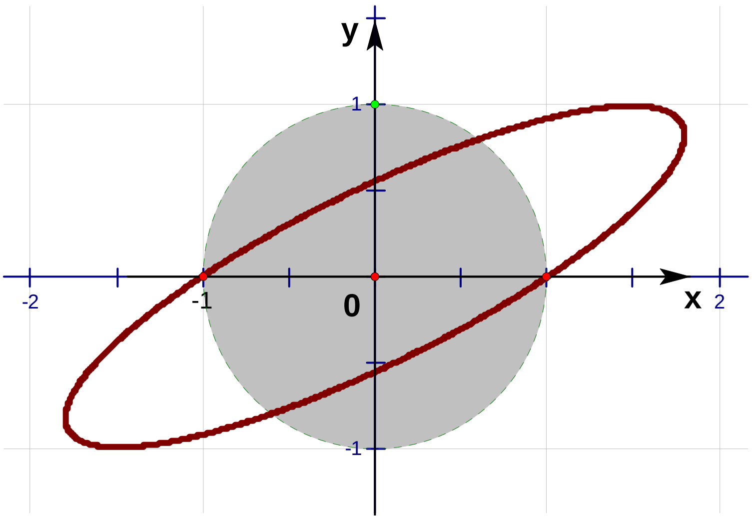
-----图解线性代数-----

线性代数的几何意义之（3）

任广千　胡翠芳 编著



2010.06.01

几何意义名言录

没有任何东西比几何图形更容易印入脑际了，因此用这种方式来表达事物是非常有意义的。 --------笛卡尔

算术符号是文字化的图形，而几何图形则是图像化的公式；没有一个数学家能缺少这些图像化的公式。 --------希尔伯特

“如果代数与几何各自分开发展，那它的进步十分缓慢，而且应用范围也很有限，但若两者互相结合而共同发展，则就会相互加强，并以快速的步伐向着完善化的方向猛进。”

--------拉格朗日

不会几何学就不会正确的思考，而不会正确思考的人不过是行尸走肉。 --------柏拉图

无论是从事数学教学或研究，我是喜欢直观的。学习一条数学定理及其证明，只有当我能把定理的直观含义和证明的直观思路弄明白了，我才认为真正懂了。--------中国当代数学家徐利治

第三章　行列式的几何意义

在中国古代，用筹算表示联立一次方程未知量的系数时，就有了行列式的萌芽-----排列的方式。日本吸收了这种思想，在 1683 年，日本学者关孝和（Seki Takakusu）对行列式的概念和它的展开已有了清楚的叙述。到 18 世纪，瑞士数学家克莱姆（G.Gramer）和法国数学家拉普拉斯（P.S.Laplace）建立了行列式理论。

行列式的几何意义具有深刻的含义。它是指行列式的行向量或列向量所构成的平行多面体的有向体积。这个有向体积是由许多块更小的有向面积或有向体积的累加。在我们逐步地讨论这个几何意义之前，先来回顾一下行列式的定义。

3.1.　行列式的定义

行列式是由一些数据排列成的方阵经过规定的计算方法而得到的一个数。当然，如果行列式中含有未知数，那么行列式就是一个多项式。它本质上代表一个数值，这点请与矩阵区别开来。矩阵只是一个数表，行列式还要对这个数表按照规则进一步计算,最终得到一个实数、复数或者多项式。

行列式分阶，比如二阶行列式、三阶行列式直至 n 阶行列式。下面我们罗列了各阶行列式的定义（以拉普拉斯展开定理的形式给出了定义，这样可以使各阶行列式看起来有规律），以方便后面的论述：

- 一阶行列式：

$$|a_1| = a_1$$

一阶行列式就等于元素 a_1 自己。各位看官注意啊，a_1 值可正可负，行列式两条竖线的记号不要当成绝对值的符号。

- 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot |b_2| - a_2 \cdot |b_1| = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

这个结果是不是很面熟？有点像三维向量叉积的第三个元素。你看，

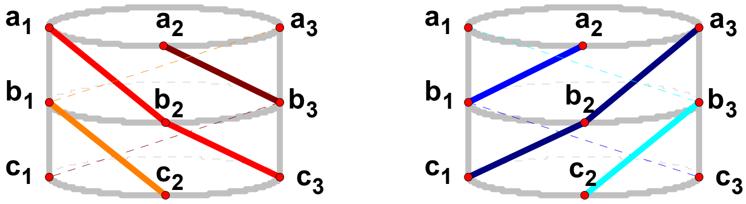
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2\text{，} a_3 b_1 - a_1 b_3\text{，} \underline{a_1 b_2 - a_2 b_1})$。注意叉积是和有向面积联系在一起的。

- 三阶行列式

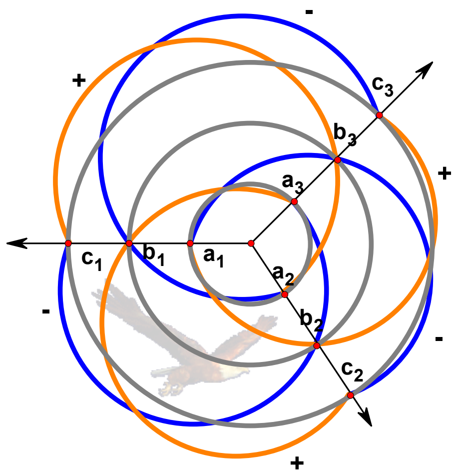
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

三阶行列式的计算比较常用，务必记住上式。上式帮助记忆之经典的展开运算法是对角线法，这个大家都知道，不再多讲。但为使对角线法看起来更有规律，这里稍稍改变了一下，图如下：



把行列式的元素依序排在圆柱体的外圆上，沿右下方向的乘积顺序得到正符号（左图），沿左下方向的乘积顺序得到负符号（右图）。如果把圆柱体拓扑变形为圆锥体，它的顶视图如下，运算顺序很有规律和美感，如下：



图中，行向量沿圆的逆时针方向排列元素，列向量沿原的半径方向排列。乘积项的元素分布在各个半圆弧上。

- 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = &+a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ &- a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ &+ a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ &- a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \\ &+ a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{aligned}$$

可惜，在四阶以上的行列式中，没有了以上三阶行列式的特有美感的运算图解。这说明行列式的几何本质远没有如三阶行列式的图解一样简单。再者，手算四阶行列式很是恐怖，在 MATLAB 横行的年代也没此必要。把四阶行列式的展开算式罗列在此，只是给诸位一个感性认识。

- N 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n2} & a_{n3}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n3}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}.$$

式中，$j_1 j_2 \ldots j_n$ 是 $1,2,\ldots n$ 的一个排列，$\sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 表示对 $j_1 j_2 \ldots j_n$ 取遍 $1,2,\ldots n$ 的一切 $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ 排列求和，t 为排列 $j_1 j_2 \ldots j_n$ 的逆序数。

N 阶的行列式的展开有 $n!$ 个乘积项，这些乘积项具有统一的表达式，因而具有统一的规律。通过观察以上各阶行列式的定义式，我们至少看到有两个小规律。一个规律是 n 阶行列式可以化为更低一阶的 n-1 阶行列式的和，这将会帮助我们简化行列式的计算。另一个规律是 n 阶行列式实际上是不同行不同列的 n 个元素的乘积项的代数和（和或差，每项符号由置换的逆序数的奇偶性决定）。在前面的向量一章中，我们介绍了向量的张量积，现在看来，行列式实际上是 n 个行向量的张量积中的部分结果。这个部分项的和具有独立的代数及几何意义，因而在线性代数中占有一席之地。

行列式的几何意义是什么呢？概括说来有两个解释：一个解释是行列式就是行列式中的行或列向量所构成的超平行多面体的**有向面积或有向体积**；另一个解释是矩阵 A 的行列式 detA 就是线性变换 A 下的图形面积或体积的**伸缩因子**。

这两个几何解释一个是静态的体积概念，一个是动态的变换比例概念。但具有相同的几何本质，因为矩阵 A 表示的(矩阵向量所构成的)几何图形相对于单位矩阵 E 的所表示的单位面积或体积(即正方形或正方体或超立方体的容积等于 1）的几何图形而言，伸缩因子本身就是矩阵矩阵 A 表示的几何图形的面积或体积，也就是矩阵 A 的行列式。

一个 2×2 矩阵 A 的行列式，是 A 的行向量（或列向量）决定的平行四边形的有向面积。

用几何观点来看，二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}$ 是xoy平面上以行向量 $\mathbf{a}=(a_1\ a_2)$，$\mathbf{b}=(b_1\ b_2)$ 为邻边的平行四边形的有向面积：若这个平行四边形是由向量 $\mathbf{a}$ 沿逆时针方向转到 $\mathbf{b}$ 而得到的，面积取正值；若这个平行四边形是由向量 $\mathbf{a}$ 沿顺时针方向转到 $\mathbf{b}$ 而得到的，面积取负值；若 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}',\mathbf{b}'$ 张成的平行四边形的有向面积符号相同，称他们有相同定向。所以平面上平行四边形有两种定向。

类似地，三阶行列式的值就是它的三个向量在Oxyz空间上张成的平行六面体的有向体积。这里空间平行六面体也有两种定向：当 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 构成右手系时，体积正值；当 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 构成左手系时，体积

取负值。这同时启发我们可以把n阶行列式定义为n个n维平行多面体的有向容积。

关于伸缩因子的几何解释，需要引入矩阵的概念。行列式被看作对矩阵的某种运算，并反映了矩阵的特定性质。实际上也是这样。

假设 A 是一个列向量（或行向量）为 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的 2×2 矩阵。那么，这里的线性变换 A 是指将 R^2 中的单位正方形变成 R^2 中以 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形；如果原图形为一个园，则线性变换 A 将之变成一个椭圆。

同样，在 3×3 的情形下，A 将 R^3 中的一个单位立方体映射成 R^3 中由 A 的列向量确定的平行六面体；如果原图形为一个球，则线性变换 A 将之变成一个椭球。

一般地，一个 n×n 矩阵 A 将 R^n 中的单位 n 立方体变成 R^n 中由 A 列向量确定的 n 维平行体。对非单位正方形(立方体或超立方体)以同样的方式变换，即伸缩因子为

$$\frac{\text{像域的容积}}{\text{原域的容积}}$$

而 n×n 矩阵 A 的行列式 detA 就是这个伸缩因子。

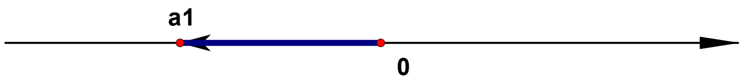
下面我们主要从向量及其张成的面积和体积的几何图像的角度分别就二阶和三阶行列式给出其几何意义，为了较深入的理解其几何含义，我们逐个地解释了行列式的主要性质。(从矩阵的线性变换的角度讲解行列式的伸缩因子的几何意义的内容放在了矩阵一章“矩阵的行列式”一节里面)。

3.2. 二阶行列式的几何意义

二阶行列式的几何意义

顺便先把一阶行列式的意义说一下。

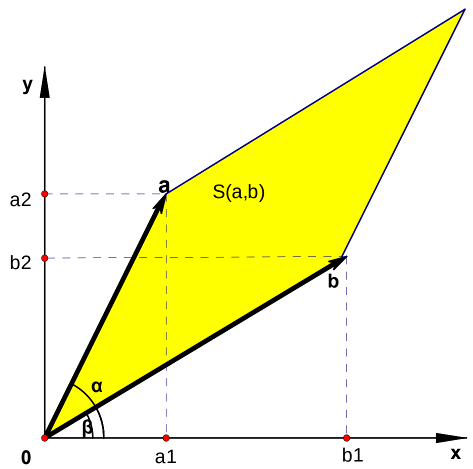
一阶行列式 $|a_1| = a_1$。意思就是 a_1 的一阶行列式就是数 a_1 或者讲是向量 a_1 的本身，这个数 a_1 的本身是一维坐标轴上的有向长度。这里我强调的是有向的，长度是有向的，是个向量，这一直是个很重要的概念。



再回来，我们继续讨论二阶行列式。

二阶行列式 $\mathrm{D}=\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}$ 的几何意义是xoy平面上以行向量 $\mathbf{a}=(\mathrm{a}_1\ \ \mathrm{a}_2)$，$\mathbf{b}=(\mathrm{b}_1\ \ \mathrm{b}_2)$ 为邻边的平行四边形的有向面积。为什么？其实，我们可以推导出来这个几何意义的：

我们来考察这个平行四边形与构成它的两个向量之间的关系。



我们在二维几何空间 R^2 中取定一个直角坐标系 $[0;\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2]$，设 $\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2$，$\mathbf{b}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2$，则以 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积为：

$$S(\mathbf{a},\mathbf{b})=abSin\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$$

这里：$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$，$b=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$，$Sin\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$ 为向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 之间的夹角正弦。

$$Sin\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=Sin(\alpha-\beta)=Sin\alpha Cos\beta-Cos\alpha Sin\beta\ ,$$

参照图中的关系把三角式用坐标值表示出来：

则

$$Sin\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\frac{b_2}{b}\cdot\frac{a_1}{a}-\frac{b_1}{b}\cdot\frac{a_2}{a}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{ab}$$

把上式整理得：$abSin\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=a_1b_2-a_2b_1$。

又

$$\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

因此

$$S(\mathbf{a},\mathbf{b})=\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}$$

至此可以得到，二阶行列式的几何意义就是由行列式的向量所张成的平行四边形的面积。另外，两个向量的叉积也是这个公式。在向量一章中向量叉积的一个公式就是

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(ab\sin\theta)\mathbf{n}^0$$

这里，$\mathbf{n}^0$ 是垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 展成的平面的单位向量。

因此，二阶行列式的另一个意义就是是两个行向量或列向量的叉积的数值，这个数值是 z 轴上（在二维平面上，z 轴的正向想象为指向读者的方向）的叉积分量。如果数值是正值，则与 z 坐标同向；负值就与 Z 坐标反向。如果我们不强调叉积是第三维的向量，也就是忽略单位向量 $\mathbf{n}^0$，那么二阶行列式就与两个向量的叉积完全等价了。

二阶行列式性质的几何解释

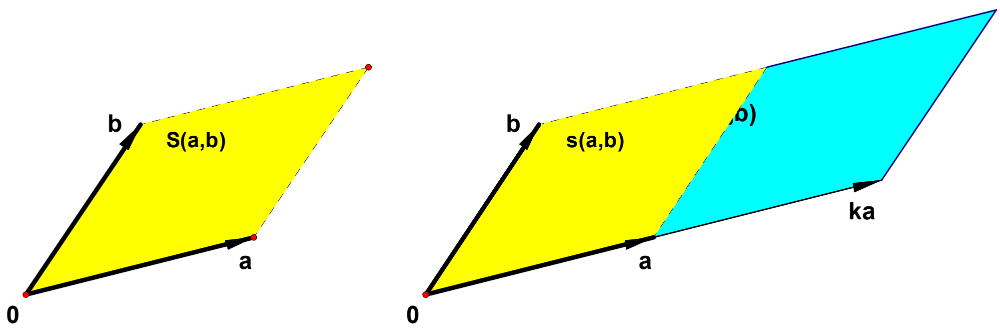
下面，我们仍然从向量的角度来解释或证明二阶行列式的几个主要性质。

性质 1 $k\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ka_1, ka_2 \\ b_2, b_2 \end{vmatrix}$，k 为实数；

这个性质是说，一个实数乘以行列式等于一个行向量乘以这个实数的行列式。几何解释就是

两个行向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ 所张成的平行四边形的有向面积的 k 倍面积等于这样两个向量 $k\mathbf{a}=(ka_1,ka_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ 所张成的平行四边形的面积，也就是 $S(k\mathbf{a},\mathbf{a})=kS(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 。

通过下面的图例容易得到几何解释。



图中，$S(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 可以看作以 $\mathbf{a}$ 为底的平行四边形的面积，$S(k\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是以 $k\mathbf{a}$ 为底的平行四边形的

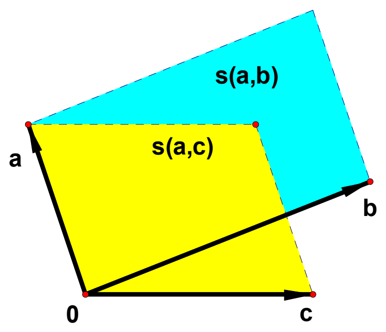
面积，高相同。因此，向量 **a** 变化了 k 倍，面积也变化了 k 倍。

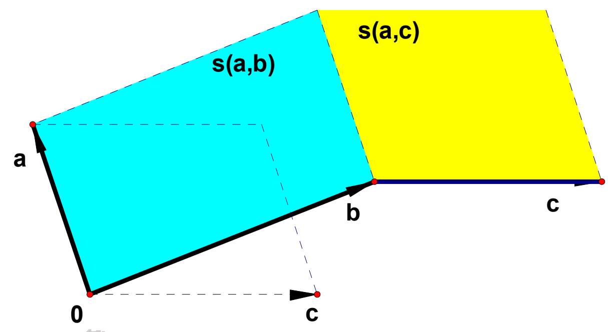
性质 2 $\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1+c_1, b_2+c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ c_1, c_2 \end{vmatrix}$

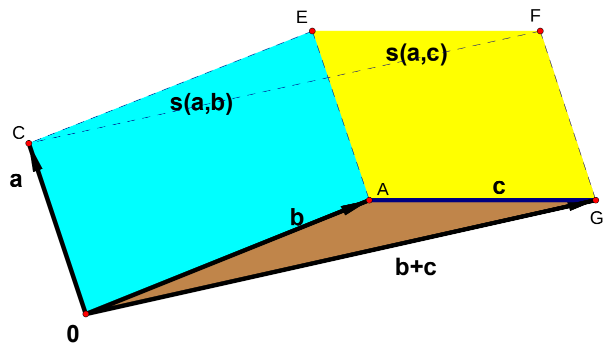
对于三个向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2),\mathbf{c}=(c_1,c_2)$，那么向量 **a** 和 **b** 张成的平行四边形有向面积与向量 **a** 和 **c** 张成的平行四边形有向面积之和等于向量 **a** 和 **b+c** 张成的平行四边形有向面积，即

$S(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c})=S(\mathbf{a},\mathbf{b})+S(\mathbf{a},\mathbf{c})$。

下面的三个图形对此进行了图解说明。







看图之温馨提示 我们在“向量叉积的分配律的几何解释 2”中应用有向面积的概念解释了叉积的分配率。因为二阶行列式等同于叉积运算，因此具有类同的几何意义，它们都是一个意义：有向面积满足三角形法则。

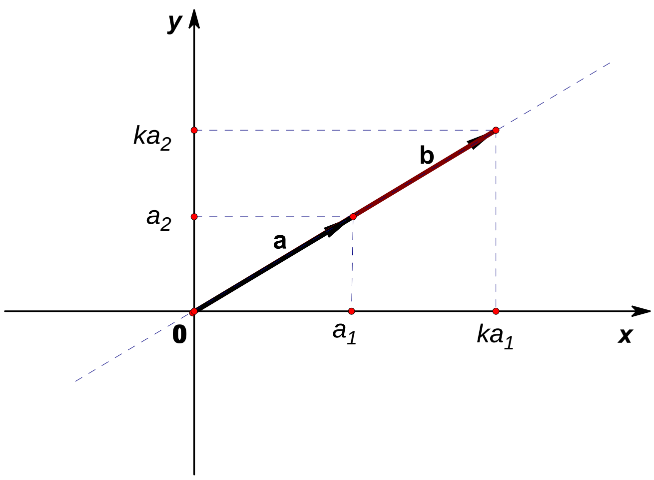
性质 3 $\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ ka_1, ka_2 \end{vmatrix} = 0$

此行列式是说两行对应元素成比例，则行列式为零。

对于两个向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(ka_1,ka_2)=k(a_1,a_2)$，显然成比例，比例系数为 k。如果把成比

列的两个向量的始端都移动到原点，则两向量会在同一条直线上，显然围成的四边形的面积为零，即 $S(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$，因此行列式为零。

当然如果两个向量相同，同样道理，行列式的值也为零。



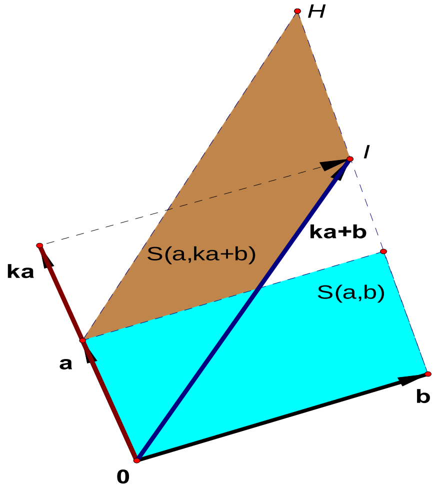
性质 4 $\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1, b_2 \\ a_1, a_2 \end{vmatrix}$

交换行列式的两行则行列式换号。

这个性质由行列式的叉积特性得到，交换行列式的两行，就是改变了向量 **a** 和向量 **b** 的叉积顺序，根据 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$，因此行列式换号。由此我们得到一个印象：就是一个给定的行列式，它的行向量顺序也给定了，不能随意改变其顺序。

性质 5 $\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & , & a_2 \\ b_1+\lambda a_1, & & b_2+\lambda a_2 \end{vmatrix}$

把行列式的一行的 k 倍加到另一行，则行列式值不变，即 $S(\mathbf{a},\mathbf{b})=S(\mathbf{a},k\mathbf{a}+\mathbf{b})$。



由图，两个平行四边形阴影的面积相等，因为这两个平行四边形同底（都等于 **a** ）同高。显然，把行列式的一行的 k 倍加到另一行的操作，相当于把原平行四边形在保持同底同高的情况下发生了切变。

性质 6 $\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}$

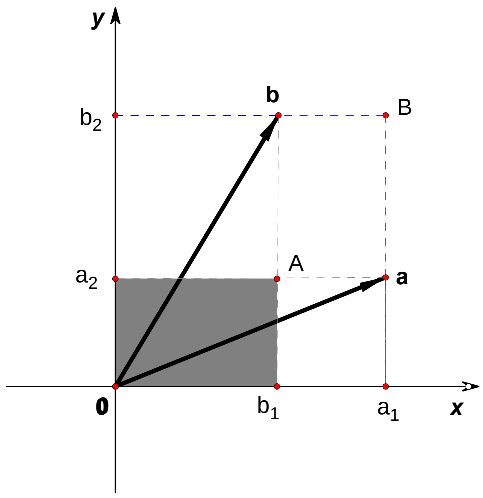
矩阵的行列式等于其转置矩阵的行列式。

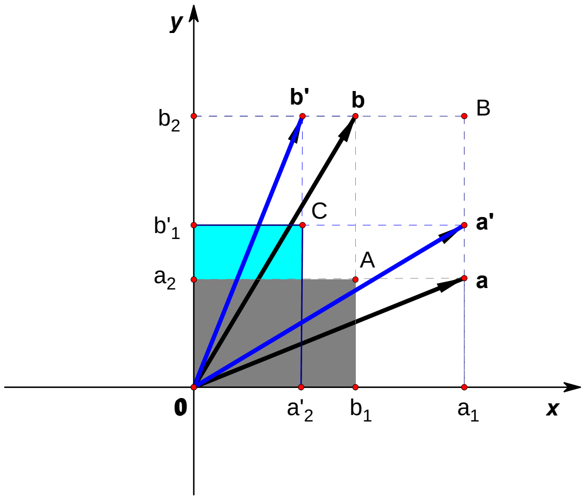
如果要讲清楚转置行列式的几何意义必须再一次使用行列式叉积的定义。另外，我们要回顾向量一章中两个向量的叉积的解析定义及意义。从前面的分析知道，两个向量的叉积等于这两个向量的各个分量（各坐标轴方向的分量）分别进行叉积的求和。

各个分量互相垂直，因而进行叉积运算张成的四边形是方形的面积。

对于二阶矩阵的行列式$\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}$， $a_1\mathbf{i}$ 和 $b_2\mathbf{j}$ 叉乘得到的四方形 Oa_1Bb_2 的有向面积是 a_1b_2，$a_2\mathbf{i}$ 和 $b_1\mathbf{j}$ 叉乘得到的 Oa_1Bb_2 的有向面积是-a_2b_1（注意是负值！）。

所以矩阵的行列式$\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}$= “ Oa_1Bb_2 的有向面积” + “ Oa_1Bb_2 的有向面积” $= a_1b_2 - a_2b_1$。从几何图形上看，行列式等于大四方形的面积减去小四方形的面积（因为小四方形是负向面积）。





行列式$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1,a_2\\b_1,\ b_2\end{vmatrix}$转置后得到$\begin{vmatrix}\mathbf{a}'\\\mathbf{b}'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1,b_1\\a_2,b_2\end{vmatrix}$。重新对这个新的行列式进行分量叉积运算。

我们会发现，大四方形没有变化，而小四方形进行了基于 xy 角平分线的镜像变化。有向面积的绝对值和方向都没有变化。因而

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}'\\\mathbf{b}'\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

性质得证。

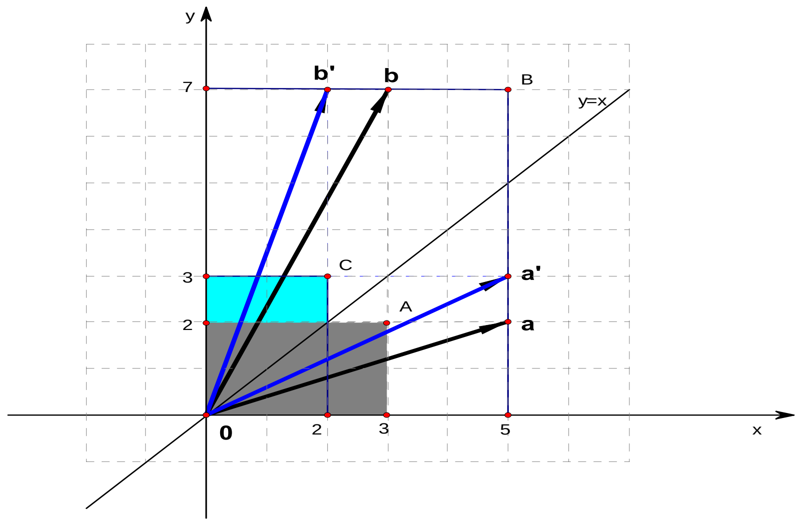
下面是上述转置行列式的具体数据，用于帮助读者得到具体感知。数据如下：

$$\begin{vmatrix}a_1,a_2\\b_1,b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5,2\\3,7\end{vmatrix}=5\times7-2\times3=29\text{。}$$

大长方形的面积是 35，小长方形的面积是 6，差为行列式的值。行列式转置后，

$$\begin{vmatrix}a_1,b_1\\a_2,b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5,3\\2,7\end{vmatrix}=5\times7-3\times2=29\text{。}$$

大长方形的面积是仍然是 35，小长方形经过基于 y=x 直线的镜像或者对折，面积仍然是 6，差为行列式的值不变。



矩阵的行列式等于其转置矩阵的行列式这条性质同时揭示了一个认识就是：按矩阵行向量构成的平行四边形的有向面积等于列向量构成的平行四边形的有向面积；换句话讲，对于矩阵的行列式几何意义，处理成行向量的图形与处理成列向量的图形是等效的。

总结一下，前面的行列式的性质在变换时总可以归结到下面的的三个变换性质：

（1）用一个数k乘以向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 中之一的 $\mathbf{a}$ ，则平行四边形的面积就相应地增大了k倍；

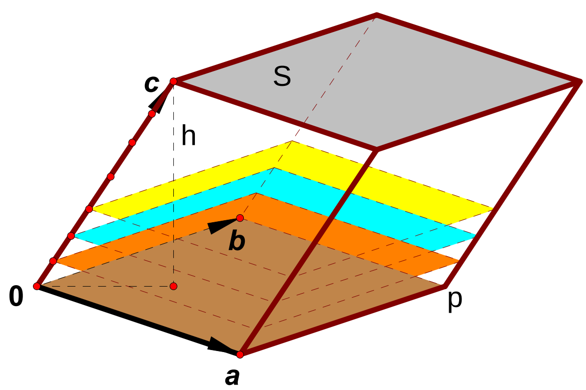
（2）把向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 中的一个乘以数k之后加到另一个上，则平行四边形的面积不变；

（3）以单位向量(1，0)，(0，1)构成的平行四边形(即单位正方形)的面积为1。

这三条性质，便是我们用公理化的方法定义行列式的几何背景。

3.3. 三阶行列式的几何意义

一个 3×3 阶的行列式是其行向量或列向量所张成的平行六面体的有向体积。这个结论可以从两个向量所张成的平行四边形推知。如下图所示。



由两个向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 张成的平行四边形为 $0\mathbf{a}P\mathbf{b}$ ，面积 S 为 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 构成的行列式。那么沿着第三个向

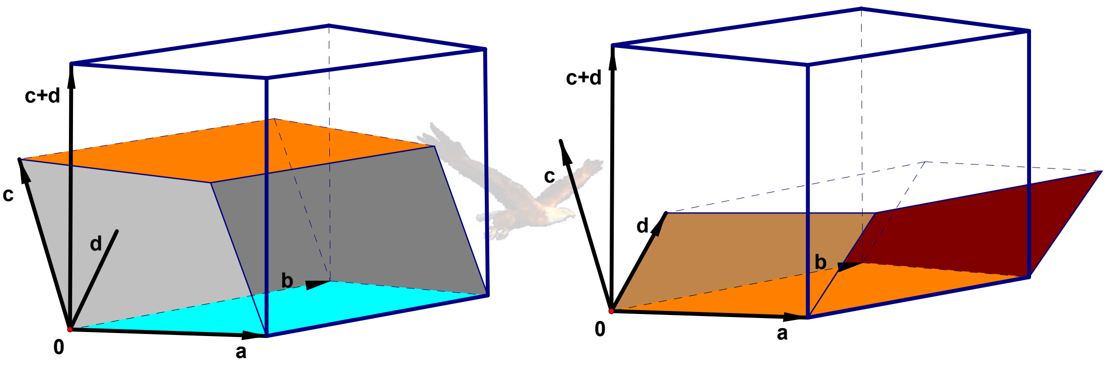
量 $\mathbf{c}$ 方向生长出无数个平行于原四边形的新的平行四边形来，直至到向量 $\mathbf{c}$ 的末端为止。显然，所有的这些平行四边形构成一个以向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体，这些四边形的面积叠加起来正是平行六面体的体积。

下面我们对 3×3 阵的行列式基本性质的几何意义进行解释。为了书写及描述方便，我们以 det（列向量）的方式表述三阶行列式。列向量用大写的 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 来表示。那么，$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}$。

性质 1　$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$

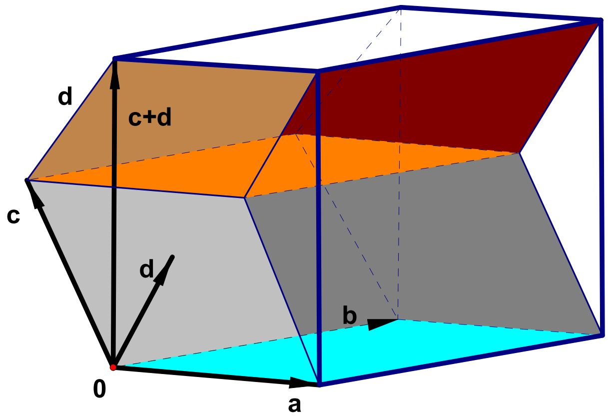
一个行列式可以通过拆分某一个列向量得到两个行列式的和。

看看这个性质的数学表达式，把 det 看作算子，有点像分配律的公式什么的。几何解释如下图示。

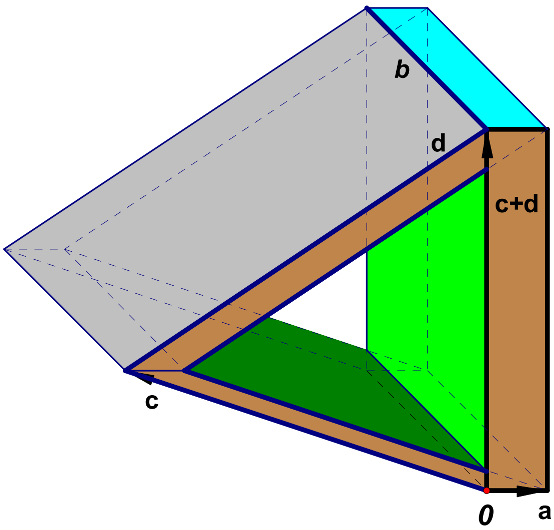


这里，把行列式 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d})$ 的第三列拆分，变成两个行列式 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 和 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$。三阶行列式可以看作是平行六面体的有向体积。上图左表示由向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 张成的平行六面体代表行列式 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$，上图右表示由向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ 张成的平行六面体代表行列式 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$。这两个平行六面体共有一个底面积 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$。这两个平行六面体的和就是由向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d}$ 张成的粗实线平行六面体 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d})$。

实际上，我们把灰色的六面体 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ 上移，摞在六面体 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 上，刚好得到六面体 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d})$。显然，他们的棱向量 $\mathbf{c}$，$\mathbf{d}$，$\mathbf{c}+\mathbf{d}$ 满足向量和的三角形法则。

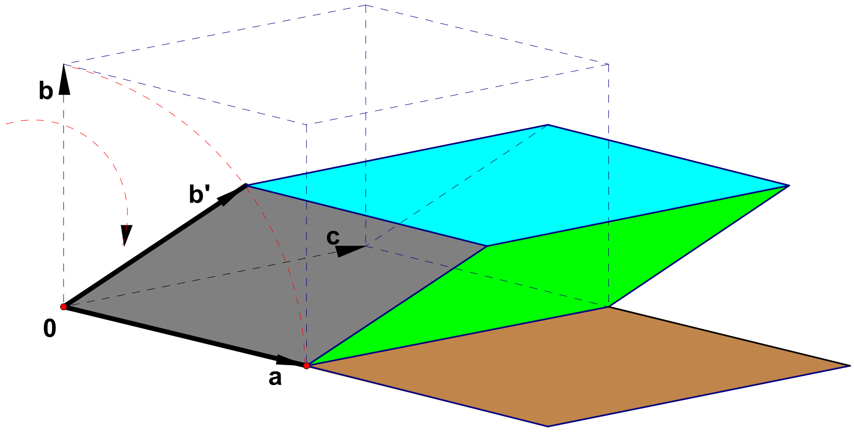


看图之温馨提示 和前面的有向面积满足三角形法则类似，这里的有向体积同样满足三角形法则。为了更清楚地表达有向面积的三角形法则，把上图变形，得到下面的明显的立方三角形图形。



性质 2 $\det(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{c})=0$

行列式的有两行或者两列元素相同，它对应的空间平行六面体的两条邻边重合，相当于三维空间中六面体被压成了高度为零的二维平面，显然， 这个平面的三维体积 $\det(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{c})$ 为零。如下图所示。

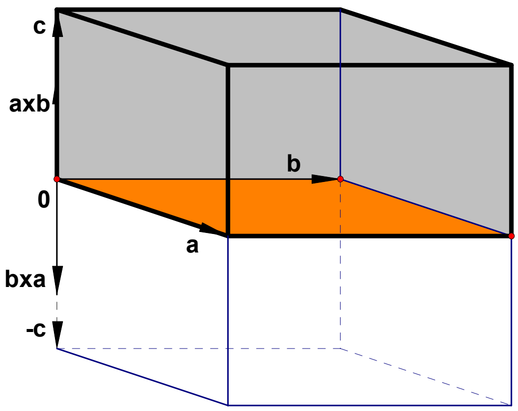


上图中，我们把平行六面体 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 中的棱向量 $\mathbf{b}$ 以坐标原点为轴沿一弧线下压（六面保持对应面平行）切变为 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b}',\mathbf{c})$，显然六面体的高度变小了，行列式值变小了。继续下压，直到 $\mathbf{b}'$ 重合与 $\mathbf{a}$，即变成了 $\det(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{c})$，平行六面体变成了一个平行四边形平面。

性质 3 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = -\det(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})$

一个行列式对应着一个数值，这个数值是对行列式中的元素经过运算得到的。这个运算是与元素的位置有关系的，因此你改变了行列式中列向量或行向量的位置当然会改变行列式的结果。幸而只改变结果的符号。一般地， 一个行列式的值对应矩阵 A 的列向量的一个固定顺序。当 detA 为负值时，它确定原象的一个反射。所以，这种变换改变了原象的定向。

实际上，$\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} = -\det(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) = \det(\mathbf{b},\mathbf{a},-\mathbf{c})$ ， 因此如果交换了向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的位置，也就是改变了叉乘的顺序，因此叉乘结果改变了方向，也即改变符号。

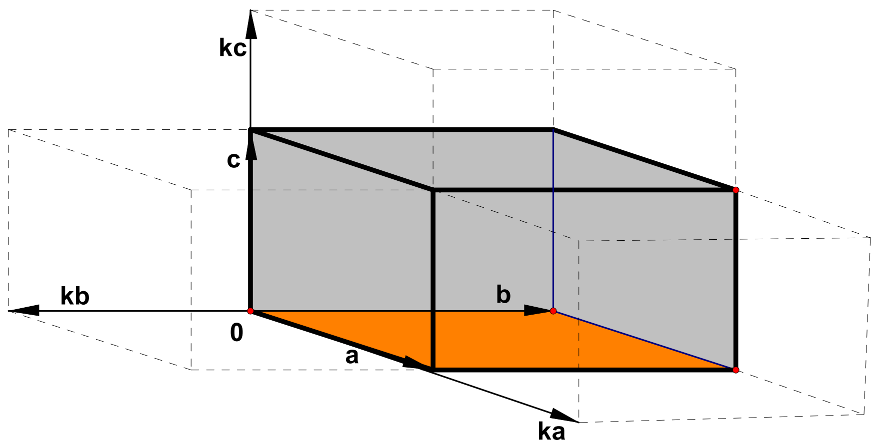


如图，阴影的平行六面体 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的方向与向量 $\mathbf{c}$ 同向（据右手法则）；当向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的位置交换后，$\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 相反，因而与向量 $\mathbf{c}$ 点乘后得到向下的平行六面体。所以平行六

面体 $\det(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})$ 和 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 以 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 张成的平面为镜面互为反射。

性质 4　　$k\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \det(k\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \det(\mathbf{a},k\mathbf{b},\mathbf{c}) = \det(\mathbf{a},\mathbf{b},k\mathbf{c})$

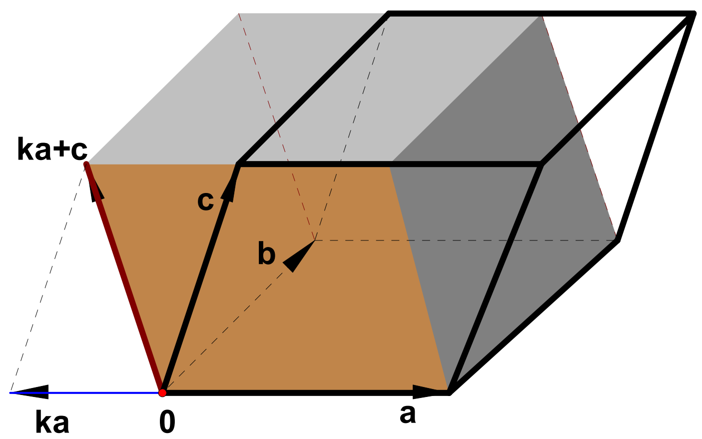
这就是说，平行六面体的体积的 k 倍等于六面体的三条棱中一条棱长的 k 倍。这是显然的。因为立方体的体积增大可以沿着立方体某一棱方向增大相同的倍数。如下图：



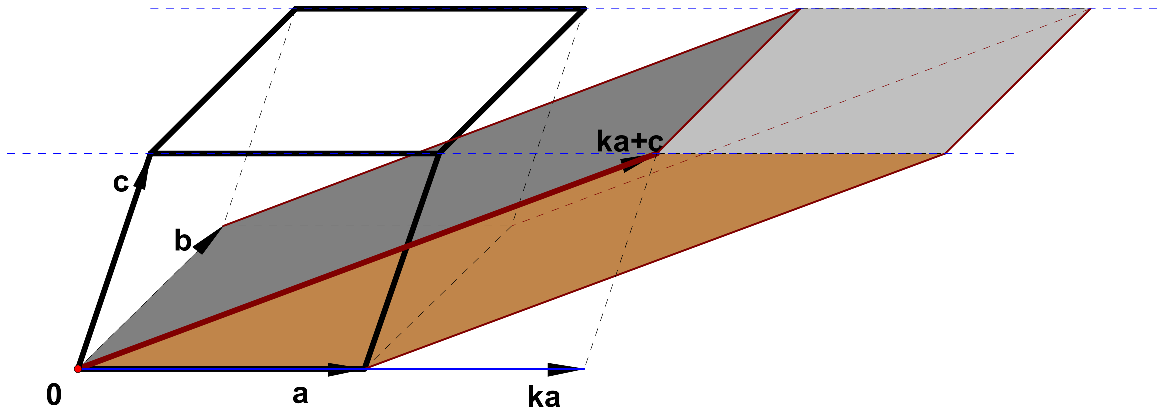
性质 5　　$\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \det(\mathbf{a},\mathbf{b},k\mathbf{a}+\mathbf{c})$

此性质表述了以 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 为底面积的平行六面体在 $\mathbf{a}$ 方向上进行了切向变换，变换的后的六面体因为底面积不变，高也不变，因此体积不变。

下图中，原有六面体 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$，是由向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 张成。向量 $\mathbf{a}$ 乘以一个负值的 k 值后与向量 $\mathbf{c}$ 相加后得到新的向量 $k\mathbf{a}+\mathbf{c}$，三个向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},k\mathbf{a}+\mathbf{c}$ 构成了一个新的平行六面体 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},k\mathbf{a}+\mathbf{c})$，这个六面体与原六面体 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 同底等高，因而体积相同。



右图向量$\mathbf{a}$乘以一个正值的 k 值后与向量$\mathbf{c}$相加的结果，与作图类似。



通过观察，我们发现，切变后的平行六面体与 k 值无关。K 值不同，向量$k\mathbf{a}+\mathbf{c}$终端在始终在一条与向量$\mathbf{a}$平行的直线上滑动，因而保持了六面体的等高。

性质 6　　$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$

矩阵 A 的行列式等于矩阵 A 转置的行列式。

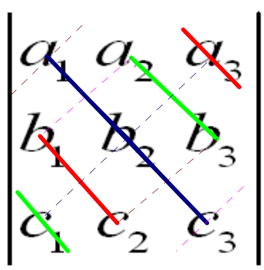
为了便于讨论，我们把三阶行列式及其转置行列式的按照第一行元素展开式列举在这里：

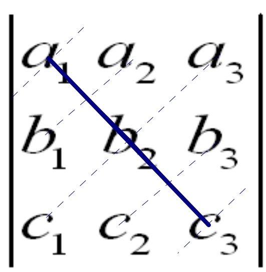
$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

$$\det(A')=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3-c_1b_2a_3$$

显然，上述两式是相等的。这个相等有里外两层几何意义可以解释。先说外层的几何解释：

对照一下这两个图片：



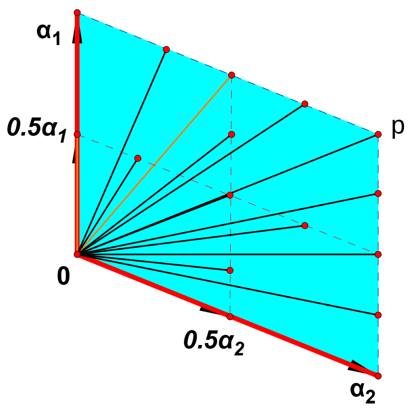


左图是行列式展开时元素相乘的计算图，右图是行列式转置时以$a_1b_2c_3$为反射轴的元素交换图。行列式转置顺序与计算顺序多么一致，怪不得不改变结果呢。

行列式和它的转置相等还有一个深层次的几何意义，可以在下面逆序数的几何意义中得到体现。行列式的乘积项及其逆序数的几何意义实际上是行列式最根本的几何意义，因而可以解释所有的行列式的定义及其性质。后面的章节我们会逐步探讨到这个重要的课题。

：什么是向量张成的平行四边形及平行六面体？

以两个从原点出发的向量为邻边可以画出一个平行四边形；以三个从原点出发的不同方向向量为相邻的棱可以画出一个平行六面体，这个平行六面体与立方体仿射等价。



上图中是以两个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$张成的平行四边形$0\boldsymbol{\alpha}_1P\boldsymbol{\alpha}_2$，在这个平行四边形中有无数的向量，这些向量统统满足线性组合$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2 \quad (0\le k_1,k_2\le 1)$的定义。比如，对角线向量 0P 是最大的向量，满足$k_1=k_2=1$的条件；$\boldsymbol{\alpha}_1P$上的向量满足$k_1=1,\ \ 0\le k_2\le 1$的条件等等。

我们可以推广到 n 维欧几里德空间中的 m 个向量张成的 m 维超平行多面体。如果这 m 个向量表示为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_m$，那么这个 m 维超平行多面体是由以下无穷个向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2...+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \qquad (0\le k_1,k_2...k_m\le 1)$$

组成的。

在后面的章节中，我们还要讨论由向量张成的空间的概念。这时候，实数k_i的范围不是在区间$[0,1]$之上了，而是整个实数域R，因此空间的范围也将变得无穷大的了。

3.4. 行列式化为对角形的几何解释

一个行列式的第 i 行加上 j 行的 K 倍，可以使第 i 行的某一个元素变为 0，而这个行列式的值不变。这个性质在化简行列式时非常有用。在前面的二阶和三阶行列式的性质中我们也已看到了它的

几何意义。不过前面对它的几何解释一般都是使用向量的“箭头”的图形形式给出的，没有考虑向量的元素的变化的几何意义。在本阶中我们就此性质的应用过程中来探究行列式中每一个元素的几何意义。

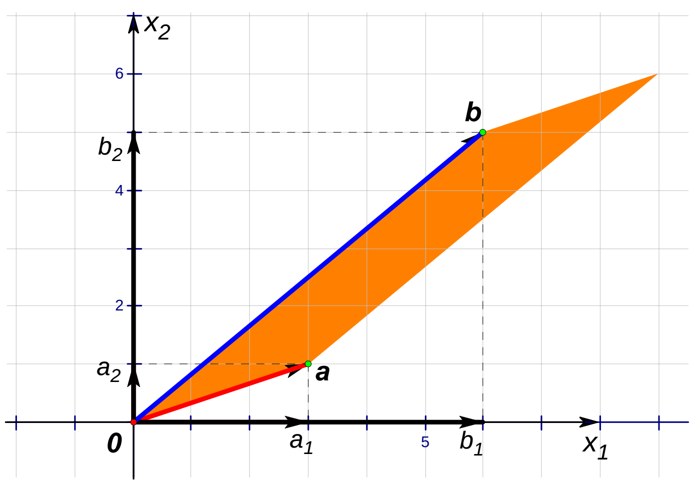
把一般二阶行列式化为上对角形式的行列式，只要把行列式第二行第一列化为 0 就可以了。因此，第一行向量元素 $(a_1 \quad a_2)$ 乘以- $\dfrac{b_1}{a_1}$ (设 $a_1 \neq 0$)后加到第二行上，即可得到如下的三角式：

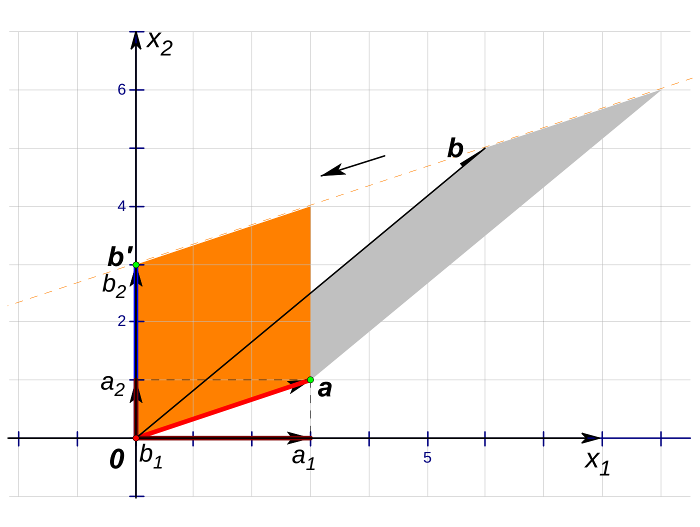
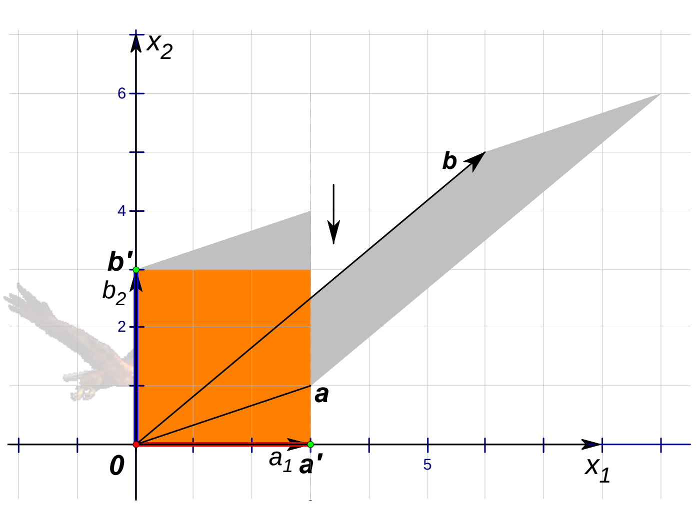
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1} \end{vmatrix}$$

继续化简，把第二行的元素 $(0 \quad \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1})$ 乘以 $-\dfrac{a_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ 后加到第一行上，得到如下的对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1} \end{vmatrix}$$

这个化简的过程我们可以有一个很形象的几何变化过程。

顺序	描述	对应的几何图形
1.1	一个二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$。 其值等于右图阴影平行四边形的有向面积。	

1.2	化简到如下的三角式： $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1} \end{vmatrix}$。 其几何变化过程是向量 **b** 沿着 0**a** 的平行线 **b'b**，滑行到 x_2 坐标轴上，此时 b_1 化为 0。显然两个阴影平行四边形面积不变。	
1.3	继续化简到对角形： $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1} \end{vmatrix}$。 其几何变化过程是向量 **a** 沿着 0**b** 的平行线 **a'a**，滑行到 x_1 坐标轴上，此时 a_2 化为 0。显然三个阴影平行四边形面积相同。	
1.4	至此，一个二阶行列式所表示的平行四边形被变成了一个对角行列式所表示的正（长）方形。	

三阶行列式有类似的变换情形，对角化的过程会把一个平行六面体变化为一个等体积的立方体或长方体。具体的图形不再绘出。

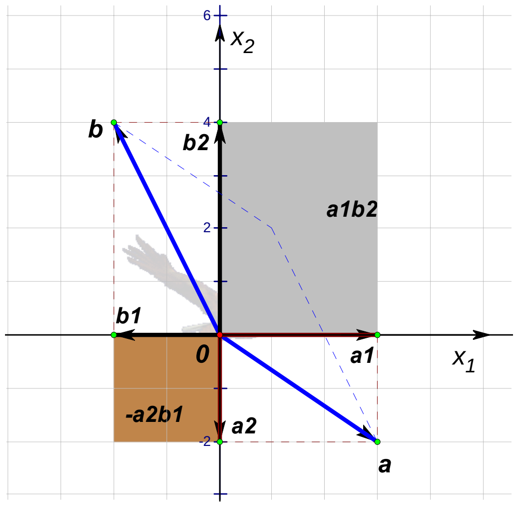
那么 n 阶行列式我们亦不怀疑的认为也可以被表示成一个 n 维的长方体的几何图形。这个结论对于我们理解行列式的展开式很有帮助。

3.5. 行列式乘积项的几何意义

n 阶行列式的展开式是乘积项 $(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ 的和，这些乘积项其实也可以有几何解释的。下面我们详细的了解一下各阶行列式的情况。

二阶行列式乘积项的几何意义

对于二阶行列式而言，既然二阶行列式的几何图形是一个有方向的面积，那么从二阶行列式公理化定义$\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$看，又是如何构成这个面积的呢？显然，式中$a_1b_2$项和$-a_2b_1$项的和构成了这个面积。$a_1b_2$项和$-a_2b_1$项又是什么呢？易知，$a_1$是向量$\mathbf{a}$在$x_1$轴上投影，$b_2$是向量$\mathbf{b}$在$x_2$轴上投影，$a_1b_2$项是$\mathbf{a}$在$x_1$轴上投影和$\mathbf{b}$在$x_2$轴上投影所围成的长方形面积。同样知道，$-a_2b_1$项是$\mathbf{a}$在$x_2$轴上投影和$\mathbf{b}$在$x_1$轴上投影所围成的长方形面积，不过这个面积表达式表现为负数的表达式。如下如图中长方形阴影的面积：



这里有两个问题要注意：

1、 因为二阶行列式表达的是向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$所围成的面积，因此向量$\mathbf{a}$自己的分向量a_1和a_2围成的面积a_1a_2不在统计范围之内，向量$\mathbf{b}$自己的分向量围成的面积b_1b_2也不在统计范围之内；

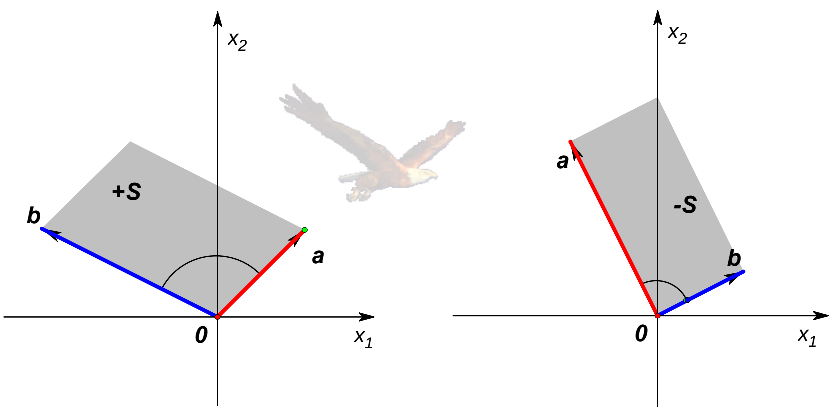
2、 向量$\mathbf{a}$的分向量a_1和向量$\mathbf{b}$的分向量b_1围成的面积a_1b_1要统计，但可惜的是$a_1b_1 = 0$，因为两个分向量投影到同一根坐标轴x_1上。同样的理由，$a_2b_2 = 0$。

前面我们在解释二阶行列式的转置时讲过，两个向量的叉积等于这两个向量的各个分量（各坐标轴方向的分量）分别进行叉积的求和。各个分量互相垂直，因而进行叉积运算张成的四边形是方形的面积。向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$的叉积（有向面积）等于每个向量的分向量所有可能的叉积之和。因为在直角坐标系下，向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$落在同一坐标轴上的分量叉积显然为零。因此进行叉积的分量必然是不在的坐

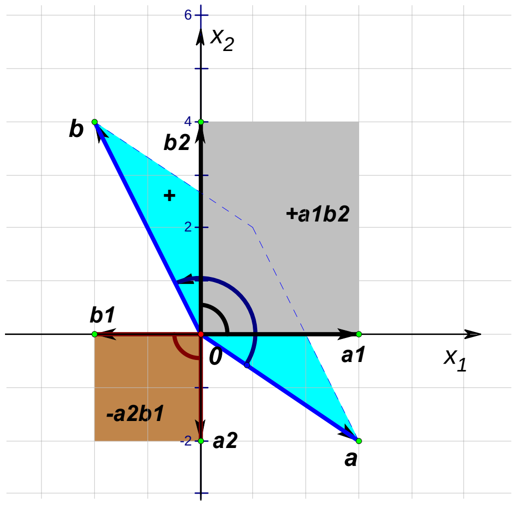
标轴上。

a_1b_2 项和 $-a_2b_1$ 项都是有向面积，a_1b_2 项的面积和此二阶行列式的面积方向相同，因此符号为正，$-a_2b_1$ 项的面积和此二阶行列式的面积方向相反，因此符号为负。

那么二阶行列式的面积及其乘积项的面积的方向如何确定呢？对二阶行列式来说，有不同的方法可以确定，我们这里使用叉积的右手法则来判断。这里，我们把行列式 $\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}$ 看作由两个行向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所组成，其中排在第一行的元素组成第一个向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$，排在第二行的元素组成第二个向量 $\mathbf{b} = (b_2, b_2)$，（看成两个列向量也有类似的结果，因为转置行列式值不变）。这是一个顺序，不要错了。那么行列式 $\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}$ 的面积方向就是由第一向量转向第二向量时右手大拇指所确定的方向。



上图左，行列式的方向为指向读者；图右，行列式的方向指向页面内，背向读者。下图中，行列式的方向是指向读者，那么，分向量 $\mathbf{a_1}$ 和 $\mathbf{b_2}$ 张成的长方形（右上角图块）面积的方向也是指向读者的，因此面积为正，故记为 a_1b_2；分向量 $\mathbf{a_2}$ 和 $\mathbf{b_1}$ 张成的长方形（左下角图块）面积的方向指向页面内，背向读者，与行列式方向相反，因此面积为负，故记为 $-a_2b_1$。



三阶行列式乘积项的几何意义

依据三阶行列式的公式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$，与二阶行列式的乘积项的几何解释类似，三阶行列式的乘积项如$a_1b_2c_3$，$a_2b_3c_1$等，可以看成具有有方向的小长方体的体积。也就是说，在三阶方阵张成的三维平行六面体可以分解为一个个由各座标分量混合积构成的小长方体。这些小长方体共有六块，其体积具有方向。

既然平行六面体和小长方体都是具有方向的三维几何图形，那么这些方向是如何确定呢？与上一节的论述类似的，也是由张成这些三维几何图形的有序的三元向量组所决定的。三个无关向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$的有序组根据右手法则可以确定一个方向。这个确定的方法类同于叉积定义的方法：

从向量$\mathbf{a}$的方向转过一个$0 \sim \pi$之间的角度到达向量$\mathbf{b}$的方向，右手拇指方向是向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$所确定平面的正向，如果向量$\mathbf{c}$在此平面正向的一面，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$的有序组就确定了一个正的方向；如果向量$\mathbf{c}$在正向平面的另一面，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$的有序组就确定了一个负的方向。和向量的叉积联系起来讲，第三个向量$\mathbf{c}$与向量$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$在$\mathbf{a}, \mathbf{b}$所确定平面的同一侧时确定一个正的方向。

换一种说法就是，从向量$\mathbf{c}$的的逆方向看过去，向量$\mathbf{a}$的旋转过一个$0 \sim \pi$之间的角度到达向量$\mathbf{b}$的方向符合逆时针方向。

因此，我们有一些结论：

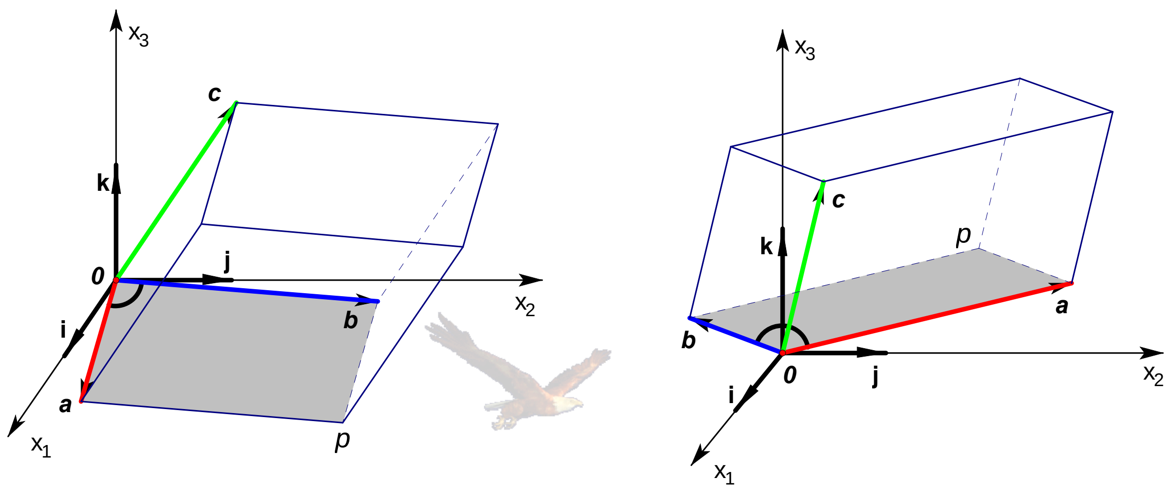
- $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$有序组与$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$有序组具有相反的方向；

- $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 有序组与三维坐标向量的有序组 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 的方向永远相同；

- 如果 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 有序组与坐标向量有序组 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 有同样的定向，我们就称 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 有序组相对于坐标系 (x_1,x_2,x_3) 有正向；如果有相反的方向，就称为负向；

- $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 有序组有正向的充分必要条件是行列式 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})>0$；

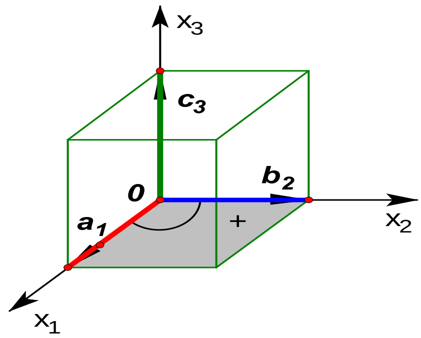
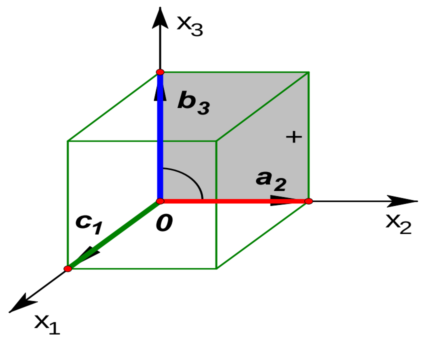
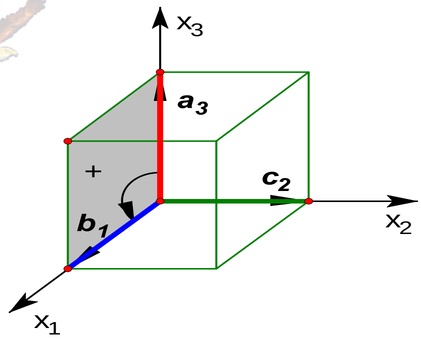
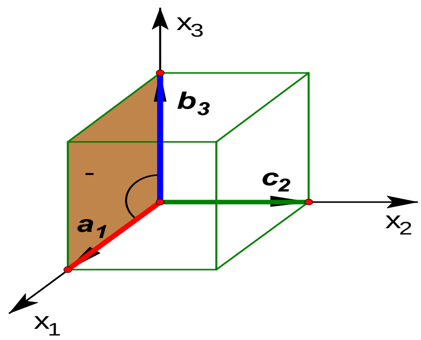
- 行列式 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})>0$ 意味着 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}>0$。

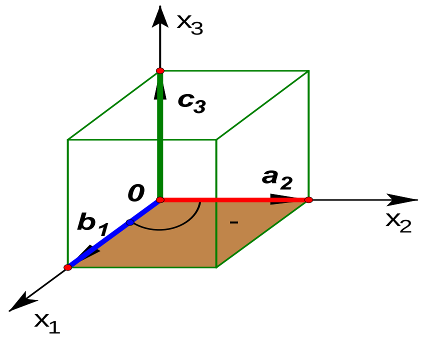
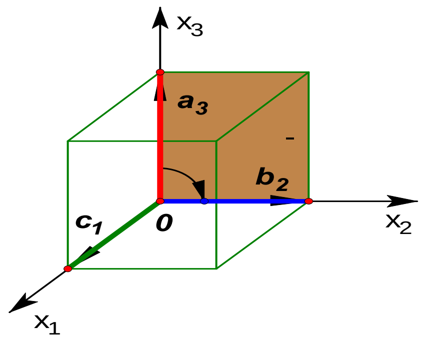


$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}>0$，也就是说，向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的方向与向量 $\mathbf{c}$ 的方向作成一个锐角，也就是向量 $\mathbf{c}$ 与向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 所确定平面的同一侧,这和前面的解释是一致的。

同样，这些小长方体的方向也是由三个坐标轴上的向量投影所确定：与坐标向量有序组 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 有同样的定向，我们就称 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 有序组相对于坐标系 (x_1,x_2,x_3) 有正向；如果有相反的方向，就称为负向。因为小长方体是由三个坐标轴上的三个不同向量的投影向量所张成，三个投影分量互相垂直，因此我们可以方便地使用右手法则确定其方向。如果是正向，则长方体体积的乘积项大于 0，否则小于 0。下面我们画出 6 个小长方体的方向确定的几何图形。

顺序	乘积项及其解释	对应的几何图形

1．1	$+a_1b_2c_3$ 项： 以右手法则，向量有序组 $(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{c}_3)$ 与坐标系方向一致，乘积项为正。	
1．2	$+a_2b_3c_1$ 项： 以右手法则，向量有序组 $(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{c}_1)$ 与坐标系方向一致，乘积项为正。	
1．3	$+a_3b_1c_2$ 项： 以右手法则，向量有序组 $(\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_1,\mathbf{c}_2)$ 与坐标系方向一致，乘积项为正。	
	$-a_1b_3c_2$ 项： 以右手法则，向量有序组 $(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_3,\mathbf{c}_2)$ 与坐标系方向相反，乘积项为负。	

	$-a_2b_1c_3$ 项: 以右手法则，向量有序组 $(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{c}_3)$ 与坐标系方向相反， 乘积项为负。	
	$-a_3b_2c_1$ 项: 以右手法则，向量有序组 $(\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2,\mathbf{c}_1)$ 与坐标系方向相反， 乘积项为负。	

n 阶行列式乘积项的几何意义

N 阶行列式的展开式是乘积项 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ 的和，t 为排列 $j_1j_2...j_n$ 的逆序数。行列式的行向量在坐标系中向各个坐标轴的投影就是行列式中的元素 $a_{1j_1},a_{2j_2},...a_{nj_n}$，这些元素当然也是行向量在各个坐标轴上分向量。这些坐标轴上分向量也可以张成一个个小小的 n 维超长方体（共 $n!$ 个）。我们刚好知道，N 阶行列式的超平行多面体的几何图形是由行(或列)向量张成的，而且这个 n 维超平行多面体与一个 n 维超长方体等体积。那么大家就会容易得到：

- $n!$ 个小的 n 维长方体叠加成了大的表示 n 阶行列式的 n 维超长方体；
- $n!$ 个小的 n 维长方体就是 $n!$ 个乘积项 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ 的几何图形。

实际上，一个 n 阶行列式可以分拆成 $n!$ 个只有坐标轴分向量组成的 n 阶对角行列式，而 $n!$ 个 n 阶对角行列式就是 $n!$ 个乘积项 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$。

比如一个二阶行列式可以分拆成两个这样的二阶对角行列式：

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1
\end{aligned}$$

一个三阶行列式可以拆分成六个（其余的行列式值等于零）三阶对角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & c_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 0 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

因此，二阶行列式的有向面积是由两块小长方形有向面积累加的代数和。三阶行列式的有向体积是由六块小长方体有向体积累加的代数和。

决定每一个面积块和体积块的符号或方向的因素是乘积项中元素的排列顺序，这个排列顺序决定了逆序数。通过上面的行列式拆解式，我们看到，每一个乘积项对应一个同样阶数的行列式，乘积项中每一个元素对应着一个向量（在坐标轴上）。

一个行列式的整体几何意义是有向线段（一阶行列式）或有向面积（二阶行列式）或有向体积（三阶行列式及以上）。因此，行列式最基本的几何意义是由各个坐标轴上的有向线段所围起来的所有有向面积或有向体积的累加和。这个累加要注意每个面积或体积的方向或符号，方向相同的要加，方向相反的要减，因而，这个累加的和是代数和。

3.6. 克莱姆法则的几何意义

1750 年，瑞士的克莱姆发现了用行列式求解现行方程组的克莱姆（Cramer）法则。这个法则在表述上简洁自然，思想深刻，包含了对多重行列式的计算，是对行列式与线性方程组之间关系的深刻理解。如果我们不能从几何上解释这个法则，就不可能领会向量、行列式和线性方程组之间的真正关系。

二阶克莱姆法则的几何解释

二阶线性方程组：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

其克莱姆法则的解：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

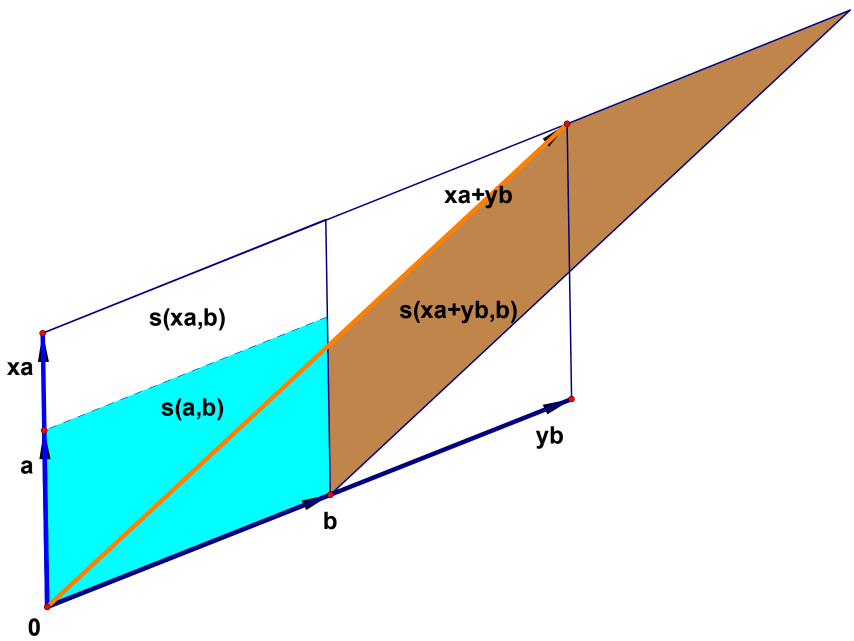
在这里，为了解释其几何意义，同样，从行列式的列或行向量的角度入手。2 阶列向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{x}$ 分别表示为：

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

上述二阶线性方程组使用向量的形式表示为 $(\mathbf{a}\ ,\mathbf{b})\mathbf{x}=\mathbf{c}$。下面我们推导出二阶克莱姆法则：对于二阶线性方程组的系数行列式为 $|\mathbf{a},\mathbf{b}\ |$，我们构造出：

$$x|\mathbf{a},\ \mathbf{b}\ |=|x\mathbf{a},\ \mathbf{b}\ |=|x\mathbf{a}+y\mathbf{b},\ \mathbf{b}\ |=|\mathbf{c},\ \mathbf{b}\ |。$$

因此：$x=\dfrac{|\mathbf{c},\ \mathbf{b}\ |}{|\mathbf{a},\ \mathbf{b}\ |}$，据此推理过程，绘出几何图形如下：



在上图中，向量 $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ 的面积是 $s(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=|\mathbf{a},\ \mathbf{b}\ |$，这个面积乘以一个数值 x（这里 x 大于 1），

则 $s(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 伸展为 $s(x\mathbf{a},\mathbf{b})$；此时进行右向切变换，面积不变，表达式则为 $s(x\mathbf{a}+y\mathbf{b},\mathbf{b})$ 即 $s(\mathbf{c},\mathbf{b})$。

由克莱姆法则的表达式 $x=\dfrac{|\mathbf{c},\mathbf{b}|}{|\mathbf{a},\mathbf{b}|}=\dfrac{s(\mathbf{c},\mathbf{b})}{s(\mathbf{a},\mathbf{b})}$，我们可以归纳出：

x 为由面积 $s(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 伸缩和切变到 $s(\mathbf{c},\mathbf{b})$ 的面积之比例，是变化前后的面积之比。

同理，我们构造出 $y|\mathbf{a},\mathbf{b}|=|\mathbf{a},y\mathbf{b}|=|\mathbf{a},x\mathbf{a}+y\mathbf{b}|=|\mathbf{b},\mathbf{c}|$，得到 $y=\dfrac{|\mathbf{b},\mathbf{c}|}{|\mathbf{a},\mathbf{b}|}$。几何图形类同 $x=\dfrac{|\mathbf{c},\mathbf{b}|}{|\mathbf{a},\mathbf{b}|}$，不再给出了。

三阶克莱姆法则的几何解释

类似的，三阶线性方程组如下：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

其克莱姆法则的解：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\ z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

相类似的，三阶列向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{x}$ 分别表示为：

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},\mathbf{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

三阶线性方程组表示为：$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{x}=\mathbf{d}$，与二阶克莱姆法则的推导类似，下面我们推导出三阶克莱姆法则：

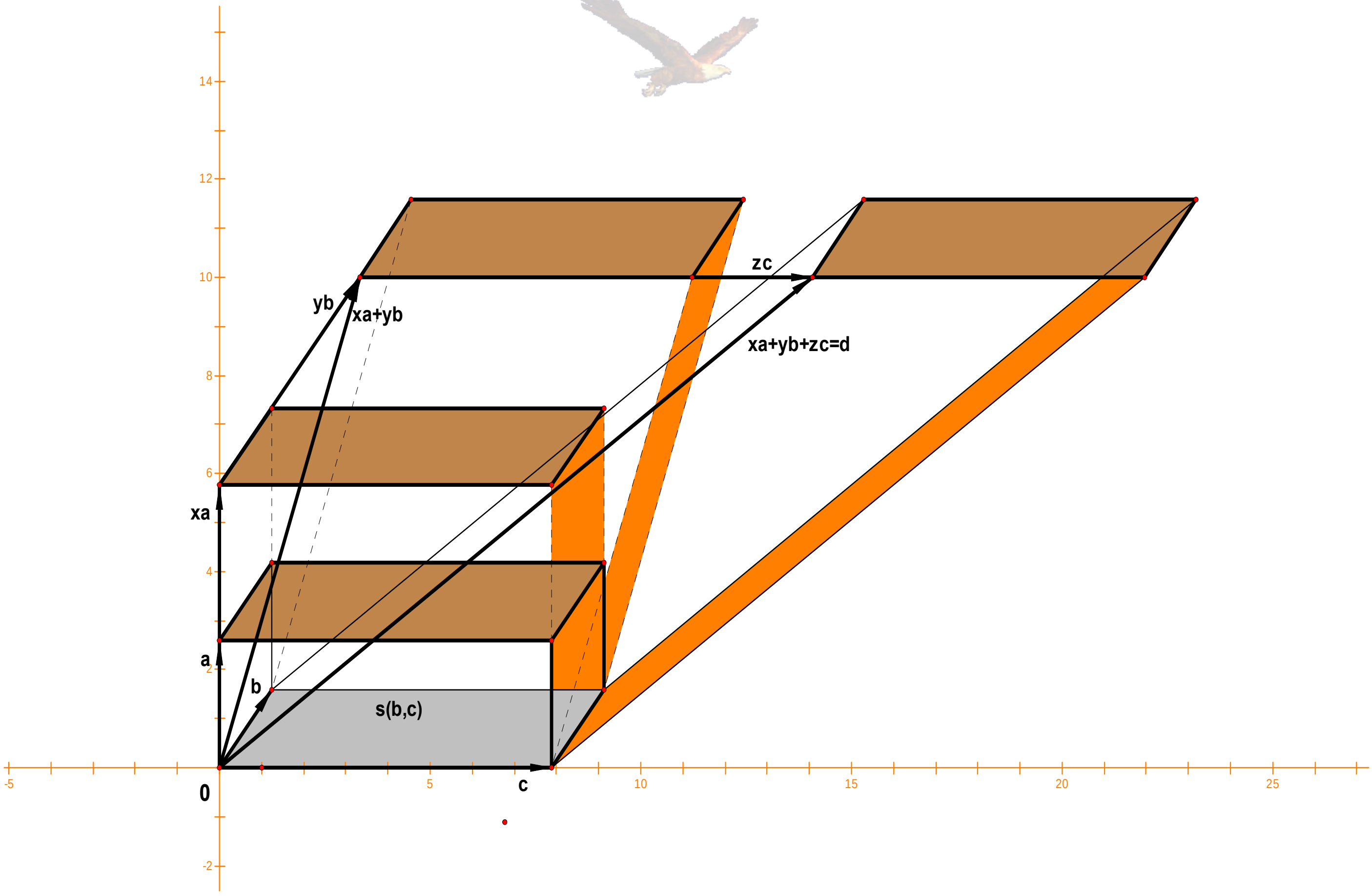
对于三阶线性方程组的系数行列式为$|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|$，我们构造出：

$$x|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|=|x\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|=|x\mathbf{a}+y\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{c}|=|x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{c}|=|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{x},\mathbf{b},\mathbf{c}|=|\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c}|。$$

因此：$x=\dfrac{|\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c}|}{|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|}$。

类似的，我们可以得到 $y=\dfrac{|\mathbf{a},\mathbf{d},\mathbf{c}|}{|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|},z=\dfrac{|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}|}{|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|}$。

据上述推理过程，绘出 $x=\dfrac{|\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c}|}{|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|}$ 几何图形如下：



由上图看到，由向量$\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c}$张成的平行六面体的体积$|\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c}|$除以以向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$张成的平行六面

体的体积$|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|$就是向量**a** 的伸缩量 x 值。因为我们看到，在上图所示的变换中，以**b,c** 两向量张成的平行四边形面积$\mathbf{s}(\mathbf{b},\mathbf{c})$为底的平行六面体的变化过程中，只有向量**a** 进行了伸缩变化，其余的平行六面体的变化只是先后沿着向量**b** 和**c** 的方向进行切向变化，因此向量**a** 方向的高度没有变化。

克莱姆法则的意义是可以用方程组的系数和常数项的行列式把方程组的解简洁的表达出来。但在实际工程应用中由于计算量较大，常常采用高斯消元法来解大型的线性方程组。在后面的线性方程组一章，我们将探讨高斯消元法的意义。

在以上的几何解释中，除了伸缩、旋转、镜像就是切变，向量的大小和方向在变化，但没有对向量进行弯曲，扭曲变化，全部是直线段的变化。所有的变化保持直线性。这就是线性变换的本质含义！

3.7. 行列式的一些应用

结合实际生活中的例子解释行列式的性质，如：一句玩笑话“把人都挤成照片了”，引申到维数的变化。人是三维的物体，体积不为零。挤成二维的照片，体积就变成了零。行列式也是这样：三阶行列式表示平行六面体的有向体积，如果其中有某两列相等，就是说平行六面体的三条相邻的棱中有两条重合，平行六面体退化成平面图形，也就是被“挤成照片”了，体积变成零。类似地，二阶行列式表示平行四边形的有向面积，如果两列相等，“平行四边形”的相邻两边重合，平行四边形退化为一条线段，面积为零。一般地，n 阶行列式可以想象成一个 n 维立体的 n 维体积，如果它有某两列相等，“n 维立体”退化为 n-1 维或者更低维数的图形。“n 维体积”当然就等于零。

线性代数中的行列式可以方便的应用到几何以及其它课程中，简洁地表示出一些结论，以帮助学生记忆和理解这些结论。

过平面两点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)的直线方程为$\begin{vmatrix} x,y,1 \\ x_1,y_1,1 \\ x_2,y_2,1 \end{vmatrix}=0$，

再推广到空间有不在同一条直线上的三点(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x\,,\,y\,,\,z\,,1 \\ x_1\,,\,y_1\,,\,z_1\,,1 \\ x_2\,,\,y_2\,,\,z_2\,,1 \\ x_3\,,\,y_3\,,\,z_4\,,1 \end{vmatrix} = 0$$

例。在空间中，有三点 A(a1，a2，a3)，B(b1，b2， b3)，C(c1， c2， c3)，令过点 A，B，C 的平面是π，M(x，y，z)是π上的任意一点，令$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)^T,\ \overrightarrow{AC}=(c_1-a_1,\ c_2-a_2,\ c_3-a_3)^T$,

则由 $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=0$，推出 π 的方程可用行列式表示为

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$$

进一步，根据行列式的性质，上式左端的行列式变形如下

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -a_1 & y & z \\ -a_1 & b_2 & b_3 \\ -a_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & -a_2 & z \\ b_1 & -a_2 & b_3 \\ c_1 & -a_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y & -a_3 \\ b_1 & b_2 & -a_3 \\ c_1 & c_2 & -a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & y & z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_1\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} 1 & x & z \\ 1 & b_1 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}-a_3\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=-D$$

故， π 的方程还可用行列式表示为 D=0。

在平面上过点 A(a1，a2)，B(b1，b2)的直线方程可用行列式为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

在线性代数教材[4]的例题中，推出了过平面上三点 Ai(xi，yi)， (i=1，2，3)且对称轴平行于 y 轴的抛物线方程为：

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & y \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix}=0$$

还推出了以点 A(a1，a2，a3)，B(b1，b2，b3)，C(c1， c2， c3)，D(d1，d2，d3)为顶点的四面体体积公式为：

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

等等。可以说，这是行列式作为一个基本工具的重要应用，这充分体现了线性代数与几何的联系。

请关注第四章：

第四章　向量组及向量空间的几何意义

待续