인공신경망과딥러닝심화

Lecture 04. 가장 훌륭한 예측선

동덕여자대학교
데이터사이언스 전공
권 범

목차

시작하기 전에

❖ **가장 훌륭한 예측선 (1/3)**

- 딥러닝은 자그마한 통계의 결과들이 무수히 얽히고설켜 이루어지는 복잡한 연산의 결정체
- 우리 몸을 이해하려면 몸을 구성하는 기본 단위인 세포의 역할을 알아야 하듯,
  딥러닝을 이해하려면 딥러닝의 가장 말단에서 이루어지는
  기본적인 두 가지 계산 원리를 알아야 함
- 바로 **선형 회귀**와 **로지스틱 회귀**

시작하기 전에

❖ 가장 훌륭한 예측선 (2/3)

- 선형 회귀와 로지스틱 회귀의 개념을 중·고등학교 수준에서 공부하기란 쉽지 않음
- 대학에서 통계를 전공하지 않았다면 익숙하지 않을 주제
- 그러다 보니 여기서부터 시작하는 머신러닝이 쉽지 않아 보이는 것이 무리는 아님
- 선형 회귀와 로지스틱 회귀의 개념을 이해하기 위해
  반드시 어려운 공식이나 수학, 통계학 개념에 통달해야 하는 것은 아님
- 어렵지 않은 수학 용어와 중·고등학교 수준으로도
  딥러닝의 밑그림이 되는 개념을 충분히 이해할 수 있음

이를 알고 나면 딥러닝을 구동시키는 원리에 한 걸음 다가설 수 있음

시작하기 전에

❖ 가장 훌륭한 예측선 (3/3)

- 이 장의 제목인 '가장 훌륭한 예측선'이라는 표현은
  '선형 회귀(Linear Regression) 분석을 이용한 모델'의 의미를 쉽게 풀어서 표현한 것
- 머신러닝은 제대로 된 선을 긋는 작업부터 시작
- 선의 방향을 잘 정하면 그 선을 따라가는 것만으로도
  지금은 보이지 않는 미래의 것을 예측할 수 있기 때문임
- 첫 단추가 많은 것을 결정

진입 장벽을 허물고 딥러닝의 세계로 들어가 봅시다.

01. 선형 회귀의 정의

❖ 선형 회귀의 정의 알아보기 (1/4)

- 아래 문장을 보자

"학생들의 중간고사 성적이 다 다르다."

- ✓ 성적은 다 다를 것임
- ✓ 그런데 위 문장이 나타낼 수 있는 정보는 너무 제한적임
- ✓ 학급의 학생마다 제각각 성적이 다르다는 당연한 사실 외에는 알 수 있는 것이 없음

❖ 선형 회귀의 정의 알아보기 (2/4)

- 이번에는 다음 문장을 보자

> **학생들의 중간고사 성적이 [   ]에 따라 다 다르다.**

- ✓ 이 문장은 정보가 담길 여지를 열어 놓고 있음
- ✓ [ ] 부분에 시험 성적을 좌우할 만한 여러 가지 것이 들어간다면 좀 더 많은 사실을 전달할 수 있음
- ✓ 예를 들어 공부한 시간, 시험 당일의 컨디션, 사교육비 지출액 등이 들어갈 수 있음
- ✓ 무엇이 들어가든지 해당 성적의 이유를 나름대로 타당하게 설명할 수 있음
- ✓ 앞의 문장보다는 이 문장이 중간고사 성적의 차이와 이유를 나타낼 때 더욱 효과적

01. 선형 회귀의 정의

❖ 선형 회귀의 정의 알아보기 (3/4)

- 여기서 대괄호 [ ]에 들어갈 내용을 '정보'라고 함
- 머신러닝과 딥러닝은 이 정보가 필요함
- 정보를 정확히 준비해 놓기만 하면 성적을 예측하는 방정식을 만들 수도 있음

- 이 단순한 정의를 이번에는 좀 더 수학적인 언어로 표현해 보면 다음과 같음
- 성적을 변하게 하는 '정보' 요소를 x라고 하고,
  이 x 값에 따라 변하는 '성적'을 y라고 가정
- 이를 정의하면 'x 값이 변함에 따라 y 값도 변한다'가 됨
- 이 정의 안에서 독립적으로 변할 수 있는 값 x를 **독립 변수**라고 함
- 또한, 이 독립 변수에 따라 종속적으로 변하는 y를 **종속 변수**라고 함

❖ 선형 회귀의 정의 알아보기 (4/4)

- 독립 변수가 x 하나뿐이어서 이것만으로 정확히 설명할 수 없을 때에는
  x_1, x_2, x_3 등 x 값을 여러 개 준비해 놓을 수도 있음
- 하나의 x 값만으로도 y 값을 설명할 수 있다면
  단순 선형 회귀(Simple Linear Regression)라고 함
- 또한, x 값이 여러 개 필요하다면
  다중 선형 회귀(Multiple/Multivariable Linear Regression)라고 함

02. 가장 훌륭한 예측선이란?

❖ 선형 회귀와 딥러닝 (1/5)

- 우선 독립 변수가 하나뿐인 단순 선형 회귀의 예를 공부
- 성적을 결정하는 여러 요소 중에 '공부한 시간' 한 가지만 놓고 생각해 보겠음
- 중간고사를 본 4명의 학생에게 각각 공부한 시간을 물어보고
  이들의 중간고사 성적을 아래 표와 같이 정리했다고 가정

