1 행렬식

1.1 행렬식의 계산

행렬식 (determinant)은 정방행렬 A를 실수 값으로 대응시키는 함수로, det(A) 또는 $|A|$로 표기한다. 행렬식은 역행렬이 존재하지 않으면 0, 역행렬이 존재하면 0이 아닌 값을 갖는다.

- Symbol : det(A) 또는 $|A|$
- det(A) $= 0$이면, 행렬 A의 역행렬은 없음 (역행렬의 존재 여부 판별 값 역할)
- det(A) $= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- 1×1 행렬의 행렬식 : 행렬 $A = (a)$일 때, det(A) $= a$
- 2×2 행렬의 행렬식 : 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, det(A) $= ad - bc$
- x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 조건은

$$D = ad - bc \neq 0$$

- x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이 $x = 0$, $y = 0$ 이외의 해를 가질 조건은

$$D = ad - bc = 0$$

- Example : x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 가 오직 한 쌍의 해를 갖기 위할 조건을 구해보자.

- Example : x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} a-1 & a \\ a & a-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 이 해가 존재하지 않기 위한 상수 a의 조건을 구해보자.

- Example : 연립방정식

$$\begin{cases} ax - 3y = a \\ 2x + (a-5)y = a \end{cases}$$

의 근이 두 개 이상이 되도록 하는 a의 값을 구해보자. (단, 중근은 한 개로 카운트한다.)

- Example : 연립방정식

$$\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 $x = y = 0$ 이외의 해를 갖도록 k의 값을 구해보자.

- Example : 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

을 만족하는 해가 없을 때, 상수 a 의 값을 구해보자.

- Example : 임의의 실수 x에 대하여 행렬

$$A = \begin{pmatrix} x+2a & -4 \\ 3 & x+a \end{pmatrix}$$

의 역행렬이 존재하도록 하는 정수 a의 개수를 구해보자.

- 3×3 행렬의 행렬식 : 3×3 크기를 갖는 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 의 행렬식을 '사루스 (Sarrus) 방법'으로 구해보자.

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

- Example : 3x3 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$의 det(A) 값을 구해보자.

- $n \times n$ 정사각행렬 $(n \geq 4)$ A의 행렬식 det(A)는 소행렬식을 이용해 구한다.
  - 행렬 A에서 성분 a_{ij}가 있는 i행과 j열을 제거한 행렬의 행렬식을 M_{ij}로 표현하고, 이를 a_{ij}의 소행렬식 (minor determinant)이라 한다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{33} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 행렬 A의 i번째 행과 j번째 열의 원소 a_{ij}의 여인자 (cofactor) C_{ij}는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- 행렬식에서 어느 한 행 또는 한 열을 기준으로나오는 여인수들을 정리해둔 식을 여인수 전개라고 한다.
  - 1행 기준 : $\det(\mathrm{A}) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

  - 1열 기준 : $\det(A) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

- Example : 3x3 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$의 성분 a_{22}의 소행렬식과 여인수를 구해보자.

행렬 A가 $n \times n$ 일 때, A는 임의의 한 행 또는 열에 있는 각 원소와 대응하는 여인수의 곱을 모두 합하여 얻은 수를 행렬 A의 **행렬식**이라고 한다.

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

- Example : 3x3 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$의 1행에 의한 행렬식과 1열에 의한 행렬식을 구해보자.

1.2 2x2 행렬의 행렬식

우리가 지난 시간에 배운 2×2 행렬의 행렬식 $D = ad - bc$에 대해 다시 한번 살펴보자.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_{11} = d \\ C_{12} &= -M_{12} = -c \\ C_{21} &= -M_{21} = -b \\ C_{22} &= M_{22} = a \end{aligned}$$

여인수를 사용하여 행렬 A의 행렬식 det(A)을 구해보면

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} = ad - bc$$

- Example : 3x3 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$의 det(A)를 구해보자.

- Example : 4x4 행렬 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & 8 \\ -2 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$의 det(B)를 구해보자.

- Example : 3x3 행렬 $C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$의 det(C)를 구해보자.

- Example : 3x3 행렬 $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$의 det(D)를 구해보자.

1.3 여러 가지 행렬에 대한 행렬식의 성질

- 행렬 A와 전치행렬 A^T의 행렬식은 같다. 즉, $\det(A) = \det(A^T)$이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \det(A^T) = 8$

- 단위행렬 I의 행렬식은 $\det(I) = 1$ 이다.

- 성분이 모두 0인 행 또는 열을 포함한 n차 정방행렬 A의 행렬식 $\det(A) = 0$이다. 즉, 이러한 행렬은 비가역행렬이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 행렬 A와 행렬 B에 대해 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(AB) = \det(A)\det(B) = (-14)(-13) = 182$

- 삼각행렬의 행렬식은 주대각 성분의 곱이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 \times -2 \times 7 \times 2 \times 6 = -168$

- 대각행렬의 행렬식은 주대각 성분의 곱이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 \times -2 \times 7 \times 2 \times 6 = -168$

- 역행렬 A^{-1}의 행렬식

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\begin{aligned} & AA^{-1} = I \\ & \det(AA^{-1}) = \det(I) \longrightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \\ & \therefore \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \end{aligned}$$

1.4 행렬식을 이용한 역행렬 계산

$n \times n$ 가역행렬 $A = (a_{ij})$에 대하여 역행렬 A^{-1}은 다음과 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

여기서 C_{ij}는 행렬 A의 (i, j)번째 여인자이고, $\det A$는 A의 행렬식이다. 이를 아래와 같이 표현 가능하다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj} A$$

$\mathrm{adj} A$는 고전적 수반행렬 (adjugate matrix, classical adjoint matrix)으로 불리고 아래와 같이 표현 가능하다.

$$\mathrm{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

참고 : 행렬 A의 수반행렬 구하기 여인수를 성분으로 갖는 행렬의 전치행렬

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 11, \quad A_{12} = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2, \quad A_{13} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -8 \\ A_{21} &= \det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 14, \quad A_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -7, \quad A_{23} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -14 \\ A_{31} &= \det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -1, \quad A_{32} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -4, \quad A_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -5 \end{aligned}$$

$C_{11} = 11, C_{12} = -2, C_{13} = -8, C_{21} = -14, C_{22} = -7, C_{23} = 14, C_{31} = -1, C_{32} = 4, C_{33} = -5.$

$$\therefore \mathrm{adj} A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -14 & -1 \\ -2 & -7 & 4 \\ -8 & 14 & -5 \end{pmatrix}$$

- Example : 다음 3x3 행렬 A의 역행렬 A^{-1}를 구해보자.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- Example : 다음 3x3 행렬 B의 역행렬 B^{-1}와 adj(B)를 구해보자.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2 크래머의 규칙

선형 연립방정식의 해를 구하는 방법 중 하나로 크래머의 규칙 (Cramer's rule)을 소개한다.

$$Ax = b \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

에서 행렬 A의 역행렬이 존재할 때, x_1의 값은 행렬 A의 첫 번째 열 대신에 b가 대체되어 아래와 같이 구할 수 있다.

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

마찬가지로, x_2의 값은 행렬 A의 두 번째 열 대신에 b가 대체되어 아래와 같이 구할 수 있다.

$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

이와 같은 방식으로 x_n의 값은 행렬 A의 n 번째 열 대신에 b가 대체되어 아래와 같이 구할 수 있다.

$$x_n = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

- Example : 크래머의 규칙을 이용하여 다음 선형방정식의 해를 구해보자.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

- Example : 크래머의 규칙을 이용하여 다음 선형방정식의 해를 구해보자.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

- Example : 크래머의 규칙을 이용하여 다음 선형방정식의 해를 구해보자.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr