Flux émis par une sphère en expansion relativiste : calcul sans le formalisme du transfert radiatif

1 Calculs préliminaires

On considère un référentiel fixe et un référentiel en mouvement à la vitesse βc par rapport au référentiel fixe (facteur de Lorentz Γ), dit *référentiel propre*.

1.1 Effet Doppler et focalisation relativiste vers l'avant

– Effet Doppler relativiste dans la direction θ par rapport au mouvement :

$$\nu_{\rm obs} = \mathcal{D}\nu' \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\beta\cos\theta\right)}\,.$$

– Focalisation relativiste vers l'avant : (1) transformation des angles

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1+\beta\cos\theta'}\,.$$

– Focalisation relativiste vers l'avant : (2) transformation des angles solides
A partir de la formule précédente, montrer que la transformation de l'angle solide déterminé par la couronne θ, $\theta + d\theta$ autour de l'axe de la vitesse est

$$d\Omega = \frac{1}{\mathcal{D}^2}d\Omega'\,.$$

Indications : a) écrire $d\Omega$ et $\mathrm{d}\Omega'$ en fonction de θ et θ' ; b) utiliser la loi de transformation des angles.

1.2 Transformation du spectre

On considère une particule qui émet (référentiel propre) de manière isotrope N photons avec une probabilité d'être dans l'intervalle de fréquence $[\nu';\nu'+d\nu']$ qui vaut

$$p(\nu')d\nu' = \frac{d\nu'}{\nu'_0}\mathcal{B}\left(\frac{\nu'}{\nu'_0}\right)\,,\quad \text{avec} \quad \int_0^\infty \mathcal{B}(x)dx = 1\,.$$

– La fréquence moyenne des photons dans le référentiel propre vaut

$$\langle\nu'\rangle = \int_0^\infty p(\nu')\nu' d\nu' = \nu'_0\int_0^\infty x\mathcal{B}(x)dx = K\nu'_0\,,\quad \text{avec} \quad K = \int_0^\infty x\mathcal{B}(x)dx\,.$$

Cas particulier : spectre monochromatique avec $\mathcal{B}(x) = \delta(x-1)$ et $K = 1$.

– Ecrire l'expression de l'énergie $\frac{dE}{d\Omega d\nu_{\rm obs}}$ émise par unité d'angle solide et de fréquence dans le référentiel fixe et dans la direction θ.
– Intégrer en fréquence pour obtenir l'énergie $\frac{dE}{d\Omega}$ émise par unité d'angle solide dans le référentiel fixe et dans la direction θ.
– Intégrer sur toutes les directions pour obtenir l'énergie totale E émise dans le référentiel fixe.

Me faire vérifier ces résultats intermédiaires avant de passer à la suite...

1.3 Flash émis par une sphère relativiste

– La sphère émet un flash au rayon R_0 et au temps t_0 (référentiel fixe). Son facteur de Lorentz est Γ_0. L'énergie totale émise est E_0 et le spectre dans le référentiel propre est donné par la fonction $\mathcal{B}(x)$.
– Montrer que les photons émis à la latitude θ sont détectés à la date

$$t_{\rm obs} = t_0 - \frac{R_0}{c}\cos\theta\,.$$

– Entre $t_{\rm obs}$ et $t_{\rm obs}+dt_{\rm obs}$, l'observateur reçoit les photons émis entre θ et $\theta+d\theta$. Calculer $dt_{\rm obs}$ en fonction de $d\theta$.

- En déduire la surface de l'anneau qui émet des photons arrivant pendant dt_{obs}. A quelle fraction de la surface de la sphère cela correspond-il ?
- En déduire l'énergie totale rayonnée par cet anneau.
- En utilisant les calculs préliminaires, écrire le spectre émis correspondant $\frac{dE^{\mathrm{anneau}}}{d\Omega d\nu_{\mathrm{obs}}}$ (énergie émise par unité d'angle solide et de fréquence).
- Pour l'observateur, l'anneau a une luminosité apparente

$$L_{\nu_{\mathrm{obs}}}^{\mathrm{anneau}}(t_{\mathrm{obs}}) = \frac{4\pi}{dt_{\mathrm{obs}}} \frac{dE^{\mathrm{anneau}}}{d\Omega d\nu_{\mathrm{obs}}} \, .$$

  Donner l'expression de cette luminosité apparente. Intégrer en fréquence pour obtenir $L_{\mathrm{obs}}^{\mathrm{anneau}}(t_{\mathrm{obs}}) = \frac{4\pi}{dt_{\mathrm{obs}}} \frac{dE^{\mathrm{anneau}}}{d\Omega}$.
- Les premiers photons détectés par l'observateur correspondent à $\theta = 0$. Calculer $\mathcal{D}$, t_{obs} (que l'on appelera $t_{\mathrm{obs},0}$), $L_{\nu_{\mathrm{obs}}}^{\mathrm{anneau}}(t_{\mathrm{obs}})$ et $L_{\mathrm{obs}}^{\mathrm{anneau}}(t_{\mathrm{obs}})$ pour ces photons.
- Montrer que pour θ quelconque, le facteur Doppler peut s'écrire

$$\mathcal{D} \quad = \quad \frac{1}{\Gamma_0 \left(1-\beta_0\right) \left(1 + \frac{t_{\mathrm{obs}} - t_{\mathrm{obs},0}}{\Delta t_{\mathrm{obs},0}}\right)}$$

  avec

$$\Delta t_{\mathrm{obs},0} = \frac{1-\beta_0}{\beta_0} \frac{R_0}{c} \simeq \frac{R_0}{2\Gamma_0^2 c} \, .$$

- En déduire les expressions finales de $L_{\nu_{\mathrm{obs}}}^{\mathrm{anneau}}(t_{\mathrm{obs}})$ et $L_{\mathrm{obs}}^{\mathrm{anneau}}(t_{\mathrm{obs}})$.
- Vérification : intégrer sur t_{obs}.