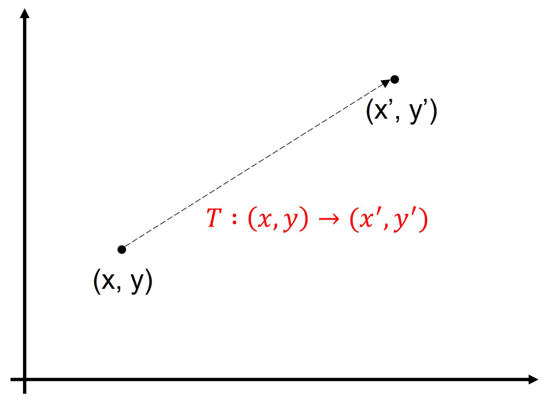
1 선형변환의 뜻

1.1 변환과 선형변환

수학이나 컴퓨터 그래픽스 등에서 어떤 대상을 다른 위치로 이동하거나 확대 또는 축소, 회전하거나, 한 종류의 좌표계 (coordinate system)에서 다른 종류의 좌표계로 바꾸어 표현함으로써 대상의 위치, 크기 또는 성질을 변경시키는 것을 **변환 (transformation)**이라 한다. 좌표평면 상의 한 점 (x, y)를 (x', y')에 대응시키는 함수이며, 기호로는 변환의 영어 첫 글자인 T를 이용해

$$T : (x, y) \longrightarrow (x', y')$$



1.2 선형변환

일반적으로 좌표평면 위의 변환 $T : (x, y) \longrightarrow (x', y')$에서 대응하는 점의 좌표 사이에

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

와 같이, x', y'이 상수항이 없는 x, y에 대한 일차식으로 나타내어질 때, 이 변환 T를 **선형변환 (linear transformation)**이라 한다.
한편 선형변환 T를 다음과 같이 행렬을 이용하여 표현할 수 도 있다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

여기서 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 선형변환 T를 나타내는 행렬 또는 선형변환 T의 행렬이라고 한다.

- Example #1 : 선형변환 T를 나타내는 식이 $x' = 2x$, $y' = x + y$일 때, T에 의하여 다음 점이 옮겨지는 점의 좌표를 구해보자.
  - (0, 0)
  - (1, 2)
  - (-1 ,1)
  - (2, -3)

- Example #2 : 선형변환 T에 의해 두 점 $(3,1)$, $(1,2)$가 각각 $(5,13)$, $(5,11)$로 옮겨질 때, 선형변환 T를 나타내는 행렬을 구해보자.

- Example #3 : 두 점 $(1,1)$, $(5,4)$를 각각 $(2,-2)$, $(4,4)$로 옮기는 선형변환 T에 의하여 점 $(3,2)$가 옮겨지는 점의 좌표를 구해보자.

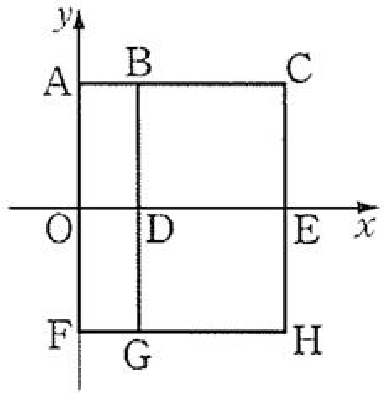
- Example #4 : 행렬 $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이 나타내는 선형변환에 의하여 점 $P(x,y)$가 다시 점 P로 옮겨질 때, x, y의 값을 구해보자.

1.3 선형변환의 성질

이렇게 선형변환은 점과 점 사이의 정의된 함수이지만, 행렬로 표현하면 행렬과 행렬 사이에 정의된 함수로 바꾸어 이해할 수 있다. 따라서 행렬의 연산 법칙으로부터 다음과 같은 두 가지 성질이 선형변환에 성립한다.

- 선형변환 T와 임의의 2×1 행렬 X_1, X_2에 대하여
  - $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$
    더하고 변환하나, 변환하고 더하나 서로 같다.
  - $T(kX_1) = kT(X_1)$
    실수를 곱하고 변환하나, 변환하고 곱하나 서로 같다.
- 위의 두 성질에 의해 $T(aX_1 + bX_2) = aT(X_1) + bT(X_2)$, (단, a, b는 실수)
- Example #5 : 선형변환 T에 대하여 $T(X_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $T(X_2) = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$일 때, 다음을 구해보자.
  - $T(3X_1)$
  - $T(X_1 + X_2)$
  - $T(2X_2 - X_1)$

- Example #6 : 아래 그림에서 직사각형 AODB와 OFGD는 합동이고, 직사각형 BDEC와 DGHE도 합동이다. 어떤 선형변환이 점 B를 점 E로, 점 D를 점 A로 옮길 때, 점 A가 옮겨지는 점은?



- Example #7 : 두 선형변환 f, g와 세 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구해보자.

  - $f(A) = B$일 때, $2f(B) + f(C)$는 ?

  - $g(A - B) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g(A + B) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$이고, $g(xA + yB) = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$일 때, 두 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 값을 구해보자.

2 여러 가지 선형변환

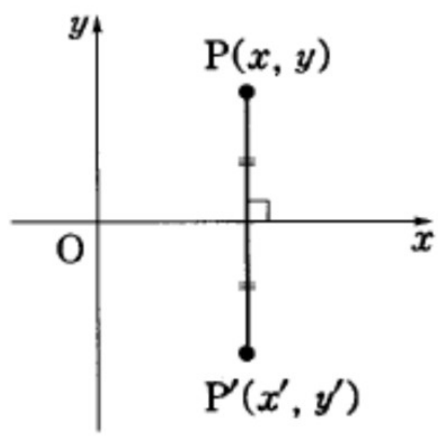
2.1 대칭변환

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 직선 또는 점에 대하여 대칭인 점 $P'(x', y')$으로 옮기는 변환을 **대칭변환 (symmetric transformation)**이라고 한다.

2.1.1 x축에 대한 대칭변환

점 $P(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면, $x' = x$, $y' = -y$에 의해

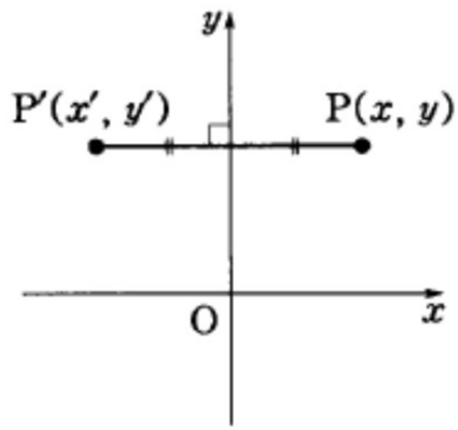
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



2.1.2 y축에 대한 대칭변환

점 $P(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면, $x' = -x$, $y' = y$에 의해

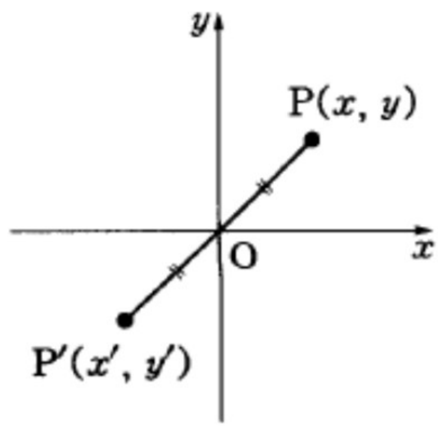
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



2.1.3 원점에 대한 대칭변환

점 $P(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면, $x' = -x$, $y' = -y$에 의해

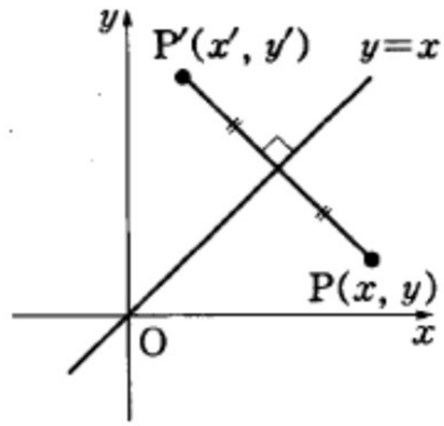
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



2.1.4 직선 $y = x$에 대한 대칭변환

점 $P(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면, $x' = y$, $y' = x$에 의해

