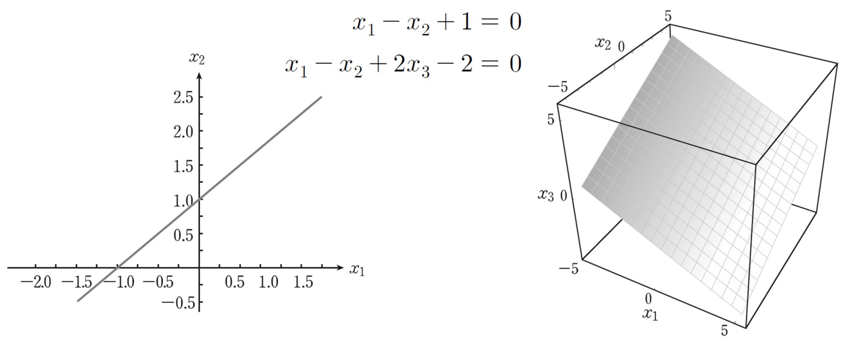
1 선형방정식

1.1 선형방정식

미지수를 나타내는 변수 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$과 상수 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b$에 대하여 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$와 같은 방정식을 **선형방정식 (linear equation)**이라 한다. 선형 방정식은 일차방정식이라고도 한다.



(a) $x_1 - x_2 + 1 = 0$ 의 그래프 (b) $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0$ 의 그래프

특히, $b = 0$과 같이 모든 상수항이 0인 방정식을 동차 (homogeneous) 방정식이라고 하며, 반대로 상수항이 0이 아닌 방정식을 비동차방정식이라고 한다. 동차선형방정식은 항상 해가 존재한다.

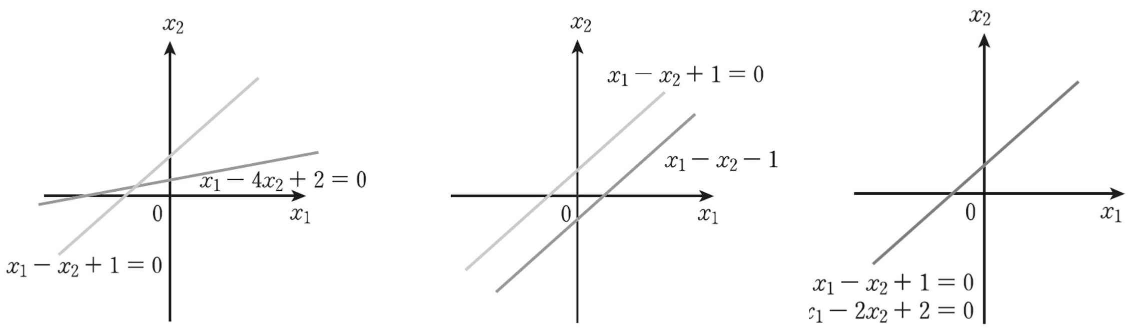
- 자명한 해(trivial solution) : $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$
- 자명하지 않은 해(nontrivial solution) : 자명한 해를 제외한 모든 해 집합.

1.2 연립선형방정식

특정 미지수에 대한 선형방정식들이 모여 있는 것을 **연립선형방정식 (system of linear equations)** 또는 선형 시스템 (linear system)이라고 한다. 다시 말해, 미지수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 에 관한 유한개의 선형방정식의 모임이다.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

연립선형방정식의 모든 방정식을 만족하는 미지수의 값을 **해(solution)**라 하고, 하나의 해가 존재하거나 해가 존재하지 않는 경우 (불능, impossible), 해가 무수히 많은 경우 (부정, indeterminate)가 있다.



하나의 해를 갖는 경우 해가 존재하지 않는 경우 해가 무수히 많은 경우

연립선형방정식의 해를 구하는 방법은 대입법과 소거법이 있다. 대입법은 특정 미지수를 다른 미지수(들)의 식으로 표현하여, 해당 미지수에 이 식을 대입해서 해를 구하는 방법이다. 예를 들어,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

에서 식 (4)을 x_1에 대한 식으로 바꾸면 $x_1 = -2x_2 + 5$이고, 이를 식 (5)의 우변에 대입하면 $2(-2x_2 + 5) + 3x_2 = 8$ 이므로, $x_2 = 2$를 구할 수 있다. 이를 이용해 $x_1 = 1$의 값을 구할 수 있으며, 연립선형방정식의 해는 $x_1 = 1,\ x_2 = 2$이다.

소거법은 동치인 연립선형방정식을 만드는 연산을 사용해 방정식에서 미지수를 제거하며 해를 구하는 방법이다. 식 (4)에 -2를 곱하면

$$\begin{aligned} -2x_1 - 4x_2 &= -10 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

이고, 두 선형방정식을 더하면, $x_1 = 1,\ x_2 = 2$의 해를 구할 수 있다.

1.3 행렬과 연립선형방정식

연립선형방정식을 행렬과 벡터의 곱으로 $Ax = b$와 같이 표현한 것을 **행렬방정식 (matrix equation)**이라고 한다. x, y에 대한 연립일차방정식 $ax + by = p$, $cx + dy = q$를 행렬을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

$$Ax = b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Example #1 : 다음 연립선형방정식을 행렬방정식으로 표현해보자.

$$\begin{aligned} &3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ &-2x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ &7x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ &2x_1 + x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 10 \end{aligned}$$

2 행렬의 뜻

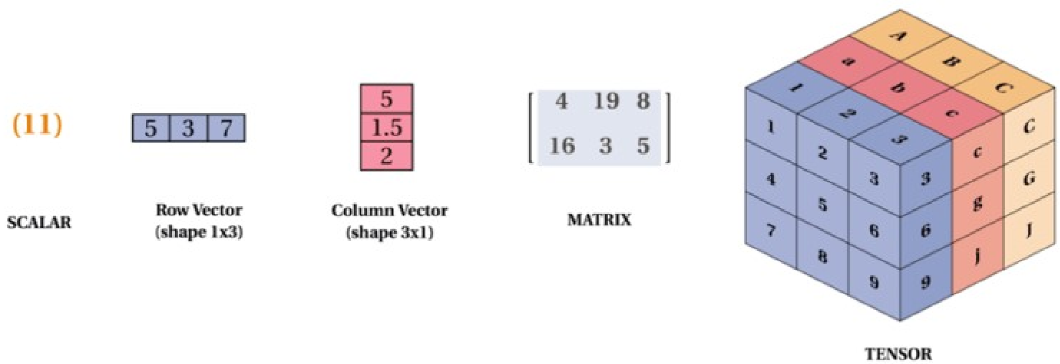
- 몇 개의 수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것을 **행렬 (matrix)**이라 한다.
- 행렬을 구성하는 각각의 수 또는 문자를 그 행렬의 성분 (entry)이라 한다.
- 행렬에서 성분의 가로줄을 행, 세로줄을 열이라 한다.
- 행의 개수가 m, 열의 개수가 n인 행렬을 $m \times n$행렬이라 하고, 행과 열의 개수가 모두 n개인 $n \times n$ 행렬을 n차 정사각행렬 (square matrix)이라 한다.
- 행렬 A에서 제 i행과 제 j열이 만나는 곳에 있는 성분을 행렬 A의 (i, j) 성분이라 하고, 기호로 a_{ij}와 같이 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{행}$$

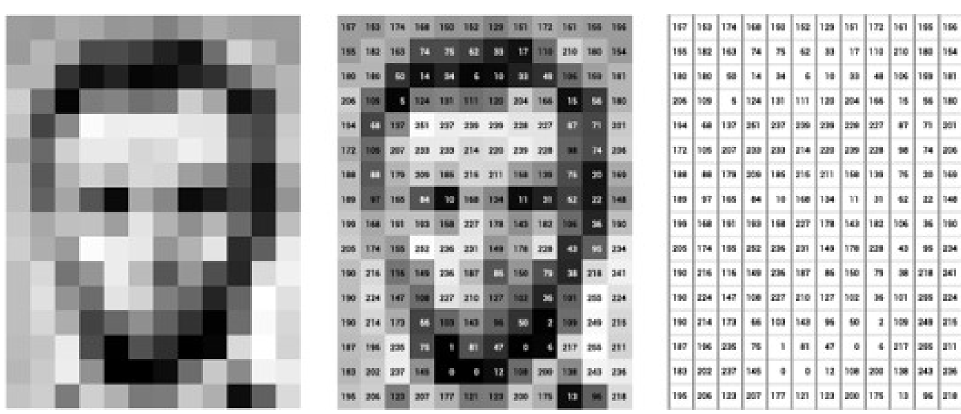
↑ 열

$m \times n$

- 스칼라 (scalar) : 숫자 하나로 이루어진 데이터
- 벡터 (vector) : 여러 숫자로 이루어진 데이터 레코드
- 행렬 (matrix) : 벡터가 여럿인 데이터 집합
- 텐서 (tensor) : 같은 크기의 행렬이 여러개 있는 것



- 컴퓨터의 메모리 구조는 행렬 형태로 표현이 가능함
- 표 형태의 데이터는 모두 행렬로 표현할 수 있음
- 특히 이미지 데이터는 모두 행렬로 표현하며, AI, Machine Learning의 기초도 행렬임



2.1 행렬 사용 예제

- 2년간 판매 실적의 합 구하기

2020년	Hot Americano	Ice Americano
상반기	1,500 잔	1,600 잔
하반기	2,200 잔	1,300 잔

2021년	Hot Americano	Ice Americano
상반기	1,600 잔	2,300 잔
하반기	2,100 잔	1,000 잔

$$\begin{bmatrix} 1500 & 1600 \\ 2200 & 1300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1600 & 2300 \\ 2100 & 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3100 & 3900 \\ 4200 & 2300 \end{bmatrix}$$

- 여행 예산 구하기 (10박 11일)

	대전	대구	부산	비용
선택지 1	2박	3박	5박	10만원
선택지 2	5박	4박	1박	15만원
선택지 3	3박	3박	4박	20만원

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 \\ 130 \\ 155 \end{bmatrix}$$

2.2 서로 같은 행렬

두 행렬 $A = (a_{ij}$와 $B = (b_{ij}$가 같은 꼴이고, 모든 i, j에 대하여 $a_{ij} = b_{ij}$, 즉 대응하는 성분이 각각 같을 때, 두 행렬 A, B는 서로 같다(상등)고 하며, 기호로

$$A = B$$

두 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$가 서로 같다는 것은 $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

- Example #2 : 다음 등식을 만족하는 문자의 값을 구해보자.

  ■ $\begin{pmatrix} a^2 & -6 \\ b^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & ab \\ 9 & a+b \end{pmatrix}$

  ■ $\begin{pmatrix} 2a & 3 \\ b+1 & c^2+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & c^2-ac \\ 0 & 4c \end{pmatrix}$

2.3 전치 행렬

$m \times n$ 크기의 행렬 $A = (a_{ij})$의 행과 열을 바꾼 행렬을 행렬 A에 대한 **전치행렬 (transposed matrix)**이라고 하고, $A^T = (a_{ji})$로 표기, $n \times m$의 크기를 갖는다.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(kA)^T = kA^T$

- Example #3 : 다음 행렬의 전치 행렬을 구해보자.

  ■ A $= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad A^T =$

  ■ B $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B^T =$

3 특수한 행렬

3.1 대각행렬

$n \times n$ 정방행렬에서 대각선을 제외한 모든 항들이 0인 행렬 D를 **대각행렬 (diagonal matrix)** 이라고 한다.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

선형대수학에서 대각행렬은 많이 언급된다.

3.2 대각항과 대각합

정방행렬 A의 주대각선 위의 모든 성분들을 **대각항**이라고 하고, 각 대각항의 합을 **대각합 (trace)**이라고 하며, $tr(A)$ 또는 $trace(A)$로 표기한다.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow tr(A) = -3$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

- $tr(A^T) = tr(A)$
- $tr(cA) = c\ tr(A)$
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(A - B) = tr(A) - tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

3.3 영행렬

성분이 모두 0인 행렬, 즉 모든 i, j에 대하여 $a_{ij} = 0$인 행렬을 **영행렬 (zero matrix)**이라고 한다. 영행렬은 간단히 굵은 체의 $\mathbf{O}$이라고 표기한다. 만약 그 크기를 강조할 필요가 있는 경우에는 $m \times n$ 영행렬을 $\mathbf{O}_{m\times n}$으로 표기하기도 한다.

$$(0)\,,\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \tag{1}$$

3.4 대칭행렬과 교대행렬

어떤 정방행렬 $n \times n$ 행렬이 자신의 전치행렬과 똑같을 때, 즉 행렬 A가 $A = A^T$를 만족할 때, 행렬 A를 **대칭행렬 (symmetric matrix)** 이라고 한다. 다시 말해, 행렬 $A = (a_{ij})$에서 모든 i, j에 대해 $a_{ij} = a_{ji}$가 성립하는 행렬이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -8 & 7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 8 \\ -2 & 8 & -9 \end{pmatrix}, \dots$$

반대로 정방행렬 $n \times n$ 행렬 A에 대해 $A = -A^T$를 만족할 경우 이 행렬을 **교대행렬 (skewed-symmetric matrix**이라고 한다. 다시 말해, 행렬 $A = (a_{ij})$에서 모든 i, j에 대해 $a_{ij} = -a_{ji}$가 성립하는 행렬이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -8 & 7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ -2 & -8 & -9 \end{pmatrix}, \dots$$

3.5 삼각행렬

주대각선 아래에 있는 모든 항들이 0인 $n \times n$ 행렬 A를 **상부삼각행렬 (upper triangular matrix)**이라고 하며, 주대각선 아래에 있는 모든 항들이 0인 $n \times n$ 행렬 A를 **하부삼각행렬 (lower triangular matrix)**이라고 한다. 상부삼각행렬과 하부삼각행렬을 통칭하여 **삼각행렬 (triangular matrix)**이라고 한다.

- 상부삼각행렬 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

- 하부삼각행렬 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ -5 & 5 & -9 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} & 0 \\ * & \end{pmatrix}$$

4 행렬의 덧셈과 뺄셈

4.1 행렬의 덧셈과 뺄셈

같은 꼴의 두 행렬 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$에 대하여

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

즉, 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$일 때,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b22 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b22 \end{pmatrix}$$

행렬의 덧셈에 관한 기본 법칙은 다음과 같다.

- 교환 법칙 :

$$\begin{aligned} A + B \quad &= (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) \\ &= (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A \end{aligned}$$

- 결합 법칙 :

$$\begin{aligned} A + (B + C) \quad &= (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) \\ &= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (A + B) + C \end{aligned}$$

- 항등원 : 영행렬 (zero matrix) $A + 0 = 0 + A = A$.
- 역원 : 행렬 A의 역원은 -A, $A + (-A) = (-A) + A = 0$

4.2 행렬의 실수배

행렬 $A = (a_{ij})$와 실수 k에 대하여, 이 행렬을 k배 한 행렬을 kA로 나타낸다. 이는 행렬 A의 각 성분을 k배 한다는 것이다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \quad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}.$$

따라서 $kA = K(a_{ij}) = (ka_{ij})$임을 알 수 있다.

- Example #4 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$일 때, $A - 2(B - 3C)$를 구해보자.

- Example #5 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 X, Y가

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &= 2A \\ X + 2Y &= 3B \end{aligned}$$

  를 만족할 때, 행렬 X의 모든 성분의 합을 구해보자.

5 행렬의 곱셈

5.1 행렬의 곱셈의 정의

행렬의 곱셈은 곱해지는 행렬의 i 행의 성분들과 곱하는 행렬의 j 열의 성분들을 짝을 맞추어 곱한 다음 모두 더하여 새로운 행렬의 (i, j) 성분을 결정하는 것이다. 따라서 두 행렬의 곱셈 (AB)을 위해서는 A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 같아야 한다.
즉, 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$일 때,

$$AB = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

- Example #6 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Example #7 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Example #8 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

5.2 행렬의 곱셈에 대한 성질

- 결합 법칙 : (AB)C = A(BC)
- 분배 법칙 : A(B+C) = AB + AC,   (A+B)C = AC + BC
- (kA)B = A(kB) = k(AB) (단, k는 실수)
- 행렬의 곱셈에 있어서 교환 법칙은 일반적으로 성립하지 않음. 아래 예를 통해 $AB \neq BA$ 임을 확인해 보자.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

- Example #9 : 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 2 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$이 성립할 때, 5(x-y)의 값을 구해보자.

5.3 단위행렬

임의의 행렬 A와 E에 대하여, $AE = EA = A$가 성립한다면 E는 곱셈에 대한 항등원이라고 할 수 있다. 그런데 행렬의 곱 AE와 EA가 모두 정의되려면 행렬 A와 E는 같은 꼴의 정사각행렬이어야 한다. 즉, 곱셈에 있어서 항등원이 존재하려면 반드시 그 행렬과 항등원은 n차 정사각행렬이어야 한다.
임의의 n차 정사각행렬 A와 곱셈에 대한 항등원인 n차 정사각행렬 E를

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

이라 하면, 행렬의 곱셈의 정의로부터 행렬 AE의 (i, j) 성분

$$a_{i1}e_{1j} + a_{i2}e_{2j} + \cdots + a_{ij}e_{jj} + \cdots + a_{in}e_{nj}(i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n)$$

는 행렬 A의 (i, j) 성분인 a_{ij}와 같아야 한다. 즉,

$$a_{i1}e_{1j} + a_{i2}e_{2j} + \cdots + a_{ij}e_{jj} + \cdots + a_{in}e_{nj} = a_{ij}$$

이 수식은 a_{ik} $(k = 1, 2, \dots, n)$가 어떤 값이든 항상 성립해야 하므로 성분 $e_{jj} = 1$이고, e_{jj}를 제외한 e_{kj} $(k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n)$는 모두 0이 되어야 함을 알 수 있다.
따라서 행렬 E는 항상

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

의 꼴을 가짐을 알 수 있다. 이러한 행렬 E는 **단위행렬 (unit matrix)** 또는 **항등행렬 (identity matrix)**이라 한다.

- Example #10 : 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 $A^2 = xA + yE$를 만족할 때, 실수 x, y의 값을 구해보자.

5.4 행렬의 거듭제곱

실수의 거듭제곱과 마찬가지로 행렬 A의 거듭제곱도 $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A$, ...로 정의한다. 임의의 정사각행렬 A에 대하여 $A^n = A^{n-1}A$, $(n \geq 2)$로서 행렬의 거듭제곱을 정의한다.

- 케일리-해밀턴의 정리 (Cayley - Hamilton theorem) : 임의의 이차 정사각행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$가 항상 성립한다.
  - $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 직접 식에 대입하여 증명 가능함
- 특수한 행렬의 거듭제곱
  - $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ an & 1 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & an \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Example #11 : 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 A^{10}을 구해보자.

- Example #12 : 행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$일 때, $A^3 + 2A^2 + 4A$를 A와 E에 대한 식으로 나타내보자. (단, E는 단위행렬)

6 연립선형방정식의 가우스 소거법

연립방정식을 푸는 방법 중 하나로, 전진소거와 역대입의 순서로 이루어진 방법이다. 다음의 예를 보자.

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\
6x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\
-4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

가우스 소거법의 첫 번째 순서로 '전진소거' 방법이 있다. x_1와 x_2를 차례로 소거한다.

$$
\begin{aligned}
2x_1 \quad -x_2 + x_3 &= 2 \\
4x_2 - x_3 &= -5 \\
4x_2 + 4x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 \quad +x_3 &= 2 \\
4x_2 \quad -x_3 &= -5 \\
5x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

여기서 가우스 소거법의 두 번째 순서로 '역대입'이 쓰이며, $x_3 = 2$를 구한 후, 이를 이용해 역순으로 $x_2 = -\frac{3}{4}$, $x_1 = -\frac{3}{8}$을 구할 수 있다.

이를 정리하면, 아래와 같이 $x_1, x_2, \ldots, x_n$에 대한 연립선형방정식의 해를 다음과 같이 **가우스 소거법**으로 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

- 전진소거 : 가감법을 통해 위 식에서 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$의 계수들을 차례대로 소거해 상삼각 형태로 만든다.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \quad &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n \quad &= b'_2 \\
&\vdots \\
a'_{nn}x_n \quad &= b'_n
\end{aligned}
$$

- 역대입 : 전진소거로 만든 상삼각 형태의 맨 아래 방정식부터 대입법을 통해 x_n, x_{n-1}, $\ldots$, x_1을 차례대로 구한다.

- Example #13 : 다음 연립선형방정식을 가우스 소거법으로 풀어보자.

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2\\
&5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 10\\
&4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1
\end{aligned}
$$

- Example #14 : 다음 연립선형방정식을 가우스 소거법으로 풀어보자.

$$
\begin{aligned}
&x + 2y + 3z = 9\\
&2x - y + z = 8\\
&3x - 3z = 3
\end{aligned}
$$

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr