Соколова Вікторія ДО-4

Лабораторна робота 2

з Чисельних методів математичної фізики

Інтегро-інтерполяційний метод

Теоретична частина

Розглянемо цей метод для наступної задачі:

$$\begin{cases} -(ku')' + qu = f\,, 0 < x < 1 & (\mathbf{1}) \\ -ku' + \mathcal{L}_1 u = \mu_1, x = 0 & (\mathbf{2}) \\ \quad ku' + \mathcal{L}_2 u = \mu_2, x = 1 & \end{cases}$$

Де k=k(x)$\geq k_0 > 0$, q=q(x)≥ 0

Розглянемо сітку $\overline{w}_h = \{x_i = \frac{i}{h}, h = \frac{1}{N}$, i=$\overline{0, N}$ і проінгегруємо (1) по проміжку $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$w_{i+1/2} - w_{i-\frac{1}{2}} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (qu - f)dx = 0$ **(3)**

де $w_i = -k(x_i)\frac{du}{dx}(x_i)$- величина потоку, який проходить через точку x_i

Розглянемо

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)dx = u(\xi)\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx = u_1\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx = h\,d_i u_i$$

де $d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx$

Аналогічно

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx = \varphi_i h$$

де $\varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx$

проінгегруємо по проміжку $[x_{i-1}, x_i]$: вираз $u' = -\frac{w(x)}{k(x)}$

отримаємо

$$u_i - w_{i-1} = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)}dx = w_{i-\frac{1}{2}}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)}dx$$

або $w_{i-\frac{1}{2}} \approx -a_i u_{x,i}$ **(4)**

де $a_i = (\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)}dx)^{-1}$

Враховуючи також вираз $w_{i+\frac{1}{2}} = -a_{i+1}u_{x,i+1}$ з (3) отримаємо однорідну різницеву схему:

$-(ay_{\bar{x}})_{x,i} + d_i y_i = \varphi_i$, i=$\overline{0, N-1}$

Проінтегруємо співвідношення (1) проміжку $[0, x_{1/2}]$:

$w_{1/2} - w_0 + \int_0^{x_{1/2}} (qu - f)dx = 0$

З формули (2) отримуємо $w_0 = \mu_1 - \mathcal{L}_1 u_0$

З формули (4) отримуємо $w_0 \approx -a_1 u_{x,0}$

Скористаємось наближенням

$$\int_0^{x_{1/2}} qudx \approx u_0 \int_0^{x_{1/2}} q(x)dx = \frac{h}{2} d_0 u_0$$

де $d_0 = \frac{2}{h} \int_0^{x_{1/2}} q(x)dx$

Також маємо

$$\int_0^{x_{1/2}} f(x)dx = \varphi_0 \frac{h}{2}$$

де $\varphi_0 = \frac{2}{h} \int_0^{x_{1/2}} f(x)dx$

Отримуємо різницеву апроксимацію граничних умов(2):

$-a_1 y_{x,0} + \mathcal{L}_1 y_0 + \mu_1 + \frac{h}{2} d_0 y_0 - \frac{h}{2} \varphi_0 = 0$

$$-a_1 y_{x,0} + \overline{\alpha}_1 y_0 = \overline{\mu}_1$$

Де $\overline{\alpha}_1 = \mathcal{L}_1 + \frac{h}{2} d_0$

$\overline{\mu}_1 = \mu_1 + \frac{h}{2} \varphi_{0_0}$

Практична частина:

$u'' - u - 2 = -3e^{-x}$

$\begin{cases} u' = 0, \quad x = 0 \\ 2u' + u = 0, \quad x = 1 \end{cases}$

a=0 b=1

k(x)=$\begin{cases} -1, x \in (0,1) \\ -1, x = 0 \\ 2, x = 1 \end{cases}$

q(x)=-1

f(x)= $-3e^{-x} - 2$

$\mathcal{L}_1$ =0

$\mathcal{L}_2$ =0

μ_1 =0

μ_2 =1

h=(b-a)/2

$x_i = i * h$

1. solve

$$a_i = (\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx)^{-1}$$

$a_i = (\frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} \frac{1}{-1} dx)^{-1}$

[1.00000000000000, 1.00000000000000, 1.00000000000000, 1.00000000000000, 0.999999999999999]

$$d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx$$

$d_i = \frac{1}{h}\int_{ih-h/2}^{ih+h/2} -1\, dx$

[1.00000000000000, 1.00000000000000, 1.00000000000000, 1.00000000000000]

$$d_0 = \frac{2}{h}\int_0^{x_{1/2}} q(x)dx$$

$d_0 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} -1dx$

$d_0 = 1$

$d_n = \frac{2}{h}\int_{b-h/2}^{b} -1dx$=1

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx$$

$\varphi_i = \frac{1}{h}\int_{ih-h/2}^{ih+h/2} -3e^{-x} - 2\, dx$

[0.460287960313626, 0.0143134145362667, -0.350819661181641, -0.649765339237844]

$$\varphi_0 = \frac{2}{h}\int_0^{x_{1/2}} f(x)dx$$

$\varphi_0 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} -3e^{-x} - 2dx$ = 0.854877458921210

$\varphi_n = \frac{2}{h}\int_{b-h/2}^{b} -1dx$=-0.83929344292

2. get_rhs

$\bar{\mu}_1 = \mu_1 + \frac{h}{2}\varphi_0$

3. get_lhs

$\bar{\alpha}_1 = \mathcal{L}_1 + \frac{h}{2}d_0$

4. Отримуємо $-a_1 y_{x,0} + \overline{\alpha}_1 y_0 = \overline{\mu}_1$

Або в іншому вигляді

$$-a_1 y_{x,0} + \mathcal{L}_1 y_0 + \mu_1 + \frac{h}{2} d_0 y_0 - \frac{h}{2} \varphi_0 = 0$$

Отримуємо масив лівої частини системи

[[1.02 -1.   0.   0.   0.   0.]

[-1.   2.04 -1.   0.   0.   0.]

[0.   -1.   2.04 -1.   0.   0.]

[0.   0.   -1.   2.04 -1.   0.]

[0.   0.   0.   -1.   2.04 -1.]

[0.   0.   0.   0.   -1.   1.22]]

Та вектор правої частини [0.01709755 0.01841152 0.00057254 -0.01403279 -0.02599061 -0.01678587]

Отже, розв'язок

[0.0971823 -0.14247967 -0.08777428 0.18841456 0.26069446 -0.41460335

-0.01086717 0.03455185]

u = 0.0971823031978549*x**7 - 0.142479674006147*x**6 - 0.0877742818357157*x**5 + 0.188414557112575*x**4 + 0.260694455505034*x**3 - 0.414603347867044*x**2 - 0.010867172874443*x + 0.0345518544215673