Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka

Projekt numer 33 – uproszczone zagadnienie produkcji żywności

Jakub Król, Paweł Sokołowski
2013-05-27

Spis treści

Model matematyczny

Poniżej zostanie opisany matematyczny model rozwiązania uproszczonego zadania produkcji żywności.

Zastosowano następujące oznaczenia w celu skrócenia notacji:

- kolejne miesiące są oznaczane kolejnymi liczbami naturalnym, np.: miesiącowi styczeń odpowiada liczba 1 itd.
- Rodzaje oleju także indeksowane są kolejnymi liczbami naturalnymi. I tak: R1 jest indeksowane za pomocą 1, R2 – 2, O1 -3, O2 - 4, O3 - 5.

Do modelu wprowadzono następujące zmienne:

- $x_{ij} \quad i = 1 \dots 5, \quad j = 1 \dots 3$ – oznacza zakup oleju i w miesiącu j
- $ppx_{ij} \quad i = 1 \dots 5, \quad j = 1 \dots 3$ - oznacza użycie półproduktu odpowiadającego olejowi i w miesiącu j
- $bx_{ij} \quad i = 1 \dots 5, \quad j = 1 \dots 3, \quad b_{ij} \in \{0,1\}$ - zmienne binarne potrzebne do zamodelowania jednego z ograniczeń

1. $x_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i = 1 \dots 5\,, j = 1 \dots 3$
2. $ppx_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i = 1 \dots 5\,, j = 1 \dots 3$
3. $bx_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall\, i = 1 \dots 5\,, j = 1 \dots 3$
4. $x_{1j} + x_{2j} \leq 220 \quad \forall\, j = 1 \dots 3$
5. $x_{3j} + x_{4j} + x_{5j} \leq 270 \quad \forall\, j = 1 \dots 3$
6. $20bx_{ij} \leq x_{ij} \leq 220bx_{ij} \quad \forall\, x = 1 \dots 2, j = 1 \dots 3$
7. $20bx_{ij} \leq x_{ij} \leq 270bx_{ij} \quad \forall\, x = 3 \dots 5, j = 1 \dots 3$
8. $ppx_{i1} \leq 200 + \ x_{i1} \quad \forall i = 1 \dots 5$
9. $ppx_{i2} \leq 200 + x_{i1} + x_{i2} - ppx_{i1} \quad \forall\, i = 1 \dots 5$
10. $ppx_{i3} \leq 200 + x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} - ppx_{i1} - ppx_{i2} \quad \forall i = 1 \dots 5$
11. $\sum_{j=1}^{3} ppx_{ij} \leq \ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \quad \forall\, i = 1 \dots 5$
12. $200 + x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} - ppx_{i1} - ppx_{i2} \leq 800 \quad \forall\, i = 1 \dots 5$
13. $3 \sum_{i=1}^{5} ppx_{ij} \leq 8{,}4\, ppx_{1j} + \ 6{,}4ppx_{2j} + 2{,}5\, ppx_{3j} + 4{,}4ppx_{4j} + 5{,}1ppx_{5j} \quad \leq$
    $6 \sum_{x=1}^{5} ppx_{ij} \quad \forall\, j = 1 \dots 3$

Ograniczenia 1-3 wynikają z żądania nieujemności zmiennych i dodatkowo ograniczenia 3 z żądania aby zmienna była binarna.

4-5 zapewniają spełnienie ograniczenia na maksymalną produkcję oleju roślinnego i nieroślinnego w miesiącu, z kolei 6-7 zapewniają, że jeżeli dany olej został zakupiony to został zakupiony w ilości równej przynajmniej 20 ton. W tych ograniczeniach wykorzystywane są zmienne binarne bx.

8-12 wynikają z ograniczeń na magazynowanie. Ograniczenia 8-10 zapewniają, że w żadnym z miesięcy nie będzie zużyte więcej oleju niż jest go w magazynie, ograniczenie 11 zapewnia, że po 3 miesiącach nadal będzie co najmniej 200 ton każdego z rodzajów oleju w magazynie, a ograniczenie 12 zapewnia, że nie będzie magazynowane więcej niż 800 ton danego rodzaju oleju (nierówność została wprowadzona jedynie dla produkcji w 3 miesiącu, nie ma potrzeby wprowadzania jej dla wcześniejszych miesięcy, gdyż byłaby ona zawsze spełniona co wynika bezpośrednio z nierówności 1-3).

Ograniczenie 13 spełnia żądanie na twardość oleju. Założono, że w każdym z miesięcy może dojść do produkcji produktu końcowe według różnych proporcji.

Zysk przy zadanym scenariuszu został zamodelowany jak suma przychodów , czyli suma wszystkich użytych półproduktów pomnożoną przez cenę sprzedaży równą 170, pomniejszony o koszty zakupów surowego oleju i koszty magazynowania. Koszty zakupu są opisane przez:

- p_{ijk} $\quad i = 1 \dots 5, j = 1 \dots 3, k = 1 \dots 3$ – i –rodzaj oleju, j – miesiąc, k –scenariusz

Przy wprowadzonych wcześniej oznaczeniach zysk można zamodelować jako:

$$y_k = 170 \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} ppx_{ij} - \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} p_{ijk} x_{ij} - \sum_{i=1}^{5} (6000 + 30x_{i1} + 20x_{i2} + 10x_{i3} - 30ppx_{i1} - 20ppx_{i2} - 10ppx_{i3})$$

Oczekiwany zysk będzie wtedy równy:

$$y = 0{,}1y_1 + 0{,}2y_2 + 0.7y_3$$

Za miarę ryzyka uznano średnią częściową z poziomem tolerancji $\beta = 2$. W celu jej implementacji wprowadzono dodatkowe zmienne:

- $d_k^- \geq 0, \quad k = 1 \dots 3$ k – indeks scenariusza
- η - pomocnicza zmienna nieograniczona

Oraz ograniczenia:

$$d_k^- \geq \eta - y_k \quad \forall k = 1 \dots 3$$

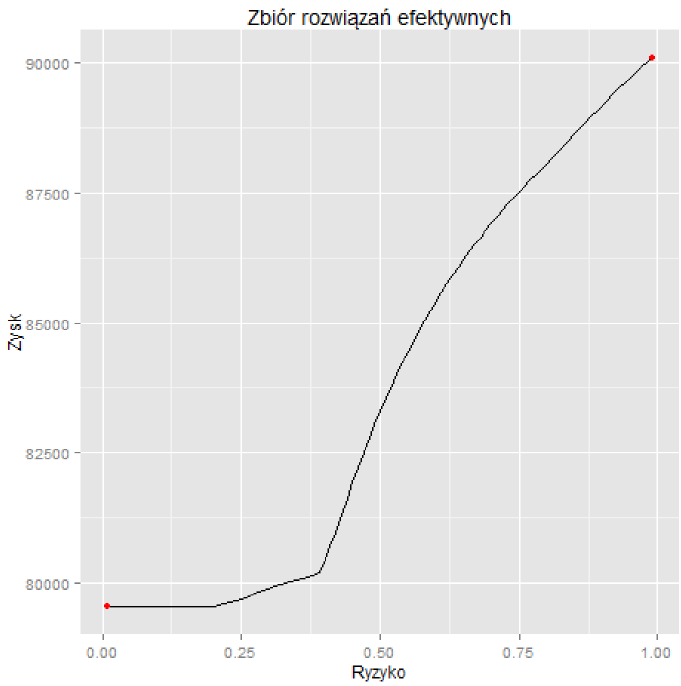
Przy wszystkich wprowadzonych ograniczeniach zadanie będzie polegało na maksymalizacji funkcji:

$$\max \eta - \frac{1}{\beta}(0{,}1d_1^- + 0{,}2d_2^- + 0{,}7d_3^-)$$

Obraz zbioru rozwiązań efektywnych

Na poniższym wykresie przedstawiony jest obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk. Na czerwono oznaczone są dwa punkty:

- Z najmniejszą wartością ryzyka: (0.01, 79540.3)
- Z największą wartością zysku: (0.99, 90088.7)



Dominacja stochastyczna

Dla 3 wybranych punktów o współrzędnych w przestrzeni Ryzyko-Zysk podanych w poniższej tabeli zbadaliśmy relacje dominacji stochastycznej pierwszego i drugiego rzędu.

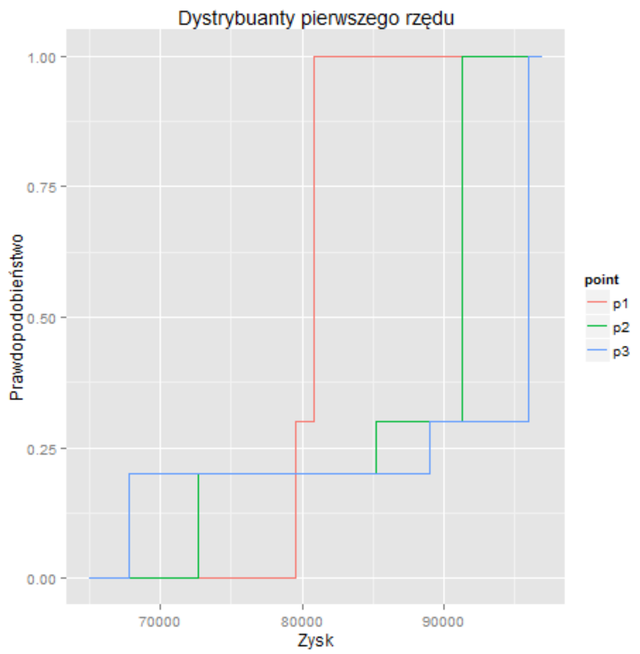
Ryzyko	Zysk
0.1	79540.3
0.4	80450
0.7	86916.5

Dystrybuanty opisujące zysk w danych punktach określone były następującymi wzorami:

$$F_{p1}(x) = \begin{cases} 0\ dla\ x\ < 79540{,}3 \\ 0{,}3\ dla\ 79540{,}3\ \leq x\ < 80834{,}4 \\ 1\ dla\ x \geq 80834{,}4 \end{cases}$$

$$F_{p2}(x) = \begin{cases} 0\ dla\ x\ < 72650{,}3 \\ 0{,}2\ dla\ 72560\ \leq x\ < 85200 \\ 0{,}3\ dla\ 85200\ \leq x < 91300 \\ 1\ dla\ x\ \geq 91300 \end{cases}$$

$$F_{p3}(x) = \begin{cases} 0\ dla\ x\ < 67775{,}7 \\ 0{,}2\ dla\ 67775{,}7 \leq x\ < 89012{,}9 \\ 0{,}3\ dla\ 89012{,}9\ \leq x < 95962{,}9 \\ 1\ dla\ x\ \geq 95962{,}9 \end{cases}$$



Pomiędzy żadnym z punktów nie zachodzi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Każdy z punktów raz dominuje pozostałe, a raz jest dominowany, więc nie zachodzi warunek

$$F_{R(x')}(\eta) \leq F_{R(x'')}(\eta)\ \forall \eta \in R$$

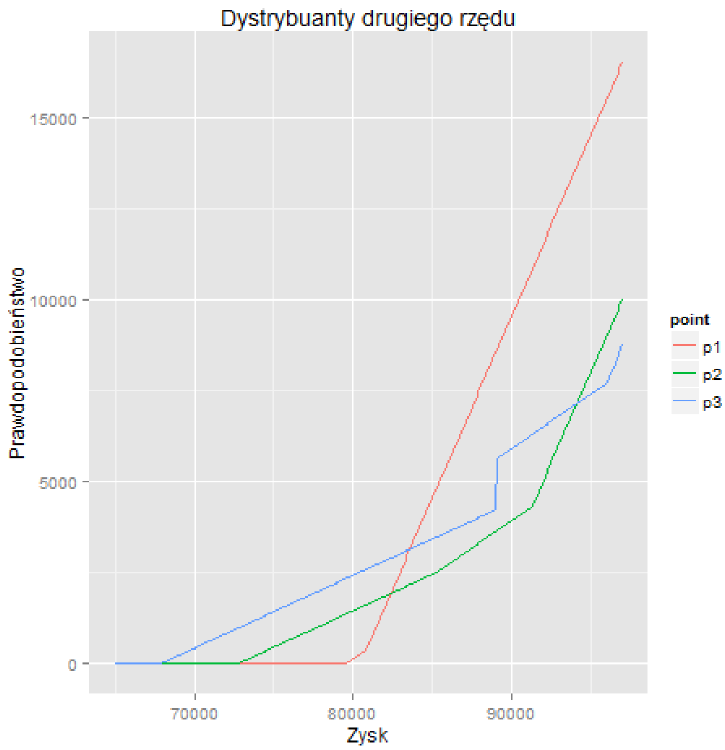
Jako że z dominacji stochastycznej pierwszego rzędu wynika dominacja stochastyczna drugiego rzędu, ale nie odwrotnie (*Warunkowa wartość zagrożona jako miara ryzyka w optymalizacji portfela inwestycji finansowych*, A. Krzemienowski, W. Ogryczak, 2002), należy zbadać relację SSD pomiędzy punktami. Dystrybuanty drugiego rządu opisane były następującymi wzorami.

$$F_{p1}^{(2)}(x) = \begin{cases} 0\ dla\ x\ < 79540{,}3 \\ 0{,}3x - 23862{,}09\ dla\ 79540{,}3\ \leq x\ < 80834{,}4 \\ x -\ 80446{,}17\ dla\ x \geq 80834{,}4 \end{cases}$$

$$F_{p2}^{(2)}(x) = \begin{cases} 0\ dla\ x\ < 72650{,}3 \\ 0{,}2x -\ 14530\ dla\ 72560\ \leq x\ < 85200 \\ 0{,}3x -\ 23050\ dla\ 85200\ \leq x < 91300 \\ x -\ 86960\ dla\ x\ \geq 91300 \end{cases}$$

$$F_{p3}^{(2)}(x) = \begin{cases} 0\ dla\ x\ < 67775{,}7 \\ 0{,}2x -\ 13555{,}14\ dla\ 67775{,}7 \leq x\ < 89012{,}9 \\ 0{,}3x -\ 21066{,}43\ dla\ \ 89012{,}9\ \leq x < 95962{,}9 \\ x -\ 88240{,}46\ dla\ x\ \geq 95962{,}9 \end{cases}$$

Wykresy dystrybuant drugiego rzędu przedstawia poniższy rysunek:



Z wykresu wynika, że żaden punkt nie dominuje pozostałych w sensie dominacji stochastycznej drugiego rzędu, tzn. nie jest spełniony warunek

$$F^{(2)}_{R(x')}(\eta) \leq F^{(2)}_{R(x'')}(\eta)\ \forall \eta \in R$$

gdzie

$$F^{(2)}_{R(x)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_{R(x)}(\xi) d\xi \ \ \forall \eta \in R$$

Z tego wynika, że nie ma przesłanek aby preferować którykolwiek z punktów względem innych biorąc pod uwagę zależność ryzyko-zysk.