

מעבדה בעיבוד אותות

פזיולוגיים

הנדסה ביורפואית

מגישים :

סול אמארה
דן טורצקי

תאריך :

07.11.2022

תוכן עניינים :

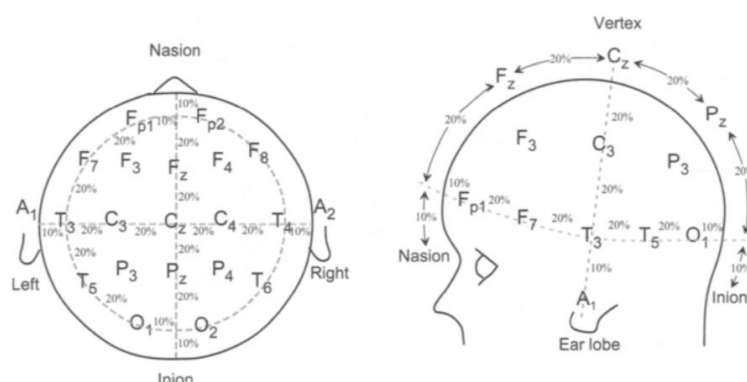
1	תשובות לשאלות הכנה :	3
	שאלה 1:	3
	שאלה 2:	4
	שאלה 3:	9
	שאלה 4:	12
	שאלה 5:	16
2	מקורות	18

1 תשובות לשאלות הכנה:

שאלה 1:

1.1 שיטת 10/20 למדידת EEG מתארת את השיטה הסטנדרטית להצבת אלקטרודות. מערכת זו מכילה 21 אלקטרודות כאשר המספרים 10,20 הם אחוזים המייצגים את המרחקים היחסיים בין מיקומים שונים של אלקטרודות. הנקודות רפרנס הנאטומיות הינן חלקו העליון של האף והגב של הגולגולת. ייצוג האותיות תלוי במיקום האלקטרודה על גבי הגולגולת ולכן: F (frontal), P (parietal), C (central), T (temporal), O (occipital), A (auricle) המספרים הזוגיים נמצאים בצד ימין והאי זוגיים בצד שמאל והאפס הינו קו האמצע.

[1]



איור 1: מיקומי האלקטרודות לפי שיטה זו

איור זה ממחיש את מיקום האלקטרודות כפי שהסברנו.

1.2 אות EEG הינו אות חשמלי שנמדדו באמצעות אלקטרודות על גבי הקרקפת של הנבדק. הפעילות שנמדדת איננה נוירון יחיד אלא מידת הסנכרון בין קבוצה של נוירונים היוצרת שדה חשמלי שנמדד באלקטרודות. התדירות מושפעת גם מהתלמוס שמתנהג כקוצב וגם מהאינטראקציות בין הנוירונים והעברת המידע. האמפליטודה המקסימלית שלו הינה $100 \mu V$ ותדירותו המקסימלית הינה כ-40 [Hz]. הוא מורכב מגלים שונים המאפייני שלבי שינה או ערנות ובעלי מאפיינים ייחודיים כמו תדירות ומשרעת שונה. הגלים השונים ומאפייניהם מוצגים בטבלה הבאה:

טבלה 1: סוגי הגלים באות EEG

מופיע לרוב במהלך שינה עמוקה. בעל אמפליטודה גבוהה.	Δ wave $\delta, < 4$ [Hz]
מופיע במהלך הירדמות ובשלבי שינה שונים.	Θ wave $\theta, 4 - 7$ [Hz]

מופיע במצב ערנות, רגיעה ועיניים עצומות (דועך כאשר עיניים פתוחות). אמפליטודה גבוהה ביותר בהשוואה לשאר הגלים.	<i>Alpha wave</i> $\alpha, 8 - 13 [Hz]$
מהיר ואמפליטודה נמוכה. מופיע במהלך שלבי שינה מסוימים ובעת פעילות הקורטקס.	<i>Beta wave</i> $\beta, 14 - 30 [Hz]$
מופיע בעת עיבוד מידע פעיל בקורטקס.	<i>Gamma wave</i> $\gamma, > 30 [Hz]$

[1]

1.3 פעילות סינכרונית של נוירונים הינו מצב בו יש קורלציה בזמן (כלומר במופעים של פוטנציאל פעולה) של שני נוירונים או יותר. גלי אלפה לדוגמה הם מדידה של סינכרוניות בין נוירונים היורים בטווח תדרים מסוים. פעילות רבה במוח היא דווקא אסינכרונית – פעילות בה אין תאום בין נוירונים. דוגמא לכך היא פעולת אקסיטציה ואינהיביציה על אותה פוסט סינפסה שיכולים להגיע ממקורות שונים עקב נסיבות שונות וגורמים לתגובות הפוכות בפוסט סינפסה.

1.4 גלי אלפה הינם גלים סינכרוניים בתדירות של $8 - 12 Hz$. גלי אלפה מופיעים באמפי הגבוהה ביותר בזמן ערות או ישנוניות עם עיניים עצומות ועוצמתם יורדת עם פתיחת העיניים או שינה. על אף שהם הגלים בעלי האמפי הגבוהה ביותר שניתן להבחין בהם באמצעות EEG הם נחשבים כמייצגים של אינהיביציה של אזורים בקורטקס שאינם נמצאים בשימוש, כלומר לא מייצגים פעילות מוגברת אלא ההיפך.

שאלה 2:

2.1 פונקציית הצפיפות הספקטרלית של אות סטציונרי הינה:

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) e^{-j\omega k}$$

כאשר $r_x(k)$ הינה פונקציית האוטוקורלציה של האות. כלומר, פונקציית הצפיפות של אות סטציונרי מוגדרת ע"י התמרת פורייה של פונקציית האוטוקורלציה של האות. מבחינה מעשית, אין דרך לדעת את פונקציית האוטוקורלציה של האות, אך ניתן לשערך אותה. תחת הנחת ארגודיות, שערך נפוץ של פונקציית האוטוקורלציה נתונה ע"י:

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x(n), \quad k = 0, \dots, N-1$$

אם כך, מתוך הנוסחה הנתונה לעיל ומכך שפונקציית האוטוקורלציה הינה פונקציה זוגית, ניתן לשערך את פונקציית הצפיפות הספקטרלית כך :

$$\hat{S}_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}_x(k) e^{-j\omega k}$$

שערוך זה, הנקרא **peridogram**, הינו שערוך של פונקציית הצפיפות הספקטרלית ע"י שערוך של פונקציית האוטוקורלציה באמצעות דגימות בזמן של האות.

[1]

2.2 פריודוגרמה (*periodogram*) מבוצעת על כל הדגימות של האות. תחת ההנחה שהתהליך הנמדד הינו תהליך סטוכטי גאוסיאני, ניתן להראות כי השונות של שערוך הפריודוגרמה הינה בקרוב:

$$V[\hat{S}_x(e^{j\omega})] \approx S_x^2(e^{j\omega}) \left[1 + \left(\frac{\sin \omega N}{N \sin \omega} \right)^2 \right]$$

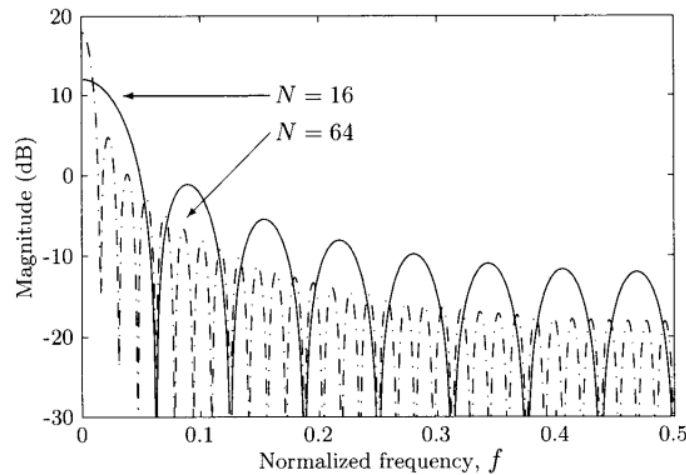
המסקנה שניתן להסיק מתוצאה זו הינה שמשערך זה אינו קונסיסטנטי, כלומר השונות מתקרבת לאפס ככל שכמות הדגימות גדלה. כמו כן, התוחלת של השערוך הינה:

$$E[\hat{S}_x(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} S_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})$$

כאשר $W_B(e^{j\omega})$ נתון ע"י:

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega N}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\omega}{2} \right)}$$

כלומר, המשערך מתקרב לפונקציית הצפיפות הספקטרלית שעוברת קונבולוציה עם הפונקציה $W_B(e^{j\omega})$, הנקראת חלון ברטלט.



איור 2 – התמרת פורייה של חלון ברטלט עם 16 ו- 64 דגימות [1]

מאיור זה ניתן ללמוד מספר דברים. ככל שגודל הדגימה גדל, רוחב האונה הראשית והמגניטודה של האונות הצידיות קטנות. רוחב האונה הראשית גורם לאפקט של מריחה של הספקטרום – כלל שהאונה יותר רחבה כך המריחה גדולה יותר. דבר זה גורם לרזולוציה הספקטרלית לקטון וניתן להבחין פחות ביו רכיבים תדריים שונים. רוחב האונות המשניות גורם לאפקט של דלף – ככל שהמגניטודה של אונות הצד גבוהה יותר, כך יש יותר דלף של אנרגיה מתדר מסוים לתדרים אחרים, דבר הגורם לעיוות של הספקטרום וכן יכול להפריע בזיהוי של רכיבים תדריים שונים. כדי להקטין את השונות, משתמשים בטכניקות של *windowing* (חלוקת האות לחלונות זמן) ומיצוע. שימוש בשתי טכניקות אלה מוביל לשערוך הבא של פונקציית הצפיפות הספקטרלית:

$$\hat{S}_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i(n)w(n)e^{-j\omega n} \right|^2$$

כאשר L הינו אורך כל חלון, K הינו מספר החלונות, $w(n)$ הינה פונקציית החלון באורך L המכפילה כל מקטע ו- U הינו פקטור נרמול התלוי בפונקציית החלון שנבחרה. התוצאה של שימוש במשערוך זה הינה שמצד אחד **משערוך זה קונסיסטנטי**, כלומר השונות קטנה ומתקרב לאפס עם גודל הדגימה, אך מצד שני, כיוון שאנחנו מבצעים מיצוע של K סגמנטים ובכך מקטינים את אורך הדגימה מ- $N = K \cdot L$ (עבור חלונות ללא חפיפה), **הרזולוציה התדרית קטנה**, כלומר ישנו גודל יותר של מריחה וזליגה. אין דרך להימנע מטרייד אוף זה בין הקטנת השונות להגדלת אפקטי המריחה והזליגה כאשר משתמשי בשיטה שמערבת מיצוע. על אף זאת, ניתן להקטין במידה מסוימת את אפקטי המריחה וואו הזליגה ע"י בחירה מושכלת של פונקציית חלון (במקום בפונקציית החלון הרגילה). כדי להקטין את השונות ולהפחית את המידה בה יורדת הרזולוציה בשיטה המוצגת לעיל, ניתן להשתמש בחפיפה של החלונות הזמניים. שיטה זו נקראת

שיטת Welch.

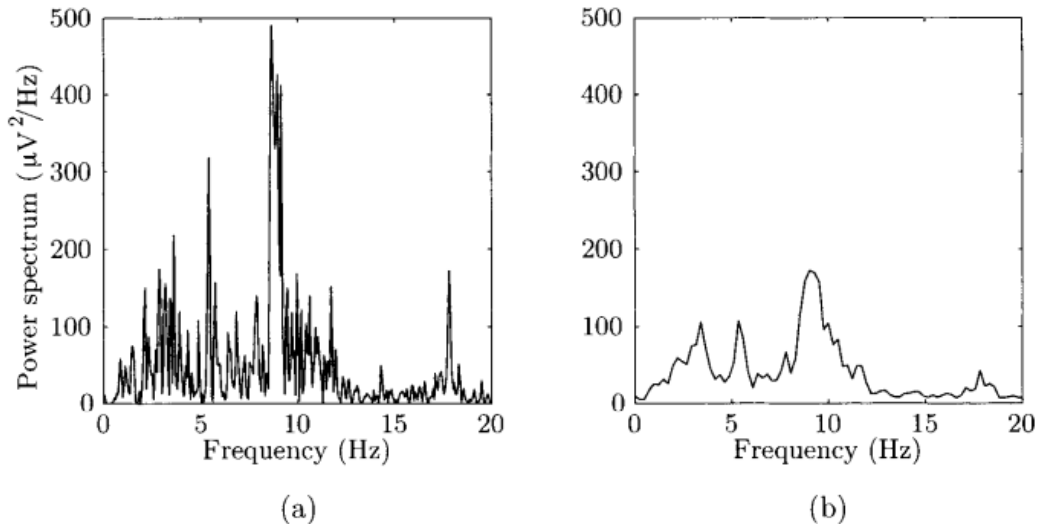


Figure 3.16: Spectral analysis of an EEG with alpha rhythm. (a) The power spectrum obtained without segmentation ($N = 1024$) and (b) with segmentation using $N = 256$ and a segment overlap of 128 samples. The spectral peak related to the alpha rhythm is more easily discerned in (b). The narrow peaks above 10 Hz in (a) more or less disappear when segmentation is introduced. The analyzed EEG signal is the one displayed in Figure 3.2(a).

איור 2 – אנליזה ספקטרלית של אות EEG עם קצב אלפא. משמאל מוצג הספקטרום ללא סגמנטציה ומימין עם סגמנטציה עם חלונות חופפים [1]

כפי שרואים בתמונה, כאשר לא מבצעים סגמנטציה ישנה רזולוציה ספקטרלית גבוהה, אך השונות גבוהה, וכאשר מבצעים סגמנטציה עם חפיפה השונות קטנה מאוד, אך הרזולוציה יורדת ואף מאבדים חלקים מהמידע. כיוון שלא ניתן להימנע מהטרייד אוף בין מאפיינים אלה, ניתוח של שערוכים שונים של אותו אות, המתמקדים כל אחד באיכות של מאפיין מסוים (שונות אל מול רזולוציה) יכול להוביל להבנה מלאה יותר של האות.

[1]

2.3. בהגדרותיה הקלאסיות של התמרת פורייה, תוצאת ההתמרה הינה האופי התדרי של האות לכל אורך ציר הזמן (או כל הדגימות שלו שברשותנו). ישנם מקרים בהם ישנם מקטעי זמן ספציפיים מתוך האות שיש עניין בניתוח האופי התדרי שלהם. לשם ניתוח ספקטרלי של אותות כאלה ניתן להשתמש ב – *short time fourier transform (STFT)*:

$$X(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

כאשר $w(t)$ הינו חלון שיכול להיות ריבועי, אך לעיתים קרובות נבחר לאחת ממספר אופציות מקובלות (כמו למשל חלון המינג). חלון סופי זה קוטס את האות המקורי לגודל המקטע מתוך

האות שאנו מעוניינים לבצע עליו התמרת פורייה. באמצעות סוג החלון, אורך החלון והחפיפות בין החלונות ניתן לשנות מאפיינים של רזולוציה תדרית ורזולוציה זמנית כאשר יש טרייד אופ בין השניים.

[1]

2.4 ההגדרה המתמטית של ספקטוגרמה הינה :

$$S_x(t, \Omega) = |X(t, \Omega)|^2$$

כלומר, ה- $stft$ בערך מוחלט בריבוע. כאשר ניתן להציג את תוצאות החישוב עבור כל חלון אחת לאחר השנייה, למשל כל שורה מייצגת התמרה של חלון מסוים ולאורך הטורים השינוי הוא של החלון עליו מבוצעת ההתמרה (או להפך). תצורה זו מאפשרת ניתוח של האופי התדרי של האות במקטעי זמן שונים, לבחון את השינוי של הספקטרום עם הזמן ומקטעי זמן בעלי עניין מסוים.

[1]

2.5 שיערוך $LPC - linear predictive coding$ הינו מודל בו משערכים דגימה מסוימת באמצעות קומבינציה לינארית של דגימות קודמות. המודל המתמטי הינו שהדגימות הינן תוצר של מעבר רעש לבן חסר תוחלת עם איזשהו הגבר בתוך מערכת כלשהי $H(z)$, כאשר השערוך שנבצע יהיה כזה שייתן את המערכת $H(z)$ שהניבה את האות. מבחינה פרקטית השערוך שנבצע הוא כזה :

$$\hat{s}(n) = - \sum_{i=1}^p a_i s[n-i]$$

כאשר p הינו סדר השערוך, מס' הדגימות הקודמות שנשתמש בהן לשערוך הדגימה הבאה, וגם מס' הקטבים של $H(z)$. המערכת $H(z)$ היא מערכת בה ישנם רק קטבים, ו- a_i הינם המקדמים של הפולינום המתאר את הקטבים.

[1]

2.6 כאשר מחשבים ספקטוגרמה ישנו טרייד אופ בין הרזולוציה הזמנית לרזולוציה התדרית. הרזולוציה הזמנית גדלה ככל שהחלון קטן היות ואנו מגדילים את מספר החלונות פר יחידת זמן כך שנתפוס יותר שינויים זמניים. מנגד, הרזולוציה התדרית תקטן - המידע התדרי שניתן להפיק מפעולת ה- $stft$ על מקטע זמני קטן מוגבלת ונוצרים יותר עיוותים (זליגות ומריחות) ככל שהחלון הזמני קטן יותר. מאותם שיקולים, ככל שהחלון גדל הרזולוציה התדרית גדלה והזמנית קטנה. עקרון אי הוודאות מסביר מתמטית מדוע לא ניתן להגיע לרזולוצייה תדרית וזמנית מושלמות בעת ובעונה אחת. ההגדרה המתמטית של עקרון אי הוודאות היא זו :

אם האות הזמני $x(t)$ דועך גבולית לאפס כך ש :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{t} x(t) = 0$$

אזי :

$$\Delta_t \Delta_\Omega \geq \frac{1}{2}$$

כאשר Δ_t הינו מקטע זמן כלשהו של האות ו- Δ_Ω הוא רוחב הפס התדרי המתאים להתמרה של האות במקטע Δ_t . מהגדרה זו ברור כי יש חסם להקטנת הרזולוציה במישור הזמן והתדר יחדיו. כאשר רוחב הפס התדרי גדל הרזולוציה התדרית קטנה והאנרגיה מפוזרת על פני יותר תדרים.

[1]

2.7 ניתן להגדיל את הרזולוציה התדרית ללא הקטנת אורך החלון ע"י חפיפה בין החלונות. בצורה כזו יש לנו יותר מקטעי *stft* למקטע זמני של האות, והרזולוציה התדרית לא נפגעת כי לא הקטנו את החלון. פתרון זה כמובן יקר חישובית היות ונחשב מס' רב של *stft* ארוכים יחסית. דרך טובה להתמודד עם הטרייד אוף בין רזולוציה זמנית לתדרית הוא לייצר מס' ספקטוגרמות של האות כשכל אחת מתמקדת ברזולוציה של אספקט אחר – למשל שתי ספקטוגרמות אחת עם רזולוציה זמנית גבוהה והשנייה עם רזולוציה תדרית גבוהה, ומניתוח של שתיהן לחלץ את המידע הדרוש.

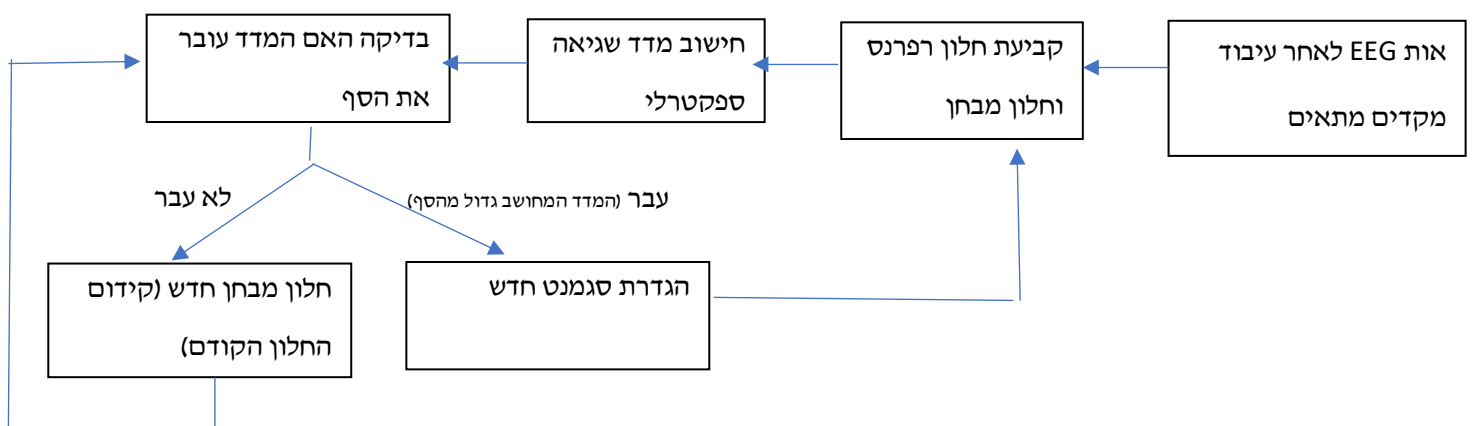
[1]

שאלה 3:

3.1 מטרת הסגמנטציה הינה חלוקת האות למקטעים בעלי תכונות ספקטרליות דומות וכך לזהות מעבר ושינויים באות ה-EEG. ההנחה היא שהאות מורכב מסגמנטים שונים, סטציונרים בקרוב. בשיטה זו משתמשים בחלון רפרנס וחלון מבחן, כאשר באמצעות מדד מסוים נבדוק האם התכונות הספקטרליות של חלון המבחן זהות לאלה של חלון הרפרנס. ברגע שהמאפיינים הללו שונים, נגדיר את חלון המבחן כחלון הרפרנס החדש ונגדיר חלון מבחן חדש (זה שמגיע לאחר הרפרנס החדש), וכך הלאה עד שנחלק את כל האות לחלונות.

Spectral error measure הינו המדד לפיו מתבצעת הבדיקה של חלון המבחן ביחס לרפרנס וקיימים מספר גישות שונות לחישובו. אם המדד גדול מהסף שקבענו, נקבע את חלון המבחן כתחילתו של סגמנט חדש ונחזור על התהליך. אם הוא קטן מהסף, נקדם את חלון הרפרנס בגודל הרצוי או נאריך אותו (אלו דוגמאות לשיטות שונות).

3.2 תרשים הזרימה המתאר את האלגוריתם :



כפי שהסברנו קודם, ראשית מגדירים את הסף לקביעה, גודל הצד והאם נרצה להגדיל את חלון הרפרנס. לאחר מכן, מתחילים עם שני החלונות הראשוניים (שני המקטעים באורך הנבחר), כאשר הראשון רפרנס והשני מבחן. מחשבים את מדד השגיאה. במידה והמדד עבר את הסף, כלומר יש שוני ספקטרי בין החלונות- נגדיר את תחילת חלון המבחן כתחילת הסמגנט החדש. נגדיר חלון מבחן חדש (המקטע הבא לאחר זה שבדקנו) וחלון רפרנס חדש (החלון שהיה המבחן בשלב הקודם) ונחזור על החישובים. במידה והמדד נמוך מהסף, כלומר זהו עדיין אותו הסגמנט. נבחר חלון מבחן חדש ובמידה ובחרנו להגדיל את חלון הרפרנס נעשה זאת (במידה ולא הוא נשאר ללא שינויים). נחזור על החישוב.

3.3 שמירת חלון הרפרנס באורך קבוע:

יתרונות

- שיטה זו פשוטה יותר מהקודמת, כיוון שאין צורך לעשות חישובים חדשים לחלון הרפרנס כאשר הוא לא משתנה.

- רגיש לשינויים חדים בין סגמנטים

חסרונות

- אין עדכון של שערך הספקטרום עבור חלון הרפרנס כיוון שהוא לא משתנה. שערך ממקטע מתוך כל הסגמנט.

- רגיש לרעשים

חלון הרפרנס מתאריך עם התקדמות החלון הנוכחי:

יתרונות

- כתוצאה מההתארכות, החישובים נעשים עבור חלון גדול יותר ולכן יש יותר ערכים מחושבים כלומר יש עדכון של הנתונים עבור החלון הרלוונטי.

- פחות רגיש לרעשים (הסבר כמו נקודה קודמת)

- חלון הרפרנס משתנה תמיד (גם אם החישוב הקודם עבר וגם אם לא עבר את ערך הסף), ולכן יש צורך לחזור על החישובים של שערוך הספקטרום עבורו בכל איטרציה.
- דרוש שינוי חד בין הסגמנטים על מנת לעבור את הרף (כתוצאה מכך שיש פחות רגישות לרעשים).

3.4 מדדי השגיאה הנהוגים בהערכת ביצועי אלגוריתמי סגמנטציה :

$$\Delta_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(S_x(e^{j\omega}, n) - S_x(e^{j\omega}, 0) \right)^2 d\omega$$

$$\Delta_2[n] = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(S_x(e^{j\omega}, n) - S_x(e^{j\omega}, 0) \right)^2 d\omega}{\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}, n) d\omega \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}, 0) d\omega}$$

$$\Delta_3[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{S_x(e^{j\omega}, n)}{E_n} - \frac{S_x(e^{j\omega}, 0)}{E_0} \right)^2 d\omega, E_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (S_x(e^{j\omega}, n))^2 d\omega}$$

כאשר :

$$S_x(e^{j\omega}, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k, n) e^{-j\omega k}$$

המדד הראשון איננו סימטרי מבחינת עליה או ירידה בהספק ואילו המדד השני מתקן זאת. המדד השלישי מתייחס לשוני האנרגיה ולא לערכה.

4.1 *EP – Evoked Potrential* הינו פוטנציאל חשמלי הנוצר במוח כתגובה לגירוי סביבתי מסוים של מערכת החישה. סוג הגירוי יכול לערב כל אחד מהחושים אך שימוש נפוץ הוא גירוי של מערכת השמיעה או מערכת הראייה. התגובה הנמדדת היא לרוב תגובה חולפת ובעלת אמפי נמוכה הנעה בטווח של $0.1 \sim 10 \mu V$. *Background EEG* הינו אות רציף (פוטנציאל הנמדד מפעילות שגרתיות שונות של המוח), בעל מאפיינים סטוכסטיים וכיוון שטווח הפוטנציאלים הנמדדים בו הוא $10 \sim 100 \mu V$, ה- *EP* חבוי בתוכו.

4.2 *VEP – visually evoked potentials* הינם *EPs* ויסואליים. בניסוי גירוי אור מהבהב, לרוב הנבדק יהיה עם עיניים סגורות, וגירוי ממקור אור ממוקד יוקרן על עינו בקצב של בין 5 ל- 7 פעמים בשנייה. לשם המדידה האלקטרוטודות המודדות ימוקמו בסביבת הקורטקס הראייתי והפרנס בקודקוד הראש. שינוי כיוון של לוח שחמט הוא ניסוי בו מוצג על מסך דפוס של לוח שחמט, כאשר האזורים השחורים והלבנים מחליפים את מיקומיהם בקצב קבוע. באופן טיפוסי קצב ההחלפה יהיה פעמיים בשנייה. במהלך הניסוי הנבדק מתפגש להתרכז בנקודה במרכז המסך. קצב ההחלפה, גודל קוביות הלוח, עוצמת האור והקונטרסט בין צבעי המשבצות משפיעים על עוצמת האות הנמדדת ועל הדילאי בין מתן הגירוי לתגובה לגירוי.

4.3

4.3.1 כיוון שה- *EPs* לרוב חבויים בתוך ה- *background EEG*, כדי לנתח את ה- *EP* יש לסנן את ה- *background EEG*. גישה אחת לסינון אות זה הינה *Homogenous Ensemble Averaging*. בגישה זו משתמשים בהקלטה של מס' רב של גירויים שניתנו במרווחי זמן שווים וידועים. המודל המתמטי של גישה זו הינו שניתן לייצג את הפוטנציאל הנמדד מכל גירוי כך:

$$x_i = s + v_i$$

כאשר x_i הינו הפוטנציאל הנמדד על גבי חלון זמן של גירוי *EP* יחיד ודטרמיניסטי s , ו- v_i הינו רעש אדטיבי של *background EEG*. במודל זה ישנן מס' הנחות:

1. התגובה לגירוי *EP* הינה דטרמיניסטית ואינה משתנה לאורך הזמן עבור גירויי ה- *EPs*.
2. הרעש האדטיבי הוא סטציונרי עם תוחלת אפס.
3. יש חוסר קורלציה בין רכיבי הרעש בנקודות זמן שונות (כלומר האוטוקורלציה הינה אפס פרט להפרש זמנים אפס)

כדי לסנן את רעש הרקע מבצעים מיצוע של חלונות זמן במרווחים קבועים כאשר בכל חלון ישנו גירוי EP יחיד:

$$\hat{s}_a(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M s(n) + v_i(n) = s(n) + \frac{1}{M} V(n)$$

כאשר x_i הוא וקטור של מדידות מהאות באורך N אשר ניתן בו גירוי EP בודד ו- M הוא מס' חלונות אלה עליהם אנו מבצעים מיצוע. v_i הינו הרעש האדטיבי וניתן לראות כי הרעש עובר הפחתה בפקטור של $\frac{1}{M}$, לכן ככל שנבצע את המיצוע על גבי יותר חלונות כך ה- SNR יגדל, והמשערך אינו מוטא. כמו כן ניתן להראות כי המשערך קונסיסטנטי (השונוות הולכת לאפס כש- $M \rightarrow \infty$).

4.3.2 ראשית, נתון לנו כי ה- SNR של תגובה בודדת הינו $-3dB$. כעת, כיוון שהנחנו כי הרעש האדטיבי חסר קורלציה נוכל לומר כי ה- SNR של M תגובות נותן:

$$SNR_M = 10 \log_{10} \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{s}}{\frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M E[\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i]} = 10 \log_{10} M \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{s}}{E[\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1]} = 10 \log_{10} M + SNR_1$$

$$= 10 \log_{10} M - 3$$

כעת נבדוק כמה תגובות דרושות כדי להגיע ל- SNR הרצוי:

$$10 \log_{10} M - 3 \geq 6$$

$$\rightarrow M \geq 10^{\frac{9}{10}} = 7.943$$

כלומר, כדי לקבל SNR של מעל $6dB$ דרושות 8 תגובות, וכיוון שהמרווח בין התגובות הוא 0.2 שניות דרושות 1.6 שניות של הקלטה כדי לקבל את ה- SNR הדרוש באמצעות השיטה הנדונה.

מאותם שיקולים בדיוק, עבור SNR הגדול מ- $12dB$:

$$10 \log_{10} M - 3 \geq 12$$

$$\rightarrow M \geq 10^{\frac{15}{10}} = 31.62$$

כלומר דרושות 32 תגובות ולכן דרוש הקלטה באורך 6.4 שניות לפחות.

4.3.3 ניתן להציג את דגימות האות הבדיד $x(n)$ כאות רציף המוכפל ברכבת דלתאות:

$$x(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\delta(n-l)$$

נכניס את ביטוי זה לתוך המיצוע של $x_i(n)$:

$$\begin{aligned}\hat{s}_a(n) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_i(n) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\delta(n-l-iN) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left[\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \delta(n-l-iN) \right]\end{aligned}$$

ניתן להציג את הביטוי המתקבל כקונבולוציה של האות המקורי עם פונקצייה נוספת ולכן היא בפועל פונקציית התגובה להלם של המערכת:

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \delta(n-iN)$$

4.4 מיצוע על M EPs ראשוניים:

$$s(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_i(n)$$

מיצוע על $M+1$ EPs ראשוניים:

$$\begin{aligned}s_{M+1}(n) &= \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M x_i(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^{M-1} x_i(n) + \frac{x}{M+1} \\ &= \frac{M}{M(M+1)} \sum_{i=0}^{M-1} x_i(n) + \frac{x}{M+1} = \frac{M}{(M+1)} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_i(n) \right] + \frac{x}{M+1} \\ &= \frac{M \cdot s(n) + x}{M+1} = s(n) + \frac{x - s(n)}{M+1}\end{aligned}$$

4.5 בסעיף הקודם פיתחנו נוסחה רקורסיבית של ביטוי מיצוע הומוגני של $M+1$ EPs באמצעות

המיצוע על גבי M EPs והחלון החדש עם גירוי ה EP האחרון. נשים לב כי בתצוגה האחרונה

הפרדנו בין ביטוי התלוי אך ורק במיצוע על M EPs לביטוי התלוי בשני הגורמים. בשיטה של

אקספוננציאל אברגיינג, שמים פקטור על הביטוי השני, כך שניתן לשלוט ביחס בין כמה משקל

בשערוך ה EP שייך ל EPs הקודמים וכמה לוקטור המידע החדש, המכיל מידע על ה EP האחרון :

$$s_{M+1}(n) = s(n) + \alpha(x - s(n))$$

בשיטת המיצוע ההומוגני ישנה הנחה כי התגובה לגירוי לא משתנה עם הזמן, כלומר התגובה לגירוי הראשון והתגובה לגירוי ה N – תהיינה זהות. בפועל, אנו יודעים כי הגוף מסתגל לתגובה כך שעם הזמן התגובה לאותו גירוי תרד באמפ' שלה. אם כך, לתת משקל שונה במיצוע לכל גירוי, כך שהמשקל של כל גירוי ירד ביחס לקודמו עושה שכל. בפועל באמצעות הפקטור אלפה יש שליטה בכמה משקל לתת לגירויים חדשים ביחס לגירויים קודמים.

שאלה 5:

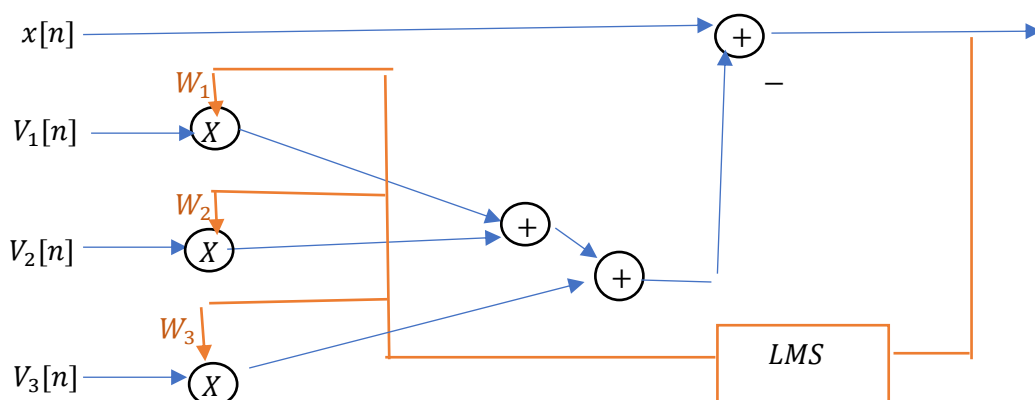
5.1 רעש רשת: רעש הנובע מתדר העברת החשמל ולכן מופיע בישראל בתדירות של $50 [Hz]$.

ECG: אות המושפע מהפעילות החשמלית של הלב, נמצא בטווח תדרים של $0.05 - 100 [Hz]$ ובעל אמפליטודה של $0.01 - 5 [mV]$. רעש זה נובע כתוצאה מכך שהלב ממשיך לפעול בעת ביצוע מדידת ה-EEG ולכן עלול להקלט באלקטרודות.

EOG: תנודות עיניים, נמצא בטווח תדרים של $0.01 - 10 [Hz]$ ובעל אמפליטודה של $0.001 - 0.3 [mV]$. רעש זה נובע מתנועת העיניים של הנבדק ולמרות שיש לו אמפליטודה נמוכה הוא עלול להשפיע על האות הנמדד כתוצאה מהקרבה של המדידה לעיניים.

5.2 שימוש בסינון אדפטיבי (מסתגל) רצוי בעיקר כאשר האות משתנה עם הזמן או כאשר יש חפיפה בין תדרי האות הרצוי והרעש ולכן לא ניתן לסנן אותו על ידי מסנן. שיטה זו מבוססת על אותות רפרנס (עבור רעש רשת למשל סנתוז אות בתדר המתאים ועבור הרעשים האחרים אלקטרודות במקומות המתאימים). כך ניתן לחסר את אותות הרפרנס (או קומבינציה לינארית שלהם) מהאות הנמדד ולקבל את האות הרצוי ללא הרעש. אות ה-EEG בעל טווח תדרים של $0.5 - 60 [Hz]$ ואמפליטודה של $0.001 - 1 [mV]$ ולכן נמצא בחפיפה עם התדרים של הרעשים המצוינים בסעיף הקודם. בשל כך, לא נוכל לסנן אותם בסינון קונבנציונלי בצורה אידאלית מבלי לפגוע ברכיבי האות. למשל, אם נשים מסנן מסוג *notch* בתדר $50 [Hz]$ הוא אומנם יסנן את רעש הרשת אך גם את מרכיבי אות ה-EEG בתדר זה. בנוסף, ECG ו-EOG הינם רעשים שמשתנים עם הזמן (הראשון לפי קצב הלב שמשתנה והשני לפי תנועת העיניים), ולכן לא ניתן לדעת את ערכם ללא אלקטרודות רפרנס.

5.3 התרשים המתאר את אלגוריתם LMS:



אלגוריתם זה מעדכן את משקלי הכניסות וכך מוצא את המשקלים האופטימלים שהולכים ומתכנסים בכל איטרציה. נשים לב כי באיור ישנם 3 מסנני FIR (המכפלות), 3 סוכמים בעלי שני כניסות בלבד, ומערכת LMS כרצוי.

- [1] L. Sörnmo and P. Laguna, Eds., "Copyright," in Bioelectrical Signal Processing in Cardiac and Neurological Applications, Burlington: Academic Press, 2005, p. iv. doi: 10.1016/B978-0-12-437552-9.50013-1.