浮点数的二进制表示

作者： 阮一峰

分享按钮

日期： 2010年6月 6日

1.

前几天，我在读一本C语言教材，有一道例题：

```
#include <stdio.h>
void main(void){
    int num=9; /* num是整型变量，设为9 */
    float* pFloat=&num; /* pFloat表示num的内存地址，但是设为浮点数 */
    printf("num的值为：%d\n",num); /* 显示num的整型值 */
    printf("*pFloat的值为：%f\n",*pFloat); /* 显示num的浮点值 */
    *pFloat=9.0; /* 将num的值改为浮点数 */
    printf("num的值为：%d\n",num); /* 显示num的整型值 */
    printf("*pFloat的值为：%f\n",*pFloat); /* 显示num的浮点值 */
}
```

运行结果如下：

```
num的值为：9
*pFloat的值为：0.000000
num的值为：1091567616
*pFloat的值为：9.000000
```

我很惊讶，num和*pFloat在内存中明明是同一个数，为什么浮点数和整数的解读结果会差别这么大？

要理解这个结果，一定要搞懂浮点数在计算机内部的表示方法。我读了一些资料，下面就是我的笔记。

2.

在讨论浮点数之前，先看一下整数在计算机内部是怎样表示的。

```
int num=9;
```

上面这条命令，声明了一个整数变量，类型为int，值为9（二进制写法为1001）。普通的32位计算机，用4个字节表示int变量，所以9就被保存为00000000 00000000 00000000 00001001，写成16进制就是0x00000009。

那么，我们的问题就简化成：**为什么0x00000009还原成浮点数，就成了0.000000？**

3.

根据国际标准IEEE 754，任意一个二进制浮点数V可以表示成下面的形式：

$$V=(-1)^s\times M\times 2^E$$

（1）(-1)^s表示符号位，当s=0，V为正数；当s=1，V为负数。

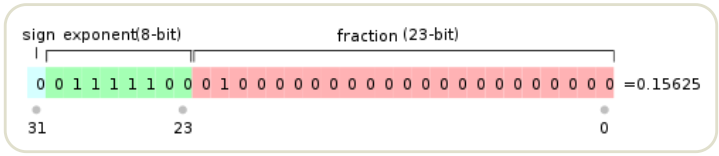
（2）M表示有效数字，大于等于1，小于2。

（3）2^E表示指数位。

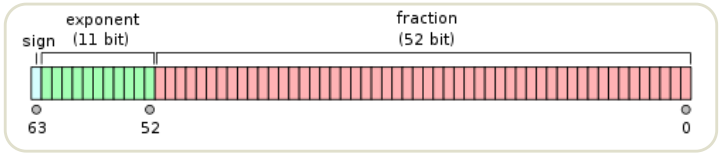
举例来说，十进制的5.0，写成二进制是101.0，相当于1.01×2^2。那么，按照上面V的格式，可以得出s=0，M=1.01，E=2。

十进制的-5.0，写成二进制是-101.0，相当于-1.01×2^2。那么，s=1，M=1.01，E=2。

IEEE 754规定，对于32位的浮点数，最高的1位是符号位s，接着的8位是指数E，剩下的23位为有效数字M。



对于64位的浮点数，最高的1位是符号位S，接着的11位是指数E，剩下的52位为有效数字M。



5.

IEEE 754对有效数字M和指数E，还有一些特别规定。

前面说过，1≤M<2，也就是说，M可以写成1.xxxxxx的形式，其中xxxxxx表示小数部分。**IEEE 754规定，在计算机内部保存M时，默认这个数的第一位总是1，因此可以被舍去，只保存后面的xxxxxx部分。**比如保存1.01的时候，只保存01，等到读取的时候，再把第一位的1加上去。这样做的目的，是节省1位有效数字。以32位浮点数为例，留给M只有23位，将第一位的1舍去以后，等于可以保存24位有效数字。

至于指数E，情况就比较复杂。

首先，E为一个无符号整数（unsigned int）。这意味着，如果E为8位，它的取值范围为0~255；如果E为11位，它的取值范围为0~2047。但是，我们知道，科学计数法中的E是可以出现负数的，**所以IEEE 754规定，E的真实值必须再减去一个中间数，对于8位的E，这个中间数是127；对于11位的E，这个中间数是1023。**

比如，2^10的E是10，所以保存成32位浮点数时，必须保存成10+127=137，即10001001。

然后，指数E还可以再分成三种情况：

（1）E不全为0或不全为1。这时，浮点数就采用上面的规则表示，即指数E的计算值减去127（或1023），得到真实值，再将有效数字M前加上第一位的1。

（2）E全为0。这时，浮点数的指数E等于1-127（或者1-1023），有效数字M不再加上第一位的1，而是还原为0.xxxxxx的小数。这样做是为了表示±0，以及接近于0的很小的数字。

（3）E全为1。这时，如果有效数字M全为0，表示±无穷大（正负取决于符号位s）；如果有效数字M不全为0，表示这个数不是一个数（NaN）。

6.

好了，关于浮点数的表示规则，就说到这里。

下面，让我们回到一开始的问题：**为什么0x00000009还原成浮点数，就成了0.000000？**

首先，将0x00000009拆分，得到第一位符号位s=0，后面8位的指数E=00000000，最后23位的有效数字M=000 0000 0000 0000 0000 1001。

由于指数E全为0，所以符合上一节的第二种情况。因此，浮点数V就写成：

```
V=(-1)^0×0.00000000000000000001001×2^(-126)=1.001×2^(-146)
```

显然，V是一个很小的接近于0的正数，所以用十进制小数表示就是0.000000。

7.

再看例题的第二部分。

请问浮点数9.0，如何用二进制表示？还原成十进制又是多少？

首先，浮点数9.0等于二进制的1001.0，即1.001×2^3。

那么，第一位的符号位s=0，有效数字M等于001后面再加20个0，凑满23位，指数E等于3+127=130，即10000010。

所以，写成二进制形式，应该是s+E+M，即0 10000010 001 0000 0000 0000 0000 0000。这个32位的二进制数，还原成十进制，正是1091567616。

（完）

文档信息

- 版权声明：自由转载-非商用-非衍生-保持署名（创意共享3.0许可证）
- 发表日期： 2010年6月 6日

相关文章

- **2021.01.27:** 异或运算 XOR 教程

  > 大家比较熟悉的逻辑运算，主要是"与运算"（AND）和"或运算"（OR），还有一种"异或运算"（XOR），也非常重要。

- **2019.11.17:** 容错，高可用和灾备

  > 标题里面的三个术语，很容易混淆，专业人员有时也会用错。

- **2019.11.03:** 关于计算机科学的50个误解

> 计算机科学（Computer Science，简称 CS）是大学的热门专业。但是，社会上对这个专业有很多误解，甚至本专业的学生也有误解。

- **2019.10.29:** 你所不知道的 AI 进展

> 人工智能现在是常见词汇，大多数人可能觉得，它是学术话题，跟普通人关系不大。

Weibo | Twitter | GitHub

Email: yifeng.ruan@gmail.com