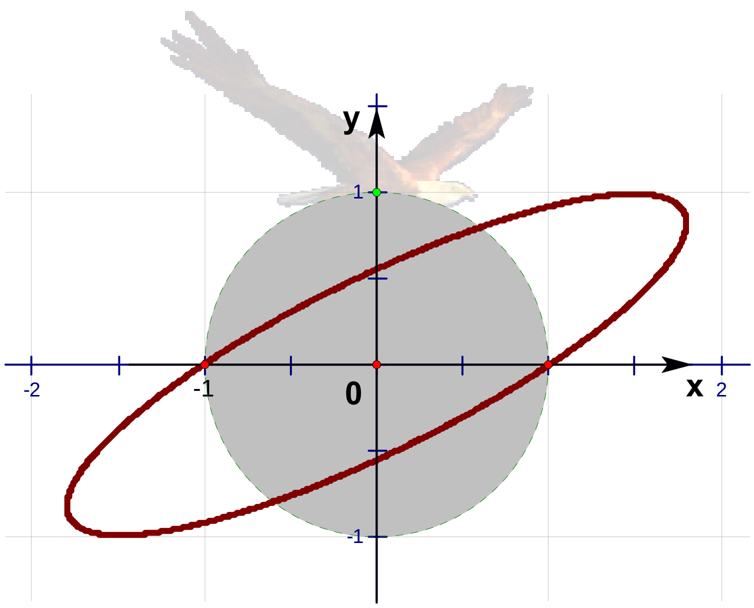
---图解线性代数-----

线性代数的几何意义之（4）

任广千　胡翠芳 编著



2010.07.01

几何意义名言录

没有任何东西比几何图形更容易印入脑际了，因此用这种方式来表达事物是非常有意义的。 -------笛卡尔

算术符号是文字化的图形，而几何图形则是图像化的公式；没有一个数学家能缺少这些图像化的公式。 --------希尔伯特

“如果代数与几何各自分开发展，那它的进步十分缓慢，而且应用范围也很有限，但若两者互相结合而共同发展，则就会相互加强，并以快速的步伐向着完善化的方向猛进。”

--------拉格朗日

不会几何学就不会正确的思考，而不会正确思考的人不过是行尸走肉。 --------柏拉图

无论是从事数学教学或研究，我是喜欢直观的。学习一条数学定理及其证明，只有当我能把定理的直观含义和证明的直观思路弄明白了，我才认为真正懂了。--------中国当代数学家徐利治

第三章　向量组及向量空间的几何意义

向量组的关键概念是线性相关性及其秩的概念，在向量组张成的向量空间里，基、维数、坐标及基变换等也是些有点让人头疼的东东。本章就是要从几何图形上弄清这些概念，让抽象的概念回归形象的几何解释。

4.1. 向量组的几何意义

向量组是对有限个向量集合的研究，对向量组的性质了解清楚后，就会对矩阵和线性方程组的性质认识更加深入。因为矩阵实际上就是一个有序向量组。线性方程组实际上就是向量组的线性表示。因此，在开展矩阵及方程组的研究之前，有必要先研究清楚向量组的问题。

向量组里的向量们有哪些特性呢？有什么共性？有没有不变量？

有，这个不变的特性就是一个叫“秩”的东东。下面我们来慢慢探究一下。

4.1.1. 线性表示、组合及相关性的意义

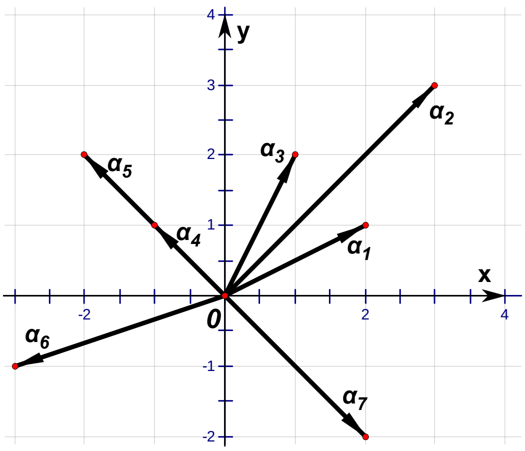
向量的线性表示和组合的几何意义

先看看下面的图中平面向量集合。这个集合有七个二维向量。用坐标表示出来就是：

$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(-2,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_6=(-3,-1)$，

$\boldsymbol{\alpha}_7=(2,-2)$。

仔细观察后发现：



向量$\boldsymbol{\alpha}_2$可以两个向量$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_3$向加得到，即$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$；

向量$\boldsymbol{\alpha}_5$可以由$\boldsymbol{\alpha}_4$乘以 2 得到，也可以由$\boldsymbol{\alpha}_7$乘以-1 得到，即$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_4$或$\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_7$；

甚至，向量$\boldsymbol{\alpha}_6$也可以由$\boldsymbol{\alpha}_2$的数乘和$\boldsymbol{\alpha}_7$数乘之和得到，即$\boldsymbol{\alpha}_6=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_7$；

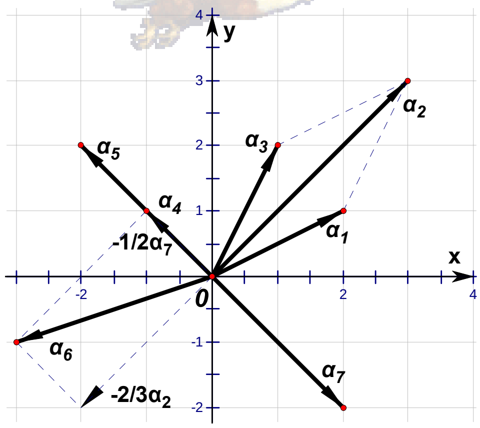
…

上面的例子是说，一个向量可以由另外一个或几个向量（向量组）用数乘之和的形式表示出来，一般表达式就是：$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$， $x_1,x_2,\ldots x_s$是常数；这里称之为向量$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_s\}$线性表示。或者讲，向量$\boldsymbol{\beta}$是向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_s$的线性组合。

我们研究一下线性表示的表达式$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$，明显的：向量$\boldsymbol{\alpha}_1$数乘$x_1$，向量$\boldsymbol{\alpha}_2$数乘$x_2$，…，然后把数乘后的向量相加起来就得到了一个新的向量$\boldsymbol{\beta}$。反过来讲，一个向量$\boldsymbol{\beta}$被分解为几个向量的倍数。所以我们得到一个结论：

线性组合或表示式实质上是向量的数乘和加法的综合。

在第二章的向量介绍中，我们知道，数乘的几何解释就是在原向量的直线上向量长度的伸长或缩短；两向量相加的几何解释就是进行依照平行四边形法则对向量合并；因此向量的线性组合的几何意义就是对向量组内的向量长度进行缩放后依照平行四边形法则进行合并加；线性表示的几何意义就是可以把一个向量依照平行四边形法则分解（或投影）为向量组上的和。如下图所示。



向量的线性相关和线性无关的几何意义

如果一个向量可以由一个向量组线性表示，我们就称这个向量和向量组线性相关。另外的说法就是，一个向量组里，只要有一个向量可以由其它向量线性表示，我们就称这个向量组线性相关。反之，如果向量组里的任意一个向量都不能由其它向量线性表示，我们就称向量组线性无关。

上图中线性相关的向量组例举如下：

{ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$}线性相关，因为$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$；

$\{\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_7\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_7\}$都线性相关，因为$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_7$；

$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_6,\boldsymbol{\alpha}_7\}$线性相关，因为$\boldsymbol{\alpha}_6=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_7$；

…

仔细研究，我们就会发现一些规律，就是在二维平面上：

- 如果两个向量线性相关，那么这两个向量必然在一条直线上（这也是“线性相关”术语的由来），两个向量的方向或者相同或者相反；反之也成立，例如向量$\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_7$在一条直线上，因此两两相关；

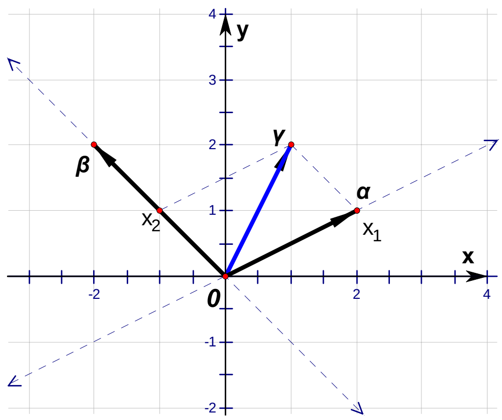
解释：因为在一条直线上的所有向量中的两个向量都具有x倍数的关系：$\boldsymbol{\beta}=x\boldsymbol{\alpha}$，所有向量都线性相关。

- 不在一条直线上的任意两个向量一定线性无关；如向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4(or\,\boldsymbol{\alpha}_5\,or\,\boldsymbol{\alpha}_7),\boldsymbol{\alpha}_6$两两线性无关。

解释：因为一个向量必然不能被另外一个向量线性表示。如果一个向量能够被另外一个向量线性表示的话即$\boldsymbol{\beta}=x\boldsymbol{\alpha}$，那么这两个向量就是$x$倍数的关系，就会在一条直线上。这与命题的前提矛盾。

- 在二维平面空间上，任意三个向量必然相关，如$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_6,\boldsymbol{\alpha}_7\}$等。当然，三个以上的向量也必然线性相关。

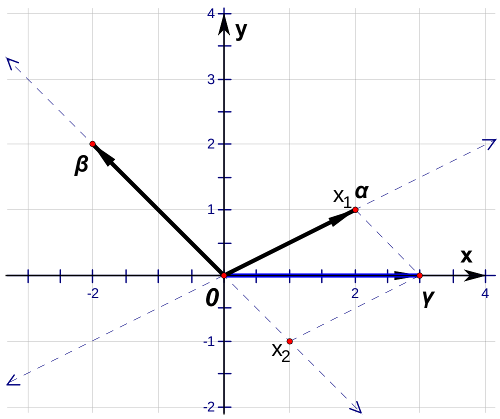
解释：我们看看任意一个三向量$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$，如果其中任意两个如$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关，不用说这个三向量的向量组也线性相关；下一步我们设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性无关，看看为什么这个三向量的向量组就现行相关了呢？如下图：

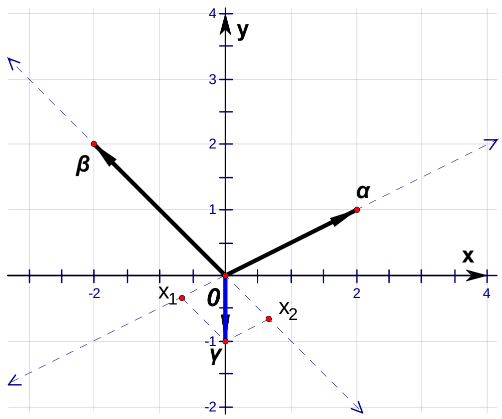


上图中，我们随意画出不在一条直线上的两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，分别作出过此两向量的直线（所示虚线）；然后过第三个向量γ的头部点分别作$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的平行线，分别交$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$直线的交点为$x_1,x_2$。至此，

我们构造出了向量$\boldsymbol{\gamma}$的分解式$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{\beta}$。

改变向量$\boldsymbol{\gamma}$的位置如下图，我们仍然同样得到同样的表达式，只是x_1，x_2的值不同罢了。





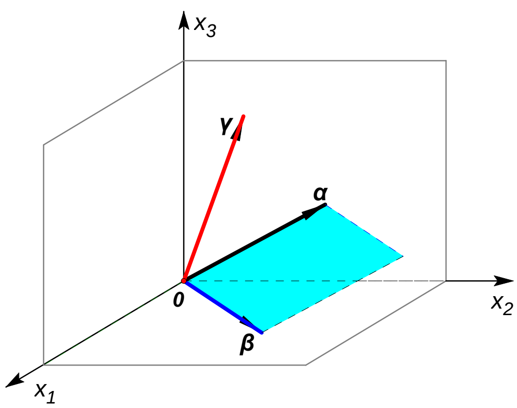
这个分解式就是线性表示式。因此$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$线性相关（再强调一下，此命题在二维向量空间中成立）。

对于通常的三维空间的向量，线性相关和线性无关也有直观的几何意义。

先考察三维空间中两个向量的线性关系。由定义，它们线性相关是说其中一个是另一个的线性组合，即只与另一个向量相差一个常数因子，这就是说，这两个向量落在同一条直线上，方向相同或者方向相反。反之，如果两个向量落在同一条直线上，那么它们就线性相关。两个向量线性无关则说这两个向量不平行，不能平移地搬到同一条直线上去。

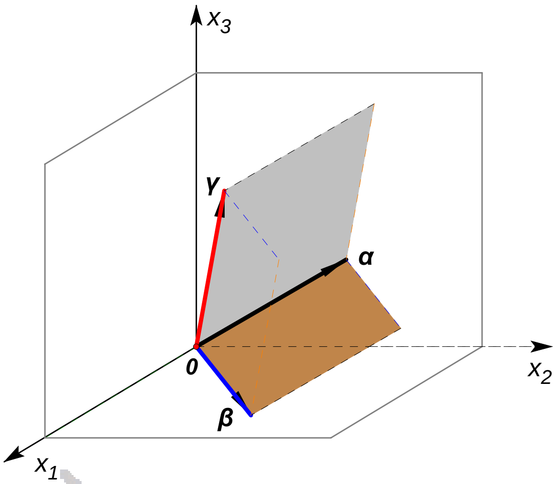
现在来考察三维空间中三个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$的线性关系。

设向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关。那么就有$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$两两线性无关，任意假设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性无关，则说明$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$不在同一条直线上，向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$所在的两根相交直线构成了一个平面（或者讲$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$张成的平面），这个平面上的所有的向量是$x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{\beta}$　（x_1,x_2为任意实数）。



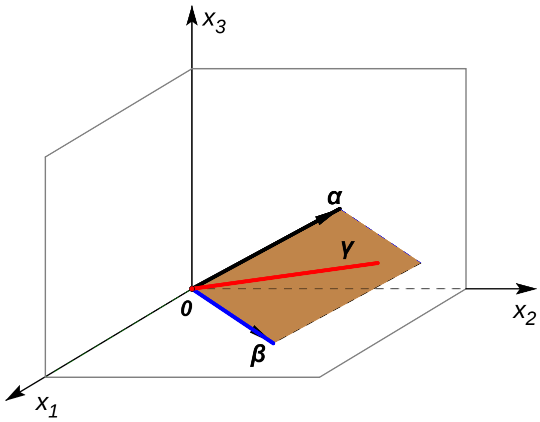
既然$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关，那么就没有$x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$的可能，也就是说向量$\boldsymbol{\gamma}$必然不在这个平面上，而是在这个平面之外。

