УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
9 января 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 6 зачет. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские)
занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор А. Л. Лукашов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 27 ноября 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.

2. Линейные нормированные, евклидовы, метрические пространства. Пространство $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые множества. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Внутренность, замыкание и граница множества. Компактные множества и их свойства. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$. Последовательности в метрических пространствах. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Полные метрические пространства. Полнота $\mathbb{R}^n$.

3. Предел функции, отображающей метрическое пространство в метрическое пространство. Критерий Коши существования предела.

4. Непрерывность функции, отображающей метрическое пространство в метрическое пространство. Равносильные определения непрерывности. Непрерывность композиции. Непрерывность на метрическом пространстве через прообраз открытого множества. Непрерывные функции на компактах. Теорема Вейерштрасса. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Связные и линейно связные множества в метрических пространствах. Теорема о промежуточном значении.

5. Дифференцируемость функции многих переменных в точке. Производные по направлению и частные производные. Необходимые условия дифференцируемости. Градиент. Достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость композиции.

6. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции многих переменных.

7. Меры Жордана и Лебега в $\mathbb{R}^n$. Критерии измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана. σ-аддитивность и непрерывность меры Лебега. Борелевские множества, их измеримость по Лебегу.

8. Интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных, монотонных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства интеграла Римана: аддитивность, линейность, монотонность, интегрируемость композиции, теоремы о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом, формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

9. Несобственные интегралы Римана и их свойства. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения и его следствия. Абсолютная и условная сходимости интегралов. Признаки Дирихле и Абеля.
10. Числовые ряды и их свойства. Критерий Коши сходимости рядов. Ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения и его следствия. Признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Абсолютная и условная сходимости рядов. Признаки Дирихле и Абеля. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Произведение абсолютно сходящихся рядов. Произведение рядов по Коши, теорема Мертенса.
11. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Теорема о перестановке пределов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное дифференцирование и интерирование функциональных рядов.
12. Степенные ряды, их радиус сходимости. Формула Коши–Адамара. Равномерная сходимость степенных рядов в круге. Теорема Абеля. Действительные степенные ряды. Теоремы об интегрировании и дифференцировании степенного ряда на интервале сходимости. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряды Тейлора показательной, тригонометрических, степенной и логарифмической функций. Ряд Тейлора комплекснозначной экспоненты. Формулы Эйлера.
13. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Непрерывно дифференцируемые отображения конечномерных пространств, их якобиан. Теорема о расщеплении отображения. Теорема о системе неявных функций. Локальная обратимость отображения с ненулевым якобианом.
14. Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связей: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия. Достаточные условия.

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу, ФОПФ. Ч. 1. `https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki`
2. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. `http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf`

3. *Лукашов А. Л.* Лекции по математическому анализу.1. https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/LukashovAL_1.pdf
4. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, Т. 2. — Москва : Наука, 2000.

Дополнительная

5. *Булдырев В. С., Павлов Б. С.* Линейная алгебра и функции многих переменных. — Ленинград : изд. Ленинградского университета, 1985.
6. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл — Москва : Факториал, 1998.
7. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2007.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–10 марта)

I. Неопределенный интеграл

С2, §1: $\underline{2(17)}$; $\underline{12(10)}$; 13(10); 15(5,$\underline{15}$); $\underline{17(8)}$; 21(4); $\underline{24(4)}$.

С2, §2: $\underline{2(3)}$; $\underline{3(8)}$; 4(6); 6($\underline{2}$,5*); 8(4)*.

С2, §3: $\underline{2(7)}$; 5(2); 8(2)*; 18(3).

С2, §4: $\underline{4(3)}$; 15(1); $\underline{16(7)}$; 19(3)*; 23(2).

С2, §5: 158; $\underline{184}$; 194.

II. Множества в метрических пространствах

С3, §2: 9 а), б), г) ($\underline{3}$, 6).

Т.1. Для множества $M \subset \mathbb{R}$, $M = [1,2) \cup \{3\} \cup ([4,5) \cap \mathbb{Q})$ найдите все а) внутренние точки; б) точки прикосновения; в) граничные точки. Рассмотреть случаи обычной и дискретной метрик.

С3, §1 13; 36:
С3, §18: 49; 53; 54*.

Т.2. Является ли множество

$$C = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$:
а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

III. Предел и непрерывность

С3, §2: 37(5, 8); 48(12); 52; 62(7); 71*; 63(9)*.

Т.3. Для функции $f(x,\,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ исследовать существование предела в точке (0, 0). Проверить, что предел по каждому направлению равен нулю.

IV. Частные производные. Дифференциал

С3, §3: 3(6); 52(1).
С3, §4: 1(4); 4; 7(2); 27(3); 52(3).
С3, §3: 19(3, 8); 20(3,8); 23(1).

V. Формула Тейлора

С3, §4: 71(2); 75(2).

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §1:** 2(17); 12(10); 13(10); 15(5,15); 17(8); 21(4); 24(4). **С2, §2:** 2(3); 3(8); 4(6); 6(2,5*); 8(4)*. **С2, §3:** 2(7); 5(2); 8(2)*; 18(3).
2 неделя	**С2, §4:** 4(3); 15(1); 16(7); 19(3)*; 23(2). **С2, §5:** 158; 184; 194. **С3, §2:** 9 а), б), г) (3, 6); Т.1.
3 неделя	**С3, §1:** 13; 36. **С3, §18:** 49; 53; 54*; Т.2. **С3, §2:** 37(5, 8); 48(12); 52; 62(7); 71*; 63(9)*; Т.3. **С3, §3:** 3(6); 52(1).
4 неделя	**С3, §4:** 1(4); 4; 7(2); 27(3); 52(3). **С3, §3:** 19(3, 8); 20(3,8); 23(1). **С3, §4:** 71(2); 75(2).

$\boxed{50 + 7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–14 апреля)

I. Интеграл Римана

С2, §6: 5; 24; 27^*; 30; 42^*; 54(6); 108(3); 112(2); 118; 126; 140^*; 197.

С2, §10: 43(1); 45^*; 50(4).

Т.1. Доказать, что $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| \le \frac{2}{a}$, где $0 < a < b$.

II. Несобственный интеграл Римана

С2, §11: 70; 85; 92; 94.

С2, §12: 91; 92; 100; 104; 121; 128^*; 137; 139; 141; 182; 226^*;.

III. Числовые ряды

С2, §13: 2(3); 10(2); 12(6); 13(2); 14(3).

С2, §14: 2(6); 4(3); 10(3); 11(6); 14(3); 19(15); 21(13); 25(9); 38^*; 39.

С2, §15: 3(3); $4(5)^*$; 8(3); 9(1).

Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость рядов.

IV. Функциональные последовательности и ряды

С2, §17: 5(5); 9(8); 12(1, 11); 16(4).

Т.2. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $E = [0, 1]$ функциональные последовательности:

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$;
б) $f_n(x) = x^n - x^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$.

С2, §18: 22(2); 32(10); 33(7); 34(5); 37(3); 44; 46^*.

Т.3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если $f_n(x) = x \sin \frac{1}{(xn)^2}$.

С2, §19: 4; 5; 7; 14.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §6:** 5; <u>24</u>; 27*; 30; 42*; 54(6); 108(3); 112(2); 118; 126; 140*; 197. **С2, §10:** <u>43(1)</u>; 45*; 50(4); Т.1.
2 неделя	**С2, §11:** 70; 85; 92; 94. **С2, §12:** 91; 92; 100; <u>104</u>; 121; 128*; 137; <u>139</u>; 141; <u>182</u>; 226*;.
3 неделя	**С2, §13:** 2(3); <u>10(2)</u>; 12(6); <u>13(2)</u>; 14(3). **С2, §14:** 2(6); 4(3); <u>10(3)</u>; 11(6); 14(3); <u>19(15)</u>; <u>21(13)</u>; <u>25(9)</u>; 38*; <u>39</u>. **С2, §15:** 3(3); 4(5)*; <u>8(3)</u>; 9(1).
4 неделя	**С2, §17:** 5(5); 9(8); 12(1, 11); 16(4); Т.2. **С2, §18:** 22(2); 32(10); 33(7); <u>34(5)</u>; <u>37(3)</u>; 44; 46*; Т.3. **С2, §19:** 4; 5; 7; <u>14</u>.

$\boxed{59 + 9^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–19 мая)

I. Степенные ряды

С2, §20: 2(6); 3(6)*; <u>5(4)</u>; 8(3).

С2, §21: 6(7); 10(4); 11(4); <u>19(7)</u>; <u>27(3)</u>; 58(2); <u>80</u>.

II. Меры Жордана и Лебега

С3, §7: <u>22</u>; 40; <u>77</u>.

Т.1. Существует ли замкнутое множество $F \subset [0,1]$ с мерой Лебега $\mu(F) = 3/4$, состоящее только из иррациональных чисел?

Т.2*. Построить непрерывное отображение канторова множества на единичный квадрат.

Т.3*. Существует ли ограниченная на отрезке функция, имеющая первообразную на этом отрезке, но неинтегрируемая по Риману на нем?

Т.4. Существует ли предел последовательности отрезков $[a + \frac{(-1)^n}{n}, b - \frac{(-1)^n}{n}]$?

Т.5. В кубе $[0,1]^n$ заданы n измеримых множеств $A_1, \ldots, A_n$ таких, что $\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) > n - 1$. Доказать, что $\cap_{k=1}^n A_k$ имеет положительную меру.

<u>Т.6</u>. Пусть $\{E_k\}$ — последовательность измеримых подмножеств $\mathbb{R}^n$, таких что $\sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$ сходится. Показать, что множество $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in E_k$

для бесконечного множества номеров $k\}$ измеримо и $\mu(E)=0$ (лемма Бореля–Кантелли).

Т.7. Доказать, что если функция измерима на любом отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $\quad \varepsilon>0$, то она измерима и на всем отрезке $[a,b]$.

Т.8*. Докажите, что у произвольной функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ множество точек разрыва измеримо по Лебегу.

Т.9. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то её график имеет меру Лебега нуль на плоскости.

Т.10. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дифференцируема везде. Докажите, что её производная измерима по Лебегу.

III. Неявные функции

Т.11. Дано уравнение $x^2=y^2$

а) Сколько функций $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению?
б) Сколько непрерывных функций $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению?
в) Сколько непрерывных функций $y:[1,2]\to\mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению и условию $y(1)=1$?

С3, §3: 60(1); 64(1); 77; 103(2).
С3, §4: 42(2); 44(2).

Т.12. Для отображения $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$$

показать, что якобиан отображения всюду в $\mathbb{R}^2$ отличен от нуля, но отображение не является взаимно-однозначным. Найти множество значений отображения f.

IV. Замена переменных

С3, §3: 85(5); 88(2); 90.
С3, §4: 52(1).

Т.13. Решить уравнение $yu''_{xx}+(x-y)u''_{xy}-xu''_{yy}-u'_x+u'_y=0$, преобразовав его к новым независимым переменным $\xi=x+y,\quad \eta=x^2-y^2$.

V. Экстремумы функций многих переменных

С3, §5: 2(2); 9; 10*; 13(2); 18(2); 21(2); 25(7); 28(4); 31(3); 36*.

Рекомендации по решению
третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §20:**	2(6); 3(6)*; 5(4); 8(3).
	С2, §21:	6(7); 10(4); 11(4); 19(7); 27(3); 58(2); 80.
2 неделя	**С3, §7:**	22; 40; 77.
		Т.1–Т.10.
3 неделя	**С3, §3:**	60(1); 64(1); 77; 103(2); 85(5); 88(2); 90.
	С3, §4:	42(2); 44(2); 52(1); Т.11–Т.13.
4 неделя	**С3, §5:**	2(2); 9; 10*; 13(2); 18(2); 21(2); 25(7); 28(4); 31(3); 36*.

$\boxed{41 + 6^*}$

Составитель задания — д. ф.-м. н., профессор А. Л. Лукашов