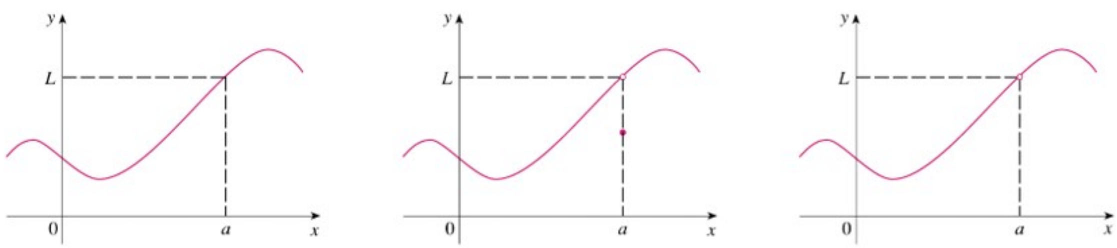
1 함수의 극한

1.1 극한의 정의

x가 a와 부근에 있을 때 $f(x)$가 정의될 때, x가 a는 아니면서 a에 가까이 갈 때, 함수 $f(x)$가 실수 L로 접근하면 L을 함수 $f(x)$의 **극한**이라 하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

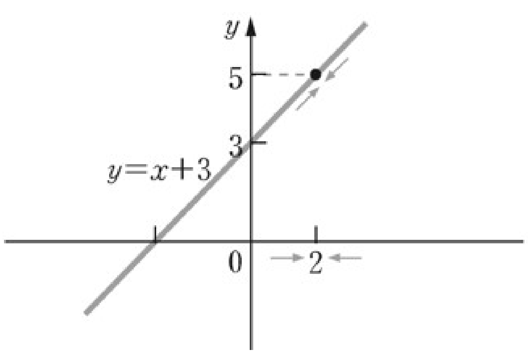
로 나타낸다. 이를 말로 표현할 때는 "x가 a에 접근할 때 $f(x)$의 극한 (limit)은 L이다".



$\lim_{x \to a} f(x) = L$의 유형은 아래와 같이 세 가지로 구분할 수 있으며, 세 경우 모두 $\lim_{x \to a} f(x) = L$이다.

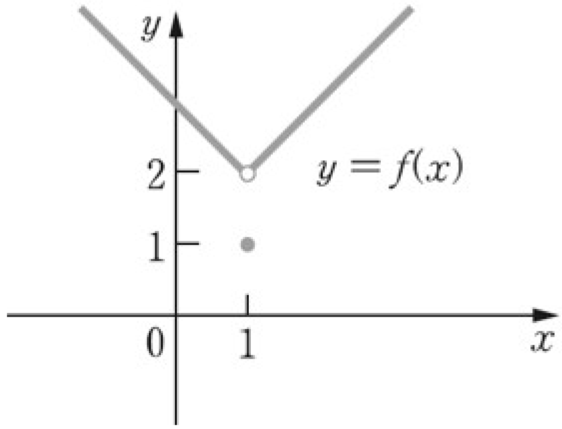
- $f(a)$가 정의되고, $f(a) = L$인 경우
- $f(a)$가 정의되고, $f(a) \neq L$인 경우
- $f(a)$가 정의되지 않은 경우

아래 그림의 경우 함수 $f(x)$의 극한은 5이며, $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$로 나타낸다.

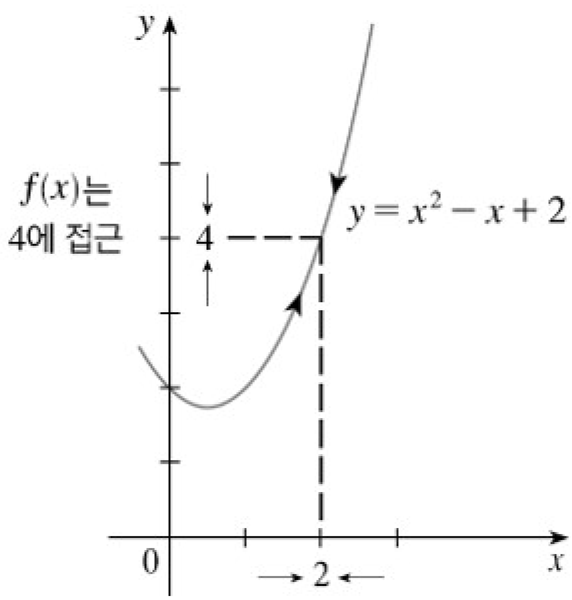


x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.8	4.8	2.2	5.2
1.9	4.9	2.1	5.1
1.99	4.99	2.01	5.01
1.999	4.999	2.001	5.001

- Example #1 : $y = f(x)$의 그래프가 아래와 같을 때, x가 1로 가까이 갈 때, $f(x)$의 극한값을 구해보자.



- Example #2 : $f(x) = x^2 - x + 2$의 그래프가 아래와 같을 때, x가 2로 가까이 갈 때, $f(x)$의 극한값을 구해보고 식으로 표현해보자.



1.2 좌극한과 우극한

x가 a는 아니면서 a의 왼쪽에서부터 a에 가까이 갈 때, 함수 $f(x)$가 실수 L로 접근하면 L을 함수 $f(x)$의 **좌극한**이라 하고

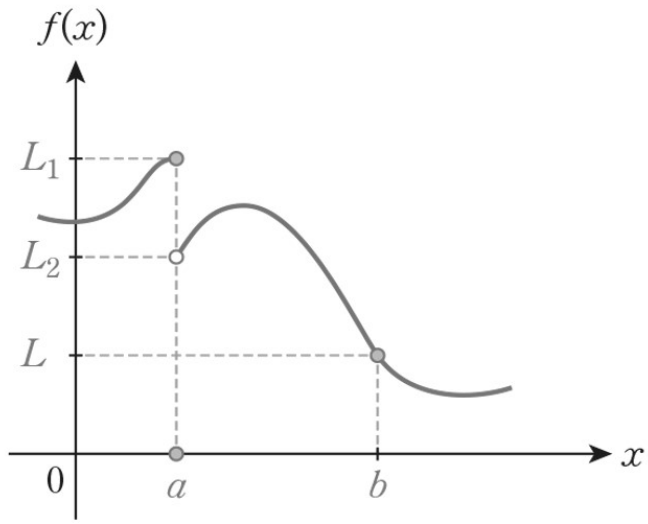
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

로 나타낸다.

반대로 x가 a는 아니면서 a의 오른쪽에서부터 a에 가까이 갈 때, 함수 $f(x)$가 실수 L로 접근하면 L을 함수 $f(x)$의 **우극한**이라 하고

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

로 나타낸다.



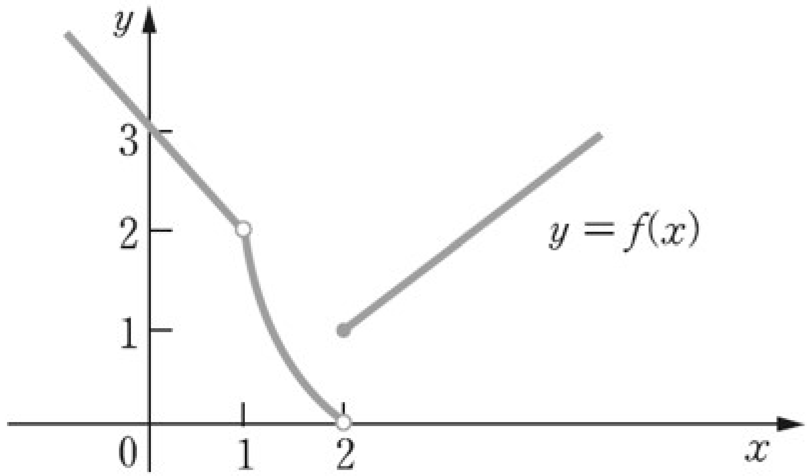
- 불연속 : 좌극한 $\neq$ 우극한

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

- 연속 : 좌극한 = 우극한

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$
$$\lim_{x \to b^+} f(x) = L$$

- Example #3: $y = f(x)$의 그래프가 아래와 같을 때, 다음 극한 값을 구해보자.



  - ■ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
  - ■ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
  - ■ $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
  - ■ $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

- Example #4: 다음 극한의 값을 구해보자.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 0 \\ x + 4, & x \geq 0 \end{cases}$$

  - ■ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
  - ■ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

- Example #5: 다음 극한의 값을 구해보자.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ 3x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

  - ■ $\lim_{x \to 1^-} g(x)$

  - ■ $\lim_{x \to 1^+} g(x)$

- Example #6: Heaviside function H의 극한값을 구해보자.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

  - ■ $\lim_{x \to 0^-} H(x)$

  - ■ $\lim_{x \to 0^+} H(x)$

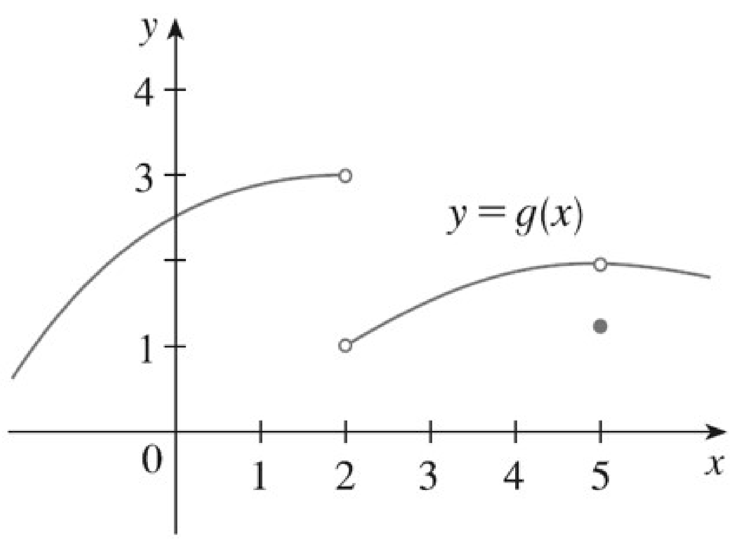
1.3 극한의 존재성

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

이기 위한 필요충분조건은

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

좌극한과 우극한이 서로 같은 값을 가지는 경우 함수 $f(x)$는 $x \longrightarrow a$일 때 극한값을 가지며, 그 극한값에 수렴한다고 정의한다.



- $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$
- $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$
- $\lim_{x \to 2} g(x)$는 존재하지 않는다.
- $\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2$
- $\lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$
- $\lim_{x \to 5} g(x) = 2$

- Example #7: $f(x) = |x|$일 때, $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값을 구해보자.

- Example #8: $g(x) = \frac{|x|}{x}$일 때, $\lim_{x\to 0} g(x)$의 값을 구해보자.

- Example #9: $h(x) = \frac{1}{x^2}$일 때, $\lim_{x\to 0} g(x)$의 값을 구해보자.

1.4 함수의 발산

$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x)$인 경우 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다고 정의한다. 그리고, x가 a는 아니면서 a에 가까이 갈 때, 함수 $f(x)$가 양의 값을 가지면서 한없이 커지면 $f(x)$는 **양의 무한대로 발산한다**라 하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

로 나타낸다. 반대로, x가 b는 아니면서 b에 가까이 갈 때, 함수 $f(x)$가 음의 값을 가지면서 한없이 커지면 $f(x)$는 **음의 무한대로 발산한다**라 하고

$$\lim_{x \to b} f(x) = -\infty$$

로 나타낸다.

- Example #10: 다음 극한값을 구해보자.
  - $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}$
  - $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$
  - $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}$
  - $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$
  - $\lim_{x \to 2} \frac{3x-5}{x-2}$

2 극한의 계산

2.1 극한의 기본 정리

$\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재할 때, 다음이 성립한다.

- 합의 법칙 : 합의 극한은 극한들의 합이다.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

- 차의 법칙 : 차의 극한은 극한들의 차이다.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

- 상수배 법칙 : 함수의 상수배의 극한은 그 함수의 극한의 실수배이다.

$$\lim_{x\to a}(kf(x)) = k\lim_{x\to a} f(x), \quad k\text{는 상수}$$

- 곱의 법칙 : 곱의 극한은 극한들의 곱이다.

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

- 나눗셈의 법칙 : 나눗셈의 극한은 극한들의 나눗셈 이다.(분모의 극한이 0이 아닐 때)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

  단, $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

- Example #11 : $f(x) = x^2 - x + 2$이고, $g(x) = 3x + 1$일 때, 다음을 구해보자.
  - $$\lim_{x\to 1}(f(x) + g(x))$$
  - $$\lim_{x\to 1}(f(x) - g(x))$$
  - $$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$$
  - $$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

2.2 직접대입 성질

함수 $f(x)$가 다항함수 또는 유리함수이고, a가 $f(x)$의 정의역 안에 있으면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

삼각함수들 역시 직접 대입 성질을 갖는다. 다시 말하면 임의의 실수 a에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

- Example #12 : 극한 $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$을 구해보자.

2.3 $\frac{0}{0}$ 형태의 극한 계산법

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},\quad (\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ 와 } \lim_{x\to a} g(x) = 0\text{일 때})$$

분자와 분모를 인수분해하여 약분한 후 극한을 계산하거나, 분자 또는 분모에 있는 근호를 유리화하여 약분한 후 극한을 계산한다.

- Example #13 : 다음의 극한을 계산해 보자.
  - $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$
  - $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$$
  - $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$
  - $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

2.4 유리함수의 극한 계산법

분자와 분모의 차수에 따라 결정한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)},\quad (f(x) \text{ 와 } g(x) \text{ 가 다항함수일 때})$$

- 분자인 $f(x)$의 차수가 분모인 $g(x)$의 차수보다 큰 경우 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty,\quad \text{or}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

- 분자인 $f(x)$의 차수가 분모인 $g(x)$의 차수보다 작은 경우 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

- 분자인 $f(x)$의 차수와 분모인 $g(x)$의 차수가 같은 경우 :
  $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$이며,
  $a_n\neq 0$, $b_n\neq 0$이면,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_n}$$

- Example #14 : 다음의 극한을 계산해 보자.
  - ■
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{x-2}$$
  - ■
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{-x+3}$$
  - ■
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2+x+1}$$
  - ■
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{-x^3+5x+4}$$
  - ■
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x-2}{2x^3+5x^2+1}$$
  - ■
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{-x^2+5x+7}$$

- Example #15 : 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1} = 1$, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1} = 3$일 때, 다음을 구해보자.

$$\lim_{x\to1}\frac{3f(x)-5g(x)}{-f(x)+g(x)}$$

- Example #16 : 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)} = 3$, $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)} = 2$일 때, 다음을 구해보자.

$$\lim_{x\to1}\frac{f\circ f(x)}{2x^2-x-1}$$

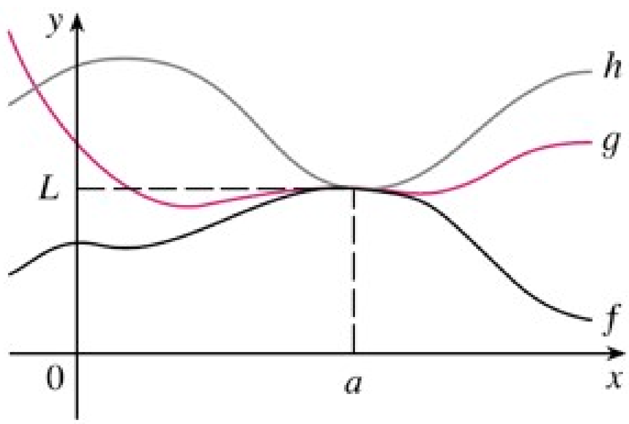
2.5 압축 정리 (압착 정리)

$x = a$의 적당한 근방에 있는 모든 점 x에 대해 $f(x) \le g(x) \le h(x)$이고,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

이면,

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$



이 정리는 샌드위치 정리 또는 핀칭 (pinching) 정리라고도 부른다. 위의 그림에서 볼 수 있듯이, $g(x)$가 a 부근에서 $f(x)$와 $h(x)$ 사이에서 압축되고, f와 h가 a에서 같은 극한 값 L을 갖는다면, g도 a에서 같은 극한 값 L을 가져야 한다는 뜻이다.

- Example #17 : 다음의 극한을 계산해 보자.

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

- Example #18 : 모든 x에 대하여 $-1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x$일 때,

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

- Example #19 : 다음의 극한을 계산해 보자.

$$\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$$

2.6 삼각함수의 극한 계산법

삼각함수에 관한 극한을 계산할 때는

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

을 이용한다. 사인함수와 코사인함수는 모든 곳에서 연속이기 때문에,

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

이다. 단, 탄젠트 함수는 $\cos x = 0$인 곳을 제외한 구간에서 연속이다.

- Example #20 : 다음의 극한을 계산해 보자.
  - ■ $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$$
  - ■ $$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 7x}$$
  - ■ $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$$
  - ■ $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{6x}$$
  - ■ $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

3 함수의 연속성

다음이 성립할 때 함수 $f(x)$는 a에서 연속이다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- $x = a$에서 함수 $f(a)$가 정의된다.
- $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

만일 위 세 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 $f(x)$는 $x = a$에서 연속이 아니다.
이 정의는 x가 a에 접근할 때 $f(x)$가 $f(a)$에 접근하면 f가 a에서 연속임을 의미한다.

3.1 함수의 연속에 관한 기본 성질

$x = a$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 연속일 때, 다음 함수도 $x = a$에서 연속이다.

- $f(x) \pm g(x)$
- $cf(x), \quad c$는 상수
- $f(x)g(x)$
- $\frac{g(x)}{f(x)}, \quad$ 단 $f(a) \neq 0$

- Example #21 : $f(x) = x^2 - x + 2$일 때, $f(x)$는 $x = 0$에서 연속인가?

- Example #22 : $g(x) = |x|$일 때, $g(x)$는 $x = 0$에서 연속인가?

- Example #23 : $h(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$일 때, $h(x)$는 $x = 2$에서 연속인가?

- Example #24 : 다음 $p(x)$는 $x = 0$에서 연속인가?

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

3.2 구간

$a < b$인 두 실수 a, b에 대하여 다음과 같이 정의된 집합을 각각 **구간**이라 한다.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

기호로는 각각 (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$로 나타낸다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 실수 a에서 연속일 때, $f(x)$를 그 구간에서 **연속함수**라고 한다.
예를 들어, 정의역이 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$일 때, $f(x) = c$, (c는 상수), $f(x) = x^n$, (n은 자연수), $f(x) = a^x$, $f(x) = \sin x$등의 함수는 연속함수이다. 정의역이 $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$일 때, $f(x) = \log_a x$ 등의 함수는 연속함수 이다.

- Example #25 : 임의의 실수 x에 대해서 다음 함수 $f(x)$가 연속이 되도록 하는 실수 a, b를 구해보자.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax + b}{x + 2}, & x \neq -2 \\ 7, & x = -2 \end{cases}$$

- Example #26 : 함수 $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$은 구간 $[-1, 1]$에서 연속임을 보이자.

- Example #27 : 함수 $h(x) = \frac{x^2+2x+17}{x^2-1}$이 연속인 구간은 어디인가?

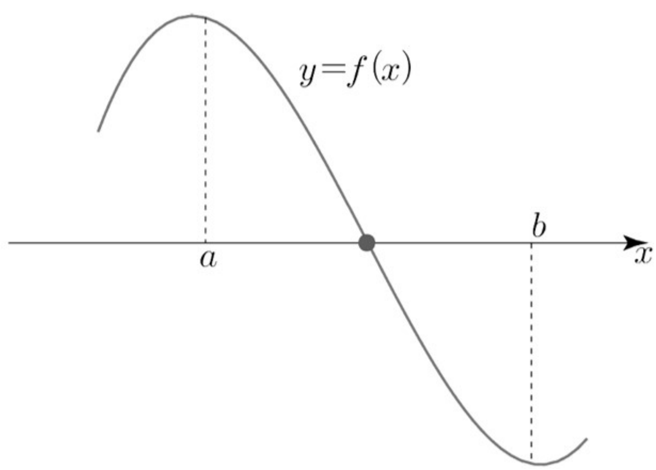
3.3 최대,최소 정리

닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$가 연속이면, $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 반드시 최대값과 최소값을 갖는다.

- Example #28 : 닫힌 구간 $[1, 4]$에서 다음 함수의 최대값과 최소값을 구해보자.
  - $f(x) = x^2 - 4x + 1$
  - $g(x) = 2^{-x} + 3$

3.4 중간값 정리

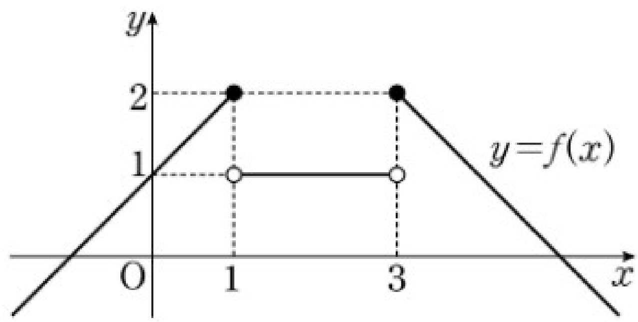
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(a)f(b) < 0$이면, $f(c) = 0$을 만족하는 c가 개구간 (a, b)안에 적어도 하나 존재한다. 즉, 중간값 정리는 어떤 구간에서 방정식의 해가 존재한다는 것을 증명할 때 많이 사용된다.
단, 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 불연속인 경우 $f(c) = 0$이 되는 c가 존재하지 않을 수 있다.



- Example #29 : 방정식 $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$의 근이 1과 2 사이에 있음을 보이자.

- Example #30 : 방정식 $\sin x = x - \frac{\pi}{2}$가 열린 구간 $(0, \pi)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명해 보자.

- Example #31 : $f(x)=\begin{cases} 1 & (1 < x < 3) \\ 3-|x-2| & (x \le 1,\ x \ge 3) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)g(x)$가 실수 전체 집합에서 연속일 때, $g(-2)$의 값을 구해보자.



e-mail : kimtwan21@dongduk.ac.kr