מעבדה במכשור

הנדסה ביורפואית

מתיחה

מגישים:

נדב אמיתי

יובל כסיף

סול אמארה

תאריך:

30.03.2022

תוכן עניינים:

1 רקע תאורטי:

רקמת חיבור היא רקמה המחברת בין מבנים שונים בגוף. תפקידיה העיקריים הם תמיכה מבנית, הגנה והפרדה. רקמה זו מורכבת משלושה מרכיבים עיקריים: חלבונים, תאים (תאי שריר) ומטריצה ג'ילטנית. שינוי ביחס בין החומרים מבדיל בין רקמות החיבור ומאפשר התאמה של רקמת החיבור לתפקידיה בהתאם למיקומה- חוזק לעומת גמישות. ישנם שני סוגי חלבונים עיקריים המרכיבים את הרקמה- קולגן ואלסטין.

חלבון הקולגן הוא חלבון בעל חוזק מתיחה רב, ומאמץ כניעה גבוה ולכן תפקידו העיקרי הוא לתת חוזק לרקמת החיבור על מנת שתוכל לשמור על תכונותיה גם תחת מאמצים גבוהים.

חלבון האלסטין הוא בעל חוזק מתיחה נמוך ולכן מקנה לרקמת החיבור את תכונת הגמישות והיכולת לעבור דפורמציות גדולות.

מאמץ: מאופיין על ידי הכוח שמופעל על החומר ליחידת שטח: $(1)\ \sigma = \frac{F}{A}$

מעוות: מאפיין את השינוי שנוצר בחומר כתוצאה מהפעלת כוח : $(2)\ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

מודול יאנג: מתאר את היחס בין המאמץ למעוות. הוא ניתן לחישוב רק בתחום האלסטי של החומר, כלומר בתחום בו אם נפסיק את הכוח המופעל על החומר הוא יחזור למצב ההתחלתי.

במימד אחד הקשר הוא $(3)\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

חוק הוק: מתאר את הכוח הפועל על קפיץ, ותלוי בתכונות החומר של הקפיץ ובהתארכות. קבוע הקפיץ (k) תלוי בתכונות החומר של הקפיץ ומאפיין את מידת התנגדותו לשינוי באורך.

$$(4)\ F = -k \cdot \Delta x$$

משכך הוא רכיב מכני כאשר הכוח המופעל עליו מתואר על ידי הנוסחה $(5)\ F = \eta \cdot \dot{x}$ והקשר בין מאמץ למעוות הינו : $(6)\ \sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$

עבור חומרים שאינם לינאריים, אלסטיים ואיזוטרופים ישנם קבועים נוספים שיש להתחשב בהם. על מנת לאפיין אותם תחת הפעלת מאמץ נשתמש בשני מאפיינים נוספים : מקדם פואסון (v) ומודל הגזירה (G).

על ידי חוק הוק המורחב תוך התחשבות בכיוונים השונים נקבל:

$$(7)\ \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - v \cdot \frac{\sigma_{yy}}{E} - v \cdot \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - v \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} - v \cdot \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

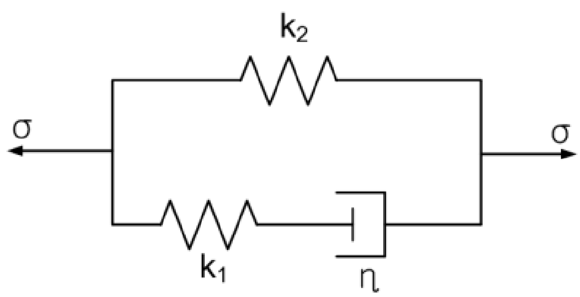
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - v \cdot \frac{\sigma_{yy}}{E} - v \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

מקדם פואסון (v) הוא קבוע לכל חומר ומשתנה בהתאם לתכונותיו. קבוע זה מתאר את היחס בו החומר מתכווץ בציר שניצב לציר המתיחה.

מודל הגזירה הינו $G = \frac{E}{2(1+v)}$ (8)

כמו כן, הנוסחאות שתיארנו מתייחסות למודלים לינאריים אך כאשר ישנן דפורמציות גדולות הקשרים משתנים. במקרים אלה הקשר המתואר בנוסחה 3 איננו לינארי. בנוסף, כתוצאה מכך שהרקמה מורכבת מסוגי חלבונים ותאים שונים, בדפורמציה גדולה ישנה חשיבות של מיקום הפעלת המאמץ על תגובתו של החומר- **אנאיזוטרופיות**.

תכונה נוספת הינה **ויסקואלסטיות**- ויסקואלסטיות הינה שילוב של תכונות הצמיגות והאלסטיות בעת הפעלת מאמץ. צמיגות מאפיינת תכונות של נוזלים ואת התנגדותם לזרימה, אלסטיות מאפיינת את יכולת החומר לחזור למצבו ההתחלתי בעת שחרור המאמץ. בשל כך, חומרים אלה מקיימים שילוב בין תכונות מוצקים ונוזלים ולכן ניתן ליצור מודל של חומר זה כאשר את המוצק נמדל באמצעות קפיץ ואת הנוזל באמצעות משכך. [1] דוגמא למודל זה הינו מודל *SLS*:



איור 1: סכמת מודל *SLS* [2]

על ידי שימוש במשוואות עבור קפיץ ומשכך ניתן לקבל את המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה למודל זה: $\frac{k_2}{\eta} \cdot \varepsilon + \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \cdot \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \cdot \sigma + \frac{1}{k_1} \cdot \dot{\sigma}$ (9).

כמו כן, חומרים ויסקואלסטיים מתאפיינים בתכונות הבאות:

תפוגת מאמצים: ירידה במאמץ כאשר השינוי בחומר קבוע, $\dot{\varepsilon} = 0$

זחילה: עליה במעוות כאשר מפעילים מאמץ קבוע $\dot{\sigma} = 0$

היסטרזיס: איבוד אנרגיה במהלך הפעלת מאמץ קבוע ושחרורו באותו קצב. במקרה זה, את כמות איבוד האנרגיה ניתן לחשב באמצעות חישוב השטח הכלוא בין עקומות מאמץ-מעוות[2].

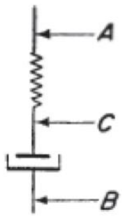
2 תשובות לשאלות הכנה:

שאלה 3.1:

כאשר אנו רוצים למדל תכונות ויסקואלסטיות, נשתמש בקפיץ ומשכך. כאשר הקפיץ בעל קבוע הקפיץ k והמשכך בעל קבוע η.

אלמנט מקסוול:

אלמנט מקסוול למידול חומרים ויסקואלסטיים משתמש בחיבור הקפיץ והמשכך בטור. משום שכך, הכוח שפועל על הקפיץ והמשכך זהה[3].



איור 2- אלמנט מקסוול למידול חומרים ויסקואלסטיים [2]

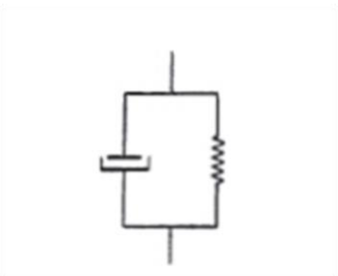
המטרה היא להבין מהו הקשר בין המעוות ε למאמץ σ. נחלק את המעוות לשניים, מעוות הקפיץ ε_{AC} ומעוות המשכך ε_{CB}, כלומר $\varepsilon = \varepsilon_{AC} + \varepsilon_{CB}$. נגזור את המשוואה ונקבל:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon_{AC}} + \dot{\varepsilon_{CB}}$$

נשתמש במשוואה 4,3,5,6 ונקבל:

$$(2.1.1)\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\sigma}$$

שאלה 3.2:



איור 3- מודל וויגט לחומרים ויסקואלסטים [2]

Voigt element- מודל וויגט ממדל את החומר הויסקואלסטי לחיבור מקבילי של משכך וקפיץ כפי שניתן לראות באיור 201. במודל זה הכוח השקול על החומר הוא סכום הכוחות של המשכך והקפיץ, בנוסף המעוות על של הקפיץ והמשכך זהים[2]:

$$(2.2.0)\qquad \varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_d$$

$$(2.2.1)\qquad F = F_s + F_d$$

$$(2.2.2)\qquad F = k\Delta\mathrm{x} + \eta\Delta\dot{x}$$

$$(2.2.3)\qquad \sigma = \sigma_s + \sigma_d$$

ולכן נקבל את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$(2.2.4)\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\eta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}$$

שאלה 3.3:

נפתח את המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את איור 1:

נסמן:

המאמץ\מעוות המופעל על קפיץ 1	$\sigma_{k_1}, \varepsilon_{k_1}$
המאמץ\מעוות המופעל על קפיץ 2	$\sigma_{k_2}, \varepsilon_{k_2}$
המאמץ\מעוות המופעל על המשכך	σ_d, ε_d

ראשית, נשים לב כי קפיץ 1 והמשכך מחוברים בטור, ולכן $\sigma_{k_1} = \sigma_d$, וגם בשל חיבור במקביל $\varepsilon = \varepsilon_{k_2} = \varepsilon_{k_1+d}$.

$$(2.3.0)\ \sigma = \sigma_{k_1} + \sigma_{k_2} = k_1 \cdot \varepsilon_{k_1} + k_2 \cdot \varepsilon_{k_2} \ \rightarrow \ \varepsilon_{k_1} = \frac{\sigma}{k_1} - \frac{k_2}{k_1}\varepsilon$$

$$(2.3.1)\ \varepsilon = \varepsilon_{k_1} + \varepsilon_d$$

נציב את משוואה (2.3.0) במשוואה (2.3.1):

$$(2.3.2)\ \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon_{k_1}} + \dot{\varepsilon_d} = \frac{\dot{\sigma}}{k_1} - \frac{k_2}{k_1}\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma_{k_1}}{\eta}$$

כמו כן, מתוך חיבור במקביל והצבת הנוסחה המתאימה למשכך נקבל:

$$(2.3.3)\ \sigma_{k_1} = \sigma - \sigma_{k_2} = \sigma - k_2 \cdot \varepsilon$$

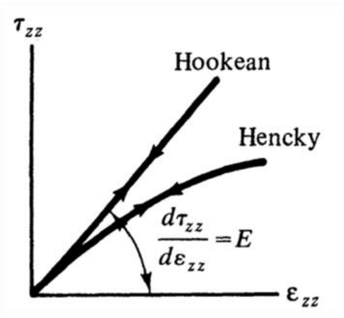
נציב בחזרה ב *(2.3.2)* ונסדר:

$$(2.3.4)\ \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k_1} - \frac{k_2}{k_1}\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma - k_2 \cdot \varepsilon}{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\frac{\dot{\sigma}}{k_1} + \frac{\sigma}{\eta} = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{k_2}{\eta} \cdot \varepsilon}$$

שאלה 3.4:

חומר אלסטי- חומר אלסטי הינו חומר המקיים קשר ליניארי בין המעוות למאמץ. דוגמא לגרף מאמץ מעוות של חומר אלסטי ניתן לראות באיור 202.[4]

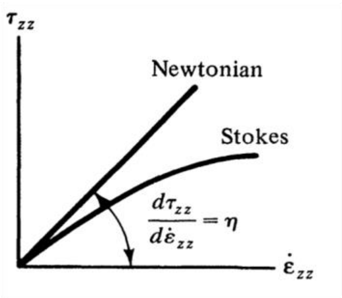
$$(2.4.1) \qquad \sigma = k\varepsilon$$



איור 4 – גרף מאמץ מעוות של חומר אלסטי כאשר k=E ו-σ=τ [2]

חמור ויסקוזי- חומר ויסקוזי הינו חומר המקיים קשר לינארי בין המאמץ לנגזרת המעוות לפי הזמן. דוגמא לגרף מאמץ לנגזרת המעוות לפי הזמן ניתן לראות באיור 203.[4]

$$(2.4.2) \qquad \sigma = \eta\dot{\varepsilon}$$



איור 5 – גרף מאמץ ונגזרת מעוות של חומר ויסקוזי כאשר σ=τ [2]

מקשר זה ניתן להגיע לקשר הבא:

$$(2.4.3) \quad \varepsilon = \int_0^t \frac{\sigma}{\eta} dt'$$

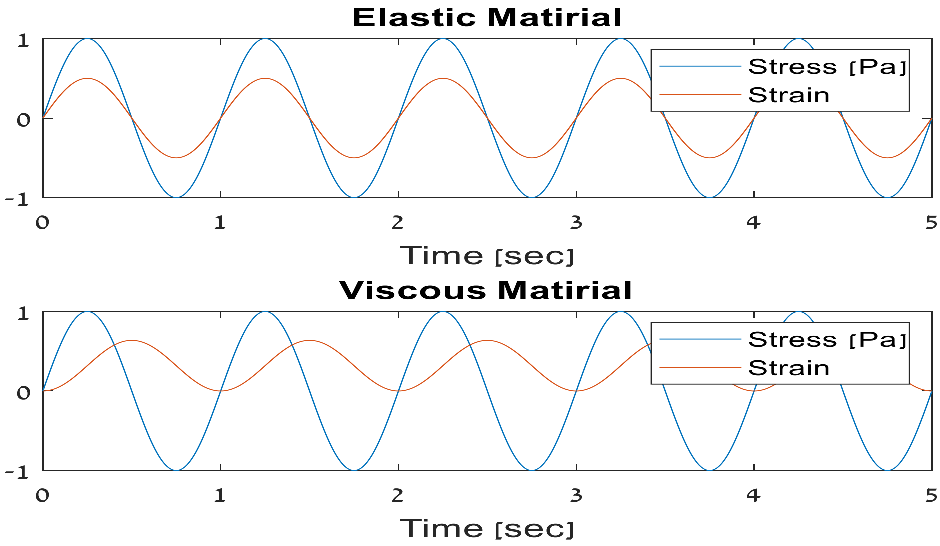
כעת לאחר שהגדרנו איך מתנהג כל חומר נסתכל על המעוות של כל חומר עבור מאמץ המוגדר בצורה סינוסית: $\sigma = \mathrm{A}\sin(\omega t)$, כעת נקבל את המעוותים הבאים:

$$\varepsilon_{\text{elastic}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{k}}\sin(\omega t)$$

$$\varepsilon_{viscous} = \frac{\mathrm{A}}{\eta\omega}(1 - \cos(\omega t))$$

כעת בשביל להבדיל בין החומרים (האלסטי והויסקוזי) נצטרך לשים לב להפרשי הפאזה בפרופיל המעוות, כלומר האחד מתנהג כסינוס והשני מתנהג כקוסינוס מוגבה.

נגדיר $\omega = 2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}},\ \mathrm{A} = 1,\ \mathrm{k} = 2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}},\ \eta = 0.5\ \frac{\mathrm{N \cdot sec}}{\mathrm{m}}$



איור 6 - פרופיל המעוות והמאמץ עבור כל אחד מהחומרים, כאשר בגרף העליון ניתן לראות את החומר האלסטי ובגרף התחתון את החומר הויסקוזי

ניתן לראות כי בגרף העליון המתאר את ההתנהגות האלסטית, פרופיל המעוות ופרופיל המאמץ מתנהג כסינוס לעומת הגרף התחתון בו ההתנהגות היא התנהגות ויסקוזית בה ניתן לראות כי פרופיל המאמץ מתנהג כמובן כסינוס, אך במקרה זה פרופיל המעוות מתנהג כקוסינוס מוגבה.

שאלה 3.5:

נפתח את הפתרון של משוואה 9 עבור תופעת הזחילה. ראשית, המאמץ קבוע (גם בזמן) ולכן $\dot{\sigma} = 0$.

לכן נקבל את המשוואה הבאה:

$$(2.5.0)\ \frac{k_2}{\eta}\cdot\varepsilon+\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)\cdot\dot{\varepsilon}=\frac{1}{\eta}\cdot\sigma$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה במשתנה אחד (ε), נסדר ונפתור אותה:

$$(2.5.1)\dot{\varepsilon}+\frac{k_1\cdot k_2}{\eta\cdot(k_1+k_2)}\cdot\varepsilon=\frac{k_1\cdot\sigma}{\eta\cdot(k_1+k_2)}$$

לכן הפתרון הינו:

$$(2.5.2)\ \varepsilon(t)=\varepsilon(0)\cdot\exp\left(-\frac{k_1\cdot k_2}{\eta\cdot(k_1+k_2)}\cdot t\right)+\exp\left(-\frac{k_1\cdot k_2}{\eta\cdot(k_1+k_2)}\cdot t\right)$$
$$\cdot\frac{k_1\cdot\sigma}{\eta\cdot(k_1+k_2)}\int_0^t\exp\left(\frac{k_1\cdot k_2}{\eta\cdot(k_1+k_2)}\cdot t'\right)dt'$$

נציב תנאי התחלה, במצב ההתחלתי המשכך לא משפיע על המערכת ולכן יש שני קפיצים מחוברים במקביל כלומר $\varepsilon(0) = \frac{\sigma}{k_1+k_2}$:

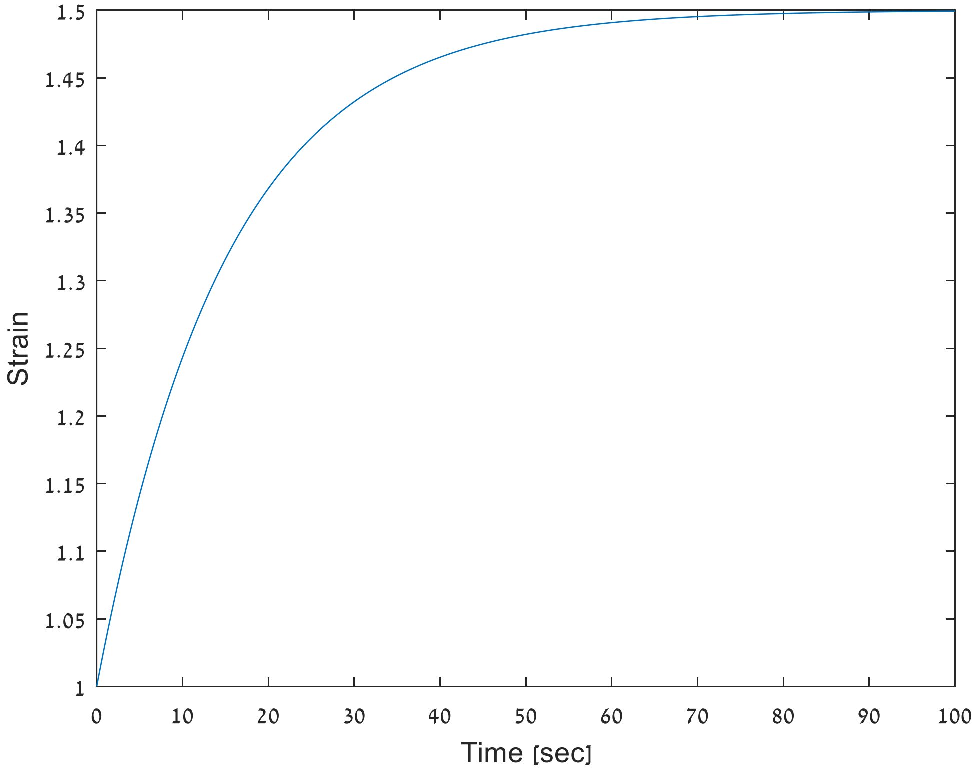
$$(2.5.3)\ \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{k_1 + k_2} \exp\left(-\frac{k_1 \cdot k_2}{\eta \cdot (k_1 + k_2)} \cdot t\right) + \frac{\sigma}{k_2} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{k_1 k_2}{\eta(k_1 + k_2)} \cdot t\right)\right)$$

נסדר בכדי להשוות לתוצאת הפרוטוקול ונקבל:

$$(2.5.4)\ \boldsymbol{\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{k_2} \cdot \left(1 - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \exp\left(-\frac{k_1 k_2}{\eta(k_1 + k_2)} \cdot t\right)\right)}$$

ניתן לראות כי התשובה הינה זהה לפתרון אשר מופיע בנספח הפרוטוקול.

כעת נציג גרף של מעוות כנגד זמן כאשר הצבנו את פרמטרי השאלה:



איור 7 - גרף המתאר מעוות כנגד זמן עבור זחילה

שאלה 3.6:

נפתח את הפתרון של משוואה 9 עבור תפוגת מאמצים. ראשית, המעוות קבוע (גם בזמן) ולכן $\dot{\varepsilon} = 0$.

לכן נקבל את המשוואה הבאה:

$$\frac{\dot{\sigma}}{k_1}+\frac{\sigma}{\eta}=\frac{k_2}{\eta}\cdot\varepsilon$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה במשתנה אחד (σ), נסדר ונפתור אותה:

$$\dot{\sigma}+\frac{k_1}{\eta}\cdot\sigma=\frac{k_1\cdot k_2\cdot\varepsilon}{\eta}$$

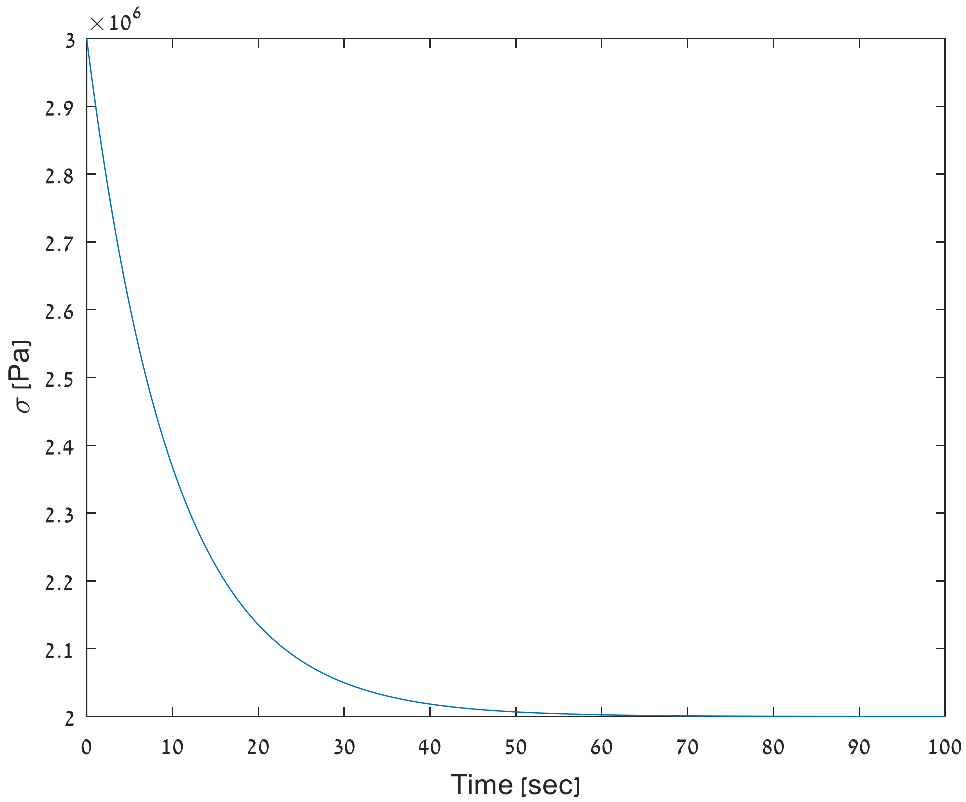
$$\sigma(t)=\sigma(0)\ \cdot\exp\left(-\frac{k_1}{\eta}\cdot t\right)+\exp\left(-\frac{k_1}{\eta}\cdot t\right)\cdot\frac{k_1\cdot k_2\cdot\varepsilon}{\eta}\int_0^t\exp\left(\frac{k_1}{\eta}\cdot t'\right)dt'$$

נציב תנאי התחלה, במצב ההתחלתי המשכך לא משפיע על המערכת ולכן יש שני קפיצים מחוברים במקביל כלומר $\sigma(0)=\varepsilon(k_1+k_2)$:

$$\sigma(t)=\varepsilon(k_1+k_2)\ \cdot\exp\left(-\frac{k_1}{\eta}\cdot t\right)+k_2\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{k_1}{\eta}\cdot t\right)\cdot\left(\exp\left(\frac{k_1}{\eta}\cdot t\right)-1\right)$$

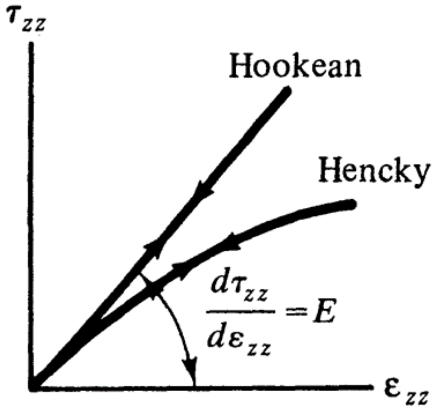
$$\boldsymbol{\sigma(t)=\varepsilon\cdot\left(k_2+k_1\exp\left(-\frac{k_1}{\eta}\cdot t\right)\right)}$$

ניתן לראות כי פתרון זה תואם לפתרון שבמסמך. כעת נציג גרף של מעוות כנגד זמן כאשר הצבנו את פרמטרי השאלה:

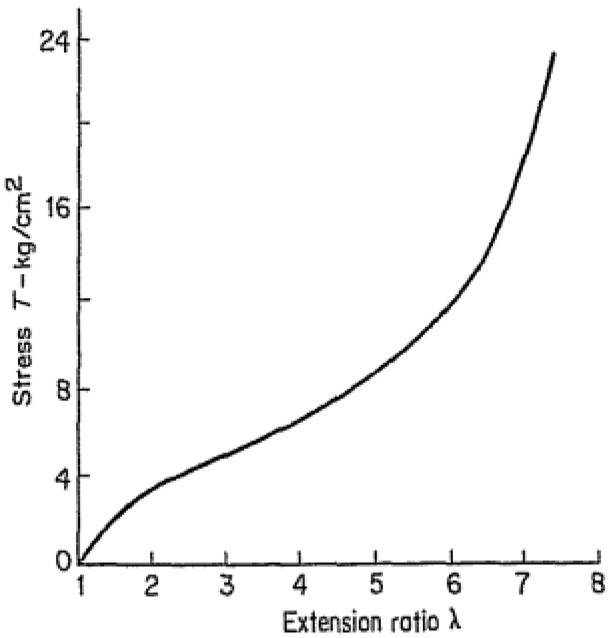


איור 8: גרף של מאמץ כפונקציה של זמן עבור תפוגת מאמצים

שאלה 3.7



איור 9: עקומת מאמץ מעוות של חומר לינארי [3]



איור 10: עקומת מאמץ מעוות של חומר ויסקואלסטי לא לינארי [4]

ניתן לראות כמצופה כי עבור חומר אלסטי קיבלנו עקומה לינארית (Hookean), כלומר יש קשר קבוע בין המאמת למעוות כפי שמתואר בנוסחה 3. כמו כן, ניתן לראות עבור חומר ויסקואלסטי שאיננו לינארי שהעקומה עולה כלומר ככל שמפעילים מאמת גדול יותר המעוות גדל.

נסתכל על המשוואה הדפירנציאלית עבור מודל SLS : $\frac{k_2}{\eta} \cdot \varepsilon + \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \cdot \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \cdot \sigma + \frac{1}{k_1} \cdot \dot{\sigma}$

$$k_2 \cdot \varepsilon + \eta \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \cdot \dot{\varepsilon} = \sigma + \frac{\eta}{k_1} \cdot \dot{\sigma}$$

עבור $\eta = 0$ כלומר כאשר אין משכך, נקבל באמצעות מודל הSLS: $\sigma = \varepsilon \cdot k_2$. נוסחה זו מאפיינת מודל עבור חומר אלסטי כיוון שיש קשר לינארי בין המאמץ למעוות. [5]

שאלה 3.8

מאפיינים של חומר בלתי דחיס:

חומר בלתי דחיס הינו חומר המסוגל לעבור תהליכים תרמודינמיים איזוכריים בלבד. כלומר נפחו יישאר קבוע לאורך כל התהליך ללא תלות בכוח שנפעיל עליו [5]. נוסף על כך, חומרים בלתי דחיסים מאופיינים בצפיפות קבועה, שכן במידה וצפיפות החומר הייתה משתנה, כך גם נפחו של החומר היה משתנה גם כן, וזו סתירה להגדרה.

שאלה 3.9

$$a_0 = 2\ mm, b_0 = 6\ mm, L_0 = 100\ mm\ , L_f = 285\ mm, F = 11.5\ N$$

מתוך הנתונים ניתן לחשב את נפח הדגימה:

$$V = a_0 \cdot b_0 \cdot L_0 = 1200\ mm^3$$

כיוון שזה חומר בלתי דחיס, הנפח נשאר קבוע ומתוך האורך הסופי ניתן לחשב את השטח: נשתמש בנוסחאות 1,2 לפתרון השאלה:

$$A = \frac{V}{L_f} = \frac{1200}{285} = 4.21\ mm^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{11.5\ [N]}{4.21 \cdot 10^{-6} [m^2]} = \mathbf{2.73 \cdot 10^6\ [Pa]}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{285 - 100}{100} = \mathbf{1.85}$$

3 ביבליוגרפיה:

[1] K. Volokh, *Mechanics of soft materials*. Singapore: Springer Science + Business Media, 2016.

[2] “Lab Protocol.pdf.”

[3] D. R. Bland, *The theory of linear viscoelasticity*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc, 2016.

[4] I. H. Shames and F. A. Cozzarelli, “Elastic and Inelastic Stress Analysis,” p. 721.

[5] Y. Fung, *A First Course in Continuum Mechanics: For Physical and Biological Engineers and Scientists*. Prentice Hall, 1994.

4 נספח:

```
%%Q3.4
set(0,'defaultAxesFontSize',14);
t = 0:0.01:5;
w = 2*pi;
eta = 0.5;
k = 2;
sigma = sin(w*t);
e_elastic = sin(w*t)/k;
e_viscous = (1-cos(w*t))/(eta*w);
e = [e_elastic ; e_viscous];
matirial = ['Elastic Matirial' ; 'Viscous Matirial'];

for index = 1:2
subplot(2,1,index)
plot(t,sigma,t,e(index,:));
legend( 'Stress [Pa]' , 'Strain');
title( matirial(index, : ));
xlabel('Time [sec]')
end


%%Q3.5


k1=1e6;k2=2e6; eta=10e6;


sigma=3e6;


t=0:0.01:100;


e=sigma/k2*(1-k1/(k1+k2)*exp(-k1*k2/(eta*(k1+k2)).*t));


plot(t,e);


xlabel 'Time [sec]';
ylabel 'Strain';

%%Q3.6
k1=1E6; %[Pa]
k2=2E6;  %[Pa]
eta=1E7; %[Pa*sec]
e=1;
tao=eta/k1;
t=[0:0.1:100];
sigma=e*(k2+k1*exp(-t/tao));

figure
plot(t,sigma);
xlabel('Time [sec]');
ylabel('\sigma [Pa]');
```