공부한 시간과 중간고사 성적 데이터

공부한 시간	2시간	4시간	6시간	8시간
성적	81점	93점	91점	97점

[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

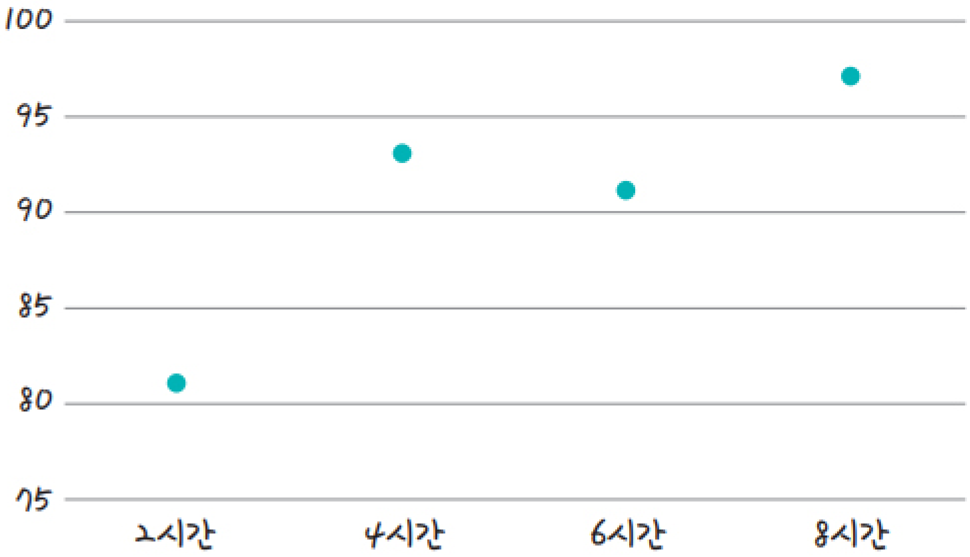
02. 가장 훌륭한 예측선이란?

❖ 선형 회귀와 딥러닝 (2/5)

- 여기서 공부한 시간을 x라고 하고 성적을 y라고 할 때,
  집합 X와 집합 Y를 다음과 같이 표현할 수 있음

$X = \{2, 4, 6, 8\}$

$Y = \{81, 93, 91, 97\}$



공부한 시간과 성적을 좌표로 표현

✓ 좌표 평면에 나타내 놓고 보니, 왼쪽이 아래로 향하고 오른쪽이 위를 향하는 일종의 '선형'을 보임

✓ 선형 회귀를 공부하는 과정은 이 점들의 특징을 가장 잘 나타내는 선을 그리는 과정과 일치

[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

02. 가장 훌륭한 예측선이란?

❖ 선형 회귀와 딥러닝 (3/5)

- 이 데이터에서 주어진 점들의 특징을 담은 선은 직선이므로 곧 일차 함수 그래프
- 일차 함수 그래프는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있음

$$y = ax + b$$

- ✓ 여기서 x 값은 독립 변수이고 y 값은 종속 변수
- ✓ 즉, x 값에 따라 y 값은 반드시 달라짐
- ✓ 다만, 정확하게 계산하려면 상수 a와 b의 값을 알아야 함
- ✓ 이 직선을 훌륭하게 그으려면 직선의 기울기 a 값과 y-절편 b 값을 정확히 예측해 내야 함
- ✓ 앞서 선형 회귀는 곧 정확한 선을 그려 내는 과정이라고 했음
- ✓ 지금 주어진 데이터에서의 선형 회귀는 결국 최적의 a 값과 b 값을 찾아내는 작업이라고 할 수 있음

02. 가장 훌륭한 예측선이란?

❖ 선형 회귀와 딥러닝 (4/5)

선을 잘 긋는 것이 어째서 중요할까?

- ✓ 잘 그어진 선을 통해 우리는 앞서 살펴본 표의 공부한 시간과 중간고사 성적 데이터에 들어 있지 않은 여러 가지 내용을 유추할 수 있기 때문임
- ✓ 예를 들어, 표에 나와 있지 않은 또 다른 학생의 성적을 예측하고 싶다고 가정
- ✓ 이때 정확한 직선을 그어 놓았다면 이 학생이 몇 시간을 공부했는지만 물어보면 됨
- ✓ 정확한 a값과 b 값을 따라 움직이는 직선에 학생이 공부한 시간인 x 값을 대입하면 예측 성적인 y 값을 구할 수 있는 것

02. 가장 훌륭한 예측선이란?

❖ 선형 회귀와 딥러닝 (5/5)

- 딥러닝을 포함한 머신러닝의 예측은 결국 이러한 기본 접근 방식과 크게 다르지 않음
- 기존 데이터(정보)를 가지고 어떤 선이 그려질지 예측한 후,
  아직 답이 나오지 않은 그 무언가를 그 선에 대입해 보는 것

선형 회귀의 개념을 이해하는 것은
딥러닝을 이해하는 데 중요한 첫걸음!

03. 최소 제곱법

03. 최소 제곱법

❖ 최소 제곱법에 대해 알아보기 (1/8)

- 이제 우리 목표는 가장 정확한 선을 긋는 것
- 더 구체적으로는 정확한 기울기 a와 정확한 y-절편 b를 알아내면 된다고 했음
- 만일 우리가 **최소 제곱법(Method of Least Squares)**이라는 공식을 알고 적용한다면, 이를 통해 일차 함수의 기울기 a와 y-절편 b를 바로 구할 수 있음

03. 최소 제곱법

❖ 최소 제곱법에 대해 알아보기 (2/8)

- '공부한 시간'을 입력 값 x라고 가정
- '성적'을 출력 값 y라고 가정
- 지금 가진 정보인 x 값과 y 값을 이용해 기울기 a를 구하는 방법은 다음과 같음

공부한 시간	2시간	4시간	6시간	8시간
성적	81점	93점	91점	97점

$$a = \frac{(x - x\text{평균})(y - y\text{평균})\text{의 합}}{(x - x\text{평균})^2\text{의 합}}$$

✓ 이것이 바로 최소 제곱법 공식
✓ 쉽게 풀어서 다시 쓰면 x의 편차(각 값과 평균과의 차이)를 제곱해서 합한 값을 분모로 놓고, x와 y의 편차를 곱해서 합한 값을 분자로 놓으면 기울기가 나온다는 의미

[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

❖ 최소 제곱법에 대해 알아보기 (3/8)

- 실제로 우리가 가진 x(공부한 시간) 값과 y(성적) 값을 기울기 a 식에 대입할 예정
- 먼저 x 값의 평균과 y 값의 평균을 구해 보면 다음과 같음
  - ◆ 공부한 시간(x) 평균: $(2 + 4 + 6 + 8) \div 4 = 5$
  - ◆ 성적(y) 평균: $(81 + 93 + 91 + 97) \div 4 = 90.5$
- 이를 기울기 a 식에 대입하면 다음과 같음

$$a = \frac{(2-5)(81-90.5)+(4-5)(93-90.5)+(6-5)(91-90.5)+(8-5)(97-90.5)}{(2-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2}$$

$$= \frac{46}{20}$$

$$= 2.3$$

❖ 최소 제곱법에 대해 알아보기 (4/8)

- 기울기 a는 2.3이 나옴!
- 다음은 y-절편인 b를 구하는 공식

$$b = y\text{의 평균} - (x\text{의 평균} \times \text{기울기 } a)$$

즉, y 평균에서 x 평균과 기울기의 곱을 빼면 b 값이 나온다는 의미

❖ 최소 제곱법에 대해 알아보기 (5/8)

- 우리는 이미 y 평균, x 평균, 그리고 조금 전 구한 기울기 x까지 이 식을 풀기 위해 필요한 모든 변수를 알고 있음
- 이를 식에 대입해 보자

$$\begin{aligned} b &= 90.5 - (5 \times 2.3) \\ &= 79 \end{aligned}$$

- y-절편 b는 79가 나왔음
- 이제 다음과 같이 예측 값을 구하기 위한 직선의 방정식이 완성

$$y = 2.3x + 79$$

❖ 최소 제곱법에 대해 알아보기 (6/8)

- 이 식에 우리가 가진 데이터를 대입
- x를 대입했을 때 나오는 y 값을 '예측 값'이라고 하겠음

최소 제곱법 공식으로 구한 성적 예측 값

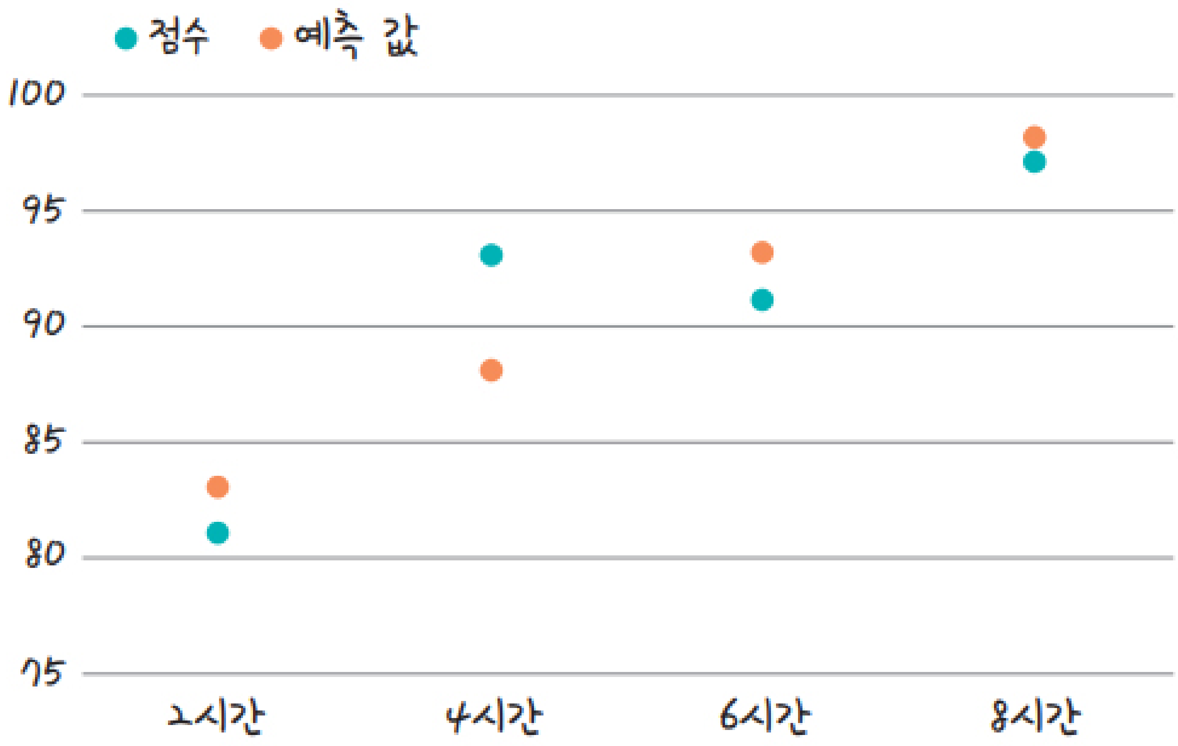
공부한 시간	2	4	6	8
성적	81	93	91	97
예측 값	**83.6**	**88.2**	**92.8**	**97.4**

[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

❖ 최소 제곱법에 대해 알아보기 (7/8)

- 좌표 평면에 이 예측 값을 찍어 보면 아래와 같음

공부한 시간, 성적, 예측 값을 좌표로 표현

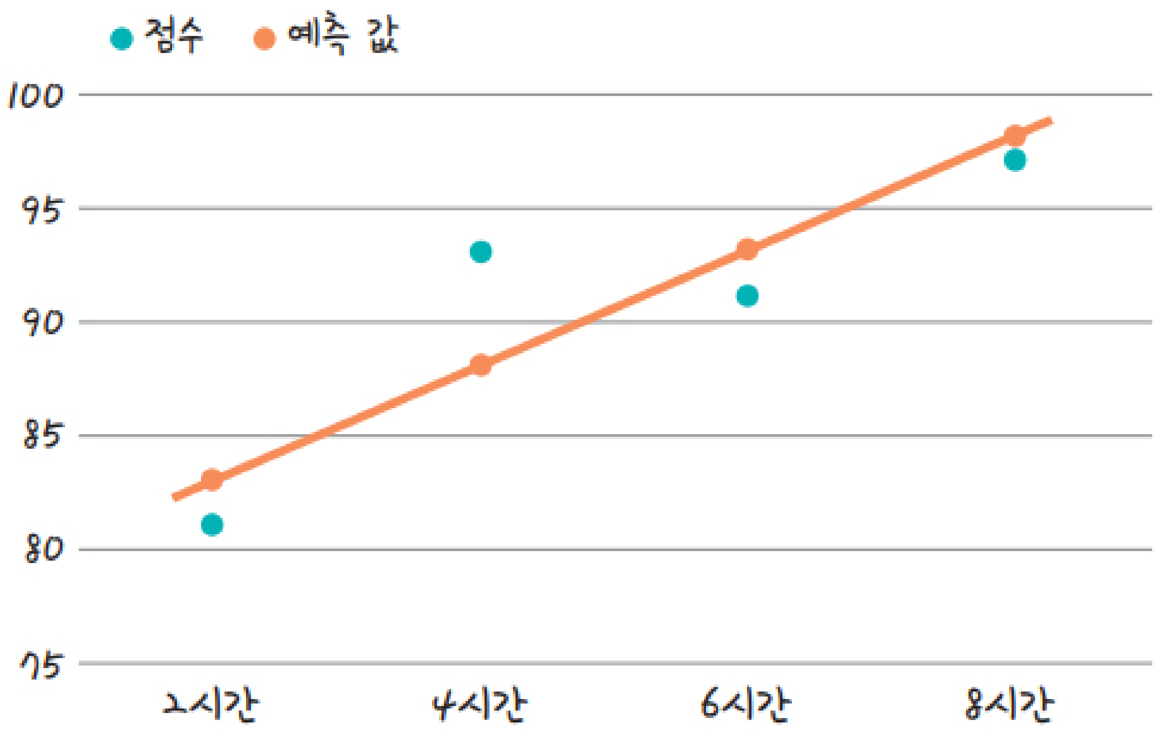


[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

❖ 최소 제곱법에 대해 알아보기 (8/8)

- 예측한 점들을 연결해 직선을 그으면 아래 그림과 같음

오차가 최소가 되는 직선의 완성



✓ 이 직선이 오차가 가장 적은, 주어진 좌표의 특성을 가장 잘 나타내는 직선

✓ 우리가 원하는 예측 직선

✓ 이 직선에 다른 x 값(공부한 시간)을 집어넣어서 공부량에 따른 성적을 예측할 수 있음

[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

04. 파이썬 코딩으로 확인하는 최소 제곱

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (1/12)

- 우리가 이론을 배우는 목적은 딥러닝을 구현하기 위해서임
- 수업에서 설명하는 모든 이론을 자유롭게 코드로 변환할 수 있어야 진정한 의미가 있음
- 지금까지 공부한 내용을 코딩으로 구현해 보자

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (2/12)

- 먼저 넘파이 라이브러리를 불러옴
- 넘파이는 파이썬에서 수학 연산과 분석을 하게 도와주는 라이브러리
- 공부한 시간을 리스트로 만들어 x라는 이름의 넘파이 배열로 저장
- 또 그때의 점수를 y라는 이름의 넘파이 배열로 저장

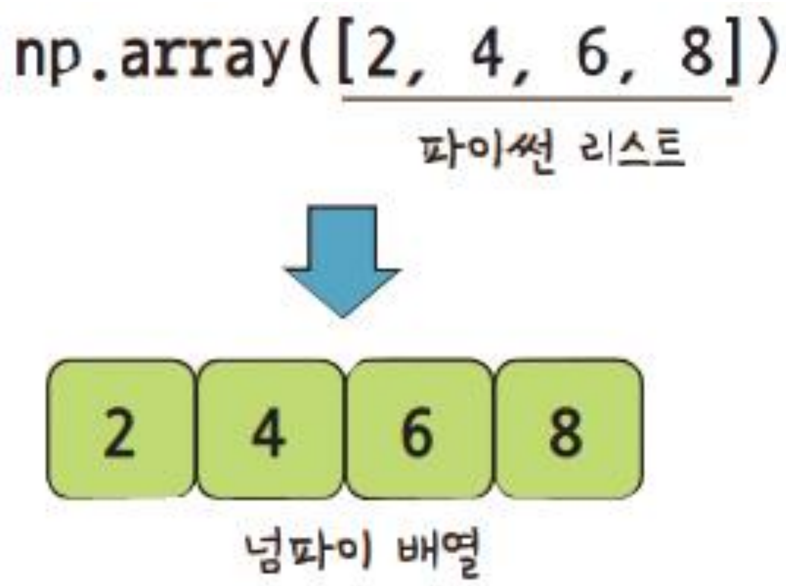
```
import numpy as np

x = np.array([2, 4, 6, 8])
y = np.array([81, 93, 91, 97])
```

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (3/12)

- 파이썬에서 리스트는 쉼표(,)로 구분된 요소들을 대괄호 [ ]로 감싸서 만듦
- np.array( ) 함수를 사용하면 파이썬 리스트를 넘파이 배열로 바꾸어 여러 가지 계산을 수행할 수 있음

파이썬 리스트의 기본 형태



[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (4/12)

- 이제 최소 제곱근 공식으로 기울기 a의 값과 y-절편 b의 값을 구해 보자
- x의 모든 원소 평균을 구하는 넘파이 함수는 mean( )
- x_mean 변수에는 x 원소들의 평균값을, y_mean 변수에는 y 원소들의 평균값을 넣음

```
x_mean = np.mean(x)
y_mean = np.mean(y)

print("x의 평균값:", x_mean)
print("y의 평균값:", y_mean)
```

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (5/12)

- 이제 앞서 살펴본 최소 제곱근 공식 중 분모 값,
  즉 'x의 각 원소와 x의 평균값들의 차를 제곱하라'는 파이썬 명령을 만들 차례
- 다음과 같이 divisor라는 변수를 만들어 구현할 수 있음

```
denominator = sum([(j - x_mean)**2 for j in x])
```

sum( )은 Σ에 해당하는 함수입니다.

제곱을 구하라는 의미입니다.

x의 각 원소를 한 번씩 j 자리에 대입하라는 의미입니다.

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (6/12)

- 이제 분자에 해당하는 부분을 구하겠음
- x와 y의 편차를 곱해서 합한 값을 구하면 됨
- 다음과 같이 새로운 함수를 정의해서 numerator 변수에 분자 값을 저장

```python
def top(x, x_mean, y, y_mean):
  d = 0
  for j in range(len(x)):
    d += (x[j] - x_mean) * (y[j] - y_mean)
  return d

numerator = top(x, x_mean, y, y_mean)
```

✓ 임의의 변수 d의 초깃값을 0으로 설정한 후 x의 개수만큼 실행
✓ d에 x의 각 원소와 평균의 차, y의 각 원소와 평균의 차를 곱해서 차례로 더하는 최소 제곱법을 그대로 구현

✓ def는 함수를 만들 때 사용하는 예약어
✓ 여기서는 top( ) 함수를 새롭게 만들었고, 그 안에 최소 제곱법의 분자식을 그대로 가져와 구현
✓ len(리스트)은 리스트 안에 들어 있는 원소 개수를 알려 줌
✓ x 리스트의 원소가 네 개이므로 len(x)는 4가 됨
✓ range( )는 0부터 괄호 안의 숫자 바로 전까지 연속적인 숫자 객체를 만들어 줌
✓ 즉, range(4)는 0, 1, 2, 3의 숫자를 생성하게 됨

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (7/12)

- 구한 분모 값과 분자 값을 확인

```
print(“분모:”, denominator)
print(“분자:”, numerator)
```

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (8/12)

- 이제, 기울기를 구하는 공식을 이용해 a를 구하겠음

```
a = numerator / denominator
```

- a를 구하고 나면 y-절편을 구하는 공식을 이용해 b를 구할 수 있음

```
b = y_mean - (x_mean * a)
```

- 구한 기울기 값과 y-절편 값을 확인

```
print("기울기 a =", a)
print("y-절편 b =", b)
```

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (9/12)

- 이를 하나의 파일로 정리해 보면 다음과 같음

```
import numpy as np

# 공부한 시간과 점수를 각각 x, y라는 이름의 넘파이 배열로 만듭니다.
x = np.array([2, 4, 6, 8])
y = np.array([81, 93, 91, 97])

# x의 평균값을 구합니다.
x_mean = np.mean(x)
# y의 평균값을 구합니다.
y_mean = np.mean(y)

# 출력으로 확인합니다.
print(“x의 평균값:”, x_mean)
print(“y의 평균값:”, y_mean)

# 기울기 공식의 분모 부분입니다.
denominator = sum([(j - x_mean)**2 for j in x])
```

04. 파이썬 코딩으로 확인하는 최소 제곱

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (10/12)

```
# 기울기 공식의 분자 부분입니다.
def top(x, x_mean, y, y_mean):
  d = 0
  for j in range(len(x)):
    d += (x[j] - x_mean) * (y[j] - y_mean)
  return d

numerator = top(x, x_mean, y, y_mean)

# 출력으로 확인합니다.
print("분모:", denominator)
print("분자:", numerator)

# 기울기 a를 구하는 공식입니다.
a = numerator / denominator

# y-절편 b를 구하는 공식입니다.
b = y_mean - (x_mean * a)
```

04. 파이썬 코딩으로 확인하는 최소 제곱

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (11/12)

```
# 출력으로 확인합니다.
print(“기울기 a =”, a)
print(“y-절편 b =”, b)
```

❖ 파이썬으로 최소 제곱 구현하기 (12/12)

- 파이썬으로 최소 제곱법을 구현해 기울기 a의 값과 y-절편 b의 값이 각각 2.3과 79임을 구할 수 있음

실행결과

```
x의 평균값: 5.0
y의 평균값: 90.5

분모: 20.0
분자: 46.0

기울기 a = 2.3
y-절편 b = 79.0
```

05. 평균 제곱 오차

05. 평균 제곱 오차

❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (1/10)

- 최소 제곱법을 이용해 기울기 a와 y-절편을 편리하게 구했지만,
  이 공식만으로 앞으로 만나게 될 모든 상황을 해결하기는 어려움

  여러 개의 입력을 처리하기에는 무리가 있기 때문임

- 예를 들어, 앞서 살펴본 예에서는 변수가 '공부한 시간' 하나뿐이지만,
  Lecture 02에서 살펴본 폐암 수술 환자의 생존율 데이터를 보면 입력 데이터의 종류가 16개나 됨
- 딥러닝은 대부분 입력 값이 여러 개인 상황에서 이를 해결하기 위해 실행되기 때문에
  기울기 a와 y-절편 b를 찾아내는 다른 방법이 필요함

05. 평균 제곱 오차

❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (2/10)

- 가장 많이 사용하는 방법은 '일단 그리고 조금씩 수정해 나가기' 방식
- 가설을 하나 세운 후 이 값이 주어진 요건을 충족하는지 판단해서 조금씩 변화를 주고, 이 변화가 긍정적이면 오차가 최소가 될 때까지 이 과정을 계속 반복하는 방법
- 이는 딥러닝을 가능하게 하는 가장 중요한 원리 중 하나

- 선을 긋고 나서 수정하는 과정에서 빠지면 안 되는 것이 있음
- 나중에 그린 선이 먼저 그린 선보다 더 좋은지 나쁜지를 판단하는 방법

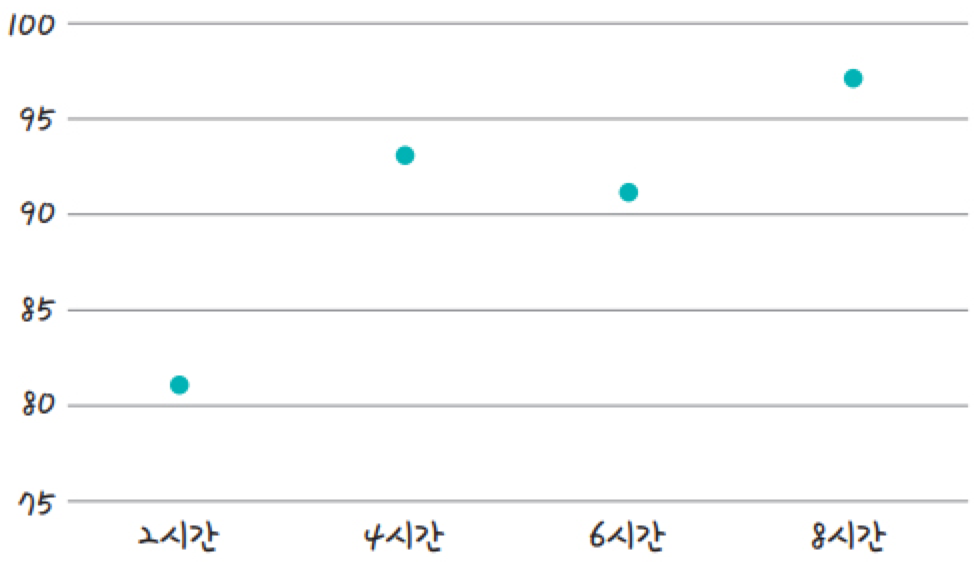
즉, **각 선의 오차를 계산**할 수 있어야 하고, **오차가 작은 쪽으로 바꾸는 알고리즘이 필요**한 것

05. 평균 제곱 오차

❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (3/10)

- 이를 위해 주어진 **선의 오차를 평가하는 방법이 필요**함
- 오차를 구할 때 가장 많이 사용되는 방법이 **평균 제곱 오차(Mean Square Error, MSE)**
- 지금부터 평균 제곱 오차를 구하는 방법을 알아보겠음
- 앞서 나온 공부한 시간과 성적의 관계도를 다시 한 번 살펴보겠음

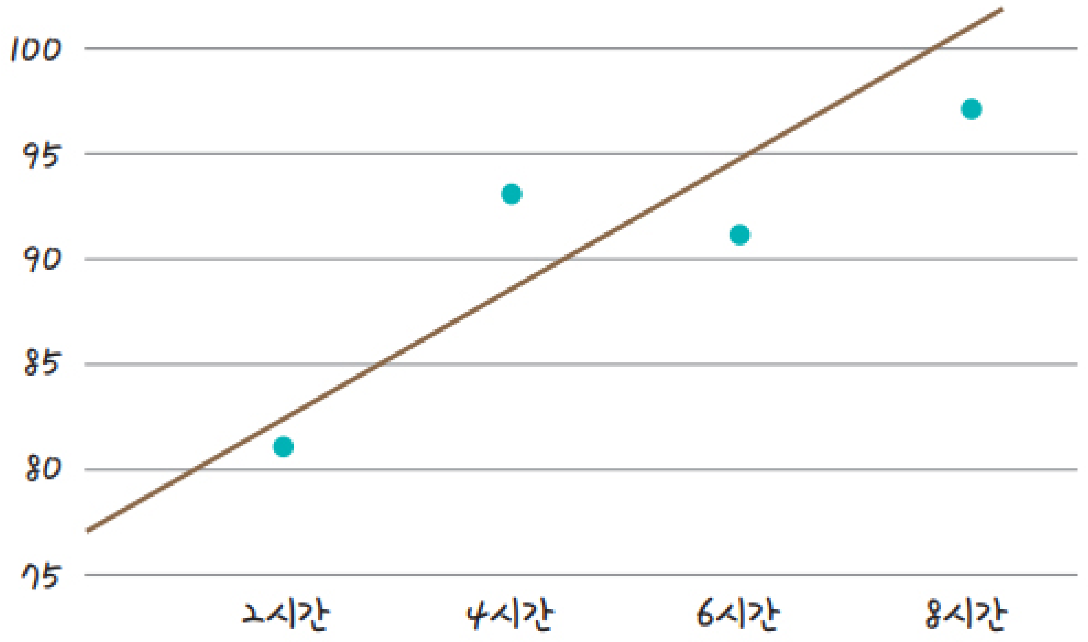
공부한 시간과 성적의 관계도



[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (4/10)

- 우리는 최소 제곱법을 이용해 점들의 특성을 가장 잘 나타내는 최적의 직선이 $y = 2.3x + 79$임을 구했지만, 이번에는 최소 제곱법을 사용하지 않고 아무 값이나 a와 b에 대입해 보겠음
- 임의의 값을 대입한 후 오차를 구하고 이 오차를 최소화하는 방식을 사용해서 최종 a 값과 b 값을 구해 보겠음



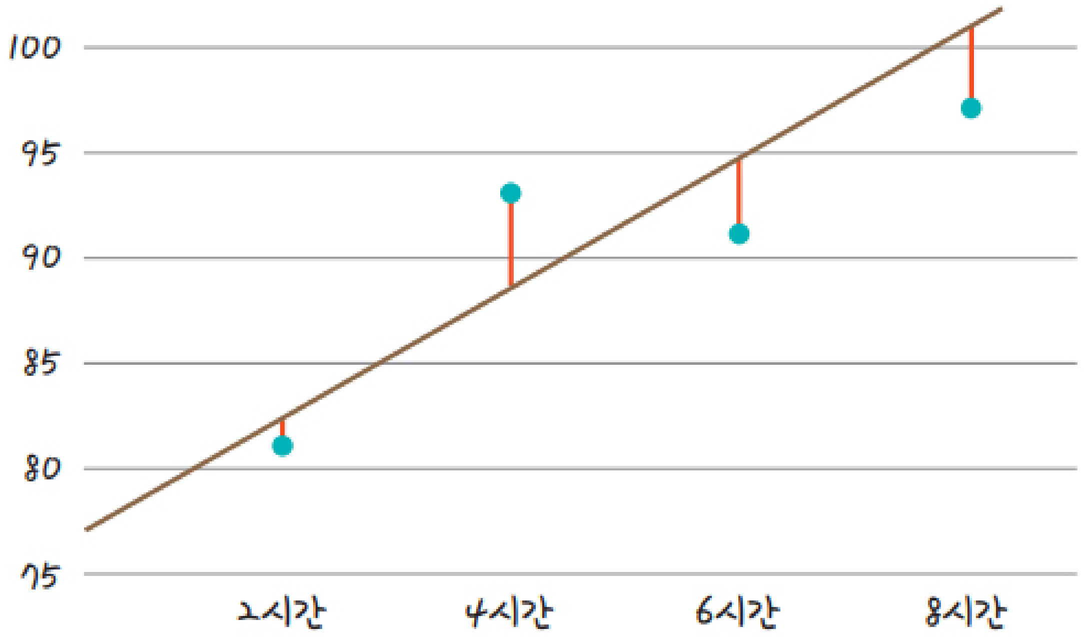
임의의 직선 그려 보기

- ✓ 먼저 대강 선을 그어 보기 위해 기울기 a와 y-절편 b를 임의의 수 3과 76이라고 가정해 보겠음
- ✓ $y = 3x + 76$인 선을 그려 보면 왼쪽 그림과 같음

[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (5/10)

- 아래 그림과 같은 임의의 직선이 어느 정도의 오차가 있는지 확인하려면 각 점과 그래프 사이의 거리를 재면 됨



임의의 직선과 실제 값 사이의 거리

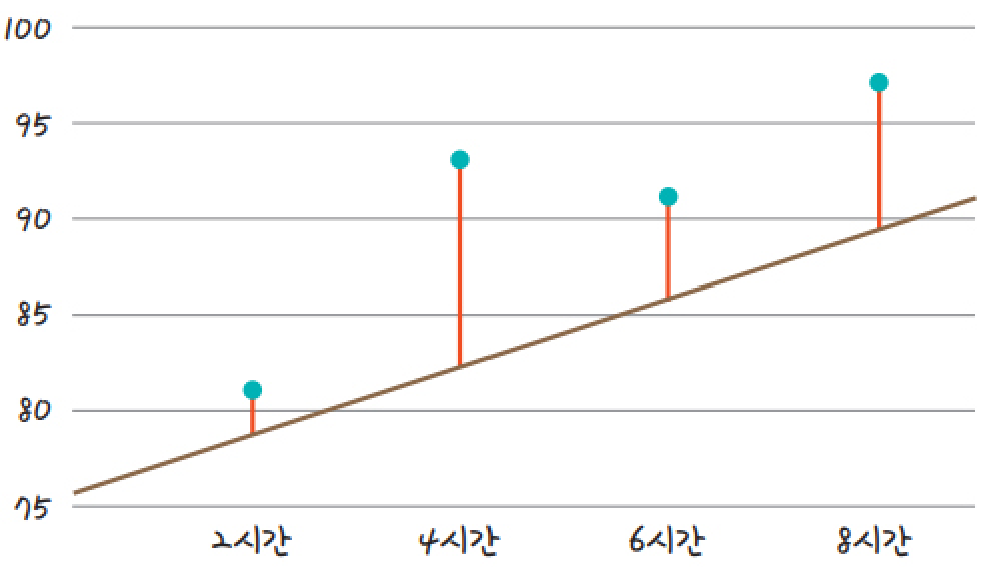
- ✓ 왼쪽 그림에서 볼 수 있는 빨간색 선은 직선이 잘 그어졌는지 나타냄
- ✓ 이 직선들의 합이 작을수록 잘 그어진 직선이고, 이 직선들의 합이 클수록 잘못 그어진 직선이 됨

[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

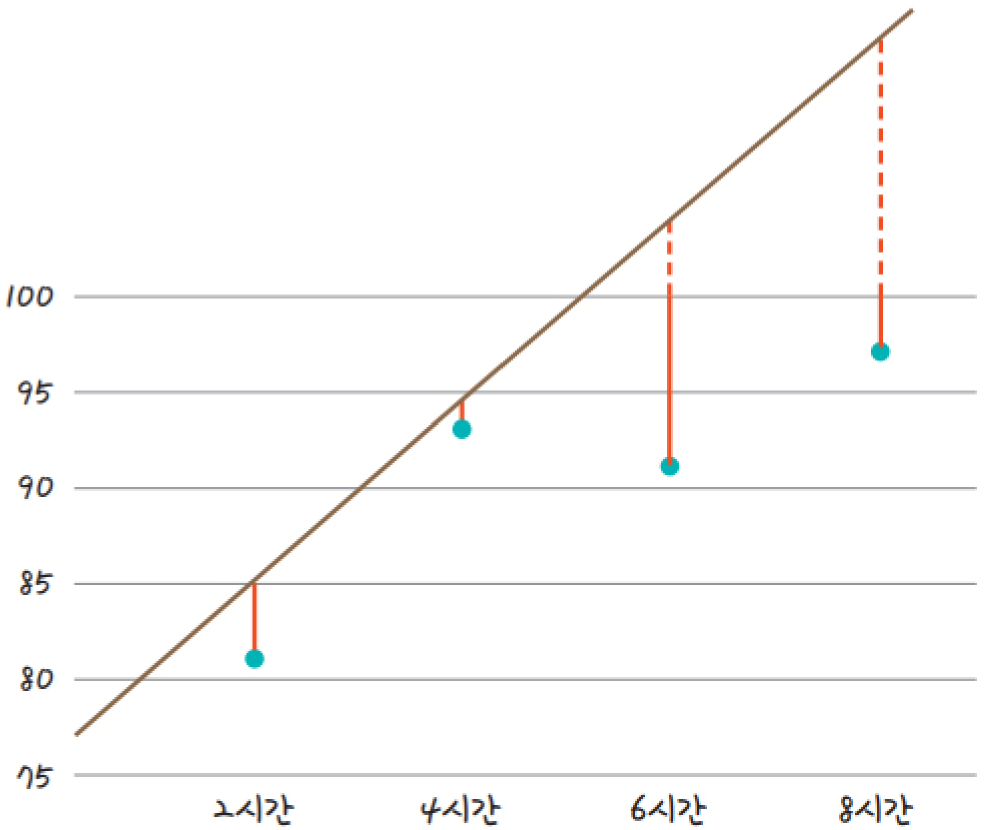
❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (6/10)

- 예를 들어 기울기 값을 각각 다르게 설정한 그림의 그래프를 살펴보면 아래와 같음

기울기를 너무 작게 잡았을 때 오차



기울기를 너무 크게 잡았을 때 오차



[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (7/10)

- 그래프의 기울기가 잘못될수록 빨간색 선의 거리의 합, 즉 오차의 합도 커짐
- 만일 기울기가 무한대로 커지면 오차도 무한대로 커지는 상관관계가 있는 것을 알 수 있음
- 빨간색 선의 거리의 합을 실제로 계산해 보면 다음과 같음
- 거리는 입력 데이터에 나와 있는 y의 '실제 값'과 x를 $y = 3x + 76$ 식에 대입해서 나오는 '예측 값'의 차이를 이용해 구할 수 있음
- 예를 들어 2시간을 공부했을 때 실제 나온 점수(81점)와, 그래프 $y = 3x + 76$ 식에 $x = 2$를 대입했을 때(82점)의 차이가 곧 오차
- 오차를 구하는 방정식은 다음과 같음

“ 오차 = 실제 값 – 예측 값 ”

❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (8/10)

- 이 식에 주어진 데이터를 대입해 얻을 수 있는 모든 오차 값을 정리하면 아래 표와 같음

공부한 시간(x)	2	4	6	8
성적(실제 값, y)	81	93	91	97
예측 값	82	88	94	100
오차	1	–5	3	3

주어진 데이터에서 오차 구하기

- ✓ 이렇게 해서 구한 오차를 모두 더하면 1+(-5)+3+3=2가 됨
- ✓ 이 값은 오차가 실제로 얼마나 큰지를 가늠하기에는 적합하지 않음
- ✓ 오차에 양수와 음수가 섞여 있어 오차를 단순히 더해 버리면 합이 0이 될 수도 있기 때문임
- ✓ **부호를 없애야 정확한 오차를 구할 수 있음**
- ✓ 오차의 합을 구할 때는 각 오차 값을 제곱하고, 이를 식으로 표현하면 다음과 같음

$$\text{“ 오차의 합} = \sum_i^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \text{ ”}$$

[사진출처] 모두의 딥러닝 (출판사: 길벗, 저자: 조태호)

05. 평균 제곱 오차

❖ **평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (9/10)**

- 여기서 i는 x가 나오는 순서를, n은 x 원소의 총 개수를 의미
- y_i는 x_i에 대응하는 '실제 값'이고, $\hat{y}_i$는 x_i가 대입되었을 때, 직선의 방정식(여기서는 $y = 3x + 76$)이 만드는 '예측 값'
- 이 식으로 오차의 합을 다시 계산하면 1 + 25 + 9 + 9 = 44
- 우리가 구하고자 하는 **평균 제곱 오차**는 위에서 구한 오차의 합을 n으로 나눈 것

“ **평균 제곱 오차(MSE)** = $\frac{1}{n}\sum_i^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ ”

❖ 평균 제곱 오차에 대해 알아보기 (10/10)

“ **평균 제곱 오차(MSE) =** $\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ ”

- 이 식은 앞으로 머신러닝과 딥러닝을 공부할 때 자주 등장할 중요한 식
- 앞서 구한 오차의 합(=44)과 x 원소의 총 개수(=4)를 이 식에 대입하면 $¼ \times 44 = 11$이란 값이 나옴
- 이로써 우리가 그은 임의의 직선이 11이라는 평균 제곱 오차를 갖는 직선이었다는 것을 알 수 있음
- 이제 우리의 작업은 11보다 작은 평균 제곱 오차를 가지게 만드는 a 값과 b 값을 찾는 것이 되었음

이렇듯 **선형 회귀**란 임의의 직선을 그어 이에 대한 평균 제곱 오차를 구하고,
이 값을 가장 작게 만들어 주는 a 값과 b 값을 찾아가는 작업

06. 파이썬 코딩으로 확인하는 평균 제곱

❖ 파이썬으로 평균 제곱 구현하기 (1/6)

- 이제 앞서 알아본 평균 제곱 오차를 파이썬으로 구현해 보겠음
- 임의로 정한 기울기 a와 y-절편 b의 값이 각각 3과 76이라고 할 때, 가상의 기울기가 fake_a, 가상의 y-절편이 fake_b인 함수 predict( )를 다음과 같이 정의할 수 있음

```
import numpy as np

x = np.array([2, 4, 6, 8])
y = np.array([81, 93, 91, 97])

def predict(x):
  fake_a = 3
  fake_b = 76
  return fake_a * x + fake_b
```

❖ 파이썬으로 평균 제곱 구현하기 (2/6)

- 위 코드의 결괏값이 들어갈 빈 리스트를 만듦

```
y_pred = []
```

- 이제 모든 x 값을 predict( ) 함수에 한 번씩 대입해
  예측 값 리스트를 채우는 코드를 다음과 같이 작성

```
for j in range(len(x)):
    y_pred.append(predict(x[j]))
    print("공부시간=%.f, 실제점수=%.f, 예측점수=%.f" % (x[j], y[j], y_pred[j]))
```

❖ 파이썬으로 평균 제곱 구현하기 (3/6)

- 다음으로 평균 제곱 오차를 구하는 함수를 만들 차례
- 평균 제곱 오차 공식을 그대로 파이썬 함수로 옮기면 다음과 같음

> **평균 제곱 오차** $= \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$

```
def mse(y, y_pred):
  return (1/len(y)) * sum((y - y_pred)**2)

print(“평균 제곱 오차: ” + str(mse(y, y_pred)))
```

✓ 여기서 **2는 제곱을 구하라는 것이고, sum( )은 합을 구하라는 것
✓ 실제 값과 예측 값을 각각 mse( ) 함수의 y와 y_pred 자리에 넣어서 평균 제곱을 구함

❖ 파이썬으로 평균 제곱 구현하기 (4/6)

- 이를 하나의 파일로 정리해 보면 다음과 같음

```python
import numpy as np

# 공부 시간 x와 성적 y의 넘파이 배열을 만듭니다.
x = np.array([2, 4, 6, 8])
y = np.array([81, 93, 91, 97])

# y = ax + b에 가상의 a값과 b 값을 대입한 결과를 출력하는 함수입니다.
def predict(x):
  # 가상의 기울기 a와 y-절편 b를 정합니다.
  fake_a = 3
  fake_b = 76
  return fake_a * x + fake_b

# 예측한 성적 값을 저장할 빈 리스트를 만듭니다.
y_pred = []


```

06. 파이썬 코딩으로 확인하는 평균 제곱

❖ 파이썬으로 평균 제곱 구현하기 (5/6)

```
# 모든 x 값을 한 번씩 대입해 y_pred 리스트를 완성합니다.
for j in range(len(x)):
    y_pred.append(predict(x[j]))

    print(“공부시간=%.f, 실제점수=%.f, 예측점수=%.f” % (x[j], y[j], y_pred[j]))

# y와 y_pred 값을 이용해 평균 제곱 오차를 계산하는 함수입니다.
def mse(y, y_pred):
  return (1/len(y)) * sum((y - y_pred)**2)

# 평균 제곱 오차 값을 출력합니다.
print(“평균 제곱 오차: ” + str(mse(y, y_pred)))
```

❖ 파이썬으로 평균 제곱 구현하기 (6/6)

실행결과

```
공부시간=2, 실제점수=81, 예측점수=82
공부시간=4, 실제점수=93, 예측점수=88
공부시간=6, 실제점수=91, 예측점수=94
공부시간=8, 실제점수=97, 예측점수=100

평균 제곱 오차: 11.0
```

- ✓ 이를 통해 우리가 처음 가정한 $a = 3$, $b = 76$은 오차가 약 11.0이라는 것을 알게 됨
- ✓ 이제 남은 것은 이 오차를 줄이면서 새로운 선을 긋는 것
- ✓ 이를 위해서는 a 값과 b 값을 적절히 조절하면서 오차의 변화를 살펴보고, 그 오차가 최소화되는 a 값과 b 값을 구해야 함

끝맺음

- ❖ 01. 선형 회귀의 정의
- ❖ 02. 가장 훌륭한 예측선이란?
- ❖ 03. 최소 제곱법
- ❖ 04. 파이썬 코딩으로 확인하는 최소 제곱
- ❖ 05. 평균 제곱 오차
- ❖ 06. 파이썬 코딩으로 확인하는 평균 제곱 오차

THANK YOU!
Q & A

- Name: 권범
- Office: 동덕여자대학교 인문관 B821호
- Phone: 02-940-4752
- E-mail: bkwon@dongduk.ac.kr