1 역행렬

1.1 역행렬의 정의

0이 아닌 실수 a에 대하여 $ax = xa = 1$을 만족하는 실수 x가 존재할 때, x를 a의 곱셈에 대한 역원이다. 이와 마찬가지로 n차 정사각행렬 A, X와 단위행렬 E에 대하여

$$AX = XA = E \tag{1}$$

를 만족하는 행렬 X를 행렬 A의 **역행렬**이라 하고 기호로 A^{-1}와 같이 나타낸다.

행렬 A에 대해 식 (1)을 만족하는 행렬 X가 존재하면 A는 **가역행렬**이라 하고, 반대로 X가 존재하지 않으면 A를 **비가역행렬**이라고 한다.

임의의 2×2 가역행렬을 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 할 때, A의 역행렬 $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$가 존재한다고 가정하면 $AX = E$이므로

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\therefore \begin{array}{l} ap+br=1 \;\; \text{3-1}, \quad aq+bs=0 \;\; \text{3-2} \\ cp+dr=0 \;\; \text{3-3}, \quad cq+ds=1 \;\; \text{3-4} \end{array} \tag{3}$$

- 3-1 x d - 3-3 x b : $(ad-bc)p = d$
- 3-2 x d - 3-4 x b : $(ad-bc)q = -b$
- 3-1 x c - 3-3 x a : $-(ad-bc)r = c$
- 3-2 x c - 3-4 x a : $-(ad-bc)s = -a$

만약 $ad-bc = 0$이면, $a = b = c = d = 0$이 되므로, 이는 3-1과 3-4에 모순된다. 따라서, $ad - bc \neq 0$ 이므로,

$$p = \frac{d}{ad-bc},\; q = \frac{-b}{ad-bc},\; r = \frac{-c}{ad-bc},\; s = \frac{a}{ad-bc}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

정리해보면, 이차 정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

- $ad - bc \neq 0$ (가역행렬) : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- $ad - bc = 0$ (비가역행렬) : A의 역행렬이 존재하지 않는다.

- Example : 2x2 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$ 의 역행렬을 각각 구해보자.

- Example : 행렬 $A = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -4 & y-2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A = A^{-1}$가 성립하도록 x, y를 정할 때, $x + y$ 값을 구해보자.

- Example : 행렬 A 에 대하여 $A^2 + 3A = E$가 만족할 때, 행렬 A의 역행렬을 구해보자.

- Example : 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이고, 행렬 B는 $ABA = A$를 만족한다. 행렬 B를 구해보자.

- Example : 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때, 행렬 $A^{-1} + BA$를 구해보자.

1.2 역행렬의 성질

같은 꼴의 두 정사각행렬 A, B의 역행렬 A^{-1}, B^{-1}가 존재할 때, 같은 꼴의 정사각행렬 X와 단위행렬 E에 대하여 다음이 성립한다.

- $(A^{-1})^{-1} = A$

- $E^{-1} = E$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ (단, m은 자연수)

- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ (단, $k \neq 0$인 실수)

- $AX = B \iff X = A^{-1}B$

- $XA = B \iff X = BA^{-1}$

- Example : 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $\frac{1}{k}A$의 역행렬의 모든 성분의 합이 10일 때, 상수 k의 값을 구해보자. (단 $k \neq 0$)

- Example : 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 4 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$가 성립할 때, 상수 k의 값을 구해보자.

- Example : 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$일 때, $B(A^{-1}B)^{-1}$를 구해보자.

1.3 행 연산에 의한 역행렬 계산

역행렬을 구하는 방법 중 하나로, 정방행렬 A에 대하여 $[A|I]$의 A 부분이 단위행렬 I가 되도록 행 연산한 결과로 만들어지는 $[I|B]$에서 B는 행렬 A의 역행렬 A^{-1}이다. 이러한 방법을 가우스 - 요르단 소거법이라고도 한다. 만약 결과 앞 부분이 단위행렬 꼴로 나타낼 수 없으면 행렬 A는 비가역행렬이고, A^{-1}이 존재하지 않는다. 예를 들어 보자. 다음 행렬의 역행렬을 구해보자.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

먼저, $[A|I]$의 형태로 만든다.

$$[A|I] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & |1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & |0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & |0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

첫 번째 행에 각각 2와 -1를 곱한 후, 두 번째 행과 세 번째 행에서 각각 첫 번째 행을 빼주고, 더하면 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

따라서 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 이다.

- Example : 다음 행렬의 역행렬이 존재한다면 구해보자.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Example: 다음 행렬의 역행렬이 존재한다면 구해보자.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Example : 다음 행렬의 역행렬이 존재한다면 구해보자.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Example : 다음 3×3 행렬 B의 역행렬 D^{-1}를 구해보자.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Example : 다음 3×3 행렬 E의 역행렬 E^{-1}를 구해보자.

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{-1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 16 & 11 & 2 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

2 역행렬을 이용한 연립선형방정식의 풀이

지난 시간에 배운 연립선형방정식을 아래와 같이 행렬로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

행렬 A가 가역행렬이면, 연립선형방정식의 해는 역행렬을 이용하여 유일한 해,

$$X = A^{-1}B$$

를 갖는다.

다음 연립선형방정식의 해를 역행렬을 이용하여 구해보자.

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ &2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ &x_1 + 8x_3 = -1 \end{aligned}$$

위 방정식을 $Ax = b$ 형태의 행렬로 표현하면

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

위에서 우리는 행렬 A의 역행렬 A^{-1}을 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 와 같이 구했기 때문에,

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

따라서 $x_1 = -1$. $x_2 = 1$, $x_3 = 0$이다.

- Example : 다음 선형연립방정식의 해를 역행렬을 이용하여 구해보자.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

- Example : 연립방정식 $\begin{cases} \text{2x + 5y = 3} \\ \text{x + 3y = 1} \end{cases}$ 을 행렬을 이용하여 푸는 과정에서 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$이 나왔다. 행렬 A의 원소의 합을 구해보자.

- Example : 다음 선형연립방정식의 해를 역행렬을 이용하여 구해보자.

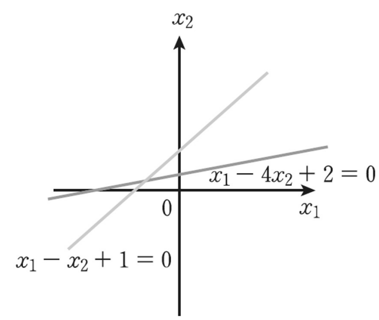
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

만약 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는 경우 (비가역행렬), 주어진 해가 무수히 많거나 해가 없는 경우이다.

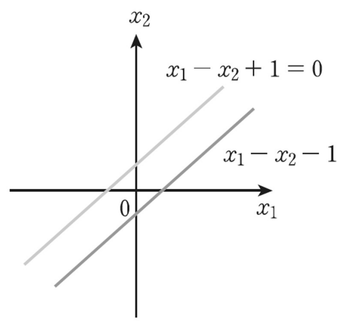
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

에서 $\det(\mathrm{A}) = ad - bc = 0$이므로,

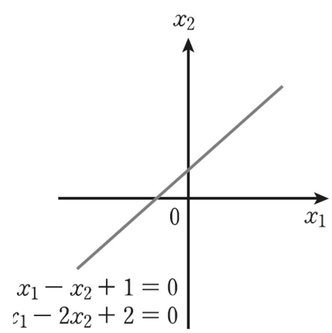
- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{p}{q}$이면, 해가 무수히 많다. (부정)
- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{p}{q}$이면, 해가 없다. (불능)



하나의 해를 갖는 경우



해가 존재하지 않는 경우



해가 무수히 많은 경우

- Example #16 : 이차 정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 성립할 때, x, y에 대한 연립일차방정식 $ax + by = 1$, $cx + dy = -2$의 해를 구해보자.

- Example #17 : x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$의 해를 구해보자.

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr