Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

10 - 10 - 17 α.

Βιβλίο - E-book

→ e-learning.

1. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

2. Μιγαδικές συναρτήσεις

3. Μετασχηματισμός Fourier

Τρόπος εξέτασης.

Δύο ~~...~~ Απαλλακτικές πρόοδοι.

Ελάχιστος βαθμός 5 από τις δύο προόδους.

① Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της μέχρι μια ορισμένη τάξη, ονομάζεται διαφορική εξίσωση.

διαφορική εξίσωση

(συνάρτηση μιας μεταβλητής)
Συνήθης διαφορική εξίσωση
ΣΔΕ

(συνάρτηση πολλών μεταβλητών)
Μερική διαφορική εξίσωση.
ΜΔΕ.

Η τάξη μιας ΣΔΕ είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση.

- άγνωστη συνάρτηση $y(x)$

$$y''(x) + 5y'(x) + 2y(x) = 0$$

→ ΣΔΕ τάξης 2.

• $y(x)\, y^{(3)}(x) + y''(x) + 3y(x) = -x.$

ΣΔΕ τάξης : 3.

⊙ Γενική Μορφή : ΣΔΕ τάξης : n

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Αν μπορούμε να λύσουμε ως προς $y^{(n)}(x)$

$$y^{(n)}(x) = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}(x))$$: κανονική μορφή ΣΔΕ

⊙ ΣΔΕ γραμμική :

Γενική μορφή ΣΔΕ γραμμικής με τάξης n

$$\boxed{a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = f(x)}$$

- Αν $f = 0$ τότε ομογενής.
- Αν $f \neq 0$ τότε μη-ομογενής.
- Αν $a_i(x) \equiv a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$

τότε ΣΔΕ τάξης n, γραμμική με σταθερούς συντελεστές.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

10-10-17 6.

Παραδείγματα

* $y'(x) = x$: τάξης 1

· γραμμική

· σταθερών συντελεστών.

· μη-ομογενής.

* $(y''(x))^4 + 3y(x)\cdot(y'(x))^5 + y^3(x)\,y'(x) = 3x.$

· τάξης 2

· μη γραμμική

* $y''(x) + 5y'(x) + y^2(x) = 0$

· τάξης 2

· μη-γραμμική

Θ Η οικογένεια των συναρτήσεων $y(x) = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, ~~~~ και κάθε συνάρτηση της οικογένειας αυτής ικανοποιεί την ΕΔΕ, ονομάζεται γενική λύση της ΕΔΕ.

Παράδειγμα

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$$

2 σταθερές επειδή είναι τάξης 2

Η συνάρτηση $\boxed{y(x) = \phi(x, c_1, c_2) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}}$ ικανοποιεί την ΕΔΕ για κάθε τιμή των c_1 και c_2.

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{-2x}$$

$$y''(x) = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{-2x}.$$

Έτσι, έχουμε
$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = c_1e^{-x} + 4c_2e^{-2x} - (-c_1e^{-x} + 2c_2e^{-x}) - 2(c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}) = 0 \quad \forall c_1, c_2.$$

→ Κάθε συνάρτηση της οικογένειας της γενικής λύσης, όπου έχουμε επιλέξει συγκεκριμένες τιμές των $c_1, c_2, \dots, c_n$, ονομάζεται <u>μερική λύση</u> της ΕΔΕ.

● Μία παράσταση της μορφής $G(x, y(x), c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ η οποία περιέχει την λύση $y(x)$ της ΕΔΕ και $c_1, c_2, \dots, c_n$ αυθαίρετες πραγματικές σταθερές ονομάζεται <u>γενικό ολοκλήρωμα</u> της ΕΔΕ.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

10-10-11 ε.

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$$

Παράδειγμα

$$(1+xe^{xy})y'(x) + 1 + y(x)e^{xy(x)} = 0$$

Επαληθεύσατε ότι

$$G(x, y(x), c_1) = x + y(x) + e^{xy(x)} + c_1 = 0.$$

είναι γενικό ολοκλήρωμα της ΣΔΕ.

Λύση

αρκ αν το παραγωγίσω θα πρέπει να μου δώσει την ΣΔΕ.

παραγωγίζω ως προς x

$$1 + y'(x) + e^{xy(x)} \cdot (xy(x))' = 0$$

$$\Rightarrow 1 + y'(x) + e^{xy(x)}(y(x) + xy'(x)) = 0.$$

$$\Rightarrow (xe^{xy(x)} + 1)y'(x) + e^{xy(x)}y(x) + 1 = 0.$$

② Συνδυάζουμε την ΣΔΕ n τάξης, με n αρχικές συνθήκες.

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(n) = y_{n-1} \end{array}}$$

όπου $x_0 \in I$ (πεδίο ορισμού της ΣΔΕ) και $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί.

πλήθος n.

και έτσι προκύπτει ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)

το οποίο θα έχει μοναδική λύση αφού θα προσδιοριστούν

$\boxed{\text{κατάλληλα οι τιμές των } c_1, c_2, \ldots, c_n.}$

\#

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{aligned} & y'(x) - 2y(x) = -4x \\ & \boxed{y(0) = 2} \end{aligned}\right\}$$

Λύση

Η λύση της ΣΔΕ είναι.

$$y(x) = 1 + 2x + c_1 e^{2x}$$

Εφαρμόζουμε την συνθήκη $y(0) = 2$.

άρα $1 + 0 + c_1 e^0 = 2$.

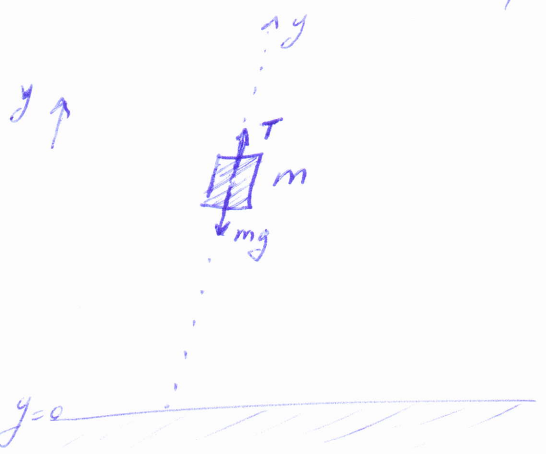
άρα $c_1 = 1$

άρα η λύση του ΠΑΤ είναι $y(x) = 1 + 2x + e^{2x}$.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

10 - 10 - 17 d.

① Μοντελοποίηση προβλημάτων με ΣΔΕ. #1



Νόμος Νεύτωνα

$$\Sigma F = m\gamma$$

$$-mg + T = m \cdot y''(t) \quad (1)$$

$$T = -\rho v(t) \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow my''(t) + \rho v(t) + mg = 0 \quad (3)$$

Όμως $v(t) = y'(t)$ (4)

$$(3),(4) \Rightarrow my''(t) + \rho y'(t) = -mg.$$

$$\Rightarrow \boxed{y''(t) + \frac{\rho}{m} y'(t) = -g}$$

τάξης 2, γραμμική διαφορική μη-ομογενής

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = L$$

πρόβλημα αρχικών τιμών.

(δύο συνθήκες αφού είναι τάξης 2).

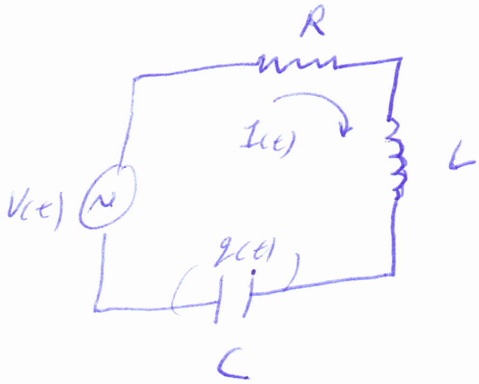
Από την (4): $v'(t) = y''(t)$ (5)

Από (3) και (5): $\boxed{mv'(t) + \rho v(t) = -mg.}$

$$v(t_0) = v_0$$

ΠΑΤ.

Μοντελοποίηση προβλημάτων με ΣΔΕ #2



Νόμος Kirchhoff

(άθροισμα στο κύκλωμα = 0)

$$R I(t) + L I'(t) + \frac{1}{C} q(t) = V(t) \quad (1)$$

$$I(t) = q'(t) \quad (2)$$

Από (1) και (2): $R q'(t) + L q''(t) + \frac{1}{C} q(t) = V(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{L q''(t) + R q'(t) + \frac{1}{C} q(t) = V(t).}$$

τάξης 2 → θέλω δηλαδή 2 συνθήκες:

γραμμική $\qquad q(t_0) = q_0$

μη-ομογενής

σταθερών συντελεστών. $\qquad q'(t_0) = q_1$

ΠΑΤ.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

10-10-17 ε.

$\frac{d}{dt}$ της (3) (αν $V(t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση).

$$Lq^{(3)}(t) + Rq''(t) + \frac{1}{C} q'(t) = V'(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = V'(t)}$$ ΕΔΕ για το ρεύμα.

$$I(t_0) = I_0$$

$$I'(t_0) = I_1$$

Π.Α.Τ. με την προϋπόθεση ότι $V(t)$ παραγωγίσιμο.

(Β) Μοντελοποίηση προβλημάτων με ΕΔΕ #3.

Διάδοση (Διάχυση) πληροφορίας σε κοινωνικά δίκτυα.

$$\left.\begin{aligned} I'(t) &= r\left(1 - \frac{I(t)}{c}\right) I(t) \\ I(0) &= I_0 \end{aligned}\right\}$$

$I(t)$: χρονική διάδοση της πληροφορίας

r: εσωτερικός ρυθμός ανάπτυξης δικτύου

c: χωρητικότητα του δικτύου.

1ης τάξης, μη-γραμμική

$$I'(t) = r\, I(t) - \frac{r}{c} \boxed{I^2(t)}.$$

Αν $1 - \frac{I(t)}{c} > 0$ άρα έχω ένα θετικό ρυθμό μεταβολής της $I(t)$.

$r\left(1 - \frac{I(t)}{c}\right) I(t)$ ισοδύναμα $\boxed{I(t) < c}$

$\Downarrow$

και θετικό

Αν $1 - \frac{I(t)}{c} < 0$: αρνητικός ρυθμός μεταβολής της $I(t)$

άρα $\boxed{I(t) > c.}$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11 - 10 - 17α

Διαφορικές Συνήθεις Εξισώσεις Πρώτης Τάξης.

• $$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}} \quad (1)$$

(Κανονική μορφή: η μέγιστη τάξη παραγώγου είναι ίση με μια συνάρτηση $f(\ldots)$)

1. Διαφορικές Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.

$$\boxed{f(x, y(x)) = g(x) \cdot h(y).}$$

άρα από (1): $$\boxed{y'(x) = g(x) \cdot h(y)} \quad (2).$$

(στόχος είναι ότι έχει y απ' το ένα μέλος, και ότι έχει x απ' το άλλο.) (Μεθοδολογία)

(2): $y' = g(x) \cdot h(y)$

α) Λύνουμε την εξίσωση $h(y) = 0$

αν ρ μια ρίζα της $h(y) = 0$,

τότε η συνάρτηση $y(x) = \rho$, ικανοποιεί την (2)

(όταν έχω κάτι σταθερό η παράγωγος είναι μηδέν)

→ Οι σταθερές λύσεις της (2) που ικανοποιούν την

$$h(y) = 0,$$

ονομάζονται ιδιάζουσες λύσεις της Δ.Ε.

Βήμα β). $h(y) \neq 0$.

• Διαιρώ και τα δύο μέλη της (2) με $h(y)$.

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x), \quad h(y) \neq 0.$$

• Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη ως προς x.

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,dx = \int g(x)\,dx.$$

$$\boxed{y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{άρα} \quad y'(x)\,dx = dy}$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx. \quad (3)$$

δεν εμφανίζεται η x εξάρτηση αφού θα ολοκληρώνω ως προς y!

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11-10-17 b.

Όμως αν $H(y) = \int \frac{dy}{h(y)}$

$G(x) = \int g(x)\, dx.$

από (3) $\Rightarrow$ $\boxed{H(y) = G(x) + c.}$ (4)

* αν μας δίνεται αρχική συνθήκη προσδιορίζω και συγκεκριμένο c.

αυτή είναι λύση της εξίσωσης (2).

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= e^{x-y(x)} \\ * \; y(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Λύση

$$y'(x) = \underbrace{e^{x}}_{g(x)}\,\underbrace{e^{-y(x)}}_{h(y)}.$$ (πολλαπλασιάζω με $e^{+y(x)}$)

(δηλ.δ διαιρώ με $e^{-y(x)}$).

$\Rightarrow e^{y(x)} \cdot y'(x) = e^{x}.$

(δεν έχει ιδιάζουσες λύσεις, δεν υπάρχουν ρ που μηδενίζουν την h(y)).

άρα πάμε στο 2ο βήμα:

$$\int e^{y(x)} \underbrace{y'(x)\,dx}_{dy} = \int e^{x}\, dx$$

$$\Rightarrow \int e^{y}\,dy = \int e^{x}\,dx.$$ (αυτή είναι η (3)).

$$e^{y} = e^{x} + C$$

(αυτή είναι η (4)).

Και αφού υπάρχει αρχική συνθήκη, γίνεται να προσδιορίσω και το C.

Ικανοποιούμε την $y(0) = 1$.

Άρα $e^{y(0)} = e^{0} + C$

$\Rightarrow e = 1 + C \Rightarrow C = e - 1.$

Άρα η λύση του Π.Α.Τ είναι

$$e^{y} = e^{x} + e - 1$$

Παίρνοντας λογαρίθμους, $\boxed{y(x) = \ln(e^{x} + e - 1)}$

Θέλω αυτό που είναι στην παρένθεση $(e^{x} + e - 1)$ να είναι θετικό ✓.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11-10-17.

Παράδειγμα.

Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\left.\begin{aligned} e^{x}e^{y(x)}\cdot y'(x)-e^{-y(x)}&=0\\ y(0)&=0\end{aligned}\right\}.$$

Λύση

$$\cancel{y'(x)\ldots e^{y(x)}}$$

$$e^{x}e^{y(x)}\cdot y'(x)=e^{-y(x)}\Rightarrow$$

$$y'(x)=\underbrace{e^{-x}}_{g(x)}\,\underbrace{e^{-2y(x)}}_{h(y)}.$$

Βήμα α) Λύνω $h(y)=0$, δεν έχει ρίζες.

άρα → βήμα β).

$$e^{2y(x)}\cdot y'(x)=e^{-x}$$

$$\int e^{2y(x)}\cdot y'(x)\,dx=\int e^{-x}\,dx.$$

$(y'(x)dx = dy)$.

$$\Rightarrow \int e^{2y}\,dy = \int e^{-x}\,dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{2y} = -e^{-x} + c. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{2y} = -2e^{-x} + c_1} \quad \text{όπου } c_1 = 2c.$$

↳ αυτή είναι η μορφή (4).

Όμως πρέπει να ικανοποιήσουμε την αρχική συνθήκη $y(0)=0$.

άρα

$$e^{2(\overset{=0}{y(0)})} = -2e^{0} + c_1$$

$$\Rightarrow 1 = -2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 3.$$

Άρα έτσι η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$(4) \Rightarrow e^{2y(x)} = -2e^{-x} + 3.$$

Ερώτηση: μπορώ να το γράψω στη μορφή $y(x) = $ κάτι;
ΝΑΙ με προϋποθέσεις.

→ Περιορισμός $3 - 2e^{-x} > 0$.

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow x > \ln(2/3)$$

άρα σε ένα πεδίο ορισμού που το $x > \ln(2/3)$ μπορώ να λύσω ως προς $y(x)$.

$$2y(x) = \ln(3 - 2e^{-x}).$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\ln(3 - 2e^{-x}), \quad x > \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11 - 10 - 17 d.

2η κατηγορία

2. Ομογενής Διαφορικές Εξισώσεις. (δεν είναι το ίδιο με το ομογενής που αναφέραμε στο προηγ. μάθημα).

Γενική μορφή: $\boxed{y'(x) = F\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)}$, $x \neq 0$ (1)

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής.

$\boxed{\dfrac{y(x)}{x} = u(x)}$ (2) θέλω να αντικαταστήσω αυτή στην (1).

άρα $\Rightarrow y(x) = x \cdot u(x)$.

άρα παραγωγίζω την (2)

οπότε $y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$ (3) $\quad \underset{(2)}{y'(x)} = F\left(\underset{(1)}{\dfrac{y(x)}{x}}\right)$

→ Αντικατάσταση των (2) και (3) στην (1).

άρα $u + x \cdot u' = F(u) \Rightarrow$ → αυτή είναι μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

$\Rightarrow u' = \dfrac{F(u) - u}{x}$. (~~[illegible]~~) άρα πρέπει να κοιτάξω ιδιάζουσες λύσεις (έλεγχος).

βλέπε βήματα α) και β) της προηγ. ώρας.

άρα $u' = \dfrac{F(u) - u}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{F(u) - u} = \int \frac{1}{x}\, dx$

$u + xu' = F(u)$ (4).

$$\frac{u'}{F(u) - u} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{u'\,dx}{F(u) - u(x)} = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$\rightarrow du$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{F(u) - u} = \int \frac{1}{x}\, dx.$$

άρα η λύση της (4)

$$\boxed{G(u) = \ln|x| + c.} \quad (5) \rightarrow \text{λύση της (4)}$$

όπου $\displaystyle G(u) = \int \frac{du}{F(u) - u}.$

!!! στη (2) έκανα αλλαγή μεταβλητής. Εδώ βρήκα την λύση ως προς u, $\xrightarrow{\text{άρα}}$ γυρνάω σε y.

Επιστρέφουμε στην $y(x)$.

Από τις (2) και (5)

$$\boxed{G\left(\frac{y(x)}{x}\right) = \ln|x| + c.} \quad (6)$$

που είναι λύση της (1)

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11-10-11 e.

Παράδειγμα.

$$y'(x) = \underbrace{e^{2\frac{y(x)}{x}} + \frac{y(x)}{x}}, \quad x \neq 0.$$

Είναι της μορφής

$$F\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

Λύση. $F\left(\frac{y}{x}\right) = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ → Μετασχηματισμός, αλλαγή μεταβλητής.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = x \cdot u$$

άρα $y' = u + x \cdot u'$.

→ Με αντικατάσταση στην διαφορική που θέλουμε να λύσουμε

$$u + x \cdot u' = e^{2u} + u \quad \left(\begin{array}{c}\text{μορφή}\\ (4)\end{array}\right).$$

$$\Rightarrow x \cdot u' = e^{2u}$$

(αυτή είναι πλέον χωριζόμενων μεταβλητών).

άρα $u' = \overset{g(x)}{\frac{1}{x}} \, \overset{h(u)}{e^{2u}}$

λύνω ως προς

χρειάζεται να βρω ιδιάζουσες λύσεις → δεν ∃ άρα διαιρώ με $h(u)$.

άρα $e^{-2u} \cdot u' = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \int e^{-2u} \underbrace{u' dx}_{du} = \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow \int e^{-2u}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} e^{-2u} = \ln|x| + c.$$ (που είναι η μορφή (5)).

Άρα όπου u βάζω $\frac{y}{x}$, οπότε $\boxed{-\frac{1}{2} e^{-2\frac{y}{x}} = \ln|x| + c}$

(που είναι η μορφή (6))

που είναι λύση της διαφ. Εξίσωσης.

* Ερώτηση: Μπορώ να απομονώσω το y;

→ Θέτουμε $c = \ln c_1$ και έτσι (τις σταθερές έχω την ευχέρεια να τις μετατρέπω όπως με βολεύει!)

$$-\frac{1}{2} e^{-2\frac{y}{x}} = \ln(c_1 x) \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \ln(-2 \cdot \ln|c_1 \cdot x|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{x}{2} \ln(-2 \ln|c_1 \cdot x|).$$

Προσοχή! Αν θέλω να επαληθεύσω

παραγωγίζω την $-\frac{1}{2} e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + c.$

και θα πρέπει να καταλήξω στην

$$y'(x) = e^{2\frac{y(x)}{x}} + \frac{y(x)}{x}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11-10-17 β.

3η κατηγορία.

3. Γραμμική Διαφορική Εξίσωση πρώτης τάξης.

Γενική μορφή: $$\boxed{y'(x) = -p(x)\cdot y(x) + q(x).} \quad (1)$$

πρώτης τάξης.
γραμμική
γενικά: οι συντελεστές συναρτήσεις
μη σταθερές

→ Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με μια αρχικά άγνωστη συνάρτηση $\mu(x) \neq 0$

(δεν είναι κάποια συνάρτηση που ξέρω, θα ορίσουμε αργότερα κάποια συνθήκη για αυτή) → συνθήκη (3).

↳ ολοκληρωτικός παράγοντας.

$$\mu(x)\cdot y' + \underbrace{\mu(x)\, p(x)\cdot y}_{=\ \mu'(x)} = \mu(x)\, q(x) \quad (2)$$

→ Αναζητούμε συνάρτηση $\mu(x)$ ώστε $\boxed{\mu(x)\cdot p(x) = \mu'(x)}$ (3)

αυτό θα είναι χρήσιμο για να μπορούμε να βρούμε το $\mu(x)$.

$$\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x)$$ (αυτή είναι μια Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών)

$$\Rightarrow \int \frac{\mu'(x)\,dx}{\mu(x)} = \int p(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int p(x)\,dx \Rightarrow \boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}} \quad (4)$$

→ Από (2) και (3)

$$\mu(x)\cdot y' + \mu'(x)\cdot y = \mu(x)\cdot q(x).$$

(όπου στο αριστερό μέλος έχω παραγωγογινόμενο).

Οπότε $[\mu(x)\cdot y]' = \mu(x)\cdot q(x)$.

άρα $\int [\mu(x)\cdot y]'\,dx = \int \mu(x)\cdot q(x)\,dx + c \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(x)\cdot y(x) = \int \mu(x)\cdot q(x) + c$ (5). (το $\mu(x)$ το έχω βρει από την (4)).

→ Από (4) και (5).

$$e^{\int p(x)\,dx}\, y(x) = \int e^{\int p(x)\,dx}\, q(x)\,dx + c.$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\cdot\left[c + \int e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx\right]$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11-10-17 g.

Παράδειγμα

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x^{a}, \quad x>0, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$ (που είναι στη μορφή (1))

με $q(x) = x^{\alpha}$.

άρα $p = -\frac{1}{x}$

Λύση (βάζουμε πολλαπλασιαστή).

$$\mu(x) \cdot y'(x) \boxed{-\mu(x)\frac{1}{x}} y(x) = \mu(x) \cdot x^{\alpha}$$

(Μπορώ να λάβω τον αρνητικό είτε και να κάνω αντικατάσταση).

→ Στη συνέχεια θέλουμε να προσδιορίσουμε το $\mu(x)$, έτσι ώστε $\mu'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \mu(x)$ (που είναι στη μορφή (3)).

→ Χωριζομένων μεταβλητών. $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{1}{x}$.

$$\int \frac{\mu'(x)\, dx}{\mu(x)} = \int -\frac{1}{x}\, dx \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = -\int \frac{1}{x}\, dx. \Rightarrow$$

$$\ln|\mu| = -\ln|x| \Rightarrow \mu(x) = e^{-\ln|x|} \Rightarrow \mu(x) = e^{-\ln x}$$

(το $x>0$ από την εκφώνηση)

$$\Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x}.$$

Έτσι έχουμε

$$\boxed{\frac{1}{x}\cdot y'(x) - \frac{1}{x^2}\cdot y(x)} = x^{\alpha-1}$$

Είναι παράγωγος γινομένου.

$$\left(\frac{1}{x}\cdot y(x)\right)' = x^{\alpha-1} \Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{x}\cdot y(x)\right)'dx = \int x^{\alpha-1}\,dx + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\cdot y(x) = \int x^{\alpha-1}\,dx + c \quad (*)$$

τελικά λοιπόν, έχουμε $y(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} + cx, & \alpha \neq 0 \\ x\cdot \ln x + cx, & \alpha = 0 \end{cases}$

(*) → χρειάζεται να κάνω διερεύνηση του ολοκληρώματος επειδή έχω το α.

$$\int x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}\cdot x^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0.$$

Για $\alpha = 0$ $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| = \ln x$

άρα $\int x^{\alpha-1}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\cdot x^{\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ \ln x, & \alpha = 0. \end{cases}$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11-10-17 h.

Παράδειγμα.

$$y' + \frac{y}{x} = e^{3x}, \quad x > 0.$$

Λύση

$$\mu(x) \cdot y' + \mu(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \mu(x) \cdot e^{3x}, \quad \mu(x) \neq 0.$$

Θέλω

$$\mu(x) \cdot \frac{1}{x} = \mu'(x) \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|\mu| = \ln|x| = \ln x. \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln x} \Rightarrow \mu(x) = x.$$

~~Άρα~~ Έτσι έχουμε.

$$x \cdot y' + y = x e^{3x} \Rightarrow (xy)' = x e^{3x}.$$

$$\int (x \cdot y)' dx = \int x e^{3x} dx + c \Rightarrow x \cdot y = \int x e^{3x} dx + C$$

(δουλεύω κατά παράγοντες).

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

άρα τελικά έχουμε

$$xy(x) = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}\frac{e^{3x}}{x} + \frac{c}{x}, \quad x > 0.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

$$\int xe^{3x} = \frac{1}{3}\int x(e^{3x})'dx$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$$

Σημείωση, το μ, δεν είναι μοναδικό.
Θα μπορούσε να ήταν $\mu(x) = x$, $\mu(x) = 2x$, κ.ο.κ.

Ευφροσύνη
Μαθηματικά
17-10-17α.

Ακριβείς Διαφορικές Εξισώσεις

$$\boxed{P(x,y) + Q(x,y)y' = 0}$$

$y = y(x)$.

$y'(x) = \frac{dy}{dx}$

Παράδειγμα.

$$\underbrace{(4x^3y + 3x^2y^2)}_{\substack{P(x,y)\\ \frac{d}{dy}}} + \underbrace{(x^4 + 2x^3y)}_{\substack{Q(x,y)\\ \frac{d}{dx}}}y' = 0$$

$P(x,y)$: $4x^3y + 3x^2y^2 = \frac{d}{dx}\boxed{(x^4y + x^3y^2)}$ το y είναι σαν και σταθερό.

$\shortparallel$

$Q(x,y)$: $x^4 + 2x^3y = \frac{d}{dy}\boxed{(x^4y + x^3y^2)}$

$$\boxed{\Phi(x,y) = x^4y + x^3y^2}$$

τότε η διαφορική εξίσωση γράφεται ως:

$$\boxed{\Phi_x(x,y) + \Phi_y(x,y)\cdot y' = 0.}$$

Δ.Ε.

$$\boxed{\Phi_x(x,y) + \Phi_y(x,y)y' = 0}$$

αυτό είναι η παράγωγος ως προς x χωρίς της συνάρτησης

$$\frac{d}{dx}\left(\Phi(x, y(x))\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi_x(x,y) + \Phi_y(x,y)\cdot y'(x) = 0 \text{ (επαληθεύσαμε)}$$

άρα η Δ.Ε. είναι

$$\frac{d}{dx}\left(\Phi(x, y(x))\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi(x,y) = c}$$

(έχω μόνο x εξάρτηση)

αυτή είναι η λύση της διαφορικής.

Επομένως $\boxed{x^4 y + x^3 y^2 = c.}$ γενικό ολοκλήρωμα

(πεπλεγμένη λύση)

Πρόταση:

Αν υπάρχει μια C^1 συνάρτηση $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

παίρνει δύο εισόδους και έχει $\mathbb{R}$ αποτέλεσμα

για την οποία ισχύουν $\Phi_x = P$

και $\Phi_y = Q$ στο D

Τότε η $\Phi(x,y) = c$ αποτελεί τη γενική λύση (το γενικό ολοκλήρωμα)

της $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$.

Εφαρμοσμένα

Μαθηματικά

17-10-17 Δ.

<u>Ακριβείς</u> Δ.Ε

Τι σημαίνει;.

Ορισμός:

Η Δ.Ε. $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$, ονομάζεται ακριβής (exact).

Όταν υπάρχει C^1 συνάρτηση Φ : για την οποία ισχύουν

$$\Phi_x = P \quad \text{και} \quad \Phi_y = Q.$$

<u>Παράδειγμα.</u>

$$\underbrace{(2x+y^2)}_{P(x,y)}^{(1)} + \underbrace{(2xy)}_{Q(x,y)}^{(2)}y' = 0.$$

<u>Λύση.</u> Αναζητούμε συνάρτηση $\Phi(x,y)$ τέτοια ώστε $\Phi_x = P$ και $\Phi_y = Q$.

~~Δηλαδή~~ $\cancel{\frac{d}{dx}(x^2+xy^2) = (2x+y^2) = P}$

$\cancel{\frac{d}{dy}(xy^2) = 2xy = Q}$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x(x,y) &= 2x+y^2 \quad (1) \\ \Phi_y(x,y) &= 2xy \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

(1) ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Phi(x,y) = \int (2x+y^2)\,dx = \int 2x\,dx + \int y^2\,dx + g(y)$$

όπου $g(y)$: συνάρτηση της άλλης μεταβλητής ως προς την
όποια δεν ολοκληρώσαμε,
για αυτό δεν βάλαμε απλά ένα c.

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = x^2 + y^2 x + g(y) \quad (3).$$ πρέπει να προσδιορίσω το g

παίρνω $(2) = (3)$

άρα από (2) και (3) θα έχουμε

$$2xy + g'(y) = 2xy \Rightarrow g'(y) = 0$$

άρα $g(y) = c$

άρα από (3) $\Rightarrow \boxed{\Phi(x,y) = x^2 + y^2 x + c}$

η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $\boxed{\Phi(x,y) = \tilde{c}}$

(το $\tilde{c}$ δεν έχει καμιά σχέση με το άλλο c.

έχω $x^2 + y^2 x + c = \tilde{c}$

(βλέπε θεωρ. πρόταση).

Εφαρμοσμένα

Μαθηματικά

17-10-17c.

Παράδειγμα.

$$(x^2+y) + xy\,y' = 0.$$

Λύση

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x(x,y) &= x^2+y \quad (1) \\ \Phi_y(x,y) &= xy \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

Ζητάμε να βρούμε αν $\exists$ συνάρτηση $\Phi(x,y)$ που να πληροί τα (1) και (2).

(1) ολοκλήρωση ως προς x

$$\Phi(x,y) = \int x^2+y\,dx \Rightarrow \Phi(x,y) = \frac{x^3}{3} + yx + g(y) \quad (3).$$

Από (2) και (3):

y παραγώγιση στην (3) $\quad x + g'(y) = xy \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(y) = xy - x$ έχει x εξάρτηση! ΑΤΟΠΟ.

ενώ περιμέναμε να έχει μόνο y εξάρτηση.

Άρα δεν υπάρχει $\Phi(x,y)$ που να πληροί τις (1) και (2).

Λύνουμε τα Π1, Π2.

Π1

$$(2x+y^2) + 2xyy' = 0$$

Παράδειγμα 1 (ακριβής)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x} \checkmark$$

Π2.

$$(x^2+y) + xyy' = 0.$$

Παράδειγμα 2

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= y \end{aligned}\right\} \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Θεώρημα.

$P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 συναρτήσεις στο D.

Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1) Η $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ είναι ακριβής

2) Ισχύει $\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$ στο D.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

17-10-17 d.

Θεώρημα

$P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 συναρτήσεις

και ισχύει $P_y = Q_x$

Τότε η $P + Qy' = 0$ είναι ακριβής Δ.Ε. και η λύση του

συστήματος $\left.\begin{aligned} \Phi_x &= P \\ \Phi_y &= Q \end{aligned}\right\}$ δίνεται από: $\boxed{\Phi(x,y) = \int_{\alpha}^{x} P(t,b)\,dt + \int_{b}^{y} Q(x,t)\,dt}$

όπου $(\alpha, b) \in D$

(συνήθως θα παίρνω το $(0,0)$ αν ανήκει στο D)

→ Η λύση της Δ.Ε. είναι $\Phi = c$.

Παράδειγμα.

Εξετάστε αν η Δ.Ε. $e^y + y\cos x + (xe^y + \sin x)y' = 0$.

είναι ακριβής, και αν είναι, βρείτε τη λύση της.

1ο βήμα: γράφω τις P και Q

$P(x,y) = e^y + y \cdot \cos x$.

$Q(xe^y + \sin x)$

$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= e^y + \cos x \\ \frac{dQ}{dx} &= e^y + \cos x \end{aligned}\right\}$ $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ άρα από το θεώρημα η Δ.Ε. είναι ακριβής.

επιλέγω $(\alpha, b) = (0,0)$ αφού ανήκει στο D των P και Q (εδώ $D = \mathbb{R}^2$)

$$\varphi(x,y) = \int_0^x P(t,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t)\,dt.$$

$$= \int_0^x 1\,dt + \int_0^y (xe^t + \sin x)\,dt = [t]_{t=0}^{t=x} + x\int_0^y e^t\,dt$$

$$+ \sin x \int_0^y dt = x + [xe^t]_{t=0}^{t=y} + \sin x\,[t]_{t=0}^{t=y} =$$

$$[y-0]$$

$$= x + (e^y - 1) + y \cdot \sin x$$

$$\varphi(x,y) = xe^y + y\sin x$$

→ Η λύση της Δ.Ε. είναι $\boxed{\varphi(x,y) = c \Rightarrow xe^y + y\sin x = c}$

το αποτέλεσμα είναι ίδιο για όλα τα ζεύγη $(\alpha, b) \in D$.

<u>Παράδειγμα.</u>

$(3x + 2y) + xy' = 0$ να δω αν είναι ακριβής.

$P(x,y) = 3x + 2y$ $\quad \dfrac{dP}{dy} = 2$

$Q(x,y) = x$ $\quad \dfrac{dQ}{dx} = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dP}{dy} = 2\\ \dfrac{dQ}{dx} = 1\end{array}\right\} \dfrac{dQ}{dx} \neq \dfrac{dP}{dy}$$

Η Δ.Ε. δεν είναι ακριβής.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

11-10-11 ε.

→ πολλαπλασιάζουμε με x. (δεξιά και αριστερά της Δ.Ε).

για $(3x^2+2xy)+x^2y'=0$.

$P(x,y)=3x^2+2xy$.

$Q(x,y)=x^2$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x\\[2ex]\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\end{array}\right\}\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Η νέα ΔΕ είναι ακριβής

(αυτό δεν γίνεται πάντα, δεν υπάρχει κάποια γενική εγγύηση ότι θα υπάρχει πάντα τέτοια συνάρτηση)

Ορισμός (Ολοκληρωτικός Παράγοντας).

Έστω μία μη ακριβής Δ.Ε.

$P+Qy'=0$.

Μία συνάρτηση $\mu(x,y)$ για την οποία η Δ.Ε.

$\mu\cdot P+\mu\cdot Qy'=0$

γίνεται ακριβής, ονομάζεται (η $\mu(x,y)$) ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε.

Ερώτηση: Πότε υπάρχει τέτοια συνάρτηση $\mu(x,y)$;

Πρόταση

Έστω μία μη ακριβής Δ.Ε. $P + Qy' = 0$, τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί, είναι ισοδύναμοι.

1) Η Δ.Ε. έχει γενική λύση $\Phi = c$

2) Υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας μ της Δ.Ε.

$P + Qy' = 0$ μη ακριβής

$\boxed{(\mu P) + (\mu Q) y' = 0 \text{ ακριβής}}$

το $\mu(x,y)$ μπορεί να έχει εξάρτηση και ως προς x και ως προς y (μπορεί και όχι)

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow \mu P_y + \mu_y P = \mu Q_x + \mu_x Q. \quad \mu \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{Q\mu_x - P\mu_y}{\mu} = P_y - Q_x \quad \text{Μ.Δ.Ε. Μερική Διαφορική Εξίσωση}$$

→ Υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις που μπορούμε να λύσουμε την τελευταία ΜΔΕ.

θα εξηγήσουμε αυτές.

$\boxed{\cdot\ \mu(x,y) = \mu(x)}$ ✓ $\quad \cdot\ \mu(x,y) = \mu\left(\frac{x}{y}\right)$

$\cdot\ \mu(x,y) = \mu(y)$

$\cdot\ \mu(x,y) = \mu(xy)$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

17-10-17 ξ.

Πρόταση

μη ακριβής Δ.Ε. $P + Qy' = 0$, θα έχει ολοκληρωτικό παράγοντα $\rho(x)$, εάν και μόνο εάν αν η $\boxed{\dfrac{P_y - Q_x}{Q}}$ είναι συνάρτηση μόνο του x.

Στην προηγούμενη περίπτωση:

$$\boxed{\rho(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,dx}}$$

Παράδειγμα:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0, \quad x > 0$$

Λύση

Ελέγχω αν είναι ακριβής

$P(x,y) = 3xy + y^2$

$Q(x,y) = x^2 + xy$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= 3x + 2y \\ \frac{dQ}{dx} &= 2x + y \end{aligned}\right\} \frac{dP}{dy} \neq \frac{dQ}{dx}$$

άρα είναι μη ακριβής Δ.Ε.

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

είναι συνάρτηση μόνο του x (αυτό που θέλαμε στην πρόταση).

Άρα από την προηγούμενη πρόταση

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} \underset{x>0}{=} e^{\ln x} = x.$$

Πολλαπλασιάζω την αρχική Δ.Ε με την $\mu(x) = x$.

$$\boxed{(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0}$$ ✓

είναι ακριβής;

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(3x^2y + xy^2)}{\partial y} &= 3x^2 + 2xy. \\ \frac{\partial(x^3 + x^2y)}{\partial x} &= 3x^2 + 2xy \end{aligned}\right\} \frac{\partial(P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(Q\mu)}{\partial x}.$$

επαληθεύτηκε.

Αναζητούμε Φ τέτοια ώστε
$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= 3x^2y + xy^2 \quad (1) \\ \Phi_y &= x^3 + x^2y \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

17-10-17 g.

Ολοκληρώνω την (1) ως προς x.

$$\Phi(x,y) = \int 3x^2 y \, dx + \int x y^2 \, dx + g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = yx^3 + y^2 \frac{x^2}{2} + g(y) \quad (3)$$

Από (2) και (3)

$$x^3 + yx^2 + g'(y) = x^3 + x^2 y \Rightarrow g'(y) = 0.$$

$$g(y) = c.$$

$$\Phi(x,y) = yx^3 + \frac{x^2 y^2}{2} + c.$$

Η λύση της Δ.Ε. είναι

$$\Phi(x,y) = \tilde{c} \Rightarrow yx^3 + \frac{x^2 y^2}{2} = \tilde{c}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

18-10-17α

① Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli

(είναι μη γραμμικές)

$$\boxed{y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{r} \quad , r \in \mathbb{Z}}$$

2 - Ειδικές περιπτώσεις

1η περίπτωση : $r=0$

$y' + p(x)y = q(x)$ (αυτή είναι γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης όπου έχουμε γνωστή μεθοδολογία).

2η περίπτωση : $r=1$

$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y \Rightarrow y' + (p(x) - q(x))\cdot y = 0$: γραμμική Δ.Ε. → μεθοδολογία για γραμμικές 1ης τάξης.

② $r \in \mathbb{Z}, r \neq 0, r \neq 1$ κάνω τον εξής ~~μ~~ μετασχηματισμό

$\boxed{z = y^{1-r}}$ (η διαφορική ως προς z, θα επιλύεται εύκολα).

(χρειαζόμαστε και τον y')

Παραγωγίζουμε

$z' = (1-r)y^{-r}\cdot y'$ (ο τύπος δυνάμεων κ παραγώγιση).

$y' = \frac{1}{1-r}\cdot y^{r}\cdot z'$

→ Αντικατάσταση στην Bernoulli: $\frac{1}{1-r}y^{r}\cdot z' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{r}$.

έχω αντικαταστήσει μόνο την παράγωγο y'

Πολλαπλασιάζουμε με y^{-r}

αυτό είναι το z

$$\frac{1}{1-r} \cdot z' + p(x) y^{1-r} = q(x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-r} z' + p(x) \cdot z = q(x) \Rightarrow \boxed{z' + (1-r) p(x) \cdot z = (1-r) \cdot q(x)}$$

↳ μετασχηματισμένη Δ.Ε. ως προς z που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης, ως προς z (στην γνωστή μεθοδολογία αντικαθιστώ το $p(x)$ ως $(1-r) \cdot p(x)$)

Λύνεται με τις μεθοδολογίες των γραμμικών Δ.Ε. πρώτης τάξης.

→ Τελικά η λύση y της αρχικής Δ.Ε. λαμβάνεται από $z = y^{1-r}$

Παράδειγμα

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{5}{2} x^2 \cdot y^3 , \quad x \neq 0.$$

Λύση

Είναι Bernoulli με $r = 3$, $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = -\frac{5}{2} x^2$

→ Μετασχηματισμός $z = y^{1-r} = y^{-2}$

$$z' = -2 y^{-3} \cdot y'$$

(↳ είναι γιατί με χ παραγωγίζουμε)

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

18-10-17 b.

$$y' = -\frac{1}{2} y^3 \cdot z'$$

$$\mu'(x) = \mu(x) \cdot p(x)$$

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int p(x)\, dx$$

$$\int \frac{1}{\mu(x)} d\mu = \int p(x)\, dx$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}.$$

Αντικατάσταση στην διαφ. που μας δίνεται:

$$-\frac{1}{2} y^3 \cdot z' - \frac{1}{x} \cdot y = -\frac{5}{2} x^2 \cdot y^3$$

πολλαπλασιάζοντας με $y^{-\nu} = y^{-3}$

αυτό είναι το z

$$-\frac{1}{2} z' - \frac{1}{x} y^{-2} = -\frac{5}{2} x^2 \Rightarrow \boxed{z' + \frac{2}{x} \cdot z = +5x^2} \quad (1)$$

που είναι γραμμική ως προς z με $p(x) = \frac{2}{x}$

⇒ 3η κατηγορία.

Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx}$.

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{2\int \frac{1}{x} dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

πολλαπλασιάζω α/β της (1) με $\mu(x)$

$$\underbrace{x^2 \cdot z' + 2x \cdot z}_{\text{παράγωγος γινομένου}} = 5x^4 \Rightarrow (x^2 \cdot z)' = 5x^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (x^2 \cdot z)' dx = \int 5x^4 dx \Rightarrow x^2 \cdot z = x^5 + c \Rightarrow z = x^3 + \frac{c}{x^2}, \; x \neq 0.$$

Άρα $z = y^{-2}$

$$\boxed{y^{-2} = x^3 + \frac{c}{x^2}}$$

λύση είναι η λύση της διαφορικής στην μορφή του γενικού ολοκληρώματος της δ.ε.

I: Information
t: ο χρόνος.
c: capacity.
$\tilde{r}$: ρυθμός ανάπτυξης δικτύου.

Παράδειγμα. (Διάχυση πληροφορίας σε κοινωνικό δίκτυο)
Εκ προσεγγίζεται μια Δ.Ε. Bernoulli

$$I'(t) = \tilde{r} \cdot I(t) - \frac{\tilde{r}}{c} \cdot I^2(t)$$

Λύση

$$I'(t) - \tilde{r}\, I(t) = -\frac{\tilde{r}}{c}\, I^2(t) \quad : \text{Bernoulli με } r = 2$$

$$p(t) = -\tilde{r}$$

$$q(t) = -\frac{\tilde{r}}{c}$$

Μετασχηματισμός

$$z = I^{1-2} = I^{-1} \qquad \text{και} \qquad z' = -I^{-2} \cdot I' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I' = -I^2 \cdot z'$$

Αντικατάσταση στην Bernoulli:

$$-I^2 \cdot z' - \tilde{r}\, I = -\frac{\tilde{r}}{c}\, I^2$$

Πολλαπλασιασμός με I^{-2}:

$$-z' - \tilde{r}\, \underbrace{I^{-1}}_{z} = -\frac{\tilde{r}}{c} \Rightarrow \boxed{+z' + \tilde{r} \cdot z = \frac{\tilde{r}}{c}} \quad (1)$$

(. . .)

$$z = \frac{1}{\text{Capacity}} + c \cdot e^{-\tilde{r}t} \qquad \text{και τελικά} \qquad I^{-1} = \frac{1}{\text{Capacity}} + c\, e^{-\tilde{r}t}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{\text{Capacity} \cdot e^{\tilde{r} \cdot t}}{c \cdot \text{Capacity} + e^{\tilde{r}t}}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
18-10-17ε.

Αν $I(0) = I_0$ γνωστό, τότε: $I_0 = \dfrac{C}{c \cdot C + 1}$ ⟹ υπολογίζουμε c... ως συνάρτηση του Capacity και I_0

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης.

(1) $$\boxed{y'' + \alpha_1(x) \cdot y' + \alpha_0(x) \cdot y = f(x)}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$\alpha_0, \alpha_1, f \quad I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς.

Αντίστοιχη Ομογενής Δ.Ε. της (1) (ομογενής: 2ο μέρος $=0$).

$$\boxed{y'' + \alpha_1(x) y' + \alpha_0(x) y = 0} \quad (2)$$

Πρόταση

Αν y_1, y_2 δύο λύσεις της ομογενούς ΔΕ (2)

τότε $\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$ είναι λύση της (2) (λογικό αφού είναι γραμμική).

→ Απόδειξη: $y_1'' + \alpha_1 y_1' + \alpha_0 y_1 = 0 \quad (*)$

$y_2'' + \alpha_1 y_2' + \alpha_0 y_2 = 0 \quad (**)$

η $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι λύση;

Αυθαίρετα C_1, C_2
αυθαίρετες προσέγγισης
σταθερές, $C_1, C_2 \in R$

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + \alpha_1 (C_1 y_1 + C_2 y_2)' + \alpha_0 (C_1 y_1 + C_2 y_2)$$

$$= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \alpha_1 C_1 y_1' + \alpha_1 C_2 y_2' + \alpha_0 C_1 y_1 + \alpha_0 C_2 y_2 =$$

$$= C_1 (y_1'' + \alpha_1 y_1' + \alpha_0 y_1) + C_2 (y_2'' + \alpha_1 y_2' + \alpha_0 y_2) \overset{\text{από } (*) \text{ και } (**)}{=}$$

$$= C_1 \cdot (0) + C_2 \cdot (0) = 0.$$

άρα $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ είναι λύση της ομογενούς ΔΕ (2)

Παράδειγμα

$y'' = 0$, $y_1 = x$
$y_2 = 1$ οι δύο λύσεις.

Οποιαδήποτε : $y = C_1 + C_2 x$ είναι επίσης λύση της $y'' = 0$.
συνάρτηση της μορφής

Θεώρημα Ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης ΠΑΤ γραμμικών ΔΕ δεύτερης τάξης.

Για κάθε $x_0 \in I$ και $y_0, y_1 \in R$, υπάρχει ακριβώς μία λύση $y: I \to R$ του ΠΑΤ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

18-10-17 d.

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)} + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{array}\right\}$$

ίδιο σημείο

μέχρι παράγωγο $n-1$ (n)

Έστω: $f = 0$

$y_0 = 0$

$y_1 = 0$

(ομογενείς αρχικές συνθήκες)

Η λύση του ΠΑΤ είναι η $y(x) = 0$.

και είναι η μοναδική λύση.

Αν y_1, y_2 λύσεις της (2) τότε $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι επίσης λύση της (2).

→ Ισχύει το αντίστροφο;

Για κάθε λύση y της (2), υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 ώστε

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$; → ΟΧΙ χωρίς προϋποθέσεις.

→ απόδειξη με αντιπαράδειγμα: $y'' = 0$

$y_1 = 1 + x$

$y_2 = 2 + 2x$

$y_3 = 1 - x$, $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$1 - x = c_1(1+x) + c_2(2+2x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 + 2c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = -1 \end{array}\right\} \quad 1 = -1 \quad \text{ΑΤΟΠΟ.}$$

Η λύση των ΔΕ είναι γραμμικός χώρος!

Παρατηρώ ότι $y_2 = 2y_1$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

(Οι προϋποθέσεις που αναφέραμε πριν είναι ότι πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όσο χρειαζόμαστε δεν είπα).

Ορισμός

$y_1, y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζονται γραμμικά εξαρτημένες στο I

όταν υπάρχουν c_1, c_2 με $c_1 \neq 0$ ή $c_2 \neq 0$ έτσι ώστε

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \ \forall x \in I.$$

Οι y_1, y_2, ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα I, όταν για δύο σταθερές c_1 και c_2 ισχύει

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \ \forall x \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Παραδείγματα

α) $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$, γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε I

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

β) $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = \sin x \cos x$, είναι γραμμ. εξαρτημένες σε κάθε I.

$y_1 = 2 \cdot y_2$ αφού $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

άρα για $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ $\quad c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

18-10-17e.

Ορισμός: $y_1, y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο I τότε

φτιάχνουμε την συνάρτηση

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)$$

→ ορίζουσα Wronski των y_1, y_2.

Θεώρημα.

Δύο λύσεις y_1 και y_2 της (2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες

τότε και μόνο τότε όταν $W(x_0) \neq 0$ για κάποιο $x_0 \in I$

(η (2) είναι η ομογενής που είπαμε στην αρχή) αρκεί σε ένα σημείο.

Θεώρημα.

Αν y_1 και y_2 γραμμ. ανεξ. λύσεις της (2), τότε για κάθε λύση y της (2) υπάρχουν μοναδικές σταθερές C_1^* και C_2^* έτσι ώστε να ισχύει:

$$\boxed{y(x) = C_1^* y_1(x) + C_2^* y_2(x).}$$

Παράδειγμα.

$$y'' + k^2 y = 0 \quad , k > 0$$

Επαληθεύουμε ότι $y_1(x) = \cos(kx)$ και $y_2(x) = \sin(kx)$ λύσεις της ΔΕ.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{vmatrix} = k \cdot \cos^2(kx) + k \sin^2(kx)$$

$= k > 0$ (εμεις θέλουμε $\neq 0$)
αρκεί σε ένα σημείο.

Οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες

Η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$

(Για την μη ομογενή)

Πρόταση

Η διαφορά δύο λύσεων y_1 και y_2 της (1), είναι λύση της (2)

→ Απόδειξη

$y_1'' + \alpha_1 y_1' + \alpha_0 y_1 = f$

$y_2'' + \alpha_1 y_2' + \alpha_0 y_2 = f$

Αφαίρεση κατα μέλη

$$\underbrace{(y_1 - y_2)}_{y}'' + \alpha_1 \underbrace{(y_1 - y_2)}_{y}' + \alpha_0 \underbrace{(y_1 - y_2)}_{y} = 0$$

$y = y_1 - y_2$ είναι λύση της (2)

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

18-10-17 β.

Θεώρημα.

Έστω y_1 και y_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς ΔΕ (2).

και y_p μερική λύση της μη ομογενούς ΔΕ (1)

Τότε κάθε λύση y της (1) είναι της μορφής:

$$\boxed{y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}_{y_0(x)} + y_p(x)}$$

αυτό είναι κάτι που θα χρειαστεί συνέχεια για τις ΔΕ δευτέρας τάξης.

$y_0(x)$, δηλαδή $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

→ Απόδειξη

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ (λύση της (1);)

Έλεγχος αν επαληθεύει την (1)

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + y_p'' + \alpha_1 (c_1 y_1' + c_2 y_2' + y_p') + \alpha_0 (c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p)$$

$$= c_1 \overbrace{(y_1'' + \alpha_1 y_1' + \alpha_0 y_1)}^{0} + c_2 \overbrace{(y_2'' + \alpha_1 y_2' + \alpha_0 y_2)}^{0} + y_p'' + \alpha_1 y_p' + \alpha_0 y_p$$

αφού y_1 και y_2 λύσεις της ομογενούς

$$= 0 + 0 + f = f.$$

→ Απόδειξη # 2

y οποιαδήποτε λύση της (1)

$y - y_\mu$ λύση της ομογενούς (2)

Όμως

$$y - y_\mu = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ldots$$

Παράδειγμα

$$y'' + k^2 y = x \qquad , k > 0$$

$$\left.\begin{aligned} y_0(x) &= c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) \\ y_\mu(x) &= \frac{1}{k^2} x \end{aligned}\right\}$$ για τις μεθοδολογίες που να βρούμε αυτά, θα δούμε αργότερα.

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) + k^{-2} x.$$

Θεώρημα.

Έστω y_1 και y_2 γραμμ. ανεξ. λύσεις της (2) και y_μ μερική λύση της (1)

Τότε υπάρχουν μοναδικές σταθερές c_1 και c_2 ώστε το ΠΑΤ να έχει την μοναδική λύση

$$\boxed{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_\mu(x)}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

24-10-17α

$y = y(x)$
$y' = dy/dx$

2ο μέλος $= 0$.

① Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές

Γενική μορφή: $\boxed{y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0}$ (1) με $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ σταθεροί συντελεστές

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ στην (1)

(κάνω αντικατάσταση)

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \alpha_1 \lambda e^{\lambda x} + \alpha_0 e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x} \left[\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \right] = 0$$

άρα πρέπει το λ να είναι ρίζα στο $\mathbb{C}$ της αλγεβρικής εξισώσεως: $\boxed{\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0}$ (2)

Η (2) είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της (1).

Οι ρίζες της (2) ονομάζονται χαρακτηριστικές ρίζες.

και το πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (1)

Περιπτώσεις:

I. Οι χαρακτηριστικές ρίζες να είναι πραγματικές και διακεκριμένες
(άνισες)

(διακρίνουσα): $\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_0 > 0$

με ρίζες $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0}}{2} \end{cases}$$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

λύσεις της (1)

Πρέπει να είναι και γραμμικά ανεξάρτητες

άρα
$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

αφού $\lambda_2 \neq \lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ άρα $W(x) \neq 0$ άρα οι λύσεις y_1 και y_2 είναι μεταξύ τους γραμμικά ανεξάρτητες.

→ Γενική λύση της (1)

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

24.10.17 b

Παραδείγματα (Περίπτωσης I)

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

δεύτερης τάξης
ομογενής
με σταθ. συντελεστές.

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\Delta = 1 > 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

άρα οι λύσεις είναι

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}.$$

(δεν έχω αρχικές συνθήκες)

c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

II (διακρίνουσα είναι μηδενική)

Η χαρακτηριστική ρίζα της (2) είναι διπλή

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 = 0$$

άρα έχω διπλή ρίζα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^* = -\frac{a_1}{2}$

Ξέρω δηλαδή σίγουρα ότι η μία λύση είναι

$$y_1(x) = e^{\lambda^* x} = e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

Για να βρούμε δεύτερη λύση της (1) η οποία να είναι γραμμικά ανεξάρτητη της y_1

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $y_2 = xy_1 = xe^{\lambda^* x}$

$$y_2' = (xe^{\lambda^* x})' = e^{\lambda^* x} + \lambda^* x e^{\lambda^* x}$$

$$y_2'' = \lambda^* e^{\lambda^* x} + \lambda^* e^{\lambda^* x} + (\lambda^*)^2 x e^{\lambda^* x}$$

$$y_2'' + \alpha_1 y_2' + \alpha_0 y_2 =$$

$$= e^{\lambda^* x}\left(2\lambda^* + (\lambda^*)^2 x + (\lambda^* x + 1)\alpha_1 + \alpha_0 x\right) =$$

$$= e^{\lambda^* x}\Big[x\underbrace{\left((\lambda^*)^2 + \alpha_1 \lambda^* + \alpha_0\right)}_{P(\lambda^*) = 0} + \alpha_1 + 2\lambda^*\Big] = e^{\lambda^* x}\left(\cancelto{0}{P(\lambda^*)}x + P'(\lambda^*)\right) =$$

Γιατί το $P'(\lambda^*)$ είναι 0.

Αφού λ^* είναι διπλή ρίζα, σημαίνει ότι μηδενίζει το πολυώνυμο, αλλά μηδενίζει και την πρώτη παράγωγο.

(Μπορώ και να το επαληθεύσω ότι

$$P'(\lambda^*) = \alpha_1 + 2\lambda^*)$$

$= 0$ δηλαδή δείξαμε

$$y_2'' + \alpha_1 y_2' + \alpha_0 y_2 = 0$$

δείξαμε ότι είναι λύση

πρέπει να αποδείξω και την γραμμ. ανεξαρτησία.

$P(\lambda) = 0$

λ^* διπλή ρίζα

$P(\lambda^*) = 0$

$P'(\lambda^*) = 0$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

24-10-17

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda^* x} & x e^{\lambda^* x} \\ \lambda^* e^{\lambda^* x} & e^{\lambda^* x} + \lambda^* x e^{\lambda^* x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\lambda^* x} + \cancel{\lambda^* x e^{2\lambda^* x}} - \cancel{\lambda^* x e^{2\lambda^* x}} = e^{2\lambda^* x} \neq 0$$

άρα y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση είναι:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda^* x} + c_2 x e^{\lambda^* x}} \quad \text{με } \lambda^* = -\frac{\alpha_1}{2}$$

Παράδειγμα (για την περίπτωση ΙΙ)

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Λύση

χαρακτ. εξίσωση $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ με $\Delta = 0$ και $\lambda^* = 1$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ διπλή ρίζα } \lambda^*$$

άρα η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Περίπτωση III

Χαρακτηριστικές ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές

$\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_0 < 0$

$\lambda_1 = \alpha + ib$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - ib$

$\boxed{y_1 = e^{(\alpha+ib)x}}$ και $\boxed{y_2 = e^{(\alpha-ib)x}}$

Μπορώ να αποδείξω ότι αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$y(x) = d_1 e^{(\alpha+ib)x} + d_2 e^{(\alpha-ib)x}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{C}$$

• $e^{(\alpha+ib)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{ibx} = e^{\alpha x}\left[\cos(bx) + i\sin(bx)\right]$

(τύπος του Euler)

$$\Rightarrow e^{(\alpha+ib)x} = \boxed{e^{\alpha x}\cos(bx)} + i\,\boxed{e^{\alpha x}\sin(bx)}$$

• $e^{(\alpha-ib)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-ibx} = \boxed{e^{\alpha x}\cos(bx)} - i\,\boxed{e^{\alpha x}\sin(bx)}$

Άρα η γενική λύση της (1) είναι της μορφής

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(bx) + c_2 e^{\alpha x}\sin(bx)}$$

επιλέγοντας τα c_1, c_2 συναρτήσει των d_1, d_2