Μαθ Αν 1

1.

Οκτ 3α

→ Χρήση της Μαθ. Ανάλυσης στην Ανάλυση των Αλγορίθμων.

≠ Πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου

→ πρόβλεψη του χρόνου εκτέλεσης ενός προγρ. καθώς η διάσταση του προβλήματος αυξάνεται

Διάσταση: π.χ. μέγεθος μιας λίστας που θέλουμε να ταξινομήσουμε

Παράδειγμα

προγραμματιστής εταιρείας

αγοράσαμε του υπολογιστή και τώρα έχουμε διπλάσια δουλειά

πληροφ. σύστημα: η τώρα για. επεξεργασία των δεδομένων.

επεξεργασία τώρα που

Ερώτηση: πόσο χρόνο θα πάρει η επεξεργασία η διάσταση έχει διπλασιαστεί

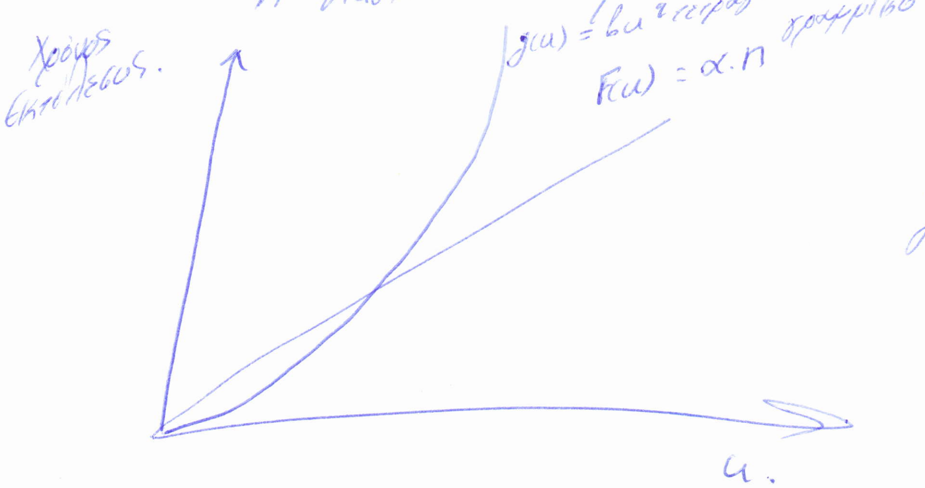
Θα πάρει διπλάσιο χρόνο; → ΟΧΙ

Εξαρτάται από τον αλγόριθμο που χρησιμοποιεί το πληροφ. σύστημα.

Δεν είναι όλοι οι αλγόριθμοι ισοδύναμοι.

π.χ.

Έστω ότι έχουμε τους χρόνους εκτέλεσης 2 αλγορίθμων. A και B. $F(n)$ και $g(n)$ (χρόνοι εκτέλεσης) και n η διάσταση του προβλήματος. (συναρτ. που περιγρ. του χρόνο εκτ.)



π.χ.

$n \to 2n$

$f(n2) \Rightarrow 2\alpha n = 2f(n)$

$g(2n) = 4bn^2 = 4g(n)$

* Σύγκριση Αλγορίθμων.

Είναι ο Α Αλγόριθμος γρηγορότερος του Β;

* Σύγκριση ρυθμού Αύξησης (με χρήση ορίων) * για μεγάλα n

* $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

1) αν $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ σημαίνει ότι η g αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό από την f (έχει μεγαλ. ρυθμό αύξησης).

2) αν $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$. σημαίνει ότι η f και η g. έχουν ίδιο ρυθμό αύξησης.

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ σημαίνει ότι η f έχει μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης.

Παρ.

$f(n) = n\log_2 n$

$g(n) = n^{3/2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ (είναι το ίδιο) $= \frac{n^{3/2}}{n\log_2 n} = \frac{n^{1/2}}{\log_2 n} \overset{L'H}{=}$

$= \frac{\frac{1}{2n^{1/2}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^{1/2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} n^{1/2} = +\infty$

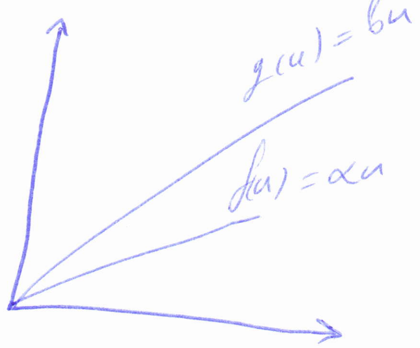
Άρα g μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης από την f.

Άρα ταχύτερος είναι ο f.

Μαθ Αναλ

1.

Οκτ 3ο



$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

c: μικρότερο ή μεγαλύτερο της μονάδας.

Σύνολα

· Σύνολο: συλλογή διακεκριμένων και σαφώς καθορισμένων αντικειμένων τα οποία θεωρούνται ως ένα ~~[illegible]~~ αντικείμενο

· Συμβολισμός X, Y, Z (κεφαλαία) $x \in X$, $x \notin X$

· στοιχεία: x, y, z (πεζά)

$\emptyset$: κενό σύνολο

· Υποσύνολο: $A \subseteq B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

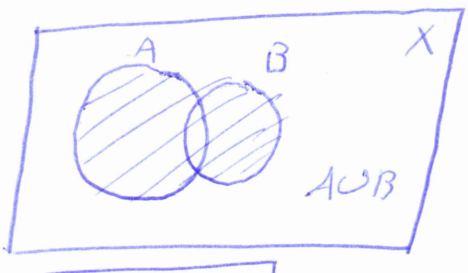
· Γνήσιο Υποσύνολο: $A \subset B \iff A \subseteq B$ και $\exists x \in B$ με $x \notin A$
(υπάρχει)

· $A = B \iff A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

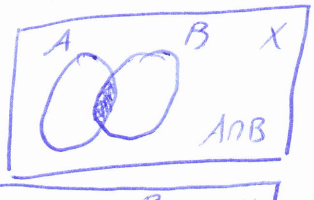
Πράξεις συνόλων.

Έστω $A, B \subseteq X$ (ετσι ώστε)

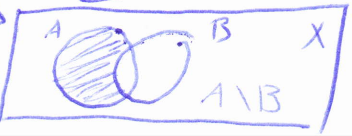
Ένωση: $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ ή } x \in B\}$



Τομή: $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ και } x \in B\}$



Διαφορά: $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ και } x \notin B\}$



Συμπλήρωμα ενός συνόλου: A^c $X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$

∗ Καρτεσιανό γινόμενο

Έστω $X, Y \neq \emptyset$

διατεταγμένα ζεύγη (x, y) όπου $x \in X$ και $y \in Y$
(= υπάρχει διάταξη)

(συμβολίζω) $X \times Y = \{(x,y) : x \in X \text{ και } y \in Y\}$

∗ Συνάρτηση:

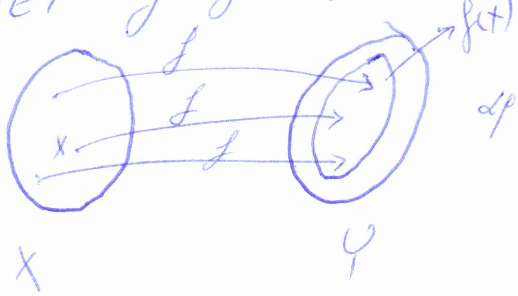
· Έστω $X, Y \neq \emptyset$

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού (σύνολο) το X και τιμές στο Y,
είναι ένας νόμος f ο οποίος σε κάθε στοιχείο x του X,
αντιστοιχεί ένα καθορισμένο και μοναδικό στοιχείο $f(x)$ του Y.

Συμβολισμός: $y = f(x)$
x → ανεξάρτητη μεταβλητή
y → εξαρτημένη μεταβλητή

· Πεδίο τιμών της f

$F(X) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in X\}$



άρα $F(X) \subseteq Y$

π.χ.
$X = \mathbb{R}$
$Y = \mathbb{R}$
$f(x) = |x|$
$F(X) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

· $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής $y = f(x)$, $x \in X$

Μαθ. Ανάλ

4 οκτ α. # Σύνολο πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \nu\}$ Φυσικοί αριθμοί (δεν περιέχουν το 0)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -\nu, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \nu, \dots\}$ Ακέραιοι αριθμοί

$\mathbb{Q} = \{\frac{\mu}{\nu}, \mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N}\}$ Ρητοί αριθμοί

· Στο $\mathbb{Q}$ δεν επιλύεται η $x^2 = 2$ (για $x \in \mathbb{Q}$)

· Κάθε ρητός αριθμός, γράφεται είτε ως δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, είτε ως δεκαδικοί με άπειρο πλήθος στοιχεία, αλλά περιοδικά. πχ $1/2 = 0.5$ ή $1/3 = 0.3333\dots$

> Επισυνάπτοντας στο $\mathbb{Q}$, όλους τους δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα σε πλήθος ~~...~~ δεκαδικά ψηφία, μη περιοδικά, λαμβάνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. (άρρητοι)

· Άρρητοι : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

· $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$

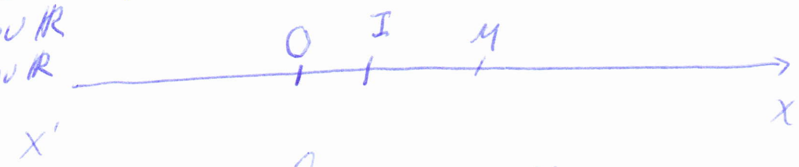
· $\mathbb{R}$: + πρόσθεση, * πολλαπλασιασμός (οι πράξεις στο $\mathbb{R}$)

$\leq$ διάταξη (3η θεμελιώδης πράξη)

· Το 1 χαρακτηρίζει την μονάδα μέτρησης 1.

Γεωμετρική Παράσταση του $\mathbb{R}$

Άξονας των $\mathbb{R}$ ή Ευθεία των $\mathbb{R}$



· Η Μονάδα Μέτρησης 1 είναι το μήκος του ευθ. τμ $|OI|$

· θετική φορά: O προς το I

· Έστω ένα σημείο της ευθείας $x'x$, το M.

~~...~~ συντεταγμένη του M, είναι $(+, |OM|$ όταν M δεξιά του O) ή $(-, |OM|$ όταν είναι αριστερά του O)

Ορίζω $x_M = +|OM|$ ή $-|OM|$.

· Αντιστρόφως για $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists$ μοναδικό σημείο M της $x'x$, το οποίο έχει $x_M = x$

Φραγμένα διαστήματα

$a, b \in \mathbb{R}$ μ $a \le b$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$

$(a, b]$ και $[a, b)$

Φράγματα

$A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

· άνω φράγμα του A όταν

$x \le b$, $\forall x \in A$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

· κάτω φράγμα του A όταν

$x \ge a$, $\forall x \in A$.

Είναι Μοναδικά; (τα φράγματα)

~~[illegible]~~ για $x \le b$ ισχύει $x \le b < c$, δηλαδή μπορώ να βρω άπειρα άνω φράγματα και $b < c$, $\forall x \in A$.

ή για $x \ge a$, $\forall x \in A$

και $d < a$ ισχύει $d \le a \le x$, $\forall x \in A$

Φραγμένο σύνολο

· Άνω φραγμένο: A, όταν υπάρχει ένα άνω φράγμα b του A.

· Κάτω φραγμένο A: όταν υπάρχει ένα κάτω φράγμα a του A.

