

28 апреля 2018 г.

Оглавление

1 Обратная спектральная задача. Метод модифицированных моментов.	4
1.0.1 Системы Стилтьеса	6
1.0.2 Система Стилтьеса $p = 2, a_j = 1$	7
1.0.3 Системы Никишина	10
1.0.4 Системы Никишина $p = 2$	11
1.0.5 Система Никишина $\Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$	12
1.0.6 Система Никишина $\Delta_1 = [-1/2, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$	15
1.0.7 Система Никишина $\Delta_1 = [-3/4, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$	19
1.0.8 Системы Анжелеско	23
1.0.9 Системы Чебышева $p = 2$ на $\Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$	24
2 Обратная спектральная задача. Процедура Стилтьеса.	29
2.0.1 Система Чебышева $p = 2, \Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$. Возмущения точками масс.	30
2.0.2 Процедура Стилтьеса для $\Delta_1 = [-a, 0], \Delta_2 = [0, 1]$	31
2.0.3 Процедура Стилтьеса для $\Delta_1 = [-1, a], \Delta_2 = [-a, 1]$	32
2.0.4 Системы Чебышева и Лежандра $p = 2$ на $\Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$	39
2.0.5 Системы Анжелеско $p = 2$	40
2.0.6 Система Анжелеско $\Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$	41
2.0.7 Система Анжелеско $\Delta_1 = [-1/2, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$	46
2.0.8 Система Анжелеско $\Delta_1 = [-3/4, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$	50
2.0.9 Системы Пинейро	54
2.0.10 Системы Пинейро $p = 2$	55
2.0.11 Система Пинейро $\Delta = [0, 1], \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1/2$	56
3 Решение систем на базе матрицы Хессенберга. Метод модифицированных моментов.	63
3.0.1 Система Богоявленского	63
3.0.2 Векторная система Тода I-го типа	65
3.0.3 Векторная система Тода II-го типа	70
3.0.4 "Другие" системы $p = 2$	76
4 Прямая спектральная задача. Вычисления спектральных мер через определители Турана.	77
4.1 Системы Стилтьеса $p = 2$	77
4.1.1 Система Стилтьеса $p = 2, a_i = 1$	78
4.1.2 Система Стилтьеса $p = 2, a_i = 2/3$	82
4.1.3 Система Стилтьеса $p = 2, a_i = 4/27$	83
4.2 Системы Пинейро (разреженный оператор Стилтьеса) $p = 2, \Delta = [0, 1]$	84
4.2.1 Система Пинейро $\Delta = [0, 1], \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1/2$	86
4.2.2 Система Пинейро $\Delta = [0, 1], \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 1/4$	87
4.3 Системы Пинейро (заполненный оператор) $p = 2, \Delta = [0, 1]$	87
4.3.1 Система Пинейро $\Delta = [0, 1], \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1/2$	90
4.3.2 Система Пинейро $\Delta = [0, 1], \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 1/4$	91

4.4	Системы Анжелеско $p = 2$	92
4.4.1	Система Анжелеско $p = 2, a = -1, \Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$	92
4.5	Системы Никишина $p = 2$	93
4.5.1	Система Никишина $p = 2, a = -1, \Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$	94

Глава 1

Обратная спектральная задача. Метод модифицированных моментов.

Рассмотрим набор позитивных борелевских мер $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ с бесконечно большим количеством точек роста на соответствующих носителях $\Delta_j, j = 1, \dots, p$.

Введем мульти-индекс $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_p)$ и рассмотрим *совместно ортогональные многочлены*, такие что

$$\int Q_{\mathbf{n}}(x)x^v d\mu_k(x) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n_k - 1, k = 1, \dots, p$$

$$\deg Q_{\mathbf{n}} \leq n := \sum_{k=1}^p n_k$$

В общем случае совместно ортогональные многочлены существуют для любого мульти-индекса, но определены неоднозначно.

При условии нормальности мульти индекса $\deg Q_n = n$ совместно ортогональные многочлены уникальны с точностью до константы.

Пусть для определенности Q_n обозначают многочлены со старшим коэффициентом равным единице. Ограничим множество мульти-индексов условием:

$$\mathbf{n} = (\underbrace{k+1, \dots, k+1}_d, \underbrace{k, \dots, k}_{p-d}),$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, n = pk + d$$

При условии нормальности все таких индексов совместно ортогональные многочлены удовлетворяют следующим реккурентным соотношениям:

$$Q_{-p} = \dots = Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1,$$

$$Q_{n+1} = (x + a_{n,n})Q_n + a_{n,n-1}Q_{n-1} + \dots + a_{n,n-p}Q_{n-p}$$

Рассмотрим $p+2$ диагональную полу бесконечную матрицу A , составленную из коэффициентов реккурентных соотношений:

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,0} & a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p+1} & 0 & \dots \\ 0 & a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \dots & a_{p+1,p+1} & a_{p+1,p+2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

с условиями, что:

$$a_{n,n-p} \neq 0, \dots, a_{n,n+1} \neq 0, \quad a_{i,j} = 0, j > i+1, i > j+p$$

Матрица A задает разностный оператор A в пространстве $l^2(\mathbf{N})$
Пусть $\{e_n\}_0^\infty$ стандартный базис в l^2 . Оператор A определен как

$$Ae_0 = a_{0,0}e_0 + a_{1,0}e_1 + \dots + a_{p,0}e_p$$

$$Ae_k = a_{k-1,k}e_{k-1} + a_{k,k}e_k + \dots + a_{k+p,k}e_{k+p}, \quad k \geq 1$$

Функций (f_1, \dots, f_p) называются *резольвентными* или *функциями Вейля* оператора A

$$f_j(z) := \left(\frac{e_{j-1}}{(zI - A)}, e_0 \right)$$

Если оператор A ограничен $\sup_{i,j} |a_{i,j}| < \infty$ то резольвентные функции можно разложить в степенные ряды в бесконечности.

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k e_{j-1}, e_0)}{z^{k+1}}, \quad |z| > \|A\|, j = 1, \dots, p$$

Для $j = 1, \dots, p$

$$s_k := (A^k e_{j-1}, e_0)$$

называются *моментами* оператора A , а множество $\{e_0, \dots, e_{p-1}\}$ - *циклическим множеством* оператора A

Спектральные свойства оператора A тесно связаны с асимптотическими свойствами совместно ортогональных многочленов.

Резольвентные функции и моменты связаны с борелевскими мерами которые называют в данном контексте *спектральными мерами* оператора:

$$f_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{d\mu_j(x)}{z - x}, \quad s_n^{(j)} = \int_{\Delta_j} z^n d\mu_j(z)$$

Прямая спектральная задача состоит определении элементов матрицы оператора по заданному набору спектральных мер.

Обратная спектральная задача состоит в восстановлении оператора по набору его спектральных мер.

В общем случае обратная спектральная задача плохо обусловлена.

Цель численных экспериментов в этой главе проверить рассмотреть некоторые стандартные системы мер и проверить утверждение, что ...являются *компактным возмущением* некоторого референс-оператора.

1.0.1. Системы Стильеса

Рассмотрим совместно ортогональные многочлены удовлетворяющие следующему реккурентному соотношению:

$$Q_{n+1} = zQ_n + a_{n,n-p}Q_{n-p}$$

При $a_j = 1$ случай является обобщением полиномов Чебышева 2го рода
Соответствующий оператор выражен матрицей

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Свойство 1.1 Если для всех n выполняется условие $a_n > 0$ тогда существует система положительных мер $\mu_j, j = 1, \dots, p$ с общим носителем $[0, \infty)$.

Соответствующие резольвентные функции

$$S_j(z) = \int_0^\infty \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, \quad j = 1, \dots, p$$

называют функциями Стильеса.

Свойство 1.2 При $a_n > 0, n \geq 1$ оператор L ограничен тогда и только тогда, когда общий носитель мер μ_j является ограниченным множеством

Свойство 1.3 Соответствующие спектральные меры μ_1, \dots, μ_p оператора L абсолютно непрерывны на носителе S_0 , который представлен звездоподобным множеством на комплексной плоскости, лучи которого образованы $p+1$ отрезками:

$$[0, \alpha], [0, \alpha e^{2\pi i/(p+1)}], \dots, [0, \alpha e^{p2\pi i/(p+1)}]$$

$$\text{где } \alpha = \frac{p+1}{p^{p/(p+1)}}$$

Свойство 1.4 Любой оператор L при условии $\lim_{k \rightarrow \infty} a_n = 1$ является компактным возмущением референсного оператора

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

1.0.2. Система Стилтьеса $p = 2, a_j = 1$

Система представлена мерами μ_1^0, μ_2^0 непрерывными на множестве S_0 состоящем из 3 отрезков на комплексной плоскости:

$$[0, \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}], [0, \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)], [0, \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \exp\left(\frac{4}{3}\pi i\right)]$$

Референсный оператор

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Известны следующие свойства:

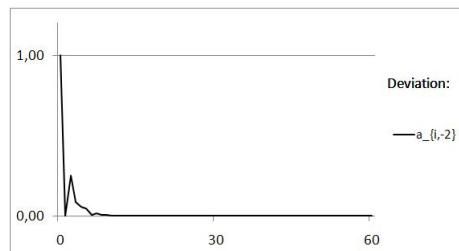
Свойство 1.5 В случае возмущение исходных мер одной весовой функцией $\rho(z) = \rho_1(z) = \rho_2(z)$

$$d\mu_1(z) = \rho_1(z)d\mu_1^0(z), \quad d\mu_2(z) = \rho_2(z)d\mu_2^0(z),$$

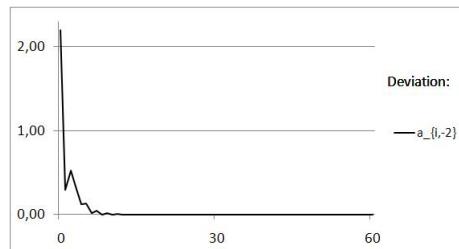
Коэффициенты соответствующего мерам μ_1, μ_2 оператора L будут положительными $a_n > 0$ и данное возмущение оператора L_0 будет компактным.

Рассмотрим различные возмущения. Для каждого примера график показывает отклонение (по модулю) коэффициентов оператора L от коэффициентов референсного оператора L_0

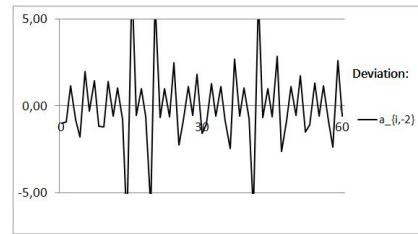
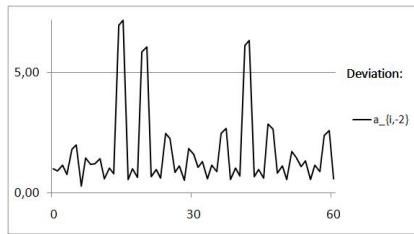
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



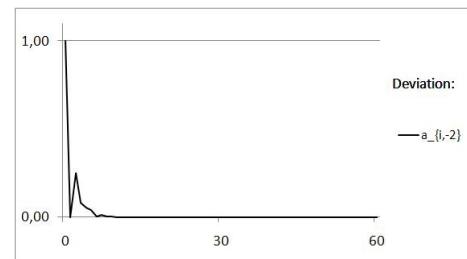
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^6 + z^3 + 1$$



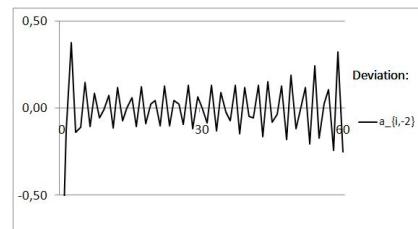
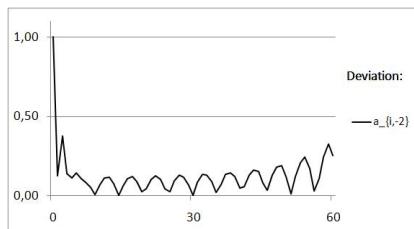
$$\rho_1(z) = z^3 + 1, \rho_2(z) = z^6 + z^3 + 1$$



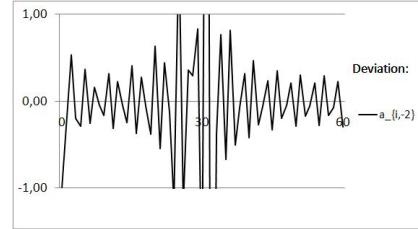
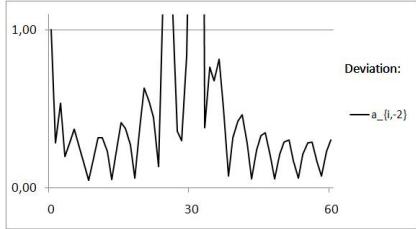
$$\rho_1(z) = z^3 + 1, \rho_2(z) = 3z^3 + 3$$



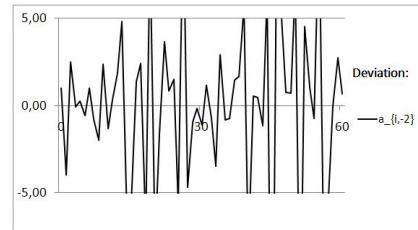
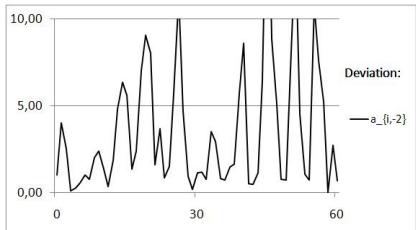
$$\rho_1(z) = z^3 + 1, \rho_2(z) = 3z^3 + 2$$



$$\rho_1(z) = z^3 + 1, \rho_2(z) = 3z^3 + 1$$



$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 - 1$$



1.0.3. Системы Никишина

Пусть $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ некоторые конечные Борелевские меры расположенные на совместно не пересекающихся отрезках $\Delta_{j+1} \cap \Delta_j = 0$

Определим систему мер $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &:= d\sigma_1(x), \\ d\mu_2(x) &:= \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \left[\int_{\Delta_2} \frac{d\sigma_2(z)}{z - x} \right] d\sigma_1(x) \\ &\dots \\ d\mu_p(x) &:= \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_p \rangle \rangle, \quad x \in \Delta_1 \end{aligned}$$

Система мер $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ называется *системой Никишина* на

$$\sup \mu_j = \Delta_1, \quad j = 1, \dots, p$$

. Соответствующие многочлены Q_n для некоторого мульти-индекса $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_p)$ называются *многочленами Никишина*.

Для систем Никишина доакзаны следующие важные свойства.

Свойство 1.6 Мульти-индексы для $p \leq 3$ строго нормальны, для $p > 3$ это условие пока не доказано.

Свойство 1.7 Реккурентные коэффициенты равномерно ограничены, если носитель σ_1 компактен.

Свойство 1.8 При условии, что $\sigma'_k > 0$ везде на носителе Δ_k , тогда для индексов $i \in \{0, \dots, p-1\}, j \in \{0, \dots, p\}$ существуют следующие пределы $a_{i,-j}^0$ реккурентных соотношений

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{pk+i, pk+i-j} = a_{i,-j}^0$$

зависящие, только от расположения интервалов носителей.

Коэффициенты $a_{i,-j}^0$ для выбранных носителей при фиксированном p образуют *референсный оператор*.

Свойство 1.9 Следствием из (1.8) является то, что любой оператор ассоциированный с некоторой системой Никишина на фиксированных носителях мер при условии, что $\sigma'_k > 0$ везде на соответствующем носителе Δ_k является компактным возмущением референсного оператора.

1.0.4. Системы Никишина $p = 2$

Соответствующие носители для случая $p = 2$ определяются как $\Delta_1 = [a, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$, где

$$z_a = \frac{(a+1)^3}{9(a^2 - a + 1)}$$

Определим дополнительные переменные:

$$K := 2a^3 - 3a^2 - 3a + 2$$

$$R := \sqrt{a^2 - a + 1}$$

Референсный оператор имеет периодическую структуру (период равен 2)

$$A_{Nik}^0 = \begin{pmatrix} a_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{1,-1} & a_{1,0} & 1 & 0 & \cdots \\ a_{0,-2} & a_{0,-1} & a_{0,0} & 1 & \cdots \\ 0 & a_{1,-2} & a_{1,-1} & a_{1,0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= -\frac{1}{36R^2}[K - 12(a+1)R^2 + 10R^3] & a_{1,0} &= -\frac{1}{18R^2}[K - 6(a+1)R^2 + 4R^3] \\ a_{0,-1} &= -\frac{1}{36^2 R^4}(-K + 2R^3)(K - 14R^3) & a_{1,-1} &= -\frac{1}{36^2 R^4}(-K + 2R^3)(K - 14R^3) \\ a_{0,-2} &= -\frac{1}{36 \cdot 81 R^3}(-K + 2R^3)^2 & a_{1,-2} &= -\frac{1}{36^3 R^6}(-K + 2R^3)^2(K + 2R^3) \end{aligned}$$

Обозначим через μ_1^0, μ_2^0 меры соответствующие референсному оператору. В следующих главах мы рассмотрим различные полиномиальные возмущения исходных мер весовыми функциями

$$d\mu_1(z) = \rho_1(z)d\mu_1^0(z), \quad d\mu_2(z) = \rho_2(z)\mu_2^0(z)$$

Проверим на практике условия компактности возмущения оператора. Для каждого примера левый график показывает полином, правый график показывает отклонения (по модулю) получающихся рекуррентных соотношений от референсного оператора A_{Nik}^0

1.0.5. Система Никишина $\Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$

Рассмотрим случай $a = -1$

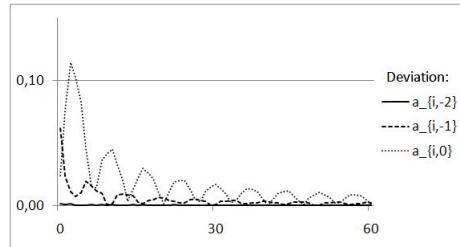
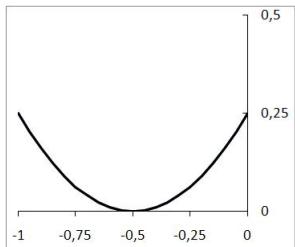
$$z_a = 0, K = 0, R = \sqrt{3}$$

Референсный оператор

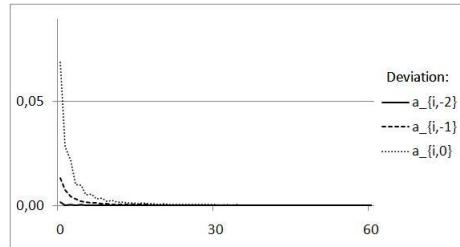
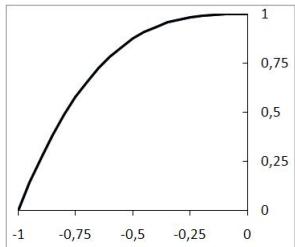
$$A_{Nik}^0 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{7}{16}\alpha^2 & -\alpha & 1 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{8}\alpha^3 & \frac{7}{16}\alpha^2 & -\frac{5}{4}\alpha & 1 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{64}\alpha^3 & \frac{7}{16}\alpha^2 & -\alpha & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

где $\alpha = 2/(3\sqrt{3})$

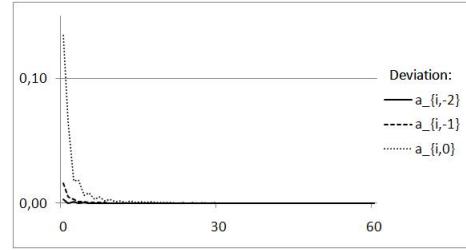
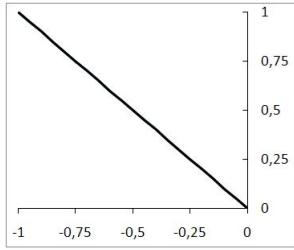
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \left(\frac{1}{2} + z\right)^2$$



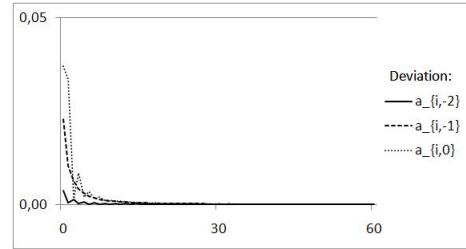
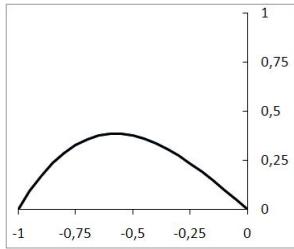
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



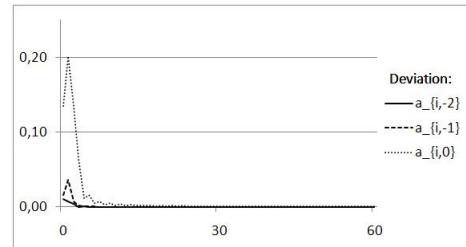
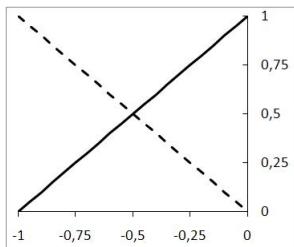
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = -z$$



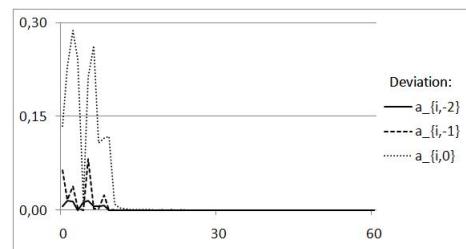
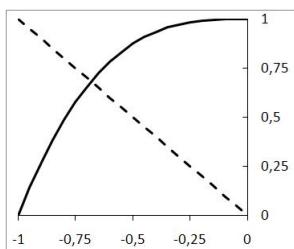
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 - z$$

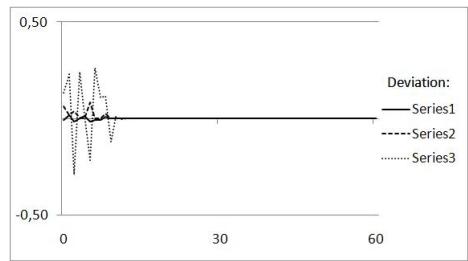


$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z + 1$$

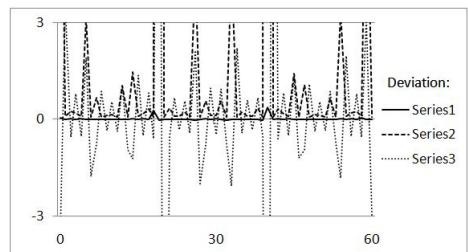
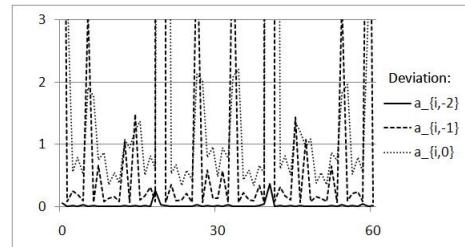
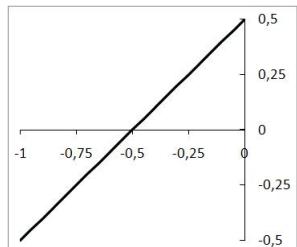


$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z^3 + 1$$





$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{2} + z$$



1.0.6. Система Никишина $\Delta_1 = [-1/2, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$

При $a = -1/2$

$$z_a = \frac{1}{126}, K = 52, R = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Референсный оператор

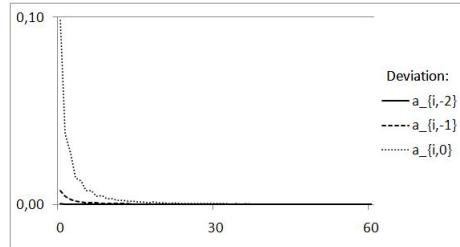
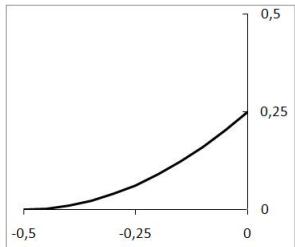
$$a_{0,0} = \frac{8}{63} - \frac{5}{36}\sqrt{7} \quad a_{1,0} = \frac{11}{126} - \frac{1}{9}\sqrt{7}$$

$$a_{0,-1} = a_{1,-1} = \frac{2501}{63504} - \frac{5}{567}\sqrt{7}$$

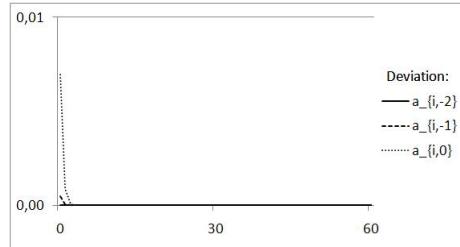
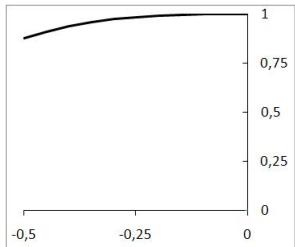
$$a_{0,-2} = \frac{-443}{285768}\sqrt{7} + \frac{5}{1458} \quad a_{1,-2} = \frac{5}{32928} - \frac{1}{9408}\sqrt{7}$$

Рассмотрим различные полиномиальные возмущения

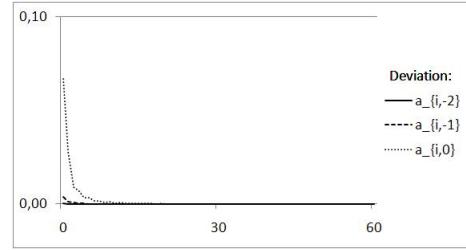
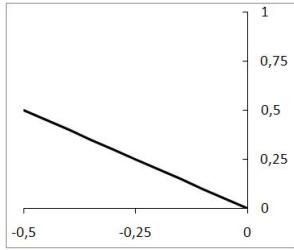
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \left(\frac{1}{2} + z\right)^2$$



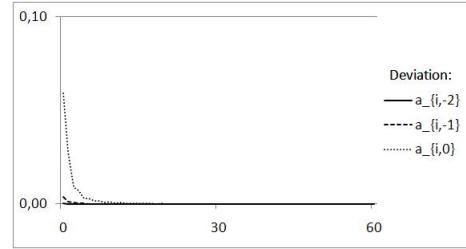
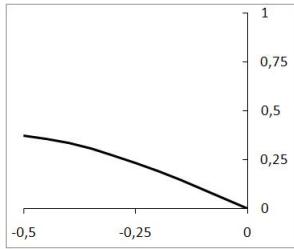
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



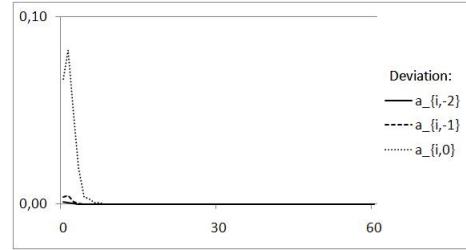
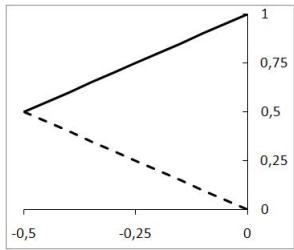
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = -z$$



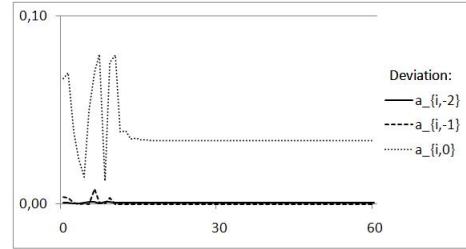
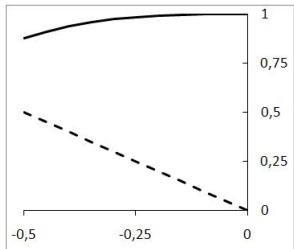
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 - z$$



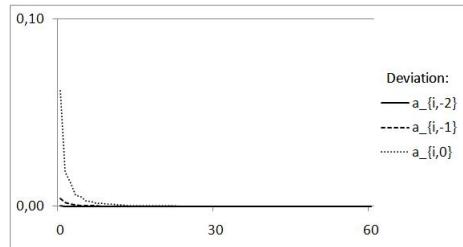
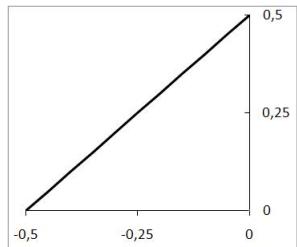
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z + 1$$



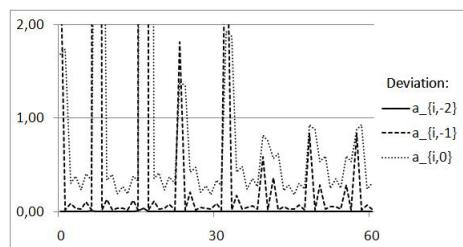
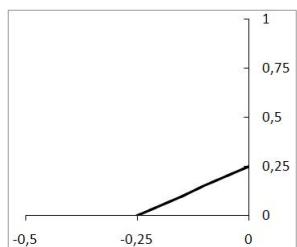
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z^3 + 1$$



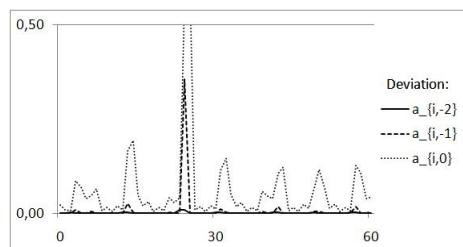
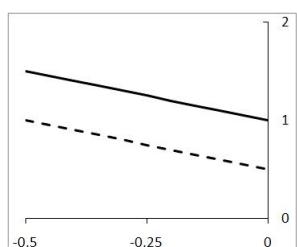
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{2} + z$$



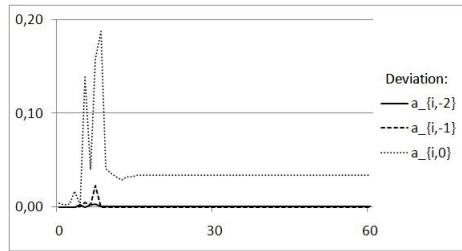
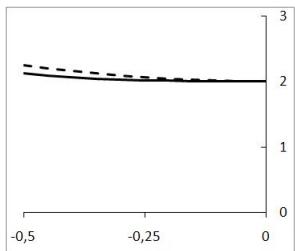
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{4} + z$$



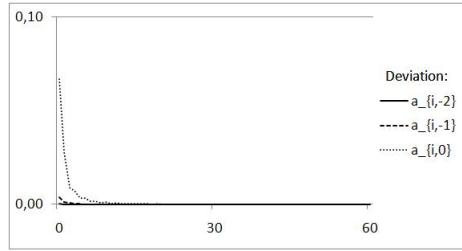
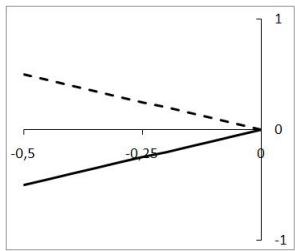
$$\rho_1(z) = \frac{1}{2} - z, \rho_2(z) = 1 - z$$



$$\rho_1(z) = z^2 + 2, \rho_2(z) = 2 - z^3$$



$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z$$



1.0.7. Система Никишина $\Delta_1 = [-3/4, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$

При $a = -3/4$

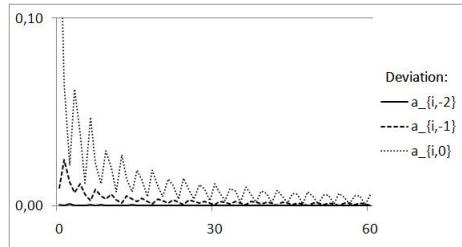
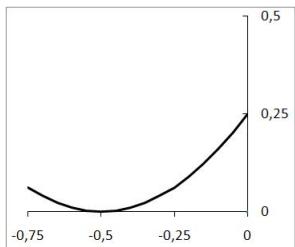
$$z_a = \frac{1}{1332}, K = 5532, R = \frac{\sqrt{37}}{4}$$

Коэффициенты референсного оператора:

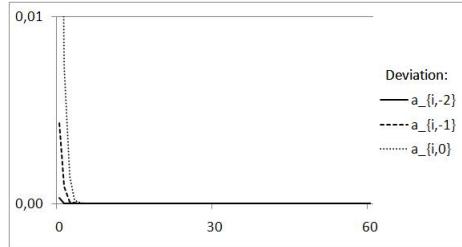
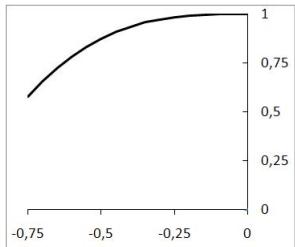
$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \frac{167}{2664} - \frac{5}{72}\sqrt{37} & a_{1,0} &= \frac{14}{333} - \frac{1}{18}\sqrt{37} \\ a_{0,-1} = a_{1,-1} &= \frac{89399}{1774224} - \frac{55}{23976}\sqrt{37} \\ a_{0,-2} &= \frac{-26839}{31936032}\sqrt{37} + \frac{55}{23328} & a_{1,-2} &= \frac{2695}{19450752} - \frac{49}{525696}\sqrt{37} \end{aligned}$$

Рассмотрим различные полиномиальные возмущения

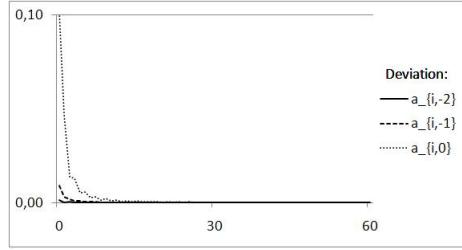
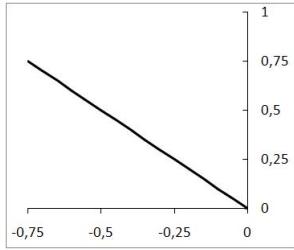
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \left(\frac{1}{2} + z\right)^2$$



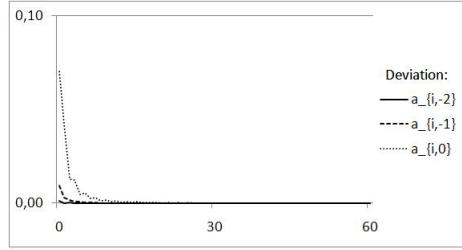
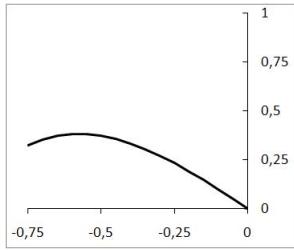
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



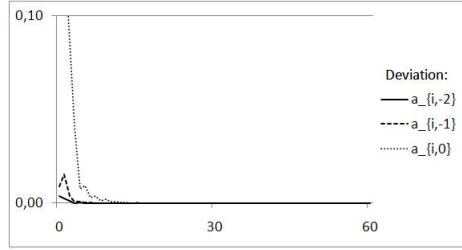
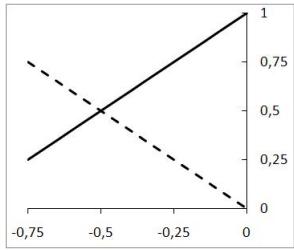
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = -z$$



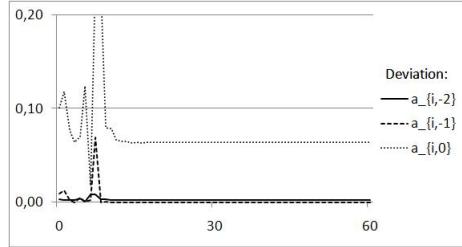
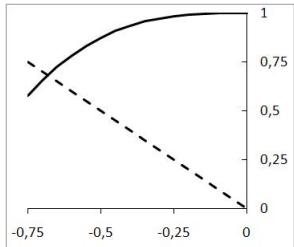
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 - z$$



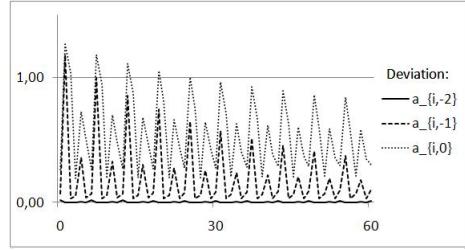
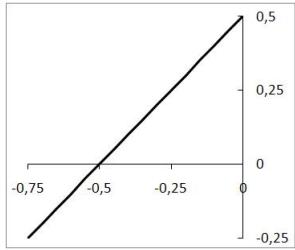
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z + 1$$



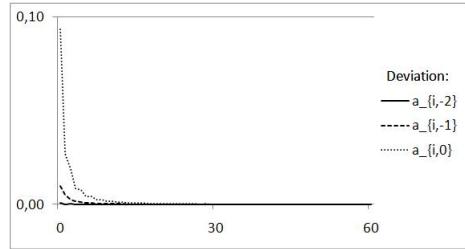
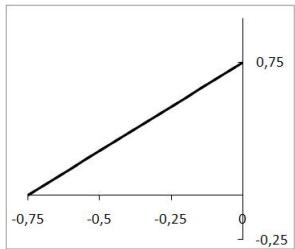
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z^3 + 1$$



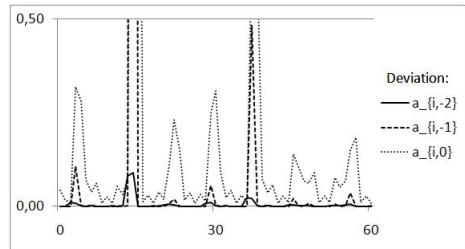
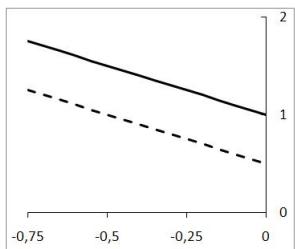
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{2} + z$$



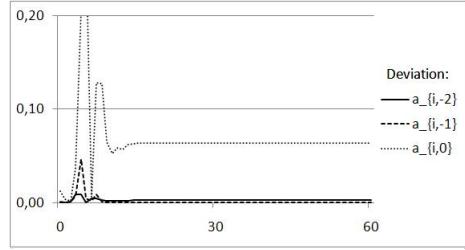
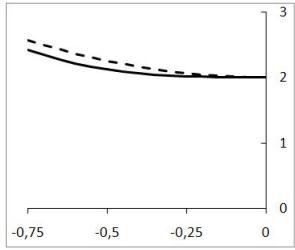
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{3}{4} + z$$



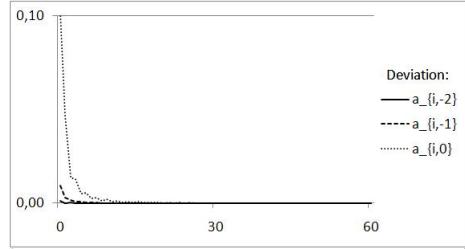
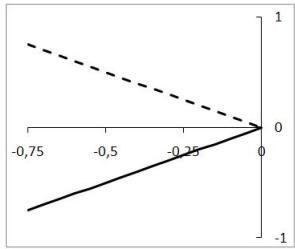
$$\rho_1(z) = \frac{1}{2} - z, \rho_2(z) = 1 - z$$



$$\rho_1(z) = z^2 + 2, \rho_2(z) = 2 - z^3$$



$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z$$



1.0.8. Системы Анжелеско

Система борелевских мер μ_1, \dots, μ_p таких, что носители мер не имеют общих внутренних точек $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, i \neq j$ называется *системой Анжелеско*.

Для систем Анжелеско доказано несколько важных свойств.

Свойство 1.10 Все мульти-индексы $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_p)$ строго нормальны.

Свойство 1.11 Соответствующий разностный оператор ограничен, если носители мер $\Delta_1, \dots, \Delta_p$ компактны.

Свойство 1.12 Если меры μ_1, \dots, μ_p удовлетворяют условию Сегё,

$$d\mu_j(x) = \rho_j(x)dx$$

$$\int_{\Delta_j} \log \rho_j(x) dx > -\infty, \quad j = 1, \dots, p$$

тогда существуют пределы реккурентных коэффициентов с периодичностью p

Свойство 1.13 Следствием из (1.12) является то, что любой оператор чьи резольвентные функции образуют систему Анжелеско меры которой удовлетворяют условию Сегё является компактным возмущением референсного оператора, коэффициенты которого в свою очередь имеют пределы с периодом p

1.0.9. Системы Чебышева $p = 2$ на $\Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$

Рассмотрим меру

$$\rho_1(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

на носителе $[-1, 0]$ и меру

$$\rho_2(z) = \sqrt{1 - z^2}$$

на носителе $[0, 1]$

Меры соответствуют классическим ортогональным многочленам Чебышева 1-го $T_n(z)$ и 2-го $U_n(z)$ рода соответственно

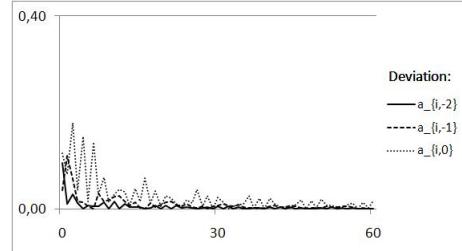
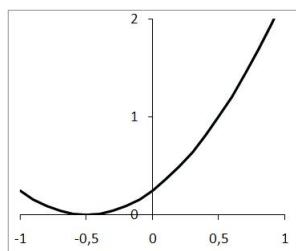
$$T_0 = 1, T_1 = z, \dots T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z)$$

$$U_0 = 1, U_1 = 2z, \dots U_{n+1}(z) = 2zU_n(z) - U_{n-1}(z)$$

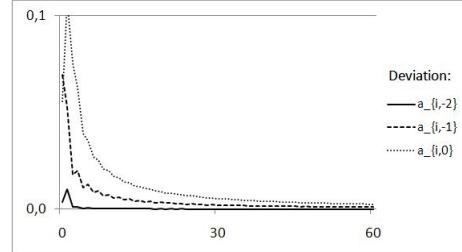
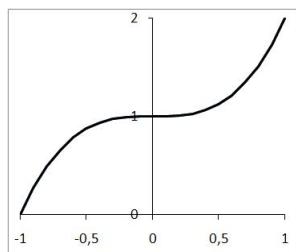
Модифицированный алгоритм Чебышева. Полиномиальные возмущения.

Рассмотрим различные полиномиальные возмущения

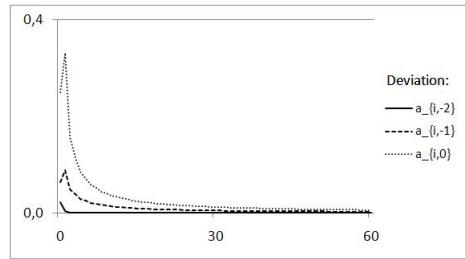
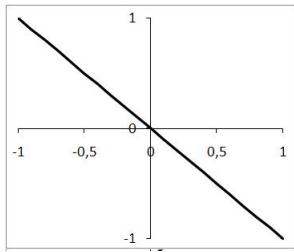
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \left(\frac{1}{2} + z \right)^2$$



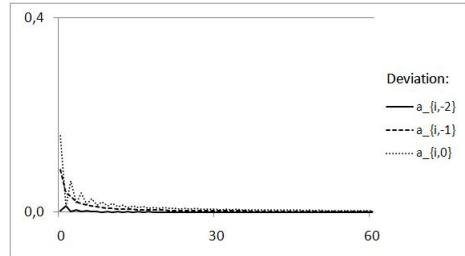
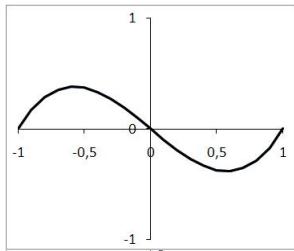
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



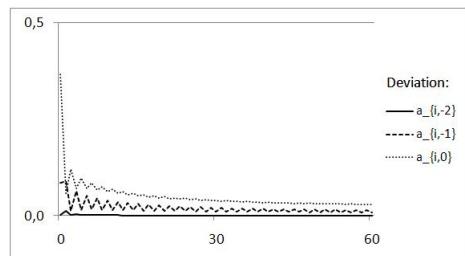
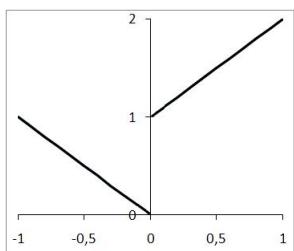
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = -z$$

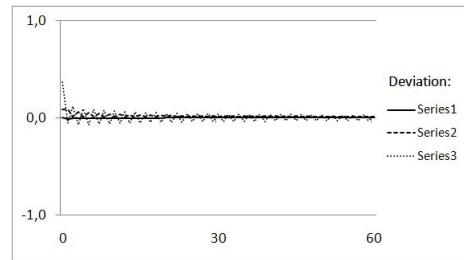


$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 - z$$

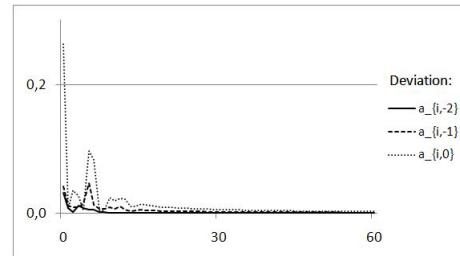
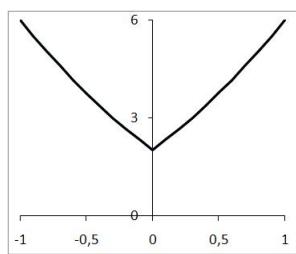


$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z + 1$$

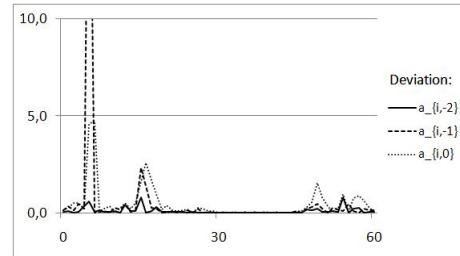
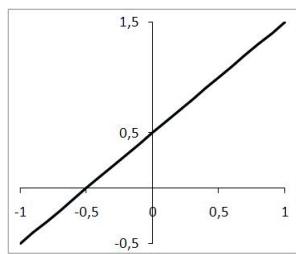


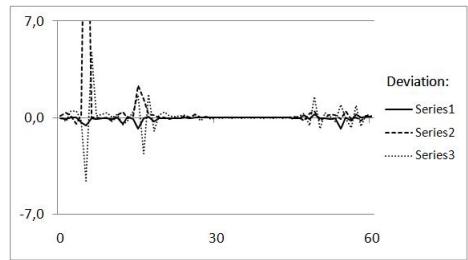


$$\rho_1(z) = z^2 - 3z + 2, \rho_2(z) = z^2 + 3z + 2$$

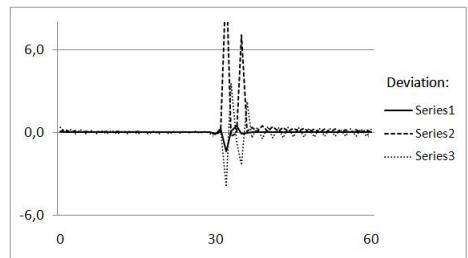
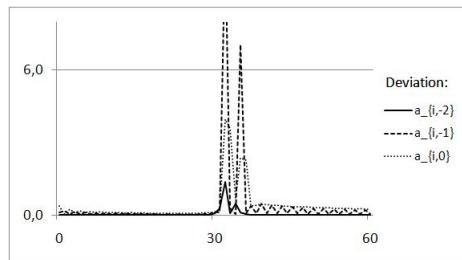
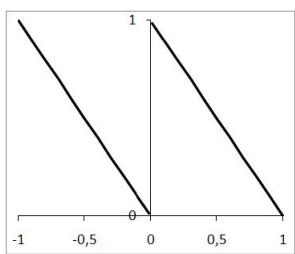


$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{2} + z$$

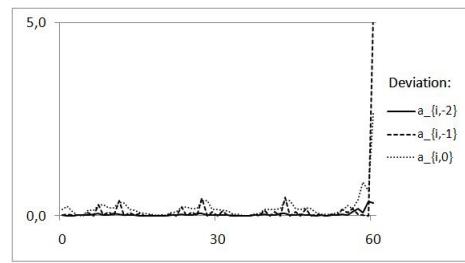
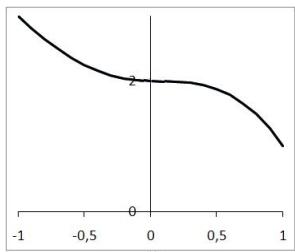




$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = -z + 1$$



$$\rho_1(z) = z^2 + 2, \rho_2(z) = 2 - x^3$$



Глава 2

Обратная спектральная задача. Процедура Стильтеса.

В качестве одного из решений обратной спектральной задачи рассмотрим процедуру Стильтеса. Основная идея процедуры Стильтеса - вычисление коэффициентов $a_{i,j}$ рекуррентного соотношения напрямую через вычисление функционалов $L_j(Q_i, Q_k)$.

Функционалы в свою очередь вычисляются через квадратуру Гаусса.

$$L_j(Q_i, Q_k) = \sum_{t=0}^{n-1} Q_i(\lambda_t) Q_k(\lambda_t) r_t^{(j)} \quad (2.1)$$

где n количество узлов квадратуры, λ_t - узлы и r_t - веса квадратуры.

Процедура стартует со следующих начальные условий:

$$Q_0 = 1, a_{0,0} = \frac{L_1(Q_0, zQ_0)}{L_1(O_0, Q_0)}$$

Далее последовательно для $i = 1, \dots, n-1$

1. Вычислить многочлен Q_i из рекуррентного соотношения (??), пользуясь вычисленными многочленами и коэффициентами с предыдущего шага:

$$Q_{i-1}, \dots, Q_{i-1-p}; a_{i-1,i-1-p}, \dots, a_{i-1,i-1-p}$$

2. Вычислить последовательно коэффициенты

$$a_{i,i-p}, \dots, a_{i,i}$$

используя выражения (??).

2.0.1. Система Чебышева $p = 2$, $\Delta_1 = [-1, 0]$, $\Delta_2 = [0, 1]$. Возмущения точками масс.

Рассмотрим различные возмущения различными массами на примере системы Чебышева 1-го рода

$$\rho_1(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

на носителе $[-1, 0]$ и системы Чебышева 2-го рода

$$\rho_2(z) = \sqrt{1 - x^2}$$

на носителе $[0, 1]$

Квадратура Чебышева

Для системы Чебышева 1-го рода известна следующая квадратура. Для некоторого интервала $[a, b]$ и целого n узлы квадратуры выражаются:

$$\lambda_i = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cos \left(\frac{(2i - 1)\pi}{2n} \right), i = 1, \dots, n$$

Веса квадратуры

$$\tau_i = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$$

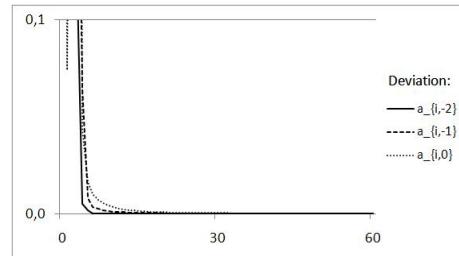
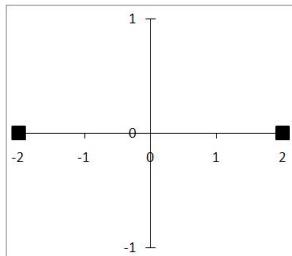
Для системы Чебышева 2-го рода известна следующая квадратура. Для некоторого интервала $[a, b]$ и целого n узлы квадратуры выражаются:

$$\lambda_i = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cos \left(\frac{i\pi}{n + 1} \right), i = 1, \dots, n$$

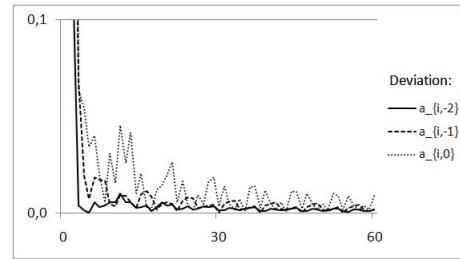
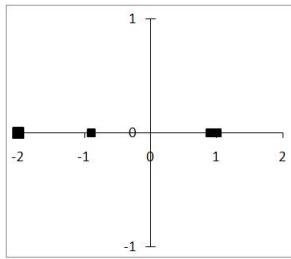
Веса квадратуры

$$\tau_i = \frac{2}{n + 1} \sin^2 \left(\frac{i\pi}{n + 1} \right), i = 1, \dots, n$$

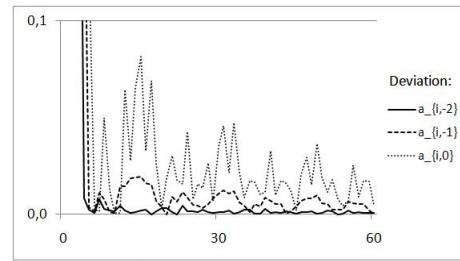
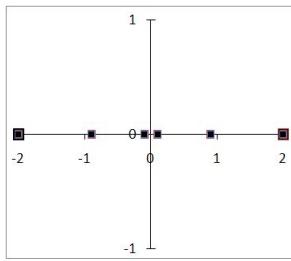
$[-2; 0.5][2; 0.5]$



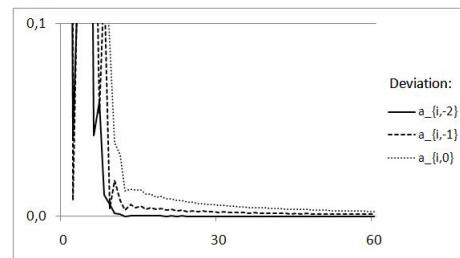
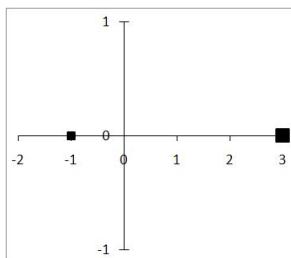
$[-2; 0.5][-0.9; 0.1][0.9; 0.1][1; 0.2]$



$$[-2; 0.2][-0.9; 0.1][-0.1; 0.1][0.1; 0.1][0.9; 0.1][2; 0.2]$$



$$[-1, 0.1][3; 0.5]$$

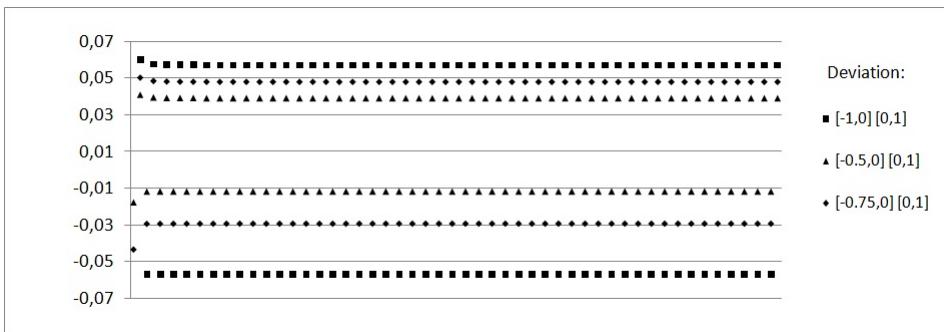


Система Чебышева $p = 2, \Delta_1 = [-1, -0.5], \Delta_2 = [0.5, 1]$. **Возмущения точками масс.**

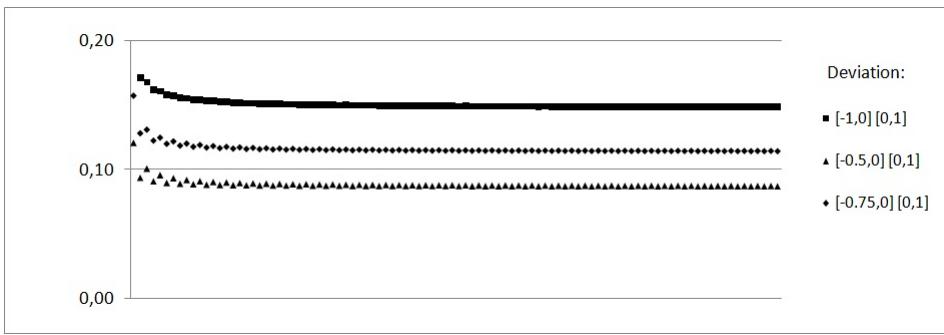
2.0.2. Процедура Стильтеса для $\Delta_1 = [-a, 0], \Delta_2 = [0, 1]$

Рассмотрим результаты процедуры Стильтеса для различных участков носителей мер Чебышева 1-го и 2-го рода с одной общей точкой - ноль, $a = 1, 0.75, 0.5$

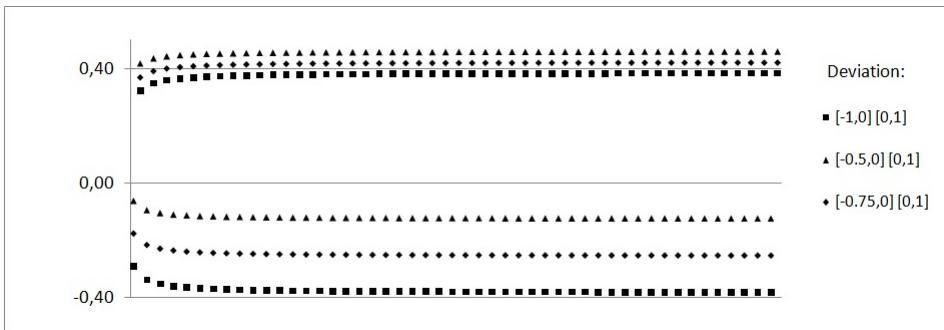
Диагональ $a_{n,n-2}$



Диагональ $a_{n,n-1}$



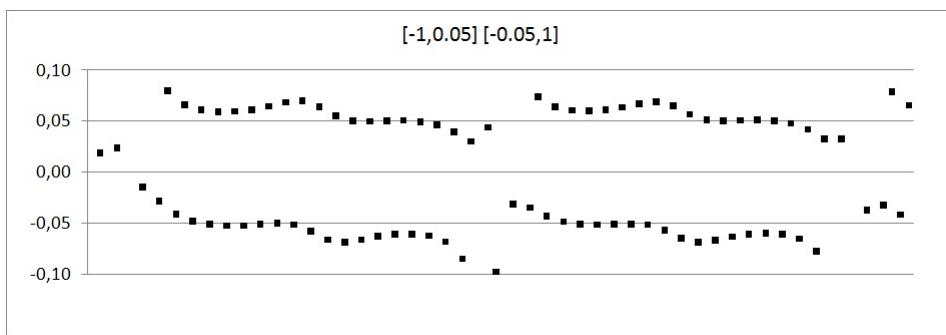
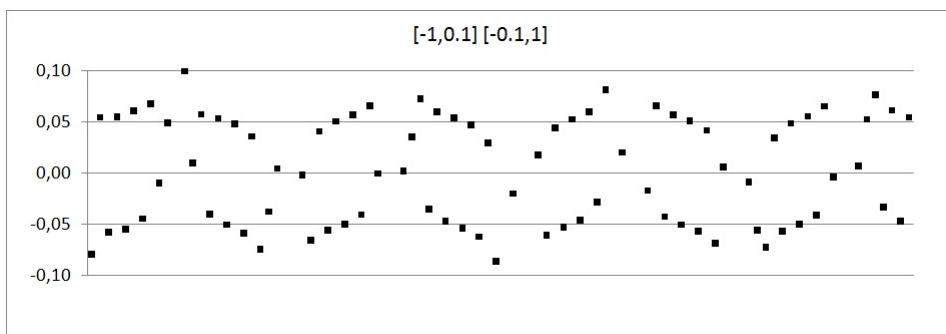
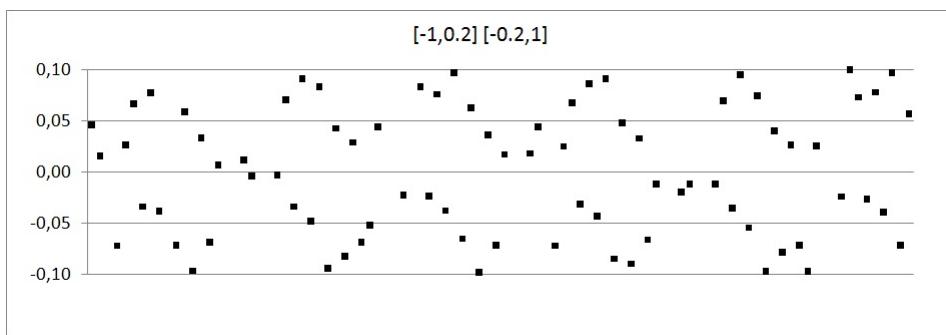
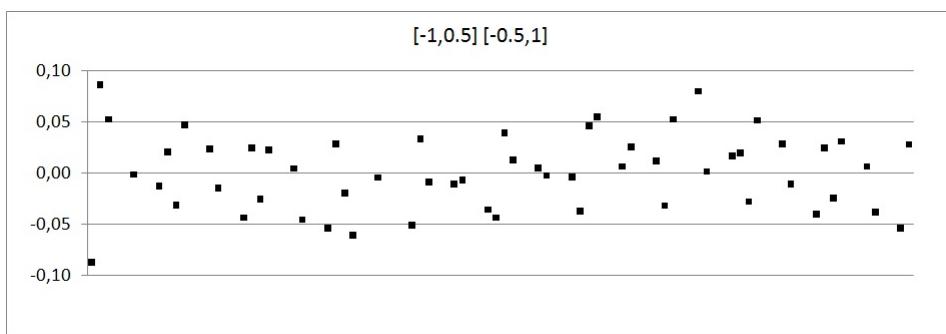
Диагональ $a_{n,n}$

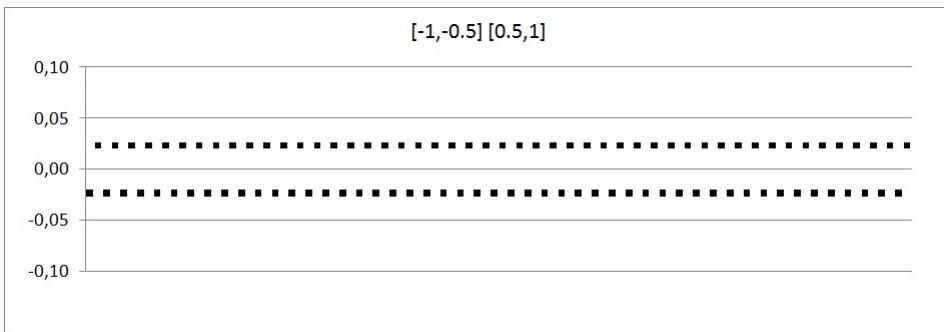
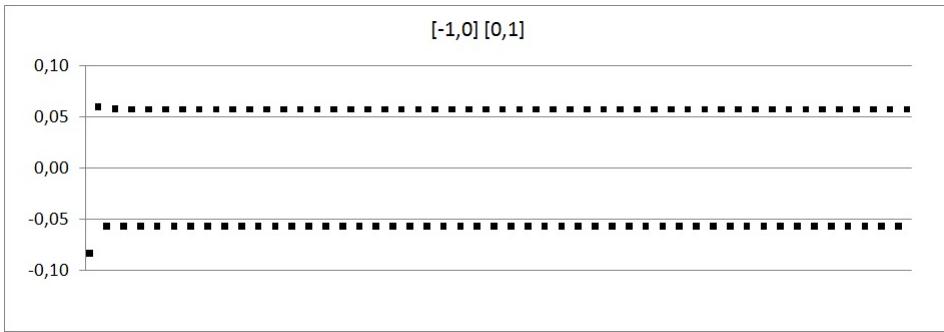
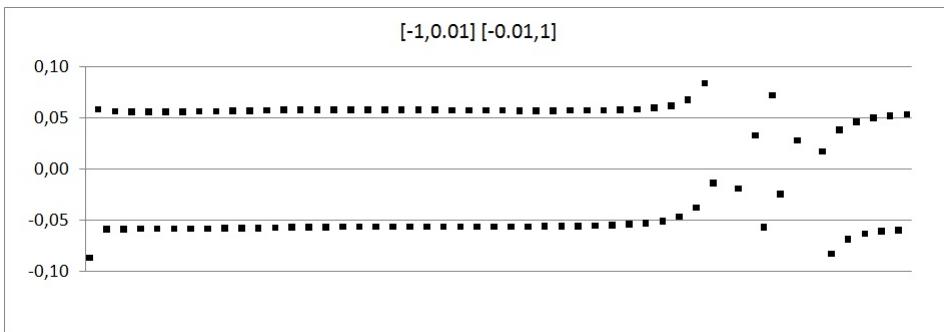


2.0.3. Процедура Стильтеса для $\Delta_1 = [-1, a]$, $\Delta_2 = [-a, 1]$

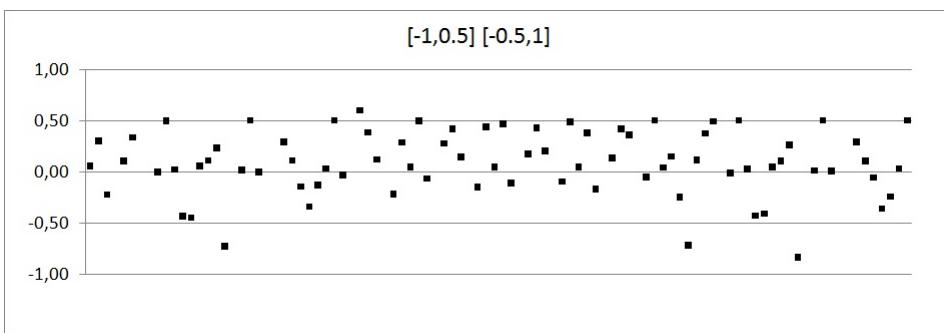
Рассмотрим результаты процедуры Стильтеса для различных участков носителей мер Чебышева 1-го и 2-го рода, начиная с перекрывающихся носителей мер и заканчивая отдельными носителями для $a = 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.001, 0, -0.5$

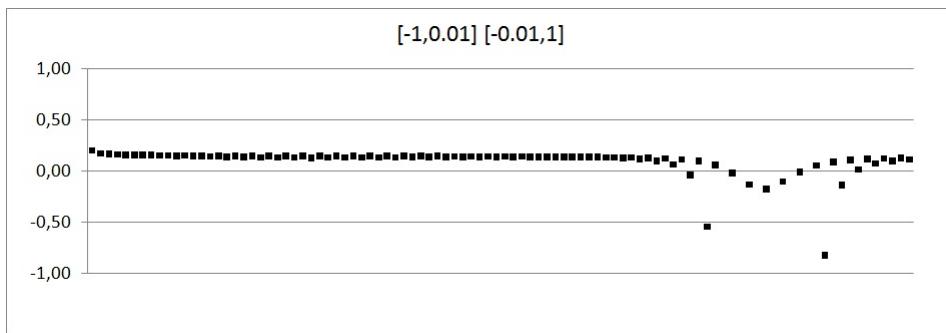
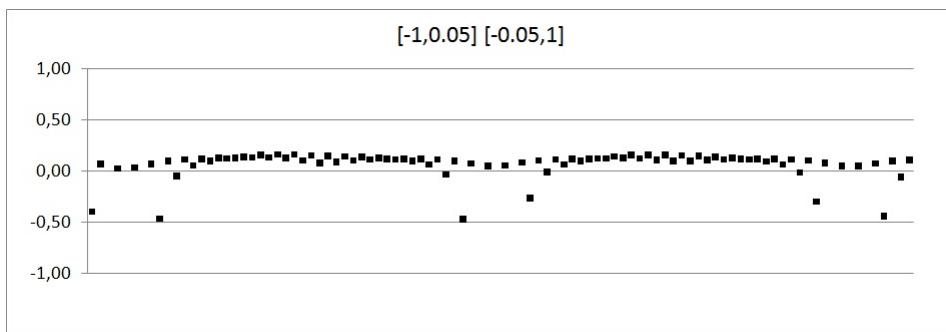
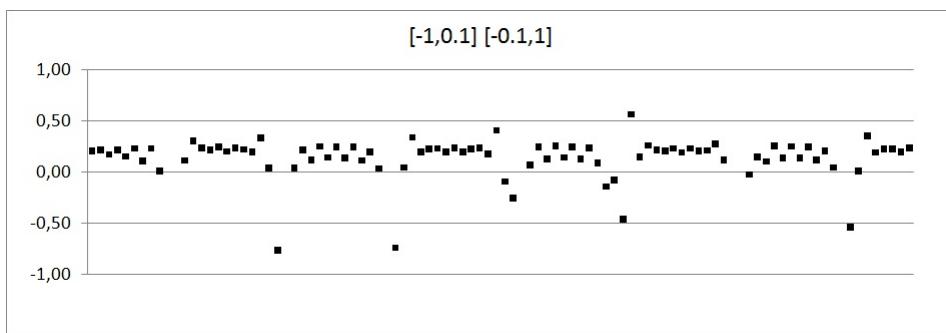
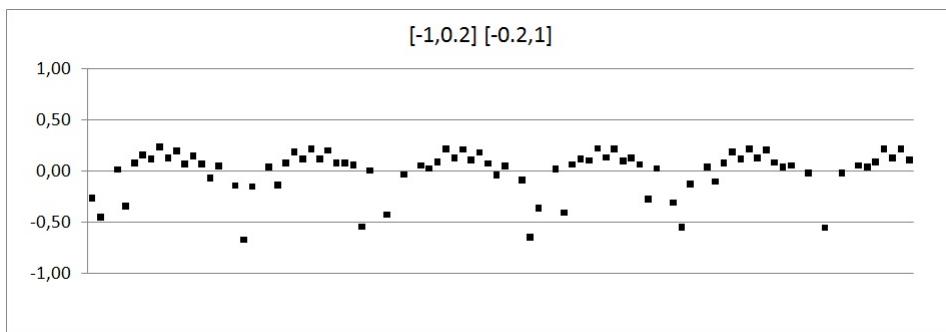
Диагональ $a_{n,n-2}$

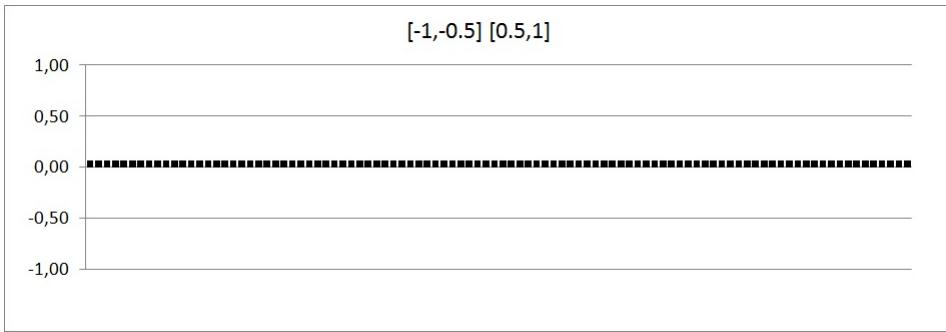
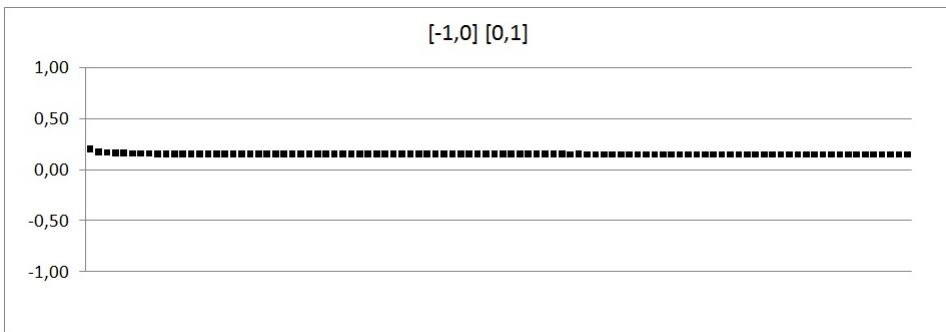




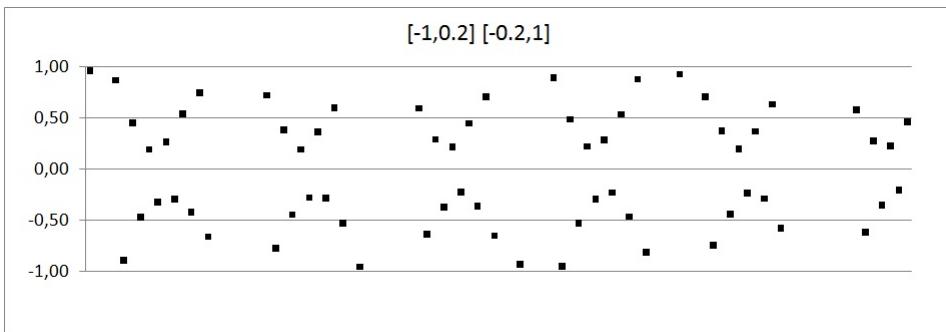
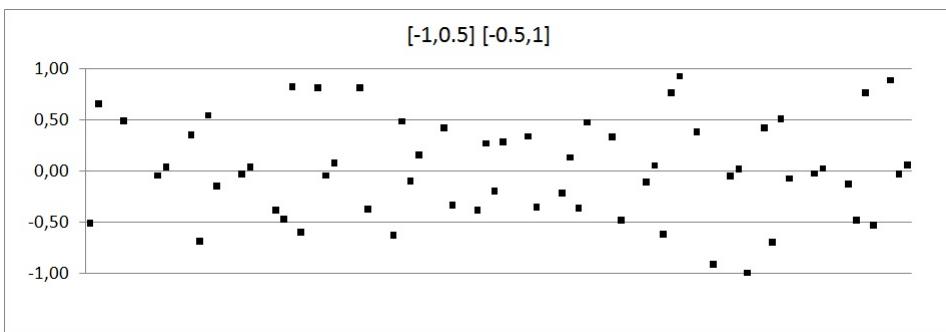
Диагональ $a_{n,n-1}$

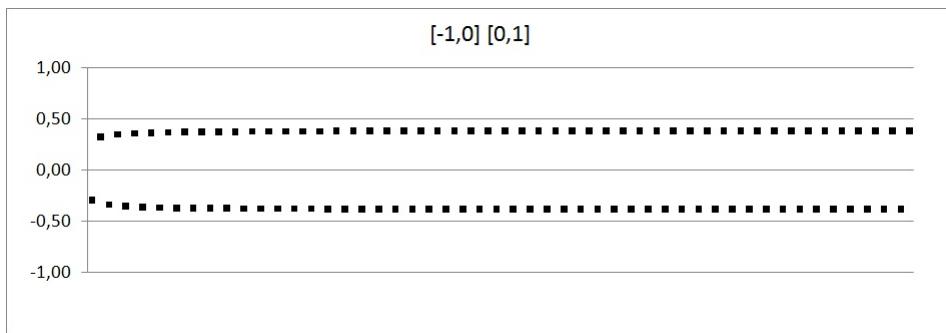
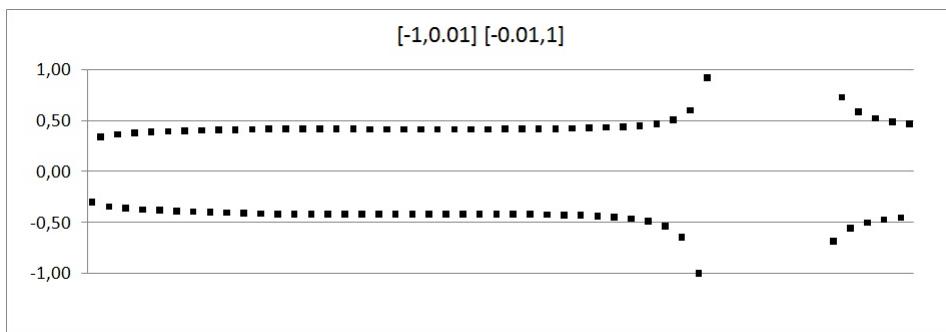
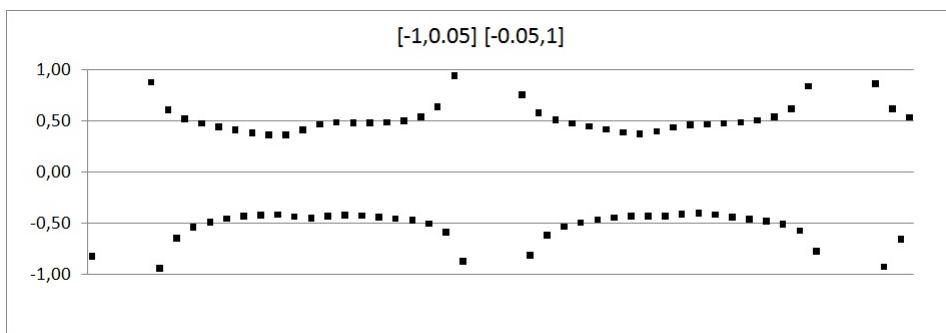
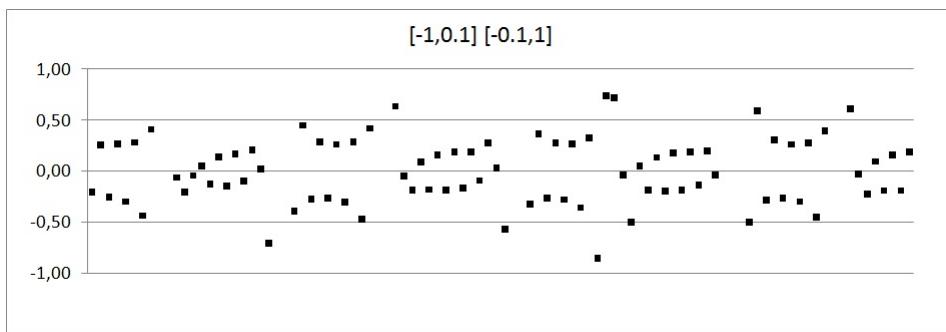


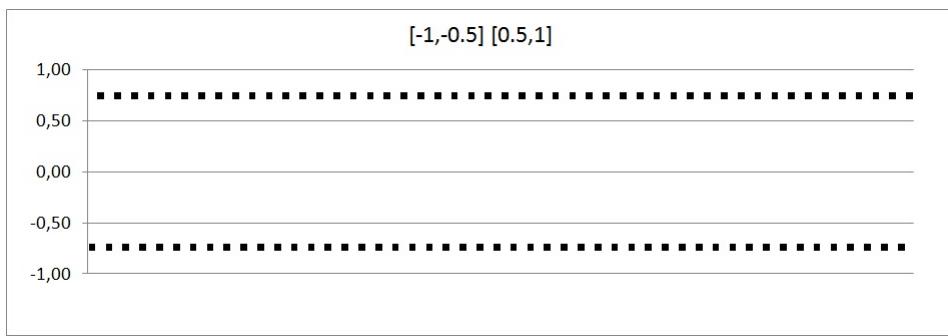




Диагональ $a_{n,n}$







2.0.4. Системы Чебышева и Лежандра $p = 2$ на $\Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$

Рассмотрим меру

$$\rho_1(z) \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

на носителе $[-1, 0]$ и меру $\rho_2(z) = 1$ на носителе $[0, 1]$. Меры соответствуют классическим ортогональным многочленам Чебышева 1-го $T_n(z)$ и Лежандра P соответственно

$$T_0 = 1, T_1 = z, \dots, T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z)$$

$$P_0 = 1, P_1 = z, \dots, P_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{n+1}zP_n(z) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(z)$$

2.0.5. Системы Анжелеско $p = 2$

Носители мер для случая $p = 2$ определяются как $\Delta_1 = [a, 0]$, $\Delta_2 = [z_a, 1]$, где

$$z_a = \frac{(a+1)^3}{9(a^2 - a + 1)}$$

$$K := 2a^3 - 3a^2 - 3a + 2$$

$$R := \sqrt{a^2 - a + 1}$$

Референсный оператор имеет периодическую структуру

$$A_{Ang}^0 = \begin{pmatrix} a_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{1,-1} & a_{1,0} & 1 & 0 & \cdots \\ a_{0,-2} & a_{0,-1} & a_{0,0} & 1 & \cdots \\ 0 & a_{1,-2} & a_{1,-1} & a_{1,0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

где

$$a_{0,0} = \frac{a+1}{3} - \frac{2}{9}R \quad a_{1,0} = \frac{a+1}{3} + \frac{2}{9}R$$

$$a_{0,-1} = \frac{4}{81}R^2 \quad a_{1,-1} = \frac{4}{81}R^2$$

$$a_{0,-2} = \frac{4}{729}(K + 2R^3) \quad a_{1,-2} = \frac{4}{729}(K - 2R^3)$$

Обозначим через μ_1^0, μ_2^0 меры соответствующие референсному оператору. Рассмотрим различные возмущения весовыми функциями

$$d\mu_1(z) = \rho_1(z)d\mu_1^0(z), \quad d\mu_2(z) = \rho_2(z)d\mu_2^0(z)$$

Начальные условия для ортогональных многочленов в общем виде выводятся из соответствующей непрерывной дроби следующим образом

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_1^{(1)}}{Q_1}, \frac{P_1^{(2)}}{Q_1} \right) &= \frac{(1/h_0, 1)}{(0, z + b_{0,0})} = \left(\frac{1}{h_0}, 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{z + b_{0,0}}, 0 \right) = \left(\frac{1/h_0}{z + b_{0,0}}, \frac{0}{z + b_{0,0}} \right) \\ \left(\frac{P_2^{(1)}}{Q_2}, \frac{P_2^{(2)}}{Q_2} \right) &= \frac{(1/h_0, 1)}{(0, z + b_{0,0})} + \frac{(1/h_1, 1)}{(b_{1,0}, z + b_{1,1})} = \frac{(1/h_0, 1)}{(0, z + b_{0,0}) + \frac{(1/h_1, 1)}{(b_{1,0}, z + b_{1,1})}} = \\ \frac{(1/h_0, 1)}{(0, z + b_{0,0}) + \left(\frac{1}{h_1(z + b_{1,1})}, \frac{b_{1,0}}{z + b_{1,1}} \right)} &= \frac{(1/h_0, 1)}{\left(\frac{1}{h_1(z + b_{0,0})}, \frac{(z + b_{0,0})(z + b_{1,1}) + b_{1,0}}{z + b_{1,1}} \right)} = \\ \left(\frac{1/h_0(z + b_{1,1})}{(z + b_{0,0})(z + b_{1,1}) + b_{1,0}}, \frac{1/h_1}{(z + b_{0,0})(z + b_{1,1}) + b_{1,0}} \right) \end{aligned}$$

где

$$h_0 = 1, h_k = \frac{1}{a_{0,1}a_{1,2}\dots a_{k-1,k}}$$

$$b_{i,j} = -h_j/h_i a_{i,j}$$

Из вышеприведенного следуют следующие начальные условия для совместно ортогональных многочленов:

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= 1 \\ Q_1(z) &= z + b_{0,0} = z - a_{0,0}, \\ Q_2(z) &= (z + b_{0,0})(z + b_{1,1}) + b_{1,0} = (z - a_{0,0})(z - a_{1,1}) - \frac{a_{1,0}}{a_{0,1}} \\ P_0^{(1)} &= 0 \\ P_1^{(1)} &= 1/h_0 = 1, \\ P_2^{(1)} &= 1/h_0(z + b_{1,1}) = z - a_{1,1} \\ P_0^{(2)} &= 0 \\ P_1^{(2)} &= 0 \\ P_2^{(2)} &= 1/h_1 = 1/a_{0,1} \end{aligned}$$

2.0.6. Система Анжелеско $\Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$

Рассмотрим случай $a = -1$

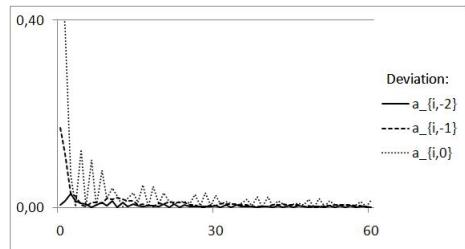
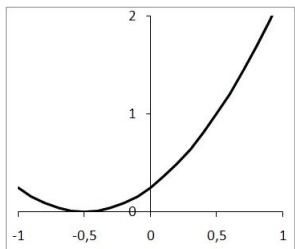
$$z_a = 0, K = 0, R = \sqrt{3}$$

Референсный оператор

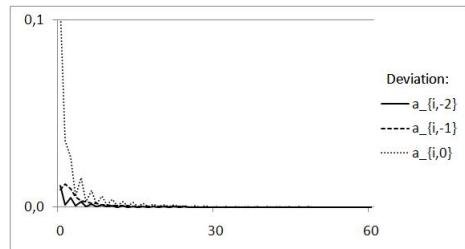
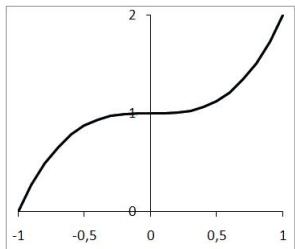
$$A_{Ang}^0 = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 & \dots \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & 1 & \dots \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

где $\alpha = 2/(3\sqrt{3})$

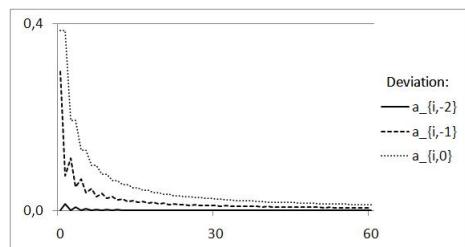
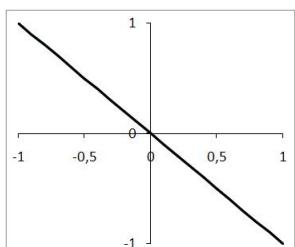
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \left(\frac{1}{2} + z \right)^2$$



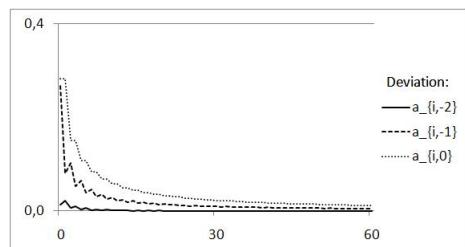
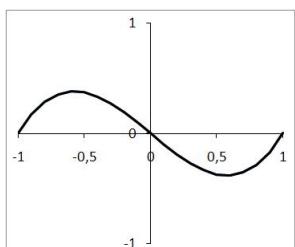
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



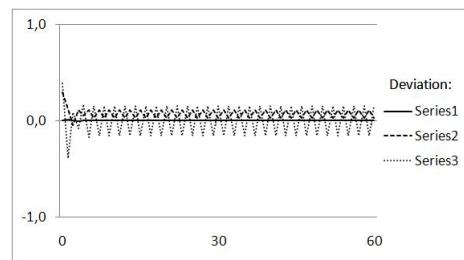
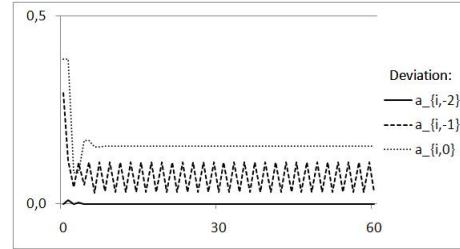
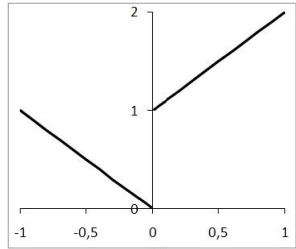
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = -z$$



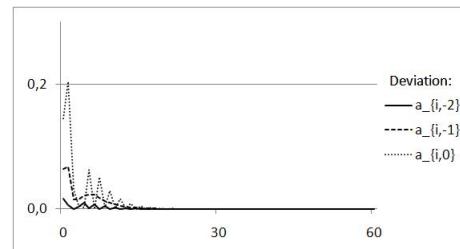
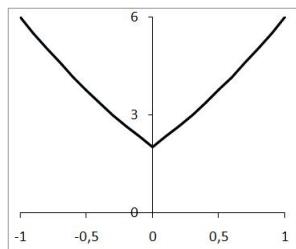
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 - z$$



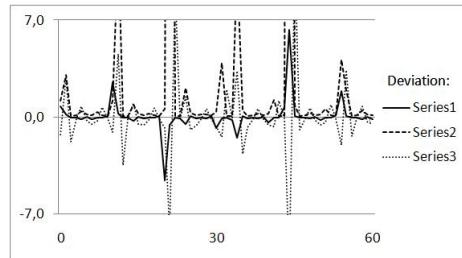
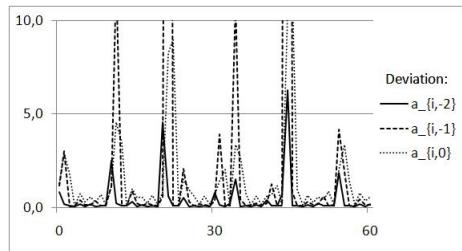
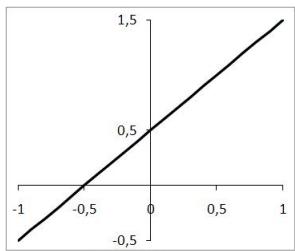
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z + 1$$



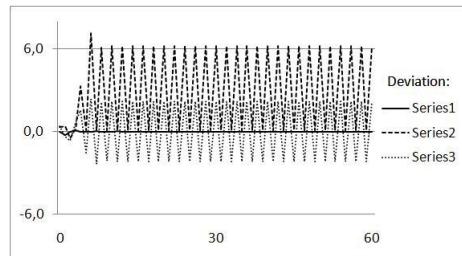
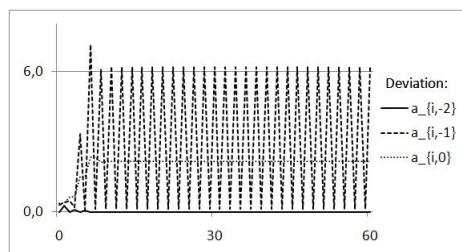
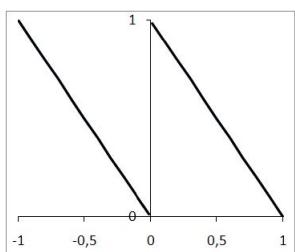
$$\rho_1(z) = z^2 - 3z + 2, \rho_2(z) = z^2 + 3z + 2$$



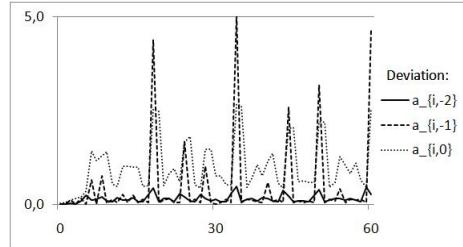
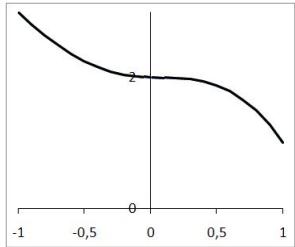
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{2} + z$$



$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = -z + 1$$



$$\rho_1(z) = z^2 + 2, \rho_2(z) = 2 - x^3$$



2.0.7. Система Анжелеско $\Delta_1 = [-1/2, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$

При $a = -1/2$

$$z_a = \frac{1}{126}, K = \frac{5}{2}, R = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

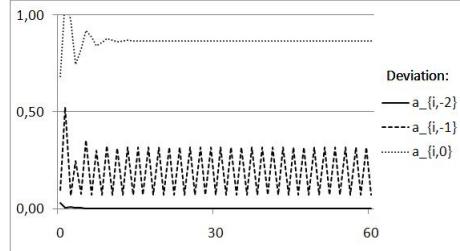
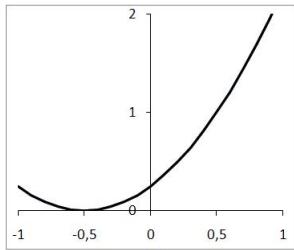
Соответствующий оператор

$$A_{Ang} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha^2 & \frac{1}{6} + \alpha & 1 & 0 & \dots \\ \frac{10}{729} - \alpha^3 & \alpha^2 & \frac{1}{6} - \alpha & 1 & \dots \\ 0 & \frac{10}{729} + \alpha^3 & \alpha^2 & \frac{1}{6} + \alpha & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

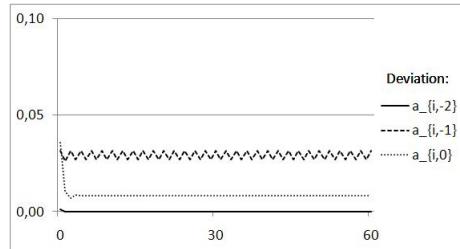
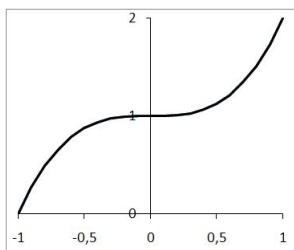
где $\alpha = \sqrt{7}/9$

Рассмотрим различные полиномиальные возмущения

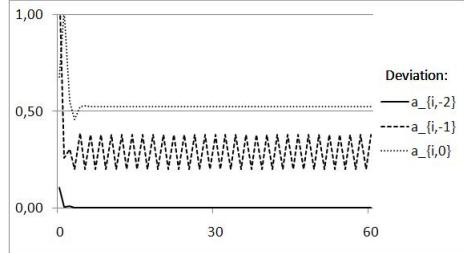
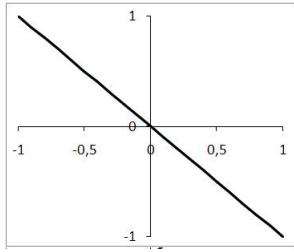
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \left(\frac{1}{2} + z\right)^2$$



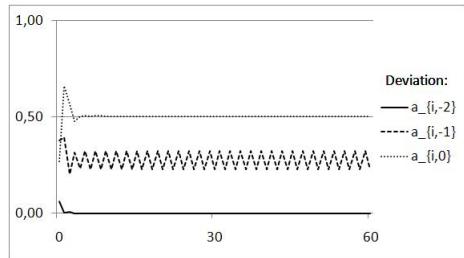
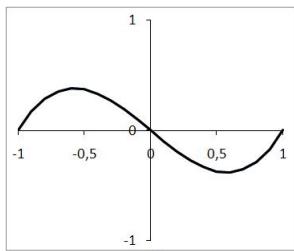
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



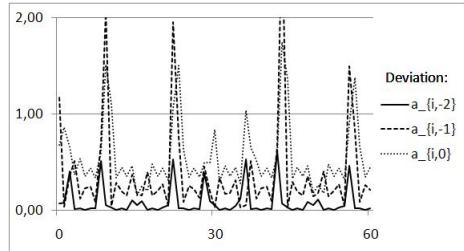
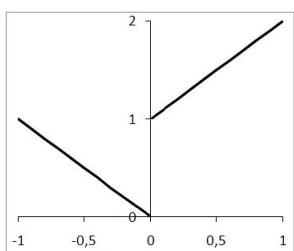
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = -z$$



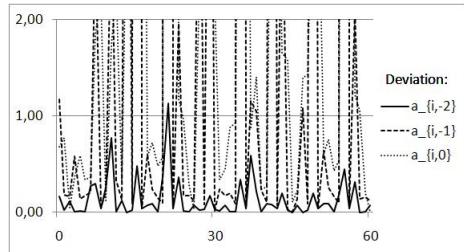
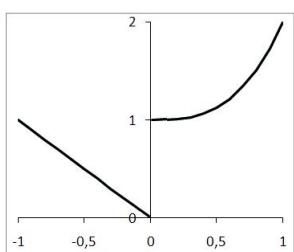
$$\rho_1(z) = p_2(z) = z^3 - z$$



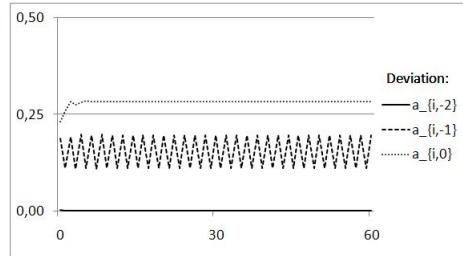
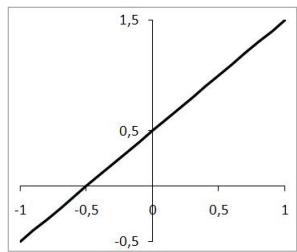
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z + 1$$



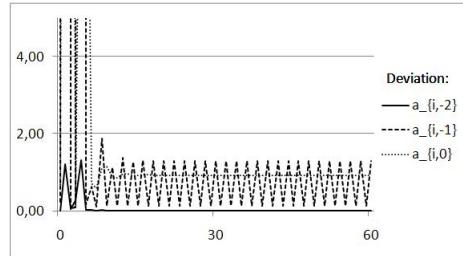
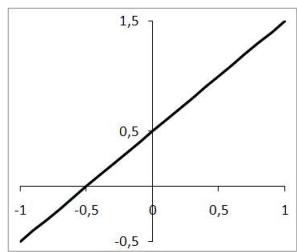
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z^3 + 1$$



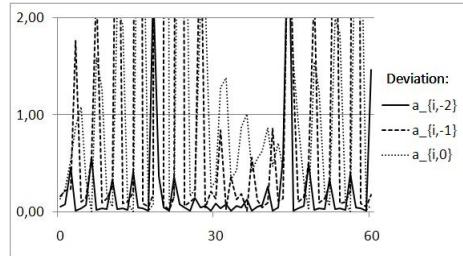
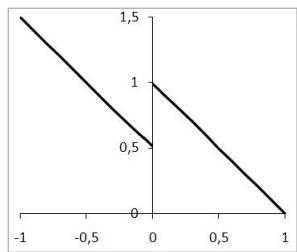
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{2} + z$$



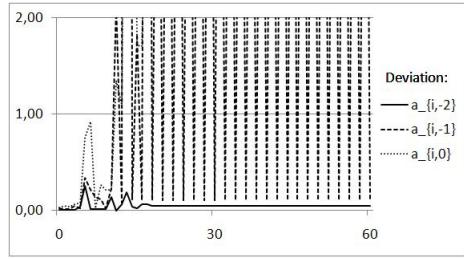
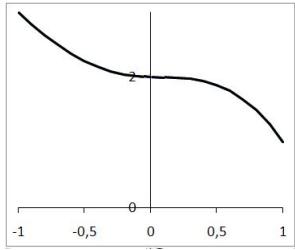
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{4} + z$$



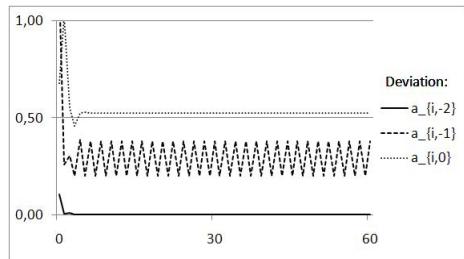
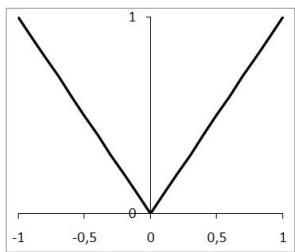
$$\rho_1(z) = \frac{1}{2} - z, \rho_2(z) = 1 - z$$



$$\rho_1(z) = z^2 + 2, \rho_2(z) = 2 - z^3$$



$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z$$



2.0.8. Система Анжелеско $\Delta_1 = [-3/4, 0], \Delta_2 = [z_a, 1]$

При $a = -3/4$

$$z_a = \frac{1}{1332}, K = \frac{55}{32}, R = \frac{\sqrt{37}}{4}$$

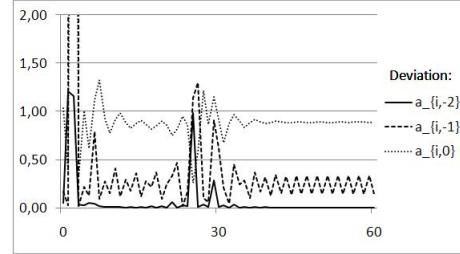
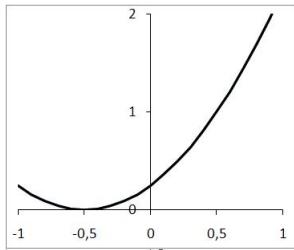
Референсный оператор

$$A_{Ang}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} - \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha^2 & \frac{1}{12} + \alpha & 1 & 0 & \dots \\ \frac{55}{5832} - \alpha^3 & \alpha^2 & \frac{1}{12} - \alpha & 1 & \dots \\ 0 & \frac{55}{5832} + \alpha^3 & \alpha^2 & \frac{1}{12} + \alpha & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

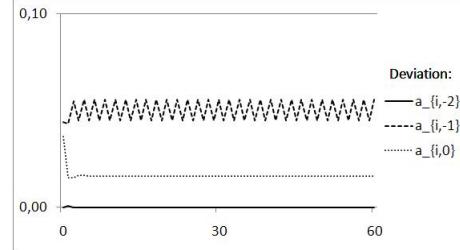
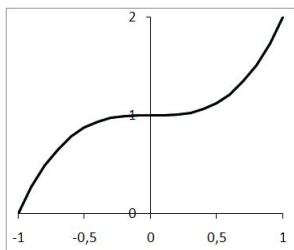
где $\alpha = \sqrt{37}/18$

Рассмотрим различные полиномиальные возмущения

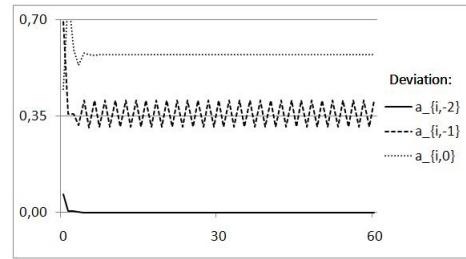
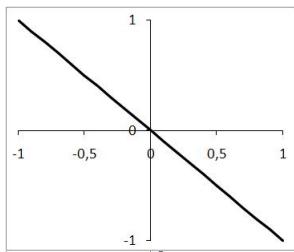
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \left(\frac{1}{2} + z\right)^2$$



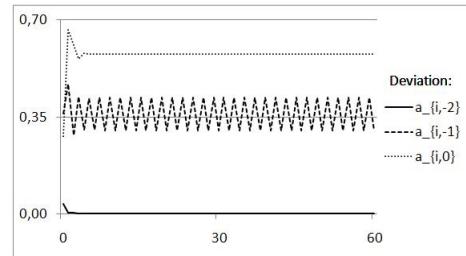
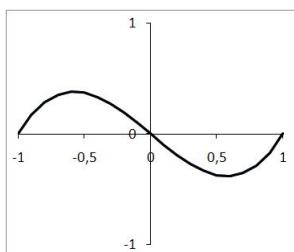
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



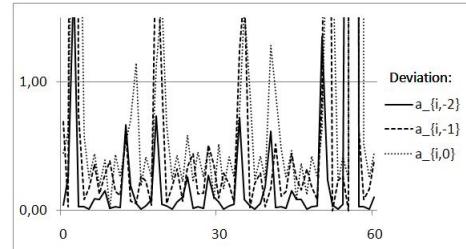
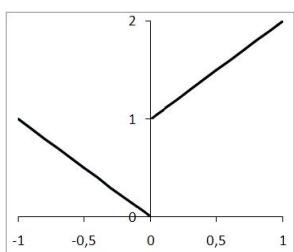
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = -z$$



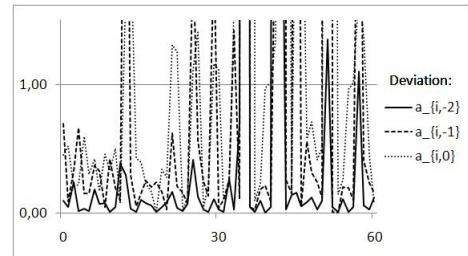
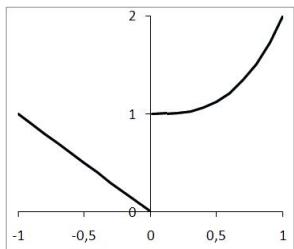
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 - z$$



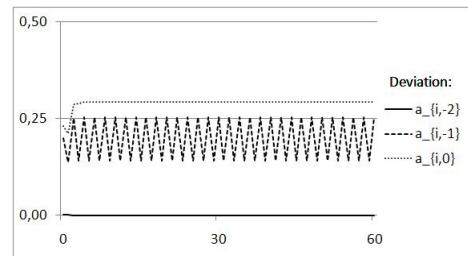
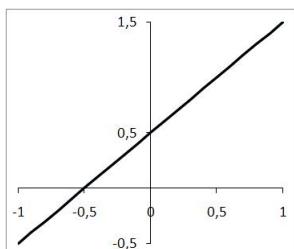
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z + 1$$



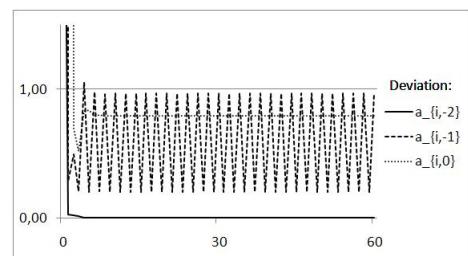
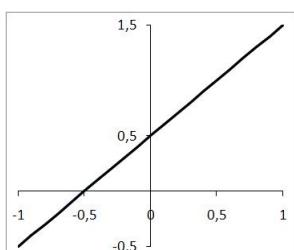
$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z^3 + 1$$



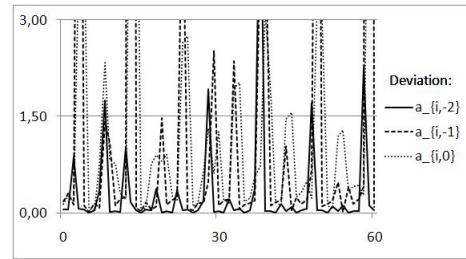
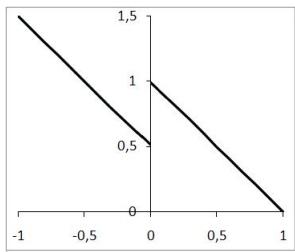
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{3}{4} + z$$



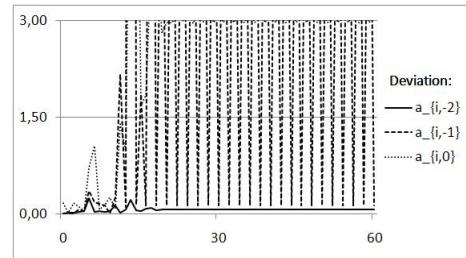
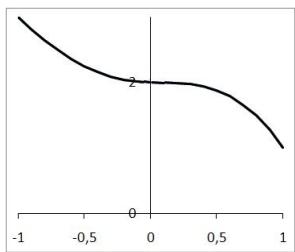
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{4} + z$$



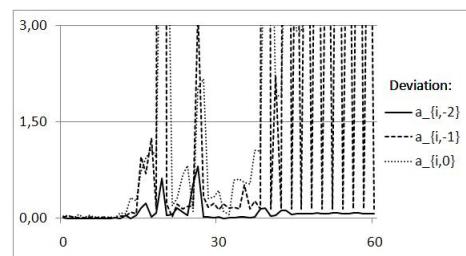
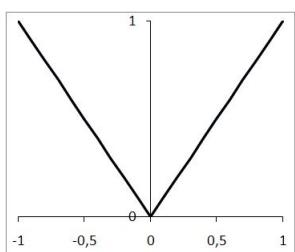
$$\rho_1(z) = \frac{1}{2} - z, \rho_2(z) = 1 - z$$



$$\rho_1(z) = z^2 + 2, \rho_2(z) = 2 - z^3$$



$$\rho_1(z) = -z, \rho_2(z) = z$$



2.0.9. Системы Пинейро

Система позитивных Борелевских мер (μ_1, \dots, μ_p) имеющих общий носитель Δ вида

$$d\mu_j(x) = x^{\alpha_0}(1-x)^{\alpha_j} dx, j = 1, \dots, p$$

где $\alpha_j > -1, \alpha_i - \alpha_j \notin \mathbf{Z}$ называется *системой Пинейро*.

2.0.10. Системы Пинейро $p = 2$

Рассмотрим системы Пинейро при $p = 2$ на общем носителе $\Delta = [0, 1]$

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &= x^{\alpha_0}(1-x)^{\alpha_1}dx \\ d\mu_2(x) &= x^{\alpha_0}(1-x)^{\alpha_2}dx \end{aligned}$$

где $\alpha_j > -1, \alpha_i - \alpha_j \notin \mathbf{Z}$

Референсный оператор имеет следующую структуру

$$A_{Pin}^0 = \begin{pmatrix} 3\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3\alpha^4 & 3\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha^6 & 3\alpha^6 & 6\alpha^2 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha^6 & 3\alpha^4 & 3\alpha^2 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{4}{27}}$

Референсный оператор Стильтеса имеет вид

$$L_{Pin}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ a_1(0) & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & a_2(0) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_5(0) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} a_{6k+1} &= \frac{(2k+1+\alpha_1+\alpha_0)(2k+1+\alpha_2+\alpha_0)(k+1+\alpha_1)}{(3k+1+\alpha_1+\alpha_0)(3k+2+\alpha_1+\alpha_0)(3k+1+\alpha_2+\alpha_0)} \\ a_{6k+2} &= \frac{(2k+1+\alpha_2+\alpha_0)(2k+1+\alpha_0)(k+\alpha_2-\alpha_1)}{(3k+1+\alpha_2+\alpha_0)(3k+2+\alpha_2+\alpha_0)(3k+2+\alpha_1+\alpha_0)} \\ a_{6k+3} &= \frac{(2k+2+\alpha_1+\alpha_0)(2k+1+\alpha_0)(k+1+\alpha_1-\alpha_2)}{(3k+2+\alpha_1+\alpha_0)(3k+3+\alpha_1+\alpha_0)(3k+2+\alpha_2+\alpha_0)} \\ a_{6k+4} &= \frac{(2k+2+\alpha_2+\alpha_0)(2k+2+\alpha_1+\alpha_0)(k+1+\alpha_2)}{(3k+2+\alpha_2+\alpha_0)(3k+3+\alpha_2+\alpha_0)(3k+3+\alpha_1+\alpha_0)} \\ a_{6k+5} &= \frac{(2k+2+\alpha_2+\alpha_0)(2k+2+\alpha_0)(k+1)}{(3k+3+\alpha_2+\alpha_0)(3k+3+\alpha_1+\alpha_0)(3k+4+\alpha_1+\alpha_0)} \\ a_{6k} &= \frac{(2k+1+\alpha_1+\alpha_0)(2k+\alpha_0)k}{(3k+\alpha_2+\alpha_0)(3k+1+\alpha_2+\alpha_0)(3k+1+\alpha_1+\alpha_0)} \end{aligned}$$

2.0.11. Система Пинейро $\Delta = [0, 1], \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1/2$

Рассмотрим случай $\Delta = [0, 1], p = 2$

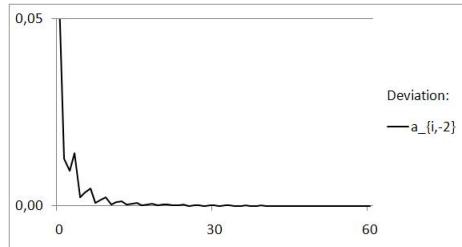
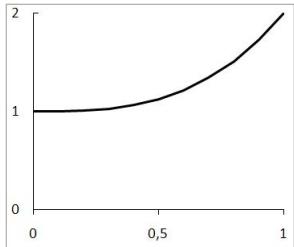
$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &= dx \\ d\mu_2(x) &= \sqrt{(1-x)}dx \end{aligned}$$

Референсный оператор Стильтеса

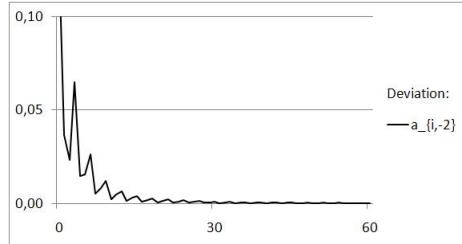
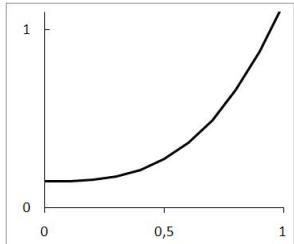
$$L_{Pin}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/15 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2/7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Рассмотрим различные полиномиальные возмущения исходных мер на примере оператора Стильтеса L_{pin}^0

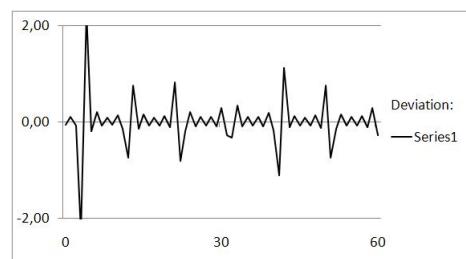
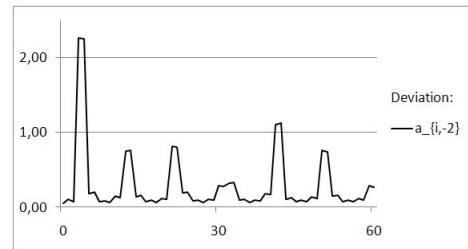
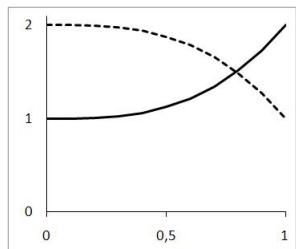
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



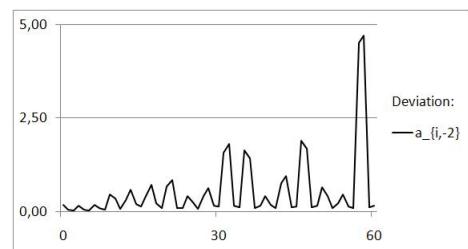
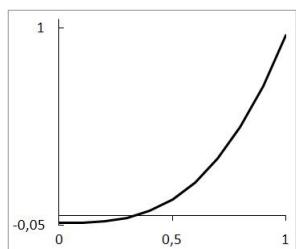
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + \frac{4}{27}$$

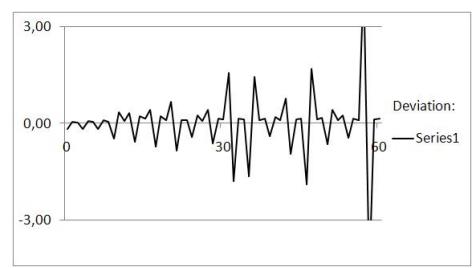


$$\rho_1(z) = z^3 + 1, \rho_2(z) = 2 - z^3$$



$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 - \frac{1}{27}$$



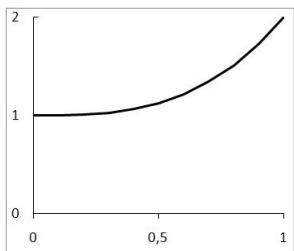


Референсный оператор

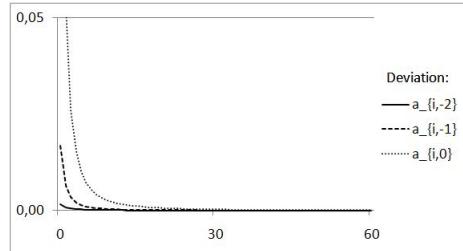
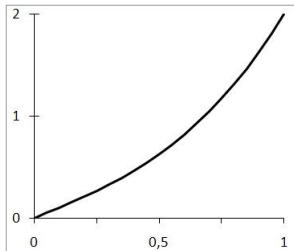
$$A_{Pin}^0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{27} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 3\left(\frac{4}{27}\right)^2 & \frac{4}{27} & 1 & 0 & \dots \\ \left(\frac{4}{27}\right)^3 & 3\left(\frac{4}{27}\right)^2 & \frac{4}{27} & 1 & \dots \\ 0 & \left(\frac{4}{27}\right)^3 & 3\left(\frac{4}{27}\right)^2 & \frac{4}{27} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Рассмотрим различные полиномиальные возмущения исходных мер на примере оператора Стильтеса A_{Pin}^0

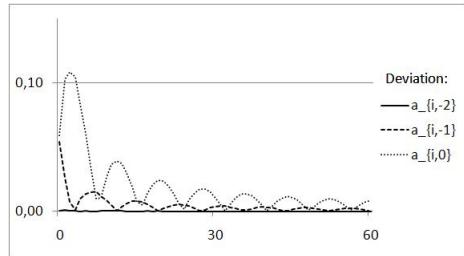
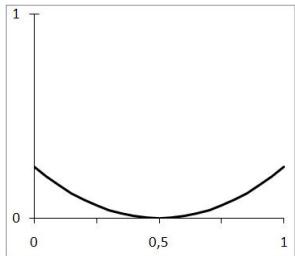
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + 1$$



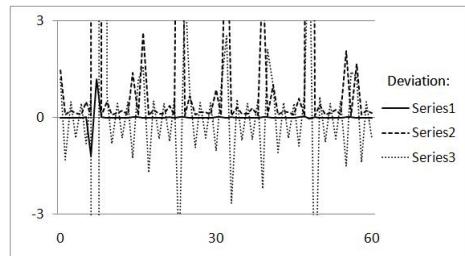
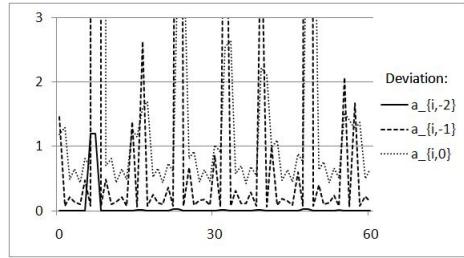
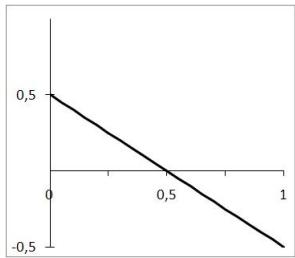
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = z^3 + z$$



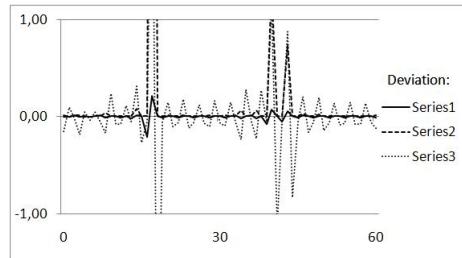
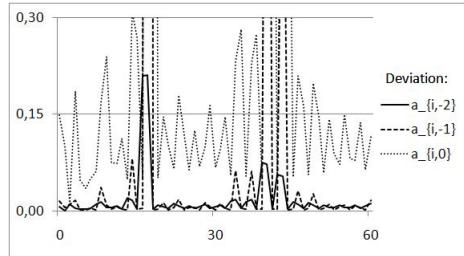
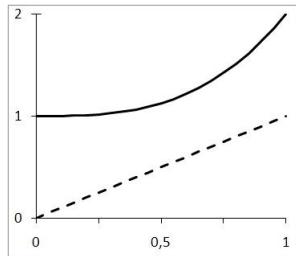
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$



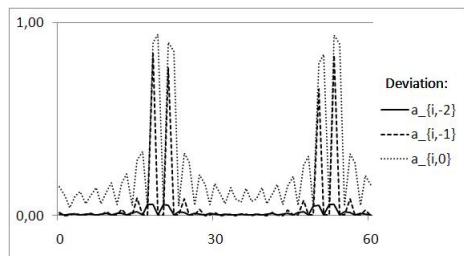
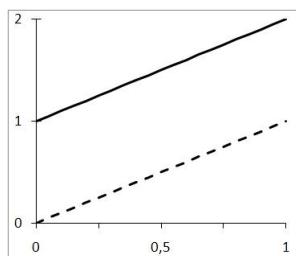
$$\rho_1(z) = \rho_2(z) = \frac{1}{2} - z$$

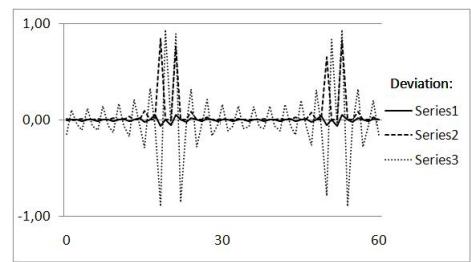


$$\rho_1(z) = z, \rho_2(z) = z^3 + 1$$



$$\rho_1(z) = z, \rho_2(z) = z + 1$$





Глава 3

Решение систем на базе матрицы Хессенберга. Метод модифицированных моментов.

Рассмотрим *матрицу Хессенберга*

$$L = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_1 & 1 & 1 & \cdots \\ d_2 & c_2 & b_2 & 1 & \cdots \\ e_3 & d_3 & c_3 & b_3 & \cdots \\ f_4 & e_4 & d_4 & c_4 & \cdots \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Рассмотрим следующее уравнение

$$\dot{L} = [(L^{m+1})_-, L] \quad (3.2)$$

где $(L)_-$ - означает нижняя треугольная часть исходной матрицы.

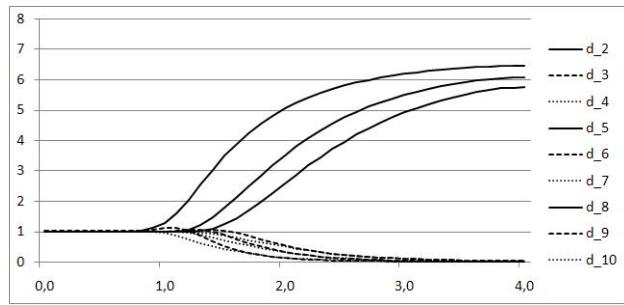
3.0.1. Система Богоявленского

При $m = 1, b_j = c_j = 0$ уравнение (3.2) описывает *систему Богоявленского*.

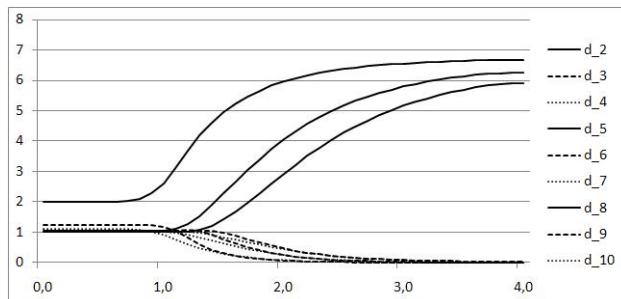
$$\dot{d}_n = d_n(d_{n+1} + d_{n+2} - d_{n-1} - d_{n-2})$$

Рассмотрим решение системы Богоявленского для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0.1, со следующими начальными условиями $d_j = 1$

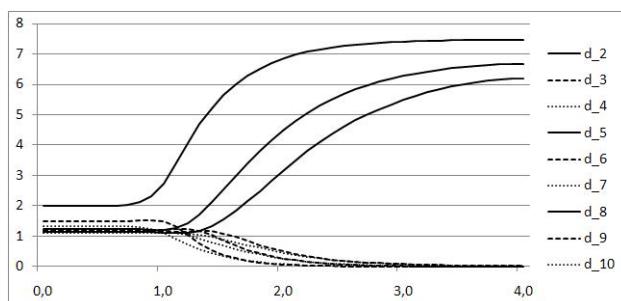
$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$



Возмущение $d_{k+1} = 1 + \frac{1}{k^2}$



Возмущение $d_{k+1} = 1 + \frac{1}{k}$



3.0.2. Векторная система Тода I-го типа

$$L = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_1 & 1 & 1 & \cdots \\ d_2 & c_2 & b_2 & 1 & \cdots \\ 0 & d_3 & c_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & d_4 & c_4 & \cdots \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

При $m = 0$ уравнение $\dot{L} = [(L)_-, L] = (L)_-L - L(L)_-$ описывает векторную систему Тода I-го типа.

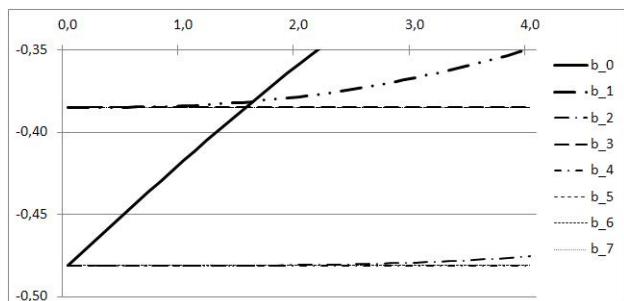
$$\begin{aligned} \dot{b}_n &= c_n - c_{n+1} \\ \dot{c}_n &= c_n(b_{n-1} - b_n) + d_n - d_{n+1} \\ \dot{d}_n &= d_n(b_{n-2} - b_n) \end{aligned}$$

Система Никишина

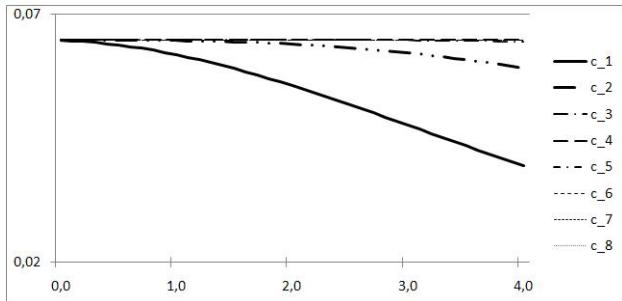
Рассмотрим решение системы Тода I-го типа для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0.1, с начальными условиями в виде системы Никишина

$$A_{Nik} = \begin{pmatrix} -0.481125 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.648148 & -0.384900 & 1 & 1 & \cdots \\ -0.712778 & 0.648148 & -0.481125 & 1 & \cdots \\ 0 & -0.890973 & 0.648148 & -0.384900 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

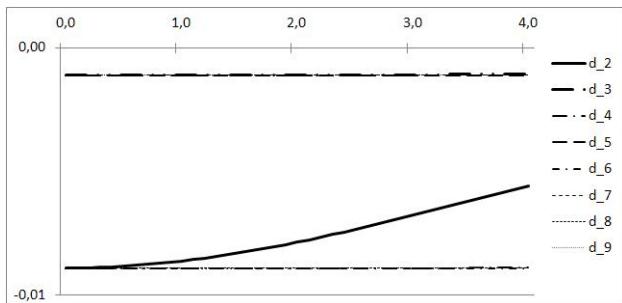
Для b_k диагонали



Для c_k диагонали



Для d_k диагонали

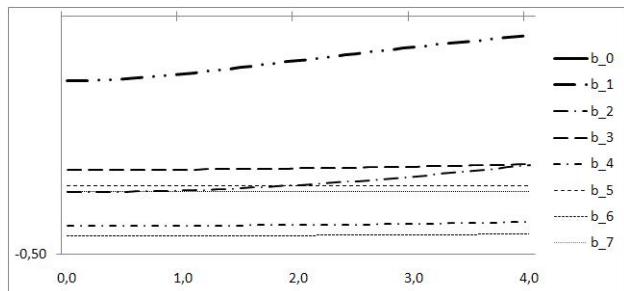


Система Никишина с возмущением b_k диагонали $\frac{1}{k^2}$ весом

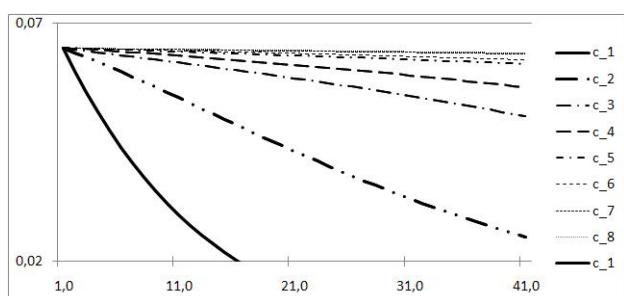
Рассмотрим решение системы Тода I-го типа для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0.1, с начальными условиями в виде системы Никишина с возмущением b_k диагонали $\frac{1}{k^2}$ весом

$$A_{Nik+\frac{1}{k^2}} = \begin{pmatrix} 0.518875 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.648148 & -0.134900 & 1 & 1 & \cdots \\ -0.712778 & 0.648148 & -0.370014 & 1 & \cdots \\ 0 & -0.890973 & 0.648148 & -0.322400 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

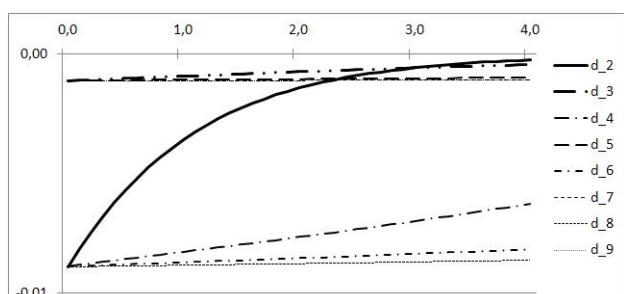
Для b_k диагонали



Для c_k диагонали



Для d_k диагонали

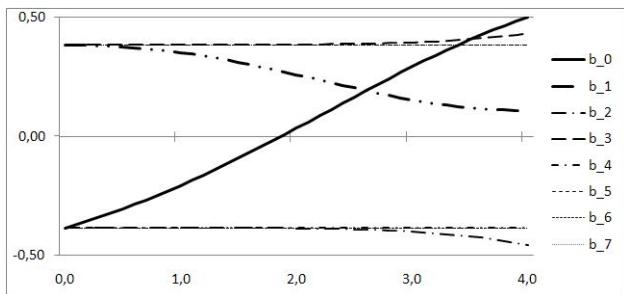


Система Анжелеско

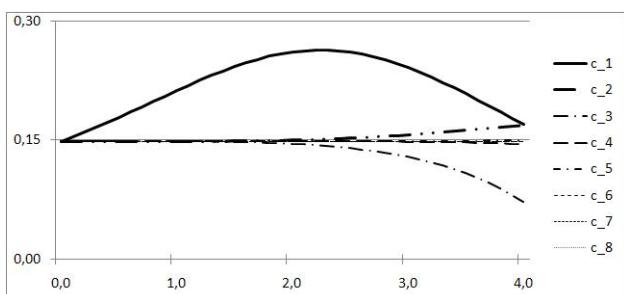
Рассмотрим решение системы Тода I-го типа для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0.1, с начальными условиями в виде системы Анжелеско

$$A_{Ang} = \begin{pmatrix} -0.384900 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.148148 & 0.384900 & 1 & 1 & \cdots \\ -0.570222 & 0.148148 & -0.384900 & 1 & \cdots \\ 0 & 0.570222 & 0.148148 & 0.384900 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

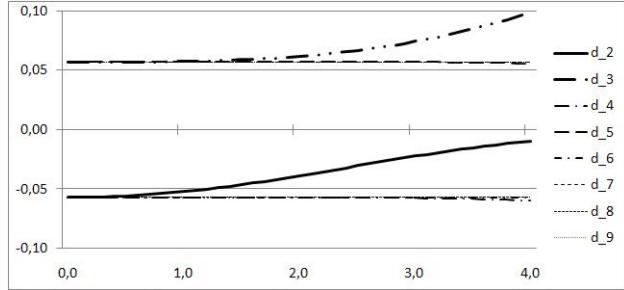
Для b_k диагонали



Для c_k диагонали



Для d_k диагонали

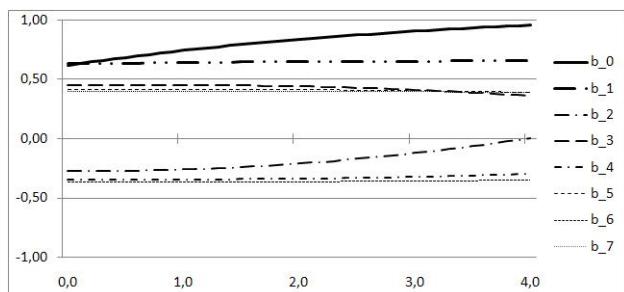


Система Анжелеско с возмущением b_k диагонали $\frac{1}{k^2}$ весом

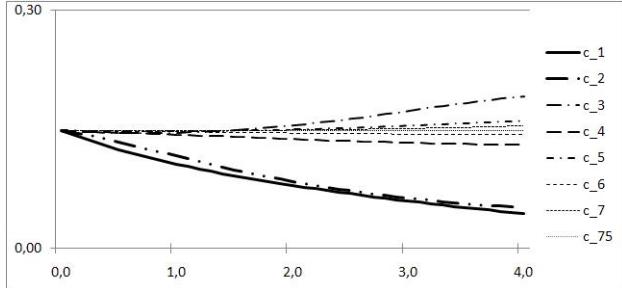
Рассмотрим решение системы Тода I-го типа для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0.1, с начальными условиями в виде системы Анжелеско

$$A_{Ang+\frac{1}{k^2}} = \begin{pmatrix} 0.616000 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.148148 & 0.634900 & 1 & 1 & \cdots \\ -0.570222 & 0.148148 & -0.273789 & 1 & \cdots \\ 0 & 0.570222 & 0.148148 & 0.447400 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

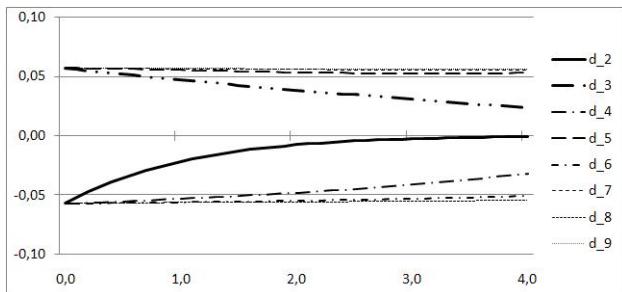
Для b_k диагонали



Для c_k диагонали



Для d_k диагонали



3.0.3. Векторная система Тода II-го типа

При $m = 1$ уравнение $\dot{L} = [(L^2)_-, L] = (L^2)_-L - L(L^2)_-$ описывает систему Тода II-го типа.

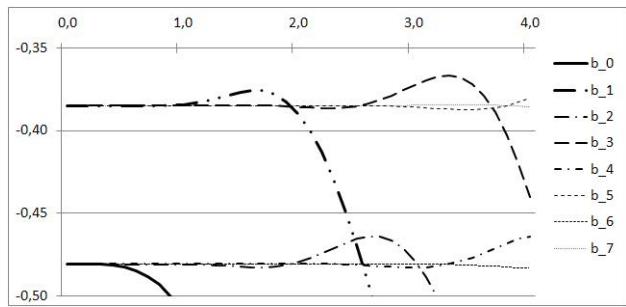
$$\begin{aligned}\dot{b}_n &= b_n(c_n - c_{n+1}) + b_{n-1}c_n - b_{n+1}c_{n+1} + d_n - d_{n+2} \\ \dot{c}_n &= c_n(b_{n-1}^2 - b_n^2 + c_{n-1} - c_{n+1}) + d_n(b_{n-2} + b_{n-1}) - d_{n+1}(b_n + b_{n+1}) \\ \dot{d}_n &= d_n(b_{n-2}^2 - b_n^2 + c_{n-2} + c_{n-1} - c_n - c_{n+1})\end{aligned}$$

Система Никишина

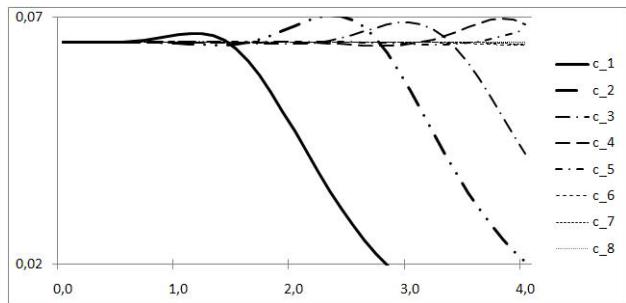
Рассмотрим решение системы Тода II-го типа для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0,1, с начальными условиями в виде системы Никишина

$$A_{Nik} = \begin{pmatrix} -0.481125 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.648148 & -0.384900 & 1 & 1 & \cdots \\ -0.712778 & 0.648148 & -0.481125 & 1 & \cdots \\ 0 & -0.890973 & 0.648148 & -0.384900 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

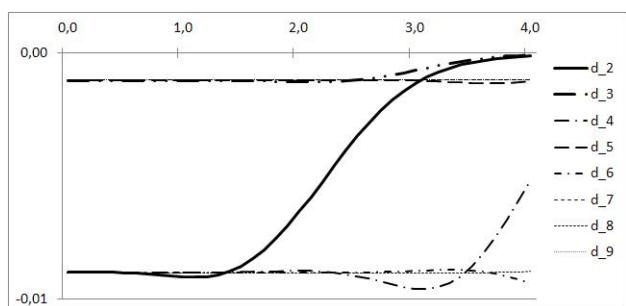
Для b_k диагонали



Для c_k диагонали



Для d_k диагонали

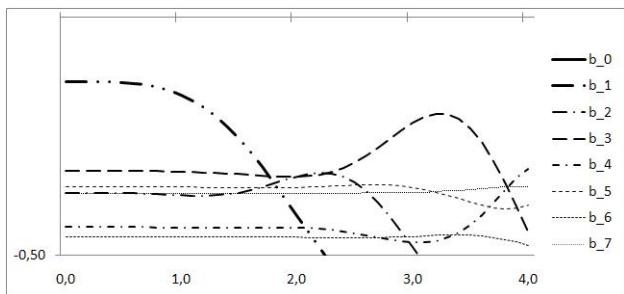


Система Никишина с возмущением b_k диагонали $\frac{1}{k^2}$ весом

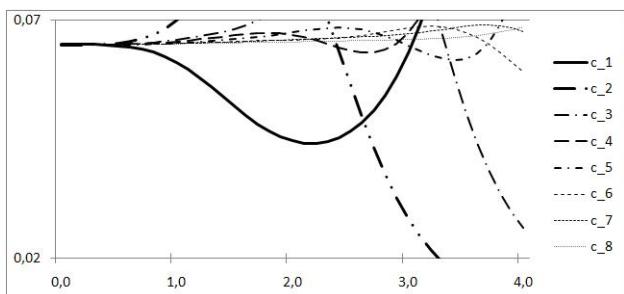
Рассмотрим решение системы Тода II-го типа для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0.1, с начальными условиями в виде системы Никишина с возмущением b_k диагонали $\frac{1}{k^2}$ весом

$$A_{Nik + \frac{1}{k^2}} = \begin{pmatrix} 0.518875 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.648148 & -0.134900 & 1 & 1 & \cdots \\ -0.712778 & 0.648148 & -0.370014 & 1 & \cdots \\ 0 & -0.890973 & 0.648148 & -0.322400 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

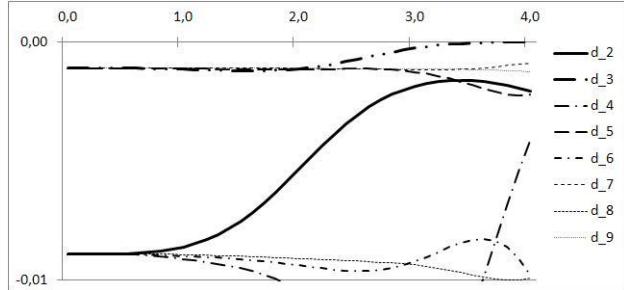
Для b_k диагонали



Для c_k диагонали



Для d_k диагонали

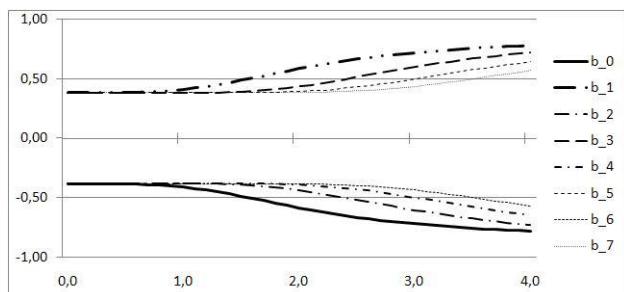


Система Анжелеско

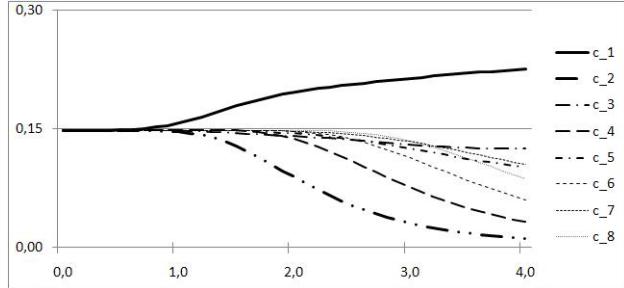
Рассмотрим решение системы Тода II-го типа для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0.1, с начальными условиями в виде системы Анжелеско

$$A_{Ang} = \begin{pmatrix} -0.384900 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0.148148 & 0.384900 & 1 & 1 & \dots \\ -0.570222 & 0.148148 & -0.384900 & 1 & \dots \\ 0 & 0.570222 & 0.148148 & 0.384900 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

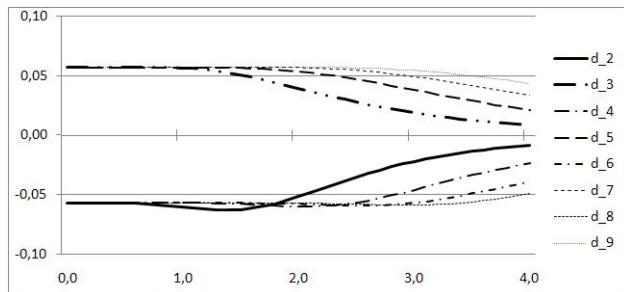
Для b_k диагонали



Для c_k диагонали



Для d_k диагонали

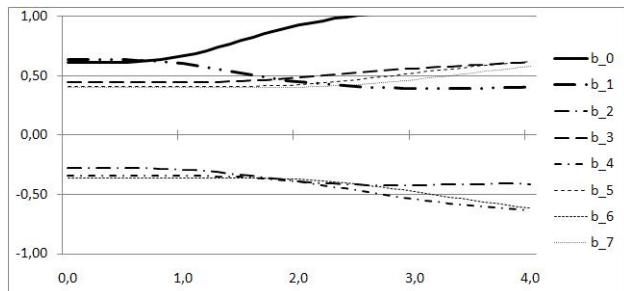


Система Анжелеско с возмущением b_k диагонали $\frac{1}{k^2}$ весом

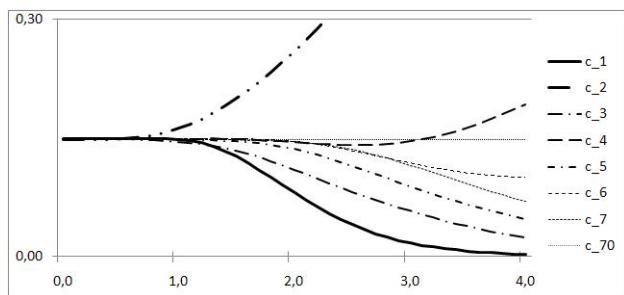
Рассмотрим решение системы Тода I-го типа для $t = 0, \dots, 4$ с шагом 0.1, с начальными условиями в виде системы Анжелеско

$$A_{Ang+\frac{1}{k^2}} = \begin{pmatrix} 0.616000 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.148148 & 0.634900 & 1 & 1 & \cdots \\ -0.570222 & 0.148148 & -0.273789 & 1 & \cdots \\ 0 & 0.570222 & 0.148148 & 0.447400 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

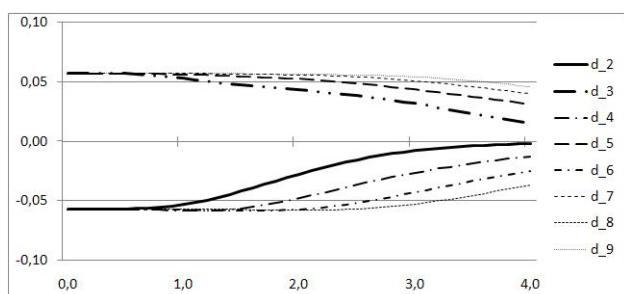
Для b_k диагонали



Для c_k диагонали



Для d_k диагонали



3.0.4. "Другие" системы $p = 2$

Борелевские меры

$$\begin{aligned} d\mu_1 &= \|(x-a)^\alpha(x-1)^\beta x^\gamma\|dx \quad \Delta_1 = [a, 0] \\ d\mu_2 &= \|(x-a)^\alpha(x-1)^\beta x^\gamma\|dx \quad \Delta_2 = [0, 1] \end{aligned}$$

резольвентные функции

$$S_j(z) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha_1} d\mu_j(x)}{z-x}, \quad j = 1, \dots, p$$

$$S_j(z) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha_2} d\mu_j(x)}{z-x}, \quad j = 1, \dots, p$$

Глава 4

Прямая спектральная задача. Вычисления спектральных мер через определители Турана.

4.1. Системы Стилтьеса $p = 2$

Рассмотрим семейство операторов выраженных матрицей

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Резольвентные функции (S_1, S_2) оператора L называются *функциями Стилтьеса*

$$S_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\mu_1(x)}{z - x}, \quad S_2(z) = \int_0^\infty \frac{d\mu_2(x)}{z - x},$$

где

$$d\mu_1 = \rho_1(x)dx \quad d\mu_2 = \rho_2(x)dx$$

спектральные меры оператора L . Прямая спектральная задача состоит определении спектральных мер по заданной матрице оператора. Спектральные свойства оператора L тесно связаны с асимптотическими свойствами совместно ортогональных многочленов. Совместно ортогональные многочлены для оператора L определяются рекуррентным соотношением:

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - a_{n-1}Q_{n-2}(x), \quad Q_0(x) = 1, Q_1(x) = x, Q_2(x) = x^2$$

Соответствующие совместно ортогональные многочлены, ассоциированные многочлены 1-го и 2-го рода:

$$P_{n+1}^{(1)}(x) = xP_n^{(1)}(x) - a_{n-2}P_{n-2}^{(1)}(x), \quad P_0^{(1)}(x) = 0, P_1^{(1)}(x) = 1, P_2^{(1)}(x) = x$$

$$P_{n+1}^{(2)}(x) = xP_n^{(2)}(x) - a_{n-3}P_{n-2}^{(2)}(x), \quad P_0^{(2)}(x) = 0, P_1^{(2)}(x) = 0, P_2^{(2)}(x) = 1$$

При существовании $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ важную роль играет алгебраическая функция

$$F(w, z) = w^3(z) - zw^2(z) + a$$

Функция $F(w, z) = 0$ имеет 3 корня на отрезке $z \in [0, z_0]$. Пусть w_3 - действительный, w_1, w_2 - два комплексно-сопряженных.

Определители Турана для системы Стилтьеса на отрезке $x \in [0, z_0]$ определяются как:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} Q_n(x) & Q_{n+1}(x) & w_3^2(x) \\ Q_{n-1}(x) & Q_n(x) & w_3(x) \\ Q_{n-2}(x) & Q_{n-1}(x) & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_n^{(1)}(x) = \begin{vmatrix} Q_n(x) & P_n^{(1)}(x) & w_3^2(x) \\ Q_{n-1}(x) & P_{n-1}^{(1)}(x) & w_3(x) \\ Q_{n-2}(x) & P_{n-2}^{(1)}(x) & 1 \end{vmatrix} \quad D_n^{(2)}(x) = \begin{vmatrix} Q_n(x) & P_n^{(2)}(x) & w_3^2(x) \\ Q_{n-1}(x) & P_{n-1}^{(2)}(x) & w_3(x) \\ Q_{n-2}(x) & P_{n-2}^{(2)}(x) & 1 \end{vmatrix}$$

Точка z_0 - точка ветвления функции $F(w, z)$, которые определяются как решения системы:

$$\begin{cases} F(w, z) = 0 \\ \frac{\partial F(w, z)}{\partial w} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Выразим спектральные меры через весовые функции $\rho_1(x), \rho_2(x)$

$$d\mu_1(x) = \rho_1(x)dx, \quad d\mu_2(x) = \rho_2(x)dx$$

Исходя из свойств оператора L весовые функции $\rho_1(x), \rho_2(x)$ абсолютно непрерывны на звездоподобном множестве $\{[0, z_0]\}$, состоящем из отрезков

$$[0, z_0], [0, z_0 e^{2\pi/3}], [0, z_0 e^{4\pi/3}]$$

Весовые функции имеют следующее выражение через определители Турана

$$\rho_1^T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(w_2 - w_1)}{2\pi i} \frac{D_n^{(1)}(x)}{D_n(x)} \quad \rho_2^T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(w_2 - w_1)}{2\pi i} \frac{D_n^{(2)}(x)}{D_n(x)} \quad (4.3)$$

Существует явная формула для спектральных мер через корни алгебраической функции $F(w, z)$.

$$\rho_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{w_2 - w_1}{w_1 w_2}, \quad \rho_2(x) = \rho_1(x) \frac{w_1 + w_2}{w_1 w_2}$$

4.1.1. Система Стилтьеса $p = 2, a_i = 1$

Рассмотрим случай для оператора выраженного матрицей

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Рассмотрим соответствующую алгебраическую функцию

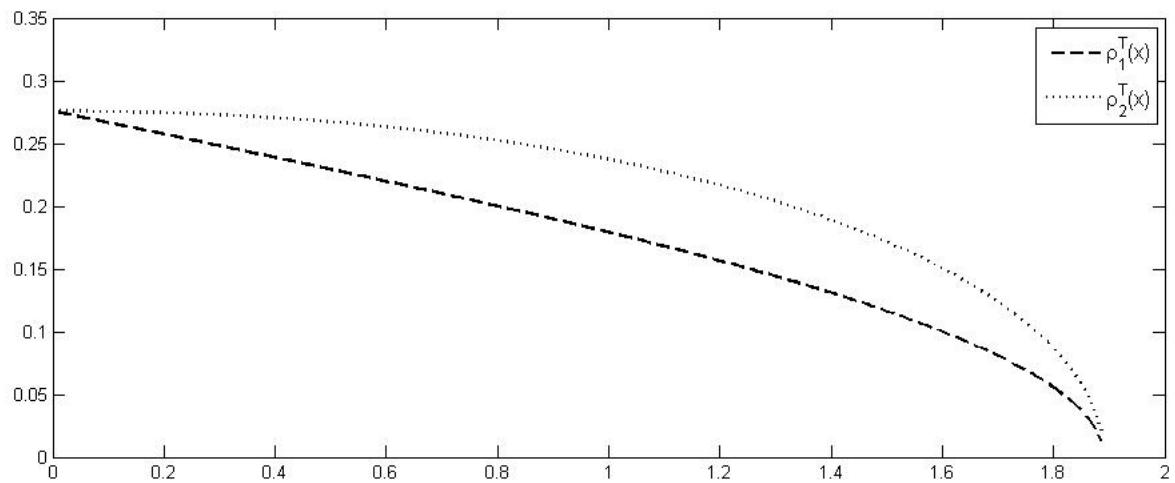
$$w^3 - zw^2 + 1 = 0, z \rightarrow \infty,$$

Точка ветвления функции на действительной оси $z_0 = \sqrt[3]{27/4}$

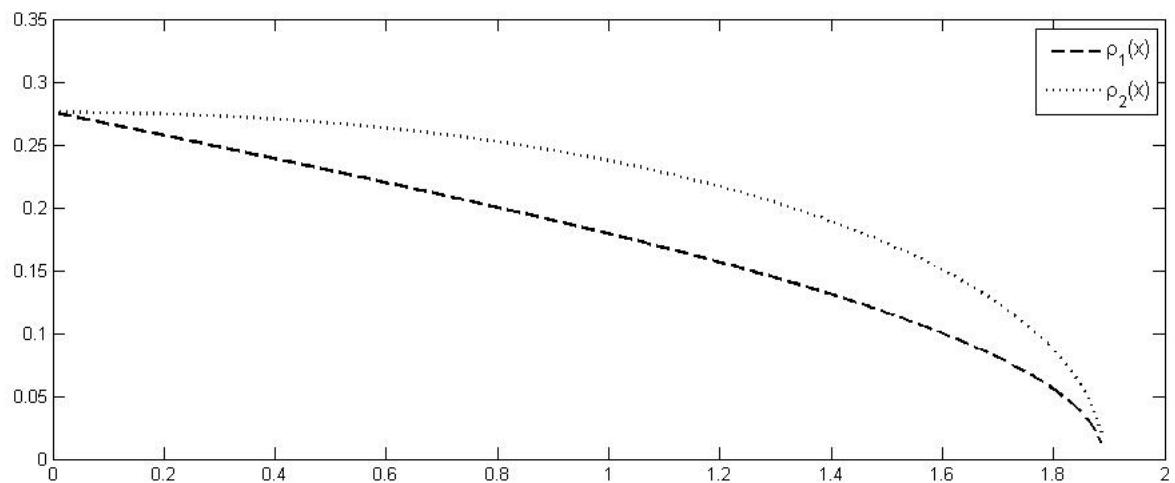
$$\begin{cases} w^3 - zw^2 + 1 = 0 \\ 3w^2 - 2zw = 0, w = 2/3z \end{cases} \quad (4.5)$$

Функция имеет 3 корня на отрезке $[0, \sqrt[3]{27/4}]$: w_3 - действительный, w_1, w_2 - два комплексно-сопряженных.

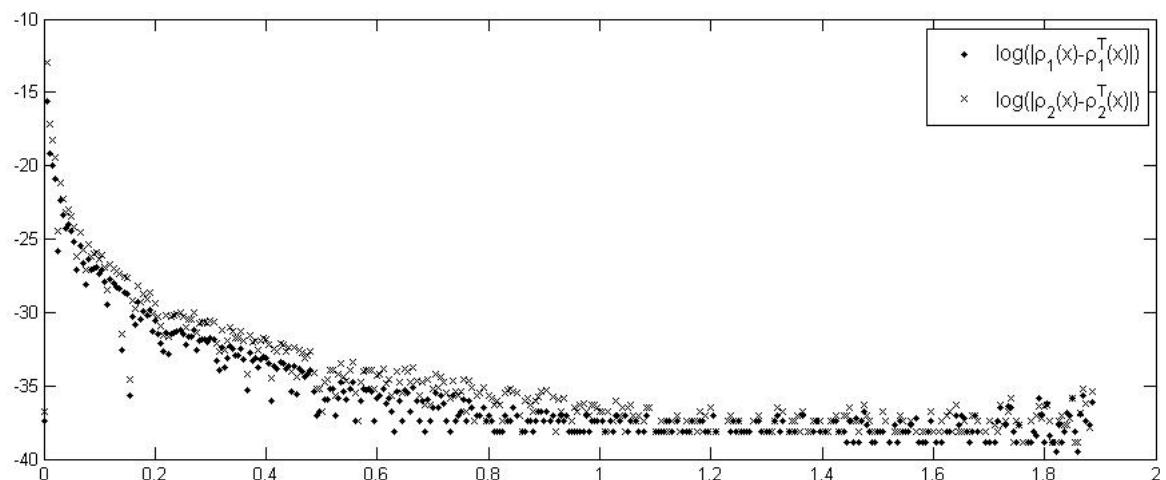
Следующий график показывает весовые функции $\rho_1^T(x), \rho_2^T(x)$ вычисленные через определители Турана (степень многочленов $n = 50$):



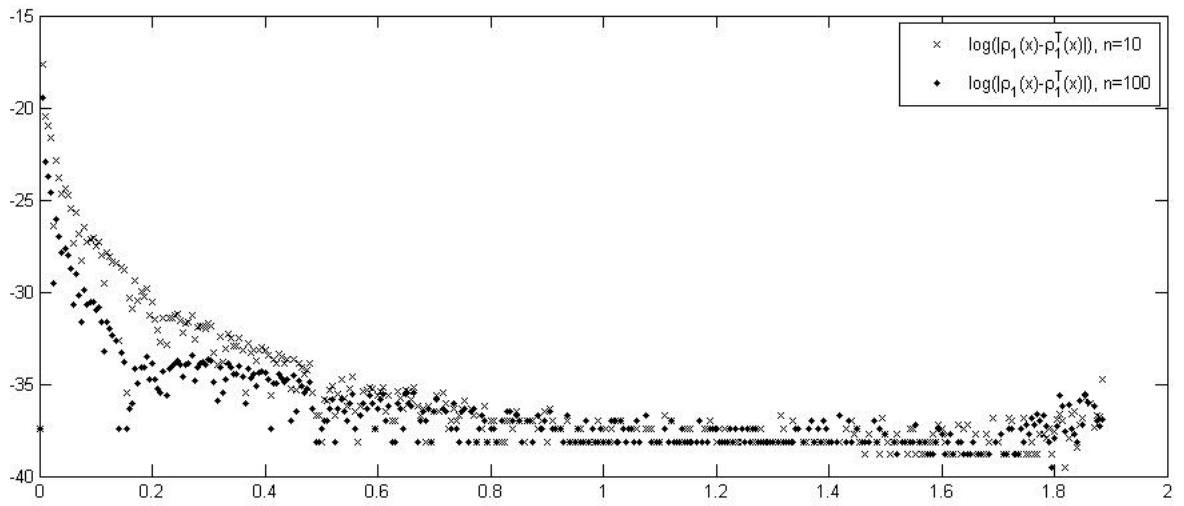
Весовые функции, вычисленные через корни алгебраической функции:



Погрешность вычислений весовых функций через определители Турана и через корни алгебра-



Погрешность вычислений весовой функций $\rho_1(x)$ в зависимости от степени определителей Турана n



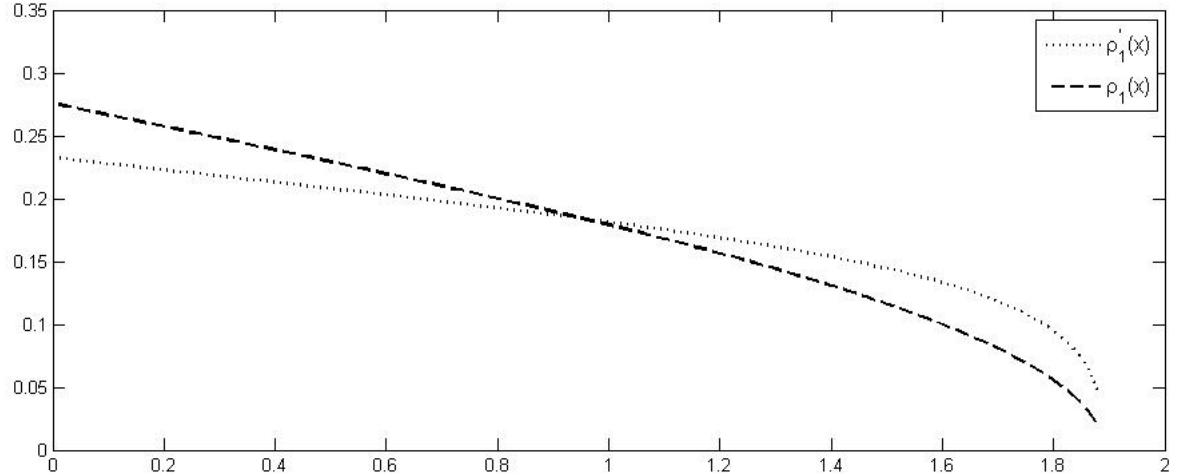
Рассмотрим возмущения исходного оператора

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

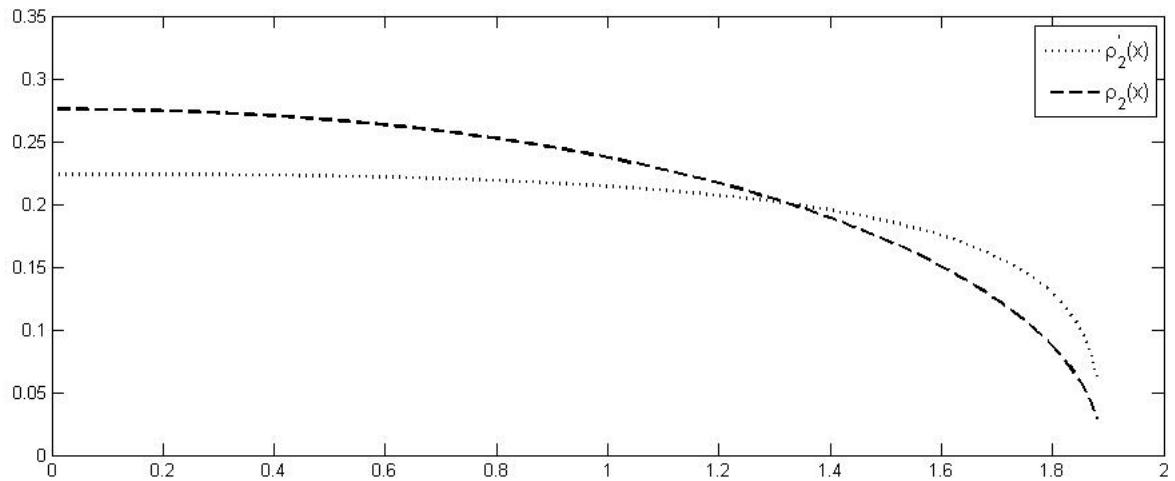
Соответствующие спектральные меры $d\mu'_1(x) = \rho'_1(x)dx, d\mu'_2(x) = \rho'_2(x)dx$

Возмущение $a_n = 1 + \frac{1}{4n^2}$

Весовая функция $\rho'_1(x)$ для возмущения $a_n = 1 + \frac{1}{4n^2}$ выглядит следующим образом относительно референсной $\rho_1(x)$

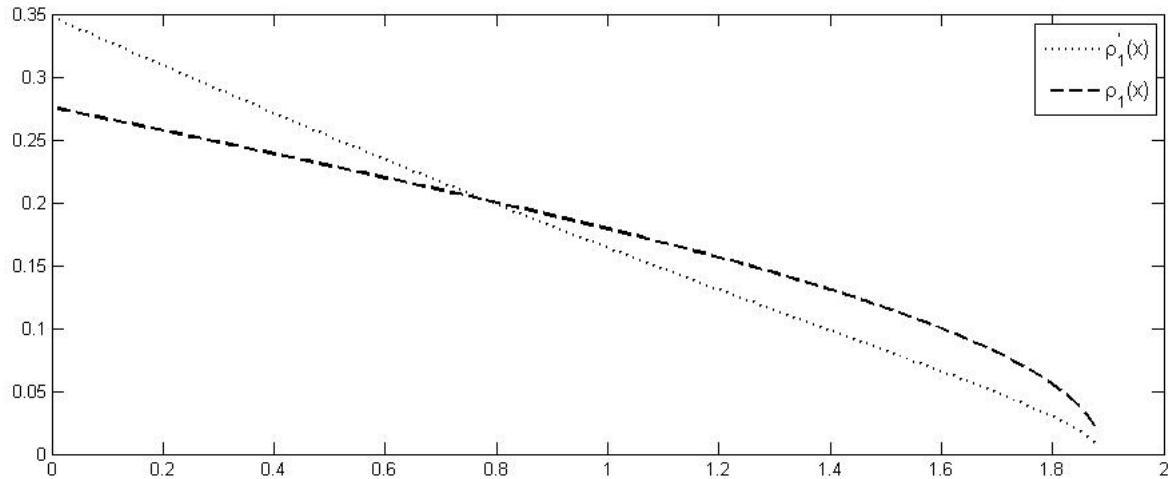


соответствующая весовая функция $\rho'_2(x)$

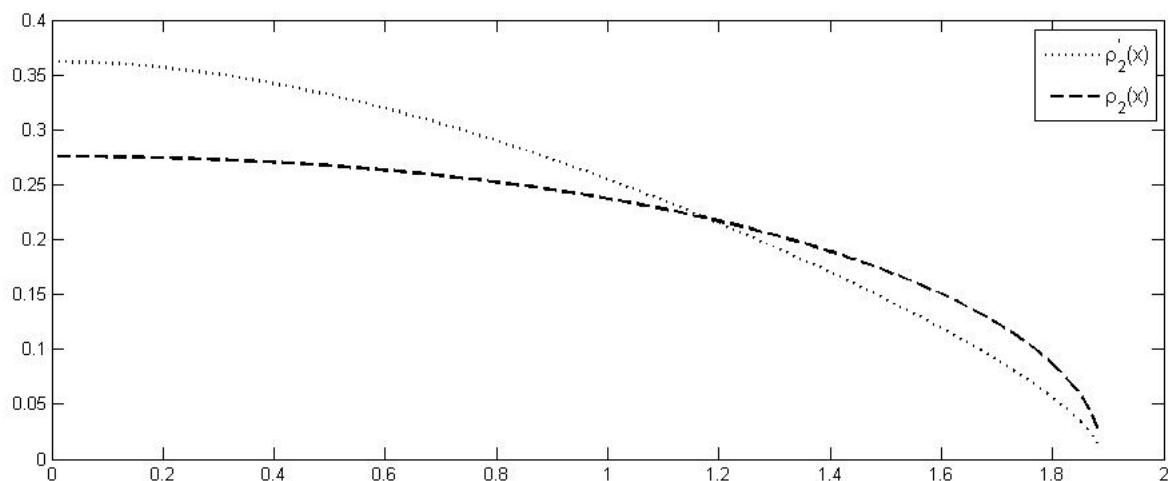


Возмущение $a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$

Весовая функция $\rho_1(x)'$ для возмущения $a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$ выглядит следующим образом:

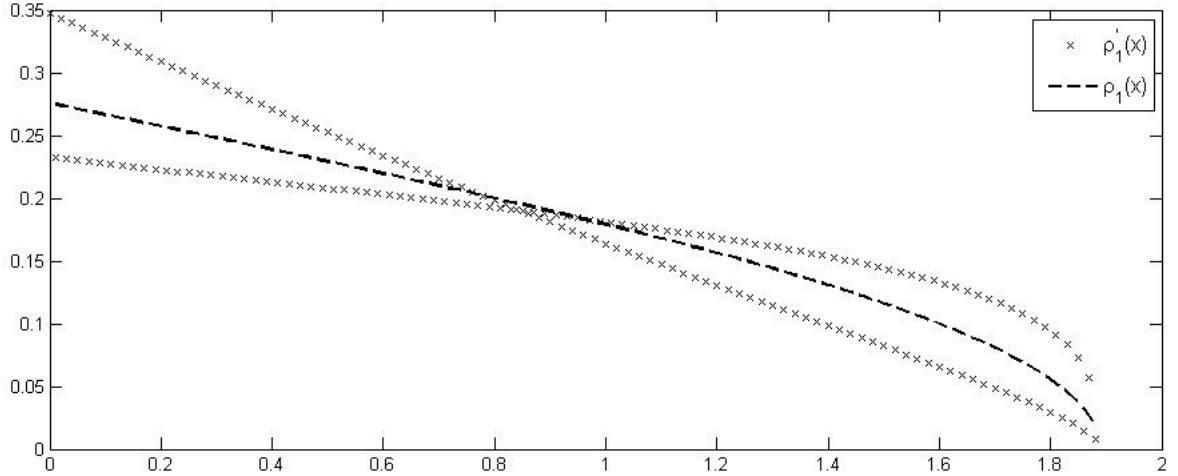


соответствующая весовая функции $\rho_2'(x)$

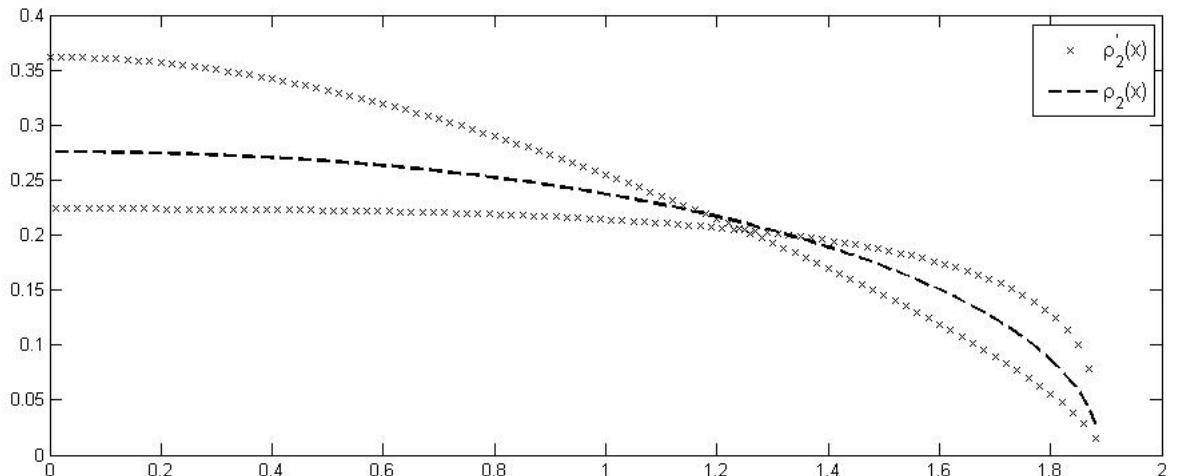


Возмущение $a_n = 1 \pm \frac{1}{4n^2}$

Весовая функция $\rho'_1(x)$



весовая функция $\rho'_2(x)$



4.1.2. Система Стилтьеса $p = 2, a_i = 2/3$

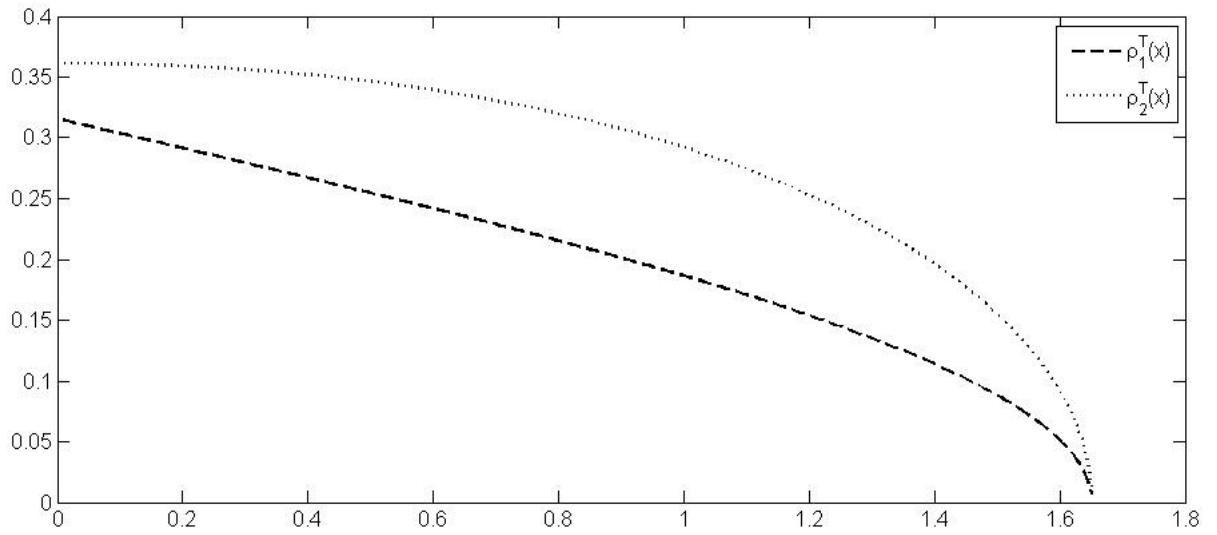
Рассмотрим случай для следующего оператора.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 2/3 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Соответствующая алгебраическая функция на комплексной плоскости $z \in [0, z_0]$, где точка ветвления $z_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot \frac{27}{4}} = 1.651$:

$$F(w, z) = w^3 - zw^2 + 2/3$$

Следующий график показывает соответствующие весовые функции (для степени многочленов $n = 50$)



4.1.3. Система Стильеса $p = 2, a_i = 4/27$

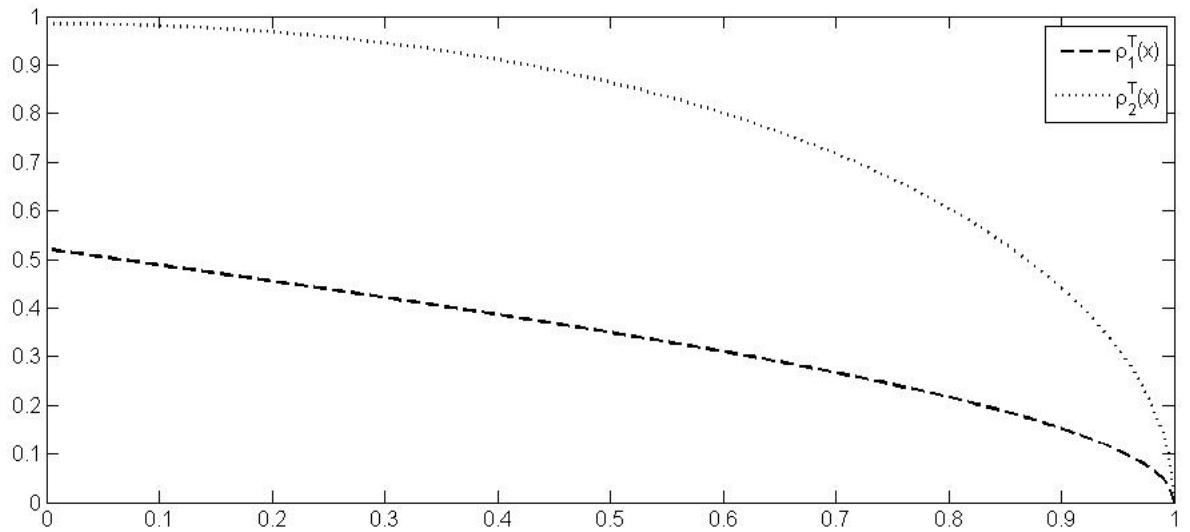
Рассмотрим случай референсного оператора для систем Пинейро.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 4/27 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 4/27 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Соответствующая алгебраическая функция на комплексной плоскости $z \in [0, z_0]$, где точка ветвления $z_0 = 1$:

$$F(w, z) = w^3 - zw^2 + 4/27$$

Следующий график показывает соответствующие весовые функции (для степени многочленов $n = 50$)



4.2. Системы Пинейро (разреженный оператор Стилтьеса)

$$p = 2, \Delta = [0, 1]$$

Рассмотрим систему спектральных мер, имеющих общий носитель $\Delta = [0, 1]$

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &= \rho_1(x)dx = x^{\alpha_1}(1-x)^{\alpha_0}dx \\ d\mu_2(x) &= \rho_2(x)dx = x^{\alpha_2}(1-x)^{\alpha_0}dx \end{aligned}$$

где $\alpha_j > -1, \alpha_i - \alpha_j \notin \mathbf{Z}$, для которой

$$\rho_1(x), \rho_2(x), x\rho_1(x), x\rho_2(x), \dots, x^n\rho_1(x), \dots$$

образуют систему Марковских функций.

Такая система называется *системой Пинейро* размерности $p = 2$

Резольвентные функции имеют вид:

$$S_1(z) = \int_{\Delta} \frac{d\mu_1(x)}{x-z}, S_2(z) = \int_{\Delta} \frac{d\mu_2(x)}{x-z}$$

Известен соответствующий "разреженный" оператор для систем Пинейро

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

для которых известны формулы коэффициентов при $a_n > 0$

$$\begin{aligned} a_{6k+1} &= \frac{(2k+1+\alpha_1+\alpha_0)(2k+1+\alpha_2+\alpha_0)(k+1+\alpha_1)}{(3k+1+\alpha_1+\alpha_0)(3k+2+\alpha_1+\alpha_0)(3k+1+\alpha_2+\alpha_0)} \\ a_{6k+2} &= \frac{(2k+1+\alpha_2+\alpha_0)(2k+1+\alpha_0)(k+\alpha_2-\alpha_1)}{(3k+1+\alpha_2+\alpha_0)(3k+2+\alpha_2+\alpha_0)(3k+2+\alpha_1+\alpha_0)} \\ a_{6k+3} &= \frac{(2k+2+\alpha_1+\alpha_0)(2k+1+\alpha_0)(k+1+\alpha_1-\alpha_2)}{(3k+2+\alpha_1+\alpha_0)(3k+3+\alpha_1+\alpha_0)(3k+2+\alpha_2+\alpha_0)} \\ a_{6k+4} &= \frac{(2k+2+\alpha_2+\alpha_0)(2k+2+\alpha_1+\alpha_0)(k+1+\alpha_2)}{(3k+2+\alpha_2+\alpha_0)(3k+3+\alpha_2+\alpha_0)(3k+3+\alpha_1+\alpha_0)} \\ a_{6k+5} &= \frac{(2k+2+\alpha_2+\alpha_0)(2k+2+\alpha_0)(k+1)}{(3k+3+\alpha_2+\alpha_0)(3k+3+\alpha_1+\alpha_0)(3k+4+\alpha_1+\alpha_0)} \\ a_{6k} &= \frac{(2k+1+\alpha_1+\alpha_0)(2k+\alpha_0)k}{(3k+\alpha_2+\alpha_0)(3k+1+\alpha_2+\alpha_0)(3k+1+\alpha_1+\alpha_0)} \end{aligned}$$

Соответствующие резольвентные функции

$$\overline{S_1}(z) = z^2 S_1(z^3) = z^2 \int_{\Delta} \frac{d\mu_1(x)}{x-z^3},$$

$$\overline{S_2}(z) = z^2 S_2(z^3) = z^2 \int_{\Delta} \frac{d\mu_2(x)}{x-z^3}$$

Меры с весовыми функциями имеют вид

$$d\overline{\mu_1}(x) = \rho_1(x^3)d\mu_1(x^3), \quad d\overline{\mu_2}(x) = \rho_2(x^3)d\mu_2(x^3)$$

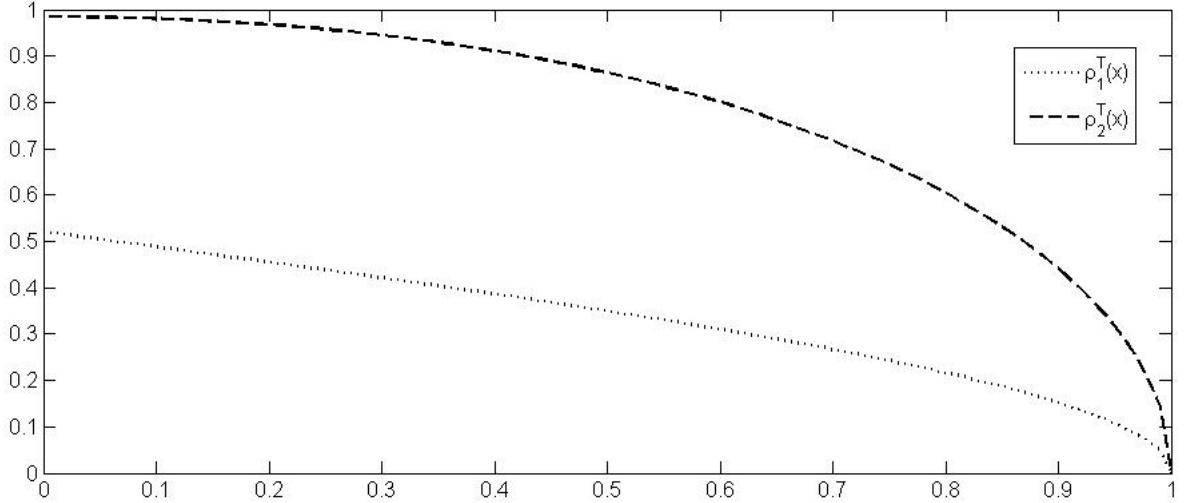
Доказано, что все операторы L систем Пинейро являются компактным возмущением следующего оператора. Соответствующий референсный оператор $\alpha = \sqrt{4/27}$

$$L^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \alpha^2 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Соответствующая алгебраическая функция с точкой ветвления $z_0 = 1$

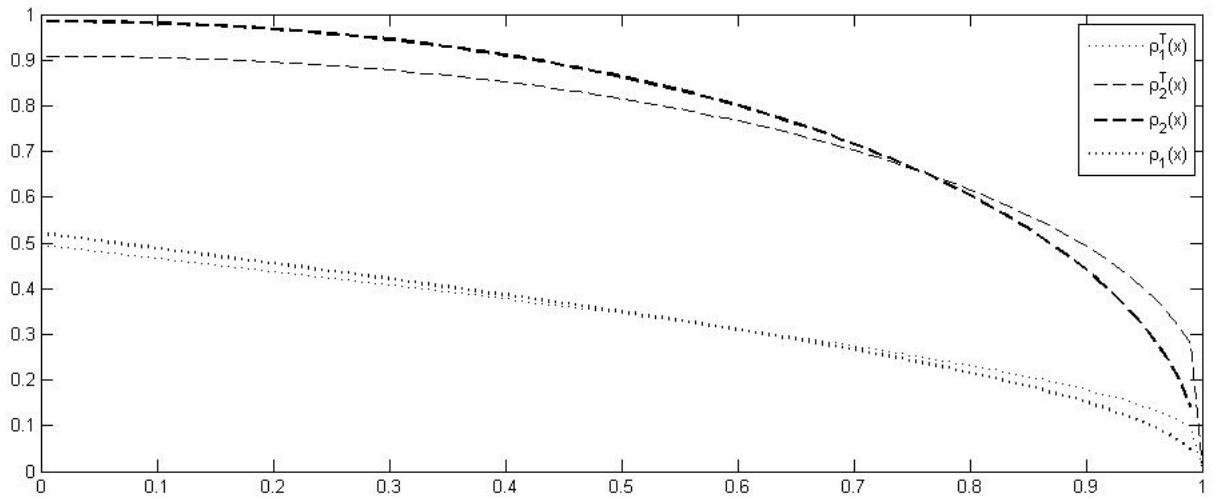
$$F(w, z) = w^3 - zw^2 + \alpha^2$$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного разреженного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



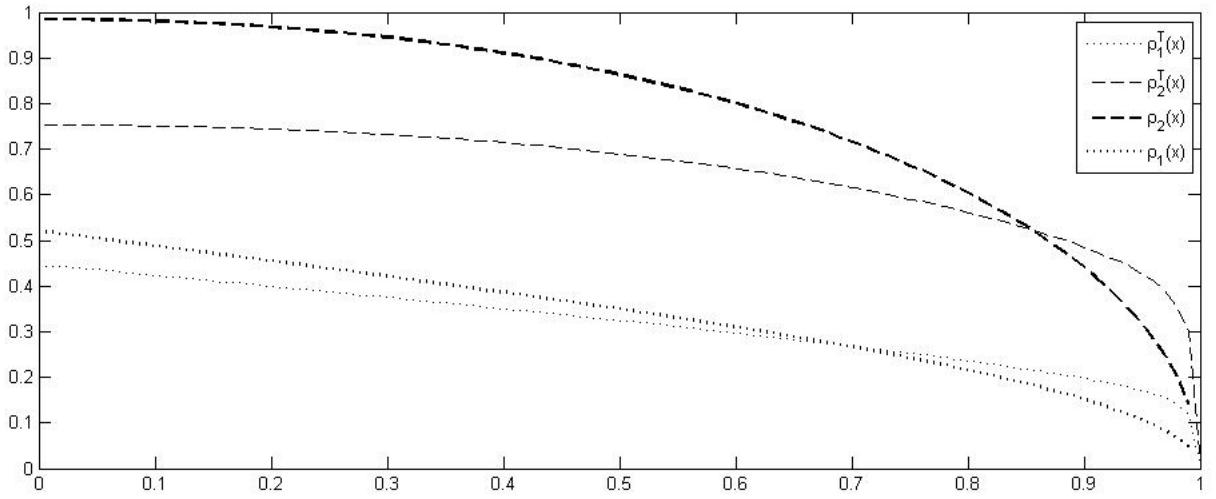
Возмущение $a_n = \alpha^2 + \frac{1}{4n^2}$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного разреженного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



Возмущение $a_n = \alpha^2 + \frac{1}{4n}$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного разреженного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



4.2.1. Система Пинейро $\Delta = [0, 1]$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1/2$

Меры соответственно имеют вид

$$d\mu_1(x) = dx^3 = 3x^2dx, \quad d\mu_2(x) = \sqrt{x^3}dx^3 = \sqrt{x^3} \cdot 3x^2dx$$

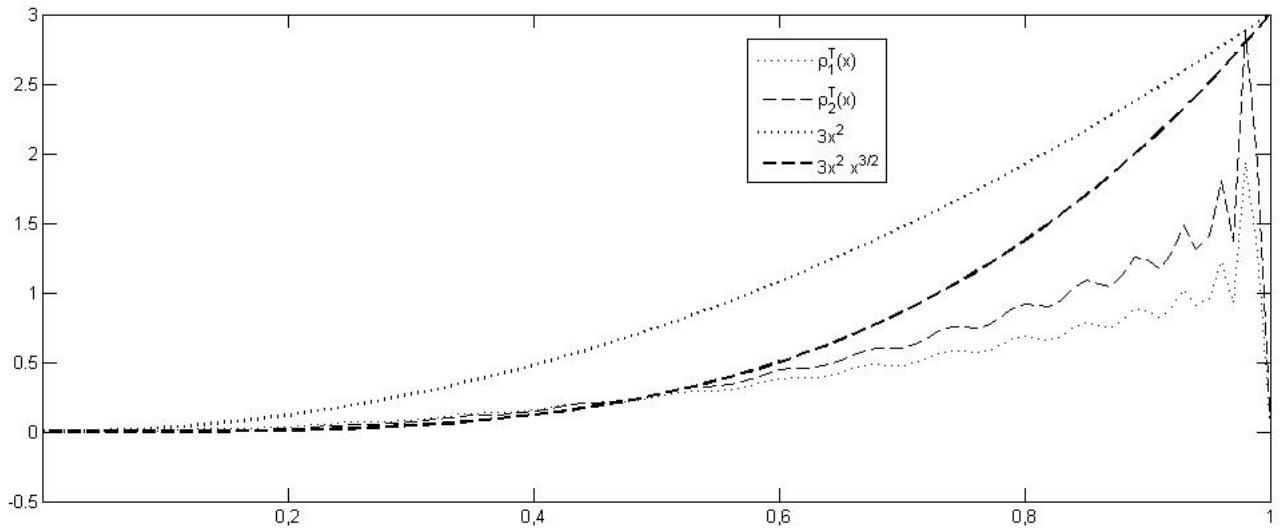
Матрица разреженного оператора

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/15 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2/7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Соответствующая алгебраическая функция с точкой ветвления $z_0 = 1$

$$F(w, z) = w^3 - zw^2 + 4/27$$

Следующий график показывает меры вычисленные для разреженного оператора Пинейро через



4.2.2. Система Пинейро $\Delta = [0, 1], \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 1/4$

Меры соответственно имеют вид

$$d\mu_1(x) = \sqrt{x^3}(1-x^3)dx^3 = 3x^2\sqrt{x^3}(1-x^3)dx, \quad d\mu_2(x) = \sqrt[4]{x^3}(1-x^3)dx^3 = 3x^2\sqrt[4]{x^3}(1-x^3)dx$$

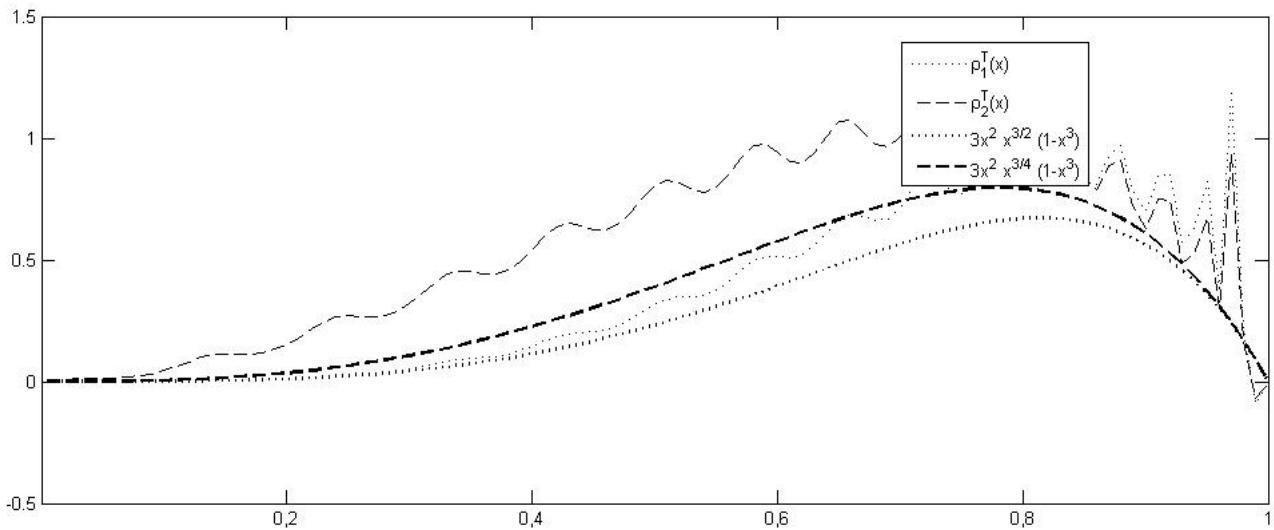
Матрица разреженного оператора

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 3/7 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 4/91 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Соответствующая алгебраическая функция с точкой ветвления $z_0 = 1$

$$F(w, z) = w^3 - zw^2 + 4/27$$

Следующий график показывает меры вычисленные для разреженного оператора Пинейро через



4.3. Системы Пинейро (заполненный оператор) $p = 2, \Delta = [0, 1]$

Для систем спектральных мер Пинейро, имеющих общий носитель $\Delta = [0, 1]$

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &= \rho_1(x)dx = x^{\alpha_1}(1-x)^{\alpha_0}dx \\ d\mu_2(x) &= \rho_2(x)dx = x^{\alpha_2}(1-x)^{\alpha_1}dx \end{aligned}$$

где $\alpha_j > -1, \alpha_i - \alpha_j \notin \mathbf{Z}$, Соответствующий заполненный оператор имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} u_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ v_1 & u_2 & 1 & 0 & \cdots \\ w_2 & v_2 & u_2 & 1 & \cdots \\ 0 & w_3 & v_3 & u_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

где элементы оператора P имеют следующее выражение через элементы оператора L (если начальный элемент a_1)

$$\begin{aligned} u_n &= a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1} \\ v_n &= a_{3n-1}a_{3n-3} + a_{3n-1}a_{3n-2} + a_{3n-2}a_{3n} \\ w_n &= a_{3n-1}a_{3n-3}a_{3n-5} \end{aligned}$$

Резольвентные функции имеют вид:

$$S_1(z) = \int_{\Delta} \frac{d\mu_1(x)}{x - z}, S_2(z) = \int_{\Delta} \frac{d\mu_2(x)}{x - z}$$

Известно что оператор является компактным возмущением следующего референс-оператора

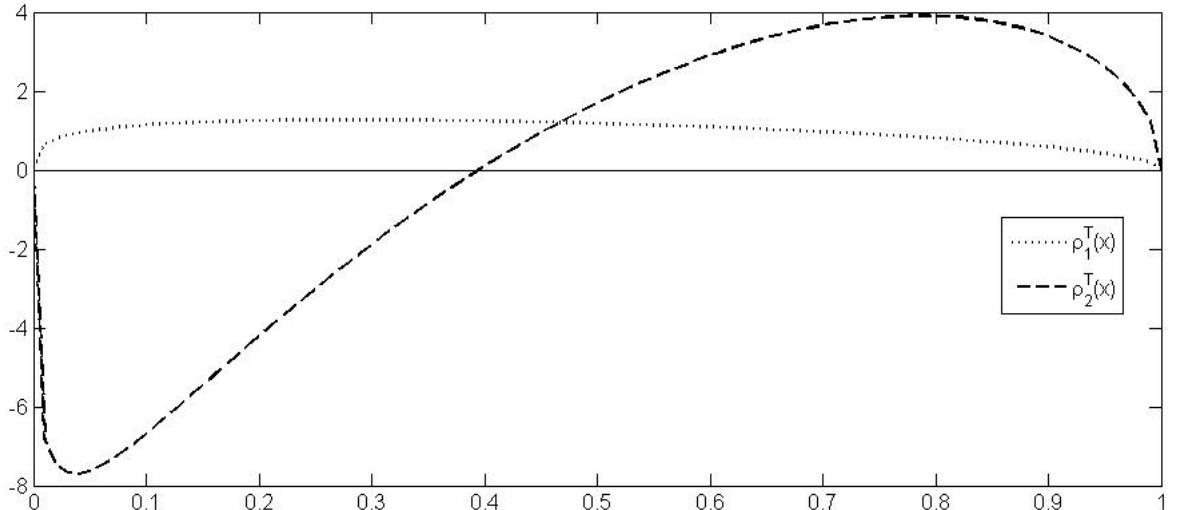
$$P^0 = \begin{pmatrix} 3\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 3\alpha^4 & 3\alpha^2 & 1 & 0 & \cdots \\ \alpha^6 & 3\alpha^4 & 3\alpha^2 & 1 & \cdots \\ 0 & \alpha^6 & 3\alpha^4 & 3\alpha^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

где $\alpha = \sqrt{4/27}$ Спектр референсного оператора определяется алгебраической функцией

$$F(w, z) = w^3 - (x - 3a^2)w^2 + 3a^4w + a^6 = (w + a^2)^3 - zw$$

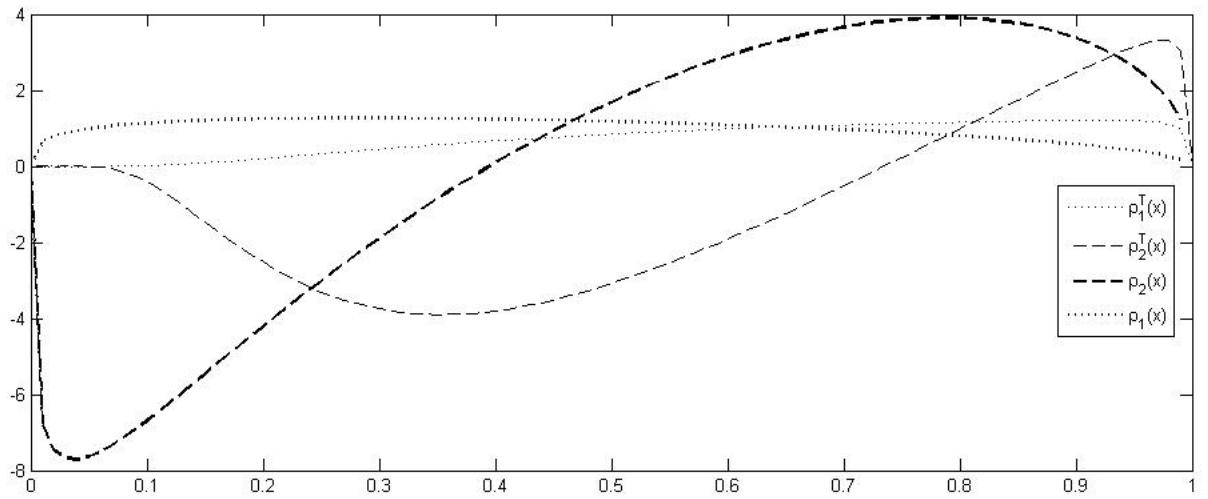
Точка ветвления исходя из решения системы $z_0 = ?$:

$$\begin{cases} w^3 - (x - 3a^2)w^2 + 3a^4w + a^6 = 0 \\ 3w^2 - 2(x - 3a^2)w + 3a^4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (w + a^2)^3 - xw^2 = 0 \\ 3(w + a^2)^2 - 2xw = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$



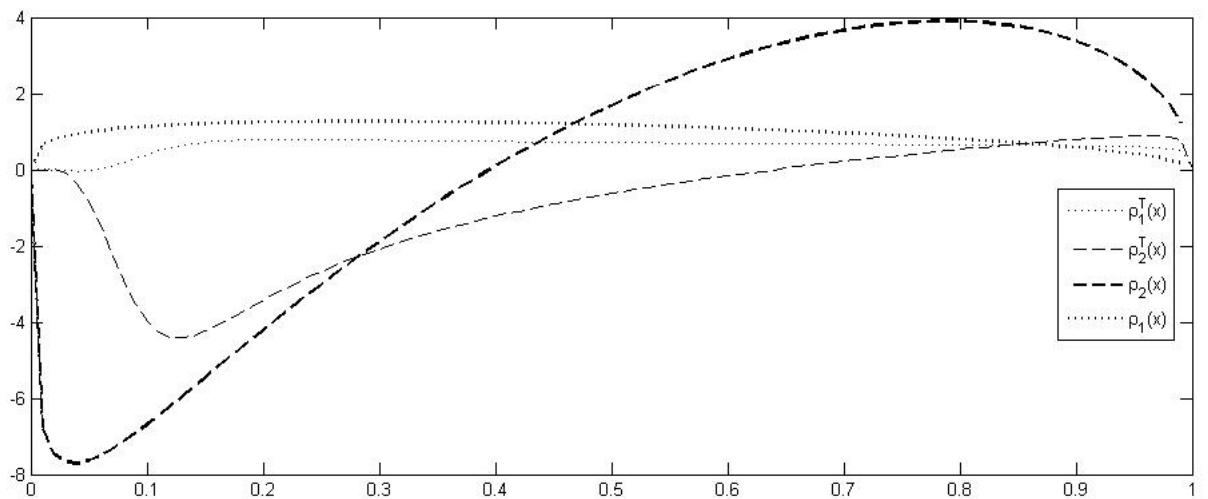
Возмущение $u_n = 3\alpha^2 + \frac{1}{3^n}$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного разреженного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



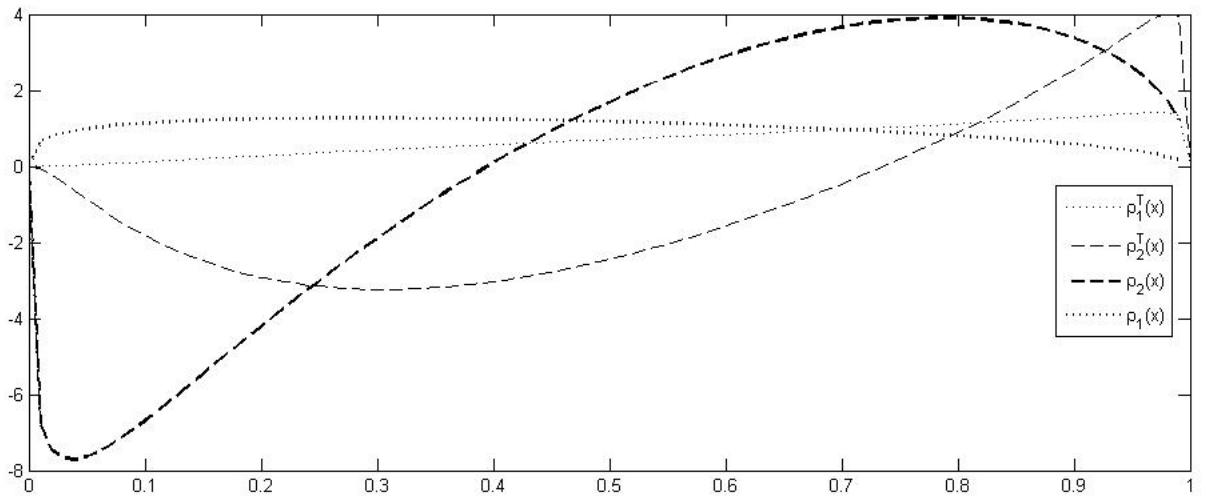
Возмущение $u_n = 3\alpha^2 + \frac{1}{3n}$, $v_n = 3\alpha^4 + \frac{1}{3n^2}$, $w_n = \alpha^6 + \frac{1}{n^4}$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного разреженного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



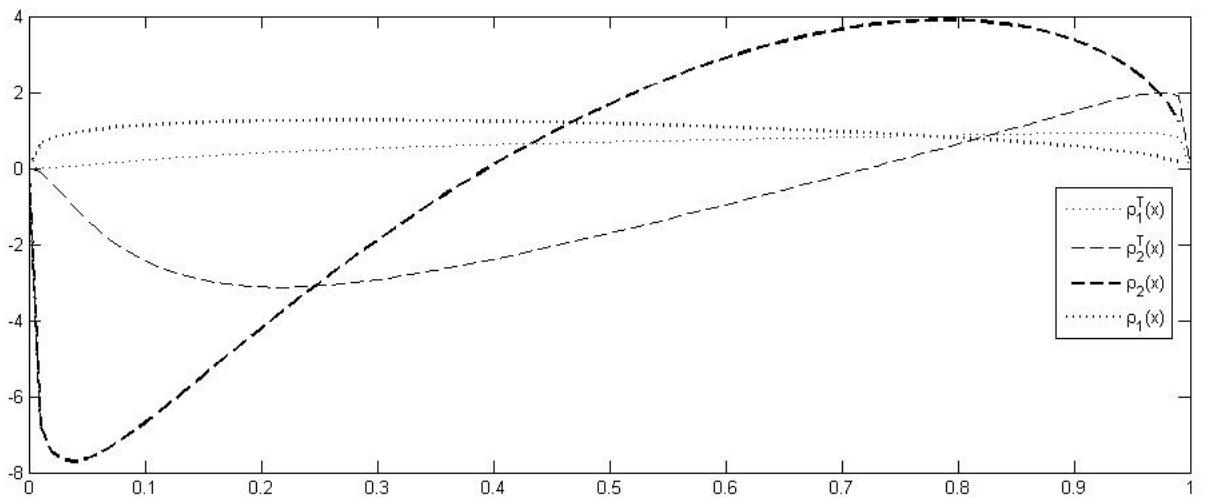
Возмущение $u_n = 3\alpha^2 + \frac{1}{3n^2}$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного разреженного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



Возмущение $u_n = 3\alpha^2 + \frac{1}{3n^2}$, $v_n = 3\alpha^4 + \frac{1}{3n^4}$, $w_n = \alpha^6 + \frac{1}{n^6}$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного разреженного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



4.3.1. Система Пинейро $\Delta = [0, 1]$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1/2$

Меры соответственно имеют вид

$$d\mu_1(x) = dx, \quad d\mu_2(x) = \sqrt{x}dx$$

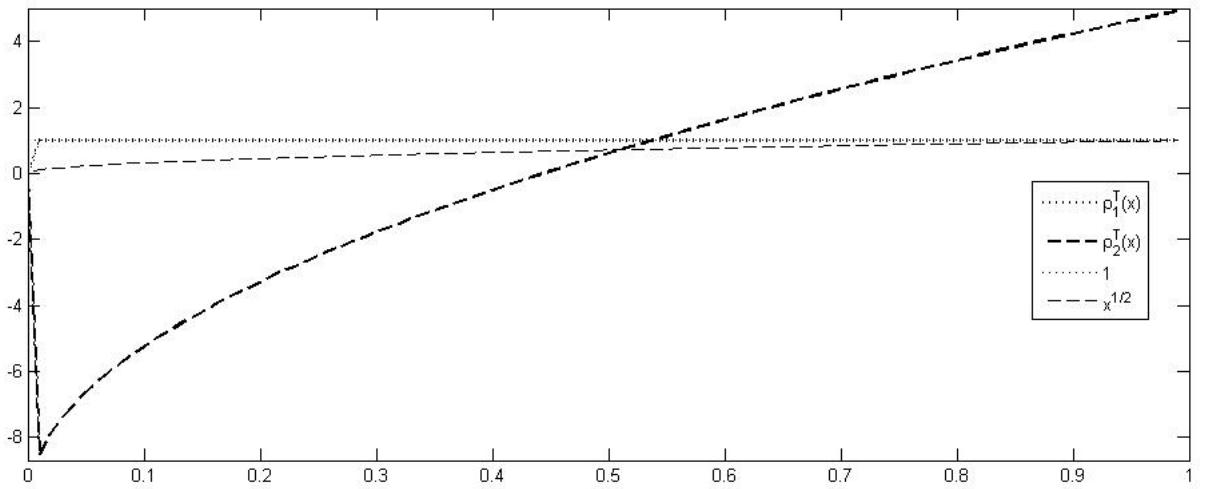
Матрица разреженного оператора

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1/12 & 19/42 & 1 & 0 & \dots \\ 1/252 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Соответствующая алгебраическая функция $a = \sqrt{4/27}$ с точкой ветвления $z_0 = 1$

$$F(w, z) = w^3 - (x - 3a^2)w^2 + 3a^4w + a^6 = (w + a^2)^3 - zw$$

Следующий график показывает меры вычисленные для заполненного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



4.3.2. Система Пинейро $\Delta = [0, 1], \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 1/4$

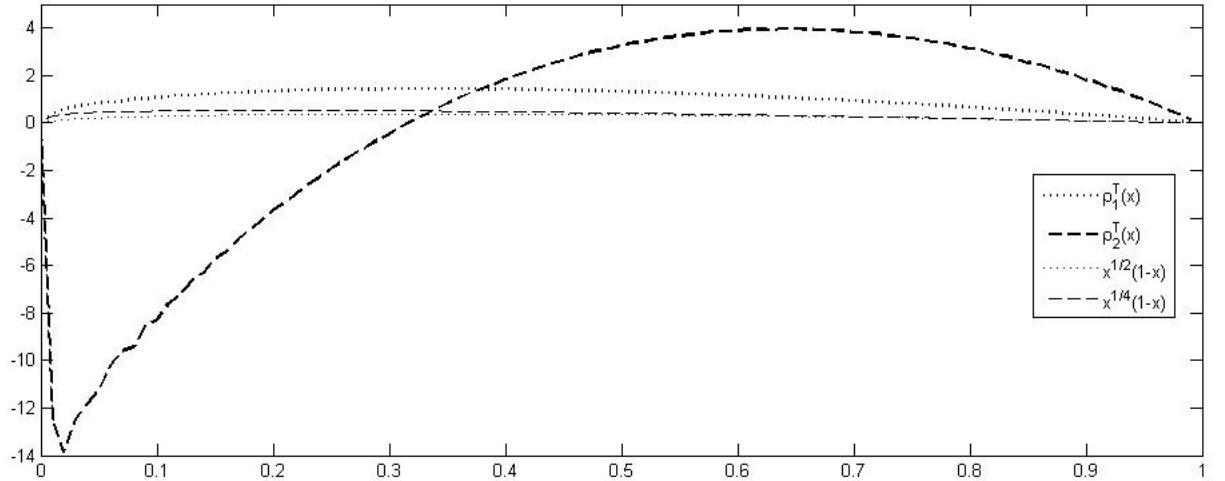
еры соответственно имеют вид

$$d\mu_1(x) = \sqrt{x}(1-x)dx, \quad d\mu_2(x) = \sqrt[4]{x}(1-x)dx$$

Соответствующая алгебраическая функция $a = \sqrt{4/27}$ с точкой ветвления $z_0 = 1$

$$F(w, z) = w^3 - (x - 3a^2)w^2 + 3a^4w + a^6 = (w + a^2)^3 - zw$$

Следующий график показывает меры вычисленные для разреженного оператора Пинейро через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



4.4. Системы Анжелеско $p = 2$

Рассмотрим два интервала $\Delta_1 = [a, 0], \Delta_2 = [0, 1] (-1 \leq a < 0)$ с общей точкой в нуле и соответствующие меры вида:

$$d\mu_1(x) = |h(x)|dx, d\mu_2(x) = |h(x)|dx$$

где $h(x) = (x - a)^\alpha (x - 1)^\beta x^\gamma$ Определим

$$z_a = \frac{(a + 1)^3}{9(a^2 - a + 1)}$$

$$K := 2a^3 - 3a^2 - 3a + 2$$

$$R := \sqrt{a^2 - a + 1}$$

Референсный оператор имеет периодическую структуру

$$A_{Ang}^0 = \begin{pmatrix} a_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,-1} & a_{1,0} & 1 & 0 & \dots \\ a_{0,-2} & a_{0,-1} & a_{0,0} & 1 & \dots \\ 0 & a_{1,-2} & a_{1,-1} & a_{1,0} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

где

$$a_{0,0} = \frac{a + 1}{3} - \frac{2}{9}R \quad a_{1,0} = \frac{a + 1}{3} + \frac{2}{9}R$$

$$a_{0,-1} = \frac{4}{81}R^2 \quad a_{1,-1} = \frac{4}{81}R^2$$

$$a_{0,-2} = \frac{4}{729}(K + 2R^3) \quad a_{1,-2} = \frac{4}{729}(K - 2R^3)$$

Соответствующая алгебраическая функция

$$w^3 - P_1(z)w^2 - P_2(z)w - P_3$$

, где

$$P_1(z) = z^2 - \frac{2}{3}(1 + a)z - \frac{1}{27}(a^2 - 10a + 1)$$

$$P_2(z) = \left(\frac{2}{9}\right)^3 [(a^3 - 4a^2 + a) + (-2 + 3a + 3a^2 - 2a^3)z]$$

$$P_3(z) = -2 \left(\frac{2}{27}\right)^3 (a^2 - 2a^3 + a^4)$$

4.4.1. Система Анжелеско $p = 2, a = -1, \Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$

В этом случае матрица оператора является компактным возмущением оператора выраженного следующей 4x диагональной матрицей:

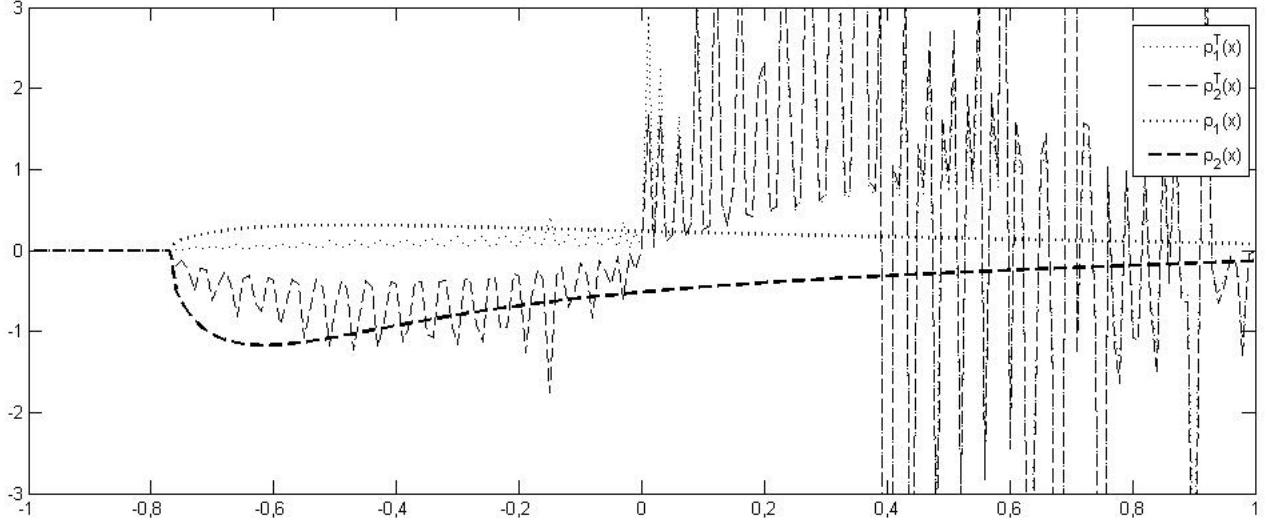
$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha^2 & -\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$\text{где } \alpha = 2/(3\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{4}{27}}.$$

Спектр оператора определяется кривыми алгебраической функции

$$F(w, z) = w^3 - \left(z + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)w^2 + \left(\frac{4}{9}\sqrt{3}z + \frac{4}{9}\right)w - \frac{8}{243}\sqrt{3}$$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного оператора системы Анжелеско для носителей $[-1, 0], [0, 1]$ через определители Турана (многочлены степени $n = 50$)



4.5. Системы Никишина $p = 2$

Рассмотрим два интервала $\Delta_1 = [a, 0], \Delta_2 = [0, 1] (-1 \leq a < 0)$ с общей точкой в нуле и соответствующие меры вида:

$$d\mu_1(x) = |h(x)|dx, d\mu_2(x) = |h(x)|dx$$

где $h(x) = (x - a)^\alpha (x - 1)^\beta x^\gamma$ Определим

$$z_a = \frac{(a+1)^3}{9(a^2 - a + 1)}$$

$$K := 2a^3 - 3a^2 - 3a + 2$$

$$R := \sqrt{a^2 - a + 1}$$

Референсный оператор имеет периодическую структуру

$$A_{Ang}^0 = \begin{pmatrix} a_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{1,-1} & a_{1,0} & 1 & 0 & \cdots \\ a_{0,-2} & a_{0,-1} & a_{0,0} & 1 & \cdots \\ 0 & a_{1,-2} & a_{1,-1} & a_{1,0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

где

$$a_{0,0} = -\frac{1}{36R^2}(K - 12(a+1)R^2 + 10R^3) \quad a_{1,0} = -\frac{1}{18R^2}(K - 6(a+1)R^2 + 4R^3)$$

$$a_{0,-1} = -\frac{1}{36^2 R^4}(-K + 2R^3)(K - 14R^3) \quad a_{1,-1} = -\frac{1}{36^2 R^4}(-K + 2R^3)(K - 14R^3)$$

$$a_{0,-2} = -\frac{1}{36 \cdot 81 R^6}(-K + 2R^3)^2 \quad a_{1,-2} = -\frac{1}{36^3 R^6}(-K + 2R^3)^2(K + 2R^3)$$

Соответствующая алгебраическая функция

$$w^3 - P_1(z)w^2 - P_2(z)w - P_3$$

, где

$$P_1(z) =$$

$$P_2(z) =$$

$$P_3(z) =$$

4.5.1. Система Никишина $p = 2, a = -1, \Delta_1 = [-1, 0], \Delta_2 = [0, 1]$

В этом случае матрица оператора является компактным возмущением оператора выраженного следующей 4x диагональной матрицей:

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{4}\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{7}{16}\alpha^2 & -\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{8}\alpha^3 & \frac{7}{16}\alpha^2 & -\frac{5}{4}\alpha & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{64}\alpha^3 & \frac{7}{16}\alpha^2 & -\alpha & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

где $\alpha = 2/(3\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{4}{27}}$.

Спектр оператора определяется кривыми алгебраической функции

$$F(w, z) = w^3 - \left(\frac{27}{2}z - \frac{9}{4}\sqrt{3}\right)w^2 + \left(\frac{81}{8}\sqrt{3}z + \frac{81}{16}\right)w + \frac{81}{64}\sqrt{3}$$

Следующий график показывает меры вычисленные для референсного оператора системы Ан-

