מעבדה בחשמל

הנדסה ביורפואית

מגישים:

דן טורצקי

סול אמארה

תאריך:
26.11.2021

תוכן עניינים:

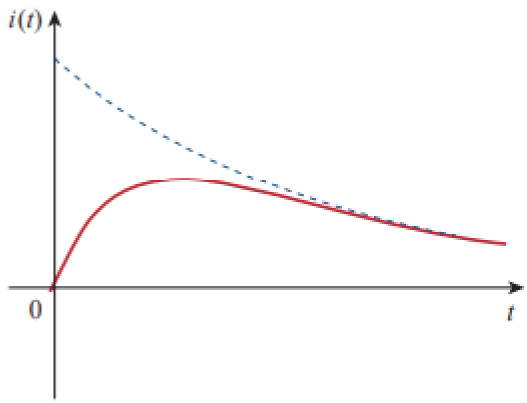
1 רקע תאורטי:

תופעות מעבר מתארות את התגובה של המערכת לשינוי במצב של המערכת. כפי ששמן מעיד הן מתארות שינוי זמני – שינוי זה הוא בין שני מצבים קבועים ($steady\ state$) של המערכת, כלומר תופעת מעבר דועכת עם הזמן עד שהשפעתה על המעגל נעלמת.

מקדם הדעיכה (קבוע הזמן) המסומן τ, הוא הזמן שנדרש לתגובה להגיע ל-$\frac{1}{e}$ מערכה ההתחלתי. [1] ניתן למצוא את קבוע הזמן על פי המשוואה הדיפרנציאלית של המעגל. עבור משוואה מסדר ראשון $\dot{x} + ax = b$ קבוע הזמן הינו $\tau = \frac{1}{a}$ ועבור משוואה מסדר שני $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$ קבוע הזמן הינו $\tau = \frac{1}{a}$.[2] בנוסף, ניתן למצוא את קבוע הזמן לפי סוג הריסון של המעגל.

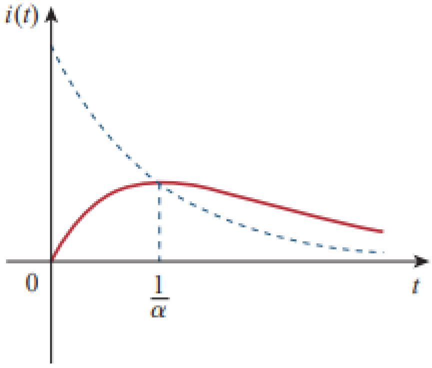
עבור משוואה מסדר שני נסמן: $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$ ובאמצעות מקדמים אלו נגדיר את המשתנים הבאים: גורם שיכוך $\alpha = \frac{a}{2}$, תדר תהודה $\omega_0 = \sqrt{b}$. סוג הריסון של המעגל נקבע על פי שני משתנים אלה.

ריסון חסר הפסדים, הינו מקרה בו $\alpha = 0$. התנודות של הגודל הנמדד לא דועכות ולכן קבוע הזמן אינסופי. [3]
ריסון יתר, $\alpha > \omega_0$. ככל שהזמן עולה הזרם (או המתח) הנמדד מתקרב לאפס. [1] עבור ריסון יתר קבוע הזמן מוגדר להיות הזמן שלוקחת לאמפליטודת המוצא להגיע ל $\frac{1}{\sqrt{2}}$ מהאמפליטודה המקסימלית. [3]



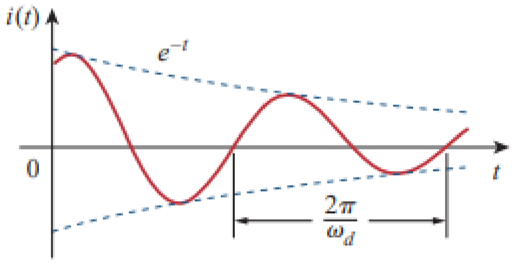
איור (1): דוגמה עבור זרם במעגל עם ריסון יתר [1]

ריסון קריטי, $\alpha = \omega_0$. ישנה נקודת מקסימום אליה הערך הנמדד מגיע ולאחר מכן שואף לאפס ככל שהזמן גדל. [1] עבור ריסון קריטי קבוע הזמן הינו הזמן לוקח לאמפליטודת המוצא להגיע ל-$\frac{1}{2}$ מערכה המקסימלי, כלומר קבוע הזמן הינו $\tau = \frac{1}{\omega_0}$.[3]



איור (2) : דוגמה עבור זרם במעגל עם ריסון קריטי [1]

ריסון חסר, $\alpha < \omega_0$. ישנה תנודתיות רבה יותר עד דעיכה של גובה התנודות לאפס. [1] עבור ריסון חסר קבוע הזמן הינו רוחב הפס כלומר $\tau = \frac{1}{\alpha}$. [3]



איור (3) : דוגמה עבור זרם במעגל עם ריסון חסר [1]

מעגל RC הינו מעגל בו קבל ונגד מחוברים בטור אחד לשני. במקרה זה בגלל החיבור הטורי הזרם שזורם במעגל זהה והמתח של המקור מתחלק בין הקבל לנגד.

האימפדנס השקול של המעגל הינו : $Z = Z_C + Z_R = \frac{1}{j\omega C} + R$

המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את המתח של הקבל הינה :

$$\dot{V}_C = -\frac{V_C}{RC} + \frac{V}{RC}$$
$$V_C(t = 0^-) = V_0$$

כאשר V_0 הינו המתח ההתחלתי שאגר הקבל לפני חיבור המעגל.

ממשוואה זו נובע כי קבוע הזמן במעגל זה הינו $\tau = RC$. [2]

מעגל RL הינו מעגל בו סליל ונגד מחוברים בטור. גם כאן המתח של המקור מתחלק בין הרכיבים והזרם במעגל זהה. האימפדנס השקול של המעגל הינו : $Z = Z_L + Z_R = j\omega L + R$

המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את הזרם במעגל הינה :

$$\dot{I}_L = -\frac{R}{L} I_L + \frac{V}{L}$$
$$I_L(t = 0^-) = I_0$$

כאשר I_0 הינו הזרם ההתחלתי שאגר הסליל לפני חיבור המעגל.

ממשוואה זו נובע כי קבוע הזמן במעגל זה הינו $\tau = \frac{L}{R}$. [2]

מעגל RLC הינו מעגל בו סליל קבל ונגד מחוברים בטור. גם כאן המתח של המקור מתחלק בין הרכיבים והזרם במעגל זהה.

האימפדנס השקול של המעגל הינו : $Z = Z_L + Z_C + \ Z_R = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R$

תדר התהודה במעגל זה הינו $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. [2]

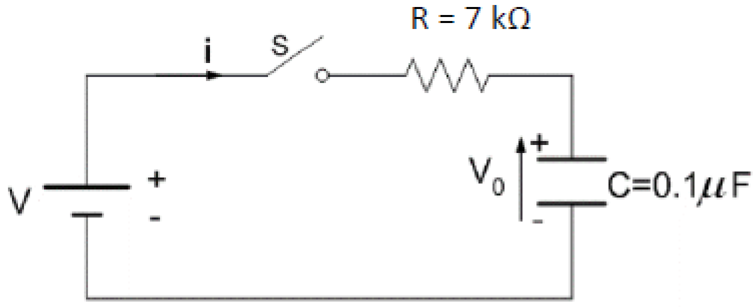
בנוסף, כיוון שבמעגל זה יש שני רכיבים שאוגרים אנרגיה נקבל משוואה הדיפרנציאלית מסדר שני ולכן ידרשו שני תנאי התחלה :

$$\ddot{I} = -\frac{R}{L}\dot{I} - \frac{I}{LC} + \frac{\dot{V}}{L}$$
$$\dot{I}_L(t = 0^-) = I_0$$
$$I_L(t = 0^-) = I_1$$

ממשוואה זו נובע כי קבוע הזמן במעגל זה הינו $\tau = \frac{L}{R}$. [1]

2 תשובות לשאלות הכנה:

2.1 שאלה 4.1:



איור (4): מעגל RC טורי עם מפסק

סעיף א.

ברגע סגירת המפסק:

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$
$$V_C = V - V_R = V - I_C R$$
$$V_C = V - I_C \cdot R = V - RC \cdot \dot{V}_C$$

כלומר נקבל את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\dot{V}_C = -\frac{V_C}{RC} + \frac{V}{RC}$$
$$V_C(t = 0^-) = V_0$$

נפצל לפתרון הומוגני ופתרון פרטי:

$$V_p = V \to \dot{V}_p = 0$$
$$0 = -\frac{V}{RC} + \frac{V}{RC}$$

לכן הפתרון הפרטי מקיים את המשוואה.

נמצא פתרון הומוגני:

$$\dot{V}_C = -\frac{V_C}{RC} \to \frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_C}{RC} \to \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{1}{RC} + a \to \ln(V_C) = -\frac{t}{RC} \to V_h = a \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

כלומר הפתרון הכללי למשוואה:

$$V_c = a \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + V$$

נציב תנאי התחלה:

$$V_0 = a \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot 0} + V \to a = V_0 - V$$

$$V_c(t) = (V_0 - V) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + V$$

הפתרון הינו החל מt_0 לכן יש לבצע הזזה:

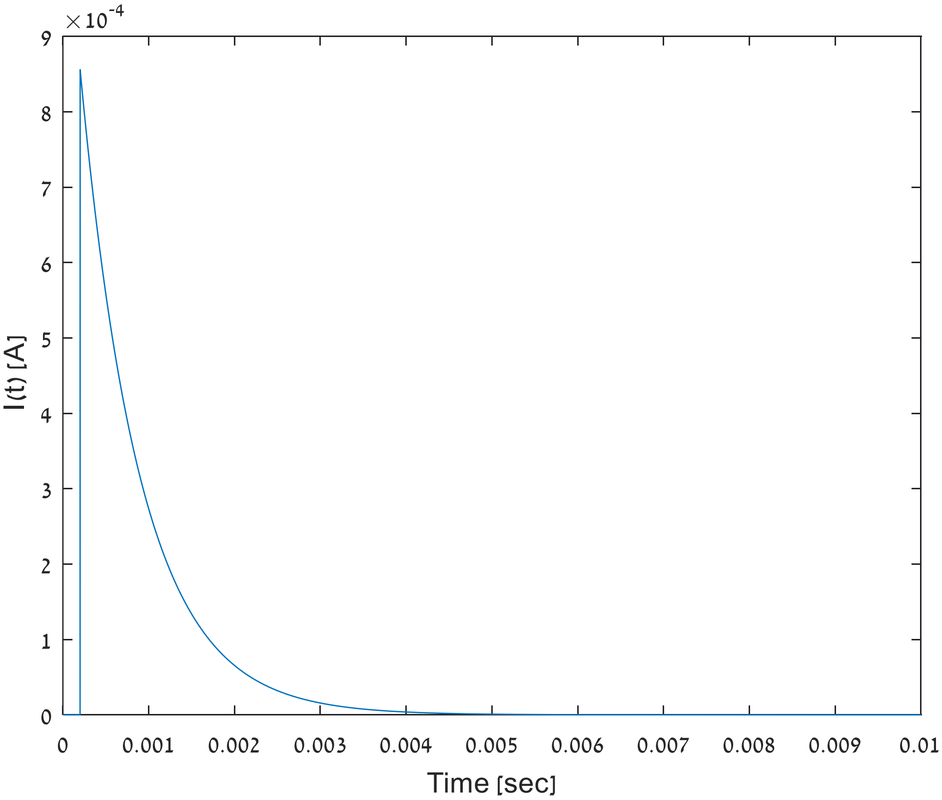
$$\boldsymbol{I(t)} = C \cdot \dot{V}_C = \frac{\boldsymbol{V - V_0}}{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}} \quad t > t_0$$

סעיף ב.

נתון $V_0 = 4V$,$V = 10V$

$$I(t) = \frac{10-4}{7\cdot 10^3}\cdot e^{-\frac{1}{7\cdot 10^3\cdot 0.1\cdot 10^{-6}}(t-t_0)} = \boldsymbol{\frac{6}{7\cdot 10^3}\cdot e^{-\frac{10000}{7}(t-t_0)}} \quad t > t_0$$

סעיף ג.



איור (5) : הזרם במעגל כתלות בזמן

מהגרף ניתן לראות כי ברגע סגירת המפסק ישנו זרם במעגל והוא דועך בצורה אקספוננציאלית בגלל שהקבל אוגר אנרגיה חשמלית ולכן הזרם והמתח במעגל יורדים. כמו כן בגלל שהערכים בחזקה של האקספוננט קטנים מאוד הדעיכה ל [A] 0 מהירה מאוד ומתרחשת תוך t=0.004 [sec].

סעיף ד.

במקרה בו נוסף נגד במקביל לקבל כאשר $R_1 = 5\ k\Omega$ נסמן את הזרם הזורם דרכו בI_1 ודרך הקבל ב I_C. כיוון שהם מחוברים במקביל יש עליהם מתח שווה. מכאן-

$$I = I_C + I_{R_1} = C\dot{V}_C + \frac{V_C}{R_1}$$

$$V_C = V - V_R = V - I\cdot R = V - R\left(C\dot{V}_C + \frac{V_C}{R_1}\right) = V - CR\dot{V}_C - \frac{R}{R_1}V_C$$

$$\dot{V}_C = \left(\frac{-1}{RC} - \frac{1}{R_1C}\right)V_C + \frac{V}{RC} = \frac{-R_1 - R}{RR_1C}V_C + \frac{V}{RC}$$

$$V_C(t = 0^-) = V_0$$

מכאן שקבוע הזמן של המעגל הינו $\boldsymbol{\tau = -\frac{RR_1C}{R+R_1}} = -\frac{7\cdot10^3\cdot5\cdot10^3\cdot0.1\cdot10^{-6}}{(7+5)\cdot10^3} = \boldsymbol{\frac{7}{24000}}$

במצב יציב (כלומר אחרי זמן ממושך בו המתח על הקבל סופי ולא תלוי בזמן) ראינו כי הקבל הופך לנתק, כלומר הזרם דרכו מתאפס. מכאן שהמתח על הקבל הינו המתח על הנגד R_1 כאשר שני הנגדים מחוברים בטור:

$$V_C = V_{R_1} = \mathbf{V}\frac{\mathbf{R_1}}{\mathbf{R_1+R}} = V\frac{5\cdot10^3}{(7+5)\cdot10^3} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{6}}\ [\mathbf{V}]$$

סעיף ה.

עבור המעגל באיור 4:

$$Z = Z_C + Z_R = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega CR+1}{j\omega C}$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_{in}}{Z} = \frac{\tilde{V}_{in}}{\frac{j\omega CR+1}{j\omega C}} = \frac{\tilde{V}_{in}\cdot j\omega C}{j\omega CR+1}$$

נחשב התמסורת על הנגד:

$$\widetilde{V_R} = \tilde{I}\cdot Z_R = \frac{\tilde{V}_{in}\cdot j\omega CR}{j\omega CR+1}$$

$$H_R(\omega) = \frac{\tilde{V}_R}{\tilde{V}_{in}} = \frac{j\omega CR}{j\omega CR+1}$$

$$|\mathbf{H_R}(\boldsymbol{\omega})| = \frac{|j\omega CR|}{|j\omega CR+1|} = \frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{CR}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{C^2R^2}}}$$

נחשב את התמסורת על הקבל:

$$\widetilde{V_C} = \tilde{I}\cdot Z_C = \frac{\tilde{V}_{in}\cdot j\omega C}{j\omega CR+1}\cdot\frac{1}{j\omega C} = \frac{\tilde{V}_{in}}{j\omega CR+1}$$

$$H_C(\omega) = \frac{\tilde{V}_C}{\tilde{V}_{in}} = \frac{1}{j\omega CR+1}$$

$$|\mathbf{H}_C(\boldsymbol{\omega})| = \frac{1}{|j\omega CR+1|} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{C^2R^2}}}$$

כמו כן, בסעיף א' קיבלנו כי:

$$\dot{V_C} = -\frac{V_C}{RC} + \frac{V}{RC}$$

מכאן שקבוע הזמן של המעגל הינו:

$$\tau = RC = 7\cdot10^3\cdot0.1\cdot10^{-6} = \frac{7}{10000}\ \mathrm{sec}$$

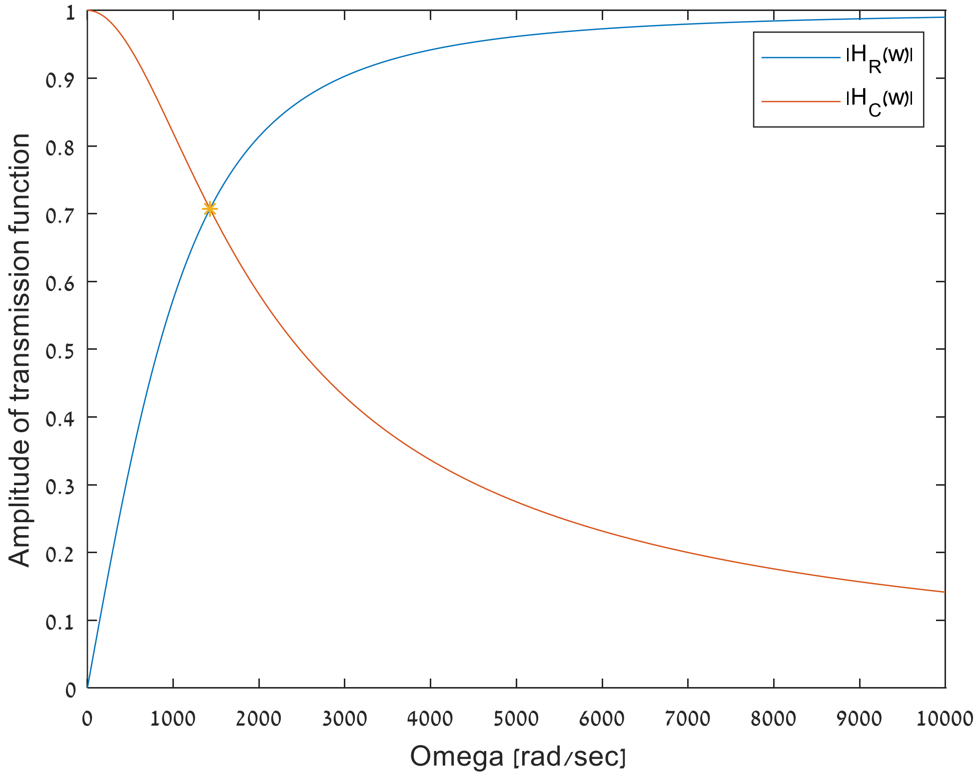
במעבדה 2 שאלה 4.3 סעיף ב, הראנו כי תדר התהודה במעגל *RC* טורי נתון על ידי הביטוי:

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

ולכן עבור מעגל זה ניתן להסיק:

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = 1428.57\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

עבור מעגל זה נקבל את הגרף הבא :



איור (6) : גרף אמפליטודת פונקציות התמסורת של הקבל והנגד כפונקציה של התדירות הזוויתית

מהגרף ניתן לראות כי הקבל הינו מסנן מעביר נמוכים (*LPF*) כיוון שהפונקצית תמסורת שלו קטנה עבור תדרים גבוהים. בנוסף לכך ניתן להסיק כי הנגד הינו מסנן מעביר גבוהים (*HPF*).

נחזור על החישובים עבור המעגל מסעיף ד׳ :

$$Z = Z_C || Z_{R_1} + Z_R = \frac{R_1}{j\omega C R_1 + 1} + R = \frac{R_1 + R + j\omega C R_1 R}{j\omega C R_1 + 1}$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_{in}}{Z} = \frac{\tilde{V}_{in}}{\frac{R_1 + R + j\omega C R_1 R}{j\omega C R_1 + 1}} = \frac{\tilde{V}_{in} \cdot (j\omega C R_1 + 1)}{R_1 + R + j\omega C R_1 R}$$

נחשב התמסורת על הנגד *R* :

$$\widetilde{V_R} = \tilde{I} \cdot Z_R = \frac{\tilde{V}_{in} \cdot (j\omega C R_1 + 1)}{R_1 + R + j\omega C R_1 R} \cdot R$$

$$H_R(\omega) = \frac{\tilde{V}_R}{\tilde{V}_{in}} = \frac{j\omega C R_1 R + R}{R_1 + R + j\omega C R_1 R}$$

$$|\mathbf{H_R}(\boldsymbol{\omega})| = \frac{|j\omega CR_1R + R|}{|R_1 + R + j\omega CR_1R|} = \frac{\mathbf{R}\cdot\sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{C}^2\mathbf{R}_1^2}}{\sqrt{(\mathbf{R} + \mathbf{R_1})^2 + \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{C}^2\mathbf{R}_1^2\mathbf{R}^2}}$$

נחשב התמסורת על הקבל: כיוון שהקבל והנגד R_1 מחוברים במקביל המתח עליהם שווה ולכן התמסורת שלהם שווה.

$$\widetilde{V_c} = \tilde{I}\cdot(Z_c||Z_{R_1}) = \frac{\widetilde{V}_{in}\cdot(j\omega CR_1 + 1)}{R_1 + R + j\omega CR_1R}\cdot\frac{R_1}{j\omega CR_1 + 1} = \frac{\widetilde{V}_{in}\cdot R_1}{R_1 + R + j\omega CR_1R}$$

$$H_C(\omega) = \frac{\widetilde{V}_C}{\widetilde{V}_{in}} = \frac{R_1}{R_1 + R + j\omega CR_1R}$$

$$|\mathbf{H}_C(\boldsymbol{\omega})| = \frac{R_1}{|R_1 + R + j\omega CR_1R|} = \frac{\mathbf{R_1}}{\sqrt{(\mathbf{R} + \mathbf{R_1})^2 + \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{C}^2\mathbf{R}_1^2\mathbf{R}^2}}$$

כמו כן, בסעיף ד' קיבלנו כי:

$$\dot{V_C} = \frac{-R_1 - R}{RR_1C}V_C + \frac{V}{RC}$$

מכאן שקבוע הזמן של המעגל הינו:

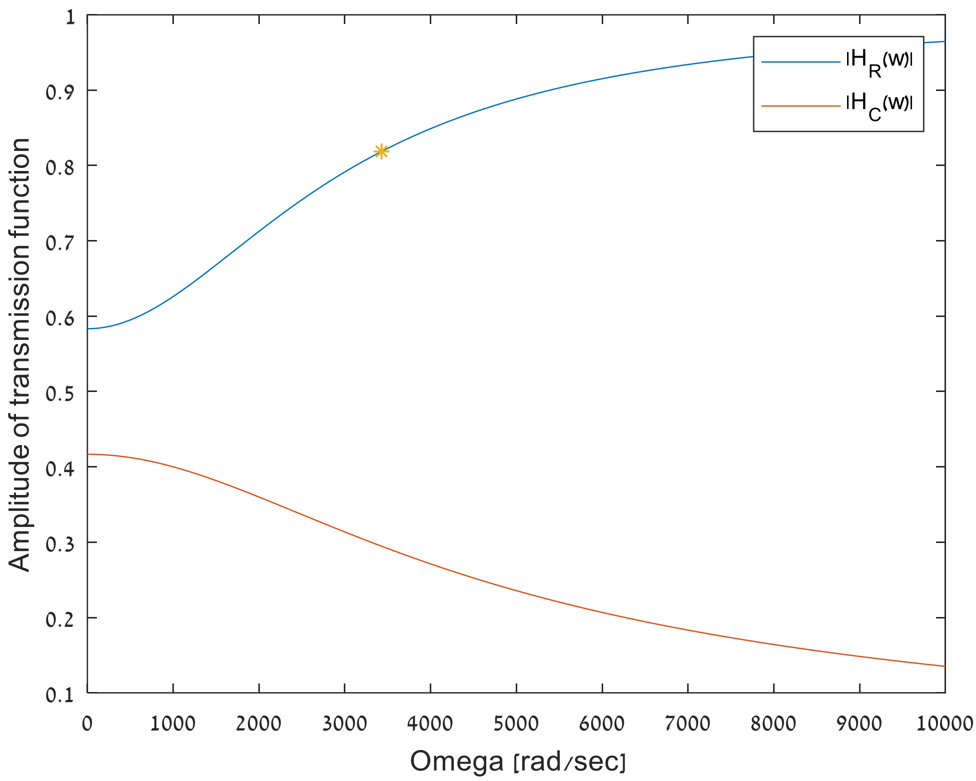
$$\tau = \frac{RR_1C}{R_1 + R} = \frac{7\cdot 10^3\cdot 5\cdot 10^3\cdot 0.1\cdot 10^{-6}}{(7+5)10^3} = \frac{7}{24000}\ \mathrm{sec}$$

נבדוק האם הקשר לתדר התהודה מתקיים:
באמצעות המטלאב נקבל כי מקסימום פונקציית התמסורת עבור מתח הקבל הינו 0.4267 .
נחשב את תדר התהודה באמצעות המטלאב עבור מוצא מתח הקבל ונקבל:

$$w_c = 3430\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$$

$$\frac{1}{\tau} = 3428.57\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$$

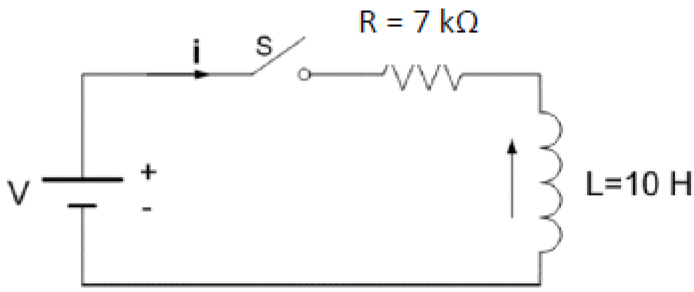
ניתן לראות כי הערכים זהים ולכן גם כאן הקשר מתקיים.



איור (7) : גרף אמפליטודת פונקציות התמסורת של הקבל והנגד כפונקציה של התדירות הזוויתית עבור המעגל מסעיף ד'

מהגרף ניתן לראות כי הקבל הינו מסנן מעביר נמוכים (*LPF*) והנגד הינו מסנן מעביר גבוהים (*HPF*). כלומר הרכיבים לא שינו את אופי התנהגותם כתוצאה מהוספת הנגד הנוסף אלא רק אמפליטודת המתחים שונתה כיוון שכעת האימפדנס השקול של המעגל גדול יותר מהמעגל המקורי.

2.2 שאלה 4.2:



איור (8): מעגל RC טורי עם מפסק

סעיף א.

ברגע סגירת המפסק:

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$
$$V_L = V - V_R = V - I_L R$$
$$V - I_L R = L \cdot \dot{I}_L$$
$$\dot{I}_L = -\frac{R}{L} I_L + \frac{V}{L}$$
$$I_L(t = 0^-) = I_0$$

נפצל לפתרון הומוגני ופתרון פרטי:

$$I_p = \frac{V}{R} \rightarrow \dot{I}_p = 0$$
$$0 = -\frac{R}{L} \cdot \frac{V}{R} + \frac{V}{L}$$

לכן הפתרון הפרטי מקיים את המשוואה.

נמצא פתרון הומוגני:

$$\dot{I}_L = -\frac{R}{L} I_L \rightarrow \frac{dI_L}{dt} = -\frac{R}{L} I_L \rightarrow \frac{dI_L}{I_L} = -\frac{R}{L} + a \rightarrow \ln(I_L) = -\frac{Rt}{L} \rightarrow \; I_h = a \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

כלומר הפתרון הכללי למשוואה:

$$I_L = a \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$$

נציב תנאי התחלה:

$$I_0 = a \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} + \frac{V}{R} \rightarrow a = I_0 - \frac{V}{R}$$

$$I_L = (I_0 - \frac{V}{R}) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$$

הפתרון הינו החל מt_0 לכן יש לבצע הזזה:

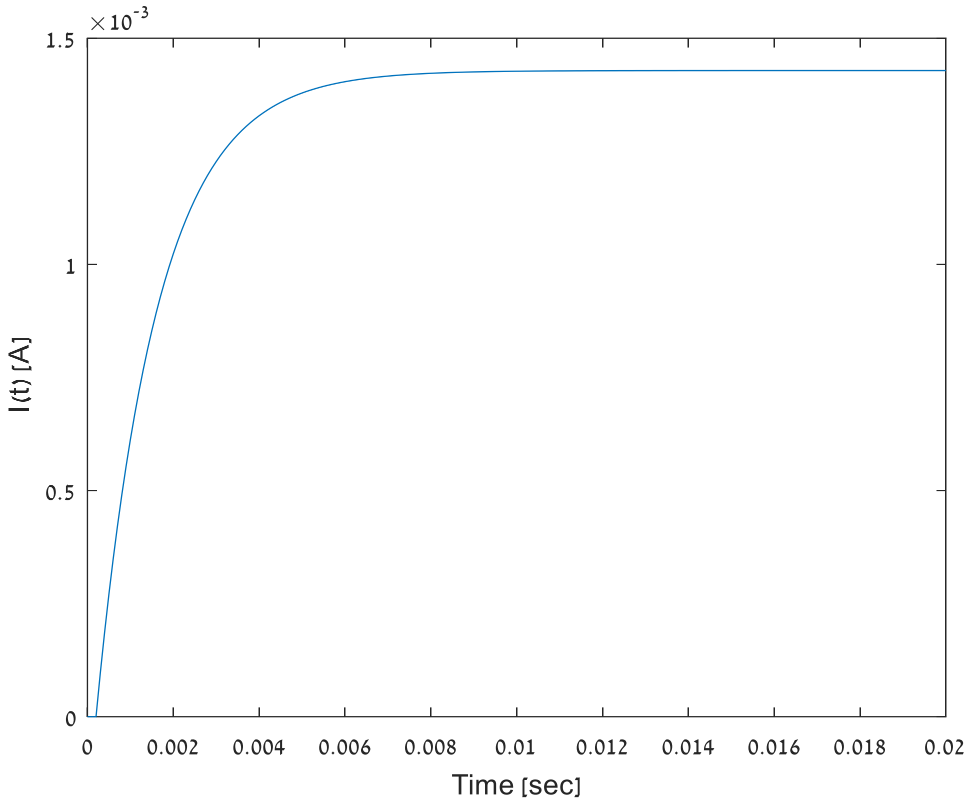
$$\boldsymbol{I_L(t) = (I_0 - \frac{V}{R}) \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} + \frac{V}{R}} \quad t > t_0$$

סעיף ב.

נתון $I_0 = 0A\,, V = 10V$

$$\boldsymbol{I_L(t)} = \left(0 - \frac{10}{7\cdot 10^3}\right)\cdot e^{-\frac{7\cdot 10^3}{10}(t-t_0)} + \frac{10}{7\cdot 10^3} = \boldsymbol{\frac{1}{700}\left(1 - e^{-700(t-t_0)}\right) \quad t > t_0}$$

סעיף ג.



איור (9) : הזרם במעגל כתלות בזמן

מהגרף ניתן לראות כי ברגע סגירת המפסק ישנו זרם במעגל והוא עולה בצורה אקספוננציאלית. כמו כן בגלל שהערכים בחזקה של האקספוננט קטנים מאוד זמן ההתייצבות קצר, תוך $0.06\ [sec]$ ישנה הגעה למצב המתמיד.

סעיף ד.

$$Z = Z_L + Z_R = R + j\omega L$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_{in}}{Z} = \frac{\tilde{V}_{in}}{R + j\omega L}$$

נחשב התמסורת על הנגד :

$$\widetilde{V_R} = \tilde{I}\cdot Z_R = \frac{\tilde{V}_{in}\cdot R}{R + j\omega L}$$

$$H_R(\omega) = \frac{\tilde{V}_R}{\tilde{V}_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L}$$

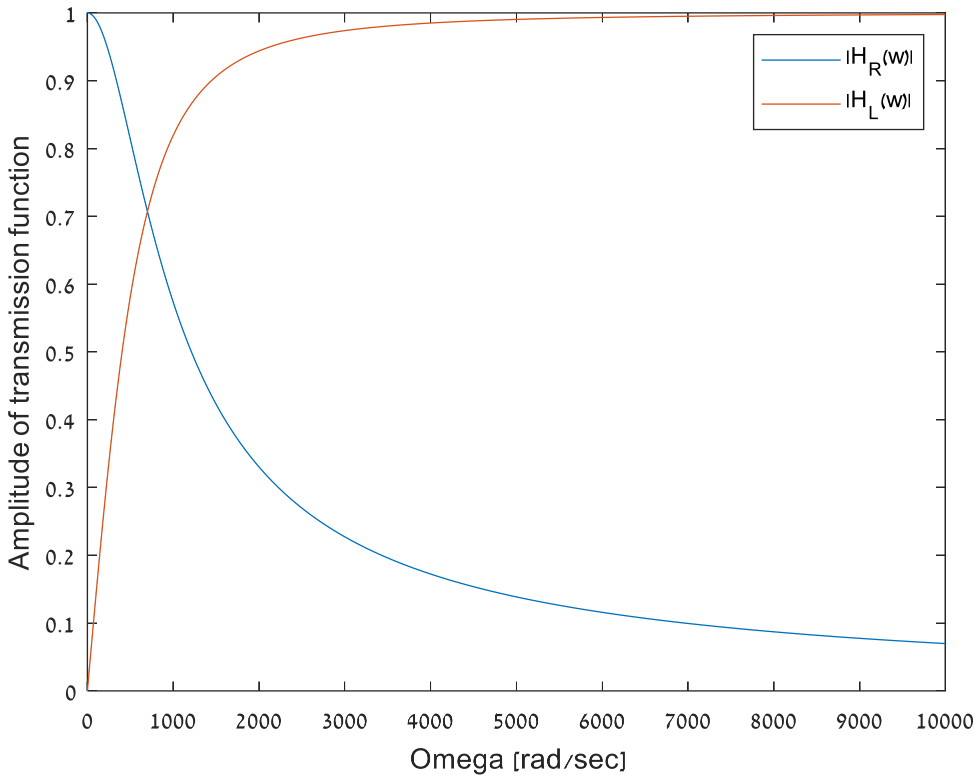
$$|\mathbf{H_R}(\boldsymbol{\omega})| = \frac{|R|}{|R + j\omega L|} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{\mathbf{R^2} + \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{L^2}}}$$

נחשב את התמסורת על הקבל:

$$\widetilde{V_L} = \tilde{I} \cdot Z_L = \frac{\widetilde{V}_{in} \cdot j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$H_L(\omega) = \frac{\widetilde{V}_L}{\widetilde{V}_{in}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$|\mathbf{H}_L(\boldsymbol{\omega})| = \frac{|j\omega L|}{|R + j\omega L|} = \frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{L}}{\sqrt{\mathbf{R}^2 + \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{L}^2}}$$



איור (10) : גרף אמפליטודה פונקציות התמסורת של הסליל והנגד כפונקציה של התדירות הזוויתית

מהגרף ניתן לראות כי הסליל הינו מסנן מעביר גבוהים (*HPF*) כיוון שהפונקצית תמסורת שלו קטנה עבור תדרים גבוהים. בנוסף לכך ניתן להסיק כי הנגד הינו מסנן מעביר גבוהים (*LPF*).
מהשוואה לאיור 9 ניתן לראות כי הסליל והקבל מתנהגים בצורה הפוכה אחד מהשני, דבר התואם את הקשר של התדירות לאימפדנס של כל רכיב:

$$Z_L = j\omega L \qquad \lim_{\omega\to\infty} j\omega L = \infty$$

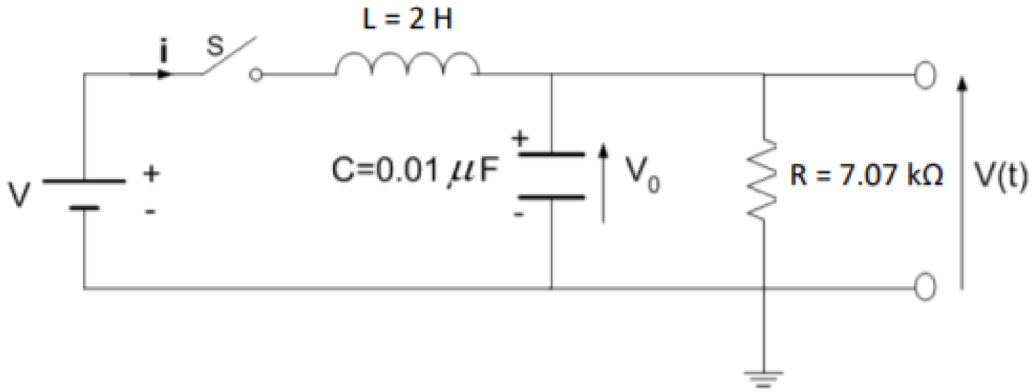
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{j\omega C} = 0$$

בנוסף, באמצעות המטלאב נקבל כי ערך האמפליטודה שווה ל$\frac{1}{\sqrt{2}}$ מערכה המקסימלית כאשר $\omega_c = 700\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$. כלומר זה תדר התהודה של המעגל, באמצעותו נחשב את מקדם הדעיכה:

$\tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{700}\ \mathrm{sec}$ בדומה לתוצאה שהתקבלה על פי החישוב התאורטי מסעיף א':

$$\dot{I_L} = -\frac{R}{L}I_L + \frac{V}{L} \qquad \rightarrow \tau = \frac{L}{R} = \frac{10}{7 \cdot 10^3} = \frac{1}{700}\ sec$$

2.3 שאלה 4.3:



איור (11): מעגל RLC מוזן ממקור מתח ישיר [3]

סעיף א. תחילה נמצא את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$V = V_L + V_c = L\dot{I}_L + V_c$$

$$I_L = I_c + I_R = C\dot{V}_C + \frac{V_c}{R} \rightarrow \dot{I}_L = C\ddot{V}_C + \frac{\dot{V}_C}{R}$$

ממשוואות אלה נקבל:

$$V = L\left(C\ddot{V}_C + \frac{\dot{V}_C}{R}\right) + V_c \rightarrow \ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_c = \frac{1}{LC}V$$

כיוון שמתקיים $V(t) = V_c(t)$ נוכל לומר כי:

$$\ddot{V}_C(t) + \frac{1}{RC}\dot{V}_C(t) + \frac{1}{LC}V_C(t) = \frac{1}{LC}V$$

ובכתיבה כללית עבור מעגל מסדר שני:

$$\ddot{V}_C(t) + 2\alpha\dot{V}_C(t) + \omega_0^2 V_C(t) = \frac{1}{LC}V$$

$$2\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{7.07 \cdot 10^3 \cdot 0.01 \cdot 10^{-6}} = 14144.272$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2 \cdot 0.01 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^7$$

$$\alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{7072.136^2 - 5 \cdot 10^7} = 122.91$$

כאשר ω_0 התדר האופייני, α קבוע הזמן ו - α_d מקדם הריסון. α_d ממשי טהור $(\alpha > \omega_0)$,
כלומר מדובר בריסון יתר.

כעת נמצא את פתרון ה $-ZIR$ ופתרון ה $-ZSR$.

עבור פתרון ה - ZIR:

נמצא את $\dot{V}_C(0)$: מהמשוואה השנייה בסעיף א׳ נוכל לומר כי:

$$I_L(0) = C\dot{V}_C(0) + \frac{V_c(0)}{R} \rightarrow \dot{V}_C(0) = \frac{I_L(0)}{C} - \frac{V_c(0)}{RC} -= \frac{I_0}{C} - \frac{V_0}{RC}$$

$\dot{V}_C(t_0) = \frac{I_0}{C} - \frac{V_0}{RC}$.

$$\begin{cases} \ddot{V}_R(t) + \frac{1}{RC}\dot{V}_R(t) + \frac{1}{LC}V_R(t) = 0 \\ V_C(t_0) = V_0 \\ \dot{V}_C(t_0) = \frac{I_0}{C} - \frac{V_0}{RC} \end{cases}$$

כעת נפתור מד״ר לינארי מסדר שני. פתרון כללי של ZIR עבור מעגל מסדר שני הינו:

$$V_{c_{ZIR}}(t) = \frac{e^{-\alpha(t-t_0)}}{\alpha_d}\left[\left(\dot{V}_C(0) + V_c(0)\alpha\right)\sinh\left(\alpha_d(t-t_0)\right) + V_c(0)\alpha_d \cosh\left(\alpha_d(t-t_0)\right)\right]u(t-t_0)$$

$$V_{c_{ZIR}}(t) = \frac{e^{-\alpha(t-t_0)}}{\alpha_d}\left[\left(\left(\frac{I_0R - V_0}{RC}\right) + V_0\alpha\right)\sinh\left(\alpha_d(t-t_0)\right) + V_0\alpha_d \cosh\left(\alpha_d(t-t_0)\right)\right]u(t-t_0)$$

כעת נמצא את פתרון ה - ZSR: פתרון זה מורכב מפתרון הומוגני + פרטי ואז הצבת תנאי התחלה אפס. הפתרון ההומוגני הינו:

$$V_h(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}\left[A\sinh\left(\alpha_d(t-t_0)\right) + B\cosh\left(\alpha_d(t-t_0)\right)\right]$$

ננחש פתרון פרטי $V_p(t) = V$. נחבר ונציב תנאי התחלה:

$$V_{c_{ZSR}}(t_0) = A\sinh(0) + B\cosh(0) + V = 0 \rightarrow B = -V$$

$$\dot{V}_{c_{ZSR}}(t_0) = -\alpha[A\sinh(0) - V\cosh(0)] + A\alpha_d\cosh(0) + V\alpha_d\sinh(0) = 0 \rightarrow A = -\frac{\alpha V}{\alpha_d}$$

כלומר פתרון ה ZSR הינו :

$$V_{c_{ZSR}}(t)=\left[-e^{-\alpha(t-t_0)}\left[\frac{\alpha V}{\alpha_d}sinh\big(\alpha_d(t-t_0)\big)+Vcosh\big(\alpha_d(t-t_0)\big)\right]+V\right]u(t-t_0)$$

ולבסוף, הפתרון הכללי הינו :

$$V_c(t)=V_{c_{ZIR}}(t)+V_{c_{ZSR}}(t)=$$

$$=\left[\frac{e^{-\alpha(t-t_0)}}{\alpha_d}\left[\left(\left(\frac{I_0R-V_0}{RC}\right)+V_0\alpha\right)\sinh\big(\alpha_d(t-t_0)\big)\right.\right.$$
$$\left.+V_0\alpha_d\,cosh\big(\alpha_d(t-t_0)\big)\right]-e^{-\alpha(t-t_0)}\left[\frac{\alpha V}{\alpha_d}sinh\big(\alpha_d(t-t_0)\big)\right.$$
$$\left.\left.+Vcosh\big(\alpha_d(t-t_0)\big)\right]+V\right]u(t-t_0)$$

נפשט מעט את הביטוי :

$$\boldsymbol{V_c(t)=\left[\left[\frac{e^{-\alpha(t-t_0)}}{\alpha_d}\left[\left(\frac{2I_0R-V_0-V}{2RC}\right)\sinh\big(\alpha_d(t-t_0)\big)\right.\right.\right.}$$
$$\boldsymbol{\left.\left.\left.+(V_0-V)\alpha_d\cosh\big(\alpha_d(t-t_0)\big)\right]\right]+V\right]u(t-t_0)}$$

סעיף ב.

$$\boldsymbol{V_c(t)=\left[\left[\frac{e^{-7072.136(t-t_0)}}{122.91}\left[-14\cdot 7072.136\sinh\big(122.91(t-t_0)\big)-6\right.\right.\right.}$$
$$\boldsymbol{\left.\left.\left.\cdot 122.91\cos\big(122.91(t-t_0)\big)\right]\right]+10\right]u(t-t_0)}$$
$$\boldsymbol{=\left[\left[-e^{-7072.136(t-t_0)}\left[805.53\sinh\big(122.91(t-t_0)\big)\right.\right.\right.}$$
$$\boldsymbol{\left.\left.\left.+6\cos\big(122.91(t-t_0)\big)\right]\right]+10\right]u(t-t_0)}$$

סעיף ג. מקדם הריסון α_d:

$$\alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{L - 4R^2C}{4R^2C^2L}}$$

ריסון קריטי מתקיים כאשר $\alpha_d = 0$ ולכן דרוש:

$$L - 4R^2C = 0 \rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{4C}} = \sqrt{\frac{2}{4 \cdot 0.01 \cdot 10^{-6}}} = \mathbf{7071.06\ \Omega}$$

סעיף ד. תחילה נמצא ביטוי לתגובת התדר:

$$V(\omega) = V_c(\omega) = \frac{V(\omega)}{LC} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{10}{1 + \frac{L}{R} j\omega - \omega^2 LC}$$

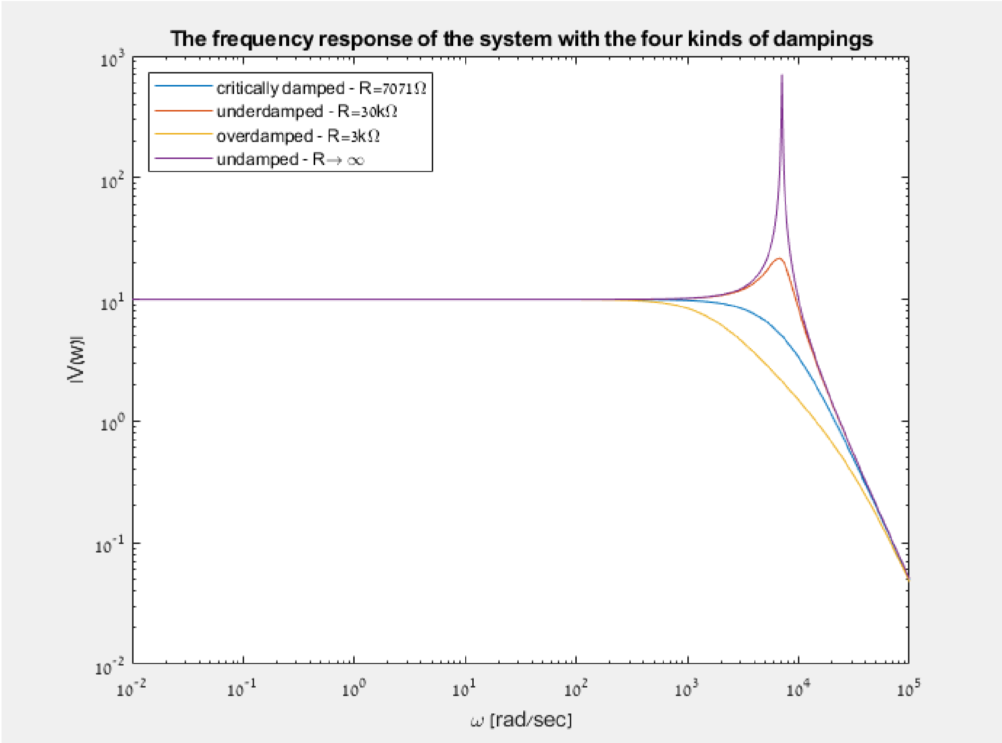
ולכן האמפליטודה:

$$|H(\omega)| = \frac{10}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{L}{R}\right)^2 \omega^2}}$$

עבור ריסון קריטי נבחר ב - $R = 7071.06\Omega$ כפי שמצאנו בסעיף ג'. עבור ריסון חסר נבחר R כך שמקדם הריסון יהיה מדומה טהור, למשל $R = 3k\Omega$. עבור ריסון יתר דרוש מקדם ריסון ממשי לכן נבחר $R = 30k\Omega$. על מנת שלא יהיה ריסון דרוש $\alpha = 0$ כלומר נשאיף את $R \rightarrow \infty$, ונקבל:

$$|H(\omega)| = \frac{10}{1 - \omega^2 LC}$$

במטלאב כמובן לא נוכל להכניס ערך כזה, לכן ניקח R גדול כך שהביטוי יתקרב לאפס.



איור (12) : גרף גודל התמסורת כתלות בתדירות עבור סוגי מקדמי ריסון שונים

קיבלנו כי התנהגות התמסורת עבור כל מקדם ריסון מתנהגת בצורה האופיינית למערכת מסדר שני עם מקדם ריסון מסוג זה – כמובן פרט למצב בו אין ריסון בו בפועל האמפליטודה שואפת לאין סוף בתדר האופייני ואנחנו קיבלנו ערך סופי גדול שמדמה מצב זה.

כעת, באמצעות המידע בנספח לפרוטוקול הניסוי [3] נסביר כיצד ניתן למצוא את קבועי הזמן מהגרף :

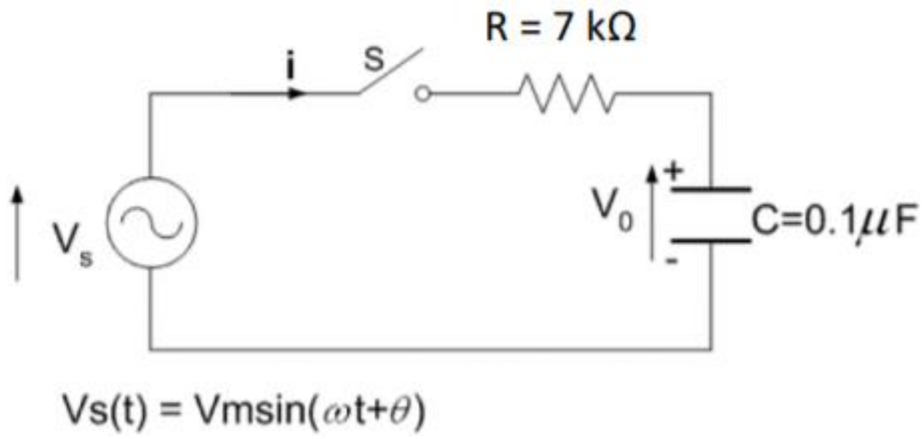
עבור ריסון יתר, קבוע הזמן הינו $\frac{1}{|s1|}$ – כאשר $|s1|$ הוא התדר בו האמפליטודה הינה $\frac{1}{\sqrt{2}}$ מהאמפליטודה המקסימלית ובמקרה שלנו כאשר האמפליטודה הינה $\frac{10}{\sqrt{2}}$.

עבור ריסון קריטי קבוע הזמן הינו $\frac{1}{\omega_0}$ כאשר ω_0 הוא התדר בו האמפליטודה הינה חצי מהאמפליטודה המקסימלית ובמקרה שלנו כאשר האמפליטודה הינה 5.

עבור ריסון חסר עלינו לסמן את נקודת ה - $o.s - overshoot$ כלומר ערך הפיק המתקבל לפני שהאמפליטודה מרוסנת – נסמנו ב – A. רוחב הפס מוגדר להיות טווח התדירויות בו האמפליטודה גדולה מ - $\frac{A}{\sqrt{2}}$ ונסמנו BW. נגדיר $2\alpha = BW$ ומתקבל כי קבוע הזמן עבור ריסון חסר הינו $\frac{1}{\alpha}$.

עבור ריסון חסר הפסדים קבוע הזמן הינו $\frac{1}{\alpha}$ אך במקרה זה $\alpha = 0$ ולכן קבוע הזמן הוא ∞.

2.4 שאלה 4.4:



איור (13) – מעגל RC מוזן ממקור AC [3]

סעיף א. תחילה נמצא את המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את המעגל:

$$V_s = V_R + V_c = I_c R + V_c = RC\dot{V}_c + V_c \rightarrow \dot{V}_c + \frac{1}{RC}V_c = \frac{1}{RC}V_s$$

נפצל את הפתרון ל - ZIR ו - ZSR:

פתרון ה - ZIR:

$$\begin{cases} \dot{V}_c + \frac{1}{RC}V_c = 0 \\ V_c(t_0) = V_0 \end{cases}$$

$$\dot{V}_c = -\frac{1}{RC}V_c \rightarrow V_c(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

נציב את תנאי ההתחלה: $V_c(t_0) = A = V_0$

ולכן:

$$V_{c_{ZIR}}(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} u(t-t_0)$$

עבור פתרון ZSR:

את הפתרון ההומוגני הכללי רשמנו, עלינו למצוא פתרון פרטי. לשם כך נחפש את הפתרון במצב המתמיד:

$$\tilde{V}_c = \tilde{V}_s \cdot \frac{Z_c}{R+Z_c} = V_m e^{j\theta} \frac{\frac{1}{j\omega c}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = V_m e^{j\theta} \frac{1}{1 + Rj\omega C}$$

$$\frac{1}{1+Rj\omega C} = \frac{1 - Rj\omega C}{1 + R^2\omega^2C^2} = \frac{1}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \cdot e^{-j \cdot tan^{-1}(R\omega C)}$$

$$\tilde{V_c} = \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} e^{j(\theta - \tan^{-1}(R\omega C))}$$

$$V_{c_\infty} = \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}(R\omega C)\right)$$

עתה נחבר בין הפתרון הפרטי להומוגני ונציב תנאי התחלה אפס:

$$V_{c_{ZSR}}(t_0) = Ae^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} + \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}(R\omega C)\right) = 0$$

נקבל:

$$A = -\frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin\left(\omega t_0 + \theta - \tan^{-1}(R\omega C)\right)$$

נחבר בין הפתרונות:

$$V_c(t) = V_{c_{ZIR}}(t) + V_{c_{ZSR}}(t)$$
$$= V_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} - \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin\left(\omega t_0 + \theta - \tan^{-1}(R\omega C)\right) e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$
$$+ \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}(R\omega C)\right)$$

$$\boldsymbol{V_c(t) = e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} \left[V_0 - \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin(\omega t_0 + \theta - tan^{-1}(R\omega C))\right] + \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}(R\omega C)\right)}$$

סעיף ב. בשני המקרים קיבלנו כי קבוע הזמן הינו $\tau = RC$. כיוון שבשני המקרים ערכי הקיבול וההתנגדות זהים קבועי הזמן שהתקבלו זהים. ההסבר לכך הוא שמבנה המעגלים זהה וקבוע הזמן תלוי רק במערכת ולא בכניסה.

סעיף ג. את הפתרון שהצגנו למתח הקבל ניתן לפרק לפתרון במצב המתמיד ולפתרון הקשור לתופעת המעבר. חלק הפתרון הקשור בתופעת המעבר הינו:

$$e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} \left[V_0 - \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin(\omega t_0 + \theta - tan^{-1}(R\omega C))\right]$$

על מנת שתופעת המעבר תעלם נשווה את הביטוי לאפס:

$$V_0 - \frac{V_m}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \sin(\omega t_0 + \theta - tan^{-1}(R\omega C)) = 0$$

$$\sin(\omega t_0 + \theta - tan^{-1}(R\omega C)) = \frac{V_0\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}{V_m}$$

$$\omega t_0 + \theta - tan^{-1}(R\omega C) = \arcsin\left(\frac{V_0\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}{V_m}\right)$$

$$\boldsymbol{\theta = \arcsin\left(\frac{V_0\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}{V_m}\right) + tan^{-1}(R\omega C) - \omega t_0}$$

2.5 שאלה 4.5:

הערך של קבוע הזמן שווה לזמן הלוקח למתח הקבל בהינתן מתח אפס על הקבל וכניסת DC להגיע ל - 63.2% מערכו המקסימלי (שהוא ערך מתח ה - DC של הכניסה). לכן עבור כניסת מדרגה ניתן לשים סמן על הנקודה בה האמפליטודה מגיע ל – $0.632[V]$ ומדד הזמן בנקודה זו הוא קבוע הזמן של המעגל.

2.6 שאלה 4.6:

ישנם שני יתרונות עיקריים לשיטה זו על פני שימוש במפסק ומתח ישר. ע"י הכנסת גל ריבועי ניתן להשמיט את המפסק מהמעגל. מפסק, כמו כל רכיב במעגל יכול וכנראה יוסיף במידה מסוימת רעש למעגל. הן אם הרעש נובע מעומס לא רצוי והן אם הרעש נובע מהחיבורים של הרכיב למעגל. היתרון השני הוא שאין צורך לנתק ולחבר את המפסק על מנת לבצע מדידות חוזרות, וככל שנבצע יותר מדידות כך נוכל למצע על כמות תוצאות גדולה יותר ולהגיע לתוצאה יותר מדויקת. על מנת ששימוש בגל ריבועי יהיה אפקטיבי עלינו לאפשר לתופעות המעבר של טעינת ופריקת הקבל לחלוף טרם אנו משנים מצב בין שתי האמפליטודות של גל ריבועי. באופן כללי עבור דעיכה אקספוננציאלית - $e^{-\alpha t}$, כעבור $\frac{5}{\alpha}$ שניות מעל – 95% מערך האספוננט דועך ובמקרה שלנו הדעיכה היא ע"י $e^{-\frac{t}{\tau}}$ כלומר נרצה זמן מחזור של לפחות 5τ. ולכן דרושה תדירות של לפחות:

$$f \le \frac{1}{5\tau}[Hz] = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}} = 2857.14[Hz]$$

על מנת לשמור על טווח בטחון כדי לוודא שתופעות המעבר חלפו ניתן לקחת למשל תדירות של $f = 2k[Hz]$.

3 מקורות

[1] C. K. Alexander, “Fundamentals of electric circuits.” McGraw-Hill, Boston [Mass, 2000.

[2] “ICT November 2005.pdf.” Accessed: Nov. 05, 2021. [Online]. Available: https://webee.technion.ac.il/people/schachter/Teaching/ICT%20November%202005.pdf

[3] “פרוטוקול מעבדת חשמל הנדסה ביורפואית 2.”

```
%% EX3pre4C
%% 4.1_C
t0=0.0002; %sec
V0=4; %volt
t=[0:0.000001:0.01];
u=heaviside(t-t0);
i=(6/(7*10^3))*exp(-10000*(t-t0)/7).*u;
figure
plot(t,i);
xlabel('Time [sec]');
ylabel('I(t) [A]');

% 4.1_E
R=7*10^3; %[ohm]
R1=5*10^3; %[ohm]
C=0.1*10^-6; %[F]
w=[0:10:10000]; %[rad/sec]
H_R=(w*C*R)./sqrt(1+(w.^2*R^2*C^2));
H_C=1./sqrt(1+(w.^2*R^2*C^2));

tao=7/10000;
w_c=1/tao; % Finding the resonant frequency
H_R_c=(w_c*C*R)/sqrt(1+(w_c^2*R^2*C^2));

figure
plot(w,H_R);
hold on
plot(w,H_C);
plot(w_c,H_R_c,'*');
xlabel('Omega [rad/sec]');
ylabel('Amplitude of transmission function');
legend('|H_R(w)|','|H_C(w)|');



H_R_d=R*sqrt(1+(w.^2*R1^2*C^2))./sqrt((R+R1)^2+(w.^2*R^2*C^2*R1^2));
H_C_d=R1./sqrt((R+R1)^2+(w.^2*R^2*C^2*R1^2));
%Finding the resonant frequency:
disp(max(H_C_d));
A=min(abs(H_C_d-((1/sqrt(2))*max(H_C_d))));
B=find(abs(H_C_d-((1/sqrt(2))*max(H_C_d)))==A);
disp(w(B));

tao=7/24000;
w_c=1/tao;
H_R_d_c=R*sqrt(1+(w_c^2*R1^2*C^2))/sqrt((R+R1)^2+(w_c^2*R^2*C^2*R1^2)
);

figure
plot(w,H_R_d);
hold on
plot(w,H_C_d);
plot(w_c,H_R_d_c,'*');
xlabel('Omega [rad/sec]');
ylabel('Amplitude of transmission function');
legend('|H_R(w)|','|H_C(w)|');
```

```
%% 4.2_C
t0=0.0002; %sec
V=10; %[V]
t=[0:0.0001:0.02];
u=heaviside(t-t0);
i=(1/700)*(1-exp(-700*(t-t0))).*u;
figure
plot(t,i);
xlabel('Time [sec]');
ylabel('I(t) [A]');

% 4.2_D
R=7*10^3; %[ohm]
L=10; %[H]
w=[0:10:10000]; %[rad/sec]
H_R=(R)./sqrt(R^2+(w.^2*L^2));
H_L=(w.*L)./sqrt(R^2+(w.^2*L^2));
figure
plot(w,H_R);
hold on
plot(w,H_L);
xlabel('Omega [rad/sec]');
ylabel('Amplitude of transmission function');
legend('|H_R(w)|','|H_L(w)|');
%Finding the resonant frequency:
l=max(abs(H_R))/sqrt(2);
disp(w(find(abs(H_R-a)==min(abs(H_R-l)))));

%4.3.d
%parameters
L = 2; %[H]
C = 0.01*10^(-6); %[F]
w = 0:0.01:100000; %[rad/sec]
% frequency response amplitude
% V_w_amp = 1./(sqrt((1-w^2*L*C).^2+(L/R)^2*w.^2));
%critically damped
R = 7071.06; %[ohm]
V_w_amp = 10./(sqrt((1-w.^2*L*C).^2+(L/R)^2*w.^2));
figure;
loglog(w,V_w_amp)
hold on
%underdamped
R=30000; %[ohm]
V_w_amp = 10./(sqrt((1-w.^2*L*C).^2+(L/R)^2*w.^2));
loglog(w,V_w_amp)
%overdamped
R=3000; %[ohm]
V_w_amp = 10./(sqrt((1-w.^2*L*C).^2+(L/R)^2*w.^2));
loglog(w,V_w_amp);
%undamped
R = 1000000; %[ohm] , approximate R->infinty
V_w_amp = 10./(sqrt((1-w.^2*L*C).^2+(L/R)^2*w.^2));
loglog(w,V_w_amp);
xlabel('\omega [rad/sec]')
ylabel('|V(w)|')
title('The frequency response of the system with the four kinds of
dampings')
legend('critically damped - R=7071\Omega','underdamped -
R=30k\Omega','overdamped - R=3k\Omega','undamped - R\rightarrow
\infty','Location','NorthWest')
```