Mecânica Clássica Computacional
Projeto 3

Maio de 2019

Vários dos elementos deste projeto são similares aos do exemplo de pêndulo não-linear forçado com atrito, apresentado no início da disciplina.

Neste projeto você vai fazer alguns experimentos com o modelo de Lorenz. Esse modelo foi apresentado em um artigo pioneiro na área de sistemas dinâmicos e caos[1] e é uma simplificação de um problema de fluxo hidrodinâmico dissipativo forçado. Os detalhes do problema físico não nos interessam (os interessados podem ler o artigo original, que é bem escrito), mas o modelo envolve três variáveis de estado, usualmente denominadas X, Y, Z, onde X é proporcional à intensidade de convecção, Y é proporcional à diferença de temperatura entre fluxos ascendente e descendente e Z é proporcional à distorção do perfil vertical de temperatura em relação a uma reta ($Z = 0$ indicando um perfil linear). As equações são:

$$\frac{dX}{dt} = -\sigma X + \sigma Y \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = -XZ + rX - Y \quad (2)$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ \quad (3)$$

Geralmente, se usa $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, de acordo com os valores propostos por Lorenz, enquanto que r, que é relacionado ao número de Reynolds, é usado como parâmetro livre.

Você deve fazer o seguinte:

1. Para os valores de $r \in \{1, 7, 15, 20, 35, 50\}$, faça a integração do sistema de equações para $t \in [0, 40]$ a intervalos de $\Delta t = 0.0025$, partindo do estado inicial $X(0) = 0, Y(0) = 1, Z(0) = 0$. Plote então para cada um dos valores de r as funções $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$, e também a trajetória do sistema no espaço de estado [o espaço tridimensional (X, Y, Z)]. Comente as diferenças qualitativas dos resultados para os diferentes valores de r e também sobre transientes.

2. Para cada um dos valores de r acima, analise a sensibilidade do sistema a condições iniciais. Para isso, faça para cada r duas simulações, uma com condições iniciais $X(0) = 0, Y(0) = 1, Z(0) = 0$ e outra com condições $X(0) = 0, Y(0) = 1 + \delta, Z(0) = 0$, onde δ é um valor positivo pequeno. Calcule então a distância entre as duas trajetórias (distância euclidiana entre os pontos no espaço de estado das duas trajetórias) para cada instante de tempo e plote com o eixo das distâncias em escala logaritmica. Note que existe uma tendência exponencial na distância entre as trajetórias com o tempo do tipo $d \propto e^{\lambda t}$, onde λ é denominado o *coeficiente de Lyapunov*, conforme já comentado em aula anterior. Para cada r, escolha uma faixa de tempo com comportamento aproximadamente exponencial e usando apenas os dados nessa faixa faça um ajuste para encontrar (numericamente) o coeficiente de Lyapunov do sistema. Note que você vai precisar ajustar o valor

[1] *Lorenz, E. N.,* Deterministic nonperiodic flow. **J. of the Atmosferic Sciences**, 20, 1963.

de δ de forma apropriada (possivelmente diferente para cada r): se δ é muito grande, não se podem considerar as condições iniciais próximas, e o comportamento exponencial não vai aparecer, ou vai aparecer por muito pouco tempo; se δ for muito pequeno, as aproximações numéricas podem se sobrepor às diferenças de trajetória, resultando em cálculos inadequados. Também pode ser necessário ajustar adequadamente o tempo total de simulação, para garantir encontrar a fase exponencial e que ela se mantenha por tempo suficiente para um bom cálculo do coeficiente.

3. Levante diagramas de bifurcação para o sistema, na faixa de $r \in [1, 200]$. Para isso, para diversos valores de r nessa faixa você vai simular o sistema até $t = 80$, descartar os resultados para $t < 30$ (para evitar transientes) e então encontrar todos os valores de máximo local da variável X. Você deve então fazer um gráfico com todos os valores de máximo local de X (no eixo das ordenadas) para cada um dos valores de r (no eixo das abscissas). O mesmo deve ser feito para as variáveis Y e Z, resultando em três diagramas de difurcação. Use os mesmos parâmetros e condições iniciais sugeridos anteriormente. Para achar as posições dos máximos locais, a função `scipy.signal.argrelmax` pode ser usada. O que você pode dizer sobre regiões de periodicidade e caoticidade do sistema? Você consegue encontrar indícios do fenômeno de "duplicação de período"?