

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التكوين والتعليم المهنيين

Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de l'Enseignement
Professionnel à Distance
(CNEPD)



المركز الوطني للتعليم
المهني عن بعد
(م.و.ت.م.ب)

COURS DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

SERIE N°04

PROBLEME D'ORDONNANCEMENT :
METHODE PERT

OBJECTIF PEDAGOGIQUE : À la fin cette série, le stagiaire doit être capable de déterminer et d'exécuter des diverses tâches.

PLAN DE LA LEÇON :

INTRODUCTION

I- DEFINITIONS

- 1-** Projet
- 2-** Notion de tâche

II- REPRESENTATION D'UN PROBLEME D'ORDONNANCEMENT

- 1-** Par le diagramme de Gantt
- 2-** Représentation d'un problème d'ordonnancement par un graphe

III- RESOLUTION D'UN PROBLEME D'ORDONNANCEMENT

- 1-** Les dates au plus tôt et au plus tard des tâches
- 2-** Les dates au plus tôt et au plus tard des étapes

IV- CONCLUSION

EXERCICES CORRIGES

INTRODUCTION :

Étant donné un objectif qu'on se propose d'atteindre et dont la réalisation suppose l'exécution préalable de multiples tâches soumises à de nombreuses conditions ou contraintes, le problème d'ordonnancement est alors le problème de détermination de l'ordre et le calendrier d'exécution des diverses tâches.

I- DEFINITIONS :

1- Le projet :

C'est un ensemble de tâches ou d'opérations a, b, c,...permettant d'atteindre un objectif fixé ; lesquelles tâches sont elles mêmes soumises à un certain nombre de contraintes telles que :

- a) Les contraintes potentielles ;
- b) Les contraintes disjonctives ;
- c) Les contraintes cumulatives.

a- Les contraintes potentielles :

On distingue :

Les contraintes de succession encore appelées contraintes d'antériorité qui se traduisent par le fait qu'une tâche **A** ne peut commencer que si la tâche **B** est achevée.

Les contraintes de localisation temporelle : qui impliquent qu'une tâche **A** ne peut débuter avant une date imposée (par exemple : l'appareil que nécessite cette tâche n'est pas disponible avant cette date) ou ne peut se terminer après une date imposée (par exemple : l'appareil que nécessite cette tâche doit être impérativement libérée avant cette date).

b- Les contraintes disjonctives :

Ces contraintes imposent la non réalisation simultanée de deux tâches **A** et **B**, pour des raisons d'utilisation d'un même appareil, par exemple ou pour cause de besoin en main d'œuvre.

c- Les contraintes cumulatives :

Celles-ci limitent les possibilités d'ordonnancement, car elles tiennent compte de tous les facteurs productifs : hommes, machines, moyens financiers. C'est ainsi qu'il ne saurait être question de programmer par exemple, pour un mois donné des tâches qui , en temps normal, requièrent tout ensemble, l'équivalent de six mois de travail d'un corps de métier qui ne comporterait sur le terrain que deux représentants.

2- Notion de tâche :

Une tâche ou activité est une opération, l'ensemble des tâches forment le projet, on peut donc la définir comme étant l'unité ou l'élément d'un projet. On associe à chaque tâche sa durée et une contrainte d'antériorité par rapport aux autres tâches.

C'est ainsi qu'on peut dire que A est immédiatement antérieure à B si B ne peut débuter que lorsque A est achevée.

Dans la suite de ce cours, nous allons étudier le cas particulier le plus important « Problème central d'ordonnancement » où les seules contraintes sont des contraintes de successions dans le temps : l'exécution de la tâche **j** ne peut être commencée que lorsque la tâche **i** est achevée.

Exemple :

La construction d'un pavillon demande la réalisation d'un certain nombre de tâches qui sont données avec leurs durées et relations d'antériorités, dans le tableau suivant :

Code de la tâche	Désignation de la tâche	Durée (en semaine)	Tâches antérieures
A	Travaux de maçonnerie	7	/
B	Charpente de la toiture	3	A
C	Toiture	1	B
D	Installations sanitaire et électrique	8	A
E	Façade	2	D et C
F	Fenêtres	1	D et C
G	Aménagement du jardin	1	D et C
H	Travaux de plafonnage	3	F
I	Mise en peinture	2	H
J	Emménagement	1	E, G et I

II - REPRESENTATION D'UN PROBLEME D'ORDONNANCEMENT :

1- Par le diagramme de Gantt :

a- But du diagramme de Gantt :

C'est un planning ayant pour but de mettre en évidence les durées et de permettre ainsi le contrôle, à tout moment, de l'évolution du projet par comparaison des réalisations aux prévisions.

b- Construction du diagramme de Gantt :

- Principe de construction :

Le diagramme de Gantt se présente sous forme d'un tableau quadrillé dans lequel une colonne correspond à une unité de temps et une ligne à une tâche. Une tâche se matérialise par une barre horizontale dont la longueur représente la durée (de la tâche).

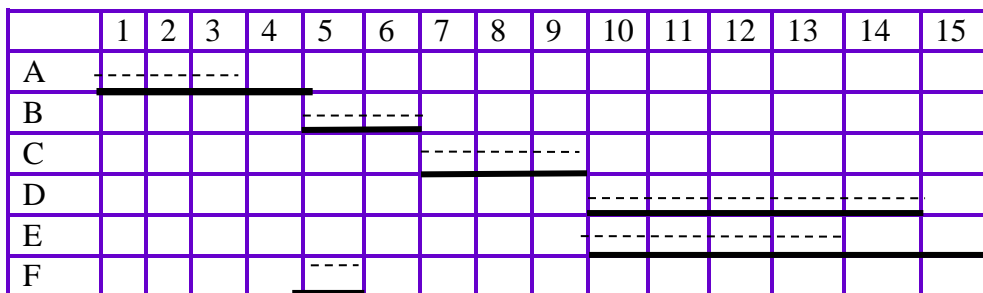
Le travail effectué ou le déroulement réel du projet se présente parfois, par des barres horizontales en pointillés, juste au dessus de celles figurant les prévisions (C'est-à-dire les durées des tâches).

- Application :

Un projet se décompose en 6 tâches dont les caractéristiques sont les suivantes :

Tâches	Durées prévues	Tâches antérieures	Durées réalisées
A	4 mois	/	3
B	2 mois	A	2
C	3 mois	B	3
D	5 mois	C	5
E	6 mois	C	4
F	1 mois	A	1

En déduire le diagramme de Gantt correspondant à l'état d'avancement du projet au 15^{ième} mois.



On constate, au 15^{ième} mois, que toutes les tâches ont respecté les délais impartis sauf A et E.

La tâche A est en retard d'un mois et la tâche E de deux mois. Les tâches B et F succédant à A sont réalisées complètement alors que D et E succédant à C ne le sont pas ; simultanément commencées (à la même date) seule la tâche D s'est terminée dans le délai imparti..

c- Avantages du diagramme de Gantt :

- Il est facilement compréhensible par les exécutants du projet, de par sa clarté et sa simplicité ;
- Il peut servir de base à des plans d'actions intermédiaires plus détaillés ;
- Il permet de suivre le déroulement des opérations dans le temps.

d- Inconvénients du diagramme de Gantt :

- Il est impossible de rectifier ponctuellement la durée d'une tâche précise, sans avoir à décaler d'autant les suivantes et à redresser partiellement ou complètement le diagramme ;
- Le diagramme de Gantt présente également une insuffisance dans la mise en évidence des liaisons existante entre les différentes tâches.

2- Représentation d'un problème d'ordonnement par un graphe :

La représentation par un graphe ; d'un problème d'ordonnement permettra une bonne vision globale du problème. L'étude de ce graphe permettra alors d'identifier les tâches prioritaires et de détecter à temps les retards pour prendre les mesures correctives.

Nous allons citer deux représentations possibles :

- 1- Le graphe potentiel-tâches ;
- 2- Le graphe potentiel-étapes (Pert).

a- Graphe potentiel-tâches :

À partir d'un projet donné, on peut construire le graphe suivant :

- 1- A chaque tâche (notée i) du projet, on associe un sommet (noté i) du graphe.

Exemple :

Soit le projet de construction d'un pavillon cité dans le paragraphe de définitions ; à chaque tâche de ce projet on associe un sommet du graphe potentiel-tâches. Ainsi le graphe contient les sommets A,B,C,D,E,F,G,H,I,J.

- 2- On définit un arc du sommet i vers le sommet j de longueur d_i si la tâche i doit précéder la tâche j où d_i est la durée de la tâche i

Exemple :

Soit le projet de construction d'un pavillon cité dans le paragraphe de définitions ; d'après le tableau représentant ce projet : La tâche **B** nécessite l'exécution de la tâche **A**, la durée de **A** est 7 semaines, le graphe potentiel-tâches qui représente ce projet contient donc un arc du sommet **A** vers le sommet **B** sa longueur est 7. La tâche **E** nécessite l'exécution des tâches **D** et **C**, la durée de **C** est une semaine, celle de **D** est 8 semaines, le graphe potentiel-tâches qui représente ce graphe contient donc les deux arcs :

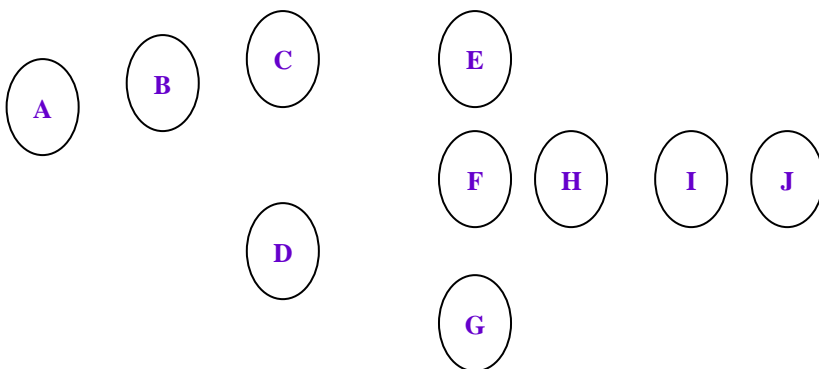
- Du sommet **D** au sommet **E**, sa longueur est 8 ;
- Du sommet **C** au sommet **E**, sa longueur est 1.

3- On ajoute au graphe ainsi obtenu ; deux sommets DP et FP correspondant à deux tâches fictives, respectivement, la tâche début du projet de durée **0** qui doit être antérieure à toutes les autres tâches (pour cela, il suffit de relier DP aux sommets sans prédécesseurs seulement). Et la tâche Fin du projet qui doit être postérieure à toutes les autres tâches (il suffira de la relier aux sommets sans successeurs seulement).

Application : Soit le projet de construction d'un pavillon cité dans le paragraphe de définitions ; donner sa représentation par un graphe potentiel-tâches.

Solutions :

1- Le graphe potentiel-tâches contient les sommets suivants :



La tâche D nécessite A, alors le graphe contient un arc de A vers D de longueur 7 (durée de la tâche A).

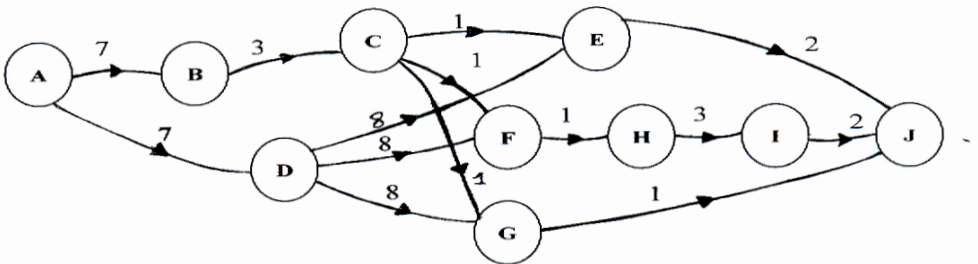
La tâche E nécessite D et C, alors le graphe contient un arc de D vers E de longueur 8 (durée de la tâche D) et un arc de C vers E de longueur 1 (durée de la tâche C).

La tâche F nécessite les tâches D et C, alors le graphe contient un arc de D vers F de longueur 8 (durée de la tâche D) et un arc de C vers F de longueur 1 (durée de la tâche C).

La tâche H nécessite la tâche F, alors le graphe contient un arc de F vers H de longueur 1 (durée de la tâche F).

La tâche I nécessite la tâche H, alors le graphe contient un arc de H vers I de longueur 3 (durée de la tâche H).

Ainsi, on obtient le graphe suivant :



D'après le tableau qui décrit les contraintes du projet (paragraphe de définition) on obtient le graphe potentiel-tâche de la manière suivante :

- La tâche B nécessite A, alors le graphe contient un arc de A vers B de longueur 7 (durée de la tâche A)
- La tâche C nécessite B, alors le graphe contient un arc de B vers C de longueur 3 (durée de la tâche B)

On remarque que la durée de la tâche J ne figure pas sur le graphe. Ce dernier n'exprime pas complètement notre projet, le rajout des deux sommets DP et FP va nous permettre de compléter cette représentation.

