COURS DE RECHERCHE OPERATIONNEL

SÉRIE N° 02

PROGRAMMATION LINEAIRE : LA METHODE DU SIMPLEXE

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE : À la fin de cette série, le stagiaire doit être capable d'écrire un programme linéaire sous forme canonique, sous forme standard et de résoudre un programme de maximisation par la méthode algébrique et la méthode du simplexe.

PLAN DE LA LEÇON :

INTRODUCTION

I - NOTATION GENERALE D'UN PROGRAMME LINÉAIRE

II - FORMES CANONIQUE ET STANDARD D'UN PROGRAMME LINEAIRE

1-Notion de forme canonique.
2-Forme standard
3-Introduction de variables d'écart et de variables artificielles.

INTRODUCTION :

Les problèmes de la programmation linéaire se posent lorsque l'on cherche à rendre optimum (minimum ou maximum) une fonction linéaire[1] de plusieurs variables, ces variables étant assujetties à des contraintes linéaires, c'est-à-dire, du premier degré. Soulignons, à ce propos qu'une contrainte est linéaire, lorsqu'elle s'exprime par une égalité ou inégalité dont le premier membre est une combinaison linéaire ou forme linéaire des variables et le second un nombre réel.

Afin d'étudier le programme linéaire, vous devez avoir des notions sur la résultions du système d'équation linéaire par la méthode de substitution.

I - NOTATION GENERALE D'UN PROGRAMME LINEAIRE :

Soient les deux programmes linéaires suivants :

1- Trouver $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_i \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ tels que :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1i}x_i + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2i}x_i + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mi}x_i + \ldots. + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Et rendant **:**

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots.. + c_ix_i + \ldots\ldots + c_nx_n \quad \text{Maximum.}$$

Remarque : On appellera $b_1, b_2, \ldots\ldots b_m$, le second membre

2- Trouver $x_1 \geq 0\,; x_2 \geq 0\,; \ldots\ldots x_i \geq 0\,; \ldots\ldots\ldots\ldots x_n \geq 0$ tels que **:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{1i}x_i + \ldots.. + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2i}x_i + \ldots. + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mi}x_i + \ldots. + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

[1] On a appelé cette fonction, la fonction économique.

Et rendant :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + a_ix_i + ... + c_nx_n \quad \text{Minimum}$$

En utilisant les notations matricielles, on peut abréger l'écriture de ces programmes linéaires :

$$\text{Programme N° 1} \quad \begin{cases} \text{Trouver} \quad x \geq 0 \\ AX \leq B \\ \text{Max} \quad CX \end{cases}$$

$$\text{Programme N° 2} \quad \begin{cases} \text{Trouver} \quad x \geq 0 \\ AX \geq B \\ \text{Min} \quad CX \end{cases}$$

Où

$$A = \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12}.......a_{1i}.......a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}......a_{2i}........a_{2n} \\ . \quad . & . \quad\quad . \\ . \quad . & . \quad\quad . \\ . \quad . & . \quad\quad . \\ . \quad . & . \quad\quad . \\ a_{m1} & a_{m2} \quad a_{mi}........a_{mn} \end{matrix}} \qquad B = \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{matrix}} \qquad X = \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{matrix}}$$

$$C = \boxed{c_1, \; c_2................, \; c_n}$$

Tout programme linéaire est donc formé de 3 grandes parties notamment :

a - D'inconnues appelées «variables non-négatives » :

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0.........x_n \geq 0$ Dans le 1er et le 2ème programme.

b - D'équations ou inéquations au nombre de m : tenant lieu de contraintes et que doient vérifier les n variables, chacune des équations ou inéquations étant une combinaison linéaire du 1er degré par rapport aux variables non négatives.

Exemple : $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 & \geq 2 \\ x_1 + 6x_2 & \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 & = -7 \end{cases}$

c - D'une « fonction économique » à maximiser ou à minimiser ; $\left(Ex : c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_ix_i + ...c_nx_n = Z\right)$ dans laquelle les coefficients C_i peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

De façon générale, la programmation linéaire a pour but la recherche de l'optimum d'une fonction linéaire (fonction économique) comportant plusieurs inconnues positives ou nulles liées, entre elles, par des relations linéaires indépendantes et formant un système d'équations et inéquations appelées contraintes.

II - FORMES CANONIQUE ET STANDARD D'UN PROGRAMME LINEAIRE :

L'objectif de ce paragraphe est de définir les formes d'un programme linéaire, ces dernières seront utiles pour introduire une autre méthode (dite du simplexe) pour la résolution d'un programme linéaire.

1- Notion de forme canonique :

Lorsque l'ensemble de contraintes se présente sous forme d'inégalités $(\leq, \text{ou} \geq)$ ou parle de forme canonique.

Toutefois, il convient de distinguer un programme canonique de type I d'un programme canonique de type **II.**

a - Un programme canonique de type I :

Est un programme dans lequel les contraintes inégalités sont tournées dans le sens « inférieur ou égal », l'objectif recherché étant la maximisation de la fonction économique.

b - Un programme canonique de type II :

A des contraintes inégalités tournées dans le sens « supérieur ou égal » l'objectif est un minimum.

Exemples :

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + \quad + 7x_3 \quad \leq 10 \\ x_1 \quad + \qquad\quad + 3x_3 \quad \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + \quad + 15x_3 \quad \leq 25 \\ \text{Max}(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

* Forme canonique de type I

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 10 \\ x_1 \quad - \quad + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ \text{Min}\,(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

* Forme canonique de type II

c- Notion de forme mixte :

Parfois, les contraintes sont tournées les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé, l'objectif pouvant être soit un maximum soit un minimum. Mais on peut également avoir un mélange d'égalité (=) ou d'inégalités $(\geq \text{ ou } \leq)$. Un tel programme est un programme mixte. On dit aussi qu'il se présente sous forme mixte.

Exemples de formes mixtes ou de programmes mixtes :

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,, x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \;\geq 10 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 \;\leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ \text{Max}\,(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \; = 10 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 \;\; = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ \text{Min}(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,, x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \;\leq 10 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 \;\; = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ \text{Max}\,(2x_1 + 9x_2 + x_3) \end{array}$$

2- Forme standard :

Dans un programme écrit sous forme standard, toutes les contraintes représentent des égalités. L'objectif pouvant être le maximum ou le minimum.

