Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

Ακρότατα υπό συνθήκη
(Μέθοδος Langrange)

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x,y)=5x^2+y^2-12xy$.

υπό τον περιορισμό $g(x,y)= 7x+4y=30$

βήμα 1

γράφω τον περιορισμό στην μορφή

$$(\text{Κάτι}) = 0$$

$$7x+4y-30=0$$

βήμα 2

Ορίζω νέα συνάρτηση $L(x,y,\lambda)$ ως εξής.

$$L(x,y,\lambda) = \underbrace{5x^2+y^2-12xy}_{f(x,y)} + \lambda\underbrace{(7x+4y-30)}_{\text{περιορισμό στην σωστή μορφή}}$$

$$\Rightarrow L(x,y,\lambda)=5x^2+y^2-12xy+\lambda 7x+4\lambda y-30\lambda$$

βήμα 3

για τη συνάρτηση $L(x,y,\lambda)$ βρίσκω τις

$$L_x = 10x-12y+7\lambda$$
$$L_y = 2y-12x+4\lambda$$
$$L_\lambda = 7x+4y+30$$

και θέλω $\nabla f = \bar{0}$

δηλαδή:
$$\left.\begin{aligned} 10x-12y+7\lambda&=0\\ 2y-12x+4\lambda&=0\\ 7x+4y+30&=0 \end{aligned}\right\}$$

... λύνοντας έχω την τριάδα $\overset{x}{(2}, \overset{y}{4}, \overset{\lambda}{4})$

κρίσιμο σημείο

Βήμα 4

Υπάρχει ένας ποιοτικός περιορισμός αν δηλαδή:

$$\left(\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}\right) \neq (0,0)$$

στο σημείο που θέλω

Θα πρέπει αυτό να ισχύει, για να συνεχίσω.

(στο παράδειγμα)

$$\frac{dg}{dx} = g_x = 7 \quad , \quad \frac{dg}{dy} = g_y = 4$$

ισχύει ο περιορισμός.

Βήμα 5

Ορίζω τον πίνακα H ως εξής

$$H = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & g_x & g_y \\ \hline g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{array}\right]$$

συνάρτηση Langrange στις κανονικές μεταβλητές

και τον υπολογίζω για να βρω τα κρίσιμα σημεία.

(στο παράδειγμα)

$L_{xx} = 10$, $L_{xy} = -12$, $L_{yy} = 2$, $L_{yx} = -12$.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 7 & 10 & -12 \\ 4 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 6 Υπολογίζω την ορίζουσα.

Κριτήριο

Αν ο H είναι 3×3 (όπως στο παράδειγμα)

και $|H| > 0$ στο (x_0, y_0) τοπικό μέγιστο

και $|H| < 0$ στο (x_0, y_0) τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα.

$f(x,y) = x + y$

συνθήκη $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Λύση

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda$$

$L_x = 1 + 2\lambda x$

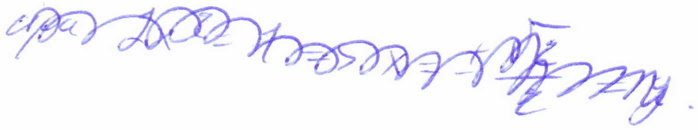
$L_y = 1 + 2\lambda y$

$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1$

$\nabla L = (L_x, L_y, L_\lambda) = \bar{0}$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 1 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \frac{1}{-2\lambda} \\ y &= -\frac{1}{2\lambda} \end{aligned} \quad x = y.$$

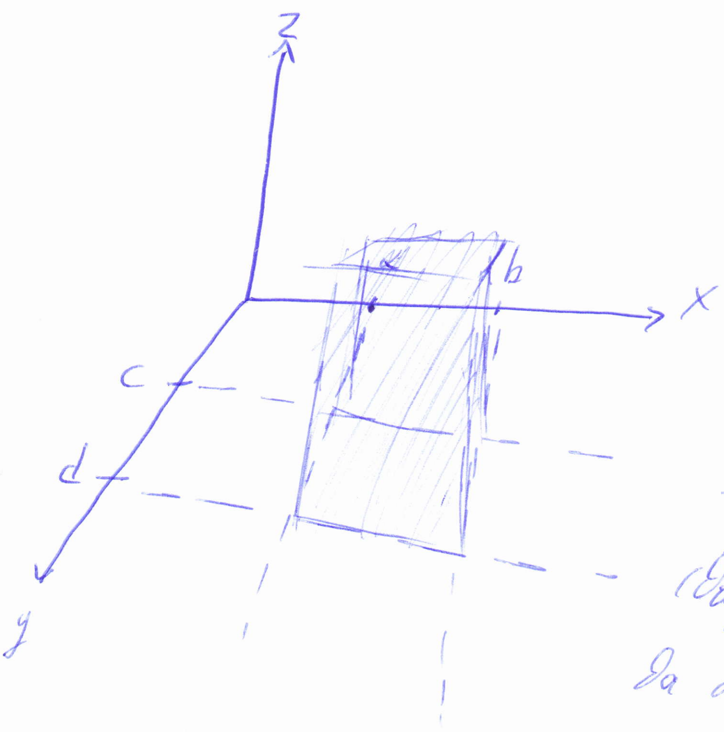
....



Μαθηματική ανάλυση ΙΙ

• Διπλά ολοκληρώματα.

σε ορθογώνιο χωρίο: δηλαδή $D = [\alpha, b] \times [c, d]$.



→ Μέθοδος Fubini

$$\int_{\alpha}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dx\,dy.$$

→ θα ολοκληρώνω πρώτα ως προς x (θεωρώντας το y αριθμό), και στη συνέχεια θα ολοκληρώνω το αποτέλεσμα ως προς y.

(Η το ανάποδο, πρώτα ως προς y και μετά ως προς x)

Παράδειγμα

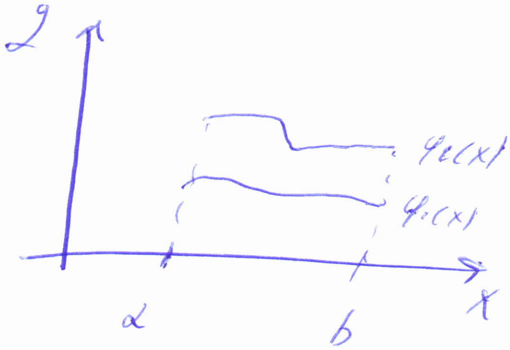
$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}(x^2+3xy)\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}(x^2+3xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}\left[\int_{0}^{1}(x^2+3yx)\,dx\right]dy = \int_{-1}^{0}\left[\frac{x^3}{3}+3y\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \int_{-1}^{0}\left[\left(\frac{1^3}{3}+3y\frac{1^2}{2}\right)-\left(\frac{0^3}{3}+3y\frac{0^2}{2}\right)\right]dy$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}y\right) = \left[\frac{1}{3}y+\frac{3}{2}\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\ldots$$

Είδη χωρίων.

→ **1η περίπτωση**: Το x είναι ανάμεσα σε αριθμούς, αλλά το y ανάμεσα σε συναρτήσεις του x.

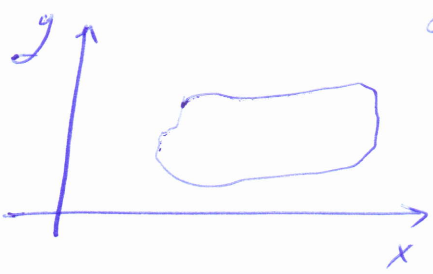


$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

→ **2η περίπτωση**: Το y είναι ανάμεσα σε αριθμούς, αλλά το x ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις του y.

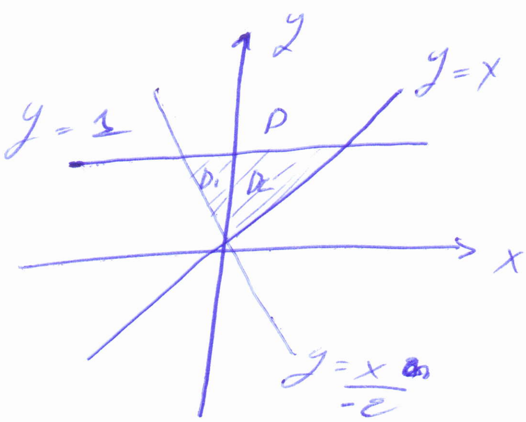
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

→ **3η περίπτωση**: και το x και το y, φράσσονται από συναρτήσεις.



Θέμα

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$



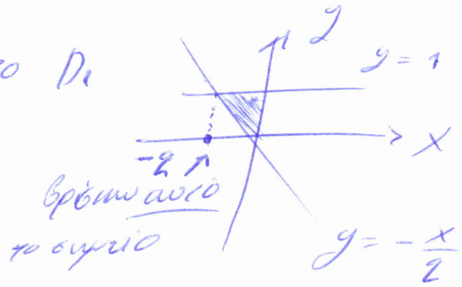
Σπάω το D σε δύο χωρία. Τα D_1 και D_2

D: $y = x$

$y = -x/2$

$y = 1$

• Για το D_1

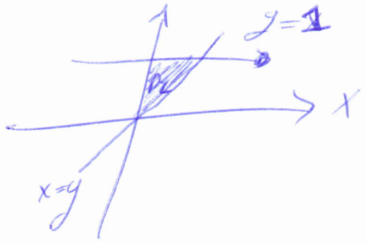


Άρα το x είναι από -2 έως 0. και το y από $\frac{-x}{2}$ έως 1, άρα $\int_{-2}^{0}\left[\int_{-x/2}^{1} xy\,dy\right]dx =$

$$= \int_{-2}^{0}\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{-x/2}^{1}dx = \int_{-2}^{0}\left(x\frac{1^2}{2} - x\frac{x^2}{4}\right)dx = \int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{8}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{32}\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{4}{4} - \frac{16}{32}\right) = \frac{1}{2}$$

• Για το D_2



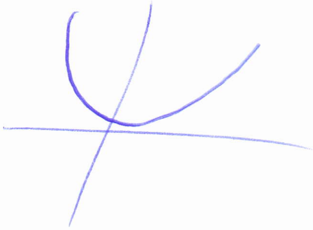
το x είναι από 0 έως 1 και το y από x έως 1.

άρα $\int_0^1 \int_x^1 xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_x^1 dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right] dx$

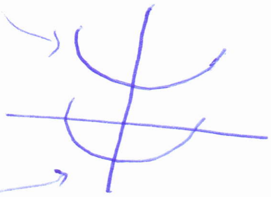
$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$