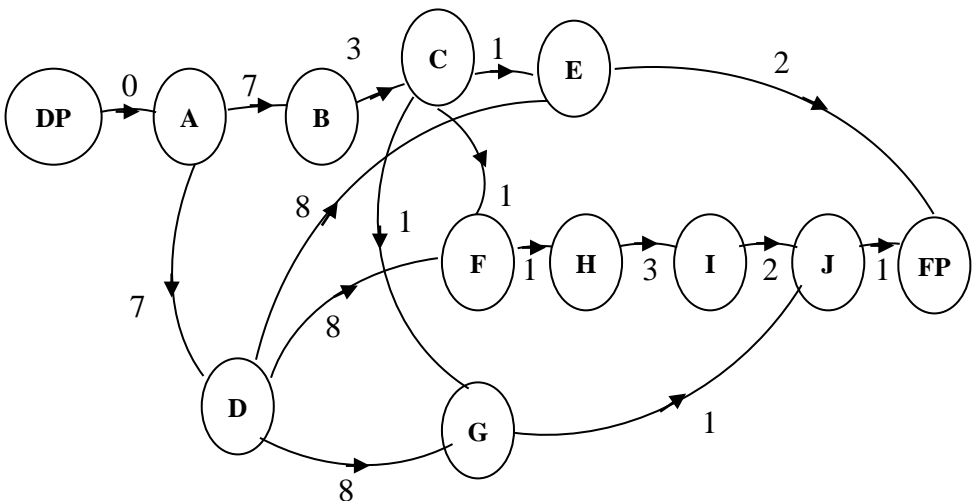
D'après la définition de la tâche fictive DP : elle est antérieure à toutes les tâches, pour exprimer ceci, il suffit de relier le sommet DP à tous les sommets sans précédents, dans notre exemple, il y a un seul (le sommet A).

D'après la définition de la tâche fictive FP : elle est postérieure à toutes les tâches, pour exprimer ceci, il suffit de relier le sommet FP à tous les sommets sans successeurs, dans notre cas, il y a un seul (le sommet J) .

Au graphe ci-dessus, on rajoute alors :

- Deux sommets DP et FP.
- Deux arcs : de DP vers A de longueur 0 (durée de la tâche DP) ; de J vers FP de longueur 1 (durée de la tâche J) .

Enfin on obtient le graphe suivant :



Ainsi, nous avons représenté un problème d'ordonnancement par un graphe potentiel-tâches ; l'objet du paragraphe suivant est sa représentation par la méthode Pert ; et chacune de ces deux représentations permet de calculer au commencement du projet, le temps nécessaire à sa réalisation.

Ces deux représentations nous indiquent pour ceci, les tâches critiques c'est à dire celles qui ne doivent souffrir d'aucun retard, car au cas où se retard aura lieu, il se répercutera sur la durée totale du projet, et les tâches disposants d'une durée de flottement nous permettent de nous réorganiser au mieux et en tirer profit.

2 – Représentation d'un problème d'ordonnancement par la méthode Pert :

Dans cette représentation, les tâches seront les arcs du graphe, la longueur de chaque arc sera la durée de la tâche correspondante.

Exemple :

Le graphe Pert qui représente le projet de construction d'un pavillon contient 10 arcs :

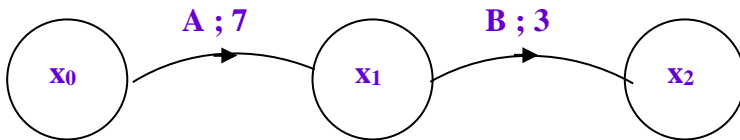
Le premier associé à la tâche A de longueur 7, le deuxième est associé à la tâche B, il est de longueur 3, le troisième est associé à la tâche C, il est de longueur 1, ...etc....

La question qui se pose est : Quels sont les sommets de ce graphe ?

Les sommets du graphe de Pert s'interprètent comme des étapes du projet. Chaque étape sera définie par un ensemble de tâches ayant déjà été effectuées. Si une tâche J nécessite l'exécution d'une tâche i, alors l'extrémité initiale de l'arc associé à la tâche J (noté u_j) doit coïncider avec l'extrémité terminale de l'arc associé à la tâche i, (noté u_i).

Exemple :

Soit le projet de construction d'un pavillon cité dans le paragraphe de définitions ; le graphe Pert associé à ce projet contient l'arc A de longueur 7 et l'arc B de longueur 3, comme la tâche B nécessite l'exécution de A, alors l'extrémité terminale de A est égale à l'extrémité initiale de B, ceci peut être exprimé par le schéma suivant :

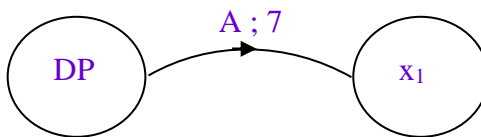


Application :

Donner la représentation graphique du projet de construction d'un pavillon par la méthode Pert.

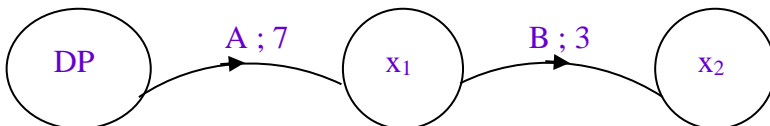
Solution :

- La tâche A ne nécessite l'exécution d'aucune tâche, donc le début de la tâche A coïncide avec le début du projet noté DP.



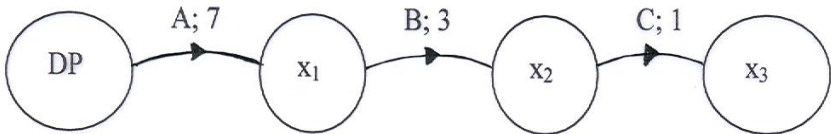
- La tâche B est précédée par la tâche A :

Représentation graphique :



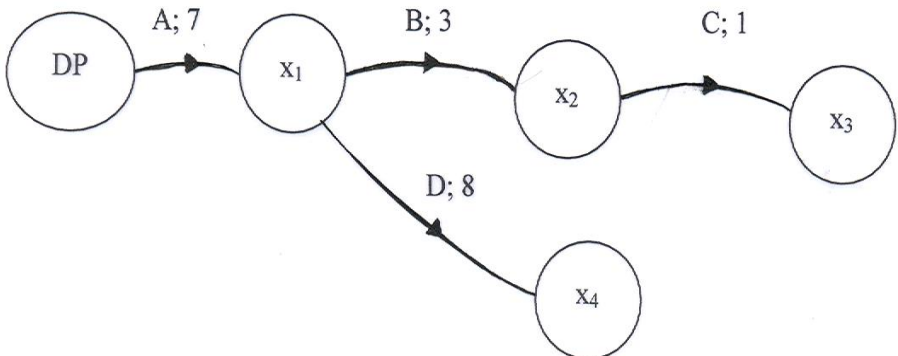
- La tâche C est précédée par la tâche B :

Représentation graphique :



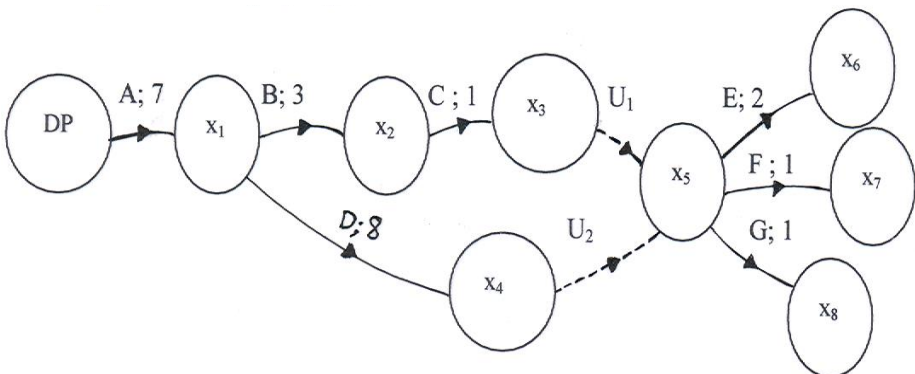
- La tâche D est précédée par la tâche A :

Représentation graphique :

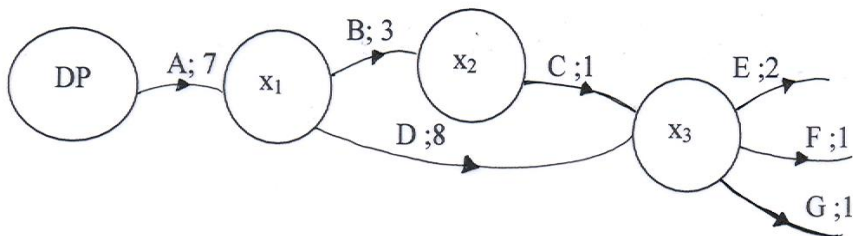


- Chaque'une des tâches E, F, et G est précédée par les tâches D et C

Représentation graphique :

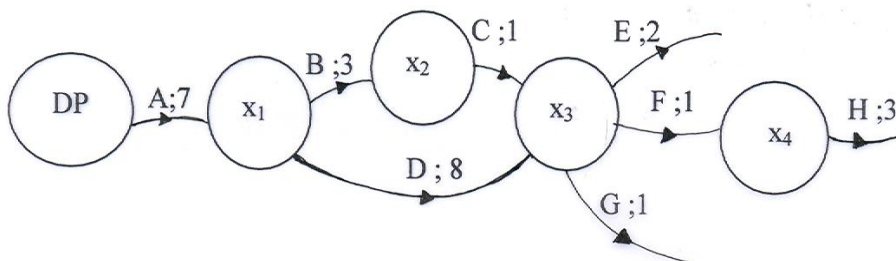


Les tâches U1 et U2 sont des tâches fictives qui peuvent être supprimées, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



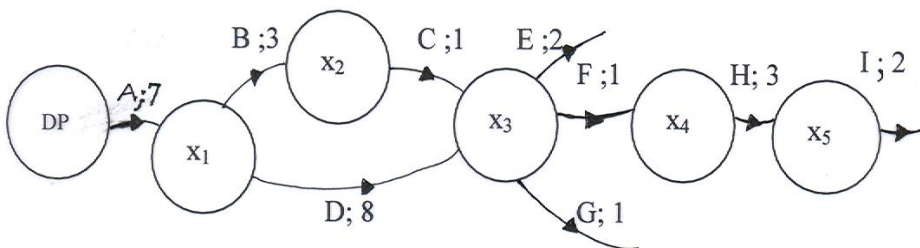
- La tâche H nécessite F

Représentation graphique :



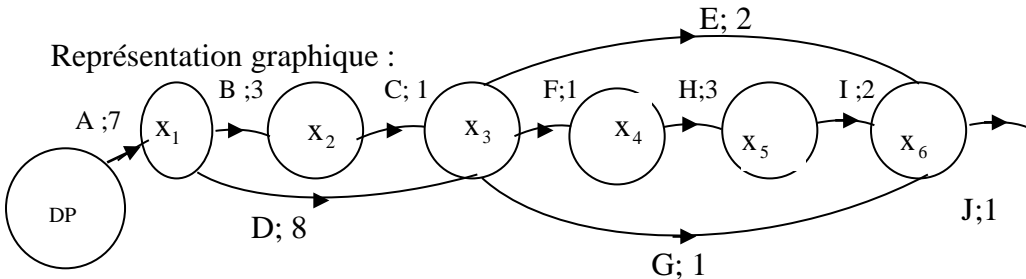
- La tâche I nécessite H

Représentation graphique :

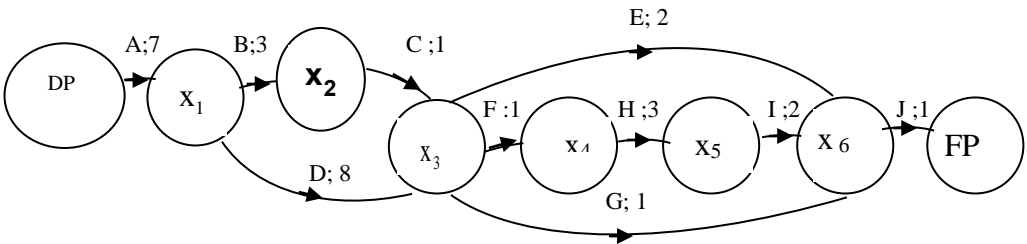


- La tâche J est précédée par les tâches E, G et I

Représentation graphique :



La tâche J ne précède aucune tâche, sa fin coïncide avec la fin du projet FP : d'où le graphe Pert suivant :



III – RESOLUTION D'UN PROBLEME D'ORDONNANCEMENT :

Après la représentation du problème d'ordonnancement par un graphe, vient l'étape de résolution. Rappelons que la résolution d'un problème d'ordonnancement consiste à déterminer l'ordre d'exécution des diverses tâches en un temps minimal, en d'autres termes, elle consiste à trouver sur le graphe qui le représente (graphe potentiel- tâches ou potentiel- étapes Pert) ce qu'on appellera un chemin critique.

Pour calculer le chemin critique, nous devons d'abord connaître les dates au plus tôt et au plus tard des tâches et les dates au plus tôt et au plus tard des étapes.

1- Les dates au plus tôt et au plus tard des tâches :

a- Les dates au plus tôt :

Une date au plus tôt pour l'exécution d'une tâche i est une date avant laquelle il est impossible d'exécuter la tâche i , elle est notée t_i .

Exemple :

Dans le projet de construction d'un pavillon ; la tâche A n'est précédée par aucune tâche, la date au plus tôt pour commencer A est 0, mais B est précédée par A, donc on ne peut commencer la tâche B que si A est terminée c'est-à-dire après 7 semaines, la date au plus tôt pour commencer B est 7, et la date au plus tôt pour la finir est $7 + (\text{durée de B} = 3) = 10$, la tâche C, elle est précédée par B, la date au plus tôt pour commencer C est la date au plus tôt pour finir B c'est-à-dire 10. La tâche D est précédée par A, alors comme la tâche B, on ne peut commencer à exécuter D que si la tâche A est achevée c'est-à-dire après 7 semaines la date au plus tôt pour le début de la tâche D est 7, la date au plus tôt pour son achèvement est $7 + \text{durée de la tâche D} = 15$ semaines, de même la date au plus tôt pour la fin de la tâche C est $10 + \text{durée de la tâche C} = 10 + 1 = 11$ semaines.

Que se passe-t-il si une tâche est précédée par deux ou plusieurs tâches ? Et comment calculer la date au plus tôt de son début ? Prenons le cas de la tâche E :

L'exécution de la tâche E, nécessite l'achèvement de la tâche C et de la tâche D. Donc on ne peut commencer l'exécution de E que si les deux tâches C et D sont achevées. Sachant que l'achèvement de la tâche C aura lieu au plus tôt à la 11^{ème} semaine et celui de D aura lieu au plus tôt à la 15^{ème} semaine, on ne peut commencer alors l'exécution de E qu'à la 15^{ème} semaine d'où la date au plus tôt de la fin de la tâche E est $15 + \text{durée de E} = 15 + 2 = 17$ semaines.

Résultats :

- 1- Si une tâche i est précédée par deux ou plusieurs tâches, la date au plus tôt pour le début de son exécution est la plus grande date au plus tôt pour la fin des tâches qui doivent la précéder.
- 2- La date au plus tôt pour la fin d'une tâche i est la date au plus tôt pour son début + durée de la tâche i
- 3- La date au plus tôt pour commencer une tâche qui n'est précédée par aucune autre tâche est égale à 0.

Remarque :

Les trois résultats précédents nous permettent de calculer les dates au plus tôt pour le début et la fin de toutes les tâches d'un projet.

b- Les dates au plus tard :

La date au plus tard pour le début de l'exécution d'une tâche i est une date à laquelle on peut commencer l'exécution, mais après laquelle le début de l'exécution entraînera un retard de la fin du projet, elle est notée T_i . Le calcul des dates au plus tard se fait par récurrence :

La date au plus tard du début d'une tâche i est égale à la plus petite différence entre la date au plus tard des tâches qui la succèdent est la durée de la tâche i .

La date au plus tard de la fin d'une tâche i est égale à la plus petite date au plus tard des tâches qui la succèdent.

c- La marge totale :

Elle est égale à la différence entre les dates au plus tôt et au plus tard, elle représente le temps de retard que peut prendre une tâche sans influencer sur le reste du parcours.

Remarques :

- 1-La date au plus tard de la tâche FP (Fin du projet) est égale à la date au plus tôt de cette tâche : $T_{FP} = T_{FP}$.
- 2-Une tâche dont la marge totale est nulle est appelée une tâche critique.
- 3- Un chemin critique est le chemin qui passe par les tâches critiques, c'est aussi un chemin sur lequel aucun retard n'est Permis.

Notations : On notera par :

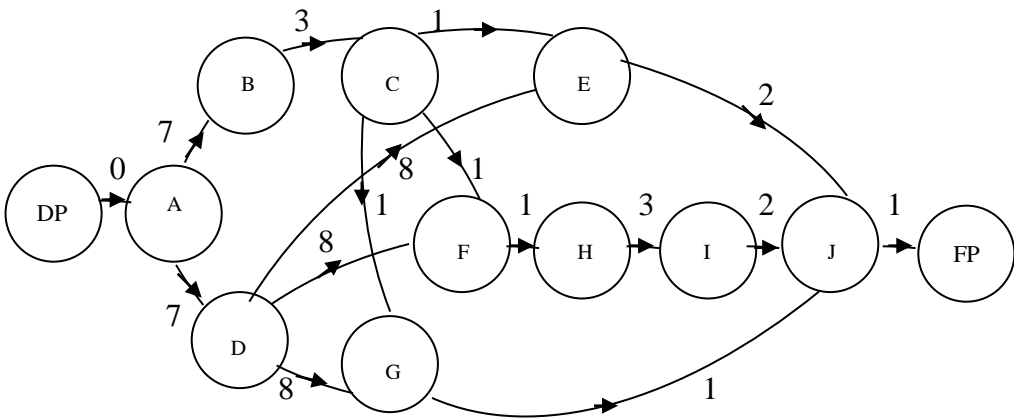
- Td_i la date au plus tôt pour le début de la tâche i.
- tf_i la date au plus tôt pour la fin de la tâche i.
- Td_i la date au plus tard pour le début de la tâche i.
- Tf_i la date au plus tard pour la fin de la tâche i.
- d_i la durée d'une tâche i.

Application :

Soit le projet de construction d'un pavillon, calculer les dates au plus tôt et au plus tard pour le début et la fin de chaque tâche.

Solution :

Ces calculs se font de façon plus facile en utilisant le graphe potentiel – tâches associé à ce projet :



Calculs des dates au plus tôt :

- Dp est une tâche sans précédents, on a alors : $td_{DP} = 0$, $tf_{DP} = td_{DP} + d_{DP}$
$$= 0 + 0 = 0$$

- $td_A = tf_{DP} = 0$; $tf_A = td_A + d_A = 0 + 7 = 7$

- $td_B = tf_A = 7$; $tf_B = td_B + d_B = 7 + 3 = 10$

- $td_C = tf_B = 10$; $tf_C = td_C + d_C = 10 + 1 = 11$

- $td_D = tf_A = 7$; $tf_D = td_D + d_D = 7 + 8 = 15$

Remarque :

Jusqu'à présent, nous avons calculé les dates au plus tôt pour le début et la fin de tâches qui ne sont précédées que par une seule tâche.

Rappelons que dans ce cas ; pour calculer la date au plus tôt pour le début d'une tâche, il suffit de prendre la date au plus tôt pour la fin de la tâche qui la précède.

Exemple : $td_C = tf_B$, car C doit être précédée par la tâche B et pour calculer la date au plus tôt pour la fin d'une tâche i on rajoute à la date au plus tôt pour le début de cette tâche i sa durée d_i , c'est-à-dire : $tf_i = td_i + d_i$.

Exemple : $tf_C = td_C + d_C$

Mais si une tâche i doit être précédée par deux ou plusieurs tâches ; la date au plus tôt pour le début de cette tâche correspond à la plus grande date au plus tôt pour la fin des tâches qui la précèdent.

Exemple :

La tâche E est précédée par C et D donc $td_E = \text{Max}(tf_C, tf_D)$.
 $= \text{Max}(11, 15) = 15$.

La date au plus tôt pour la fin d'une tâche précédée par deux ou plusieurs tâches est calculée de la même façon que pour la fin d'une tâche qui n'est précédée que par une seule tâche ; c'est-à-dire $tf_i = td_i + d_i$

Exemple : $tf_E = td_E + d_E = 15 + 2 = 17$.

Continuons les calculs des dates au plus tôt pour le reste des tâches :

$td_F = \text{Max}(tf_C, tf_D) = \text{Max}(11, 15) = 15$; $tf_F = 15 + d_F = 15 + 1 = 16$.

$td_G = \text{Max}(tf_C, tf_D) = \text{Max}(11, 15) = 15$; $tf_G = td_G + d_G = 15 + 1 = 16$.

$td_H = tf_F = 16$; $tf_H = td_H + d_H = 16 + 3 = 19$.

$td_I = tf_H = 19$; $tf_I = td_I + d_I = 19 + 2 = 21$

$td_J = \text{Max}(tf_E, tf_G, tf_I) = \text{Max}(17, 16, 21) = 21$; $tf_J = td_J + d_J$

$= 21 + 1 = 22$

$td_{FP} = tf_J = 22$; $tf_{FP} = 22$

Calcul des dates au plus tard :

$$Td_{FP} = 22 ; Tf_{FP} = 22$$

$$Td_J = Td_{FP} - d_j = 22 - 1 = 21 ; Tf_J = Td_{FP} = 22$$

$$Td_I = Td_J - d_I = 21 - 2 = 19 ; Tf_I = Td_J = 21$$

$$Td_H = Td_I - d_H = 19 - 3 = 16 ; Tf_H = Td_I = 19$$

$$Td_G = Td_J - d_G = 21 - 1 = 20 ; Tf_G = Td_J = 21$$

$$Td_F = Td_H - d_F = 16 - 1 = 15 ; Tf_F = Td_H = 16$$

$$Td_E = Td_J - d_E = 21 - 2 = 19 ; Tf_E = Td_J = 21$$

$$Td_D = \text{Min} (Td_E , Td_F , Td_G) - d_D = \text{Min} (19,15,20) - 8 = 15 - 8 = 7$$

$$Tf_D = \text{Min} (Td_E , Td_F , Td_G) = 15$$

$$Td_C = \text{Min} (Td_E , Td_F , Td_G) - d_C = \text{Min} (19,15,20) - 1 = 15 - 1 = 14$$

$$Tf_C = \text{Min} (Td_E , Td_F , Td_G) = 15$$

$$Td_B = Td_C - d_B = 14 - 3 = 11 ; Tf_B = Td_C = 14$$

$$Td_A = \text{Min} (Td_B , Td_D) - d_A = \text{Min} (7,11) - 7 = 7 - 7 = 0 ;$$

$$Tf_A = \text{Min} (Td_B , Td_D) = 7.$$

$$Td_{DP} = Td_A - d_{FP} = 0 ; Tf_{DP} = Td_A = 0$$

Ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

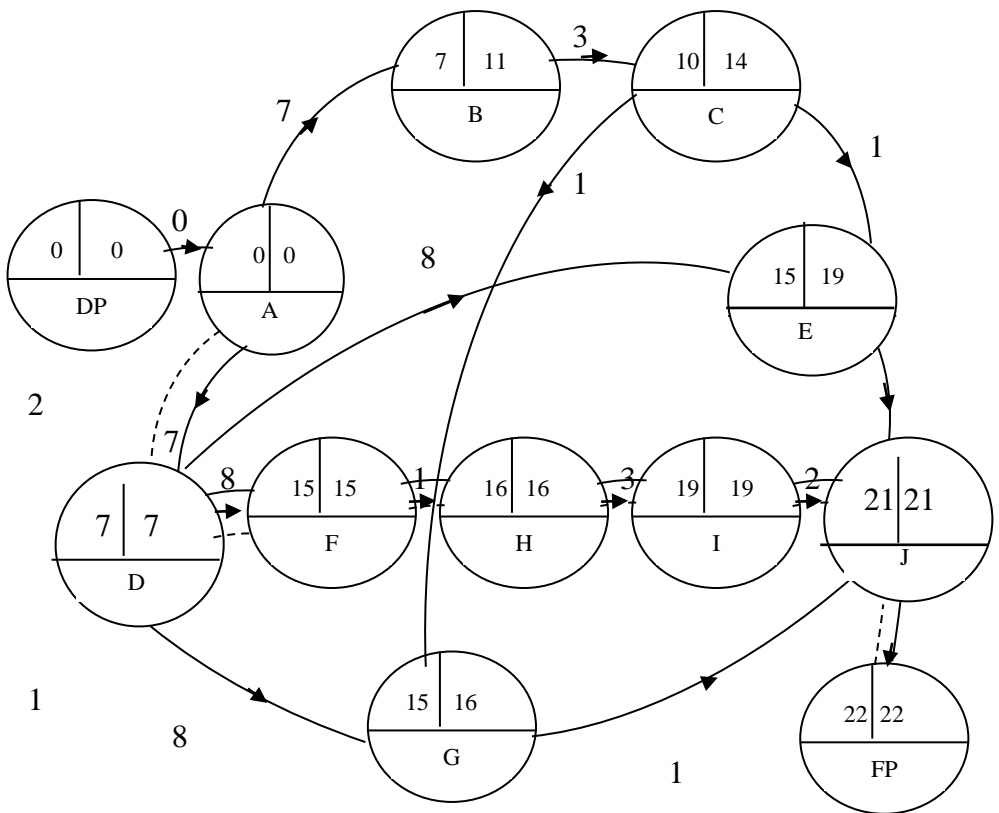
Tâches	Date au plus tôt		Date au plus tard		Marge totale
	Début	Fin	Début	Fin	
Dp	0	0	0	0	0
A	0	$0+7=7$	$7-7=0$	$\text{Min}(7,11) = 7$	$0-0 = 0$
B	7	$7+3=10$	$14-3=11$	14	$11-7 = 4$
C	10	$10+1=11$	$15-1=14$	$\text{Min}(19, 15,20)=15$	$14 - 10 = 4$
D	7	$7+8=15$	$15-8=7$	$\text{Min}(19, 15,20)=15$	$7 - 7 = 0$
E	$\text{Max}(11,15) = 15$	$15+2=17$	$21-2=19$	21	$19 - 15 = 4$
F	$\text{Max}(11,15) = 15$	$15+1=16$	$16-1=15$	16	$15 - 15 = 0$
G	$\text{Max}(11,15) = 15$	$15+1=16$	$21-1=20$	21	$20 - 15 = 5$
H	16	$16+3=19$	$19-3=16$	19	$16 - 16 = 0$
I	19	$19+2=21$	$21-9=19$	21	$19 - 19 = 0$
J	$\text{Max}(17, 16,21) = 21$	$21+1=22$	21	22	$21 - 21 = 0$
FP	22	22	22	22	$22-22=0$

Remarque :

Les tâches DP, A, D, F, H, I, J, FP sont des tâches critiques car leurs marges sont nulles.

On reporte ces résultats sur le graphe de la manière suivante :

- Sur chaque sommet (qui représente une tâche) ; on inscrit sur la droite la date au plus tard pour le début de la tâche et sur la gauche la date au plus tôt pour le début de la tâche.
- On marque le chemin critique par des traits discontinus ; rappelons que le chemin critique est un chemin qui passe par les tâches critiques.



Par le calcul de ces dates au plus tôt et au plus tard on a résolu le problème d'ordonnancement associé au projet de construction d'un pavillon, la durée minimale d'exécution de ce projet est 22 semaines, c'est-à-dire qu'on ne peut exécuter ce projet en moins de 22 semaines.

L'ordre des tâches critiques décrit le calendrier des tâches à exécuter sans possibilité de les avancer ou de les retarder est : DP, A, D, F, H, I, J, FP, c'est le chemin critique.

Les tâches B, C, E et G ont des périodes de flottement :

Exemple :

Le début d'exécution de la tâche E peut être retardé au maximum jusqu'à la 14^{ième} semaine et cela sans retarder la fin du projet.

2 – Les dates au plus tôt et au plus tard des étapes :

a- Date au plus tôt d'une étape :

La date au plus tôt d'une étape i est égale à la plus grande durée d'exécution des étapes qui la précèdent, on la notera t_i .

Exemple :

Dans la représentation par la méthode Pert du projet de construction d'un pavillon, il y a les étapes suivantes :

L'étape DP, l'étape 1 notée x_1 , l'étape 2 notée x_2 ,etc.

On a $t_{DP} = 0$, $t_{x_1} = t_{DP} + 7 = 7$;

$t_{x_2} = t_{x_1} + 1 (x_1, x_2) = 7 + 3 = 10$.

Remarque :

$l(x_1, x_2) = \text{longueur de l'arc } (x_1, x_2) = d(B) = 3$

b- Date au plus tard d'une étape :

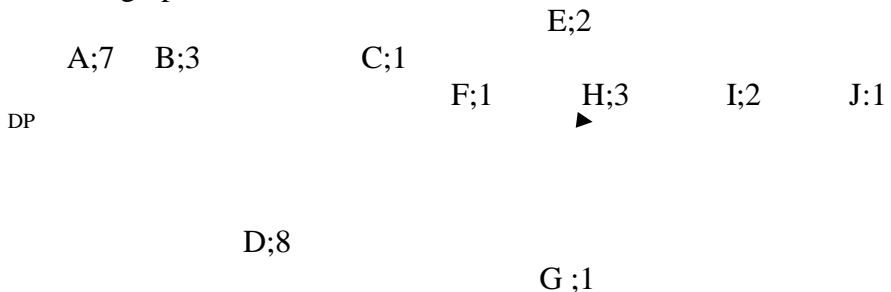
La date au plus tard pour l'exécution d'une étape i est calculée par récurrence, elle est égale à la plus petite différence entre les dates au plus tard et les durées des tâches qui lui succèdent, elle est notée T_i

Application :

Soit le projet de construction d'un pavillon et sa représentation par la méthode Pert ; calculer les dates au plus tôt et au plus tard pour l'exécution de chaque étape ainsi que leurs marges.

Solution :

À partir de la représentation par la méthode Pert du projet, on a obtenu le graphe suivant :



Remarque :

1- Pour tout problème d'ordonnancement on a : $t_{FP} = t_{FP}$

2- Pour tout problème d'ordonnancement on a : $t_{DP} = 0$

Calcul des dates au plus tôt :

L'étape DP, par définition $t_{DP} = 0$

L'étape x_1 : $tx_1 = t_{DP} + d(A) = 0 + 7 = 7$

L'étape x_2 : $tx_2 = tx_1 + d(B) = 7 + 3 = 10$

L'étape x_3 : $tx_3 = \text{Max}(tx_1 + d(D); tx_2 + d(C))$
 $= \text{Max}(7 + 8; 10 + 1) = \text{Max}(15, 11) = 15$

L'étape x_4 : $tx_4 = tx_3 + d(F) = 15 + 1 = 16$

L'étape x_5 : $tx_5 = tx_4 + d(H) = 16 + 3 = 19$

L'étape x_6 : $tx_6 = \text{Max}(tx_3 + d(E); tx_3 + d(G); tx_5 + d(I))$
 $= \text{Max}(15 + 2, 15 + 1; 19 + 2) = \text{Max}(17, 16, 21) = 21$

L'étape FP : $t_{FP} = tx_6 + d(J) = 21 + 1 = 22$

Calcul des dates au plus tard :

Pour l'étape FP on a par définition : $T_{FP} = t_{FP} = 22$

Pour l'étape x_6 : $T_{x_6} = T_{FP} - d(J) = 22 - 1 = 21$

Pour l'étape x_5 : $T_{x_5} = T_{x_6} - d(I) = 21 - 2 = 19$

Pour l'étape x_4 : $T_{x_4} = T_{x_5} - d(H) = 19 - 3 = 16$

Pour l'étape x_3 : $T_{x_3} = \text{Min}(T_{x_4} - d(F); T_{x_6} - d(E), T_{x_6} - d(G))$
 $= \text{Min}(16 - 1, 21 - 2, 21 - 1) = \text{Min}(15, 19, 20) = 15$

Pour l'étape x_2 : $T_{x_2} = T_{x_3} - d(C) = 15 - 1 = 14$

Pour l'étape x_1 : $T_{x_1} = \min(T_{x_3} - d(D) ; T_{x_2} - d(B))$
 $= \min(15 - 8 ; 14 - 3) = \min(7 ; 11) = 7$

Pour l'étape DP : $T_{DP} = T_{x_1} - d(A) = 7 - 7 = 0$

Ces calculs sont résumés dans le tableau suivant :

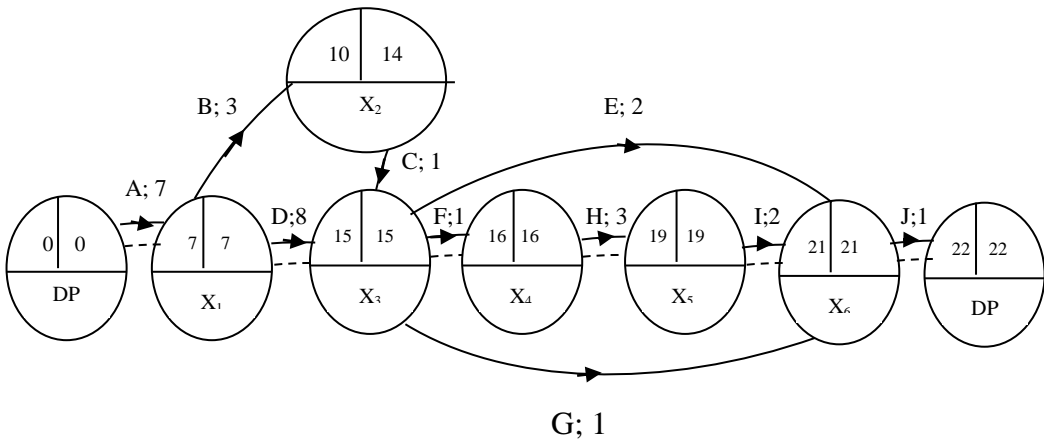
Étapes	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marge
DP	0	0	$0 - 0 = 0$
x_1	7	7	$7 - 7 = 0$
x_2	10	14	$14 - 10 = 4$
x_3	15	15	$15 - 15 = 0$
x_4	16	16	$16 - 16 = 0$
x_5	19	19	$19 - 19 = 0$
x_6	21	21	$21 - 21 = 0$
FP	22	22	$22 - 22 = 0$

Remarque :

Les étapes DP, x_1 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 et FP sont des étapes critiques car leurs marges sont nulles.

On reporte les résultats du calcul sur le graphe de Pert de la manière suivante :

- Sur chaque sommet (qui représente une étape), on inscrit sur la droite la date au plus tard et sur la gauche la date au plus tôt.
- On marque le chemin critique par des traits discontinus ; dans ce cas le chemin critique est un chemin qui passe par les étapes critiques.



Comme pour la représentation par le graphe potentiel-tâches, le calcul des dates au plus tôt et au plus tard des étapes, dans une représentation par la méthode Pert permet aussi de résoudre le problème d'ordonnancement.

On remarque qu'on obtient les mêmes résultats, c'est-à-dire, la même durée minimale (22 semaines) et le même chemin critique : DP, x₁, x₃, x₄, x₅, x₆, FP, et si au lieu de décrire ce chemin par les sommets on utilise les arcs (qui dans cette méthode représente les tâches) on obtient : A, D, F, H, I, J : les mêmes tâches critique trouvées dans la première représentation graphique.

Remarque :

Relation entre les dates au plus tôt et au plus tard du début d'une tâche et les dates au plus tôt et au plus tard des étapes :

- La date de début au plus tôt d'une tâche est égale à la date au plus tôt de l'étape dont elle est issue.
- La date de début au plus tard d'une tâche est égale à la date au plus tard de l'étape à laquelle elle aboutit, diminuée de la durée de la tâche.

A partir de cette remarque, vous pouvez calculer les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches en utilisant le graphe de Pert et les dates au plus tôt et au plus tard des étapes.

IV - CONCLUSION :

Nous avons défini la notion de Projet, de tâches, et de Problème Centrale d'Ordonnancement, ces notions restent applicables dans plusieurs domaines : construction, production, organisation des activités et même les opérations militaires où la méthode Pert a été créée et utilisée pour la première fois.

Nous avons aussi proposé des méthodes pour sa représentation et sa résolution (Problème Central d'Ordonnancement) essentiellement la méthode Pert qui donne entière satisfaction et assure une réussite complète du projet.

EXERCICES CORRIGES :

EXERCICE N°1 :

Désirant fabriquer un produit, on dispose des informations suivantes :

Tâches	Description	Durée (en j)	Tâches antérieures
A	Préparer la liste des matières premières nécessaires	1	/
B	Préparer le diagramme de fabrication	3	A
C	Commander les matières premières	4	A
D	Organiser la chaîne de production	2	B
E	Tester le fonctionnement	1	C,D
F	Définir les procédures d'inspection	1	B
G	Établir les postes d'inspection	2	E,F
H	Former les ouvriers	4	C,D
I	Fabriquer les produits	7	G,H

- 1- Représenter ce projet par le graphe potentiel-tâches.
- 2- Donner la représentation par le graphe Pert.
- 3- Calculer les dates au plus tôt et au plus tard pour chaque étape, et en déduire le chemin critique et le délai minimum de réalisation de ce projet.

EXERCICE N°2 :

Soit un projet constitué de 6 tâches, les données relatives à l'antériorité et à la durée de chacune des tâches sont répertoriées dans le tableau suivant :

Tâches	A	B	C	D	E	F
Tâches antérieures	C	-	-	B	B,A	D
Durées (en mois)	2	7	5	3	6	2

- 1- Déterminer les niveaux des tâches du projet.
- 2- Tracer le graphe Pert associé à ce projet.
- 3- Déterminer le chemin critique et les tâches critiques.

EXERCICE N°3 :

L'entreprise « Bontemps » décide de lancer un nouveau produit sur le marché, les services commerciaux ont déterminé l'ensemble des tâches nécessaires à cette action : $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$.

Les conditions d'antériorité liant ces tâches et les durées de celles-ci sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	G	K
T. Antérieures	E	J,E	-	-	-	D	F,D	A,C,D	H,A,C,E,K,D,F	E	F,D
Durée(en semaines)	4	6	12	14	8	2	10	6	8	12	2

1-En classant les tâches par niveaux, déterminer les tâches immédiatement antérieures à chaque tâche.

Exemple :

La tâche B est précédée par J et E, mais J elle-même est précédée par E, donc seule la tâche J est immédiatement antérieure à B.

2- Tracer le graphe du projet par la méthode Pert.

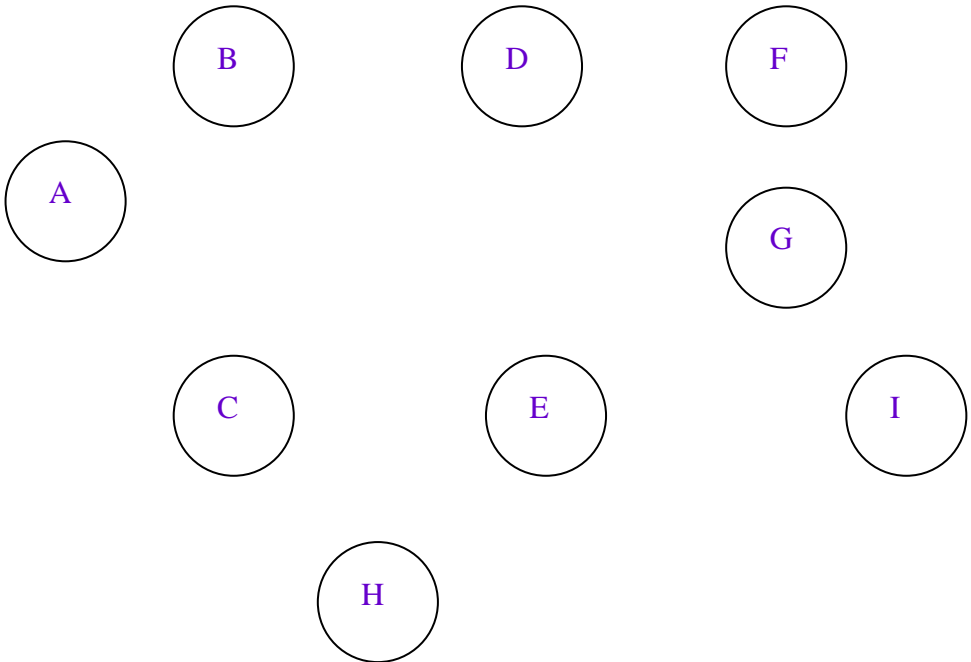
- 3- Trouver le ou les chemin (s) critique (s) en indiquant sur le graphe les dates au plus tôt et les dates au plus tard des étapes.
 - 4 – Les services commerciaux aimeraient connaître en quel temps minimum le lancement sera réalisé.
- Déterminer le temps minimum nécessaire pour le lancement.
- 5 – Dresser le tableau des marges totales.

SOLUTIONS :

EXERCICE N°1 :

1- Représentation du projet par le graphe potentiel-tâches :

Le graphe contient les sommets suivants :



Les arcs et leurs longueurs sont obtenus en utilisant : les tâches antérieures et les durées :

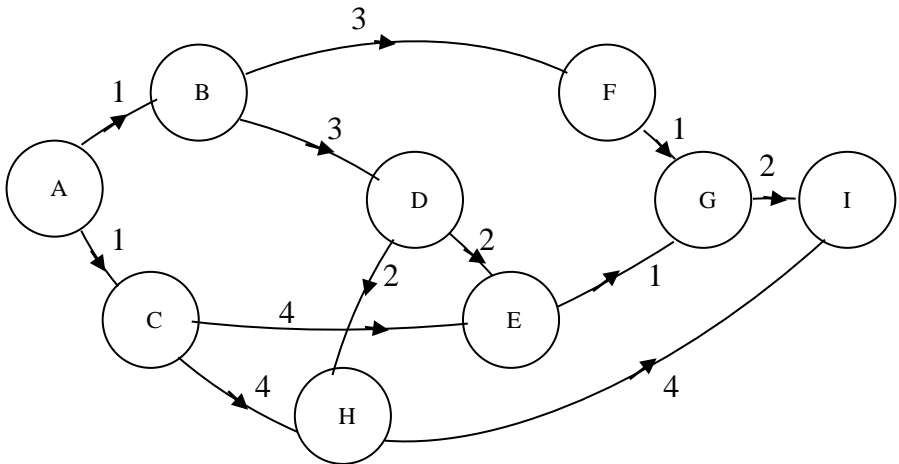
La tâche B nécessite la tâche A : le graphe contient un arc du sommet A vers B et sa longueur et la durée de A.

La tâche C aussi nécessite la tâche A alors le graphe contient un arc du sommet A au sommet C, sa longueur est alors 1. La tâche D nécessite la tâche B, alors le graphe contient un arc du sommet B au sommet D, sa longueur est 3 (durée de la tâche B).

La tâche E nécessite les tâches C et D alors le graphe contient deux arcs :

- Du sommet C au sommet E, sa longueur est 4 (durée de la tâche C) .
- Du sommet D au sommet E, sa longueur est 2 (durée de la tâche D).
- La tâche F nécessite la tâche B, alors le graphe contient un arc du sommet B au sommet F sa longueur est 3 (durée de la tâche B).
- La tâche G nécessite les tâches E et F, le graphe contient deux arcs :
 - Du sommet E au sommet G, sa longueur est 1 (durée de la tâche E).
 - Du sommet F au sommet G, sa longueur est 1 (durée de la tâche F).
- La tâche H nécessite les tâches C et D alors le graphe contient deux arcs :
 - Du sommet C au sommet H, sa longueur est 4 (durée de la tâche C).
 - Du sommet D au sommet H, sa longueur est 2 (durée de la tâche D).
- La tâche I nécessite les tâches G et H alors le graphe contient deux arcs :
 - Du sommet G au sommet I, sa longueur est 2 (durée de la tâche G).
 - Du sommet H au sommet I, sa longueur est 4 (durée de la tâche H).

Ainsi, on obtient le graphe suivant :



On remarque que la durée de la tâche I ne figure pas sur le graphe. Ce dernier n'exprime pas complètement le projet. Le rajout des deux sommets DP et FP va nous permettre de compléter cette représentation.

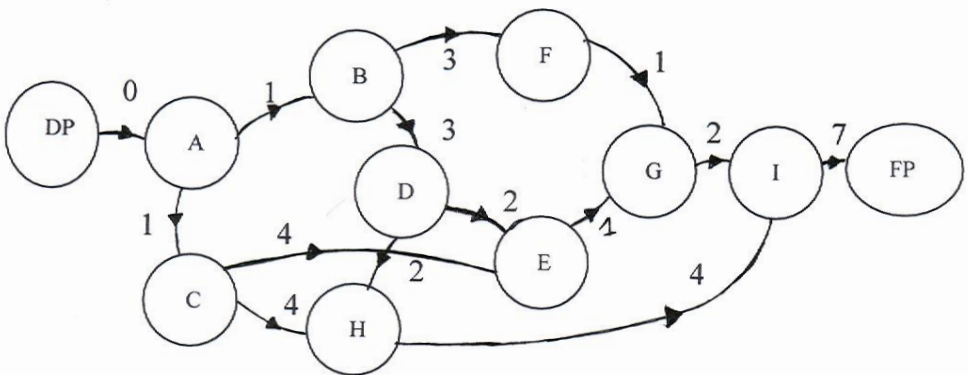
D'après la définition de la tâche fictive FP : elle est antérieure à toutes les tâches, pour exprimer ceci, il suffit de relier le sommet DP à tous les sommets sans précédents. Dans notre cas, il y a un seul c'est le sommet A).

D'après la définition de la tâche fictive FP : elle est postérieure à toutes les tâches, pour exprimer ceci, il suffit de relier le sommet FP à tous les sommets sans successeurs. Dans notre cas, il y a un seul et c'est le sommet I.

Au graphe ci-dessus, on rajoute alors :

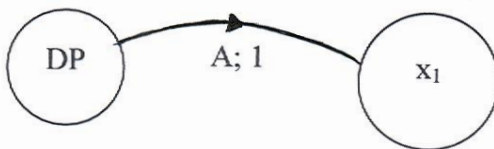
- Deux sommets : DP et FP.
- Deux arcs : de DP vers A de longueur 0 (durée de DP).
de I vers FP de longueur 7 (durée de la tâche I)

Enfin, on obtient le graphe suivant :



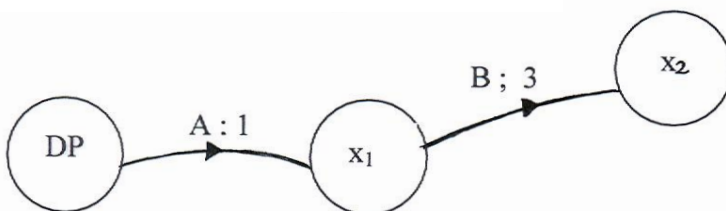
2- La représentation par le graphe Pert :

La tâche A ne nécessite l'exécution d'aucune tâche, donc le début de la tâche A coïncide avec le début du projet noté DP



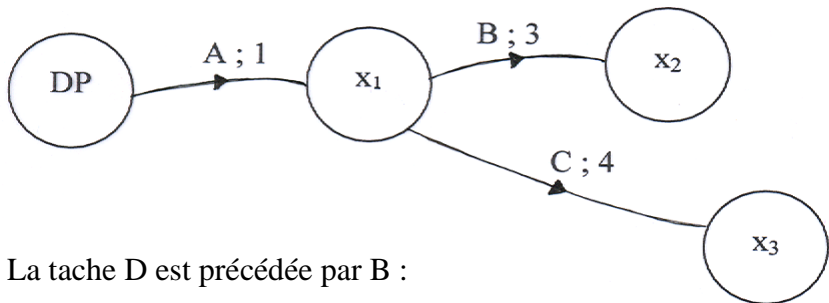
La tâche B est précédée par A :

Représentation graphique :



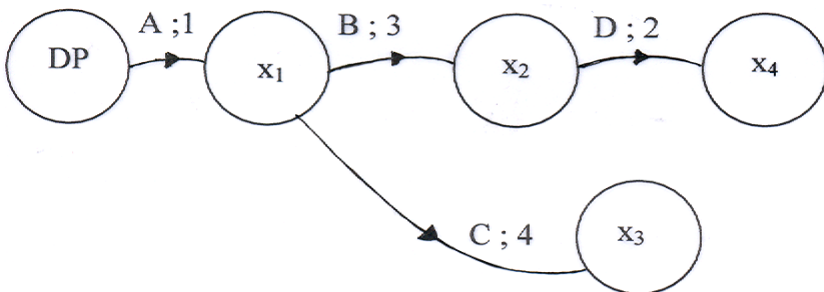
La tâche C est précédée par A :

Représentation graphique :



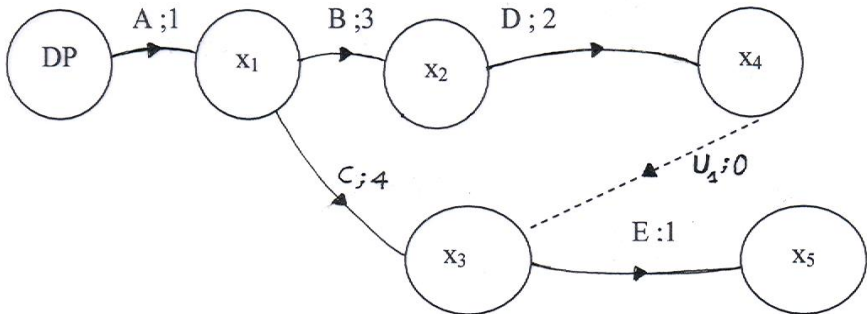
La tâche D est précédée par B :

Représentation graphique :

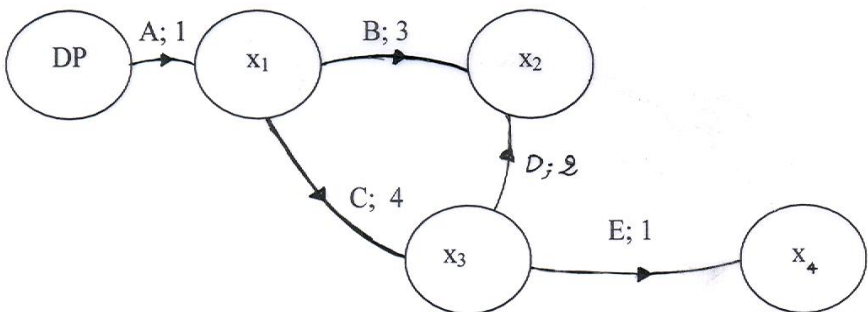


La tâche E nécessite C et D :

Représentation graphique :

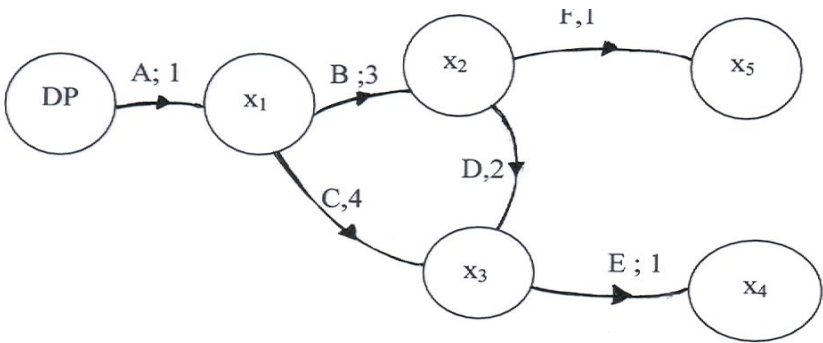


La tâche U_0 est une tâche fictive ; qui peut être supprimée, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



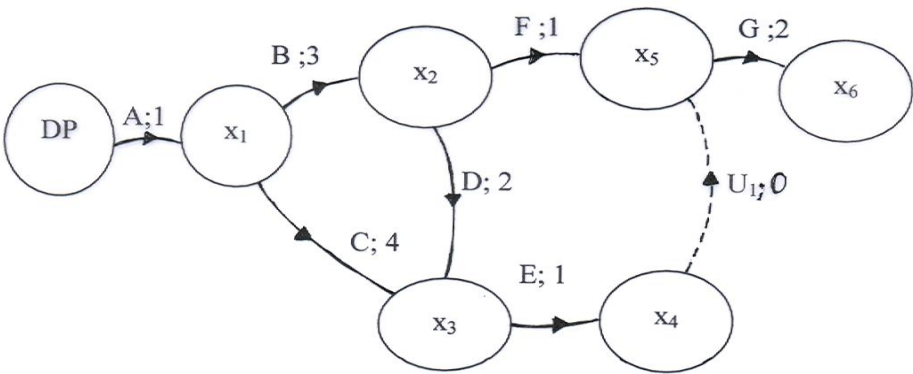
La tâche F nécessite B :

Représentation graphique :

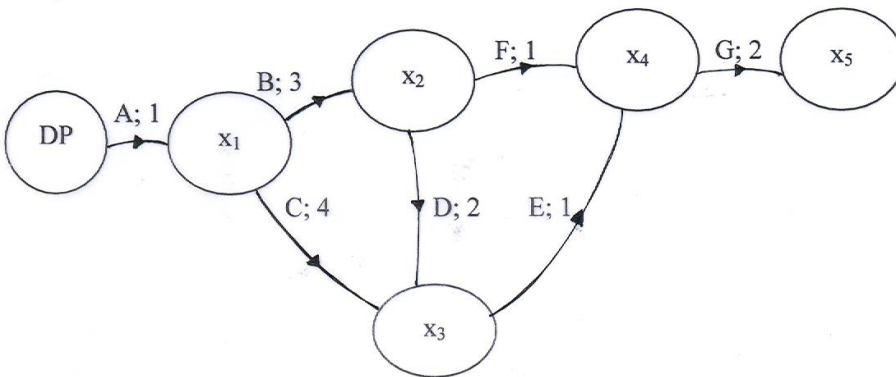


La tâche G nécessite E et F :

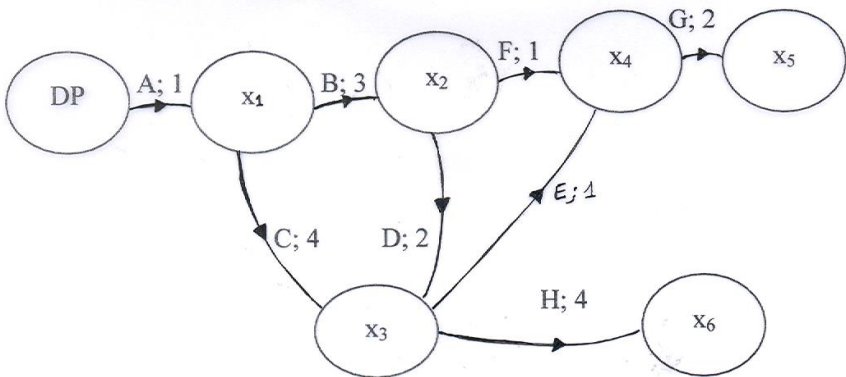
Représentation graphique :



La tâche U1 est une tâche fictive qui peut supprimée, la représentation graphique simplifiée est la suivante :

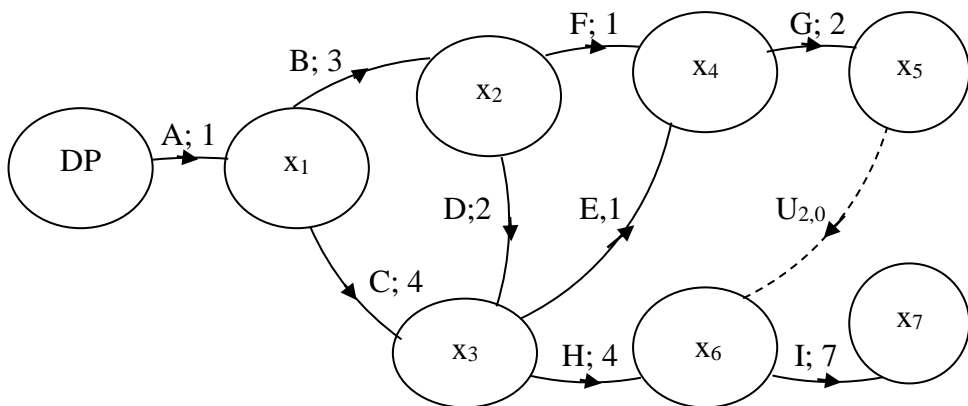


La tâche H nécessite C et D :
Représentation graphique :

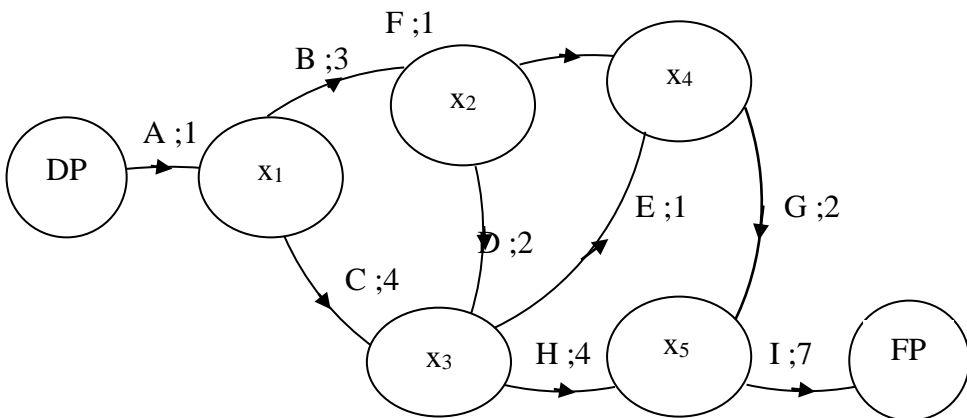


Enfin, la tâche I, nécessite G et H :

Représentation graphique :



La tâche U₂ est une tâche fictive qui peut être supprimée, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



3- Calcul des dates au plus tôt et au plus tard pour chaque étape :

Les dates au plus tôt :

L'étape DP : par définition $t_{DP} = 0$

L'étape x_1 : $tx_1 = t_{DP} + d(A) = 0 + 1 = 1$

L'étape x_2 : $tx_2 = tx_1 + d(B) = 1 + 3 = 4$

L'étape x_3 : $tx_3 = \text{Max}(tx_1 + d(C), tx_2 + d(D))$

$$= \text{Max}(1 + 4, 4 + 2) = \text{Max}(5, 6) = 6$$

L'étape x_4 : $tx_4 = \text{Max}(tx_2 + d(F), tx_3 + d(E))$

$$= \text{Max}(4 + 1, 6 + 1) = \text{Max}(5, 7) = 7$$

L'étape x_5 : $tx_5 = \text{Max}(tx_4 + d(G), tx_3 + d(H))$

$$= \text{Max}(7 + 2, 6 + 4) = 10$$

L'étape FP : $t_{FP} = tx_5 + d(I) = 10 + 7 = 17$ jours.

Le délai minimum du projet est 17 jours.

Les dates au plus tard :

L'étape FP : on a par définition $T_{FP} = t_{FP} = 17$

Pour l'étape x_5 : $Tx_5 = T_{FP} - d(I) = 17 - 7 = 10$

Pour l'étape x_4 : $Tx_4 = Tx_5 - d(G) = 10 - 2 = 8$

Pour l'étape x_3 : $Tx_3 = \text{Min}(Tx_5 - d(H), Tx_4 - d(E))$

$$= \text{Min}(10 - 4, 8 - 1) = \text{Min}(6, 7) = 6$$

Pour l'étape x_2 : $Tx_2 = \text{Min}(Tx_3 - d(D), Tx_4 - d(F))$

$$= \text{Min}(6 - 2, 8 - 1) = \text{Min}(4, 7) = 4$$

Pour l'étape x_1 : $TX_1 = \text{Min} (TX_2 - d(B) , TX_3 - d(C))$
 $= \text{Min} (4 - 3 , 6 - 4) = \text{Min} (1,2) = 1$

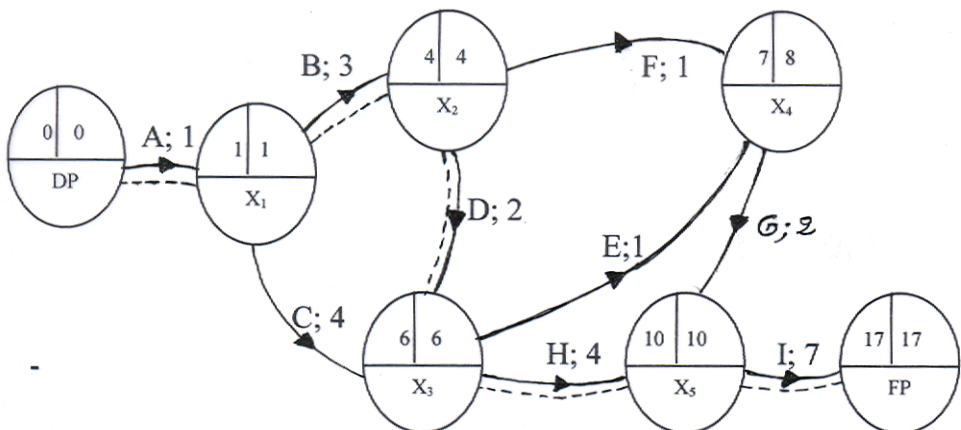
Pour l'étape DP : $T_{DP} = TX_1 - d(A) = 1 - 1 = 0$

Ces calculs sont résumés dans le tableau suivant :

Etapes	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marge
DP	0	0	$0 - 0 = 0$
x_1	1	1	$1 - 1 = 0$
x_2	4	4	$4 - 4 = 0$
x_3	6	6	$6 - 6 = 0$
x_4	7	8	$8 - 7 = 1$
x_5	10	10	$10 - 10 = 0$
FP	17	17	$17 - 17 = 0$

Les étapes DP, x_1 , x_2 , x_3 , x_5 et FP sont des étapes critiques car leurs marges sont nulles.

Le chemin critiques est : DP, x_1 , x_2 , x_3 , x_5 , FP. Il est marqué par des traits discontinus dans le graphe suivant :



EXERCICE N°2 :

1 – Détermination des niveaux :

Les tâches B et C n'ont pas de tâches antérieures, ce sont les tâches de premier niveau :

$$N_1 = \{B, C\}$$

On supprime ces 2 tâches du tableau, on obtient le tableau suivant :

Tâches	Tâches antérieures
A	/
D	/
E	A
F	D

D'où $N_2 = \{A, D\}$, En les supprimant de ce tableau, on obtient le tableau suivant :

Tâches	Tâches antérieures
E	/
F	/

E et F sont les tâches de dernier niveau, $N_3 = \{E, F\}$

Les niveaux sont résumés par :

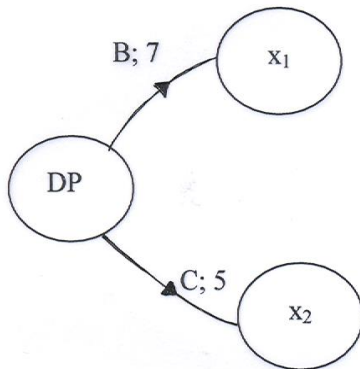
$$N_1 = \{B, C\}$$

$$N_2 = \{A, D\}$$

$$N_3 = \{E, F\}$$

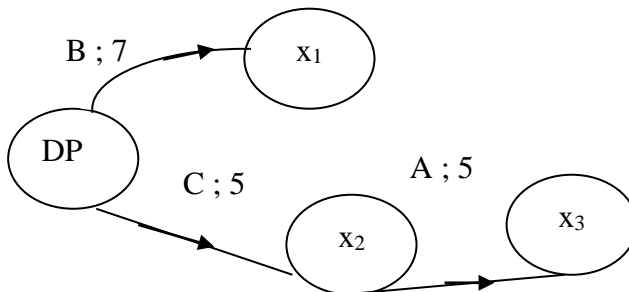
2 – Représentation par le graphe Pert :

Les tâches B et C ne nécessitent l'exécution d'aucune tâche, donc leurs débuts coïncident avec le début du projet noté DP.



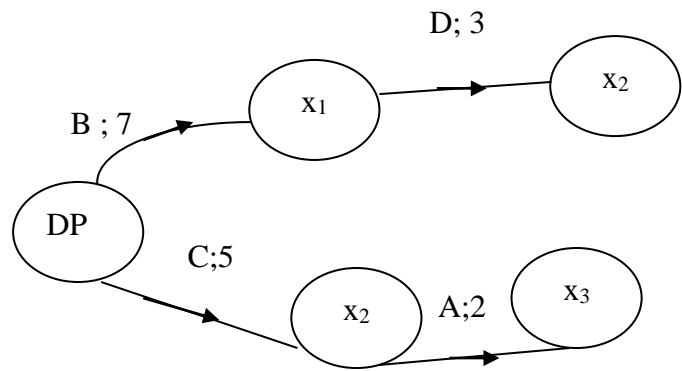
La tâche A nécessite la tâche C :

Représentation graphique :



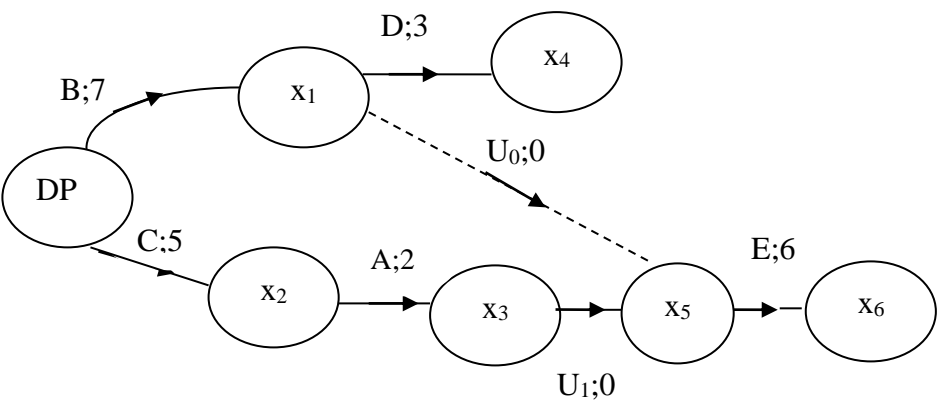
La tâche D nécessite la tâche B :

Représentation graphique :

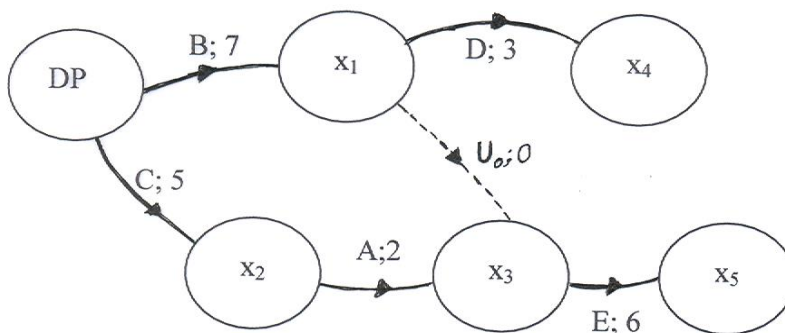


La tâche E nécessite B et A :

Représentation graphique :

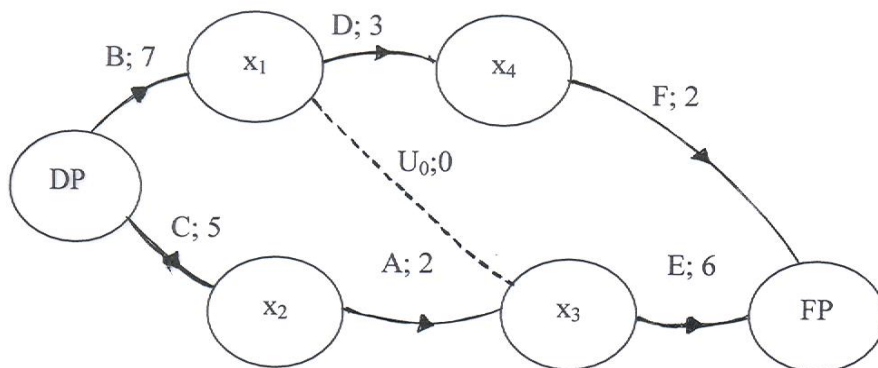


Les tâches U0 et U1 sont des tâches fictives, mais seulement la tâche U1 peut être supprimée. U0 ne peut être supprimée, la représentation graphique simplifiée est la suivante :



F, la dernière tâche nécessite D :

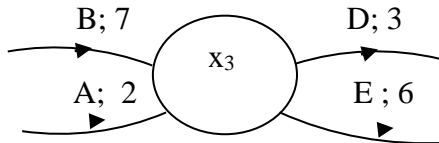
Représentation graphique :



Remarques :

- 1- La tâche U_0 n'a pas été supprimé car : E nécessite B et A mais la tâche D ne nécessite que la tâche B. Si on fait aboutir les arcs A et B vers un même sommet, on ne peut pas exprimer le fait que D nécessite B.

La représentation suivante :



Exprime que D nécessite A et B, et E aussi, ce qui n'est pas le cas.

- 2 – On a fait aboutir les arcs E et F vers le même sommet, car les tâches correspondantes (c'est-à-dire E et F) ne sont antérieures à aucune des autres tâches, elles coïncident alors avec la fin du projet FP.

3 – Détermination du chemin critique et les tâches critiques :

Pour déterminer le chemin critique, on doit d'abord calculer les dates au plus tôt et au plus tard pour chaque étape :

Les dates au plus tôt :

L'étape DP : par définition $t_{DP} = 0$

L'étape x_1 : $tx_1 = t_{DP} + d(B) = 0 + 7 = 7$

L'étape x_2 : $tx_2 = t_{DP} + d(C) = 0 + 5 = 5$

L'étape x_3 : $tx_3 = \text{Max}(tx_1 + d(U_0), tx_2 + d(A)) = \text{Max}(7 + 0, 5 + 2) = \text{Max}(7, 7) = 7$

L'étape x_4 : $tx_4 = tx_1 + d(D) = 7 + 3 = 10$

L'étape FP : $t_{FP} = \text{Max}(tx_4 + d(F), tx_3 + d(E)) = \text{Max}(10 + 2, 7 + 6) = 13$

Les dates au plus tard :

$$\text{L'étape FP : } t_{FP} = t_{FP} = 13$$

$$\text{L'étape } x_4: tx_4 = t_{FP} - d(F) = 13 - 2 = 11$$

$$\text{L'étape } x_3: tx_3 = t_{FP} - d(E) = 13 - 6 = 7$$

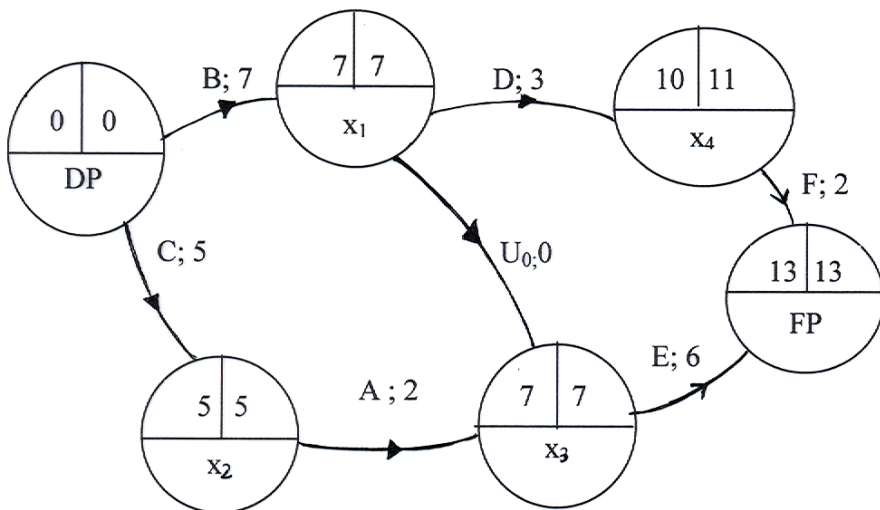
$$\text{L'étape } x_2: tx_2 = tx_3 - d(A) = 7 - 2 = 5$$

$$\begin{aligned}\text{L'étape } x_1: tx_1 &= \text{Min}(tx_3 - d(U_0), tx_4 - d(D)) \\ &= \text{Min}(7 - 0, 11 - 3) = \text{Min}(7, 8) = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{L'étape DP : } t_{DP} &= \text{Min}(tx_1 - d(B), tx_2 - d(C)) \\ &= \text{Min}(7 - 7, 5 - 5) = \text{Min}(0, 0) = 0\end{aligned}$$

On résume ces calculs dans le tableau suivant :

Etape	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marges
DP	0	0	$0 - 0 = 0$
x_1	7	7	$7 - 7 = 0$
x_2	5	5	$5 - 5 = 0$
x_3	7	7	$7 - 7 = 0$
x_4	10	11	$11 - 10 = 1$
FP	13	13	$13 - 13 = 0$



Il existe donc deux chemins critiques :

1- DP, x₁, x₃, FP

2- DP, x₂, x₃, FP

EXERCICE N°3 :

1- Détermination des tâches immédiatement antérieures à chaque tâche :

D'après le tableau :

Les tâches C, D et E n'ont pas de tâches antérieures, leur suppression du tableau permet d'obtenir le tableau suivant :

Tâches	Tâches antérieures
A	/
B	J
F	/
G	F
H	A
I	H, A, F, K
J	/
K	F

$$N_1 = \{C, D, E\}, N_2 = \{A, F, J\}$$

En supprimant les tâches A, F, et J de ce tableau, on obtient le tableau suivant :

Tâches	Tâches antérieures
B	/
G	/
H	/
I	H, K
K	/

$$D'où N_3 = \{B, G, H, K\}.$$

La suppression des tâches B, G, H et K du tableau permet d'obtenir le dernier niveau $N_4 = \{I\}$

Les niveaux sont les suivants :

$$N_1 = \{C, D, E\}$$

$$N_2 = \{A, F, J\}$$

$$N_3 = \{B, G, H, K\}$$

$$N_4 = \{I\}$$

A partir de cette détermination de niveau, on détermine les tâches immédiatement antérieures à chaque tâche.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
T. antérieures	E	J	/	/	/	D	F	A,C,D	H,K	E	F

- G nécessite F et D mais la tâche F elle-même nécessite D, d'où G nécessite F seulement.

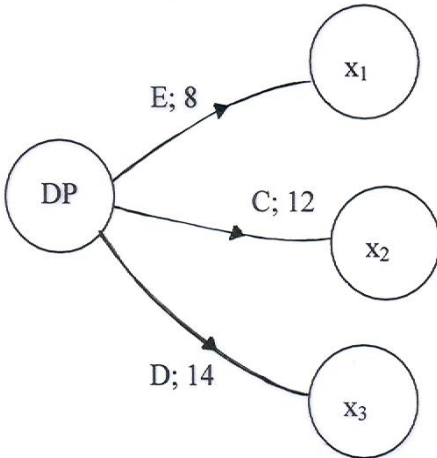
- H nécessite A, C et D, ces 3 tâches ne sont pas liées entre elles, on ne peut pas simplifier

- I nécessite H, A, C, E, K, D, F : Mais la tâche H nécessite A, C et D et A elle-même nécessite E, on peut déduire que la tâche I nécessite seulement H, K et F, mais K nécessite F, d'où I nécessite seulement H et K.

- K nécessite F et D ; mais F nécessite D d'où K nécessite seulement la tâche F.

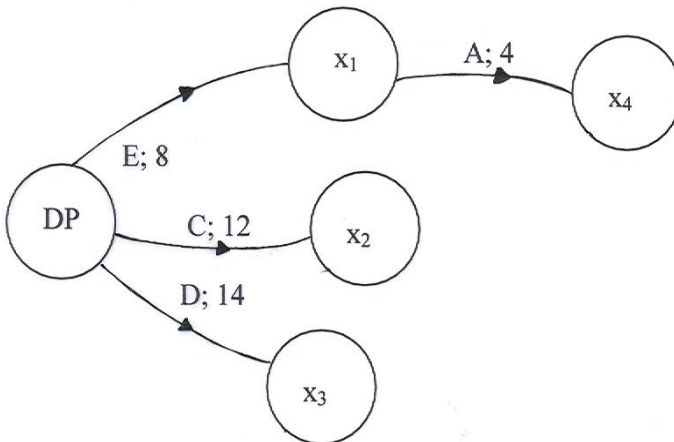
2- La représentation graphique par la méthode Pert :

Les tâches C, D et E ne nécessitent aucune autre tâche, elles coïncident avec le début du projet DP :



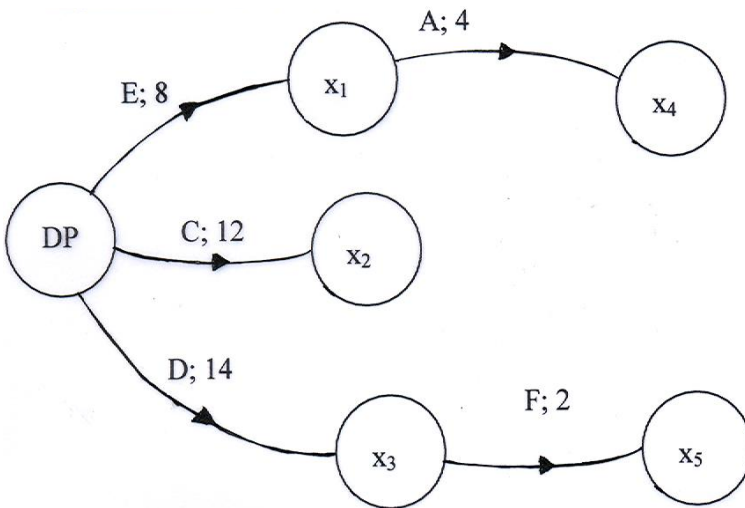
La tâche A nécessite E :

Représentation graphique :



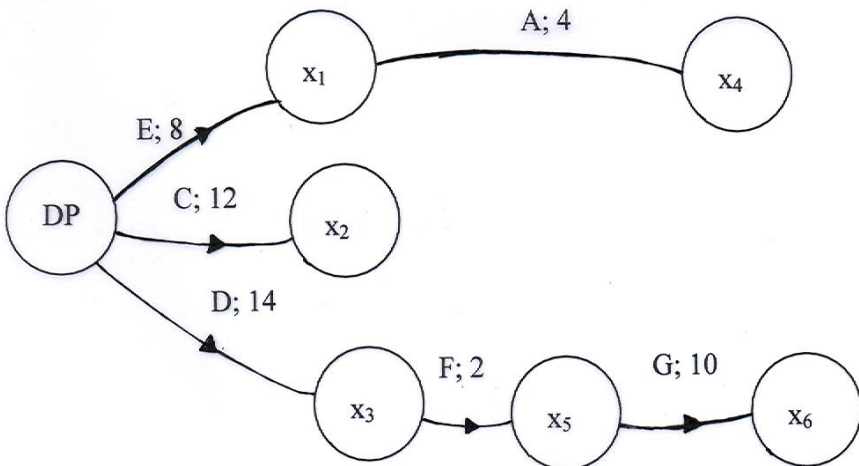
La tâche F nécessite D :

Représentation graphique :



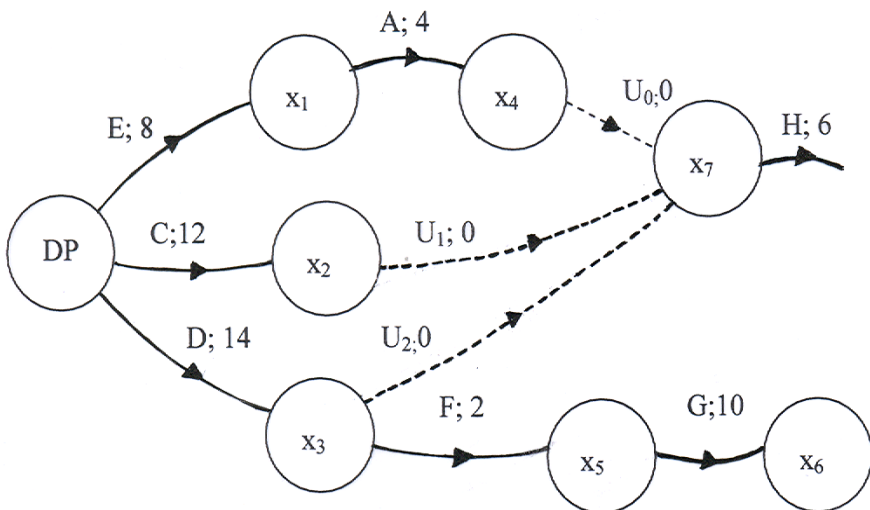
La tâche G nécessite F :

Représentation graphique :

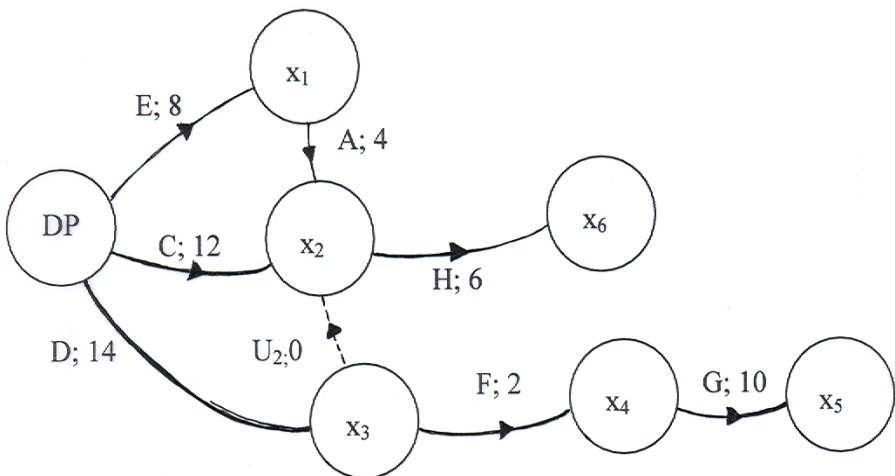


La tâche H nécessite A, C, et D :

Représentation graphique :

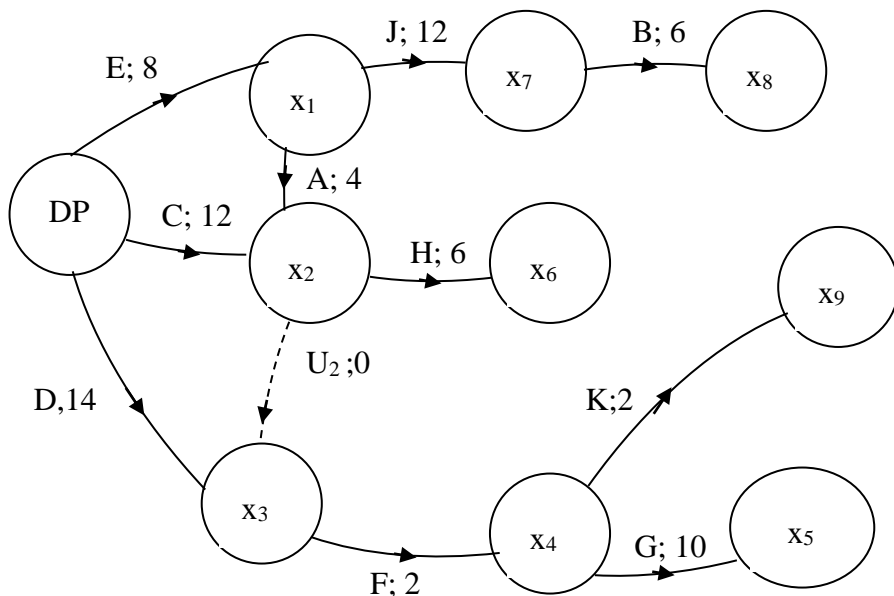


Les tâches U0, U1 et U2 sont des tâches fictives de durées nulles ; seules U0 et U1 peuvent être supprimées, ce qui permettra d'obtenir la représentation simplifiée suivante :



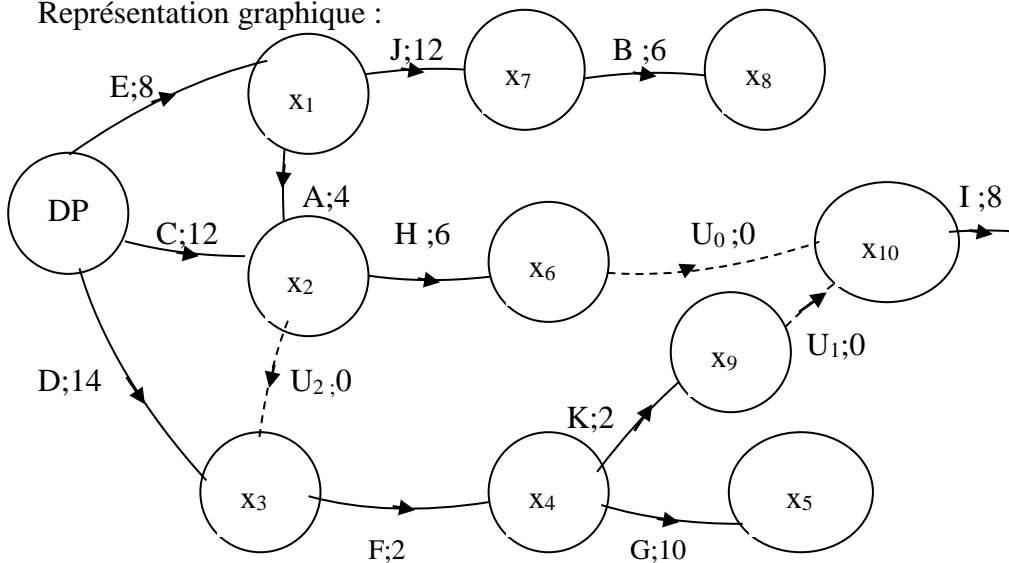
La tâche J nécessite E et la tâche K nécessite F et B nécessite J

Représentation graphique :

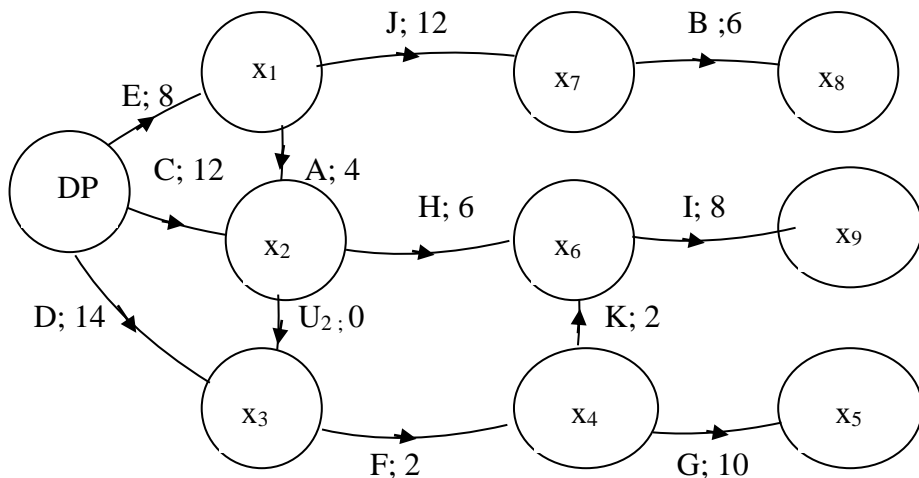


Enfin la tâche I nécessite H et K :

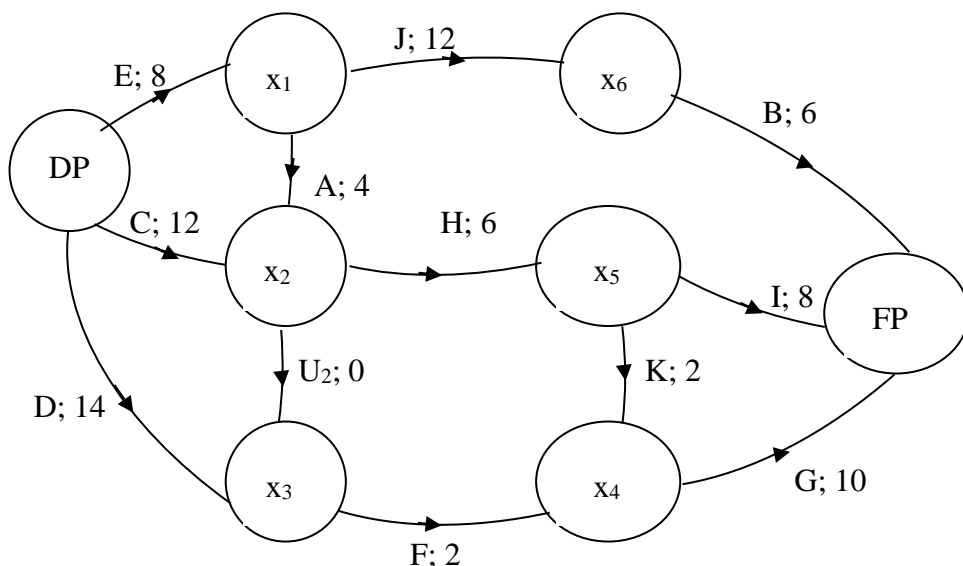
Représentation graphique :



Les tâches U_0 et U_1 sont des tâches fictives qui peuvent être supprimées, ce qui permet d'obtenir la représentation simplifiée suivante :



Les tâches B,G et I ne sont nécessaires à aucune autre tâche, elles doivent toutes les trois coïncider avec la fin du projet FP ; pour cela on doit renuméroter les sommets :



3 – Calcul des dates au plus tôt :

$t_{DP} = 0$ par définition

L'étape x_1 : $tx_1 = t_{DP} + d(E) = 0 + 8 = 8$

L'étape x_2 : $tx_2 = t_{DP} + d(C) = 0 + 12 = 12$

L'étape x_3 : $tx_3 = t_{DP} + d(D) = 0 + 14 = 14$

L'étape x_4 : $tx_4 = tx_3 + d(F) = 14 + 2 = 16$

L'étape x_5 : $tx_5 = \text{Max}(tx_2 + d(H), tx_4 + d(K))$
 $= \text{Max}(12 + 6, 16 + 2) = \text{Max}(18, 18) = 18$

L'étape x_6 : $tx_6 = tx_1 + d(J) = 8 + 12 = 20$

L'étape FP : $t_{FP} = \text{Max}(tx_4 + d(G), tx_5 + d(I), tx_6 + d(B))$
 $= \text{Max}(16 + 10, 18 + 8, 20 + 6) = \text{Max}(26, 26, 26) = 26$

Calcul des dates au plus tard :

L'étape FP : $T_{FP} = T_{FP} = 26$

L'étape x_6 : $T_{x_6} = T_{FP} - d(B) = 26 - 6 = 20$

L'étape x_5 : $T_{x_5} = T_{FP} - d(I) = 26 - 8 = 18$

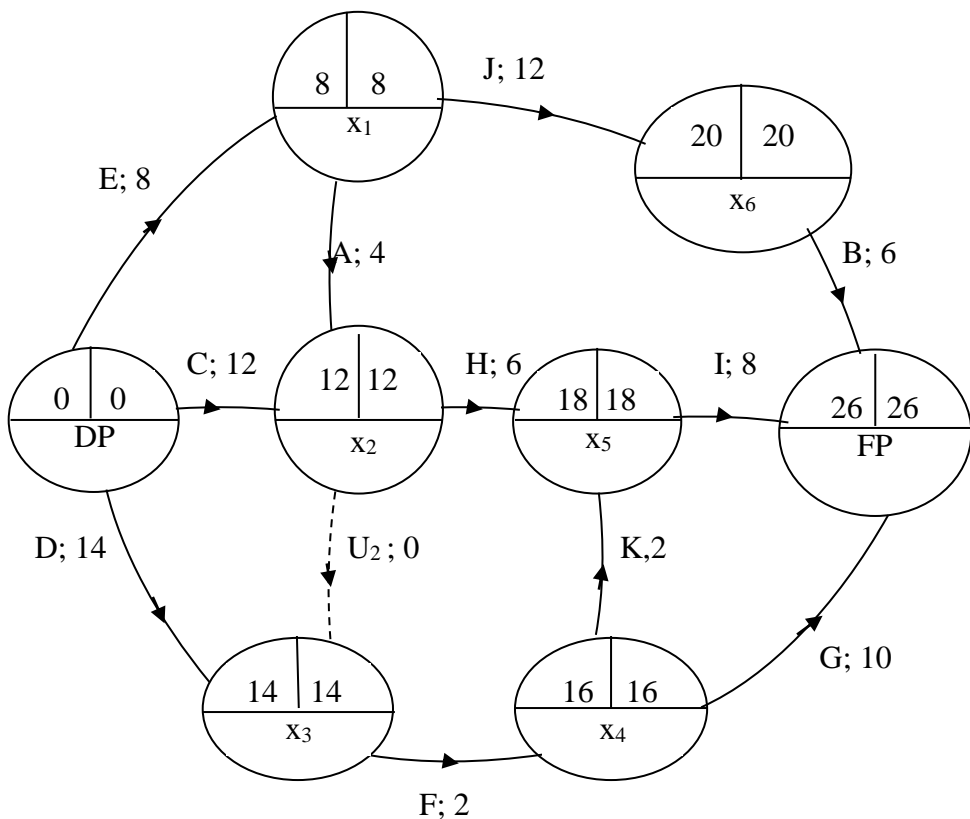
L'étape x_4 : $T_{x_4} = T_{FP} - d(G) = 26 - 10 = 16$

L'étape x_3 : $T_{x_3} = T_{x_4} - d(F) = 16 - 2 = 14$

L'étape x_2 : $T_{x_2} = \text{Min}(T_{x_5} - d(H), T_{x_3} - d(U_2))$
 $= \text{Min}(18 - 6; 14 - 0) = \text{Min}(12, 14) = 12$

L'étape x_1 : $T_{x_1} = \text{Min}(T_{x_2} - d(A), T_{x_6} - d(J))$
 $= \text{Min}(12 - 4, 20 - 12) = \text{Min}(8, 8) = 8$

L'étape DP : $T_{DP} = \text{Min}(T_{x_1} - d(E), T_{x_2} - d(C), T_{x_3} - d(D))$
 $= \text{Min}(8 - 8, 12 - 12, 14 - 14) = 0$



On remarque que, pour chaque étape les dates au plus tôt et au plus tard sont égales, toutes les étapes sont critiques ; il existe plusieurs chemins critiques :

- 1) DP, E, J, B, FP
- 2) DP, C, H, I, FP
- 3) DP, D, F, G, FP
- 4) DP, E, A, H, I, FP
- 5) DP, D, F, K, I, FP

4- Le temps minimum nécessaire par le lancement est : 26 semaines

5- Calcul des marges totales :

Etape	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marges totales
DP	0	0	0
x ₁	8	8	0
x ₂	12	12	0
x ₃	14	14	0
x ₄	16	16	0
x ₅	18	18	0
x ₆	20	20	0
FP	26	26	0