(Μπορεί να υπάρχουν και τα δύο)

- Φραγμένο σύνολο A, όταν είναι άνω και κάτω φραγμένο και ισχύει

$a \le x \le b$, $\forall x \in A$.

· Supremum A, $\sup A$, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα

· Infimum A, $\inf A$, το μέγιστο κάτω φράγμα.

Παράδειγμα

Έστω $A = (0, 1)$

· Άνω φράγμα: 2 διότι ισχύει $x \le 2$ $\forall x \in A$

· Άνω φράγμα: $5/4$ διότι $x \le 5/4$ $\forall x \in A$

· Ελάχιστο άνω φράγμα του $A = 1 = \sup A$

· Κάτω φράγμα: -1 διότι $x \ge -1$, $\forall x \in A$

· Μέγιστο κάτω φράγμα του $A = 0 = \inf A$.

Τα $\sup A$ και $\inf A$ σε αυτό το παράδειγμα, δεν ανήκουν στο σύνολο.

Μαθ. Ανάλ.

υ α ε b.

Μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο συνόλου

• Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $b \in A$ (ενώ πριν δεν είχε υποχρέωση να ανήκει στο σύνολο)(τώρα πρέπει να ανήκει στο σύνολο)

b, μέγιστο στοιχείο του A όταν $x \le b$, $\forall x \in A$, $b = \max A$

• για $\alpha \in A$

α, ελάχιστο στοιχείο του A όταν $x \ge \alpha$, $\forall x \in A$, $\alpha = \min A$

Παραδείγματα

1. $A = [0, 1)$

$\sup A = 1$, $\inf = 0$

$\min A = 0$ $(0 \in A)$, $\max A$: δεν υπάρχει.

2. $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$

$\inf A = 0$ (γιατί τα νούμερα φθίνουν).

$\min A =$ δεν υπάρχει. $(0 \notin A)$

$\sup A = 1$, $\max A = 1$

3. $A = \{1 + (-2/3)^n, n \in \mathbb{N}\} = \{1/3, 1 + (2/3)^2, 1 - (2/3)^3, 1 + (2/3)^4, \dots\}$

$\sup A = 1 + (2/3)^2$

$\max A = 1 + (2/3)^2$ (επειδή είναι στοιχείο του συνόλου).

$\inf A = 1/3$ $(1 - 2/3)$

$\min A = 1/3$ $(1 - 2/3)$

Θεώρημα Ακέραιο Μέρος.

· Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος α με

$$\boxed{\alpha \le x < \alpha + 1}$$

· Τότε αυτός ο αριθμός α, συμβολίζεται με $[x]$, και ονομάζεται ακέραιο μέρος του x

· ο ακέραιος $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

υ

π.χ. $[3.2] = 3$

$[-2.6] = -3$

* Σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$

· $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (για να μπορέσω να βάλω και άλλες πράξεις)

· Επιτρεπτές πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}$:

· $(+\infty) + x = +\infty$

· $(-\infty) + x = -\infty$

· $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

· $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

· $x(+\infty) = +\infty$, $x > 0$

· $x(+\infty) = -\infty$, $x < 0$

· $x(-\infty) = -\infty$, $x > 0$

· $x(-\infty) = +\infty$, $x < 0$.

· $(+\infty)(+\infty) = +\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$

$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

· $\dfrac{x}{+\infty} = 0$, $\dfrac{x}{-\infty} = 0$

· **Μη** επιτρεπτές πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\frac{x}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0(\pm\infty), \quad (+\infty)+(-\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

(Πολύ Χρήσιμο)

* ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

(δείχνω την ισχύ μιας πρότασης $\forall n \in \mathbb{N}$)

Έστω $I(n)$ μια πρόταση/ιδιότητα η οποία διατυπώνεται $\forall n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

1) $I(1)$ αληθής

2) Υποθέτοντας ότι $I(k)$ αληθής, δηλ. η πρόταση είναι αληθής για σταθεροποιημένο $k \in \mathbb{N}$, αποδεικνύουμε ότι η $I(k+1)$ είναι επίσης αληθής.

Τότε η $I(n)$ είναι αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$.

Μαθ. Αναλ.

4 Οκτ ς.

Παραδείγματα.

1. δείξτε ότι ισχύει

$$I(\nu): \quad 1^3+2^3+\dots+\nu^3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Λύση:

για $\nu=1$: $1^3=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $\nu=k$

δηλαδή έστω ότι ισχύει:

$$1^3+2^3+\dots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad (*)$$

για $\nu=k+1$.

$$1^3+2^3+\dots+(k+1)^3=\underbrace{1^3+2^3+\dots+k^3}_{(*)}+(k+1)^3=$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

άρα η $I(\nu)$ είναι αληθής.

Μαθηματικά

Ανάλυση 2.

10 Oct. Παρατήρηση στο Ι(ν) αληθής.

Αν $I(\nu)$ με $\nu \geq \nu_0$ και $\nu \in \mathbb{N}$ (με $\nu_0 \in \mathbb{N}$)

(π.χ. θέλω να δείξω την ισχύ μιας πρότασης από το 5 και πάνω)

Τότε κάνω ότι έκανα με τη διαφορά ότι στο πρώτο βήμα παίρνω

1) $I(\nu_0)$ αληθής

2) ⋮

Παράδειγμα. (Ανισότητα Bernoulli)

Δείξτε ότι ισχύει $(1+x)^\nu \geq 1+\nu x$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με $x > -1$

αυτή είναι η πρόταση $I(\nu)$

Λύση

1) $I(1)$ αληθής

$(1+x)^1 \geq 1+x$ ισχύει ως ισότητα

2) Υποθέτουμε $I(\kappa)$ αληθής. Δηλαδή

$$(1+x)^\kappa \geq 1+\kappa x. \quad (*)$$

Τότε για $\nu = \kappa+1$ θέλω να δείξω

$$(1+x)^{\kappa+1} \geq 1+(\kappa+1)x.$$ (προφανώς με χρήση της *)

όμως

$$(1+x)^{\kappa+1} = (1+x)^\kappa \cdot (1+x) \overset{(*)}{\geq} (1+\kappa x)(1+x) =$$

$$= \underbrace{1+(\kappa+1)x}_{\text{αυτό που θέλω}} + \underbrace{\kappa x^2}_{\text{κάτι θετικό}} \geq 1+(\kappa+1)x$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι ισχύει:

$$\nu! \geq 2^{\nu-1}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

$\nu! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot \nu, \ \nu\in\mathbb{N}$

$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

$(\nu+1)! = (\nu+1)\cdot \nu!$

$0! = 1$

Λύση:

για $\nu = 1$

$$1! \geq 2^{1-1} = 1 \quad \text{ισχύει ως ισότητα.}$$

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = \kappa$. δηλαδή

$$\kappa! \geq 2^{\kappa-1} \quad (*)$$

Πρέπει να δείξω ότι

$$(\kappa+1)! \geq 2^{\kappa}$$

$$(\kappa+1)! = \kappa!\cdot(\kappa+1) \overset{(*)}{\geq} (\kappa+1)\, 2^{\kappa-1}$$

Όμως $\kappa+1 \geq 2$ (ελάχιστη τιμή του $\kappa = 1$ ελάχιστη στο $\mathbb{N}$)

άρα $(\kappa+1)! \geq (\kappa+1)\, 2^{\kappa-1} \geq 2\cdot 2^{\kappa-1} = 2^{\kappa}$.

Άσκηση για Μέθοδο τέλειας επαγωγής! (Ανισότητα Weierstress)

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ θετικοί αριθμοί.

Να δείξτε ότι ισχύει:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\nu) \geq 1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu, \quad \forall \nu\in\mathbb{N}$$

Μαθηματική Ανάλυση

10 Oct 6.

Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών.

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left(\text{Υπολογισμός } f(x),\ x\in\mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} f(x),\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \right)$

✓ $\boxed{A=\mathbb{N}}$ απαραίτητη προϋπόθεση.

Μια συνάρτηση $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

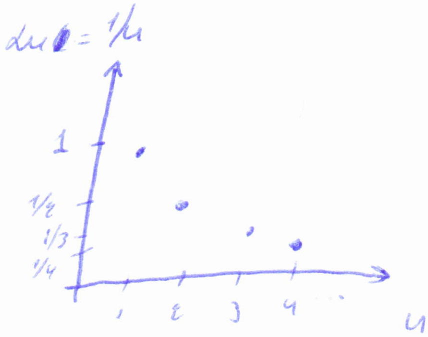
· Τιμή της ακολουθίας a στο $n\in\mathbb{N}$ δηλώνεται $a_n = a(n)$

· Παραδείγματα

· $a_n = \frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

$n=1$, $a_1 = \frac{1}{1}$ $\qquad$ $n=3$, $a_3 = 1/3$

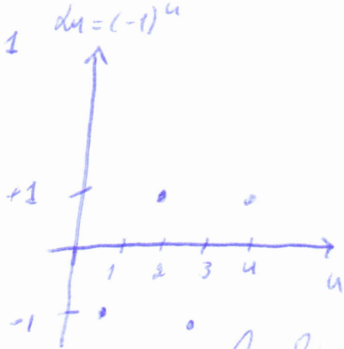
$n=2$, $a_2 = 1/2$ $\qquad$ ...



· $a_n = (-1)^n$

$n=1$, $a_1 = -1$ $\qquad$ $n=3$, $a_3 = -1$

$n=2$, $a_2 = 1$ $\qquad$ ...



Τι είδους όριο έχει νόημα να ορίσει για την ακολουθία a_n

(Αφού $A=\mathbb{N}$, έχει νόημα να μιλάμε για το $\lim_{n\to+\infty} a_n$)

$(0 \notin \mathbb{N})$

· Θα είχε νόημα $\lim_{n\to 3} a_n$ ΟΧΙ

$\lim_{n\to n_0} a_n$, $n_0\in\mathbb{N}$ κτλ. ΟΧΙ

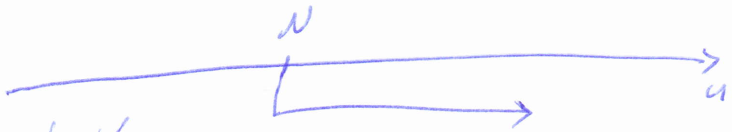
Το μόνο που έχει νόημα είναι $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n}$.

∀ Ορισμός: Όριο ακολουθίας

→ Ακολουθία a_n πραγματικών αριθμών, συγκλίνει προς τον $a \in \mathbb{R}$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\underline{N = N(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

σημαίνει ότι το N είναι συνάρτηση του ε

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq N.$$



(κάπου προσδιορίζω τον N) $n \geq N$

ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

· Οι όροι της ακολουθίας από κάποιο N και πάνω, βρίσκονται πολύ κοντά στο a

· Συμβολισμός $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$

Παράδειγμα:

$a_n = \frac{1}{n}$, έχει όριο το 0 (φαίνεται από την γραφ. παράσταση) δηλαδή $a = 0$

Εξ. ορισμού:

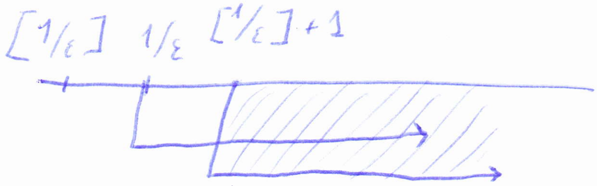
$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq N$

(ψάχνω αυτό να το κάνω $< \varepsilon$)

Επιλογή N έτσι ώστε $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall n \geq N$

$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ γιατί ακέραιο μέρος; γιατί το N πρέπει να ανήκει στους φυσικούς, ενώ το $1/\varepsilon$ δεν ανήκει.



Μαθηματική Ανάλυση

10 Oct. c.

Παράδειγμα.

$a_n = (-1)^n$ περιμένουμε να μην συγκλίνει.

Σύμφωνα με το γράφημα, η ακολουθία a_n δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Θα δείξω δηλαδή ότι η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Λύση
Έστω ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$.

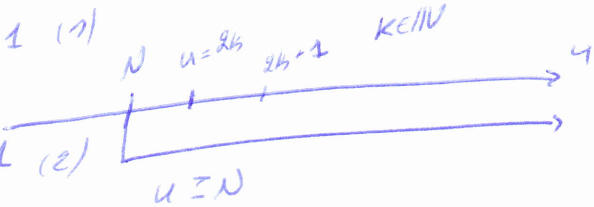
Τότε $|a_n - a| < \varepsilon$ θα ισχύει αυτό $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$ και για κάθε $\varepsilon > 0$.

Επιλέγω $\varepsilon = 1$
(μπορώ να πάρω οποιοδήποτε εγώ αφού είναι για κάθε $\varepsilon > 0$)

άρα $|a_n - a| < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$

$|(-1)^n - a| < 1, \forall n \in \mathbb{N}$, με $n \geq N$.

1. Για $n = 2k \geq N$ $\quad |(-1)^{2k} - a| < 1 \Rightarrow |1 - a| < 1$ (1)
2. Για $n = 2k+1 \geq N$ $\quad |(-1)^{2k+1} - a| < 1 \Rightarrow |-1 - a| < 1$ (2)



$n = 2k \geq N$

$n = 2k+1 \geq N$

$$\left.\begin{aligned} (1) &\Rightarrow 0 < a < 2 \\ (2) &\Rightarrow -2 < a < 0 \end{aligned}\right\}$$ άτοπο, το a δεν μπορεί να ανήκει σε δύο διαφορετικά διαστήματα.

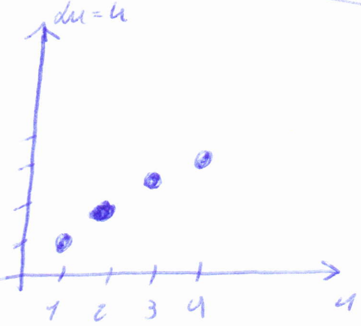
άρα δεν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με $\lim a_n = a$,

δηλαδή η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ ή $-\infty$ αποφανίζει κατά

π.χ. $a_n = n$



$\lim_{n\to+\infty} a_n =$;

περιμένω ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

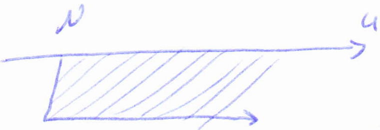
*

Ορισμός

$\nexists$ $a_n \in \mathbb{R}$ συγκλίνει προς το $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$)

όταν για κάθε $k>0$ υπάρχει $N = N(k) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$a_n > k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$



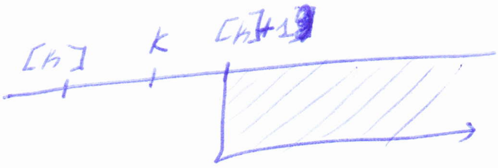
αντίστοιχα

$a_n < -k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$.

* (Ασκηση) Να δείξετε ότι $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$a_n > k$, $\forall n \geq N$ ισχύει $n > k$, $\forall n \geq N$

Επιλογή $N = [k]+1$



Μαθηματική Ανάλυση

11 Οκτ α.

Πρόταση

Για $a_n \in \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει σε ένα $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι η ακολουθία $|a_n|$ συγκλίνει στο $|a|$

αν $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ τότε $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = |a|$

Απόδειξη

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad *$$

Εφαρμογή της (*) για $x = a_n$ και $y = a$

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \quad (1)$$

Επειδή από την υπόθεση η a_n συγκλίνει στο a, βάσει ορισμού ισχύει:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq N \quad (2)$$

Από (1) και (2)

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq N$$

δηλαδή $||a_n| - |a|| < \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$

άρα ο ορισμός πληρείται για την ακολουθία $|a_n|$ και τον αριθμό που συγκλίνει που είναι ο $|a|$

άρα $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| \to a$

• Ισχύει το αντίστροφο; ΟΧΙ

→ Αντιπαράδειγμα

$$a_n = (-1)^n$$

$$|a_n| = |(-1)^n| = 1$$

Το όριο του $|a_n|$ καθώς το $n \to +\infty$ είναι το 1.

Όμως η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

(Αφού δεν ισχύει έστω για μια ακολουθία, μπορώ να πω ότι δεν ~~συγκλίνει~~ ισχύει γενικά).

* Φραγμένη ακολουθία. Ορισμός.

$a_n \in \mathbb{R}$ συμβαίνει:

1) Άνω φραγμένη όταν υπάρχει ένας $b \in \mathbb{R}$ με $\boxed{a_n \leq b}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) Κάτω φραγμένη όταν υπάρχει ένας $c \in \mathbb{R}$ με $\boxed{a_n \geq c}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Φραγμένη, όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη. Δηλαδή όταν υπάρχουν $b, c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $c \leq a_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Παραδείγματα:

- $a_n = \frac{1}{n}$: φραγμένη $\quad 0 \leq a_n = \frac{1}{n} \leq 1$
- $a_n = (-1)^n$: φραγμένη $\quad -1 \leq a_n = (-1)^n \leq 1$
- $a_n = n$: κάτω φραγμένη $\quad a_n \geq 1$
- $a_n = -n$: άνω φραγμένη $\quad a_n \leq -1$

Μαθηματική Ανάλυση 1

11 Oct 6.

Πρόταση (συνέχεια ορίου με φράγμα ακολουθίας.)

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $a_n \in \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.

(Υπόθεση → συμπέρασμα, ¬συμπέρασμα → ¬υπόθεση)

↳ πόρισμα.

Αν μια ακολουθία $a_n \in \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη, τότε δεν συγκλίνει.

Συμπεριφορά ακολουθιών:
Σύγκλιση σε πραγματικό αριθμό
Σύγκλιση σε άπειρο
"Αποκλίνει"

· Το αντίστροφο δεν ισχύει (συμπέρ → υπόθεση)

Αντιπαράδειγμα: $a_n = (-1)^n$

είναι φραγμένη $-1 \le a_n = (-1)^n \le 1$
αλλά δεν συγκλίνει.

Πρόταση

Έστω $\begin{cases} a_n, b_n \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$

Τότε:

1) Αν a_n μηδενική ακολουθία και η b_n φραγμένη ακολουθία,
($\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$)
τότε $a_n \cdot b_n$ μηδενική ($\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = 0$)

2) Αν a_n μηδενική ακολουθία και ισχύει $|b_n - b| \le C a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \ge p$ (δεν χρειάζεται να ισχύει για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό, αρκεί να ισχύει από κάποιον και πάνω)
και $C > 0$ τότε $\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = b}$

$|b_n - b| \le C a_n$

$-C a_n \le b_n - b \le C a_n$ άρα ισοδύναμα $b_n \to b$ Sandwich Criteria (Κριτήριο Παρεμβολής)

Αν $-C a_n \to 0$, τότε $b_n - b \to 0$, Αν $C a_n \to 0$

Παράδειγμα

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $\lim a_n = ?$

α' τρόπος.

$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = b_n \cdot c_n$

όπου $b_n = \frac{1}{n}$ και $c_n = \frac{1}{n}$

$c_n = \frac{1}{n}$, $0 \le c_n \le 1$ φραγμένη.

$b_n \to 0$ μηδενική

άρα $\lim a_n = \lim (b_n \cdot c_n) = 0$

(από πρόταση : 1))

β' τρόπος

$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| \le \frac{1}{n}$

και επειδή $\frac{1}{n} \to 0$ (μηδενική ακολουθία)

τότε $\frac{1}{n^2} \to 0$ (από την πρόταση 2))

Παράδειγμα

$a_n = \frac{\sin n}{n}$, $\lim a_n = ?$

Λύση

$a_n = b_n \cdot c_n = \frac{1}{n} \cdot \sin n$.

$b_n = \frac{1}{n}$ με $\lim b_n = 0$ άρα b_n μηδενική

$c_n = \sin n$. Ξέρω $|\sin n| \le 1$ άρα $-1 \le \sin n \le 1$

άρα η c_n είναι φραγμένη.

άρα $a_n = b_n \cdot c_n \to 0$

(από πρόταση 1))

Μαθηματική Ανάλυση I

11 Οκτ

Παράδειγμα

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad \lim a_n = ?$$

Λύση

$$a_n = b_n \cdot c_n = \frac{1}{n} \cdot (-1)^n$$

$b_n = \frac{1}{n} \to 0$ (μηδενική)

και $c_n = (-1)^n$ που ξέρουμε ότι είναι φραγμένη.

άρα $\lim a_n = \lim (b_n \cdot c_n) = 0$

άρα $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Παράδειγμα (δύσκολο)

$$a_n = \omega^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Τι συμπεριφορά έχει αυτή η ακολουθία;

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & |\omega| < 1 \\ 1, & \omega = 1 \\ +\infty, & \omega > 1 \\ \text{αποκλίνει}, & \omega \le -1 \end{cases}$$

(πρέπει να αποδείξω ταχύτα)

Λύση

α) $|\omega| < 1$, $\omega \neq 0$

$$\boxed{\text{Ανισότητα Bernoulli} \quad (1+x)^n \ge 1 + nx}, \quad x > -1,\ n \in \mathbb{N}$$

$\frac{1}{|\omega|} > 1 \qquad (\omega = 0,\ a_n = 0 \to 0)$

Επειδή έχω έναν αριθμό μεγαλύτερο του 1 μπορώ να τον γράψω ως $1+\delta$ $(\delta > 0)$

οπότε $\frac{1}{|\omega|} = 1 + \delta \quad (\delta > 0)$

$a_n = \omega^n$

$$|\omega|^n = \frac{1}{(1+\delta)^n} \quad (1)$$

(Ανισότητα Bernoulli)

$$(1+\delta)^n \ge 1 + n\delta > n\delta \quad \text{(χωρίς το +1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+\delta)^n} \le \frac{1}{n\delta} \quad (2)$$

$\rightarrow$ Από (1) και (2) $|\omega|^n = |a_n| \le \frac{1}{n\delta}$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$

$$|a_n| \le \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{c} \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \to a_n \to 0$$

(από c) της προηγ. πρότασης)

β) $\omega = 1$

$\alpha_\nu = 1^\nu = 1 \to 1$

γ) $\omega > 1$

$\omega = 1 + \delta$, $\delta > 0$ (ένα πολύ μικρό θετικό).

$\alpha_\nu = \omega^\nu = (1+\delta)^\nu \geq 1 + \nu\delta$ (Bernoulli)

$1 + \nu\delta > \nu\delta$

δηλαδή

$\alpha_\nu > \nu\delta$ (η θετική σταθερά δεν αλλάζει το όριο) ~~[illegible]~~

Επειδή $\lim \nu \to +\infty$

τότε $\lim \alpha_\nu = +\infty$

δ) $\omega \leq -1$

$\Rightarrow \omega = -|\omega|$

$\alpha_\nu = \omega^\nu = (-|\omega|)^\nu = (-1)^\nu |\omega|^\nu$ άρτιος $\to +\infty$, περιττός $\to -\infty$ άρα α_ν αποκλίνει.

Όμως $|\omega| > 1$, $|\omega|^\nu \to +\infty$ (περίπτωση γ)

(αφού $\omega < -1$ π.χ. για $\omega = -3$)

(~~[illegible]~~ τότε που είναι η βάση είναι > 1 άρα ως προς ν θα πηγαίνει στο $+\infty$)

Μαθ. Ανάλυση.

Άσκηση-για-το-σπίτι

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$

$I_n: \quad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) \geq 1+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n, \quad n\in\mathbb{N}$

Λύση

για $n=1$ $\quad 1+\alpha_1 \geq 1+\alpha_1$ ισχύει ως ισότητα

για $n=k$ $\quad$ έστω ότι ισχύει $\quad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k) \geq 1+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k \quad (*)$

για $n=k+1$

$$\underbrace{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)}(1+\alpha_{k+1}) \overset{*}{\geq} (1+\alpha_1+\dots+\alpha_k)(1+\alpha_{k+1}) =$$

$$= (1+\alpha_1+\dots+\alpha_k) + \alpha_{k+1}\underbrace{(1+\alpha_1+\dots+\alpha_k)}_{\text{όλα αυτά είναι θετικά από την υπόθεση}} \quad \text{(επιμεριστική)}$$

$$\geq 1+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k+\alpha_{k+1}$$

άρα η πρόταση $I(n)$ ισχύει.

Μαθηματική Ανάλυση 1
17 Οκτ... (χαμένη ώρα)

· Θεώρημα (Πράξεις ακολουθιών)

Έστω a_n, b_n πραγματικές ακολουθίες $a, b \in \mathbb{R}$ με $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Τότε ισχύουν:

1) $a_n + b_n \to a + b$
2) $\lambda a_n \to \lambda a$ $(\lambda \in \mathbb{R})$
3) $a_n b_n \to a b$
4) Αν $b \neq 0$ και $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

· Παράδειγμα νδο $\forall a > 0$ ισχύει ότι

$$\sqrt[n]{a} \to 1$$

Λύση

1) $a = 1$ τότε $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1 \to 1$

2) για $a > 1$ τότε $\sqrt[n]{a} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ οπότε $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$, $\delta_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

άρα $a = (1 + \delta_n)^n$
(Εφαρμόζω ανισότητα Bernoulli) $(1+x)^n \geq 1 + nx$

άρα $a = (1 + \delta_n)^n \geq 1 + n\delta_n$

$a \geq n\delta_n$ άρα $0 < \delta_n \leq \frac{a}{n}$

Επειδή καθώς $n \to +\infty$ $\frac{a}{n} \to 0$

θα έχουμε ότι $\delta_n \to 0$, $n \to +\infty$

Είχαμε θέσει $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$

άρα $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n \to 0 + 1 = 1$

άρα $\sqrt[n]{a} \to 1$

3) για $0 < a < 1$?

Γράφω το $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, όμως $\frac{1}{a} > 1$

Ξέρω ότι

$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$ αφού

$\frac{1}{a} > 1$ άρα

$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to \frac{1}{1} = 1$

άρα

για $a > 0$ $\sqrt[n]{a} \to 1$

?

Παράδειγμα
νδο $\sqrt[n]{n} \to 1$ καθώς $n \to +\infty$

· Απόδειξη αργότερα με την [illegible]

· Γνωστά $\sqrt[n]{a} \to 1$, $n \to +\infty$ και $\sqrt[n]{n} \to 1$

Τα θεωρώ γνωστά για τις ασκήσεις. Τα χρησιμοποιώ χωρίς απόδειξη.

• Πρόταση: $a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a \in \mathbb{R}$

Τότε $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$

και πιο γενικά $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$ για $k \in \mathbb{N}$

• Πρόταση

$$c_n = \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0}$$

· $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ για $i = 0, 1, \dots, m$, $a_m \neq 0$

, $b_j \in \mathbb{R}$ για $j = 0, 1, \dots, l$, $b_l \neq 0$

, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$.

νδο: $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_l}, & m = l \\ \left(\dfrac{a_m}{b_l}\right)(+\infty), & m > l \\ 0, & m < l \end{cases}$

Λύση

$$c_n = \frac{n^m \left(a_m + a_{m-1} n^{-1} + \dots + a_1 n^{-m+1} + a_0 n^{-m}\right)}{n^l \left(b_l + b_{l-1} n^{-1} + \dots + b_1 n^{-l+1} + b_0 n^{-l}\right)}$$

Μαθηματική Ανάλυση 1

17 Οκτ 2 (συνέχεια)

Καθώς το $n \to +\infty$

$c_n \to n^{m-l} \dfrac{a_m}{b_l}$ (γιατί όλοι οι όροι των παρενθέσεων είναι εκτός των a_m, b_l

kn^{λ} άρα $\dfrac{1}{kn^{\lambda}}$ άρα $\dfrac{1}{kn^{\lambda}} \to 0$

για $n \to +\infty$)

Επίσης όμως

$m = l$ άρα $n^{m-l} = n^0 = 1$ άρα

$c_n \to \dfrac{a_m}{b_l}$ για $m = l$

· Για $m > l$, $c_n \to n^{m-l}\left(\dfrac{a_m}{b_l}\right) = (+\infty)\left(\dfrac{a_m}{b_l}\right)$

Για $m < l$, $c_n \to n^{m-l}\left(\dfrac{a_m}{b_l}\right) = \dfrac{1}{n^{l-m}}\left(\dfrac{a_m}{b_l}\right) \to 0$

Μονότονες Ακολουθίες

Ορισμός: $a_n \in \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- αύξουσα όταν $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- γνησίως αύξουσα όταν $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- φθίνουσα όταν $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- γνησίως φθίνουσα όταν $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

· Ξέρω ότι αν $f(x)$ αύξουσα τότε

Αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) \le f(x_2)$

· Ξέρω ότι πάντα $n < n+1$ όπου $n \in \mathbb{N}$

άρα · a_n αύξουσα $\Rightarrow a_n \le a_{n+1}$

a_n φθίνουσα $\Rightarrow a_n \ge a_{n+1}$

- αύξουσα, φθίνουσα → μονότονη ακολουθία
- γν. αύξουσα, γν. φθίνουσα → γν μονότονη ακολουθία.

Μαθηματική Ανάλυση 1

17 Oct. 16.

Θεώρημα: κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία $a_n \in \mathbb{R}$ είναι συγκλίνουσα

Ισχύουν

1) Αν a_n αύξουσα τότε $a_n \to \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

2) Αν a_n φθίνουσα τότε $a_n \to \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

Παράδειγμα.

Να δείξετε ότι

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ (δεν μου ζητάει να βρω σε ποιο αριθμό συγκλίνει).

Λύση → πρέπει να βρω την μονοτονία της, και να δείξω ότι είναι φραγμένη (σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα)

$$a_1 = \frac{1}{1+1}$$

$$a_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

με πράξεις

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\underbrace{2(n+1)(2n+1)}_{\text{γινόμενο θετικών αριθμών.}}} > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$ γνησίως αύξουσα

αύξουσα

$a_n \leq a_{n+1}$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0$

φθίνουσα

$a_{n+1} - a_n \leq 0$

ισχύει.

$$0 < a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$ (ως άθροισμα θετικών αριθμών).

Και ισχύει επίσης

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}$$

αφού αυτοί οι όροι είναι n στο πλήθος έχω

$$a_n < \frac{n}{n} = 1$$

(το φράγμα δεν πρέπει να έχει εξάρτηση από n. πρέπει να είναι σταθερό. δηλαδή δεν μπορώ να πω ότι το a_{n+1} είναι άνω φράγμα.)

δηλαδή

$0 < a_n < 1$ άρα φραγμένη.

Επομένως βάσει του προηγούμενου θεωρήματος, η a_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό στο $\mathbb{R}$.

Αναδρομικές ακολουθίες.

Παράδειγμα:

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = 1$$

1) δείξτε ότι η a_n συγκλίνει

2) βρείτε το όριό της.

(στις αναδρομικές όταν υπάρχει σύγκλιση, μπορεί να δείχνουμε ότι συγκλίνει ανάλογα με το προηγούμενο παράδειγμα.)

Λύση

$a_1 = 1$

$a_2 = \sqrt{3a_1} = \sqrt{3}$

$a_3 = \sqrt{3a_2} = \sqrt{3\sqrt{3}}$

$a_4 = \sqrt{3a_3} = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

κ.ο.κ.

1) (Με βάση το θεώρημα μονότονη + φραγμένη)

Θα δείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Γράφοντας τους όρους, φαίνεται ότι μεγαλώνει το νούμερο.

Με μέθοδο τέλειας επαγωγής θα δείξουμε ότι

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

α. για $n = 1$ $a_1 < a_2$ δηλαδή $1 < \sqrt{3}$ που ισχύει.

Μαθηματική Ανάλυση 1
17 Oct C.

β. Έστω ότι ισχύει η πρόταση για $\nu=\kappa$ (*)

δηλαδή $\alpha_\kappa < \alpha_{\kappa+1}$

τότε για $\nu=\kappa+1$

θα δείξω ότι $\alpha_{\kappa+1} < \alpha_{\kappa+2}$

$$\alpha_{\kappa+2} = \sqrt{3\alpha_{\kappa+1}} \underset{\text{σύμφωνα με την (*)}}{>} \sqrt{3\alpha_\kappa} = \alpha_{\kappa+1}.$$

άρα δηλαδή δείξαμε ότι $\alpha_{\kappa+1} < \alpha_{\kappa+2}$

άρα η πρόταση μου (η αρχική) ισχύει.

δηλαδή

$\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ άρα είναι γνησίως αύξουσα.
(Μονοτονία)

$0 < \alpha_\nu$

αφού είναι ακολουθία θετικών αριθμών.
(το κάτω φράγμα είναι μηδέν)

θα δείξουμε ότι $\alpha_\nu < 3$, με επαγωγή, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

ή
$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$
$\sqrt{3\alpha_\nu} > \alpha_\nu$
$3\alpha_\nu > \alpha_\nu^2$
$\alpha_\nu^2 - 3\alpha_\nu < 0$
$\alpha_\nu(\alpha_\nu - 3) < 0$
$+$
$\alpha_\nu - 3 < 0$

α. για $\nu = 1$

$\alpha_1 < 3$ ισχύει

$1 < 3$

β. Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$ δηλαδή $\alpha_\kappa < 3$ (*)

τότε για $\nu=\kappa+1$

θέλω να δείξω $\alpha_{\kappa+1} < 3$

$$\alpha_{\kappa+1} = \sqrt{3\alpha_\kappa} \overset{(*)}{<} \sqrt{3\cdot 3} = \sqrt{9} = 3$$

άρα $\alpha_{\kappa+1} < 3$ άρα ισχύει η πρόταση $\alpha_\nu < 3$

επομένως έχω

$0 < \alpha_\nu < 3$ (φραγμένη).

άρα βάση του θεωρήματος, η α_ν συγκλίνει.

2) Έστω $\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \alpha \in \mathbb{R}$.

η συμπεριφορά της α_ν είναι ίδια με της $\alpha_{\nu+1}$ για πολύ μεγάλα ν.

Τότε $\alpha = \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_{\nu+1}$ (επειδή έχω σύγκλιση)

Εφαρμόζω την $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{3\alpha_\nu}$ για $\nu \to +\infty$

$$\alpha = \sqrt{3\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-3) = 0$$

$$\alpha = 0 \text{ ή } \alpha = 3$$

Το $\alpha = 0$ Απορρίπτεται.

και $\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = 3$

Μαθηματική Ανάλυση 1 (++ διορθώσεις μπροστά)
18 Oct. α. από φώτο.

Πρόταση: Κάθε μονότονη και μη φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$, συγκλίνει προς το $+\infty$ ή το $-\infty$

Παράδειγμα.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Μπορώ να δείξω με επαγωγή σε άτοπο ότι είναι μη φραγμένη.

$$a_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

$$a_n > 1 + \frac{n}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Αφού η $1 + \frac{n}{2}$ είναι μη φραγμένη ακολουθία τότε και a_n μη φραγμένη.

Υποακολουθίες

Ορισμός

$a_n \in \mathbb{R}$

Μια ακολουθία $b \in \mathbb{R}$ ονομάζεται υποακολουθία της a_n όταν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία δεικτών k_n έτσι ώστε $b_n = a_{k_n}$

(έχει να είναι άπειρο πλήθος όρων, δεν παίρνω μόνο ένα μικρό πλήθος)

π.χ.

Επιλογές

1) $k_n = 2n$

$a_{k_n} = a_{2n}, \ n \in \mathbb{N}$ υποακολουθία των άρτιων όρων με άρτιους όρους.

2) $k_n = 2n - 1$

$a_{k_n} = a_{2n-1}, \ n \in \mathbb{N}$

υποακολουθία των περιττών όρων

$(a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$

(αν ενώσω την a_{2n} και την a_{2n-1} παίρνω όλη την a_n)

Μαθηματική Ανάλυση 1
18 Oct b.

Πρόταση

$a_n \in \mathbb{R}$ και $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

με $a_n \to a$

Τότε για κάθε υπακολουθία a_{k_n} ~~της~~ της a_n,

έχουμε $a_{k_n} \to a$

Πόρισμα

$a_n \in \mathbb{R}$

Αν υπάρχουν δύο υπακολουθίες της a_n, οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια του $\overline{\mathbb{R}}$, ή κάποιο από αυτά τα δύο όρια δεν υπάρχει, τότε η a_n είναι αποκλίνουσα

(δεν συγκλίνει δηλαδή στο $\overline{\mathbb{R}}$)

Παράδειγμα. (που έχω ξαναδεί)

$a_n = (-1)^n$

· $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$

· $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1$

(σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα:) ~~άρα~~ Επειδή $1 \neq -1$

έχουμε ότι η a_n δεν συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$

Παράδειγμα

$a_n = n + (-1)^n \cdot n$

· $a_{2n} = 2n + (-1)^{2n} \cdot 2n = 4n \to +\infty$

· $a_{2n-1} = 2n-1 + (-1)^{2n-1} \cdot 2n-1 = 0 \to 0$

—//— —//—

Η a_n δεν συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Ειδικά Κριτήρια για σύγκλιση ακολουθιών

Θεώρημα (πρώτο κριτήριο)

$a_n \in \mathbb{R}$ και $a \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a_n \to a$

Τότε $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a$

(δηλαδή θα πρέπει να μπορώ να βρω τον συμπεριφορά της a_n για να βρω και της b_n)

αριθμητικός μέσος
(έχω n όρους διαιρέσουν με το πλήθος n)

άλλ b_n αριθμητικοί μέσος της a_n)

Παράδειγμα.
δείξτε ότι: $b_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$

συγκλίνει στο 0

Λύση

$b_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$ Επιλογή ως $a_n = \dfrac{1}{n}$

άρα $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

Όμως $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ άρα και $b_n \to 0$.

Παράδειγμα.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$$

$b_n = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots \sqrt[n]{n}}{n}$ Επιλέγω ως $a_n = \sqrt[n]{n}$

άρα $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$

Όμως $\sqrt[n]{n} \to 1$ άρα και $b_n \to 1$.

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad a > 0$

$\sqrt[n]{n} \to 1, \; n \in \mathbb{N}$

Μαθηματική Ανάλυση 1

18 Oct c.

(Δεύτερο Κριτήριο)

Θεώρημα

$a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to a \in \mathbb{R}$$

Τότε ισχύουν τα εξής

1) Αν $0 \leq a < 1$

τότε $a_n \to 0$

2) Αν $a > 1$ τότε

$|a_n| \to +\infty$

3) Αν $a = 1$

δεν υπάρχει συμπέρασμα.

πρέπει όμως να βρω περιπτώσεις
που θα με οδηγήσει σε μια σωστή απάντηση

→ Σημείωση

αν $a_n > 0$ τότε $a_n \to +\infty$

~~Παράδειγμα~~ a) $a_n = 2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

$2 > 1$ οπότε $a_n \to +\infty$

β) $a_n = -2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|-2^{n+1}|}{|-2^n|} = 2 > 1$$

οπότε $|a_n| \to +\infty$

δηλαδή $2^n \to +\infty$

Όμως $a_{2n} = -2^{2n} = ((-2)^2)^n = 4^n \to +\infty$

$a_{2n-1} = -2^{2n-1} = (-2)^{-1} \cdot (-2)^{2n} = -\frac{1}{2} \cdot 4^n \to -\infty$

άρα $a_n = (-2)^n$ δεν συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$

→ Σημείωση

a) $a_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

(πηλίκο πολυωνύμων
από σημειώσεις μόνου)

και $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

β) $a_n = n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{n} \to 1$$

και $a_n \to +\infty$

γ) $a_n = (-1)^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \to 1$$

και a_n αποκλίνει

Μαθηματική Ανάλυση Ι

24 Oct α.

→ <u>Θεώρημα</u>

$a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \alpha$

τότε ισχύουν τα εξής

1) αν $0 \le \alpha < 1$ ισχύει $a_n \to 0$

2) όταν $\alpha > 1$ ισχύει $|a_n| \to +\infty$

3) αν $\alpha = 1$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε

<u>παράδειγμα.</u>

$a_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ <u>Λύση</u>

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = ?$

για $x = 0$, $a_n = 0^n = 0 \to 0$

για $x \neq 0$

(αυτό το κάνω γιατί θα ισχύει $a_n \neq 0$)

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| \underset{\text{λόγω } n \to +\infty}{\longrightarrow} |x|$$

είναι ένας σταθερός αριθμός.

1) Αν $|x| < 1$

τότε $a_n = x^n \to 0$

2) Αν $|x| > 1$

τότε $|a_n| = |x^n| \to +\infty$

3) Αν $|x| = 1$
$$\begin{cases} x = 1, & a_n \to 1 \\ x = -1, & a_n = (-1)^n \end{cases}$$

αποκλίνει (ταλαντεύεται με όρους ± 1)

→ Θεώρημα.

$\alpha_\nu \in \mathbb{R}$ με $\alpha_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Αν $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = b$ τότε $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sqrt[\nu]{\alpha_n} = b$

$(b \in [0, +\infty])$

Παράδειγμα

να δείξετε ότι $b_n = \sqrt[n]{n} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 1$ (αυτό μπορώ να το δείξω με την ανισότητα Bernoulli)

Λύση.

Αν $\alpha_n = n$, $n \in \mathbb{N}$

$\alpha_n > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$\lim \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim \dfrac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1 = b$

(ή το βρίσκω κάνοντας λιμίτ δύο πολυωνύμων)

άρα $\Theta \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{\alpha_n} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$

Παράδειγμα

$b_n = \sqrt[n]{n!}$

$\lim b_n = ;$

Λύση $\alpha_n = n!$, $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{(1+n)!}{n!} = \dfrac{n!\,(n+1)}{n!} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$b = +\infty$

$\Theta \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Μαθηματική Ανάλυση 1
24 Oct 6.

Παράδειγμα.

$b_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

$\lim b_n = ?$

Λύση $\alpha_n = n^2+n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{n^2+n} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = b$$

$$\Theta \Rightarrow \lim b_n = \lim \sqrt[n]{\alpha_n} = b = 1.$$

(ή $b_n = \sqrt[n]{n(n+1)} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n+1} \to 1\cdot 1 = 1$)

→ Σειρές Πραγματικών Αριθμών.

$\alpha_n \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$

$$\not\exists \ \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

· δηλαδή, αθροίζω τους n πρώτους όρους.

· ξεκινάμε από μια ακολουθία α_n και φτιάχνω μια νέα ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

· $n=1$, $S_1 = \alpha_1$

· $n=2$, $S_2 = \alpha_1 + \alpha_2$

· $n=3$, $S_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

⋮

· $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$

S_n: ακολουθία των μερικών αθροισμάτων.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \quad \text{σειρά πραγματικών αριθμών.}}$$

Η σειρά πραγματικών αριθμών, ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας S_n των μερικών αθροισμάτων.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \pm\infty \\ \text{δεν υπάρχει} \end{cases}$$

(λαμβάνουμε ορισμό με την σύγκλιση ακολουθιών)
(Η συμπεριφορά της S_n είναι ίδια με της σειράς).

→ Ορισμός (σύγκλιση σειράς σε $\alpha \in \mathbb{R}$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει προς του $\alpha \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha}$$

→ όταν η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει προς του $\alpha \in \mathbb{R}$, δηλαδή

όταν $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|S_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$.

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ θα λέγεται συγκλίνουσα.

→ Όταν η $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$ τότε $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \pm\infty}$

→ Όταν κυμαίνεται (ταλαντώνεται) η S_n τότε θα λέμε ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ κυμαίνεται (ταλαντώνεται)

Όταν έχω την σύγκλιση της S_n, μπορώ να συμπεράνω και της σύγκλισης της σειράς.

* ξεκινάω από το $n=0$ για να βγεί σε κλειστή μορφή

$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = 1 + \omega^1 + \omega^2 + \ldots$ το $\frac{1}{1-\omega}$

ενώ

$\sum_{n=1}^{+\infty} \omega^n = \omega^1 + \omega^2 + \ldots$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$

Παράδειγμα (Γεωμετρική σειρά)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = \begin{cases} \frac{1}{1-\omega}, & |\omega| < 1 \\ +\infty, & \omega \geq 1 \\ \text{κυμαίνεται}, & \omega \leq -1 \end{cases}$$

*γιατί από $n=0$;

Λύση $S_n = \sum_{k=0}^{n} \omega^k = 1 + \omega^1 + \omega^2 + \ldots + \omega^n =$
(αυτό είναι γεωμετρική πρόοδος)

$= \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}$ ← ο τύπος που μου δίνει το άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου είναι:

$\omega \neq 1$

Μαθηματική Ανάλυση 1

Ευ oct c

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \omega^n$$

$|\omega| < 1$ $\quad \dfrac{1}{1-\omega} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \omega^n$

• Για $\omega = 1^*$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = 1 + 1 + \ldots + 1 = n+1$$

αυτός ο όρος είναι ο μόνος που εξαρτάται από το n, άρα καθορίζει και την σύγκλιση.

• $S_n = \begin{cases} \dfrac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}, & \omega \neq 1 \\ n+1, & \omega = 1 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = ?$

• Για $\omega = 1$

$$\lim S_n = \lim (n+1) = +\infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = +\infty. \quad ✓$$

• Για $\omega \neq 1$

α) $|\omega| < 1$

$\omega^{n+1} \to 0$

άρα $\lim S_n = \lim \dfrac{1}{1-\omega} - \dfrac{\omega^{n+1}}{1-\omega} = \dfrac{1}{1-\omega} - \dfrac{1}{1-\omega} \lim \omega^{n+1} =$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{1-\omega}$ άρα και $\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = \dfrac{1}{1-\omega}$, $|\omega| < 1$ ✓

β) $\omega > 1$ (το $\omega = 1$ το έχουμε δείξει *)

τότε $\omega^n > 1$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \omega^k > \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$$

Όμως $n+1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

άρα και $\sum_{k=0}^{n} \omega^k \to +\infty$

δηλαδή $S_n \to +\infty$ και έτσι $\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = +\infty$ ✓

γ) $\omega \leq -1$

(από την άσκηση στις ακολουθίες)

ω^n κυμαίνεται/ταλαντεύεται.

άρα και S_n κυμαίνεται καθώς $n \to +\infty$

~~και~~ άρα και $\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n$ κυμαίνεται για $\omega \leq -1$. ✓

- Άσκηση για το σπίτι.

Μία μπάλα πέφτει στο έδαφος από ύψος h. Κάθε φορά που χτυπά στο έδαφος, χάνει (λόγω τριβής) ύψος και φτάνει στο τελικό ύψος που είναι ίσο με r φορές το προηγούμενο με $r \in (0,1)$. Βρείτε την ολική απόσταση που θα διανύσει η μπάλα μέχρι να ακινητοποιηθεί.

$$S = h + 2rh + 2r^2h + \dots + 2r^n h + \dots$$

$$= h + 2h(r + r^2 + \dots + r^n + \dots) = h + 2h\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$$

αυτό ισχύει για το αφού $r \in (0,1)$

Ξέρω από άλλη άσκηση ότι $$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = \begin{cases} \frac{1}{1-\omega}, & |\omega| < 1 \\ +\infty, & \omega \geq 1 \\ \text{αποκλίνει}, & \omega \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} r^n}$$

άρα $$S = h + 2h\left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n - 1\right)$$

$$= h + 2h\left(\frac{1}{1-r} - 1\right) = h + 2h\left(\frac{1-(1-r)}{1-r}\right)$$

$$= \frac{h(1-r) + 2hr}{1-r} = \frac{h + hr}{1-r} = h\,\frac{1+r}{1-r}$$

Μαθηματική Ανάλυση Ι

25 Οκτ α.

Παράδειγμα.

νδο $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Λύση $S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

Μια συμπεριφορά έχει ~~η~~ ~~άθροισμα~~ ~~μερικών~~ ακολουθία μερικών αθροισμάτων, έχει και η σειρά.

Είχαμε δείξει ότι αυτή η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα, και δεν είναι άνω φραγμένη (σε προηγούμενη άσκηση)

άρα $S_n \to +\infty$

άρα και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

~~Παράδειγμα~~ (ενδιαφέρον παράδειγμα) **Πρόταση**

→ Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

→ Ισχύει το αντίστροφο;

Δεν ισχύει: αντιπαράδειγμα $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η σειρά δεν συγκλίνει

ενώ η $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ (προηγούμενη άσκηση).

~~Αρνητικό~~ (αρνητικό) **Πόρισμα**

→ Αν $\lim a_n \neq 0$ τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ δεν συγκλίνει

→ το χρησιμοποιώ για να αποδείξω ότι μια σειρά δεν συγκλίνει. → όταν $\lim a_n \neq 0$ ισχύει και όταν δεν υπάρχει το όριο

Παράδειγμα.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n = ?$$

Λύση: $a_n = (-1)^n$ κυμαίνεται.

Επομένως $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$

Επομένως από το προηγούμενο λήμμα, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = ?$$

Λύση

$a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0$

Επομένως $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ δεν συγκλίνει.

→ Θεώρημα

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουσες και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ συγκλίνουσα και ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Προσοχή!: πρέπει να ξεκινάω από δύο σειρές που συγκλίνουν.

Πρόταση

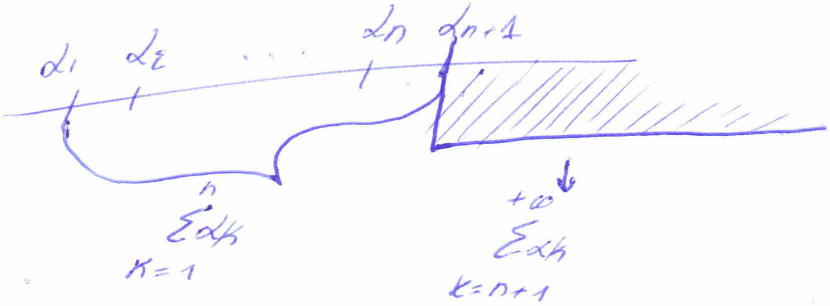
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουσες σειρές και $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε ισχύει και ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

Μαθηματική Ανάλυση 1
25 Οκτ. b.

Πρόταση: Για κάθε συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = 0$$



$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Δηλ. ουσιαστικά αυτό, είναι το τι χάνω όταν υπολογίζω το άθροισμα μιας σειράς. Είναι οι όροι που δεν αθροίζω στον υπολογιστή (10^{-5}...). Είναι μία θεωρητική προσέγγιση για να αποδείξω ότι το υπόλοιπό μου πάει στο 0.

Δευτέρα 31/10

15:45 ξεκινάμε!
(ίδια αίθουσα)
και χωρίς διάλειμμα.

Πιθανή ημερομηνία για πρόοδο
Δευτέρα 21/11
15:00 - 17:00
(μάλλον)

Θεώρημα (Κριτήριο Σύγκλισης)

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ με $0 \le a_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε ισχύουν

1) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει (εδώ ξεκινάω από την μεγαλύτερη ακολουθία. Ενώ στο 2) ξεκινάω από την μικρότερη)

και ισχύει
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

2) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

$e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Θεώρημα (παράδειγμα)

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$. Να αποδείξω ότι συγκλίνει και

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Απόδειξη (βάσει κριτηρίου σύγκρισης/προηγούμενο θεώρημα)

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \underbrace{2\cdots n}_{n-1} \geq \underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n-1} = 2^{n-1}$$

δηλαδή $n! \geq 2^{n-1}$ άρα $\boxed{\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}}$

(βλέπε προηγούμενο θεώρημα 1))

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ είναι γεωμετρική με $\omega = \frac{1}{2}$

και άρα συγκλίνει. ✓

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\omega^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\omega^n$$ (δεν υπάρχει καμία διαφορά).

συγκλίνει $\rightarrow$ συγκλίνει. Αλλάζει το νούμερο που συγκλίνει, αλλά όχι το γεγονός ότι συγκλίνει.

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ και $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ συγκλίνει. Επομένως, έχουμε ότι

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ συγκλίνει.

Όμως $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

συγκλίνει $\leftarrow$ συγκλίνει

Δεν συγκλίνουν στο ίδιο νούμερο αλλά γνωρίζουμε ότι συγκλίνει η μία απ' τις δύο, συγκλίνει και η άλλη.

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

Δηλαδή: $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - 1 = e - 1$$

Μαθηματική Ανάλυση Ι
Εξ Ουε c.

→ Αρμονικές Σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad , p \in \mathbb{Q} \quad : \text{αρμονική τάξης } p$$

→ Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, με $p \in \mathbb{Q}$ συγκλίνει τότε και μόνο τότε όταν $p > 1$

δηλαδή:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει , • $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ~~συγκλ~~ συγκλίνει, αρμονική σειρά, τάξης 2.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, αρμονική σειρά τάξης $p = 3/2$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ αποκλίνει αφού $p = \frac{1}{2} < 1$

→ Εναλλάσσουσες Σειρές (ως προς το πρόσημο εναλλάσσουσες)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n \quad \text{όπου } \alpha_n \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n = -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \dots$$

→ Η εναλλάσσουσα σειρά, είναι μια σειρά, της οποίας οι όροι είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί (ή το αντίθετο)

προσοχή στο $\alpha_n \geq 0$: το μόνο που με ενδιαφέρει για τους όρους της α_n είναι αυτό

→ Θεώρημα Leibnitz

Κάθε εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$ όπου

α_n φθίνουσα και μηδενική, δηλαδή ισχύει $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$, συγκλίνει.

Επιπλέον ισχύει

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \alpha_k \right| \leq \alpha_{n+1}$$

Παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+2} \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ φθίνουσα και $\alpha_n \to 0$

Εναλλάσσουσα σειρά, άρα Θ. Leibnitz → συγκλίνει

Μαθηματική Ανάλυση Ι

31/10 α.

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{με} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

Λύση

a_n φθίνουσα και $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (μηδενική)

Άρα από κριτήριο Leibnitz είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουσα.

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Λύση

- είναι εναλλάσσουσα σειρά με $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $n \in \mathbb{N}$
- a_n φθίνουσα διότι για $n+1 > n$ τότε $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

  δηλαδή $a_n > a_{n+1}$ άρα a_n φθίνουσα.
- και $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ άρα a_n μηδενική

→ Άρα αφού είναι φθίνουσα και μηδενική από το κριτήριο Leibnitz, η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ είναι αρμονική σειρά με τάξη $p = 1/2$ άρα αποκλίνει (αφού $p \leq 1$)

Εκτιμήσεις Υπολοίπων

(Πόσους όρους χρειάζεται να κρατήσω από μια σειρά, για να πάρω το ίδιο αποτέλεσμα (~~[illegible]~~ για το άθροισμα της σειράς) έχοντας συγκεκριμένο σφάλμα.

Υπόλοιπο = υπόλοιπο που αφήνει η σειρά.

Παίρνω $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνουσα σειρά και το άθροισμά της το ονομάζω S

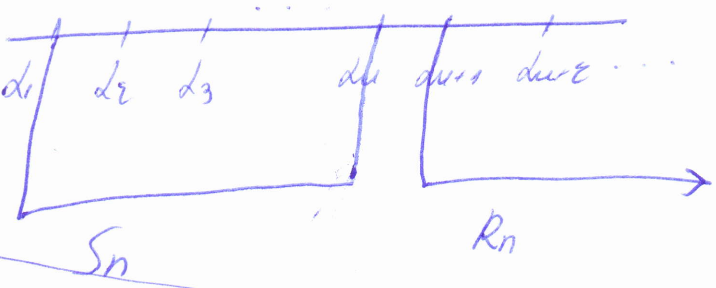
- Επίσης $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ~~[illegible]~~ = ακολουθία μερικών αθροισμάτων.

- Επίσης $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$: ακολουθία υπολοίπων της σειράς.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

$$S = S_n + R_n$$

Σχήμα:



Πρόταση

Για κάθε συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n$ ισχύει ότι το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = 0$$

Για κάθε συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n$ ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

Σημαίνει ότι όταν πηγαίνω σε κάποιο συγκεκριμένο n, από το $n+1$ και πάνω η συνεισφορά του R_n είναι μηδενική αφού η σειρά συγκλίνει.

το R_n είναι το υπόλοιπο της σειράς, το σφάλμα.

Μαθηματική Ανάλυση Ι
31 Oct b.

→ Με λόγια: για αρκετά μεγάλο n (κατάλληλα μεγάλο) ισχύει ότι $R_n \to 0$

$$R_n = S_n - S \to 0$$

δηλαδή $S_n \to S$ (η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων δηλαδή συγκλίνει στο S)

- και έτσι το άθροισμα S της σειράς προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα S_n. το υπόλοιπο R_n μπορεί να θεωρηθεί ως το σφάλμα το οποίο γίνεται ~~κατά~~ ~~την αριθμητική προσέγγιση~~ όταν αντί του S υπολογίζουμε το S_n.

↳ Η σχέση σημαίνει ότι για αρκετά μεγάλο n η διαφορά $S_n - S$ γίνεται όσο μικρή θέλουμε και έτσι το άθροισμα S της σειράς προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα S_n.

Παράδειγμα.

→ Βρείτε μια προσεγγιστική τιμή της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ με σφάλμα μικρότερο του $0,1$

Λύση

- Για να έχει νόημα αυτό που ζητά κάνω, θα πρέπει η σειρά που να συγκλίνει

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει (από κριτ. δοκιμ. Leibnitz)

Από το κριτήριο Leibnitz εκτός απ' το ότι η σειρά συγκλίνει δίνει και επιπλέον $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k\right| \leq a_{n+1}$

~~...~~ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ και $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$

άρα $|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Θέλω $|R_n| < 0{,}1 = \frac{1}{10} \Rightarrow n+1 > 10$ άρα $n > 9$ δηλαδή $n = 10$

→ Συμπέρασμα: Η προσεγγιστική τιμή της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ με σφάλμα μικρότερο του 0,1 είναι $\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Παράδειγμα

→ Βρείτε μια προσεγγιστική τιμή της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ με σφάλμα μικρότερο του $0{,}01 = 10^{-2}$

Λύση

- Αρχικά πρέπει να αποδείξω ότι η σειρά μου συγκλίνει.

Η σειρά μου είναι εναλλάσσουσα με $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$

και $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

Η σειρά μου είναι φθίνουσα (κριτήριο Leibnitz)

και $a_n \to 0$

άρα Leibnitz → Η σειρά μου συγκλίνει.

- Από Leibnitz $|R_n| \leq a_{n+1}$ δηλαδή $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2+1}$.

$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$ θέλω $|R_n| < 10^{-2} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2+1} < 10^{-2}$

$\Rightarrow n^2 + 2n + 2 > 100$

με δοκιμές βρίσκω ότι $n \geq 9$

άρα $\sum_{n=1}^{9} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ είναι η προσεγγιστική τιμή

Μαθηματική Ανάλυση Ι

31 Oct c.

Απόλυτη σύγκλιση σειρών

Ορισμός: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ θα είναι απολύτως συγκλίνουσα ή θα λέμε ότι συγκλίνει

απολύτως όταν η $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Θεώρημα.

Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει και ισχύει

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$ (γενίκευση της τριγωνικής ανισότητας $|x+y| \le |x| + |y|$)

→ το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Αντιπαράδειγμα.

(κριτήριο Leibniz)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει, (εναλλάσσουσα)

άρα από Leibniz $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία είναι αρμονική με τάξη $p=1$

άρα αποκλίνει.

→ άρα το αντίστροφο ~~του~~ προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει.

Μαθηματική Ανάλυση Ι

1 Νοε 2.

→ Εκτιμήσεις Υπολοίπων.

$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$ συγκλίνουσα

• $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ • $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots$

• $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ → Συνήθως ζητάμε $R_n \le 10^{-x}$

αυτή η απαίτηση οδηγεί σε κατάλληλο υπολογισμό του πλήθους n των όρων που πρέπει να κρατήσουμε στον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής.

συνήθως ψάχνω αυτό → n

$$S = S_n + R_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$$

προσεγγιστική τιμή της σειράς

↳ σφάλμα/υπόλοιπο αυτό συνήθως θα μου το δίνει.

Παράδειγμα. (δεν αφορά εναλλάσσουσα σειρά)

Υπολογίστε μία προσεγγιστική τιμή της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n!} \quad \text{με σφάλμα μικρότερο του } 0.01$$

Λύση • Υπόδειξη: $n! \ge 2^{n-1}$

1ο βήμα σε ασκήσεις της κατηγορίας είναι πάντα το να βρω την σύγκλιση της σειράς.

$$\frac{1}{2n!} = \frac{1}{2(1\cdot 2\cdot 3 \cdots n)} \le \frac{1}{2(2^{n-1})} = \frac{1}{2^n}$$

$\alpha_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
αν συγκλίνει η b_n, συγκλίνει η α_n.
(παλιό θεώρημα)

Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει ως γεωμετρική με $\omega = \frac{1}{2}$

θα έχουμε ότι και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n!}$ συγκλίνει.

γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = \begin{cases} \frac{1}{1-\omega} & |\omega| < 1 \\ +\infty & \omega \ge 1 \\ \text{κυμαίνεται} & \omega \le -1 \end{cases}$$

$a_n \le b_n$

σύγκλιση $b_n \Rightarrow$ σύγκλιση a_n

και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Σφάλμα:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k!} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \quad (*)$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{γεωμετρική σειρά με } \omega = \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n+1}} 2 = \frac{1}{2^n}$$

αυτό θέλω η ακρίβεια

(*)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k!} \le \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \text{ άρα } n \ge 7$$

αυτό το βρίσκω με δοκιμές. θέλω να γράψω όρους του s_n οι οποίοι θα καλύπτουν το ζητούμενο σφάλμα. άρα

Η ζητούμενη προσεγγιστική τιμή είναι:

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{1}{2n!}$$

Μαθηματική Ανάλυση Ι

1 Νου 6.

Απόλυτη σύγκλιση σειρών.

Ορισμός $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, όταν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Θεώρημα

Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και απλά.

και ισχύει $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ (γενίκευση τριγωνικής ανισότητας όταν αθροίζω άπειρους αριθμούς)

→ Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

αντιπαράδειγμα: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει (εναλλάσσουσα, φθίνουσα & μηδενική άρα από Leibnitz → συγκλίνει)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ αποκλίνει.}$$

Υπό συνθήκη σύγκλιση σειράς.

μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, όταν $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

δηλαδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ αποκλίνει

• Χαρακτηριστικό παράδειγμα υπό συνθήκης σύγκλισης: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Πρώτη Πρόοδος
21/11 Δευτέρα
15 - 17
Στην ώρα του Μαθήματος
- στο εργαστήριο.

Παράδειγμα.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ συγκλίνει αυτή η σειρά; συγκλίνει απόλυτα;

Λύση $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ συγκλίνει

(φθίνουσα η μηδενική, Leibnitz → συγκλίνει)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$ συγκλίνει ~~[illegible]~~

(αρμονική τάξεως $p=2$;)

Παράδειγμα.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

Λύση. συγκλίνει (Leibnitz.)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$ αποκλίνει ~~[illegible]~~ αρμονική τάξεως $p = 1/2$.

άρα έχω υπό συνθήκη σύγκλιση.

* **Θεώρημα κριτήριο λόγου.**

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και το $q = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$

Τότε

1) Αν $q < 1$ τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

2) Αν $q > 1$ τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει.

3) Αν $q = 1$ τότε δεν υπάρχει συμπέρασμα, μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει. δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Μαθηματική Ανάλυση I
1 Νοε.

$$\boxed{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Παράδειγμα
Εξετάστε την σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$$

Λύση $a_n = \frac{n^2}{n!}$ ισχύει ότι $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$q = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2\, n!}{n^2 \underbrace{(n+1)!}_{n!(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

κριτήριο λόγου περίπτωση 1
για $q=0$, η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Λύση
$a_n = \frac{n!}{n^n}$ $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$q = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \lim \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \lim \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

άρα από κριτήριο λόγου περίπτωση 1
η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^4}$, Λύση $a_n = \frac{n!}{n^4}$, $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$q = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^4}}{\frac{n!}{n^4}} = \lim \frac{n^4 (n+1)!}{(n+1)^4 n!} = \lim \frac{n^4 (n+1)}{(n+1)^4} =$$

$$= \lim\left((n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\right) = \lim\left((n+1)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^4\right) =$$

$$= (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

άρα από κριτήριο λόγου περίπτωση 2

Η σειρά αποκλίνει.

Θεώρημα Κριτήριο Ρίζας.

Έστω μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και υπάρχει $q = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ (άρα και το $+\infty$)

1) Τότε αν $q < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως
2) αν $q > 1$ η σειρά αποκλίνει και
3) Αν $q = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ Λύση

από άλλη άσκηση το παίρνω χωρίς απόδειξη

$a_n = \frac{n}{2^n}$. $q = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$ άρα η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2}$ Λύση $a_n = \frac{3^n}{n^2}$, $q = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = \lim \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{3}{(1)^2} = 3$

$q > 1$ άρα η σειρά αποκλίνει

Για-το-σπίτι

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$;

$\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 =$
$= (\sqrt[n]{n})^2$

Μαθηματική Ανάλυση 1

7. Νοε. 2.

Δυναμοσειρές

$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ σειρά πραγματικών αριθμών

· Θα μελετήσουμε σειρές με μεταβλητούς όρους.

* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n + \dots$ Δυναμοσειρά με κέντρο το $x=0$

→ είναι μεταβλητοί όροι αφού το x ανήκει σε κάποιο διάστημα πραγμ. αριθμ.
Δυνάμεις του x → δυναμοσειρά.

→ Επομένως $\alpha_i \in \mathbb{R}$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, αφού δεν έχουν κάποια εξάρτηση.
$x \in \mathbb{R}$ μεταβλητός.

* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-x_0)^n = \alpha_0 + \alpha_1 (x-x_0)^1 + \alpha_2 (x-x_0)^2 + \dots + \alpha_n (x-x_0)^n + \dots$
αυτό είναι μια δυναμοσειρά, με κέντρο το x_0.

→ Αν θέσω $y = x - x_0 \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y^n = \alpha_0 + \alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_n y^n + \dots$

άρα έχω ανάγει το πρόβλημα σε μια σειρά με κέντρο το $y=0$.

→ Επομένως αρκεί να μελετήσουμε δυναμοσειρές με κέντρο το 0.

✓ Ορισμός, Σύγκλιση δυναμοσειράς.

Θέλω να μάθω ακριβώς τα x, για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει, και να απορρίψω ακριβώς για τα οποία δεν συγκλίνει.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x=\xi \iff \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \xi^n}$ συγκλίνει
αν και μόνο αν

↳ σειρά πραγματικών αριθμών.

→ Δεν απαιτείται η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ να συγκλίνει (γενικά) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

✓ Ορισμός, σύνολο σύγκλισης δυναμοσειράς.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ το υποσύνολο $\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \xi^n$ συγκλίνει$\}$ του $\mathbb{R}$, ονομάζεται σύνολο σύγκλισης δυναμοσειράς.

• Ερώτηση: Το Σ έχει πάντοτε στοιχεία;

$\Sigma = \emptyset$;

→ ΟΧΙ, διότι στο $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Big|_{x=0} = a_0 \in \mathbb{R}$, άρα οποιαδήποτε δυναμοσειρά θα συγκλίνει στο 0.

Επομένως $0 \in \Sigma$ (πάντα)

✓ Θεώρημα.

Για μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $R \in [0, +\infty]$ έτσι ώστε:

1) Αν $R=0$ τότε η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει μόνο για $x=0$. (ότι πιο ελαχιστοποιημένο να έχω) γιατί κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει στο 0.

2) Αν $R=+\infty$ τότε η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3) Αν $R \in (0, +\infty)$ τότε για την $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ισχύουν:

α) Απόλυτη σύγκλιση για $|x| < R$

β) Απόκλιση για $|x| > R$

γ) Δεν γνωρίζουμε για $|x| = R$, δηλαδή οι σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$ μπορεί να συγκλίνουν, ή να αποκλίνουν.

Μαθηματική Ανάλυση Ι

7 Νοε. 6.

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

Υπολογισμός R

1) Αν υπάρχει $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\in[0,+\infty]$ τότε $R=\dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

υπό τις συμβάσεις:

$$\begin{cases} \text{αν } \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0 \text{ τότε } R=+\infty \\ \text{και} \\ \text{αν } \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty \text{ τότε } R=0. \end{cases}$$

2) Αν δεν υπάρχει $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον συγκλίνουσες υπακολουθίες της $\sqrt[n]{|a_n|}$ που συγκλίνουν προς διαφορετικά όρια. $\beta\in[0,+\infty]$ το μεγαλύτερο από τα όρια των συγκλινουσών υπακολουθιών τότε $R=\dfrac{1}{\beta}$.

Παράδειγμα

· Βρείτε το σύνολο σύγκλισης Σ της $\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n}x^n$

Λύση

$a_n=\dfrac{1}{n!}$ $\quad\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}=\dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}}=0.$

↳ ακολουθία θετικών όρων

→ Άρα είμαστε στην περίπτωση 1) υπολογισμός του R.

άρα έχουμε ότι $R=+\infty$.

→ Άρα είμαστε στην περίπτωση 2) της σύγκλισης δυναμοσειράς.

επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall x\in\mathbb{R}$. ~~ακριβέστερα~~

ακριβέστερα. $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$

Παράδειγμα

Βρείτε το σύνολο σύγκλισης Σ για την $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n$

(α_n)

Λύση

$\alpha_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}} =$

$= \dfrac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \dfrac{1}{1^2} = 1.$

→ Έτσι λοιπόν $R = \frac{1}{1} = 1$

περίπτωση 3) για $R \in (0, +\infty)$

άρα α) $|x| < 1$
απόλυτη σύγκλιση.

β) $|x| > 1$
απόκλιση δυναμοσειράς

γ) $|x| = 1$ δηλαδή $x = 1$ ή $x = -1$.

- για $x = 1$, προκύπτει η δυναμοσειρά
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει ως αρμονική τάξης $p = 2$.

- για $x = -1$, προκύπτει η δυναμοσειρά
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ είναι εναλλάσσουσα, από Leibnitz συγκλίνει
(κανονικά θέλει περισσότερη ανάλυση το κρ. Leib.)

άρα $\Sigma = [-1, 1]$

Μαθηματική Ανάλυση Ι
7 Νου c.

$\sqrt[n]{a} \to 1$
$a>0$

Παράδειγμα.

$\Sigma = ;$ για την $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{3^n} x^n$

Λύση $a_n = \frac{1+(-1)^n}{3^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = ?$

Αυτό το όριο δεν υπάρχει, και το βρίσκω αφού πάρω τις υπακολουθίες των αρτίων και των περιττών. Οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

άρα, για $n = 2n$ (άρτιοι)

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{\frac{|1+(-1)^{2n}|}{3^{2n}}} = \sqrt[2n]{\frac{2}{3^{2n}}} = \frac{1}{3}\sqrt[2n]{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{3}\sqrt[2n]{2} \to \frac{1}{3}$$

• $n = 2n+1$ (περιττοί)

$$\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \sqrt[2n]{\frac{|1+(-1)^{2n+1}|\,(=0)}{3^{2n+1}}} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$\frac{1}{3} \neq 0$ άρα $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ δεν συγκλίνει. άρα είμαι στην περίπτωση 2) Υπολογισμός του R.

Αυτές οι δύο συγκλίνουσες υπακολουθίες, είναι αυτές που θα χρησιμοποιήσω στην περίπτωση 2) Υπολογισμός του R.

άρα το $b = 1/3$ και έτσι $R = \frac{1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow R = 3$.

- άρα είμαι στην περίπτωση 3) με $R = 3 \in (0, +\infty)$ άρα.

a) για $|x| < R$ έχω απόλυτη σύγκλιση για $|x| < 3$

b) για $|x| > 3$ απόκλιση

c) για $|x| = 3$ { $x = 3$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)$ αποκλίνει, λόγω $1+(-1)^n$ δεν τείνει στο 0.

$x = -3$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)(-1)^n = (1+(-1)^n)$ αποκλίνει -//- ...
(μετασχηματισμού)

→ άρα $\Sigma = (-3, 3)$

Τρίτη
4/11/2014

Παράδειγμα I

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n \qquad \Sigma = ?$$

Λύση

$a_n = \frac{1}{n^2}$

(1) Κάνω έλεγχο για το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \underset{\substack{\text{από όρια ακολουθιών ξέρω} \\ \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}}{=} \frac{1}{1^2} = 1.$$

Άρα $R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$

(2) Περιπτώσεις για το $R=1$.

Για $|x| < R = 1$ έχουμε απόλυτη σύγκλιση

Για $|x| > R = 1$ έχουμε απόκλιση

Για $|x| = R$: • $x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει ως αρμονική με $p=2$

• $x = -1$: $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει ως εναλλάσσουσα (Κριτήριο Leibniz)

Άρα $\boxed{\Sigma = [-1, 1]}$

Παράδειγμα ΙΙ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{3^n} x^n \qquad \Sigma = ?$$

Λύση

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{3^n} \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1+(-1)^n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{1+(-1)^n}}{3}$$

Για να βρω αν υπάρχει όριο εξετάζω δύο υπακολουθίες.

υπακολουθία αρτίων 1) $\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{\sqrt[2n]{1+(-1)^{2n}}}{3} = \frac{\sqrt[2n]{2}}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$

υπακολουθία περιττών 2) $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \frac{\sqrt[2n+1]{1+(-1)^{2n+1}}}{3} = \frac{0}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Αφού βρήκα δύο υπακολουθίες που έχουν διαφορετικά όρια τότε το $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ δεν υπάρχει.

(Βρισκόμαστε στην περίπτωση 2 του θεωρήματος)

Άρα $\beta = \frac{1}{3}$ και $R = \frac{1}{\beta} = 3$.

Βρισκόμαστε στην τελευταία περίπτωση για το R: $R \in (0, +\infty)$.

α) έχω απόλυτη σύγκλιση για $|x| < R = 3$

β) έχω απόκλιση για $|x| > R = 3$

γ) για $|x| = R = 3$ εξετάζω:

- $x = 3$: $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)$.

  $(1+(-1)^n)$ αποκλίνει άρα και η $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)$ αποκλίνει

- $x = -3$: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(1+(-1)^n)$ αποκλίνει

Άρα $\Sigma = (-3, 3)$

Τρίτη
4/11/2014

Παράδειγμα III

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad \Sigma = ?$$

Λύση

Θέτω $y = x-1$. άρα έχω $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y^n$.

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Άρα $R = 1$.

Έχω
$|y| < R$: έχω σύγκλιση
$|y| > R$: έχω απόκλιση
$|y| = R$: δεν γνωρίζω

$|x-1| < R$: έχω σύγκλιση : $-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$ σύγκλιση
$|x-1| > R$: έχω απόκλιση : $x<0$ και $x>2$ απόκλιση
$|x-1| = R$: δεν γνωρίζω : έλεγχος για $x=0$ και $x=2$.

→ $x=2$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει ως εναλλάσσουσα (Leibniz)

→ $x=0$: $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει ως αρμονική τάξεως $p=1$

Άρα $\Sigma = (0, 2]$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 3^n}(x-2)^n \quad \Sigma = ?$ (Λύση: $\Sigma = [-1, 5]$) Υπόδειξη: θέτω $x-2=y$

② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^{3n} \quad \Sigma = ?$ (Λύση: $\Sigma = (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$) Υπόδειξη: θέτω $x^3=y$

Πόρισμα

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ με $a_0 \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty]$

τότε ως R θα είναι το $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ή $R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ (υπό τις ειδικές προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος)

Παράδειγμα I

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \qquad \Sigma = ?$$

Λύση

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 1.$$

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

- $|x| < 1$: απόλυτη σύγκλιση
- $|x| > 1$: απόκλιση
- $|x| = 1$:
  - $x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει ως αρμονική τάξης $p=1$
  - $x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει ως εναλλάσσουσα (Leibniz)

Άρα $\Sigma = [-1, 1)$

ΑΣΚΗΣΗ

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ να βρεθεί το Σ (Λύση: $\Sigma = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$)

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+3)(x-2)^n$ να βρεθεί το Σ (Λύση: $\Sigma = (1, 3)$) Υπόδειξη: θέτω $x-2=y$

4/11/2014

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς:

① $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 3^n}(x-2)^n$ $\quad \Sigma = ?$

Θέτω $y = x-2$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 3^n} y^n$ $\quad a_n = \frac{1}{n^2 3^n}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 3^n}} = \frac{1}{3\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{3(\sqrt[n]{n})^2}$$

Είναι $\sqrt[n]{n} \to 1$ άρα $(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$ και $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{3}$.

Συνεπώς $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = 3$.

- $|y| < R \Rightarrow |x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5$

  Για $-1 < x < 5$ έχω απόλυτη σύγκλιση

- $|y| > R \Rightarrow |x-2| > 3 \Rightarrow x-2 < -3$ ή $x-2 > 3 \Rightarrow x < -1$ ή $x > 5$

  Για $x < -1$ και $x > 5$ έχω απόκλιση

- $|y| = R$ →

  $y = R \Rightarrow x-2 = 3 \Rightarrow x = 5$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \cdot 3^n = \sum_{n=1}^{} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει ως αρμονική με $p = 2 > 1$.

  $-y = R \Rightarrow -x+2 = 3 \Rightarrow x = -1$: $\sum_{n=1}^{} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}$ συγκλίνει ως εναλλάσσουσα, σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz

Άρα $\boxed{\Sigma = [-1, 5]}$

② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x^{3n}$ $\Sigma = ?$

Θέτω $x^3 = y$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} y^n$: $a_n = \frac{1}{2^n}$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Άρα $R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 2$

- $|y| < R \Rightarrow |x^3| < 2 \Rightarrow \cancel{-2 < x^3 < 2}$ $\sqrt[3]{|x|^3} < \sqrt[3]{2} \Rightarrow$
  $|x| < \sqrt[3]{2} \Rightarrow -\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}$. για $x \in (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ έχω απόλυτη σύγκλιση.
- $|y| > R \Rightarrow |x|^3 > 2 \Rightarrow x < -\sqrt[3]{2}$ ή $x > \sqrt[3]{2}$. για $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$ αποκλίνει
- $|y| = R$ $\longrightarrow$ $x^3 = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n} = 1 \xrightarrow{?} 1$ (?)

  $\longrightarrow$ $x^3 = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ αποκλίνει

Άρα $\Sigma = (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$

③ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ $\Sigma = ?$ $a_n = \frac{2^n}{n^2}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow 2 \text{ (γιατί } \sqrt[n]{n} \to 1)$$

Άρα $R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{2}$.

- Για $|x| < \frac{1}{2}$ έχω απόλυτη σύγκλιση
- Για $|x| > \frac{1}{2}$ έχω απόκλιση
- Για $|x| = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει ως αρμονική τάξης 2

  $\longrightarrow$ $x = -\frac{1}{2}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει ως εναλλάσσουσα (κριτήριο Leibniz)

4/11/2014

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+3)(x-2)^n$ $\quad \Sigma = ?$

Θέτω $y=x-2$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+3)y^n$ $\quad a_n = n+3$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+4}{n+3} = 1$. άρα $R = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$

- $|y|<R \Rightarrow |x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3$ έχω απόλυτη σύγκλιση
- $|y|>R \Rightarrow |x-2|>1 \Rightarrow x<1$ και $x>3$ έχω απόκλιση.
- $|y|=R$
  - $\to$ $x-2=1 \Rightarrow x=3$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+3)(3-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+3) \to +\infty$ αποκλίνει
  - $\to$ $x-2=-1 \Rightarrow x=1$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+3)(1-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+3)(-1)^n$ κυμαίνεται

άρα $\Sigma = (1,3)$