1. 극한과 관련하여 다음을 구해보자.
(1) 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+h}}\right)$$

이 때, $f(1/4)$의 값을 구해보자. (0.5점)

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+h}}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(x+h) - x}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\,(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\right) \\ &= \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\,(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{1}{4}\right) &= \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\frac{1}{4}+h}\left(\sqrt{\frac{1}{4}+h} + \sqrt{\frac{1}{4}}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\ &= 4 \end{aligned}$$

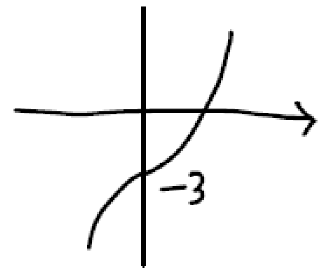
(2) 서로 다른 두 실수 α, β가 $\alpha + \beta = 3$을 만족시킬 때, 다음을 구해보자. (0.5점)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{(x+\alpha^2 - x - \beta^2)\sqrt{4x+\alpha} + \sqrt{4x+\beta}}{(4x+\alpha-4x-\beta)(\sqrt{x+\alpha^2} + \sqrt{x+\beta^2})} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}} + \sqrt{4+\frac{\beta}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x}} + \sqrt{1+\frac{\beta^2}{x}}} \\ &= (\alpha+\beta) \cdot \frac{4}{2} \\ &= 2(\alpha+\beta) \\ &= 6 \end{aligned}$$

2. 다음 함수의 역함수를 구하고, 역함수의 정의역과 치역을 구해보자. (각 0.5점)

■ $f(x) = x^5 - 3$, 정의역 $\mathbb{R}$



$$y = x^5 - 3$$

$$y + 3 = x^5$$

$$(y+3)^{\frac{1}{5}} = x$$

$$\sqrt[5]{x+3} = y \qquad \therefore y = \sqrt[5]{x+3}$$

정의역 : 실수 전체

치역 : 실수 전체

■ $g(x) = \frac{1}{2x+1}$, 정의역 $[1, \infty)$

$$y = \frac{1}{2x+1}$$

$$2x + 1 = \frac{1}{y}$$

$$2x = \frac{1}{y} - 1$$

$$x = \frac{1}{2y} - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}$$

정의역 : $(0, \frac{1}{3}]$

치역 : $[1, \infty)$

3. 함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f'(2) = -3$, $f'(4) = 6$ 일 때, 다음을 구해보자.

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(-2)}$$

$y = f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(-x) = f(x)$

$\therefore f'(-x) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$

$= \lim_{h \to \infty} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to \infty} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \cdot (-1)$

$= -f'(x)$

따라서 $f'(-2) = -f'(2) = 3$, $f'(4) = 6$이므로

$\lim_{x \to -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(-2)}$

$= \lim_{x \to -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(-2)}$

$= \lim_{x^2 \to 4} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \cdot \lim_{x \to -2} \frac{x - (-2)}{f(x) - f(-2)} \cdot (x - 2)$

$= f'(4) \cdot \frac{-4}{f'(-2)}$

$= 6 \cdot \frac{-4}{3} = -8$

4. 사차함수 $f(x) = 2x^4 - px^3 + x^2$ 이 $x < 0$에서는 감소하고, $x > 0$ 에서는 증가할 때, 실수 p의 값의 범위를 구해보자.

$f(x) = 2x^4 - px^3 + x^3$에서

$f'(x) = 8x^3 - 3px^2 + 2x = x(8x^2 - 3px + 2)$

(i) $x < 0$에서 $f(x)$는 감소함수이므로

$f'(x) = x(8x^2 - 3px + 2) \leq 0$

$\therefore 8x^2 - 3px + 2 \geq 0$

(ii) $x > 0$에서 $f(x)$는 증가함수이므로

$f'(x) = x(8x^2 - 3px + 2) \geq 0$

$\therefore 8x^2 - 3px + 2 \geq 0$

(i), (ii)에서 모든 실수 x에 대하여 $8x^2 - 3px + 2 \geq 0$

이차방정식 $8x^2 - 3px + 2 = 0$의 판별식을 D라고 하면

$D = 9p^2 - 4 \cdot 8 \cdot 2 \leq 0$, $(3p+8)(3p-8) \leq 0$

$\therefore -\frac{8}{3} \leq p \leq \frac{8}{3}$

5. 함수 $f(x) = |x-1|(x+a)$가 $x = 1$ 에서 미분가능하도록 하는 실수 a의 값을 구해보자.

$f(x) = |x-1|(x+a)$에서

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x+a) & (x \geq 1) \\ -(x-1)(x+a) & (x < 1) \end{cases}$$에서

$$\therefore \ f'(x) = \begin{cases} 2x+a-1 & (x > 1) \\ -2x-a+1 & (x < 1) \end{cases}$$

$x = 1$에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$$\lim_{x \to 1-0} f'(x) = \lim_{x \to 1+0} f'(x)$$

$$-2-a+1 = 2+a-1 \quad \therefore \ a = -1$$

6. 남학생과 여학생 각각 75명을 대상으로 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는지를 조사하였더니 조사 대상 학생 중 72%, 남학생의 64% 가 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 것으로 조사되었다. 조사 대상 학생 150명 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 학생이었을 때, 그 학생이 여학생일 확률을 구해보자.

인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 학생의 수는

$105 \times \frac{72}{100} = 108$(명)

인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 남학생의 수는

$75 \times \frac{64}{100} = 48$(명)

이때, 인터넷 강의를 수강한 경험의 유무를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

인터넷 강의 경험	유	무	계
남학생	48	27	75
여학생	60	15	75
계	108	42	150

조사 대상 학생 중 임의로 한 명을 뽑았을 때 그 학생이 인터넷 강의를 수강한 경험이 있는 학생일 사건을 A, 여학생일 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{60}{150}}{\frac{108}{150}} = \frac{5}{9}$$

7. 두 함수 $f(x) = x^5 + x^3 - 3x^2 + k$, $g(x) = x^3 - 5x^2 + 3$ 에 대하여 열린구간 $(1, 2)$에서 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구해보자.

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^5 + 2x^2 + k - 3$$

$h(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 $h(x) = 0$이 적어도 하나의 실근을 가지려면 중간값의 정리에 의하여

$$h(1)h(2) = k(k+37) < 0 \quad \therefore \quad -37 < k < 0$$

따라서 구하는 정수 k의 개수는 36개다.

8. $\{1, 2, 3, 4\}$에서 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$로의 함수 중에서 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) \geq f(x_2)$ 를 만족시키는 함수 f의 개수를 구해보자.

모두 정답 (범위 밖 문제)

9. 책상 서랍 속에 10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개, 100원짜리 동전 6개가 들어 있다. 이 동전들 중 임의로 6개의 동전을 가지고 나와 500원짜리 아이스크림을 사려고 할 때, 아이스크림을 살 수 있을 확률을 구해보자. (단, 각각의 동전이 뽑힐 확률은 같다.)

길잡이 아이스크림을 사려면 500원 이상이 되어야 하므로 6개의 동전이 500원 이상이 되는 경우를 생각해 본다.

12개의 동전 중에서 임의로 6개를 뽑는 경우의 수는

$_{12}C_6 = 924$(가지)

이때 아이스크림을 사기 위해서는 적어도 500원 이상을 가지고 있어야 한다.

따라서 10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개, 100원짜리 동전 6개 중에서 6개의 동전을 뽑았을 때, 동전의 금액의 합계가 500원 이상이 되는 경우를 구해보면

(i) 100원짜리 동전을 6개 뽑는 경우

$_6C_6 = 1$(가지)

(ii) 100원짜리 동전 5개와 10원짜리 동전 또는 50원짜리 동전 1개를 뽑는 경우

$_6C_5 \times {_2C_1} + {_6C_5} \times {_4C_1} = 36$(가지)

(iii) 100원짜리 동전 4개와 50원짜리 동전 2개를 뽑는 경우

$_6C_4 \times {_4C_2} = 90$(가지)

(i), (ii), (iii)에 의하여 500원 이상이 되는 경우의 수는

$1+36+90=127$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{127}{924}$

10. 점 $(a,0)$ 에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 점 $(0,a)$ 에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구해보자. (단, $a>0$)

$f(x)=3x^3$ 이라 하면 $f'(x)=9x^2$

점 $(a,0)$ 에서 그은 접선의 접점을 P $(t,\ t^3)\,(t>0)$,

점 $(0,a)$ 에서 그은 접선의 접점을 Q $(k,\ 3t^3)(k<0)$ 이라 하면

접선에서의 기울기가 같으므로

$f'(t)=f'(k) \Rightarrow 9t^2=9k^2 \qquad \therefore k=-t \quad (\because \ \neq t)$

$\therefore$ Q $(-t,\ -t^3)$

점 P $(t,\ t^3)$ 에서의 접선의 방정식은 $y-3t^3 = 9t^2(x-t)$

이 접선이 점 $(a,0)$ 을 지나므로

$9t^2a-6t^3=0 \cdots$ ㉠

점 Q $(k,\ 3t^3)$ 에서의 접선의 방정식은 $y+3t^3=9t^2(x+t)$

이 접선이 점 $(0,\ a)$ 를 지나므로 $6t^3=a \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면

$t=\dfrac{1}{3}\,(\because t>0),\ a=\dfrac{2}{9} \qquad \therefore\ 90a=20$

e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr