Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
Марковские процессы

Студент Соколов Ефим
Группа ИУ7-73Б
Дисциплина Моделирование

Преподаватель: ________ Рудаков И.В.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Оценка ________________________

Москва — 2021 г.

Цель работы

Целью данной лабораторной работы является изучение марковских процессов: для заданной системы посчитать время, в котором находится процесс в каждом из состояний, определить устоявшиеся вероятности, а также времена стабилизации этих вероятностей.

Марковский процесс

Марковским процесоом называют случайный процесс, протекающий в системе S, если он обладает следующим свойством:

- для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$);
- для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице.

Для решения поставленной задачи, необходимо составить систему уравнений Колмогорова по следующим принципам:

- в левой части каждого из уравнений стоит производная вероятности i-го состояния;
- в правой части — сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние), умноженная на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния).

Пример:

Пусть система имеет n состояний. Матрица интенсивностей системы приведена в таблице 1.

Таблица 1: Матрица интенсивностей системы

	0	1	...	n
0	0	λ_{01}	...	λ_{0n}
1	λ_{10}	0	...	λ_{1n}
...	...	...	...	...
n	λ_{n0}	λ_{n1}	...	0

Составим уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} p_0' = -\sum_{i\in N\backslash 0}\lambda_{0i} + \sum_{i\in n\backslash 0}\Pi_{i\in n\backslash 0}\lambda_{i0}p_i \\ p_1' = -\sum_{i\in N\backslash 1}\lambda_{1i} + \sum_{i\in n\backslash 1}\Pi_{i\in n\backslash 1}\lambda_{i1}p_i \\ \quad < ... > \\ p_n' = -\sum_{i\in n\backslash n}\lambda_{ni} + \sum_{i\in n\backslash n}\Pi_{i\in n\backslash n}\lambda_{in}p_i \end{cases}$$

Для получения предельных вероятностей, то есть вероятностей в стационарном режиме работы при $t \to \infty$ необходимо приравнять левые части уравнений к нулю. Таким образом получается система линейных уравнений. Для решения полученной системы необходимо добавить условие нормировки (сумма вероятностей равна 1).

После того, как предельные вероятности будут найдены, необходимо найти время стабилизации. Для этого необходимо с интервалом находить каждую вероятность в момент времени . Когда найденная вероятность будет равна соответствующей финальной с точностью до заданной погрешности, тогда можно завершить вычисления. На каждом шаге необходимо вычислять приращения для каждой вероятности (как функции):

$$dp_j = \frac{-\sum_{i\in N\backslash j}\lambda_{ji} + \sum_{i\in n\backslash j}\Pi_{i\in n\backslash j}\lambda_{ij}p_i}{\Delta t}$$

Начальные значения для dp задаются. Можно взять, например, 1 - для одного из состояний, а для остальных - 0, или $\frac{1}{n}$ для каждого состояния, где n – количество состояний системы.

Результат выполнения задания

N = 4

На рисунке 1 приведен граф связей и интенсивности системы.

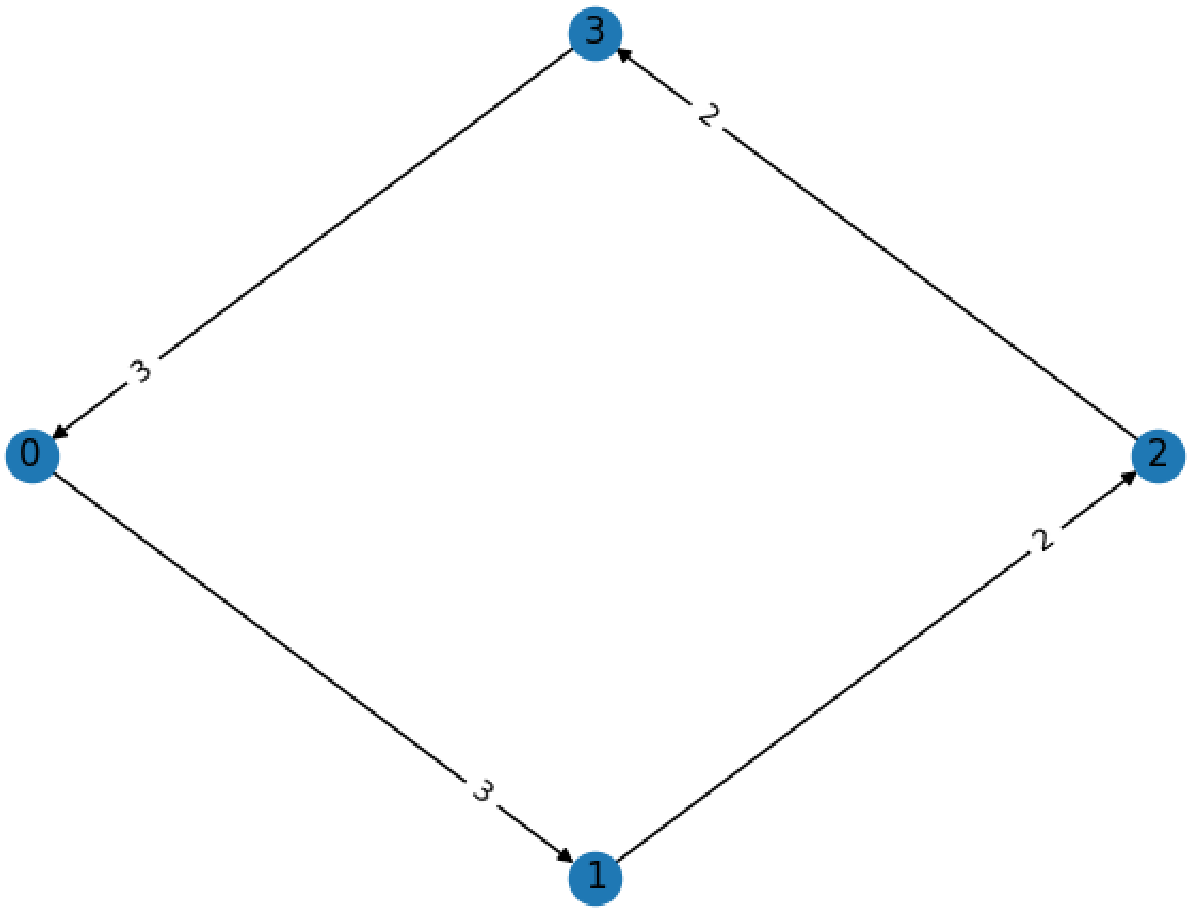

Рисунок 1: Граф связей и интенсивности системы (N = 4)

В таблице 2 приведены предельные вероятности системы.

Таблица 2: Предельные вероятности системы

p0	p1	p2	p3
0.2	0.3	0.3	0.2

В таблице 3 приведены времена стабилизации при начальных условиях $= \frac{1}{n}$.

Таблица 3: Времена стабилизации

t0	t1	t2	t3
0.869	0.288	1.038	0.34

В таблице 4 приведены времена стабилизации при начальных условиях $= \frac{1}{n}$.

Таблица 4: Времена процесса в состояниях

t0	t1	t2	t3
2.0	3.0	3.0	2.0

На рисунках 2 и 3 приведены графики вероятностей состояний как функции времени при различных начальных условиях (точками на графиках отмечены моменты времени стабилизации).

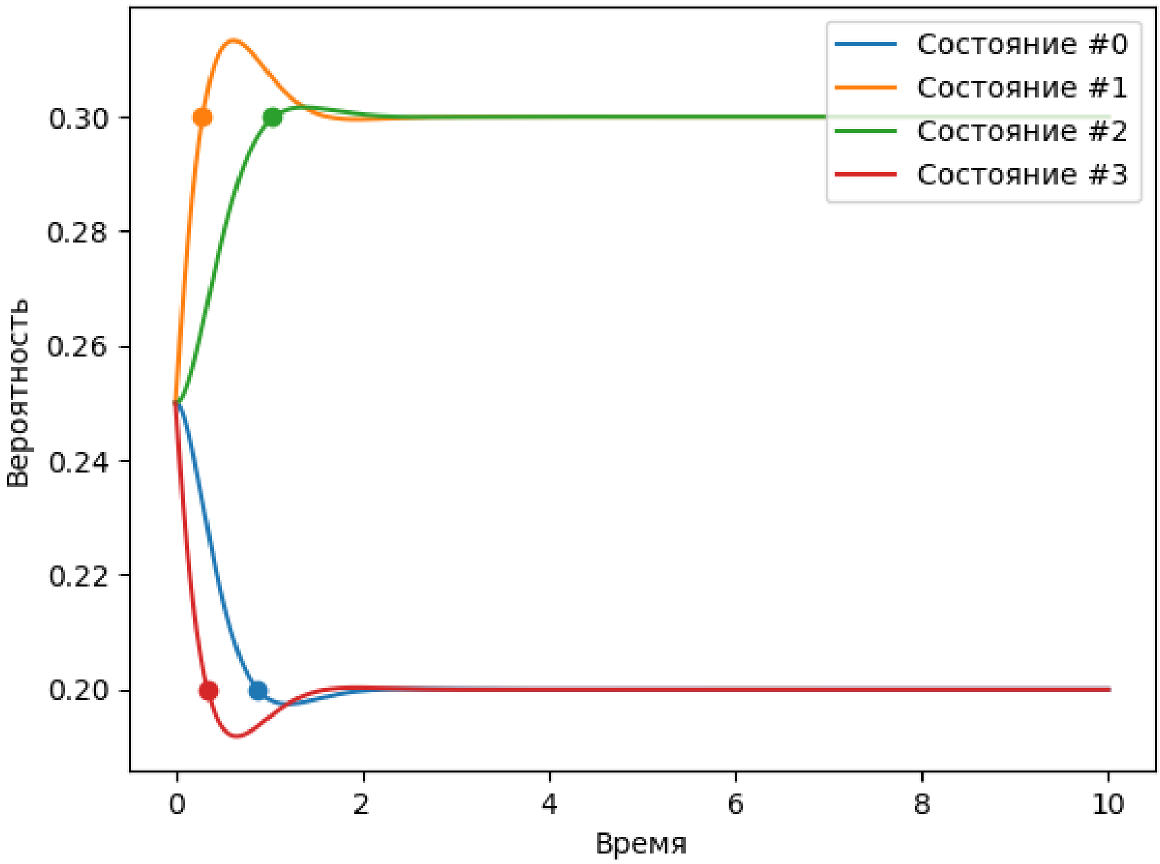

Рисунок 2: Графики вероятностей состояний как функции времен, при начальных условиях $= \frac{1}{n}$

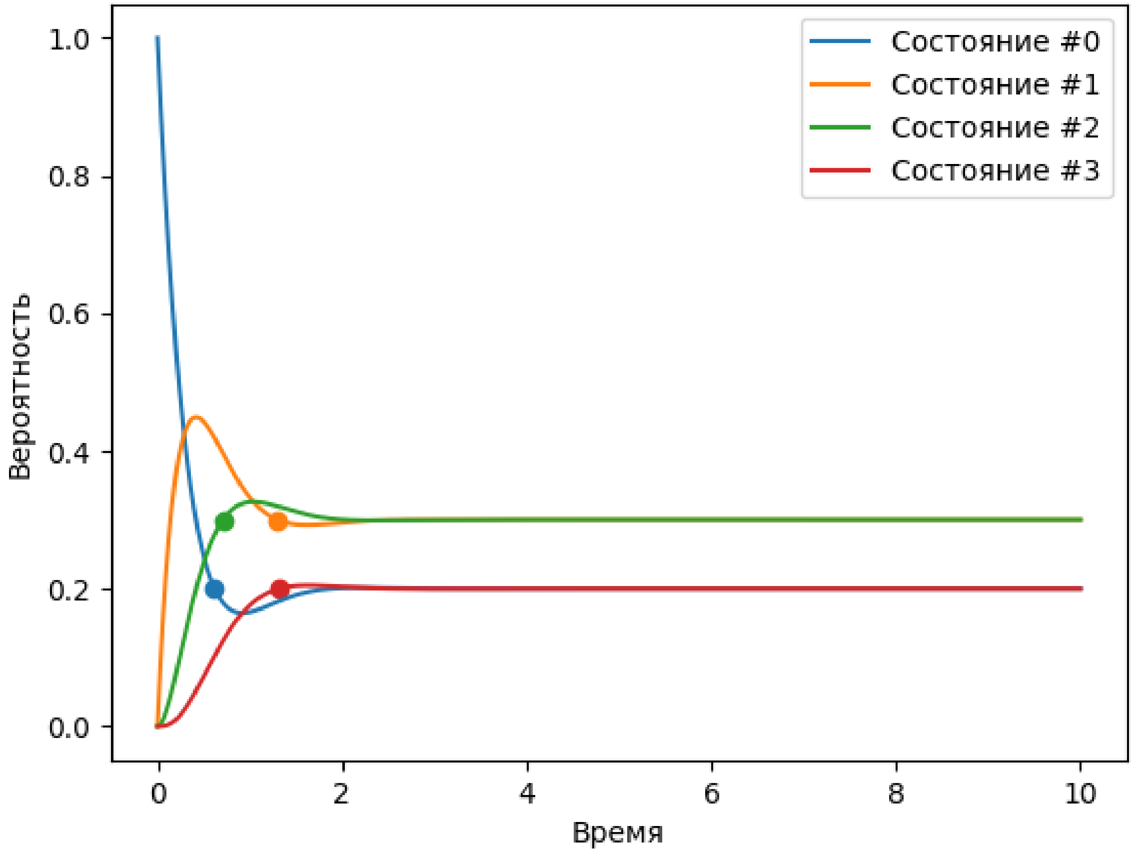

Рисунок 3: Графики вероятностей состояний как функции времен, при начальных условиях = 1 для одного состояния и 0 для остальных

N = 5

На рисунке 4 приведен граф связей и интенсивности системы.

В таблице 5 приведены предельные вероятности системы.

Таблица 5: Предельные вероятности системы

p0	p1	p2	p3	p4
0.311	0.232	0.208	0.149	0.1

В таблице 6 приведены времена стабилизации при начальных условиях $= \frac{1}{n}$.

В таблице 7 приведены времена стабилизации при начальных условиях $= \frac{1}{n}$.

На рисунках 5 и 6 приведены графики вероятностей состояний как

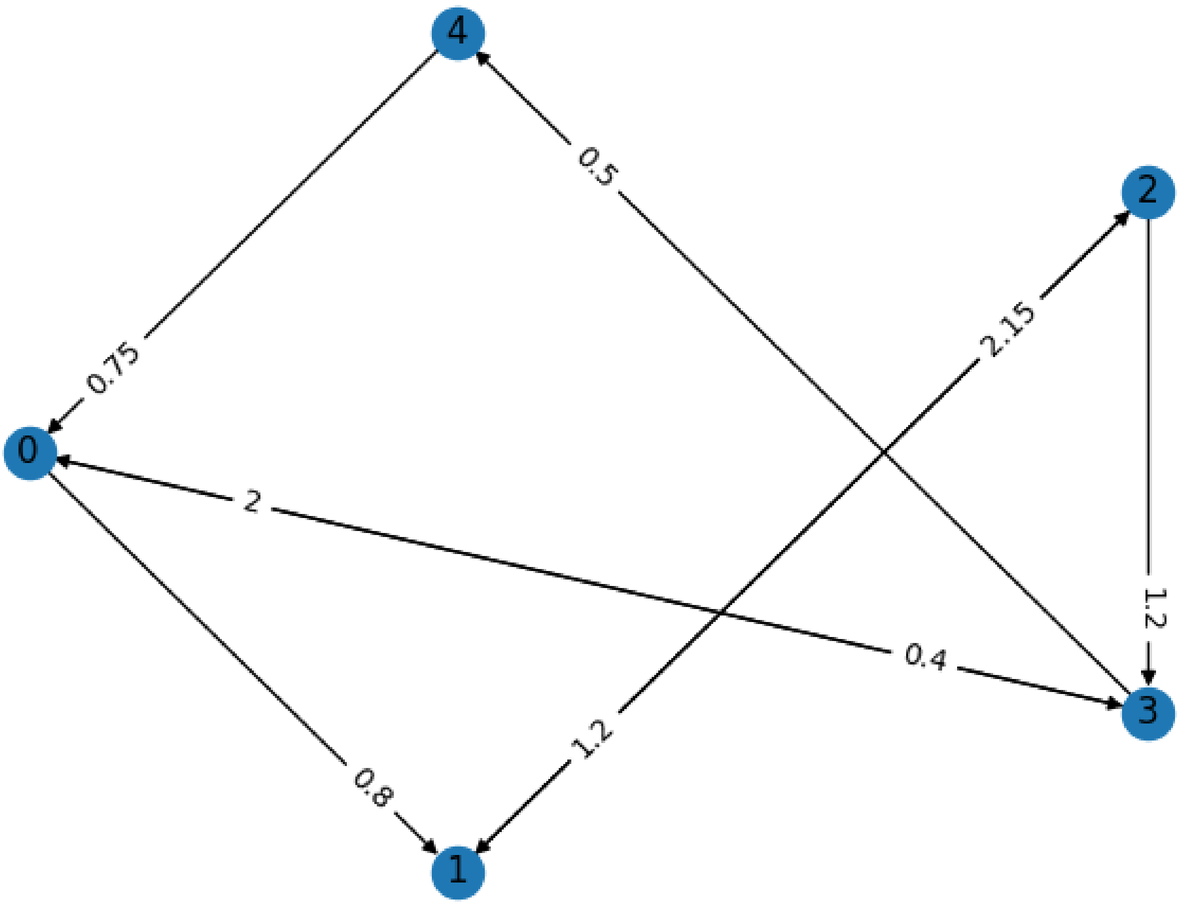

Рисунок 4: Граф связей и интенсивности системы (N = 5)

Таблица 6: Времена стабилизации

t0	t1	t2	t3	t4
0.953	5.663	6.189	0.56	7.675

Таблица 7: Времена процесса в состояниях

t0	t1	t2	t3	t4
3.114	2.318	2.076	1.495	0.997

функции времени при различных начальных условиях (точками на графиках отмечены моменты времени стабилизации).

N = 6

На рисунке 7 приведен граф связей и интенсивности системы.

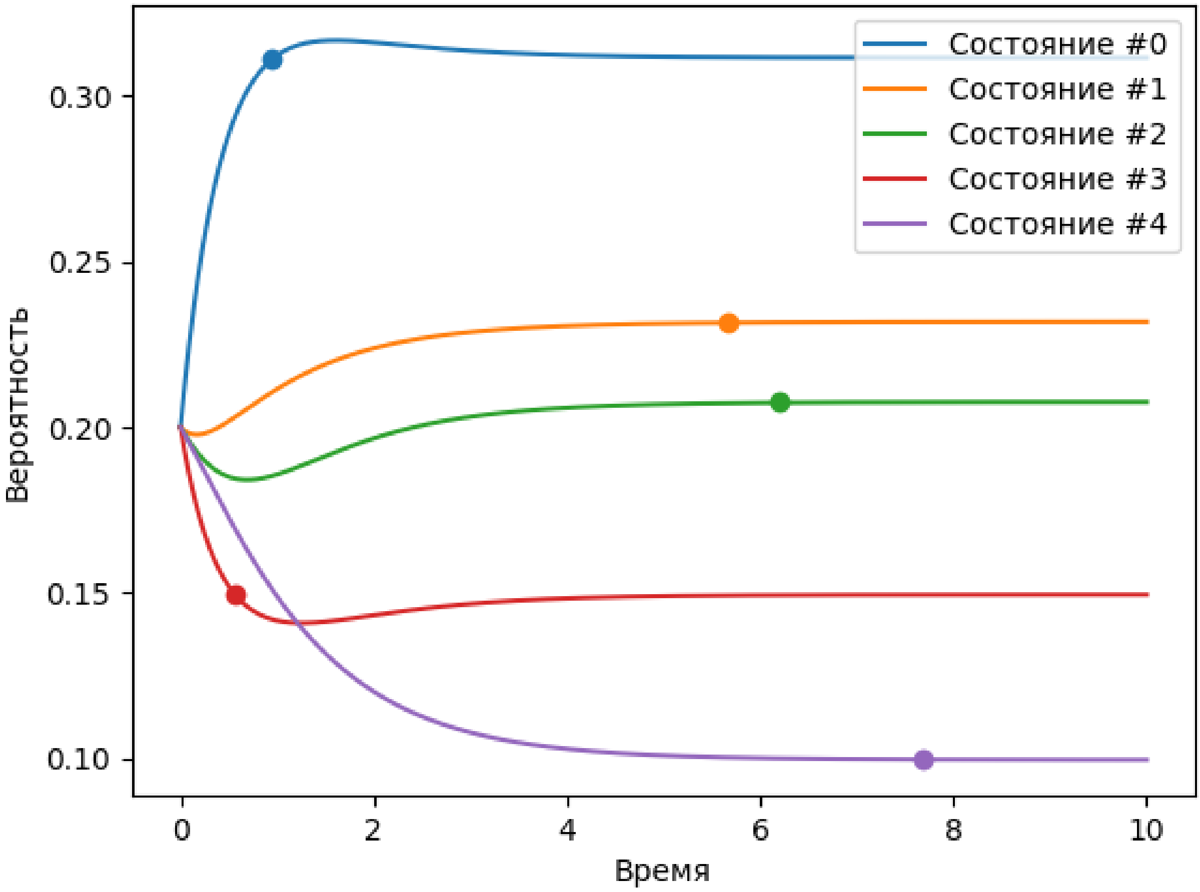

Рисунок 5: Графики вероятностей состояний как функции времен, при начальных условиях $= \frac{1}{n}$

В таблице 8 приведены предельные вероятности системы.

Таблица 8: Предельные вероятности системы

p0	p1	p2	p3	p4	p5
0.175	0.105	0.32	0.143	0.079	0.178

В таблице 9 приведены времена стабилизации при начальных условиях $= \frac{1}{n}$.

Таблица 9: Времена стабилизации

t0	t1	t2	t3	t4	t5
0.267	2.872	2.697	1.129	2.546	0.426

В таблице 10 приведены времена стабилизации при начальных условиях $= \frac{1}{n}$.

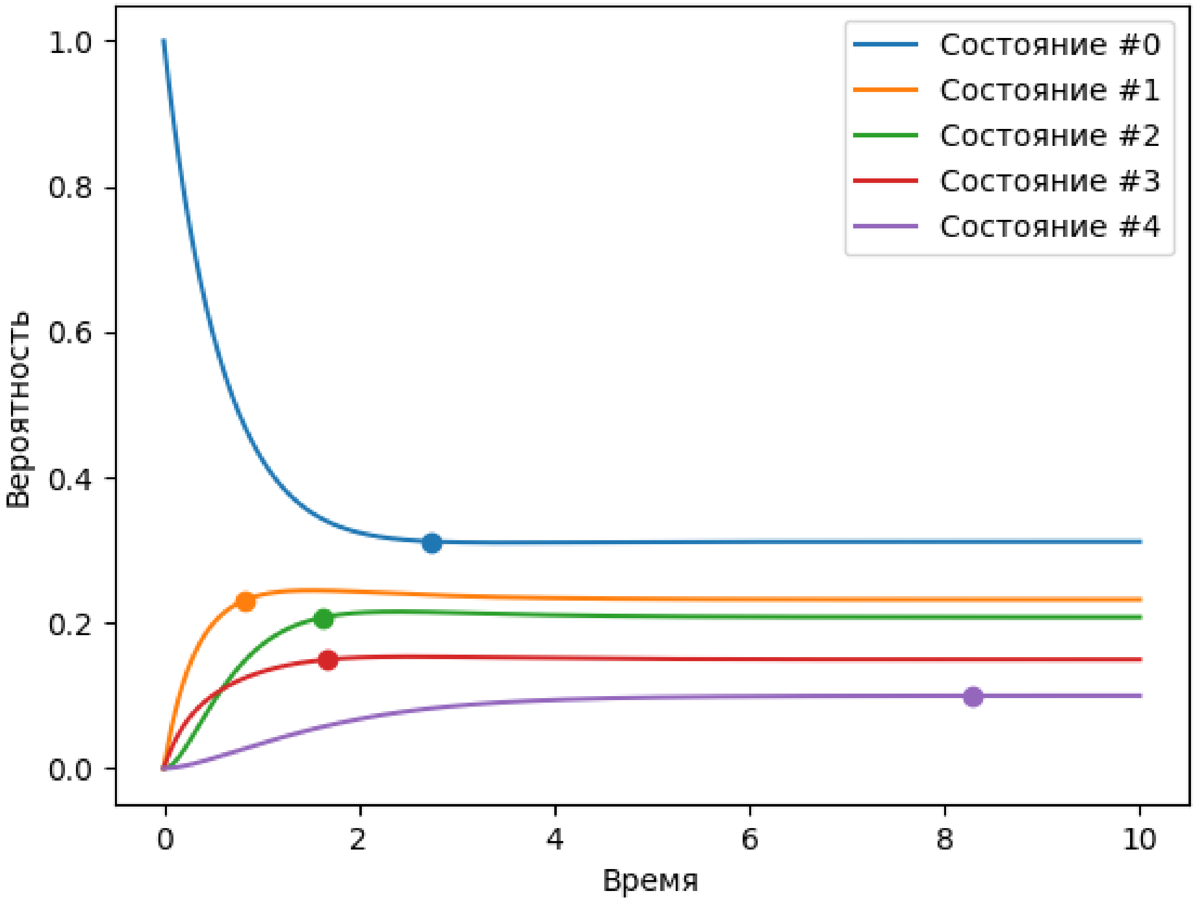

Рисунок 6: Графики вероятностей состояний как функции времен, при начальных условиях = 1 для одного состояния и 0 для остальных

Таблица 10: Времена процесса в состояниях

t0	t1	t2	t3	t4	t5
1.749	1.055	3.198	1.432	0.789	1.777

На рисунках 8 и 9 приведены графики вероятностей состояний как функции времени при различных начальных условиях (точками на графиках отмечены моменты времени стабилизации).

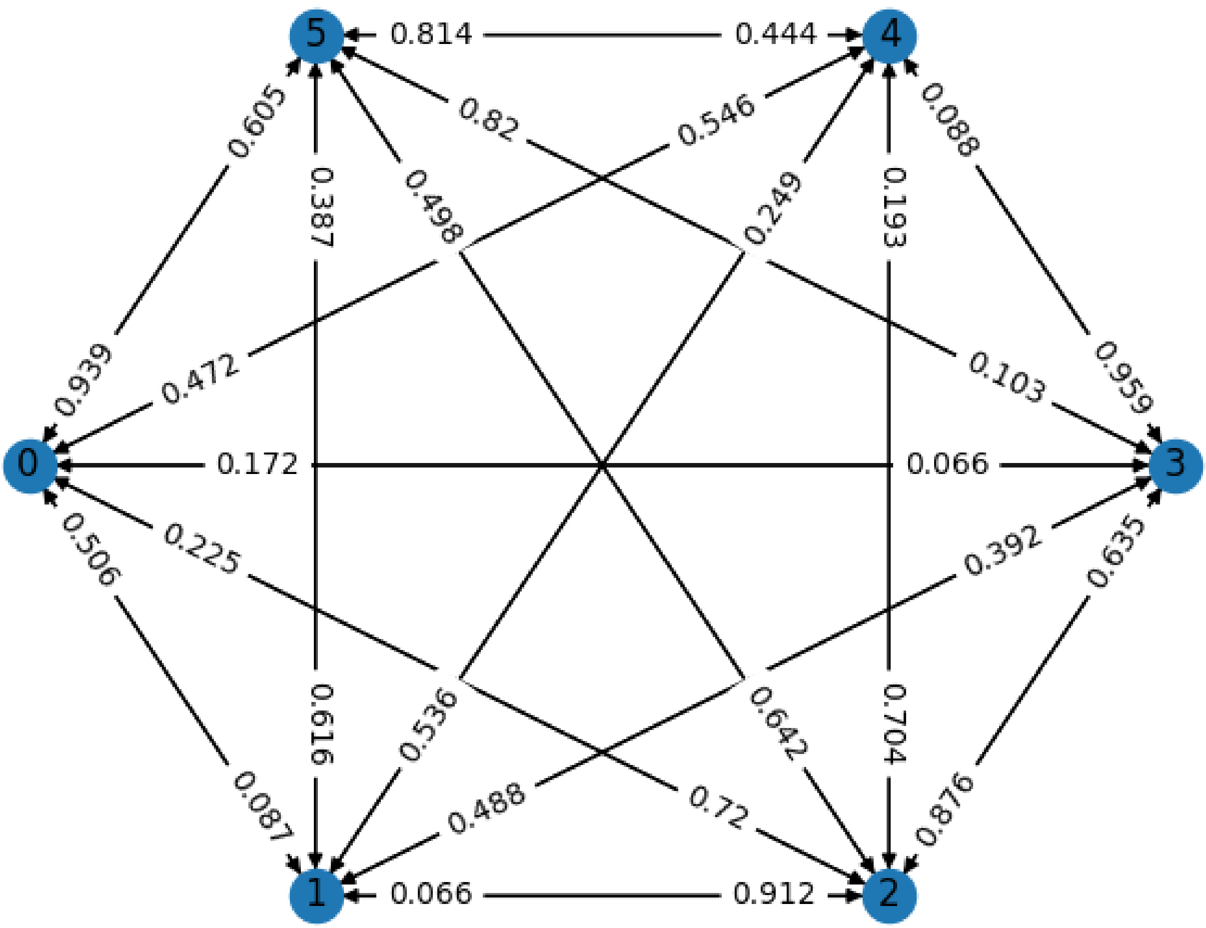

Рисунок 7: Граф связей и интенсивности системы (N = 6)

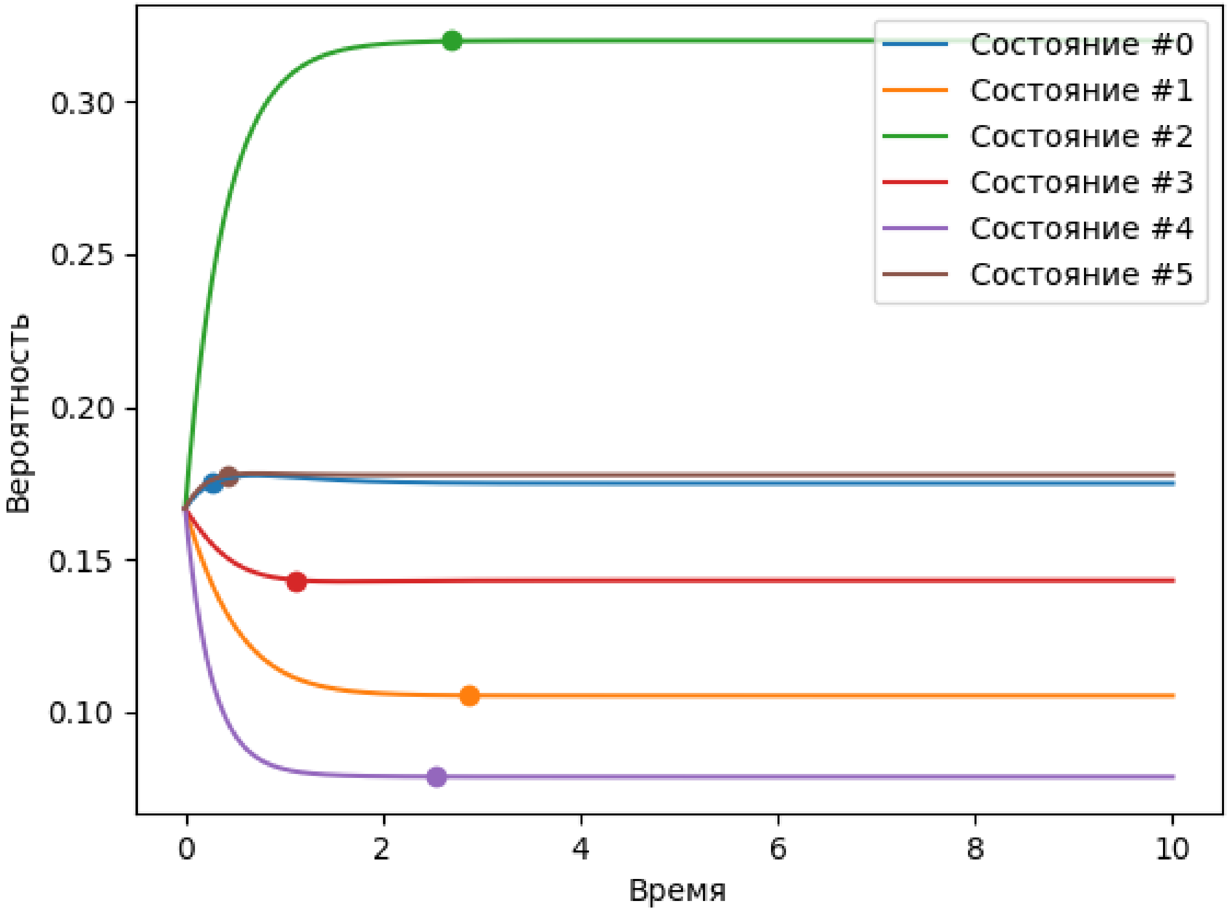

Рисунок 8: Графики вероятностей состояний как функции времен, при начальных условиях $= \frac{1}{n}$

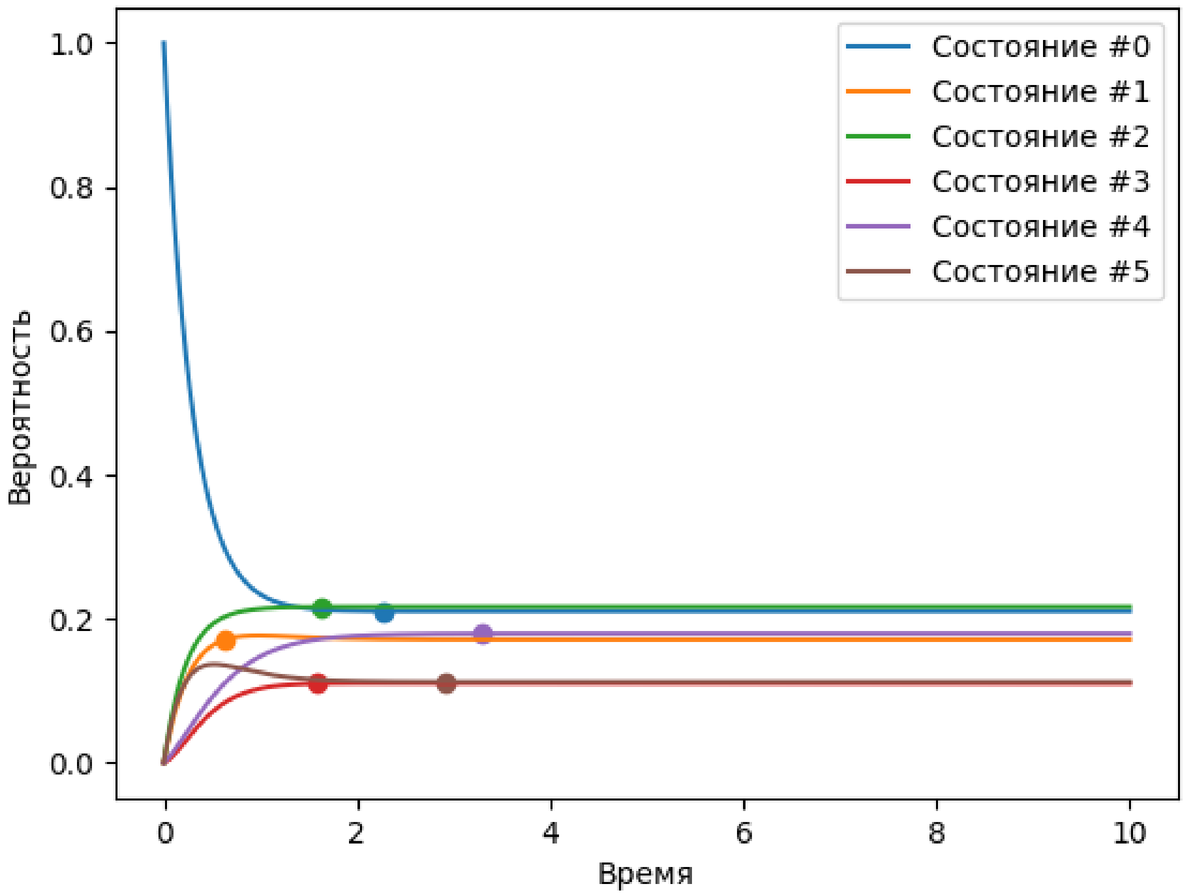

Рисунок 9: Графики вероятностей состояний как функции времен, при начальных условиях = 1 для одного состояния и 0 для остальных