Introdução à Física Computacional 1S/2018

Projeto 4 — Leis de Kepler e o problema de três corpos

Início: 23 de Abril de 2018

Data da entrega do relatório: 21 de Maio de 2018

Prof.: Eric C. Andrade

Descrição:

Discutiremos nesse problema o movimento planetário que é regido pela lei de Gravitação de Newton

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12}, \tag{1}$$

onde $\vec{r}_{1(2)}$ é a posição do planeta $1\,(2)$, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ é o vetor posição relativa entre os dois planetas, $m_{1(2)}$ é a massa do planeta $1\,(2)$ e G é a constante gravitacional. Nesse problema, consideraremos os planetas se movendo em um plano, o que é uma excelente aproximação para o sistema solar, e, portanto, uma simulação bidimensional será suficiente. Como a órbita dos planetas é periódica, não podemos utilizar o método de Euler, uma vez que ele não conserva a energia e leva a órbitas instáveis. Por isso, utilizaremos o método de Euler-Cromer.

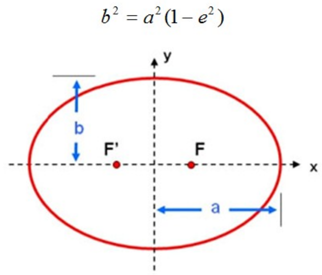
Sugestão de execução:

Exercício 1: Aula 8 . Exercício 2: Aula 9. Exercício 3: Aula 10

Importante: Certifiquem-se de que a proporção de tela (aspect ratio) de seu programa gráfico esteja em 1. Do contrário, as figuras ficarão distorcidas e órbitas circulares não parecerão assim tão circulares!

1) Órbitas circulares e os efeitos de Júpiter

Desde os trabalhos pioneiros de Kepler, sabemos que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos. Na figura ao lado, mostramos uma elipse com seus focos F e F', semieixos maior (a) e menor (b) bem como excentricidade e. No limite em que $e = 0$, recuperamos uma órbita circular. Sabemos que esse resultado segue triunfalmente da lei da gravitação de Newton na Eq. (1) e queremos aqui reimplementar essa solução de modo numérico. Antes de discutirmos o método numérico, contudo, vamos estabelecer as unidades mais convenientes para estudarmos o problema. Por se tratar de um problema astronômico, utilizaremos, não muito surpreendentemente, a chamada Unidade Astronômica (UA) para medirmos comprimento.



Uma unidade astronômica de comprimento, ou simplesmente 1 UA, é definida como a distância média Terra-Sol $\left(1.5 \times 10^{11}\text{ m}\right)$. O tempo é convenientemente medido em anos $\left(1 \text{ ano } \approx 3.2 \times 10^7\text{ s}\right)$, o que corresponde, naturalmente, ao período de rotação da Terra ao redor do Sol. Já a unidade de massa, pode ser facilmente calculada aproximando-se a órbita da Terra como circular

$$\frac{M_T v^2}{r} = \frac{GM_T M_S}{r^2}, \tag{2}$$

donde vem que

$$GM_S = v^2 r = \left(\frac{2\pi r}{\text{ano}}\right)^2 r = 4\pi^2 \frac{(\text{UA})^3}{\text{ano}^2}, \tag{3}$$

ou seja $GM_S = 4\pi^2$, em unidades astronômicas. Observe que as grandezas G e M_S aparecem apenas no produto GM_S e, portanto, não há a necessidade de especificarmos cada uma delas separadamente.

Planeta	massa (kg)	semieixo maior (UA)	excentricidade (e)
Mercúrio	2.4×10^{23}	0.39	0.206
Vênus	4.9×10^{24}	0.72	0.007
Terra	6.0×10^{24}	1.00	0.017
Marte	6.6×10^{23}	1.52	0.093
Júpiter	1.9×10^{27}	5.20	0.048
Saturno	5.7×10^{26}	9.24	0.056
Urano	8.8×10^{25}	19.19	0.046
Netuno	1.0×10^{26}	30.06	0.010

Tabela I: Dados planetários úteis. A massa do Sol é $M_S = 2.0 \times 10^{30}$ kg.

Vamos considerar inicialmente o problema de dois corpos, Planeta + Sol. Pelo fato de a massa do Sol ser muito maior que a massa dos planetas, vamos tomar o Sol parado na origem: $v_S = 0$ e $(x_S, y_S) = (0, 0)$. A equação de movimento para as coordenadas (x, y) de um dado planeta é então obtida por meio da Eq. (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM_S\frac{x}{r^3} \text{ e } \frac{d^2y}{dt^2} = -GM_S\frac{y}{r^3}, \tag{4}$$

onde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5}$$

é a posição instantânea do planeta com relação ao Sol.

Seguimos então o nosso mantra usual e reescrevemos as duas equações diferenciais de segunda ordem em (4) como quatro equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{e} \quad \frac{dv_x}{dt} = -GM_S\frac{x}{r^3}, \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad \text{e} \quad \frac{dv_y}{dt} = -GM_S\frac{y}{r^3}, \tag{7}$$

onde v_x e v_y são, respectivamente, as velocidades ao longo das direções x e y. Dentro do método de Euler-Cromer, as quatro diferenciais do problema em (6) e (7) são aproximadas por

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - 4\pi^2\frac{x_i}{r_i^3}\Delta t, \tag{8}$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1}\Delta t, \tag{9}$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - 4\pi^2\frac{y_i}{r_i^3}\Delta t, \tag{10}$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1}\Delta t, \tag{11}$$

onde escrevemos $GM_S = 4\pi^2$. Novamente Δt é o passo temporal que utilizamos para resolver as equações, naturalmente medido em anos.

(a) Escreva um programa FORTRAN que calcule a posição $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ e velocidade $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ de um planeta como função do tempo por meio das Eqs. (8)-(11).

(b) Considere a Tabela I. Determine a velocidade que cada planeta deveria ter para que sua órbita fosse circular com o raio dado pelo semieixo maior da elipse. Você deve se certificar que a órbita permanece circular após muitas revoluções. Para tal, uma escolha cuidadosa de Δt é necessária. Determine, numericamente, o período T dessas órbitas e calcule a razão T^2/R^3 ($3^{\underline{a}}$ Lei de Kepler). Apresente seus resultados na forma de uma tabela e discuta-os cuidadosamente.

(c) Vamos considerar agora o problema no qual temos a Terra, o Sol e Júpiter. Ou seja, queremos investigar os efeitos de Júpiter sobre a órbita da Terra. Ainda consideraremos o Sol parado na origem. As equações de movimento para a Terra são dadas por

$$\frac{d^2x_T}{dt^2} = -GM_S\frac{x_T}{r_{T-S}^3} - GM_J\frac{(x_T - x_J)}{r_{T-J}^3} \text{ e } \frac{d^2y_T}{dt^2} = -GM_S\frac{y_T}{r_{T-S}^3} - GM_J\frac{(y_T - y_J)}{r_{T-J}^3}, \tag{12}$$

onde M_S e M_J são, respectivamente as massas do Sol e de Júpiter, $r_{T-S} = \sqrt{x_T^2 + y_T^2}$ é a distância instantânea Terra-Sol e $r_{T-J} = \sqrt{(x_T - x_J)^2 + (y_T - y_J)^2}$ é a distância instantânea Terra-Júpiter. Desprezaremos, por simplicidade, os efeitos da Terra sobre Júpiter, de tal modo que a posição instantânea de Júpiter é dada por

$$\vec{R}_J(t) = R_J \left[\cos(2\pi t/T_J)\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,(2\pi t/T_J)\,\hat{y}\right], \tag{13}$$

onde T_J e R_J são, respectivamente, o período e o raio da órbita de Júpiter como determinados em no item *(b)*.

(i) Escreva explicitamente em seu relatório o análogo das Eqs. 8-11 para o movimento da Terra descrito pela Eq. (12).

(ii) Escreva um programa FORTRAN que calcule a órbita da Terra colocando Júpiter na posição e velocidade que teria caso sua órbita fosse circular, Eq. (13). Calcule o órbita da Terra para um período longo, $t > 100$ anos. Grafique e discuta seus resultados os correlacionando com a estabilidade do Sistema Solar. Dica: Escreva a massa da Terra (Júpiter) como $GM_{T(J)} = GM_S\left(M_{T(J)}/M_S\right) = 4\pi^2\left(M_{T(J)}/M_S\right)$.

(iii) Multiplique agora a massa de Júpiter por 1000 e mostre o que acontece com órbita da Terra. Discuta seus resultados.

2) Satélite geoestacionário e os efeitos da Lua

Vamos estudar agora o problema no qual temos a Terra, a Lua e um satélite geoestacionário, como por exemplo o SGDC-1. Em uma órbita geoestacionária ideal, um satélite aparenta ficar parado em um ponto fixo ao longo do equador pois o tempo para ele completar uma órbita ao redor da Terra é igual ao período de rotação da Terra ao redor de seu eixo, ou seja, um dia. O raio de uma órbita geoestacionária circular ideal pode ser facilmente determinado a partir da Eq. 2, lembrando que $T = 2\pi r/v$

$$r_{\text{geo}} = \left(\frac{GM_T T_S^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42244 \text{ km}, \tag{14}$$

onde $M_T = 5.9736 \times 10^{24}$ kg é a massa da Terra, $G = 6.6743 \times 10^{-11}$ m^3/kg.s^2 é a constante gravitacional e $T_S = 24 \times 60 \times 60 = 86400$ s é a duração de um dia. Note que, nesse caso, não há justificativa para utilizarmos unidades astronômicas e empregaremos o SI.

Queremos agora investigar os efeitos da Lua sobre essa órbita geoestacionária. Vamos considerar o caso mais simples no qual a Lua descreve um movimento circular ao longo do equador, de tal forma que o movimento se dê em um plano como ilustrado na figura abaixo

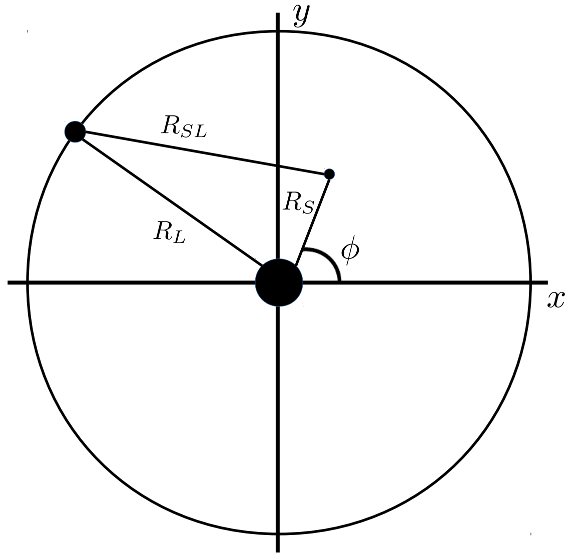


Figura 1: Ilustração esquemática do movimento de um satélite geoestacionário localizado em R_s. Em uma primeira aproximação, consideramos a Terra como parada na origem, $\vec{R}_T(t) = (0, 0)$, e a Lua descrevendo um movimento circular ao longo do equador. As distâncias R_L, R_S e R_{SL} são medidas a partir do centro da Lua e da Terra. Em uma órbita geoestacionária, o valor de ϕ deve se manter inalterado após um dia.

As equações de movimento para as coordenadas o satélite são então dadas por

$$\frac{d^2x_S}{dt^2} = -GM_T\frac{x_S}{r_S^3} - GM_L\frac{(x_S - x_L)}{r_{SL}^3} \text{ e } \frac{d^2y_S}{dt^2} = -GM_T\frac{y_S}{r_S^3} - GM_L\frac{(y_S - y_L)}{r_{SL}^3}, \tag{15}$$

onde M_L é a massa da Lua, com $GM_L = 1.23 \times 10^{-2} GM_T$. $R_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ é a distância instantânea do satélite com relação à Terra e $R_{SL} = \sqrt{(x_S - x_L)^2 + (y_S - y_L)^2}$ é a distância instantânea satélite-Lua. Como no caso do problema Terra, Júpiter e Sol, assumiremos que o satélite não afete a órbita da Lua, de tal forma que sua posição instantânea é a dada por

$$\vec{R}_L(t) = R_L\left[\cos(2\pi t/T_L)\,\hat{x} + \text{sen}\,(2\pi t/T_L)\,\hat{y}\right], \tag{16}$$

onde assumimos uma órbita circular de raio $R_L = 384400$ km e período $T_L = 27.32 \times T_S$.

(a) Escreva explicitamente em seu relatório o análogo das Eqs. 8-11 para a Eq. 15.

(b) Escreva um programa FORTRAN que calcule a órbita da satélite colocando a Lua na posição e velocidade que teria caso sua órbita fosse circular, como determinada pela Eq. (16). Como condição inicial, assuma que a Lua e o satélite estejam ao longo de uma mesma linha e que ambos girem no sentido anti-horário (ϕ aumenta com o tempo). Calcule a trajetória do satélite para um período longo, $t > 100$ dias, e verifique se sua órbita continua geoestacionária. Você diria que a Lua é uma perturbação relevante para essa órbita? Discuta sua resposta.

(c) Uma outra maneira de estudarmos esse problema é investigarmos diretamente os desvios da órbita geoestacionária, caracterizada por $(r_{\text{geo}}, \phi_{\text{geo}}(t))$, ao longo do tempo

$$\Delta\phi(t) = \phi(t) - \phi_{\text{geo}}(t) \;\text{ e }\; \Delta r(t) = r(t) - r_{\text{geo}}.$$

Faça um gráfico mostrando $\Delta\phi(t)$ e $\Delta r(t)$ como função do tempo para um intervalo de 100 dias. Discuta seus resultados. Dica: para o cálculo do ângulo, use a função atan2. Restrinja seus resultados ao intervalo $[0,\, 2\pi]$.

(d) Mostre um gráfico com os resultados para $\Delta\phi(t)$ considerando diferentes valores do passo Δt para o método de Euler-Cromer. Justifique sua escolha do passo ótimo. Utilize o número de passos por dia como sua unidade para Δt.

3) Coreografias celestes

Vamos agora considerar um limite um pouco diferente no problema da mecânica celeste. Estudaremos a órbita de corpos de mesma massa M que se atraem gravitacionalmente. Por simplicidade, tomaremos $GM = 1$. Nesse caso, é mais conveniente definirmos a origem do sistema de coordenadas sobre o centro de massa (CM) do sistema, pois todas as partículas irão se mover agora. (Nota: você **não** precisa calcular a posição do CM!)

(a) O que faremos aqui é considerar diferente condições iniciais e estudar a órbita resultante. Inicialmente, vamos estudar uma realização do problema de Lagrange, na qual as três partículas se movem em um círculo sempre mantendo distâncias iguais entre si, formando portanto um triângulo equilátero. As condições iniciais para esse caso são

Partícula	$x(t=0)$ (UA)	$y(t=0)$ (UA)	$v_x(t=0)$ (UA/ano)	$v_y(t=0)$ (UA/ano)
1	1.0	0.0	0.0	0.759836
2	-0.5	0.866025	-0.658037	-0.379918
3	-0.5	-0.866025	0.658037	-0.379918

Mostre que as órbitas dos planetas são, de fato, circulares. Escolha alguns instantes de tempo e mostre como a posição instantânea de cada partícula evolui. Certifique-se de que os planetas sempre estão a uma mesma distância em qualquer instante de tempo.

(b) Modifique suas condições iniciais para essas abaixo

Partícula	$x(t=0)$ (UA)	$y(t=0)$ (UA)	$v_x(t=0)$ (UA/ano)	$v_y(t=0)$ (UA/ano)
1	0.97000436	-0.24308753	0.466203685	0.43236573
2	-0.97000436	0.24308753	0.466203685	0.43236573
3	0	0	-0.93240737	-0.86473146

Calcule e grafique a órbita resultante nesse caso. Escolha alguns instantes de tempo e mostre como a posição instantânea de cada partícula evolui. Essa solução só foi descoberta em 1993! C. Moore, Phys. Rev. Lett. **70**, 3675 (1993). Por falta de criatividade, ela é conhecida como "O Oito".

(c) Mude agora a posição inicial $x\,(t=0)$ da partícula 1 do item (b) de 0.97000436 UA para 0.95000436 UA. O que acontece com o nosso Oito?

Breve discussão sobre a execução dos problemas

Problema de três corpos restrito ao plano. Considere três massas M_α localizadas, no tempo t nas posições $\vec{r}_\alpha$ com $\alpha = 1, 2, 3$. Assumiremos que a origem do nosso sistema esteja em seu centro de massa (CM). Vamos agora escrever as equações de movimento para o problema

$$\frac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2} = \frac{1}{M_\alpha}\sum_{\alpha\neq\beta}\vec{F}_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{GM_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}\left(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta\right), \tag{17}$$

com $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Como de praxe, quebramos as equações de segunda ordem em duas equações de primeira ordem

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \vec{v}_\alpha \text{ e } \frac{dv_\alpha}{dt} = -\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{GM_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}\left(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta\right). \tag{18}$$

Novamente, consideraremos o problema planar e utilizaremos o método de Euler-Cromer para sua solução, o que nos leva às seguintes equações

$$\begin{aligned}
v_{x,\alpha}^{(i+1)} &= v_{x,\alpha}^{(i)} - \Delta t \cdot \sum_{\alpha\neq\beta}\frac{GM_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}\left(x_\alpha - x_\beta\right), && (19)\\
v_{y,\alpha}^{(i+1)} &= v_{y,\alpha}^{(i)} - \Delta t \cdot \sum_{\alpha\neq\beta}\frac{GM_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}\left(y_\alpha - y_\beta\right), && (20)\\
x_\alpha^{(i+1)} &= x_\alpha^{(i)} + \Delta t \cdot v_{x,\alpha}^{(i+1)}, && (21)\\
y_\alpha^{(i+1)} &= y_\alpha^{(i)} + \Delta t \cdot v_{y,\alpha}^{(i+1)}. && (22)
\end{aligned}$$