1. 극한과 관련하여 다음을 구해보자.

2020012 임소정

(1) 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+h}} \right)$$

이 때, $f(1/4)$의 값을 구해보자. (0.5점)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+h}}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x+h-x}{(\sqrt{x}\sqrt{x+h})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{\sqrt{x}(x+h)+x(\sqrt{x+h})}\right) = 0$$

$$\boxed{\therefore 0}$$

(2) 서로 다른 두 실수 α, β가 $\alpha + \beta = 3$을 만족시킬 때, 다음을 구해보자. (0.5점)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{(\alpha-\beta)\quad(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}\right) = 3\cdot 2 = 6$$

$$\boxed{\therefore 6}$$

2. 다음 함수의 역함수를 구하고, 역함수의 정의역과 치역을 구해보자. (각 0.5점)

- $f(x) = x^5 - 3$, 정의역 $\mathbb{R}$

$x = y^5 - 3 \rightarrow x + 3 = y^5 \rightarrow y = \sqrt[5]{x+3}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x+3}$

정의역 : $(-\infty, \infty)$, $\{x \mid x \in R\}$

치역 : $(-\infty, \infty)$, $\{y \mid y \in R\}$

- $g(x) = \frac{1}{2x+1}$, 정의역 $[1, \infty)$

$x = \frac{1}{2y+1} \rightarrow x(2y+1) = 1 \rightarrow 2y + 1 = \frac{1}{x} \rightarrow 2y = \frac{1}{x} - 1$

$\downarrow$

$y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}$

정의역 : $(-\infty, \infty)$, $(x \neq 0)$

치역 : $(-1, \infty)$, $(x \neq -\frac{1}{2})$

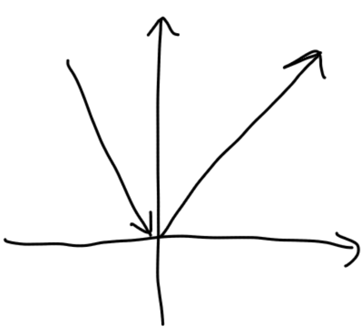
3. 함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f'(2) = -3$, $f'(4) = 6$ 일 때, 다음을 구해보자.

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(-2)} \qquad \frac{f'(4)}{f'(2)} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$\boxed{\therefore -2}$$

4. 사차함수 $f(x) = 2x^4 - px^3 + x^2$ 이 $\overset{\text{음수}}{x < 0}$에서는 감소하고, $\overset{\text{양수}}{x > 0}$ 에서는 증가할 때, 실수 p의 값의 범위를 구해보자.

$f'(x) = 8x^3 - 3px^2 + 2x$



$f(x) = x^2(2x^2 - px + 1)$

$f''(x) = 24x^2 - 6px + 2$

$36p^2 - 4 \cdot 24 \cdot 2 \leq 0$

$9p^2 - 48 \leq 0$

$9p^2 \leq 48$

$p^2 \leq \frac{48}{9}$

$$\boxed{-\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq p \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

5. 함수 $f(x) = |x-1|(x+a)$가 $x = 1$ 에서 미분가능하도록 하는 실수 a의 값을 구해보자.

$x>1$ $f(x) = (x-1)(x+a)$

$x<1$ $f(x) = (-x+1)(x+a)$

$\boxed{a=-1}$

$|1-1|+1+a = |-1+1|-1-a$

$1+a=-1-a$

$2a=-2$

$a=-1$

6. 남학생과 여학생 각각 75명을 대상으로 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는지를 조사하였더니 조사 대상 학생 중 72%, ~~남학생의 64%~~ 가 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 것으로 조사되었다. 조사 대상 학생 150명 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 학생이었을 때, 그 학생이 여학생일 확률을 구해보자.

	수강O	수강X	
남	48	27	75
여	60	15	75
	108	42	150

$\frac{60}{108} = \frac{30}{54} = \frac{5}{9}$

$\boxed{\frac{5}{9}}$

7. 두 함수 $f(x) = x^5 + x^3 - 3x^2 + k$, $g(x) = x^3 - 5x^2 + 3$ 에 대하여 열린구간 $(1, 2)$에서 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구해보자.

$f(x) - g(x) = x^5 + 2x^2 + (k-3)$

$(1+2+k-3)(32+8+k-3) < 0$

$k(k+37) < 0$

$\therefore 0 < k < 37$

$\boxed{36개}$

8. $\{1, 2, 3, 4\}$에서 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$로의 함수 중에서 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) \geq f(x_2)$ 를 만족시키는 함수 f의 개수를 구해보자.

9. 책상 서랍 속에 10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개, 100원짜리 동전 6개가 들어 있다. 이 동전들 중 임의로 6개의 동전을 가지고 나와 500원짜리 아이스크림을 사려고 할 때, 아이스크림을 살 수 있을 확률을 구해보자. (단, 각각의 동전이 뽑힐 확률은 같다.)

10 − 2개

50 − 4개

100 − 6개

총 − 12개

<구매 못하는 경우>

① $100\times4+10\times2 \longrightarrow {}_6C_4=15$

② $100\times4+50+20 \longrightarrow {}_6C_4\times4\times2=120$

③ $100\times3+50\times3+20 \longrightarrow {}_6C_3\times4\times2=160$

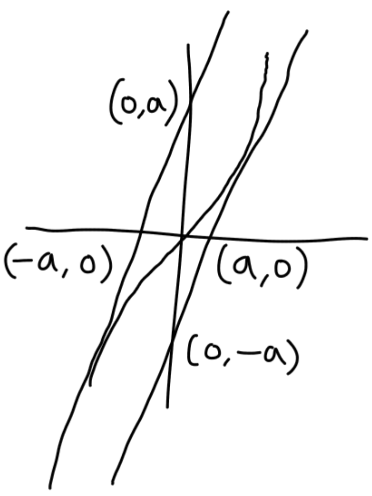
④ $100\times3+50\times2+20\times2 \longrightarrow {}_6C_3\times{}_4C_2=120$

415

$$1-\frac{415}{{}_{12}C_6}=1-\frac{415}{924}=\frac{509}{924}$$

$$\boxed{\therefore \frac{509}{924}}$$

10. 점 $(a,0)$ 에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 점 $(0,a)$ 에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구해보자. (단, $a>0$)



$y=x-a$ $\quad (b,3b^3)$ $\quad 3b^3=b-a$

$y=x+a$ $\quad (-b,-3b^3)$ $\quad -3b^3=-b+a$

$f'(x)=9x^2$

$y=9b^2(x-b)+3b^3$

$y=9b^2x-6b^3$

$9b^2=1$

$6b^3=a$

$b^2=\frac{1}{9}$ ← $a>0$ 이므로 $b=\frac{1}{3}$

$a=6\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$

↓

$90a=90\times\frac{2}{9}=20$

$$\boxed{\therefore 20}$$