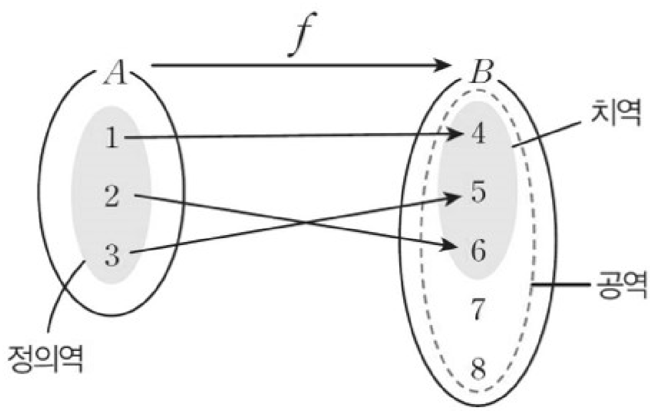
1 함수

1.1 함수의 정의

집합 A에 속하는 각 원소 x를 집합 B에 속하는 오직 하나의 원소 y에 대응시키는 규칙을 **함수 (function)**이라 하고, 기호로는 $f : A \longrightarrow B$, $x \mapsto y$로 표기하고, x에 대응하는 y를 $y = f(x)$ 라고 한다.

- 집합 A : 함수 f의 **정의역 (domain)**
- 집합 B : 함수 f의 **공역 (codomain)**
- y : x에서의 함수 f의 함수값 또는 f에 의한 x의 **상 (image of x)**
- x : y의 **원상 (preimage of y)**
- 집합 A의 각 x에 대한 함수값 $f(x)$ 전체 집합 : 함수 f의 **치역 (image)**
- 주의 : range = codamin 또는 image



$$f(x) = x + 1$$

or

$$f : R \longrightarrow R$$
$$x \mapsto x + 1$$

- Example #1 :

$$f : Z \longrightarrow Z$$
$$x \mapsto x^2$$

  - 정의역 :
  - 공역 :
  - 치역 : $Z^+ \cup \{0\}$
  - 3의 상 :
  - 4의 원상 :
  - 64의 원상 :

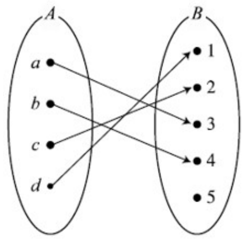
- Example #2 : 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$에 대해서 함수 $f : A \longrightarrow B$는 $f(1) = a$, $f(3) = c$를 만족하는 함수의 개수를 구하세요.

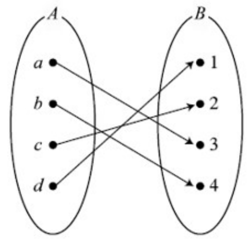
1.2 함수 구분

- 실수 함수 (real-valued function) : 공역이 실수 (R)의 집합인 함수
- 정수 함수 (integer-valued function) : 공역이 정수 (Z)인 함수
- 증가 함수 (increasing function) : 함수 $f : R \longrightarrow R$를 $x < y$에 대해 $f(x) \leq f(y)$
- 단조 증가 함수 (strictly increasing function) : 함수 $f : R \longrightarrow R$를 $x < y$에 대해 $f(x) < f(y)$
- 감소 함수 (decreasing function) : 함수 $f : R \longrightarrow R$를 $x < y$에 대해 $f(x) \geq f(y)$
- 단조 감소 함수 (strictly decreasing function) : 함수 $f : R \longrightarrow R$를 $x < y$에 대해 $f(x) > f(y)$

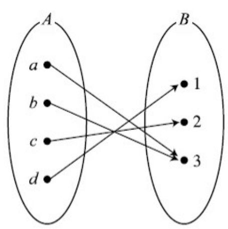
1.3 함수의 특성

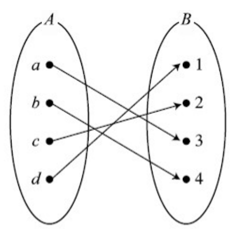
- 단사 함수 (일대일 함수) : 함수 f의 정의역에 속한 모든 x_1와 x_2에 있어서 $f(x_1) = f(x_2)$이면 반드시 $x_1 = x_2$일 때, 함수 f를 단사 함수 (one-to-one 또는 injunction)라고 한다.



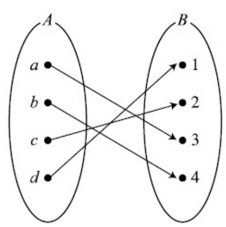


- 전사 함수 : 정의역 A, 공역 B가 있을 때, $y \in B$인 모든 원소에 대해 $f(x) = y$인 원소 $x \in A$가 존재할 경우 함수 $f : A \longrightarrow B$를 전사 함수 (onto 또는 surjection)라고 한다. (치역과 공역이 같은 함수)





- 전단사 함수 (일대일 대응) : 단사 함수이고 동시에 전사 함수인 함수를 전단사 함수 (one-to-one correspondence 또는 bijection)이라고 한다.



- Example #3 : 다음 함수들이 단사 함수인지 생각해 보자.
  - $f_1 : R \longrightarrow R$ 일 때, $f_1(x) = x^2$
  - $f_2 : Z \longrightarrow Z$ 일 때, $f_2(x) = x - 1$

- Example #4 : 다음 함수들이 전사 함수인지 생각해 보자.
  - 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, 집합 $B = \{1, 2\}$에 대해 $f_3 : A \longrightarrow B$ 일 때, $f_3 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$
  - 집합 $C = \{c | c \geq 0, c_{¸}\}$에 대해, $f_4 : R \longrightarrow C$ 일 때, $f_4(x) = |x|$

- Example #5 : 다음 함수들이 전단사 함수인지 생각해 보자.
  - 집합 $A = \{a, b, c, d\}$에 대해 $f_5 : A \longrightarrow A$ 일 때, $f_5 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
  - $f_6 : Z \longrightarrow Z$ 일 때, $f_2(x) = x + 1$

2 함수의 종류

2.1 역함수

전단사 함수 $f : A \longrightarrow B$에 대해 $B \longrightarrow A$로 대응되는 관계 $x \in A$, $y \in B$에 대해 $f(x) = y$일 때, $f^{-1}(y) = x$를 만족하는 함수 $f^{-1}(y)$를 $f(x)$의 역함수라 하고, 함수 $f(x)$를 가역함수라 한다.

집합 A, B에 대하여 함수 $f : A \longrightarrow B$가 전단사함수일 때, $x \in A$, $y \in B$에 대하여 다음이 성립한다.

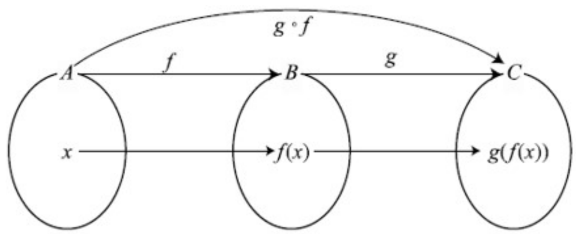
- $y = f(x)$이면 $x = f^{-1}(y)$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- 함수 f의 그래프와 역함수 f^{-1}의 그래프는 직선 $y = x$에 대해 대칭

- Example #6 : 함수 $f : Z \longrightarrow Z$일 때, 다음 함수들은 가역함수인 지 확인하고, 역함수를 구해보자.
  - $f(x) = x - 1$
  - $f(x) = 3x - 4$
  - $f(x) = |x|$
  - $f(x) = x^2$

2.2 합성함수

두 함수 $f : A \longrightarrow B$와 $g : B \longrightarrow C$가 있을 때, 집합 A의 각 원소를 집합 C의 원소에 대응하는 새로운 함수

$$g \circ f = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A$$



집합 A, B, C에 대하여 함수 $f : A \longrightarrow B$와 $g : B \longrightarrow C$가 전단사함수일 때, $x \in A$, $y \in B$에 대하여 다음이 성립한다.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- Example #7 : 세 개의 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x, y, z\}$에 대해 함수 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$가 다음과 같이 정의될 때, 합성함수 $g \circ f$를 구해 보자.

$$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2)\}$$
$$g = \{(1, z), (2, y), (3, x)\}$$

- Example #8 : 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$에 대해 함수 $f : A \longrightarrow A$, $g : A \longrightarrow A$가 다음과 같을 때, 합성함수 $g \circ f$와 $f \circ g$를 구해 보자.

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$$
$$g = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$$

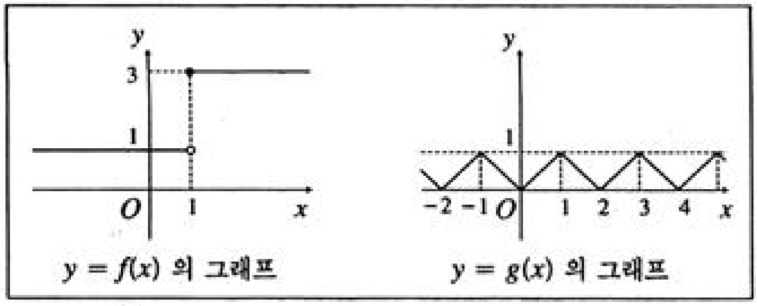
- Example #9 : 함수 $f : R \longrightarrow R$, $g : R \longrightarrow R$에 대해 $f(x) = x^3 + 2x$, $g(x) = x - 5$일 때, 다음을 구해보자.
  - $g \circ f$
  - $f \circ g$
  - $f \circ f$
  - $g \circ g$

- Example #10 : 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $C = \{x, y, z\}$, $D = \{11, 12, 13, 14\}$에 대해 세 함수 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$가 아래와 같다면 다음을 구해 보자.

$$f = \{(1, c), (2, a), (3, e), (4, b)\}$$
$$g = \{(a, x), (b, y), (c, y), (d, z), (e, z)\}$$
$$h = \{(x, 12), (y, 11), (z, 14)\}$$

  - $h \circ (g \circ f)$
  - $(h \circ g) \circ f$

- Example #11 : 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 각각 아래 그림과 같을 때, $y = (g \circ f)(x)$의 그래프의 개형을 그려보자.



- Example #12 : 두 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$가 $(g \circ f)(2^x) = \frac{1}{4}$을 만족시킬 때, x의 값은?

- 합성 함수의 특성 : 집합 A, B, C가 있고 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$에 대해 $g \circ f$가 합성함수일 경우
  - f와 g가 단사함수이면 $g \circ f$도 단사함수이다.
  - f와 g가 전사함수이면 $g \circ f$도 전사함수이다.
  - f와 g가 전단사함수이면 $g \circ f$도 전단사함수이다.
  - $g \circ f$가 단사함수이면 f도 단사함수이다.
  - $g \circ f$가 전사함수이면 g도 전사함수이다.
  - $g \circ f$가 전단사함수이면 f는 단사함수이고, g는 전사함수이다.
- 증명

2.3 항등함수

집합 A에 대한 함수 $f : A \longrightarrow A$가 $f(a) = a$로 정의되는 관계를 항등함수 (identity function) 라 하며, 기호로는 i_A 또는 I_A로 표현한다.

- 항등함수는 임의의 정의역 원소 x_1, x_2가 $x_1 \neq x_2$일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 단사함수이다.
- 모든 공역 원소 y에 대해 $f(x) = y$를 만족하는 정의역 원소 x를 가지므로 전사함수이다.
- 따라서 항등함수는 전단사 함수이다.

함수 $f : A \longrightarrow B$이고 집합 A에 대한 항등함수가 I_A, 집합 B에 대한 항등함수가 I_B일 때,

$$f \circ I_A = I_B \circ f = f$$

를 만족한다.

- Example #13 : 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $f : A \longrightarrow A$이면 함수 $f(x) = x^3$는 항등함수가 맞는 지 구해보자.

- Example #14 : 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$로 가는 함수 $f = \{(1, c), (2, a), (3, d)\}$에 대해 $f \circ I_A = I_B \circ f = f$이 성립하는 지 구해보자.

- Example #15 : 다항식 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(g(x)) = x$이고, $g(0) = 1$일 때, $g(-1)$의 값을 구해보자.

- 항등 함수와 역함수의 관계 : 전단사함수 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$에 대해 다음이 성립한다.
  - $f^{-1} \circ f = I_A$
  - $f \circ f^{-1} = I_B$
  - $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- 증명

2.4 상수함수

함수 $f : A \longrightarrow B$에서 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소 하나에만 대응되는 관계이며, 아래와 같이 표현된다.

$$\forall \in A, \exists y \in B\text{에 대해} f(x) = y$$

2.5 특성함수

어떤 집합에 원소가 있는지 없는지를 판별하는 함수로 characteristic function이라고 불린다. 이 함수의 공역은 입력에 대응하는 출력이 있다는 의미의 1과 없다는 의미 0만 존재한다.

- Example #16 : 전체집합 $U = \{x|x\text{는 알파벳}\}$일 때, $A = \{x|x\text{는 알파벳 소문자}\}$와 $B = \{x|x\text{는 알파벳 대문자}\}$에 대한 특성함수를 구해보자.

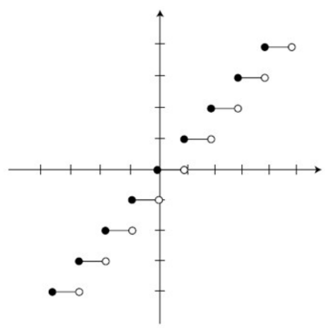
2.6 바닥함수와 천정함수

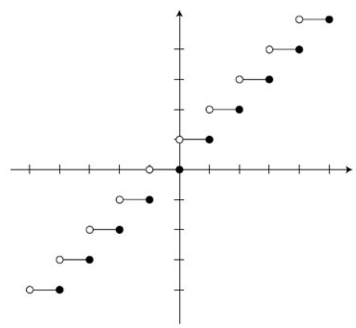
바닥함수는 $x \in R$에 대해 x와 같거나 x보다 작은 정수들 중 가장 큰 정수를 대응하는 함수 (floor function)이다.

$$\lfloor x \rfloor = n \Longleftrightarrow n \leq x < n+1,\ n \in Z$$

천정함수는 $x \in R$에 대해 x와 같거나 x보다 큰 정수들 중 가장 작은 정수를 대응하는 함수 (ceiling function)이다.

$$\lceil x \rceil = n \Longleftrightarrow n-1 < x \leq n,\ n \in Z$$





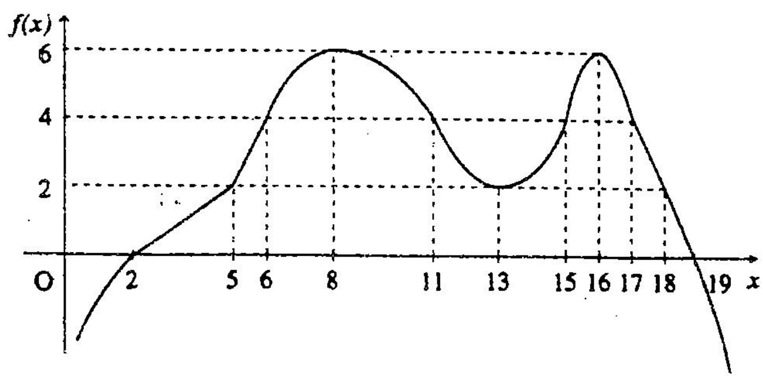
- Example #17 : 다음을 구해보자.
  - $\lfloor \pi \rfloor,\ \lceil \pi \rceil$
  - $\lfloor 11 \rfloor,\ \lceil 11 \rceil$
  - $\lceil \frac{1}{3} + \lceil \frac{1}{2} \rceil \rceil$
  - $\lfloor \frac{1}{3} + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor \rfloor$
  - $\lceil \frac{1}{2} + \lfloor \frac{1}{3} \rfloor \rceil$
  - $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{1}{3} \rceil \rfloor$

- Example #18 : 모든 실수 x에 대하여 정의된 함수 $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$의 치역을 구해보자.

- Example #19 : 두 자리의 자연수 n에 대하여 $\log_9 n - \lfloor \log_9 n \rfloor$이 최대가 되는 n의 값을 구해보자.

- Example #20 : 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x+c}$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구해보자.

- Example #21 : 아래 그림은 함수 $y = f(x)$의 그래프 이다. x에 관한 방정식 $f(f(x+2)) = 4$의 서로 다른 실근의 개수와 합을 구해보자. (단, $x < 2$ 또는 $x > 19$일 때 $f(x) < 0$ 이다.)



e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr