Double Cursus Essec-Centrale

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 Décembre 2020
(30 minutes)

0.1 Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle E définie par :

$$E : \begin{cases} y' - xy = x \\ \quad x \in R \end{cases}$$

où x est la variable (réelle) et y la fonction (de R vers R).

0.2 Exercice 2

Soit E l'équation différentielle définie par :

$$E : \begin{cases} t^2 y\text{"}(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 1 \\ t \in R \end{cases}$$

où t est la variable (réelle) et y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur R.

1. Expliquer pourquoi cette équation est dite linéaire d'ordre 2.
2. Donner l'équation homogène associée et soit E_H celle-ci.
3. Donner la structure et la dimension de l'ensemble des solutions sur R^{+*} de l'équation homogène.
4. Montrer que les fonctions y_1 et y_2 définies par $y_1(t) = \dfrac{1}{t}$ et $y_2(t) = \dfrac{1}{t}$ forment un système fondamental de solutions.
5. En déduire les solutions de E_H puis celle de E.

Mini Quizz 1

1. Soit E l'equation differentielle definie par :

$$E : \begin{cases} y'(x) - xy(x) = x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On reconnait une equa° differentielle lineaire d'ordre 1 dont l'equation homogene est : $E_H : \begin{cases} y'(x) - xy(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

D'apres le cours, l'ensemble des solutions de E_H sont :

$$S_{E_H} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to k e^{\frac{x^2}{2}} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

On remarque que $y_0 : x \to -1$ est une solution particuliere de E

d'où : $S_E = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to -1 + k e^{\frac{x^2}{2}} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}$

2.a) Soit φ l'application lineaire definie sur $C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$

par : $\varphi : C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}) : y \to \varphi(y)$

$\varphi(y) : \cancel{t} \to t^2 y''(t) + 4t y'(t) + 2y(t)$

Soit $h : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} : t \to 1$

et $y \in S_E \iff \varphi(y) = h$

Or $h \in C_0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ φ est une a.l d'où l'equation $\varphi(y) = h$ est appelée une equation lineaire.

b) L'equa° homogene associée est $E_H : t^2 y''(t) + 4t y'(t) + 2y(t) = 0$

c) $E_H = \operatorname{Ker} \varphi$ d'où E_H est un sous-espace vectoriel de $C_2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et d'apres le cours, c'est un espace vectoriel de dimension 2.

d) Soit $y_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ t \to \frac{1}{t} \end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ t \to \frac{1}{t^2} \end{array}$ On peut verifier que y_1 et $y_2 \in S_{E_H}$ et que y_1 et y_2 forment une famille libre donc une base de S_{E_H} et

$$S_{E_H} = \operatorname{Vect}(y_1, y_2)$$

Un systeme fondamental de solutions est une base des solutions de l'equation homogene d'où (y_1, y_2) est bien un systeme fondamental.

e) On remarque que $y_0 : t \to \frac{1}{2}$ est une solution particulière de E d'où d'après le cours $S_E = y_0 + S_{E_H} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ t \to \frac{1}{2} + \lambda \frac{1}{t} + \mu \frac{1}{t^2} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right.$

Double Cursus Essec-Centrale

5 Décembre 2020
(30 minutes)

0.1 Cours

Plan de émonstration du fait que les solutions d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 du type $X' = AX$ (où A est une fonction continue à valeurs dans l'ensemble des matrice d'ordre n) est un espace vectoriel de dimension n.

0.2 Exercice

On considère le système différentiel noté E défini par :

$$E : \begin{cases} x'(t) = \frac{1}{4}x(t) - \frac{\sqrt{3}}{4}y(t) - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}t \\ y'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}x(t) + \frac{1}{4}y(t) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{t}{4} \end{cases}$$

où t est la variable (réelle) et $x et$ y sont des fonctions inconnues de classe $\mathcal{C}^1$ sur R.
On considère les matrices P et A définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \; et \;\; A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $P^{-1}AP$.
2. Écrire sous forme matricielle le système E.
3. Résoudre le système homogène associé.
4. Donner un système fondamental de solutions du système homogène.
5. Déterminer les solutions à valeurs dans R de système homogène.
6. Déterminer les solutions à valeurs dans C de E.
7. Déterminer les solutions à valeurs dans R de E.

Mini Quizz 2

Question de cours 1) Bien définir l'environnement
2) Énoncer le resultat

Environnement Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue

Resultat : l'ensemble des solutions du systeme $X' = AX$ est un espace vectoriel de dimension n.

Demonstration Soit $t_0 \in I$ et S_E l'ensemble des solutions

1) On considere $\varphi : \begin{array}{ccc} S_E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longrightarrow & X(t_0) \end{array}$

a) φ est lineaire
b) D'apres le theoreme de C.L lineaire ... φ est bijectif d'où $S_E \sim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
c) Conclusion : $\dim S_E = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$.

Exercice :

1. Soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $\quad AV_1 = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)V_1$
$\quad A V_2 = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)V_2$

On en deduit que A a deux v.p distinctes donc est diagonalisable V_1 et V_2 sont v.p associés à des v.p $\neq$ donc (V_1, V_2) est une famille libre donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et $P = (V_1, V_2)$ est inversible.

et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$

2. Le systeme s'ecrit $X' = AX + B$

3. D'apres le cours, soit $X_1 : t \to e^{\left(\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)t} V_1$
$X_2 : t \to e^{\left(\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)t} V_2$

(X_1, X_2) est un systeme fondamental du systeme homogene associé et $S_{E_{H},\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}(X_1, X_2) = \{\lambda X_1 + \mu X_2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$

5 $S_{E_H, \mathbb{R}}$ est aussi un espace vectoriel reel de dimension 2.

On peut remarquer que $Y_1 = X_1 + X_2 : t \longrightarrow \begin{pmatrix} 2e^{\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t \\ 2e^{\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t \end{pmatrix}$ est solution et à valeurs dans $\mathbb{R}$

que $Y_2 = i(X_1 - X_2) : t \longrightarrow \begin{pmatrix} -2e^{\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t \\ 2e^{\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t \end{pmatrix}$

est solution à valeurs dans $\mathbb{R}$

de plus (Y_1, Y_2) est une famille libre d'où

Double Cursus Essec-Centrale

TOPOLOGIE

11Décembre 2020
(30 minutes)

0.1 Cours

Traiter au choix l'une des deux questions de cours suivantes :

1. Exponentielle de matrice : définition et preuve de l'existence (on dégagera bien les propriétés utilisées)
2. Théorème du point fixe :énoncé et démonstration (on dégagera bien les propriétés utilisées)

0.2 Exercice

On se propose de démontrer que l'intersection d'une suite de compacts non vides est un compact non vide.
Soit (E, d) un espace métrique et (K_n) une suite de compacts non vides de E décroissante pour l'inclusion.

1. Montrer qu'il existe une suite de E, notée $(u_n)_{n\in N}$, telle que $\forall n \in N, u_n \in K_n$.
2. Justifier l'existence d'une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in N}$ convergente. On notera l la limite de cette suite.
3. En déduire que $\bigcap\limits_{n\in N} K_n$ est non vide.
4. Comparer ce résultat avec la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Quizz 4. Le 15 Decembre 2020.

Cours Differents types de convergence et lien entre eux

Exercice Etude de la fonction Zeta alternée

On considere S la fonction definie par :

$$\forall x > 0 \quad , \quad S(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1. Montrer que S est definie sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Montrer que S est C^{∞} sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. Determiner la limite de S en $+\infty$
4. Exprimer pour $x > 1$ $S(x)$ en fonction de $\zeta(x)$.

Rappel $\zeta(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$