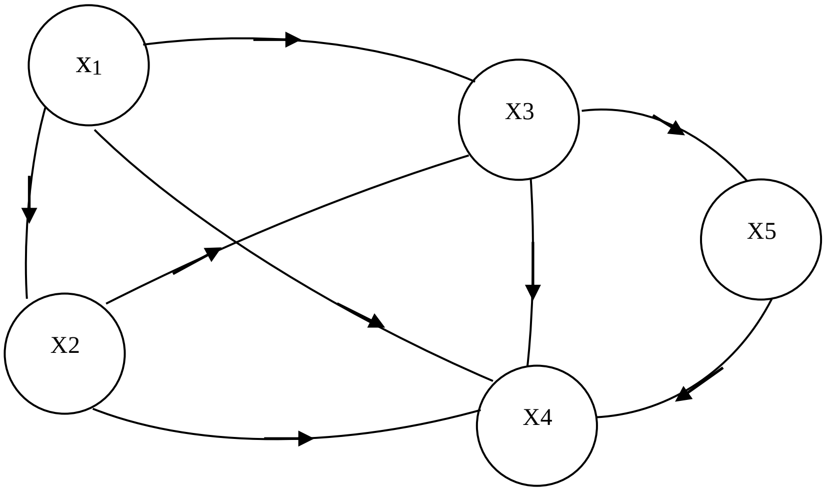
Un Sommet isolé est un sommet qui n'a pas de voisins.

8- Chemin :

Un chemin est une suite d'arcs dont l'extrémité terminale de chacun est l'extrémité initiale du suivant, sauf pour le dernier.

Exemple :

Dans le graphe suivant :



(x_1, x_3, x_5, x_4) est un chemin ; (x_1, x_3, x_4, x_2) est un autre chemin.

Le chemin (x_1, x_3, x_5, x_4) est formé des arcs (x_1, x_3) $(x_3, x_5), (x_5, x_4)$.

Le chemin (x_1, x_3, x_4, x_2) est formé des arcs (x_1, x_3) $(x_3, x_4), (x_4, x_2)$.

Un chemin peut donc être défini soit par la suite des sommets qu'il contient, soit par la suite d'arcs qui le composent.

Remarque :

Si dans un chemin, l'extrémité initiale du premier arc coïncide avec l'extrémité terminale du dernier arc, on parlera alors de **circuit**.

Exemple :

Dans le graphe précédent $(x_1, x_3, x_4, x_2, x_1)$ est un circuit, (x_1, x_4, x_2, x_1) est un circuit.

III - CONCEPTS NON ORIENTÉS :

Si entre deux sommets x,y d'un graphe, il existe un arc (x,y) et un arc (y,x) , il peut intuitivement paraître plus simple de remplacer ces deux arcs par un lien **sans orientation**. Si cette situation se produit pour tous les couples de sommets, il n'y a plus aucune orientation à en considération. On considère alors au lieu de l'arc (x,y), l'ensemble formé par les points x,y qu'on note e = (x y) et qu'on appelle **arête**.

Le graphe non orienté est noté G(X, E) où X est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.

IV- RECHERCHE DE NIVEAU DANS UN GRAPHE SANS CIRCUIT :

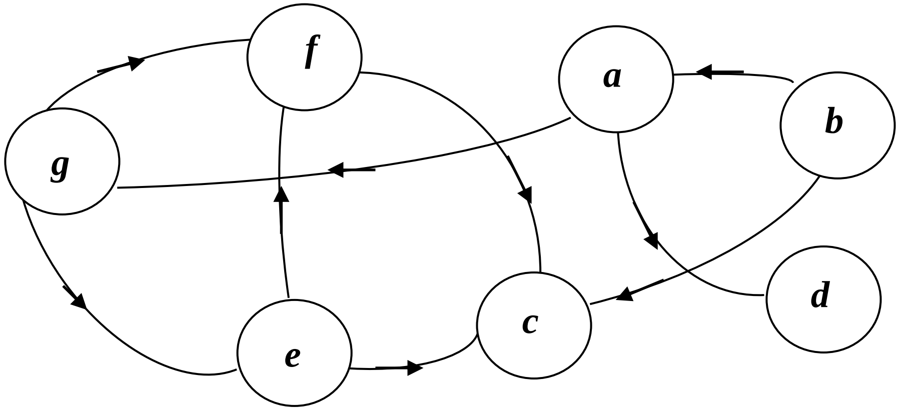
1- Définition de niveau de génération :

Dans un graphe sans circuit, il est possible de numéroter les sommets du graphe de telle sorte que le numéro affecté à chaque sommet soit inférieur à celui des suivants (successeurs) et supérieur à celui des précédents (prédécesseurs) ; ce numéro attribué à chaque sommet est précisément le **niveau de génération** ou **rang** du sommet en question.

