Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

29-11-17α

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Παράδειγμα

$$e^z = 2i$$

Λύση

για $z=x+iy$ έχουμε $e^{x+yi} = 2i \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^x\cos y + i e^x \sin y = 2i$$

άρα $\begin{cases} e^x\cos y = 0 \\ e^x \sin y = \cancel{2i}\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ e^x\sin y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = k\pi + \pi/2 \\ e^x \sin y = 2 \end{cases}$ (1)

πρέπει $\sin y > 0$ για να είναι και το γινόμενο θετικό.

Άρα από όλα τα $y = k\pi + \pi/2$ κρατάω μόνο τα θετικά,

δηλαδή $\boxed{y = 2k\pi + \pi/2}$ (2)

Από (1) και (2) και $\sin(2k\pi + \pi/2) = 1$ έχουμε ότι

$$e^x = 2$$
$$\Rightarrow x = \ln 2$$

άρα $z = \ln 2 + (2k\pi + \pi/2)i$.

Παράδειγμα) να δείξετε ότι

$$\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Λύση έστω $z = x+yi$

$$\overline{e^{z}} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^{x} \cdot e^{iy}} = \overline{e^{x}} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{x} \cdot e^{-iy} =$$

$$= e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

Παράδειγμα

$z = e^{e^{ix}}$, $x \in \mathbb{R}$

$Re(z) =$;

$Im(z) =$;

$e^{\boxed{e^{ix}}}$, $e^{ix} = e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x} \cdot e^{i\sin x} =$

~~Επίσης~~

$$= e^{\cos x}(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x))$$

άρα $Re(z) = e^{\cos x}\cos(\sin x)$ και

$Im(z) = e^{\cos x}\sin(\sin x)$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

29-11-17 b.

Θ Τριγωνομετρικές Μιγαδικές Συναρτήσεις

για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-xi}}{2i}$$

Ορισμός

για $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

→ Ισχύουν για τις $\cos z$ και $\sin z$, όλες οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες που ισχύουν για τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Παράδειγμα

$$\sin z = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Λύση.

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{iz}}{e^{-iz}} = 1 \Rightarrow e^{iz} e^{iz} = 1 \Rightarrow e^{2iz} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2iz} = e^{0} \Rightarrow 2iz = 0 + 2\kappa\pi i$$

(με $\kappa \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow z = \kappa\pi$$

> ομοίως

$$\cos z = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow z = \kappa\pi + \pi/2$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$, $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

Λύση

$$\overline{\sin z} = \overline{\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)} = \frac{\overline{e^{iz}-e^{-iz}}}{\overline{2i}} = \frac{e^{-i\bar{z}}-e^{i\bar{z}}}{-2i} =$$

$$= \frac{e^{i\bar{z}}-e^{-i\bar{z}}}{2i} = \sin \bar{z}$$

Παράδειγμα

(Θα δείξουμε ότι οι μιγ. τριγ. συναρτήσεις δεν είναι φραγμένες)

$$|\sin z| = \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right| = \frac{|e^{iz}-e^{-iz}|}{2} \geq$$

$$\geq \frac{|e^{iz}|-|e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2}$$

άρα για $z = iy$ με $y \to -\infty$ παίρνουμε $|\sin z| \to +\infty$

Ευφροσύνα Μαθρουσιά
29-11-17c.

Μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση

$e^w = z$ όπου $z \neq 0$ δοσμένος μιγαδικός και
$w \in \mathbb{C}$ άγνωστο.

με $w = u+iv$ έχουμε

$$e^{u+iv} = z \Rightarrow \boxed{e^u(\cos v + i\sin v) = z} \quad (*)$$

$$|e^u||\cos v + i\sin v| = |z| \Rightarrow e^u = |z| \Rightarrow \boxed{u = \ln|z|}$$

άρα

$$e^u(\cos v + i\sin v) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{όπου } \theta = \arg(z)$$

$$\cos v + i\sin v = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow v = \arg(z) \Rightarrow v = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$$

$$w = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi i \qquad 0 \leq \mathrm{Arg} < 2\pi$$

> Η συνάρτηση $\log z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi i$ ονομάζεται μιγαδικός λογάριθμος του z

και είναι πλειότιμη μιγαδική συνάρτηση.

Για $k = 0$ $\boxed{\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)}$ η οποία ονομάζεται πρωτεύουσα ή πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου, και είναι μονότιμη συνάρτηση

Για $z = x > 0$ τότε $Arg(z) = Arg\,x = 0$ και

$$\log z = \ln x + 0 + 2k\pi i$$

και $\mathrm{Log}\,x = \ln x \quad , x > 0$

που σημαίνει ότι η μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση, διαφέρει από την πραγματική λογαριθμική συνάρτηση κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi i$.

<u>Παράδειγμα</u> Βρείτε τους λογαρίθμους.

i) $\log i$

ii) $\mathrm{Log}(2i)$

iii) $\mathrm{Log}(-5)$

iv) $\mathrm{Log}(1+i)$

i) $\log i = \ln|i| + i\,Arg(i) + 2k\pi i = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i \,,\ k \in \mathbb{Z}$

ii) $\mathrm{Log}(2i) = \ln(2i) + i\,Arg(2i) = \ln 2 + i\,\pi/2$

iii) $\mathrm{Log}(-5) = \ln|-5| + i\,Arg(-5) = \ln 5 + i\pi$.

iv) $\mathrm{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\,Arg(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\,\pi/4$.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

29-11-17

Δυναμοσυνάρτηση

$$z^{w} = e^{w \log z} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\log(zw) = \log z + \log w$$

$$\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w.$$

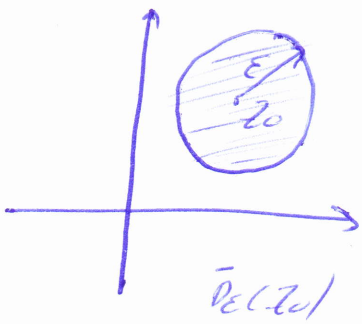
Ένα σημείο του συνόλου $\log(zw)$ είναι ίσο με κάποιο σημείο που ανήκει $\log z$ συν κάποιο του $\log w$.

Ειδικά Υποσύνολα του $\mathbb{C}$

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $\varepsilon > 0$ το σύνολο

$$D_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$$ (D από το Disk)

ονομάζεται ανοιχτός δίσκος με κέντρο το z_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$.



$\bar{D}_\varepsilon(z_0)$

ενώ $\bar{D}_\varepsilon(z_0)$ είναι κλειστός δίσκος με ακτίνα $\varepsilon > 0$ και κέντρο το z_0

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ τότε ένα σημείο $z_0 \in A$ ονομάζεται εσωτερικό σημείο του A αν υπάρχει ένας ανοιχτός δίσκος $D_\varepsilon(z_0)$, ο οποίος περιέχεται στο A

<u>Ορισμός</u> ένα $A \subseteq \mathbb{C}$ ονομάζεται <u>ανοιχτό</u> όταν <u>κάθε</u> σημείο του είναι εσωτερικό.

<u>Παραδείγματα</u> Ανοιχτών Συνόλων.

1) Ανοιχτός δίσκος $D_\varepsilon(z_0)$
2) $2 < |z| < 3$: Ανοιχτός δακτύλιος (και πολυγωνικά συνεκτικός)
3) $Im(z) < 0$: Ανοιχτό Ημιεπίπεδο, και πολυγωνικά συνεκτικό
4) $-2 < Re(z) < 2$: ανοιχτή λωρίδα, πολυγωνικά συνεκτική.

> Ένα μη κενό, ανοιχτό και πολυγωνικά συνεκτικό $A \subseteq \mathbb{C}$ ονομάζεται πεδίο ή τόπος.

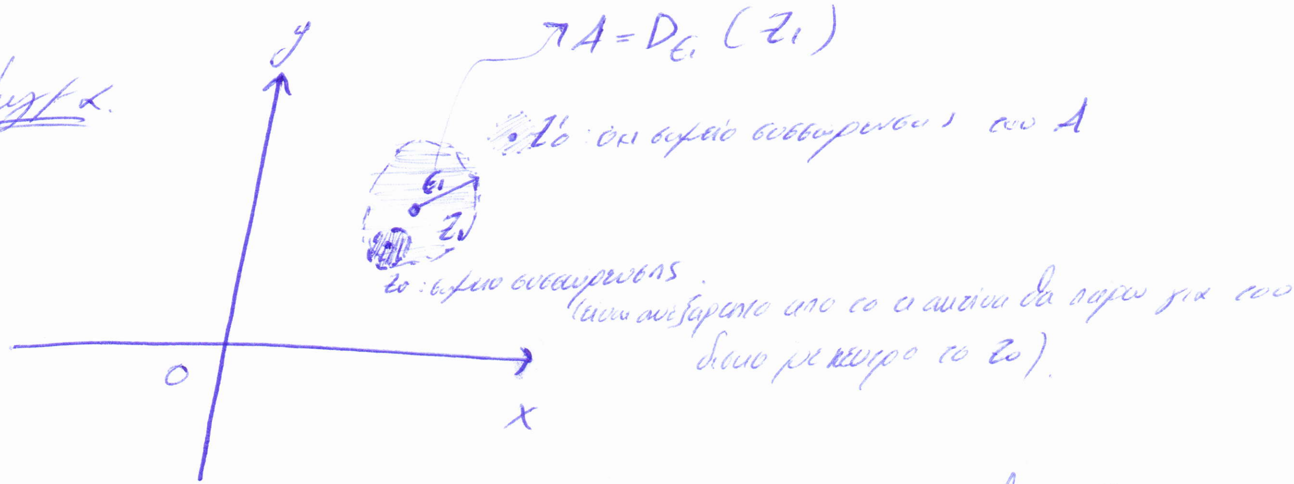
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

5-Dec-17 α.

① Όρια Μιγαδικών Συναρτήσεων
(Χρειαζόμαστε σημείο συσσώρευσης.)

→ $A \subseteq \mathbb{C}$ ένα $z_0 \in \mathbb{C}$ ονομάζεται σημείο συσσώρευσης του A
(δεν είναι απαραίτητο $z_0 \in A$)
όταν κάθε ανοικτός δίσκος $D_\varepsilon(z_0)$, με κέντρο το z_0 και ακτίνα ε
(προηγ. μάθημα)
περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διαφορετικό απ' το z_0

Παράδειγμα.



→ Όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου $D_{\varepsilon_1}(z_1)$ είναι σημεία συσσώρευσης του A.

Σημεία συσσώρευσης: είναι σημεία τα οποία μπορώ να τα πλησιάσω όσο κοντά θέλω από σημεία που ανήκουν στο σύνολο.

(Μεμονωμένο Σημείο).
→ ένα σημείο $z_0 \in A$ το οποίο όμως δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, ονομάζεται μεμονωμένο σημείο του A

① Όριο Μιγαδικής Συνάρτησης.

Ορισμός

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Τότε θα λέμε ότι η f έχει ως όριο τον $l \in \mathbb{C}$ καθώς το z τείνει στο z_0 τότε και μόνο τότε όταν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ ώστε $|f(z) - l| < \varepsilon$, $\forall z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$ και $z \neq z_0$.