Exemples :

$$\begin{array}{|l|}\hline x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,, x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 10 \\ x_1 \qquad\qquad + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 = 25 \\ \text{Max } (2x_1 + 9x_2 + x_3) \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|l|}\hline x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,, x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 10 \\ x_1 \qquad\qquad + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 = 25 \\ \text{Min } (2x_1 + 9x_2 + x_3) \\ \hline \end{array}$$

La forme canonique s'avère plus pratique dans le cadre de la résolution par la méthode graphique. Quant à la forme standard, elle n'apparaît intéressante que dans les méthodes matricielles et plus particulièrement dans la méthode du simplexe que G.B Dantzig développa à partir de 1948, et qui demeure encore la méthode la plus efficace.

Soulignons enfin que dans la méthode du simplexe, tous programme se présentant sous forme canonique, doit être ramené sous la forme standard avec introduction de variables d'écart ou artificielles selon le cas et selon des règles bien précises, ainsi que nous le verrons par la suite.

3- Introduction de variables d'écart et de variables artificielles (dans la méthode du simplexe) :

Le problème de l'introduction de variables d'écart et de variables artificielles ne peut se poser que lors du passage de la forme canonique à la forme standard et dans le cadre de la méthode du simplexe. Les exemples suivants permettront certainement de cerner tous les aspects du problème. Nous appellerons VR = variables réelles ; VE = variables d'écart ; VA = variables artificielles.

Forme Canonique			Forme Standard Correspondante
N°1	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 240 \\ 10x_1 + 25x_2 \leq 500 \\ 15x_1 + 40x_2 \leq 550 \end{cases}$ $\mathrm{Max}(150x_1 + 200x_2)$	**N°1**	$\underbrace{x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \quad \underbrace{x_3 \geq 0 \;\; x_4 \geq 0 \; x_5 \geq 0}_{\text{V.E}}$ $20x_1 + 30x_2 + x_3 = 240$ $10x_1 + 25x_2 + x_4 = 500$ $15x_1 + 40x_2 + x_5 = 550$ $\mathrm{Max}(150x_1 + 200x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5)$
N°2	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$ $\mathrm{Max}(10x_1 + 20x_2)$	**N°2**	$\underbrace{x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \quad \underbrace{x_3 \geq 0 \; x_4 \geq 0 x_5 \geq 0}_{\text{V.E}} \quad \underbrace{x_6 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $5x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$ $2x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$ $x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 4$ $\mathrm{Max}(10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6)$

N°3	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 & \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 & = 12 \end{cases}$ $\text{Max}\ (5x_1 + 10x_2)$	**N°3**	$\underbrace{x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0}_{\text{V.R}}\ \underbrace{x_3 \geq 0}_{\text{V.E}}\ \underbrace{x_4 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 & = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = 12 \end{cases}$ $\text{Max}(5x_1 + 10x_2 + 0x_3 - Mx_4)$
N°4	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 & \geq 24 \\ 8x_1 + 2x_2 & = 16 \end{cases}$ $\text{Max}(10x_1 + 8x_2)$	**N°4**	$\underbrace{x_1 \geq 0\ \ x_2 \geq 0}_{\text{V.R}}\ \underbrace{x_3 \geq 0}_{\text{V.E}}\ \underbrace{x_4 \geq 0\ x_5 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 & = 24 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_5 & = 16 \end{cases}$ $\text{Max}(10x_1 + 8x_2 + 0x_3 - Mx_4 - Mx_5)$

N°5	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$ $\text{Max}\,(20x_1 + 15x_2)$	**N°5**	$\underbrace{x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0}_{\text{V.R}}\ \underbrace{x_3 \geq 0\ x_4 \geq 0\ x_5 \geq 0}_{\text{V.E}}\ \underbrace{x_6 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 14 \\ 8x_1 + 16x_2 + x_4 = 16 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_6 = 10 \end{cases}$ $\text{Max}(20x_1 + 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6)$
N°6	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$ $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 50 \\ 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 40 \\ 3x_1 + 15x_2 + 5_{X3} = 50 \end{cases}$ $\text{Max}\,(10x_1 + 20x_2 + 30x_3)$	**N°6**	$\underbrace{x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0\ x_3 \geq 0}_{\text{V.R}}\ \underbrace{x_4 \geq 0\ x_5 \geq 0\ x_6 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 = 50 \\ 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_5 = 40 \\ 3x_1 + 15x_2 + 5x_3 + x_6 = 50 \end{cases}$ $\text{Max}(10x_1 + 20x_2 + 30x_3 - Mx_4 + Mx_5 - Mx_6)$

N°7	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 & \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 & \geq 14 \end{cases}$ $\text{Min}\,(3x_1 + 10x_2)$	**N°7**	$\underbrace{x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \; \underbrace{x_3 \geq 0 \; x_4 \geq 0}_{\text{V.E}} \; \underbrace{x_5 \geq 0 \; x_6 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_4 + x_6 = 14 \end{cases}$ $\text{Min}\,(3x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6)$
N°8	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 & \geq 21 \\ 5x_1 + 12x_2 & \leq 13 \end{cases}$ $\text{Min}(x_1 + 3x_2)$	**N°8**	$\underbrace{x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0}_{\text{V.R}} \; \underbrace{x_3 \geq 0 \; x_4 \geq 0}_{\text{V.E}} \; \underbrace{x_5 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 - x_3 + x_5 = 21 \\ 5x_1 + 12x_2 + x_4 = 13 \end{cases}$ $\text{Min}\,(x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5)$

N°9	$x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0\ \ x_3 \geq 0$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 100 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = -20 \end{cases}$ $\text{Max}\ (9x_1 + 2x_2 + 4x_3)$	**N°9**	$\underbrace{x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0\ x_3 \geq 0}_{\text{V.R}}\ \underbrace{x_4 \geq 0\ x_5 \geq 0}_{\text{V.E}}\ \underbrace{x_6 \geq 0\ x_7 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 - x_4 + x_6 = 100 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 50 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_7 = -20 \end{cases}$ $\text{Max}\ (9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7)$
N°10	$x_1 \geq$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 3 \end{cases}$ $\text{Min}\ (10x_1 + x_2)$	**N°10**	$\underbrace{x_1 \geq 0 x_2 \geq 0}_{\text{V.R}}\ \underbrace{x_3 \geq 0\ x_4 \geq 0 x_5 \geq 0}_{\text{V.E}}\ \underbrace{x_6 \geq 0\, x_7 \geq 0\, x_8 \geq 0}_{\text{V.A}}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_5 + x_8 = 3 \end{cases}$ $\text{Min}\ (10\, x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 + Mx_8)$

- On voit à travers ces exemples que les variables artificielles interviennent exclusivement dans les contraintes égalités (=) ou inégalités tournées dans le sens « supérieur ou égal à », le second membre étant positif et l'objectif pouvant être le maximum ou le minimum.

- Si l'objectif est un minimum, les variables artificielles sont accompagnées d'un coefficient positif M, dans la fonction économique. Si par contre il s'agit d'une maximisation, les variables artificielles devront être accompagnées dans la fonction économique, d'un coefficient négatif que l'on convient de noter –M avec $M \rangle 0$.

- D'autre part, toutes les contraintes de la forme :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq q_1$$

Deviennent des équations dans la forme standard et exigent l'introduction de variables d'écart affectées d'un (+1), que l'objectif soit un minimum ou un maximum. Dans la fonction économique ces variables d'écart seront accompagnées d'un coefficient nul quelque soit l'objectif. Car elles représentent des écarts ou marges ou encore des bénéfices unitaires de productions fictives (dans le cadre de la fabrication par exemple). Soulignons enfin que les contraintes du type (≤) n'exigent que la présence de variables d'écart et jamais de variables artificielles et ceci indépendamment de l'objectif envisagé.

Par contre, les contraintes de la forme : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n \geq q_1$

Requièrent la présence de variables d'écart et de variables artificielles. Les variables d'écart sont affectées d'un (-1) et les variables artificielles d'un (+1) quelque soit l'objectif.

Mais dans la fonction économique on aura un coefficient nul pour la variables d'écart et (-M) pour la variable artificielle si l'objectif est un maximum ; et dans le cas contraire, la variable d'écart sera toujours affectée d'un coefficient nul dans la fonction économique tandis que la variable artificielle est affectée d'un (+M).

Terminons en soulignant que les contraintes de type (=) n'admettent point de variables d'écart mais seulement de variables artificielles affectées du signe correspondant à celui du second membre. Dans la fonction économique, on agit exactement comme dans le cadre des inéquations sus-énoncées.

III -METHODES DE RESOLUTION DE MAXIMISATION :

1- Méthode algébrique de substitution :

1.1- Principe de la méthode :

Étape 1 :

Dresser la forme canonique du problème posé.

Étape 2 :

Passer de la forme canonique à la forme standard en transformant les inéquations en équations et en introduisant les variables d'écart ou artificielles selon le cas.

Étape 3 :

Poser la solution extrême de base en utilisant d'abord les variables réelles comme variables non principales (qu'on appellera variables hors base ou variables nulles).

Les autres variables non nulles obtenues, constituant les variables principales ou variables dans la base. A ce stade la fonction économique est nulle.

Étape 4 :

Passer à la 1ère itération (répétition) afin de trouver une solution de base meilleure, c'est-à-dire améliorer la valeur de la fonction économique.

Pour y parvenir on sélectionnera une variable entrante et une variable sortante selon les critères de Dantzig suivants :

a - Critère d'entrée :

La variable entrante est une variable hors base qui dans la fonction économique présente le coefficient positif le plus élevé.

b - Critère de sortie :

La variable sortante est une variable dans la base, qui correspond au plus petit rapport positif des seconds membres des contraintes aux coefficients de la variable entrante (l'infini et les nombres négatifs étant exclus).

Étape 5 : On arrête les différentes itérations dés que la fonction économique ne contient plus que des coefficients négatifs ou nuls.

1.1- Exemple :

Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de la méthode de substitution :

$$S_1 \quad \boxed{\begin{array}{ll} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 & \\ 2x_1 + x_2 & \leq 140 \\ x_1 + x_2 & \leq 104 \\ 5x_1 + 3x_2 & \leq 360 \\ \mathrm{Max}(7x_1 + 4x_2) & \end{array}}$$

Le programme linéaire (S_1) est déjà sous forme canonique, pour avoir la forme standard, il s'agit seulement d'ajouter des variables d'écart $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$

$$S_2 \quad \boxed{\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 \;\; x_3 \geq 0 \;\; x_4 \geq 0 \;\; x_5 \geq 0 \\ \left\{\begin{array}{lllll} 2x_1 + x_2 & + x_3 & & & = 140 \\ x_1 + x_2 & & + x_4 & & = 104 \\ 5x_1 + 3x_2 & & & + x_5 & = 360 \end{array}\right. \\ \mathrm{Max}(7x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5) \end{array}}$$

– **Recherche de la solution de base :**

En utilisant l'énoncé de l'étape 3 ; la première solution de base (qu'on a appelé solution extrême), les variables réelles (sont appelées hors base ou non principales ou nulles). Ici on a : $x_1 = 0 ; x_2 = 0$

Les autres variables non nulles, sont les variables dans la base ; on déduit leurs valeurs en remplaçant dans (S_2).

De la 1ère équation : $x_3 = 140$
De la 2ème équation : $x_4 = 104$
De la 3ème équation : $x_5 = 360$

A ce stade, la fonction économique est nulle

La solution extrême de base est :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{HB} : & x_1 = 0 \text{ , } x_2 = 0 \\ \text{B} & x_3 = 140 \\ & x_4 = 104 \\ & x_5 = 360 \\ & Z = 0 \end{array}}$$

1ère Itération :

C'est l'étape 4, le but est de trouver une solution de base meilleure c'est-à-dire améliorer la fonction économique.

Pour choisir la variable entrante ; c'est l'une des variables hors base qui a le coefficient positif le plus grand dans la fonction économique ; dans notre exemple : c'est x_1.

Si x_1 entre dans la base ; elle ne sera plus nulle, quelle est la valeur à affecter à x_1 :

À partir des équations (S_2) ; on peut obtenir le système (S_3)

$$(S_3)\begin{cases} \boxed{x_3 = 140 - 2x_1 - x_2} \quad \text{Équation d'échange} \\ x_4 = 104 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 360 - 5x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Or $x_2 = 0$ car elle est hors de la base, d'où :

$$(S_4)\begin{cases} x_3 = 140 - 2x_1 \\ x_4 = 104 - x_1 \\ x_5 = 360 - 5x_1 \end{cases}$$

$$\text{Or} \quad \begin{cases} x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 140 - 2x_1 \geq 0 \quad \text{soit } x_1 \leq 70 \\ x_4 \geq 0 \Leftrightarrow 104 - x_1 \geq 0 \quad \text{soit } x_1 \leq 104 \\ x_5 \geq 0 \Leftrightarrow 360 - 5x_1 \geq 0 \quad \text{soit } x_1 \leq 72 \end{cases}$$

Le niveau maximum à affecter à x_1 est : $x_1 = \text{Min}\{70, 104, 72\} = 70$.
On affecte donc la valeur 70 à x_1; et on cherche la variable sortante.
Ce sera celle qui s'annulera après substitution de x_1 par 70.

$$\begin{cases} x_3 = 140 - 2.70 = 0 \\ x_4 = 104 - 70 = 34 \\ x_5 = 360 - 5.70 = 10 \end{cases}$$

La variable sortante est donc x_3

La nouvelle solution obtenue à partir de cette 1ère itération est :

HB	$x_2 = 0$	; $x_3 = 0$
B	$x_1 = 70$	
	$x_5 = 10$	
	$x_4 = 34$	
$Z = 7.70 + 4.0 = 490$		

$2^{ème}$ Itération :

Dans (S_3) l'équation d'échange est celle qui fournit la variable sortante, soit :

$$x_3 = 140 - 2x_1 - x_2$$

Dans cette équation, on exprime la variable entrante à l'aide de variables hors base x_2 et x_3 soit :

$$x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2$$

On remplace ensuite cette nouvelle expression de x_1 dans les différentes équations de (S_3) ce qui donne :

$$\begin{cases} x_4 = 104 - \left(70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2\right) - x_2 \\ x_5 = 360 - 5\left(70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2\right) - 3x_2 \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 34 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_5 = 10 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$Z = 7\left(70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2\right) + 4x_2$$

$$Z = 490 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2$$

On obtient donc le système :

$$(S_5)\begin{cases} x_4 = 34 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ \boxed{x_5 = 10 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2} \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ Z = 490 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Equation d'échange

La variable entrante sera donc x_2 car elle possède le coefficient positif le plus élevé dans la fonction économique.

Niveau à affecter à x_2 (tout en maintenant $x_3 = 0$, car elle reste hors base).

$$(S_6)\begin{cases} x_4 = 34 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_5 = 10 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_2 \\ Z = 490 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Or

$$x_4 \geq 0 \Leftrightarrow 34 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 68$$

$$x_5 \geq 0 \Leftrightarrow 10 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0 \Leftrightarrow 70 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 140$$

$x_2 = \text{Min}\{68,20,140\} = 20$; La plus grande valeur qu'on peut affecter à x_2 est la petite des valeurs $\{68, 20, 140\}$ donc $x_2 = 20$.

Détermination de la variable sortante :

$$(S_7)\begin{cases} x_4 = 34 - \dfrac{1}{2}20 = 24 \\ x_5 = 10 - \dfrac{1}{2}20 = 0 \\ x_1 = 70 - \dfrac{1}{2}20 = 60 \\ Z = 490 + 10 = 500 \end{cases}$$

La variable sortante est donc x_5

Solution de la 2

HB	$x_3 = 0, x_5 = 0$
B	$x_1 = 60$
	$x_2 = 20$
	$x_4 = 24$
	$Z = 500$

L'équation d'échange est celle qui fournit la variable sortante, c'est :

$$x_5 = 10 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2$$

On utilise cette équation pour exprimer x_2 en fonction des nouvelles variables hors base :

$$x_2 = 20 - 2x_5 + 5x_3$$

On substitue cette expression dans (S_7) :

$$\begin{cases} x_2 = -2x_5 + 20 + 5x_3 \\ x_4 = 34 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}(-2x_5 + 20 + 5x_3) \\ x_1 = 70 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}(-2x_5 + 20 + 5x_3) \\ Z = 490 - 7/2\, x_3 + \frac{1}{2}(-2x_5 + 20 + 5x_3) \end{cases}$$

$$(S_8): \begin{cases} x_2 = -2x_5 + 20 + 5x_3 \\ x_4 = 24 - 2x_3 + x_5 \\ x_1 = 60 - 3x_3 + x_5 \\ Z = 500 - x_3 - x_5 \end{cases}$$

La fonction économique n'est plus composée que de coefficients négatifs. Il n'est donc plus possible d'améliorer ni d'augmenter cette fonction économique. La solution précédente est donc optimale.

HB	:	$x_3 = 0$, $x_5 = 0$
B		$x_1 = 60$
		$x_2 = 20$
		$x_4 = 24$
Z		$= 500$

2- Présentation pratique (Méthode du simplexe) :

Elle a le principe de la méthode précédente, mais a l'avantage d'organiser tous les systèmes d'équations sous forme de tableaux.

2.1- Principe de la méthode :

1- Obtenir la forme canonique.

2- Obtenir la forme standard.

3- Tableau n° 0 : Recherche de la solution extrême de base :

Les variables d'écart sont considérées au départ comme variables principales ou variable dans la base.

Les variables réelles sont non principales et se trouvent hors de la base. La fonction économique est alors nulle. Avec le tableau N° 0, on prépare le tableau N° 1 en choisissant respectivement la variable entrante, la variable sortante et le pivot :

- La variable entrante correspond au coefficient le plus élevé dans la fonction économique. La colonne de la variable entrante prend alors le nom de colonne pivot.
- La variable sortante correspondra au plus petit rapport positif issu de la division de la colonne second membre (les b_i) par la colonne variable entrante. Cette variable sortante de la base et sur la même ligne que le plus petit rapport positif. La ligne de la variable sortante prend le nom de ligne pivot.
- Le pivot se trouvera à l'intersection de la ligne pivot et de la colonne pivot.

Il s'agira ensuite de rendre la colonne pivot unitaire : c'est à dire, arriver à un pivot égal à 1 et tous les autres éléments de la même colonne pivot égaux à zéro jusqu'à la fonction économique (dernière ligne du tableau). Chaque itération s'arrête dés que la colonne pivot est devenue totalement unitaire.

4- On construit les différents tableaux jusqu'à ce que la fonction économique ne contienne plus que des nombres négatifs ou nulles ; cas où il n'est plus possible d'améliorer la fonction économique.

Remarque :

Le pivot ne peut jamais être égal à 0

2.2- Exemple :

Résoudre par, la méthode du simplexe, le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{l}
x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\
x_1 + 5x_2 \leq 11 \\
2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
\mathrm{Max}(3x_1 + 2x_2)
\end{array}
$$

Forme standard :

$$
\begin{array}{l}
x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \qquad x_4 \geq 0 \\
\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \end{cases} \\
\mathrm{Max}(3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4)
\end{array}
$$

Tableau n° 0 :

Variable sortante $= x_4$

	To	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Rapport
A	x_3	1	5	1	0	11	11/1
B	x_4	2	3	0	1	5	5 / 2 ►
C	-Z	3	2	0	0	0	

Variable sortante = x 4

Variable entrante dans la base x_1 : elle a le plus grand coefficient.

La solution extrême de base est :

Hors base : $x_1 = x_2 = 0$

Base : $x_3 = 11$, $x_4 = 5$

Z = 0

Remarques :

1- L'ordre dans lequel on écrit la liste des variables de la base (x_3, x_4) est important.
2- À l'intersection de la colonne pivot (=1) et de la ligne pivot (=2)

Se trouve la valeur 2 entourée, il s'agit du pivot.

Tableau n°1 : 1ère itération

Il s'agit de transformer le tableau N° 0, en un tableau équivalent (ce sera le tableau N° 1) de telle sorte que la colonne pivot devient unitaire :

1- Arriver à 1 pivot = 1, pour cela il suffit de diviser toute la ligne du pivot par 2 (valeur du pivot).

2- Tous les autres éléments de la même colonne pivot égaux à zéro, pour cela il suffit de trouver pour chaque cas la transformation nécessaire, en utilisant la ligne du pivot.

Pour notre exemple, trouvons les transformations nécessaires d'abord.

La ligne B devient

$$B' = B/2 \quad c'est: \quad 1 \quad 3/2 \quad 0 \quad 1/2 \quad | \quad 5/2$$

La ligne A :

$$\begin{array}{rccccc|c}
(-1)\times B' \rightarrow & -1 & -3/2 & 0 & -1/2 & & -5/2 \\
A \rightarrow & 1 & 5 & 1 & 0 & & 11 \\
\hline
A' \rightarrow & 0 & 7/2 & 1 & -1/2 & & 17/2
\end{array}$$

La ligne C :

$(-3)\times B' \rightarrow$	-3	$-9/2$	0	$-3/2$	$-15/2$
$C \rightarrow$	3	2	0	0	0
$C' \rightarrow$	0	$-5/2$	0	$-3/2$	$-15/2$

On obtient alors le tableau N° 1 :

	T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	b
A'	x_3	0	$7/2$	1	$-1/2$	$-17/2$
B'	x_1	1	$3/2$	0	$1/2$	$5/2$
C'	-Z	0	$-5/2$	0	$-3/2$	$-15/2$

Solution optimale :

HB : $x_2 = x_4 = 0$

B : $x_1 = 5/2$, $x_3 = 17/2$

$Z = 15/2$

2.3- Un autre exemple :

Résoudre par la méthode du simplexe le programme suivant :

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{Max}(2x_1 + 3x_2) = Z$$

Forme standard :

$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0}_{\text{Variables réelles}} \quad \underbrace{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0}_{\text{variables d'écart}}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 & = 3 \end{cases}$$

$$\text{Max } (2x_1 + 3x_2)$$

Tableau N° 0 :

	T_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b	rapport	
A	x_3	1	2	1	0	2	$2/2$	
B	x_4	1	$\boxed{4}$ Pivot	0	1	3	← $3/4$	Ligne pivot : x_4 Variable sortante.
C	-Z	2	3	0	0	0		

↑

Colonne pivot : x_2 variable entrante

La solution extrême de base est :

HB : $x_1 = 0 \quad , \quad 0 \quad x_2 = 0$

B : $x_3 = 2 , x_4 = 0$

Z = 0

Tableau N° 1 : $1^{ère}$ Itération

	T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	b	rapport	
A'	x_3	$\boxed{1/2}$ → Pivot	0	1	$-1/2$	$1/2$	$(1/2)/(1/2) = 1$	Ligne pivot : x_3 variable sortante
B'	x_2	$1/4$	1	0	$1/4$	$3/4$	$(3/4)/(1/4) = 3$	
C'	-Z	$5/4$	0	0	$-3/4$	$-9/4$		

↑ Colonne pivot : x_1 variable entrante

Explication :

(Comment a-t-on obtenu T_1)

$B \longleftarrow$	1	4	0	1	3
$B^1 = B/4 \leftarrow$	$1/4$	1	0	$1/4$	$3/4$

$B' \leftarrow$	$1/4$	1	0	$1/4$	$3/4$
$A \leftarrow$	1	2	1	0	2
$\underbrace{A' = A - 2B'}$ $\leftarrow$	$1/2$	0	1	$-1/2$	$-1/2$

→ C'est l'opération nécessaire pour obtenir la valeur 0 sur la colonne pivot

$$
\begin{array}{l|cccc|c}
B' \leftarrow & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\
C \leftarrow & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\underbrace{C' = C - 3B'}_{} \leftarrow & \frac{5}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4}
\end{array}
$$

C'est l'opération nécessaire pour obtenir la valeur 0 sur la colonne pivot.

La solution est :

$$
\boxed{\begin{array}{l}
HB: \ x_1 = x_4 = 0 \\
B: \ x_3 = \frac{1}{2} \ , \ x_2 = \frac{3}{4} \\
Z = \frac{9}{4}
\end{array}}
$$

Tableau N° 2 : $2^{\text{ème}}$ Itération

	T_2	x_1	x_2	x_3	x_4	b	rapport
A''	x_1	1	0	2	-1	1	Rapport négatif
B''	x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{1}{2}\right)=1$
C''	-Z	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{14}{4}$	

Ligne pivot : x_2 : variable sortante

Colonne pivot : x_4 variable entrante

Explication : (comment a-t-on obtenu T_2) :

$$
\begin{array}{l|cccc|c}
A' \leftarrow & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
\underbrace{A'' = A'.2}_{} \leftarrow & 1 & 0 & 2 & -1 & 1
\end{array}
$$

C'est l'opération nécessaire pour obtenir un 1

$$\begin{array}{lccccc|c}
A'' \leftarrow & 1 & 0 & 2 & -1 & & 1 \\
B' \leftarrow & 1/4 & 1 & 0 & 1/4 & & 3/4 \\
\hline
B'' = B' - 1/4\, A'' \leftarrow & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & & 1/2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc|c}
A'' \leftarrow & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\
C' \leftarrow & 5/4 & 0 & 0 & -3/4 & -9/4 \\
\hline
C'' = C' - 5/4\, A'' \leftarrow & 0 & 0 & -5/2 & 1/2 & -14/4
\end{array}$$

La solution est :

$$\boxed{\begin{array}{l}
HB :\ x_3 = x_4 = 0 \\
B :\quad x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 1/2 \\
Z = 14/4 = 7/2
\end{array}}$$

Tableau N° 3 : 3ème Itération

A'''	T_3	x_1	x_2	x_3	x_4	b
B'''	x_1	1	2	1	0	2
	x_4	0	2	-1	1	1
C'''	-Z	0	-1	-2	0	4

C'est le tableau optimal ; mais comment l'a-t-on obtenu ?

Explication :

$$\begin{array}{l|ccccc|c}
B'' \leftarrow & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\
\hline
B''' = 2.B'' \leftarrow & 0 & 2 & -1 & 1 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc|c}
B''' \leftarrow & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\
A'' \leftarrow & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\
\hline
A''' = A'' + B''' \leftarrow & 1 & 2 & 1 & 0 & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc|c}
B''' \leftarrow & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\
C'' \leftarrow & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{14}{4} \\
\hline
C''' = C'' - \frac{1}{2}B''' \leftarrow & 0 & -1 & -2 & 0 & -4
\end{array}$$

La solution optimale est :

$$\boxed{\begin{array}{l} HB:\ x_2 = x_3 = 0 \\ B:\ \ x_1 = 2 \quad , \quad x_4 = 1 \\ Z = \ 4 \end{array}}$$

Remarque :

Notons que les opérations nécessaires pour obtenir une colonne pivot unitaire sont toujours uniques ; dans le tableau précèdent :

- Pour obtenir 1 à la position du pivot, la seule opération (et nécessaire) et de multiplier toute la ligne du pivot par 2. Pour le reste des lignes $(\text{ie } A'' \text{ et } C'')$; l'opération aussi unique, pour chaque ligne, s'obtient par rapport à la ligne pivot B''' ; par exemple : $A''' = A'' + B''$ est la seule opération qui : permet d'obtenir un 0 sur la colonne pivot et utilise la nouvelle ligne pivot B''' .

CONCLUSION :

La modélisation d'un problème par un programme linéaire, permet de rechercher l'optimum d'une fonction économique comportant plusieurs inconnues positives ou nulles liées entre elles, par des relations linéaires indépendantes appelées contraintes, quand le nombre de ses inconnues est égal à 2, la méthode simple et appropriée est évidemment la méthode graphique, dans le cas d'un problème à plus que 2 variables, on utilise la méthode du simplexe qui nécessite l'introduction de : la notation matricielle , la forme canonique, la forme standard, …etc.

Les deux cours ont été consacrés à un aperçu sur une des techniques de la recherche opérationnelle ; passons à une autre technique aussi importante et aussi utile que la première. Il s'agit de la théorie des graphes.

EXERCICES :

EXERCICE N° 01 :

Écrire sous forme canonique (type I ou type II) les programmes linéaires suivants :

$$(P_1)\begin{cases} \text{Max } (x_1 + 2x_2) \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0 \,,\, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (P_2)\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 \ge 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 \ge 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \\ (24x_1 + 10x_2 + 72x_3)\text{Min} \end{cases}$$

$$(P_3)\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 4x_2 \le 2 \\ 6x_1 + x_2 \le 2 \\ (2x_1 + 3x_2)\text{Max} \\ x_1 \ge 0 \,,\, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (P_4)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad \ge 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge 1 \\ (x_1 - 2x_2 + x_3)\text{Min} \\ x_1 \ge 0 \,,\, x_2 \ge 0 \,,\, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

EXERCICE N° 02 :

Écrire sous forme standard les programmes linéaires de l'exercice N°1

EXERCICE N° 03 :

Résoudre par la méthode du simplexe les programmes suivants :

$$(P_1)\begin{cases} x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0 \;\; x_3 \ge 0 \;\; x_4 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \quad \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + \quad + 4x_4 \quad \le 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad \le 18 \\ \text{Max } (x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4) \end{cases}$$

$$
(P_2)\begin{cases}
x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\
4x_1 + 8x_2 \quad \leq 84 \\
2x_1 + 2x_2 \quad \leq 24 \\
\mathrm{Max}(4x_1 + 6x_2) = Z
\end{cases}
$$

$$
(P_3)\begin{cases}
x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0 \text{ , } x_4 \geq 0 \text{ , } x_5 \geq 0 \\
2x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 8 \\
x_1 + 2x_2 + \qquad + x_4 \qquad = 7 \\
x_2 \qquad + x_5 \quad = 3 \\
\mathrm{Max}\,(4x_1 + 5x_2)
\end{cases}
$$

$$
(P_4)\begin{cases}
\mathrm{Max}\,(x_1 + 2x_2) \\
-3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 2 \\
-x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = 4 \\
x_1 + x_2 \qquad + x_5 \quad = 5 \\
x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0
\end{cases}
$$

SOLUTION :

EXERCICE N° 01 : (P_1) et (P_2) sont déjà écrits sous forme canonique :

Pour (P_3), il suffit de multiplier la 1ère inéquation par (-1) on obtient :

$$(P_3)_q \begin{cases} -x_1 - x_2 & \leq -1 \\ x_1 + 4x_2 & \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 & \leq 2 \\ (2x_1 + 3x_2)\,\text{Max} & \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

(P_3) q est sous forme canonique type 2

De même, pour (P_4), on obtient :

$$(P_4)_q \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 & \geq -9 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 & \geq 1 \\ (x_1 - 2x_2 + x_3)\,\text{Min} & \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

EXERCICE N° 02 :

$$(P_1)_S \begin{cases} x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 \;\; \underbrace{x_3 \geq 0 \;\; x_4 \geq 0 \;\; x_5 \geq 0}_{\text{variables .d'écart}} \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 14 \\ \text{Max } (x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

$$(P_2)_S \begin{cases} \underbrace{x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 \;\; x_3 \geq 0}_{\text{var.réelles}} \;\; \underbrace{x_4 \geq 0 \;\; x_5 \geq 0}_{\text{var.d' écart}} \;\; \underbrace{x_6 \geq 0 \;\; x_7 \geq 0}_{\text{var.artificielles}} \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_5 + x_7 = 12 \\ \text{Min } (24x_1 + 10x_2 + 72x_3 + Mx_6 + Mx_7) \end{cases}$$

$$(P_3)_S \begin{cases} \underbrace{x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0}_{\text{var.réelles}} \;\; \underbrace{x_3 \geq 0 \;\; x_4 \geq 0 \;\; x_5 \geq 0}_{\text{var.d' écart}} \;\; \underbrace{x_6 \geq 0}_{\text{var.artificielles}} \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 2 \\ 6x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ \text{Max } (2x_1 + 3x_2 - Mx_6) \end{cases}$$

$$(P_4)_S \begin{cases} \underbrace{x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 \;\; x_3 \geq 0}_{\text{var.réelles}} \;\; \underbrace{x_4 \geq 0 \;\; x_5 \geq 0 \;\; x_6 \geq 0}_{\text{var.d' écart}} \;\; \underbrace{x_7 \geq 0 \;\; x_8 \geq 0}_{\text{var.artificielles}} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_5 + x_7 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_6 + x_8 = 1 \\ \text{Min } (x_1 - 2x_2 + x_3 + Mx_7 + Mx_8) \end{cases}$$

EXERCICE N° 03 :

La forme standard pour (P_1) est :

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + \quad + 4x_4 + x_6 = 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 = 18 \end{array}$$

$$\mathrm{Max}(x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \quad)$$

Tableau N° 0 :

	T_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	Rapport
A	x_5	2	1	3	1	1	0	0	8	8/1
B	x_6	2	$\boxed{3}$	0	4	0	1	0	12	12/3 ← ligne pivot :
C	x_7	3	1	2	0	0	0	1	18	18/1 x_6 :var.sortante
D	-Z	1	2	1	1	0	0	0	0	

↑

Colonne pivot : x_2 variable entrante

la solution extrême de base est :

HB : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

B : $x_5 = 8 \quad x_6 = 12 \quad x_7 = 18$

Z = 0

- Comment obtenir T_1 : 1ère Itération

$B \leftarrow$	2	3	0	4	0	1	0	12
$B' = B/3 \leftarrow$	$2/3$	1	0	$4/3$	0	$1/3$	0	4

$B' \leftarrow$	$2/3$	1	0	$4/3$	0	$1/3$	0	4
$A \leftarrow$	2	1	3	1	1	0	0	8
$A' = A - B' \leftarrow$	$4/3$	0	3	$-1/3$	1	$-1/3$	0	4

$B' \leftarrow$	$2/3$	1	0	$4/3$	0	$1/3$	0	4
$C \leftarrow$	3	1	2	0	0	0	1	18
$C' = C - B' \leftarrow$	$7/3$	0	2	$-\frac{4}{3}$	0	$-1/3$	1	14

$B' \leftarrow$	$2/3$	1	0	$4/3$	0	$1/3$	0	4
$D \leftarrow$	1	2	1	1	0	0	0	0
$D' = D - 2B \leftarrow$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-5/3$	0	$-\frac{2}{3}$	0	-8

Ainsi le tableau T_1 sera comme suit :

	T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	Rapport
A'	x_5	$4/3$	0	$\boxed{3}$	$-1/3$	1	$-1/3$	0	4	4/3 ← ligne pivot x_5 : variable sortante
B'	x_2	$2/3$	1	0	$4/3$	0	$1/3$	0	4	Indéfini
C'	x_7	$7/3$	0	2	$-4/3$	0	$-1/3$	1	14	14/2
D'	-Z	$-1/3$	0	1	$-5/3$	0	$-2/3$	0	-8	

↑ Colonne pivot : x_3 variable entrante

La solution de base est :

HB : $x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$

B : $x_2 = 4\,,\, x_5 = 4\,,\, x_7 = 14$

Z = 8

- Comment obtenir le 2ème tableau : 2ème itération

$$\begin{array}{lccccccc|c}
A' \leftarrow & 4/3 & 0 & 3 & -1/3 & 1 & -1/3 & 0 & 4 \\
\hline
A'' = A'/3 \leftarrow & 4/9 & 0 & 1 & -1/9 & 1/3 & -1/9 & 0 & 4/3
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc|c}
A'' \leftarrow & 4/9 & 0 & 1 & -1/9 & 1/3 & -1/9 & 0 & 4/3 \\
B' \leftarrow & 2/3 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \\
\hline
B'' = B' \leftarrow & 2/3 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4
\end{array}$$

C’est la même ligne : il n’y a aucune opération à faire puisqu’on a déjà le zéro sur la colonne du pivot.

$$\begin{array}{lccccccc|c}
A'' \leftarrow & 4/9 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 1/3 & -\frac{1}{9} & 0 & 4/3 \\
C' \leftarrow & 7/3 & 0 & 2 & -\frac{4}{3} & 0 & -1/3 & 1 & 14 \\
\hline
C'' = C' - 2A'' \leftarrow & 13/9 & 0 & 0 & -10/9 & -2/3 & -\frac{1}{9} & 1 & 34/3
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc|c}
A'' \leftarrow & 4/9 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 1/3 & -\frac{1}{9} & 0 & 4/3 \\
D' \leftarrow & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -5/3 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -8 \\
\hline
D'' = D' - A'' \leftarrow & -7/9 & 0 & 0 & -14/9 & -\frac{1}{3} & -5/9 & 0 & -28/3
\end{array}$$

La ligne D'' a tous ces coefficients ≤ 0 , T_2 sera le tableau optimal, écrivons le pour déduire la solution optimale :

	T_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
A''	x_3	$4/9$	0	1	$-\frac{1}{9}$	$1/3$	$-\frac{1}{9}$	0	$4/3$
B''	x_2	$2/3$	1	0	$4/3$	0	$1/3$	0	4
C''	x_7	$13/9$	0	0	$-10/9$	$-2/3$	$-\frac{1}{9}$	1	$34/3$
D''	-Z	$-7/9$	0	0	$-14/9$	$-1/3$	$-5/9$	0	$-28/3$

La solution optimale est :

HB : $x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$

B : $x_2 = 4$, $x_3 = 4/3$, $x_7 = 34/3$

$Z = 28/3$

Dans la suite ; on n'écrira plus comment obtenir les tableaux ; la forme standard de (P_2) est :

$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0}_{\text{v. réelles}} \qquad \underbrace{x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0}_{\text{v. d'écart}}$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + x_3 \quad & = 84 \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 24 \\ \text{Max}\,(4x_1 + 6x_2 \quad &) \end{aligned}$$

LE TABLEAU N° 0 :

T_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b	rapport
x_3	4	$\boxed{8}$	1	0	84	84/8
x_4	2		0	1	24	24/1
-Z	4	6	0	0	0	

$\leftarrow x_3$: Variable sortante

$\uparrow$

x_2 : Variable entrante

La solution extrême de base est :

HB : $x_1 = x_2 = 0$

B : $x_3 = 84 \quad ; x_4 = 24$

Z = 0

Le tableau N° 1 : 1$^{\text{ère}}$ itération

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Rapport
x_2	$1/2$	1	$1/8$	0	$21/2$	$\left(21/2\right) / \left(1/2\right)$
x_4	1	0	$-1/4$	1	3	$3/1 \leftarrow$
- Z	1	0	$-3/4$	0	-63	

x_4 : Variable sortante

$\uparrow$

x_1 : Variable entrante

La solution de base est :

HB : $x_1 = x_3 = 0$

B : $x_2 = 21/2$, $x_4 = 3$

Z = 63

Le tableau T_2 : 2ème itération

T_2	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	$1/4$	$-1/2$	9
x_1	1	0	$-1/4$	1	3
-Z	0	0	$-1/2$	-1	-66

La solution optimale est :

HB : $x_3 = x_4 = 0$

B : $x_1 = 3 ; x_2 = 9$

Z = 66

(P_3) est déjà écrit sous forme standard :

T_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Rapport
x_3	2	1	1	0	0	8	8/1
x_4	1	2	0	1	0	7	7/2
x_5	0	$\boxed{1}$	0	0	1	3	3/1 ← x_5 : v. sortante
-Z	4	5	0	0	0	0	

↑ x_2 : v.entrante

La solution extrême de base est :

HB : $x_1 = x_2 = 0$
B : $x_3 = 8$, $x_4 = 7$, $x_5 = 3$
Z = 0

Le tableau N° 1 : 1ère itération

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	rapport
x_3	2	0	1	0	-1	5	5/2
x_4	$\boxed{1}$	0	0	1	-2	1	1/1 ←
x_2	0	1	0	0	1	3	indéfini
-Z	4	0	0	0	-5	-15	

x_4 : v. sortante

x_1 : v. entrante

La solution de base est :

HB : $x_1 = x_5 = 0$

B : $x_3 = 5$, $x_4 = 1$, $x_2 = 3$

Z = 15

Le tableau N° 2 : 2ème itération

T_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	rappor t
x_3	0	0	1	-2	3	3	3/3
x_1	1	0	0	1	-2	1	< 0
x_2	0	1	0	0	1	3	3/1
-Z	0	0	0	-4	3	- 19	

← x_3 : v.sortante

x_5 : v.entrante

La solution de base est :

$$\text{HB} : \; x_4 = x_5 = 0$$
$$\text{B} : \; x_3 = 3 , \; x_1 = 1 , x_2 = 3$$
$$Z = 19$$

Le tableau N° 3 : 3ème itération

T_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_5	0	0	$1/3$	$-2/3$	1	1
x_1	1	0	$2/3$	$-1/3$	0	3
x_2	0	1	$-1/3$	$2/3$	0	2
-Z	0	0	-1	-2	0	-22

La solution optimale, est atteinte ; c'est :

$$\text{HB} : \; x_3 = x_4 = 0$$
$$\text{B} : \; x_5 = 1 , x_1 = 3 , x_2 = 2$$
$$Z = 22$$

(P_4) est sous forme standard :

Le tableau N° 0 :

T_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	rapport	
x_4	-3	2	1	0	0	2	2/20	← x_3 : v. sortante
x_4	-1	$\boxed{2}$	0	1	0	4	4/2	
x_5	1	1	0	0	1	5	5/1	
-Z	1	2	0	0	0	0		
		↑ x_2 : var. entrante						

La solution extrême de base est :

$$\text{HB}: x_1 = x_2 = 0$$
$$x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$
$$Z = 0$$

Le tableau N° 1 : 1ère itération

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	rapport
x_2	$-3/2$	1	$1/2$	0	0	1	< 0
x_4	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	2	2/2
x_5	$5/2$	0	$-1/2$	0	0	4	8/5
-Z	4	0	-1	0	0	-2	

← x_4 : v.sortante

↑ x_1 : v. entrante

La solution de base est :

$$\text{HB}: x_1 = x_3 = 0$$
$$x_2 = 1,\ x_4 = 2,\ x_5 = 4$$
$$Z = 2$$

Le tableau N° 2 : 2ème itération

T_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	rapport
x_2	0	1	$-1/4$	$3/4$	0	5/2	< 0
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	1	< 0
x_5	0	0	$3/4$	$-5/4$	1	3/2	(3/2) (3/4)
-Z	0	0	1	-2	0	-6	

← x_5

↑ x_3

La solution de base est :

HB : $x_3 = x_4 = 0$

$x_2 = \frac{5}{2}, \ x_1 = 1, \ x_5 = \frac{3}{2}$

Z = 6

Le tableau N° 3 : 3ème itération

T_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
x_3	0	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
-Z	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-8

T_3 est la tableau optimale , la solution optimale de base est :

HB : $x_4 = x_5 = 0$

B : $x_2 = 3, \ x_1 = 2 \ , x_3 = 2$

Z = 8

BIBLIOGRAPHIE :

[1] P. Caron –A Juhel – F. Vendeveld : Programmation linéaire méthodes et applications (DUNOD)

[2] F. Droesbeke, M.Hallin C. Lefèvre : La Programmation linéaire par l'exemple (Ellipses).

[3] F.ECOTO : Initiation à la recherche opérationnelle (Ellipses).