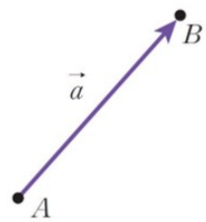
1 벡터의 정의

- Scalar : 크기만을 가지는 양
- Vector : 크기와 방향을 모두 가지는 양
  - initial point : 화살표가 시작하는 점 A
  - terminal point : 화살표가 끝나는 점 B
  - symbol : $\overrightarrow{AB}$ or $\vec{a}$
  - vector size : $|\overrightarrow{AB}|$ or $|\vec{a}|$



2 여러 가지 벡터

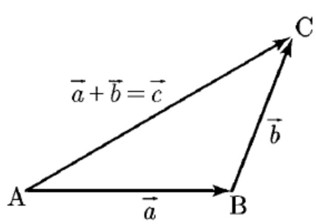
- 영벡터 ($\vec{0}$): initial point와 terminal point가 일치하는 경우 ($|\overrightarrow{AA}|$ or $|\overrightarrow{BB}|$) 크기가 0이고, 방향은 없음
- 역벡터 ($-\vec{a}$) : 벡터 $\vec{a}$와 크기는 갖고 방향은 반대인 벡터. 역벡터의 역벡터는 자기 자신 (-$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$)
- 단위 벡터 (unit vector) : 크기가 1인 벡터

3 벡터의 덧셈과 뺄셈

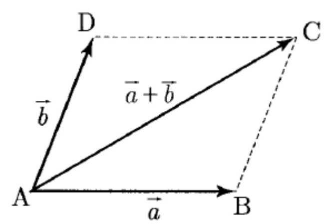
3.1 벡터의 덧셈

- 삼각형을 이용한 덧셈 : 두 벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AC}$를 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$의 합이라 하고, 기호로 $\vec{a} + \vec{b}$와 같이 나타낸다.
  - ■ $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- 평행 사변형을 이용한 덧셈 : 두 벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$에 대하여 평행사변형 ABCD를 만들 때, 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$의 합 $\vec{a} + \vec{b}$는 대각선인 $\overrightarrow{AC}$이다.
  - ■ $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



[그림 1]



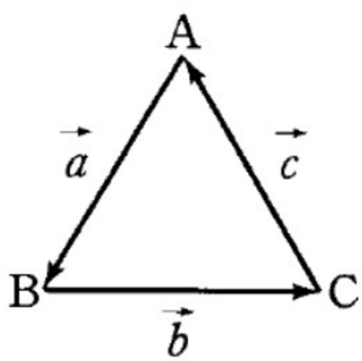
[그림 2]

- 벡터의 덧셈에 대한 성질
  - 임의의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 영벡터 $\vec{0}$에 대하여 다음이 성립한다.
  - 교환 법칙 : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  - 결합 법칙 : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
  - 항등원 : $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
  - 역원 : $\vec{a} + (\overrightarrow{-a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

- Example : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}$

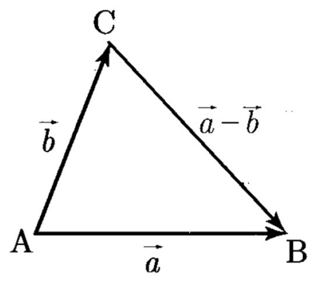
- Example : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED}$

- Example : 아래 삼각형에서 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?

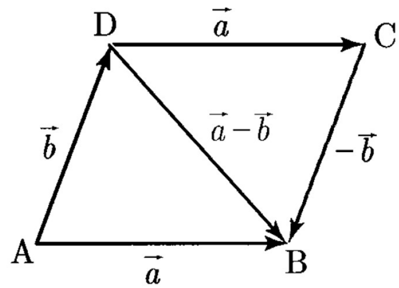


3.2 벡터의 뺄셈

- 삼각형을 이용한 뺄셈 : 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 벡터 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$를 만족하는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고, 기호로 $\vec{a}-\vec{b}$와 같이 나타낸다.
- 아래 [그림 1]과 같이 삼각형 ABC 에서 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$라 할 때, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$이므로, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$이다.
- 아래 [그림 2]에서 평행사변형 ABCD 에서 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$라 하면, $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$이고, $\vec{a}=\overrightarrow{DC}$, $-\vec{b}=\overrightarrow{CB}$이므로, $\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$.
- $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

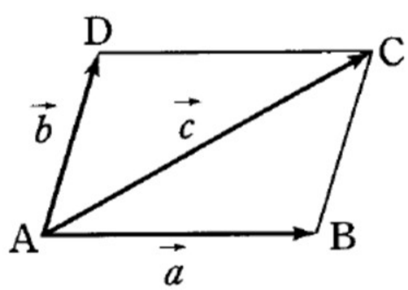


[그림 1]



[그림 2]

- Example : 아래 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내보자.



  - $\vec{b}-\vec{c}$
  - $\vec{c}-\vec{a}$

4 벡터의 실수배와 평행

4.1 벡터의 실수배

- 정의 : 임의의 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 실수배라 하고, 다음과 같이 정의한다.
  - $\vec{a} \neq \vec{0}$
    - $k > 0$이면, $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.
    - $k < 0$이면, $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.
    - $k = 0$이면, 실수 k에 대하여 $k\vec{a} = \vec{0}$이다.
  - $\vec{a} = \vec{0}$일 때, 실수 k에 대하여 $k\vec{a} = \vec{0}$이다.

- 벡터의 실수배에 대한 성질 : 두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
  - 결합 법칙 : $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
  - 분배 법칙 : $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}, \quad k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

- Example : 다음 식을 간단히 해보자.
  - ■ $3(2\vec{a} + 4\vec{b}) - (\vec{a} - 3\vec{b})$
  - ■ $5(\vec{a} - 2\vec{b}) + (4\vec{a} + 5\vec{b}) - 2\vec{a}$

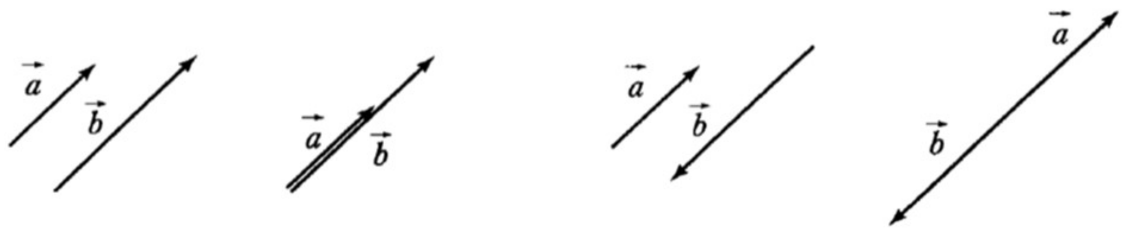
- Example : 다음 등식을 만족하는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내보자.
  - ■ $3(\vec{a} - 2\vec{x}) - 4(2\vec{b} + \vec{x}) = 2\vec{a}$
  - ■ $2(\vec{x} + \vec{b}) - 3(\vec{c} - 2\vec{a}) = \vec{x} + 2\vec{a}$

- Example : 다음 두 등식을 동시에 만족하는 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내보자.

$$\begin{aligned} 4\vec{x} + 3\vec{y} &= \vec{a} \\ 3\vec{x} + 4\vec{y} &= \vec{b} \end{aligned}$$

4.2 두 벡터의 평행

- 정의 : 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같거나 반대일 때, 평행이라고 한다.
- symbol : $\vec{a}//\vec{b}$
- 벡터의 실수배 정의로부터, 벡터 $\vec{a}$와 평행한 벡터들은 $k\vec{a}$로 나타낼 수 있으므로, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하다면 $\vec{b} = k\vec{a}$가 성립한다.
- $\vec{a}//\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b} = k\vec{a}$

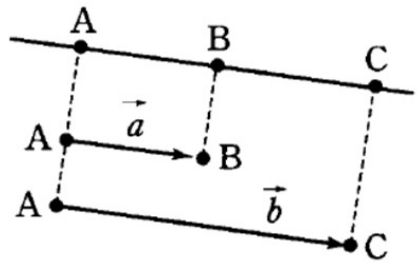


- Example : 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$일 때, 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$가 서로 평행함을 보여주세요.

- Example : 영벡터가 아닌 두 벡터 $3\vec{a} - 7\vec{b}$와 $6\vec{a} + k\vec{b}$가 서로 평행할 때, 상수 k의 값을 구해주세요. (단 $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$이고, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 평행하지 않다.)

4.3 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

- 정의 : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

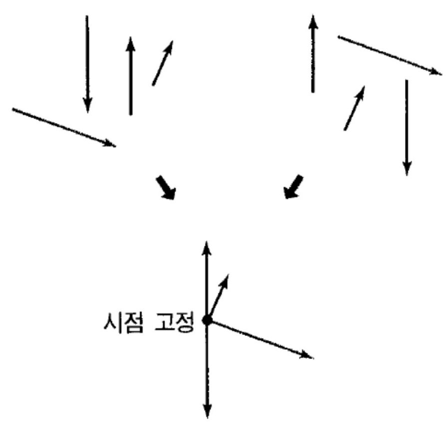


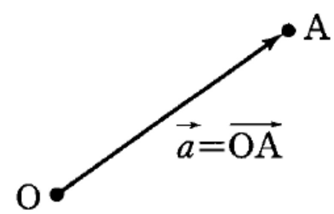
- Example : 세 벡터 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = 4\vec{a} + m\vec{b}$일 때, 세 점 A, B, C는 일직선 위에 있다고 한다. 이 때, 실수 m의 값을 구해보자. (단 $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$이고, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 평행하지 않다.)

5 위치벡터

5.1 정의

- 평면 또는 공간에서 한 점 O를 고정시키면, 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$인 점 A가 오직 하나로 정해진다.
- 역으로 임의의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$인 벡터 $\vec{a}$가 오직 하나로 정해진다.
- 즉 initial point를 한 점 O로 고정하면, 벡터 $\vec{a}$와 평면 또는 공간 위의 한 점 A는 일대일 대응한다.
- 벡터를 대표하는 값을 종점 (terminal point)으로 볼 수 있다는 것을 의미한다.
- 임의의 벡터를 위치벡터들로 바꾸어 표현 : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$





- Example : 세 점 A, B, C의 위치 벡터가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내보자

- Example : 세 점 A, B, C의 위치벡터가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $3\vec{a} - \vec{b}$일 때, 벡터 $-3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이용하여 나타내보자.

5.2 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

- 내분점의 위치벡터 : $\overline{AB}$를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하고, 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라고 하자. 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있고,

$$\overline{AP}:\overline{AB}=m:(m+n) \Longleftrightarrow \overline{AP}=\frac{m}{m+n}\overline{AB}$$

이므로,

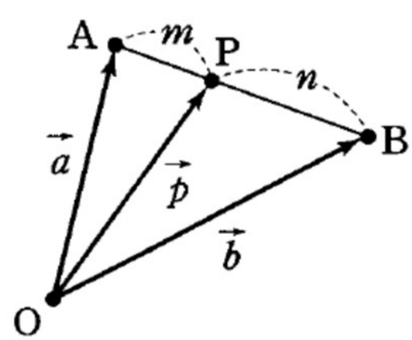
$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

가 성립한다. 이 때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}\end{aligned}$$

이므로, 위 식에 대입하면

$$\begin{aligned}&\vec{p}-\vec{a}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a}),\quad \vec{p}=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})\\ &\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}\end{aligned}$$



- 외분점의 위치벡터 : $\overline{AB}$를 $m : n$ $(m > n > 0)$으로 외분하는 점을 Q라 하고, 점 Q의 위치벡터를 $\vec{q}$라고 하자. 세 점 A, B, Q는 한 직선 위에 있고,

$$\overline{AQ} : \overline{AB} = m : (m-n) \Longleftrightarrow \overline{AQ} = \frac{m}{m-n}\overline{AB}$$

이므로,

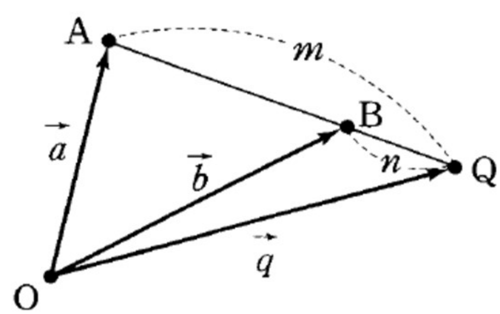
$$\overrightarrow{AQ} = \frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$$

가 성립한다. 이 때,

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = \vec{q} - \vec{a}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

이므로, 위 식에 대입하면

$$\vec{q} - \vec{a} = \frac{m}{m-n}(\vec{b} - \vec{a}), \quad \vec{q} = \vec{a} + \frac{m}{m-n}(\vec{b} - \vec{a})$$
$$\vec{q} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$



- Example : 삼각형 ABC에서 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 AP를 2 : 3으로 내분하는 점을 Q라고 하자. 세 점 A, B, C의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{PQ}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내보자.

- Example : 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 대각선 BD를 1 : 2로 내분하는 점을 Q라고 하자. 네 점 A, B, C, D의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{PQ}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$로 나타내보자.

6 평면벡터의 성분

6.1 평면벡터의 성분 표현

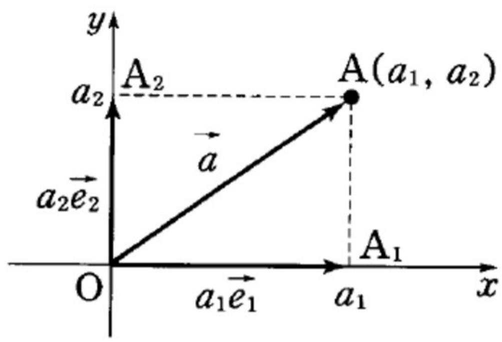
좌표평면 위의 임의의 평면벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$가 되는 점 $A(a_1, a_2)$를 잡을 때, 점 A 에서 x축, y축에 내린 수선의 발은 각각 $A_1(a_1, 0)$, $A_2(0, a_2)$이므로,

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$$

이 때, 두 점 $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$의 위치벡터를 각각 e_1, e_2로 나타내면, $OA_1 = a_1\vec{e_1}, \;\; OA_2 = a_2\vec{e_2}$ 이므로,

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

이 때, 두 실수 a_1, a_2를 평면벡터 $\vec{a}$의 성분 (component)이라 하고, a_1을 x성분, a_2을 y성분이라 한다.



- $\vec{a} = (a_1, a_2)$

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

- 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$에 대하여 두 벡터가 서로 같을 조건은 다음과 같다.

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, \;\; a_2 = b_2$$

6.2 평면벡터의 성분에 의한 연산

평면벡터를 성분으로 표현하면, 벡터에서의 연산 (덧셈, 뺄셈, 실수배)은 성분들끼리의 연산으로 이해할 수 있다.

- 덧셈 :

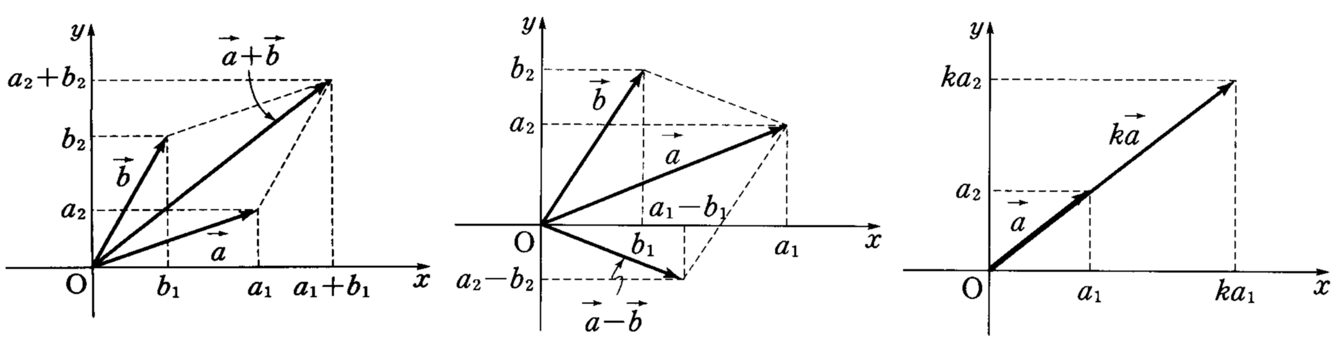
$$
\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (a_1, a_2) + (b_1, b_2) \\
&= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) + (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) \\
&= (a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2} \\
&= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)
\end{aligned}
$$

- 뺄셈 :

$$
\begin{aligned}
\vec{a} - \vec{b} &= (a_1, a_2) - (b_1, b_2) \\
&= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) - (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) \\
&= (a_1 - b_1)\vec{e_1} + (a_2 - b_2)\vec{e_2} \\
&= (a_1 - b_1, a_2 - b_2)
\end{aligned}
$$

- 실수배 :

$$
\begin{aligned}
k\vec{a} &= k(a_1, a_2) = k(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) \\
&= ka_1\vec{e_1} + ka_2\vec{e_2} \\
&= (ka_1, ka_2)
\end{aligned}
$$



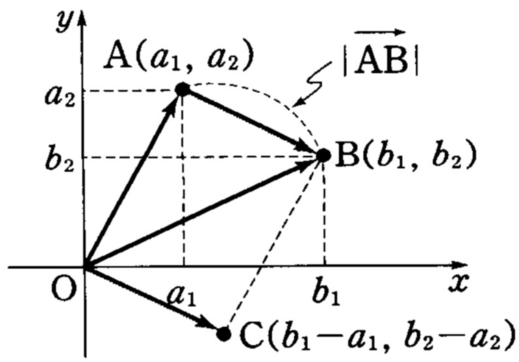
- Example : 세 벡터 $\vec{a} = (0, -1)$, $\vec{b} = (1, 4)$, $\vec{c} = (-1, 0)$에 대하여 벡터 $3(4\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) - 4(\vec{a} + 3\vec{c} - 2\vec{b})$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구해보자.

- Example : 세 벡터 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (-1, -3)$, $\vec{c} = (-5, -9)$에 대하여 $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$를 만족할 때, mn의 값을 구해보자. (단, m, n은 실수)

- Example : 세 벡터 $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (k, 1)$, $\vec{c} = (4, -3)$에 대하여 벡터 $2(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) - 3(\vec{b} - \vec{a} - \vec{c})$의 크기가 5일 때, 모든 k의 값의 합을 구해보자.

6.3 두 점에 대한 평면벡터의 성분과 크기

좌표평면 위의 두 점 A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)에 대하여 평면벡터 $\overrightarrow{AB}$의 성분과 그 크기를 구해 보자.



위 그림과 같이 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$이므로

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
&= (b_1, b2) - (a_1, a_2) \\
&= (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \\
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이 때, 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 성분은 위의 그림에서 점 C의 위치벡터 $\overrightarrow{OC}$의 성분과 같다.

- Example : 좌표평면 위의 네 점 $A(-2, 1)$, $B(0, 3)$, $C(4, -2)$, $D(x, y)$에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{DC}$가 서로 같을 때, $x + y$의 값을 구해보자.

6.4 성분 표현된 두 평면벡터의 평행 조건

우리가 앞에서 배운 평행 조건에 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$의 성분을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{a} // \vec{b} \quad & \Longleftrightarrow \vec{b} = k\vec{a} \Longleftrightarrow (b_1, b_2) = (ka_1, ka_2) \\ & \Longleftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = k \end{aligned}$$

- Example : 세 벡터 $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (4, 5)$, $\vec{c} = (7, 3)$에 대하여 두 벡터 $\vec{b} + k\vec{c}$와 $\vec{a} - \vec{b}$가 평행할 때, 실수 k의 값을 구해보자.

- Example : 세 벡터 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (4, 4)$, $\vec{c} = (5, -1)$에 대하여 두 벡터 $k\vec{a} + \vec{b}$와 $\vec{c} - \vec{b}$가 평행할 때, 실수 k의 값을 구해보자.

- Example : 세 벡터 $\overrightarrow{PA} = (-1, 1)$, $\overrightarrow{PB} = (0, -1)$, $\overrightarrow{PC} = (3, a)$에 대하여 세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있을 때, a의 값을 구해보자.

7 공간벡터의 성분

7.1 공간벡터의 성분 표현

좌표공간에 있는 임의의 공간벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$가 되는 점 $A(a_1, a_2, a_3)$을 잡을 때, 점 A에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발은 각각 $A_1(a_1, 0, 0)$, $A_2(0, a_2, 0)$, $A_3(0, 0, a_3)$이므로,

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

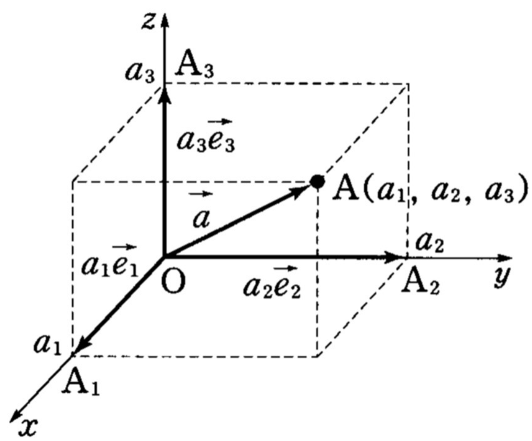
이 때, 세 점 $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$의 위치벡터를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$으로 나타내면,

$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

이므로, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$는 다음과 같이 세 벡터의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

이 때, 세 실수 a_1, a_2, a_3을 공간벡터 $\vec{a}$의 **성분**이라 하고 a_1을 x성분, a_2을 y성분, a_3을 z성분이라 한다.



- $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- 두 공간벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$에 대하여 두 벡터가 서로 같을 조건은 다음과 같다.

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$$

7.2 공간벡터의 성분에 의한 연산

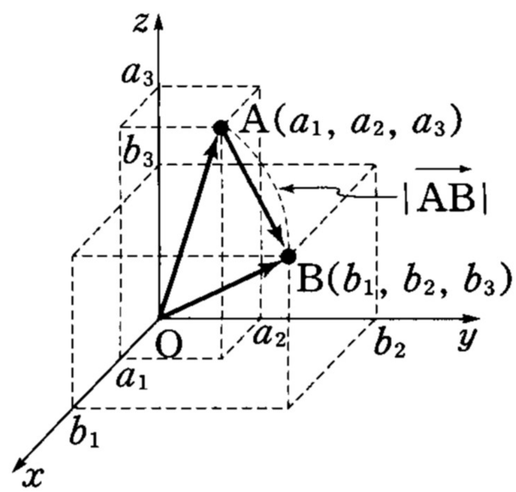
성분으로 표현된 공간벡터에서의 연산 (덧셈, 뺄셈, 실수배) 역시 다음과 같이 평면벡터에서의 연산에 z좌표 하나가 추가된 형태로 나타난다. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$일 때,

- 덧셈 : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- 뺄셈 : $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
- 실수배 : $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$, (단 k는 실수)

- Example : 세 벡터 $\vec{a} = (0, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, -2)$, $\vec{c} = (2, -1, 4)$에 대하여 벡터 $3(\vec{a} + 3\vec{b}) - 2(2\vec{a} + \vec{c}) + 4(\vec{c} - 2\vec{b})$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구해보자.

7.3 두 점에 대한 공간벡터의 성분과 크기

좌표평면 위의 두 점 A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)에 대하여 공간벡터 $\overrightarrow{AB}$의 성분과 그 크기 역시 다음과 같이 평면벡터에서의 성분에 z좌표 하나가 추가된 것일 뿐 다를 건 없다.



위 그림과 같이 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$이므로

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

- Example : 좌표공간에 있는 세 점 $A(-2, 0, 1)$, $B(0, 3, 0)$, $C(4, 2, -1)$에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{DC}$가 서로 같게 하는 점 D의 좌표를 구해보자.

7.4 성분 표현된 두 공간벡터의 평행 조건

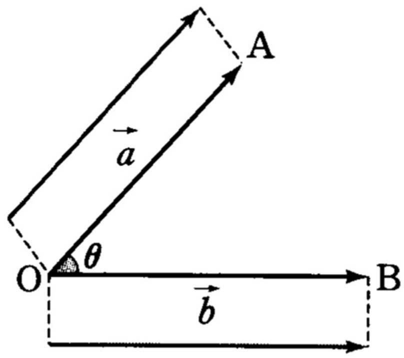
우리가 앞에서 배운 평행 조건에 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$의 성분을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{a} // \vec{b} \quad & \Longleftrightarrow \vec{b} = k\vec{a} \Longleftrightarrow (b_1, b_2, b_3) = (ka_1, ka_2, ka_3) \\ & \Longleftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = k \end{aligned}$$

- Example : 세 벡터 $\vec{a} = (1, -3, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1)$, $\vec{c} = (-3, 5, 3)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a} + k\vec{b}$와 $\vec{a} + \vec{c}$가 서로 평행할 때, 실수 k의 값을 구해보자.

8 벡터의 내적

벡터에는 크기와 방향이 모두 있으므로 두 벡터의 곱셈에도 당연히 크기와 방향을 고려하게 되는데, 여기서 크기만 고려한 곱을 **내적 (inner product)**, 방향까지 함께 고려한 곱을 **외적 (outer product)**라 한다. 내적은 크기만 고려하므로 **스칼라곱 (scalar product)**이라고도 한다.



내적을 정의하려면 반드시 두 벡터가 이루는 각이 정의도어 있어야 한다. 두 직선이 이루는 각의 정의와 같은 맥락으로, 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$가 되도록 하는 세 점 O, A, B를 잡을 때, 즉 평행이동하여 initial point를 일치시킬 때,

$$\angle AOB = \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각으로 정한다.

8.1 벡터의 내적의 정의

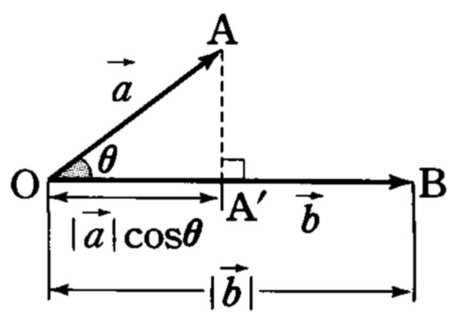
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

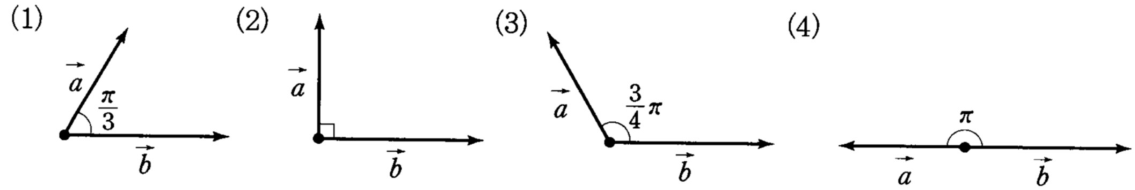
를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 (inner product)이라 한다.

- 내적 $\vec{a} \cdot \vec{b}$는 벡터가 아닌 실수 값
- $\vec{a} = \vec{0}$ 또는 $\vec{b} = \vec{0}$일 때에는 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$

두 벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$의 내적을 기하학적으로 이해해 보면, 아래 그림과 같이 벡터 OA의 terminal point A에서 직선 OB에 내린 수선의 발을 A'라고 할 때, **$\overrightarrow{OB}$의 크기와 정사영인 $\overrightarrow{OA'}$의 크기의 곱**으로 볼 수 있다.



- Example : $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$일 때, 내적 $\vec{a} \cdot \vec{b}$의 값을 각각 구해보자.



8.2 성분 표현된 두 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 평면 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ $(0 \le \theta \le \pi)$일 때, 세 점 $O(0,0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB를 생각해보자. 그러면 제2코사인법칙에 의하여

$$
\begin{aligned}
|\overline{AB}|^2 &= |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - 2\overline{OA}\ \overline{OB}\cos\theta \\
&= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} \\
\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2)
\end{aligned}
$$

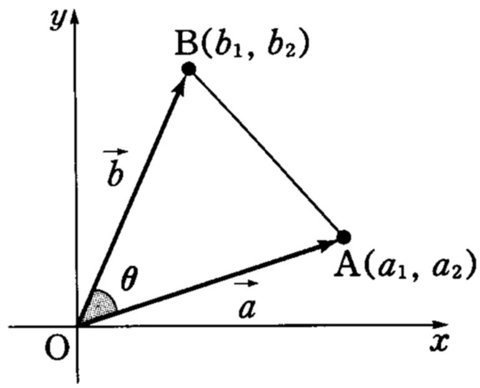
이 때, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\overrightarrow{AB}|$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 성분으로 표현하면,

$$
|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}
$$

이므로, 이를 위에 식에 대입하여 정리하면

$$
\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2
$$

- 평면벡터에서의 내적 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- 공간벡터에서의 내적 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$



- Example : 다음 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$일 때, x의 값을 구해보자.
  - ■ $\vec{a} = (x, 2)$, $\vec{b} = (-3, x)$
  - ■ $\vec{a} = (x, 1, 1 - x)$, $\vec{b} = (2, x, 2 - x)$

8.3 벡터의 내적에 대한 성질

- 교환 법칙 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- 결합 법칙 : $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (단, k는 실수)
- 분배 법칙 : $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

증명 $\vec{a} = (a_1, a_2),\ \vec{b} = (b_1, b_2),\ \vec{c} = (c_1, c_2).$

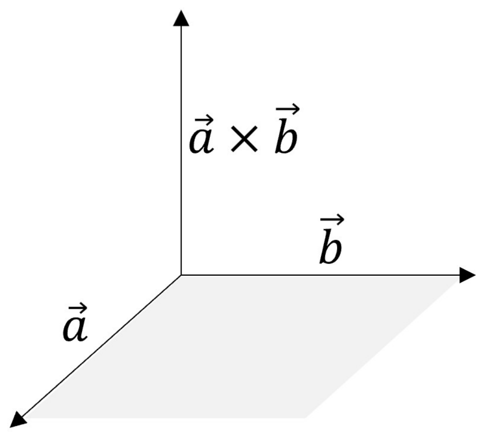
- Example : 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$일 때, 다음 값을 구해보자.
  - ■ $|2\vec{a} - \vec{b}|$
  - ■ $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

- Example : 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $30°$이고, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$일 때, $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$의 값을 구해보자.

9 벡터의 외적

앞서 언급하였듯이, 두 벡터의 곱셈에 있어서 크기와 방향을 모두 고려하는 것이 벡터의 외적 (outer product)이라고 할 수 있다. 두 공간벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$에 대하여 벡터의 외적 $\vec{a} \times \vec{b}$는 다음과 같이 정의한다.

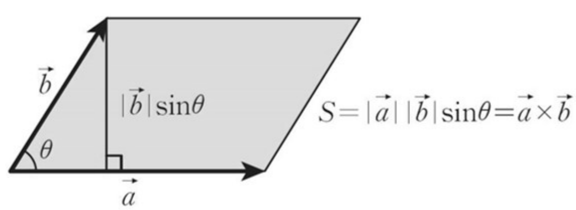
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$



- 두 벡터의 외적의 방향은 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 모두 수직인 방향 (법선 벡터)이며, 벡터 $\vec{a}$에서 벡터 $\vec{b}$ 방향으로 오른나사를 돌렸을 때 나사가 진행하는 방향이다. (오른손 법칙)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

- 두 벡터의 외적의 크기는 평행사변형의 넓이와 같다.
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = -|\vec{b} \times \vec{a}|$



- Example : $\vec{a} = i - j + k$, $\vec{b} = 2i + 2j$일 때, 동시에 수직인 벡터의 k가 음수일 때, 알맞은 단위벡터는?
  (1) $-\frac{1}{\sqrt{6}}i - \frac{1}{\sqrt{6}}j - \frac{2}{\sqrt{6}}k$
  (2) $-\frac{1}{\sqrt{6}}i + \frac{1}{\sqrt{6}}j - \frac{2}{\sqrt{6}}k$
  (3) $\frac{1}{\sqrt{6}}i - \frac{1}{\sqrt{6}}j - \frac{2}{\sqrt{6}}k$
  (4) $\frac{1}{\sqrt{6}}i + \frac{1}{\sqrt{6}}j - \frac{2}{\sqrt{6}}k$

- Example : 다음 중 세 점 $P(1, 2, -1)$, $Q(2, 3, 1)$, $R(3, 1, 0)$을 포함하는 평면에 수직인 벡터는?
  (1) $(-1, -1, 1)$
  (2) $(-1, 0, 1)$
  (3) $(1, -1, 1)$
  (4) $(1, -1, 0)$

- Example : 벡터 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$일 때, $\vec{a} \times \vec{b}$를 구해보자.

- Example : $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$가 표준단위벡터일 때, 다음을 구해보자.
  - ■ $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$
  - ■ $\vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{k})$
  - ■ $(\vec{k} \times \vec{j}) \times \vec{i}$
  - ■ $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$

- Example : 벡터 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (0, 3, 2)$일 때 다음을 구해보자.
  - ■ $\vec{a} \times \vec{b}$
  - ■ $\vec{b} \times \vec{c}$
  - ■ $\vec{c} \times \vec{c}$
  - ■ $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{c}$
  - ■ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr