Соколова Вікторія, ДО-4

Методом Бубнова-Гальоркіна знайти наближений розв'язок крайової задачі

$$u'' - u' - 2 = -3e^{-x}$$

$u' = 0, \;\; x = 0$

$2u' + u = 0 \;, \;\; x = 1$

Теоретична частина

Нехай в рівнянні

$$Au = f$$

A – лінійний оператор діє з $E \to F$, де E і F – банахові простори.

Наближений розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$$

а для визначення коефіцієнтів c_i будемо мати систему

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_{i,} \varphi_j) = (f, \varphi_j), j = \overline{1,n}$$

Також в даній задачі маємо крайові умови третього роду:

$$\begin{cases} \alpha u'(a) - \beta u(a) = 0 \\ \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \end{cases}$$

$\varphi_1(x) = (x-a)^2(x-A)$

$\varphi_2(x) = (x-B)(b-x)^2$

$\varphi_i(x) = (x-a)^2(b-x)^{i-1}, i = \overline{3,n}$

Ця базисна функція повинна задовольняти крайові умови:

$$\begin{cases} \alpha\varphi_0'(a) - \beta\varphi_0(a) = 0 \\ \gamma\varphi_0'(b) + \delta\varphi_0(b) = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \alpha((b-x)^2 - 2(x-B)(b-x)) - \beta((x-B)(b-x)^2) = 0 \\ \gamma(2(x-a)(x-A) + (x-a)^2) + \delta((x-a)^2(b-A)) = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} (a-B)(2\alpha(b-a) + \beta(b-a)^2) - \alpha(b-a)^2 = 0 \\ (b-A)(2\gamma + \delta(b-a)) + \gamma(b-a) = 0 \end{cases}$$

$$A = b + \frac{\gamma(b-a)}{2\gamma + \delta(b-a)}$$

$$B = a - \frac{\alpha(b-a)^2}{2\alpha(b-a) + \beta(b-a)^2}$$

Розв'язання

$$Au = u'' - u',\ \text{f}{=}{-3e^{-x}} + 2$$

Задано крайові умови третього роду, отже введемо функцію

$$A := 1 + \frac{2(1-0)}{2\cdot 2 + 1\cdot(1-0)} = \frac{7}{5}$$

$$B := 0 - \frac{1\cdot(1-0)^2}{2\cdot 1\cdot(1-0) + 0\cdot(1-0)^2} = -\frac{1}{2}$$

Введемо базисні функції

$$\varphi_1(x) = x^2(x - \frac{7}{5})$$

$$\varphi_2(x) = (x + \frac{1}{2})(1-x)^2$$

$$u(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) = C_1x^2(x - \frac{7}{5}) + C_2(x + \frac{1}{2})(1-x)^2$$

Знайдемо $(A\varphi_1, \varphi_1)$, $(A\varphi_1, \varphi_2)$, $(A\varphi_2, \varphi_1)$, $(A\varphi_2, \varphi_2)$:

$$A\varphi_1 = 6x - \frac{14}{5} - x^2\left(x - \frac{7}{5}\right)$$

$$A\varphi_2 = 6x - 3 - (1-x)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$(A\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 (6x - \frac{14}{5} - x^2\left(x - \frac{7}{5}\right))(x^2(x - \frac{7}{5}))dx = -0.3615238095$$

$$(A\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 (6x - \frac{14}{5} - x^2\left(x - \frac{7}{5}\right))((x + \frac{1}{2})(1-x)^2)dx = -0.2211904762$$

$$(A\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 (6x - 3 - (1-x)^2\left(x + \frac{1}{2}\right))(\ (x + \frac{1}{2})(1-x)^2)dx = -0.3928571429$$

Тепер знайдемо (f, φ_1), (f, φ_2):

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 (x^2(x - \frac{7}{5}))\,(-3e^{-x} + 2)dx = -0.100588418$$

$(f, \varphi_2) = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)(1 - x)^2 \, (-3e^{-x} + 2) dx =$ -0.067255088

Тоді система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} -0.3615238095\mathrm{C}_1 - 0.2211904762\mathrm{C}_2 = -0.100588418 \\ -0.2211904762\mathrm{C}_1 - 0.3928571429\mathrm{C}_2 = -0.067255088 \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за допомогою Maple

$C_1 = 0.2646634633$, $C_2 = 0.02218121948$

Отже,

$$u(x) = 0.2646634633\left(x^2(x - \frac{7}{5})\right) + 0.02218121948\left((x + \frac{1}{2})(1 - x)^2\right)$$

Зобразимо графік знайденого розв'язку: