מעבדה בחשמל
הנדסה ביורפואית

מגישים:

דן טורצקי

סול אמארה

תאריך:

8.11.2021

תוכן עניינים:

1 רקע תאורטי:

נגד הינו הרכיב החשמלי הבסיסי ביותר, המבזבז אנרגיה בצורה של חום. קיימים סוגים שונים של נגדים כאשר ההפרדה בינהם היא לפי סוג הקשר בין המתח והזרם שעל הנגד. הנגד הנפוץ הינו נגד לינארי והקשר בין המתח לזרם שעליו הוא $V_R = R \cdot I_R$ (1). בתחום התדר האימפדנס של הנגד הינו $Z_R = R$ (2).

קבל הינו רכיב חשמלי האוגר אנרגיה חשמלית ומורכב משני לוחות שאוגרים מטען. הקשר בין המתח שעליו למטען שאגור בלוחות הקבל הינו: $q = C \cdot V_C$ (3) וכיוון שהזרם הוא נגזרת של המטען בזמן $I = \frac{dq}{dt}$ (4) נקבל את הקשר הבא עבור המתח והזרם שעל הקבל:
$I_c = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$ (5) כאשר C הינו מאפיין של יכולת הקיבול, ותלוי במאפיינים פיזיקליים בלבד של הקבל. בתחום התדר האימפדנס של הקבל הינו $Z_c = \frac{1}{jwC}$ (6). במצב בו הזרם קבוע (*DC*) כיוון שקבל אוגר אנרגיה חשמלית, כאשר המעגל מגיע למצב מתמיד (מצב בו חלפו תופעות המעבר והזרם והמתח קבועים), הקבל יתנהג כנתק במעגל. נתק הינו מצב בו שני הדקים אינם מחוברים אחד לשני ולכן לא יכול לזרום זרם בחלק זה של המעגל.
מנוסחה (6) נובע כי כאשר התדר שואף לאינסוף האימפדנס של הקבל שואף לאפס כלומר הקבל מתנהג כמו קצר, וכאשר התדר שואף לאפס האימפדנס של הקבל שואף לאינסוף כלומר מתנהג כנתק.

לעומת קבל, **סליל** הינו רכיב חשמלי האוגר אנרגיה מגנטית. הקשר הדיפרנציאלי בין המתח לזרם של הסליל הוא $V_L = L \cdot \frac{dI_L}{dt}$ (7) ובתחום התדר האימפדנס של הסליל הינו $Z_L = jwL$ (8).
במצב המתמיד (כאשר המקור הוא *DC*) הסליל מתנהג כקצר כלומר המתח עליו מתאפס.
מנוסחה (7) נובע כי כאשר התדר שואף לאינסוף האימפדנס של הסליל שואף לאינסוף כלומר הקבל מתנהג כמו נתק, וכאשר התדר שואף לאפס האימפדנס של הסליל שואף לאפס כלומר מתנהג כקצר.

במעגלים חשמליים בהם קיימים רכיבים רבים לעיתים קשה לבחון את תכונות המעגל בזמן. לשם כך משתמשים בשיטת ה**פאזור** עבור המצב המתמיד של המעגל, שהיא שיטת מעבר לתדר כאשר המקור במעגל הינו סינוסידאלי. השיטה מבוססת על כך שכאשר פועל מקור מתח\זרם סינוסידאלי במעגל כל הרכיבים יושפעו ויהיו בעלי אותה תדירות של המקור ולכן ניתן לייצג את המתח והזרם שלהם על ידי הפאזה והאמפליטודה של המתח\הזרם בלבד. במקור סינוסי נעבור לביטוי קוסינוסי על ידי הזהות $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$. באופן כללי עבור מתח עם ביטוי: $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ הפאזור הינו $\tilde{V} = V_0 e^{j\phi}$(9) כאשר V_0 היא האמפליטודה של המתח ו-ϕ הינה הפאזה. בנוסף כאשר עוברים לפאזור כל הרכיבים שראינו למעלה (נגד, סליל וקבל) מקיימים את הקשר הבא: $\tilde{V} = Z \cdot \tilde{I}$ (10) [1]

מעגל תהודה הוא מעגל בו התדר של הרכיבים במעגל (הנובע כתוצאה מתדר המקור) היינו בעל מאפיינים המשפיעים על התנהגות המעגל. ישנם מספר הגדרות לקבלת **תדר תהודה**. הראשונה הינה התדר בו האנרגיה הממוצעת האגורה בקבל בזמן מחזור אחד שווה לאנרגיה הממוצעת האגורה בסליל. השנייה היא התדר בו האימפדנס השקול של המעגל הינו ממשי טהור. [2]

מסנן הינו רכיב המוכפל באות בתחום התדר וכך מאפס אזורים שונים לפי יעודו. **מסנן מעביר גבוהים** ***(HPF)*** הינו מסנן שמאפס את כל התדרים הנמוכים מתדר מסוים וכך מעביר רק החל מתדר זה ומעלה. בדומה לכך **מסנן מעביר נמוכים** ***(LPF)*** הינו מסנן שמעביר תדרים רק מתחת לתדר מסוים. **מסנן מעביר פס** ***(BPF)*** הינו מסנן שמעבר טווח מסוים של ערכים של תדירות ומסנן את כל הערכים מחוץ לטווח זה. [1]

כלי שימושי באנליזה של מעגלים חשמליים הינו עקומת בודה. עקומת בודה מורכבת לרוב משתי עקומות נפרדות – באחת מוצגת האמפליטודה (ההגבר) של פונקציית התמסורת (בדציבלים) כנגד התדירות (בסקלה לוגריתמית) ובשנייה מוצגת פאזת התמסורת (במעלות\רדיאנים) כנגד התדירות בסקלה לוגריתמית. ניתוח של עקומת בודה מאפשר להבין איך תדר מסוים משפיע על תגובת המעגל. סביב האפסים והקטבים של פונקציית התמסורת ישנם שינויים בשיפוע של עקומת בודה – תדרים הגורמים לשינויים אלה בתגובת המעגל נקראים **תדרי ברך**. [3]

הגדרה מתמטית של תדר ברך עבור מקור סינוסודיאלי הינה התדירות עבורה ערך ההגבר הינו $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

לרוב בתדרים אלה תחל פעולה אפקטיבית של מסנן. [4]

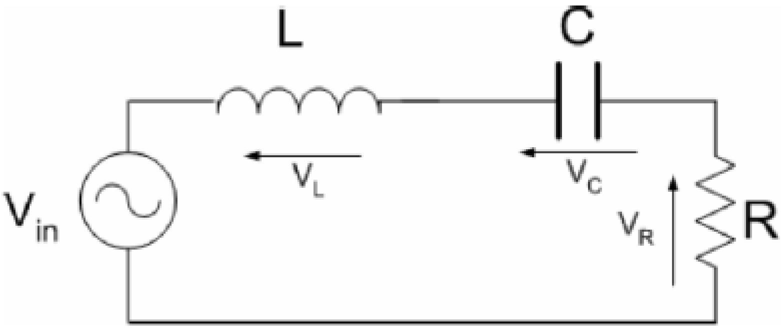
ערך אפקטיבי (RMS) של מתח – נסמנו V_{eff} או V_{rms}. הערך האפקטיבי של אות סינוסי הוא הערך של האות עבורו אם נחליף את האות הנתון באות DC עם מתח/זרם שגודלו V_{eff} , ההספק הכולל על פני זמן מחזור אחד (או כפולות שלמות של זמן מחזור) במעגל יהיה זהה. ההגדרה המתמטית של RMS : $V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt}$ (11)[5]

מעגל משנה מופע הינו מעגל המאפשר שינוי של הפאזה של המתח הנכנס. שינוי של הפאזה יכול לתקן בעיה שהפאזה של המתח הנכנס יוצרת במערכת או לאפשר תופעות מסוימות התלויות בפאזה בהינתן מערכת מסוימת.[1]

גורם טיב Q_f הינו מדד לאידאליות של מוליך מבחינת הספק. ככל שרכיב הינו יותר אידאלי כך פחות הספק מתבזבז עליו. $Q_f = \frac{Z}{R}$ (12). כאשר R הינו ההתנגדות של הרכיב ו – Z הינו האימפדנס השקול של המעגל. ממשוואה זו ניתן לראות כי עבור רכיב אידאלי בו ההתנגדות שווה ל – 0 מתקיים כי $Q_f \to \infty$. [4]

2 תשובות לשאלות הכנה:

2.1 שאלה 4.1:



איור 1: מעגל RLC טורי[6]

$$R = 800\,\Omega\,, \qquad C = 1\,\mu F = 1 \cdot 10^{-6} F, \qquad L = 0.3\,H$$

סעיף א. $V_{in,RMS} = 3V,\ f = 300\ Hz$

נתון כי המתח סינוסידיאלי לכן מהצורה $V_{in} = V_0 \sin(2\pi f t) = V_0 \sin(600\pi t)$. נציב את הביטוי במשוואה עבור מתח אפקטיבי:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{300}\ [sec], \qquad \omega = 2\pi f = 600\pi\ [\frac{rad}{sec}]$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt} = \sqrt{300 \cdot \int_0^{\frac{1}{300}} (V_0 \sin(600\pi t))^2 dt} = \sqrt{300 V_0^2 \cdot \frac{1}{600}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$3 = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \rightarrow \quad V_0 = 3\sqrt{2}\,V$$

לכן הביטוי למתח המקור הינו: $V_{in} = 3\sqrt{2}\sin(600\pi t) = 3\sqrt{2}\cos\left(600\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ כאשר

במעבר לפאזור: $\widetilde{V_{in}} = 3\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi j}{2}}$.

כיוון שהרכיבים מחוברים בטור נשתמש בנוסחת מחלק מתח: $\widetilde{V_X} = \frac{Z_X}{\sum Z} \cdot \widetilde{V_{in}}$ (13), את החישובים נבצע באמצעות מטלאב.

$$\widetilde{V_R} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C + Z_L} \cdot \widetilde{V_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \widetilde{V_{in}} =$$

$$= \frac{800}{800 + 600\pi \cdot 0.3j + \frac{1}{j \cdot 600\pi \cdot 10^{-6}}} \cdot 3\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi j}{2}} = 4.2386 \cdot e^{-1.6145j}$$

$$\widetilde{V_L} = \frac{Z_L}{Z_R + Z_C + Z_L} \cdot \widetilde{V_{in}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \widetilde{V_{in}} =$$

$$= \frac{j \cdot 600\pi \cdot 0.3}{800 + 600\pi \cdot 0.3j + \frac{1}{j \cdot 600\pi \cdot 10^{-6}}} \cdot 3\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi j}{2}} = 2.9961 \cdot e^{-0.0437j}$$

$$\widetilde{V_C} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C + Z_L} \cdot \widetilde{V_{in}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \widetilde{V_{in}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{j \cdot 600\pi \cdot 10^{-6}}}{800 + 600\pi \cdot 0.3j + \frac{1}{j \cdot 600\pi \cdot 10^{-6}}} \cdot 3\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi j}{2}} = 2.8108 \cdot e^{3.0979j}$$

נעבור לביטוי התלוי בזמן :

$$V_R = 4.2386\cos(600\pi t - 1.6145)$$

$$V_L = 2.9961\cos(600\pi t - 0.0437)$$

$$V_C = 2.8108\cos(600\pi t + 3.0979)$$

נחשב את המתח האפקטיבי :

$$\boldsymbol{V_{R,rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt} = \sqrt{300 \cdot \int_0^{\frac{1}{300}} (4.2386\cos(600\pi t - 1.6145))^2 dt}$$

$$= \mathbf{2.997}\ \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{V_{L,rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt} = \sqrt{300 \cdot \int_0^{\frac{1}{300}} (2.9961\cos(600\pi t - 0.0437))^2 dt}$$

$$= \mathbf{2.118\ V}$$

$$\boldsymbol{V_{C,rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt} = \sqrt{300 \cdot \int_0^{\frac{1}{300}} (2.8108\cos(600\pi t + 3.0979))^2 dt}$$

$$= \mathbf{1.987}\ \boldsymbol{V}$$

סכום המתחים האפקטיבים על כל רכיב הוא :

$$V_{R,rms} + V_{L,rms} + V_{C,rms} = 2.997 + 2.118 + 1.987 = 7.102\ \text{V}$$

חישבנו כי המתח האפקטיבי של המקור הינו $V_{in,RMS} = 3V$. ניתן לראות כי הסכום של המתחים האפקטיבים של הרכיבים אינו שווה למתח האפטקיבי של המקום. תוצאה זו נובעת מכך שהביטוי למתח האפקטיבי אינו ביטוי לינארי וכיוון שהמתח במעגל הינו סכום המתחים על הרכיבים נקבל כי אין קשר לינארי בין סכום המתחים האפקטיבים על הרכיבים למתח האפקטיבי של המקור. בנוסף ניתן לראות זאת בעזרת הגדרת המתח האפקטיבי כיוון שמתח אפקטיבי הוא מתח שניתן להחליפו במתח DC בעל אותו ערך ולקבל אותו הספק במעגל, ידוע כי הספק המקור איננו סכום לינארי של כל ההספקים על הרכיבים.

סעיף ב. נחשב את התדר עבורו הזרם מקסימלי:

$$\tilde{I} = \frac{\widetilde{V_{in}}}{\sum Z} = \frac{\widetilde{V_{in}}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

נגזור את הביטוי ונשווה לאפס:

$$\left|\tilde{I}\right| = \frac{\widetilde{V_{in}}}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

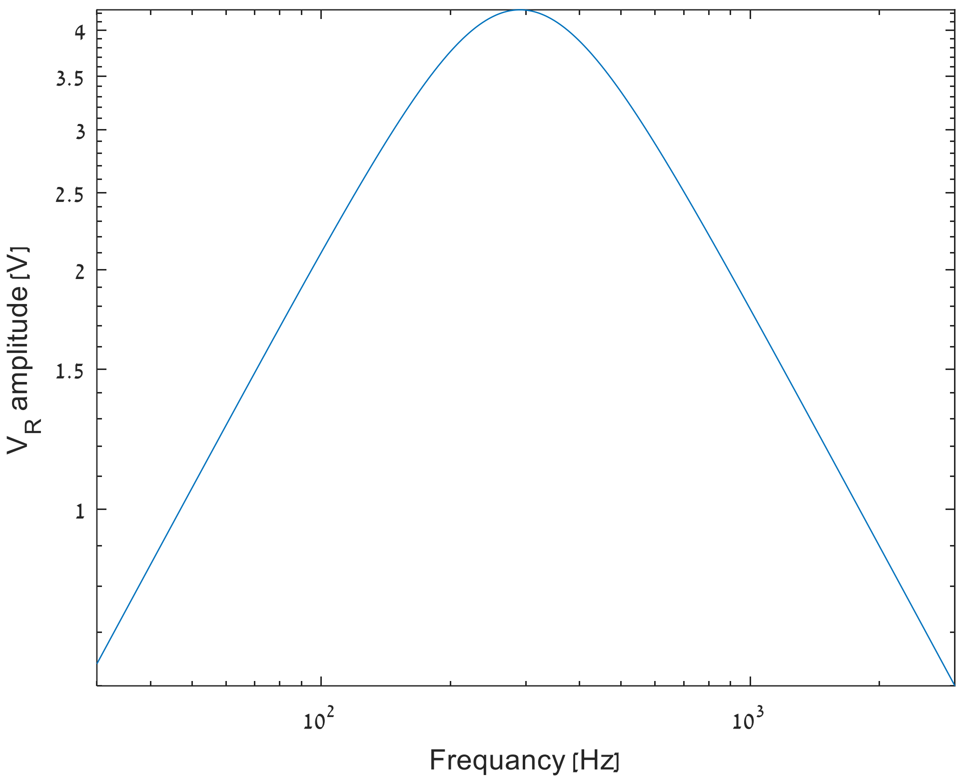
$$\frac{d\left|\tilde{I}\right|}{d\omega} = \widetilde{V_{in}} \cdot \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

$$\frac{d\left|\tilde{I}\right|}{d\omega} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{LC}}} = \mathbf{1825.74}\ \left[\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{sec}}\right]$$

סעיף ג. הגבר הנגד הינו:

$$\left|\widetilde{V_R}\right| = \left|\frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \widetilde{V_{in}}\right| = \frac{V_0 R}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

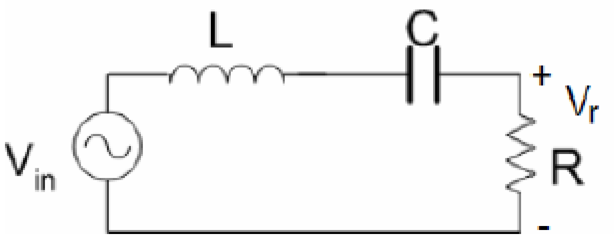
ראינו כי עבור מתח מקור אפקטיבי של $3V$ נקבל $V_0 = 3\sqrt{2}$.



איור 2 : תלות ההגבר של הנגד בתדירות

מאיור 2 ניתן לראות כי זהו מסנן מעביר פס כיוון שיש טווח תדירויות מסוימת שעוברת ובתדירויות האחרות האמפליטודה קטנה מאוד.

2.2 שאלה 4.2:



איור 3 : מעגל סינון מעביר פס[6]

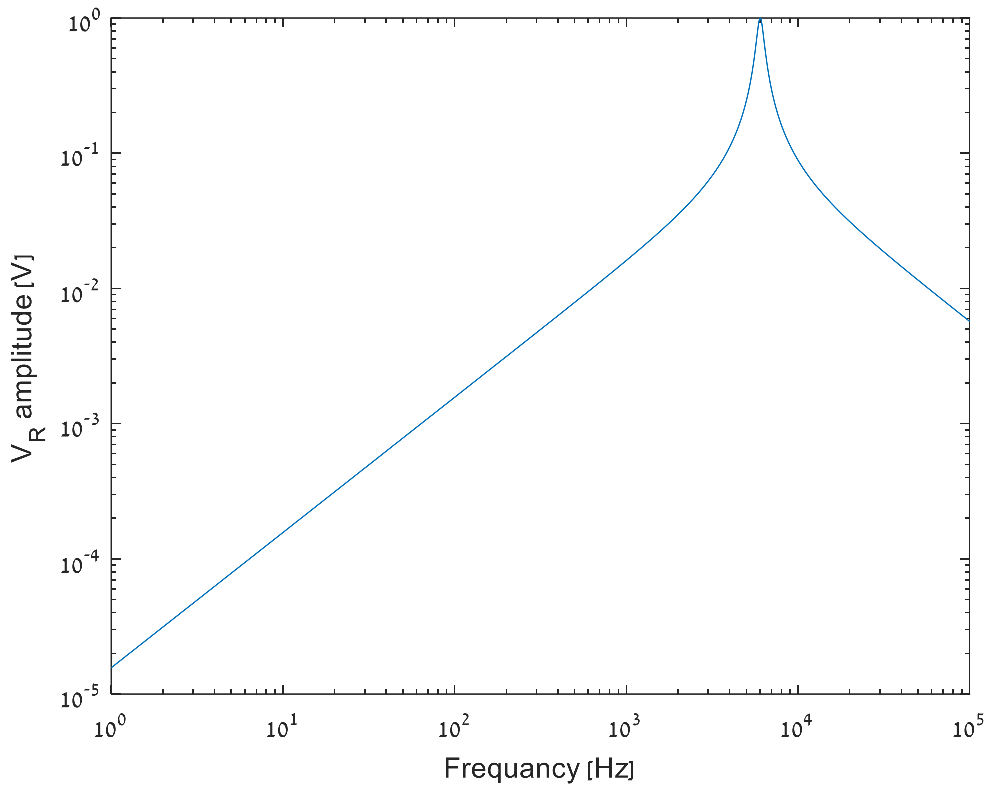
$$R = 300\,\Omega\,, \qquad C = 8.3\,nF = 8.3 \cdot 10^{-9}F, \qquad L = 84\,mH = 84 \cdot 10^{-3}H$$

סעיף א.

כאשר V_{out} מוגדר כמתח על הנגד נקבל:

$$\widetilde{V_R} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C + Z_L} \cdot \widetilde{V_{in}}$$

$$\left|\frac{\widetilde{V_R}}{\widetilde{V_{in}}}\right| = \left|\frac{Z_R}{Z_R + Z_C + Z_L}\right| == \left|\frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\right| = \frac{R}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$



איור 4 : ההגבר כפונקציה של התדירות

מגרף זה ניתן לראות כי זה מסנן מעביר פס, כלומר מעביר תחום מסוים של תדרים. מהגרף עולה כי המקסימום מתקבל כאשר $f = 6028\ Hz$ ולכן זהו תדר התהודה של המעגל. ניתן לראות

מהגרף כי ככל שמתרחקים מנקודה זו האמפליטודה מקבלת ערכים קטנים יותר כפי שמתנהג מסנן מעביר פס.

רוחב פס הינו הרוחב של פונקציית התמסורת כאשר ערכה שווה ל $\frac{1}{\sqrt{2}}$ מהערך המקסימלי. [2]
נחשב :

$$\frac{R}{\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\max\left(\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right|\right)$$

$$2R^2=\omega^2L^2-\frac{2L}{C}+\frac{1}{\omega^2C^2}+R^2$$

$$\omega_1=39700.058\frac{rad}{sec}\qquad \omega_2=36128.63\frac{rad}{sec}$$

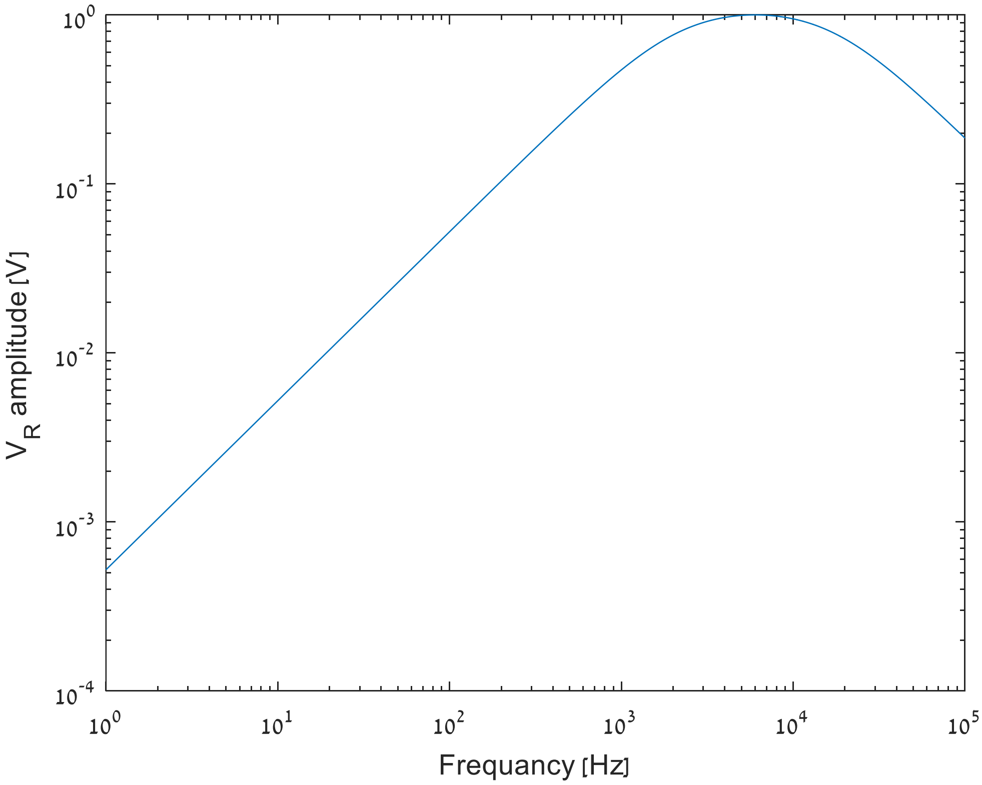
$$f_1=6318.46\text{ Hz}\qquad f_2=5272.58\text{ Hz}$$

$$B=f_1-f_2=\mathbf{1045.88\ Hz}$$

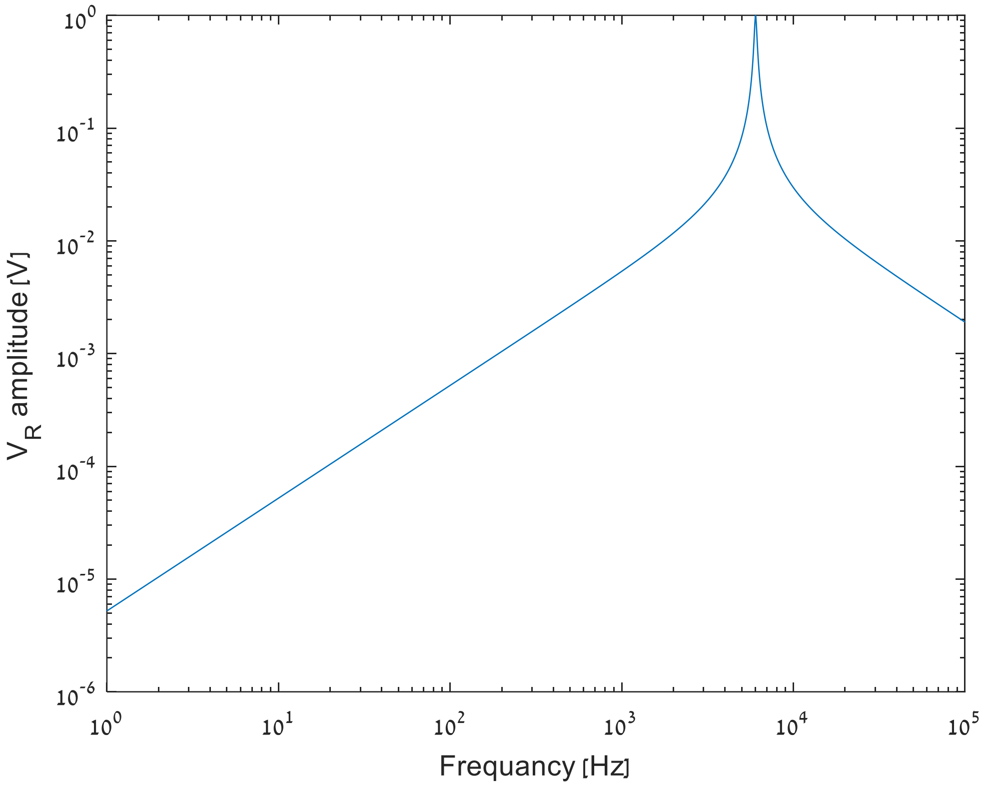
רוחב הפס הינו $\mathbf{1045.88\ Hz}$.

סעיף ב. כפי שחישבנו בסעיף א', ערך פונקציית התמסורת יהיה שווה ל $\frac{1}{\sqrt{2}}$ מהערך המקסימלי כאשר $f_2=5272.58\text{ Hz}$ $f_1=6318.46\text{ Hz}$ ולכן נבצע מדידות בטווח ערכי תדירות אלה על מנת לוודא את נכונות הפתרון. כמו כן, נבצע מדידות עבור $f=6028\text{ Hz}$ כיוון שזהו תדר התהודה שקיבלנו.

סעיף ג.



איור 5 : ההגבר כפונקציה של התדירות עבור $R=10000\Omega$



איור 6 : ההגבר כפונקציה של התדירות עבור $R = 100\Omega$

מאיורים 5,6 ניתן לראות כי ככל שההתנגדות גדלה רוחב הפס גדל כלומר יותר תדרים יעברו ולא יסוננו. לעומת זאת אין השפעה לרדיוס על תדר התהודה של המעגל בדומה לנוסחה שקיבלנו בתרגיל 4.1 .

מנוסחה (12) :

$$Q_f = \frac{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{\mathrm{R}} = 1 + \frac{j\omega L}{R} + \frac{1}{j\omega CR}$$

כלומר נקבל כי ככל שההתנגדות גדלה גורם הטיב קטן.

2.3 שאלה 4.3:

סעיף א. עבור מעגל ה - RC בו מתח המוצא הוא המתח על הקבל:

ראשית נמצא את פונקציית התמסורת, נשתמש בפאזורים:

$$\tilde{V}_{out} = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{Z_c}{R + Z_c} = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega c}}{R + \frac{1}{j\omega c}} = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega c}}{\frac{Rj\omega c + 1}{j\omega c}} = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{1}{Rj\omega c + 1} \rightarrow \frac{\tilde{V}_{out}}{\tilde{V}_{in}}$$

$$= \frac{1}{Rj\omega c + 1}$$

כעת נמצא את ההגבר:

$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{V_C}}{\boldsymbol{V_{in}}}\right| = \left|\frac{1}{Rj\omega c + 1}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{R^2\omega^2c^2}}}$$

נבדוק את סוג המסנן:

$$lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1 + R^2\omega^2c^2}} = 0$$

$$lim_{\omega\to 0}\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\sqrt{1 + R^2\omega^2c^2}} = 1$$

כלומר, זהו מסנן LPF.

עבור מעגל ה - RC בו מתח המוצא הוא המתח על הנגד:

ראשית נמצא את פונקציית התמסורת, נשתמש בפאזורים:

$$\tilde{V}_{out} = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{R}{R + Z_c} = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega c}} = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{R}{\frac{Rj\omega c + 1}{j\omega c}} = \tilde{V}_{in} \cdot \frac{Rj\omega c}{Rj\omega c + 1} \rightarrow \frac{\tilde{V}_{out}}{\tilde{V}_{in}}$$

$$= \frac{Rj\omega c}{Rj\omega c + 1}$$

כעת נמצא את ההגבר:

$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{V_R}}{\boldsymbol{V_{in}}}\right| = \left|\frac{Rj\omega c}{Rj\omega c + 1}\right| = \frac{\boldsymbol{R\omega c}}{\sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{R^2\omega^2c^2}}}$$

נבדוק את סוג המסנן:

$$lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = lim_{\omega\to\infty}\frac{R\omega c}{\sqrt{1 + R^2\omega^2c^2}} = 1$$

$$lim_{\omega\to 0}\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = lim_{\omega\to 0}\frac{R\omega c}{\sqrt{1 + R^2\omega^2c^2}} = 0$$

כלומר זהו מסנן HPF.

סעיף ב. עבור מסנן ה - LPF:

$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+R^2\omega^2c^2}} \underset{demand}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+R^2\omega^2c^2} \to 2 = 1+R^2\omega^2c^2 \to \omega^2 = \frac{1}{R^2C^2} \xrightarrow[\omega>0]{} \boldsymbol{\omega = \frac{1}{RC}}$$

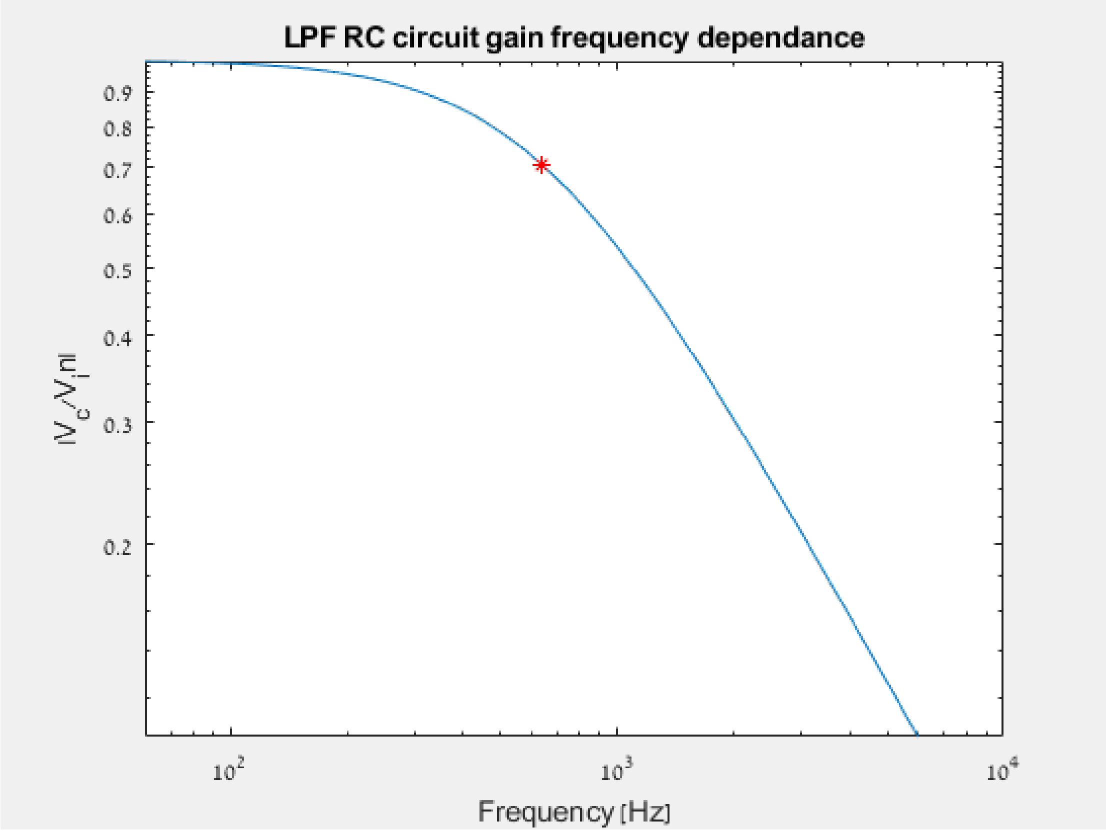
עבור מסנן ה - HPF:

$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = \frac{R\omega c}{\sqrt{1+R^2\omega^2c^2}} \underset{demand}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

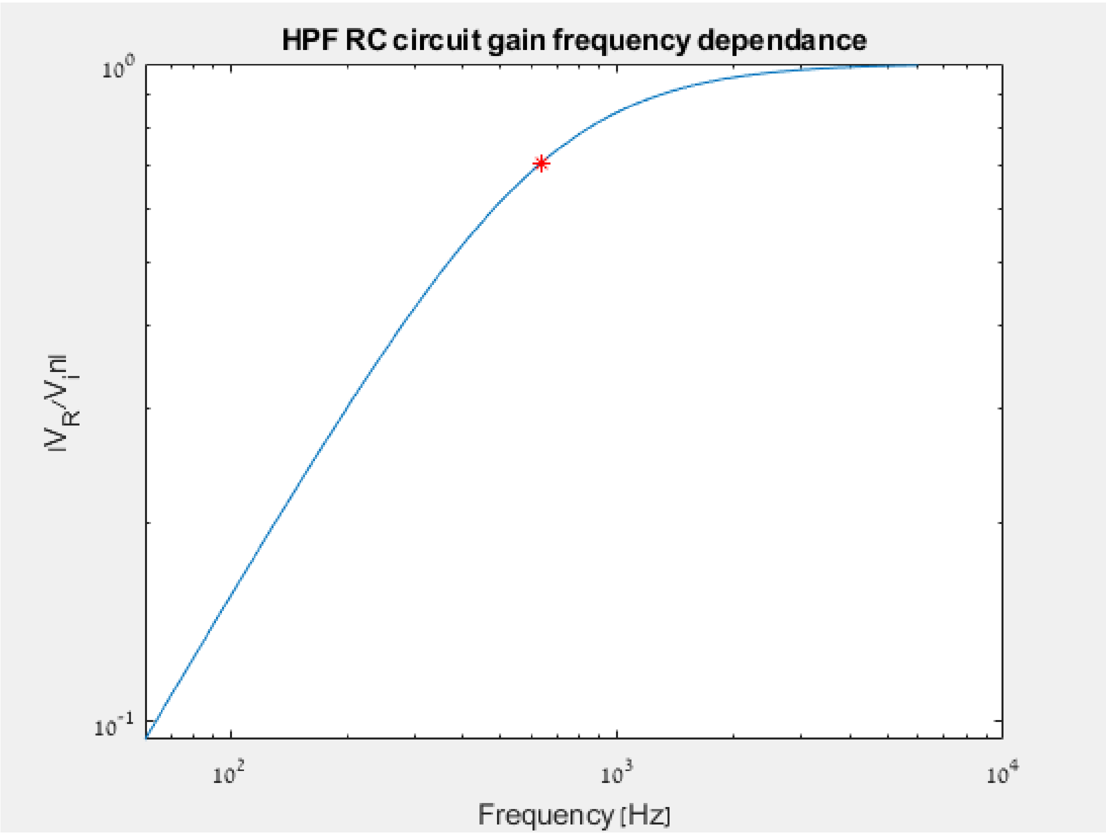
$$\sqrt{2}R\omega c = \sqrt{1+R^2\omega^2c^2} \to 2R^2\omega^2c^2 = 1+R^2\omega^2c^2 \to \omega^2 = \frac{1}{R^2C^2} \xrightarrow[\omega>0]{} \boldsymbol{\omega = \frac{1}{RC}}$$

נשים לב כי תדרי הברך של שתי המערכות שווים.

סעיף ג.



איור 7 – גרף הגבר מסנן LPF כתלות בתדירות בסקלה לוגריתמית



איור 8 – גרף הגבר מסנן HPF כתלות בתדירות בסקלה לוגריתמית

סעיף ד.

$$\left|\frac{V_C}{V_R}\right| = \frac{\left|\frac{V_C}{V_{in}}\right|}{\left|\frac{V_R}{V_{in}}\right|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+R^2\omega^2c^2}}}{\frac{R\omega c}{\sqrt{1+R^2\omega^2c^2}}} = \frac{1}{R\omega c} \underset{demand}{=} 1$$

$$R\omega c = 1 \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{RC}}$$

תדירות זו הינה גם תדירות הברך של שתי המערכות כפי שראינו בסעיף ב.3.

2.4 שאלה 4.4

סעיף א. נסמן את הטרמינל החיובי של V_{out} ב - V_a ואת הטרמינל השלילי ב - V_b.

נרשום את המשוואות הבאות בתחום הפאזורים :

$$1)\ \frac{V_a - V_{in}}{R_1} = \frac{0 - V_a}{R_2} = \frac{0 - V_a}{R_1} \to V_a = \frac{V_{in}}{2}$$

$$2)\ V_b = V_{in} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega c}} = V_{in} \cdot \frac{Rj\omega c}{1 + Rj\omega c}$$

ולכן :

$$V_{out} = V_a - V_b = \frac{V_{in}}{2} - V_{in} \cdot \frac{Rj\omega c}{1 + Rj\omega c} = V_{in} \cdot \frac{1 + Rj\omega c - (2Rj\omega c)}{2(1 + Rj\omega c)}$$

$$= V_{in} \cdot \frac{1 - Rj\omega c}{2(1 + Rj\omega c)}$$

$$|V_{out}| = |V_{in}| \cdot \frac{\sqrt{1 + R^2\omega^2c^2}}{2\sqrt{1 + R^2\omega^2c^2}} = \frac{|V_{in}|}{2}$$

כלומר, הראנו כי אין תלות בין התדר לגודל המתח עבור ערך כלשהו של R כאשר $R_1 = R_2$.

כעת נראה כי הפאזה שלו יחסית למקור משתנה עם שינוי הנגד R :

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1 - Rj\omega c}{2(1 + Rj\omega c)} = \frac{1}{2}\frac{(1 - Rj\omega c)^2}{\sqrt{1 + R^2\omega^2c^2}} = \frac{(1 - R^2\omega^2c^2) - j \cdot 2R\omega c}{2\sqrt{1 + R^2\omega^2c^2}}$$

ולכן :

$$\measuredangle \frac{V_{out}}{V_{in}} = \arctan^{-1}\left(\frac{2R\omega c}{1 - R^2\omega^2c^2}\right)$$

כלומר, הפאזה בין המקור למוצא תלויה בערך הנגד R.

סעיף ב. בערוץ 2 של האוסילוסקופ נמדד מתח המוצא. בערוץ 1 נמדד המתח על הנגד R_1. כפי שניתן לראות מחישוב הפרשי הפאזה שביצענו בסעיף הקודם ניתן לראות כי הכפלה בקבוע של התמסורת לא משנה את הפאזה - כי גם החלק הממשי וגם המרוכב מוכפלים בקבוע ואנו מחלקים ביניהם בתוך הארגומנט של הארקטאן. כיוון שהמתח על R_1 הינו חצי ממתח המקור, הפרש הפאזה בינו לבין למתח המוצא זהה להפרש הפאזה בין מתח הכניסה למתח המוצא.

3 **ביבליוגרפיה**

[1] C. K. Alexander, “Fundamentals of electric circuits.” McGraw-Hill, Boston [Mass, 2000.

[2] ל. שכטר, *תורת המעגלים החשמליים*. [Online]. Available: https://webee.technion.ac.il/people/schachter/Teaching/ICT%20November%202005.pdf

[3] J. W. Nilsson, “Electric circuits.” Prentice Hall, Boston, 2011.

[4] A. Izadian, “Fundamentals of Modern Electric Circuit Analysis and Filter Synthesis A Transfer Function Approach.” Springer International Publishing, Cham, 2019. doi: 10.1007/978-3-030-02484-0.

[5] D. R. Patrick, “Understanding AC circuits.” Newnes, Boston, 2000.

[6] “פרוטוקול מעבדת חשמל הנדסה ביורפואית 2.”

4 נספחים

```
%% EX4.1_a
% parameters
w=600*pi;
R=800; %[OHM]
L=0.3;%[H]
C=10^-6; %[F]
V_in=3*sqrt(2)*exp(-pi*j/2);
Z_C=1/(j*w*C);
Z_L=j*w*L;
Z_R=R;

V_R=(Z_R/(Z_R+Z_L+Z_C))*V_in; %Phasor of VR
V_L=(Z_L/(Z_R+Z_L+Z_C))*V_in; %Phasor of VL
V_C=(Z_C/(Z_R+Z_L+Z_C))*V_in; %Phasor of VC

disp(abs(V_R)); %The amplitude of VR
disp(angle(V_R)); %The phase of VR
disp(abs(V_L));
disp(angle(V_L));
disp(abs(V_C));
disp(angle(V_C));

%% EX4.1_c
% parameters
V_0=3*sqrt(2); %V
f=[30:1:3000]; %Hz
w=2*pi*f; %rad/sec

V_R_amp=V_0*R./sqrt((w*L-1./(w*C)).^2+R^2);
loglog(f,V_R_amp);
xlabel('Frequancy [Hz]');
ylabel('V_R amplitude [V]');
xlim([30 3000]);

%% EX4.2_a
clear all
% parameters
R=300; %[OHM]
L=84*10^-3;%[H]
C=8.3*10^-9; %[F]

f=[0:1:100000]; %Hz
w=2*pi*f; %rad/sec

amp=R./sqrt((w*L-1./(w*C)).^2+R^2); %amp of Vr/Vin
loglog(f,amp);
xlabel('Frequancy [Hz]');
ylabel('V_R amplitude [V]');

a=find(amp==max(amp));
disp(f(a));


%% EX4.2_c
% parameters
R_1=10000; %[OHM]
```

```
R_2=100; %[OHM]

amp_1=R_1./sqrt((w*L-1./(w*C)).^2+R_1^2); %amp of Vr/Vin
loglog(f,amp_1);
xlabel('Frequancy [Hz]');
ylabel('V_R amplitude [V]');

amp_2=R_2./sqrt((w*L-1./(w*C)).^2+R_2^2); %amp of Vr/Vin
loglog(f,amp_2);
xlabel('Frequancy [Hz]');
ylabel('V_R amplitude [V]');

%% EX4.3_c
% parameters
R = 500; %[ohm]
C = 0.5*10^-6; %[F]
f = 60:0.01:6000; %[Hz]
% Defining the LPF and HPF Gains
LPF_G = 1./(sqrt(1+R^2*(2*pi*f).^2*C^2));
HPF_G = R*2*pi*f*C./(sqrt(1+R^2*(2*pi*f).^2*C^2));
% Plotting the Gains vs the frequency in logarithmic scale of both
circuits
% LPF:
figure;
loglog(f,LPF_G);
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('|V_c/V_in|')
title('LPF RC circuit gain frequency dependance')
% adding the "Knee frequency" using the data from 3.b
hold on
loglog(1/(2*pi*R*C),1./(sqrt(1+R^2*(2*pi*1/(2*pi*R*C)).^2*C^2)),'*r')
;

% HPF:
figure;
loglog(f,HPF_G);
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('|V_R/V_in|')
title('HPF RC circuit gain frequency dependance')
% adding the "Knee frequency" using the data from 3.b
hold on
loglog(1/(2*pi*R*C),1./(sqrt(1+R^2*(2*pi*1/(2*pi*R*C)).^2*C^2)),'*r')
;
```