— Θεωρούμε γνωστά —

$y = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$

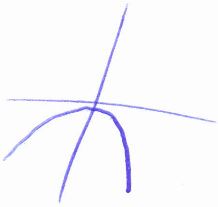


$y = \alpha x^2 + \beta$ με $\alpha > 0$

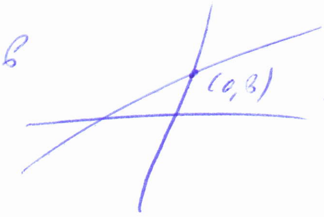


$y = \alpha x^2 - \beta$

$y = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$

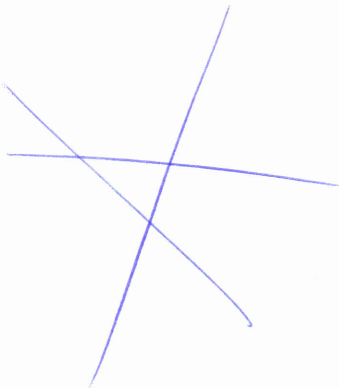


$y = \alpha x + \beta$



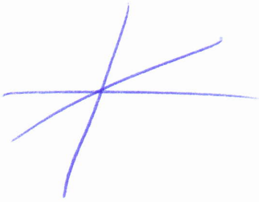
με $\alpha > 0$

$y = -\alpha x + \beta$



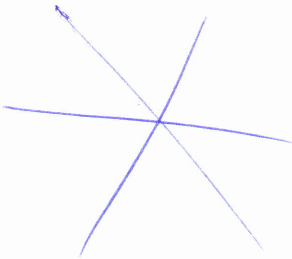
$y = \alpha x$

$\alpha > 0$

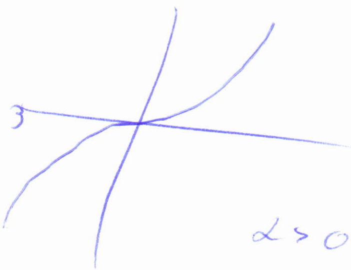


$y = \alpha x$

$\alpha < 0$

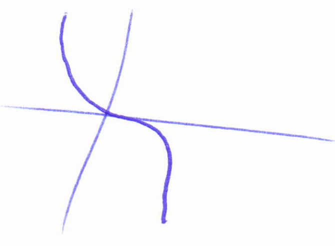


$y = \alpha x^3$



$\alpha > 0$

$y = -\alpha x^3$



Μαθηματική ανάλυση ΙΙ

Θεώρημα του Fubini.

→ Θεώρημα του Fubini (πρώτη μορφή)

$f(x,y)$ συνεχής στο ορθογώνιο χώρο

$R: a \leq x \leq b$ και $c \leq y \leq d$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

→ Θεώρημα του Fubini (ισχυρή μορφή)

Έστω $f(x,y)$ συνεχής στο χωρίο R.

1. Αν το R ορίζεται από τις σχέσεις $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ και οι g_1 και g_2 είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

2. Αν το R ορίζεται από τις σχέσεις $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2 y$ και οι h_1 και h_2 είναι συνεχής στο $[c, d]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

$(\cos t)' = -\sin t$
$(\sin t)' = \cos t.$

⇒ Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Έστω $f(x,y) = (\ , \ )$ και $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ μια καμπύλη για $t \in [\alpha, b]$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ως προς την καμπύλη γ

$$\int_\gamma \bar{f}\, ds = \int_\alpha^b < f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) > dt$$

όρια καμπύλης

Παράδειγμα.

$\bar{f} = (x, 2y)$ $\quad \int_c \bar{f}\, dr$ $\quad$ όταν $c: r(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $t \in [0, \pi/2]$

Λύση

$$\int_c \bar{f}\, dr = \int_0^{\pi/2} < \bar{f}(r(t)) \cdot r'(t) > dt$$

εσωτερικό γινόμενο

$f(r(t)) = (\cos t, 2\sin t)$

$r'(t) = (-\sin t, \cos t)$

άρα

$< f(r(t)) \cdot r'(t) > =$

$= (\cos t, 2\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) =$

$= -\sin t \cos t + 2\sin t \cos t$

$= \sin t \cos t$

άρα $\int_C \bar{f}\, dr = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, dt$

αν θέσω $\sin t = u$ τότε $du = \cos t$.

και θα έχω $\int_0^1 u\, du =$ όταν $t \to 0$, $\sin t \to 0$ άρα $u \to 0$; όταν $t \to \pi/2$, $\sin t \to \pi/2$ άρα $u \to 1$

$= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

<u>Θέμα 2014</u>

$\bar{f} = (-2x, y-x)$ $\quad C: y = x^2+1$

$r(t) = (x(t), y(t))$ $\quad 0 \le x \le 1$

$f(r(t)) = (-2t, t^2+1-t)$ $\quad = (t, t^2+1)$ $\quad 0 \le t \le 1$

$r'(t) = (1, 2t)$

άρα $\langle f(r(t)) \cdot r'(t) \rangle = (-2t, t^2+1-t) \cdot (1, 2t)$

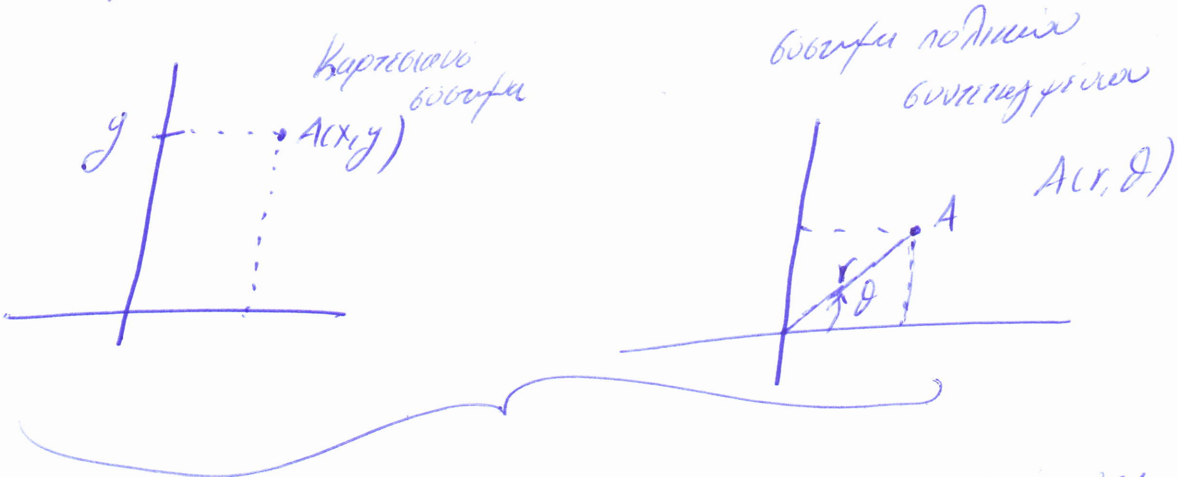
$= \cancel{-2t} + 2t^3 + \cancel{2t} - 2t^2$

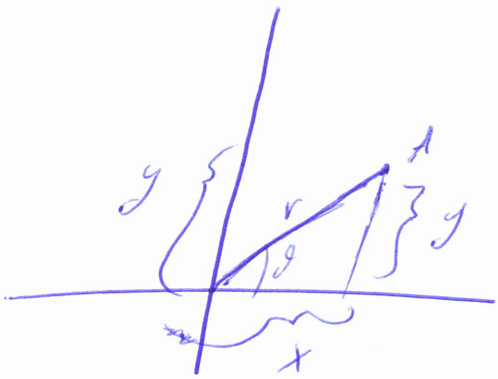
$= 2t^3 - 2t^2$

άρα $2\int_0^1 (t^3 - t^2)\, dt = 2\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) 2.$

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

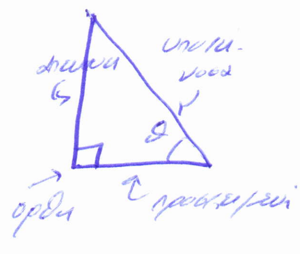
Θ Πολικές συντεταγμένες.





$$ημθ = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$συνθ = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}}$$



$$\left.\begin{array}{l} ημθ = \dfrac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot ημθ \\ συνθ = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot συνθ \end{array}\right\} \text{Μετασχηματισμός σε πολικές.}$$

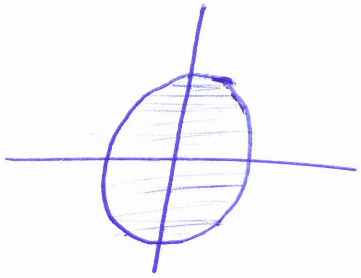
→ Όταν αλλάζουν οι συντεταγμένες, αλλάζουν τα όρια ολοκλήρωσης.

Τις πολικές τις χρησιμοποιώ σε κύκλους

κύκλος $\underline{x^2+y^2=r^2}$

Μοναδιαίος κύκλος
κέντρο το $(0,0)$
ακτίνα $r = 1$

σε καρτεσιανές

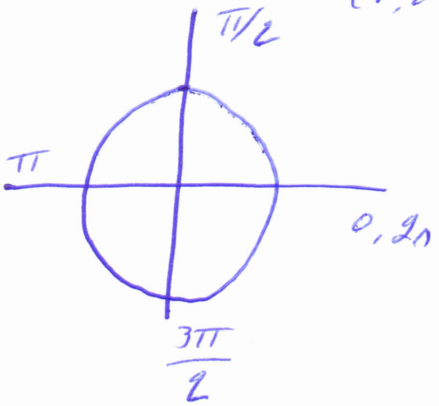


για το x έχω $-1 \leq x \leq 1$

για το y έχω $-1 \leq y \leq 1$

σε πολικές

(r, θ)



για το θ: από 0 έως 2π

για το r από 0 έως 1

Προσοχή! Όταν από καρτεσιανές γυρνάω σε πολικές ισχύει

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r,\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

καρτεσιανές

σε πολικές

άλλος πολ/μος

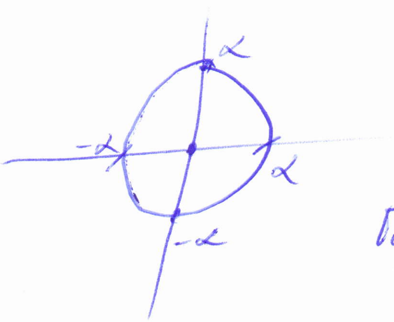
Παράδειγμα.

$$\iint_D \eta\mu(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

όπου D ο κυκλικός δίσκος με εξίσωση

$x^2+y^2=\alpha^2$

Το χωρίο αναφέρεται σε κύκλο με κέντρο K(0,0) και ακτίνα α.
(σε καρτεσιανές)



Γυρνάω σε πολικές

$y = r\,\eta\mu\theta$

$x = r\,\sigma\upsilon\nu\theta$.

Το χωρίο D' σε πολικές περιγράφεται ως εξής:

Το θ είναι από 0 εώς 2π και το r από 0 εως α.

άρα

$$\iint_D \eta\mu(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D'} \eta\mu\Big[\underbrace{r^2\sigma\upsilon\nu\theta + r^2\eta\mu\theta}_{1}\Big]\cdot r\,drd\theta$$

$$= \iint_{D'} \eta\mu\, r^2 \cdot r\, drd\theta = \iint_{D'} r\,\eta\mu\, r^2\, dr\, d\theta$$

$$\boxed{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{r} r\,\eta\mu\, r^2\, dr\, d\theta =$$

Θέτω $r^2 = u$

άρα $(r^2)'dr = du$

$\Rightarrow 2r = du$

$\Rightarrow r\,dr = \dfrac{du}{2}$

για $r=0$, $u \to 0$

για $r \to \alpha$, $u \to \alpha^2$.

άρα θα έχω

$$\int_0^{\alpha^2} \frac{1}{2}\eta\mu u\, du = \frac{1}{2}\big[-\sigma\upsilon\nu u\big]_0^{\alpha^2} = \frac{1}{2}\Big[(-\sigma\upsilon\nu\alpha^2) - (\overbrace{-\sigma\upsilon\nu 0}^{1})\Big]$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\alpha^2)$$

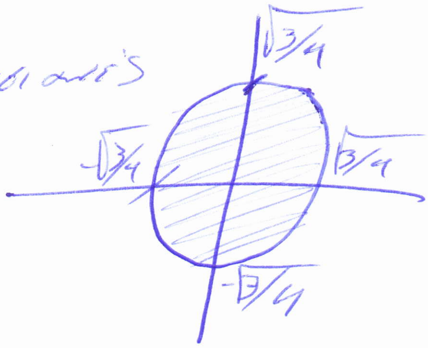
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu\alpha^2)\,d\theta = \Big[\frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu\alpha^2)\,\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu\alpha^2)\,2\pi = \pi(1-\sigma\upsilon\nu\alpha^2)$$

Θέμα 2014

$$\iint_R \frac{1}{1-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad R=\{(x,y): x^2+y^2 \le 3/4\}.$$

Καρτεσιανές



πολικές

$$x^2+y^2 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

είναι το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $r=\sqrt{3}/2$

θ: από 0 έως 2π

r: από 0 έως $\sqrt{3}/2$

$y = r\,\eta\mu\theta$
$x = r\,\sigma\upsilon\nu\theta$.

$$x^2+y^2 = r^2\eta\mu^2\theta + r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta = r^2(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta) = r^2$$

$$\iint_R \frac{1}{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_D \frac{1}{1-(r^2)}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta.$$

Σημαντικές Παράγωγοι

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \ln 1 = 0.$$

Το διάνυσμα πάει στο t

Δύο σημεία

$\vec{PQ}$ = . . . διάνυσμα // ευθεία.

Για επίπεδο

θέλω καθετοδιάνυσμα.

Ακρότατα συνάρτησης ✓

$f(x,y) = 4xy - x$

Διπλό ολοκλήρ.

Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα. ✓ $\int_a^b \langle f(r(t)), r'(t) \rangle dt$.

Πολικές συντεταγμένες. $y = r\,\eta\mu\,\theta$
$x = r\,\sigma\upsilon\nu\,\theta$

Εφαπτομένο Επίπεδο / Γραμμ. Προσέγγιση συνάρτησης

$L(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(y-y_0) = z$

Κανόνας Αλυσίδας

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{ds}$$

...

Θέτω

$1 - r^2 = u$

άρα $\dot{u} = \frac{1}{1-r^2}$

$dr(1-r^2)' = du$

$dr(-2r) = du$

$-2\,dr \cdot r = du$

$dr \cdot r = -\frac{du}{2}$

για $r \to \sqrt{3}/2$

$u \to 1/4$

για $r \to 0$

$u \to 1$.

άρα θα έχω

$$\int_1^{1/4} -\frac{1}{2u}\,du = -\frac{1}{2}\int_1^{1/4} \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[|\ln u|\Big]_1^{1/4} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}(-\ln 4)$$

$$= \frac{\ln 4}{2} \quad \left(\text{διότι } \ln\frac{1}{4} = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 4 = -\ln 4\right)$$

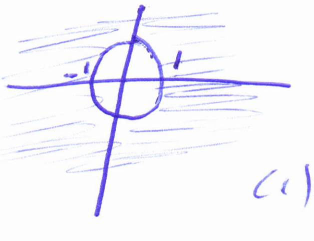
$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln 4}{2}\,d\theta =$$

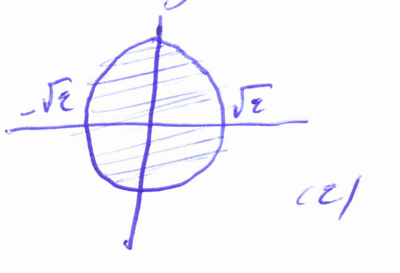
$$= \left[\frac{\ln 4}{2}\cdot\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\ln 4}{2}2\pi = \pi \ln 4$$

Θέμα 2015.

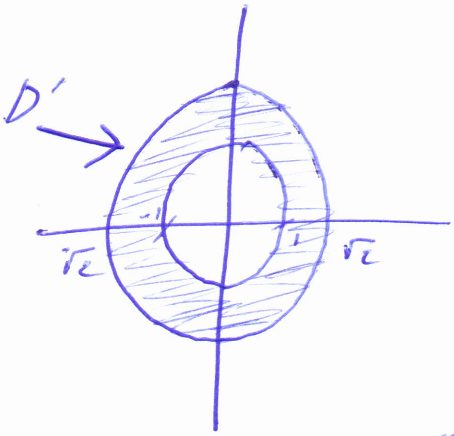
$$\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \quad R = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 2 \quad x \le 0 \text{ και } y \ge 0\}.$$

Θέλω δηλαδή $x^2+y^2 \ge 1$ και $x^2+y^2 \le 2$





απο (1) και (2) θα έχω το εξής σχήμα.



όπως $x \leq 0$, $y \geq 0$

όπου $\theta = \pi/2$ εώς π

και $r = 1$ εώς $\sqrt{2}$.

$y = r\eta\mu\theta$

$x = r\sigma\upsilon\nu\theta$. $\int x^2 + y^2 = (\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) r^2 = r^2$.

$$\iint_{D'} \frac{1}{r} \cdot r \, dr \, d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{1}^{\sqrt{2}} 1 \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} [r]_1^{\sqrt{2}} d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} (\sqrt{2} - 1) \, d\theta =$$

$$= \left[(\sqrt{2} - 1)\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} = (\sqrt{2} - 1)\pi - (\sqrt{2} - 1)\pi/2.$$

4/4/17 Μαθ Αν-λ II
α.

<u>Θεώρημα Taylor</u>

για δυο μεταβλητες

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\left((x-x_0)\frac{d}{dx} + (y-y_0)\frac{d}{dy}\right)^j f\Big|_{(x_0,y_0)} + R_n$$

υπόλοιπο.

όρα πάνω στην f στο σημείο (x_0,y_0)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(x-x_0)^i + R_n$$

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

~~Απόδειξη~~. Τύπος για το υπόλοιπο

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{d}{dx} + (y-y_0)\frac{d}{dy}\right] f\Big|_{(x_0,y_0)}$$

όπου (ξ_1, ξ_2) ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος

(x_0,y_0) — (x,y)

→ Για $n = 1$ στο δεξιό μέλος έχω την $Lf(x_0,y_0)(x,y)$

Παράδειγμα

Δίνεται η $f = \sin x \sin y$.

Υπολογίστε μια δευτεροβάθμια προσέγγιση στο σημείο $(x_0, y_0) = (0,0)$

Για $n=2$ έχουμε

$$f \cong f(0,0) + \left(x \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} + y \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,0)} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}\right)$$

αυτή είναι η 2η μερική της f στο $(0,0)$

πρώτα ως προς y και μετά ως προς x (Μπορεί και όχι...)

$$= 0 + x \cdot 0 + y \cdot 0 + \frac{1}{2}(x^2 \cdot 0 + 2xy \cdot 1 + y^2 \cdot 0) = x \cdot y.$$

Ξέρω ότι κοντά στο 0 ισχύει $\sin x = x$, $\sin y = y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \sin y \cos x \Big|_{(0,0)} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = \sin x \cos y$$

→ Μπορώ να υπολογίσω και το υπόλοιπο R_n.

Αν υποθέσω $|x| < \delta_1$, $|y| < \delta_2$

$$|R_3 f_{(0,0)}(x,y)| = \frac{1}{3!} \left| x^3 f_{xxx}(\xi_1, \xi_2) + 3x^2 y f_{xxy}(\xi_1,\xi_2) + 3xy^2 f_{xyy}(\xi_1,\xi_2) + y^3 f_{yyy}(\xi_1,\xi_2) \right|$$

Μαθ Αναλ ΙΙ

4/4/17 β.

$$\leq \frac{1}{6}\Big(\underbrace{|x|^3|f_{xxx}(\xi_1,\xi_2)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\quad|}_{\leq 1} + \dots + \underbrace{|y|^3 f_{yyy}(\xi_1,\xi_2)}_{\leq 1}\Big) \leq$$

$$\text{άρα} \leq \frac{1}{6}(|x|^3 + 3|x|^2|y| + 3|x||y|^2 + |y|^3) < \frac{1}{6}(\delta_1^3 + 3\delta_1^2\delta_2 + 3\delta_1\delta_2^2 + \delta_2^3)$$

Ότι είπαμε σε αυτό το μάθημα γενικεύεται στο $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Άσκηση για το σπίτι.

Δευτεροβάθμια Προσέγγιση στο $(0,0)$ των συναρτήσεων

(i) $f = xe^y$, (ii) $g = \cos x \cos y$.

(Να μην υπολογίσω τα υπόλοιπα.)

Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

02-5/17 α.

Τοπικά ακρότατα

Ολ. Ακρότατα

Lagrance με μία δέσμευση ισοδύναμη.

Διπλά Ολοκληρώματα.

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

χωρίο

γενικεύεται σε χωρία U.

$$\int_U f\,du$$

$U \subset \mathbb{R}^n$

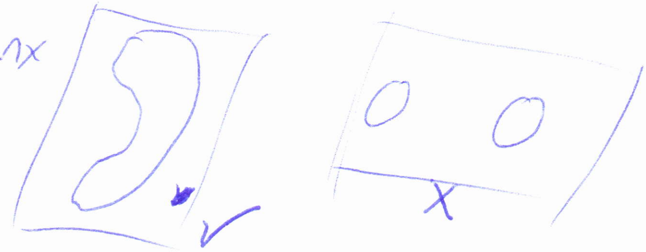
Ακρότατα Lagrange

τα χρειαζούμενα.

Συναφή σύνολα

↳ συνεκτικά.

πχ



Αλλά συναφή σύνολο

η καμπύλη που ενώνει τα δύο σημεία, είναι η ευθεία.

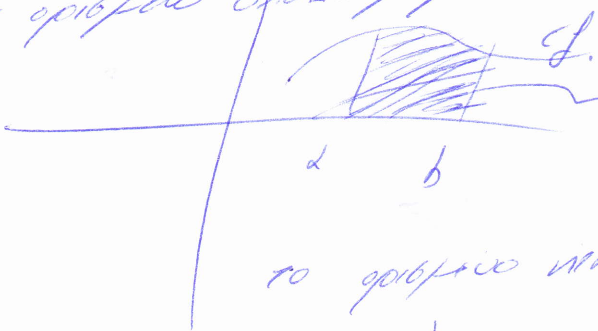
Το θ. Fermat, είναι για συναφή σύνολα.

Συναφή σύνολο

Μπορώ να βρω καμπύλη που ενώνει τα δύο σημεία.

Κυρτό σύνολο, ευθεία αλλά συνεχής.

Άλλα ορισμένο ολοκλήρωμα.

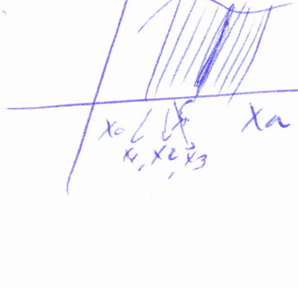


→ ολοκλήρωμα = χωρίο το εμβαδόν.

το ορισμένο είναι $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Δηλαδή

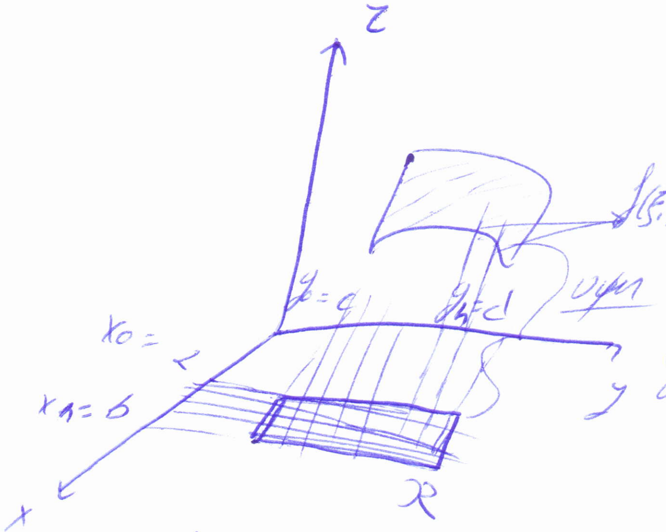


είναι μία καλή προσέγγιση του ολοκληρώματος.

Μια γενίκευση
είναι ότι αντί να πάρω πιο
ευθεία a ——— b
παίρνω 〰 μια καμπύλη.

Μια δεύτερη γενίκευση (γενίκευση στο χώρο)
είναι να πάρω $\int f(x,y)\,dx\,dy$
αυτό είναι το διπλό ολοκλήρωμα.

έχω δηλ. μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και θεωρώ το γράφημα της $z = f(x,y)$ (που είναι μια επιφάνεια)

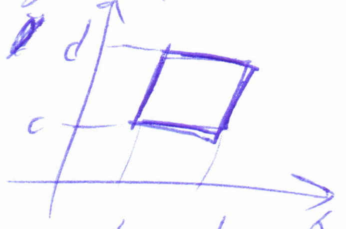


$z = f(x,y)$

$(x,y) \in R$

$R \subseteq \mathbb{R}^2$

θεωρώ ότι το R είναι ένα ορθογώνιο.



παίρνω δύο διαμερίσεις
(και σχηματίζονται αυτά τα τετραγωνάκια).
και διαλέγω τυχαία ξ_i μέσα σε αυτά τα τετραγωνάκια. άρα η $f(\xi_i)$ είναι το ύψος

$R = [a,b] \times [c,d]$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{ύψος}} \overbrace{(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})}^{E(T_i)}$$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$.

παίρνω δηλαδή τα ύψη και τα πολλαπλασιάζω με το εμβαδόν $E(T_i)$ άρα προσεγγίζω τον όγκο της επιφάνειας.

Δηλ. το

Μαθ. Ανάλ ΙΙ
02-05-17 b.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

όταν υπάρχει είναι το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy.$$

και υπάρχει, όταν η f είναι συνεχής.

Απλό ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ιδιότητες διπλού ολοκληρώματος

i) $\iint_R \lambda f(x,y)\,dx\,dy = \lambda \iint_R f$.

ii) $\iint_R f+g = \iint_R f + \iint_R g$

iii) αν $f(x,y) \geq 0$

$\forall (x,y) \in R$, $\iint f = \underset{\text{olume}}{V}(f,R)$

iv) Αν $R = R_1 \cup R_2$ όπου R_1 και R_2 δεν αλληλοεπικαλύπτονται

τότε $\iint_R f = \iint_{R_1} f = \iint_{R_2} f$ (είναι γενίκευση της ιδιότητας $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f + \int_c^b$)

* Βασικό θεώρημα για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος.

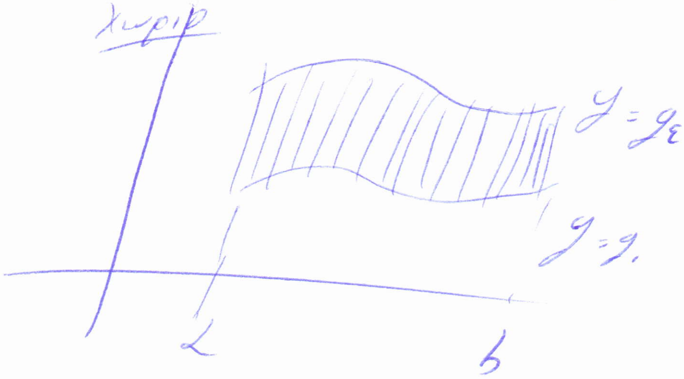
Θεώρημα <u>Fubini</u>

Εξετάζω δύο περιπτώσεις

• Περίπτωση 1η χωρίο $R = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{array} \right\}$

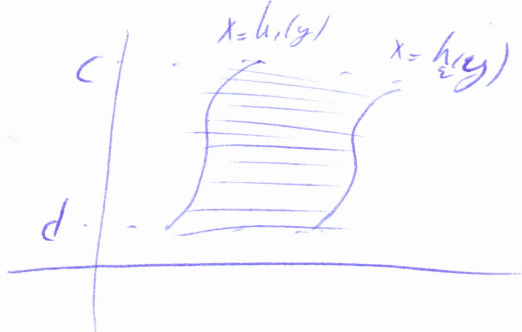
τότε

$$\iint_R f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx.$$



• Περίπτωση 2η

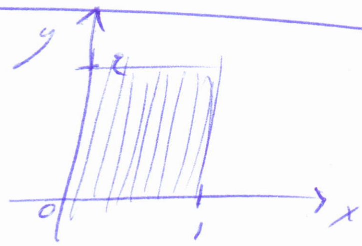
$R = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} c \le y \le d \\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \end{array} \right\}$ ...



τότε

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Δίνεται το χωρίο $R = [0,1] \times [0,2]$



$$\iint_R x\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^2 x\, \underbrace{dy\, dx}$$

η σειρά ολοκλήρωσης είναι αδιάφορο να είναι σωστό.

Αναλόγως αλλάζει το αποτέλεσμα ανάλογα με την σειρά που επιλέγεται τα δύο ολοκληρώματα.

Μαθηματικά Ανάλ. II 02-05-17 c.

$$= \int_0^1 [xy]_{y=0}^{y=2}\, dx = \int_0^1 2x\, dx = 1$$

Τώρα θα κάνω το ίδιο, αλλά θα ολοκληρώσω πρώτα ως προς y και μετά ως προς x.

$$\int_0^2\int_0^1 x\, dx\, dy = \int_0^2 \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\, dy = 1$$

$(\int x dx)$

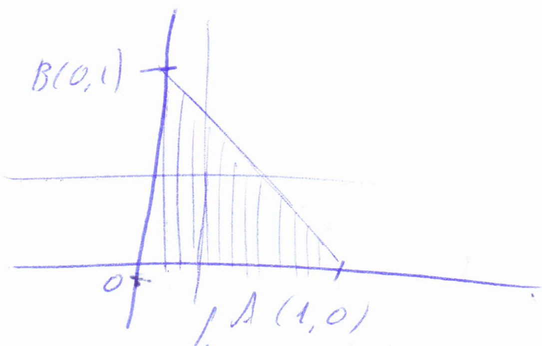
παράδειγμα μη ορθογώνιου χωρίου. + Μεθοδολογία.
(Με χωρίο τρίγωνο)

$$\iint_R f$$

$f = xy$

R : το τριγωνικό χωρίο
που ορίζεται από τα σημεία $(0,0)$ $(1,0)$, $(0,1)$

→ Με βοηθάει πρώτα να ζωγραφίζω το χωρίο



1ο βήμα

Εξετάζω ως προς ποια "μεταβλητή" το χωρίο είναι απλό. (φέρνω μια παράλληλη στον x, και θα πρέπει να τέμνει το χωρίο σε δύο σημεία. δουλεύω αντίστοιχα ως προς y)

άρα το ως προς τι θα ολοκληρώσω εξαρτάται από το αν το χωρίο μου είναι y-απλό ή x-απλό. ~~στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα έχω και ως προς τα δύο~~

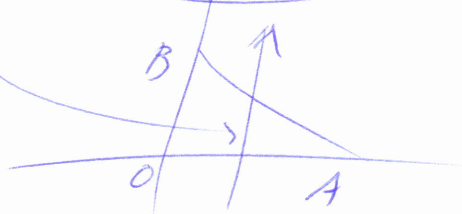
Επιλέγω να ολοκληρώσω πρώτα ως προς y (στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα μπορούσα και πρώτα ως προς x).

(2ο βήμα)

άρα $\iint_R f = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, dy \, dx$.

από ποια καμπύλη εισέρχεται η ευθεία: $y=0$ και εξέρχεται από την $y = 1-x$

δηλ. η ευθεία που σχεδίασα πριν.



3ο βήμα

Υπολογισμός

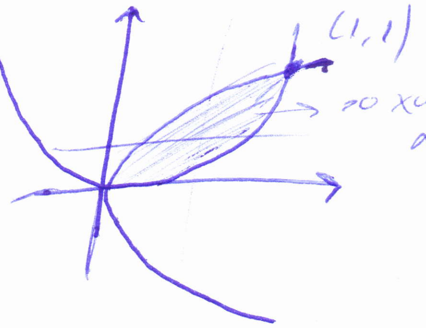
δουλεύω αναλόγως για την άλλη ευθεία

$$\int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-2x+x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x - 2x^2 + x^3 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

\# Να υπολογίσω το ολοκλήρωμα

$\iint_R f$, $f = x+y$, R το χωρίο που ορίζεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $x = y^2$



το χωρίο είναι αυτό, που είναι κανονικό ως προς x και y.

άρα επιλέγω χρονικά ως προς x. άρα θα λύσω ως προς x (πριν έλυσα ως προς y). Μαθ Αναλ II 02-05-17

$$\iint_R f = \int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left[\left(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}\right) - \left(\frac{y^4}{2}+y^3\right)\right] dy =$$

(στα εξωτερικά όρια θα έχω πάντα αριθμούς)

ανάποδα θα ήταν (ως προς y)

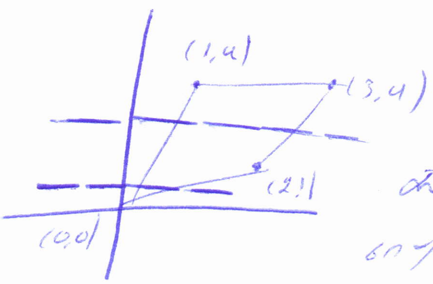
$$\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx = \dots = \frac{3}{10}$$

$$= \left[\frac{y^2}{4}+\frac{y^{5/2}}{5/2}-\frac{y^5}{10}-\frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

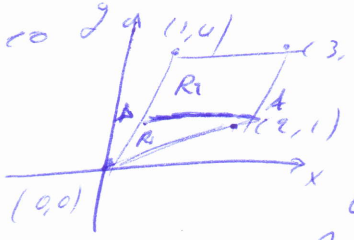
$$= \frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{4} = \frac{2}{5}-\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

παράδειγμα (ιδιαίτερες ισ)

$\iint_R f$, $f = 2x$, R ~~(παραλληλόγραμμο)~~ που ορίζεται από τα σημεία: (0,0), (2,1), (3,4), (1,4)



αυτό μπορώ να το σπάσω σε κανονικά χωρία. σπάζοντας το



ΔΑ // x'x

κανονικό το κανονικό ως προς x, και άρα ολοκληρώνονται το ως προς x.

R_1 : x - απλό (ή x - κανονικό)

R_2 : x - απλό

άρα

$$\iint_R f = \iint_{R_1} f + \iint_{R_2} f$$

κάνω δυο φορές Fubini

$$\iint_{R_1 = OA\Delta} 2x\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y/4}^{2y} 2x\,dx\,dy.$$

$$\iint_{R_2 = \Delta AB\Gamma} 2x\,dx\,dy = \int_1^4 \int_{y/4}^{\frac{y+5}{3}} 2x\,dx\,dy$$

λύση

χρειάζομαι τις ευθείες

OA : $y = \frac{x}{2}$

AB : $y = 3x - 5$

OΓ : $y = 4x$

τα λύνω ως προς x αφού επί επίπεδα.