CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER

L'étude de la convergence des séries de Fourier est une exploration fascinante de la manière dont une fonction périodique peut être décomposée en une somme infinie de sinus et de cosinus. Les séries de Fourier sont une méthode puissante pour représenter des fonctions périodiques complexes en utilisant des fonctions trigonométriques simples.

0.1 Introduction

Introduction

Considérons une fonction périodique f avec une période T. La série de Fourier associée à f est une série infinie de termes trigonométriques définie par :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\omega n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{\omega n x}{T}\right)\right)$$

où les coefficients de Fourier trigonométriques a_0, a_n, b_n sont définie par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{\omega n x}{T}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{\omega n x}{T}\right) dx$$

Ainsi la série de Fourier est la série de fonctions définie par :

$$\mathcal{S}_n(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\cos(\omega n t)\right) + b_n(f)\sin(\omega n t)\right).$$

Avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ appeler pulsation. Dans la suite nous considérons que nous travaillons avec des fonction de 2π-périodique.

0.2 Convergences

Au XIXe siècle, Joseph Fourier a développé la théorie des séries de Fourier pour modéliser la conduction de la chaleur, démontrant que toute fonction périodique peut être représentée par une somme infinie de fonctions trigonométriques. Initialement controversée, la théorie a été clarifiée par Dirichlet, Cesàro et d'autre. Ces séries sont maintenant fondamentales en analyse harmonique et dans divers domaines, tels que la théorie des signaux à la résolution d'équations différentielles.

0.2.1 Théorème de Jordan-Dirichlet

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et de 2π-périodique.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{S}_n(x)$ converge vers

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

où $f(x+0)(resp. f(x-0))$ désigne la limite à droite (à gauche) de $f$en x.
De plus la série de Fourier de $f$converge normalement vers f

Démonstration :

0.2.2 Théorèmes de convergence en moyenne de Cesàro

Soit f une fonction continue et 2π-périodique. Alors les moyennes de Cesàro de la série de Fourier de f convergent uniformément vers f.
Si on note

$$\mathcal{C}_n(f) = \frac{\mathcal{S}_1(f)+\mathcal{S}_2(f)+.....+\mathcal{S}_n(f)}{n}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \| f-\mathcal{C}_n \|_\infty = 0$$

Démonstration :

Soit $\epsilon > 0$ fixé,l'objectif est de monter que $\exists \mathcal{N} = \mathcal{N}(\epsilon)$ tel que $\forall n \geq \mathcal{N} \Longrightarrow | \mathcal{C}_n - f | < \epsilon$.
D'après .... on a : $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_n = f$ alors :

$$\exists p = p(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad telque \quad \forall n \geq p \Longrightarrow | \mathcal{S}_n - f | < \epsilon$$

On a $\forall n \geq p$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_n - f &= \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{S}_k(f)}{n} - f \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathcal{S}_k(f) - nf \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n (\mathcal{S}_k(f) - f)}{n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^p (\mathcal{S}_k(f) - f) + \sum_{k=p+1}^n (\mathcal{S}_k(f) - f)}{n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^p (\mathcal{S}_k(f) - f)}{n} + \frac{\sum_{k=p+1}^n (\mathcal{S}_k(f) - f)}{n} \\
\mathcal{C}_n - f &= \frac{\sum_{k=1}^p (\mathcal{S}_k(f) - f)}{n} + \frac{\sum_{k=p+1}^n (\mathcal{S}_k(f) - f)}{n}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on a :

$$|\mathcal{C}_n - f| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^p |\mathcal{S}_k(f) - f| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^n |\mathcal{S}_k(f) - f|$$

Soit $\alpha = \sum_{k=1}^{p} |\mathcal{S}_k(f) - f|$ On a :

$$|\mathcal{C}_n - f| \leq \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=p+1}^{n} |\mathcal{S}_k(f) - f|$$

Donc α est une constante indépendante de n et de plus $\forall k \geq p$ on a :$| \mathcal{S}_n(f) - f | < \epsilon$ On a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_n - f| &\leq \frac{\alpha}{n} + \frac{n-p}{n}\epsilon \\ &\leq \frac{\alpha}{n} + \epsilon \quad car \quad \frac{n-p}{n} < 1 \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha}{n} = 0$.
Donc

$$\exists q = q(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad tel\,que \quad \forall n \geq q \Longrightarrow |\frac{\alpha}{n}| < \epsilon$$

Donc, en prenant $N = max(p,q)$, on a finalement $\boxed{| \mathcal{C}_n - f | < 2\epsilon \ . \ \forall n \geq N}$

0.2.3 Théorème de Parseval

Si f est continue par morceaux et 2π-périodique, alors

$$\|f - S_n(f)\|_2 \to 0.$$

En particulier, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \sum_{n \geq 1} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

Démonstration :