Μαθηματική Ανάλυση II

4ο εξάμηνο

Τοπικά ακρότατα ✓

Μέθοδος Lagrange με ένα ✓
και δύο περιορισμούς

Τοπικά ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών ✓

Διπλά ολοκληρώματα ✓

Θεώρημα Fubini ✓

Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων συναρτήσεων
2 μεταβλητών σε τυχαία χωρία ✓

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (Ιακωβιανή ορίζουσα)
(1003)

Αλλαγή μεταβλητών (πολικές και γεν. μετασχηματισμοί)

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (1017) ✓

Υπολογισμός έργου-δύναμης (1023)

Θεώρημα του Green (σελ 1043)

Τύπος Taylor (930) ?

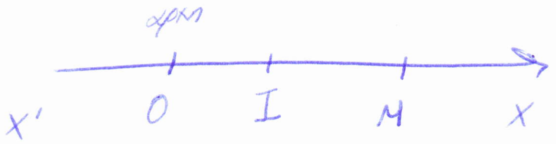
130217 Μαθ. Ανάλυση ΙΙ

Εισαγωγικά (απο Μ.Α Ι)^{α}.

• Γεωμετρική Παράσταση του $\mathbb{R}$.

$|\overline{OI}| = 1$

ευθεία ή άξονας των πραγματικών αριθμών



M σημείο του άξονα ως συντεταγμένη του M: προσημασμένο μέτρο του $\overline{OM}$

δηλαδή $\begin{cases} \text{δεξιά: } +|\overline{OM}| \ (\text{δεξιά του } O) \\ \text{αριστερά: } -|\overline{OM}| \end{cases}$

• Αντιστρόφως:

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει:

μοναδικό σημείο M του άξονα

έτσι ώστε η συντεταγμένη του να είναι ο $x \in \mathbb{R}$.

- Με αυτή τη λογική, ταυτίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς με τα σημεία του άξονα.

συντεταγμένη

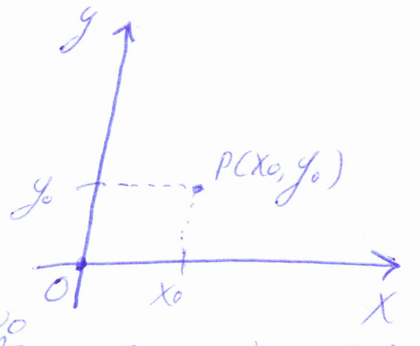
• Απόσταση δύο σημείων A και B, με $A(a)$ και $B(b)$

↳ $d(A,B) = |b-a| \left(= \sqrt{(b-a)^2}\right)$

distance

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

• Καθορισμός σημείων. : 2-διαστάσεις.



• Και αντιστρόφως

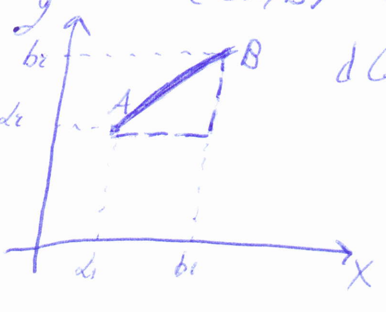
(x_0, y_0) ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο του επιπέδου, με συντεταγμένες τις x_0 και y_0 αντιστοίχως. (x_0 και $y_0 \in \mathbb{R}$)

→ συμβαίνει ότι έχει σημασία η σειρά)... και είναι σημαντικό.

• Απόσταση: δύο σημείων $A(a_1, a_2)$ και $B(b_1, b_2)$.

$d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$ (απόδειξη με υποτείνουσα)

απόδειξη

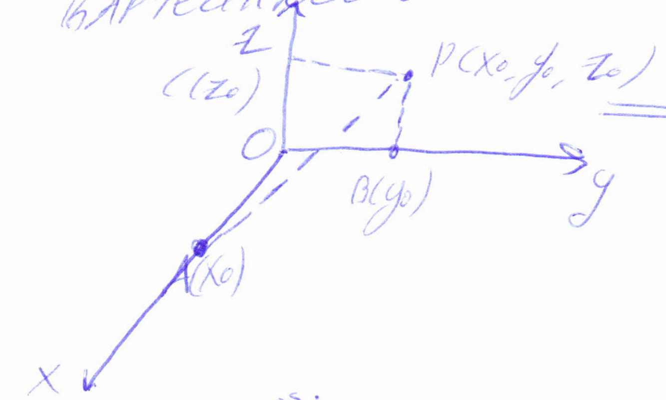


$d(A,B) = |\overline{AB}|$ υποτείνουσα, άρα από βρίσκω απ' το πυθαγόρειο θεώρημα.

$$\boxed{\mathbb{R}:\ d(A,B) = \sqrt{(a-b)^2}}$$

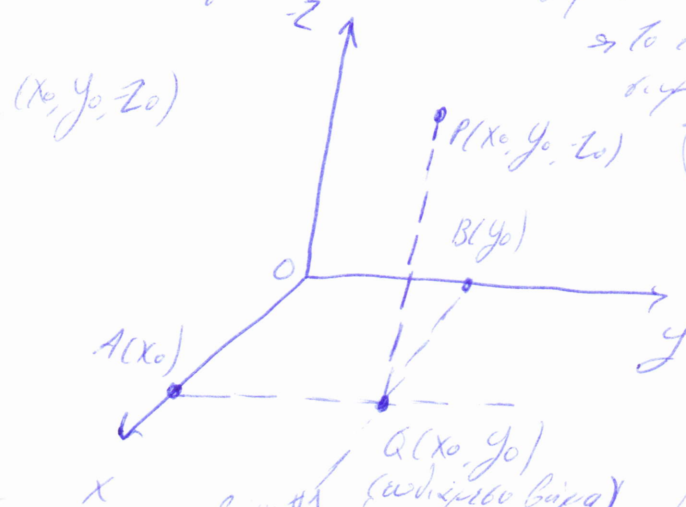
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

: 3-διαστάσεις



$\Longrightarrow$ • Διατεταγμένη τριάδα (x_0, y_0, z_0) (λήψη από ένα σημείο του χώρου, σε μία διατεταγμένη τριάδα).

• Διαδοχικώς:



βήμα #1 (ισοδύναμο βήμα) (δουλεύω σε δύο διαστάσεις)

βήμα #2

→ το τελευταίο βήμα είναι να "σηκωθεί" το σημείο Q σε κάποιο ύψος (z_0)

εξαρτάται από το πρόσημο του z_0.

• Απόσταση: $A(a_1, a_2, a_3)$ και $B(b_1, b_2, b_3)$

$$\rightarrow d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ($\times$: καρτεσιανό γινόμενο) $= \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$: σύνολο διατεταγμένων ζευγών. επίπεδο από πραγματικούς αριθμούς

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y,z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$: τρισδιάστατος χώρος από πραγματικούς αριθμούς.

• Αφού $(x,y) \equiv (x,y,0)$, έχουμε ότι $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

→ επεκτείνοντας αυτόν τον συλλογισμό: $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n \text{ φορές}}$: διατεταγμένες n-άδες.

$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Μαθ. Ανάλυση ΙΙ

13/09/17 b.

$A,B \in R^n$ $\quad d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\dots+(b_n-a_n)^2}$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΤΟΥ R^3

• Ορισμός: Γεωμετρικό διάνυσμα του R^3

→ ένα διατεταγμένο (προσανατολισμένο) ευθύγραμμο τμήμα $\bar{AB}$ του χώρου. δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα, στο οποίο διακρίνεται η αρχή A και το τέλος B.

• Συμβολισμός: $\vec{AB}$ διάνυσμα.

- • Μέτρο του $\vec{AB}$

  $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

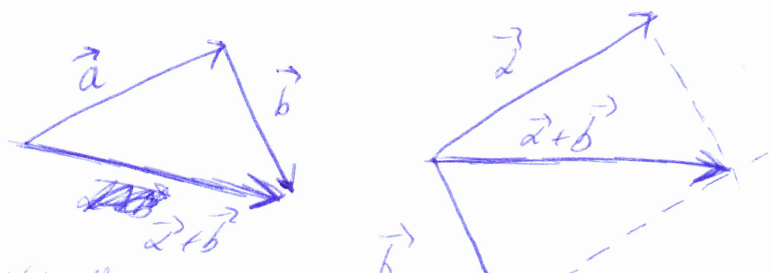
- • Κατεύθυνση
  - διεύθυνση (μία παράλληλη ευθεία πάνω στην οποία είναι το διάνυσμα)
  - φορά

• Ελεύθερο διάνυσμα: δεν ενδιαφέρει η αρχή του, αλλά καθορίζεται πλήρως από μέτρο και κατεύθυνση.

(δηλ. δεν έχει σημασία η αρχή του, αλλά όμως καθορίζεται αυτό πλήρως).

Συμβολισμός: $\vec{a}$ (ελεύθερο) διάνυσμα.

• Πρόσθεση διανυσμάτων. (Γεωμετρικά)



Τριγωνικός Νόμος

Νόμος παραλληλογράμμου.

• Αριθμητικό γινόμενο

$\vec{a}\in R^3$

$\lambda\in R$

$\vec{b}=\lambda\vec{a}$
- μέτρο $\|\vec{b}\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\|$
- διεύθυνση του $\vec{b}$ ≡ διεύθυνση του $\vec{a}$
- φορά του $\vec{b}$
  - ≡ φορά του $\vec{a}$ για $\lambda>0$
  - ≡ αντίθετη φορά του $\vec{a}$ για $\lambda<0$

Μαθ. Ανάλ. ΙΙ
2 [illegible]

- Αλγεβρική Περιγραφή διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$

  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: διατεταγμένη τριάδα.

- Άθροισμα $\left.\begin{array}{l} \vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array}\right\} \vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + b_1, \alpha_2 + b_2, \alpha_3 + b_3)$

- Γινόμενο $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $\quad \lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$

  $\lambda \in \mathbb{R}$

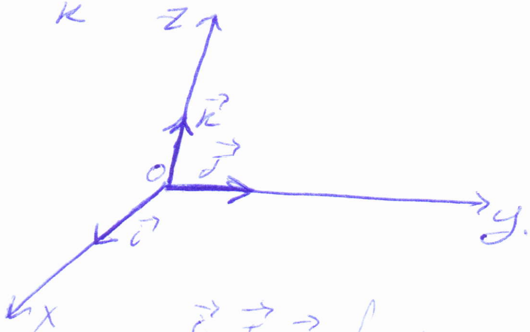
140417 Μαθ. Ανάλ. ΙΙ

α.

• $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$\vec{x} = x_1 \underbrace{(1,0,0)}_{\vec{i}} + x_2 \underbrace{(0,1,0)}_{\vec{j}} + x_3 \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$$



• Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Ορισμός (αλγεβρικά)

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

Ως εσωτερικό γινόμενο $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \in \mathbb{R}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

: μοναδιαία διανύσματα.

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: βάση του $\mathbb{R}^3$

: είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο.

• Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

• $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$.

• $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$

• Γενικές Ιδιότητες

1) $\vec{x}\cdot\vec{x} = \|\vec{x}\|^2$

2) $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$

3) $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{z}$

4) $(\lambda\vec{x})\cdot\vec{y} = \lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) = \vec{x}\cdot(\lambda\vec{y})$

5) $\vec{0}\cdot\vec{x} = 0$

(όλες αποδεικνύονται με χρήση του αλγεβρικού ορισμού).

• Απόδειξη $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{z}$

$$\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}) = x_1(y_1+z_1) + x_2(y_2+z_2) + x_3(y_3+z_3) = x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2 + x_3y_3 + x_3z_3$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) = \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{z}$$

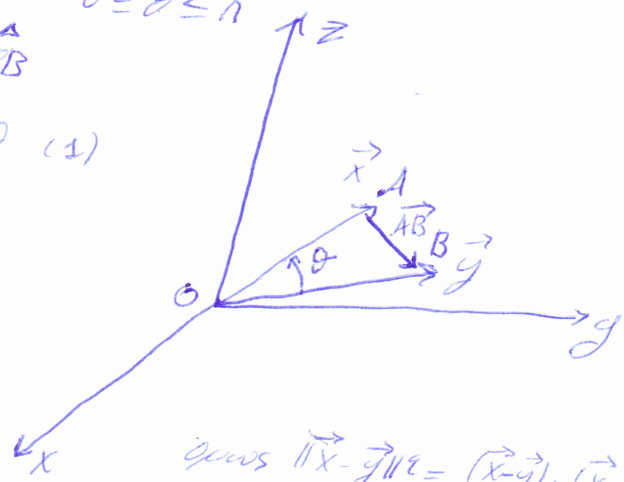
• Ορισμός (Γεωμετρικός) Εσωτ. Γινομένου.

* Θεώρημα Γεωμετρική έκφραση εσωτερικού γινομένου.

$$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\theta}$$ (θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$)

$0 \le \theta \le \pi$

• Απόδειξη: Νόμος συνημιτόνων στο $\overset{\triangle}{AOB}$



$$\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2\|\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OB}\|\cdot\cos\theta \quad (1)$$

όμως $\|\vec{OA}\| = \|\vec{x}\|$

$\|\vec{OB}\| = \|\vec{y}\|$

$\vec{AB} = \vec{y} - \vec{x}$

$\|\vec{AB}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$

(2)

→ Από (1) και (2)

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\theta. \quad (3)$$

όμως $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y})\cdot(\vec{x} - \vec{y})$

$= \vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\vec{y} - \vec{y}\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y}$

$= \|\vec{x}\|^2 - 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$ (4)

→ Από (3) και (4)

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos\theta = \|\vec{x}\|^2 - 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos\theta = \vec{x}\cdot\vec{y} \quad ✓$$

• Πόρισμα.

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{x}$ και $\vec{y} \neq 0$

Τότε για τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ ισχύει ότι:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}}$$

βρίσκω την θ, από αντίστροφη συνάρτηση συνημιτόνου...
...συνήθως θα είναι κάτι εύκολο.

• Ορθογώνια - Κάθετα διανύσματα

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{x}, \vec{y} \neq 0$, θα λέμε ότι είναι κάθετα, όταν η γωνία θ των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ θα είναι ίση με $\pi/2$.

140217.

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ b.

• Ορισμός - Συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων.

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{x}$ και $\vec{y} \neq 0$.

κάθετα $\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

• Παράδειγμα

· $A = (1, -1)$, $B = (4, 5)$, $Γ = (-1, 5)$, $Δ = (7, 1)$

νδο $\vec{AB}$ κάθετο στο $\vec{ΓΔ}$

$\vec{AB} = (4-1, 5-(-1)) = (3, 6)$, $\vec{ΓΔ} = (7-(-1), 1-5) = (8, -4)$

$\vec{AB} \cdot \vec{ΓΔ} = 3 \cdot 8 + 6(-4) = 0$ άρα $\vec{AB}$ κάθετο στο $\vec{ΓΔ}$.

• Παράδειγμα

Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου με κορυφές τα σημεία:

$A = (2, -1, 1)$, $B = (1, -3, -5)$, $Γ = (3, -4, -4)$.

$\vec{AB} = (-1, -2, -6)$

$\vec{AΓ} = (1, -3, -5)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AΓ} = (-1)1 + (-2)(-3) + (-6)(-5)$

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AΓ} = 35$. (θ είναι το ίδιο να πάρω τα $\vec{BA}$ και $\vec{ΓA}$).

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(\vec{AB}) \cdot (\vec{AB})} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{41}$

$\|\vec{AΓ}\| = \sqrt{(\vec{AΓ}) \cdot (\vec{AΓ})} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$

άρα $\cos\theta = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AΓ}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AΓ}\|} = \dfrac{35}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{35}} = \dfrac{\sqrt{35}}{41}$

• Παράδειγμα (Νόμος Παραλληλογράμμου)

1) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

2) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.

Λύση

1) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$

2) $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$

~~προσθ~~ προσθέτοντας την 1) κατά μέλη, έχουμε:

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

• Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

• Ορισμός. (Αλγεβρική έκφραση)

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.}$$

→ Γράφεται ως εξής με τη βοήθεια της "συμβολικής" ορίζουσας ...που είναι διάνυσμα.

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε λύνοντας ως προς την πρώτη γραμμή. $\Rightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{i}(x_2 y_3 - x_3 y_2) - \vec{j}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$

(όπου που έχει τα διανύσματα) $= (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$

14/09/17

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

c.

• Ιδιότητες $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ · $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ · $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$ → εδώ το 0 είναι διάνυσμα, όχι αριθμός.
- $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ · $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ · $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$
- $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ · $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ · $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

• Απόδειξη

$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \underbrace{0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} \cdot 1}_{\text{(βλέπε τον τύπο...)}} = \vec{k}$$

20.02.17 α: Μαθηματ. Ανάλυση ΙΙ

¹ μόνο στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται οι γραφές του εξωτερικού γινομένου

* Αλγεβρική έκφραση Εξωτερικού Γινομένου $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ ¹

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$

$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix}$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}-(x_1y_3-x_3y_1)\vec{j}$$
$$+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$$

· πρόταση $\vec{x}\times\vec{y}$ ορθογώνιο προς τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$

Λύση:

$$\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y})=x_1(x_2y_3-x_3y_2)+x_2(x_3y_1-x_1y_3)+x_3(x_1y_2-x_2y_1)=0.$$

· Θεώρημα, ιδιότητες Εξωτερικού Γινομένου. (αποδεικνύονται από τον ορισμό)

$\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$ και $\lambda\in\mathbb{R}$: Τότε ισχύουν:

1) $\vec{x}\times\vec{x}=\vec{0}$

2) $\vec{x}\times\vec{y}=-(\vec{y}\times\vec{x})$

3) $(\lambda\vec{x}\times\vec{y})=\lambda(\vec{x}\times\vec{y})=\vec{x}\times\lambda\vec{y}$

4) $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}$

5) $(\vec{x}+\vec{y})\times\vec{z}=\vec{x}\times\vec{z}+\vec{y}\times\vec{z}$.

6) $\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})=(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}$

7) $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=(\vec{x}\cdot\vec{z})\vec{y}-(\vec{x}\cdot\vec{y})\vec{z}$.

→ Δείτε και 1-2 αποδείξεις.

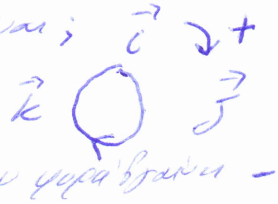
· Ιδιότητες $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$ (ιδιότητα Νο 1) (βγαίνει και με γραφές)

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

Πώς τα θυμάμαι;



αντιθέτως από την φορά βγαίνει −

• Δεν ισχύει (για τις πράξεις των εξωτερικών γινομένων) η προσεταιριστική ιδιότητα.

Απόδειξη:

$$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$$

Γεωμετρική Περιγραφή του εξωτερικού γινομένου.

Θεώρημα

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ και θ η γωνία των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ $(0 \le \theta \le \pi)$

Τότε ισχύει.

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\theta$$

(Νόρμα διανύσματος)

sin : ημίτονο

σύμφωνα με την ταυτότητα Lagrange.

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}_{\text{αναλύω αυτό}} =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \cdot \cos^2\theta) =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \, |\sin\theta|$$ (αφού η γωνία είναι $0 \le \theta \le \pi$ $|\sin\theta| = \sin\theta$)

$$\Rightarrow \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin\theta.$$

(Δες το Λήμμα → Απόδειξη)

βοηθητικό:

Ταυτότητα Lagrange.

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$$

Απόδειξη:

γίνεται άμεσα με τους αλγεβρικούς ορισμούς

με $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

20/02/17 ε. Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

• Πόρισμα

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$

$\vec{x}$ παράλληλο στο $\vec{y}$ $\iff$ $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ (συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων)

(αν η γωνία είναι 0° ή 180°)

→ Απόδειξη.

$\vec{x}$ παράλληλο στο $\vec{y}$ άρα $\theta = 0°$ ή $\theta = \pi$

άρα $\sin\theta = 0$.

προηγ. θ. $\Rightarrow \|\vec{x} \times \vec{y}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$

ή

$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{x} \times \vec{y}\| = 0$.

άρα απ' το προηγούμενο θεώρημα αφού $\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\| \neq 0$

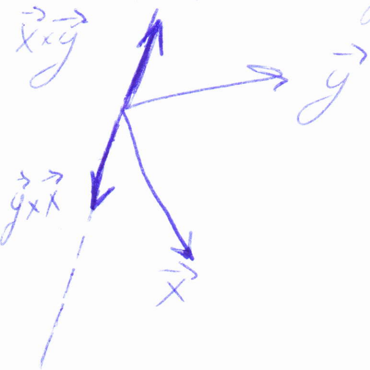
θα έχω αναγκαστικά $\sin\theta = 0$

άρα $\theta = 0°$ ή $\theta = \pi$.

• Κατεύθυνση

$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$

$\|\vec{z}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin\theta$



• Διεύθυνση του $\vec{z}$ (----)

Η διεύθυνση θα είναι κάθετη στο επίπεδο των $\vec{x}$ και $\vec{y}$

• Φορά (θα είναι προς τα πάνω ή προς τα κάτω)
(όπως είναι το σχήμα)

(από σύμβαση)

→ Προσδιορισμός της φοράς του $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

(αντίχειρας στο $\vec{x}$, υπόλοιπα δάχτυλα στο $\vec{y}$, η φορά της παλάμης θα είναι η φορά του $\vec{z}$).

άρα στο σχήμα θα είναι προς τα πάνω

→ Το από κάτω διάνυσμα, ποιο θα είναι;

→ το $-(\vec{x}\times\vec{y}) = \vec{y}\times\vec{x}$

Γιατί η διεύθυνση είναι κάθετη;

$\vec{x}\times\vec{y}$ κάθετο στο $\vec{x}$

$\vec{x}\times\vec{y}$ κάθετο στο $\vec{y}$

$\vec{z}=\vec{x}\times\vec{y}$

άρα $\vec{z}$ κάθετο στα $\vec{x}$ και $\vec{y}$.

• Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα (γίνεται με εσωτερικό γινόμενο)

→ Ορισμός.

$\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ με $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$, και αντίστοιχα διανύσματα θέσεις (έχω αυτά που ξεκινάνε από την αρχή των αξόνων) $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$

Τότε το διάνυσμα $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ με $\vec{v}=\vec{OE}$ όπου το E είναι η προβολή του A πάνω στην ευθεία που περιέχει το $\vec{OB}$, ονομάζεται διανυσματική προβολή του διανύσματος $\vec{a}$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{b}$ και συμβολίζεται με

$$\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$$ (projection)

↳ διάνυσμα που προβάλλεται

↳ κατεύθυνση που προβάλλεται.

• Πρόταση:

$\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ με $\vec{a},\vec{b}\neq 0$

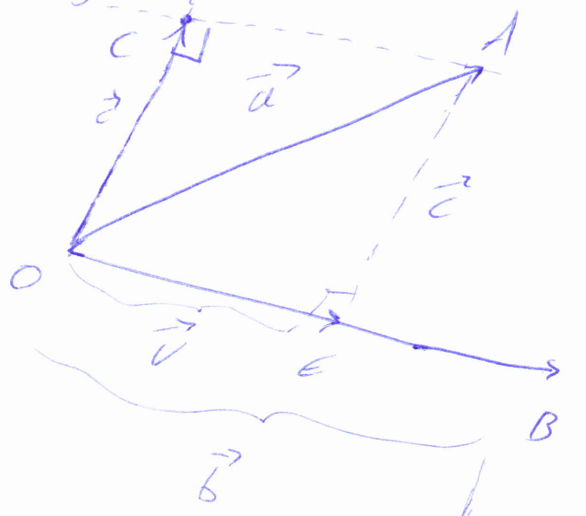
Τότε ισχύει

$$\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} = \frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}\cos\theta\,\vec{b}.$$

↳ πραγματικοί αριθμοί. άρα είναι ένας πραγματικός αριθμός επί $\vec{b}$.

200217 c. Μαθ. Ανάλυση ΙΙ

· Απόδειξη (προβολή διανύσματος σε διάνυσμα)



$\vec{OA} = \vec{a}$ $\quad \vec{OE} = \vec{v}$.

$\vec{OB} = \vec{b}$

· βοηθητικό διάνυσμα: $\vec{OC} = \vec{c}$
το οποίο είναι επίσης το $\vec{EA}$

· άρα $\vec{v} + \vec{c} = \vec{a}$ (1)

όπου $\vec{v} = proj_{\vec{b}} \vec{a}$

· Επίσης ισχύει $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ (2) (είναι κάθετα).

και $\vec{b}$ παράλληλο με το $\vec{v}$
(άρα το ένα είναι λ φορές το άλλο)
δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$. ώστε
$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{b}$ (3)
(για να μην έχω $\frac{1}{\lambda}$)

Από (1) και (3)

$\vec{a} = \lambda \vec{b} + \vec{c}$

(πολλαπλασιάζω)
οπότε έχουμε εσωτερικό με το $\vec{b}$)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{b} \cdot \vec{b}) + \underbrace{\cancel{\vec{c} \cdot \vec{b}}}_{0}$ (2)

$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$

άρα από (3) $proj_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b}$. ✓

Παράδειγμα 1

$\vec{a} = (1, 2, -1)$ $\quad \vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, 1, -13)$

αυτά βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

a) Δείξτε ότι $\vec{a}$ κάθετο στο $\vec{b}$ και αναλύστε το $\vec{c}$ σε δύο διανύσματα, παράλληλα στα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ αντίστοιχα

Λύση

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. άρα $\vec{a}$ κάθετο στο $\vec{b}$

Ζητάμε λοιπόν δύο διανύσματα $\vec{c_1}$ και $\vec{c_2}$ τέτοια ώστε

$$\vec{c} = \vec{c_1} + \vec{c_2} \text{ με } \vec{c_1} \parallel \vec{a} \text{ και } \vec{c_2} \parallel \vec{b}.$$

$\rightarrow$ $$\vec{c_1} = proj_{\vec{a}}\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} = \frac{3+2+13}{1+4+1}(1, 2, -1) =$$

$$= (3, 6, -3)$$

$\rightarrow$ $$\vec{c_2} = proj_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b} = \frac{0+1-26}{1+4}(0, 1, 2) = (0, -5, -10).$$

210217a Μαθ. Ανάλυση ΙΙ

Παράδειγμα #1

$\vec{a} = (2,3)$

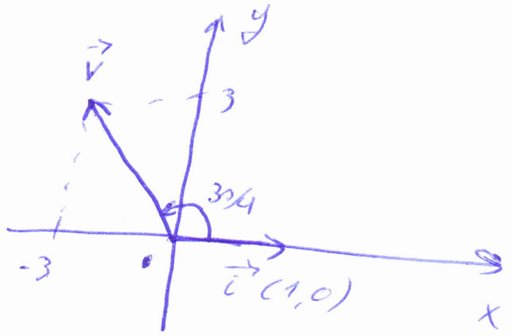
$\vec{b} = (-3,-2)$

$\vec{v} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$

Γωνία του $\vec{v}$ με τον x-y άξονα.

Λύση

$\vec{v} = (-3,3)$



Θεωρία

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{i}\|} = \frac{(-3,3)(1,0)}{\sqrt{9+9}\cdot 1} = \frac{-3}{\sqrt{18}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

#

Καμπύλες $\mathbb{R}^3$

Επισκόπηση στον $\mathbb{R}^2$

Καμπύλες 1) $y = f(x)$ 2) $F(x,y) = 0$

$\boxed{3)\ \vec{r}(t) = (x(t), y(t))}$

θα γενικεύσω αυτό στον $\mathbb{R}^3$

πχ ~~[illegible]~~ $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a\cos t, a\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$

άρα
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= a\sin t \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{x(t)}{a} &= \cos t \\ \frac{y(t)}{a} &= \sin t \end{aligned}\right\} \quad \frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{a^2} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = a^2$

κέντρο (0,0)

παράδειγμα #1

$\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= b\sin t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} = 1$$ (έλλειψη)

Στο $\mathbb{R}^3$

Δεν γράφω και εδώ σε έχω όλες απ' τις προηγούμενες 3 περιγραφές.

Στο $\mathbb{R}^3$ χρησιμοποιείται μόνο ο τρίτος 3) για την περιγραφή καμπύλης σε 3 διαστάσεις.

$$\boxed{\vec{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)),\quad t \in I \subseteq \mathbb{R}.}$$

$\vec{r}(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ πεδίο τιμών.

Βάση αυτής της σχέσης έχουμε:

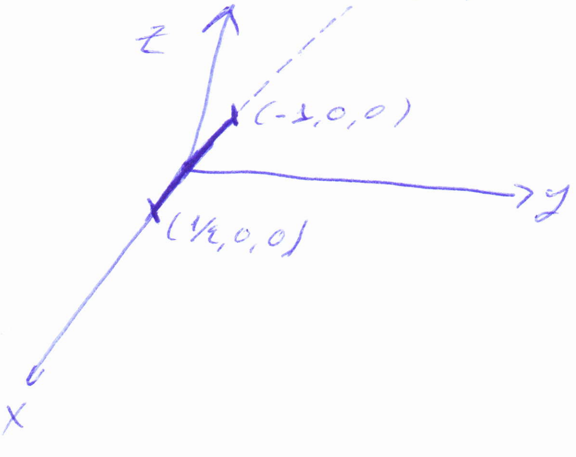
$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} t \in A$$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ ονομάζεται παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ όταν υπάρχει μία παραμετροποίηση $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, που έχει ως πεδίο τιμών (η παραμετροποίηση) της Γ.

- Όταν $I = [a, b]$ τότε $\vec{r}(a)$ και $\vec{r}(b)$ θα είναι τα άκρα της καμπύλης Γ.

Παράδειγμα #1

$\vec{r}(t) = (t, 0, 0),\ t \in [-1, \tfrac{1}{2}]$ (είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα)

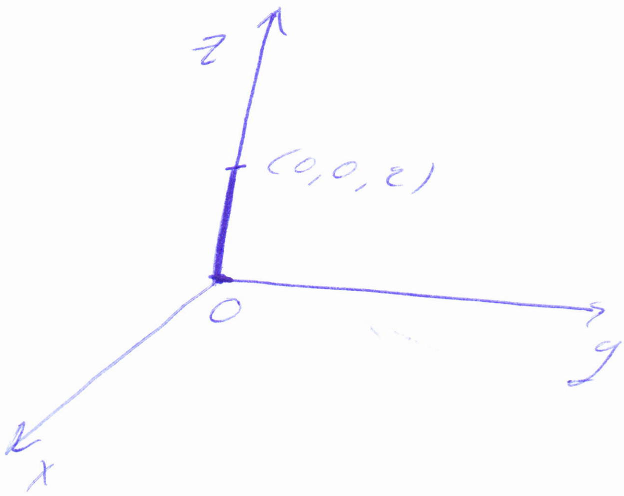


Μαθ. Ανάλυση ΙΙ

210917b.

Παράδειγμα # 2

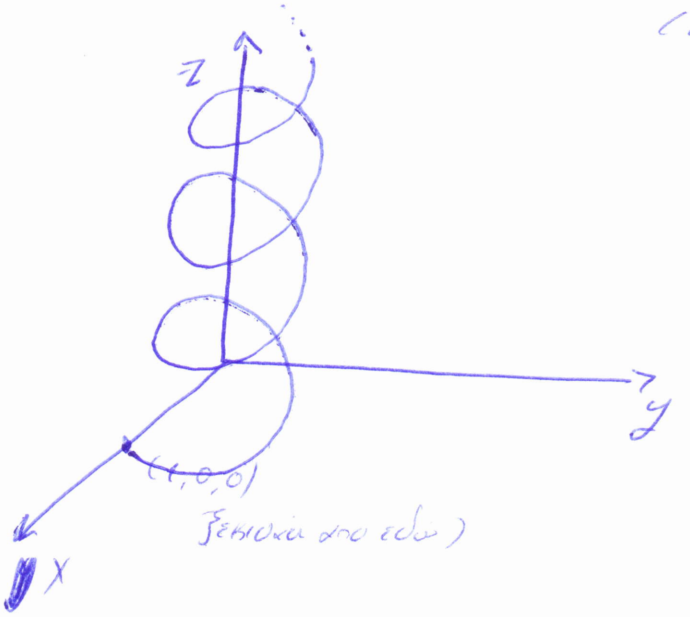
$\vec{r}(t) = (0, 0, t)\,,\ t \in [0, 2]$ (ευθύγραμμο τμήμα)



Παράδειγμα #3

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)\,,\ t \geq 0$

(το αρχικό σημείο είναι λόγω αυτό που αντιστοιχίζεται πρώτη τιμή του t).



Ευθεία του $\mathbb{R}^3$

α. Άμα έχω 2 σημεία στον $\mathbb{R}^3$, μπορώ να καθορίσω μία ευθεία

β. Άμα έχω ένα σημείο και ένα παράλληλο διάνυσμα, μπορώ επίσης να καθορίσω μία ευθεία

→ Καθορισμός της ευθείας του $\mathbb{R}^3$, που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα (ελεύθερο διάνυσμα)

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{OP_0} = \vec{r_0}$

$\boxed{\vec{OP} = \vec{r}}$

με P να μεταβάλλεται πάνω στην ευθεία

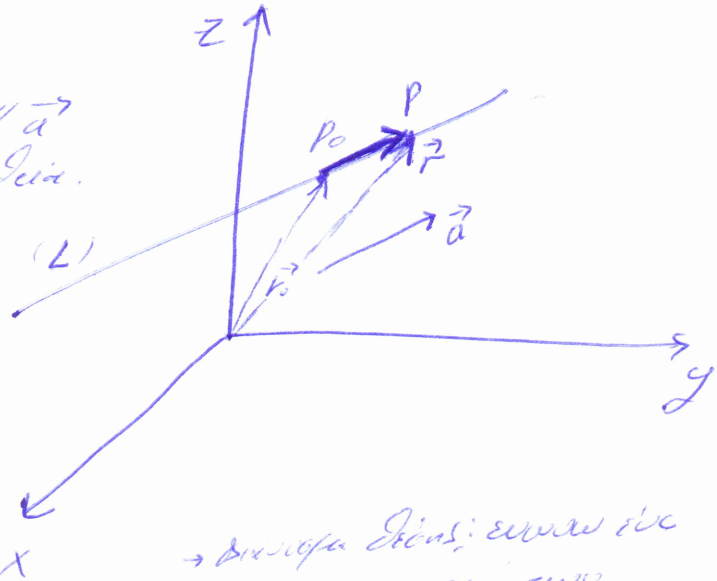
→ • Το διάνυσμα $\vec{P_0P} \parallel \vec{a}$ θα προσδώσει την ευθεία.

↓

$\vec{P_0P} = \vec{r} - \vec{r_0} \parallel \vec{a}$

$\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{a}}$ $t \in \mathbb{R}$



→ διάνυσμα θέσης: ενώνει ένα σημείο με την αρχή των αξόνων.

διανυσματική εξίσωση της ευθείας στον $\mathbb{R}^3$.

• $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{a}$

$(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3)$

κατά συνιστώσα θα έχουμε

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t a_1 \\ y(t) &= y_0 + t a_2 \\ z(t) &= z_0 + t a_3 \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}$$

→ παραμετρικές εξισώσεις, ή εξισώσεις κατά συντεταγμένη.

Αν $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, τις λύνω όλες ως προς t και εξισώνω μεταξύ τους

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

→ συμμετρικές εξισώσεις.

αυτά τα 3 χρειάζομαι για να περιγράψω μια ευθεία.

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

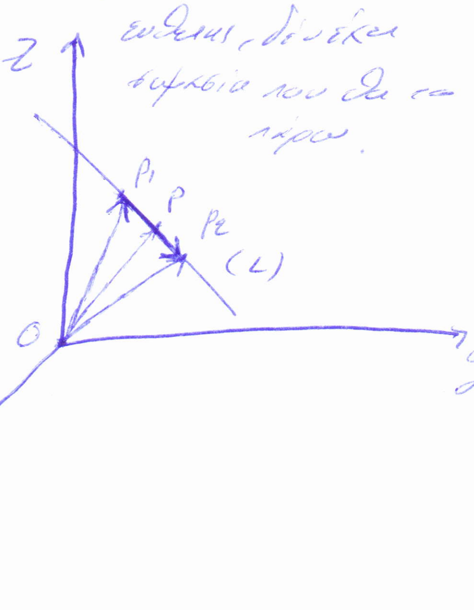
210217ε

→ Καθορισμός της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$

P: τυχόν σημείο της ευθείας, δηλαδή σημείο που θα το πάρω.

$P(x, y, z)$: τυχόν σημείο της ευθείας L



→ Φέρω το $\vec{P_1P_2}$ (το οποίο παίζει τον ρόλο του $\vec{a}$ της προηγ. άσκησης)

• $\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} =$

$= (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

• Το $\vec{P_1P_2} \parallel L$ (άρα όπου $\vec{a}$ βάζω το $\vec{P_1P_2}$ και όπου P_0 το P_1, είναι το ίδιο).

→ Διανυσματική Εξίσωση της ευθείας

→ Από τα προηγούμενα θα έχουμε ότι

$$\boxed{(x(t), y(t), z(t)) = (x_1, y_1, z_1) + t(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)}$$

→ Παραμετρικές εξισώσεις.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_1 + t(x_2-x_1) \\ y(t) &= y_1 + t(y_2-y_1) \\ z(t) &= z_1 + t(z_2-z_1) \end{aligned}\right\} t\in\mathbb{R}$$

→ Συμμετρικές Εξισώσεις.

Αν $x_2-x_1 \neq 0$, $y_2-y_1 \neq 0$ και $z_2-z_1 \neq 0$ έχουμε με λύση ως προς t

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Παράδειγμα #1

Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από τα δύο σημεία:

$P_1(1, 1, -1)$ και $P_2(-2, 1, 3)$

Λύση

Γράφω την διανυσματική:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (1, 1, -1) + t(-2-1, 1-1, 3+1)$$

και με ανάλυση κατά συνιστώσα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 1 - 3t \\ y(t) &= 1 \\ z(t) &= -1 + 4t \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}.$$

δεν μπορώ να βρω συμμετρικές γιατί $y_2 = y_1$.

(άρα η ευθεία έχει $y = 1$ και είναι κάθετη στον άξονα y).

Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

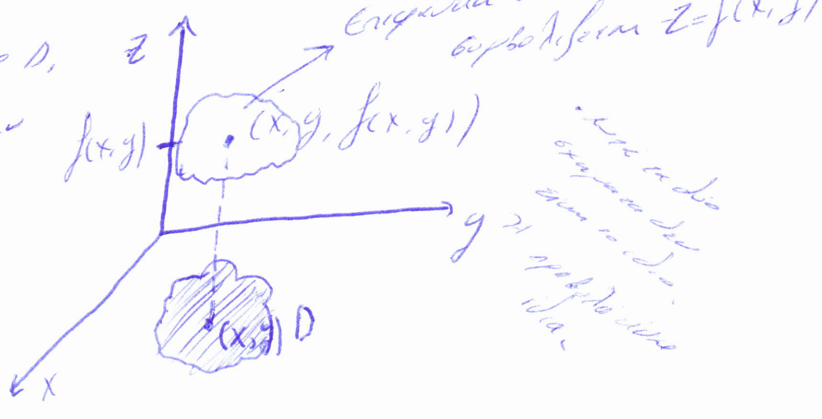
Έστω μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

$f = f(x, y)$ (δηλ. έχω δύο εισόδους και μία έξοδο)

$: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

• $\text{Graph}(f) = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Ιδέα: κάθε x, y που υπάρχει στο D, αποκτά ένα ύψος, ανάλογο με την τιμή της $f(x,y)$



• Και τα δύο σχήματα δεν είναι ίδια· η προβολή είναι ίδια.

Μαθ. Ανάλυση ΙΙ

21.02.17δ.

• Μπορεί πάντα η εξίσωση να περιγράψει οποιαδήποτε επιφάνεια;

\# Μοναδιαία σφαίρα (επιφάνεια, ~~όχι το~~ χωρίς όγκο)

$$x^2+y^2+z^2=1$$

αυτό δεν μπορώ να το γράψω στην μορφή $z=f(x,y)$. (θα έχω το $\pm$ στην ρίζα)

→ άρα ο πιο γενικός τρόπος να περιγράψω μία διεπιφάνεια, είναι:

$$\boxed{F(x,y,z)=0}$$ → γενικότερος τρόπος περιγραφής επιφάνειας.

→ Επιλογή $F(x,y,z)=f(x,y)-z$

τότε για $F=0 \Rightarrow z=f(x,y)$. άρα η πρώτη περίπτωση (αυτή που σχεδίασα) είναι μία ειδική περίπτωση αυτής της γενικής.

→ Για την σφαίρα, άρα χρειάζεται να την δώσω:

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

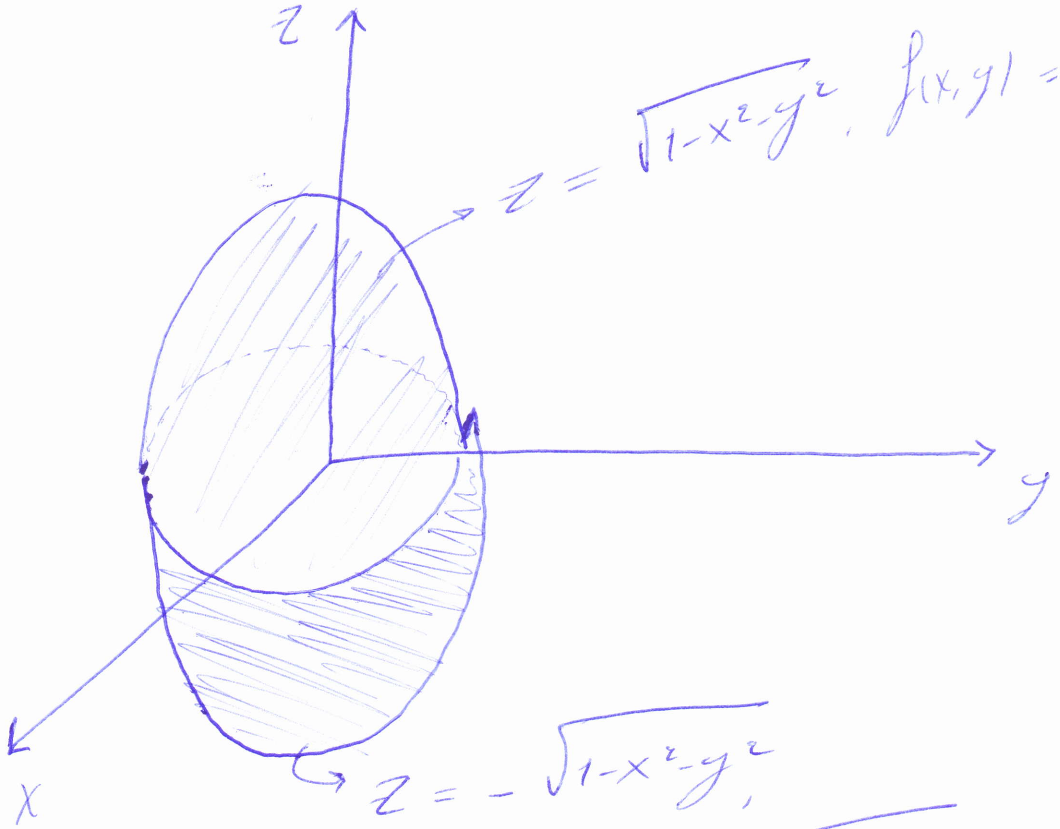
$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$: πάνω ημισφαίριο

↓

$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$: κάτω ημισφαίριο.

↓

$f(x,y)$



$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} > 0$

$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$,

$f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2} < 0$

→ Δευτέρα - Τρίτη

δεν έχω μάθημα

Μάθημα Ανάλυση ΙΙ

7/3/17 α.

Χθεσινή άσκηση για το σπίτι.

~~Άσκηση~~ $L: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{5}$ (ευθεία)

$E: \; x+y+z = 1$ (επίπεδο)

Ποιο είναι το σημείο τομής;

Λύση: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{5} = t \in \mathbb{R}$ (συμμετρικές)

Εξισώσεις της L: (παραμετρικές)

$$\left.\begin{aligned} x &= 3t-2 \\ y &= -2t+1 \\ z &= 5t \end{aligned}\right\}$$

αυτά τα 3 πρέπει να πληρούν το $x+y+z=1$.

άρα με αντικατάσταση στην εξίσωση του E:

$$3t-2-2t+1+5t = 1 \Rightarrow t = 1/3.$$

άρα: Σημείο τομής L και E είναι αυτό που αντιστοιχεί στο $t = 1/3$.

επομένως

$x = -1, \; y = \dfrac{1}{3}, \; z = \dfrac{5}{3}$ (Μοναδικό σημείο τομής)

→ Για να τέμνονται πλήρως θα πρέπει να κάνω και έναν έλεγχο για την παραλληλία.

$N = (1,1,1) \perp E$

$$L: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$$ εξ ορισμού.

άρα $\vec{a} = (3, -2, 5) \parallel L$

$\vec{N} \cdot \vec{a} = 3 - 2 + 5 = 6 \neq 0$

άρα η ευθεία (L) δεν είναι παράλληλη στο ε αφού το εσ. γινόμ. είναι $\neq 0$. (αφού $\vec{N}$ όχι κάθετο στο $\vec{a}$).

Πραγματικές Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών.

$$f : \boxed{A \subseteq \mathbb{R}^n} \to \boxed{\mathbb{R}}$$

Γενικά: είναι ένας νόμος $\vec{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$.
(το αποτέλεσμα είναι πραγματικός αριθμός).

- $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
  - Ειδικότερα για $n = 2$ αντί να πω $f(x_1, x_2)$ θα λέω $f(x, y)$ (για απλούστευση)

  επίσης για $n = 3$ θα έχω $f(x, y, z)$

- Πεδίο / Σύνολο Ορισμού της $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, είναι το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ στο οποίο έχει νόημα ο τύπος της f.

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

7/3/17 β.

Ώρες γραφείου Δευτέρα 6/3/17

πχ. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $A=\mathbb{R}^3$

$f(x,y) = y\cdot \ln x$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$

(το y μπορεί να είναι και αρνητικός)

($y\in\mathbb{R}$ εννοείται...)

* Γραφική Παράσταση / Γράφημα. Πραγματικής Συνάρτησης Πολλών Μεταβλητών.

• Για μια μεταβλητή $y=f(x): A\subseteq\mathbb{R}\to\boxed{\mathbb{R}}^*$ * πάντα έχω πραγματικά τιμές στην έξοδο.

$\mathrm{Graph}(f)=\{(x,f(x)),\ x\in A\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

δηλ. για όλα τα x του π.ο. μαζεύω ζευγάρια και τα ενώνω.

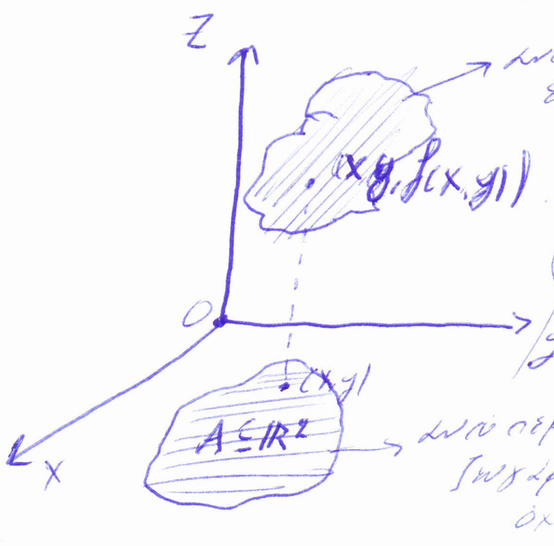
• Για πραγματική συνάρτηση ~~δύο~~ 2 μεταβλητών. (επιφάνεια σε 3-διαστάσεις)

$z=f(x,y): A\subseteq\mathbb{R}^2\to\boxed{\mathbb{R}}^*$

$\mathrm{Graph}(f)=\{(x,y,f(x,y)),\ (x,y)\in A\}\subseteq\mathbb{R}^3$

δηλ. μαζεύω τριάδες σημείων στον χώρο (δύο ~~εξαρτημένες~~ ανεξάρτητες, και μία εξαρτημένη) σχηματίζεται μια επιφάνεια.

Σχήμα $z=f(x,y)$



αυτό είναι επιφάνεια. όχι στερεό. δεν έχει όγκο (εσωτερικό χώρο). Η 3η συντεταγμένη z είναι το "ύψος"

επικαλυπτόμενες

αυτό δεν είναι τυχαία, κατασκευάζεται με πολύ συγκεκριμένο τρόπο.

αυτό περιλαμβάνει ζευγάρια σημείων όχι τριάδες.

• Για $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \boxed{\mathbb{R}}$

$$\text{Graph}(f) = \{ (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{n}, \underbrace{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{1}), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$n + 1$

• Δεν υπάρχει γεωμετρική εποπτεία για $n \geq 3$

Διανυσματικές Συναρτήσεις μίας Πραγματικής Μεταβλητής.

$$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$\vec{f}(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)]$$

x: πραγματικός
f: διάνυσμα

$f_i(x) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνιστώσες συναρτήσεις (συνιστώσες του f διάνυσμα)

$i = 1, 2, \dots, n$

πχ $\vec{f}(x) = [\underbrace{e^x \cos x}_{f_1(x)} \quad \underbrace{e^x \sin x}_{f_2(x)}] \quad x \in \mathbb{R}$

↳ δεν βάζω κόμμα,
είναι σαν πίνακας
εδώ: 1 γραμμή, 2 στήλες

$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

πχ $\vec{f}(x) = [2x^2 \quad x+1 \quad e^x] \quad x \in \mathbb{R}$

$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Μαθημ. Ανάλυση II

7/3/17 c.

- Τέτοιες συναρτήσεις (πραγματικές μίας μεταβλητής) περιγράφουν καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$.

- Γενικότερη δομή: (διανυσματικά πεδία)

Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (διανυσματικά πεδία), έχουν ως είσοδο και ως έξοδο διάνυσμα.

$$\vec{f} : \underline{A \subseteq \mathbb{R}^n} \to \underline{\underline{\mathbb{R}^m}}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}) \; f_2(\vec{x}) \; \dots \; f_m(\vec{x})]$$

$$f_i(\vec{x}) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

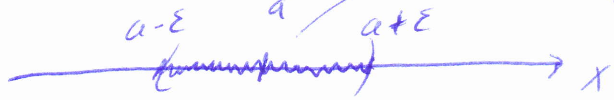
↳ συνιστώσες συναρτήσεις. που παίρνουν είσοδο από διάνυσμα θέσης.

για $i = 1, \dots, n$

- Στοιχεία Τοπολογίας στον $\mathbb{R}^n$

για $n = 1$, $\mathbb{R}^1$ (ευθεία)

μόνο τα εσ. σημεία χωρίς τα άκρα με κέντρο το α.



$$|x - \alpha| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon$$

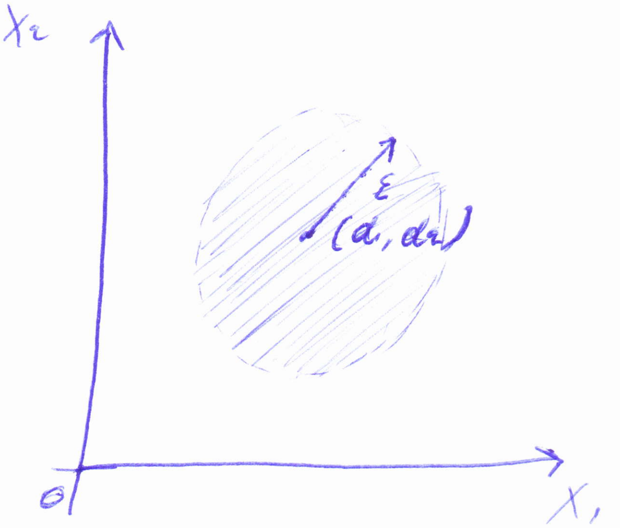
για $n = 2$, $\mathbb{R}^2$

έχω $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$ (Νόρμα) θέτοντας $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

έχω $\sqrt{(x_1-\alpha_1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2} < \varepsilon \Rightarrow (x_1-\alpha_1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2 < \varepsilon^2$

→ το οποίο είναι ένας δίσκος

(ένας κύκλος με όλα του τα εσωτ. σημεία, και χωρίς αυτά της περιφέρειας. αφού έχω γνήσια μικρότερο.)



Οπότε ~~για~~ για

$$\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : \|\vec{x}-\vec{\alpha}\| < \varepsilon\}$$

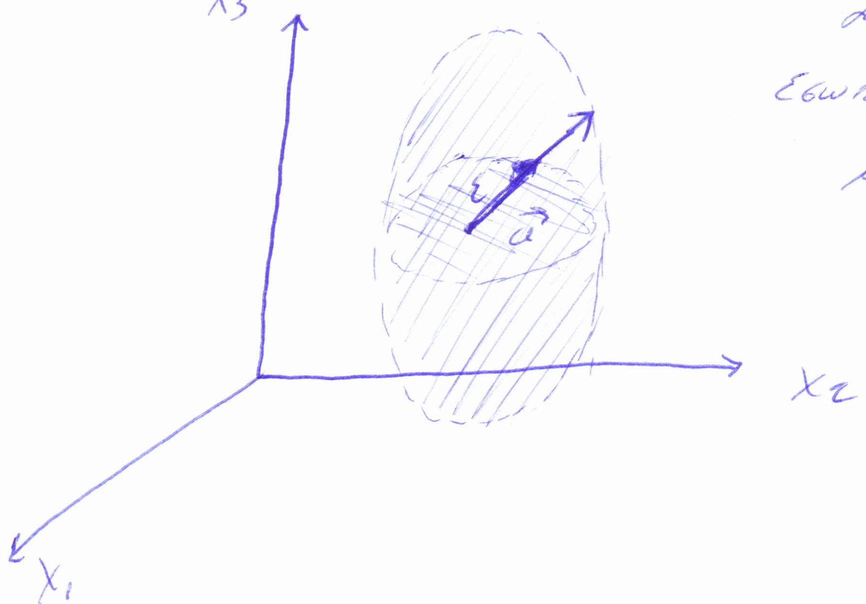
ορίζεται ο ανοικτός δίσκος.

• για $n = 3$, $\mathbb{R}^3$

$\|\vec{x}-\vec{\alpha}\| < \varepsilon$ με $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
και τα δύο $\in \mathbb{R}^3$.

Επομένως

$$(x_1-\alpha_1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2 + (x_3-\alpha_3)^2 < \varepsilon^2$$



αυτό περιγράφει το εσωτερικό της σφαίρας του $\mathbb{R}^3$ με κέντρο $\vec{\alpha}$ και ακτίνα ε.

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ — 7/3/17 d.

Γενικεύοντας

• για n, $\mathbb{R}^n$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon\}$$

με ονομασία: ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο το $\vec{a}$ και ακτίνα ε.

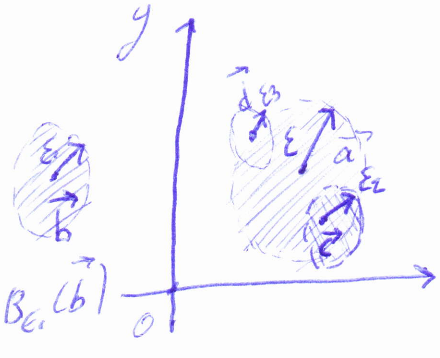
Σημεία συσσώρευσης.

• $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

(υποσύνολο του χώρου n-διάστατου)

→ Τότε το $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται σημείο ~~συσσώρευσης~~ συσσώρευσης του A όταν κάθε $B_\varepsilon(\vec{a})$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διαφορετικό από το $\vec{a}$.

πχ σε $\mathbb{R}^2$



$\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$

$\vec{b}$: δεν είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A.

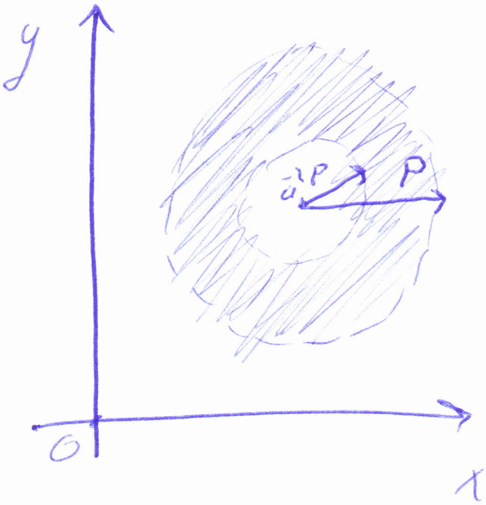
$\vec{c}$: είναι σημείο συσσώρευσης του A

$\vec{d}$: είναι σημείο συσσώρευσης του A

⟹ Να σκεφτώ τα σημεία συσσώρευσης.

Είναι δακτύλιος (κομμένα ανάμεσα σε δύο κύκλους)

αυτό είναι το σύνολό μου.

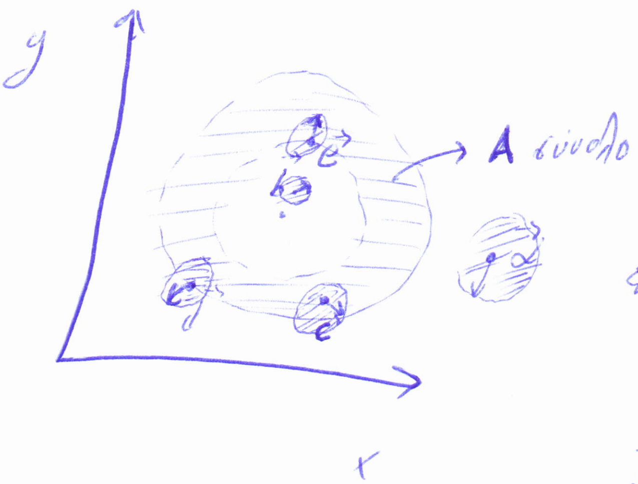


→ χαρακτήρισε τα σημεία συσσώρευσης.

Μαθ. Ανάλυση ΙΙ
13/3/17 α.

~~[illegible]~~

Λύση: παράδειγμα με δακτύλιο



$\vec{a}$: όχι σημείο συσσώρευσης

$\vec{b}$: όχι σημείο συσσώρευσης

$\vec{c}$: σημείο συσσώρευσης

επίσης έχει νόημα να κοιτάξουμε ένα σημείο στην περιφέρεια του κάθε δίσκου.

$\vec{d}$: είναι σημείο συσσώρευσης

$\vec{e}$: είναι σημείο συσσώρευσης

τα κέντρα αυτών των κύκλων, δεν ανήκουν στο A.

- Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων.

η f είναι πραγματική συνάρτηση.

ορισμός: $f : A \subseteq R^3 \to R$

(βγάζει πραγματικό αποτέλεσμα, ενώ έχει ως είσοδο $\vec{x}$ διάνυσμα στο R^3.)

και $\vec{a}$ σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A της f.

→ Τότε θα λέμε ότι η f έχει όριο το $b \in R$ όταν το $\vec{x}$ τείνει στο $\vec{a}$ και συμβολίζουμε:

$$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = b}$$

Τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $|f(\vec{x}) - b| < \varepsilon$, $\forall \vec{x} \in A$ με $\vec{x} \neq \vec{a}$ και $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$

$|f(\vec{x}) - b| < \epsilon$

↪ σημαίνει ότι οι τιμές της $f(x)$, γίνονται σχεδόν ίσα με το b.

για ποια $\vec{x}$;

για αυτά → $\|\vec{x} - \vec{\alpha}\| < \delta$.

→ $\|\vec{x} - \vec{\alpha}\| < \delta$

Υπενθύμιση από Ανάλυση Ι

ο ορισμός πάλι ίδιος, εκτός από αυτό

$|x - \alpha| < \delta_\alpha$

$\alpha - \delta \qquad \alpha + \delta$

Απλά αντί να έχω σημεία αντιστοιχούν στο επίπεδο, τα είχα πάνω στην ευθεία.

• Παράδειγμα.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \underset{(b)}{0}$$ να το δείξω.

Σημείωση

$\lim_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} f(\vec{x}) = b$

και $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Μπορώ να γράψω

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3)\to(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} f(x_1, x_2, x_3) = b.$$

Λύση

$\|\vec{x} - \vec{\alpha}\| = \|(x,y) - (0,0)\|$

$= \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ (1)

(θα επιλέξω ένα κατάλληλο δ)

$|f(x,y) - b| = \left|\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right| = \frac{x^2}{x^4 + y^2}|y|$ θέλω να το κάνω $< \epsilon$.

$\frac{x^2}{x^2 + y^2}|y|$ άρα $\le |y|$

↪ αυτό είναι πάντα ≤ 1

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

13/3/17 β.

$$|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$$

άρα

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon \quad \text{(από (1))}$$

(αυτό γράφουμε δεν έχουμε λόγια)

• Επιλογή $\varepsilon = \delta$

άρα το όριο είναι το $b = 0$ (αφού ισχύουν όλα αυτά για $b = 0$)

Δύο βασικές σχέσεις

$\|\vec{x} - \vec{\alpha}\| < \delta$ παίρνω ένα σημείο $\vec{\alpha}$, με ακτίνα δ

και θέλω οι τιμές της συνάρτησης να είναι κοντά στο b.

(αυτό έδειξα στο παράδειγμα πριν)

• Πως δείχνω ότι το όριο μιας συνάρτησης δεν υπάρχει;

• <u>Πρόταση</u>

$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (τα αντίστοιχα ισχύουν και στο $\mathbb{R}^2$)

και $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ σημείο συσσώρευσης του A.

Τότε αν υπάρχουν δύο καμπύλες Γ_1 και Γ_2 έτσι ώστε να ισχύει:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\\(x,y,z)\in\Gamma_1}} f(x,y,z) \neq \lim_{\substack{(x,y,z)\to(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\\(x,y,z)\in\Gamma_2}} f(x,y,z)$$

$\Rightarrow$ Τότε <u>δεν</u> υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} f(x,y,z)$

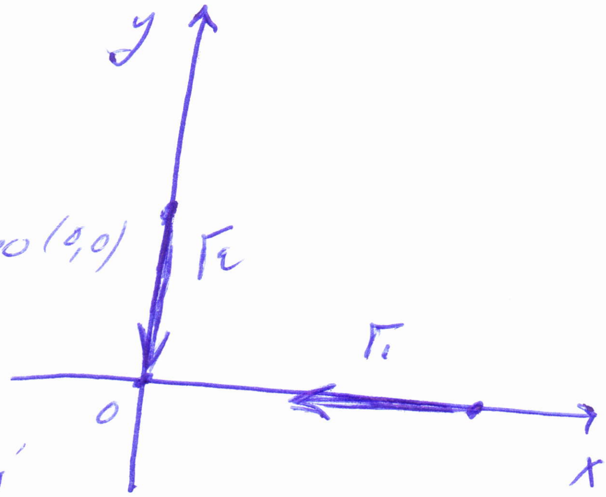
· <u>παράδειγμα</u>

Να δείξετε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{δεν υπάρχει.}$$

Το σημείο συσσώρευσης είναι το $O(0,0)$.

<u>Λύση:</u>
(Κάνω ένα σχήμα)



→ Να βρω δύο τρόπους προσέγγισης του $(0,0)$ για τους οποίους η συνάρτηση f να έχει διαφορετικό όριο.

→ Προσεγγίζω το $(0,0)$ μία φορά απ' τον x άξονα και μία φορά απ' τον y.

· Άρα ως Γ_1 καμπύλη παίρνω τον θετικό x-άξονα

έχω δηλ. σημεία της μορφής $(x,y) = (x,0)$ με $x>0$

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

άρα $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_1}} f(x,y) = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$

· Ως Γ_2 καμπύλη παίρνω τον θετικό y-άξονα

έχω δηλ. σημεία της μορφής $(x,y) = (0,y)$ με $y>0$

άρα $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_2}} f(x,y) = \lim_{y\to0^+}(-1) = -1$

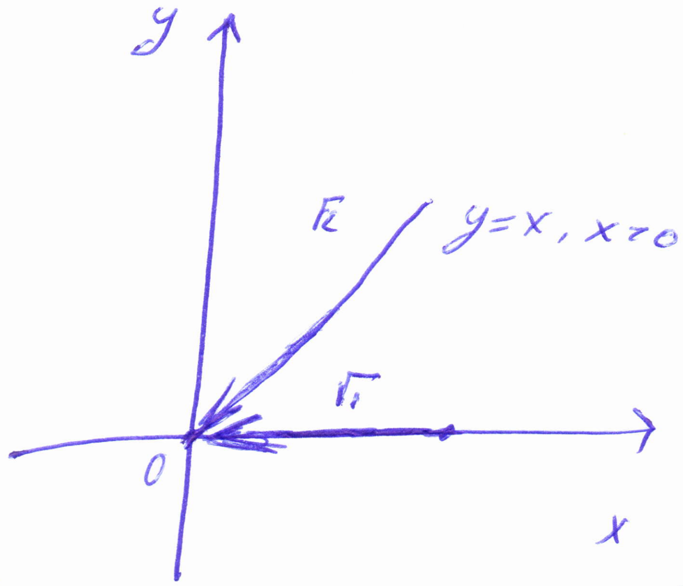
άρα δεν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Μαθ. Ανάλυση ΙΙ

13/3/17ς.

· παράδειγμα.

Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^3}$ δεν υπάρχει.



Λύση

$\Gamma_1 : (x,0),\ x>0$

$f(x,y) = \frac{xy}{x^3+y^3}$

άρα $f(x,0) = \frac{0}{x^3} = 0$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_1}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to0^+} 0 = 0$

(δεν θα πάρω $\Gamma_2 : (0,y)$ γιατί θα μου βγάλει το ίδιο αποτέλεσμα.)

$\Gamma_2 : (x,y) = (x,x),\ x>0$

με $f(x,x) = \frac{x^2}{2x^3} = \frac{1}{2x}$

άρα $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_2}} f(x,y) =$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{2x} = +\infty \neq 0$. άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^3}$.

Σημείωση: ο τρόπος αυτός χρησιμοποιείται μόνο για να αποδείξω ότι δεν υπάρχει το όριο.

→ Να λύσω

Να δείξετε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν. (με την προηγ. πρόταση)

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

ii) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

(θα βρω επίσης Γ_1, Γ_2 για να πλησιάσω το $(0,0,0)$).

~~(Προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ορίου.)~~

• Ορισμός:

$f: A\subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $\vec{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A.

→ Η f ονομάζεται φραγμένη όταν υπάρχει $M>0$ έτσι ώστε

$$\boxed{|f(\vec{x})| \le M, \quad \forall \vec{x}\in A}$$

· Η f θα ονομάζεται μηδενική στο $\vec{\alpha}$, όταν ισχύει $\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} f(\vec{x}) = 0}$.

• Πρόταση (Κριτήρια για ύπαρξη ορίων)

$f, g: A\subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $\vec{\alpha}$: σημείο συσσώρευσης του A.

Τότε ισχύουν:

1) Αν f μηδενική στο $\vec{\alpha}$ και ισχύει $\boxed{|g(\vec{x})| \le |f(\vec{x})|}$, $\forall \vec{x}\in A$ τότε και η g είναι μηδενική στο $\vec{\alpha}$.

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

13/3/17 d.

2) (Μηδενική επί φραγμένη = μηδενική)

Αν f μηδενική στο $\vec{\alpha}$, και g φραγμένη στο $\vec{\alpha}$, τότε $f \cdot g$ μηδενική στο $\vec{\alpha}$. Δηλαδή ισχύει $\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) = 0}$

Παράδειγμα. (Κριτήριο 1)).

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y + z^3}{x^2+y^2+z^2} = 0$$ Να το αποδείξω.

Λύση

$$g(x,y,z) = \frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2}, \quad |g(x,y,z)| = \frac{|x^2y+z^3|}{x^2+y^2+z^2}$$

(τριγωνική ανισότητα)

$$\frac{|x^2y+z^3|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{|x^2y|}{x^2+y^2+z^2} + \frac{|z^3|}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}|y| + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}|z| \leq |y| + |z|$$

$x^2 < x^2+y^2+z^2$ $\qquad$ <1

$f(x,y,z) = |y| + |z|$ με $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$.

Έχω $g(\vec{x}) \leq f(\vec{x})$ με $f(\vec{x})$ μηδενική, άρα και $g(\vec{x})$ μηδενική.

Θεώρημα:
μηδενική επί φραγμένη
= μηδενική.

• **Παράδειγμα** (Κριτήριο 2)

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\sin(x^2+y^2))\, e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0.$

Λύση

$g(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, αυτή είναι φραγμένη (χωρίς απόδειξη).

$f(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$, $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow x^2+y^2 \to 0$

$u = x^2+y^2$ τότε $u \to 0$

άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{u\to 0^+} e^{-\frac{1}{u}} = 0$. άρα f μηδενική.

$\Rightarrow \ldots$ κριτήριο 2)

• Ισχύουν για $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} f(\vec{x})$ και $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} g(\vec{x})$ οι γνωστές Αλγεβρικές Ιδιότητες (πράξεων) των ορίων.

• **Άσκηση**

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{y} = 0$

Λύση $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x(e^{xy}-1)}{xy} \right) \quad (1)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{xy} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^{u}-1}{u} \overset{\frac{0}{0}\text{ De l'Hospital}}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^{u} = 1 \quad (2)$

ορίζοντας $u = xy$
για $(x,y)\to(0,0)$
$u \to 0$.

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

13/3/17 ε.

Από (1) και (2) (από αλγεβρικές ιδιότητες ορίων).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{y} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{xy}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

14/3/17α.

Χθες $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} f(\vec{x}) = b \in \mathbb{R}$. όριο πραγματικής συνάρτησης 3ων μεταβλητών.

Αν πάρουμε μία $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \boxed{\mathbb{R}^3}$

↳ Η έξοδος τώρα της συνάρτησης είναι διάνυσμα.

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}}$$

έχω ως αποτέλεσμα ένα διάνυσμα 3ων θέσεων. (Παίρνω το όριο κατά συνιστώσας.)

• <u>Ορισμός</u>

$\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad (i = 1, 2, 3)$

(συνιστώσες/πραγματικές συναρτήσεις).

δηλαδή $\quad \vec{f}(\vec{x}) = [\, f_1(\vec{x}) \;\; f_2(\vec{x}) \;\; f_3(\vec{x}) \,]$

· $\vec{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{R}^3$

Ισοδύναμοι ισχυρισμοί

1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ $\quad$ και $\quad$ 2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} f_i(\vec{x}) = b_i$

για $i = 1, 2, 3$.

• Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \vec{a}}} \Bigg[\overbrace{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{f_1(x,y)} \quad \overbrace{\frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2}}^{f_2(x,y)} \Bigg] = \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ \end{array} \Big[\, 0 \quad 0 \,\Big]$$

Λύση

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = ?$$

$(x,y)\to(0,0)$

$$\begin{cases} |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y|}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} = |y|$$

Όμως $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

(κριτήριο παρεμβολής[?] νο 1)

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

$f_2(x,y) = \dfrac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2}$ θέτω $u = x^2+y^2$

για $(x,y)\to(0,0)$

$u \to 0$

άρα $f_2(u) = \dfrac{\cos u - 1}{u}$ άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\cos u - 1}{u}$

$= -\lim\limits_{u\to 0} \sin u = 0.$

άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \dfrac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} \right] = [0 \quad 0]$

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

14/3/17 b.

· Παράδειγμα 2 $\quad f_1(x,y) \qquad f_2(x,y)$

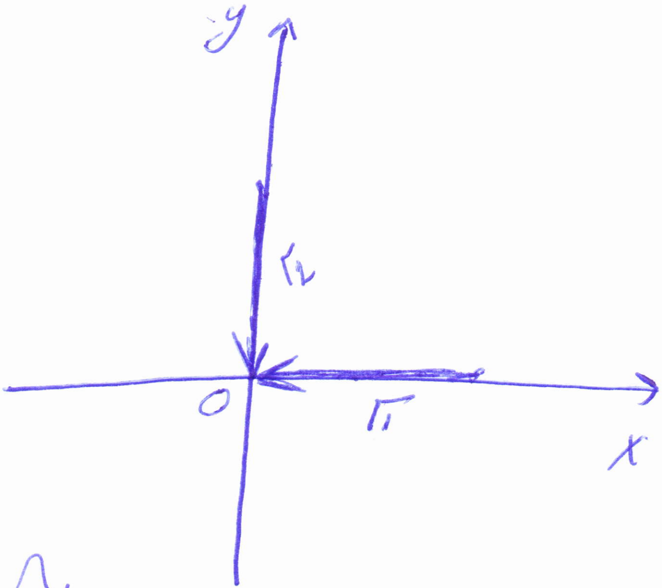
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \vec{a}}} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\sin(x^2+2y^2)}{x^2+y^2}\right]$$

να δειχθεί ότι δεν υπάρχει αυτό το όριο.

Δηλαδή ότι δεν υπάρχει το όριο της f_1, της f_2, ή δεν υπάρχει το όριο καμίας από τις δύο

Λύση

$$f_1(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



$\Gamma_1 \quad (x,y) = (x,0)\ ,\ x>0$

$$f_1(x,0) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

άρα $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Gamma_1}} f_1(x,y) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

$\Gamma_2 \quad (x,y) = (0,y)\ .\ y>0$

$$f_1(0,y) = \frac{0}{|y|} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Gamma_2}} f_1(x,y) = \lim_{y\to 0^+} 0 = 0.$$

$1 \neq 0$ άρα το όριο της

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$ δεν υπάρχει.

(η άσκηση έχει λυθεί εφόσον δεν υπάρχει το όριο της f_1).

$$f_2(x,y) = \frac{\sin(x^2+2y^2)}{x^2+y^2}$$ (Δοκιμάζω να πάω με τις Γ_1 Γ_2 καμπύλες)

Γ_1: $(x,y) = (x,0)$ με $x > 0$

$$f_2(x,0) = \frac{\sin x^2}{x^2} \quad \text{άρα} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in\Gamma_1}} f_2(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

Θέτοντας $u = x^2$ έχουμε:

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Γ_2: $(x,y) = (0,y)$, με $y > 0$.

$$f_2(0,y) = \frac{\sin 2y^2}{y^2} \quad \text{άρα} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in\Gamma_2}} f_2(x,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin 2y^2}{y^2} =$$

$= 2\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin 2y^2}{2y^2}$, ορίζω $b = 2y^2$ άρα έχω $2\lim_{b\to 0^+} \frac{\sin b}{b} = 2\cdot 1 = 2$

$1 \neq 2$ άρα το όριο της f_2 δεν υπάρχει.

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

14/3/17 c.

· Συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων.

$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ σημείο συσσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{R}^3$

Επειδή όμως χρειαζόμαστε και την τιμή της f στο $\vec{a}$, $f(\vec{a})$

πρέπει $\vec{a} \in A$.

· Ορισμός

$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ θα λέμε ότι είναι συνεχής στο $\vec{a} \in A$

όταν $\boxed{\text{υπάρχει το όριο } \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})}$ και ισχύει $\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})}$

Η συνέχεια διανυσματικής συνάρτησης μεταβιβάζεται στην συνέχεια ~~κατα~~ της κάθε συνιστώσας συνάρτησης.

· Πρόταση

$\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}) \quad f_2(\vec{x}) \quad f_3(\vec{x})] : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

αυτή θα είναι συνεχής στο $\vec{a} \in A$ τότε και μόνο τότε όταν

$f_1, f_2, f_3 : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\vec{a}$.

· Παράδειγμα

Εξετάστε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\to$

Λύση

για $(x,y) \neq (0,0)$

αριθμητής συνεχής συνάρτηση
παρονομαστής συνεχής συνάρτηση   άρα f συνεχής

Στο $(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \overbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}^{\leq 1} |y| \leq |y|$$

όμως $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2 y}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} = 0$

Επίσης $f(0,0) = 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

άρα f συνεχής στο $(0,0)$

άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}^2$

• **παράδειγμα.**

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση

Για $(x,y) \neq (0,0)$, ως πηλίκο συνεχών, η f είναι συνεχής.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

14/3/17 d.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$ δουλεύω με καμπύλες Γ_1, Γ_2.

$\Gamma_1 : (x,y) = (x,0)$ με $x>0$

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0. \text{ άρα } \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Gamma_1}} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$$

$\Gamma_2 : (x,y) = (x,x)$, $x>0$. (η ευθεία $y=x$).

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \text{ άρα } \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Gamma_2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$0 \neq 1/2$ άρα δεν υπάρχει το όριο.

Αφού δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν έχει νόημα να μιλάω για συνέχεια.

• Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

(Ξέρω $(g\circ f)(x) = g(f(x))$) (όπου το σύνολο τιμών της f ανήκει στο σύνολο ορισμού της g.)

$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{g} : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(A) \subseteq B$

$\vec{g}\circ\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{g}\circ\vec{f}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$.

```tikzcd
\mathbb{R}^3 \supseteq A \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[dr, dashed, "\vec{g}\circ\vec{f}"'] & \vec{f}(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\vec{g}"] \\
 & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
```

σύνολο ορισμού

πεδίο τιμών

Θεώρημα

$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{g} : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{f}(A) \subseteq B$

Αν $\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{\alpha} \in A$ και $\vec{g}$ συνεχής στο $\vec{f}(\vec{\alpha}) \in B$ τότε και η $\vec{g} \circ \vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι συνεχής στο $\vec{\alpha} \in A$.

Παράδειγμα

$$h(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Εξέταση της συνέχεια της h στο $(0,0)$

Λύση

$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. με $g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$

(στόχος μου είναι να τις συνθέσω και να βγάλω την h.)

$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & \mathbb{R}\ [0,+\infty) \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(Αυτό το τρίγωνο είναι συμβολικό)

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(x,y)) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} = h(x,y).$$

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ
14/3/17 ε.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, άρα και στο σημείο $(0,0)$ και η g είναι συνεχής στο $f(0,0)=0$

(από το γνωστό θεώρημα σύνθεσης συναρτήσεων)

$\lim_{t\to 0^+} g(t) = 0$

$h = g\circ f$ συνεχής στο $(0,0)$

$\Rightarrow$ Να λύσω τις ασκήσεις!

Εξετάστε την συνέχεια των συναρτήσεων:

1) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

2) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

20/03/17 κ. - Ειδικά Υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$.

~~Παράγωγοι σε πολλές διαστάσεις~~

→ ~~Μερικές Παράγωγοι~~

~~Απαραίτητα Σύνολα~~

• $B_\delta(\vec{x}) = \{\vec{y}\in\mathbb{R}^3 : \|\vec{y}-\vec{x}\| < \delta\}$

ανοικτή μπάλα (βλέπε σημ. συσσωρεύσεως)

• $A \subseteq \mathbb{R}^3$ και $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ τότε.

→ Το σημείο $\vec{x}$ ονομάζεται <u>εσωτερικό σημείο</u> του A, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $B_\delta(\vec{x}) \subseteq A$

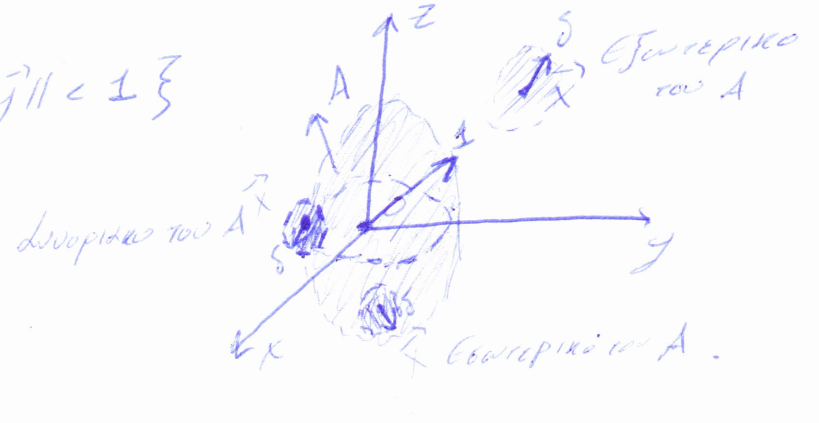
οποιοδήποτε ακτίνα δ.

αρκεί να βρω ένα.

→ <u>Εξωτερικό σημείο</u> του A, όταν <u>υπάρχει</u> $\delta>0$, τέτοιο ώστε $B_\delta(\vec{x}) \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus A$ (δηλ. είναι έξω απ'το σύνολο A)

→ <u>Συνοριακό σημείο</u> του A, όταν δεν είναι ούτε εσωτερικό σημείο του A, αλλά ούτε και εξωτερικό σημείο του A.

Παράδειγμα $A = \{\vec{y}\in\mathbb{R}^3 : \|\vec{y}\| < 1\}$



→ Ανοικτά Σύνολα

Το σύνολο A ονομάζεται

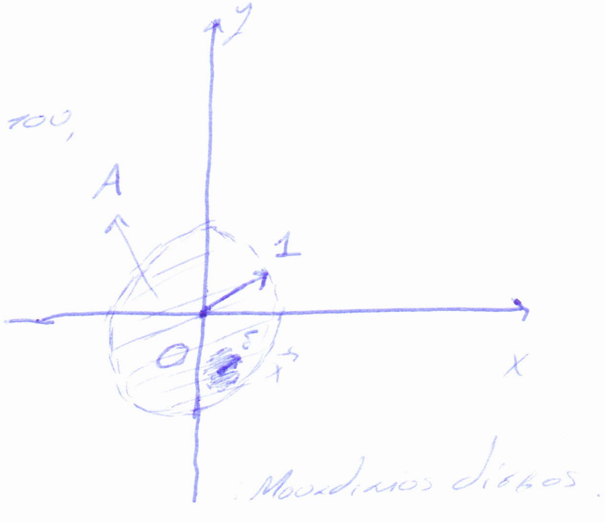
- ανοικτό όταν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά.
  (μόνο εδώ ορίζεται η παράμετρος)

- κλειστό όταν το συμπλήρωμά του: $\mathbb{R}^3 \setminus A$ είναι ανοικτό.

Παράδειγμα (σε 2 διαστάσεις)

$$A = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{y}\| < 1\}$$

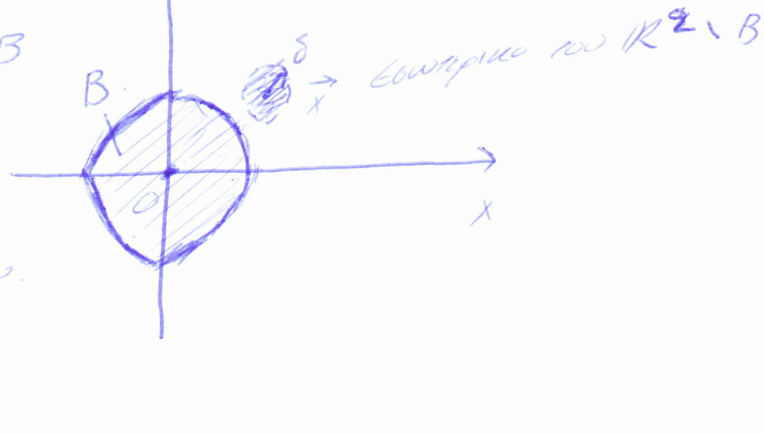
A: ανοικτό, διότι όλα τα σημεία του, είναι εσωτερικά σημεία.



$$B = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{y}\| \leq 1\}$$

$\mathbb{R}^2 \setminus B = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{y}\| > 1\}$ συμπλήρωμα του B.

B: κλειστό, διότι το $\mathbb{R}^2 \setminus B$ είναι ανοικτό.



→ Ένα σύνολο είναι κλειστό, αν περιέχει το σύνορό του.

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

20/3/17 δ.

* Μερική Παράγωγος Πραγματικής Συνάρτησης.

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ βασική προϋπόθεση: A ανοικτό.

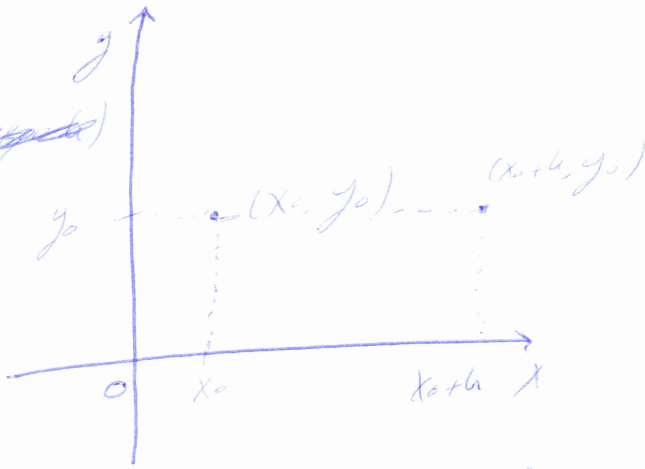
(διότι το ανοικτό σύνολο, περιέχει τα σημεία συσσώρευσης του).
όπου ορίζεται το όριο.

→ Κίνητρο: Θέλω να ορίσω ρυθμό μεταβολής μόνο ως προς μία, από τις ανεξάρτητες μεταβλητές της. όταν η άλλη ~~[illegible]~~ κρατείται σταθερή.

Δηλ: κίνηση κατά x, με σταθερό y, ή κίνηση κατά y με σταθερό x.

$f(x,y)$

1) Μεταβολή του X ~~[illegible]~~ από x_0 σε x_0+h (με μικρό h) με $y=y_0$ σταθερό

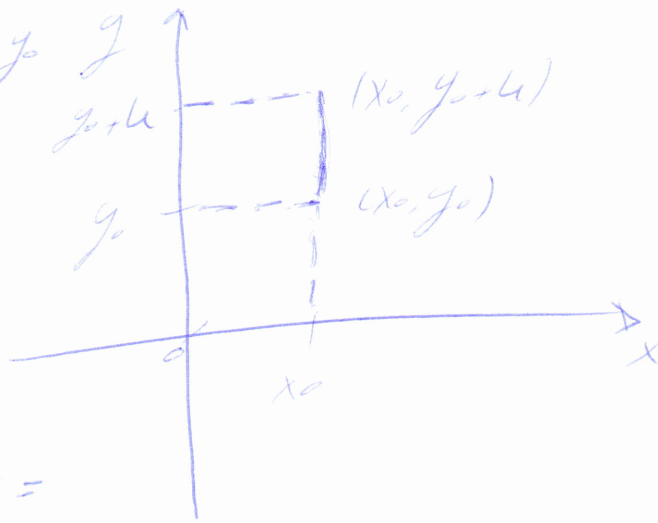


$f(x,y_0) = g(x)$

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$= f_x(x_0,y_0)$ Μερική παράγωγος της f ως προς X στο σημείο (x_0,y_0)

2) Μεταβολή κατά y από το y_0 στο y_0+h με $x=x_0$ σταθερό



$$f(x_0,y) = w(y)$$

$$w'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{w(y_0+h)-w(y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = f_y(x_0,y_0)$$ Μερική παράγωγος της f ως προς y στο (x_0,y_0)

$\Longrightarrow$ Πρώτη Πρόοδος 3 Απριλίου Δευτέρα στο PC LAB
να βλέπω e-learning. (10 πολ. επιλογής)

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Παράδειγμα   Μαθ. Ανάλυση ΙΙ 2013/14.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$f_x(1,0) = ?$

$f_y(1,0) = ?$

Λύση: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

$$f_x(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1,0+h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

Επομένως αφού το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός, δεν υπάρχει το $f_y(1,0)$.

Φυσικά, το αρχικό σημείο μεταβάλλεται λίγο.

Ορισμός $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A ανοικτό.

Οι Μερικές Παράγωγοι της f, ως προς x και y ορίζονται από

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

και

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

→ Κανόνας Υπολογισμού Μερικών Παραγώγων σε περίπτωση συνάρτησης που δίνει μοναδικό τύπο, σε όλα τα σημεία του ορισμού.

1) f_x : y σταθερά και παραγωγίζουμε την συνάρτηση $f(x,y)$ ως προς x.

2) f_y : x σταθερά και παραγωγίζουμε την $f(x,y)$ ως προς y.

<u>Παράδειγμα</u>

$$f(x,y) = y\sin x + x^2y^3.$$

<u>Λύση</u>

$$f_x(x,y) = y\cos x + 2xy^3 \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$f_y(x,y) = \sin x + 3x^2y^2 \ , \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{y+1}\right) \ , \ y \neq 1$$

<u>Λύση</u>

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y+1} \cos \frac{x}{y+1} \ , \ y \neq 1.$$

$$f_y(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y+1}\right) \cdot \left(-\frac{x}{(y+1)^2}\right) \ , \ y \neq -1.$$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

20/3/17 d. Μερική Παράγωγος σε 3 διαστάσεις

$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, A ανοικτό.

ορισμοί

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$ κατά x

$$f_y(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h}$$ κατά y

$$f_z(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}$$ κατά z.

παράδειγμα

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy}{y^2+z^2}, & (y,z) \neq (0,0) \\ 0, & (y,z) = 0 \end{cases}$$

$f_x(1,0,0) = ?$

$f_y(1,0,0) = ?$

$f_z(1,0,0) = ?$

Λύση

$$f_x(1,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0,0) - f(1,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(1,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h,0) - f(1,0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1\cdot h}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \notin \mathbb{R}$$

αρα δεν υπαρχει η $f_y(1,0,0)$

$$f_z(1,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0,0+h) - f(1,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1\cdot 0}{h^2} - 0}{h} =$$

$$= 0.$$

Μαθ. Ανάλυση ΙΙ

21/3/17 κ.

Συνέχεια ως προς Μερικές Παραγώγους.

Ερώτηση: Μια συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η οποία έχει μερικές παραγώγους τις $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ στο $(x_0, y_0) \in A$ είναι και συνεχής στο (x_0, y_0)?

Γενικά: όχι

Παράδειγμα

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Βρίσκω $f_x(x,y) = 0$ και $f_y(x,y) = 0$

και μετά πάω να δείξω με Γ_1 και Γ_2 ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

• **Ορισμός** (C_1 συνάρτηση)

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A ανοικτό (ορίζεται και στο $\mathbb{R}^3$)

Η f είναι C_1 συνάρτηση στο $\vec{z} \in A$, όταν έχει μερικές παραγώγους f_x και f_y σε μια περιοχή του $\vec{z}$ και αυτές είναι συνεχείς συναρτήσεις

Πρόταση

Αν η f είναι C_1 συνάρτηση σε ένα $\vec{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ τότε η f είναι και συνεχής.

(πως ορίζονται οι μερικές παράγωγοι δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης;)

Μερικές Παράγωγοι Δεύτερης Τάξης.

Οι συναρτήσεις $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$ είναι επίσης συναρτήσεις
(δηλώνουμε μεταβολή) (έχω ανεξάρτητα x και y, όποτε μπορώ να τις ξαναπαραγωγίσω.) (όπως είναι η f)
δύο μεταβλητών, και έτσι μπορούμε να ορίσουμε τις μερικές παραγώγους των f_x και f_y όπου αυτές υπάρχουν.

παράδειγμα.

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$$

$$f_x(x,y) = \cos(x^2+y^2)\cdot 2x = 2x\cos(x^2+y^2)$$

μπορώ αυτές να τις ξαναπαραγωγίσω; → ΝΑΙ

$$f_y(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2)$$

Παίρνω την $f_x(x,y)$ και α. παραγωγίζω ως προς x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) + 2x\cdot(-\sin(x^2+y^2))(2x) = f_{xx}(x,y)$$

$$\Rightarrow f_{xx}(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2).$$

β. παραγωγίζω ως προς y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 2x(-\sin(x^2+y^2))(2y) = f_{xy}(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{xy}(x,y) = -4xy\sin(x^2+y^2).$$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

21/3/17 β.

παραγωγίζω και την $f_y(x,y)$ ως προς x και ως προς y.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2y(-\sin(x^2+y^2))\cdot 2x = f_{yx}(x,y)$$

$$\Rightarrow f_{yx}(x,y) = -4xy\sin(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) + 2y(-\sin(x^2+y^2))(2y) = f_{yy}(x,y)$$

$$\Rightarrow f_{yy}(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2)$$

<u>Βρήκα όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.</u>

(μπορώ να συνεχίσω για να βρω και τις 3ης) θα έχω 8 μερικές παραγώγους 3ης τάξης.

Εδώ! Οι $f_{xy}(x,y)$ και $f_{yx}(x,y)$ είναι ίδιες. Αλλά αυτό δεν μπορεί να ισχύει πάντα. Ισχύει υπό συνθήκη. (σε συναρτήσεις)

<u>παράδειγμα</u>

Εξετάστε αν ισχύει $f_{xy}=f_{yx}$ για την συνάρτηση

$$f(x,y) = xe^y + x^2y.$$

<u>Λύση</u>

$f_x(x,y) = e^y + 2xy.$

$f_y(x,y) = xe^y + x^2$

$f_{xx}(x,y) = 2y.$, $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

$\Rightarrow f_{xy}(x,y) = e^y + 2x.$

εδώ δίνω τα σύμβολα

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = e^{y} + 2x$$

$$f_{yy}(x,y) = xe^{y}.$$

για την συγκεκριμένη συνάρτηση δεν έχει σημασία η σειρά παραγώγισης.

άρα

$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

(για ποιες συναρτήσεις ισχύει αυτό;)

<u>Ορισμός</u> (C^2 συνάρτηση)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A ανοικτό (αφού μιλάμε για παραγώγους. μερικές αλλά τα σημεία συσσώρευσης όπου ορίζουμε όρια.)

η f: λέγεται C^2 συνάρτηση στο $\vec{a} \in A$ όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$\boxed{f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}}$ και είναι <u>συνεχείς</u> συναρτήσεις σε μια περιοχή του $\vec{a}$

<u>Θεώρημα</u>. Clairaut.

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2 συνάρτηση στο $\vec{a} \in A$.

τότε ισχύει $f_{xy}(\vec{a}) = f_{yx}(\vec{a})$.

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

21/3/17 c.

⇒ Άσκηση για λύση.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Βρείτε $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$ όπου αυτές υπάρχουν.

Λύση
→ για $(x,y) \neq (0,0)$ ο τύπος μου είναι αυτός $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.
Δουλεύω με κανόνες παραγώγισης. (παράγωγο πηλίκου.)

→ στο $(0,0)$ θα λύνω με τον ορισμό των f_x και f_y, μέσω των ορίων (χθεσινό μάθημα)

Δηλαδή αυτό στο σημείο που αλλάζει τύπο μία συνάρτηση για την παράγωγό της, θα δουλεύω με το όριο απ' τον ορισμό.

Κατευθυνόμενη Παράγωγος.

Ορισμ.: $$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

ωστά (τα όρια) παράγωγοι είναι.

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+h\boxed{(1,0)}) - f(x_0,y_0)}{h}$$

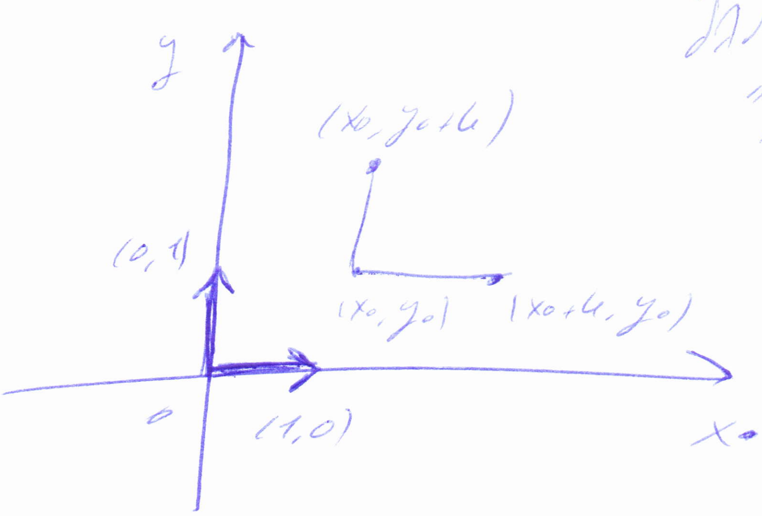
$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+h\boxed{(0,1)}) - f(x_0,y_0)}{h}$$

έτσι βλέπω καλύτερα τα διανύσματα στα οποία κάνω την κίνηση.

παρατήρηση: για το διάνυσμα (1,0) έχω x παραγώγιση με βήμα h.

ενώ για το (0,1) έχω y παραγώγιση.

άλλ κάνω κάθε φορά ένα "βήμα" h, όπως δείχνει το αντίστοιχο διάνυσμα.



Άρα, για να κινηθώ σε μία διεύθυνση αντί των διανυσμάτων. αντί για (1,0) και (0,1) θα βάλω ένα διάνυσμα (u_1, u_2)

Άρα για τυχόν $\vec{u}(u_1, u_2)$ το αντίστοιχο πηλίκο γράφεται

$$\frac{f((x_0,y_0)+h(u_1,u_2)) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

Μαθημ. Ανάλυση II

21/3/17 d.

το οποίο γράφεται:

$$\frac{f(x_0+hu_1,\, y_0+hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

<u>Ορισμός</u> (κατευθυνόμενη παράγωγος)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A ανοικτό και $(x_0, y_0) \in A$

και $\vec{u} = (u_1, u_2)$ με $\|\vec{u}\| = 1$.

Τότε ως κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο (x_0, y_0) ορίζεται

$$\boxed{f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+hu_1,\, y_0+hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}.}$$

ορίζει μια μεταβολή της συνάρτησης ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση στο επίπεδο.

→ Εκφράζει (η κατευθυνόμενη παράγωγος) το ρυθμό μεταβολής της f στο (x_0, y_0) ως προς την κατεύθυνση $\vec{u}$, δηλαδή κατά μήκος της ευθείας που περνάει από το (x_0, y_0) και είναι παράλληλη στο $\vec{u}$.

Σημείωση: Αν πάρω $\vec{u}=(1,0)$ τότε $f_{(1,0)}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)$

Αντίστοιχα για $\vec{u}=(0,1)$ έχω $f_{(0,1)}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

27/3/17 (1)

Κατευθυνόμενη Παράγωγος.

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hu_1, y_0+hu_2) - f(x_0,y_0)}{h}, \text{ όπου } \vec{u} = (u_1, u_2).$$

Αν $\vec{u} = (1,0)$ τότε $f_{(1,0)}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)$

Αν $\vec{u} = (0,1)$ τότε $f_{(0,1)}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0)$

Παράδειγμα

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

$f_{\vec{u}}(0,0) = ?$ όπου $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Λύση

$$f_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}h, \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) - \cancel{f(0,0)}^{\,0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin\left(\frac{h^2}{2}\right)}{h/\sqrt{2}} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^2/2)}{\frac{h^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(h^2/2\right)}{h^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

→ κάνω έλεγχο $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$

~~[illegible]~~

Ορισμός κλίσης συνάρτησης.

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{με } f = f(x,y,z)$$

υπάρχουν οι f_x, f_y, f_z στο $\vec{\alpha} \in A$.

→ Ως κλίση του f στο $\vec{\alpha}$ ορίζεται

$$\nabla f(\vec{\alpha}) = (f_x(\vec{\alpha}), f_y(\vec{\alpha}), f_z(\vec{\alpha}))$$

Θεώρημα.

Αν $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^1 συνάρτηση στο $\vec{\alpha} \in A$, τότε υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $\vec{\alpha}$ και

$$f_{\vec{u}}(\vec{\alpha}) = \nabla f(\vec{\alpha}) \cdot \vec{u}$$

για κάθε κατεύθυνση $\vec{u}$.

Παράδειγμα.

$$f(x,y,z) = x^2 \cdot y^2 + z(x+y)$$

$$f_{\vec{u}}(1,-1,2) = ? \quad , \text{όπου } \vec{u} = \frac{1}{5}(0,3,4)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{25}\cdot 9 + \frac{1}{25}\cdot 16} = 1.$$

$$f_x(x,y,z) = 2xy^2 + z$$

$$f_y(x,y,z) = 2x^2y + z$$

$$f_z(x,y,z) = x+y$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(1,-1,2) = 4 \\ f_y(1,-1,2) = 0 \\ f_z(1,-1,2) = 0 \end{array}\right\} \text{οι μερικές παράγωγοι.}$$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

27/3/17 ②

$$\nabla f(1,-1,2) = (4,0,0)$$

$$f_{\vec{u}} = (4,0,0)\cdot \frac{1}{5}(0,3,4) = 0.$$

Παράδειγμα.

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$$

$f_{\vec{u}}(3,1) = ?$ όπου $\vec{u} = (6,5)$

Λύση

$\|\vec{u}\| = \sqrt{36+25} = \sqrt{61} \neq 1$ επειδή $\|\vec{u}\| \neq 1$. $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{5}{\sqrt{61}}\right)$

(είναι μοναδιαίο, γιατί αν βάλω μέτρο πάνω γίνεται πάντα μονάδα).

$f_x(x,y) = 3x^2 - 6xy + 3y^2$ άρα $f_x(3,1) = 12$

$f_y(x,y) = -3x^2 + 6xy$ και $f_y(3,1) = -9$

άρα $f_{\vec{u}} = \nabla f(3,1)\cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (12,-9)\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{5}{\sqrt{61}}\right) =$

$$= \frac{72}{\sqrt{61}} - \frac{45}{\sqrt{61}} = \frac{27}{\sqrt{61}}$$

Θεώρημα.

$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^1 στο $\vec{a} \in A$ με $\nabla f(\vec{a}) \neq 0$

τότε η $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ λαμβάνει (ως συνάρτηση του $\vec{u}$) μέγιστη τιμή ίση με $\|\nabla f(\vec{a})\|$ όταν $\nabla f(\vec{a})$ και $\vec{u}$ παράλληλα και ομόρροπα και ελάχιστη τιμή ίση με $\|\nabla f(\vec{a})\|$ όταν $\nabla f(\vec{a})$ και $\vec{u}$ παράλληλα και αντίρροπα.

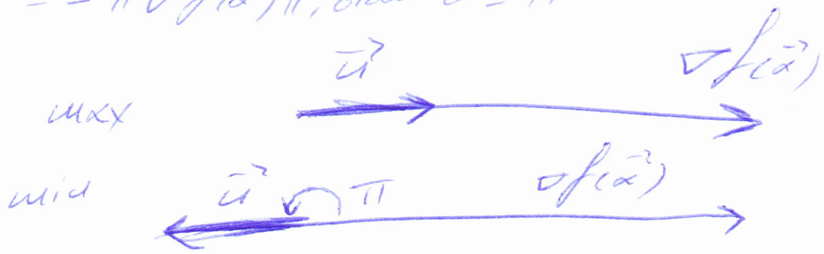
Απόδειξη

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(\vec{a})\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta.$$

όπου θ η γωνία των $\nabla f(\vec{a})$ και $\vec{u}$.

$\max(f_{\vec{u}}(\vec{a})) = +\|\nabla f(\vec{a})\|$, όταν $\theta = 0$. και

$\min(f_{\vec{u}}(\vec{a})) = -\|\nabla f(\vec{a})\|$, όταν $\theta = \pi$



Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

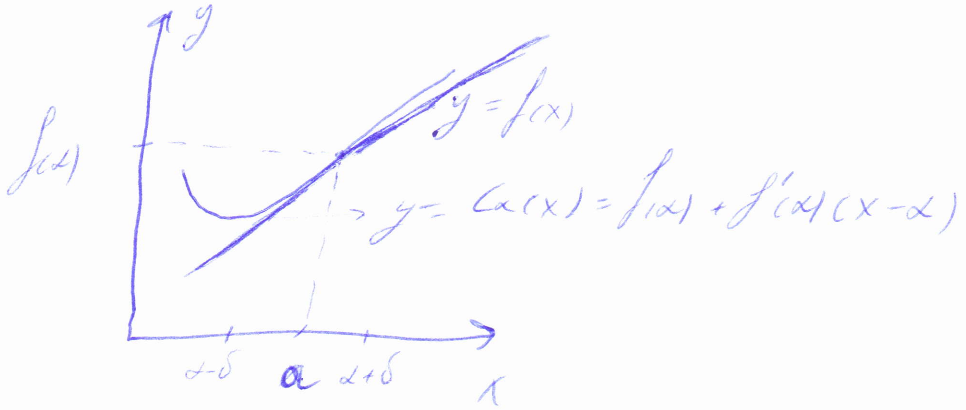
27/3/17 (3).

Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης.

για $n = 1$ (μια διάσταση)

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\alpha \in A$

$$L_\alpha(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha)$$ (εφαπτομένη σε σημείο)



$$f(x) - L_\alpha(x) = \left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} - f'(\alpha)\right](x-\alpha)$$

$$\lim_{x\to\alpha} |f(x) - L_\alpha(x)| = \lim_{x\to\alpha} \left|\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} - f'(\alpha)\right| |x-\alpha| = 0.$$

$|f(x) - L_\alpha(x)|$ γίνεται αυθαίρετα μικρή όταν $|x-\alpha|$ κατάλληλα μικρή.

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

27/3/17 4α. Γραμμική Προσέγγιση συνάρτησης.

17:39 και μετά.

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad C^1$ στο $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in A$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $L_{\vec{\alpha}}(x,y) = f(\alpha_1, \alpha_2) + f_x(\alpha_1, \alpha_2)(x - \alpha_1) +$

$+ f_y(\alpha_1, \alpha_2)(x - \alpha_2)$

$$\lim_{(x,y) \to (\alpha_1, \alpha_2)} |f(x,y) - L_{\vec{\alpha}}(x,y)| = 0.$$

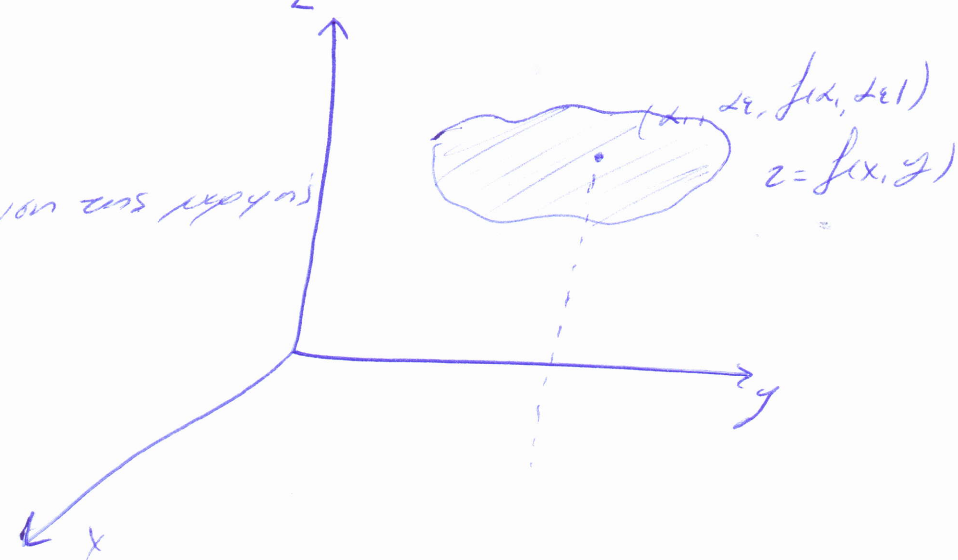
μετάφραση:

$|f(x,y) - L_{\vec{\alpha}}(x,y)|$ γίνονται αυτές οι ποσότητες αυθαίρετα

μικρές όταν

$\|(x,y) - (\alpha_1, \alpha_2)\|$ κατάλληλα μικρή.

~~Θέλουμε δηλαδή να πάρε~~ στην περιοχή (α_1, α_2) προσεγγίζουμε τις τιμές του $f(x,y)$ από τις τιμές της γραμμικής $L_{\vec{\alpha}}(x,y)$



• $z = L_{\vec{\alpha}}(x,y)$ είναι ένα επίπεδο

Επίπεδο ορίζουμε μια εξίσωση της μορφής

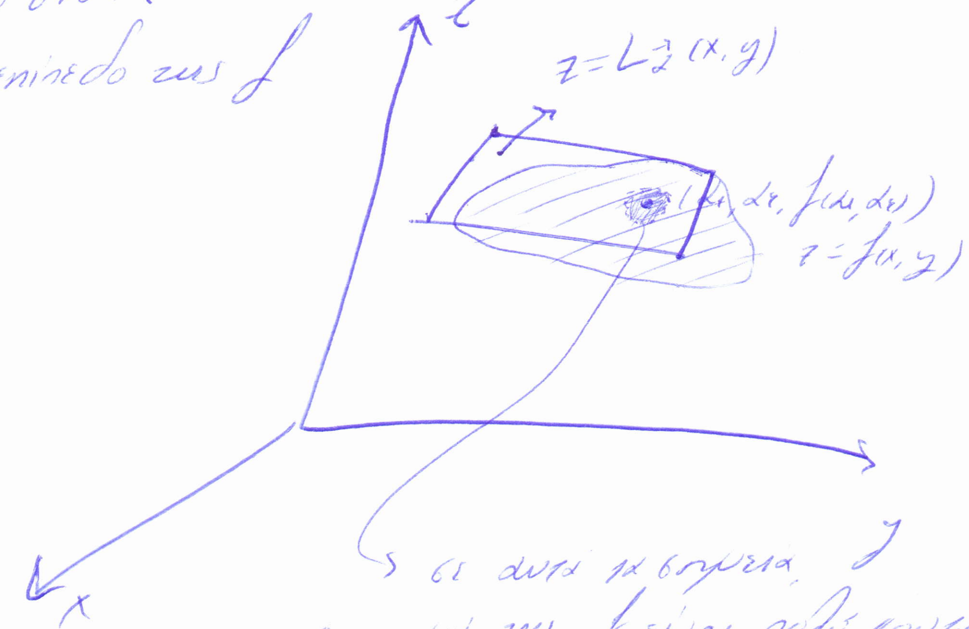
$Ax + By + Cz + D = 0$.

$z = L_2^{?}(x,y) \Rightarrow$

$$z = f(\alpha_1,\alpha_2) + f_x(\alpha_1,\alpha_2)(x-\alpha_1) + f_y(\alpha_1,\alpha_2)(y-\alpha_2)$$

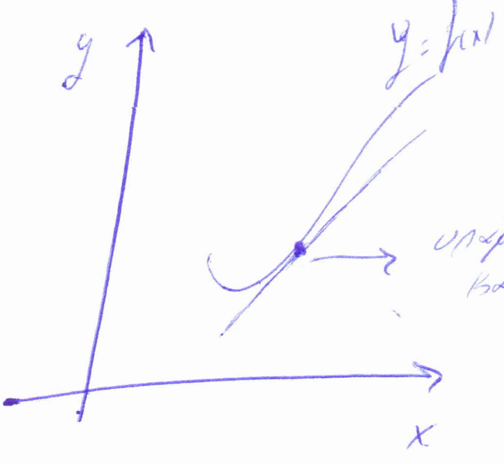
είναι ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$

είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο σημείο (α_1,α_2)



→ σε αυτά τα σημεία, οι τιμές της f είναι πολύ κοντά στης L, άρα μπορώ μέσω της L να έχω μια πολύ καλή προσέγγιση αυτού του σημείου.

Αντιστοίχως



υπάρχει όμως καλή προσέγγιση του σημείου.

→ Όταν έχουμε γραμμική προσέγγιση πρέπει να είμαι πολύ κοντά σε μία περιοχή του σημείου που προσεγγίζω.

Αν είμαι μακριά προφανώς η προσέγγιση που δεν θα είναι καλή.

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

27/3/17 ό.

Παράδειγμα.

Βρείτε τη γραμμική προσέγγιση της

$f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$ στο σημείο $(1,2)$

και μία προσεγγιστική τιμή της $f(1.03, 1.98)$

Λύση : Θα βρω ότι είναι C^1 συνάρτηση

$f_x = 2x + 3y$ Έχει μερικές παραγώγους, είναι συνεχείς άρα η f είναι C^1 συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$

$f_y = 3x - 2y$.

Γραμμική Προσέγγιση

$$L_{(1,2)}(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$$

$$\to L_{(1,2)}(x,y) = 8x - y - 3$$

Εφαπτόμενο επίπεδο : $z = L_{(1,2)}(x,y) \Rightarrow z = 8x - y - 3$

Το σημείο $(1.03, 2.98)$ θεωρώ ότι είναι κοντά στην περιοχή του $(1,2)$.

$$f(1.03, 1.98) \simeq L(1.03, 1.98) = 8\cdot(1.03) - (1.98) - (3)$$

$$= 3.26.$$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

28/3/17 ①

Ορισμός - Εφαπτομένο Επίπεδο.

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 στο $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2) \in A$.

Το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $z = f(\alpha_1, \alpha_2) + f_x(\alpha_1, \alpha_2)(x - \alpha_1) +$
$+ f_y(\alpha_1, \alpha_2)(y - \alpha_2)$ ορίζεται ως το εφαπτομένο επίπεδο της f στο σημείο (α_1, α_2)

παράδειγμα

$z = f(x,y)$ όπου $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$

Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο (x_0, y_0, z_0) με $x_0 = 2$ και $y_0 = -1$.

$f_x(x,y) = 2x + y$.

$f_y(x,y) = x - 2y$.

$f(2,-1) = 1$

$f_x(2,-1) = 3$

$f_y(2,-1) = 4$.

$z = f(x,y)$

$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$

για $(x,y) = (\alpha_1, \alpha_2)$

$\nabla F(\alpha_1, \alpha_2, f(\alpha_1, \alpha_2)) =$
$= (f_x(\alpha_1, \alpha_2), f_y(\alpha_1, \alpha_2), -1)$

Εφαπτόμενο επίπεδο της f στο σημείο (α_1, α_2)

$z = f(\alpha_1, \alpha_2) + f_x(\alpha_1, \alpha_2)(x - \alpha_1) + f_y(\alpha_1, \alpha_2)(y - \alpha_2)$

$$\underbrace{f_x(\alpha_1, \alpha_2)}_{A'} x + \underbrace{f_y(\alpha_1, \alpha_2)}_{B'} y \underbrace{- z}_{C'} + \underbrace{f(\alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 f_x(\alpha_1, \alpha_2) - \alpha_2 f_y(\alpha_1, \alpha_2)}_{D} = 0$$

κάθετο διάνυσμα

$$\vec{N} = \left(f_x(x_1, x_2), f_y(x_1, x_2), -1 \right)$$

Μαθ. Ανάλ II
28/3/17α.

~~Προσέγγιση~~

~~Εύρεση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z=f(x,y)$~~

Υπολογισμοί και εκτιμήσεις σφαλμάτων.

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$ C^1 συνάρτηση στο A (ανοικτό)

Ζητάμε την επίδραση που θα έχουμε στην τιμή $f(x,y)$ από ένα σφάλμα $(\Delta x, \Delta y)$ στη μέτρηση των ανεξάρτητων μεταβλητών (x,y)

→ Προσεγγιστική τιμή $f(x,y)$

→ Ακριβής τιμή $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$

→ Γραμμική Προσέγγιση

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq \underbrace{f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{L}$$

Παράδειγμα

$$\sqrt{0,99^3 + 2,02^3}$$

Βρείτε μία προσέγγιση, για την ακριβή τιμή, της παράστασης

Λύση $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$

$x=1 \quad \Delta x = -0.01$

$y=2 \quad \Delta y = +0.02$

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \sqrt{0,99^3+2.02^3}$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3+y^3}}(3x^2) \qquad f_x(1,2) = \frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2}\frac{3y^2}{\sqrt{x^3+y^3}} \qquad f_y(1,2) = 2$$

$$\sqrt{0{,}99^3+2{,}02^3} = f(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

κάνω με εκτίμηση της τιμής.

$$\approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$= 3 + \frac{1}{2}(-0.01) + 2\cdot 0{,}02$$

$$= 3{,}035.$$

Παράδειγμα.

Η ολική αντίσταση R δύο αντιστάσεων σε παράλληλη σύνδεση δίνεται από $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, όπου R_1 και R_2 οι δύο παράλληλες αντιστάσεις.

Οι τιμές των R_1 και R_2 μετρώνται:

$R_1 = 10\,\Omega$ και $R_2 = 15\,\Omega$ με αντίστοιχα σφάλματα

$\Delta R_1 = 0.02\,\Omega$ και $\Delta R_2 = 0.01\,\Omega$

Υπολογίστε μια προσεγγιστική τιμή (ως το σφάλμα της γραμμικής προσέγγισης) της ολικής αντίστασης R.

(αυτό δεν διαγράφεται) Να βρω $R = 6.0088\,\Omega$

Μαθηματική Αναλ II

28/3/17

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$
$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Κανόνας Αλυσίδας

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, C^1 συνάρτηση στο A

$\vec{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \supseteq I \arrow[r, "\vec{\phi}"] \arrow[dr, "f\circ\vec{\phi}"'] & \vec{\phi}(I) \subseteq A \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ορίζω $h(t) = (f\circ\vec{\phi})(t)$

$= f(\vec{\phi}(t))$

$= f(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$

$$\frac{d\,h(t)}{dt} = h'(t) = \nabla f(\vec{\phi}(t))\cdot\vec{\phi}'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\vec{\phi}(t)}, \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\vec{\phi}(t)}, \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{\vec{\phi}(t)}\right)$$

$$= (\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t))$$

???
(τι είναι αυτό ∇f)

Παράδειγμα.

$$f(x,y,z) = xy^2z^3$$

$$\vec{\phi}(t) = (\overset{\phi_1(t)}{\sin t}, \overset{\phi_2(t)}{\cos t}, \overset{\phi_3(t)}{1+e^{2t}}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(f \circ \vec{\phi})'(t) = ?$$

Λύση

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

$$\nabla f(\vec{\phi}(t)) = \left(\cos^2 t \cdot (1+e^{2t})^3, 2\sin t \cos t\,(1+e^{2t})^3, 3\sin t \cdot \cos^2 t \cdot (1+e^{2t})^2\right)$$

$$\vec{\phi}'(t) = (\cos t, -\sin t, 2e^{2t})$$

$$(f \circ \vec{\phi})'(t) = \cos^2 t\,(1+e^{2t})^3 - 2\sin^2 t \cos t\,(1+e^{2t})^3 +$$

$$+ 6\sin t \cos^2 t \cdot e^{2t}(1+e^{2t})^2$$

Μαθημ. Ανάλυση ΙΙ

28/3/17 ε.

$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, C^1 στο A

$\vec{\phi}: B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{\phi} = (\phi_1(u,v,w), \phi_2(u,v,w), \phi_3(u,v,w))$$

$$(f \circ \vec{\phi})(u,v,w) = f(\underbrace{\phi_1(u,v,w)}_{x}, \underbrace{\phi_2(u,v,w)}_{y}, \underbrace{\phi_3(u,v,w)}_{z})$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \supseteq B \arrow[r, "\vec{\phi}"] \arrow[dr, "f\circ\vec{\phi}"'] & \vec{\phi}(B) \subseteq A \arrow[d, "f"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

άρα $f \circ \vec{\phi}: B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Ισχύουν

$$\frac{\partial (f\circ\vec{\phi})}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

Φαίνεται γιατί λέγεται κανόνας αλυσίδας

$$\frac{\partial (f\circ\vec{\phi})}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial (f\circ\vec{\phi})}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}$$

Παράδειγμα. (Μερική Παράγωγος του χρησιμοποιώ 2 μεταβλητές)
(δηλαδή δεν έχω t άρα όχι w)

$$f(x,y)$$

$$x = e^u \cos v$$

$$y = e^u \sin v$$

Να δείξετε ότι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{-2u}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)$$

Λύση (θέλω μόνο αυτό το κομμάτι του χρησ. εξισώσεων)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Όμως $\frac{\partial x}{\partial u} = e^u \cos v$ $\qquad \frac{\partial y}{\partial u} = e^u \cdot \sin v$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = e^u(-\sin v) \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = e^u \cos v$$

Μ. Διαφ. Αναλ. II

28/3/17 d.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} e^{u}\cos v + \frac{\partial f}{\partial y} e^{u}\sin v \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-e^{u}\sin v) + \frac{\partial f}{\partial y} e^{u}\cos v\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 e^{u}\cos^2 v + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot e^{2u}\sin^2 v + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} e^{2u}\sin v\cos v \\ \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 e^{2u}\sin^2 v - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} e^{2u}\sin v\cos v + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 e^{2u}\cos^2 v \end{cases}$$

με πρόσθεση κατά μέλη

$$\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{df}{dv}\right)^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 e^{2u} + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 e^{2u}$$

δηλαδή αυτό που ήθελα να δείξω.

Παράδειγμα.

$f(x,y)$ Να δείξετε ότι

$x = u + v$

$y = u - v$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - \left(\frac{df}{dy}\right)^2 = \frac{df}{du} \cdot \frac{df}{dv}$$

Λύση

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{du}$$

$$\frac{df}{dv} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dv}$$

$\Rightarrow$

μπορώ να βρω αυτά.

$$\frac{dx}{du} = 1 \ , \ \frac{dx}{dv} = 1 \ , \ \frac{dy}{du} = 1 \ , \ \frac{dy}{dv} = -1.$$

και θα τα αντικαταστήσω στη σχέση.

Μαθ. Ανάλ. ΙΙ

28/3/17 ε.

Οπότε

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \dfrac{\partial f}{\partial y} (-1) \end{cases}$$

πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη να βγει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

Τοπικά ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών.

Αν έχω μία συνάρτηση $f(x,y)$ τότε η παράγωγος της είναι το

$$\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy} \right)$$

Αντίστοιχα αν $f(x,y,z)$: η παράγωγος είναι $\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz} \right)$

Μεθοδολογία για ακρότατα.

Βήμα 1 Βρίσκω την παράγωγο (κλίση) της f.

Βήμα 2 Βρίσκω αν υπάρχουν σημεία ώστε $f' = 0$

(δηλαδή $\underbrace{\nabla f}_{\text{κλίση της } f} = 0$)

Βήμα 3 Για καθένα από αυτά τα σημεία εξετάζω αν είναι ακρότατα με το κριτήριο της Εσσιανής.

~~Κριτήριο της Εσσιανής.~~

~~Έστω $f(x,y)$~~

~~Εσσιανή μήτρα (πίνακας) είναι ο πίνακας~~

Εσσιανή μήτρα (πίνακας) είναι ο πίνακας

$$Hf = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

→ Έστω ότι το (x_0, y_0) είναι <u>ίσως</u> ακρότατο → κρίσιμα σημεία
(από βήμα 1)

→ Τότε για το (x_0, y_0) υπολογίζω την ορίζουσα του

$$Hf = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{yx}$$

και τη συμβολίζω με $\Delta(x,y)$

<u>Περιπτώσεις</u>

(I) Αν $\Delta(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ τότε έχει τοπικό ελάχιστο.

(II) Αν $\Delta(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ τότε έχει τοπικό μέγιστο.

(III) Αν $\Delta(x_0, y_0) < 0$ τότε δεν έχει ακρότατο. (σαγματικά σημεία)

(IV) Αν $\Delta(x_0, y_0) = 0$ το κριτήριο δεν αποφαίνεται. (Θέλει ορισμό χαρακτηρισμού).

Παράδειγμα 1

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2.$$

Βήμα 1 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Βήμα 2

$$\nabla f = \bar{0} \iff (3x(x-2), 2y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x(x-2) = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \text{ ή } x = 0 \\ y = 0. \end{array}$$

άρα έχω δύο κρίσιμα σημεία το $(2,0)$ και το $(0,0)$

Βήμα 3

$$f_{xx} = 6x - 6$$

$$f_{xy} = 0$$

$$f_{yx} = 0$$

$$f_{yy} = 2.$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|Hf| = 2(6x-6) = 12x - 12 = \Delta(x,y)$$

• για το $(0,0)$ $\Delta(0,0) = -12 < 0$ όχι ακρότατο (σαγματικό)

• Για το ~~...~~ $(2,0)$ $\Delta(2,0) = 12 > 0$

$$f_{xx}(2,0) = 6 > 0$$

άρα έχει τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 2 (Θέμα 3)

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 8x - 8y + 1$$

$f_x(x,y) = \cancel{2x+\dots}\ 2x + 8$

$f_y(x,y) = -2y - 8$

$f_{xx}(x,y) = 2$

$f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = -2$

$f_{yx}(x,y) = 0$

• $f_x(x,y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4$

• $f_y(x,y) = 0 \Rightarrow y = -4$

$\Big\}$ πιθανό ακρότατο στο $(-4,-4)$

$$Hf = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 0 = -4$$

άρα η $f(x,y)$ δεν έχει ακρότατα.

αφού $\Delta(x,y) < 0$.

Παράδειγμα 3.

$$f(x,y) = x^3 + 3yx + y^3.$$

$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y$

$f_y(x,y) = 3x + 3y^2$

$f_{xx}(x,y) = 6x$

$f_{xy}(x,y) = 3$

$f_{yy}(x,y) = 6y.$

$f_{yx}(x,y) = 3.$

Βήμα 1 $\nabla f = (3x^2+3y,\ 3x+3y^2)$

Βήμα 2 $\nabla f = \vec{0}$ άρα $\begin{cases} 3x^2+3y=0 \\ 3x+3y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x^2 \\ (-x^2)^2+x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^4+x=0 \Rightarrow x(x^3+1)=0$

$x=0$ ή $x^3+1=0 \Rightarrow x=-1$

άρα $y=0$ ή $y=-1$

άρα τα κρίσιμα σημεία είναι το $(0,0)$ και το $(-1,-1)$.

Βήμα 3

Θεωρώ τον Εσσιανό Πίνακα $Hf = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{bmatrix}$

$\Delta(x,y) = 36xy - 9$.

- Για το $(0,0)$, $\Delta(0,0) = -9 < 0$ άρα σαγματικό σημείο
δεν έχει ακρότατα.
- Για το $(-1,-1)$, $\Delta(-1,-1) =$
$= 36 - 9 = 27 > 0$

$f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$ άρα στο σημείο $(-1,-1)$ έχει τοπικό μέγιστο που είναι το $f(-1,-1) = -1+3-1 = 1$

παράδειγμα 4.

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$$

$f_x(x,y) = 4y - 4x^3$

$f_y(x,y) = 4x - 4y^3$

$f_{xx}(x,y) = -12x^2$

$f_{xy}(x,y) = 4$

$f_{yy}(x,y) = -12y^2$

$f_{yx}(x,y) = 4$

βήμα 1

$\nabla f(x,y) = (4y - 4x^3, 4x - 4y^3)$

βήμα 2

$$\nabla f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 4x^3 = 0 \\ 4x - 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(y - x^3) = 0 \\ 4(x - y^3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x - x^9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(1 - x^8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1 \end{cases}$$

για $x = 0$, $y = 0$

για $x = -1$, $y = -1$

για $x = 1$, $y = 1$

άρα έχω 3 πιθανά σημεία τα $(0,0)$, $(-1,-1)$ και το $(1,1)$

βήμα 3

Θεωρώ τον Εσσιανό Πίνακα $Hf = \begin{bmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}$

$D(x,y) = |Hf| = (-12x^2)(-12y^2) - 16 = 12^2 x^2 y^2 - 16.$

· για το $(0,0)$, $\Delta(0,0) = -16 < 0$ άρα είναι σαγματικό σημείο

· για το $(1,1)$, $\Delta(1,1) = 12^2 - 16 > 0$

$f_{xx}(1,1) = -12 < 0$

άρα είναι τοπικό μέγιστο: $f(1,1) = 2$

· για το $(-1,-1)$, $\Delta(-1,-1) = 12^2 - 16 > 0$.

$f_{xx}(-1,-1) = -12 < 0$

~~άρα~~ τοπικό μέγιστο $f(-1,-1) = 2$.

Για συναρτήσεις 3 μεταβλητών. $f(x,y,z)$

Βήμα 1 $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$

Βήμα 2 $\nabla f = \bar{0}$

Βήμα 3 παίρνω τις ορίζουσες

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} \text{ και } \Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Περιπτώσεις

(I) Αν $\Delta(x_0, y_0, z_0) > 0$, $\Delta_1(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0$ η f έχει στο (x_0, y_0, z_0) τοπικό ελάχιστο

(II) Αν $\Delta(x_0, y_0, z_0) < 0$, $\Delta_1(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0$ η f παρουσιάζει στο (x_0, y_0, z_0) τοπικό μέγιστο

(III) Σε κάθε άλλη περίπτωση το κριτήριο δεν μπορεί να απαντηθεί (για αυτό θα λέμε σαγματικό)

Παράδειγμα.

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 3x.$$

Βήμα 1

$f_x = 3x^2 - 3$ $\quad \nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (3x^2 - 3, 2y, 2z)$

$f_y = 2y$

$f_z = 2z$

Βήμα 2.

$$\nabla f = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} 3(x^2 - 1) = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ή } x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα

$A(1,0,0)$, $B(-1,0,0)$

Θέμα 3.

$$\Delta = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

$f_{xx} = 6x \quad f_{yx} = 0 \quad f_{zx} = 0$

$f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = 2 \quad f_{zy} = 0$

$f_{xz} = 0 \quad f_{yz} = 0 \quad f_{zz} = 2.$

άρα
$$\Delta = \begin{bmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^2 (6x) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \cancel{(-1)^3 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}^{\,0} + \cancel{(-1)^4 \, 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}^{\,0} = 1 \cdot 6x \cdot 4 = 24x.$$

(Θυμίζω:
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = (-1)^2 \alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} + (-1)^3 \beta \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + (-1)^4 \gamma \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix}$$
)

και
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x.$$

- Για το σημείο $A(1,0,0)$

$\Delta(1,0,0) = 24 > 0$ και $\Delta_1(1,0,0) = 12 > 0$

$f_{xx}(1,0,0) = 6 > 0$

άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(1,0,0)$ και είναι το $f(1,0,0) = -2$.

· Για το σημείο $B(-1,0,0)$

$\Delta(-1,0,0) = -24 < 0$ σαγματικό σημείο.

$\Delta_1(-1,0,0) = -12 < 0$

$(f_{xx}(-1,0,0) = -6 < 0)$