1 미분의 응용

1.1 접선의 방정식

미분계수 $f'(a)$의 기하학적 의미는 $x = a$에서 $y = f(x)$에 접하는 접선의 기울기와 같다. 따라서, 함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

접선의 방정식을 구하는 문제는 아래와 같이 세 가지 경우로 구분할 수 있다.

- 함수 위의 점 $(a, f(a))$ 가 주어진 경우
  - $y = x^3 + 2x - 1$, $(1, 2)$
  - $y = \sin x$, $(0, 0)$

- 구하고자 하는 접선의 기울기가 주어진 경우
  - $y = \ln x$, 기울기 : 1

- 곡선 밖의 점 (a, b)에서 곡선에 그은 접선을 구하는 경우
  - $y = x^2 + 1$, $(1, 1)$
  - $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $(0, 3)$

- Example #1 : $y = \ln(x+1)$ 위의 점 $P(1, \ln 2)$ 에서의 접선을 l_1, 점 P를 지나며 접선 l_1에 수직인 직선을 l_2라고 하자. 두 직선 l_1, l_2가 y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 구해보자.

- Example #2 :좌표평면 위의 원점을 지나면서 곡선 $y = x^3 e^x$에 접하고 기울기가 양수인 접선을 $y = g(x)$라 할 때, $g(e^2)$의 값을 구해보자.

- Example #3 :포물선 $y = 2x^2$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 포물선 $y = -x^2 + 2x - a$와 접할 때, 상수 a의 값을 구해보자.

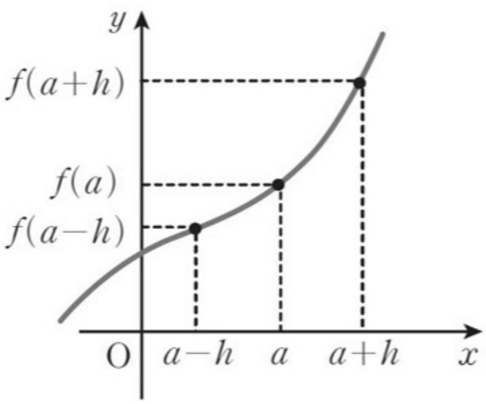
1.2 함수의 증가와 감소

함수 $y = f(x)$와 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

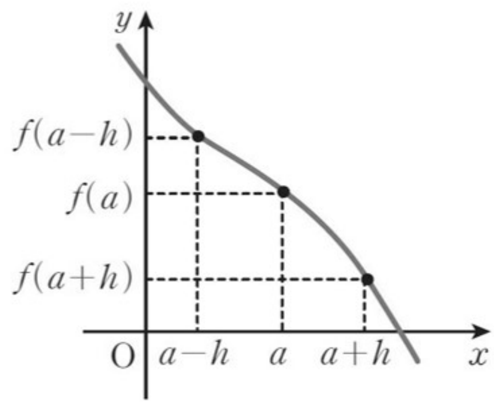
- $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$를 만족하면 $f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다고 한다.
- $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) > f(x_2)$를 만족하면 $f(x)$는 그 구간에서 **감소**한다고 한다.

$x = a$와 충분히 작은 양수 h에 대하여 함수 $y = f(x)$가

- $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$: $f(x)$는 $x = a$에서 증가상태에 있다.
- $f(a-h) > f(a) > f(a+h)$: $f(x)$는 $x = a$에서 감소상태에 있다.



(a) $x=a$에서 증가



(b) $x=a$에서 감소

1.2.1 함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 미분가능할 때,

- $f'(a) > 0$ 이면, $f(x)$는 $x = a$에서 **증가상태** 에 있다.
- $f'(a) < 0$ 이면, $f(x)$는 $x = a$에서 **감소상태** 에 있다.

1.2.2 함수 $y = f(x)$가 구간 (a, b)에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대해

- $f'(x) > 0$ 이면, $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
- $f'(x) < 0$ 이면, $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

- Example #4 : 함수 $f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + ax$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 하자. 함수 $g(t)$가 열린 구간 $(0,5)$에서 증가할 때, a의 최소값을 구해보자.

- Example #5 : 구간 $(0,\pi)$에서 정의된 함수 $f(x) = e^{-x}\sin x$가 증가하는 구간을 구해보자.

  ① $(0, \pi/4)$

  ② $(\pi/4, \pi/3)$

  ③ $(\pi/3, \pi/2)$

  ④ $(\pi/2, 3\pi/4)$

  ⑤ $(3\pi/4, \pi)$

- Example #6 : 함수 $f(x) = (a-x)e^{x^2}$이 구간 $(-\infty,\infty)$에서 감소할 때, 다음 중 상수 a의 값이 될 수 없는 것은?

  ① $-\sqrt{2}$

  ② -1

  ③ 0

  ④ 1

  ⑤ $\sqrt{3}$

2 도함수의 극값

함수 $y = f(x)$가 연속일 때,

- $x = a$를 기준으로 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀌면, $f(x)$는 $x = a$에서 **극대**라고 하고, 이때의 함수값 $f(a)$를 **극대값**이라 한다.
- $x = b$를 기준으로 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면, $f(x)$는 $x = b$에서 **극소**라고 하고, 이때의 함수값 $f(a)$를 **극소값**이라 한다.
- 극대값과 극소값을 통틀어서 **극값**이라 한다.
- 함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하고, $x = a$에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$이다.

위의 정리를 다음과 같이 정의할 수 있다. 함수 $y = f(x)$가 $f'(a) = 0$을 만족하고, $x = a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호에 따라 극소값과 극대값을 판정할 수 있다.

- 양에서 음으로 바뀌면, $f(a)$는 함수 $y = f(x)$의 극대값이다.
- 음에서 양으로 바뀌면, $f(a)$는 함수 $y = f(x)$의 극소값이다.

- Example #7 : 함수 $f(x) = 4\ln x - a/x - x$가 $x > 0$의 범위에서 극대값과 극소값을 모두 갖도록 하는 정수 a의 개수를 구해보자.

- Example #8 : 함수 $f(x) = -x^3 - (a+1)x^2 - (2a-1)x - 3$에 대하여 $y = f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점이 x축 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구해보자. (단, $a > 2$)

- Example #9 : 함수 $y = x^3 - 3x$ 위의 극대점이 아닌 점 $P(a, b)$에서의 접선이 이 곡선의 극대점을 지날 때, 상수 a의 값을 구해보자.(단, $a \neq -1$)

- Example #10 : 함수 $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$의 최대값과 최소값의 차이를 구해보자.

- Example #11 : $-2 \leq x \leq 2$에서 함수 $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$의 최대값과 최소값의 합을 구해보자.

- Example #12 : 구간 $[0, 3]$에서 함수 $y = (x^2 - 2)e^{-2x}$의 최대값과 최소값의 곱을 구해보자.

- Example #13 : 두 곡선 $y = e^x$와 $y = \ln x$ 위의 각각 점 P, Q가 있다. 선분 PQ가 직선 $y = x$에 수직일 때, 선분 PQ의 길이의 최소값을 구해보자.

3 함수의 오목과 볼록

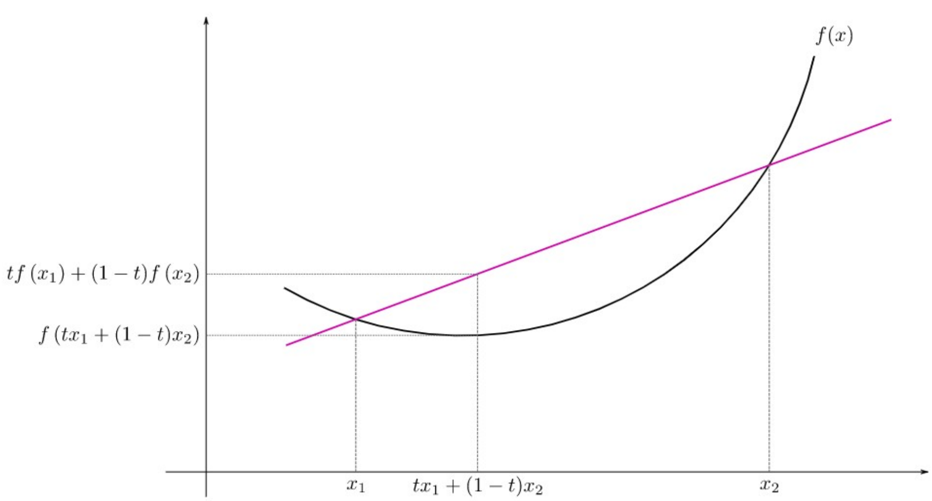
곡선의 오목과 볼록은 이계도함수 $y = f''(x)$를 통해 판단 가능하다. $f''(x)$는 $f'(x)$의 도함수이자 $f'(x)$의 접선의 기울기이다. 따라서 두 번 미분가능한 함수 $y = f(x)$는 주어진 구간에서 이차도함수 $f''(x)$에 대해 다음 관계가 성립한다.

- $f''(x) > 0$일 때, $y = f(x)$의 그래프는 주어진 구간에서 아래로 볼록하다. (convex function)
- $f''(x) < 0$일 때, $y = f(x)$의 그래프는 주어진 구간에서 위로 볼록하다. (concave function)

곡선 $y = f(x)$의 모양이 아래로 볼록한 모양에서 위로 볼록한 모양으로, 위로 볼록한 모양에서 아래로 볼록한 모양으로 바뀌는 순간의 점을 **변곡점**이라 한다. 즉, 곡선 $y = f(x)$의 변곡점 $(a, f(a))$은 $f''(a) = 0$이면서 $x = a$를 기준으로 $f''(x)$의 부호가 바뀌는 점이라고 할 수 있다.

함수의 오목과 볼록은 아래와 같은 방법으로도 판단 가능하다.

- Convex Function (볼록 함수) : 정의역의 두 원소 x_1, x_2와 0부터 1사이의 실수 t에 관하여 $f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$를 만족한다.
- Concave Function (오목 함수) : 정의역의 두 원소 x_1, x_2와 0부터 1사이의 실수 t에 관하여 $f(tx_1 + (1-t)x_2) \ge tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$를 만족한다.



- Example #14 : 곡선 $y = x + 2\sin x,\ \ (0 < x < 2\pi)$가 아래로 볼록한 구간은 ?

  ① $(0, \pi/2)$
  ② $(0, \pi)$
  ③ $(\pi/2, \pi)$
  ④ $(\pi/2, 2\pi/2)$
  ⑤ $(\pi, 2\pi)$

- Example #15 : 곡선 $y = x^2(\ln x - 2)$가 concave 함수가 되는 구간을 구해보자.

- Example #16 : 함수 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$의 그래프에서 변곡점의 x 좌표의 합을 구해보자.

- Example #17 : 함수 $f(x) = x^3 - ax^2 - 2$ 의 그래프가 점 $(1, b)$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b의 값을 구해보자.

- Example #18 : $x > a$ 에서 함수 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ 가 서로 다른 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

  를 항상 만족할 때, a의 최소값은?

- Example #19 : 함수 $f(x) = ax^2 + b\sin x$ 가 서로 다른 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

  를 항상 만족하기 위한 조건은?

4 편미분 (partial differentiation)

영어의 의미에서 파악할 수 있듯이 부분적으로 미분을 하는 방법인데, 여러 개의 문자로 이루어진 함수에서 한 문자를 기준으로 미분을 하고 나머지 문자는 상수처럼 생각하는 미분을 하는 방법이다.
$z = f(x,y)$일 때, 편미분 표기는 다음과 같다.

$$x \text{ 에 대한 편미분} : f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f$$
$$y \text{ 에 대한 편미분} : f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f$$

편미분을 구하는 방법

- $f_x(x,y)$를 구할 때는 y를 상수로 보고 $f(x,y)$를 x에 대하여 미분 실시
- $f_y(x,y)$를 구할 때는 x를 상수로 보고 $f(x,y)$를 y에 대하여 미분 실시

- Example #20 : 함수 $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$일 때, $f_x(1,2)$와 $f_y(1,2)$의 값을 구해보자.

- Example #21 : 함수 $g(x,y) = \sin(x + y^2)$일 때, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ 를 구해보자.

- Example #22 : $f(x+y) = f(x) + f(y) - xy$이고, $f'(0) = 1$일 때, $f(x)$를 구해보자.

- Example #23 : 다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$을 만족시킨다.

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 1} = 14$$

  일 때, $f'(0)$의 값을 구해보자.

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr