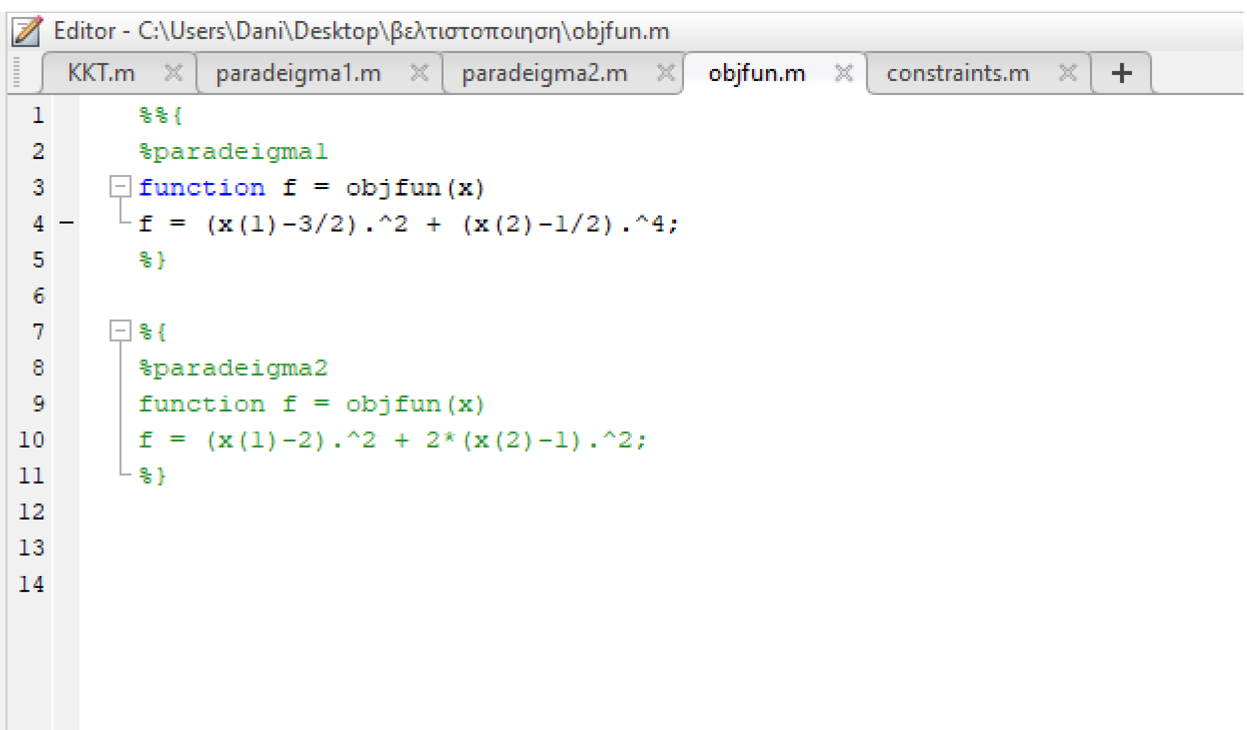
ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ
ΑΕΜ 2547
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Θα μελετήσουμε τις συνθήκες KKT στα προβλήματα βελτιστοποίησης:

1) minimize f(x1,x2) = (x1 – 3/2)^2 + (x2 – ½)^4
   subject to
   g1(x1,x2) = 1 – x1 – x2 ≥ 0
   g2(x1,x2) = 1 – x1 + x2 ≥ 0
   g3(x1,x2) = 1 + x1 – x2 ≥ 0
   g4(x1,x2) = 1 + x1 + x2 ≥ 0
2) minimize f(x1,x2) = (x1 – 2)^2 + (x2 – 1)^2
   subject to
   g1(x1,x2) = 3 – x1 – 4x2 ≥ 0
   g2(x1,x2) = x1 – x2 ≥ 0

Έχουμε φτιάξει ένα αρχείο **objfun.m** στο οποίο έχουμε ορίσει τις δυο συναρτήσεις f.



Ενώ στο αρχείο **constraints.m** έχουμε τους αντίστοιχους ανισοτικούς περιορισμούς της κάθε συνάρτησης.

Editor - C:\Users\Dani\Desktop\βελτιστοποιηση\constraints.m

KKT.m | paradeigma1.m | paradeigma2.m | objfun.m | constraints.m

```
%%{
%paradeigma 1
function [c,ceq] = constraints(x)
% Nonlinear inequality constraints
c(1) = +x(1)+x(2)-1;
c(2) = +x(1)-x(2)-1;
c(3) = -x(1)+x(2)-1;
c(4) = -x(1)-x(2)-1;
% Nonlinear equality constraints
ceq=[];
%}

%{
%paradeigma2
function [c,ceq] = constraints(x)
% Nonlinear inequality constraints
c(1) = +x(1)+4*x(2)-3;
c(2) = -x(1)+x(2);
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ1 (αρχείο parageima1.m)

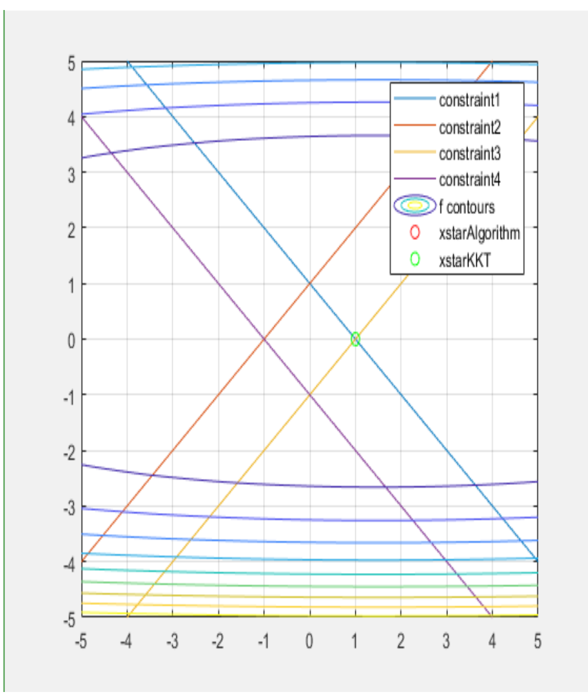
Υπολογίζουμε με τον αλγόριθμο 'sqp' και την συνάρτηση 'fmincon' ποιος θα είναι ο βελτιστοποιητής/minimizer της συνάρτησης.

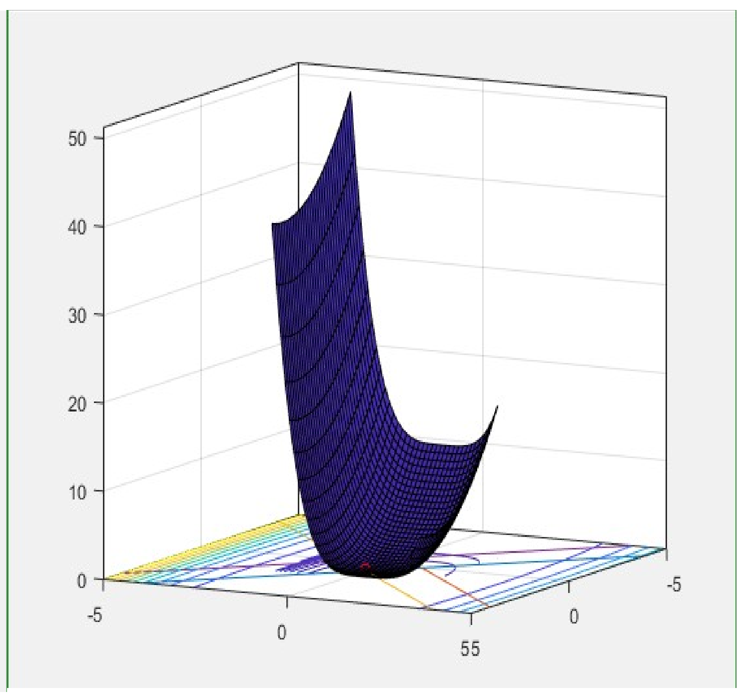
```
clear;
%%
%Ypologismos toy xstar
x0 = [0,0]; % Make a starting guess at the solution
options = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','sqp');
options.Display = 'iter';
[xstar,fval] = fmincon(@objfun,x0,[],[],[],[],[],[],...
   @constraints,options);
xstar,fval
```

Ως αρχικό σημείο έχουμε το x0=[0 0] και ο αλγόριθμος μας θα συγκλίνει στον X* =[1 0] σε 3 βήματα όπως φαίνεται παρακάτω. Ενώ η τιμή της συνάρτησης f στο X* θα είναι ίση με 0.3125.

```
 Iter  Func-count            Fval   Feasibility   Step Length       Norm of   First-order
                                                                       step    optimality
    0           3    2.312500e+00    0.000e+00     1.000e+00     0.000e+00     3.000e+00
    1           6    3.125000e-01    0.000e+00     1.000e+00     1.000e+00     1.000e+00
    2           9    3.125000e-01    0.000e+00     1.000e+00     0.000e+00     3.331e-16

Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>


xstar =

    1.0000    0.0000


fval =

    0.3125
```

Στα σχήματα που ακολουθούν παρατηρούμε την συμπεριφορά της f.





Στην συνέχεια του κώδικα μας στο 'paradeigma1.m' εξετάζουμε ποια είναι τα σημεία που είναι εφικτά απο τις συνθήκες KKT. Απο όπου προκύπτει οτι το σημείο [1 0] είναι εφικτό σημείο.

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τις τιμές του λ* στο σημείο αυτό.

```
%klisi KKT
[x1star,x2star]=KKT(f,G,L)

x1star =

1


x2star =

0

>>
```

```
l1star =

3/4


l2star =

1/4


l3star =

0


l4star =

0
```

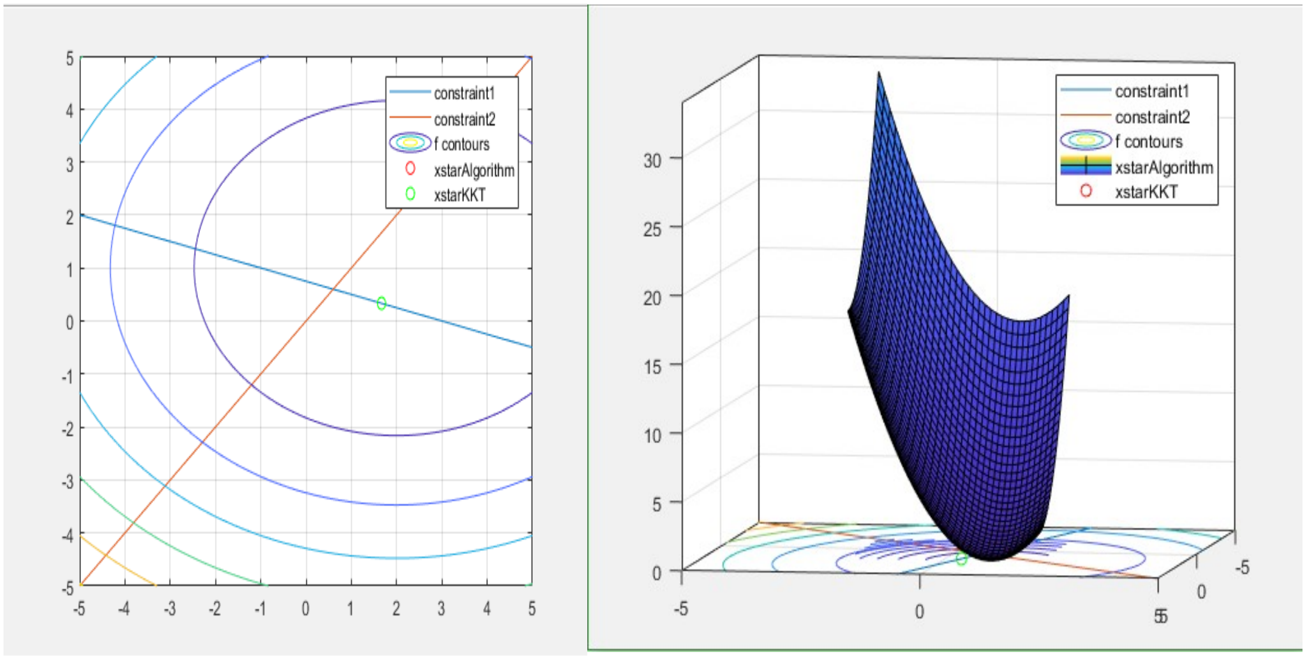
..αρα συμπεραίνουμε ότι απο τους περιορισμούς g1, g2, g3, g4 μόνο οι 2 πρώτοι είναι ενεργοί. Οι g3 και g4 είναι ανενεργοί με λ3 και λ4 να είναι ίσα με 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (αρχείο paradeigma2.m)

Ως αρχικό σημείο επιλέγουμε πάλι το x0=[0 0] και ο αλγόριθμος μας θα συγκλίνει στον X* =[5/3 1/3] σε 3 βήματα όπως φαίνεται παρακάτω. Ενώ η τιμή της συνάρτησης f στο X* θα είναι ίση με 1.0000.

```
 Iter  Func-count            Fval   Feasibility   Step Length       Norm of   First-order
                                                                       step    optimality
    0           3    6.000000e+00    0.000e+00    1.000e+00     0.000e+00    4.000e+00
    1           6    3.000000e+00    8.882e-16    1.000e+00     3.000e+00    3.000e+00
    2           9    1.016529e+00    0.000e+00    1.000e+00     1.499e+00    1.091e+00
    3          12    1.000000e+00    9.802e-11    1.000e+00     1.249e-01    9.292e-10

Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>


xstar =

    1.6667    0.3333


fval =

    1.0000
```

Στα σχήματα που ακολουθούν παρατηρούμε την συμπεριφορά της συνάρτησης f.



Στην συνέχεια εξετάζουμε ποια είναι τα σημεία που είναι εφικτά απο τις συνθήκες KKT. Απο όπου προκύπτει οτι το σημείο [5/3 1/3] είναι εφικτό σημείο.

```
x1star =

    1.6667


x2star =

    0.3333
```

```
l1star =

2/3


l2star =

0
```

Ενώ απο τις τιμές του λ*, προκύπτει ότι μόνο ο g1 περιορισμός είναι ενεργός.

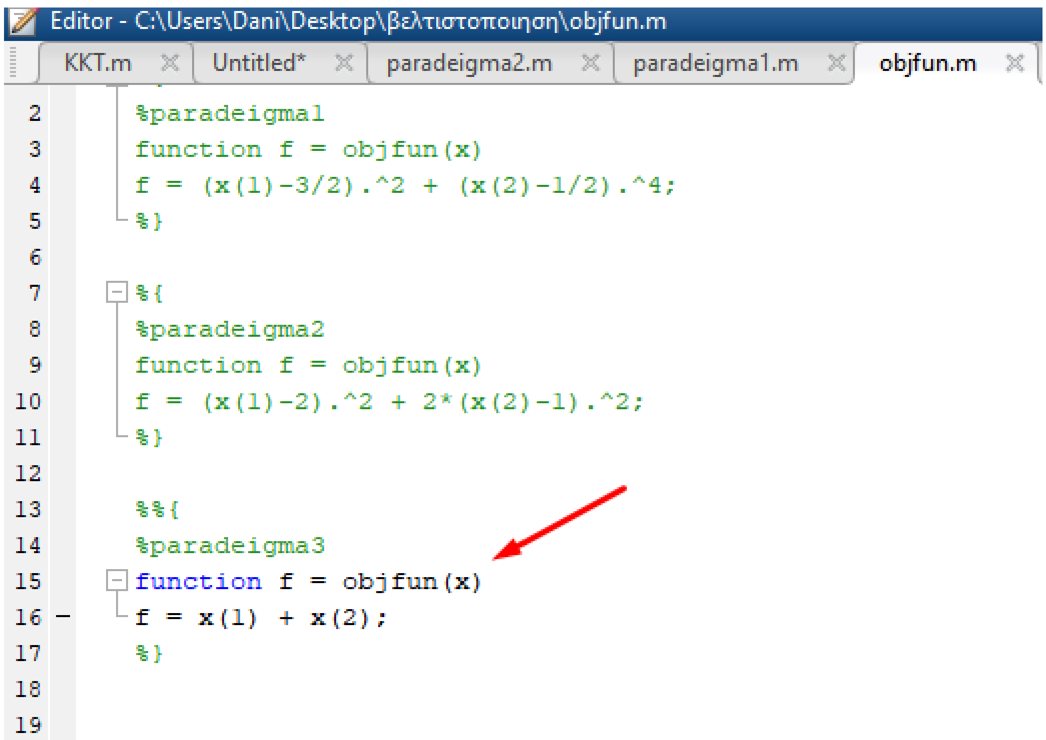
ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Ο κώδικάς λειτουργεί μόνο για ανισοτικούς περιορισμούς μέχρι 4 ανισοτικούς περιορισμούς. (για περισσότερους απλα ορίζουμε περισσότερα syms l1 l2 l3 l4 l5 l6...ln) στον κώδικα μέσα στο αρχείο KKT.m, ενώ για να δούμε τις τιμές των λ* θα πρέπει να γίνεται η κατάλληλη αλλαγή στις τελευταίες γραμμές στο αρχείο KKT.m.

Θα μελετήσουμε τις συνθήκες KKT για το παραακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

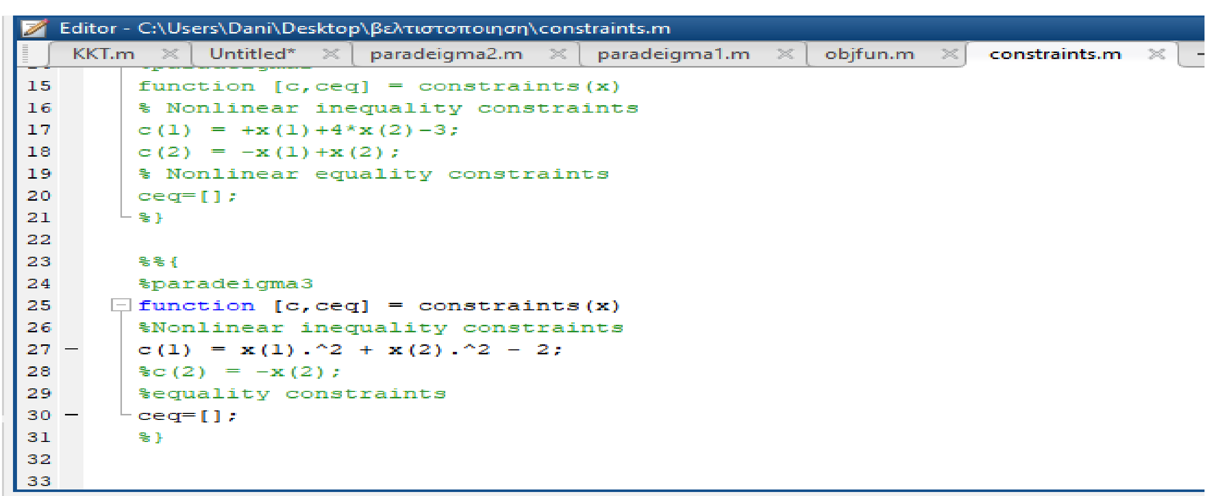
minimize $f(x1,x2) = x1 + x2$
subject to
$g1(x1,x2) = -x1^2 - x2^2 + 2 \geq 0$

Έχουμε γράψει την συνάρτηση μας στο αρχείο **objfun.m**




```
%paradeigma1
function f = objfun(x)
f = (x(1)-3/2).^2 + (x(2)-1/2).^4;
%}

%{
%paradeigma2
function f = objfun(x)
f = (x(1)-2).^2 + 2*(x(2)-1).^2;
%}

%%{
%paradeigma3
function f = objfun(x)
f = x(1) + x(2);
%}
```

Ενώ στο αρχείο **constraints.m** έχουμε τον περιορισμό **g1** του προβλήματος.



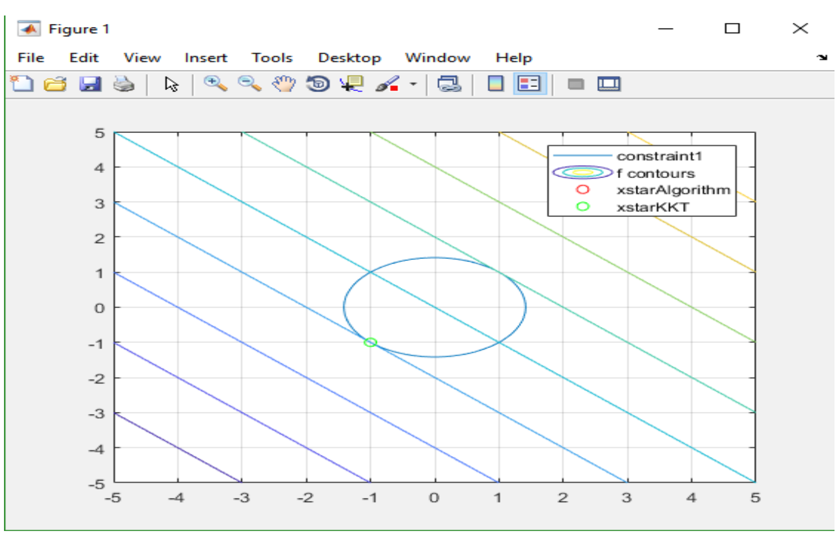

```
function [c,ceq] = constraints(x)
% Nonlinear inequality constraints
c(1) = +x(1)+4*x(2)-3;
c(2) = -x(1)+x(2);
% Nonlinear equality constraints
ceq=[];
%}

%%{
%paradeigma3
function [c,ceq] = constraints(x)
%Nonlinear inequality constraints
c(1) = x(1).^2 + x(2).^2 - 2;
%c(2) = -x(2);
%equality constraints
ceq=[];
%}
```

Υπολογίζουμε με τον αλγόριθμο 'sqp' τον ελαχιστοποιητή της συνάρτησης υπο την μόνη δεσμευση g1, και σύμφωνα με τα αποτελέσματα της εικόνας:

```
Command Window
 Iter  Func-count            Fval   Feasibility   Step Length       Norm of   First-order
                                                                       step    optimality
    0           3    0.000000e+00     0.000e+00     1.000e+00     0.000e+00     1.000e+00
    1           6   -2.000000e+00     0.000e+00     1.000e+00     1.414e+00     1.000e+00
    2           9   -2.000000e+00     0.000e+00     3.430e-01     1.213e-06     3.331e-16

Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>


xstar =

    -1    -1


fval =

    -2
```

έχοντας επιλέξει ως αρχικό σημείο το x0=[0 0] ο αλγοριθμός μας βρήκε ως ελαχιστοποιητή το σημείο X*=[-1 -1] σε 3 βήματα. Ενώ η τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι ίση με fval=-2.

Στο σχήμα που ακολουθεί παρατηρούμε την συμπεριφορά της f, και το σημείο X* υπο την ανισοτική δέσμευση g1.



Στη συνέχεια του κώδικα, χρησιμοποιόντας την συνάρτηση **KKT** υπολογίζουμε τα X για τα οποία επαληθεύονται οι συνθήκε KKT, και προκύπτει οτι το X*=[-1 -1] είναι εφικτό σημείο.

Προκύπτει επίσης το συμπέρασμα οτι στο σημείο X* ο περιορισμός είναι ενεργός και η τιμή λ* είναι ίση με 1/2.

```
>> %klisi KKT
[x1star,x2star]=KKT(f,G,L)

l1star =

1/2


x1star =

-1


x2star =

-1

>>
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στον κώδικα απο το αρχείο paradeigma3.m καθώς και στα αντίστοιχα σημεία στα αρχεία objfun.m και constraints.m έχει γραφτεί ως σχόλια και το δεύτερο παράδειγμα που εξετάσαμε στο μάθημα το οποίο έχει και έναν ακόμα περιορισμό τον x2 >=0.