Les sommets de niveau 0 sont ceux qui n'ont aucun précèdent, ceux de rang 1 sont ceux dont les précédents appartiennent au rang 0. Les sommets de niveau 2 ont des précédents de niveau 0 ou 1 et ainsi de suite.

2- Méthode de détermination des niveaux de chaque sommet à par

Soit le graphe suivant **:**



La détermination du niveau de chaque sommet se fait en plusieurs étapes :

Étape N° 1 :

On écrit le dictionnaire des précédents dans le tableau suivant :

X	$T^{-}(x)$
a	b
b	néant
c	b,e,f
d	a
e	g
f	g,e
g	a

Étape N°2 :

On recherche ensuite dans ce dictionnaire des lignes vides, il se trouve qu'il n'y en a qu'une, en l'occurrence la ligne « b ».

Par conséquent, « b » n'ayant aucun précédent est donc un sommet de niveau 0, ce que l'on note : $N_0 = \{b\}$

On barre ensuite tous les « b » dans les colonnes X et T^- (x) d'où le tableau N°1 suivant :

X	$T^-(x)$
a	néant
c	e,f
d	a
e	g
f	g,e
g	a

On constate que la ligne « a » devient vide donc « a » est de niveau 1 soit : $N_1 = \{a\}$

<u>Étape N°3</u> :

On barre ensuite tous les « a » dans le tableau N°1, on obtient le tableau N°2 suivant :

X	$T^-(x)$
c	e,f
d	néant
e	g
F	g,e
g	néant

Les lignes « d » et « g » deviennent vides, d et g sont des sommets de niveau 2, soit :

$N_2 = \{d, g\}$

<u>Étape N°4</u> :

On barre ensuite tous les « d » et « g » d'où le tableau N°3, suivant :

X	$T^{-}(x)$
c	e,f
e	néant
f	e

La ligne « e » devient vide, à son tour, ce qui signifie que le sommet e est de niveau 3, soit :

$N_3 = \{e\}$

<u>Étape N°5</u> :

On barre tous les « e », d'où le tableau N°4 suivant :

X	$T^{-}(x)$
c	f
f	néant

La nouvelle ligne vide est la ligne « f », donc le sommet f est de rang 4, soit : $N_4 = \{f\}$

<u>Étape N°6</u> :

On barre ensuite tous les « f », et on obtient le tableau N°5 ci-dessous :

X	$T^{-}(x)$
c	néant

La ligne du sommet c étant vide, le sommet c sera de niveau 5, soit enfin :

$N_5 = \{c\}$

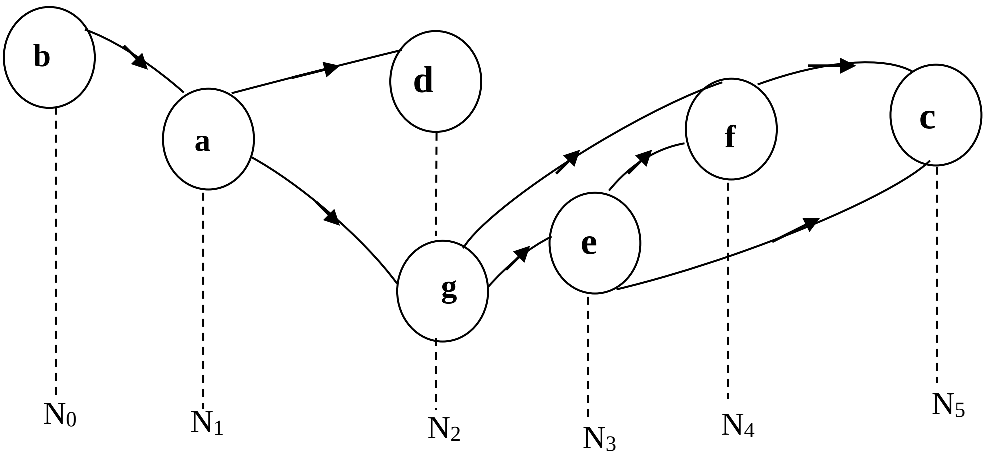
En résumé, les différents niveaux sont :

$N_0 = \{b\}$ $N_3 = \{e\}$

$N_1 = \{a\}$ $N_4 = \{f\}$

$N_2 = \{d, g\}$ $N_5 = \{c\}$

Cette détermination des niveaux du graphe, va nous permettre de représenter le graphe précédant par un graphe plus lisible et plus facile à exploiter, car ordonnancé par niveau de génération.



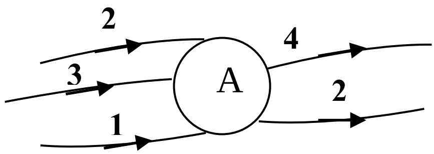
Ce graphe est identique au premier, sauf que la connaissance des niveaux de chaque sommet a fait que sa représentation soit plus lisible que celle du 1er graphe.

V- CONCLUSION : UTILITÉ DU CONCEPT DE GRAPHE EN RECHERCHE OPÉRATIONNELLE :

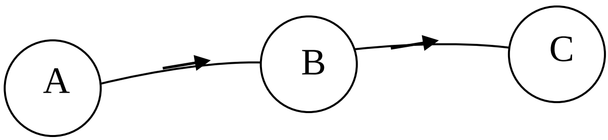
Un graphe peut représenter toutes sortes de situations dans les phénomènes d'organisation. Par exemple, un réseau (c'est-à-dire un graphe comportant une entrée et une sortie) peut correspondre à des canalisations où circule un fluide (liquide ou gaz).

Dans ce cas là, les quantités entrantes (par exemple par unité de temps) en un sommet doivent être égales aux quantités sortantes (par unité de temps) en ce même sommet. Il est facile, en effet, de comprendre que si trois canalisations apportent en un sommet A des débits respectifs de 2,3 et 1 litres/mn.

Soit en tout 6L/mn[1], les canalisations qui partent de A doivent avoir un débit total de 6L /mn. Mais un graphe n'est pas toujours un réseau représentant des circulations quelconques.



Souvent, une flèche entre deux points, implique seulement une relation de succession par exemple, le graphe suivant peut valoir dire seulement que A précède B qui lui-même précède C.



On dit qu'un graphe est value si, à tout arc qui le constitue, correspond une valeur numérique qu'on écrit seulement sur la figure, à proximité de cet arc. Ces valeurs peuvent être des quantités, transportées, des débits, des coûts, des durées, etc….

EXERCICES CORRIGÉS :

EXERCICE N°1 :

Soit le graphe G = (X,U) donné par sa représentation dictionnaire restreinte aux prédécesseurs des sommets (voir tableau 1).

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
précédents	–	1,3	–	1	3	8,9	2,5	2,4,5	4	7,8,9

- Dresser le graphe puis déterminer les niveaux de génération du graphe.

EXERCICE N°2 :

Soit un ensemble E = $\{0,2,6,18,9,11\}$.

On définit dans E la relation par:

x R y $\Leftrightarrow$ x $\in$ E, y $\in$ E, (x est multiple de y) et (x $\neq$ y).

1-En utilisant les concepts de la théorie des graphes, proposer une représentation de cette relation : définir l'ensemble des sommets X, celui des arcs U et dresser G = (X, U).

2-En utilisant le vocabulaire de la théorie des graphes que représente :

a- Un nombre premier.

b- Le sous-ensemble des éléments de E multiples d'un élément x de E.

c- Le sous-ensemble des éléments de E qui divise un élément x de E.

d- Le cardinal de E.

3-Donner le dictionnaire des prédécesseurs (précédents) du graphe obtenu.

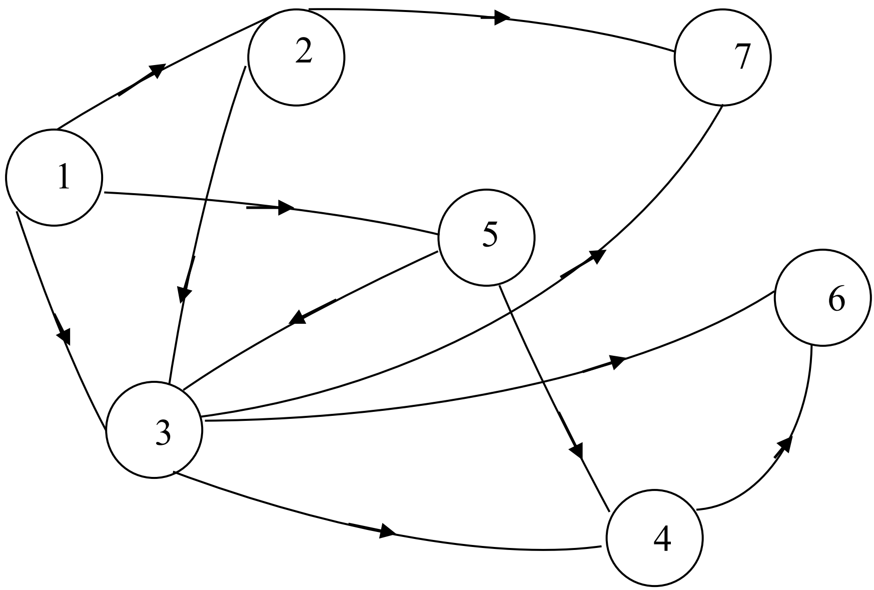
Notes :

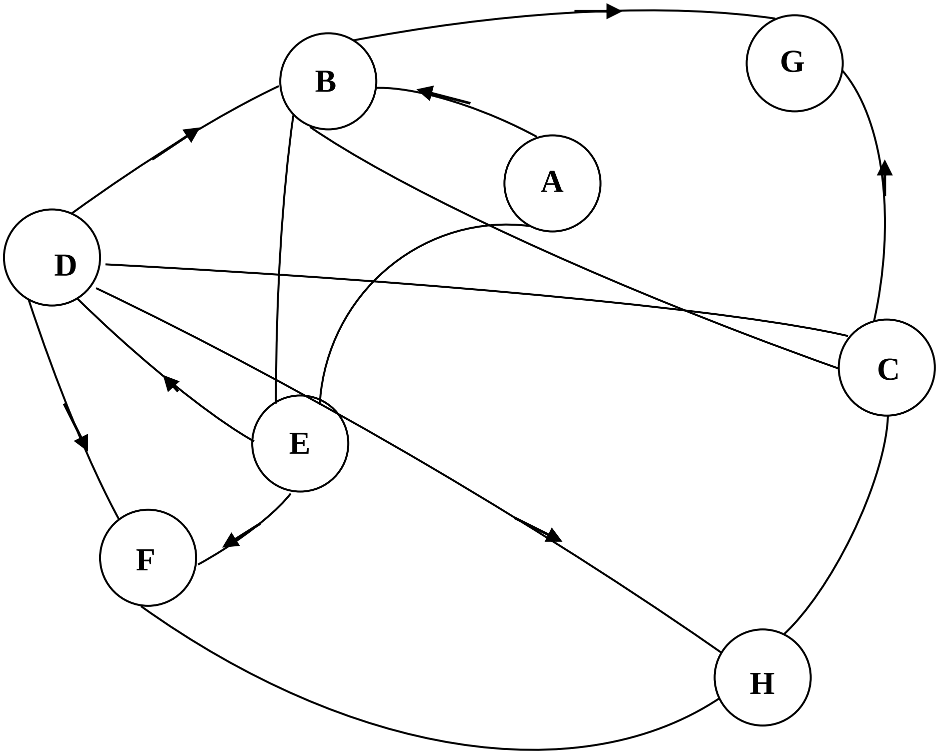
- Un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par 1 et lui-même : ex : 3, 7, 17,47….

- Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments qu'il contient. Le cardinal de l'ensemble L = $\{0,3,-5\}$ est 3 ; le cardinal de l'ensemble vide est égal à zéro.

EXERCICE N°3 :

- Donner un ordonnancement par niveau des graphes suivants :

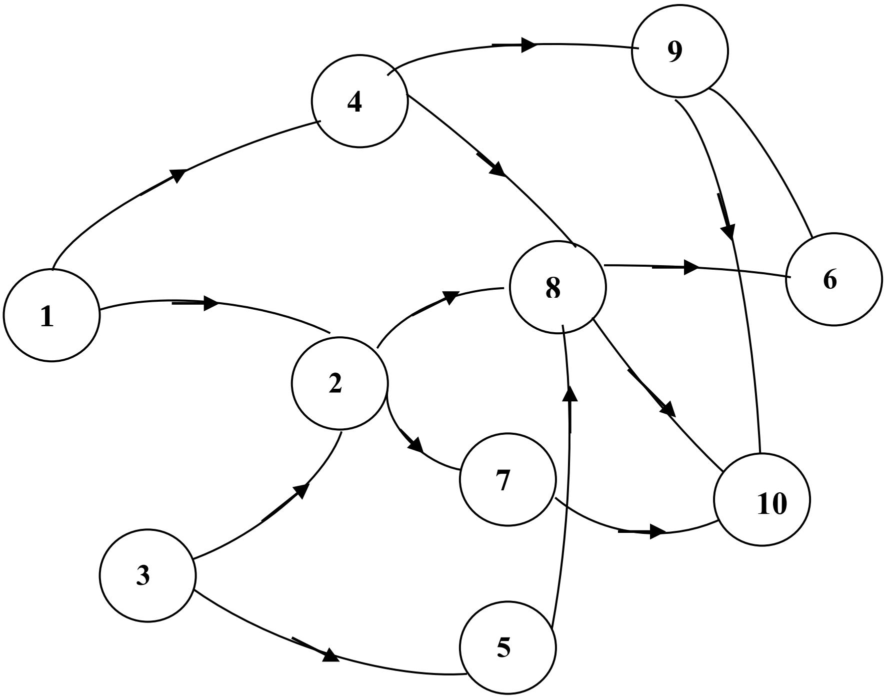




Présenter les graphes sous forme plus lisible, les sommets étant disposés selon leurs niveaux respectifs.

SOLUTION DES EXERCICES :

EXERCICE N°1 :



Détermination des niveaux de génération :

Étape n°1 :

D'après le dictionnaire des précédents, les sommets 1 et 3 sont de niveau 0, car ils n'ont pas de prédécesseurs, soit $N_0 = \{1,3\}$

Étape n°2 :

On supprime les sommets 1 et 3 du tableau, ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

X	précédents
2	/
4	/
5	/
6	8,9
7	2,5
8	2,4,5
9	4
10	7,8,9

Les sommets de niveau 1 sont : $N_1 = \{2,4,5\}$.

Étape n°3 :

En supprimant les sommets de niveau 1 du tableau, on a :

X	P(x)
6	8,9
7	/
8	/
9	/
10	7,8,9

Les sommets de niveau 2, sont $N_2 = \{7,8,9\}$.

Étape n° 4 :

Ceci permet d'obtenir le tableau suivant :

X	P(x)
6	/
10	/

Les sommets du dernier niveau (3) sont $N_3 = \{6,10\}$.

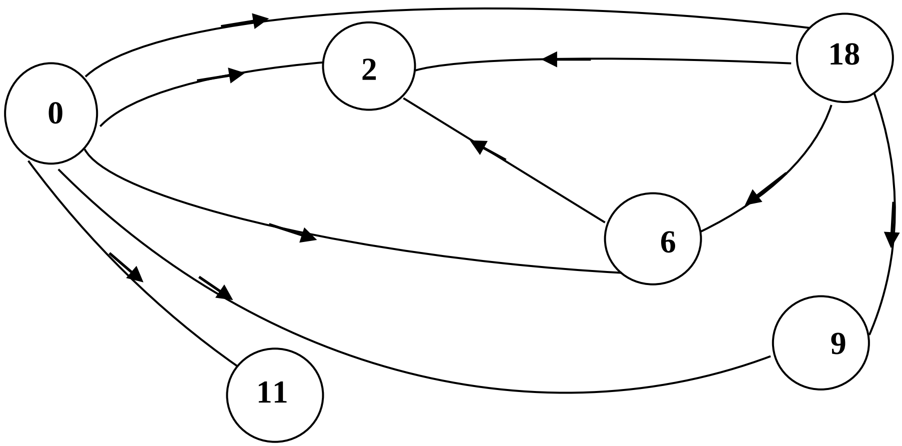
On a les niveaux de générations suivants :

$N_0 = \{1,3\}$.
$N_1 = \{2,4,5\}$.
$N_2 = \{7,8,9\}$.
$N_3 = \{6,10\}$.

EXERCICE N°2 :

1- La représentation de l'ensemble E ainsi que celle de la relation par un graphe G = (X,U) peut être faite de la manière suivante :

X = E
U = $\{(x, y) / x \in X, y \in X, x \text{ est multiple de } y \text{ et } x \neq y\}$



Ainsi :

$X = \{0,2,6,18,9,11\}$

$U = \{(0,2),(0,6),(0,18),(0,9),(0,11),(6,2),(18,2),(18,6),(18,9)\}$

2-

a- Un nombre premier n'a pas de successeurs ;

b- Le sous ensemble des éléments de E multiples d'un élément x de E représente l'ensemble des prédécesseurs de x dans le graphe.

Exemples :

Les multiples de 2 ; 6 et 18 sont les précédents du sommet dans le graphe.

c- Le sous ensemble des éléments de E qui divisent un élément x de E représente l'ensemble des successeurs de x.

Exemple :

Les diviseurs de 18 sont 2, 6,9 et ce sont ces successeurs dans le graphe

d- Le cardinal de E (qui est égale à 6) est l'ordre du graphe.

3-

X	précédents
0	/
2	0, 6,18
6	0,18
9	0,18
18	0
11	0

EXERCICE N°3 :

Pour le graphe1, présentons le dictionnaire des précédents :

X	P(x)
1	/
2	1
3	1,2,5
4	3,5
5	1
6	3,4
7	2,3

Les sommets de niveau 0 sont : $N_0 = \{1\}$, on supprime ce sommet du tableau ce qui donne :

X	P(x)
2	/
3	2,5
4	3,5
5	/
6	3,4
7	2,3

Les sommets de niveau 1 sont : $N_1 = \{2,5\}$, la suppression des ces sommets, permet d'obtenir le tableau suivant :

X	P(x)
3	/
4	3
6	3,4
7	3

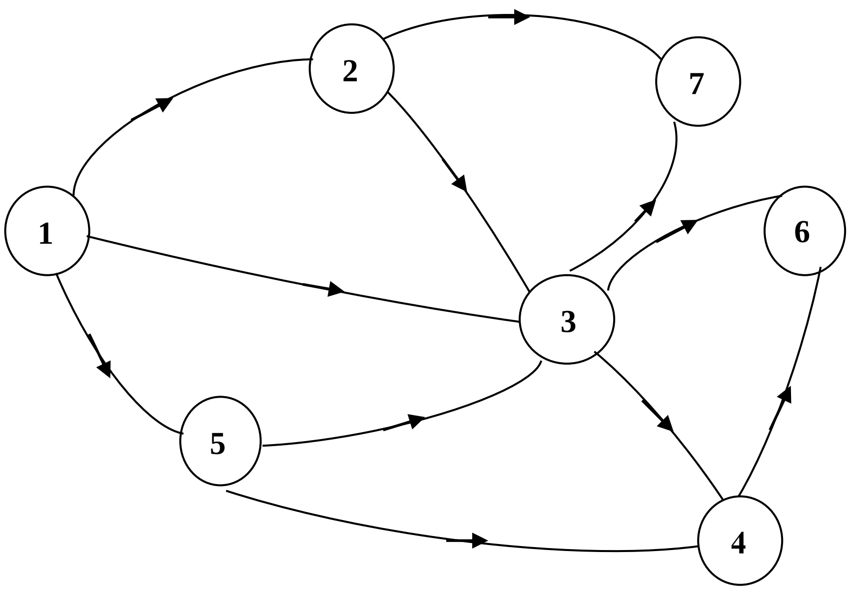
L'ensemble $N_2 = \{3\}$, sa suppression du tableau donne :

X	P(x)
4	/
6	4
7	/

On peut facilement déduire du tableau que $N_3 = \{4,7\}$ et $N_4 = \{6\}$.

Soit :

$N_0 = \{1\}$
$N_1 = \{2,5\}$
$N_2 = \{3\}$
$N_3 = \{4,7\}$
$N_4 = \{6\}$



Pour le deuxième graphe, représentons aussi le dictionnaire des précédents :

X	P(x)
A	E
B	A,E,D
C	D,B,H
D	E
E	/
F	E,D
G	A,B ,C
H	F,D

$N_0 = \{E\}$ et le nouveau tableau est le suivant :

X	P(x)
A	/
B	A,,D
C	D,B,H
D	/
F	D
G	A,B ,C
H	F,D

$N_1 = \{A, D\}$ sa suppression du tableau permet d'obtenir le tableau suivant :

X	P(x)
B	/
C	B,H
F	/
G	B ,C
H	F

$N_2 = \{B, F\}$, On supprime ces 2 sommets du tableau ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

X	P(x)
C	H
G	C
H	/

$N_3 = \{H\}$, $N_4 = \{C\}$ et $N_5 = \{G\}$ peuvent être déduits de la même façon.

L'ordonnancement par niveau de ce graphe est :

$N_0 = \{E\}$
$N_1 = \{A, D\}$
$N_2 = \{B, F\}$
$N_3 = \{H\}$
$N_4 = \{C\}$
$N_5 = \{G\}$