Συμβολισμός $\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = l}$

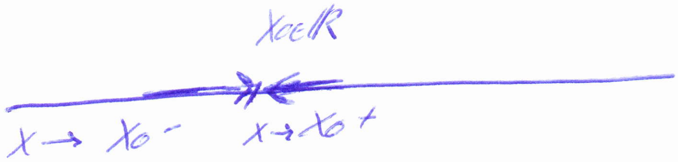
Αν πάρω z με ακτίνα δ το οποίο είναι κατάλληλα, βρίσκεται πολύ κοντά στο z_0 θα λέμε ότι τείνει στο z_0. (το οποίο είναι σημείο συσσ.) (για αυτό μπορεί να το δίνω.) Μπορεί;

→ Αν το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο της f.
Οπότε $z_0 \in A$, τότε ορίζεται $\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)}$

Παρατηρήσεις (στον ορισμό)

1) Δεν απαιτείται $z_0 \in A$.

2). Στις πραγματικές συναρτήσεις, όταν $x_0 \in \mathbb{R}$ προσεγγίζεται από δύο συγκεκριμένες κατευθύνσεις. (πλευρικά όρια)
($x < x_0$ και $x > x_0$)



. Στις Μιγαδικές Συναρτήσεις η προσέγγιση $z \to z_0$ επιτρέπεται να γίνει κατά οποιονδήποτε τρόπο

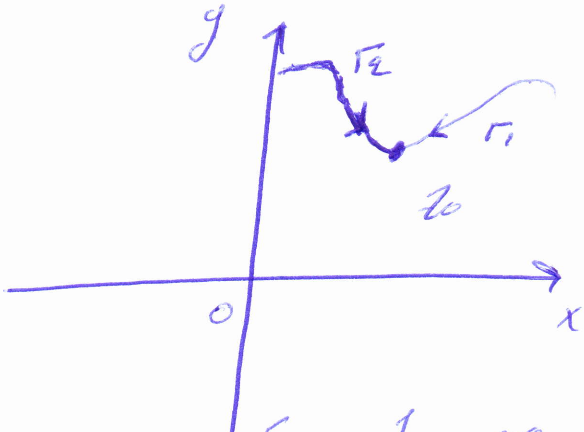
Ευφροσύνη

Μαθηματικά

5-Dec-17b.

Η μέθοδος χρησιμοποιείται για να δείξω ότι το όριο δεν υπάρχει. (ΜΟΝΟ)

πχ. κατά μήκος μιας καμπύλης που διέρχεται από το z_0



βρίσκω από Γ_1, λ_1

και από Γ_2, λ_2

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

δεν υπάρχει το όριο.

Έχω δηλαδή άπειρους τρόπους προσέγγισης.

Για να $\exists$ το όριο θα πρέπει να το προσεγγίσω από κάθε καμπύλη που είναι γραμμικά ανεξάρτητου.

Παράδειγμα

Βρείτε το όριο αν υπάρχει

$$l = \lim_{z \to -i} \frac{z^4 - 1}{z+i}$$

δεν είναι απαραίτητο η συνάρτηση να ορίζεται στο $-i$

Λύση

$$\frac{z^4-1}{z+i} = \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{z+i} =$$

$$= (z^2-1)\frac{z^2-i^2}{z+i} = (z^2-1)\frac{(z+i)(z-i)}{z+i} \overset{z\neq -i}{=}$$

$$= (z^2-1)(z-i)$$

άρα $l = \lim_{z\to -i}\left((z^2-1)(z-i)\right) = (-2)(-2i) = 4i$

Παράδειγμα

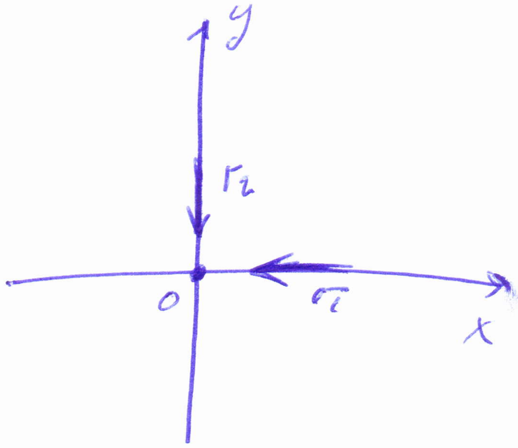
Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$$

Λύση

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}}, \quad z \neq 0$$

προσεγγίζουμε το $z=0$ από δύο κατευθύνσεις του $\mathbb{C}$



1) Γ_1: θετικός πραγματικός άξονας.

$z = x + i \cdot 0$ με $x > 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x+i0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x+i0}{x+i0} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Αρκεί να πλησιάσω από οποιαδήποτε άλλη κατεύθυνση το σημείο αυτό και βρω διαφ. όριο.

2) Γ_2: θετικός φανταστικός άξονας

$$z = 0 + iy, \quad y > 0$$

$$\lim_{y \to 0^+} f(0+ix) = \lim_{y \to 0^+} \frac{0+iy}{0-iy} = \lim_{y \to 0^+} \frac{iy}{-iy} = -1$$

$1 \neq -1$ άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά

5-Dec-17c.

Παράδειγμα

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

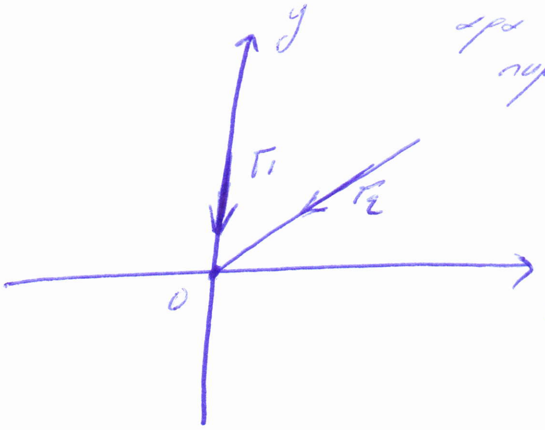
$$\lim_{z\to 0} \frac{Re(z)}{Im(z)}$$

Λύση

$f(z) = \dfrac{Re(z)}{Im(z)}$ και προσεγγίζουμε το $z = 0$ από κατάλληλες καμπύλες.

$Im(z) \neq 0$

άρα δεν μπορούμε να πάρουμε τον πραγμ. άξονα.



1) Γ_1: θετικός φανταστικός άξονας.

$z = 0 + iy$, $y \to 0$

$$\lim_{y\to 0^+} \left(\frac{Re(z)}{Im(z)} \right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{0}{y} = 0.$$

2) Γ_2: $z = x + ix$ άρα $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x+ix) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$1 \neq 0$ άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Πρόταση

$$f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

και $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο συσσώρευσης του A

Ισοδύναμοι ισχυρισμοί:

1) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \boxed{u_0} + i v_0$.

2) $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = \boxed{u_0}$ και $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά

5-Dec-17d.

Συνεχείς Μιγαδικές Συναρτήσεις.

Ορισμός · $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής σε ένα $z_0 \in A$.

Όταν υπάρχει το όριο $\lim_{z \to z_0} f(z)$ και ισχύει $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Θεώρημα. · $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$

τότε και μόνο τότε όταν οι πραγματικές συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι συνεχής στο (x_0, y_0)

Παραδείγματα

1) (πολυώνυμα) $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$

2) $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) \neq 0$. (ρητές).

Είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της

3) $\left.\begin{array}{l} Re(z) \\ Im(z) \\ \bar{z} \\ |z| \end{array}\right\}$ συνεχείς στο $\mathbb{C}$

4) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\bar{z}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

δεν είναι συνεχής στο $z = 0$
διότι από προηγ. παράδειγμα δεν υπάρχει
το $\lim_{z \to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$

Θεώρημα. - Σύνθεση Συναρτήσεων.

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $g : B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

με $f(A) \subseteq B$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $z_0 \in A$

και η g είναι συνεχής στο σημείο $f(z_0) \in B$

Τότε η σύνθεση συνάρτηση $(g \circ f)(z) = g(f(z)) : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

θα είναι συνεχής στο $z_0 \in A$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \supseteq A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\boxed{g \circ f}"'] & f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{C} \arrow[d, "g"] \\
& \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
5-Dec-17 C

Μιγαδική Παράγωγος

Ορισμός $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ όπου A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

και $z_0 \in A$ ως μιγαδική παράγωγος $f'(z_0)$ της f στο z_0 ορίζεται

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

όταν αυτό υπάρχει στο $\mathbb{C}$.

→ Εναλλακτικός Ορισμός για την Παράγωγο

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}}$$

Σημείωση: το $h \in \mathbb{C}$

(Θέτοντας στον προηγ. ορισμό $z = z_0 + h$).

Παραδείγματα παραγωγίσιμης συνάρτησης.

$f(z) = z^n, \; z \in \mathbb{C}$

$f'(z) = n \cdot z^{n-1}$

Σημείωση:

→ Στον ορισμό της $f'(z_0)$ το $z \in A$ προσεγγίζει το z_0 κατά μήκος μιας οποιασδήποτε καμπύλης του A, που διέρχεται από το z_0.

Η ύπαρξη της $f'(z_0)$ συνεπάγεται ότι η τιμή του ορίου είναι μοναδική ανεξάρτητα της καμπύλης του A μέσω της οποίας προσεγγίζουμε το z_0.

- Σχέση Συνέχειας με την Παράγωγο -

Πρόταση:

· Κάθε παραγωγίσιμη μια μιγαδική συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ σε ένα σημείο του ανοικτού συνόλου A είναι συνεχής στο z_0.

Απόδειξη

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0), \quad z \neq z_0.$$

Έστω ότι $$\lim_{z \to z_0}[f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0}\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0}[f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z_0}(z - z_0) =$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

→ Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Αντιπαράδειγμα $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ η οποία είναι συνεχής $\forall z \in \mathbb{C}$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα $z \in \mathbb{C}$

(έχει παντού συνέχεια, όχι πουθενά παράγωγο).

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

5-Dec-17 β.

Απόδειξη

$z \in \mathbb{C}$ και $h = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h} = \frac{\bar{z}+\bar{h}-\bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} \Rightarrow$$

h θα αποτελεί στο παράδειγμα, εφόσον υπάρχει.

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h}$$

1) $\Gamma_1: h = \lambda + i0 \quad \lambda \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h} = \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

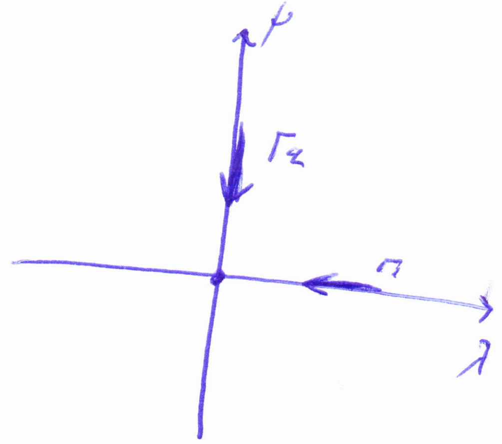
2) $\Gamma_2: h = 0 + i\mu \quad \mu \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h} = \lim_{\mu\to 0^+}\frac{-i\mu}{i\mu} = -1$$

$1 \neq -1$ άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Άρα το $\lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h}$ δεν υπάρχει, και

άρα δεν υπάρχει $f'(z)$ για κανένα $z \in \mathbb{C}$



Παράδειγμα

Η $f(z) = |z|$ είναι συνεχής, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση Για $z \neq 0$ $\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{|z| - 0}{z} = \frac{|z|}{z}$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$ δεν ~~...~~ υπάρχει.

1) Γ_1: $z = x \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

2) Γ_2: $z = x \in \mathbb{R}$, $x < 0$.

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$1 \neq -1$ άρα το μιγαδικό όριο δεν υπάρχει.

Άρα το $\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$ δεν υπάρχει, άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

6-Dec-17α.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Ισχύουν

(πολυώνυμα) • $P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$

$$P'(z) = n\alpha_n z^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} z^{n-2} + \ldots + \alpha_1$$

(ρητοί)

• $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $z \in \mathbb{C}$ με $Q(z) \neq 0$

$$R'(z) = \frac{P'(z) \cdot Q(z) - P(z) \cdot Q'(z)}{Q^2(z)}$$

• Κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης / κανόνας αλυσίδας.

Θεώρημα.

$$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ και } g : B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

A, B ανοιχτά σύνολα με $f(A) \subseteq B$. (το σύνολο τιμών της f πρέπει να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της g)

και η f παραγωγίσιμη στο $z_0 \in A$, και g παραγωγίσιμη στο $f(z_0) \in B$.

→ Τότε η συνάρτηση $g \circ f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(g \circ f)(z) = g(f(z))$ είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in A$

και ισχύει $(g \circ f)'(z) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0$

Θεώρημα (Κανόνας L' Hopital)

$f,g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, όπου A ανοικτό, f,g παραγωγίσιμες σε $z_0 \in A$ με $f(z_0) = g(z_0) = 0$ και $g'(z_0) \neq 0$

→ Τότε υπάρχει το όριο του πηλίκου $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}$

και ισχύει $\boxed{\lim\limits_{z \to z_0} = \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.}$

Παράδειγμα.

Βρείτε το όριο, εφόσον υπάρχει

$$l = \lim_{z \to i} \frac{z^9 - i}{z^{10} + 1}.$$

Λύση

Ορίζω $f(z) = z^9 - i$ και $g(z) = z^{10} + 1$

$f(i) = g(i) = 0$;

$\left(f(i) = z^9 - i = z^1 - i = 0 \right.$

$\left. g(i) = i^{10} + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \right)$

$f'(z) = 9z^8$

$g'(z) = 10z^9$

$g'(i) = 10i \neq 0.$

Άρα μπορώ να εφαρμόσω κανόνα L' Hopital.

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά

6-Dec-17 b.

$$\Rightarrow \lambda = \frac{f'(i)}{g'(i)} = \frac{9 \cdot i^8}{10 i^9} = -\frac{9}{10} i$$

Συνθήκες Cauchy-Riemann (C-R)

Θεώρημα.

$f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό.

η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z_0 = x_0 + i y_0$.

→ Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των u και v στο σημείο (x_0, y_0) και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann, οι οποίες είναι οι εξής:

- $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$
- $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$

Πόρισμα του θεωρήματος.

Η ικανοποίηση των συνθηκών Cauchy-Riemann μας προσφέρει έναν υπολογιστικό τύπο για την παράγωγο.

Αν $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό

f: παραγωγίσιμη στο $z = x + iy$ τότε ισχύει

$$\boxed{f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = v_y(x,y) - i u_y(x,y)}$$

→ Το αντίστροφο, δεν ισχύει γενικά.

→ Απόδειξη με αντιπαράδειγμα.

$$f(z) = \begin{cases} x-y+i\,\dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & z = x+iy \neq 0 \\ 0, & z = x+iy = 0. \end{cases}$$

Ικανοποιούνται οι C-R στο σημείο $(0,0)$ αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Λύση

$$u(x,y) = \begin{cases} x-y, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

* Όταν η συνάρτηση αλλάζει τύπο, παίρνω πάντα τον ορισμό με το όριο, και όχι με κανόνες παραγώγισης.

$$v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$u_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0+h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0-0}{h} = 1$$

$$u_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0,0+h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

6-Dec-17

$$U_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{U(0+h,0) - U(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h} - 0}{h} = 1$$

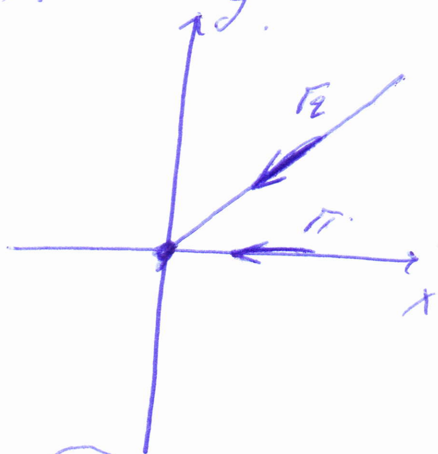
$V_y(0,0) = 1$.

Έλεγχος των εξισώσεων Cauchy-Riemann.

$$\boxed{\begin{aligned} u_x(0,0) &= 1 = v_y(0,0) \ \checkmark \\ u_y(0,0) &= -1 = -v_x(0,0) \ \checkmark \end{aligned}}$$

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{f(z)}{z} = \frac{x - y + i\,\frac{x^2+y^2}{x+y}}{x+iy}.$$

Θυμήσου ότι αν θέλω να δείξω ότι δεν υπάρχει κάποιο όριο μιγ. συναρτ. δουλεύω με καμπύλες (βλέπε χθεσινό μάθημα).



Γ_1: $z = x$, $x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x+i0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + ix}{x} = 1 + i$$

Γ_2: $z = x + ix$, $x > 0$ (δηλαδή $x = y$).

$$\lim_{x\to 0^+} f(x+ix) = \lim_{x\to 0^+} \frac{0 + i\,\frac{2x^2}{2x}}{x+ix} = \frac{ix}{x(1+i)} = \frac{i}{1+i}$$

$1+i \neq \frac{i}{1+i}$ Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$

Έτσι άρα δεν υπάρχει η $f'(0)$.

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
6-Dec-17d.

υπόθεση ⇒ συμπέρασμα
¬συμπέρασμα ⇒ ¬υπόθεση.

Παράδειγμα.

Η $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη

για κανένα $z \in \mathbb{C}$

Λύση (Εδώ η άρνηση του συμπεράσματος σημαίνει ότι δεν ισχύουν οι C-R, άρα ισχύει ¬υπόθεση = δεν είναι παραγωγίσιμη).

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. με $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$u_x(x,y) = 1$.

$u_y(x,y) = 0$

$v_x(x,y) = 0$

$v_y(x,y) = -1$.

Έλεγχος για C-R

$u_x(x,y) = 1 \neq -1 = v_y(0,0)$

(η δεύτερη βέβαια ισχύει, αλλά δεν έχει σημασία).

→ Δεν ισχύουν οι C-R οπότε δεν υπάρχει $f'(z)$ για κανένα $z \in \mathbb{C}$

Παράδειγμα. $f(z) = x^2 y + ix$, όπου $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Δείξτε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα $z \in \mathbb{C}$

Λύση

$u(x,y) = x^2 \cdot y$, $v(x,y) = x$

$u_x(x,y) = 2xy$

$u_y(x,y) = x^2$

$v_x(x,y) = 1$

$v_y(x,y) = 0.$

Σύστημα των Cauchy-Riemann

πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα.

• $u_x(x,y) = v_y(x,y) \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{xy = 0}$

• $u_y(x,y) = v_x(x,y) \Rightarrow \boxed{x^2 = -1}$

Όμως! τα x,y είναι πραγματικά! άρα το σύστημα που είναι αδύνατο γιατί δεν υπάρχει λύση για $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα: Δεν ισχύουν οι C-R για κανένα (x,y) άρα η $f(z)$ δεν είναι παραγωγίσιμη για κανένα $z \in \mathbb{C}$

Θεώρημα.

$f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοιχτό

Αν οι u και v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους u_x, v_x, u_y, v_y τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί, είναι ισοδύναμοι:

1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$

2) Ισχύουν οι Cauchy-Riemann στο (x_0, y_0).

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

6-Dec-17ε.

Παράδειγμα

$$f(z) = (x^2+y^2) + i\,2xy.$$

$z = x+yi \in \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη μόνο στα $z = x+i0$

(δηλαδή στον πραγματικό άξονα)

Λύση

$u(x,y) = x^2+y^2$ | $u_x(x,y) = 2x$, $u_y(x,y) = 2y$

$v(x,y) = 2xy$ | $v_x(x,y) = 2y$, $v_y(x,y) = 2x$

u_x, u_y, v_x, v_y υπάρχουν και είναι συνεχείς για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2x \\ 2y = -2y \end{cases} \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

!!! Συμπέρασμα: ισχύουν οι C-R μόνο για $z = x+i0$

∴ και είναι τα μόνα σημεία που είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 4η

$$f(z) = xy^2 + ix^2y \quad , \quad z = x+iy \in \mathbb{C}$$

να δείξω ότι η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $z=0$.

Λύση

$$u(x,y) = xy^2 \qquad u_x(x,y) = y^2 \ , \ u_y(x,y) = 2xy.$$

$$v(x,y) = x^2y \qquad v_x(x,y) = 2xy \ , \ v_y(x,y) = x^2.$$

u_x, u_y, v_x, v_y, υπάρχουν και είναι συνεχείς $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ 2xy = -2xy. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm x \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = y = 0$$

Άρα οι C-R ικανοποιούνται μόνο για $z = 0 + i0$.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

13-12-17 κ.

① Παράγωγοι Στοιχειωδών Συναρτήσεων

Πρόταση

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με $f(z)=e^{\alpha z}$, $z\in\mathbb{C}$

και $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$

και ισχύει $\boxed{f'(z)=\alpha e^{\alpha z}}$, $\forall z\in\mathbb{C}$

Απόδειξη

$$f(z)=e^{\alpha z}=e^{\alpha(x+yi)}=e^{\alpha x}[\cos(\alpha y)+i\sin(\alpha y)]=$$

$$=\underbrace{e^{\alpha x}\cos(\alpha y)}_{u(x,y)}+i\underbrace{e^{\alpha x}\sin(\alpha y)}_{v(x,y)}$$

$u_x(x,y)=\alpha e^{\alpha x}\cos(\alpha y)$ $\qquad$ $v_x(x,y)=\alpha e^{\alpha x}\sin(\alpha y)$

$u_y(x,y)=-\alpha e^{\alpha x}\sin(\alpha y)$ $\qquad$ $v_y(x,y)=\alpha e^{\alpha x}\cos(\alpha y)$

υπάρχουν και είναι συνεχείς $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Έλεγχος των C-R

$$u_x(x,y)=\alpha e^{\alpha x}\cos(\alpha y)=v_y(x,y)$$

$$u_y(x,y)=-\alpha e^{\alpha x}\sin(\alpha y)=-v_x(x,y)$$

Άρα η $f(z)=e^{\alpha z}$ είναι παραγωγίσιμη $\forall z\in\mathbb{C}$

$$f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

με u_x, u_y, v_x, v_y συνεχείς

Τότε, ισοδύναμοι ισχυρισμοί

1. Η f παραγωγίσιμη στο A
2. Ισχύουν οι CR $\left.\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}\right\}$

→ Πόρισμα

$f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

παραγωγίσιμη στο $z = x + yi \in A$

Τότε ισχύει

$$\boxed{f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = v_y(x,y) - i u_y(x,y)}$$

Άρα από πόρισμα, έχουμε

$$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = a e^{ax} \cos(ay) + i a e^{ax} \sin(ay)$$

$$= a e^{ax} [\cos(ay) + i \sin(ay)] \quad \text{(από Euler)}$$

$$= a e^{ax} e^{iay} = a e^{a(x+iy)} = a e^{az} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
13-12-17 b.

! Με την βοήθεια της αναγωγομένης εκθετικής μπορούμε να βρούμε και του cos και sin.

→ Πρόταση

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sin(\alpha z),\ z \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ και ισχύει

$$\boxed{f'(z) = \alpha \cdot \cos(\alpha z)},\ \forall z \in \mathbb{C}$$

Απόδειξη

(Μπορώ να κάνω ακριβώς το ίδιο με όριο).
να το δω ως άσκηση.

Όμως χρησιμοποιώντας τον μιγαδικό ορισμό

$$f(z) = \sin(\alpha z) = \frac{e^{i\alpha z} - e^{-i\alpha z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha z} - e^{-i\alpha z}\right)$$

άρα

$$f'(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha z}\right)' - \frac{1}{2i}\left(e^{-i\alpha z}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot i\alpha e^{i\alpha z} - \frac{1}{2i}(-i\alpha)e^{-i\alpha z} =$$

$$= a \boxed{\frac{e^{i\alpha z} + e^{-i\alpha z}}{2}}$$

$$= a \cdot \cos(\alpha z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Με αντίστοιχο τρόπο δείχνουμε ότι (να το δω ως άσκηση).

$$f(z) = \cos(\alpha z), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$f'(z) = -\alpha \sin(\alpha z), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = \tan z, \quad z \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, \; n \in \mathbb{Z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad z \neq n\pi + \pi/2, \; n \in \mathbb{Z}$$

$$f(z) = \cot z, \quad z \neq n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}, \quad z \neq n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$$

(λογαρίθμους διακλαδώσεις, μιγαδικούς)

Πρόταση

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \; z \neq 0$$

κεφαλαίο L, σημαίνει μοναδική διακλάδωση

έχει παράγωγο

$$\boxed{(\mathrm{Log}(z))' = \frac{1}{z}}$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad 0 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$$

(όχι τα σημεία του άξονα x δηλαδή).

Εφφροσύνα Μαθράκα

13-12-17c.

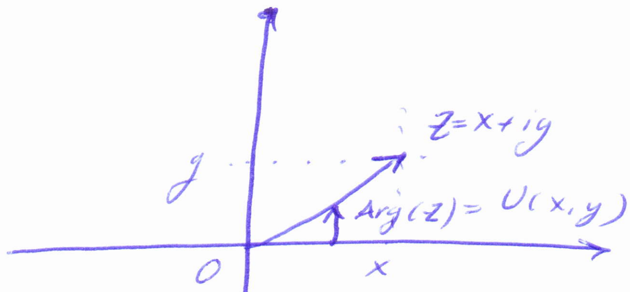
__Απόδειξη__

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(x+iy) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

$$= \underbrace{\ln\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}(x+iy)}_{v(x,y)}.$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \ln\sqrt{x^2+y^2} \\ v(x,y) &= \mathrm{Arg}(x+iy) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ v(x,y) &= \mathrm{Arg}(x+iy) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ v(x,y) &= \tan(v(x,y)) = \frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$$



Από το γράφημα αυτό έχουμε ότι $\tan(v(x,y)) = \frac{y}{x}$.

$$\cdot\ u_x(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Υπενθύμιση

$$(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2},\ t\in\mathbb{R}.$$

Άρα $v(x,y) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\cdot\ v_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Αντίστοιχα

$$V_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_y(x,y) =$$

Έλεγχος των C - R

$$\left.\begin{array}{l} u_x(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} = -v_x(x,y) \end{array}\right\} \checkmark$$

→ Παράγωγος

$$f'(z) = u_x + i v_x = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\cancel{\bar{z}}}{z\cdot\cancel{\bar{z}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$$

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
13-12-17 d.

① Ολόμορφες συναρτήσεις

(συναρτήσεις που έχουν παντού παράγωγο)

Ορισμός

$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, όπου A ανοιχτό, ονομάζεται ολόμορφη στο A όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.

→ **Πρόταση**

$f = u + iv : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο πεδίο Ω (ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$) για την οποία f, ισχύει $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$. Τότε η f είναι σταθερή στο Ω.

(Θυμηθείτε αν f σταθερή $f'(z) = 0$)

Απόδειξη (Αφού η f είναι ολόμορφη (από ορισμό))

$$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = v_y(x,y) - i u_y(x,y) = 0 \quad \forall z \in \Omega$$

οπότε έχουμε ότι $u_x = v_x = v_y = u_y = 0 \Rightarrow$

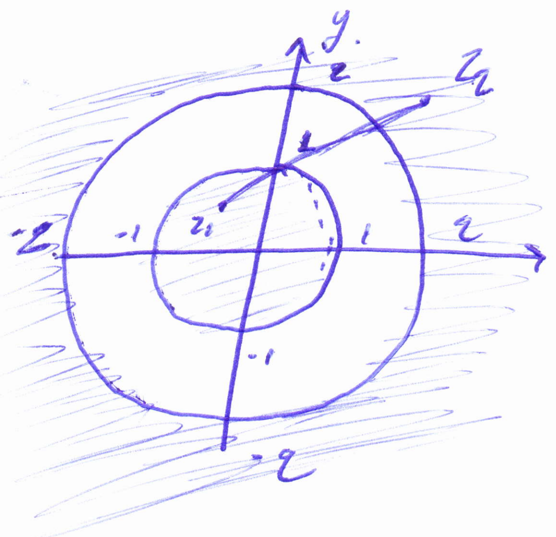
$\Rightarrow u$ και v σταθερές συναρτήσεις.

άρα $f = u + iv$ σταθερή συνάρτηση.

Παρατήρηση

Η υπόθεση ότι το Ω να είναι ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό είναι απαραίτητη διότι για παράδειγμα

$$f(z) = \begin{cases} 2, & |z| < 1 \quad (\text{κύκλος ο ακτίνα } 1, \text{ δίσκος}). \\ 1, & |z| > 2. \quad (\text{έξω απ' του κύκλο ακτίνας } 2). \end{cases}$$



με $f'(z) = 0$

όμως η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

Το σύνολο στο οποίο ορίσαμε την f είναι ανοικτό, αλλά δεν είναι πολυγωνικά συνεκτικό.

↳ σημαίνει ότι τα δύο οποιαδήποτε στοιχεία του συνόλου, μπορώ να τα ενώσω με μία ευθεία* η οποία βρίσκεται στο Ω.

Το κομμάτι της ευθείας $z_1 z_2$ το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στους δύο δίσκους μας δείχνει ότι το πεδίο ορισμού μας δεν είναι πολυγωνικά συνεκτικό.

---

* ή με πολλές ευθείες (πολυγωνική γραμμή).

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
13-12-17 ε.

→ Θεώρημα (για ολόμορφες συναρτήσεις).

$f = u + iv : \underline{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο πεδίο $\underline{\Omega}$

με μία από τις εξής ιδιότητες:

1) $Re(f)$ σταθερή συνάρτηση στο $\underline{\Omega}$

2) $Im(f)$ —//— —//—

3) $|f|$ —//— —//—

Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση στο $\underline{\Omega}$.

(Όλα αυτά προκύπτουν από τις C-R).

⇒ Απόδειξη

1) $u(x,y) = Re(f(x+yi)) = c$.

Τότε $u_x = u_y = 0$.

Επειδή η f είναι ολόμορφη, ισχύουν οι συνθήκες C-R

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_y &= 0 \\ v_x &= 0 \end{aligned}$$

Από το θεώρημα $f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(z) = 0$.

άρα η f είναι σταθερή στο $\underline{\Omega}$

Όταν βλέπω παράγωγο ή διαφορική → C-R

2) Αντίστοιχα (να το δω ως άσκηση).

3) $|f| = c \Rightarrow u^2 + v^2 = c^2$

Παραγωγίζουμε ως προς x και y.

$$\left.\begin{aligned} u\cdot u_x + v v_x &= 0 \\ u u_y + v \boxed{v_y} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{C-R} \left.\begin{aligned} u\cdot u_x + v\cdot v_x &= 0 \\ -u v_x + v \boxed{u_x} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u\cdot u_x + v\cdot v_x \\ v\cdot u_x - u v_x \end{aligned}\right\}.$$

που είναι ένα 2x2 σύστημα ως προς u_x, v_x και με σταθερά μέλη $= 0$ (ομογενές)

Η ορίζουσα του συστήματος $-u^2 - v^2 = -c^2 \neq 0$.
άρα η μόνη λύση του συστήματος είναι η μηδενική.

$$u_x = v_x = 0.$$

έχουμε (απ' το θεώρημα)

$$f'(z) = u_x + i v_x = 0 \Rightarrow$$

f σταθερή στο Ω.

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
13-12-17 Σ.

→ Λήμμα

Αν f και g ολόμορφες στο πεδίο Ω και

$$Re(f) = Re(g)$$

ή $$Im(f) = Im(g)$$

Τότε $f(z) = g(z) + c$, $\forall z \in \Omega$ όπου
c μιγαδική σταθερά.

⇒ Απόδειξη

ορίζω $h(z) = f(z) - g(z)$, $z \in \Omega$ με $h = u + iv$

Τότε $u = Re(h) = Re(f) - Re(g) = 0$

οπότε $u_x = u_y = 0$ στο Ω

με C-R $\Rightarrow v_x = v_y = 0$.

άρα

$h'(z) = u_x + iv_x = 0 \Rightarrow h$ σταθερή στο Ω

δηλαδή $h(z) = c$, $\forall z \in \Omega$

οπότε $f(z) = g(z) + c$, $\forall z \in \Omega$

(αντιστοίχως δουλεύω για $Im(f) = Im(g)$).

Ολοκληρώσιμες Μιγαδικές Συναρτήσεις.

Μιγαδικές Συναρτήσεις Πραγματικής Μεταβλητής.

$$\boxed{f(t) = u(t) + iv(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{f'(t) = u'(t) + iv'(t), \quad t \in I}$$

Ορισμός (Ολοκλήρωμα)

$f = u + iv : I = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

f μιγαδική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής.

η f θα ονομάζεται ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ αν οι u και v είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$ και ως ολοκλήρωμα της f ορίζουμε

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta u(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta v(t)\,dt}$$

(το ολοκλήρωμα μεταφέρεται αντιστοίχως σε πραγματικό και φανταστικό μέρος).

Ιδιότητες

1) $\int_\alpha^\beta [\lambda f(t) + \mu g(t)]\,dt = \lambda \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \mu \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$

(ιδιότητα γραμμικότητας ολοκληρώματος).

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
13-12-17g.

2) $\int_\alpha^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\gamma f(t)\,dt + \int_\gamma^b f(t)\,dt.$

3) Αν $F = u+iV$ μια αρχική της f στο $[\alpha, b]$
δηλαδή να ισχύει $F' = f$ στο $[\alpha, b]$,

τότε $\int_\alpha^b f(t)\,dt = F(b) - F(\alpha)$

(Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού)

4) $\left| \int_\alpha^b f(t)\,dt \right| \leq \int_\alpha^b |f(t)|\,dt.$

5) $\frac{d}{dt} \int_\alpha^t f(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t \in [\alpha, b].$

<u>Παράδειγμα</u> Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$I = \int_{-i}^{0} \cos(it)\,dt.$

<u>Λύση</u> (από Ιδιότητα 3).

$f(t) = \cos(it)$

$F(t) = \frac{1}{i}\sin(it) = -\cancel{1}i\sin(it)$

με $F'(t) = f(t)$.

άρα $\int_{-i}^{0} f(t)\,dt = F(0) - F(-i) = -i\sin 0 + i\sin(-i) = -i\sin i$

Καμπύλες του Μιγαδικού Επιπέδου

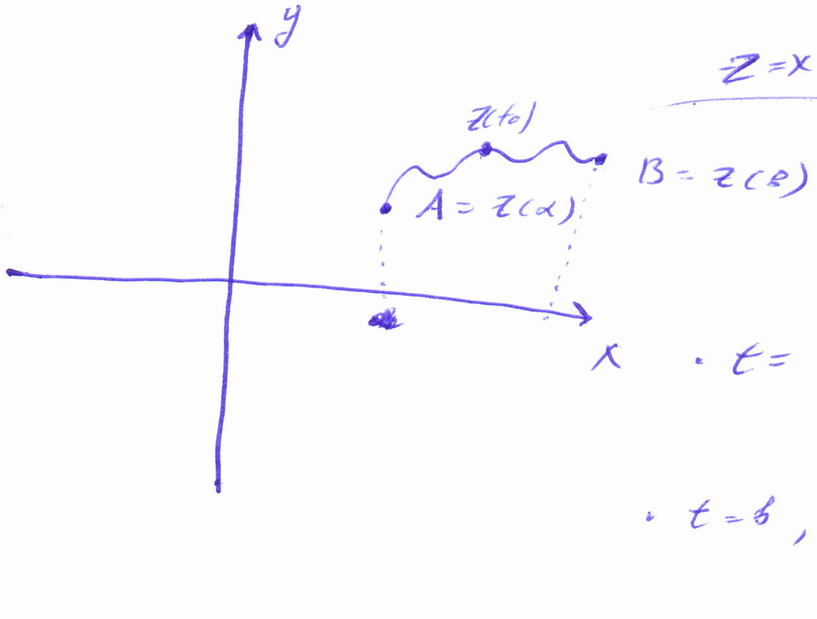
$$\boxed{z(t)=x(t)+iy(t),\quad t\in[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}.}$$

καθώς η μεταβλητή t διατρέχει το $[\alpha,\beta]$ το σημείο $(x(t),y(t))$ διαγράφει ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου το οποίο προσδιορίζουμε την εικόνα μιας καμπύλης.

(t είσοδος, z έξοδος)

<u>Ορισμός</u> (καμπύλης)

Ένα υποσύνολο C του $\mathbb{C}$ θα ονομάζεται καμπύλη όταν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$ έτσι ώστε $C=\{(x(t),y(t)),\ t\in[\alpha,\beta]\}$



$z=x+iy.$

- $t=\alpha$, $z(\alpha)=x(\alpha)+iy(\alpha)$
- $t=t_0\in(\alpha,\beta)$, $z(t_0)=x(t_0)+iy(t_0)$
- $t=\beta$, $z(\beta)=x(\beta)+iy(\beta)$.

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
13-12-17

$C: \quad z = z(t)$

η καμπύλη C, ορίζεται από μία συνάρτηση

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

$A\,(x(\alpha), y(\alpha))$ αρχή της καμπύλης C

$B\,(x(\beta), y(\beta))$ πέρας —||— —||—

Προσανατολισμένη καμπύλη

Η κατεύθυνση που αντιστοιχεί στην φορά κίνησης του σημείου $z(t)$ επάνω στην καμπύλη καθώς το t αυξάνει ορίζει το θετικό προσανατολισμό της καμπύλης.

* Μία καμπύλη $C: z(t), \ t \in [\alpha, \beta]$ ονομάζεται:

1) Κλειστή, όταν $z(\alpha) = z(\beta)$
(η αρχή και το τέλος ταυτίζονται)

2) Απλή, αν η $z(t)$ είναι 1-1 στο (α, β)
(δεν τέμνει τον εαυτό της)
δηλαδή για κάθε $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ με $t_1 \neq t_2$
ισχύει $z(t_1) \neq z(t_2)$.

Παραδείγματα.

Ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα z_1 και z_2 με αρχή το z_1 και πέρας το z_2 ορίζεται

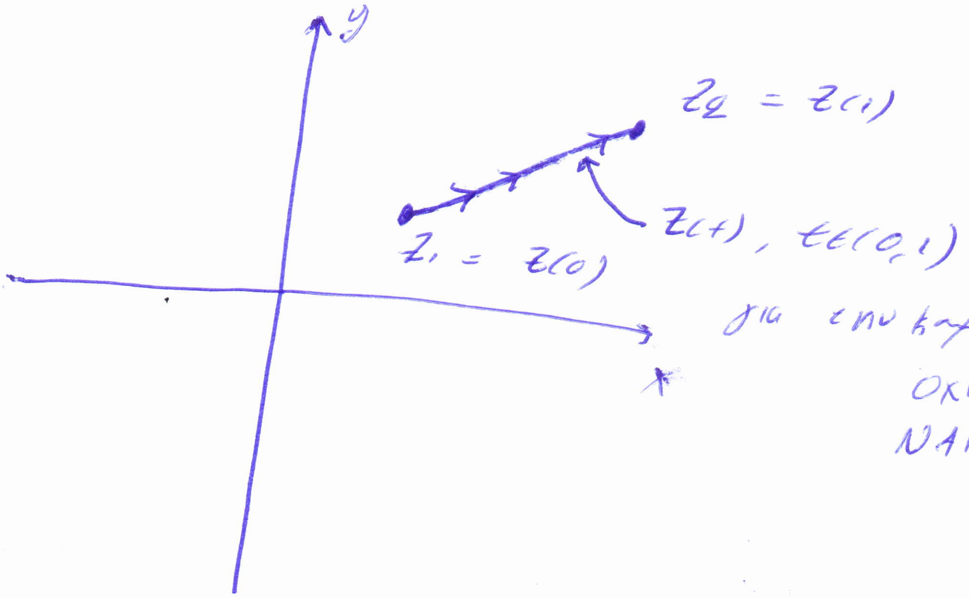
$$z(t) = z_1 t + (z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

Πρώτο σημείο: $t = 0$, $z(0) = z_1$ αρχή

Πέρας: $t = 1$, $z(1) = z_2$

$t \in (0, 1)$ ενδιάμεσα σημεία

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$$



$z = x + iy$.

για επικαμπύλη;

Όχι κλειστή $z(0) \neq z(1)$

ΝΑΙ Απλή ✓.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

19-12-17α.

① Καμπύλες στο Μιγαδικό Επίπεδο

$C: z = z(t) = x(t) + i y(t)$

$t \in [\alpha, \beta]$.

Όταν το t μεταβαίνει απ' το α στο β, διαγράφονται τα σημεία της καμπύλης. 1ο σημείο $t=\alpha$, τελευταίο $t=\beta$.

Ευθύγραμμο τμήμα: $z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0, 1]$

αρχικό σημείο για $t=0$: z_1

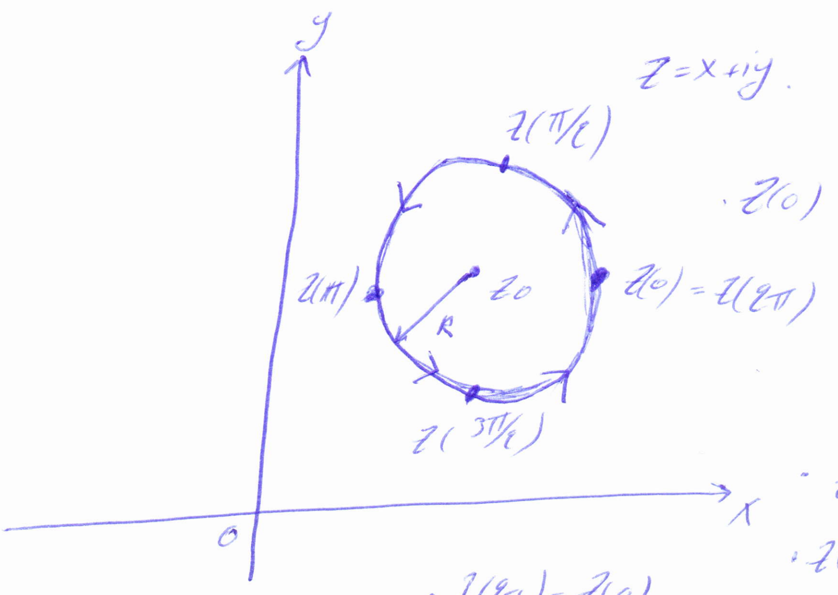
τελικό σημείο $t=1$: z_2.

Κύκλος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $R \in \mathbb{R}$, προσανατολισμένος αντιωρολογιακά

$$\boxed{z(t) = z_0 + Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]}$$

$\Rightarrow z(t) - z_0 = R e^{it}$

$\Rightarrow \boxed{|z(t) - z_0| = R}$ Δηλαδή τα σημεία $z(t)$ ισαπέχουν από το κέντρο z_0 (η απόσταση είναι η ακτίνα R).



$z = x + iy$.

· $z(0) = z_0 + R$.

φανταστικό του $z(0)$ = το φανταστικό του z_0

και πραγματικό = το πραγματικό του $z_0 + R$.

· $z(\pi/2) = z_0 + iR$.

· $z(\pi) = z_0 - R$

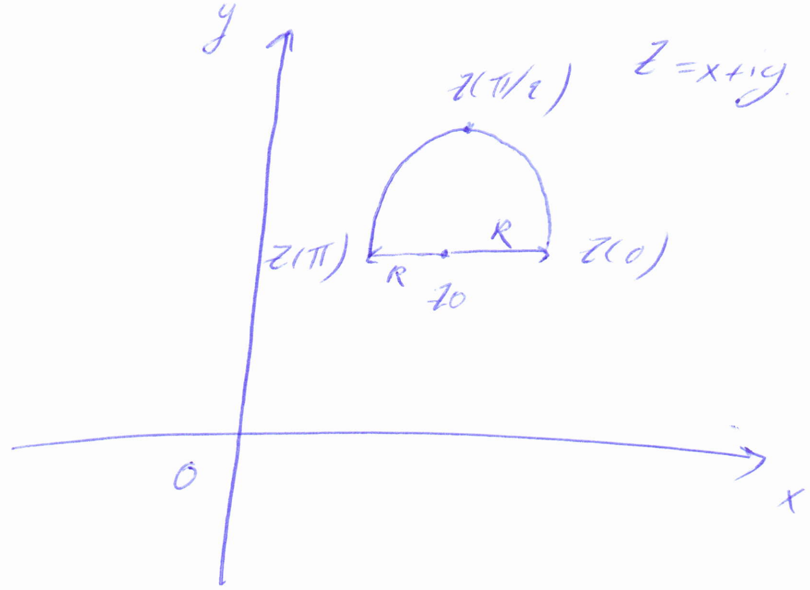
· $z(3\pi/2) = z_0 - iR$

· $z(2\pi) = z(0) = z_0 + R$.

Παράδειγμα.

Έστω μια καμπύλη C: $z(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$

(που είναι ένα υποσύνολο της γραφής καμπύλης (κύκλος) και είναι το πάνω ημικύκλιο)



* Απλή καμπύλη: ο κύκλος, και το ημικύκλιο! (δεν τέμνουν τον εαυτό τους)

Κλειστή καμπύλη: μόνο ο κύκλος. (αρχή = τέλος)

(* όλα με εξαίρεση που όπου ο κύκλος το αρχικό και το τελ. σημείο ταυτίζονται)

\# Αντίθετη καμπύλη

$C: \; z = z(t), \; t \in [\alpha, \beta]$.

τότε ορίζω την

$C^-: \; z = z(-t) \quad t \in [-\beta, -\alpha]$

και ονομάζεται αντίθετη καμπύλη της C

(ίδιο σύνολο σημείων το οποίο γράφεται με αντίθετη φορά από ότι στην C).

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
19-12-17 β.

Παράδειγμα.

Σε σχέση με τον κύκλο C

$C^-: \quad z = z(-t)$

$$\Rightarrow \boxed{z = z_0 + Re^{-it}}, \quad (t \in [-b, -a]) \quad \boxed{t \in [-2\pi, 0]}$$

είναι κύκλος με αρνητική φορά διαγραφής.

Ορισμοί

$C: \ z = z(t)$, $t \in [\alpha, b]$, καμπύλη του $\mathbb{C}$

ονομάζεται

1) C^1 καμπύλη: όταν η $z(t)$ έχει συνεχή παράγωγο
$z'(t)$, $\forall t \in [\alpha, b]$
(πρακτικά σημαίνει ότι δεν έχει γωνίες)

2) Λεία καμπύλη: όταν είναι C^1 και επιπλέον
ισχύει $z'(t) \neq 0$, $\forall t \in [\alpha, b]$.

Θεώρημα Jordan

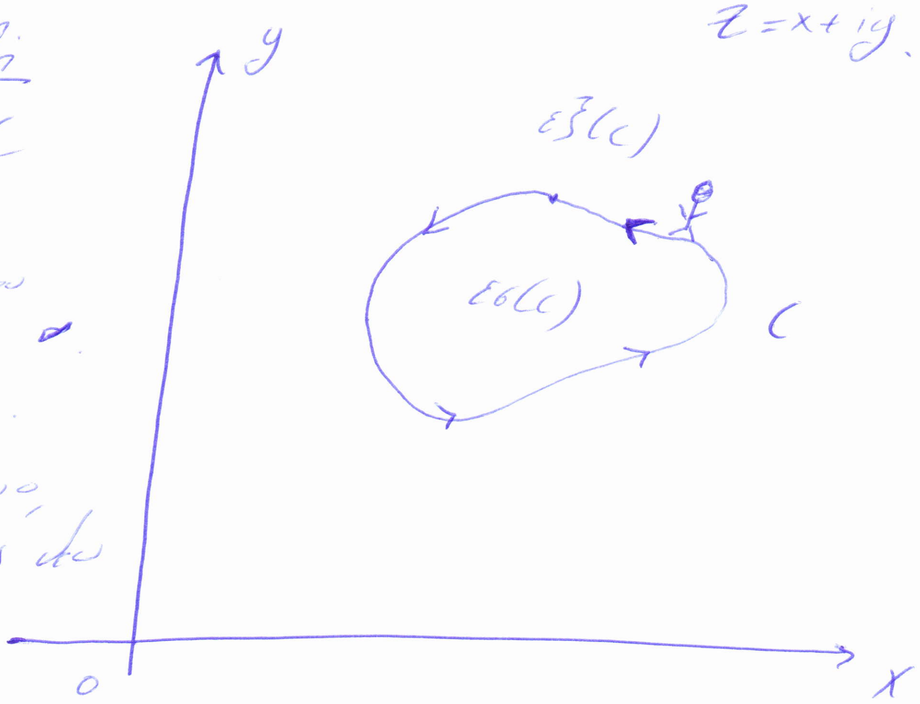
→ Κάθε απλή και κλειστή καμπύλη του $\mathbb{C}$, χωρίζει το $\mathbb{C}$ σε δύο πεδία, που έχουν κοινό σύνορο την καμπύλη C. Το ένα από τα δύο είναι φραγμένο, και ονομάζεται εσωτερικό της C (εσ(C), $int(C)$). Το άλλο δεν είναι φραγμένο και ονομάζεται εξωτερικό της C (εξ(C), $ext(C)$).

Έστω μια <u>απλή</u> <u>κλειστή</u> καμπύλη C

απλή = δεν τέμνει τον εαυτό της.

κλειστή: αρχή = τέλος.

το εσ(C) είναι φραγμένο, το εξ(C) γενικώς δεν είναι φραγμένο



Δηλαδή

<u>Ορισμός</u>: <u>Θετικός προσανατολισμός</u>.

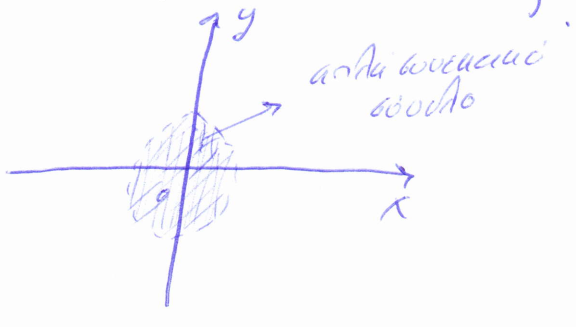
\# Μία απλή κλειστή καμπύλη C του $\mathbb{C}$, ονομάζεται <u>θετικά προσανατολισμένη</u> ως προς το εσ(C) όταν ο προσανατολισμός της συμπίπτει με τη φορά κίνησης παρατηρητή ο οποίος κινούμενος πάνω στη C, αφήνει <u>το εσ(C)</u> στα <u>αριστερά</u> του.

\# <u>Ορισμός</u> <u>απλά συνεκτικό πεδίο</u>

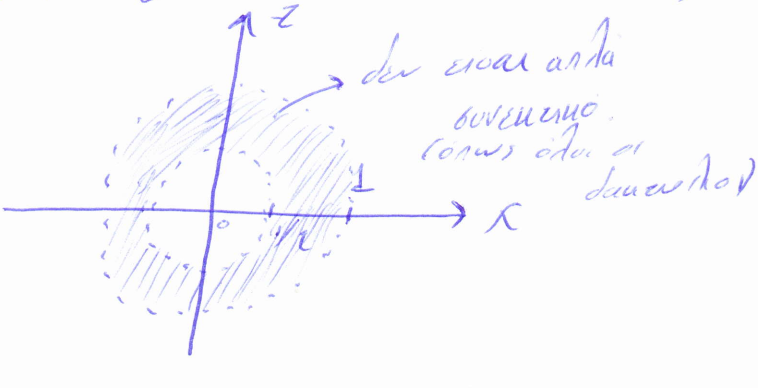
Ένα πεδίο <u>Ω</u> ονομάζεται απλά συνεκτικό, αν δεν περιέχει ~~οπές~~ οπές.

<u>Παραδείγματα</u>

1) $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$.



2) $D = \{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1 \}$



Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

19-12-17 γ. **Μιγαδικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα.**

Ορισμός

A : ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και

C : $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ καμπύλη του A

και $f : C \to \mathbb{C}$ συνεχής μιγαδική συνάρτηση

↓ ορίζεται πάνω στην καμπύλη

Ως Μιγαδικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της καμπύλης C ορίζεται:

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt.}$$

Συμβολισμός/ορισμός και υπολογισμός.

→ ολοκληρώνω μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής t.

Σημείωση: Αν C κλειστή τότε ο συμβολισμός τροποποιείται ως εξής

$$\oint_C f(z)\,dz.$$

Παράδειγμα. Υπολογίστε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

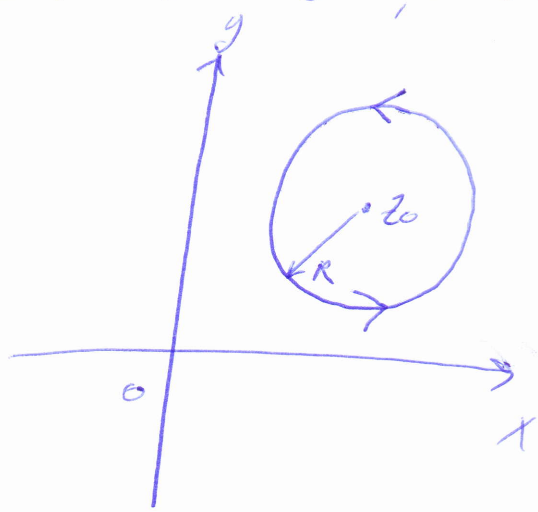
$$\oint_C z^3 \, dz$$

όπου C : περιφέρεια κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα 2.

Θετικά προσανατολισμένη.

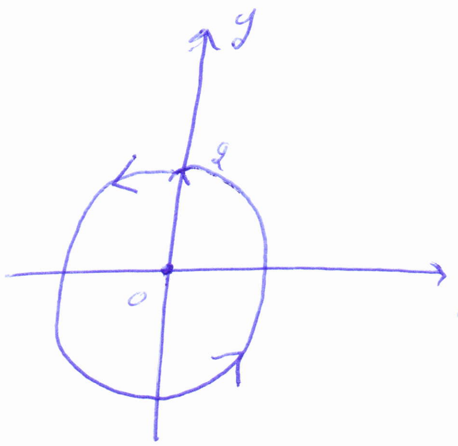
Λύση

$z(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, θετικά προσανατολισμένη.



άρα C : $z(t) = 0 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ θετικά προσανατολισμένη.

$f(z) = z^3$, $f(z(t)) = 2e^{it}$.



άρα $\oint_C z^3 dz = \int_0^{2\pi} (2e^{it})^3 (2i\, e^{it})\, dt =$

$z'(t) = 2ie^{it}$.

$= 16i \int_0^{2\pi} e^{4it}\, dt = 16i \frac{1}{4i} \left[e^{4it} \right]_{t=0}^{t=2\pi}$

$= 4(e^{8\pi i} - 1) = 0$

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
19-12-17 Δ.

Παράδειγμα #2 $\displaystyle\oint_C (z-z_0)^n\, dz \quad , n \in \mathbb{Z}$

όπου C: περιφέρεια κύκλου με κέντρο z_0 και ακτίνα R
θετικά προσανατολισμένη

Λύση

C: $z(t) = z_0 + R\cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$z'(t) = iRe^{it}$.

$$\oint_C (z-z_0)^n\, dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{(z_0 + Re^{it} - z_0)^n}_{f(z(t))} \cdot \underbrace{iRe^{it}}_{z'(t)}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R^n e^{int} \cdot Re^{it}\, dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt =$$

για $n \neq -1$

$$= iR^{n+1} \frac{1}{i(n+1)} \left[e^{i(n+1)t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} \left(e^{i(n+1)2\pi} - 1 \right) = 0 \quad , n \neq -1.$$

για $n = -1$

$$\oint_C (z-z_0)^n\, dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \quad , n = -1.$$

* Πρόταση

C: καμπύλη του $\mathbb{C}$ και $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχείς

Τότε ισχύουν

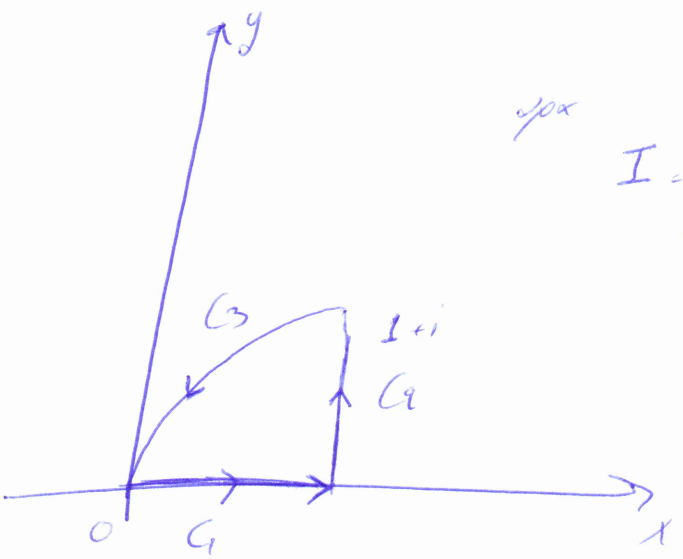
1) $$\int_{C^-} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$$

2) $$\int_C (af(z) + bg(z))\,dz = a\int_C f(z)\,dz + b\int_C g(z)\,dz.$$

Παράδειγμα #3

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_C \bar{z}\,dz \quad , \text{ όπου } C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 .$$



Λύση

$$I = \oint_{C_1} \bar{z}\,dz + \oint_{C_2} \bar{z}\,dz + \oint_{C_3} \bar{z}\,dz. \quad (1)$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

19-12-17 ε.

• $\boxed{z \in C_1}$: ευθύγραμμο τμήμα

$$z(t) = 0 + t(1-0), \quad t \in [0, 1]$$
$$= t.$$

$$z'(t) = 1.$$

$$f(z) = \bar{z}$$

$$\int_{C_1} \bar{z}\, dz = \int_0^1 \bar{t} \cdot 1\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

• $\boxed{z \in C_2}$

$$z(t) = 1 + t(1 + i - 1), \quad t \in [0, 1)$$

$$\Rightarrow z(t) = 1 + ti, \quad t \in [0, 1].$$

άρα $z'(t) = i$

$$\int_{C_2} \bar{z}\, dz = \int_0^1 \overline{(1+ti)} \cdot i\, dt = \int_0^1 (1-ti) i\, dt =$$

$$= i \int_0^1 (1-ti)\, dt = i + \frac{1}{2}.$$

• $\boxed{z \in C_3}$: τεταρτοκύκλιο με κέντρο $z_0 = 1$, και ακτίνα $R = 1$, $t \in [\pi/2, \pi]$.

άρα $z(t) = 1 + 1 \cdot e^{it}$, $t \in [\pi/2, \pi]$

$$\int_{C_3} \bar{z}\, dz = \int_{\pi/2}^{\pi} \overline{(1+e^{it})}\, i e^{it}\, dt =$$

$$= i \int_{\pi/2}^{\pi} (1+e^{-it}) e^{it}\, dt = \dots = -1 + i\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

άρα από (1) $\Rightarrow$ $I = \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} - 1 + i\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi i}{2}$.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Διατήρηση γωνιών

Δυνάμεις Μιγαδ.

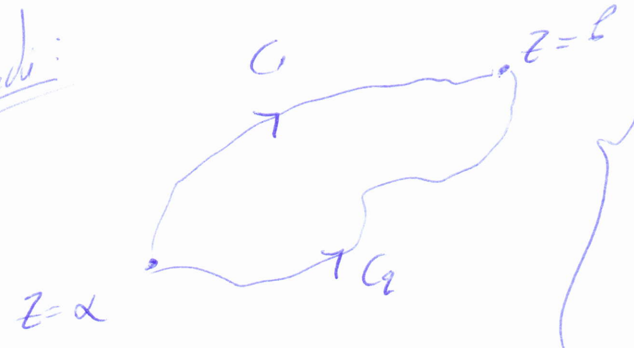
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (16c)

19-12-17 Σ.

Θεώρημα. $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής στο πεδίο Ω η οποία έχει αρχική F στο Ω (δηλαδή να ισχύει $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$). Τότε για κάθε δύο σημεία α και β του Ω, με $\alpha \neq \beta$ και για κάθε τμηματικά C^1 καμπύλη C του Ω με αρχή το α και πέρας το β ισχύει

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha)}$$

Δηλαδή:



$$\left\{\begin{aligned} \int_{C_1} f(z)\,dz &= F(\beta) - F(\alpha) \\ \int_{C_2} f(z)\,dz &= F(\beta) - F(\alpha) \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

$\to$ ανεξαρτησία από την καμπύλη ολοκλήρωσης.

Θεώρημα.

$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, συνεχής στο πεδίο Ω:

Ισοδύναμοι ισχυρισμοί:

1) $\int_C f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης ολοκλήρωσης C του Ω

δηλαδή για κάθε δύο καμπύλες C_1, C_2 του Ω ισχύει

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

2) Για κάθε <u>κλειστή</u> καμπύλη C του Ω ισχύει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C f(z)\,dz = 0$

3) Η f έχει μία αρχική F στο Ω, δηλαδή υπάρχει F ώστε να ισχύει $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Ευφροσύνη
Μαδιμενιά
19-12-17π.

Απόδειξη 2) Αν χωρίσω την καμπύλη σε δύο καμπύλες με κοινά άκρα $[\alpha, \beta]$ έχω

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1 \cup C_2^-} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{C} f(z)\,dz = 0$$ όπου $C = C_1 \cup C_2^-$ τυχούσα κλειστή καμπύλη.

Παράδειγμα. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

$$I = \int_C z^3 \, dz$$ όπου C τμηματικά C_1 καμπύλη

με αρχή το $z_1 = 1$ και πέρας το $z_2 = 1/2$.

Λύση

$$f(z) = z^3, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$F(z) = \frac{z^4}{4} \text{ διότι } F'(z) = f(z), \ \forall z \in \mathbb{C}$$

άρα $$I = \int_C z^3 \, dz = F(z_2) - F(z_1) = \frac{(\frac{1}{2})^4}{4} - \frac{1^4}{4} \Rightarrow$$

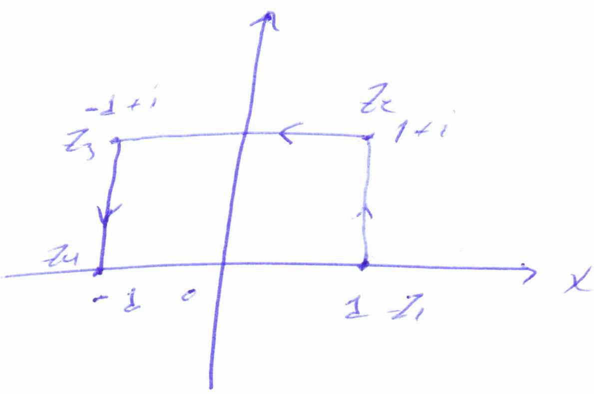
$$\Rightarrow I = -\frac{15}{64}$$

Σημείωση: για τη λύση δεν θεώρησα καν καμπύλη!

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

$$I = \int_C \frac{1}{z^3} \, dz$$



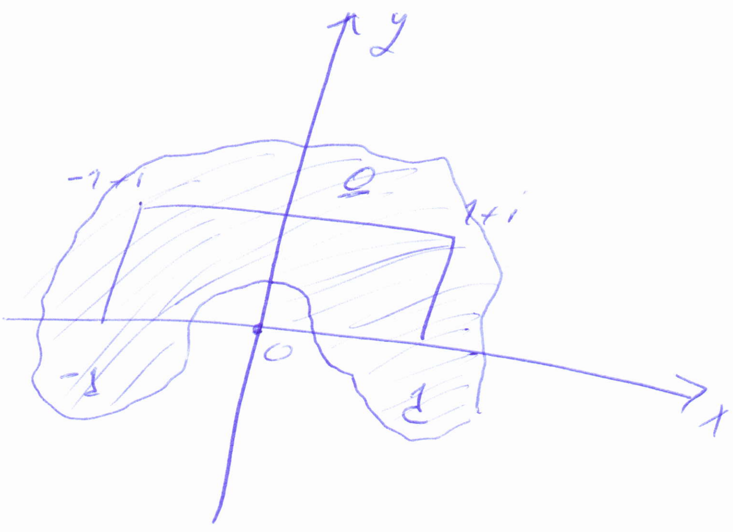
Λύση

Ψάχνω να βρω μια αρχική.

$$f(z) = z^{-3}, \quad \frac{z^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2z^2} = F(z) = -\frac{1}{2} z^{-2}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

με $F'(z) = f(z)$

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
19-12-17 Θ.



$\underline{\Omega}$ πεδίο

Ισχύει $F'(z) = f(z), \forall z \in \underline{\Omega}$

άρα

$I = F(z_4) - F(z_1) = F(-1) - F(1) = 0$.

$F(z) = -\frac{1}{8} - z - 2$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
20/12/17 α.

Ερώτηση: Ιδιότητες συνάρτησης $f(z)$ σε κατάλληλα πεδία ορισμού ώστε $\oint_C f(z)dz = 0$;

Απάντηση: 1. για τις $f(z)$ οι οποίες έχουν μια αρχική $F(z)$ σε Ω
2. για τις $f(z)$ ολόμορφες (έχουν συνεχή παράγωγο στο π.ο.) απλά συνεκτικό πεδίο Ω

Θεώρημα Cauchy

Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο Ω. Τότε για κάθε απλή κλειστή και τμηματικά C^1 καμπύλη C του Ω ισχύει:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

Παράδειγμα

$$I = \oint_C \cos(z^4)\, dz$$

όπου C κλειστή, απλή τμηματικά C^1 καμπύλη του $\mathbb{C}$

Λύση $f(z) = \cos(z^4)$, $z \in \mathbb{C}$
και $\mathbb{C}$ απλά συνεκτικό πεδίο
f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$
από θεώρημα Cauchy $I = 0$.

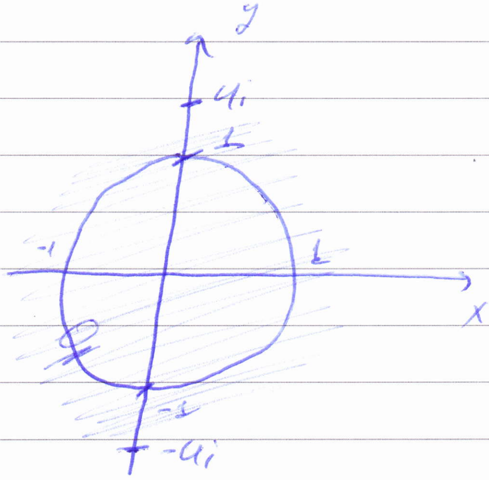
Παράδειγμα

$$I = \oint_C \frac{e^z}{z^2+16}\, dz = 0 \qquad C: |z| = 1$$

μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{C}$

Λύση

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+16} = \frac{e^z}{(z-4i)(z+4i)}, \quad z \neq 4i, \ z \neq -4i, \ z \in \mathbb{C}$$



Επιλογή Ω: θα περιλαμβάνει την καμπύλη C αλλά όχι τα σημεία $4i$ και $-4i$

Για παράδειγμα μπορούμε να επιλέξουμε τον δίσκο ακτίνας 2 (το σχήμα δεν είναι και το καλύτερο) όπου $\pm 4i \notin \Omega$

Η συνάρτηση $f(z)$ είναι ολόμορφη στο ανοιχτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό Ω.
άρα από θεώρημα Cauchy $\Rightarrow I = 0$.

Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

Θεώρημα:
Έστω $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο Ω και C μια απλή, τμηματικά C^1 καμπύλη, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του Ω.
Αν το z_0 είναι ένα σημείο στο εσωτερικό της C, τότε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Παρατηρήσεις

1) $$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

2) $$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in \varepsilon\sigma(C) \\ 0, & z_0 \in \varepsilon\xi(C) \end{cases}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
20-12-17 β.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $I = \oint_C \frac{e^z}{z}\, dz$ όπου $C: |z| = 1$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και το σημείο $z_0 = 0 \in \varepsilon\sigma(C)$ οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i.$$

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{z-0}\, dz$$

Θεώρημα Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους.

Έστω $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο απλά συνεκτικό πεδίο Ω του $\mathbb{C}$. Και C μια απλή κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του Ω. Τότε ισχύει:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπου $z_0 \in \varepsilon\sigma(C)$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $I = \oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz$ όπου $C: |z| = 1$ και $n \in \mathbb{N}$

Λύση

$f(z) = e^z$, ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

και $f^{(n)}(z) = e^z$ $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$

Επίσης $0 \in \varepsilon\sigma(C)$

άρα $I = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{2\pi i}{n!} e^0 = \frac{2\pi i}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

Παράδειγμα

$$I = \oint_C \frac{\sin(z)}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}\, dz \text{ , όπου } C: |z| = 1.$$

Λύση

$f(z) = \sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$, είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$
και το σημείο $z_0 = \pi/4 \in \varepsilon\sigma(C)$
(αφού $z_0 = \pi/4 < 1$)

$$\text{άρα } I = \frac{f^{(2)}(\pi/4)\cdot 2\pi i}{2!} = -\sin(\pi/4)\cdot \pi i = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

Μετασχηματισμός Fourier

$$f(t) \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \hat{f}(\omega)$$

χρόνος — κυκλική συχνότητα

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
Ως μετασχηματισμός Fourier της f ορίζεται

$$\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το αναγραφόμενο γενικό ολοκλήρωμα.
Ο Μ/Σ Fourier συμβολίζεται $\mathcal{F}\{f\}$ ή $\mathcal{F}\{f(t)\}$.

$$R(\omega) = Re(\hat{f}(\omega))$$
$$X(\omega) = Im(\hat{f}(\omega))$$
$$A(\omega) = |\hat{f}(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$
$$\Phi(\omega) = Arg(\hat{f}(\omega))$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
20-12-17α.

> Αντίστροφος Μ/Σ Fourier

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση της οποίας υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$

τότε ισχύει $$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}$$

$$\hat{f}(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}$$
$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}.$$

$$f(t)\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}}\hat{f}(\omega)$$

Παράδειγμα

Βρείτε του Μ/Σ Fourier του ορθογώνιου παλμού

$$P_T(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T\\ 0 & |t|>T\end{cases}$$

Λύση

$f(t)=P_T(t)$

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}P_T(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$=\int_{-T}^{T}e^{-i\omega t}\,dt\overset{\omega\neq0}{=}\frac{-1}{i\omega}\Big[e^{-i\omega t}\Big]_{t=-T}^{t=T}=\frac{-1}{i\omega}\left(e^{-i\omega T}-e^{i\omega T}\right)=$$

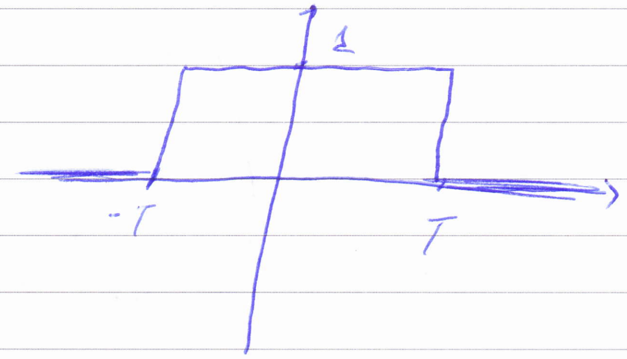
$$=\frac{1}{\omega}\overbrace{\frac{e^{i\omega T}-e^{-i\omega T}}{i}}^{\sin}=\frac{2}{\omega}\sin(\omega T),\ \omega\neq0.$$

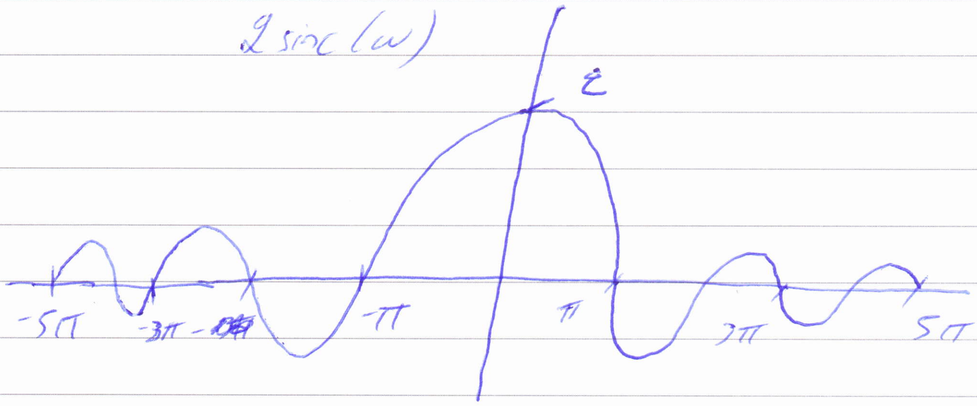
για $\omega=0$ $\hat{f}(\omega)=2T$ άρα $$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{2}{\omega}\sin(\omega T), & \omega\neq0\\ 2T, & \omega=0.\end{cases}=$$

$$=2T\,\text{sinc}(\omega T)$$

από τον ορισμό $\operatorname{sinc}(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $\quad \operatorname{sinc}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = 2T\operatorname{sinc}(\omega T)}$$ συνάρτηση δειγματοληψίας





Παράδειγμα

$f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, $\alpha > 0$ η $u(t)$ είναι η βηματική

$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Λύση $\hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,dt =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t}\,dt. =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-(\alpha+i\omega)t}\,dt = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{\alpha + i\omega} \left[e^{-(\alpha+i\omega)t} \right]_{t=0}^{t=b} \right] =$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
20-12-17α.

$$= -\frac{1}{\alpha+i\omega} \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-(\alpha+i\omega)b} - 1 \right) = +\frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \hat{f}(\omega)$$

Μ/Σ Fourier Άρτιων και Περιττών Συναρτήσεων

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$$

Τότε $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt$.

Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$R(\omega) = Re(\hat{f}(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt \text{ και}$$

$$X(\omega) = Im(\hat{f}(\omega)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt.$$

$R(-\omega) = R(\omega)$ άρα R άρτια συνάρτηση

$X(-\omega) = -X(\omega)$ άρα X περιττή συνάρτηση.

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άρτια ($f(-t) = f(t)$) τότε $f(t)\sin(\omega t)$ περιττή ως προς t και άρα $X(\omega) = 0$ δηλ. ο Μ/Σ Fourier είναι πραγματική συνάρτηση.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιττή ($f(-t) = -f(t)$) τότε $f(t)\cos(\omega t)$ περιττή, άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t) = 0 = R(\omega)$$

δηλαδή $\hat{f}(\omega) = iX(\omega)$ φανταστική συνάρτηση.

αλλά: δεν ξέρω τον εαυτό της.

C^1 καμπύλη: η $z(t)$ έχει συνεχή παράγωγο

Ολόμορφη συνάρτηση: έχει παντού παράγωγο

αλλά συνεπώς κάτι $\underline{o}$? λογικά θα υπάρχει κάτι!

Θ Ασυνέχεια συνάρτησης με πλευρικά όρια.

• $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ \frac{x}{2}+1, & x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{2}+1 = 2$

$\neq$ άρα f δεν είναι συνεχής

$\lim_{x \to 2^-} 2-x = 0$

• $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$

$\lim_{x \to 0}(-x) = \lim_{x \to 0}(x) = 0$

άρα $\lim_{x \to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$

άρα f συνεχής.

• $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Θέλω δύο $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Έστω $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $f(a_n) = \sin(2n\pi) = 0 \to 0$

$b_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$, $f(b_n) = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1 \to 1$

άρα f όχι συνεχής.

Θ Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων.

A. 1) Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι φραγμένη.

2) $\exists\, x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \max f$.

3) $\exists x_1 \in [\alpha, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \min f$.

B. f συνεχής στο $[\alpha, b]$ (με $f(\alpha) < f(b)$) και $c \in (f(\alpha), f(b))$

τότε $\exists\, x_0 \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = c$.

Θ Πόρισμα.

Αν $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ (πολυώνυμα) $\deg f =$ περιττός, τότε
(με στοιχεία από το $\mathbb{R}$)

η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x^1 + \alpha_0$ $\quad n \to$ περιττός.

$$f(x) = \alpha_n x^n \underbrace{\left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{x} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n x^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_n x^n}\right)}_{g(x)}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1 \iff \exists\, M > 0$ τέτοιο ώστε $x \geq M$, $g(x) > 0$.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1 \iff \exists\, N > 0$ τέτοιο ώστε $x \leq -N$, $g(x) > 0$.

Bolzano $[-N, M]$

$f(-N) = \alpha_n (-N)^n g(-N) < 0$

$f(M) = \alpha_n (M)^n g(M) > 0$

άρα $\exists\, x_0 \in (-N, M)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.