ΔΕΥΤΕΡΑ
10/11/2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Πραγματικές συναρτήσεις

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

A: πεδίο ή σύνολο ορισμού
$f(A)$: πεδίο ή σύνολο τιμών

$f = f(x)$ — x ανεξάρτητη μεταβλητή

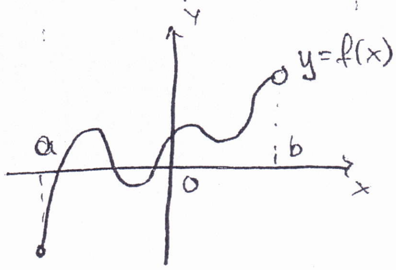
• Γράφημα ~~ή γραφική παράσταση~~ και γραφική παράσταση συνάρτησης

Ορισμός: $f = f(x)$, $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Το υποσύνολο $Graph(f) = \{(x, f(x)), x \in A\}$ του καρτεσιανού επιπέδου $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται γράφημα της συνάρτησης f

Η απεικόνιση του Graph(f) στο Oxy επίπεδο δίνει τη γραφική παράσταση της f.

π.χ.



$f: [a,b) \to \mathbb{R}$.

Ταξινόμηση πραγματικών συναρτήσεων

• Πολυώνυμα

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$

έχουμε πολυώνυμο βαθμού n (αν $a_n \neq 0$)

• Ρητές συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad P, Q \text{ πολυώνυμα.}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

• Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

$A \subseteq \mathbb{R}$ συμμετρικό όταν $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όταν A συμμετρικό

→ Άρτια όταν $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$ (π.χ. $f(x) = |x|$)

→ Περιττή όταν $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$ (π.χ. $f(x) = x^3$)

• **Περιοδική συνάρτηση**

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική όταν υπάρχει $L>0$ τέτοιο ώστε

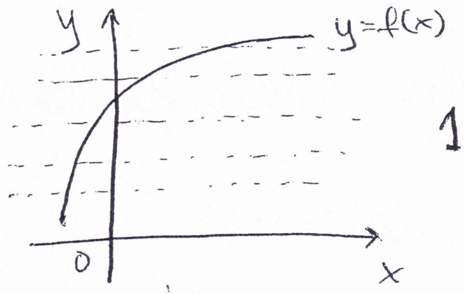
1) $\forall x \in A,\ x+L \in A$

2) $f(x+L)=f(x),\ \forall x \in A$

Ο ελάχιστος L για τον οποίο ισχύουν οι 1) και 2) ονομάζεται περίοδος της συνάρτησης f.

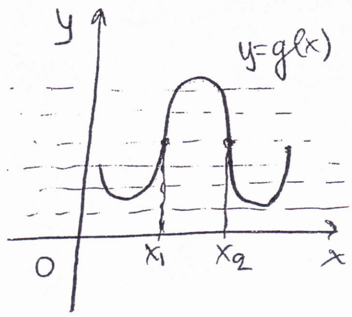
• **Αντιστρέψιμη συνάρτηση**

Ορισμός $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 όταν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$



1-1

κάθε παράλληλη στον $x'x$ τέμνει το πολύ μία φορά τη γραφική παράσταση



Δεν είναι 1-1

• Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-1 συνάρτηση, $y=f(x)$

τότε ορίζεται η $f^{-1}: f(A) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f^{-1}(y)=x$.

Με πεδίο ορισμού το $f(A)$ και πεδίο τιμών το A η οποία ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f. (Η f λέγεται αντιστρέψιμη).

Ισχύουν τα:

▸ $f^{-1}(f(x)) = x$ ▸ $f(f^{-1}(y))=y$

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 - 1$

Είναι 1-1.

Ψάχνω f^{-1}.

$2x^3 - 1 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}$

$\boxed{x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}}$ Στην f^{-1} μπορούμε να εναλλάξουμε τους ρόλους των x και y, οπότε

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}.$

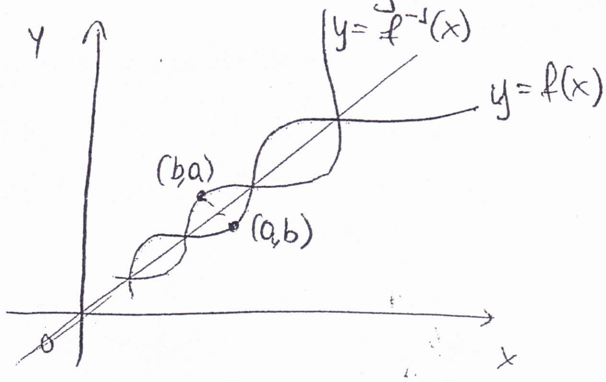
Δευτέρα
10/11/2014

(αντίστροφη συνάρτηση)

Πρόταση: $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 1-1, $f^{-1}: f(A)\to\mathbb{R}$ τότε:

$$(a,b)\in Graph(f) \iff (b,a)\in Graph(f^{-1})$$

δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.



• Μονότονη συνάρτηση

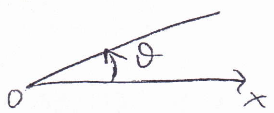
Ορισμός: $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ θα λέγεται αύξουσα όταν $f(x)\leq f(y)$, $\forall x,y\in A$ με $x<y$, θα λέγεται γνησίως αύξουσα όταν $f(x)<f(y)$, $\forall x,y\in A$ με $x<y$. Θα λέγεται φθίνουσα όταν $f(x)\geq f(y)$, $\forall x,y\in A$ με $x<y$ και γνησίως φθίνουσα όταν $f(x)>f(y)$, $\forall x,y\in A$ με $x<y$.

Πρόταση: $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη τότε:

f 1-1 και $f^{-1}: f(A)\to\mathbb{R}$ θα είναι γνησίως μονότονη του ίδιου είδους μονοτονίας με την f.

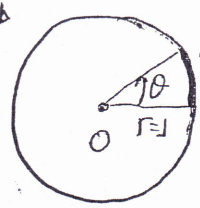
• Τριγωνομετρικές και κυκλομετρικές συναρτήσεις

Ακτινικό μέτρο γωνίας



Μέτρηση γωνίας: α) Μοίρες (°)
β) Ακτίνια (rad)

Θεωρούμε τη θ ως επίκεντρη γωνία ενός κυκλικού τομέα ακτίνας 1. $\Rightarrow$ το ακτινικό μέτρο της θ $\equiv$ μήκος τόξου του αντίστοιχου κυκλικού τομέα.



Μήκος της περιφέρειας του κύκλου ακτίνας $1 = 2\pi\cdot 1 = 2\pi$

Ακτινικό μέτρο $360° = 2\pi$

$$\boxed{\frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180}}$$

α: ακτινικό μέτρο
μ: γωνία σε μοίρες

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

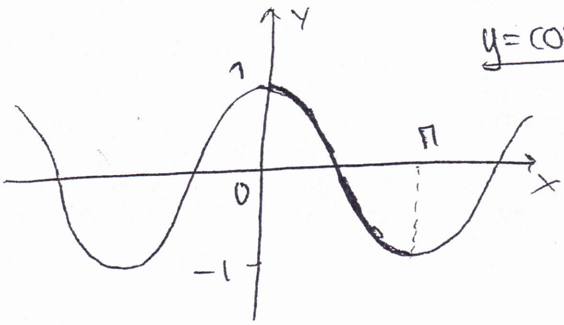
$\sin x = \sin(x \text{ rad}), x \in \mathbb{R}$

$\cos x = \cos(x \text{ rad}), x \in \mathbb{R}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$y = \cos x.$



Δεν αντιστρέφεται γενικά, αλλά αν την "κόψω" σε κατάλληλα σημεία (συγκεκριμένα την cos x από 0 μέχρι π) μπορώ να την αντιστρέψω

★ $\arcsin(\sin(\frac{3}{2})) = \frac{3}{2}$ → επειδή είναι $\arcsin x = (\sin x)^{-1}$

Κυκλομετρικές συναρτήσεις

Είναι οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών

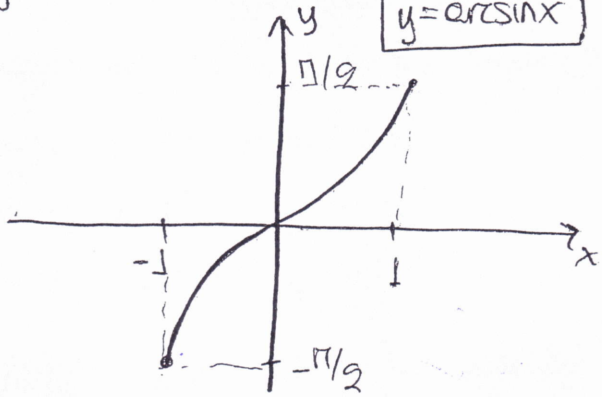
α) $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\boxed{y = \arcsin x} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

⇓

$(y = \text{τοξημ}(x))$

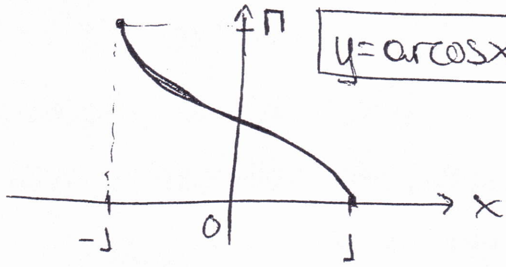
$\boxed{y = \arcsin x}$



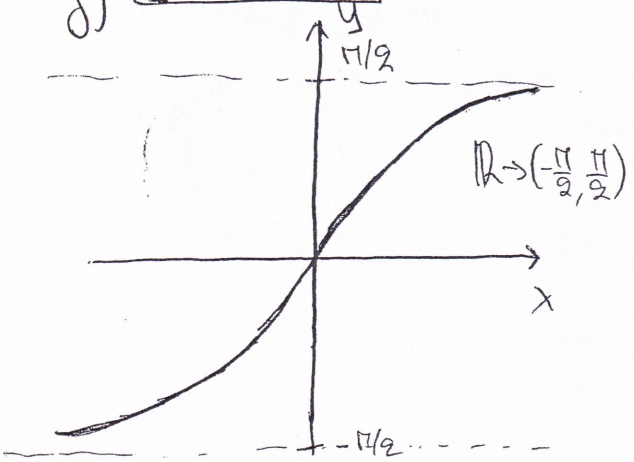
β) $y = \cos x, x \in [0, \pi]$

$y = \arccos x, [-1, 1] \to [0, \pi]$

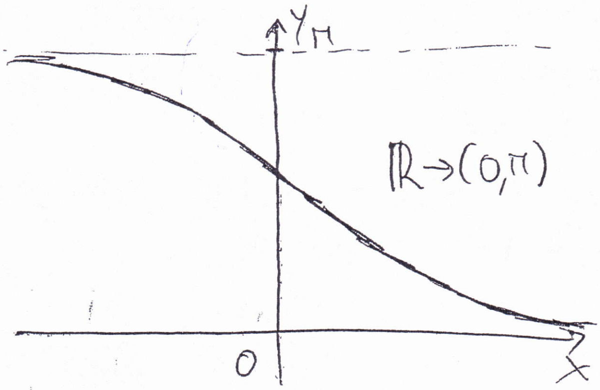
$\boxed{y = \arccos x}$



γ) $\boxed{y = \arctan x}$



δ) $\boxed{y = \operatorname{arccot} x}$



ΔΕΥΤΕΡΑ

10/11/2014

• Εκθετικές συναρτήσεις

Δύο τρόποι αναπαράστασης της e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \mathbb{R} \to (0,+\infty) \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \ a_n = \frac{1}{n!} \right)$$

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \ \mathbb{R} \to (0,+\infty)$$

Γενικά

$y = a^x = e^{x \ln a}$, $a>0$, $x \in \mathbb{R}$ και $\mathbb{R} \to (0,+\infty)$

Πρόταση: $a>0$.
$y=a^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα για $a>1$ και γνησίως φθίνουσα για $a<1$.

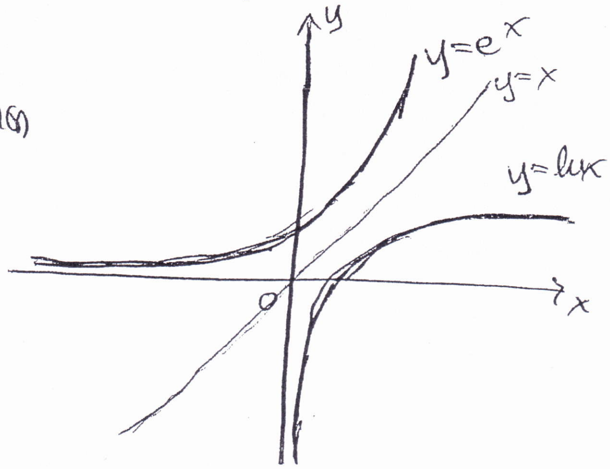
• Λογαριθμική συνάρτηση

Η e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως είναι αντιστρέψιμη

Αντίστροφη: $\ln x : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$\ln x$ = φυσική λογαριθμική συνάρτηση

$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$

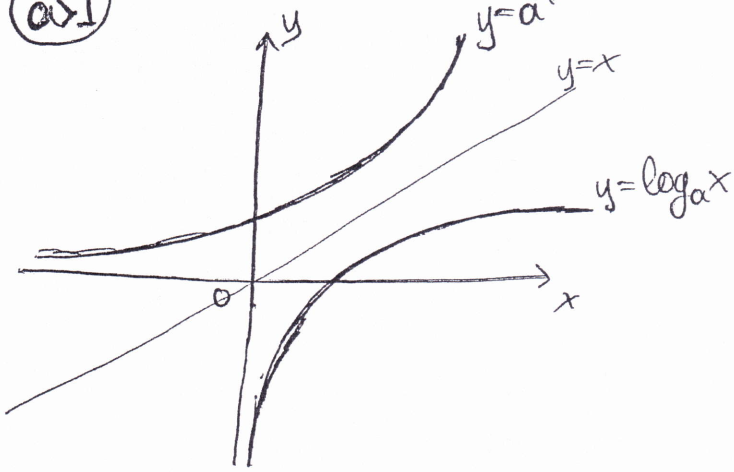


Γενικά

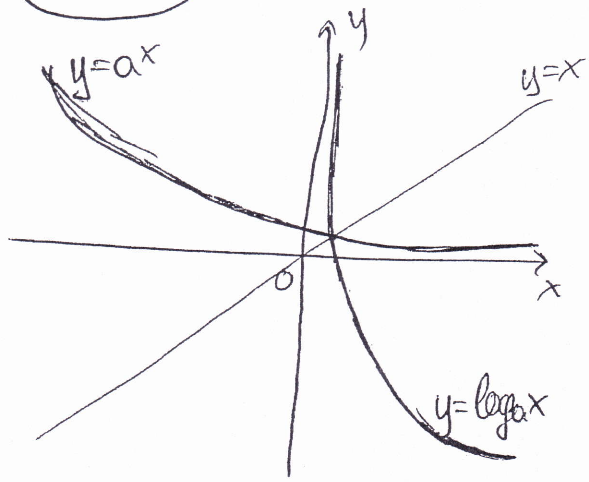
Η αντίστροφη της $y=a^x$ είναι ο λογάριθμος με βάση το a: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

$\log_a x : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$a>1$



$0<a<1$



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΤΡΙΤΗ
11/11/2014

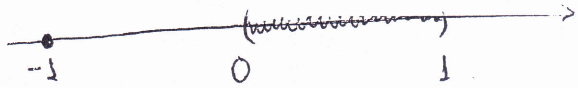
Όρια πραγματικών συναρτήσεων

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \qquad (f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

π.χ. $A=(0,1)$

$f:(0,1)\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x\to 0$ ή $x\to 1$ (μπορώ να το πω αφού κι αν $0,1 \notin A$)



→ Η f ορίζεται πολύ κοντά στο 0 από δεξιά $\mathbb{R}$ και πολύ κοντά στο 1 από αριστερά.

Έστω $A=(0,1)\cup\{-1\}$. Δεν μπορώ να πω $x\to -1$ γιατί η f δεν ορίζεται πολύ κοντά στο -1.

Σημείο συσσώρευσης συνόλου

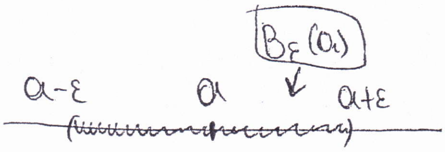
Ορισμός: (ανοικτή ε-περιοχή)

$a\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$ τότε $\boxed{B_\varepsilon(a)} = \{x\in\mathbb{R}, |x-a|<\varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}$.

↓

ονομάζεται μια ε-περιοχή του a

$B_\varepsilon(a) = \{x\in\mathbb{R}: a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$:



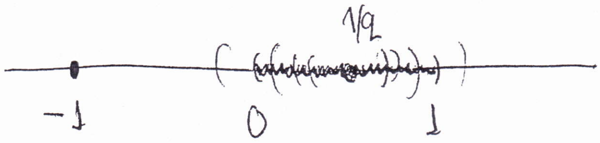
Ορισμός

$A\subseteq\mathbb{R}$, ένα $a\in\mathbb{R}$ ονομάζεται σημείο συσσώρευσης του A όταν για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $A\cap(B_\varepsilon(a)\setminus\{a\})\neq\emptyset$.

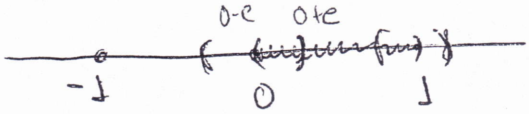
Δηλαδή όταν κάθε ανοικτή ε-περιοχή $B_\varepsilon(a)$ του (a) περιέχει ένα τουλάχιστον $x\in A$ διαφορετικό του a.

Παράδειγμα $A=(0,1)\cup\{-1\}$

a)

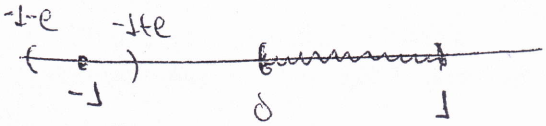


π.χ. παίρνω το 1/2. Πρέπει όλα τα διαστήματα $(1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon)$ να περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο $\neq 1/2$. Άρα το 1/2 είναι σημείο συσσώρευσης του A. (το ίδιο ισχύει σε όλα τα εσωτερικά σημεία) β)



Παίρνω το 0. Στην περιοχή $(0, 0+\varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, +\varepsilon)$ υπάρχουν σημεία $\neq 0$. Άρα το 0 είναι σημείο συσσώρευσης. Με τον ίδιο τρόπο και το 1 είναι σημείο συσσώρευσης. Άρα γενικά όλα τα εσωτερικά σημεία του $(0,1)$ είναι σημεία συσσώρευσης καθώς και τα άκρα 0, 1 παρότι δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

γ)



Αρκεί ν' αποδείξω ότι για ένα ε δεν ισχύει ο ορισμός. Παίρνω $\varepsilon = 1/2$. Στο $(-3/2, -1/2)$ δεν υπάρχει άλλο σημείο εκτός του -1. Άρα το -1 δεν είναι σημείο συσσώρευσης. (μεμονωμένο σημείο)

☆ Ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται μεμονωμένο σημείο όταν $a \in A$ και a δεν είναι σημείο συσσώρευσης. (π.χ. -1 του προηγούμενου παραδείγματος)

Ορισμός: (όριο πραγματικής συνάρτησης)

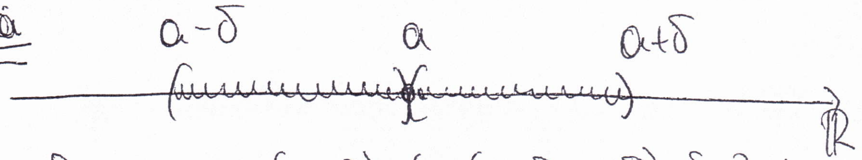
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και a σημείο συσσώρευσης του A.

Η f έχει ως όριο τον $b \in \mathbb{R}$ όταν $x \to a$: $\lim_{x \to a} f(x) = b$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - b| < \varepsilon$, $\forall x \in A$ με $x \neq a$ και $|x - a| < \delta$

Γραφικά



Για τα $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ ισχύει $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Όταν a είναι μεμονωμένο σημείο του A (οπότε $a \in A$) τότε $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Τρίτη
11/11/2014

Αλγεβρικές ιδιότητες ορίων

Αποτελέσματα για όρια στοιχειωδών συναρτήσεων:

- $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n \quad n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}$
- $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

  $\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$
- $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \quad x_0\in\mathbb{R},\ q(x)\neq 0.$

  $\lim\limits_{x\to x_0} r(x) = r(x_0) = \dfrac{p(x_0)}{q(x_0)}$

Παράδειγμα I: $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1} = ?$

Λύση: $x\to 1,\ x\neq 1.$

$L = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+1) = 1.$

Θεώρημα

$f,g,h : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και a σημείο συσσώρευσης του A.

Αν $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ και $\boxed{g(x)\leq f(x)\leq h(x)}$, $\forall x\in A$ με $0<|x-a|<\delta$

τότε $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = b}.$

Παράδειγμα II: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Είναι $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ x\neq 0$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Ασκήσεις

A) Ν.δ.ο.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ (Υπόδ: $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$) B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$

Θεώρημα: (Αρχή μεταφοράς)

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και α σημείο συσσώρευσης του A τότε οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1) Υπάρχει το $\lim_{x\to a} f(x) = b$

2) Για κάθε ακολουθία (x_n) του A με $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to a$ έχουμε $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

Αν βρω $x_n \to a$ $f(x_n) \to b_1$
$y_n \to a$ $f(y_n) \to b_2$ με $b_1 \neq b_2$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a} f(x)$

Παράδειγμα III:

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$

Λύση

$\to x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $f(x_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \longrightarrow 1$

$\to y_n = -\frac{1}{n} \to 0$, $f(y_n) = \frac{\left|-\frac{1}{n}\right|}{-\frac{1}{n}} = -1 \to -1$

$\boxed{1 \neq -1}$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ (αρχή μεταφοράς)

Παράδειγμα IV:

N.δ.ο. $\lim_{x\to 0} (x\sin(\frac{1}{x})) = 0$ (σπίτι)

Για $x \neq 0$ έχουμε $|x\sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$ $(\sin x \leq 1)$

οπότε

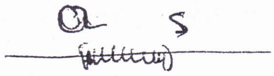
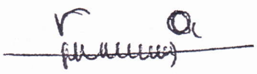
$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

$\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$ και $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ άρα $\lim_{x\to 0}(x\sin(\frac{1}{x})) = 0$

Τρίτη
11/11/2014

Πλευρικά όρια

$x \to \alpha$ από μεγαλύτερες ή από μικρότερες τιμές.

- $x \to \alpha^+$ όταν $(\alpha, s) \subseteq A$, α δεξιό σημείο συσσώρευσης 
- $x \to \alpha^-$ όταν $(r, \alpha) \subseteq A$, α αριστερό σημείο συσσώρευσης 

Ορισμός

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και α δεξιό (αριστερό) σημείο συσσώρευσης του A.

- $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ \boxed{x > \alpha}}} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ \boxed{x < \alpha}}} f(x)$

ονομάζονται δεξιό (αριστερό) πλευρικό όριο της f στο α

Παράδειγμα V

Ν.δ.ο $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{x+|x|} = 0$

Λύση

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x+|x|} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ \boxed{x > 0}}} \frac{x^2}{x+|x|} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Θεώρημα

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και α δεξιό (αριστερό) σημείο συσσώρευσης του A και $b \in \mathbb{R}$.

Ισοδύναμοι ισχυρισμοί

1) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = b$

2) $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = b$

Παράδειγμα VI

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **Λύση:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Άρα το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει.

Όρια συνάρτησης στο $\pm\infty$

Μπορούμε να ορίσουμε για $a=\pm\infty$ ή/και για $b=\pm\infty$

$f: A\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $(r,+\infty)\subseteq A$ ή $(-\infty,s)\subseteq A$ τότε αντίστοιχως

$+\infty$ σημείο συσσώρευσης του A

$-\infty$ σημείο συσσώρευσης του A

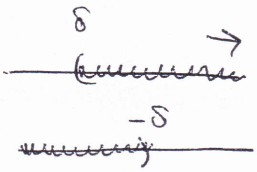
Ορισμός: $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

και $+\infty$ $(-\infty)$ είναι σημείο συσσώρευσης του A

Τότε

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = b\in\mathbb{R} \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$|f(x)-b|<\varepsilon,\ \forall x\in A \text{ με } \boxed{x>\delta\ (x<-\delta)}$$



Ορισμός: $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και a είναι σημείο συσσώρευσης του A.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ (-\infty)$$

$$\iff$$

$$\forall k>0,\ \exists\ \delta=\delta(k) \text{ τέτοιο ώστε } f(x)>k\ (f(x)<-k)$$

$$\forall x\in A \text{ με } x\neq a,\ |x-a|<\delta$$

★ Ισχύει η αρχή μεταφοράς και για $x\to\pm\infty$

Παράδειγμα VII

Ν.δ.ο $\lim_{x\to+\infty}(\overbrace{x\sin x}^{f(x)})$ δεν υπάρχει.

Λύση

$x_n\to+\infty,\ x_n=2n\pi\to+\infty$

$y_n\to+\infty,\ y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n)=2n\pi\cdot\sin(2n\pi)=0\longrightarrow 0=b_1 \\ f(y_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\longrightarrow+\infty=b_2 \end{array}\right\}\ b_1\neq b_2 \text{ άρα το } \lim_{x\to+\infty}(x\sin x) \text{ δεν υπάρχει}$$

Να αποδειχθεί

ΤΡΙΤΗ

11/11/2014

$$R(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0}$$, $m,n\in\mathbb{N}$ και $a_n, b_m\neq 0$.

1) $n<m$ τότε $\lim_{x\to \pm\infty} R(x)=0$

2) $n=m$ τότε $\lim_{x\to \pm\infty} R(x)=\frac{a_n}{b_n}$

3) $n>m$ τότε $\lim_{x\to+\infty} R(x)=\frac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty)$ και $\lim_{x\to-\infty} R(x)=(-1)^{n-m}\cdot\frac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty)$

Λύση

$$R(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0}$$

$$=\frac{a_n}{b_m}\cdot\frac{x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\dots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}}{x^m+\frac{b_{m-1}}{b_m}x^{m-1}+\dots+\frac{b_1}{b_n}x+\frac{b_0}{b_n}}$$

$$=\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\cdot\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{x^{n-1}}{x^n}+\dots+\frac{a_1}{a_n}\frac{x}{x^n}+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot\frac{x^{m-1}}{x^m}+\dots+\frac{b_1}{b_m}\frac{x}{x^m}+\frac{b_0}{b_m}\frac{1}{x^m}}$$

$$=\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\cdot\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x}+\dots+\frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot\frac{1}{x}+\dots+\frac{b_1}{b_m}\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m}\cdot\frac{1}{x^m}}$$ είναι $\frac{1}{x^n}\to 0$ καθώς $x\to+\infty$ ή $x\to-\infty$.

άρα $R(x)=\frac{a_n}{b_m}\cdot x^{n-m}$

1) Αν $n<m$ τότε $\lim_{x\to+\infty} R(x)=\frac{a_n}{b_m}\frac{1}{x^{m-n}}=0$ και $\lim_{x\to-\infty} R(x)=\frac{a_n}{b_m}\frac{1}{x^{m-n}}=0$.

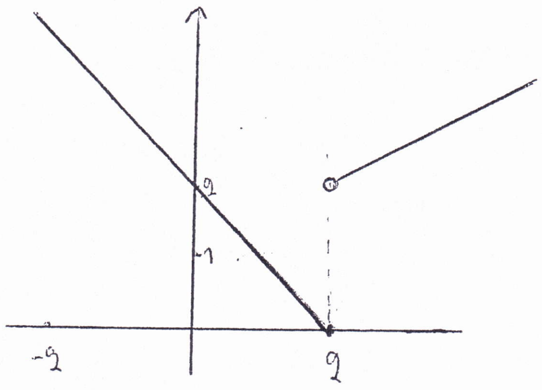
2) Αν $n=m$ τότε $\lim_{x\to+\infty} R(x)=\frac{a_n}{b_m}\cdot 1=\frac{a_n}{b_m}$ και $\lim_{x\to+\infty} R(x)=\frac{a_n}{b_m}\cdot 1=\frac{a_n}{b_m}$

3) Αν $n>m$ τότε $\lim_{x\to+\infty} R(x)=\frac{a_n}{b_m}\cdot x^{n-m>0}=\frac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty)$ και $\lim_{x\to-\infty} R(x)=\frac{a_n}{b_m}(-x)^{n-m}$
$=(-1)^{n-m}\cdot\frac{a_n}{b_m}\cdot x^{n-m>0}=(-1)^{n-m}\cdot\frac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty)$

ΔΕΥΤΕΡΑ
24/11/2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

• $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x\le 2 \\ \frac{x}{2}+1, & x>2 \end{cases}$ η f είναι ασυνεχής συνάρτηση (σημείο ασυνέχειας το 2)



$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ γιατί τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα

Ορισμός

$f: A\to\mathbb{R}$, f συνεχής στο $x_0\in A$ αν-ν 1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Γενικά στο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ το x_0 μπορεί να ανήκει στο D_f ή να μην ανήκει σε αυτό. Για να είναι συνεχής όμως η συνάρτηση πρέπει απαραίτητα να είναι $x_0\in D_f$.

• $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ Είναι η f συνεχής στο 0;

$|x\sin\frac{1}{x}| \le |x| \Rightarrow -x \le |x\sin\frac{1}{x}| \le x$ από κριτήριο παρεμβολής έχω $\lim\limits_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}| = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Κριτήριο για μη-σύγκλιση

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$ (x_n → ακολουθία) $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = l_2$. Αν $l_1\neq l_2$ τότε το $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ δεν υπάρχει

Παράδειγμα: $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ Είναι συνεχής;

$x_n = \frac{1}{2n\pi}$: $\sin 1/x_n = 0 \to 0$

$y_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$: $\sin 1/y_n = 1 \to 1$

$0\neq 1$ άρα το $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει

ΤΑ ΤΡΙΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

① Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι φραγμένη.

f φραγμένη στο $[a,b]$, $\exists M$ τέτοιο ώστε $|f(x)|\leq M$.

② f συνεχής στο $[a,b]$ και $c\in(f(a),f(b))$ $(f(a)<f(b))$. τότε $\exists\, x_0$: $a<x_0<b$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=c$.

Ειδική περίπτωση: Θ. Bolzano.

$$\begin{bmatrix} f(a)\cdot f(b)<0 \\ c=0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \exists x_0 : f(x_0)=0.$$

Πόρισμα

$f(x)\in \mathbb{R}[x]$ → πολυώνυμα με συντελεστές στο $\mathbb{R}$

$\deg f=$ περιττός, τότε έχει μια πραγματική ρίζα

Απόδειξη

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=-\infty$$

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ οπότε $\exists M\geq 0$ τέτοιο ώστε $\forall x\geq M$: $f(x)>0$ και $\exists N\geq 0$ τέτοιο ώστε $\forall x\leq -N$: $f(x)<0$. (βλ. ορισμός ορίου στο άπειρο)

Εφαρμόζω Bolzano στο $[-N,M]$.

$f(-N)<0$ $\quad f(M)>0$ $\quad$: $f(-N)f(M)<0$.

Άρα $\exists\, x_0\in(-N,M)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

③ Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$

ΔΕΥΤΕΡΑ
24/11/2014

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Ορισμός

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ ή το (θέτω $x-x_0=h$) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Συμβολισμοί της παραγώγου:
1) f' Lagrange
2) $\dot{f}$ Newton
3) $\dfrac{df}{dx}$ Leibniz

- Αν f,g παραγωγίσιμες στο x_0 τότε $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

Απόδειξη

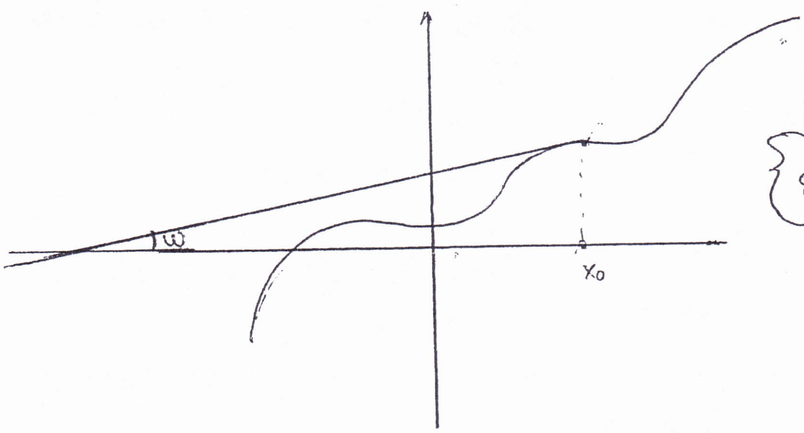
$$\lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h)\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)+f(x_0)\big(g(x_0+h)-g(x_0)\big)}{h}$$

επειδή $\lim\limits_{h \to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$ γιατί η g είναι συνεχής. Άρα το πάνω όριο γίνεται:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot g(x_0) + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \cdot f(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0).$$

- Γραφικά η παράγωγος σε ένα σημείο x_0 είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με τον $x'x$ η εφαπτομένη της καμπύλης στο x_0.



$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = f'(x_0)}$$

Κανόνας αλυσίδας

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Παράδειγμα

i) $(\sin(\cos x))' = \cos(\cos x)\cdot(\cos x)'$
$= -\sin x\cos(\cos x)$.

ii) $(e^{\sin x})' = e^{\sin x}\cdot \cos x$

iii) $[\ln(7x+2)]' = \dfrac{7}{7x+2}$

Ασκήσεις για το σπίτι

1) $f:[0,1]\to[0,1]$ συνεχής Ν.δ.ο. $\exists\, x_0\in[0,1]$ με $f(x_0)=x_0$.

$a=0$ και $b=1$. $c=x_0$. $f(a)=0$ και $f(b)=1$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας)

$0<x_0<b$ και $f(a)<c<f(b)$. Άρα από το θεώρημα (2) ενδιαμέσων τιμών) $\exists\, x_0\in(0,1)$ τ.ω $f(x_0)=c \Rightarrow \boxed{f(x_0)=x_0}$

2)
$$f=\begin{cases} 2x+1 & x\le 2 \\ ax-b, & 2<x<3 \\ x^2+2, & x\ge 3 \end{cases}$$

Είναι $f(2)=5$
$f(3)=11$

Για να είναι συνεχής η f στο 2 πρέπει

$\lim\limits_{x\to 2^+}(ax-b)=5 \Rightarrow 2a-b=5$. (1).

Για να είναι συνεχής και στο 3 πρέπει $\lim\limits_{x\to 3^-}(ax-b)=11 \Rightarrow 3a-b=11$ (2).

Από τις (1) κ' (2): $\begin{cases}2a-b=5\\3a-b=11\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a-5=b\\3a-(2a-5)=11\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=2a-5\\a+5=11\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}b=2a-5\\a=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\boxed{a=6}\\\boxed{b=7}\end{cases}$ Άρα για να είναι η f συνεχής

πρέπει $a=6$ και $b=7$. Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι ασυνεχής.

ΤΡΙΤΗ

25/11/2014

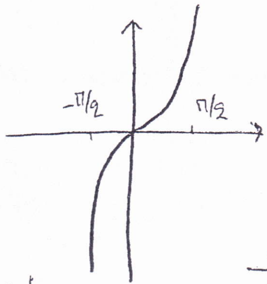
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Πρόταση

f γνησίως μονότονη κ' παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)\neq 0$, τότε $g=f^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $y_0=f(x_0)$ με $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

Παράδειγμα

① $y=f(x)=\tan x,\ x\in(-\pi/2,\pi/2)$



$g=f^{-1}=\arctan y$

Είναι (σύμφωνα με την πρόταση): $(\arctan y)'=\dfrac{1}{(\tan x)'}=\dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos^2 x$

$\cos^2x+\sin^2x=1$

$1+\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$

$\cos^2x=\dfrac{1}{1+\tan^2x}$

άρα $(\arctan y)'=\cos^2x=\dfrac{1}{1+\tan^2x}$ αλλά $y=\tan x$ οπότε

$(\arctan y)'=\dfrac{1}{1+y^2}$ πρέπει στο τέλος να γράψω την παράγωγο συναρτήσει του y.

② $(\arcsin y)'=?\quad y=\sin x,\ x=(-\pi/2,\pi/2)$

$(\arcsin y)'=\dfrac{1}{(\sin x)'}=\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ άρα

$(\arcsin y)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

③ (Άσκηση): Να βρείτε την $(\arccos x)'$.

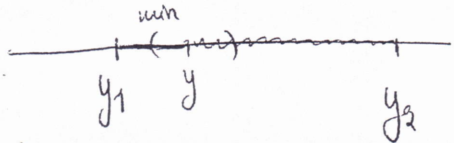
Απόδειξη πρότασης

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\neq 0 \text{ άρα } \frac{1}{f'(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$$

τέτοιο ώστε $\forall x\in(x-\delta,x+\delta)$ $\left|\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)}\right|<\varepsilon$ (1).

Έστω $x_0-\delta<x<x_0+\delta$. Έστω $f\uparrow$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας) άρα

$$\underset{\Downarrow\ y_1}{f(x_0-\delta)}<\underset{\Downarrow\ y}{f(x)}<\underset{\Downarrow\ y_2}{f(x_0+\delta)}$$



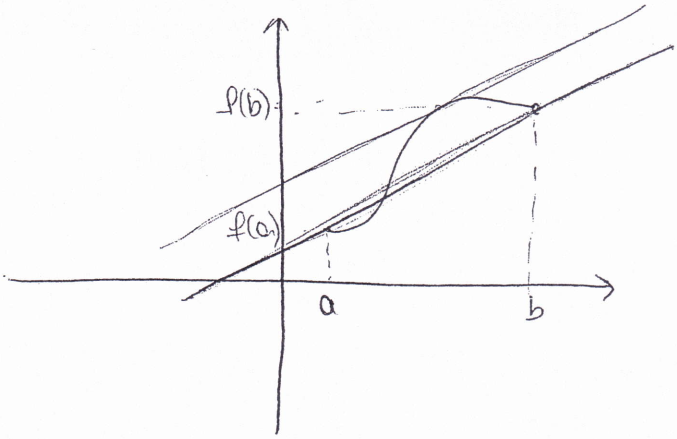
(Ψάχνω να βρω η τέτοιο ώστε $|y-y_0|<\eta$ δηλ. $(y_0-\eta,y_0+\eta)\subset(y_1,y_2)$)

η (1) γίνεται:

$$0<\eta\leq\min\{y_0-y_1,\ y_2-y_0\} \Longrightarrow \forall y\in(y_0-\eta,y_0+\eta)\ \left|\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-\frac{1}{f'(x_0)}\right|<\varepsilon$$

Θεώρημα μέσης τιμής

f συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b).
Τότε $\exists x_0\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ = κλίση της ευθείας που περνάει από τα $(a,f(a))$, $(b,f(b))$



Πόρισμα

Θ. Rolle: f συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)$ $\exists x_0\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$

Παρατήρηση

1) Αν $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$ τότε $f(x)=c$ (σταθερή)

ΤΡΙΤΗ
25/11/2015

(για την παρατήρηση)

$\forall x_1, x_2$ τ.ω. $(x_1,x_2) \subseteq (a,b)$ $\exists x_0 \in (x_1,x_2): f'(x_0) = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 0 \Rightarrow$

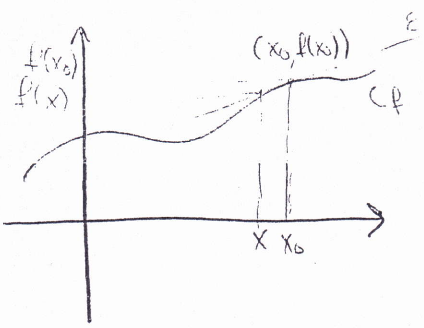
$f(x_1)=f(x_2)$ $\forall x_1,x_2$ (άρα $f=$ σταθερή)

2) $f'=g'$ $\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow \exists c =$ σταθερά τ.ω. $f(x)=g(x)+c$

(Έστω f συνεχής $\{g : g'=f\} = \{f=g+c\}$
(άπειρα το αόριστο ολοκλήρωμα))

Γραμμικοποίηση

$\varepsilon: y = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{L_{f,x_0}(x) \approx f(x_0+\Delta x)} = f(x_0)+f'(x_0)(\Delta x)$ → όταν το x είναι κοντά στο x_0



Π.χ. Θέλω να βρω μια προσέγγιση της $\sqrt{100{,}05}$

εκεί κοντά ξέρω ότι $\sqrt{100} = 10$

$f(x) = \sqrt{x}$

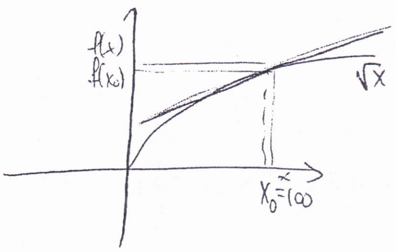
$x_0 = 100$

$\Delta x = 0{,}05$

$\Big\} \; L_{f,x_0}(x) = \sqrt{100} + \dfrac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 0{,}05$

$= 10 + \dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{5}{100}$

$= 10 + \dfrac{1}{4\cdot 100} = \boxed{10{,}0025}$



$\boxed{\text{Σπίτι}}$ 1) $\sqrt{99}$ 2) $\sqrt{24}$
γραμμική προσέγγιση

Παράδειγμα 2

$f(x) = \sqrt{1+x}$. Θέλω να βρω γ.προσ. στο $x_0=0$

$L_{f,0}(x) = f(0)+f'(0)\cdot x = 1+\frac{1}{2}x$ άρα η $f(x)$ κοντά στο 0 $\approx 1+\frac{1}{2}x$.

$\boxed{\text{Σπίτι}}$ Βρείτε τη γραμμική προσέγγιση των $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ στο $x_0=-4$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ στο $x_0=-8$

$f(x) = \tan x$ στο $x_0=\pi$.

Θεώρημα Fermat f παραγωγίσιμη

Αν x_0 είναι τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0)=0$, $x_0 \in (a,b)$

Απόδειξη

Έστω x_0 σημείο τοπικού μεγίστου. $\exists h \in \mathbb{R}$ μικρό

$$f(x_0) \geq f(x_0+h)$$

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, h>0 \text{ άρα } \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \\ \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, h<0 \text{ άρα } \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \end{cases}$$

Άρα $f'_\delta(x_0) \leq 0$, $h \to 0^+$ και $f'_\alpha(x_0) \geq 0$, $h \to 0^-$

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη, άρα $f'_\delta = f'_\alpha = \boxed{0 = f'(x_0)}$

Παράδειγμα

f /// $[a,b]$: ψάχνω τοπικά ακρότατα

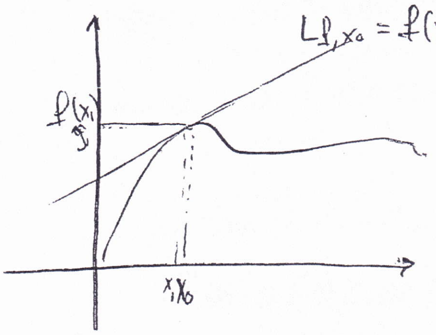
- ψάχνω $f'(x_0)=0$, $x_0 \in (a,b)$ για τα εσωτερικά τοπικά ακρότατα
- ψάχνω τα άκρα
- ψάχνω για τα σημεία που δεν παραγωγίζεται

Αν f συνεχής στο $[a,b]$ έχει πάντα ολικά ακρότατα

ΔΕΥΤΕΡΑ
1/12/2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

$L_{f,x_0} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$



$$|\hat{y}_1 - y_1| = |f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)-f(x_1)|$$
$$= \left|\underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\text{ΘΜΤ}} + f'(x_1)\right| \cdot \underbrace{|x_1-x_0|}_{\le\delta} \quad (1)$$

Θεωρώ ότι $|x_1-x_0| \le \delta$ και $|f'(x)| \le M$ $\forall x$ κοντά στο x_0 (από ερμηνεία 2η)

Άρα η (1) γίνεται: $\left|\underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\le M} + \underbrace{f'(x_1)}_{\le M}\right| \cdot |x_1-x_0| \le 2\delta M$

Μονοτονία

Αν $f'(x)>0$ σε ένα διάστημα $I \subseteq D_f$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο I.

Απόδειξη

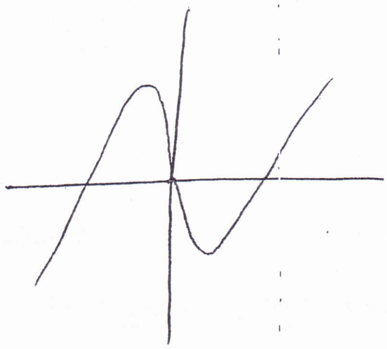
$\forall x_1, x_2 \in I \ (x_1 < x_2)$

$\exists \xi \in (x_1, x_2): f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Είναι $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$ άρα $\underline{f(x_2)>f(x_1)}$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει (π.χ. $f(x)=x^3$)

Παράδειγμα: γράφημα της $f(x)=x^3-x$

	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	Τ.Μ	↘	Τ.Ε.	↗	



Κριτήριο της β' παραγώγου για ακρότατα

$f: I \to \mathbb{R}$, I διάστημα

Αν $f'(x_0)=0$ ~~τότε~~ και $f''(x_0)>0$, τότε η f παρουσιάζει Τ.Ε. στο x_0.

Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$, τότε η f παρουσιάζει Τ.Μ. στο x_0.

Cauchy

h

Απόδειξη (για Τ.Ε.)

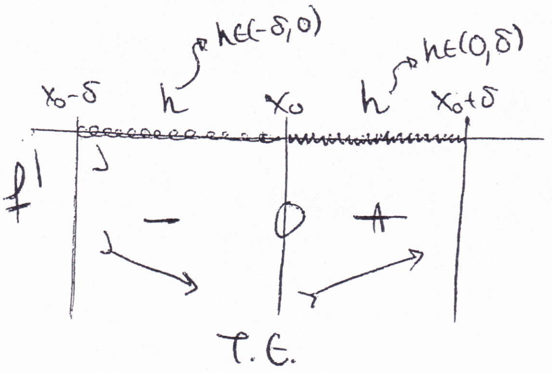
$$f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}>0$$

- $|h|<\delta$, $\delta>0$
- θετικό μικρό: $h\in(0,\delta)$, $\delta>0$, $f'(x_0+h)>0$
- αρνητικό μικρό: $h\in(-\delta,0)$, $\delta>0$, $f'(x_0+h)<0$

Για h μικρό έχω $\frac{f'(x_0+h)}{h}>0$

$\Leftrightarrow$ $f'(x_0+h)$, h ομόσημα $\to$ αν $h>0$ (μικρό) τότε $f'(x_0+h)>0$

$\to$ αν $h<0$ (μικρό) τότε $f'(x_0+h)<0$



(Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x)>0$ τότε η f παρουσιάζει Τ.Ε. στο x_0)

Πολυώνυμο Taylor (Τα γραμμικές προσεγγίσεις συναρτήσεων που είναι πολυώνυμα)

$f(x)=a_n x^n+\dots+a_1x+a_0$

$a_j\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$, $\deg f=n$

$f(0)=a_0$

$f'(0)=a_1$

$f''(0)=2a_2$

$f'''(0)=6a_3$

$\vdots$

$\boxed{f^{(n)}(0)=n!\,a_n}$

$a_j=\frac{f^{(j)}(0)}{j!}$ .. $\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}$

Ορισμός

Έστω $f:I\to\mathbb{R}$, I διάστημα, f άπειρες φορές παραγωγίσιμη.
Το πολυώνυμο $P_{n,f,x_0}(x)=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$ ονομάζεται πολυώνυμο Taylor βαθμού n, της f, στο x_0.
Για $x_0=0$ ονομάζεται πολυώνυμο Mac Laurin.

Παράδειγμα

f: $\sin x$ πολυώνυμο Mac Laurin της f, βαθμού 1:

$P_{1,f}(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x=x$ ($f(0)+f'(0)x=x=L_{f,0}$ γραμμικοποίηση της f στο 0)

βαθμού 2: $\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f(0)}{0!}$

$$P_{2,f}(x) = x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!}$$

$$P_{3,f}(x) = x - \frac{x^3}{3!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^3(0)x^3}{3!}$$

$$P_{5,f}(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^5}{5!}$$

Όσο αυξάνει ο βαθμός του πολυωνύμου τόσο πλησιάζει στο ημίτονο!

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$ (ο ορισμός της συνάρτησης του συνημιτόνου)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

Υπαρξιακό

Θεώρημα Taylor (Δεδομένο: $R_{n,f,x_0} = |f(x) - P_{n,f,x_0}(x)| =$ σφάλμα)

Έστω f ορισμένη σε μια περιοχή του x_0 (δηλ. $I_\delta = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ για κάποιο $\delta > 0$) και η f έχει άπειρες παραγώγους στο x_0.
Τότε, $\exists\ \xi = \xi(x) \in I_\delta$ με $f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}$ όπου

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Παρατήρηση: Έστω $|f^{(n+1)}(x)| < M$, $\forall x \in I_\delta$ τότε $|R_n| < \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Γι' αυτό μπορούμε να πλησιάσουμε τόσο πολύ τη $\sin x$ (επειδή είναι φραγμένο)

★ Η f είναι ίση με μια δυναμοσειρά αν $R_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$\sin 1 = ?$ με 2 δεκαδικά

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| |x|^{n+1} \le \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \le 10^{-2}}$$

$\to (n+1)! \ge 100$

$n=4$ (γιατί $5!$ το πρώτο παραγοντικό μετά το 100) ορε πορευ

Σπίτι

cosx

Να βρούμε το πολυώνυμο Mac Laurin και το σφάλμα με 3 δεκαδικά του cos1.

$\boxed{f = e^x}$

$P_{n,f,0}(x) = 1 + xe^x + \frac{x^2 e^x}{2} \ldots (x=0)$

$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1 \quad f^{(n)}(0) = 1.$

$P_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} x^n$ και πράγματι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ (απόδειξη later)

$\boxed{f(x) = x\sin x}$ Μπορώ να κάνω πράξεις μεταξύ σειρών κ συναρτήσεων.

$f(x) = x\sin x$

$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}$ } είναι η δυναμοσειρά της f(x) αλλά όχι σειρά Taylor

ΘΥΜΑΜΑΙ

$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$

γιατί είναι

$\lim_{n\to+\infty} c(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) =$

$\lim_{n\to+\infty} (ca_0 + ca_1 + \ldots + ca_n)$

Γραμμικοποίηση

Θέτουμε $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Η $L(x)$ καλείται γραμμικοποίηση της L στο x_0.

Η L είναι μια "καλή" προσέγγιση της f "κοντά" στο x_0, με την εξής έννοια.

$f(x) - L(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \Leftarrow$

διαιρούμε με $x - x_0$

$\frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} \Rightarrow$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$

Γράφουμε $f(x) \simeq L(x)$ κοντά στο x_0

ΤΡΙΤΗ
9/12/2014

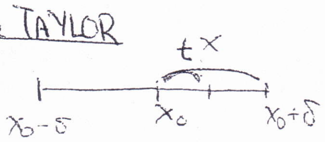
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

τύπος του Lagrange

Απόδειξη θεωρήματος Taylor

Έστω $x > x_0$



Θέτω $q(t) = \underbrace{f(t) - P_{n,f,x_0}(t)}_{R_n(t)} - \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot (t-x_0)^{n+1}$

$P_{n,f,x_0}(t) = f(x_0) + f'(x_0)(t-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(t-x_0)^2$

$P'_{n,f,x_0}(t) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot 2(t-x_0) \dots$

$P''_{n,f,x_0}(t) = f''(x_0) \dots$

$t \in (x_0, x) \rightsquigarrow x_0 \leq t \leq x$

$$\left.\frac{dR_n(t)}{dt}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad \left.\frac{d^2R_n(t)}{dt^2}\right|_{x=x_0}$$

$$\dots \left.\frac{d^{(n)}R_n(t)}{dt^n}\right|_{x=x_0} = 0 \Longrightarrow \left.\frac{d^{(k)}q}{dt^k}\right|_{x=x_0} = 0 \quad (A)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

$q(x_0) = 0$ (θέτωντας t το x_0)

$$q^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

Θα δείξω ότι $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε: $\boxed{q^{(n+1)}(\xi) = 0} \Rightarrow f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$

Θεώρημα Rolle

$\to [x_0, x], q(t)$

- $q(x_0) = 0$
- $q(x) = \underbrace{f(x) - P_n(x)}_{R_n(x)} - R_n(x) \Rightarrow q(x) = R_n(x) - R_n(x) = 0.$

Άρα $\exists\, \xi_1 \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε $q'(\xi_1) = 0$

$\to [x_0, \xi_1], q'(t)$

- $q'(x_0) = 0$ (A)
- $q'(\xi_1) = 0$

$\vdots$

$\to [x_0, \xi_n], q^{(n)}(t)$

- $q^{(n)}(\xi_n) = q^{(n)}(x_0) = 0 \Rightarrow \exists\, \xi \in (x_0, \xi_n) : q^{(n+1)}(\xi) = 0$ Ο.Ε.Δ.

e^x

Θα αποδείξω ότι: $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ → (ο τύπος ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$)

($x_0=0$, σειρά Maclaurin) ($f^n \leq x$. για αυτό τηρώ $\xi \in (0,x)$ βλ. απόδειξη)

Έστω $x>0$, $\exists \xi \in (0,x)$ τ.ω

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{(n+1)}\right| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \overset{\xi<x}{\leq} \frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Έστω $x<0$, $\exists \xi \in (x,0)$ τ.ω

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \overset{(e^{\xi}<e^0)}{\leq} \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Υπολογισμός του e με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

Στον τύπο βάζω $x=1$.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

είναι $\xi \in (0,1)$: $|R_n(1)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ $\quad \xi<1 \Rightarrow e^{\xi} \leq e^1 = e$.

και υποθέτω ότι $e \leq 3$

Άρα: $\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-2}$ → το περιθώριο που θέλω

$$\Downarrow$$

$(n+1)! \geq 300$ άρα $\boxed{n=5}$

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,71\dots$$ (ακρίβεια δύο ψηφίων)

Ορισμός

τα P(x) έχουν την ιδιότητα αυτή

Η f ίση με την g μέχρι την n-οστή τάξη στο x_0 ανν $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

παράδειγμα

$$e^x = \overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}}^{P_{n,f,0}(x)} + R_n$$

παίρνω το $P_{1,f,0}(x)$: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_1(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x} = 0$

$P_{2,f,0}(x)$: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x+\frac{x^2}{2})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{2x} = 0$

ΤΡΙΤΗ

2/12/2014

Στόχος να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor της arctanx.

Υποθέσεις: 1) $1+x+\dots+x^n+\dots=\frac{1}{1-x}$ για $|x|<1$

2) $1-x+\dots+(-1)^n x^n+\dots=\frac{1}{1+x}$ για $|x|<1$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$|t|<1$. $\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\dots+(-1)^n t^{2n}+\dots$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x \left(1-t^2+t^4-\dots+(-1)^n t^{2n}\dots\right)dt \Rightarrow$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_n \rightarrow$$ ΌΧΙ υπόλοιπο Taylor

Ψάχνω να βρω το διάστημα των x για τα οποία ισχύει η ισότητα και το R_n.

R_n

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1+t^2 \\ \hline -1-t^2 & 1-t^2+t^4\dots+(-1)^n t^{2n} \\ -t^2+t^4 & \\ \vdots & \\ (-1)^{n+1}t^{2n+1} & \end{array}$$

Άρα $1=(1+t)(1-t^2+t^4\dots+(-1)^n t^{2n})+(-1)^n t^{2n}+(-1)^{2n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}dt}{1+t^2}$

$$R_n=(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

$$\lim_{n\to\infty}|R_n| \le \lim_{n\to\infty}\int_0^x \frac{|t|^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

είναι $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \le \int_0^x 1\,dt \le M$ $(M>0)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x \frac{|t|^{2n+2}}{1+t^2}dt < M\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}=\infty$$

άρα η arctanx αποκλίνει όταν $|x|>1$.

$$\arctan x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots}_{Q_{n,f,x_0}}$$

$|x| < 1$

Q_{n,f,x_0} είναι το πολυώνυμο Maclaurin της arctan x.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

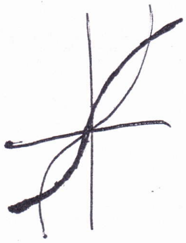
για $|x| < 1$

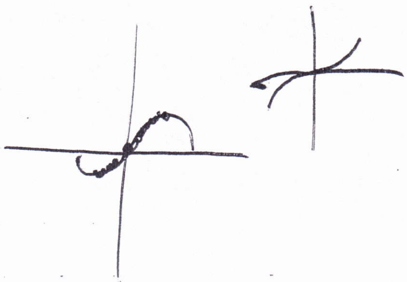
Ξ $[a,b]$

1) $f\uparrow$ εσωτερικός

2) $\lim\limits_{x\to b} f(x)=a$

3) $\nexists$ f'

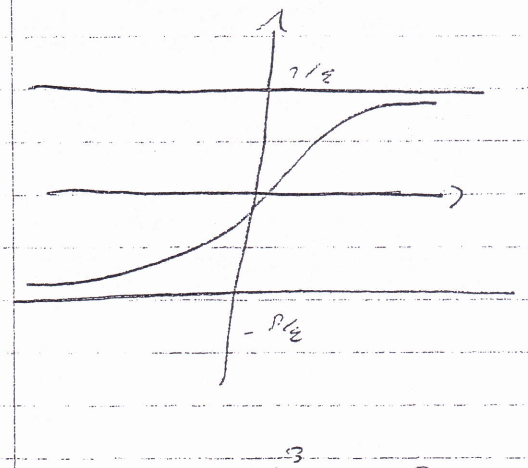




Λείπουν 2 μαθ.

Δευτέρα ~~Παρασκευή~~ 8/12

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt$$



$(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|<1}$$

f, g n-שוות סב x_0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\arctan x - P_{2n+1,f}}^{f}}{x^{2n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n+1} \int_0^x \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| dt}{x^{2n+1}} \right)$$

~~$\lim_{x\to 0}$ arctan x~~

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{\arctan x - P_{2n+1,f}}{x^{2n+1}} \right| \leq \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| dt}{x^{2n+1}} \leq$$

$$\leq \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x |t^{2n+2}|}{x^{2n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)x^{2n+1}} = 0$$

Ασκησεις

$|R_n| \leq 10^{-1} \Rightarrow$ το ελαχ n που πραγμ την προσεγ αυτοσοτης

1) $\sin\frac{1}{e}$ με σφαλμα $< 10^{-10}$

2) αν $a_0 + \dots + \frac{a_n}{(n+1)} = 0$, τοτε

$$\exists\, x_0 \in (0,1) : P(x_0) = a_0 + \dots + a_n x_0^{\,n} = 0$$

3) ν.α.ο $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

και κατοπιν βρειτε μια προσεγγιση του π

4) ν.α.ο

αν $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ τοτε $\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16$

(υποδ $\frac{a^2+1}{a} \geq 2$)

ΘΕΩΡΗΜΑ

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

συγκλινει $(x_0 - R, x_0 + R) = I_R$

R: ακτινα συγκλισης

την βρισκω ειτε με κριτηριο λογου ή με νιοστης ριζας τότε (α) η f παραγωγίζεται

στο I_R κ' $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n c_n (x-x_0)^{n-1}$

Επίσης $\exists$ f'', ..., $f^{(k)}$, ...

β) Ισχύει

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

και συγκλίνει στο I_R

Αόριστο ολοκλήρωμα

~~$\int f(x) dx$~~

διαφορικό του x

$$\int f(x) \boxed{dx} \overset{\infty}{=} F(x) + c$$

όπου $F' = f$

$$\boxed{\begin{array}{l} F, G \quad F' = G' = f \\ \qquad\qquad F = G + c \end{array}}$$

π.χ.

$$\int xy\,dy = x \int y\,dy = x\left[\frac{y^2}{2} + c\right]$$

Παρατήρηση

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

$$\parallel$$

$$\int \frac{df}{dx}\,dx$$

$F(y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$

$\frac{dy}{dx} = f(x)$

$y = \int f(x)\,dx + c$

$\rightarrow y(x_0) = y_0$

$\alpha)$ $\frac{dy}{dx} = x \iff \int dy = \int x\,dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$

$\beta)$ $\frac{dy}{dx} = xy \iff \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$

$\ln y = \frac{x^2}{2} + c$ $\cancel{\ln y} =$

$\gamma)$ $\frac{dy}{dx} = e^x(y^2+1)$

$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int e^x dx \Rightarrow \arctan y = e^x + c$

$y = \tan(e^x + c)$

$$\left.\frac{d y^2}{dx^2} = x \right\} \Rightarrow \text{ολοκληρώνω 2 φορές}$$

<u>Τεχνική ολοκλήρωσης</u>

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

$$fg - \int f'g = \int fg'$$

$\int P(x) e^{ax+b} dx$ $\qquad$ $\int P(x) \sin(ax+b)\, dx$

P πολυώνυμο

$\int P(x) \cos(ax+b)\, dx$

<u>π.χ</u>

$$\int x \cos(2x) dx = \int x \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)' dx =$$

$$= \frac{x \sin(2x)}{2} - \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx$$

$$= \frac{x \sin(2x)}{2} + \frac{1}{4} \cos(2x) + c$$

$$I = \int e^x \cos x\, dx = \int (e^x)' \cos x\, dx = \cancel{e^x}$$

$$= e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx$$

Άρα $\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx \Rightarrow$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx \Rightarrow$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2}$$ κάπου λάθος κι αυτό

<u>Η/Υ</u>

$\int x^2 \sin x\, dx$, $\int e^{3x} \sin(5x)\, dx$

<u>Μέθοδος αντικατάστασης</u>

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

$$u = g(x)$$

$$d f(x) \overset{\text{ορισμός}}{=} f'(x)\, dx$$

$$\int f(g(x))\, dg(x)$$

<u>Αν f συνεχής το αόριστο ολοκλήρωμα υπάρχει</u>

~~$n\,x$~~ $a > 0$

$$\boxed{\sin 2t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$\boxed{x(t) = a\sin t} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$dx = a\cos t\,dt$$

$$J = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\cdot dt =$$

$$= a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + c$$

$\downarrow$

$\cos t > 0$

$$\boxed{\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t} = 2\cos^2 t - 1$$

$$\int \cos^2 t = \int \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + c$$

$$= \ldots =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\cancel{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\cancel{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right)$$

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left[-\ln(a-x) + \ln(a+x)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + c$$

<u>Ρητά ολοκληρώματα</u>

(Όλα τα ρητά ολοκλ. λύνονται)

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

$P, Q \in \mathbb{R}[x]$

$\rightarrow \deg P < \deg Q$

<u>Παρ</u>

Αν $\deg P \geq \deg Q$

$$P = \Pi \cdot Q + \upsilon, \quad \deg \upsilon < \deg Q$$

$$\frac{P}{Q} = \Pi + \frac{\upsilon}{Q}$$

• $\deg P < \deg Q$

1) Οι ρίζες του Q είναι απλές (πραγματικές),

Δηλ. $Q = (x-\rho_1)\cdots(x-\rho_n)$

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(x-\rho_1)\cdots(x-\rho_n)} \overset{\boxed{\Theta}}{=} \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\rho_n}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{dx}{x-1} = \ln\frac{x-1}{x} + c$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Longleftrightarrow 1 = (x-1)A + Bx$$

$$1 = (A+B)x - A$$

Άρα $\left.\begin{matrix} A+B=0 \\ -A=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A=-1 \\ B=1 \end{matrix}}$

<u>Ρητά</u>

Το $Q(x)$ να έχει k πολλαπλές ρίζες

ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} \quad (1)$$

Γενικά $(x-x_0)^r \longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \frac{A_j}{(x-x_0)^j}$

(1) $A(x-1)^2 + B_1 x(x-1) + B_2 x$

$1 = A(x^2-1)^2 + B_1 x(x-1) + B_2 x$

$$1 = A(x^2-2x+1) + B_1(x^2-x) + B_2 x$$

$$\Rightarrow 1 = x^2(A+B_1) + x(-2A-B_1+B_2) + A$$

$$\begin{cases} A+B_1=0 \\ -2A-B_1+B_2=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1=-1 \\ B_2=1 \\ A=1 \end{cases}$$

<u>Δηλαδή:</u>

$$\frac{1}{(x(x-1)^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c = \ln\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} + c$$

iii) <u>Απλές Μιγ. ρίζες</u>

Οπότε στη ρίζα $\lambda \pm \kappa i \longrightarrow \dfrac{Ax+B}{(x-\lambda)^2+\kappa^2}$

iv) <u>Πολλές Μιγ. ρίζες</u>

Οπότε στη ρίζα πολλ/τας $r \longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \frac{A_j x + B_j}{[(x-\lambda)^2+\kappa^2]^j}$

$$\frac{1}{x(x-1)^3(x^2+ax+b)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} + \frac{\Gamma_1 x+\Delta_1}{(\cdots)} + \frac{\Gamma_2 x+\Delta_2}{(\cdots)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} \quad (1)$$

ρίζες: $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ $\Big\} \Rightarrow x^2+x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$\alpha=-\frac{1}{2}, \ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(1) \longrightarrow = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

Τριγωνομετρικά

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

π.χ.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

Τύποι

$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$

$\cos(x\pm y) = \cos x\cdot\cos y \mp \sin x\cdot\sin y$

για $x=y$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\int \cos^2 x\,dx$

$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$

<u>τύπος Euler</u>

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$(e^{i\pi} = -1)$

$i^2 = -1$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n\ \text{αρτιος}} + \sum_{n\ \text{περιττος}} =$

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}$$

αρτιος

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$\cos x + i \sin x$

$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) =$

|| euler

$\cancel{\cos(x+y) + i\sin(x+y)}$

$$= \boxed{(\cos x \cos y - \sin x \sin y)} + i(\sin x \cos y + \cos x \sin$$

$\to$ ozo $\cap x$ $\quad \int \frac{1}{\sin x}\,dx \leftarrow$ 2nit1

$$\boxed{\begin{aligned} &M: \tan\frac{x}{2} = u \\ &\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2} \\ &\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ &\tan x = \frac{2\tan x/2}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1-u^2} \end{aligned}}$$

$$\to \sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\sin x}{\cos x}(\cos x)^2$$

$$= 2\tan x \cos^2 x$$

Adja' $\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\tan^2 x)\cos^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\to \tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Ex

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,dy = 2\int \frac{\frac{1}{1+u^2}}{\frac{1+u^2+2u}{\cancel{1+u^2}}}\,du =$$

$$= 2\int \frac{d(u+1)}{(u+1)^2} = 2\int \frac{du}{u^2}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{u}+c\right] = 2\left[-\frac{1}{u+1}+c\right] = \frac{-2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{2u+1-u^2}{1+u^2}}\,du$$

$$= 2\int \frac{du}{2+2u} = \int \frac{du}{1+u} = \ln(1+u)+c$$

Πάντα θα έχει στην πρόοδο
ρητά κι τριγωνομετρικά

~~Ορισμένα ολοκληρώματα~~

Δευτέρα 15/12/2014

Σύμβολα Landau

f, g ορισμένες στο $A \subseteq \mathbb{R}$

$f = O(g) \Leftrightarrow \exists M>0 : |f(x)| \le M|g(x)| \quad \forall x > x_0$

~~$f = 6x^4 - 2x^3 + x + 2 | \le 6x^4 + 2|x|^3 + x$~~ για κάποιο x_0

$f = 6x^4 - 2x^3 + x + 2$ δεν γίνεται

$O(f) = x^4$ ή $O(f) \not\ni x^4$ ή $O(x^4) \ni f$

Απόδ.

τριγ. ανισ.

$|6x^4 - 2x^3 + x + 2| \le 6x^4 + 2|x|^3 + x + 2 \le 6x^4 + 2x^4 + x^4 + 2x^4$

αφού $|f| \le Mx^4$ $\forall x > x_0$, $x_0 > 2$

Θ/ $f = a_4 x^4 + \dots + a_1 x + a_0$ τότε $f = O(x^4)$

π.χ.

$f = 2x^3 + x^2 \eta\mu x = O(x^3)$ (θα μπορούσε να είναι και $O(x^4)$)

$|f| \le 2|x|^3 + x^2|x| = 3|x^3|$

$f = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 2}$

ΔΕΥΤΕΡΑ
15/12/2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

[Μια παρένθεση]

Σύμβολα Landau

f, g ορισμένες στο $A \subseteq \mathbb{R}$ [Big O: για complexity (πολυπλοκότητα)]

$f = O(g) \iff \exists M > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq M|g(x)|$ $\forall x > x_0$ για κάποιο x_0.

↳ (f είναι όμικρον της g ή f είναι big o της g)

Πολυπλοκότητα = πλήθος πράξεων σε έναν αλγόριθμο (χρησιμοποιεί το big O για τη εξέταση πολυπλοκότητας)

Παράδειγμα 1

$f = 6x^4 - 2x^3 + x + 2$. (τριγωνική)

$\cancel{O(f) = x^4}$ γιατί: $|6x^4 - 2x^3 + x + 2| \leq 6x^4 + 2|x|^3 + |x| + 2$ για $x > x_0$, $x_0 = 2$

$O(x^4) = f$ $\leq 6x^4 + 2x^4 + x^4 + 2x^4 \leq 11x^4$. άρα βάσει του ορισμού ισχύει ότι $\cancel{O(f) = x^4}$ $O(x^4) = f$

Μερικές φορές αντί $\cancel{O(f) = x^4}$ $O(x^4) = f$ γράφω $x^4 \in O(f)$ (γιατί εκεί ανήκουν όλες οι συναρτήσεις με την ιδιότητα $|g| \leq M|f|$.

Θεώρημα

Πολυώνυμα: $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ τότε $\cancel{O(f) = x^n}$ $O(x^n) = f$

Παράδειγμα 2

$f = 2x^3 + x^2 \ln x$ (η $\ln x$ φράσσεται από την $y = x$)

$|f| \leq 2|x^3| + x^2|x| = 3|x|^3$

Άρα $f = O(x^3)$ (η συγκεκριμένη είναι και $O(x^4)$ αλλά γράφω τον ελάχιστο εκθέτη)

Παράδειγμα 3

$f = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + 2}$. $|f| = \dfrac{|x^4 + x^2 + 1|}{|x^3 + 2|} = \dfrac{x^4\left|1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right|}{|x|^3\left|1 + \frac{2}{x^3}\right|} \leq |x| \dfrac{3}{\left|1 + \frac{2}{x^3}\right|}$ $\to < 1$

$\leq 3|x|$ για $x \geq 1$

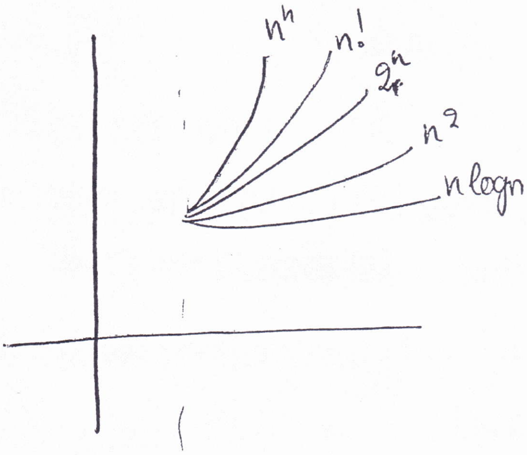
άρα $f = O(x)$

- $f = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 2}$ ... $f = O(1)$ (σταθερής πολυπλοκότητας)

Αντίστοιχα

$n! = O(n^n)$ γιατί: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n < n \cdot n \ldots n = n^n$

Γενικά (τόσο "γρήγορα" τείνουν στο άπειρο συναρτήσεις)



Άσκ.

1) Ν.δ.ο

$2^x + 5 = O(3^x)$

2) Να βρεθεί ο ελάχιστος n ώστε $f = O(x^n)$ όταν

I) $f = \dfrac{x^4 + x}{x^3 + 1}$

II) $f = 2x^3 + (\ln x)^4$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3}{1} \Rightarrow \lambda = 3$ $(2,4)/(1,1)$

Κανόνας τραπεζίου

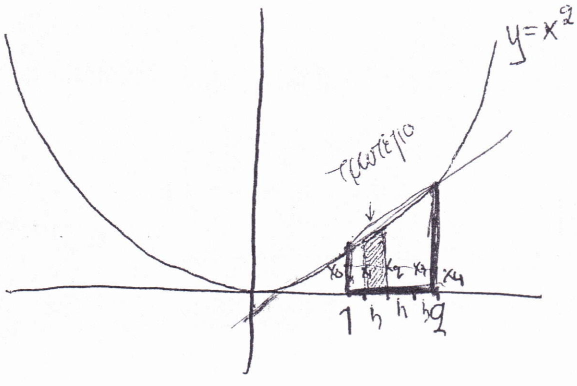
$y = \lambda x + b \Rightarrow 4 = \lambda 2 + b \Rightarrow$ $y = 4$

$b = -2$ $y = 1$

$\int_a^b f(x)dx \approx I$ (βρίσκω μια προσέγγιση)

$\int_1^2 x^2 dx =$ εμβαδό

π.χ.



$x_\nu = x_0 + \nu h$ (έστω $h = 1/4$)

- $x_0 = 1$
- $x_1 = 5/4$
- $x_2 = 6/4$
- $x_3 = 7/4$
- $x_4 = 2$

$y = 3x - 2$

$\int_1^2 |3x - 2| dx = \left[3\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2$

$6 - 4 - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

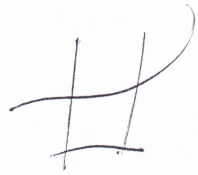
ΔΕΥΤΕΡΑ
15/12/2014

$$T = \sum \text{τραπεζίων} = \frac{h}{2}(y_0+y_1)+\frac{h}{2}(y_1+y_2)+\dots$$

$$= \frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+y_4)$$

(αντικατάσταση) $= \frac{1}{8}\left(1+2\cdot\frac{25}{16}+2\cdot\frac{36}{16}+2\frac{49}{16}+4\right)=2{,}34$

Είναι $|E_{\text{ακρ}}-E_{\text{τραπ}}| \simeq 0{,}00446$ (καλή προσέγγιση)



$\boxed{\text{Θεώρημα} \quad |E_{\text{πραγ}}-E_{\text{τραπ}}| \le ?}$

Αν f'' συνεχής και $|f''|\le M$ στο $[a,b]$ → φραγμένη → διάστημα ολοκλήρωσης

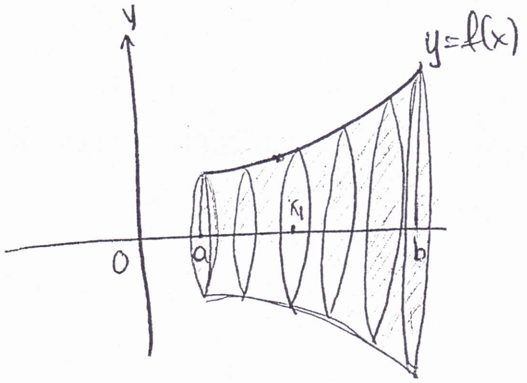
Τότε $|E_{\text{πραγ}}-E_{\text{τραπ}}| \le \frac{b-a}{12}h^2M$

Γενικός κανόνας: $\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(y_0+2y_1+\dots+2y_{n-1}+y_n)=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i+y_{i+1})$

$\frac{(4+1)\cdot 1}{2}=2{,}5$

Γενικά: $\boxed{h=\frac{b-a}{n}}$ $n+$ $y=x^2$ $y=4$ άρα $h=4$, $n=1$, $b=2$, $a=1$, $h=\frac{2-1}{n}=4=\frac{1}{1}=1$

Υπολογισμός όγκου στερεών εκ περιστροφής (γύρω από τον x'x)

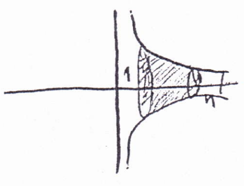


Όγκος (κατά προσέγγιση, η καμπυλότητα είναι αμελητέα όταν τα x_i, x_{i+1} είναι πολύ κοντά)

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\pi f(x_i)^2\Delta x_i}_{\text{στοιχειώδεις όγκοι}} \xrightarrow{n\to+\infty} \underbrace{\pi\int_a^b f(x)^2dx}_{V\ (\text{όγκος})}$$

Παράδειγμα

$y=\frac{1}{x}, x>0$ $\quad V_{1,n}=\pi\int_1^n\frac{1}{x^2}dx=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n=\pi\left[-\frac{1}{n}+1\right]\xrightarrow{n\to\infty}\pi$



Ασκήσεις

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{3+\sin t\cdot 5}$ $\quad M: t=\tan\frac{w}{2}$

$\sin t = \dfrac{2w}{1+w^2}$ $\quad t=0: w=0$, $\quad t=\frac{\pi}{2}: w=1$ $\quad$ και $dt=\dfrac{2}{w^2+1}\,dw$.

το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_0^1 \frac{1}{3+\frac{2w}{1+w^2}\cdot 5}\cdot\frac{2}{w^2+1}\,dw = \int_0^1 \frac{2}{3w^2+3+10w}\,dw = 2\int_0^1 \frac{dw}{3w^2+10w+3} =$$

$$2\int_0^1 \frac{dw}{(3w+1)(w+3)} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{(3w+1)(w+3)} = \frac{A}{3w+1}+\frac{B}{w+3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(3w+1)(w+3)} = \frac{A(w+3)+B(3w+1)}{(3w+1)(w+3)} \Rightarrow$$

$$Aw+3A+3Bw+B=1 \Rightarrow$$

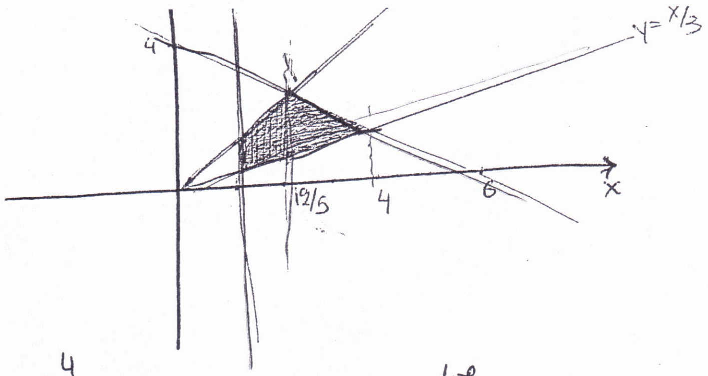
$$w(A+3B)+3A+B=1. \quad \begin{cases} A+3B=0 \\ 3A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=3/8, \quad B=-1/8$$

$$2\int_0^1 \frac{3/8\,dw}{3w+1} - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dw}{w+3} = \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{dw}{3w+1} - \frac{1}{4}\int_0^1\frac{dw}{w+3} =$$

$$\left[\frac{3}{4}\frac{\ln(3w+1)}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}\ln(w+3)\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\ln 4-\ln 1) - \frac{1}{4}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{4}\ln 3.$$

15/12/2014

L $x = 1$



$$\int_{1}^{12/5} \left(x - x/3\right) dx + \int_{12/5}^{4} \left(\left(\frac{12-2x}{3}\right) - \frac{x}{3}\right) dx = \frac{47}{3}.$$

Μ σημείο της $x'x$ Συντεταγμένη του Μ $\begin{cases} +(OM) \text{ όταν το Μ είναι δεξιά του Ο} \\ -(OM) \text{ όταν το Μ είναι αριστερά του Ο} \end{cases}$

Αντίστροφα $\forall x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό σημείο Μ της ευθείας $x'x$ με συντεταγμένη $x_M = x$
Κάθε $x \in \mathbb{R}$ παρίσταται με ένα σημείο της $x'x$ και επομένως ταυτίζουμε το $\mathbb{R}$ με μια προσανατολισμένη ευθεία, τον άξονα των πραγματικών αριθμών

<u>Φραγμένα διαστήματα</u>

$a, b \in \mathbb{R}$ με $a \le b$.

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$ $\quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ $\quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$

<u>Φράγματα</u>

<u>Ορισμός</u> (φραγμένο σύνολο)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ είναι το άνω φράγμα του Α όταν $x \le b$ <u>για κάθε</u> $x \in A$.
$A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ είναι το κάτω φράγμα του Α όταν $x \ge a$ <u>για κάθε</u> $x \in A$.

Α άνω φραγμένο όταν υπάρχει ένα άνω φράγμα b του Α.
Α κάτω φραγμένο όταν υπάρχει ένα κάτω φράγμα a του Α.
Φραγμένο (άνω και κάτω φραγμένο) όταν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $a \le x \le b$ για κάθε $x \in A$

<u>Ορισμός</u> (μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\underline{b \in A}$ λέγεται μέγιστο στοιχείο του Α όταν $x \le b\ \forall x \in A$ ($b = \max A$)
$A \subseteq \mathbb{R}$, $\underline{a \in A}$ λέγεται ελάχιστο στοιχείο του Α όταν $x \ge a\ \forall x \in A$ ($a = \min A$)

<u>Ορισμός</u> (άνω και κάτω πέρας) [ΔΕΝ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΝΑ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΟ Α]

Supremum Α: είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α (Sup A)
Infimum Α: το μέγιστο κάτω φράγμα του Α (Inf A).

Παραδείγματα: (βρίσκω max, min, sup, inf)

1) $A = [0, 1)$

$\min A = 0$ (είναι $0 \le x < 1\ \forall x \in A$) $\quad \sup A = 1$ (δεν είναι απαραίτητο το sup να ανήκει στο Α)
$\max A$ δεν υπάρχει $\quad \inf A = 0$ (κάτω φράγματα: όλοι οι αριθμοί ≤ 0, ο μέγιστος το 0)

30/9/2014

2) $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$ $n\in\mathbb{N}$

$\max A = 1 \in A$ $\qquad$ $\sup A = 1$

$\min A$ δεν υπάρχει $\qquad$ $\inf A = 0 \notin A$

3) $A=\{1+(-\frac{2}{3})^n, n\in\mathbb{N}\}$

$A=\{\underset{n=1}{\frac{1}{3}},\ \underset{n=2}{1+\frac{4}{9}},\ \underset{n=3}{1-\frac{8}{27}},\ \underset{n=4}{1+\frac{16}{81}},\dots\}$

$\max A = 1+\frac{4}{9} \in A$

$\sup A = 1+\frac{4}{9}$

$\min A = \frac{1}{3} \in A$

$\inf A = \frac{1}{3}$

Παρατηρώ ότι όσο μεγαλώνει ο εκθέτης n τόσο το $(-\frac{2}{3})^n$ μικραίνει. Συνεπώς για τους περιττούς εκθέτες n πάντα θα είναι $\frac{1}{3} \leq 1+(-\frac{2}{3})^n$ και για τους άρτιους n $1+\frac{4}{9} \geq 1+(-\frac{2}{3})^n$.

Αξίωμα πληρότητας στο $\mathbb{R}$: κάθε μη κενό και άνω (ή κάτω) φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει sup (inf)

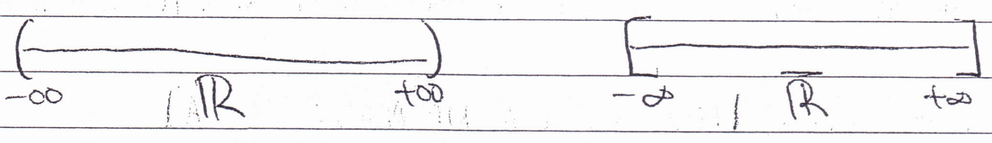
4) $A=\{1+(-\frac{3}{2})^n, n\in\mathbb{N}\}$

$A=\{\underset{n=1}{-\frac{1}{2}},\ \underset{n=2}{1+\frac{9}{4}},\ \underset{n=3}{1-\frac{27}{8}},\ \underset{n=4}{1+\frac{81}{16}},\dots\}$

Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν ούτε μέγιστο/ελ. ούτε φράγματα.

Το σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$

Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$



Επιτρεπτές πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}$

$x\in\mathbb{R}$.

- $(-\infty)+x=-\infty$
- $(+\infty)+x=+\infty$
- $x\cdot(-\infty)=-\infty$ αν $x>0$
- $x\cdot(+\infty)=+\infty$ αν $x>0$
- $x\cdot(-\infty)=+\infty$ αν $x<0$
- $x(+\infty)=-\infty$ αν $x<0$

- $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
- $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
- $(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$
- $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$
- $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
- $x/(+\infty)=0$
- $x/(-\infty)=0$

Μη επιτρεπτές πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}$

- $\frac{+\infty}{0}$ • $\frac{-\infty}{0}$ • $\frac{0}{0}$ • $0\cdot(+\infty)$ • $0\cdot(-\infty)$ • $(+\infty)+(-\infty)$ • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ •

Θεώρημα ακέραιου μέρους

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος α τέτοιος ώστε

$$\alpha\leq x<\alpha+1$$

ο αριθμός α συμβολίζεται με $[x]$ και ονομάζεται ακέραιο μέρος του x.
Για τον $[x]$ ισχύουν:

α) $[x]\leq x<[x]+1$

β) $x-1<[x]\leq x$

Ο ακέραιος $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Π.χ. $[3,2]=3$

$[-2,6]=-3$ $\quad$ $-3 \quad -2,6 \quad -2 \quad 0$ (πρέπει να είναι μικρότεροι ή ίσοι)

Η αποδεικτική μέθοδος της τέλειας επαγωγής

Θεώρημα:

Έστω $I(n)$ μια πρόταση ή ιδιότητα η οποία διατυπώνεται για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε: i) $I(1)$ αληθής

ii) Υποθέτοντας ότι $I(k)$ αληθής (για σταθεροποιημένο* $k\in\mathbb{N}$) αποδεικνύουμε ότι η $I(k+1)$ είναι επίσης αληθής (επαγωγικό βήμα)

Τότε η $I(n)$ είναι αληθής για κάθε $n\in\mathbb{N}$

*σταθεροποιημένο σημαίνει ότι δεν διαλέγω συγκεκριμένο.

Παρατήρηση: Αν θέλουμε να δείξουμε την ισχύ της $I(n)$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_0$

1) $I(n_0)$ αληθής (τα υπόλοιπα βήματα ισχύουν όπως πριν)

Παράδειγμα

(I) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathbb{N}$

(II) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n\in\mathbb{N}$

(III) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n\in\mathbb{N}$

(III) ΛΥΣΗ:

- $I(1)$: $1^3=\dfrac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} \Leftrightarrow 1=1$ αληθής
- Υποθέτουμε ότι $I(k)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι ισχύει: $1^3+2^3+\ldots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$
- Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει η $I(k+1)$, δηλαδή ότι ισχύει η πρόταση για $n=k+1$:

$$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=$$

$$\underbrace{1^3+2^3+\ldots+k^3}_{\Downarrow}+(k+1)^3=$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{1}{4}(k+1)^2\underbrace{\left[k^2+4(k+1)\right]}_{(k+2)^2}=\boxed{\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}}$$

αποδείχθηκε

Παράδειγμα (IV) (~~ανισότητα~~ ανισότητα Bernoulli)

Να δείξετε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $x>-1$ ισχύει $(1+x)^n\geq 1+nx=I(n)$

- $I(1)$: $1+x\geq 1+x$ αληθής
- Έστω ότι ισχύει $(1+x)^k\geq 1+kx$
- Θέλουμε να δείξουμε ότι η $I(n)$ ισχύει και για $n=k+1$.

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\geq(1+kx)(1+x)$$

$$=(1+x)^k(1+x)\geq 1+(k+1)x+kx^2\geq 1+(k+1)x$$

γιατί $kx^2\geq 0$.

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ με $0! = 1$	Το παραγοντικό
$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$	
$1! = 1$	
$2! = 2$	

Παράδειγμα (V)

Ιδ/ν $n! \geq 2^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- $I(1)$: $1! \geq 2^0$ αληθής
- έστω $I(k)$ αληθής δηλαδή $k! \geq 2^{k-1}$.
- $I(k+1)$ για $n = k+1$ έχουμε:

$$(k+1)! = k!(k+1) \geq 2^{k-1}(k+1) \geq 2^{k-1}\cdot 2 = 2^k$$

Άρα $(k+1)! \geq 2^k$

↳ είναι $k \in \mathbb{N}$ όπου: $k \geq 1$ όπου $k+1 \geq 2$

ΑΣΚΗΣΗ

Απόδειξη της ανισότητας Weierstrass

$a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$

Να δείξετε ότι: $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 1+a_1+\ldots+a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- $I(1)$: $1+a_1 \geq 1+a_1$ αληθής (ως ισότητα)
- Υποθέτω ότι $I(k)$ αληθής, δηλαδή:

$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k) \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_k$.

- Θέλω να αποδείξω ότι η $I(n)$ ισχύει για $n = k+1$.

$1+a_{k+1}$?!

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq (1+a_1+a_2+\ldots+a_k)(1+a_{k+1}) =$$ θετικά

$$(1+a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}(1+a_1+\ldots+a_k)) \geq$$

$$1+a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}.$$

Παράδειγμα

(I) Να αποδειχθεί ότι $1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

- $I(1)$: $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ αληθής
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$.

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- $I(k+1)$: $1+2+3+\dots+k+k+1 = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$= \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

(II) Να αποδειχθεί ότι $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$

- $I(1)$: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$ αληθής
- Υποθέτουμε ότι η $I(k)$ είναι αληθής: (για $n=k$)

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

- Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$.

$I(k+1)$: $1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 =$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$\frac{1}{6}(k+1)\left(k(2k+1)+6(k+1)\right) =$$

$$\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) =$$

$$\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}}$$