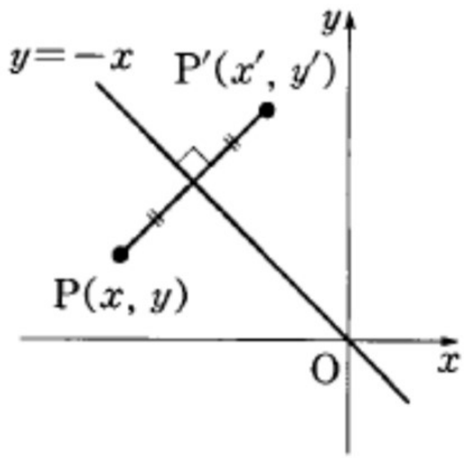
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



2.1.5 직선 $y = -x$에 대한 대칭변환

점 $P(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면, $x' = -y$, $y' = -x$에 의해

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



- Example #8 : 좌표평면 위의 점 $P(3,2)$가 다음 직선 또는 점에 대한 대칭변환에 의하여 옮겨지는 점의 좌표를 구해보자.
  - x축
  - y축
  - 원점
  - 직선 $y = x$
  - 직선 $y = -x$

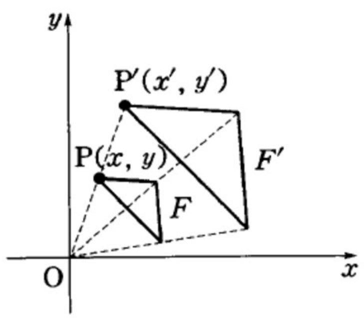
- Example #9 : 원점을 지나는 임의의 직선 $y = mx (m \neq 0)$에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 구해보자.

2.2 닮음 변환

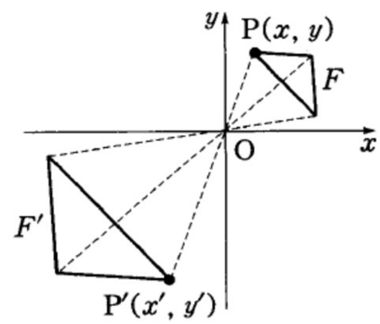
좌표평면 위에 있는 도형 F를 원점 O를 닮음의 중심으로 $k(k \neq 0)$배 확대 또는 축소하여 도형 F'을 얻었다는 것은 도형 F위의 임의의 점 $P(x, y)$를

$$\overline{OP'} = k\overline{OP} \iff x' = kx,\ y' = ky \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 성립하도록 점 $P'(x', y')$으로 옮긴다는 것과 같다.



[k가 양수−원점 O를 기준으로 같은 방향]



[k가 음수−원점 O를 기준으로 반대 방향]

이와 같이 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 점 $P'(kx, ky)$로 옮기는 선형변환을 원점 O를 닮음의 중심으로 닮음비가 k인 **닮음변환 (similarity transformation)**이라 하고,

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

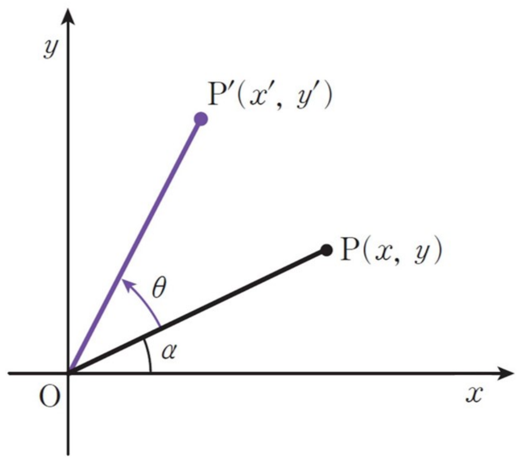
로 나타낸다. 특히, $k = 1$일 때의 닮음변환, 즉 단위행렬 E로 나타내어지는 닮음변환을 항등변환 (identity transformation)이라 한다. 항등변환은 좌표평면 위의 각 점을 자기 자신으로 대응시킨다.

- Example #10 : 원점을 닮음의 중심으로 하는 닮음비가 k인 닮음변환 T에 의하여 점 $(a, 4)$가 점 $(2, -8)$로 옮겨질 때, $k + a$의 값을 구해보자.

2.3 회전변환

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 원점 O를 중심으로 각 θ만큼 회전하여 점 $P'(x', y')$으로 옮기는 선형변환을 **회전변환 (rotation transformation)**이라 하고, 다음과 같이 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



- Example #11 : 원점을 중심으로 30°만큼 회전하는 회전변환 T에 의하여 점 $P(2, 4)$가 옮겨지는 점 P'의 좌표를 구해보자.

- Example #12 : 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환 T에 의하여 점 $P(a, b)$가 점 $P'(2, 2)$로 옮겨질 때, $a + b$를 구해보자.

3 선형변환의 합성

3.1 합성변환과 행렬

좌표평면 위의 두 선형변환

$$f : (x, y) \longrightarrow (x', y'), \quad g : (x', y') \longrightarrow (x'', y'')$$

에 대하여 점 $P(x, y)$를 점 $P(x'', y'')$으로 옮기는 변환을 f와 g의 **합성변환 (composite transformation)**이라 하고, 기호로

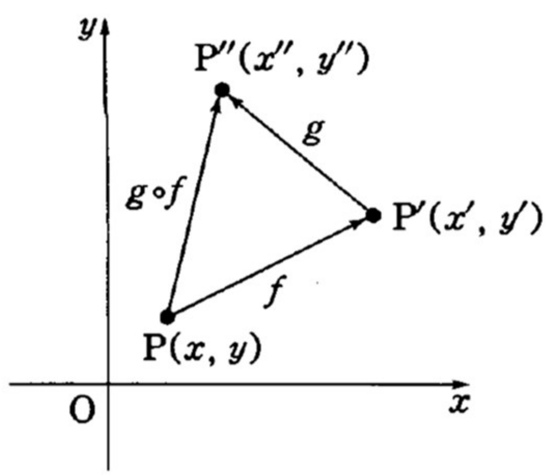
$$g \circ f : (x, y) \longrightarrow (x'', y'')$$

과 같이 나타낸다.
이 때, 두 선형변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라고 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

따라서 합성변환 $g \circ f$는 행렬 BA로 나타내어지는 선형변환이다.



- Example #13 : 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$로 각각 나타내어지는 두 선형변환 f, g에 대하여 다음 물음에 답해보자.

  ■ 합성변환 $g \circ f$와 $f \circ g$를 나타내는 행렬을 각각 구해보자.

  ■ 점 $(1, 1)$이 합성변환 $g \circ f$와 $f \circ g$에 의해 옮겨진 점의 좌표를 각각 구해보자.

- Example #14 : 다음과 같이 정의된 두 선형변환 f와 g가 있다.

$$f : (x, y) \longrightarrow (x + 2y, x + 2y), \quad g : (x, y) \longrightarrow (3x + y, x + 3y)$$

  ■ 합성변환 $g \circ f$와 $f \circ g$를 나타내는 행렬을 각각 구해보자.

  ■ 점 $(-1, 2)$가 합성변환 $g \circ f$와 $f \circ g$에 의해 옮겨진 점의 좌표를 각각 구해보자.

- Example #15 : 두 선형변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ b & 1 \end{pmatrix}$이다. 합성변환 $g \circ f$에 의하여 점 $(2,1)$이 점 $(-7,3)$으로 옮겨진다고 할 때, a, b의 값을 구해보자.

- Example #16 : 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환을 f, 직선 $y = -x$에 대한 대칭변환을 g라 할 때, 점 $P(1, \sqrt{3})$이 합성변환 $g \circ f$에 의해 옮겨지는 점 P'의 좌표를 구해보자.

3.2 합성변환에 대한 성질

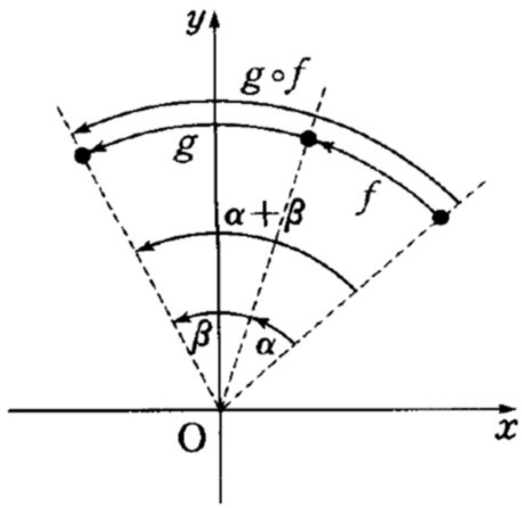
세 선형변환 f, g, h를 나타내는 행렬을 각각 A, B, C라 할 때,

- 일반적으로 $AB \neq BA$이므로
$$f \circ g \neq g \circ f$$
(교환 법칙이 성립하지 않음.)

- $A(BC) = (AB)C$이므로
$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$
(결합 법칙은 성립.)

- 원점을 중심으로 α만큼 회전하는 회전변환 f와 β만큼 회전하는 회전변환 g에 대하여 합성변환 $g \circ f$는 원점을 중심으로 $\alpha+\beta$만큼 회전하는 회전변환과 같다. 합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$g \circ f = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



원점을 중심으로 $\alpha+\beta$만큼 회전하는 회전변환을 나타내는 행렬은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

위의 식 (20)과 식 (21)이 같다고 할 때, 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

이는 **두 회전변환의 행렬의 곱은 각의 크기만 더하면 됨**을 알려준다. 따라서 회전변환끼리의 합성에서는 행렬의 곱셈을 할 필요 없이 각의 크기만 더해서 계산하면 된다.

4 선형변환의 역변환

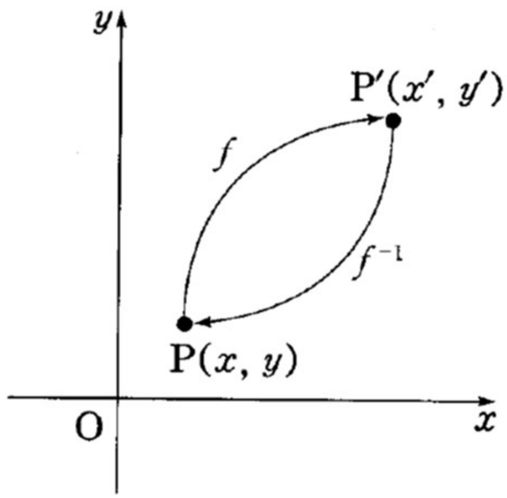
4.1 역변환의 정의

좌표평면 위의 선형변환 $f : (x, y) \longrightarrow (x', y')$을 나타내는 행렬을 A라 할 때, 행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 존재하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

이 성립하므로 f와 정반대인 변환, 즉 점 $P'(x', y')$을 점 $P(x, y)$로 옮기는 변환은 행렬 A^{-1}로 나타내어지는 선형변환임을 알 수 있다. 이 선형변환을 f의 **역변환 (inverse transformation)** 이라 하고, 기호로 f^{-1}로 나타낸다.

$$f^{-1} : (x', y') \longrightarrow (x, y)$$



이 때, 선형변환 f의 행렬 A의 역행렬 A^{-1}에 대하여

- A^{-1}가 존재하면 역변환 f^{-1}가 존재하고, 역변환 f^{-1}의 행렬은 A^{-1}이다.
- A^{-1}가 존재하지 않으면 역변환 f^{-1}가 존재하지 않는다.

- Example #17 : 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 선형변환 f가 있다. 이 때, 역변환 f^{-1}를 구해보자. 그리고 f에 의하여 점 $Q(1,0)$ 으로 옮겨지는 점 P의 좌표를 구해보자.

- Example 18 : 행렬 $\begin{pmatrix} a+2 & 2 \\ 4 & 3a-1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 선형변환 f에 의하여 자기 자신으로 옮겨지는 점 P가 원점 이외에도 존재할 때, 이를 만족하는 음수 a의 값을 구해보자.

4.2 역변환에 대한 성질

역변환 역시 역행렬에 대한 성질에 의하여 다음 세 가지 성질을 갖게 된다. 두 선형변환 f와 g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 할 때,

- $(A^{-1})^{-1} = A$ 이므로, $(f^{-1})^{-1} = f$

- $AA^{-1} = E$ 이므로, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 이므로, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

- Example #19 : 두 선형변환 f와 g를 나타내는 행렬이 각각 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$이다.
  - ■ 합성변환 $g \circ f$의 역변환 $(g \circ f)^{-1}$를 나타내는 행렬을 구해보자.
  - ■ 합성변환 $(g \circ f)^{-1}$에 의하여 점 $(1, 1)$로 옮겨지는 점의 좌표를 구해보자.

- Example #20 : 행렬 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -3 \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 선형변환 f의 역변환 f^{-1}에 의하여 점 $P(-5,-1)$이 점 $Q(-2,3)$으로 옮겨질 때, a,b의 값을 구해보자.

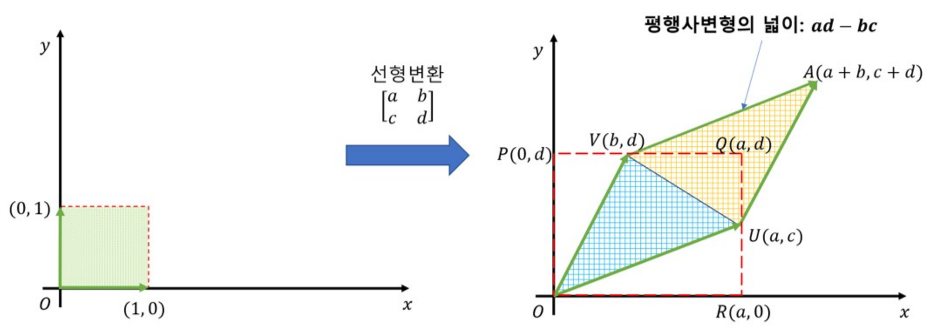
- Example #21 : 두 선형변환 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답해보자.
  - 합성변환 $f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1}$에 의하여 점 $(1,0)$이 옮겨지는 점의 좌표를 구해보자.
  - $g^{-1} \circ h \circ g = f$가 되는 선형변환 h에 의하여 점 $(1,2)$가 옮겨지는 점의 좌표를 구해보자.

5 선형변환에서의 행렬식

지난 시간에 배운 행렬식을 다시 한 번 정리해보면 다음과 같습니다.

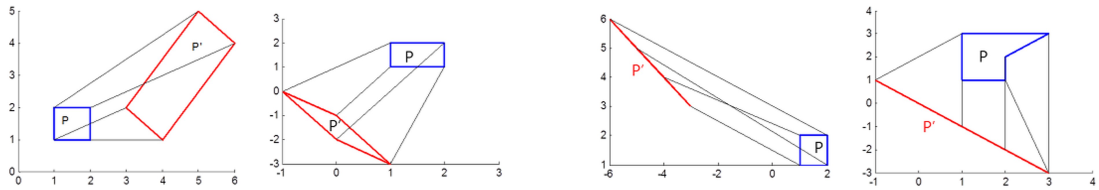
- Symbol : det(A) 또는 $|A|$
- det(A) = 0이면, 행렬 A의 역행렬은 없음 (역행렬의 존재 여부 판별 값 역할)
- det(A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- 1×1 행렬의 행렬식 : 행렬 $A = (a)$일 때, det(A) = a
- 2×2 행렬의 행렬식 : 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, det(A) = $ad - bc$
- 3×3 행렬의 행렬식 :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

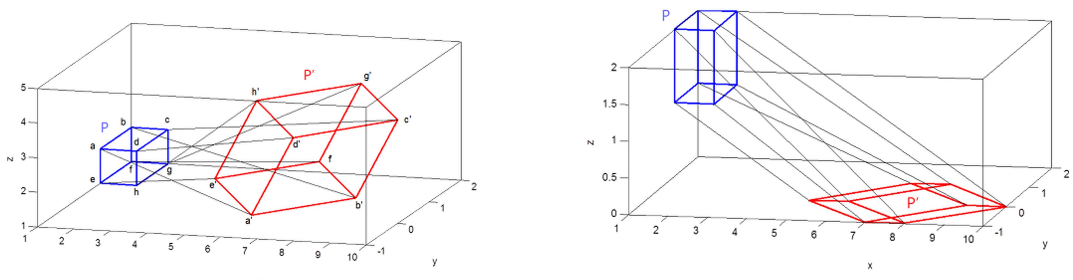


선형변환에서 행렬식이 갖는 기하학적 의미는 변환의 스케일 (scale)로 생각해 볼 수 있다. 도형 P가 선형변환에 의해 도형 P'로 변환 되었을 경우, $P' = AP$.

- 면적 $P' = |det(A)| \times$ 면적 P (2x2 matrix A)
- 부피 $P' = |det(A)| \times$ 부피 P (3x3 matrix A)



$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, det($A$)=5 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, det($A$)=-1 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, det($A$)=0 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, det($A$)=0



$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, det($A$) = -7 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, det($A$) = 0

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr