Соколова Вікторія, ДО-4

Методом найменших квадратів знайти наближений розв'язок крайової задачі

$$u'' - u' - 2 = -3e^{-x}$$

$u' = 0, \;\; x = 0$

$2u' + u = 0\,, \;\; x = 1$

Теоретична частина

Нехай в рівнянні

$$Au = f$$

A – лінійний оператор діє з $E \to F$, де E і F – банахові простори.

Наближений розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$$

На відміну від МБГ (де $\psi_j = \varphi_j$), у МНК $\psi_j = \mathrm{A}\varphi_j$

Якщо елементи проекційної та координатної системи рівні вищезазначеному співвідношенню при $j = \overline{1, n}$, то метод моментів називається МНК.

Для визначення коефіцієнтів c_i будемо мати систему

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_{i,}\, \psi_j) = \left(f, \psi_j\right), j = \overline{1, n}$$

Тобто

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_{i,}\, \mathrm{A}\varphi_j) = \left(f, \mathrm{A}\varphi_j\right), j = \overline{1, n}$$

Також в даній задачі маємо крайові умови третього роду:

$$\begin{cases} \alpha u'(a) - \beta u(a) = 0 \\ \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \end{cases}$$

$\varphi_1(x) = (x - a)^2 (x - A)$

$\varphi_2(x) = (x - B)(b - x)^2$

$\varphi_i(x) = (x - a)^2 (b - x)^{i-1}, i = \overline{3, n}$

Ця базисна функція повинна задовольняти крайові умови:

$$\begin{cases}\alpha\varphi_0'(a)-\beta\varphi_0(a)=0\\ \gamma\varphi_0'(b)+\delta\varphi_0(b)=0\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\alpha((b-x)^2-2(x-B)(b-x))-\beta((x-B)(b-x)^2)=0\\ \gamma(2(x-a)(x-A)+(x-a)^2)+\delta((x-a)^2(b-A))=0\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}(a-B)(2\alpha(b-a)+\beta(b-a)^2)-\alpha(b-a)^2=0\\ (b-A)(2\gamma+\delta(b-a))+\gamma(b-a)=0\end{cases}$$

$$A=b+\frac{\gamma(b-a)}{2\gamma+\delta(b-a)}$$

$$B=a-\frac{\alpha(b-a)^2}{2\alpha(b-a)+\beta(b-a)^2}$$

Розв’язання

$$Au=u''-u',\ \text{f}=-3e^{-x}+2$$

Задано крайові умови третього роду, отже введемо функцію

$$A:=1+\frac{2(1-0)}{2\cdot 2+1\cdot(1-0)}=\frac{7}{5}$$

$$B:=0-\frac{1\cdot(1-0)^2}{2\cdot 1\cdot(1-0)+0\cdot(1-0)^2}=-\frac{1}{2}$$

Введемо базисні функції

$$\varphi_1(x)=x^2(x-\frac{7}{5})$$

$$\varphi_2(x)=(x+\frac{1}{2})(1-x)^2$$

$$u(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)=C_1x^2(x-\frac{7}{5})+C_2(x+\frac{1}{2})(1-x)^2$$

Знайдемо $(A\varphi_1,A\varphi_1)$, $(A\varphi_1,A\varphi_2)$, $(A\varphi_2,A\varphi_1)$, $(A\varphi_2,A\varphi_2)$:

$$A\varphi_1=6x-\frac{14}{5}-x^2\left(x-\frac{7}{5}\right)$$

$$A\varphi_2=6x-3-(1-x)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$(A\varphi_1, A\varphi_1) = \int_0^1 \left(6x - \frac{14}{5} - x^2\left(x - \frac{7}{5}\right)\right)\left(6x - \frac{14}{5} - x^2\left(x - \frac{7}{5}\right)\right)dx$$
$$= 3.694857143$$

$$(A\varphi_1, A\varphi_2) = \int_0^1 \left(6x - \frac{14}{5} - x^2\left(x - \frac{7}{5}\right)\right)\left(6x - 3 - (1-x)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)dx$$
$$= 3.471190476$$

$$(A\varphi_2, A\varphi_2) = \int_0^1 \left(6x - 3 - (1-x)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)\left(6x - 3 - (1-x)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)dx$$
$$= 3.692857143$$

Тепер знайдемо $(f, A\varphi_1)$, $(f, A\varphi_2)$:

$$(f, A\varphi_1) = \int_0^1 \left(6x - \frac{14}{5} - x^2\left(x - \frac{7}{5}\right)\right)(-3e^{-x} + 2)dx = 1.054060998$$

$$(f, A\varphi_2) = \int_0^1 6x - 3 - (1-x)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)(-3e^{-x} + 2)dx = 1$$

Тоді система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 3.694857143C_1 - 3.471190476C_2 = 1.054060998 \\ 3.471190476C_1 - 3.692857143C_2 = 1 \end{cases}$$

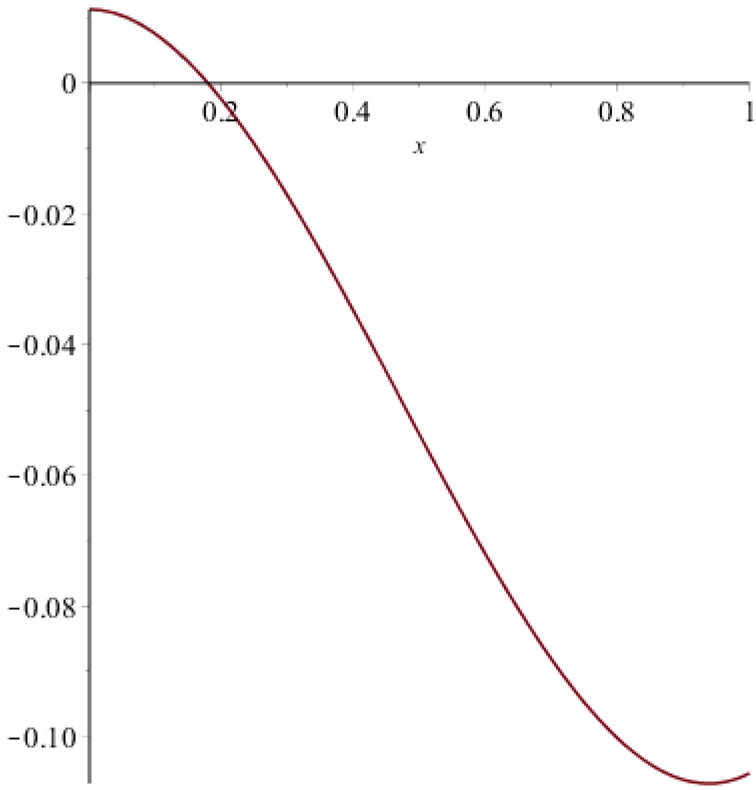
Розв'яжемо цю систему за допомогою Maple

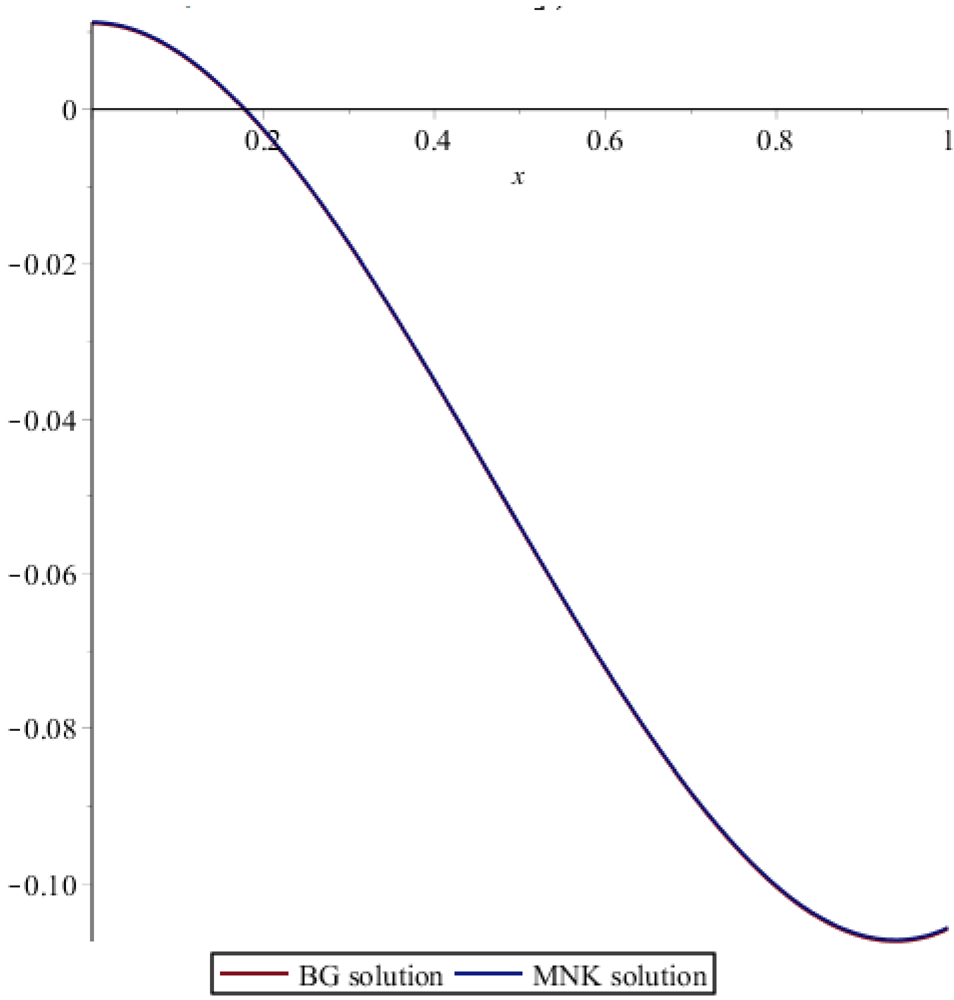
$C_1 = 0.2640729050$, $C_2 = 0.02257131649$

Отже,

$$u(x) = 0.2640729050\left(x^2(x - \frac{7}{5})\right) + 0.02257131649\left((x + \frac{1}{2})(1-x)^2\right)$$

Зобразимо графік знайденого розв’язку:




0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.10
BG solution
MNK solution