of squares)은

$$\begin{aligned} &\mathrm{SSR}(X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_p \mid X_1, X_2, \cdots, X_q) \\ &\quad = \mathrm{SSR}(X_1, X_2, \cdots, X_p) - \mathrm{SSR}(X_1, X_2, \cdots, X_q) \\ &\quad = \hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{X}'\mathbf{Z} - \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{1})'\mathbf{X}'_{(1)}\mathbf{Z} \end{aligned}$$

이다. 단, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$는 완전모형에 대한 모수 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p)'$의 LSE이다. 이제 귀무가설 "$H_0: \beta_{q+1} = \beta_{q+2} = \cdots = \beta_p = 0$" 에 대한 대립가설 "$H_1$: 적어도 하나의 $\beta_i \neq 0$ $(i = q+1, q+2, \cdots, p)$" 의 검정을 위한 검정통계량은

$$F = \frac{\mathrm{SSR}(X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_p \mid X_1, X_2, \cdots, X_q)/(p-q)}{\mathrm{SSE}/(n-p-1)}$$

이고, F 통계량의 관측값이 f 라면 유의수준 α에서의 검정 규칙은 다음과 같다.

(i) $f > F_\alpha(p-q, n-p-1)$이면 H_0를 기각한다.

(ii) $f \le F_\alpha(p-q, n-p-1)$이면 H_0를 기각하지 못한다.

2.1.5 잔차분석

잔차분석(residual analysis)은 잔차들을 분석하여 잠정적으로 설정된 회귀모형이 과연 자료를 잘 설명하는지를 판단하는 분석 단계이다. 잔차는 오차의 추정값으로 생각할 수 있으므로 회귀모형 설정 시 오차항에 대한 가정에 잔차가 잘 부합되는지를 검토한다. 오차항에 대한 가정이 만족되지 않아 회귀모형에 수용되지 못하고 잔차에 남겨둔 정보가 있다면 이를 밝혀 잠정모형을 갱신한다. 반대로 오차항에 대한 가정이 위배되지 않는다면 잠정모형을 최종 예측모형으로 사용할 수 있다.

중회귀모형 $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$에서 오차항 $\boldsymbol{\varepsilon}$은 $N_n(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I})$분포를 따르고 각 ε_i들은 상관관계가 없어 서로 독립이나 잔차벡터 $\mathbf{e} = \mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}} = (e_1, e_2, \cdots e_n)'$의 공분산행렬 Cov$(\mathbf{e})$는 대각행렬이 아니므로 e_i들 간에는 상관관계가 존재하며, 그것은 단지 디자인행렬 $\mathbf{X}$에만 의존함을 알 수 있다. 그러나 e_i들 간의 상관관계는 추정해야 할 모수

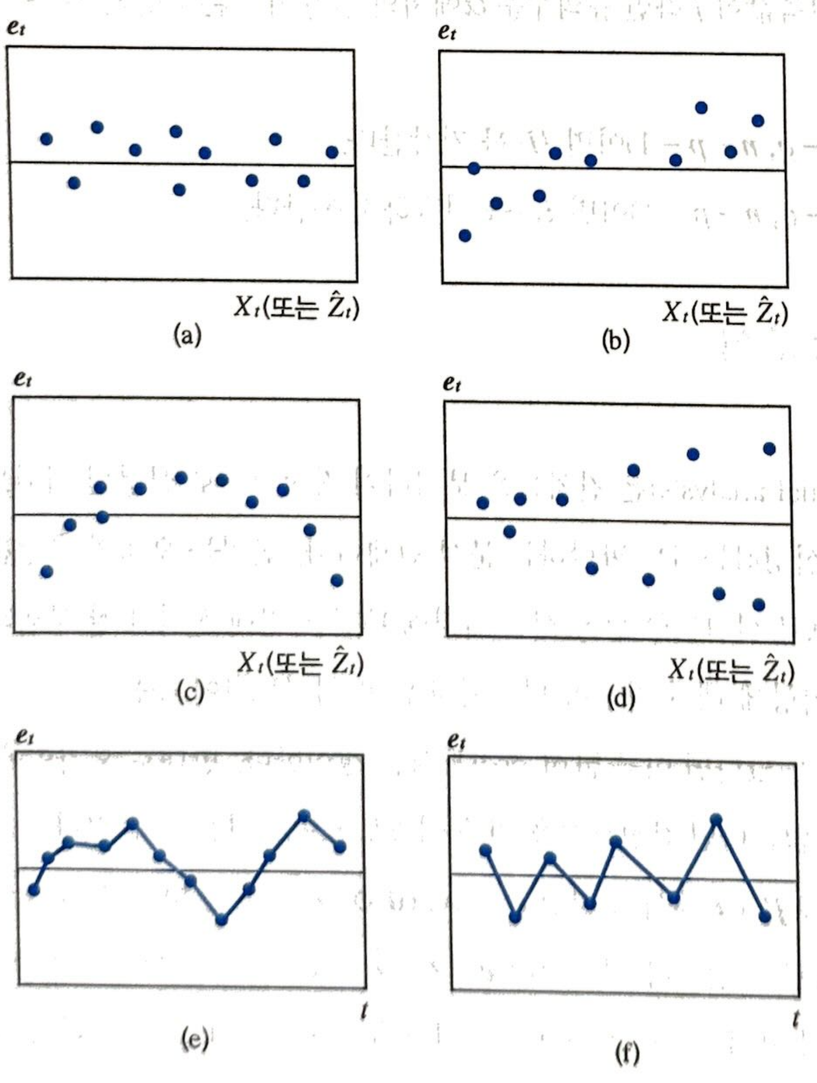
들의 수에 비해서 표본의 크기가 충분히 크다면 무시할 수 있다고 알려져 있다.

잔차분석에서는 보통 잔차의 산점도를 그려봄으로써 중회귀모형에 따르는 가정을 검토한다. 잔차와 각 설명변수의 상관관계, 그리고 잔차와 각 적합값의 상관관계는 0이므로 보통 가로축에 i번째 설명변수 X_{ti} 혹은 적합값 $\hat{Z}_t$를 나타내고 세로축에 잔차 e_t를 나타낸다. Z_t가 시계열자료인 경우는 가로축에 시간 t를 나타낸 **잔차 시계열그림**이 오차들 간의 독립성 검토에 도움을 준다. 오차항의 정규성 가정을 검토하기 위해서는 잔차들의 **정규확률그림**(normal probability plot)을 그려보아 그림상의 점들이 직선의 형태를 나타내면 정규분포의 가정이 적합하다고 판단한다.

잔차의 산점도를 그렸을 때 [그림 2-2]의 형태를 나타낸다면 각각 어떤 조치를

그림 2-2

여러 가지 잔차의 산점도



취해야 하는지 알아보자.

(a) 회귀모형에 부가된 가정에 위배되지 않는다. 즉, 모형 선택이 적절하다.

(b) 선형효과를 나타내는 항이 모형에 포함되어야 한다.

(c) 곡선효과를 나타내는 항, 즉 2차항이 모형에 포함되어야 한다.

(d) 오차항의 상수분산 가정에 위배되는 것으로 분산상수화를 위한 변환이 선행되어야 한다.

(e), (f) 오차항들 간에 자기상관관계(e는 양의 상관관계, f는 음의 상관관계)가 존재하므로 자기회귀오차모형의 적합을 고려해 본다.

(1) 분산상수화 변환

잔차의 산점도를 관찰하여 잔차의 분산이 시간이 흐름에 따라 시간에 종속되는 경향을 보여줄 때 오차항의 상수분산 가정에 위배되는 것으로 판단하고 먼저 자료를 변환하여 분산을 상수화한 다음, 모형 적합을 시도해야 할 것이다. 이제 분산을 상수화시키기 위해 사용되는 변환법의 이론적 근거를 살펴보기로 하자.

변수 Z_t의 분산 $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(Z_t)$와 평균수준 $\mu_t = E(Z_t)$ 사이에는 보통 함수관계가 존재한다. 이 함수관계를 f라고 하면

$$\sigma_t^2 = f(\mu_t)$$

가 성립한다. 우리의 관심사는 Z_t를 변환했을 때 분산이 상수가 되는 변환을 찾을 수 있는가 하는 것이다. 즉, Z_t를 $T(Z_t)$로 변환함으로써 $T(Z_t)$의 분산이 시간 t에 의존하지 않는 상수가 될 수 있는 변환함수 $T(\cdot)$를 찾기 위해 먼저 다음과 같이 함수 $T(Z_t)$의 μ_t에 대한 1차 테일러전개(Taylor expansion)를 생각해 보자.

$$T(Z_t) \simeq T(\mu_t) + (Z_t - \mu_t)T'(\mu_t)$$

단, $T'(\cdot)$는 함수 $T(\cdot)$의 1차 도함수이다. 변환된 함수 $T(Z_t)$의 분산인

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[T(Z_t)] &\simeq \mathrm{Var}[T(\mu_t) + (Z_t - \mu_t)T'(\mu_t)] \\ &= [T'(\mu_t)]^2\,\mathrm{Var}(Z_t) \\ &= [T'(\mu_t)]^2 f(\mu_t)\end{aligned}$$

가 t와 무관한 상수가 되어야 하므로

$$[T'(\mu_t)]^2 \propto \frac{1}{f(\mu_t)}$$

이 성립해야 한다. 즉,

$$T'(\mu_t) \propto \frac{1}{\sqrt{f(\mu_t)}}$$

이어야 한다. 따라서 변환함수는 다음과 같다.

$$T(x) \propto \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx \tag{2-10}$$

가장 많이 사용되는 함수 f의 형태로는 다음과 같은 두 가지가 있다.

① $\sigma_t^2 = f(\mu_t) = c\mu_t^2$

② $\sigma_t^2 = f(\mu_t) = c\mu_t$

①의 경우에는 분산의 상수화를 위해서 Z_t의 자연로그 변환인 $\ln Z_t$를 이용하여 시계열분석을 시도해야 하며, ②의 경우에는 제곱근변환인 $\sqrt{Z_t}$를 이용하여 시계열 분석을 시작해야 함을 (2-10)을 통하여 짐작할 수 있다. 경제와 관련된 대부분의 시계열이 분석 시에는 다른 분석기법을 적용하기에 앞서 주로 로그변환을 사용하여 분산을 정상화시켜 주고 있다. 변수변환 방법으로는 일반적으로 Box and Cox (1964)에 의한 박스-칵스 변환(Box-Cox transformation)을 사용하고 있으며, 위의 두 변환은 박스-칵스 변환의 특수한 경우임이 알려져 있다.

(2) 오차항들의 자기상관관계 검정

잔차의 산점도를 관찰하였을 때 잔차들이 0을 중심선으로 하여 랜덤하게 산포되어 있지 않고 어떤 체계적인 상관관계가 존재할 경우 오차항의 독립성 가정을 의심한다. 이러한 상관관계 중 특히 오차항들 간에 1차 자기상관(autocorrelation at lag 1) 관계의 존재 여부에 대한 통계적 유의성검정인 **Durbin-Watson(DW) 검정**을 들 수 있다(Durbin and Watson : 1950, 1951, 1971).

일반적으로 오차항들이 k차 자기상관관계를 갖는지를 검토하기 위해서는 잔차들의 k차 표본자기상관계수인

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} e_t e_{t-k}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2},\ k = 1, 2, \cdots$$

를 이용한 검정법을 생각할 수 있다. 근사검정 방법으로서 $|\hat{\rho}_k| > \frac{2}{\sqrt{n}} (k = 1, 2, \cdots)$이면 오차항들이 $k-$시차에서 자기상관관계가 있는 것으로 판단한다.

중회귀모형식 (2-5)에서 오차항 ε_t들이 설명할 1차 자기회귀모형인 AR(1)모형

$$\varepsilon_t = \phi \varepsilon_{t-1} + a_t$$

을 만족하는 확률과정을 따를 때 오차항들 간에 존재하는 1차 자기상관관계가 통계적으로 유의한지를 검정하는 DW 검정을 설명해 보기로 한다. 여기서 a_t들은 서로 독립이라고 가정한다.

AR(1)모형은 t시점에서의 관측값을 반응변수로 하고 $(t-1)$시점에서의 관측값을 설명변수로 갖는 모형으로, 자기 자신의 과거에 회귀시킨다는 의미에서 자기회귀라는 표현을 사용한다. 자기상관 정도에 따라 설명변수로 사용될 과거의 관측값의 수에 의해 모형의 차수가 결정되며 일반적으로 AR(p)로 표현한다. 자기회귀모형에 대해서는 5장 이후에 자세히 설명하기로 한다.

오차항들 간의 1차 자기상관계수는

$$\rho_1 = \mathrm{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\varepsilon_t)}\sqrt{\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1})}} = \phi$$

의 관계를 가지므로 귀무가설 "$H_0 : \rho_1 = 0$"는 "오차항들은 서로 독립이다"와 똑같은 의미를 갖는다. 중회귀모형에서 오차항 ε_t들은 잔차 $e_t = Z_t - \hat{Z}_t$에 의하여 추정될 수 있으며, 잔차들의 1차 표본자기상관계수가

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

이 되는 것은 ρ_1의 식으로부터 알 수 있다.

귀무가설 "$H_0 : \rho_1 = 0$"를 검정하기 위한 DW 검정통계량 D는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \qquad (2-11) \\ &\cong 2(1 - \hat{\rho}_1) \end{aligned}$$

(2-11)로부터 양의 표본자기상관계수 $0 < \hat{\rho}_1 \le 1$에 대하여 $0 \le D < 2$이고 음의 표본자기상관계수 $-1 \le \hat{\rho}_1 < 0$에 대하여는 $2 < D \le 4$임을 알 수 있다.

DW 검정 규칙은 D의 값이 하한값 d_L보다 작거나 상한값 d_U보다 크면 확실한 결론, 즉 H_0를 기각하거나 혹은 H_0를 기각하지 못하는 결론을 내리지만 $d_L \le D \le d_U$이면 결론을 유보한다. d_L과 d_U는 유의수준 α, 관측값 수 n, 독립변수의 개수 p에 따라 달라지며 Durbin과 Watson이 계산한 d_L과 d_U의 값이 부록 B에 수록되어 있다.

귀무가설 "$H_0 : \phi = 0$"에 대한 DW 검정 규칙을 대립가설 H_1에 따라 정리해 보면 아래와 같다.

① 대립가설 "$H_1 : \phi > 0$", 즉 양의 자기상관관계의 검정 규칙 :

(a) $D > d_U$ 이면 유의수준 α에서 H_0를 기각하지 못한다.

(b) $D < d_L$ 이면 유의수준 α에서 H_0를 기각한다.

(c) $d_L \le D \le d_U$ 이면 검정을 유보한다.

② 대립가설 "$H_1 : \phi < 0$", 즉 음의 자기상관관계의 검정 규칙 :

(a) $4-D > d_U$이면 유의수준 α에서 H_0를 기각하지 못한다.

(b) $4-D < d_L$이면 유의수준 α에서 H_0를 기각한다.

(c) $d_L \leq 4-D \leq d_U$이면 검정을 유보한다.

③ 대립가설 "$H_1 : \phi \neq 0$", 즉, 0이 아닌 자기상관관계의 검정 규칙 :

(a) $D > d_U$ 이고 $4-D > d_U$ 이면 유의수준 2α에서 H_0를 기각하지 못한다.

(b) $D < d_L$ 혹은 $4-D < d_L$ 이면 유의수준 2α에서 H_0를 기각한다.

(c) (a) 혹은 (b)가 아니면 검정을 유보한다.

2.1.6 예측

이제 잔차분석의 결과로서 최종 선택한 모형이 중회귀모형 (2-5)라 하자. 그러면 이 모형은 예측모형으로 사용될 것이다. (2-5)에서 시점 $t = n + l$에서의 관측값 Z_{n+l}은

$$Z_{n+l} = \beta_0 + \beta_1 X_{n+l,1} + \beta_2 X_{n+l,2} + \cdots + \beta_p X_{n+l,p} + \varepsilon_{n+l}$$

로 쓸 수 있다. 현재, 시점 n까지의 자료가 관측되었을 때 $l-$ 시차 후의 미래 값 Z_{n+l}의 **최소 평균제곱오차**(minimum mean square error ; MMSE)를 갖는 예측값 $Z_n(l)$은

$$Z_n(l) = E(Z_{n+l} \mid Z_n, Z_{n-1}, \cdots, Z_1)$$

으로 정의된다. 따라서

$$Z_n(l) = \beta_0 + \beta_1 X_{n+l,1} + \beta_2 X_{n+l,2} + \cdots + \beta_p X_{n+l,p} = \mathbf{X}'_{n+l}\boldsymbol{\beta}$$

단, $\mathbf{X}_{n+l} = (X_{n+l,1}, X_{n+l,2}, \cdots, X_{n+l,p})'$이다. 또한 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$들은 미지의 모수이므로 실제로 구할 수 있는 예측값은 모수들의 추정값을 이용한

$$\hat{Z}_n(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{n+l,1} + \hat{\beta}_2 X_{n+l,2} + \cdots + \hat{\beta}_p X_{n+l,p} = \mathbf{X}'_{n+l}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

이 된다. 미래 값 Z_{n+l}과 추정된 예측값 $\hat{Z}_n(l)$의 차인 예측오차

$$\hat{e}_n(l) = Z_{n+l} - \hat{Z}_n(l) = \varepsilon_{n+l} + \mathbf{X}'_{n+l}(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}})$$

의 평균은

$$E[\hat{e}_n(l)] = E(\varepsilon_{n+l}) + \mathbf{X}'_{n+l}(\boldsymbol{\beta} - E(\hat{\boldsymbol{\beta}})) = 0$$

이고, 분산은

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\hat{e}_n(l)] &= \mathrm{Var}[\varepsilon_{n+l} + \mathbf{X}'_{n+l}(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}})] \\
&= \mathrm{Var}(\varepsilon_{n+l}) + \mathrm{Var}(\mathbf{X}'_{n+l}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 + \mathbf{X}'_{n+l}\sigma_\varepsilon^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_{n+l} \\
&= \sigma_\varepsilon^2[1 + \mathbf{X}'_{n+l}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_{n+l}]
\end{aligned}$$

과 같다. 그러므로 예측오차의 추정된 분산은

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{e}_n(l)] = s^2[1 + \mathbf{X}'_{n+l}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_{n+l}]$$

이다. 또한 예측오차는

$$\begin{aligned}
\hat{e}_n(l) &= \varepsilon_{n+l} + \mathbf{X}'_{n+l}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}'_{n+l}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= \varepsilon_{n+l} - \mathbf{X}'_{n+l}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}$$

과 같이 서로 독립인 정규확률변수 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+l}$의 선형결합이므로 정규분포를 따른다. 따라서 미래 값 Z_{n+l}에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 예측구간은 다음과 같다.

$$\hat{Z}_n(l) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)\, s\sqrt{1 + \mathbf{X}'_{n+l}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_{n+l}}$$

2.2 다항추세모형

2.2.1 불규칙성분만을 갖는 경우 : 상수평균모형

시계열자료가 1장의 [그림 1-1]과 같이 어떤 일정한 수준에 계속 머물면서 불규칙성분에 의한 변화만을 보여주는 경우 다음의 **상수평균모형**

$$Z_t = \beta_0 + \varepsilon_t \tag{2-12}$$

로 설명이 가능하다. (2-12)의 ε_t들도 모형 (2-4)에서의 오차와 같은 가정을 만족한다고 가정한다. 즉, ε_t는 서로 독립이고 평균 0, 분산 σ_ε^2를 갖는 오차항이며 정규분포를 따른다고 가정한다. β_0는 미지의 상수모수로서 (2-6)으로부터 LSE는

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t = \overline{Z} \tag{2-13}$$

임을 알고 있다. 시점 n을 원점으로 했을 때 l-시차 후의 MMSE 예측값은

$$Z_n(l) = E(Z_{n+l} \mid Z_n, Z_{n-1}, \cdots, Z_1) = \beta_0, \quad l = 1, 2, \cdots$$

이고, 추정된 예측값은

$$\hat{Z}_n(l) = \hat{\beta}_0 = \overline{Z}, \quad l = 1, 2, \cdots \tag{2-14}$$

가 된다. 예측오차

$$\hat{e}_n(l) = Z_{n+l} - \hat{Z}_n(l) = \beta_0 + \varepsilon_{n+l} - \overline{Z}, \quad l = 1, 2, \cdots$$

의 평균은

$$E[\hat{e}_n(l)] = 0$$

이고, 예측오차의 분산은

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\hat{e}_n(l)] &= \mathrm{Var}(\beta_0 + \varepsilon_{n+l} - \overline{Z}) \\ &= \mathrm{Var}(\varepsilon_{n+l}) + \mathrm{Var}(\overline{Z}) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

이다. 한편 σ_ε^2의 불편추정량으로는

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \overline{Z})^2 \equiv s^2$$

을 사용한다. ε_t들이 정규분포를 따르므로 Z_{n+l}의 $100(1-\alpha)\%$ 예측구간은

$$\overline{Z} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\, s\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

이 된다.

새로운 관측값 Z_{n+1}이 얻어지면 시점 $(n+1)$에서 $(l-1)$시차 후의 예측값은

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{n+1}(l-1) &= \frac{1}{n+1}(Z_1 + \cdots + Z_n + Z_{n+1}) \\ &= \frac{n}{n+1}\hat{Z}_n(l) + \frac{1}{n+1}Z_{n+1} \qquad (2-15) \\ &= \hat{Z}_n(l) + \frac{1}{n+1}[Z_{n+1} - \hat{Z}_n(l)]\end{aligned}$$

이 된다. (2-14)에 의해 $\hat{Z}_n(l) = \hat{Z}_n(1)$이므로 새로운 예측값은 시점 n에서의 예측값 $\hat{Z}_n(l)$과 시점 $n+1$에서의 예측오차

$$\hat{e}_n(1) = Z_{n+1} - \hat{Z}_n(l) = Z_{n+1} - \hat{Z}_n(1)$$

의 선형결합에 의해 얻을 수 있다. 이 식을 이용하면 예측값의 갱신(update)을 위해 모든 관측값을 저장할 필요가 없다. 즉, 가장 최근의 예측값만 저장하고 있으면 관측값이 추가됨에 따라 새로운 예측값을 구할 수 있어 매우 효율적인 **예측갱신** 방법이라 할 것이다.

3장의 평활법에서 자세히 설명하겠지만, 만일 β_0가 **전체적으로**(globally)는 일정한 값을 갖지 않으나 **국지적으로**(locally)는 일정한 값을 갖는 경우 (2-13)에 의한 모수추정은 모든 관측값에 동일한 가중값 $\frac{1}{n}$을 주므로 바람직하지 않다고 생각할 수 있다. 따라서 예측하고자 하는 시점에 가까울수록 더 큰 가중값을 주는 방법을 생각할 수 있다. 사용하는 가중값의 형태에 따라 이동평균(moving average)법 또는 지수평활(exponential smoothing)법으로 구분되며, 모형 (2-12)의 β_0를 가중최소제곱법(weighted least squares method)에 의해 추정하면 동일한 결과를 얻을 수 있다는 것이 알려져 있다. 더 자세한 내용은 Abraham and Ledolter(1983)를 참고하라.

2.2.2 추세성분만을 갖는 경우 : 선형추세 또는 2차 추세모형

시계열이 1장의 [그림 1-2]와 같이 직선형인 추세를 갖고 증가하는 경우에는

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

와 같은 형태의 **선형추세모형**(linear trend model)을 적용할 수 있다. 이때 $\beta_0 + \beta_1 t$는 선형추세성분을 나타낸다. 추세성분이 직선형이 아니고 곡선 형태를 따르는 경우에는

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

와 같은 2차 추세모형을 사용하거나 이보다 고차의 다항추세모형

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \cdots + \beta_p t^p + \varepsilon_t \tag{2-16}$$

를 이용하여 추세성분을 설명할 수 있다. 모형 (2-4)에서와 같이 ε_t는 서로 독립이고 평균 0, 분산 σ_ε^2을 갖는 오차항이며, 정규분포를 따른다고 가정하자. $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$ 등은 미지의 상수모수로서 상수평균모형의 경우와 같이 최소제곱법에 의해 추정하고, 국지적으로만 일정할 경우에는 이에 해당되는 가중값을 이용한 가중최소제곱법을 사용할 수 있다. 일반적으로 고차의 다항추세모형의 추정은 다중회귀선형모형의 경우와 같이 행렬을 이용하는 것이 편리하다. 모형 (2-16)은 행렬을 이용하면

$$Z_t = [1 \ t \ t^2 \ \cdots \ t^p] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

와 같고, n개의 시계열자료가 관측된 경우

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_t \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^p \\ & & \vdots & & \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^p \\ & & \vdots & & \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{2-17}$$

과 같이 표현할 수 있다. (2-17)에서

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_t \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^p \\ & & \vdots & & \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^p \\ & & \vdots & & \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

이라고 하면 모형 (2-17)은 다음과 같은 다중선형회귀모형

$$\mathbf{Z} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

과 같다. 따라서 이후에 뒤따르는 분석법은 2.1절의 회귀분석법을 참고하면 된다.