Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

24-10-17 δ

Παράδειγμα για Περίπτωση III

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Λύση

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$.

$\sqrt{(4i)^2}$

$\lambda_1 = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i$

$i^2 = -1$

$\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1 - 2i$

$\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

Η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = C_1 e^{x} \cos(2x) + C_2 e^{x} \sin(2x)$$

Παράδειγμα

$$y'' + ky = 0 , \quad k \in \mathbb{R}$$

Λύση

Χαρακτ. Εξίσωση $\lambda^2 + k = 0$

οπότε $\lambda_1 = \dfrac{0 + \sqrt{-4k}}{2} = \sqrt{-k}$

$\lambda_2 = \dfrac{0 - \sqrt{-4k}}{2} = -\sqrt{-k}$

Παίρνω περιπτώσεις
για το κ.

1) $\kappa < 0$

άρα $-\kappa > 0$

έχουμε δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

$$\lambda_1 = \sqrt{|\kappa|}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{|\kappa|}$$

άρα Γενική Λύση της Δ.Ε.

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{|\kappa|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\kappa|}\cdot x}$$

2) $\kappa = 0$

που σημαίνει ότι έχω $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^* = 0$.

άρα η λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x \cdot e^{0x} \Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$$

3) $\kappa > 0$

(σημαίνει $\Delta < 0$)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\kappa}\, i \\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 &= -\sqrt{\kappa}\, i \end{aligned}\right\} \alpha = 0, \ \beta = \sqrt{\kappa}$$

$\boxed{i = \sqrt{-1}}$

άρα οι λύσεις θα είναι της μορφής:

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\kappa} x) + c_2 \sin(\sqrt{\kappa}\, x).$$

Συμπληρωματικά Μαθηματικά

21-10-11

Τύπος του Euler

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

② Μη Ομογενείς ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = f} \quad (1)$$

Δεύτερο μέλος (συνάρτηση f) είναι ειδικής μορφής

I. f πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Αναζητούμε μερική λύση της (1) της μορφής

$$\boxed{y_\mu(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0}$$

Σημείωση: Τα B_i προσδιορίζονται με αντικατάσταση της $y_\mu(x)$ στην ΔΕ (1)

⟹ Ειδική περίπτωση, όταν $a_0 = 0$

τότε το αριστερό μέλος της (1) θα έχει ένα πολυώνυμο βαθμού $m-1$ ενώ η f είναι βαθμού m

Τότε αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$y_\mu(x) = x\left(B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0\right)$$

Παράδειγμα:

$$y'' - y' - 2y = \overset{f}{\boxed{-2x^2 - 2x + 1}}$$

2ας τάξης
Μη ομογενής
σταθ. συντελεστών
γραμμική

Λύση

Πρώτα λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Χαρακτ. Εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 2$

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Άρα η Γενική Λύση της μη Ομογενούς

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$$

Εύρεση της μερικής λύσης $y_\mu(x)$ της μη ομογενούς

Αναζητούμε $y_\mu(x)$ της μορφής $y_\mu(x) = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$

Με αντικατάσταση στη ΔΕ λαμβάνουμε

$$2B_2 - (2B_2 x + B_1) - 2(B_2 x^2 + B_1 x + B_0) = -2x^2 - 2x + 1$$

$y'_\mu(x) = 2B_2 x + B_1$

$y''_\mu(x) = 2B_2$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

24-10-11 Σ.

$$\Rightarrow -2B_2x^2 - (2B_2 + 2B_1)x + 2B_2 - B_1 - 2B_0 =$$

$$= -2x^2 - 2x + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} -2B_2 = -2 \\ -(2B_2 + 2B_1) = -2 \\ 2B_2 - B_1 - 2B_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B_2 = 1 \\ B_1 = 0 \\ B_0 = 1/2 \end{array}$$

άρα $y_p(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

άρα η λύση της ΔΕ είναι

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + x^2 + \frac{1}{2}$$

II

Εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = b \cdot e^{dx}$$

Η μορφή της γενικής λύσης σε αυτήν την περίπτωση θα είναι

$$y_p(x) = Be^{dx}.$$

Δ.Ε.

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f \quad (1)$$

με Αντικατάσταση στην Δ.Ε (1)

$$B\underbrace{(d^2 + \alpha_1 d + \alpha_0)}_{}\, e^{dx} = b e^{dx}$$

αν αυτό δεν είναι 0
μπορώ να διαιρέσω και τα δύο μέλη με αυτό,
και να προσδιορίσω το B

Προσδιορισμός του B βλέπε τέλος σελ 33.

• αν $d^2 + \alpha_1 d + \alpha_0 \neq 0$

$$B = \frac{b}{d^2 + \alpha_1 d + \alpha_0}$$

το $d^2 + \alpha_1 d + \alpha_0$ εκφράζει ότι ~~το~~ το d είναι ρίζα του $p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$

• αν $d^2 + \alpha_1 d + \alpha_0 = 0$

δεν μπορεί να έχουμε αυτή τη μορφή της $y_p(x)$
σε αυτήν την περίπτωση αναζητούμε την $y_p(x)$ να είναι στη μορφή $\boxed{y_p(x) = Bxe^{dx}}$

Αντικατάσταση στην (1)

$$B p(d) x \cancel{e^{dx}} + B p'(d) \cancel{e^{dx}} = b \cancel{e^{dx}}$$

Επειδή το $p(d) = 0 \iff B p'(d) = b$

Αν $p'(d) \neq 0$ δηλαδή αν το d δεν είναι διπλή ρίζα, $B = \frac{b}{p'(d)}$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
24-10-17 γ.

Αν όμως $p'(d)=0$, δηλαδή το d είναι διπλή ρίζα του $p(\lambda)$, τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής $y_\mu(x) = Bx^2e^{dx}$

με αντικατάσταση στην (1)

$$B\overset{0}{p(d)}x^2e^{dx} + 2B\overset{0}{p'(d)}xe^{dx} + 2Be^{dx} = be^{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2B = b \Rightarrow B = \frac{b}{2}$$

- Αν d δεν είναι ρίζα του $p(\lambda)$
  αναζητούμε $y_\mu(x) = Be^{dx}$

- Αν d είναι ρίζα του $p(\lambda)$ τότε
  αναζητούμε $y_\mu(x) = Bx^\mu e^{dx}$
  όπου $\mu = 1$ όταν d απλή ρίζα του $p(\lambda)$ και
  $\mu = 2$ όταν d διπλή ρίζα του $p(\lambda)$.

Παράδειγμα.

$f(x)$ $\quad b=3$ και $d=2$.

$$y'' + 3y' - 4y = \boxed{3e^{2x}}$$

Λύση

$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$, $\Delta > 0$,

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_1 = -4$ και $\lambda_2 = 1$

άρα η λύση της ομογενούς:

$$y_o(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}.$$

$f(x) = 3e^{2x}$ $\begin{cases} b=3 \\ d=2 \end{cases}$, που δεν είναι ρίζα του $p(\lambda)$

άρα αναζητούμε λύση της μορφής $y_p(x) = B e^{dx}$

$\Rightarrow y_p(x) = Be^{2x}$.

με αντικατάσταση στη Δ.Ε.

$$4B\cancel{e^{2x}} + 3(2B\cancel{e^{2x}}) - 4B\cancel{e^{2x}} = 3\cancel{e^{2x}}$$

άρα $6B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

όποτε $y_p(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

και η γενική λύση θα είναι $y(x) = y_o(x) + y_p(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{2} e^{2x}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

24 - 10 - 14

III (Συνδυασμός των I και II)

f να είναι γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής

$$f(x) = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) e^{dx}$$

Μεθοδολογία

α) Αν d <u>δεν</u> είναι ρίζα της $p(\lambda)$ ~~...~~ τότε ~~...~~

αναζητούμε $y_p(x) = (B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0) e^{dx}$

β) Αν d είναι ρίζα του $p(\lambda)$ πολλαπλότητας $\mu = 1$ ή $\mu = 2$
(απλή ρίζα) (διπλή ρίζα)

τότε αναζητούμε $y_p(x) = (B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0) x^{\mu} e^{dx}$.

όπου το πολυώνυμο όλο με ένα πολύ κεφαλαίο B

<u>Παράδειγμα.</u>

$$y'' - 2y' - 3y = (x+1) e^{3x}$$

λύνοντας $y(x) = \underbrace{C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}}_{y_0(x)} + \underbrace{\frac{1}{16}(2x^2 + 3x) e^{3x}}_{y_p(x)}$

εκθέτης $d = 3$

λόγω 1 στη λύση το d είναι λύση του $p(\lambda)$

$p(\lambda)$ λύσεις $-1, 3$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

25-10-17α

$i=\sqrt{-1}$

Γενική μορφή Δ.Ε.

- Επανάληψη γραμμικών -

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f \quad \text{με } a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

(1)

I. f - πολυώνυμο

II. f - εκθετική

III. f - πολυώνυμο επί εκθετική

IV Δεύτερο μέλος: γραμμικός συνδυασμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$f(x) = b_1 \cos(dx) + b_2 \sin(dx)$$

Μεθοδολογία (για τη μερική λύση θα αναζητήσουμε)

1) Αν το $\boxed{di}$ ~~...~~ δεν είναι ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης $P(\lambda)=0$ ($P(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_0$) τότε αναζητούμε μερική λύση της (1) η οποία θα είναι της μορφής:

$$y_p(x) = B_1\cos(dx) + B_2 \sin(dx)$$

Οι συντελεστές προσδιορίζονται με την εισαγωγή της έκφρασης αυτής στη Δ.Ε. (1) που θα δίνει η άσκηση. (θα καταλήξω σε ένα σύστημα με παραμέτρους B_1, B_2)

2) Αν το $\boxed{di}$ είναι ρίζα της $P(\lambda)=0$ τότε αναζητούμε

$$y_p(x) = x\,(B_1\cos(dx) + B_2 \sin(dx)).$$

Παράδειγμα.

$$y'' + 9y = \overbrace{\sin(3x) + \cos(3x)}^{f(x)}$$

Λύση

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad d = 3$$

Βήμα 1: Λύνω πρώτα την ομογενή (γεν. θεωρία της προηγ. Τετάρτης!)

Ομογενής: $y'' + 9y = 0$.

Χαρακτ. Εξίσωση $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3i$

$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -3i$

$$y_0(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)$$

Βήμα 2

Αν $3i$ είναι ρίζα της $\lambda^2 + 9 = 0$ ✓

άρα αναζητούμε μερική λύση της μη ομογενούς της εξής μορφής: $y_p(x) = x(B_1\cos(3x) + B_2\sin(3x))$.

Βήμα 3

Προσδιορίζω τα B_1 και B_2 με αντικατάσταση στην Δ.Ε.

Υπολογίζουμε $y''_p(x) = 6B_2\cos(3x) - 9B_1 x\cos(3x) - 6B_1\sin(3x) - 9B_2 x\sin(3x)$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$6B_2\cos(3x) - 6B_1\sin(3x) = \sin(3x) + \cos(3x).$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

25-10-17 b

Θέλω οι συντελεστές που αφαιρούνται και συναρτήσεων να είναι ίσοι. Οπότε έχω:

$$\left.\begin{aligned} -6B_1 &= 1 \\ 6B_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} B_1 &= -1/6 \\ B_2 &= 1/6 \end{aligned}$$

άρα $\underline{y_p(x) = x\left(-\frac{1}{6}\cos(3x) + \frac{1}{6}\sin(3x)\right)}$

άρα $y(x) = y_o(x) + y_p(x) = \dots$

V Αθροίσματα συναρτήσεων των περιπτώσεων I - IV

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) \quad (1)$$

όπου $f_1, f_2, \dots, f_k$ είναι συναρτήσεις ειδικής μορφής των περιπτώσεων I - IV.

Λύνουμε ξεχωριστά τις k διαφ. εξισώσεις

$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_1$ → και έτσι θα βρίσκουμε τις αντίστοιχες μερικές λύσεις

$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_2$ $\qquad y_{p1}, y_{p2}, \dots y_{pk}$

$\vdots$

$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_k$

Τότε η συνάρτηση $\boxed{y_p = y_{p1} + y_{p2} + \dots + y_{pk}}$ είναι μια μερική λύση της (1)

και η γενική λύση της (1) θα είναι

$$\boxed{y = y_o + y_{p1} + y_{p2} + \dots + y_{pk}}$$

η λύση της ομογενούς προφανώς θα είναι κοινή...

Αρχή της Υπέρθεσης

Παράδειγμα.

$$y'' - y = \underbrace{x^2+1}_{f_1(x)} + \underbrace{2e^x}_{f_2(x)} + \underbrace{\cos(2x)}_{f_3(x)}$$

Λύση (Συνοπτική Μεθοδολογία) Να την διαβάσω!

!!! Προφανώς η ομογενής είναι λυμένη.

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

α) $y'' - y = x^2 + 1$ Θα βρω $y_{p_1}(x) = -x^2 - 3$

β) $y'' - y = 2e^x \longrightarrow y_{p_2}(x) = x \cdot e^x$

γ) $y'' - y = \cos(2x) \rightarrow y_{p_3}(x) = -\frac{1}{5} \cdot \cos(2x)$

Τελική Λύση με Αρχή Υπέρθεσης

$$y = y_0 + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - x^2 - 3 + x e^x - \frac{1}{5}\cos(2x)$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
25-10-17
part 1

Υποβιβασμός Τάξης ΔΕ

$$\boxed{a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\cdot y(x) = 0} \quad (1)$$

→ η διαδικασία υποβιβασμού της τάξης χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας δεύτερης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης y_2 της (1) όταν είναι ήδη γνωστή μία λύση $y_1 \neq 0$

Παράδειγμα 1

Με δεδομένο ότι $\boxed{y_1 = x}$ είναι λύση της ΔΕ

εμφάνιση τέτοιου τύπου → υποβιβασμός τάξης.

$$2x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad , \; x > 0$$

βρείτε τη γενική της λύση.

Λύση

$\boxed{\text{Θέτουμε}}$ $y(x) = u(x)\cdot y_1(x) = u(x)\cdot x$ δηλαδή $y = u\cdot x$

και αναζητούμε να προσδιορίσουμε την $y = ux$ λύση της ΔΕ.

$y' = u'x + u$ και κάνω αντικατάσταση στη ΔΕ και έχω

$y'' = u''x + 2u'$

$$2x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^3u'' + 4x^2u' - x^2u' - \cancel{ux} + \cancel{ux} = 0 \Rightarrow$$

$2x^3u'' + 3x^2u' = 0$

~~[illegible]~~

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

25-10-17 (συνέχεια παραδείγματος 1)

part 2

(ξεκινάμε από 2ης τάξης)

Θέτουμε $u' = v$ και λαμβάνουμε

$$\boxed{v' + \frac{3}{2x} v = 0 \quad , x > 0}$$

→ ομογενής τάξης

→ γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης. λύνεται με μέθοδο ολοκληρωτικού παράγοντα

Λύση : $v = Cx^{-3/2}$

και άρα

$$u' = C \cdot x^{-3/2} \Rightarrow \int u' dx = \int C \cdot x^{-3/2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = C_1 \cdot x^{-1/2} + C_2$$

προσδιορίσαμε την u

και τελικά η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι πολλαπλασιάζοντας με x ($ux = y$)

και έχω

$$\boxed{y(x) = \underbrace{C_1 x^{1/2}}_{y_2} + \underbrace{C_2 x}_{y_1} , \quad x > 0.}$$

y_1 και y_2 γραμμ. ανεξάρτητες

Η μια λύση δίνεται

και η άλλη είναι αυτή που ψάχνουμε για να σχηματίσουμε τη γενική λύση

Σημειώνω η ΔΕ αρχικά

οποία ξεκίνησα **δεν** είναι σταθερών συντελεστών.

Παράδειγμα 2

(για μη ομογενείς)

όταν έχω αυτή τη μορφή συνήθως μάλλον θα χρειαστώ μέθοδο λόγω υποβιβασμού τάξης.

Με δεδομένο ότι η $\boxed{y_1 = e^x}$ είναι μια ~~γενική~~ λύση της αντίστοιχης ομογενούς της Δ.Ε.

$$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = xe^x \quad , x>0$$

βρείτε τη γενική της λύση.

Επαλήθευση

$y_1 = e^x$

$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$

Προφανώς

$xe^x + (1-2x)e^x + (x-1)e^x =$

$xe^x + e^x - 2xe^x + xe^x - e^x = 0$

επαληθεύτηκε ότι η $y_1 = e^x$ λύνει την ομογενή

Λύση

1ο βήμα Θέτουμε

$$y = ue^x.$$

2ο βήμα

(αντικατάσταση αυτής στην Δ.Ε.)

$y' = u'e^x + ue^x$

$y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$

→ Αντικατάσταση στη δοθείσα ΔΕ: $x \cdot e^x u'' + 2xe^x \cdot u' + xe^x u +$

$+ (1-2x)(u'e^x + ue^x) + (x-1)e^x \cdot u = xe^x$

$= \dots = x \cdot u'' + u' = x$ ~~...~~

(η πρώτη $(x \cdot u')' \dots$)

Θέτουμε $u' = v$ (διαιρώ όλη με $x>0$)

$$v' + \frac{1}{x} v = 1$$

Γραμμική πρώτης (από δευτέρας που ξεκίνησα) τάξης

↳ Υποβιβασμός τάξης.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

25-10-17 d

(είχα μια σταθερά c_1, αφού είναι 1ης τάξης)

$$\Rightarrow v = c_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

Άρα έχουμε $u' = c_1 \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ (ολοκληρώνουμε ως προς x)

$$\int u' dx = \int c_1 \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{2} dx + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = c_1 \ln|x| + \frac{x^2}{4} + c_2 . \quad \text{αφού } x > 0 .$$

$$\Rightarrow u(x) = c_1 \ln x + c_2 + \frac{x^2}{4}$$

(τελευταίο βήμα)

Θέλω να βρώ την y → πολλαπλασιάζω με e^x.

$$\dots = y(x) = \underbrace{c_1 e^x \ln x + c_2 e^x}_{} + e^x \cdot \frac{x^2}{4}$$

Γενικό σχόλιο

Από την γενική θεωρία

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

όπου $y_0(x) = c_1 \boxed{e^x \ln x} + c_2 \boxed{e^x}$ (y_1, y_2 γραμμ. ανεξάρτητες)

$$\boxed{e^x \ln x} = y_2 , \quad \boxed{e^x} = y_1$$

και $y_p(x) = e^x \cdot \frac{x^2}{4}$

(βλέπε προηγ. παράδειγμα)

Μέθοδος Μεταβολής των Σταθερών (ή Παραμέτρων)

Παράδειγμα Λύση της ΔΕ

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad , 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

Προσοχή!!!

~~Σημ~~ Δεν είναι το ίδιο να έχω $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

και $f(x)=\cos(x)$ στο δεξί μέλος!

Λύση

Αντίστοιχη ομογενής   λύνω την ομογενή

$$y''+y=0$$

Χαρακτ. Εξίσωση $\lambda_1=i$, $\lambda_2=\bar{\lambda}_1=-i$

$$y_0(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$

→ Αντικατάσταση των σταθερών c_1 και c_2 από συναρτήσεις $u_1(x)$ και $u_2(x)$. (1° βασ. βήμα)

Δηλ. ουσιαστικά αναζητούμε μερική λύση της μη ομογενούς

(1) $$y(x)=u_1(x)\cos x+u_2(x)\sin x$$

οι u_1, u_2 χρειάζεται να προσδιοριστούν.

→ ~~Αντικατάσταση στη 1 &~~

Αρχικά παραγωγίζουμε για να βρούμε το y'

$$y'=-u_1\sin x+u_2\cos x+\boxed{u_1'\cos x+u_2'\sin x} \quad (2)$$

(2° βασ. βήμα)

→ Στη συνέχεια θέτουμε:

$$u_1'\cos x+u_2'\sin x=0 \quad (1)$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

23-10-17

Και έτσι έχουμε ότι

$$y' = -u_1 \sin(x) + u_2 \cos x.$$

Παραγωγίζοντας (για να βρω την y'')

$$y'' = -u_1 \cos x - u_2 \sin x - u_1' \sin x + u_2' \cos x$$

Τώρα αντικαθιστούμε στην ΔΕ

$$\underbrace{-\cancel{u_1 \cos x} - \cancel{u_2 \sin x} - u_1' \sin x + u_2' \cos x}_{y''} + \underbrace{\cancel{u_1 \cos x} + \cancel{u_2 \sin x}}_{y(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Rightarrow -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \quad (2)$$

→ Σύστημα των (1) και (2) με αγνώστους u_1' και u_2'

$$\left.\begin{array}{l} u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0 \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1' = -u_2' \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \Rightarrow \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1' = -u_2' \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \Rightarrow u_2' \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + u_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1' = -u_2' \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \Rightarrow u_2' \sin^2 x + u_2' \cos^2 x = 1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos x} \\ u_2' = 1 \end{array}\right\}.$$

άρα $u_2 = x$

$$u_1 = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} u_2 &= x \\ u_1 &= \ln(\cos x) \end{aligned}}$$

δεν έχω $\ln|\cos x|$
αφού $0 \le x < \pi/2$

άρα $y_p(x) = u_1(x)\cdot \cos x + u_2(x)\cdot \sin x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = x\sin x + \ln(\cos x)\cdot \cos x}$$

Γενική λύση της δοθείσας ΔΕ

$$y = y_0 + y_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{c_1 \cos x + c_2 \sin x}_{y_0} + \underbrace{\ln(\cos x)\cos x + x\sin x}_{y_p}$$

την y_p την βρήκαμε με τη μέθοδο μεταβολής σταθερών.

Παράδειγμα.

$$y'' - 2y' + y = \boxed{\frac{e^x}{x^2}}, \quad x > 0$$

επειδή είναι δια πολυώνυμο, όχι επί πολυώνυμο που ξέρω να δουλεύω

άρα → Μεταβολή σταθερών.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

25-10-17

Λύση

$$y_0(x) = c_1 \boxed{e^x} + c_2 \boxed{x e^x}$$

→ Αναζητούμε μερική λύση της διαφορικής με μέθοδο ΔΕ

(1) $y_p(x) = u_1(x) \cdot e^x + u_2(x) \cdot x e^x$

πρέπει να βρω y'' και y' για να κάνω αντικατάσταση

$$y_p'(x) = u_1 e^x + u_2(e^x + x e^x) + \underbrace{u_1' e^x + u_2' x e^x}_{\text{αυτούς τους μηδενίζω.}} \quad (2)$$

Θέλουμε να είναι u_1' και $u_2' = 0$

δηλαδή

$$u_1' e^x + u_2' x e^x = 0 \quad (1)$$

Έτσι

$$y_p'(x) = u_1 e^x + u_2 (e^x + x e^x)$$

και $y_p''(x) = u_1 e^x + u_2(2e^x + x e^x) + u_1' e^x + u_2' (e^x + x e^x)$

με Αντικατάσταση στην ΔΕ (...)

$$u_1' e^x + u_2' (e^x + x e^x) = \frac{e^x}{x^2} \quad (2)$$

→ Επιλύουμε το σύστημα των (1) και (2)

$$\left.\begin{array}{l} u_1' + u_2' x = 0 \\ u_1' + u_2'(x+1) = \frac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow (\ldots) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_2' = \frac{1}{x^2} \\ u_1' = -\frac{1}{x} \end{array}\right\}$$

τις πολλαπλασιάσαμε με e^{-x}

* Εκφράσεις οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν => σταθερές αλλά τα ολοκληρώματα

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = -\ln x \\ u_2 = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

δεν βάζω σταθερές (δεν χρειάζεται αφού όταν τις βάλω θα τις επιστρέψω στο τέλος στις c_1 και c_2)

Έτσι έχουμε

$$y_p(x) = -(\ln x)\cdot e^x - \frac{1}{x} x e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -e^x \ln x - e^x$$

Τελικά λοιπόν η γενική λύση της διαφορικής ΔΕ είναι:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{c_1 e^x + c_2 x e^x}_{y_0} \underbrace{- e^x \ln x - e^x}_{y_p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \ln x \quad , \; x > 0.$$

Σημαντικό Πρακτικό σχόλιο

Το σύστημα με u_1' και u_2' θα λύνεται!
Αλλά μπορεί να μην μπορώ να ολοκληρώσω στο επόμενο βήμα. *
Επομένως αυτή η μέθοδος δεν είναι μια καθολική μέθοδος.

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
31-10-17α.

Θ Μέθοδος Μεταβολής των παραμέτρων

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f(x)$$

Λύση της ομογενούς $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$

με y_1, y_2 γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς ΔΕ

→ Αναζητούμε μια μερική λύση της μη ομογενούς, η οποία θα είναι στη μορφή: $y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$

$$y_p'(x) = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \boxed{u_1' y_1 + u_2' y_2}$$

→ Θέτουμε $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$. (1)

Έτσι έχουμε $y_p'(x) = u_1 y_1' + u_2 y_2'$

άρα $y_p''(x) = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$

→ αντικατάσταση στην αρχική ΔΕ

$$u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + \alpha_1 (u_1 y_1' + u_2 y_2') + \alpha_0 (u_1 y_1 + u_2 y_2) = f$$

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά

31-10-17b. (πλήρως τους όρους που είναι 'u_1' και 'u_2') κοινούς παράγοντες

$$\Rightarrow u_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + u_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = f.$$

αφού y_1 και y_2 λύσεις της ομογενούς, οι παρενθέσεις που είναι $=0$

$$\boxed{u_1' y_1' + u_2' y_2' = f} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f \end{aligned}\right\}$$

είχαμε και στα παραδείγματα ότι λύσαμε αυτό το σύστημα. Ξέρουμε y_1, y_2, f και οι άγνωστοι είναι τα u_1' και u_2'

όμως, αυτό το σύστημα έχει μοναδική λύση;
βρίσκω την ορίζουσά του.
(η οποία είναι η W)

Η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

που είναι η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2 που είναι διάφορη του 0, διότι y_1, y_2 είναι δύο γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις.

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά

31-10-17 ε.

για το σύστημα των (1), (2) έχει μοναδική λύση η οποία θα είναι $u_1' = -\dfrac{y_2 \cdot f}{W}$ και $u_2' = \dfrac{y_1 \cdot f}{W}$

οι παρονομαστές είναι καλώς ορισμένοι και πάντα $\neq 0$

ολοκληρώνοντας

$$\boxed{u_1 = -\int \frac{y_2 f}{W}\,dx \quad \text{και} \quad u_2 = \int \frac{y_1 \cdot f}{W}\,dx}$$

Αυτή η μέθοδος δουλεύει πάντα; → μέχρι το σύστημα ΝΑΙ, μετά μπορεί να μην μπορώ να βρω τα ολοκληρώματα. Μπορεί να μην υπάρχουν.

Γενική η μέθοδος, δηλαδή δεν μπορεί να δουλέψει για οποιαδήποτε συνάρτηση f.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά 31-10-17 d.

Laplace

Μετασχηματισμός Laplace με εφαρμογές στις ΣΔΕ

1. Γενικευμένα ολοκληρώματα.

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$$

Τι γίνεται αν το α ή το b, ή και τα δύο πηγαίνουν στο άπειρο;

Ορισμός (3 περιπτώσεις)

α. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ της συνάρτησης f $:[\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται το εξής όριο:

I. $$\boxed{\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_{\alpha}^{u} f(x)\,dx}$$

ονομάζεται γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f.

β. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ της f $(-\infty, b] \to \mathbb{R}$ ορίζεται το εξής όριο

II $$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{b} f(x)\,dx.}$$

Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά

31-10-17 e.

γ. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ της $f: (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$.

Ορίζουμε το όριο

$$\text{[1]} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \quad , c \in \mathbb{R}}$$

(να περιστοίχεις α, β μαζί!)

→ Όλα τα προηγούμενα, ισχύουν υπό τις προϋποθέσεις ότι τα αντίστοιχα όρια υπάρχουν.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dx \,, \quad s \in \mathbb{R}$$

<u>Λύση</u>

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u} e^{-sx}\,dx$$

$$\int_0^{u} e^{-sx}\,dx = \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \right]_{x=0}^{x=u}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

31-10-17 β.

$$= -\frac{1}{s}\left(e^{-su}-1\right) = \frac{1}{s}\left(1-e^{-su}\right), \quad s\neq 0$$

~~[illegible]~~ για $s=0$ $\displaystyle\int_0^u 1\,dx = u$

$$= \lim_{u\to+\infty} \begin{cases} \frac{1}{s}\left(1-e^{-su}\right), & s\neq 0 \\ u, & s=0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{s}\left(1-\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-su}\right), & s\neq 0 \\ +\infty, & s=0 \end{cases}$$

$$\lim_{u\to+\infty} e^{-su} = \begin{cases} 0, & s>0 \\ +\infty, & s<0 \end{cases}$$

για $s\neq 0$

άρα

$$= \begin{cases} \frac{1}{s}, & s>0 \\ +\infty, & s\leq 0 \end{cases}$$

Εκείνο που περιμένω

Συμπληρωματικά Μαθηματικά

30-10-17 g.

Παράδειγμα

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha}\, dx \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha}\, dx = \lim_{u \to +\infty} \boxed{\int_1^{u} x^{\alpha}\, dx}$$

$$\int_1^{u} x^{\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=u} \quad , \quad \alpha \neq -1$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\left(u^{\alpha+1} - 1\right) \quad , \quad \alpha \neq -1 .$$

Επίσης, για $\alpha = -1$

$$\int_1^{u} x^{-1}\, dx = \left[\ln x \right]_{x=1}^{x=u} = \ln u .$$

το ln δεν έχει ανώτατο

αφού $1 \leq x \leq \underset{\to +\infty}{u}$.

[illegible]
30-10-17

$$= \lim_{u\to+\infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}\left(u^{\alpha+1}-1\right), & \alpha \neq -1 \\ \ln u, & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}\cdot \lim_{u\to+\infty} u^{\alpha+1}, & \alpha \neq -1 \\ +\infty, & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{u\to+\infty} u^{\alpha+1} \quad (\text{για } \alpha \neq -1) = \begin{cases} +\infty, & \alpha > -1 \\ 0, & \alpha < -1 \end{cases}$$

άρα

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1}, & \alpha < -1 \\ +\infty, & \alpha \geq -1 \end{cases}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

31-10-17 ί

→ Για τα γενικευμένα ολοκληρώματα ισχύουν όλες οι βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων που ισχύουν και για τα ορισμένα ολοκληρώματα $\int_a^b f(x)\,dx$, $a, b \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα.

Θετικότητα. Δηλαδή αν $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$ και υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geq 0$

• Ορισμός του Μετασχηματισμού (Μ/Σ) Laplace.

Ορισμός

Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση*

ο Μ/Σ Laplace της f ορίζεται

$$\boxed{\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt.}$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο των $s \in \mathbb{R}$ για τα οποία το γενικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

* f τοπικά ολοκληρώσιμη στο I

αν υπάρχει $\int_u^v f(x)\,dx$ για κάθε $[u, v] \in I$

Συμπληρωματικά
Μαθηματικά

31-10-17] Την συνάρτηση $\mathcal{L}\{f\}$ συνήθως την

συμβολίζουμε με F. Οπότε

$$\boxed{F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt}$$

και θα λέμε ότι ο M/Σ Laplace της συνάρτησης

$f(t)$ είναι η $F(s)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0 \\ +\infty, & s \leq 0 \end{cases}$$

για $s \leq 0$
δεν συγκλίνει!

$\boxed{\text{άρα}}$

Παράδειγμα

Υπολογίστε τον M/Σ Laplace της συνάρτησης

$f(t) = 1 \quad , \quad t \in [0, +\infty)$

Λύση

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

άρα για $f(t) = 1$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

31-10-17 κ.

Παράδειγμα $f(t)=t \quad , \quad t\in[0,+\infty)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=?$$

Λύση

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} te^{-st}\,dt=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u te^{-st}dt$$

$$\int_0^u te^{-st}dt=-\frac{1}{s}\int_0^u t(e^{-st})'\,dt=-\frac{1}{s}\left\{\left[te^{-st}\right]_{t=0}^{t=u}-\int_0^u e^{-st}dt\right\}$$

$$=-\frac{1}{s}\left\{ue^{-su}-\int_0^u e^{-st}dt\right\} \quad , \quad s\neq 0.$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}\left(ue^{-su}\right)-\int_0^u e^{-st}dt\right]=$$

$$=-\frac{1}{s}\lim_{u\to+\infty}\left(ue^{-su}\right)+\frac{1}{s}\lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-st}dt.$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

31-10-17 Δ.

$$= -\frac{1}{s}\lim_{u\to+\infty} ue^{-su} + \frac{1}{s}\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt.}$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{s}, \quad s>0$$

$$\lim_{u\to+\infty} ue^{-su} \quad \text{για } s>0$$

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^{su}} \quad \frac{+\infty}{+\infty} \text{ άρα L'H}$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{se^{su}} = 0$$

$$= -\frac{1}{s}\lim_{u\to+\infty} ue^{-su} + \frac{1}{s^2}, \quad s>0$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

άρα $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}, \quad s>0.$

Παράδειγμα.

$$f(t) = t^n, \quad t\in[0,+\infty), \quad n\in\mathbb{N}$$

Λύση

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u t^n e^{-st}\,dt.$$

$$\int_0^u t^n e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\int_0^u t^n (e^{-st})'\,dt =$$

$$= -\frac{1}{s}\left\{\left[t^n e^{-st}\right]_{t=0}^{t=u} - n\int_0^u t^{n-1}e^{-st}\,dt\right\}$$

Ευφροσύνη Μαθρανίδη

31-10-17 m

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{u^n}{e^{su}} = \frac{n}{s}\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{n-1}}{e^{su}} = \frac{n!}{s^n}\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{e^{su}} = 0, \quad s>0$$

$$= -\frac{1}{s}\left[u^n e^{-su} - n\int_0^u t^{n-1}e^{-st}\,dt\right].$$

Επιστρέφοντας

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^u t^n e^{-st}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\left\{-\frac{1}{s}\left[u^n e^{-su} - n\int_0^u t^{n-1}e^{-st}\,dt\right]\right\}$$

έχουμε το όριο

$$\lim_{u\to+\infty}(u^n e^{-sn}) = \begin{cases} +\infty, & s\leq 0 \\ 0, & s>0 \end{cases}$$

$$\frac{n}{s}\lim_{u\to+\infty}\int_0^u t^{n-1}e^{-st}\,dt, \quad s>0. =$$

$$= \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st}\,dt, \quad s>0 = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}, \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}, \quad s>0.$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \dots = \frac{n!}{s^n}\mathcal{L}\{1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0.}$$

Ευφροσύνη Μαθιουδάκη

31-10-17 Π

Παράδειγμα.

$$f(t) = e^{at}, \quad t \in [0, +\infty), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - s)t}\, dt.$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \int_0^u e^{(\alpha - s)t}\, dt$$

$$\int_0^u e^{(\alpha - s)t}\, dt = \frac{1}{\alpha - s} \Big[e^{(\alpha - s)t} \Big]_{t=0}^{t=u}, \quad s \neq \alpha.$$

$$= \frac{1}{\alpha - s} \left(e^{(\alpha - s)u} - 1 \right), \quad s \neq \alpha.$$

Επίσης για $s = \alpha$.

$$\int_0^u dt = u.$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha - s} \left[e^{(\alpha - s)u} - 1 \right], & s \neq \alpha \\ u, & s = \alpha. \end{cases}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

31-10-17 ο.

$$= \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha-s} \lim_{u\to+\infty} e^{(\alpha-s)u} & , s \neq \alpha \\ +\infty & , s=\alpha \end{cases}$$

$$\lim_{u\to+\infty} e^{(\alpha-s)u} = \begin{cases} 0, & \alpha-s<0 \\ +\infty, & \alpha-s>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \boxed{\frac{1}{s-\alpha} \quad , s>\alpha} \\ +\infty \quad , s<\alpha \\ +\infty \quad , s=\alpha \end{cases}$$

ή

$\alpha - s = -\tilde{s} \Rightarrow \tilde{s} = s-\alpha$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)t}\,dt = \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\tilde{s}t}\,dt} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$= \frac{1}{\tilde{s}} \quad , \tilde{s}>0 \quad = \frac{1}{s-\alpha} \quad , s>\alpha$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
1 - 11 - 17α.

Μιγαδικοί του $\sin t$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

όπου $i = \sqrt{-1}$

Παράδειγμα

$$f(t) = \sin t \quad t \in [0, +\infty)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = ?$$

Λύση

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \int_0^{+\infty} \sin t \, e^{-st} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) e^{-st} \, dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{it} \cdot e^{-st} - \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-it} \cdot e^{-st} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{(i-s)t} \, dt - \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-(i+s)t} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u} e^{(i-s)t} \, dt - \frac{1}{2i} \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u} e^{(-i-s)t} \, dt \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^u e^{(i-s)t} dt = \left[\frac{e^{(i-s)t}}{i-s} \right]_0^u = \frac{1}{i-s}\left(e^{(i-s)u} - 1\right) \\ \displaystyle\int_0^u e^{-(i+s)t} dt = \left[\frac{e^{-(i+s)t}}{-(i+s)} \right]_0^u = \frac{1}{-(i+s)}\left(e^{-(i+s)u} - 1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2i}\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\dfrac{1}{i-s}\left(e^{(i-s)u}-1\right)\right]=\dfrac{1}{2i(i-s)}\lim\limits_{u\to+\infty}\left[e^{(i-s)u}-1\right] \\ -\dfrac{1}{2i}\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\dfrac{1}{-(i+s)}\left(e^{-(i+s)}-1\right)\right]=\dfrac{1}{2i(i+s)}\lim\limits_{u\to+\infty}\left[e^{-(i+s)u}-1\right]. \end{cases}$$

άρα

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{2i(i-s)}\lim_{u\to+\infty}\left[e^{(i-s)u}-1\right]+\frac{1}{2i(i+s)}\lim_{u\to+\infty}\left[e^{-(i+s)u}-1\right].$$

που είναι το μιγαδικό $\cos u + i\sin u$

ισχύει $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{(i-s)u}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{iu}\cdot e^{-su}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\cos u\, e^{-su}+\lim\limits_{u\to+\infty} i\sin u\, e^{-su}$

για $s\leq 0$

τα $\lim \cos u\, e^{-su}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty} i\sin u\, e^{-su}$ δεν υπάρχουν.

για $s>0$ τα όρια είναι ίσα με 0

άρα αντίστοιχως

για $s\leq 0$ το $\lim e^{(i-s)u}$ δεν υπάρχει

ενώ για $s>0$ είναι $=0$.

άρα,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{2i(i-s)}(-1)+\frac{1}{2i(i+s)}(-1)$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

1-11-17 b.

$$= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-s} + \frac{1}{i+s}\right) = \dots = \frac{1}{s^2+1}$$

<u>Άσκηση</u>

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}, \ s>0$$ δουλεύουμε $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2i}$

<u>Τα γνωστά [illegible] Laplace</u>

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s>a$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{\cos t) = \frac{s}{s^2+1}, \quad s>0$$

Ορισμός

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ονομάζεται εκθετικής τάξης $\boxed{\alpha}$ όταν υπάρχουν πραγματικές σταθερές $M>0$, $K>0$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$|f(t)|\le K e^{\boxed{a}t}, \quad \forall t\ge M$$

Θεώρημα: Ύπαρξης Μ/Σ Laplace

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης α $(\alpha\in\mathbb{R})$ τότε υπάρχει ο Μ/Σ Laplace

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad \forall s>0$$

> Ιδιότητες Μ/Σ Laplace

1η Πρόταση

$f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $s>a_1$

και $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)$ με $s>\alpha_2$

Τότε υπάρχει Μ/Σ Laplace της $af(t)+bg(t)$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

και ισχύει $\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=\alpha F(s)+\beta G(s)$ με $s>\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

1-11-17c.

Παράδειγμα

$$\sinh(\alpha t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}, \quad t \in [0, +\infty)$$

$$\cosh(\alpha t) = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}, \quad t \in [0, +\infty)$$

Λύση

$$\mathcal{L}\{\sinh(\alpha t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+\alpha} \Rightarrow \mathcal{L}\{\sinh(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}, \quad s > |\alpha|$$

Ομοίως

$$\mathcal{L}\{\cosh(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2-\alpha^2}, \quad s > |\alpha|$$

2η Πρόταση

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s > \alpha$ τότε

υπάρχει ο M/Σ Laplace της $e^{bt} f(t)$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{e^{bt} f(t)\} = F(s-b), \quad s > \alpha + b$$

Παράδειγμα 1

$$g(t) = e^{5t}\cos t, \quad t \in [0, +\infty)$$

Ξέρω ότι $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}, \quad s > 0$ άρα

$$\mathcal{L}\{e^{5t}\cos t\} = \frac{s-5}{(s-5)^2+1}, \quad s > 5$$

Παράδειγμα 2

$$g(t) = e^{-3t}t \quad , t \in [0, +\infty)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}t\} = ?$$

Ξέρω ότι $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$

άρα $\mathcal{L}\{e^{-3t}t\} = \frac{1}{(s+3)^2}, \quad s > -3$

3η Πρόταση

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ για $s > \alpha_0$, τότε υπάρχει ο Μ/Σ Laplace του $f(\alpha t)$, $\alpha > 0$, και ισχύει

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad s > \alpha \cdot \alpha_0$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

1-11-17

Παράδειγμα 1

$$g(t) = \cos(\alpha t) \,, \quad t \in [0, +\infty) \,, \quad \alpha > 0$$

$$h(t) = \sin(\alpha t) \,, \quad t \in [0, +\infty) \,, \quad \alpha > 0$$

Λύση

για $g_1(t) = \cos t$ ξέρω ότι $G_1(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

άρα για $g(t) = \cos(\alpha t)$, $G(s) = \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{\frac{s}{\alpha}}{(\frac{s}{\alpha})^2+1}$ με $s > 0$

$$= \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

όμοιως $H(s) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$, $s > 0$

Παράδειγμα 2

$$g(t) = \cos^2 t \,, \quad t \in [0, +\infty)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = ?$$

$\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$ άρα θέλω $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1 + \cos(2t)}{2}\right\} =$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)} \,, \quad s > 0.$$

4η Πρόταση

$$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, \quad \text{με } L\{f(t)\}=F(s), \quad s>\alpha$$

Τότε υπάρχει ο Μ/Σ Laplace της $t^n f(t)$, $n\in\mathbb{N}$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s), \quad s>\alpha, \quad n\in\mathbb{N}$$

η παράγωγος της τάξης n.

Παράδειγμα 1

$$g(t)=t\cos(\alpha t), \quad t\in[0,+\infty)$$

Λύση

$$f(t)=\cos(\alpha t) \quad \text{με} \quad F(s)=\frac{s}{s^2+\alpha^2}, \quad s>0$$

άρα από την πρόταση (4) θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{t\cos(\alpha t)\}=(-1)F'(s)=-\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)'=$$

$$=\frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}, \quad s>0.$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

1-11-17 ε.

Παράδειγμα 2

$g(t) = t^2 \cdot e^{at}$, $t \in [0, +\infty)$

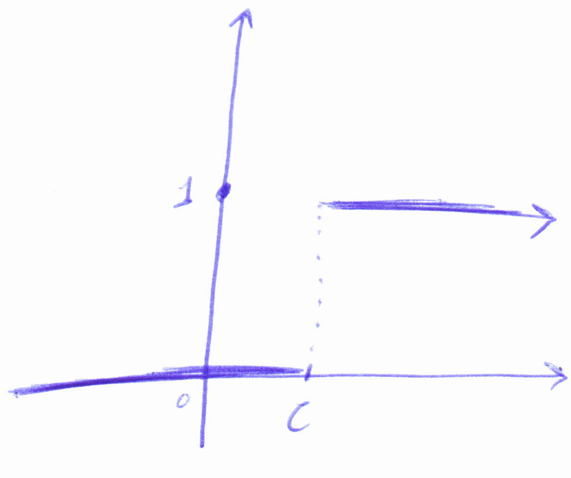
Λύση

$f(t) = e^{at}$ με $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-\alpha}$, $s > \alpha$

άρα $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = (-1)^2 F''(s) = \left(\frac{1}{s-\alpha}\right)'' = \dots = \frac{2}{(s-\alpha)^3}$, $s > \alpha$.

- Συνάρτηση Heaviside (μοναδιαίου βήματος)

$$u(t-c) = \begin{cases} 1, & t \geq c \\ 0, & t < c \end{cases}$$

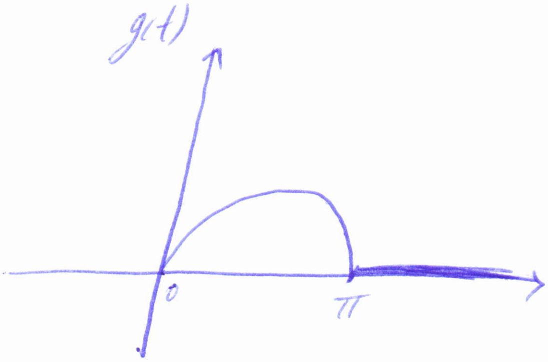


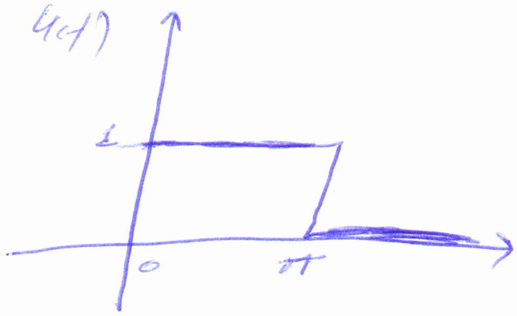
Έστω η συνάρτηση

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης, μπορώ να την γράψω ως

$$g(t) = h(t)\sin(t) \quad \text{όπου} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$$

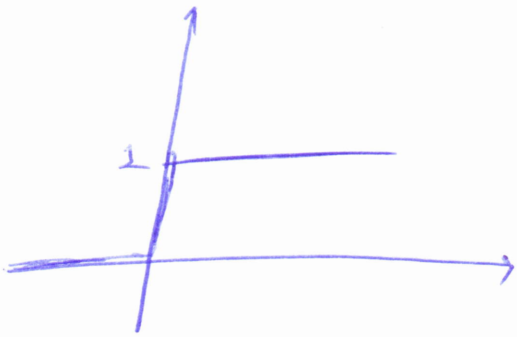




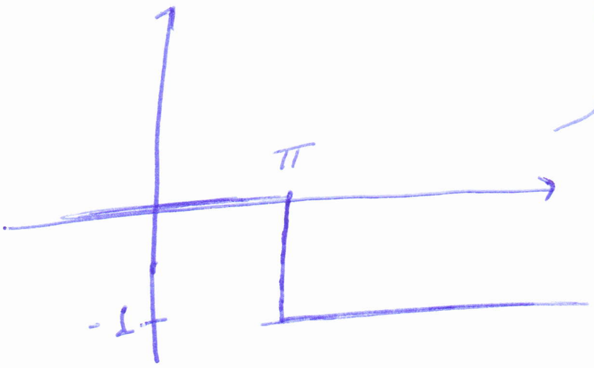
η $h(t)$ εδώ είναι η

$h(t) = u(t) - u(t-\pi)$

Διότι αν έχω την $u(t)$



βγάλω την $-u(t-\pi)$ που είναι :



θα έχω την $h(t)$!

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

1-11-17 β.

Πρόταση

Έστω $f:[0,+\infty)$ με τιμές στο $\mathbb{R}$

έχει $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s > \alpha$. Τότε υπάρχει

ο M/Σ Laplace της $u(t-c)f(t-c)$, $c \geq 0$

και ισχύει $\mathcal{L}\{u(t-c)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$, $s > \alpha$, $c \geq 0$

Παράδειγμα 1

$g(t) = u(t-c)$, $t \in [0,+\infty)$

$\mathcal{L}\{g(t)\} = ?$

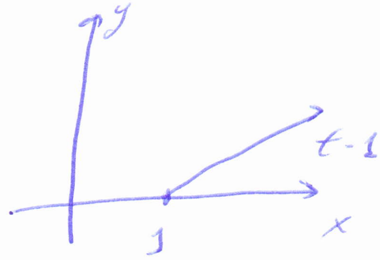
Λύση

έστω $f(t) = 1$ με $F(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$

άρα $\mathcal{L}\{g(t)f(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-c)\} = e^{-cs}\frac{1}{s}$, $s > 0$

Παράδειγμα 2

$$g(t) = \begin{cases} t-1 & , \ t \geq 1 \\ 0 & , \ 0 \leq t < 1 \end{cases}$$



Λύση

$g(t) = (t-1)\,u(t-1)$ και έστω $f(t) = t$ με $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$, $s > 0$.

με $\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-1)(t-1)\} = \dfrac{e^{-s}}{s^2}$, $s > 0$.

Παράδειγμα 3

$$g(t) = \begin{cases} \sin t & , \ 0 \leq t < \pi \\ 0 & , \ t \geq \pi \end{cases}$$

όμοιως η $g(t)$ γράφεται ως $g(t) = [u(t) - u(t-\pi)]\sin t =$

$= u(t)\sin t - u(t-\pi)\sin t$

ξέρω
$f(t) = \sin t$ με
$F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, $s > 0$

άρα $\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\sin t - u(t-\pi)\sin t\}$

$= \mathcal{L}\{u(t)\sin t\} - \mathcal{L}\{u(t-\pi)\sin t\}$

$= \mathcal{L}\{u(t)\sin t\} + \mathcal{L}\{u(t-\pi)\cdot\sin(t-\pi)\}$

$= \dfrac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$

Εφαρμ. Μαθ.

7-11-17 2.

Μ/Σ Laplace με εφαρμογή σε ΣΔΕ

(→ βασική αναφορά είδαμε)

→ Πρόοδος 28-11-17 Τρίτη! Σε 3 εβδομάδες την ώρα του μαθήματος 2-5 Αμφιθέατρο.

→ Πρόταση

Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

με Μ/Σ Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s > 0$

και ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη με $f^{(k)}(t)$

(για τις διάφορες παραγώγους το k είναι σε παρένθεση) με $k = 0, 1, \ldots, n$ να είναι συναρτήσεις εκθετικής τάξης.

Τότε υπάρχει ο Μ/Σ Laplace της $f^{(n)}(t)$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

$s > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ειδική περίπτωση: για $n=1$ και $n=2$

$n=1$
$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

SOS

$n=2$
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

Εφαρμοσμένα Μαθ.

7-11-17 b.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}^{*} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

Παράδειγμα

Βρείτε τον μ/σ Laplace της $y(t)$ που ικανοποιεί το

ΠΑΤ

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) + 2y(t) = e^{-3t} \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Λύση $\quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

1. μ/σ Laplace στα δύο μέλη της ΔΕ

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-3t}\}^{*} \Rightarrow$$

$$s\underbrace{Y(s)}_{\substack{\text{Laplace} \\ \text{της } y(t)}} - \underbrace{y(0)}_{\substack{\text{είναι γνωστό} \\ \text{από την υπόθεση}}} + 2\,Y(s) = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3.$$

$$(s+2)\,Y(s) - 1 = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+4}{(s+3)(s+2)}, \quad s > -3, \quad s \neq -2$$

Εφαρμοσμένα Μαθ.

7-11-17

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s>0$$

Παράδειγμα.

Βρείτε τον Μ/Σ Laplace της $y(t)$ που ικανοποιεί το ΠΑΤ.

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 2\mathcal{L}\{y'(t)\} - 3\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{1\} \Rightarrow$$

$$s^2 Y(s) - \cancel{s y(0)} - y'(0) + 2sY(s) - \cancel{2y(0)} - 3Y(s) = \frac{1}{s} \quad s>0$$

$$s^2 Y(s) - 1 + 2sY(s) - 3Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s - 3)Y(s) = \frac{1}{s} + 1, \quad s>0.$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+1}{s\underbrace{(s-1)(s+3)}_{s^2+2s-3}}, \quad s>0, \quad s \neq 1$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

7-11-17 d.

Ο Αντίστροφος Μ/Σ Laplace

(ξεκινάω από την $F(s)$ και πάω στην $f(t)$)

→ Ορισμός

Έστω $F : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

Αν υπάρχει συνάρτηση $f(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ τότε η f ονομάζεται αντίστροφος Μ/Σ Laplace

της F και συμβολίζεται με $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$

Ισχύουν (2 βασικές ιδιότητες)

1. $\mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\} = F(s)$

2. $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t)$

→ Θεώρημα Ύπαρξης αντιστρόφου Μ/Σ Laplace

$f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχείς

Οι οποίες είναι εκθετικής τάξης, οπότε υπάρχουν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

και $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$

Αν $F(s) = G(s)$, $\forall s > c$ τότε ισχύει $f(t) = g(t)$ για κάθε υποδιάστημα του $[0, +\infty)$ όπου οι f και g είναι συνεχείς.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

7-11-17 e. !!! Σχόλιο: Δύο τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις εκθετικής τάξης στο $[0,+\infty)$, με τον ίδιο Μ/Σ Laplace, είναι δυνατόν να διαφέρουν μόνο στα σημεία ασυνέχειας.

Αν f, g συνεχείς στο $[0,+\infty)$ τότε οι αντίστροφοι Μ/Σ Laplace θεωρούνται μοναδικοί.

→ Πρόταση (Ιδιότητες για τον αντίστροφο Μ/Σ Laplace)

1) $\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)+bG(s)\} = a\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

2) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$

Μετατοπισμένο όρισμα κατά a.

3) $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{t}{a}\right)$

Κλιμάκωση

Αποδείξεις (2 και 3)

• Από αντίστοιχες ιδιότητες $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

βάζοντας $\mathcal{L}^{-1}$ και στα δύο μέλη παίρνουμε → 2)

και

• $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{t}{a}\right)\right\} = F(as)$ με ίδιο τρόπο.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

1-11-17 §. # Παράδειγμα.

Υπολογίστε αντίστροφο Μ/Σ Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{s-1}{s^2+4}$

Ποια συνάρτηση f αν πάρω το Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ να βρω την $F(s)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Γνωστοί από απλό Μ/Σ

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Θα δίνονται ως υπόδειξη!

Λύση

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= \cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t) = f(t)$$

Παράδειγμα

$F(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}$ βρείτε $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Λύση: βρίσκω ρίζες παρονομαστή $\frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$

$\Rightarrow 1 = A(s-2) + B(s-1)$ (ισχύει για κάθε s)

για $s=2 \Rightarrow 1 = B\cdot 1 \Rightarrow B = 1$

για $s=1 \Rightarrow 1 = (A)(-1) \Rightarrow A = -1$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

7-11-17

Έτσι $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$

$= -e^{t} + e^{2t}$

Σημείωση:
$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}$
$s > \alpha$

(Επαλήθευση, παίρνοντας Μ/Σ Laplace στη $-e^{t} + e^{2t}$ για να βρώ την $F(s)$)

Παράδειγμα.

Αντίστροφο Μ/Σ Laplace της:

Υπόδειξη
$\mathcal{L}\{t e^{\alpha t}\} = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$

$F(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 9}$

Λύση $\frac{1}{s^2-6s+9} = \frac{1}{(s-3)^2} =$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t e^{3t}$

Παράδειγμα.

Υπολογίστε $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ της $F(s) = \frac{s}{(s+1)^3}$

Υπόδειξη
$\mathcal{L}\{t^2 e^{\alpha t}\} = \frac{2}{(s-\alpha)^3}$

Λύση $\frac{s}{(s+1)^3} = \frac{s+1-1}{(s+1)^3} = \frac{s+1}{(s+1)^{\cancel{3}\,2}} - \frac{1}{(s+1)^3} =$

$= \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} \Rightarrow$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

7-11-17 Κ.

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} =$$

$$= te^{-t} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t}, \quad s \neq -1.$$

Παράδειγμα

$$F(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)}$$ βρείτε $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Λύση

$$\frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{\Gamma}{s-2} \Rightarrow$$

(πως γίνεται η ανάλυση σε απλά κλάσματα δες εδώ)

$$\Rightarrow 2s-1 = A(s-1)(s-2) + B(s-2)s + \Gamma(s-1)s.$$

Με αντικατάσταση επιλέγοντας τιμές s $(0, 1, 2)$ έχουμε

για $s=1$: $1 = B(-1) \Rightarrow B = -1$

για $s=0$: $-1 = A(-1)(-2) \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$.

για $s=2$: $3 = \Gamma \cdot 2 \Rightarrow \Gamma = 3/2$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{2} - e^{t} + \frac{3}{2}e^{2t}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

7-11-17 : Παράδειγμα :

$F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$ βρείτε την $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

<u>Λύση</u> $\dfrac{1}{s(s+1)^2} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{\Gamma}{(s+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = A(s+1)^2 + B(s+1)s + \Gamma \cdot s \quad (s = 0, -1)$

για $s=0$: $1 = A$.

για $s=-1$: $\Gamma = -1$

για $s=1$ $\quad 1 = 4A + 2B + \Gamma \Rightarrow 1 = 4 + 2B - 1 \Rightarrow B = -2$.

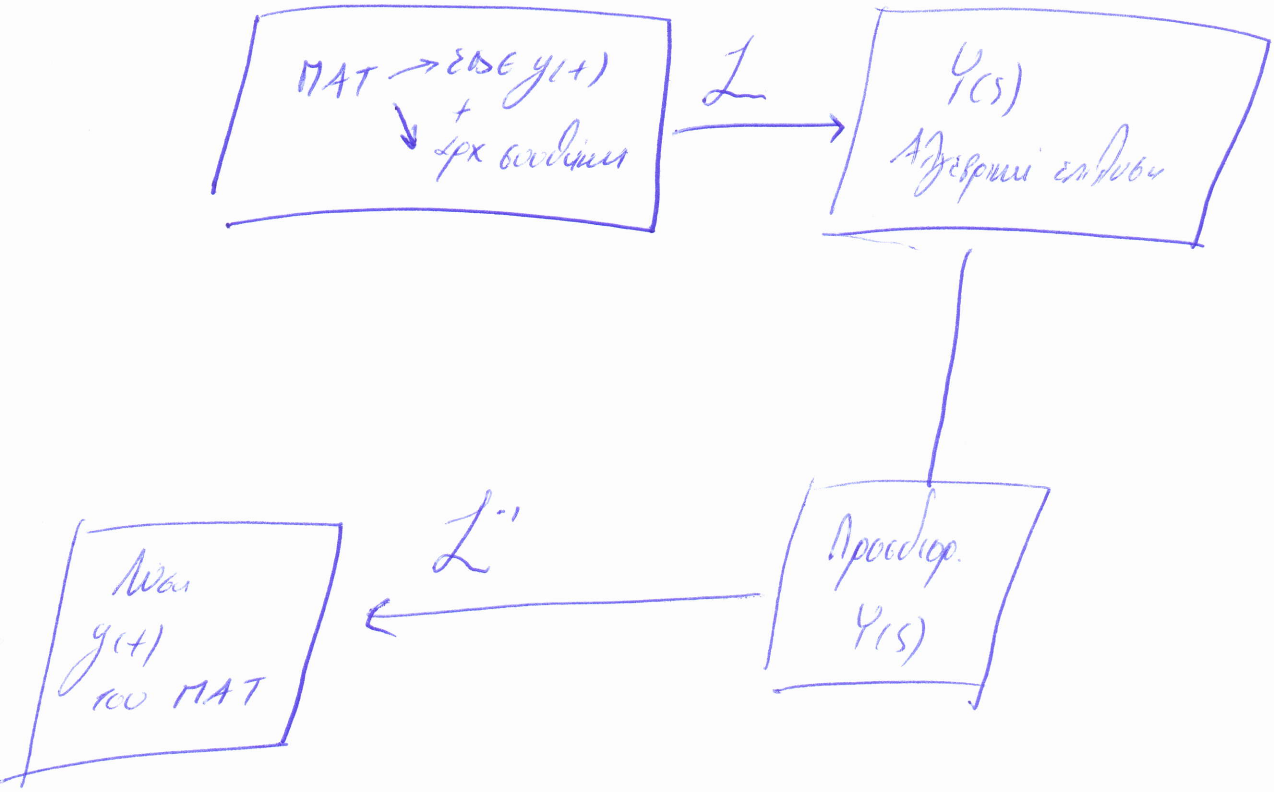
άρα $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2}\right\}$.

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 1 - e^{-t} - te^{-t}$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

8-11-17

ο Επίλυση ΠΑΤ με Μ/Σ Laplace



Παράδειγμα

Θυμίζω $\mathcal{L}\{y'(t)\}=sY(s)-y(0)$

Λύστε το ΠΑΤ

$$\left.\begin{aligned} 2y'(t)-y(t)&=e^{2t}\\ y(0)&=1\end{aligned}\right\}$$

Λύση

$$2\mathcal{L}\{y'(t)\}-\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{e^{2t}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2sY(s)\ -\ {}^{*}2y(0)-Y(s)=\frac{1}{s-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2sY(s)-2-Y(s)=\frac{1}{s-2}\Rightarrow(2s-1)Y(s)=\frac{1}{s-2}+2\Rightarrow$$

(που είναι αλγεβρική εξίσωση)
δεν είναι Δ.Ε.!!

$$\Rightarrow \boxed{Y(s)=\frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)}}$$

* Στις ασκήσεις χρειάζεται πάντα αρχικές συνθήκες, δουλεύουμε με Laplace μόνο όταν αυτές υπάρχουν (συνθήκες)

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

8-11-17b.

$$\frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)}$$ (Ανάλυση σε απλά κλάσματα)

$$\hookrightarrow \frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)} = \frac{A}{2s-1} + \frac{B}{s-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2s-3 = A(s-2) + B(2s-1)$$

για $s=2$: $1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

για $s=\frac{1}{2}$: $-2 = -\frac{3}{2}A \Rightarrow A = 4/3$

άρα

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$= \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-1}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1/2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

Σημείωση

$$\frac{1}{s-\alpha} = \mathcal{L}\{e^{at}\}$$

(αυτό μπορεί να βοηθάει σε προηγ. ερώτημα μιας άσκησης).

(Μπορώ να επαληθεύσω ότι αυτή πληροί την ΔΕ, και αν $y(0)=1$).

Το Laplace είναι πολύ καλό εργαλείο, αλλά χρειάζεται να γνωρίζουμε και κάποιες ιδιότητες / υποθέσεις / εξαιρέσεις / αποδείξεις

Υπάρχουν ΔΕ, οι οποίες δεν επιλύονται με άλλες μεθόδους.

Παράδειγμα

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = e^t$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$

Λύση

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 5\mathcal{L}\{y'(t)\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\}.$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Υπενθύμιση

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

8-11-17 ΙC.

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - s - 1 - 5sY(s) + 5 + 6Y(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

(Ανάλυση σε απλά κλάσματα).

$$\frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{s-2} + \frac{\Gamma}{s-3}$$

$$s^2 - 5s + 5 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + \Gamma(s-1)(s-2)$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \\ \Gamma = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}e^t}}_{y_\mu(t)} + \underbrace{\boxed{e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t}}}_{y_o(t)}$$

Σχόλιο

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = e^t$$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ βρίσκω λ_1, λ_2 με $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$ $\nearrow \lambda_1 = 3$, $\searrow \lambda_2 = 2$.

άρα $y_o(t) = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{2t}$. λύση της ομογενούς

→ κάνω αναζήτηση για την μερική λύση $y_\mu(t) = B \cdot e^t$

(αυτή είναι μεθοδολογία προηγ. μαθημάτων).

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

8-11-17α.

(Προβλήματα που δεν λύνονται με τις προηγούμενες τεχνικές). Όσα έλυσα με Laplace εώς τώρα, μπορούσα να τα λύσω και με τεχνική που δείξαμε πριν τα Laplace.

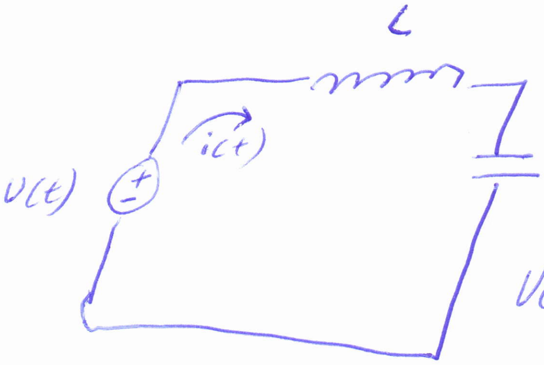
" τεχνικές πριν μετασχηματισμού Laplace

Παράδειγμα

Πηνίο με αυτεπαγωγή L, και πυκνωτής χωρητικότητας C, συνδέονται σε σειρά με πηγή τάσης $v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \tau \\ V_0, & t \ge \tau. \end{cases}$

Βρείτε τη συνάρτηση φορτίου $q(t)$, αν $q(0) = 0$ και $i(0) = 0$.

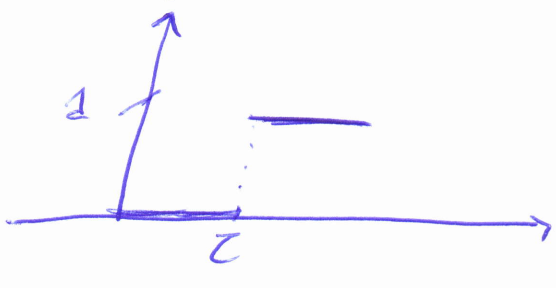
Λύση



$$L q''(t) + \frac{1}{C} q(t) = v(t)$$

εκφράζεται με επίδραση μοναδιαίας

$$v(t) = V_0 \cdot u(t - \tau)$$ (βλέπε γραφική παράσταση)



$$\left.\begin{aligned} L q''(t) + \frac{1}{C} q(t) &= V_0 u(t - c) \\ q(0) &= 0 \\ q'(0) &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

↳ το σύστημα λύνεται με Laplace!

Ξέρω $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = q'(t)$

$i(0) = 0 \rightarrow q'(0) = 0$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

8-11-11

Δηλαδή

$$\mathcal{L}\{u(t-c) f(t-c)\} = e^{-cs} F(s)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$L\,\mathcal{L}\{q''(t)\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}\{q(t)\} = V_0\,\mathcal{L}\{u(t-c)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\left(s^2 Q(s) - s q(0) - q'(0)\right) + \frac{1}{C} Q(s) = V_0 e^{-cs}\frac{1}{s} \Rightarrow$$

(αλγεβρική εξίσωση της $Q(s)$) αντικαθιστούμε $q(0) = q'(0) = 0$

$$\Rightarrow \left(L s^2 + \frac{1}{C}\right) Q(s) = V_0 \frac{e^{-cs}}{s} \Rightarrow \boxed{Q(s) = \frac{V_0}{L}\frac{e^{-cs}}{s\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)}}$$

→ Αντίστροφος Μ/Σ Laplace.

(ανάλυση σε απλά κλάσματα)

$$\Rightarrow Q(s) = \frac{V_0}{L} e^{-cs}\left(\frac{A}{s} + \frac{B\cdot s + \Gamma}{s^2 + \frac{1}{LC}}\right)$$

Προσδιορισμός των A, B και Γ: $A = \frac{L}{C}$, $B = -\frac{L}{C}$, $\Gamma = 0$

$$\Rightarrow Q(s) = V_0 \cdot C\left(\boxed{\frac{e^{-cs}}{s}} - \boxed{\frac{s e^{-cs}}{s^2 + 1/LC}}\right) \quad *$$

πώς αντιστρέφω αυτά?!

Αν πάρω $f(t) = 1$ $\mathcal{L}\{u(t-c)\} = \frac{e^{-cs}}{s}$

$$\Rightarrow u(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-cs}}{s}\right\}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

8-11-17 J.

Δηλαδή

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$* \Rightarrow \quad q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = V_0 C \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-cs}}{s}\right\} -$

$- V_0 C \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s e^{-cs}}{s^2 + 1/LC}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow q(t) = V_0 C\, u(t-c) - V_0 C\, u(t-c) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}(t-c)\right)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s e^{-cs}}{s^2 + 1/LC}\right\} =$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs} \frac{s}{s^2 + 1/LC}\right\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs} \frac{s}{s^2 + (\sqrt{1/LC})^2}\right\}$

Αν $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + (\underbrace{\sqrt{1/LC}}_{a})^2}$

τότε $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$

Εφαρμοσμένα Μαθ.
14-11-17α.

① Συνέλιξη και εφαρμογές

Ορισμός Θεωρούμε $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

ονομάζουμε συνέλιξη των f και g, συμβολίζουμε $f*g$

τη συνάρτηση $$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

Προφανώς ισχύει $$(g*f)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

και αν θέσω $t-\tau = u$ θα πάρω $$\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = (f*g)(t)$$

Θεώρημα

Θεωρούμε $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s > a_1$ και $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ με $s > a_2$. Τότε υπάρχει ο Μ/Σ Laplace της $(f*g)(t)$ και ισχύει

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = F(s) \cdot G(s), \quad s > \max\{a_1, a_2\}.$$

→ <u>Θεώρημα 1</u> $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = (f*g)(t)$

→ <u>Θεώρημα 2</u> $\mathcal{L}\{(f*1)(t)\} = \mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\} = \dfrac{F(s)}{s}$

<u>Παράδειγμα</u>

Βρείτε τον $\mathcal{L}^{-1}$ της $H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$

<u>Λύση</u> $H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)} = F(s)\cdot G(s) = \dfrac{1}{s}\,\dfrac{1}{s^2+4}$

$$\begin{cases} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\} = \dfrac{1}{2}\sin(2t) \\ g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1 \end{cases}$$

άρα από το θεώρημα $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f*g)(t) =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t 1\sin(2\tau)\,d\tau = \frac{1}{4}(1-\cos(2t))$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

14-11-17 6.

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Συνελικτικού τύπου

Δημιουργούμε αλγεβρικές εξισώσεις, από ολοκληρωτικές

Μορφή: $$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

y είναι η άγνωστη συνάρτηση και f, k είναι γνωστές συναρτήσεις.

Παράδειγμα

$$y(t) = 4t - 3 \int_0^t \sin(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

με βάση του ορισμού της συνέλιξης συναρτήσεων, έχουμε

$$y(t) = 4t - 3\,(y(t) * \sin(t))$$

εφαρμόζουμε δεξιά-αριστερά Laplace, έχουμε

$$Y(s) = \frac{4}{s^2} - 3\,Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} \quad \text{άρα} \quad Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}$$

οπότε με αντίστροφο Laplace.

$$y(t) = t + \frac{3}{2}\sin(t)$$

Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις

Παράδειγμα

Λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης

$$L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+\frac{Q_0}{C}=E_0e^{-\alpha t}$$

η οποία προκύπτει όταν τάση $E_0\cdot e^{-\alpha t}$ εφαρμόζεται στα άκρα ενός πυκνωτή C και ενός πηνίου L που είναι συνδεδεμένοι σε σειρά.

Λύση

$$Ls\,I(s)-Li(0)+\frac{1}{Cs}I(s)+\frac{Q_0}{Cs}=\frac{E_0}{s+\alpha}.$$

Θέτω $i(0)=0$, λύνω ως προς $I(s)$

$$I(s)=\frac{E_0}{L}\frac{s}{(s+\alpha)(s^2+\frac{1}{LC})}-\frac{Q_0}{LC}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}\Rightarrow$$

βλέπε σελίδα 231

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
14-11-17ε.

Μιγαδικοί αριθμοί

$$x^2+1=0$$

Δεν λύνεται στο $\mathbb{R}$. Οπότε επεκτείνουμε το $\mathbb{R}$ σε ένα νέο σύνολο το οποίο θα διατηρεί τις ιδιότητες του $\mathbb{R}$, ώστε στο νέο σύνολο να είναι δυνατή η επίλυση εξισώσεων όπως η προηγούμενη.

Ορισμός και Αλγεβρικές Ιδιότητες των Μιγαδικών Αριθμών

- Ορισμός: Το καρτεσιανό γινόμενο $R^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$
- $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$

ονομάζεται σύνολο των μιγαδικών αριθμών και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.
Τα στοιχεία $z=(x,y)$ του $\mathbb{C}$ ονομάζονται μιγαδικοί αριθμοί.

> Έχουμε $z=(x,y)$, $w=(u,v)$. Τότε $z=w$ αν $x=u$ και $y=v$

→ Πρόταση: Παίρνουμε $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύουν

i) $z_1+z_2=z_2+z_1$

ii) $z_1z_2=z_2z_1$

iii) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

iv) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

v) $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$

→ Μηδενικό στοιχείο: $(0,0)$

→ Μοναδιαίο στοιχείο: $(1,0)$

→ Αντίθετο του z είναι το $-z = (-x, -y)$

→ Αντίστροφο του $z = (x,y) \neq (0,0)$ είναι το $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

→ Αφαίρεση: $w - z = w + (-z) = (u-x, v-y)$

→ Πηλίκο: $\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1} = \left(\frac{ux}{x^2+y^2}, \frac{-vy}{x^2+y^2}\right)$

→ Οι Μιγαδικοί αριθμοί $(x,0)$: $(x,0)+(y,0) = (x+y, 0)$ ⎤ συμπεριφέρονται
$(x,0)(y,0) = (xy, 0)$ ⎦ ως προς τις πράξεις του $\mathbb{C}$

όπως ακριβώς και οι πραγματικοί αριθμοί.

Έτσι θεωρούμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί εμφανίζονται στο $\mathbb{C}$ και ταυτίζονται με εκείνους τους μιγαδικούς που έχουν δεύτερη συντεταγμένη το 0.

Όταν γράφουμε $x \in \mathbb{R}$ εννοούμε $x = (x, 0)$

→ Φανταστικό στοιχείο: Ο μιγαδικός $i = (0,1)$ ικανοποιεί $i^2 = (0,1)(0,1) = 1$ και αναφέρεται ως η φανταστική μονάδα του $\mathbb{C}$

→ $z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(0,y) = x + iy$

Άρα $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ (Καρτεσιανή Μορφή)

x = πραγματικό μέρος του z $x = Re(z)$

y = φανταστικό μέρος του z $y = Im(z)$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
14-11-17 d.

Παράδειγμα

$\forall$ $z = x + yi \in \mathbb{C}$ η εξίσωση $w^2 = z$ έχει ρίζες

$$\boxed{\begin{aligned} &w = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} \pm i \frac{y}{|y|} \sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x} \right), \ y \neq 0 \\ &w = \pm \sqrt{x}, \ y = 0, \ x \geq 0 \\ &w = \pm i\sqrt{-x}, \ y = 0 \ \ x \leq 0. \end{aligned}}$$

Οι δύο μιγαδικοί αριθμοί w (λύσεις που εφαρμόζονται στον πλεονάζοντα χώρο) αναφέρονται ως τετραγωνικές ρίζες του z.

Λύση

$w = u + iv$ $\quad$ Έχουμε $w^2 = z \Rightarrow$

$z = x + yi$ $\quad$ $(u+iv)^2 = x + iy \Rightarrow u^2 + 2iuv - v^2 = x + iy \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = x & (1) \\ 2uv = y & (2) \end{cases}$$

Για $y \neq 0$ (οπότε και $u \neq 0$) θα λύσουμε την (2) ως προς v

$v = \dfrac{y}{2u}$ και με αντικατάσταση στην (1) $u^2 - \dfrac{y^2}{4u^2} = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4u^4 - 4xu^2 - y^2 = 0$$

αν $u^2 = \omega$ $\quad 4\omega^2 - 4x\omega - y^2 = 0 \Rightarrow \omega = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{2}$

Επομένως $u^2 = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \Rightarrow u = \pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $v = \pm\frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$

Παράδειγμα

$$\alpha w^2 + bw + c = 0 \quad , \quad \alpha, b, c \in \mathbb{C}$$

Λύση:

για $\alpha \neq 0$ $\left(\left(w+\frac{b}{2\alpha}\right)^2 = \frac{b^2-4\alpha c}{2\alpha^2} \Rightarrow \right) w = \frac{-b}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{b^2-4\alpha c}}{2\alpha}$

Παράδειγμα

$$w^2 - 8(1-i)w + 63 - 16i = 0$$

εδώ $\alpha = 1$

$b = -8(1-i)$

$c = 63 - 16i$

Λύση $b^2 - 4\alpha c = -252 - 64i$;

$\sqrt{b^2-4\alpha c}$

$$w = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} + i\frac{y}{|y|}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right)$$

για $x = -252$ και $y = -64$ προκύπτει

$$w = 4(1-i) \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{8} - i\sqrt{512}\right) \Rightarrow w = 4(1-i) \pm (1-8i)$$

$w_1 = 5-12i$ και $w_2 = 3+4i$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

14-11-17 ε.

• Ισχύει η διάταξη στο $\mathbb{C}$? $\rightarrow$ <u>ΟΧΙ</u> δηλαδή για $z, w \in \mathbb{C}$ δεν έχει νόημα $z \geq w$ ή $z \leq w$. Στο επόμενα όταν γράφουμε $x \geq y$, θα εννοούμε ότι $x, y \in \mathbb{R}$

Ο μιγαδικός $\bar{z} = x - iy$ ονομάζεται συζυγής μιγαδικός του $z = x + yi$

$\rightarrow$ Πρόταση: $z, w \in \mathbb{C}$: i) $\bar{\bar{z}} = z$

ii) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

iii) $Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

$Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$

iv) $z = \bar{z} \iff z = x \in \mathbb{R}$

$z = -\bar{z} \iff z = iy, \ y \in \mathbb{R}$

v) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

vi) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

vii) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}, \ w \neq 0$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

15-11-17α **Παράδειγμα**

(εφαρμόζουμε με μιγαδικούς συντελεστές)

(1) $a\tilde{w}^2 + b\tilde{w} + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $a \neq 0$

$$\Rightarrow \tilde{w}^2 + 2\frac{b}{2a}\tilde{w} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \underbrace{\tilde{w}^2 + 2\frac{b}{2a}\tilde{w} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\tilde{w} + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \tilde{w} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

πως υπολογίζω αυτό; Έστω $b^2 - 4ac = d + ie$ (είναι μιγ. αριθμός) ~~[illegible]~~

↳ ζητάμε δηλαδή να λύσουμε την $w^2 = b^2 - 4ac$.

από χθες

$w^2 = z$ με $z = x + iy$

$$\boxed{w = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} + i\frac{y}{|y|}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right), \quad y \neq 0.}$$

η οποία από το προηγούμενο παράδειγμα (αυτό) έχει ως λύσεις

$$w = \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{d^2+e^2}+d} + i\frac{e}{|e|}\sqrt{\sqrt{d^2+e^2}-d}\right) \quad (3)$$

η λύση της (1) είναι η (2) όπου η $\sqrt{b^2-4ac}$ δίνεται από την (3)

Στο σύνολο των μιγαδικών δεν έχει νόημα να η διάταξη των στοιχείων.

Παράδειγμα

$\tilde{\omega}^2 - 8(1-i)\tilde{\omega} + 63 - 16i = 0$

$a = 1$

$b = -8(1-i)$

$c = 63 - 16i$

$b^2 - 4ac = -252 - 64i$

$d = -252$

$e = -64$ (Λογική της ρίζας άσκησης).

- Μέτρο Μιγαδικού αριθμού

$z = x + iy$

→ Ο πραγματικός αριθμός $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού αριθμού z

Ιδιότητες

Πρόταση

$z, \omega \in \mathbb{C}$

1) $|z| \geq 0$ και $|z| = 0 \iff z = 0$

2) $|z\omega| = |z||\omega|$

3) $\left|\frac{z}{\omega}\right| = \frac{|z|}{|\omega|}$, $\omega \neq 0$

4) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, $|z| = |\bar{z}|$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

15-11-17 b.

5) $|Re(z)| \leq |z|, \quad |Im(z)| \leq |z|$

6) $|z+\omega| \leq |z| + |\omega|$

7) $\big||z| - |w|\big| \leq |z-\omega|$

Ισχύει πάντα

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$|z|^2 = x^2 + y^2 =$

$= (x+iy)(x-iy) =$

$= z \cdot \bar{z}$

Ενδεικτικές Αποδείξεις

2) $|z\omega|^2 = (z \cdot \omega)(\overline{z \cdot \omega}) = z \cdot \omega \cdot \bar{z} \cdot \bar{\omega} = z \cdot \bar{z} \cdot \omega \cdot \bar{\omega} =$

$= |z|^2 \cdot |\omega|^2 \Rightarrow |z \cdot \omega| = |z| \cdot |\omega|$ ✓

5) $|Re(z)| = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ ✓

$|Im(z)| = |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ ✓

6) $|z+\omega|^2 = (z+\omega)(\overline{z+\omega}) = (z+\omega)(\bar{z}+\bar{\omega}) =$

$= z\bar{z} + z \cdot \bar{\omega} + \omega \cdot \bar{z} + \omega \cdot \bar{\omega} \quad (*)$

$z\bar{\omega} + \omega \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{\omega} + (\overline{z \cdot \bar{\omega}}) = 2\, Re(z \cdot \bar{\omega})$

Δι' την 5) $\quad 2\,Re(z \cdot \bar{\omega}) \leq 2|z \cdot \bar{\omega}| = 2 \cdot |z| \cdot |\bar{\omega}| =$

$= 2|z| \cdot |w| \quad (**)$

Από (*) και (**)

$|z+\omega|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2$

$$\Rightarrow |z+w|^2 \le (|z|+|w|)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z+w| \le |z|+|w| \quad \checkmark$$ (απόδειξη τριγωνικής ανισότητας στο $\mathbb{C}$)

→ Απόδειξη της 1) (με χρήση της 6))

$$|z| = |(z-w)+w| \overset{6)}{\le} |z-w|+|w| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z-w| \ge |z|-|w| \quad (1)$$

Επίσης

$$|w| = |(w-z)+z| \le |z-w| + |z|$$

$$\Rightarrow |z-w| \ge |w|-|z| \quad (2)$$

Από (1) και (2)

$$|z-w| \ge \big||z|-|w|\big| \quad \checkmark$$

Η 6) γενικεύεται για n μιγαδικούς αριθμούς

$$|z_1+z_2+\dots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

15-11-17ε.

Παράδειγμα κ. (με ιδιότητες 6) και 7))

Βρείτε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα, ~~αν γνωρίζουμε ότι ισχύει~~ για το $|z-3|$ αν γνωρίζουμε ότι ισχύει $|z-4i| \leq 1$

Λύση

$$|z-3| = |z-4i+4i-3| \overset{6)}{\leq} |z-4i| + |4i-3|$$
$$\leq 1 + \sqrt{(-3)^2+4^2} = 6.$$

Ένα άνω φράγμα για το $|z-3|$ είναι το 6.

$$|z-3| = |z-4i+4i-3| \overset{7)}{\geq} \big|\,|z-4i| - \underbrace{|4i-3|}_{=5}\,\big| = \big|\,|z-4i|-5\,\big| \quad (*)$$

Όμως από την υπόθεση $|z-4i| \leq 1 \Rightarrow -|z-4i| \geq -1 \quad (**)$

Από (*) και (**) $|z-3| \geq \big|\,|z-4i|-5\,\big| = \big|\,5-|z-4i|\,\big| \geq 5-|z-4i|$
$$\overset{(**)}{\geq} 5-1 = 4.$$

Άρα ένα κάτω φράγμα για το $|z-3|$ είναι το 4

$$4 \leq |z-3| \leq 6 \quad \text{όταν} \quad |z-4i| \leq 1$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

15-11-17d.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\cdot\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\cdot\bar{w}}{|w|^2}$$

↓ αυτό υπολογίζουμε είναι πιο απλό απ' τον υπολογισμό του $\frac{z}{w}$

Παράδειγμα

$$z = \frac{1+i}{1-3i} \qquad \frac{1+i}{1-3i} = \frac{(1+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-2+4i}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

Οι δυνάμεις του i

$$i^{4n} = 1$$
$$i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = -1 \quad , n \in \mathbb{N}$$
$$i^{4n+3} = -i$$

Γενικά ισχύει

$i^m = i^k$ όπου k είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του m με το 4.

Παράδειγμα

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Λύση

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = i^n(1 + i + i^2 + i^3) = i^n(1+i-1-i) = 0$$

→ Πρόταση - Κανόνας Παραλληλογράμμου.

Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

Απόδειξη

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w})$$

$$= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\cdot\bar{z} + \cancel{z\bar{w}} + \cancel{w\cdot\bar{z}} + w\bar{w} +$$

$$+ z\bar{z} - \cancel{z\bar{w}} - \cancel{w\bar{z}} + w\cdot\bar{w} = 2z\cdot\bar{z} + 2w\cdot\bar{w} = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

Γεωμετρική Παράσταση των Μιγαδικών Αριθμών

Κάθε μιγαδικός αριθμός z ορίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών.

Έτσι, κάθε μιγαδικός z ταυτίζεται με ένα σημείο του επιπέδου Oxy.

Για αυτό το $\mathbb{C}$ ταυτίζεται γεωμετρικά με το επίπεδο Oxy που θα ονομάζεται μιγαδικό επίπεδο. Επίσης,

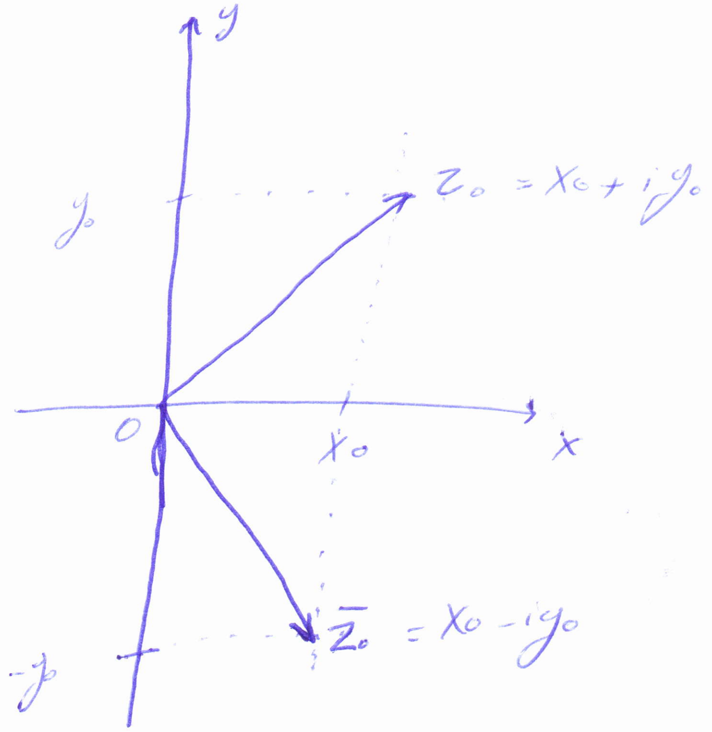
ο άξονας των x, θα ονομάζεται πραγματικός άξονας ενώ

ο άξονας των y, θα ονομάζεται φανταστικός άξονας.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

15-11-17 ε.

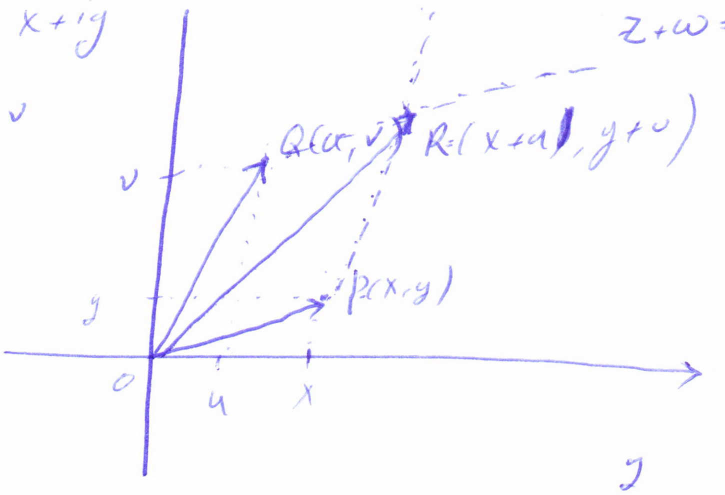
$z_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$



$z = x + iy$

$\omega = u + iv$

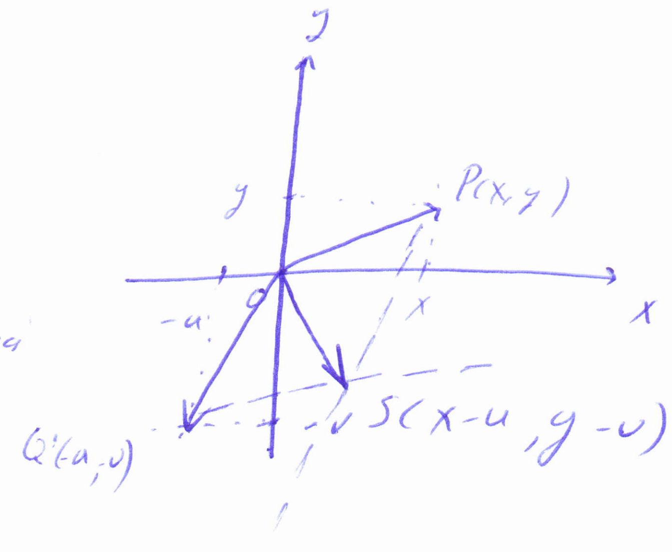
$z + \omega = x + u + i(y + v)$



$\forall$ $\vec{OR}$: αντιστοιχεί γεωμετρικά με το $z + \omega =$
$= x + u + i(y + v)$

$z - \omega = z + (-\omega)$

$= x - u + i(y - v)$



$\forall$ $\vec{OS}$: αντιστοιχεί γεωμετρικά με το $z - \omega$
$= x - u + i(y - v)$

(3.4 σελ 67)

- Μέτρο του $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, γεωμετρική ερμηνεία στο προηγ. σχήμα, είναι το μήκος του $\vec{OP}$, το οποίο υπολογίζεται από πυθ. θεώρημα.

- Απόσταση δύο μιγαδικών z και ω $\quad d(z,\omega)$

Από προηγ. σχήμα $\vec{QP} \equiv \vec{OS} \equiv z - \omega$

άρα $d(z,\omega) = |z-\omega|$

$$\|\vec{QP}\| = |z-\omega| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

<u>Παράδειγμα</u>

$z_0 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$

Δείξτε ότι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z \in \mathbb{C}$ με

$\boxed{|z - z_0| = R}$ είναι ο κύκλος με κέντρο το z_0 και ακτίνα R

<u>Λύση</u>

$z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$$|z - z_0| = R \Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

15-11-17 f.

Παράδειγμα

Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των $z = x+iy$

με $$\frac{|z+1|}{|z-1|} = 2$$

Λύση

$z = x+iy$

άρα $|z+1| = 2|z-1| \Rightarrow |x+1+iy| = 2|x-1+iy| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x+1+iy|^2 = 4|x-1+iy|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 + 4y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2 - 4(x-1)^2 - 3y^2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 3y^2 + 3 = 0.$

$\Rightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + y^2 + 1 = 0$ (τα κάνω τέλεια τετράγωνα)

$\Rightarrow x^2 - 2\frac{5}{3}x + y^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2\frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + y^2 + 1 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$ κύκλος με κέντρο το $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

και ακτίνα $4/3$

Παράδειγμα.

Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$a|z|^2 + bz + \overline{bz} + c = 0, \quad \alpha, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \quad (*)$$

παριστά ευθεία αν $a=0$ και $b \neq 0$

και παριστά κύκλο αν $\alpha \neq 0$ και $|b|^2 > \alpha c$

Λύση

$$b = b_1 + ib_2$$

$$z = x + yi$$

Τότε

$$bz + \overline{bz} = 2Re(bz)$$

$$= 2Re((b_1+ib_2)(x+iy))$$

$$= 2Re(b_1x - b_2y + i(b_2x + b_1y)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bz + \overline{bz} = 2(b_1x - b_2y)$$

Η $(*)$ γράφεται $\boxed{a(x^2+y^2) + 2(b_1x - b_2y) + c = 0} \quad (**)$

για $\alpha = 0$ και $b \neq 0$ (δηλαδή $b_1 \neq 0$ και $b_2 \neq 0$)

Έχουμε $2(b_1x - b_2y) + c = 0 \Rightarrow$

$\boxed{2b_1x - 2b_2y + c = 0}$ ευθεία.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

15-11-17 g.

Για $\alpha \neq 0$ (συμπλήρωση τετραγώνου)

από (**) διαιρούμε με α

$$x^2+y^2+\frac{2b_1}{\alpha}x-\frac{2b_2}{\alpha}y+\frac{c}{\alpha}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2+\frac{2b_1}{\alpha}x+\left(\frac{b_1}{\alpha}\right)^2}-\left(\frac{b_1}{\alpha}\right)^2+\underbrace{y^2-2\frac{b_2}{\alpha}y+\left(\frac{b_2}{\alpha}\right)^2}-\left(\frac{b_2}{\alpha}\right)^2$$

$$+\frac{c}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x+\frac{b_1}{\alpha}\right)^2+\left(y-\frac{b_2}{\alpha}\right)^2=\frac{b_1^2+b_2^2-\alpha c}{\alpha^2}}$$

Άθροισμα τετραγώνων → γράφει και εδώ να έχω τετράγωνα!

Αν $b_1^2+b_2^2-\alpha c>0 \Rightarrow |b|^2>\alpha c$

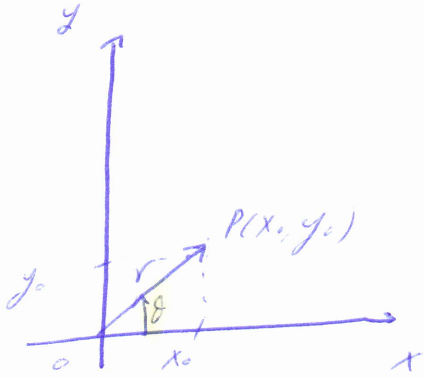
τότε η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $\left(-\frac{b_1}{\alpha},\frac{b_2}{\alpha}\right)$ και ακτίνα $R=\frac{\sqrt{b_1^2+b_2^2-\alpha c}}{|\alpha|}$

Εφαρμοσμένα

21-11-17α

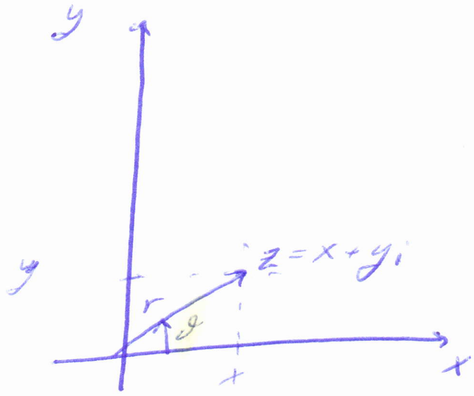
Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

$P(x, y)$



$r = \|\vec{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = x + yi$



$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r \cancel{\cos\theta} \sin\theta \end{aligned}}$$

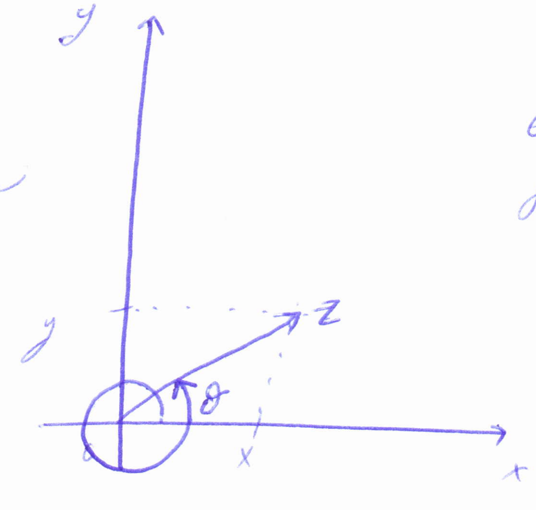
- Όρισμα μιγαδικού αριθμού

⇒ κάθε τιμή της γωνίας θ για την οποία ισχύουν

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

ονομάζεται όρισμα του μιγαδικού αριθμού z



Είναι μοναδική η γωνία θ; $(\theta+2\pi, \theta+4\pi, \ldots)$ → το r είναι!

$x = r\cos(\theta+2\pi) = r\cos\theta$

$y = r\sin(\theta+2\pi) = r\sin\theta$

Συμβολισμός $\boxed{\arg z}$. Το $\arg z$ είναι ένα άπειρο σύνολο και η διαφορά δύο οποιονδήποτε στοιχείων είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Μεταξύ των ορισμάτων του μιγαδικού z, υπάρχει ακριβώς ένα όρισμα θ, για το οποίο ισχύει $0 \leq \theta \leq 2\pi$

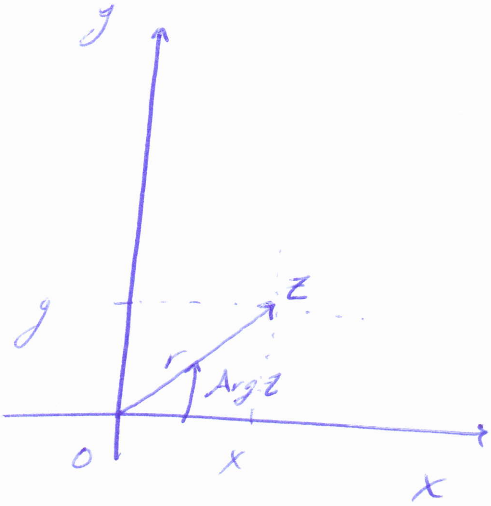
Αυτό ονομάζεται θεμελιώδες ή γωνιακό όρισμα του z και συμβολισμός του είναι $\boxed{Arg\, z}$ δεν είναι σύνολο είναι μοναδικό στοιχείο.

~~για~~ για $z = x + yi$

Τριγωνομετρική μορφή του z

$$\boxed{z = \underbrace{|z|}_{r}(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$\begin{cases} x = |z|\cos\theta. \\ y = |z|\sin\theta. \end{cases}$$



• με $\arg z = Arg\, z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Παράδειγμα

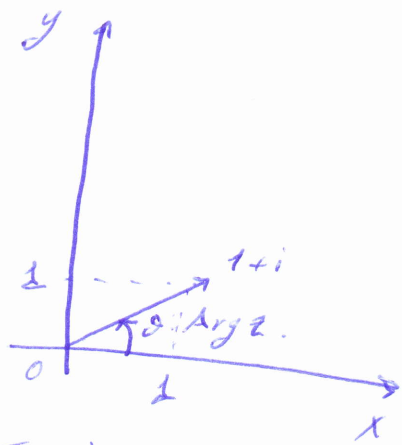
Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή $z = 1 + i$

Λύση

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

για το θ από τριγωνομετρία.

$$Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$



άρα $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin \pi/4\right).$

Εφαρμοσμένα

21-11-17 b.

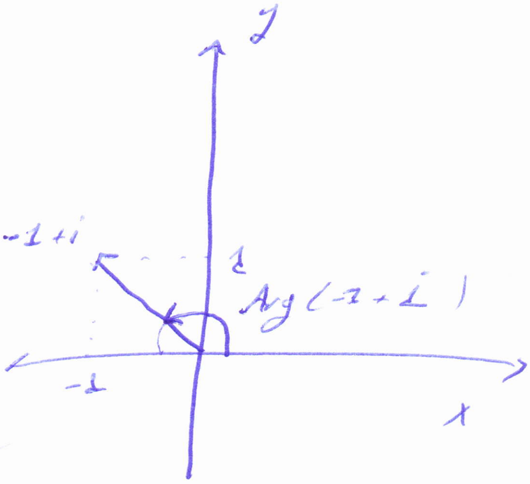
Παράδειγμα

Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του $z = -1 + i$

Λύση $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = r$.

άρα $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

μπορώ να βάλω μέσα και $+2k\pi$



από προηγούμενο παράδειγμα και απλή τριγων.μ.

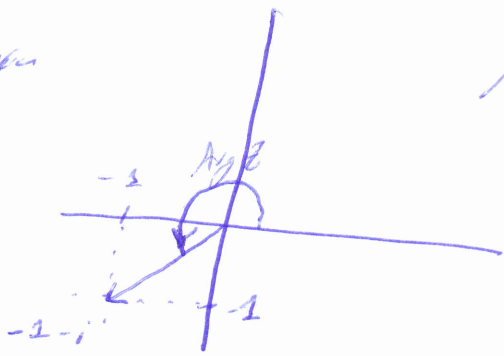
$Arg(-1+i) + \pi/4 = \pi$

άρα $Arg(-1+i) = 3\pi/4$.

Παράδειγμα

$z = -1 - i$

Λύση

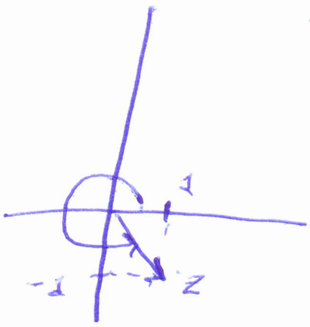


$Arg(-1-i) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

άρα $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Παράδειγμα

$z = 1 - i$



$Arg\, z = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$

$z = \sqrt{2}\left(\cos 7\pi/4 + i\sin 7\pi/4\right)$.

· πολλαπλασιασμός /

διαφορά · όρισμα ότι   έστω $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ θ: όρισμα z

φ: όρισμα w.

$w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= |w||z|\left[(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) + i(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)\right].$$

πράξεις, διαχωρισμός Re, Im

$$= |w||z|\left[\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)\right] \rightarrow$$ τριγωνομετρική μορφή του $w.z$

βασ. τριγωνομετρικές ταυτότητες
(αυτές θα δίνονται άρα χρειάζονται.)

~~λόγω~~ λόγω

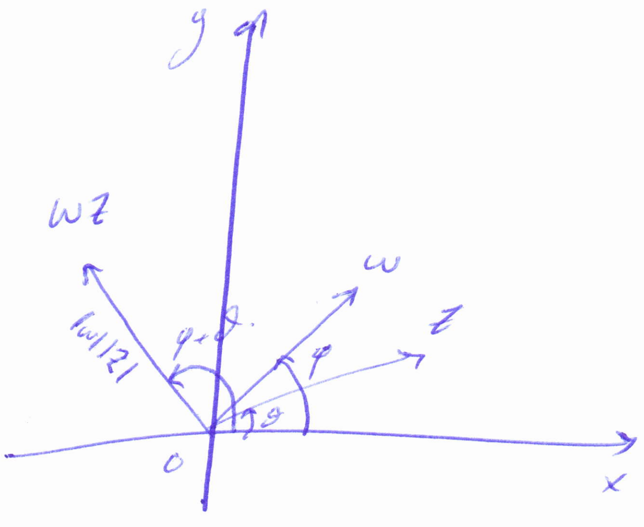
ίσον 1!

$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \cdot |\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)|$$

$$\Rightarrow \boxed{|w \cdot z| = |w| \cdot |z|}$$

$$\arg(w \cdot z) = \varphi + \theta = \arg w + \arg z$$

δηλαδή ισχύει $\boxed{\arg(w+z) = \arg w + \arg z}$ δηλαδή οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου $\arg(w+z)$ γράφεται ως κάποιο στοιχείο του $\arg w$ + κάποιο στοιχείο του $\arg z$.



Ευφροσύνη

21-11-17ε.

→ Για το πηλίκο w/z :

$$\boxed{\begin{aligned} z &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ w &= |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{aligned}}$$

Για $z \neq 0$.

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \cdot \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\theta + i\sin\theta}$$ (πολλαπλασιάζω με συζυγή)

$$= \frac{|w|}{|z|} \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} =$$

(πραγματοποιούμε πράξεις και διαχωρισμός Im, Re)

$$= \frac{|w|}{|z|} \frac{\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta + i(\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|}\left[\cos(\varphi - \theta) + i\sin(\varphi - \theta)\right]. \quad (*1)$$ τριγωνομετρική μορφή του w/z

Συμπερασματικά: $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|} \cdot 1$

$$\arg\left(\frac{w}{z}\right) = \varphi - \theta = \arg w - \arg z.$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \arg w - \arg z \checkmark$$

& $w \cdot z = |w||z|\left[\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)\right]$.

για $z = w$ $\boxed{z^2 = |z|^2\left[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right]}$

Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι $\boxed{z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \quad n\in\mathbb{N}.}$ (1)

→ η τριγωνομετρική μορφή μας βοηθάει στον υπολογισμό δυνάμεων των μιγαδικών.

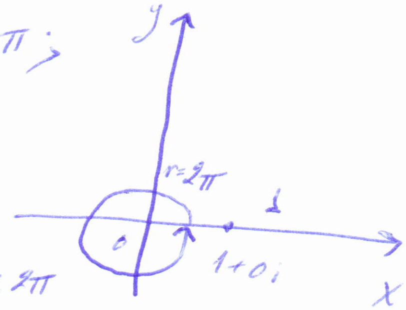
Ισχύει και για αρνητικές δυνάμεις!

Από την (**) για $\omega = \frac{1}{z}$. και $\arg\omega = \arg\left(\frac{1}{z}\right) =$

$= \arg 1 - \arg z$

$\arg\omega = 2k\pi - \arg z$

γιατί $2k\pi$;



$0 \le r < 2\pi$

$\arg(1) = \mathrm{Arg}(1) + 2k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

$= 0 + 2k\pi$

$$\boxed{\frac{1}{z^2} = \frac{1}{|z|^2}[\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)]}$$

διότι $\varphi = -\theta$.

διότι $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Arg}(z) = \varphi = -\theta$

Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε

$$\boxed{\frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^n}(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)) \quad n\in\mathbb{N}} \quad (2)$$

Από (1) και (2) ισχύει

$$\boxed{z^k = |z|^k[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)] \text{ με } k \text{ ακέραιος. } \in\mathbb{Z}}$$

Παράδειγμα. $z\in\mathbb{C}$ με $|z| = 1$.

Τριγωνομετρική μορφή του z: $z = \cos\theta + i\sin\theta$

με αντικατάσταση στον παραπάνω $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^k = [\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)]}$.

$k\in\mathbb{Z}$

Τύπος De Moivre.

Εφαρμογή

21-11-17 d.

το arg(0) δεν ορίζεται.

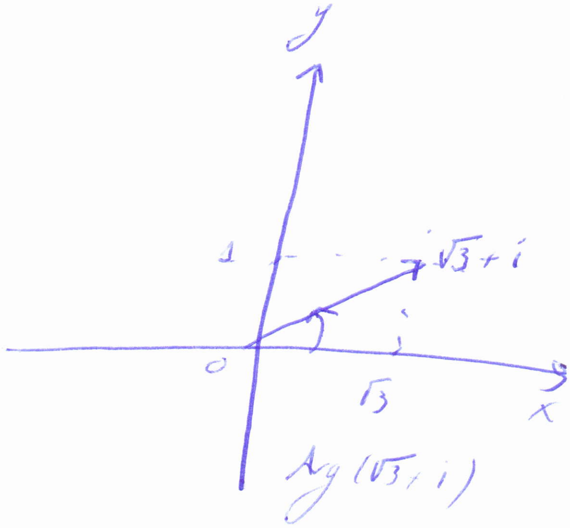
Παράδειγμα

Γράψτε του $\dfrac{(1+i)^{16}}{(\sqrt{3}+i)^{6}}$ στη καρτεσιανή μορφή

Λύση

$(1+i)^{16}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4\right) \quad (*)$



$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$Arg(\sqrt{3}+i) = \pi/6$

ημίτονο $= 1/2$ από σχήμα.

άρα $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6\right) \quad (**)$

$$\frac{(1+i)^{16}}{(\sqrt{3}+i)^{6}} = \frac{\sqrt{2}^{16}\left[\cos(16\,\pi/4) + i\sin(16\,\pi/4)\right]}{2^{6}\left[\cos(6\,\pi/6) + i\sin(6\,\pi/6)\right]} =$$

$$= \frac{2^{8}\left[\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)\right]}{2^{6}\left[\cos\pi + i\sin\pi\right]} = \frac{4\,(1+0i)}{-1+0i} = -4.$$

- $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ (1)
- $z^k=|z|^k[\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)]$, $k\in\mathbb{Z}$ (2)
- $(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)$. (3)

... συνεχώς εμφανίζεται η παράσταση $\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)$

→ Ορίζουμε ότι $\boxed{\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}}$, $\theta\in\mathbb{R}$. (4) , μιγαδικό εκθετικό.

$e^{i\theta}$ μιγαδική εκθετική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής (θ πραγματικό)

Άρα καταλήγουμε στην τριγωνομετρική μορφή

$$\boxed{z=|z|\cdot e^{i\theta}}$$

(το θ είναι το ίδιο θ.)

↪ Εκθετική μορφή του μιγαδικού αριθμού z

Ιδιότητες Εκθετικής μορφής.

Πρόταση 1) $e^{i(\theta+2n\pi)}=e^{i\theta}$, $n\in\mathbb{N}$

2) $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

3) $|e^{i\theta}|=1$

4) $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}$

5) $e^{in\theta}=(e^{i\theta})^n$

6) $e^{i\frac{\theta}{n}}=(e^{i\theta})^{1/n}$.

Εφαρμοσμένα

21-11-17

Απόδειξη

2) $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta =$

$= \underbrace{\cos(-\theta)}_{\text{άρτια συνάρτηση}} + i\underbrace{\sin(-\theta)}_{\text{περιττή συνάρτηση}} = e^{-i\theta}$

3) $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = 1$. (από βασική τριγωνομετρική ταυτότητα)

4) Από βασικούς τύπους τριγωνομετρίας

5) (τύπος De Moivre)

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \underset{(\text{De Moivre})}{=} (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n$$

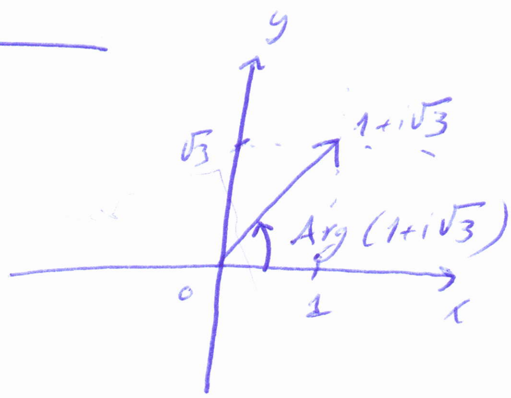
6) Αντίστοιχως με De Moivre.

Από (2) και (4)

$$\boxed{z^k = |z|^k e^{in\theta}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(5)

Παράδειγμα. $(1+i\sqrt{3})^4$



Λύση

$|1+i\sqrt{3}| = 2$

$Arg(1+i\sqrt{3}) = \pi/3$

$1+i\sqrt{3} = 2\cdot e^{i\pi/3}$

άρα $(1+i\sqrt{3})^4 = 2^4\cdot e^{i4\pi/3} = 16\left[\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)\right]$

$= -8 - i8\sqrt{3}$

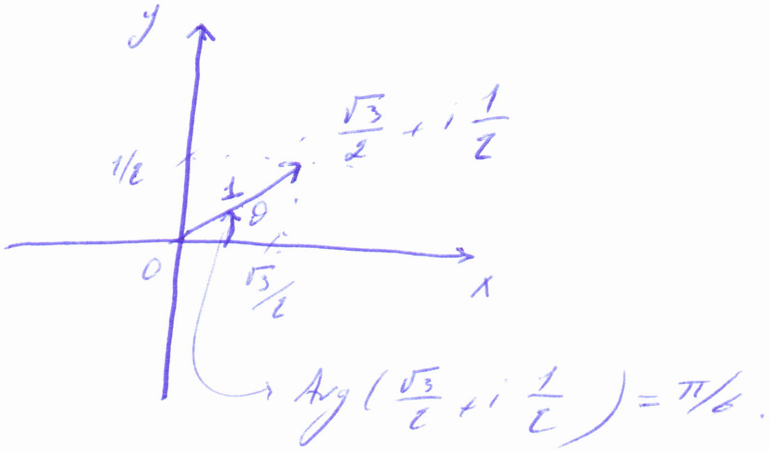
σε καρτεσιανή μορφή.

Παράδειγμα.

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13}$$

Λύση

$$\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = 1$$



$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} = 1\cdot e^{i\pi/6}.$$

άρα $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13} = 1^{13} e^{i13\pi/6} = e^{i13\pi/6} =$

$= e^{i(2\pi+\pi/6)} = e^{i2\pi}\cdot e^{i\pi/6} = e^{i\pi/6} =$

$= \cos\pi/6 + i\sin\pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$

Να θυμάσαι $\boxed{e^{i2\pi} = 1}$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
22-11-17κ

n-οστές ρίζες μιγαδικού

w: άγνωστος , z: δοσμένος μιγαδικός

$$\boxed{w^n = z} \quad (1) \text{ με } n \in \mathbb{N}$$

Ξέρω $\left.\begin{array}{l} z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{array}\right\}$ με αντικατάσταση στην (1)

$$|w|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Από την τελευταία προκύπτει $\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \,, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \,, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Οι n-οστές ρίζες του z είναι

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \; k \in \mathbb{Z}$$

<u>Παρατηρούμε ότι</u> $w_{n+k} = w_k \,, \; \forall k \in \mathbb{Z}$

Πράγματι, $w_{n+k} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi + 2n\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi + 2n\pi}{n}\right)\right]$

$$= \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi\right)\right] = w_k$$

Έτσι λοιπόν, $w_0 = w_n$, $w_1 = w_{n+1}$, ..., $w_n = w_{2n}$

έχουμε επανάληψη ανά n ρίζες.

Άρα οι διαφορετικές ρίζες της (1) θα είναι

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$ ή $k \in [0, n-1]$

Με την βοήθεια της εκθετικής μορφής

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_k = \underbrace{\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta/n}}_{w_0} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Rightarrow \boxed{w_k = w_0 \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

Δηλαδή οι n-οστές ρίζες είναι:

$$\underbrace{w_0}, \underbrace{w_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}}_{w_1}, \underbrace{w_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2}_{w_2}, \underbrace{w_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^3}_{w_3}, \dots$$

$$\dots, \underbrace{w_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}}_{w_{n-1}}$$

Γεωμετρικά!

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
27-11-17b

$$|w_k| = \sqrt[n]{z}$$

$$|w_k - w_{k+1}| = \left|w_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k - w_0\left(e^{i2\pi/n}\right)^{k+1}\right| =$$

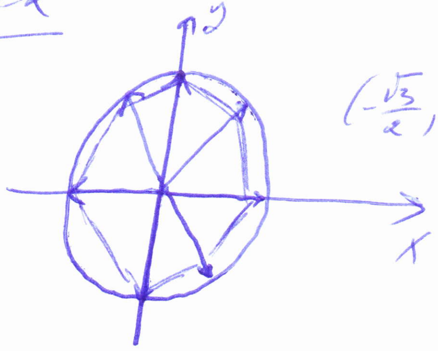
$$= \left|w_0\left[\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{k+1}\right]\right|$$

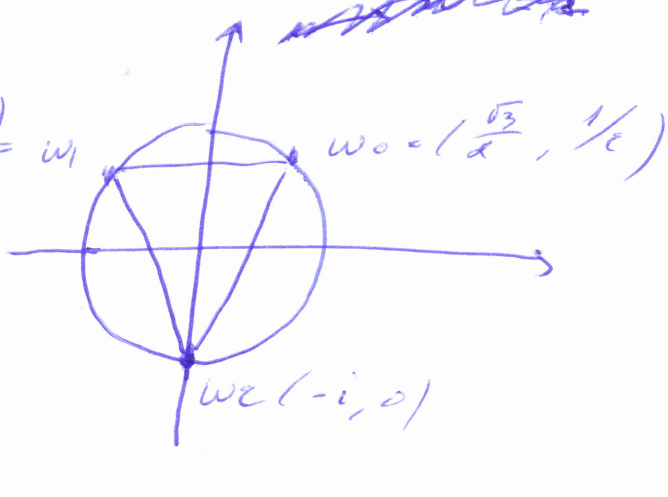
$$= \left|w_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\right| = |w_0|\underbrace{\left|\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right|}_{1}\left|1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right|$$

$$|w_k - w_{k+1}| = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left|1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right|$$

που σημαίνει ότι οι ρίζες θα έχουν όλες ίση απόσταση μεταξύ τους, δηλαδή οι n-ρίζες του (1) αποτελούν κορυφές κανονικού n-γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο (0,0) και ακτίνας $\sqrt[n]{|z|}$

Παράδειγμα





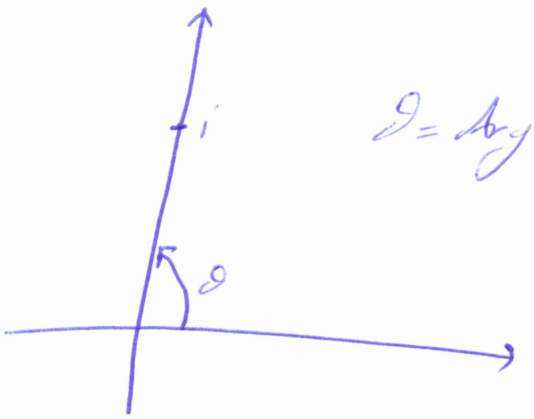
δες πίσω

Παράδειγμα $\boxed{w^3 = i}$

$n = 3$

$z = i$

Λύση



$\theta = \mathrm{Arg}(i) = \pi/2$

$i = |i| \cdot \left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right)$

$$w_k = \sqrt[3]{|i|}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2$

$$w_0 = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi/2 + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 4\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

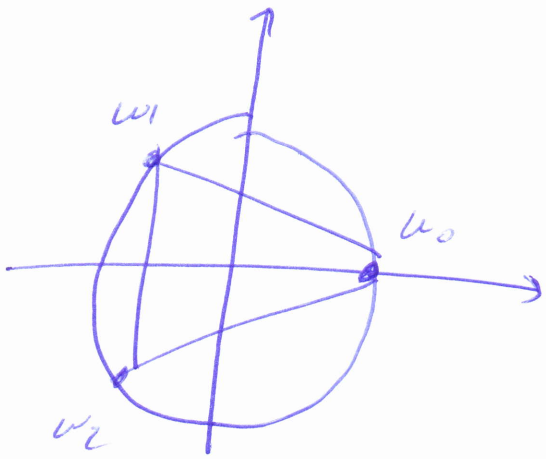
22-11-17

Παράδειγμα $\omega^3 = 1$

Λύση $\omega_0 = 1$

$\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Θ Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$w = f(z)$, $z \in A \subseteq \mathbb{C}$ και $w \in \mathbb{C}$

Παραδείγματα

$w = Re(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$w = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$

$w = Arg(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

> Μιγαδικό πολυώνυμο n-βαθμού:

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $z \in \mathbb{C}$

$a_i \in \mathbb{C}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$

> Ρητή συνάρτηση $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $z \in A = \{ z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0 \}$

P, Q μιγαδικά πολυώνυμα

> $w = u + iv = f(z) = f(x+iy)$

$u = u(x,y) = Re(f(x+iy))$ και

$v = v(x,y) = Im(f(x+iy))$

<u>Παράδειγμα</u>

Βρείτε το πραγματικό μέρος u και το φανταστικό μέρος v της $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$

<u>Λύση</u>

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{και} \\ v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
22-11-17 Δ.

Παράδειγμα

$$w = f(z) = z^2 \quad , z \in \mathbb{C}$$

Λύση

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

άρα $\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy. \end{cases}$

$$w = u + iv = f(z) = f(x+iy)$$

Μιγαδική Εκθετική Συνάρτηση

• $f(z) = e^z \quad , z \in \mathbb{C}$

Ορισμός

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \quad z = x+iy \in \mathbb{C}$$

$$w = f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$\begin{cases} u(x,y) = e^x\cos y \quad \text{και} \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$

• Όταν $y=0$, $z=x\in\mathbb{R}$ και $e^z = e^{x+i0} = e^x$

$$\left(= e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x \right)$$

• Όταν $x=0$, $z=iy$ και προκύπτει ο τύπος του Euler

$$e^z = e^{0+iy} = e^0(\cos y + i\sin y) = e^{iy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos y + i\sin y = e^{iy}} \quad \text{με } y\in\mathbb{R}$$

(παρατηρήσεις)
1) η εκθετική συνάρτηση δεν είναι 1-1
2) Η εκθετική συνάρτηση είναι $2\pi i$ περιοδική

Πρόταση

Για $z, w \in \mathbb{C}$, ισχύουν

1) $e^z e^w = e^{z+w}$

2) $e^{z-w} = \dfrac{e^z}{e^w}$, $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

~~3) $e^z \neq 0$ και $\arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$~~

3) $e^z \neq 0$ και $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$

4) $e^z = 1$ έχει λύσεις $z = 2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$

5) $e^z = e^w \iff z - w = 2k\pi i$

6) $e^z = e^{z+2k\pi i}$, $k\in\mathbb{Z}$