1 순열과 조합

1.1 순열

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수 (단, $n \geq r$)를 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고, 기호로는 ${}_nP_r$로 표기한다. 다시 말해, 순서를 정해서 나열하는 것을 말하며, 아래와 같이 계산한다.

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1), \quad (\text{단}, 0 < r \leq n) \tag{1} $$

만약, $n = r$의 경우 서로 다른 n개에서 n개 모두를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수와 같다.

$$ {}_nP_n = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \tag{2} $$

이 식의 우변에 있는 1부터 n까지의 자연수의 곱을 n의 **계승**이라 하고, 기호로 $n!$로 나타낸다. 즉,

$$ {}_nP_n = n! \tag{3} $$

한편, $0 < r < n$일 때 순열의 수 ${}_nP_r$는 계승을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$ \begin{aligned} {}_nP_r &= n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-r+1) && (4) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-r)(n-r-1) \times \cdots \times 2 \times 1} && (5) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} && (6) \end{aligned} $$

여기서 $r = n$일 때, $n!/0!$이 성립하도록 $0! = 1$, 그리고 $r = 0$일 때, ${}_nP_0 = 1$로 정의한다.

- Example #1 : 다섯 개의 문자 A, B, C, D, E를 일렬로 배열할 때, A, B가 이웃할 확률을 p, C, D가 이웃하지 않을 확률을 q라 하자. p와 q의 값을 구해보자.

- Example #2 : 한국의 축구 선수 4명과 일본 축구 선수 4명을 일렬로 세울 때, 서로 다른 나라 선수끼리 교대로 서게 될 확률을 구해보자.

- Example #3 : 3명의 남학생과 5명의 여학생이 일렬로 줄을 서서 등산을 할 때, 남학생이 맨 앞과 맨 뒤에 서게 될 확률을 구해보자.

- Example #4 : 8개의 문자 c, o, m, p, u, t, e, r를 일렬로 나열할 때, c와 r 사이에 2개의 문자가 들어올 확률을 구해보자.

- Example #5 : 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 숫자를 택하여 만들어진 네 자리의 정수 중에서 2500보다 작은 정수가 나올 확률을 구해보자.

- Example #6 : 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 세 자리의 자연수가 3의 배수가 될 확률을 구해보자.

1.2 조합

서로 다른 n개에서 순서를 고려하지 않고, r개를 택하는 경우의 수 (단, $n \geq r$)를 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하고, 기호로는 ${}_nC_r$로 표기한다.
각각의 조합의 경우에서 r개를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $r!$이다. 따라서, 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는 ${}_nC_r \times r! = {}_nP_r$이다. 따라서 조합의 수 ${}_nC_r$, $(0 \leq r \leq n)$는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!} && (7) \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} && (8)
\end{aligned}
$$

여기서 $r = 0$일 때, ${}_nC_r = \frac{n!}{0!(n-0)!}$이 성립하도록 ${}_nC_0 = 1$로 정의한다.

한편, $0 < r \leq n$일 때,

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{9} $$

에서 r에 $n-r$를 대입하면, 다음과 같다.

$$ {}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{10} $$

이를 다음과 같이 정리한다.

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \tag{11} $$

- Example #7 : 서로 다른 5권의 책 A, B, C, D, E에서 3권의 책을 구입할 때, A는 구입하고, C는 구입하지 않을 확률을 구해보자.

- Example #8 : 빨간 구슬, 검은 구슬을 합하여 6개가 들어 있는 주머니에서 2개의 구슬을 꺼낼 때, 2개 모두 빨간 구슬일 확률은 2/5이다. 주머니에 들어 있는 빨간 구슬의 개수를 구해보자.

- Example #9 : $\{1, 2, 3 \ldots, 10\}$에서 임의로 6개의 서로 다른 수를 뽑아 크기 순서로 나열할 때, 두 번째로 작은 수가 3일 확률을 구해보자.

2 이항 정리

만약 $(a+b)(x+y+z)$ 같은 것을 전개했을 때 나오는 항의 개수를 구하라는 문제를 풀어보자. 여기서, 앞의 2개의 항과 뒤의 3개의 항을 전개를 하면 6개의 항이 나온다라고 답을 구할 수가 있는데, 이를 조합의 의미로, a와 b 2개의 항 중 하나를 뽑고, x와 y와 z 3개의 항 중 하나를 뽑으면, 즉 ${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 6$이 된다. 이런 의미로 $(a+b)^n$을 전개하는 문제를 변수를 곱한다라는 생각 대신, 변수를 고른다는 의미로 풀어보자.

2.1 이항 정리

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n$을 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n b^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r}b^r \tag{12}$$

이것을 $(a+b)^n$의 이항정리라 하고, ${}_nC_r a^{n-r}b^r$을 일반항, ${}_nC_0, {}_nC_1, \ldots, {}_nC_r, \ldots, {}_nC_n$을 이항계수라 한다. 다시 말해, $(a+b)^n$에서 a^n는 a만 n개 뽑고 b는 안 뽑는 경우이기 때문에 ${}_nC_n$이 되는 것이고, 반대로 b^n 입장에서도 마찬가지다.
예를 들어, $(3a+2b)^4$를 전개할 때, a^3b의 계수를 구하면 ${}_4C_3(3a)^3(2b)^1 = 216a^3b$이다. 여기서 ${}_4C_3$은 이항계수이고 실제 계수는 216이 된다. 즉 이항계수와 실제계수는 다를 수 있다.

- Example #10 : $(x+y)^7$의 전개식에서 x^3y^4의 계수를 구해보자.

- Example #11 : $\log_2(11C_0 + 11C_1 + 11C_2 + \cdots + 11C_{11})$의 값을 구해보자.

- Example #12 : x의 다항식 $(ax-1)^5$의 전개식에서 x^4의 계수와 x^3의 계수의 합이 0일 때, x^2의 계수를 구해보자. (단, $a \neq 0$)

- Example #13 : 다항식 $(1+2x)(x+2)^5$의 전개식에서 x^2의 계수를 구해보자.

- Example #14 : $(x+\frac{1}{x^3})^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^4}$의 계수를 구해보자.

- Example #15 : $(1+i)^{15}$의 전개식을 이용하여 $\sum_{n=1}^{7}(-1)^n 15C_{2n}$의 값을 구해보자. (단, $i=\sqrt{-1}$)

2.2 이항계수의 성질

자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

- 이항계수의 합1

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \tag{13}$$

- 이항계수의 합2

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_nC_r = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0 \tag{14}$$

- 홀수 번째 항의 계수들의 합

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = 2^{n-1} \tag{15}$$

- 짝수 번째 항의 계수들의 합

$${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots = 2^{n-1} \tag{16}$$

- Example #16 : ${}_8C_1 + {}_8C_2 + \cdots + {}_8C_8$의 값을 구해보자.

- Example #17 : ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n = 64$를 만족하는 자연수 n의 값을 구해보자.

3 확률

3.1 정의

어떤 시행의 표본공간을 S라 할 때, 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 **확률**이라 하며, 기호로는 $P(A)$로 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \tag{17}$$

여기서 $n(A)$, $n(S)$는 각각 집합 A와 S의 원소의 개수이다. 임의의 사건 A에 대하여, $0 \leq P(A) \leq 1$의 범위를 가지며, $P(S) = 1$, $P(\phi) = 0$이다.

- Example #18 : 크기와 모양이 같은 붉은 공 3개와 검은 공 5개가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 2개가 모두 같은 색일 확률을 구해보자.

- Example #19 : A, B, C, D, E, F 여섯 명의 학생이 한 줄로 설 때, A, B 사이에 세 명이 서 있을 확률을 구해보자.

- Example #20 : 서로 다른 주사위 두 개를 동시에 던질 때, 두 주사위에서 나온 눈의 수의 합이 9 이하일 확률을 구해보자.

- Example #21 : 크기가 다른 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 a, b라 하자. $|a-b| \leq 2$일 확률을 구해보자.

- Example #22 : 1부터 20까지의 자연수 중 임의로 하나의 수를 택하여 n이라 할 때, $\frac{20n}{n+1}$이 정수가 될 확률을 구해보자.

- Example #23 : 서로 다른 주사위 두 개를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$의 역행렬의 모든 성분이 정수일 확률을 구해보자.

3.2 확률의 덧셈정리

어떤 시행의 표본공간을 S라고 하면 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{18}$$

- Example #24 : 나는 4명의 친구 A, B, C, D에게 각각 편지를 쓰고, 친구들의 이름이 적혀있는 4장의 봉투에 임의로 넣었다. 이 때 A와 B의 이름이 적힌 봉투에 모두 다른 사람의 편지가 들어 있을 확률을 구해보자.

3.3 여사건의 확률

표본공간이 S인 어떤 사건 A의 여사건 A^c에 대해 다음이 성립한다.

$$P(A^c) = 1 - P(A) \tag{19}$$

- Example #25 : 어느 학교에는 여학생 4명과 남학생 6명으로 이루어진 동아리가 있다. 이 동아리에서 경연대회에 학교 대표로 출전할 3명을 선발할 때, 여학생이 적어도 1명 이상 포함될 확률을 구해보자.

3.4 조건부확률 (conditional probability)

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**은 다음과 같다.

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad (\text{단}, P(A) \neq 0) \tag{20}$$

예를 들어, 1부터 10까지 자연수가 각각 하나씩 적힌 카드가 있을 때, 이 카드 중에서 임의로 한 장을 꺼냈을 때 카드에 적힌 숫자가 짝수라면, 그 수가 5보다 작을 확률을 생각해보자.

- 카드 10장 중 임의의 한 장을 꺼냈을때 카드의 적힌 숫자가 짝수인 사건을 A 꺼낸 숫자가 5보다 작은 사건을 B라 하면 :

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\} \tag{21}$$

- 꺼낸 숫자가 짝수이면서 5보다 작은 사건 :

$$A \cap B = \{2, 4\} \tag{22}$$

- 조건부 확률 :

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{5} \tag{23}$$

두 사건 A, B에 대하여 사건 $A \cap B$가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \quad (\text{단}, P(A) \neq 0, P(B) \neq 0) \tag{24}$$

- Example #26 : 두 사건 A, B에 대하여 $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$, $P(A|B) = 1/3$일 때, $P(A^c \cap B^c)$을 구해보자.

- Example #27 : 비가 온 날의 다음 날에 비가 올 확률은 0.4 이고, 비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률은 0.3 이라고 한다. 월요일에 비가 왔을 때, 같은 주 수요일에 비가 올 확률을 구해보자.

- Example #28 : 간염 보균자가 $\frac{1}{5}$인 어떤 집단에서 혈액 검사를 할 때, 보균자 중에서는 $\frac{7}{10}$이 양성반응을 나타내고, 보균자가 아닌 사람 중에서도 $\frac{1}{100}$이 양성반응을 나타낸다고 한다. 이 집단에서 한 명의 혈액 검사 결과가 양성반응이 나타냈을 때, 이 사람이 보균자일 확률을 구해보자.

- Example #29 : 갑, 을, 병 세 명이 10개의 제비 중 2개의 당첨제비가 들어 있는 제비뽑기를 하려고 한다. 갑, 을, 병의 순서대로 제비를 한 장씩 뽑을 때, 세 명이 당첨제비를 뽑을 확률을 각각 구해보자. (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

- Example #30 : 민섭이는 친구네 집에 가면 세 번 중에 한 번의 비율로 모자를 놓고 오는 버릇을 갖고 있다. 어느 날 민섭이가 모자를 쓰고 나가서는 경수, 경원이, 영준이의 세 집을 차례로 방문하고 돌아올 때 모자를 친구네 집에 놓고 올 확률을 구해보자.

- Example #31 : 어느 야구 대회에서 5게임 중 3게임을 승리하면 우승하는 결승전에 A, B 두 팀이 진출했다. 지금까지 상대 전적으로 볼 때, A팀은 B팀을 이긴 다음 경기에서 또 이길 확률이 0.4이고, 진 다음 경기도 질 확률이 $\frac{1}{3}$이라고 한다. 현재 첫 경기를 팀이 이겼다면 팀이 5번째 게임에서 이겨 우승할 확률을 구해보자. (단, 무승부는 없다.)

3.5 독립

두 사건 A, B에 대하여 다음을 만족할 때, 두 사건 A, B는 서로 **독립**이다. 반대로 두 사건이 서로 독립이 아닐때, 두 사건은 서로 **종속**이라고 한다.

$$P(B|A) = P(B), \quad \text{또는} \quad P(A|B) = P(A) \tag{25}$$

동전을 두번 던지는 시행에서 첫번째에 동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 두번째에 동전의 앞면이 나오는 사건을 B라 하면 두 사건은 서로에게 영향을 주지 않는다. 따라서 사건 A와 B는 서로 독립이다.
두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad (\text{단}, P(A) \neq 0, P(B) \neq 0) \tag{26}$$

참고로 세 사건 A, B, C가 서로 독립일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \tag{27}$$

- Example #32 : 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $P(A \cap B^c) = 1/6$, $P(A^c \cap B) = 1/3$ 일 때, $P(A \cap B) = k$이다. 이 때, 가능한 k값들의 곱을 구해보자.

- Example #33 : 주사위 6개의 면 중 k개의 면은 노란색이고, 노란색인 면에는 1부터 k까지의 숫자가 하나씩 적혀 있다. 또, 나머지 면은 파란색이고 파란색인 면에는 나머지 숫자가 하나씩 적혀 있다. 이 주사위를 던져 노란색인 면이 나오는 사건을 A, 1또는 3 또는 6의 눈의 수가 나오는 사건을 B라 할 때, 두 사건 가 서로 독립이 되도록 하는 k의 개수를 구해보자. (단, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

- Example #34 : D 고등학교 반 학생 명을 대상으로 회장선거를 실시하여 후보 가영이에 대한 찬반 여부를 조사했더니 찬성이 표, 반대가 표 나왔다. 여학생이 명일 때, 남학생일 사건과 가영이에 대하여 찬성할 사건이 서로 독립이다. 이때, 남학생 중 가영이에 대하여 찬성한 학생 수를 구하여라.

3.6 독립시행의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n번 반복하는 **독립시행**에서 사건 A가 r번 일어날 확률은 다음과 같다.

$$ {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} \tag{28} $$

동전이나 주사위를 여러 번 던지는 경우처럼 동일한 시행을 반복하고, 각 시행의 결과가 서로 독립일 경우 이러한 시행을 독립시행이라 한다. 즉, 확률이 같은 어떤 시행을 반복할 때, 독립시행의 확률을 이용한다.

- Example #35 : 프로농구 A팀과 B팀이 5전 3선승제의 챔피언 결정전 시합을 하려고 한다. 두 팀의 승률은 모두 1/2 이고 매 경기에서 승패는 반드시 결정된다고 할 때, 4차전에서 챔피언이 결정될 확률을 구해보자.

- Example #36 : 주머니에 들어 있는 5개의 제비 중 당첨제비는 1개다. 이 주머니에서 임의로 1개의 제비를 꺼내어 당첨여부를 확인하고 다시 주머니에 넣는다. 이와 같은 시행을 계속 반복할 때, 적어도 1번 이상 당첨될 확률이 61/125이상이 되려면 이 시행을 최소한 k번 반복해야 한다. 이때, k의 값을 구해보자.

- Example #37 : 2부터 5까지의 자연수가 적혀 있는 정사면체가 있다. 이 정사면체를 던졌을 때, 밑면의 수가 소수가 나오면 동전을 2번 던지고, 소수가 아니면 동전을 3번 던진다고 할 때, 동전의 앞면이 2번 나올 확률을 구해보자.

- Example #38 : 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오면 300원을 받고 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 100원을 잃는다고 한다. 주사위를 6회 던질 때, 1000원을 얻을 확률은?

- Example #39 : 한 개의 동전을 5번 던져서 k번 째 나온 면이 앞면이면 $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 뒷면이면 $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$으로 정의한다. 이 때, $\sum_{k=1}^{5} A_k$가 역행렬을 갖지 않을 확률을 구해보자.

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr