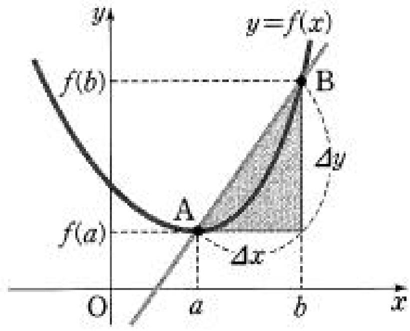
1 미분계수와 도함수

1.1 증분

함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x의 값의 변화량 $b - a$를 x의 증분, y의 값의 변화량 $f(b) - f(a)$를 y의 증분이라 하고 이를 각각 Δx, Δy로 나타낸다.



1.2 평균 변화율

함수 $y = f(x)$에 대해 x값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 **평균변화율**은 다음과 같이 정의하고, $\Delta y/\Delta x$로 표기한다. 위의 그래프에서 알 수 있듯이 함수 $f(x)$의 평균변화율은 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(f))$를 지나는 직선 AB의 기울기를 나타낸다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

1.3 순간 변화율

함수 $y = f(x)$에 대해 $x = a$에서의 **순간변화율**은 다음과 같이 정의하며, $f'(a)$로 표기한다. 여기서 함수에 대한 순간변화율을 **미분계수**라 한다.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta h \longrightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

위의 값이 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 **미분가능하다**고 한다. 미분계수의 또 다른 정의로 $a + \Delta x = x$ ($\Delta x \longrightarrow 0$ 일 때 $x \longrightarrow a$)를 대입하면, 다음과 같이 표현 가능하다.

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Example #1 : 함수 $f(x) = x^2 + 2x$에 대하여 $x = 1$에서 $x = 3$까지 변할 때의 평균변화율과 미분계수 $f'(a)$가 같을 때, 상수 a의 값을 구해보자.

- Example #2 : 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 10$ 일 때,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1 - 2h)}{h}$$

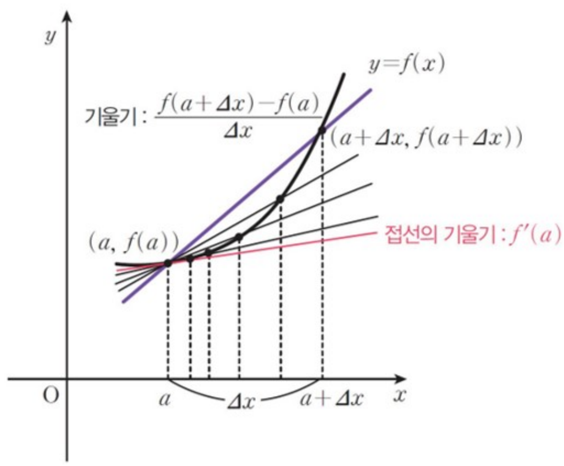
의 값을 구해보자.

1.4 미분계수의 기하학적 의미

$x = a$에서 함수 $y = f(x)$의 접선의 기울기를 미분계수로 볼 수 있으며, 따라서 $x = a$에서 $f(x)$의 접선의 방정식은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분계수가 존재하는 경우, $f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 정의하며, 개구간 (a, b)의 모든 점에서 $f(x)$가 미분가능하면 간단히 $f(x)$는 구간 (a, b)에서 미분가능(differentiable)하다고 한다.



- Example #3 : 함수 $f(x) = x^2 + ax$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기가 3일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 실수)

1.5 도함수

미분가능한 함수 $y = f(x)$의 **도함수**는 다음과 같이 정의한다.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

위의 식에 대한 값이 존재하면, $f(x)$는 $x = a$에서 **미분가능하다 (differentiable)**고 한다. 따라서 극한이 존재하지 않는 경우, $f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하지 않다고 한다. 다르게 표현하면 $x = a$에서의 미분계수가 존재하지 않는다고 한다.

- 함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하면, 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 연속이다.

<증명> $f(x)$가 $x = a$에서 연속임을 보이려면 $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$가 성립함을 보여야 한다.

$$\lim_{x \longrightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$$

따라서,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\
&= \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \longrightarrow a} (x - a) \\
&= f'(a) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

이 성립하므로, $f(x)$는 $x = a$에서 연속이다.

- 위 명제의 역은 참이 아니다. $f(x)$가 $x = a$에서 연속이면 $x = a$에서 미분가능하다.

- Example #4 : $f(x) = |x|$일 때, f(x)가 $x = 0$에서 연속성과 미분 가능성을 구해보자.

- Example #5 : 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & (x \geq 1) \\ 3x + b & (x < 1) \end{cases}$ 가 $x = 1$에서 미분가능하도록 하는 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

2 미분법

2.1 기본 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

- $\{cf(x)\}' = cf'(x)$ (단, c는 상수)
- $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$
- $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ (단, $g(x) \neq 0$)

<증명>
$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$
\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' \quad &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h)}{h} + \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\longrightarrow 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

- Example #6 : 두 함수 $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x + 1$에 대하여 함수 $h(x) = f(x)g(x)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구해보자.

- Example #7 : 함수 $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x - 2)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구해보자.

- Example #8 : 함수 $f(x) = |x^3|$에 대하여 $x = 0$ 일 때의 미분계수를 구해보자.

2.2 연쇄법칙

$f(x)$와 $g(x)$가 모두 미분가능한 함수들이고, $F = f \circ g$이면 F는 미분가능하고, F'은 다음과 같이 나타낸다.

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Example #9 : 다음 함수를 미분해보자.
  - $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
  - $g(x) = (2x - 1)^5(x^3 - x + 1)^3$
  - $h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+x+1}}$

3 여러 함수의 미분법

3.1 음함수의 미분법

$y = f(x)$의 형태로 주어진 x에 관한 함수 y는 양함수라 하며, 두 변수 x와 y를 포함하는 관계식 $f(x, y) = 0$에 의하여 표현되는 함수를 음함수라 한다. 음함수의 미분은 y를 x에 대한 음함수로 간주하고 x로 미분하여 dy/dx를 구한다.
원의 방정식 $x^2 + y^2 = 1$을 x에 대해 미분하면,

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{dx}(x^2 + y^2 = 1) \\
&\frac{x}{dx}x^2 + \frac{x}{dx}y^2 = \frac{x}{dx}1 \\
&2x + \frac{d}{dy}y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \\
&2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \\
&\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}
\end{aligned}$$

- Example #10 : 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구해보자.
  - ■ $f(x) = x^2 + 2y^2 - xy - 3x - 4y = 5$
  - ■ $g(x) = \sqrt{x} + y^4$
  - ■ $h(x) = x^2 + xy + y^3$

3.2 삼각함수의 미분법

삼각함수의 미분은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\csc x = \csc x \cot x$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \quad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

- Example #11 : 다음을 미분해 보자.

$$\sin(x+y) = y^2 \cos x$$

- Example #12 : 다음을 미분해 보자.
  - $f(x) = \sin x \cos x$
  - $g(x) = x^2 \tan x$
  - $h(x) = \sin(x^2)$
  - $p(x) = \sin^2 x$
  - $q(x) = \frac{\sec x}{1+\tan x}$

3.3 로그함수의 미분법

로그함수의 미분은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

- Example #13 : 다음을 미분해 보자.

$$\log_{10}(2+\cos x)$$

- Example #14 : 다음을 미분해 보자.

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$$

3.4 지수함수의 미분법

지수함수의 미분은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

- Example #15 : 다음을 미분해 보자.

$$\frac{x}{dx}10^{x^2}$$

- Example #16 : 다음을 미분해 보자.

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

- Example #17 : 양수 x에 대하여 $f(x) = x^{\cos x}$일 때, $f'(\frac{\pi}{2})$의 값을 구해보자.

3.5 매개변수 함수의 미분법

두 변수 x, y가 두 함수 f와 g에 의하여

$$\begin{cases} \mathrm{x = f(t)} \\ \mathrm{y = g(t)} \end{cases}$$

로 표현될 때, 이 식을 **매개변수함수**라 하고, t를 매개변수라 한다. 매개변수함수의 미분은 $x = f(t)$, $y = g(t)$가 모두 미분가능하고, $f'(t) \neq 0$이면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

- Example #18 : 매개변수 t가 $t > 0$인 실수값을 취하면서 변할 때, 점 $(t - \frac{1}{t}, t + \frac{1}{t})$이 그리는 곡선에서 $t = 2$인 점에서의 접선의 기울기를 구해보자.

- Example #19 : 매개변수 t, $(t > 0)$으로 나타내어진 함수 $x = t^2 + 1$, $y = \frac{2}{3}t^3 + 10t - 1$ 에서 $t = 1$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구해보자.

4 n차도함수

4.1 이차도함수

미분가능한 함수 $y = f(x)$에 대해서, **이차도함수**는 다음과 같이 정의한다.

$$f''(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

- Example #20 : $y = e^x \sin x$가 모든 실수 x에 대하여 등식 $y'' + 2ky' + 2y = 0$을 만족할 때, 상수 k의 값을 구해보자.

- Example #21 : 함수 $f(x) = e^x(\sin x + 1)$에 대하여 $f''(x) - 2f'(x) + mf(x) = ne^x$이 항상 성립할 때, 실수 m, n의 합 $m + n$의 값을 구해보자.

4.2 n차도함수

미분가능한 함수 $y = f(x)$에 대해서 $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, ...으로 정의할 때, n차도함수는 다음과 같이 정의한다.

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

- Example #22 : $f(x) = \log_2(1+x)$의 n계도함수를 $f^{(n)}(x)$라 할 때, $f^{(10)}(0)$의 값을 구해보자. (단, $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$)

- Example #23 : $f(x) = xe^x$에 대하여 $f(x)$의 n계도함수 $f^{(n)}(x)$라고 할 때, $f^{(100)}(0)$의 값을 구해보자.

- Example #24 : 함수 $f(x) = \sin x$에 대하여 $f^{(10)}(\frac{\pi}{6})$의 값을 구해보자.

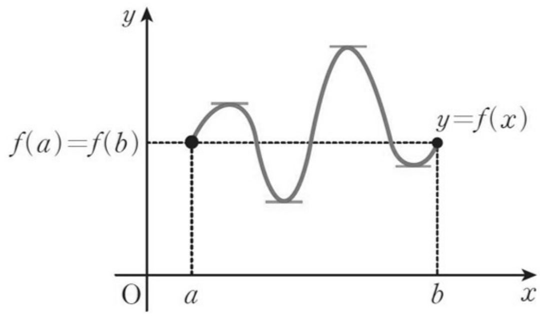
- Example #25 : 함수 $f(x) = \ln x$의 n계도함수는를 구해보자.

- Example #26 : 함수 $f(x) = e^x \sin x$의 n계도함수를 구해보자.

5 로피탈의 정리

5.1 롤의 정리 (Rolle's Theorem)

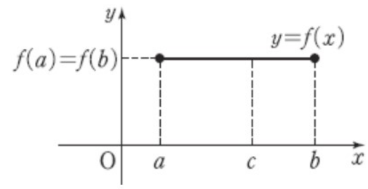
함수 $y = f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하고 $f(a) = f(b)$이면, $f'(c) = 0$이 되는 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



다시 말해, 열린구간 (a, b)에서 곡선 $y = f(x)$의 접선 중 x축과 평행한 것이 적어도 하나 존재함을 의미한다. 롤의 정리가 성립하기 위한 조건 중 함수 $f(x)$가 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) = f(b)$이지만 열린구간 (a, b)에서 미분가능하지 않으면 성립하지 않는 경우가 있다.
예를 들어, $f(x) = |x|$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 $f(-1) = f(1)$을 만족하지만 $x = 0$에서 미분가능하지 않다. 따라서 $f'(c) = 0$을 만족하는 c가 -1과 1사이에 존재하지 않는다.

<증명> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 반드시 최대값과 최소값을 갖는다.

- $f(x)$가 상수함수인 경우



$f'(x) = 0$을 만족하므로, 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c) = 0$이다.

- $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우 최대최소정리에 의해 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 최대값과 최소값을 갖는다. $f(a) = f(b)$이므로 상수함수가 아닌 함수 $f(x)$가 최대값 또는 최소값을 갖는 어떤 $x = c$가 열린구간 (a, b)에 존재한다.

1) $x = c$ 에서 최대값 $f(c)$를 가질 때, $a < c + h < b$ 인 임의의 h에 대해서

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

이므로,

$$\lim_{h \longrightarrow 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad \lim_{h \longrightarrow 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0,$$

을 만족한다.

함수 $f(x)$는 $x = c$에서 미분가능하므로 평균변화율의 우극한과 좌극한이 같아야 한다. 즉,

$$0 \leq \lim_{h \longrightarrow 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h \longrightarrow 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

$$\therefore f'(c) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

2) $x = c$ 에서 최소값 $f(c)$를 가질 때, 위와 같은 방법으로 $f'(c) = 0$이 성립한다.

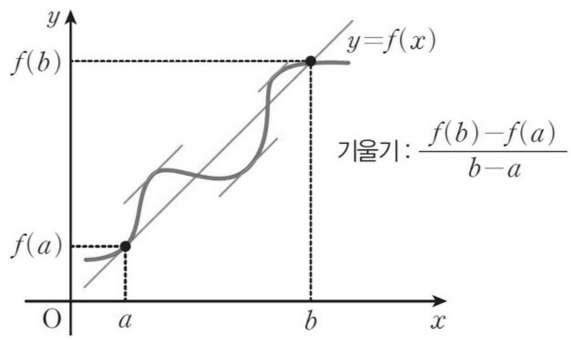
- Example #27 : 함수 $f(x) = x^2 - 4x$에 대하여 닫힌구간 $[1, 3]$에서 롤의 정리를 만족하는 상수 c의 값을 구해보자.

- Example #28 : 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2$에 대하여 닫힌구간 $[0, 3]$에서 롤의 정리를 만족하는 상수 c의 값을 구해보자.

- Example #29 : 방정식 $x^3 + x - 1 = 0$이 단 한 개의 실근을 가짐을 증명해보자.

5.2 평균값 정리

함수 $y = f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면, 다음을 만족하는 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Example #30 : 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 $\lim_{x\longrightarrow\infty} f'(x) = 3$일 때, $\lim_{x\longrightarrow\infty}\{f(x+2) - f(x)\}$의 값을 구해보자.

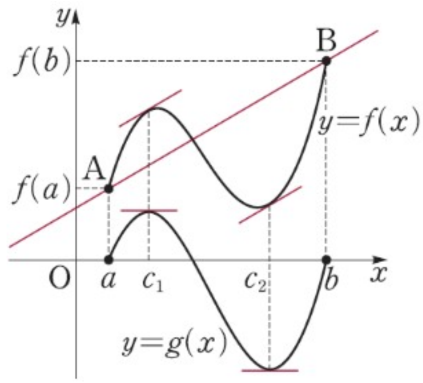
- Example #31 : 평균값정리를 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이자. (단, $x > 0$)

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$$

- Example #32 : 실수 전체의 구간에서 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0) = 2$, $f(4) = -5$이다. 함수 $g(x) = \frac{f(x)}{x+1}$라 할 때, 구간 $[0, 4]$에서 평균값의 정리를 만족시키는 상수 c의 값에 대하여 $g'(c)$의 값을 구해보자.

<증명> 롤의 정리를 이용하여 평균값 정리를 증명해보자. 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$



이 때, 함수 $y = g(x)$를 아래와 같이 정의하면,

$$g(x) = f(x) - \left\{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right\}$$

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며, $g(a) = g(b) = 0$을 만족한다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $g'(c) = 0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

이므로,

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

이다. 따라서

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

이다. 그러므로 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

5.3 로피탈의 정리

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$와 실수 a에 대하여 다음 조건들을 만족한다고 하자.

- a를 포함한 열린 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속이고 미분가능하다.
- $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = 0$ 또는 $\pm\infty$ ($\frac{0}{0}$또는$\frac{\infty}{\infty}$꼴)
- $\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재한다.

이 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Example #33 : 다음의 극한값을 구해보자.

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- Example #34 : 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(2) = 2$, $f'(2) = 4$를 만족할 때, 다음의 극한값을 구해보자.

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{\{f(x)\}^3 - 8}{x^3 - 8}$$

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr