

Аппроксимация моментами  
individual-based моделей

Как аппроксимация может помочь решить следующие проблемы:

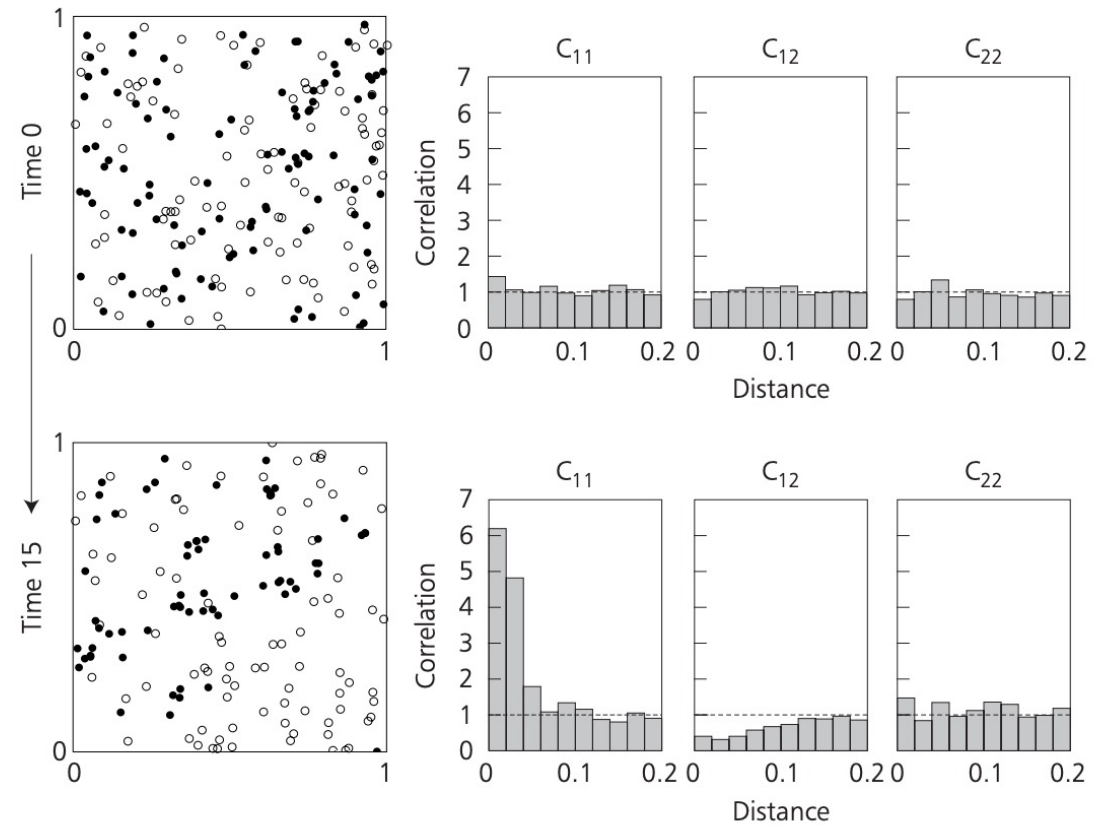
- Отделить сигнал экологического стохастического процесса от внутренней случайной вариации эксперимента
- Уточнить качественные зависимости, лежащие в основе экологического стохастического процесса
- Определить как стохастический экологический процесс зависит от его параметров

# Spatial Patterns and Spatial Moments

- Рассматривается сообщество, живущее в большом двумерном пространстве. Где каждый представитель находится в точке  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$
- Окружающая среда однородна и абиотична. Пространственное распределение зависит исключительно от самого сообщества
- Местоположения особей вида  $i$  в момент времени  $t$  задается функцией  $p_i(\mathbf{x})$ . Такие функции образуют вектор функций плотности  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots)$ , который называется **spatial pattern сообщества**. (перевод?)
- Если особи распределены не случайно, и такое распределение не обусловлено воздействием внешней среды, то говорят, что такое сообщество имеет **spatial structure** (перевод?)

# Spatial Patterns and Spatial Moments

- Сообщество изменяется через 3 стохастических события: рождение, смерть и перемещение.
- Когда происходит событие, генерируется новый  $p(x)$  – spatial pattern
- Вычисления занимают много времени, поэтому используется аппроксимация методом моментов. (spatial pattern заменяется на статистики основанные на его главных признаках)



**Figure 14.1** Spatial patterns at time 0 (top row) and time 15 (bottom row) from a realization of a stochastic model of two competing species. Locations of species 1 are given by filled circles; those of species 2, by open circles. On the right-hand side are the three radial pair correlation densities that summarize important aspects of spatial information.

# Spatial moments

Первый момент

$$N_i(p) = \frac{1}{A} \int p_i(x) dx ,$$

Средняя плотность вида  $i$  в рассматриваемой области пространства  $A$

Второй момент

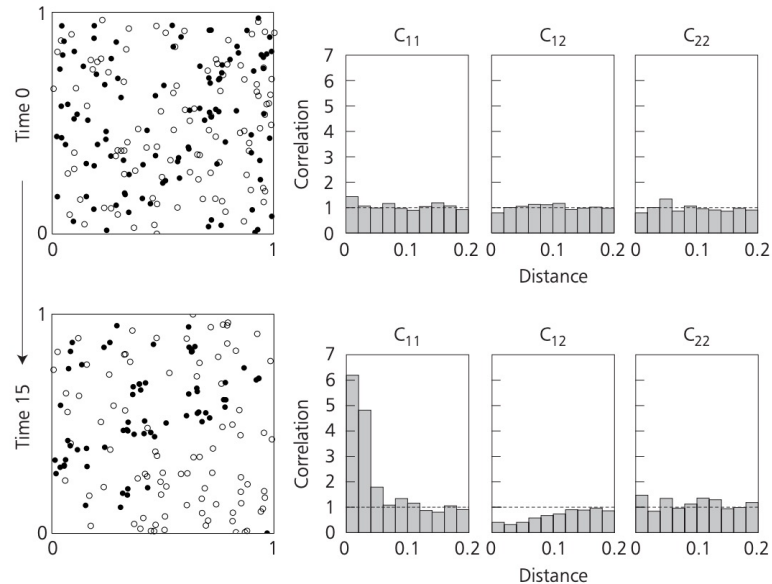
$$C_{ij}(\xi, p) = \frac{1}{A} \int p_i(x) [p_j(x + \xi) - \delta_{ij} \delta(\xi)] dx ,$$
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Среднее произведение плотностей видов  $i$  и  $j$  в области пространства  $A$ . Где особь вида  $j$  удалена от особи вида  $i$  на расстояние  $\xi$ .

Масштабирование:  $C_{ij}(\xi, p) / N_i * N_j$ .  
(Значение в интервале  $[0;1]$  )

# Spatial moments

- $P(p)$  – вероятность плотности  $p$  в момент  $t$
- Для нескольких экспериментов



**Figure 14.1** Spatial patterns at time 0 (top row) and time 15 (bottom row) from a realization of a stochastic model of two competing species. Locations of species 1 are given by filled circles; those of species 2, by open circles. On the right-hand side are the three radial pair correlation densities that summarize important aspects of spatial information.

$$N_i = \int N_i(p) P(p) dp ,$$

$$C_{ij}(\xi) = \int P(p) C_{ij}(\xi, p) dp ,$$

# Extracting the Ecological Signal from Stochastic Realizations

- Стохастические процессы помогают формализовать идеи влияние экологических событий на особей.
- Но из одного эксперимента может быть не очевидно общее поведение процесса.
- Метод моментов может преодолеть эту проблему

# Extracting the Ecological Signal from Stochastic Realizations

- Рассматриваются 2 вида растений, которые расположены близко друг к другу и конкурируют за пространство
- Вид 1 – более сильный, но вид 2 – может отбрасывать семена дальше
- Вопрос: сможет ли выжить 2 вид



# Extracting the Ecological Signal from Stochastic Realizations

## Рождение

$$B_i(x, x', p) = b_i m_i^{(b)}(x' - x) ,$$

Вероятность за промежуток времени, что особь вида  $i$ , находящаяся в точке  $x$  породит новую особь в точке  $x'$

$b_i$  — независимый от плотности коэффициент рождаемости  
 $m_i^{(b)}$  — коэффициент рассеивания (не зависит от  $b_i$ )

## Смерть

$$D_i(x, p) = d_i + \sum_j d'_{ij} \int w_{ij}^{(d)}(x' - x) [p_j(x') - \delta_{ij} \delta_x(x')] dx' .$$

Вероятность смерти за промежуток времени особи вида  $i$  в точке  $x$ .

$w_{ij}^{(d)}$  — коэффициент влияния особи  $j$  на особь  $i$

$d_i$  — независимый от плотности коэффициент смертности

$d'_{ij}$  — коэффициент смертности, зависящий от плотности конкурирующих видов  $i$  и  $j$  (внутривидовая конкуренция при  $i=j$ )

	Parameter	Value for species $i$		Explanation
		$i = 1$	$i = 2$	
Death	$d_i$	0.2	0.2	Species 1 is a stronger competitor than species 2
	$d'_{i1}$	0.001	0.002	
	$d'_{i2}$	0.0005	0.001	
	$s_{i1}^{(d)}$	0.03	0.03	
	$s_{i2}^{(d)}$	0.03	0.03	
	$r_{i1}^{(d)}$	0.12	0.12	
	$r_{i2}^{(d)}$	0.12	0.12	
Birth	$b_i$	0.4	0.4	Species 2 disperses farther than species 1
	$s_i^{(b)}$	0.03	0.2	
	$r_i^{(b)}$	0.12	0.5	

Note: Simulations were done on the unit square with periodic boundaries.

Для описания влияния расстояния на рассеивание и конкуренцию использовалась функция Гаусса с соответствующими стандартными отклонениями с стандартными отклонениями  $s$ . Параметр  $r$  задает максимальный радиус на котором влияние существует

Функция Гаусса

$$g(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}},$$

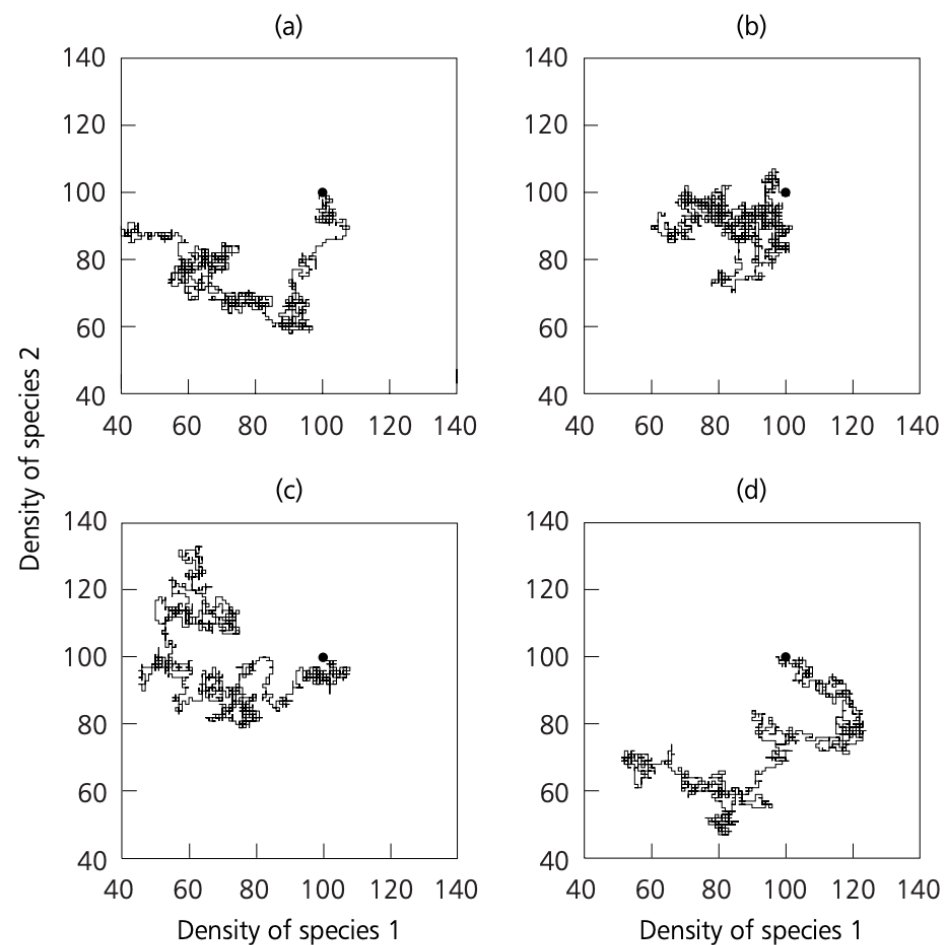
$$a = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, b = \mu, c = \sigma,$$

# Moment dynamics

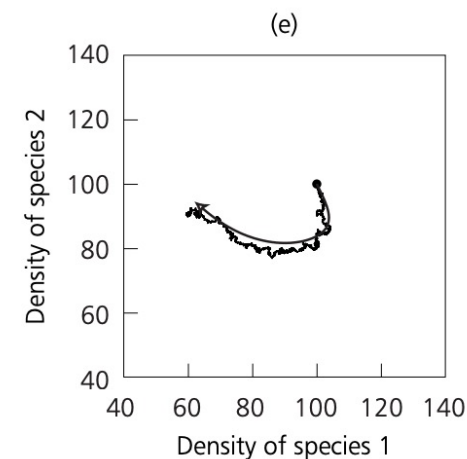
$$\frac{d}{dt} N_i = (b_i - d_i) N_i - \sum_j d'_{ij} \int w_{ij}^{(d)}(\xi') C_{ij}(\xi') d\xi' ,$$

$$T_{ijk}(\xi, \xi') = \frac{1}{N_i} C_{ij}(\xi) C_{ik}(\xi') ,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_{ij}(\xi) = & + b_i \int m_i^{(b)}(\xi') C_{ij}(\xi + \xi') d\xi' + b_j \int m_j^{(b)}(\xi') C_{ji}(-\xi + \xi') d\xi' \\ & + \delta_{ij} b_i m_i^{(b)}(-\xi) N_i + \delta_{ji} b_j m_j^{(b)}(\xi) N_j \\ & - d_i C_{ij}(\xi) - d_j C_{ji}(-\xi) \\ & - \sum_k d'_{ik} \int w_{ik}^{(d)}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' - \sum_k d'_{jk} \int w_{jk}^{(d)}(\xi') T_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' \\ & - d'_{ij} w_{ij}^{(d)}(\xi) C_{ij}(\xi) - d'_{ji} w_{ji}^{(d)}(-\xi) C_{ji}(-\xi) , \end{aligned} \quad (14.9)$$



Сначала более сильный вид 1 вытесняет вид 2. Но из-за небольшой дальности рассеивания, вид 1 образует плотный кластер, усиливая межвидовую конкуренцию. Таким образом ситуация меняется в пользу вида 2.



**Figure 14.2** Plane of population density of two competing species. Graphs (a), (b), (c), and (d) show the path mapped out by individual stochastic realizations over 15 time units. (e) Mean path of 20 realizations, with the deterministic approximation (found by solving the equations for the dynamics of the first and second spatial moments) superimposed as a smooth curve. The filled circle marks the starting point of each path.

# Qualitative Dependencies in a Spatial Logistic Equation

## Рождение

$$B(x, x', p) = b m^{(b)}(x' - x) .$$

Вероятность за промежуток времени, что особь вида  $i$ , находящаяся в точке  $x$  породит новую особь в точке  $x'$

$b_i$  — независимый от плотности коэффициент рождаемости  
 $m_i^{(b)}$  --- коэффициент рассеивания (не зависит от  $b_i$ )

## Смерть

$$D(x, p) = d + d' \int w^{(d)}(x' - x) [p(x') - \delta_x(x')] dx' .$$

Вероятность смерти за промежуток времени особи вида  $i$  в точке  $x$ .

$w_{ij}^{(d)}$  - коэффициент влияния особи  $j$  на особь  $i$

$d_i$  — независимый от плотности коэффициент смертности

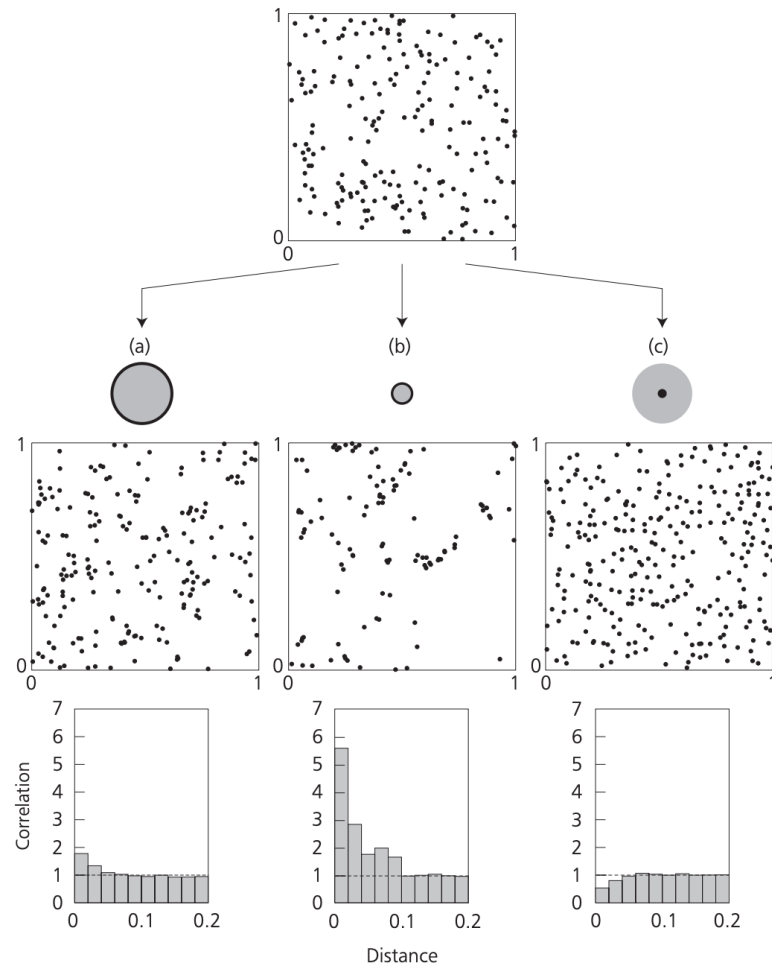
$d'_{ij}$  -- коэффициент смертности, зависящий от плотности конкурирующих видов  $i$  и  $j$  (внутривидовая конкуренция при  $i=j$ )

# Moment dynamics

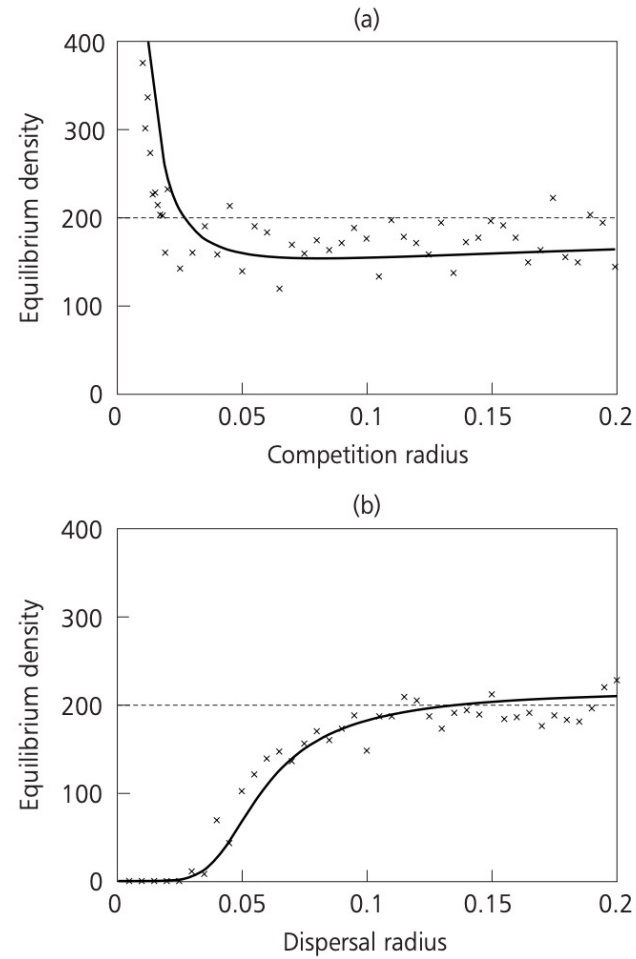
$$\frac{d}{dt}N = (b - d)N - d' \int w^{(d)}(\xi') C(\xi') d\xi' .$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} C(\xi) = & + b \int m^{(b)}(\xi'') C(\xi + \xi'') d\xi'' \\ & + b m^{(b)}(\xi) N \\ & - d C(\xi) \\ & - d' C(\xi) \int w^{(d)}(\xi') C(\xi') / N d\xi' \\ & - d' w^{(d)}(\xi) C(\xi) . \end{aligned}$$

Серый круг – стандартное отклонение для рассеивания  
 черный – для конкуренции



**Figure 14.5** Effect of contrasting dispersal and competition neighborhoods on spatial pattern in a logistic model of population growth. The spatial pattern at the top shows the initial state, comprising 200 individuals placed at random locations. Columns (a), (b), and (c) have parameter values matching Figures 14.4a, 14.4b, and 14.4c, respectively; the radius of the heavy circle is the standard deviation  $s^{(b)}$  of the competition neighborhood, and the radius of the shaded area is the standard deviation  $s^{(d)}$  of the dispersal neighborhood. The columns show the state of sample realizations at time 100 in terms of the spatial pattern and the corresponding auto-correlation function.



**Figure 14.6** Equilibrium densities of a spatial logistic equation, expressed as a function of competition radius and dispersal distance. (a) Competition radius  $s^{(d)}$  is varied between 0 and 0.2 for  $s^{(b)} = 0.08$ ; (b) shows the effect of varying  $s^{(b)}$  over the same interval for  $s^{(d)} = 0.05$ . While outcomes of stochastic realizations (crosses) show considerable scatter, and mean-field results (dashed lines) are sometimes qualitatively in error, the deterministic approximation based on spatial moments (continuous curves) provides satisfactory descriptions of how equilibrium densities depend on the radii.