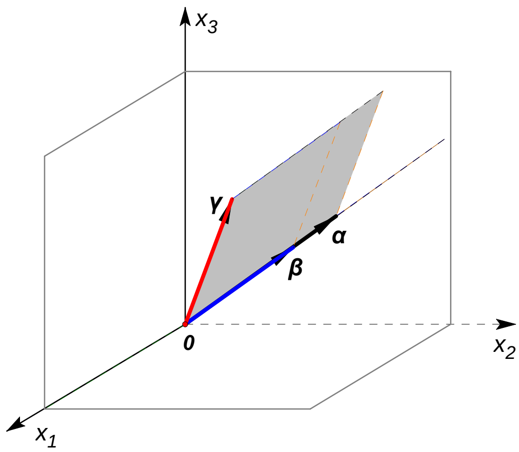
实际上，这三个向量中任意一个向量，都不在其余两个向量所张成的平面内，如果用这三个三维向量构成一个三阶行列式，那么必然张成一个平行六面体，同时行列式的值不等于零。



如果设向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性相关。这里有几种情况。

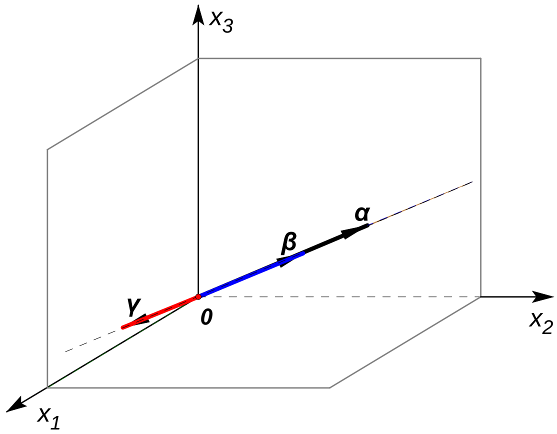
一种情况是三个向量在一个平面上（共面）。正如前面讨论三个向量线性无关的情况相反。任意的，如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$不相关，那么$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$会张成一个平面$\{x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{\beta}\}$；又因为$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性相关，则必会有$\boldsymbol{\gamma}$落在这个平面上即$x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$（$x_1,x_2$因$\boldsymbol{\gamma}$的不同而不同），如下图左。如果$\boldsymbol{\gamma}$不落在这个平面上，会得到$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关的矛盾。





任意的，如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关，但第三个向量$\boldsymbol{\gamma}$与$\boldsymbol{\alpha}$（或$\boldsymbol{\beta}$）线性无关，则也会有一个平面出来，仍然会得到三个向量共面的情况，如上图右。

一种情况是三个向量在一条直线（共线）。继续前面的讨论。也就是说，如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关，第三个向量$\boldsymbol{\gamma}$也与$\boldsymbol{\alpha}$（或$\boldsymbol{\beta}$）线性相关。那么三个向量会无意外的落在同一条直线上，如下图。



4.1.2. 向量组等价及秩的几何意义

向量组的等价的几何解释

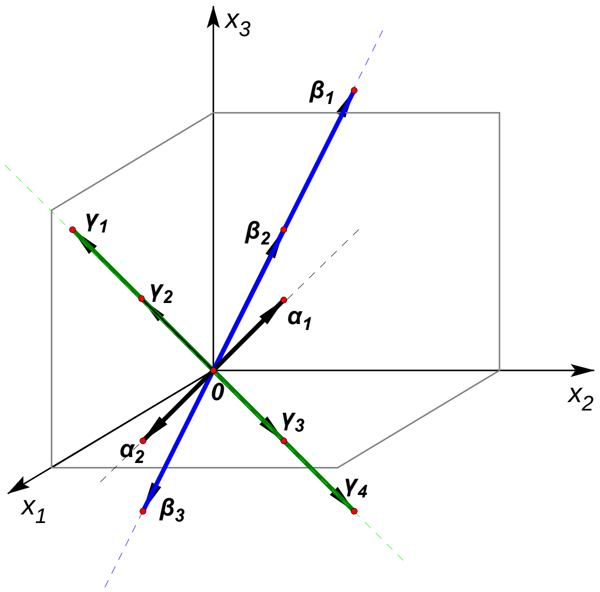
两个向量组 A 和 B 的等价就是这两个向量组能够互相被线性表示。详细地说，向量组 A 中的每一个向量都可以被向量组 B 线性表示；同样，向量组 B 中的每一个向量也可以被向量组 A 线性表示。或者说，如果把一个向量组中的任意一个向量拿出来放到另外一个向量组中，那么另外这个扩大的向量组就会线性相关，而且不论原向量组是否线性相关。采用向量空间（后面会探讨向量空间）的概念，就会清晰的明了向量组等价的几何意义：

向量组 A 中每一个向量都在向量组 B 张成的向量空间中；同样，向量组 B 中的每一个向量也在向量组 A 张成的向量空间中。或者说，两个向量组如果张成的向量空间相同或重合，就讲这两个向量组等价。

先看看 3 维的空间中的向量组的等价关系

直线上的等价向量组：

下图三维空间中，共有三条分离的不共面直线，每条直线上分别由两个、三个和四个向量。两向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$在一条直线上；三向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$在另外一条直线上；四向量$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$在第三条直线上。



由此，我们可以验证以下的命题：

- $\{\boldsymbol{\alpha}_1\},\{\boldsymbol{\alpha}_2\},\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 是等价向量组；

- $\{\boldsymbol{\beta}_1\},\{\boldsymbol{\beta}_2\},\{\boldsymbol{\beta}_3\},$
  $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\},\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3\}\{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\},$ 是等价向量组；
  $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$

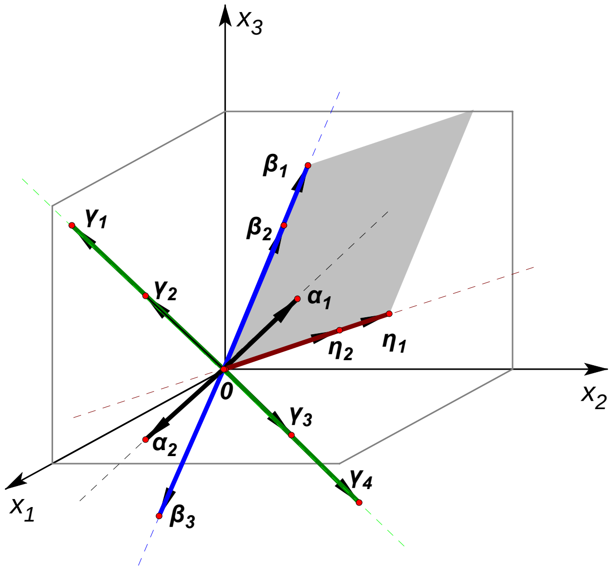
- $\{\boldsymbol{\gamma}_1\},\{\boldsymbol{\gamma}_2\},\{\boldsymbol{\gamma}_3\},\{\boldsymbol{\gamma}_4\},$
  $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\},\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_3\},\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_4\},\{\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3\},\{\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_4\},\{\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4\}$ 是等价向量组；
  $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3\},\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_4\},\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4\},\{\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4\}$
  $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4\}$

其实上述的命题不用验证也可以知道，因为我们罗列的等价向量组是在一条直线上，而在一条直线上的向量是可以互相线性表示的。

另外，更多的向量组，如果他们所属的直线集合是相等的，那么这些向量组也是等价的，比如三个向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\},\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4\},\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4\}$ 是等价的，因为每一组的向量都在 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\gamma}$ 两条直线上。

平面上的等价向量组：

类似的，三维空间中，我们可以看看直线上和平面上的向量组之间的等价关系。如下图中，向量 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\eta}_i$ 分别所在的三条直线共面（阴影平行四边形），因此向量 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\eta}_i$ 中的任何一类可以被其它两类线性表示例如有关系 $\boldsymbol{\alpha}_i = x_1\boldsymbol{\beta}_i + x_2\boldsymbol{\eta}_i$ 。



那么，除了前面介绍过的直线上的等价向量组外，再考虑平面的话就有一下的等价关系：

- $\{\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i\},\{\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\eta}_i\},\{\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\eta}_i\},\{\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\eta}_i\}$ 是等价向量组；

比如 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2\},\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1\},\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\eta}_2\},\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\}$ 是等价向量组。

如果一个平面在加一个平面外的一条直线 $\boldsymbol{\gamma}$，有以下的等价关系：

- $\{\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i,\gamma_i\},\{\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\eta}_i,\gamma_i\},\{\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\eta}_i,\gamma_i\},\{\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\eta}_i,\gamma_i\}$ 是等价向量组；

比如 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\gamma_1\},\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1,\gamma_2\},\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\eta}_2,\gamma_1,\gamma_3\},\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\}$ 是等价向量组。

向量组的秩及极大无关向量组

向量空间中的向量无穷多，因此，可以有无数个向量组等价。而且等价的向量组中的向量个数也不尽相同。

从前面的罗列中，还可以看出最短的等价向量组是只有一个向量元素的向量组；长的等价向量组的元素可以无穷多。这里，最短的向量组实际上就是极大无关向量组，最大无关向量组的元素的个数就是等价向量组的秩。如果等价向量组最小只有一个向量，则等价向量组的秩等于 1。

我们可以这样理解极大无关向量组：从原来的较长的向量组中挑出一部分向量组成了一个新的向量组，这个新的向量组在某种意义下可以代表原来的向量组（因为两者等价，可以互相表出）；同时这个新的向量组中很纯净，没有躲在别人后面滥竽充数的向量，多余的向量被剔出了，向量之互相独立，个顶个，既不代表谁也不被代表（任一个向量都不能被其它向量线性表示）。这些个顶个的向量个数就是这些互相等价的向量组的秩。

从几何意义上讲，在一个向量组里，如果有多个向量在一条直线上，哪么这些向量只要一个向量就可以了，其他的同直线的向量可以被代表了。这个向量代表可以是任意一个非零向量；进而，

如果向量组里还有多个向量构成且存在于一个平面上，那么只要有两个非零非共线的向量就可以代表其他的共面向量了；继续，如果向量组里还有多个向量构成且存在于一个立体空间里，那么只要有三个非零非共线非共面的向量就可以代表其它的同立体向量了…。

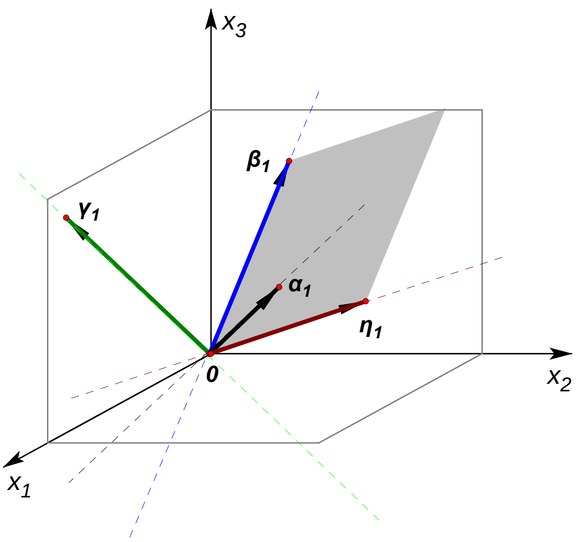
所以，一个 n 维向量组就可以通过几何意义上筛选得到一个极大无关向量组，筛选的过程可以这样：

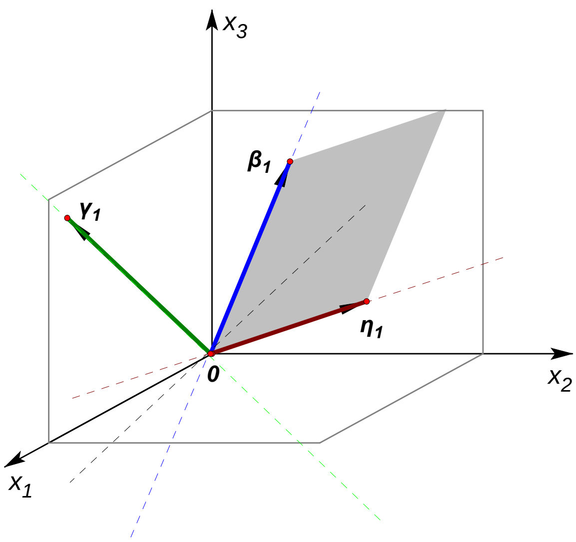
1、 首先把共线的向量全部找出来，然后一个直线留一个向量代表，其余的向量删除；
2、 把上述精简后的向量组里所有共面的向量全部找出来，然后一个平面留两个向量，其余的向量删除；
3、 把上述精简后的向量组所有共立方体的向量全部找出来，然后一个立方体六三个向量，其余的向量删除；
4、 ……；
5、 把上述精简后的向量组所有共超立方体（n-1 维）的向量全部找出来，然后一个超立方体六 n-1 个向量，其余的向量删除；
6、 最后必然留下的向量数小于等于 n，筛选结束，剩下的向量则为极大无关向量组。

注意：

最后精简后的向量的个数就是原 n 维向量组的秩。在整个精简过程组，每一步留下的向量组虽然个数逐步减少，但每一步向量组的秩却一直没有变。秩是一个不变量。

我们把前面的例子中的向量组进行筛选操作，首先一根直线留一个向量（可任意的），如左图，得到了一个向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\gamma}_1\}$；然后把共面的向量留两个向量（可任意的）得到了包含三个向量的向量组$\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\gamma}_1\}$，如右图，筛选过程结束。





使用向量空间的概念，我们可以有一个更全面的关于线性相关的几何意义的结论：

- **一个向量空间中，一个向量组线性相关的话，那么这个向量组中全部向量会属于一个子向**

量空间中，且子空间的维数要小于向量组元素的个数；

- 一个向量空间中，一个向量组线性无关的话，那么这个向量组中全部向量会属于一个子向量空间中，且子空间的维数要大于或等于向量组元素的个数；

（上面两句话意思就是说，一个向量组应该可以张成一个和向量组元素个数相同的子空间，一个向量张成一维的子空间，两个向量应张成二维的字空间…；如果一个向量组 n 个元素，张成一个小于 n 的子空间，那么这个向量组就线性相关；如果总是张成一个 n 维的子空间，那么这个向量组就线性无关）。

- 线性相关或无关的向量组的秩就是可以张成的最大子空间的维数；
- 两个向量组等价，就是两个向量组张成的向量子空间相同或重合；

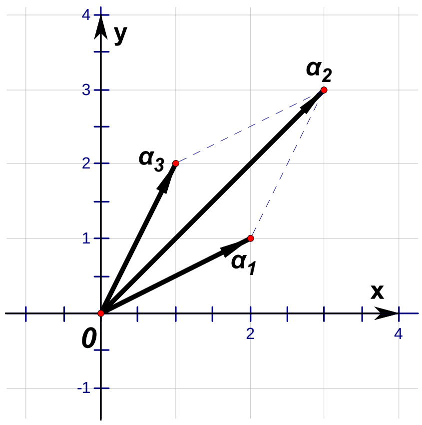
4.1.3. 向量组例题的图解

下面介绍两个容易搞错的命题，以加深印象：

错误命题 1：若向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$中向量两两线性无关，则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关。

图证如下：

向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$的向量定义如下：$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2)$，中显然$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2$和$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关（不在一条直线上），但$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性相关。

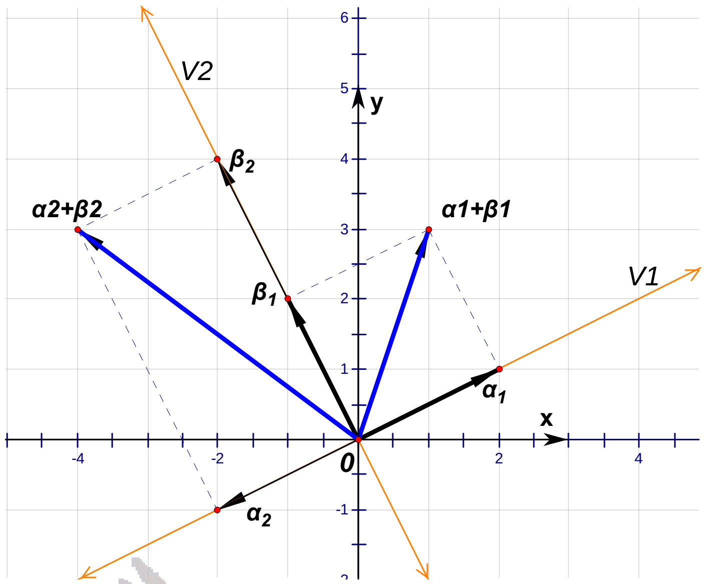


这个例题说明，向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都是二维向量，属于二维向量空间，而向量组的元素个数是 3，超过了向量的维数，因而线性相关。一般的结论是，n+1 个以上的 n 维向量线性相关。

错误命题 2：若$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1$和$\boldsymbol{\beta}_2$也线性相关，那么，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$和 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$也线性相关。

图证如下：

向量定义如下：$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,-1)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,2)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,4)$。则有 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1=(1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2=(-4,3)$；$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$ 不在一条直线上，因而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关。



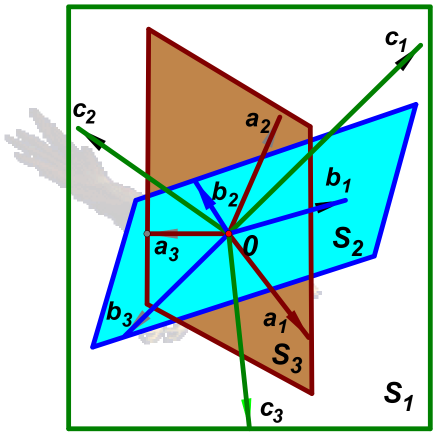
这个例题说明，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在空间 V_1（直线）上，$\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 在空间 V_2（直线）上，两个不同空间上的向量（零向量除外）相加，必然会进入第三个空间（直线）、第四个空间（直线）…，以致布满整个二维空间（平面），显然 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$ 绝大部分线性无关。

4.2. 向量空间的几何意义

向量种类繁多，五花八门。形形色色的向量方向、长短各异，应该给他们分类，划分成向量集合。由于向量的概念具有几何的特质，因此向量的集合通常叫做向量空间（空间也是几何的概念）。这个向量空间里的规矩很多，有人给出八条铁律，还有的是十条。其实只有两项基本原则：一是任意两个向量叠罗汉（相加）不能出空间；另一个是任意一个向量伸头缩脑（数乘）也不能超出空间。

我们常常发现，在向量空间这所大房子里又有好多居室，每个居室里的向量们也严格坚守着自己居室的同样的两项基本原则：叠罗汉和伸缩头脑不能出室（呵，有些象我们的小学生，端坐笔直象一个个向量，下课了活动活动还不能出教室），这些大大小小的居室就是子空间。

需要注意的是，这些居室有个特点，就是共有一个原点，或者讲都要包括零向量，所以一个大概的空间和子空间的关系图形可以这样描述：



上图使用平面方框表述空间及其子空间之间的关系。向量空间 S_3，包含向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2$；向量空间 S_2 中，向量 $\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 都属于 S_2 中；同样，向量空间 S_3 中，S_1 和 S_2 都是 S_3 的子空间，向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3$ 都属于 S_3 空间。

在数学教科书中，向量空间的标准定义一般是这样：

设 V 是非空的 n 维向量的集合（n=1，2，3…），如果 V 中的向量对加法和数乘两种运算封闭，也即：

- 若 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$，则 $\mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$；
- $\mathbf{a}\in V$，则 $k\mathbf{a}\in V$，k 为任意实数。

则称 V 为向量空间。

向量空间主要有两种：一种是由 V 中的一个向量组张成的空间（比如由特征向量张成的子空间等）。另外一种齐次线性方程组的解集组成的解空间。实际上，线性方程组的解空间也是解向量所张成。我们后面将会看到，这两种空间里都包含有无穷多的向量。下节我们首先看看由向量所张成

的空间的意义。

4.2.1. 向量张成的空间

实际上，向量空间的概念就是对向量们的一个分类。那么一个向量空间如何用数学式子表达呢？换句话就是说，一个空间里面的所有向量(无穷多)如何用有限的数学算式表达呢？

前面已说过，一个向量空间满足两个基本原则：对加法和数乘的运算封闭。把加法和数乘综合到一块，就是线性组合式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2\ldots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$。所以，我们可以使用一个向量组的线性组合式来表达一个空间里的全部的无穷向量。这个向量组常常是最大向量无关组，也可以是向量的相关组。

一个向量组可以线性表示出一个空间里的所有向量，反过来讲，空间里的所有向量都可以分解为这个向量组的线性表示。那么这个空间我们就叫向量组张成的空间。

下面我们看看它的数学定义式。

设一个向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\ldots\boldsymbol{\alpha}_n\}$，这个向量组的所有的线性组合生成一个向量集合：

$$\{x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2\ldots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \mid x_1,x_2\ldots x_n\in R\}$$

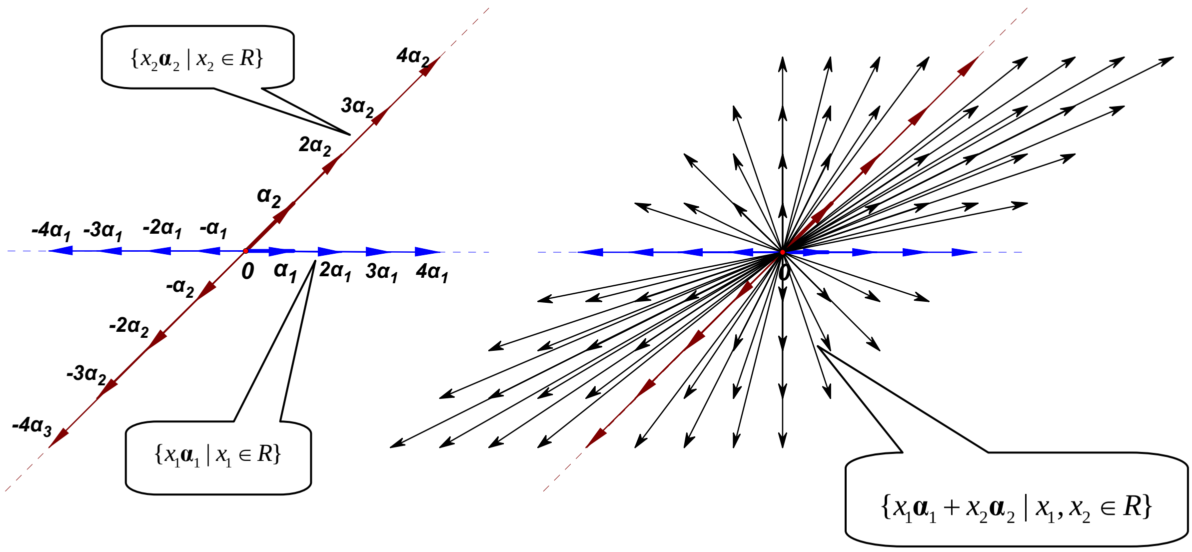
此集合常称为 $Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\ldots\boldsymbol{\alpha}_n\}$，称为由向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\ldots\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 张成的向量空间。

请注意：这个向量空间的数学定义和前面的加法和数乘的定义是等价的。

下图中给出了由向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 张成的向量空间平面 S 的例子：

$$S=Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}=\{x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2 \mid x_1,x_2\in R\}$$

图中显示，由两个不相关的向量使用平行四边形法则可以生成平面上所有的向量。



我们在讲行列式的几何意义时说，行列式的 m 维超平行多面体像是一个枝繁叶茂的大树所构成的一个物理空间，主枝干就是行列式的 m 个行向量或列向量。虽然向量数量可以是无穷多，但这个物理空间是有限的，空间的体积就是行列式的值。

由向量所张成的线性空间是无穷大的，空间里的向量也是无穷多的。 因为在向量空间的数学定义式$\{x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2...+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \mid x_1,x_2...x_n\in R\}$中，因为系数的可以无穷大，因此可以张成无穷大的空间。

4.2.2. 子空间的几何意义

子空间的一般定义是这样的：

如果V和H都是向量空间，而且$H\subset V$，则称H是V的子空间。

具体说来，由向量空间中的一些向量张成的子空间，其定义如下：

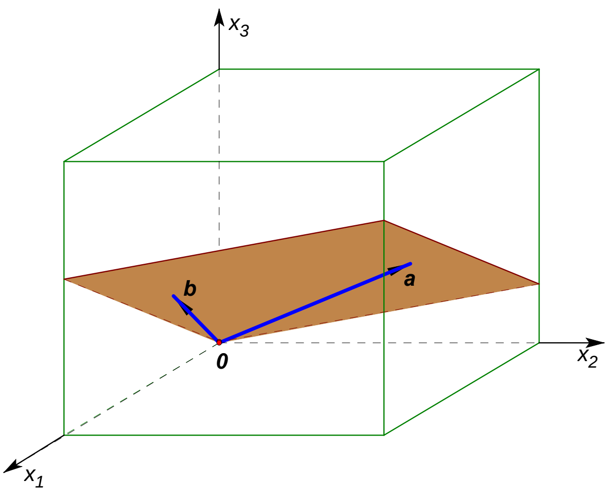
设$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_m\}$是 n 维向量空间$V$的一个向量组，$m\le n$；这个向量组的所有的线性组合生成一个向量空间：

$$Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_m\}=\{x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2...+x_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid x_1,x_2...x_m\in R\}$$

向量空间$Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_m\}$称为由向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_m$张成的子空间。

这里要提醒一下，$\mathbf{0}$向量是唯一的，既属于V空间也属于H空间。任意一个子空间H都要包含$\mathbf{0}$向量，否则就不能满足加法和数乘的封闭运算。

下面来一个三维空间中由两个三维向量$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$和$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$张成的一个平面二维空间的例子。



这里注意一个小细节：三维的向量张成了一个二维的空间。平面是三维空间的子空间。

n 维实线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的子空间：

$\mathbf{R}^n$ 表示所有 n 维实向量所构成的集合。每个向量中的元素是实数，元素个数是 n 个。如 $\mathbf{R}^2$ 表示平面实向量集合，$\mathbf{R}^3$ 表示三维空间实向量集合。

三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的所有子空间包括：

三维子空间：本身 $\mathbf{R}^3 = Span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$（$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关），作为自身的子空间表现为一个立体空间，同自身一样，也包含原点；

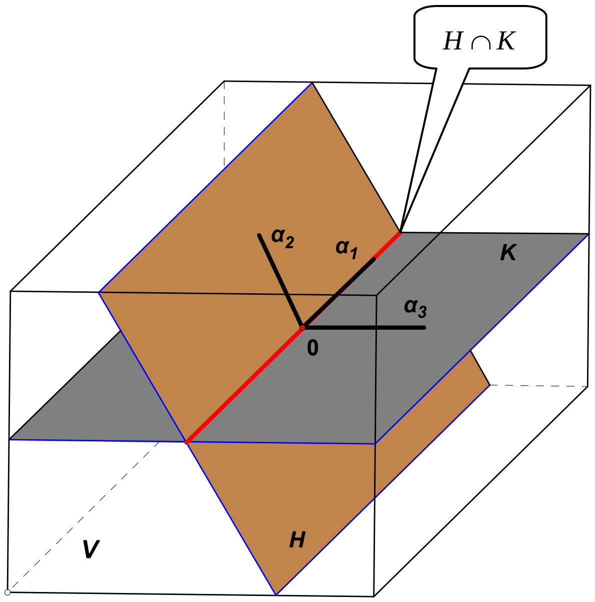
二维子空间：如 $Span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ （$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关），表现为通过原点的任意一个平面（注意：二维空间 R^2 是不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间）；

一维子空间：如 $Span\{\boldsymbol{\alpha}_1\}$ $(\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0)$，表现为通过原点的任意一条直线；

零维子空间：只包含原点 **0** 向量，只有零空间；

下面的图形给出了 $\mathbf{R}^3$ 的所有子空间的图形。

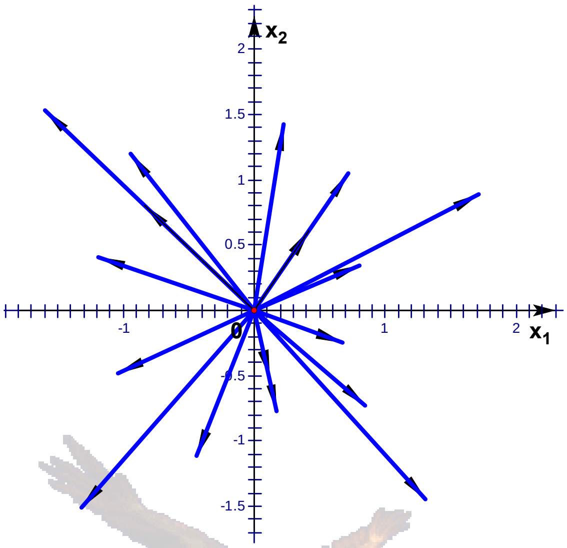
图中，V 三维线性空间即 $\mathbf{R}^3$，它可以由 $Span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$（$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关）表示；$H = Span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ （$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关）表示一个二维子空间；$K = Span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3\}$（$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关），表示另一个二维子空间的例子；H 和 K 的公共集合交集 $H \cap K = Span\{\boldsymbol{\alpha}_1\}$ $(\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0)$，是一维向量子空间的例子；上述所有的子空间皆包含零向量 **0**=（0，0，0）；当然零向量自身可以组成一个零空间。



子空间一定要过原点的几何意义：

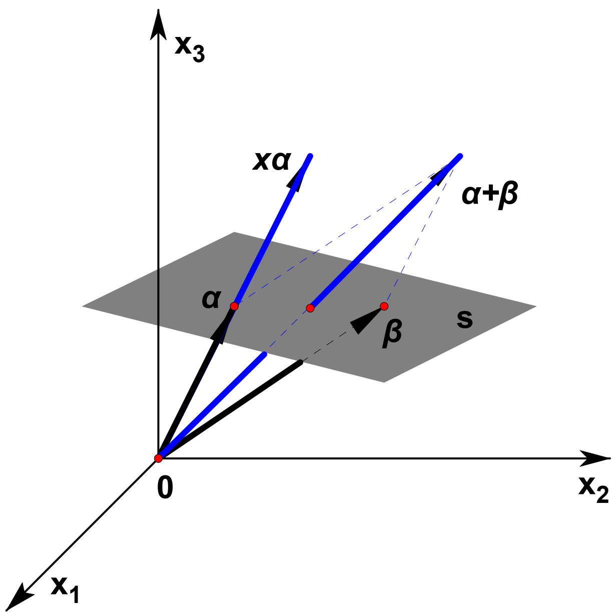
前面在介绍子空间的概念时，总是在强调过原点，或者所有的子空间一定要包含零空间在内。为什么？这是硬性规定吗？

实际上，我们现在讨论的向量，不能称之为自由向量，因为所有的向量的尾巴都被拉到了原点上，或者说，所有响亮空间里的向量都是从原点出发的，大家都有一个共同的零空间，这就是为什么所有的子空间一定要包含零空间的原因了。



为什么要把向量的尾部都拉到原点呢？在前面向量的基础几何意义一章讲过，那就是为了研究向量的方便，因为这样就可以把向量和空间中的点一一对应起来。空间中一旦建立起了坐标系，点有坐标值，那么我们就用点的坐标表示与点对应的向量，这样向量就有了解析式，就有了向量的坐标表达式，我们就可以方面的使用代数中的矩阵技术进行分析及计算了。

如果一个子空间没有通过原点，那么从原点出发的向量必然首尾不顾，造成了向量头在子空间中尾在空间外（因为原点在空间外）。当然，向量的加法和数乘也都跑到子空间外面去了。如下图。



上图中，严格讲来向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$并不在平面S中，因为只有向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的头部在平面上。但如果

$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 向量是采用坐标解析式表达的话，我们就会认为这两个向量在平面上。即使这样，相量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘 $x\boldsymbol{\alpha}$ 超出了平面 S 之上，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 相加的和向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 也超出了平面之上。因此，他们对向量的加法和数乘运算不封闭。所以平面 S 不是二维向量子空间。

1、 **实际上，在三维几何向量空间中，凡是过原点的平面或直线上的全体向量组成的集合都是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间，而不过原点的平面或直线上的全体向量组成的集合都不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间。**

4.2.3. 基、维数及其坐标的几何意义

基、维数、坐标的定义

对于向量空间 V 中的一个有序向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_n\}$，若满足：

- $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；
- V 中任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示：$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2...+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$。

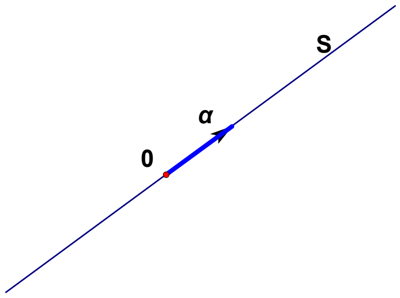
那么称向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 为向量空间 V 的一个**基**；称向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的元素个数 n 为向量空间 V 的**维数**；称有序数组 $(x_1,x_2...x_n)$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2...\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 上的**坐标**。

基的几何意义

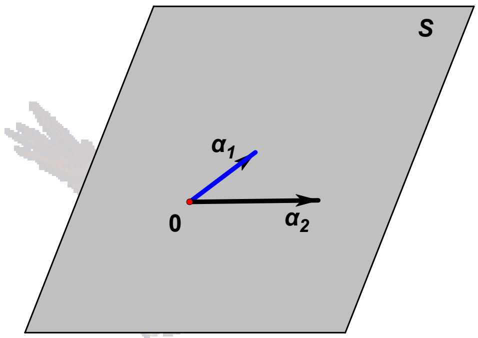
基是向量空间的一组很“结实”的向量集合，每一个基向量可以象房屋的地基的每一块石块一样支撑衍生出空间中的全部向量，因此，首先一个基能代表或衍生出空间里的所有的向量，缺一不可。其次，作为基的每一个向量都是个顶个，谁也不能代表谁，他们必须线性无关，它是一个最大无关向量组。

我们给一个向量空间找一个基，目的是为了给这个空间定一个坐标系，以方面我们定位和计算向量。一个基实际上就是选取的一个坐标系，另外一个基就是选取的一个新的坐标系。基是坐标系在线性空间中的推广。基向量对应坐标系的坐标轴，有几个基向量就有几个坐标轴 ，n 维空间的一个基就需要有 n 个基向量。下面我们看看 $\mathbf{R}^n$ 空间中的几个基的例子：

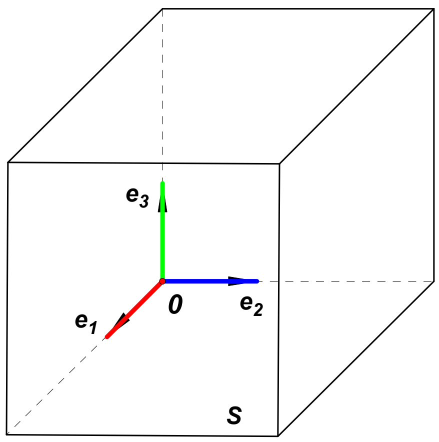
图 1 中，一维向量空间 S 是一条过 0 点的直线，向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 并属于直线 S，因而可以讲 S 是向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 张成的向量空间，S =Span($\boldsymbol{\alpha}$)，所以向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ 是向量空间 S 的一个基。



在图 2 中，如果二维向量空间 S 是 R^3 中的一个平面，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是平面 S 上的任意的两个向量，其中任意一个都不是另外一个向量的倍数，因此向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 线性无关 。因此平面 S 可以看作是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$、 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 张成的向量空间 $S = Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$，所以向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 是向量空间的一个基。



在图 3 中，三维向量空间 S 是 R^3，三个标准单位向量 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$，因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 彼此线性无关，可以生成 R^3，因此向量组 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 是 R^3 的一个基。这个基的基向量是由标准单位向量组成，因此又称为标准基。



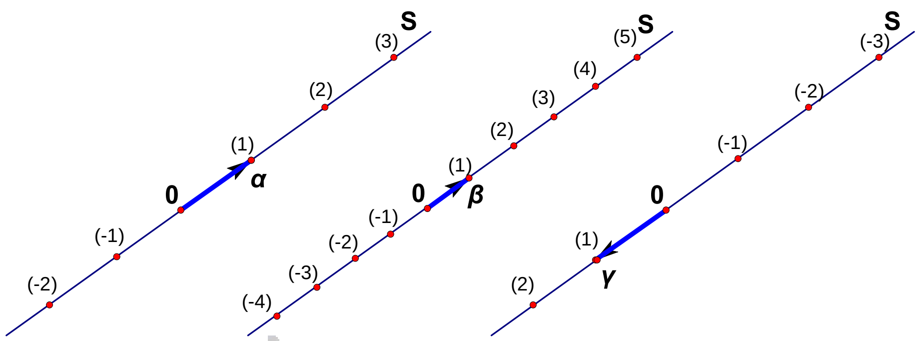
坐标与维数的几何意义

一个基包含的向量个数就是坐标轴的个数，也就是向量空间的维数。维数是空间的一个本质特征，它不依赖于基的选取。无论你怎么选取不同的基，但基向量的个数不会改变，维持支撑空间的维数不会改变。这就是为何称之为“维数”的原因。

一个向量空间的基选定后，其坐标是什么？如何求取？下面我们接着看看几个图示的例子。

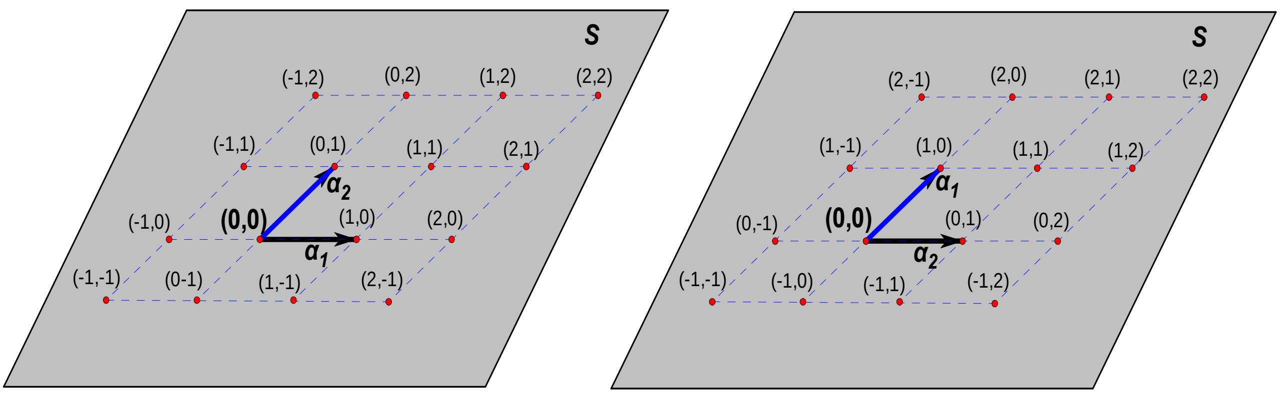
一维基及其坐标：

一维空间 S，当选取基为$\{\boldsymbol{\alpha}\}$时，坐标选取如图左；当选取的新基向量$\boldsymbol{\beta}$为$\boldsymbol{\alpha}/2$时，坐标刻度的密度加大一倍，如图中；当选取的新基向量$\boldsymbol{\gamma}$为$-\boldsymbol{\alpha}$时，坐标轴方向也随之反转，如图右。



二维基及其坐标：

二维空间 S，当选取基为$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$时，坐标选取如图左。两个坐标轴是与向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$重合的，刻度的划分是遵循向量加法的平行四边形规则（注意，在这里我们不要沿袭笛卡尔坐标系的习惯，试图把空间中的一点（对应一个向量）向坐标轴作垂直投影。当然，你如果坚持这样做的话，你就会发现基的施密特正交化方法的秘密）。



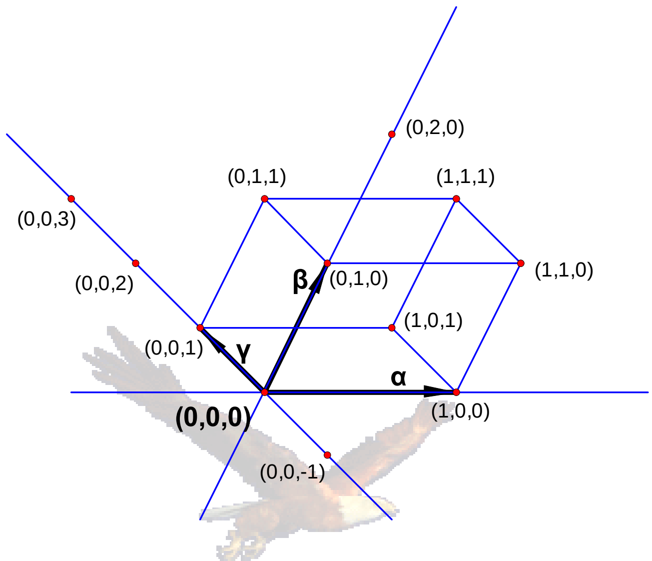
另外，在二维空间中，确定基向量的顺序是必要的。在向量组的讨论中我们不强调向量组中向量们的顺序，但作为一个基的向量组就要有顺序，显然，如果基向量顺序进行了调整，坐标值也相应进行调整。在图右中，我们把空间 S 的基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$调换了顺序成为一个新的基$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\}$，当然空间中的坐标也变了。

另外，我们在上述的例子中也看到了基与我们的直角坐标系的不同，两个基向量不一定垂直；

在刻画坐标网络时不是直角坐标系的垂直投影，而是平行四边形坐标网络，分割一个坐标轴的坐标线是与另外一个坐标轴平行的关系。一个基向量的方向是对应坐标轴的正方向，坐标单位是基向量的长度。

三维基及其坐标：

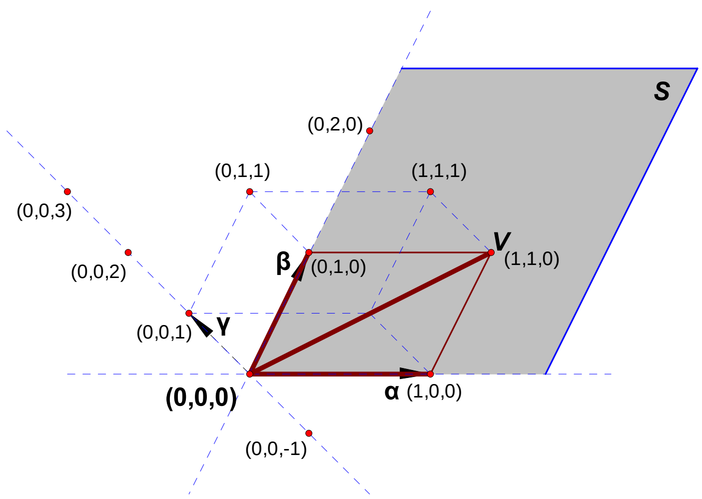
三维空间的一个基包含了三个线性无关的向量$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$，空间以$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$为基的坐标刻画满足平行六面体法则，如向量$(1,1,1)$是与原点相对应的平行六面体的对角点。



下面对于一个三维空间中的二维子空间，我们看看他的基及其坐标是如何刻画的。

三维空间的子空间的基及其坐标：

在上面的三维空间的例子中，向量$\mathbf{V}$的坐标是$(1,1,0)$。如果我们要研究由向量组$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$张成的子空间$S = Span\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$，这个二维的子空间现以向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为基，那么向量$\mathbf{V}$在$S$中的坐标是什么？从图中可以看出，向量$\mathbf{V}$坐标是$(1,1)$。



总结一下：向量 **V** 在三维空间 $Span\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$ 中的 **B** 坐标是 $(1,1,0)$，其中 **B**=$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$；而向量 **V** 在二维空间 $Span\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$ 中的 **B** 坐标变成了 $(1,1)$，其中 **B**=$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$。

如果向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是属于三维欧几里德空间的任意一组线性无关组，向量形式是由笛卡尔坐标给出。这个三维欧几里德空间如果使用{$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$}作为基，那么一个向量如何求其 **B** 坐标？如果这个向量也在 $Span\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$ 二维空间中，又如何求取以 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$ 为基的 **B** 坐标呢？这个问题就是我们下面要讨论的基变换。

注： 空间坐标系

前面说过，建立坐标系的目的就是把空间向量的线性变换转化为坐标的运算。在我们讨论向量和矩阵以及向量方程中仿射坐标系和直角坐标系最为有用。

在空间中任取一点 0，以点 0 为起点任意作三个不共面的向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$，这就建立了一个仿射坐标系，记为 $\{0;\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$，有了这个仿射坐标系，我们就可以建立空间向量和三元有序数组（即坐标值）之间的一一对应的关系了。就是说，在坐标系中的任意向量 $\mathbf{a}$ 可用唯一的有序数组 (a_1,a_2,a_3) 来表示关系：$\mathbf{a}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_3\boldsymbol{\varepsilon}_3$。

在这里，点 0 称为坐标原点，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 称为坐标向量或基，过原点且与坐标向量同向的直线称为坐标轴，有序数组 (a_1,a_2,a_3) 称为向量 $\mathbf{a}$ 的坐标。

仿射坐标系按手征性分为左手坐标系和右手坐标系。

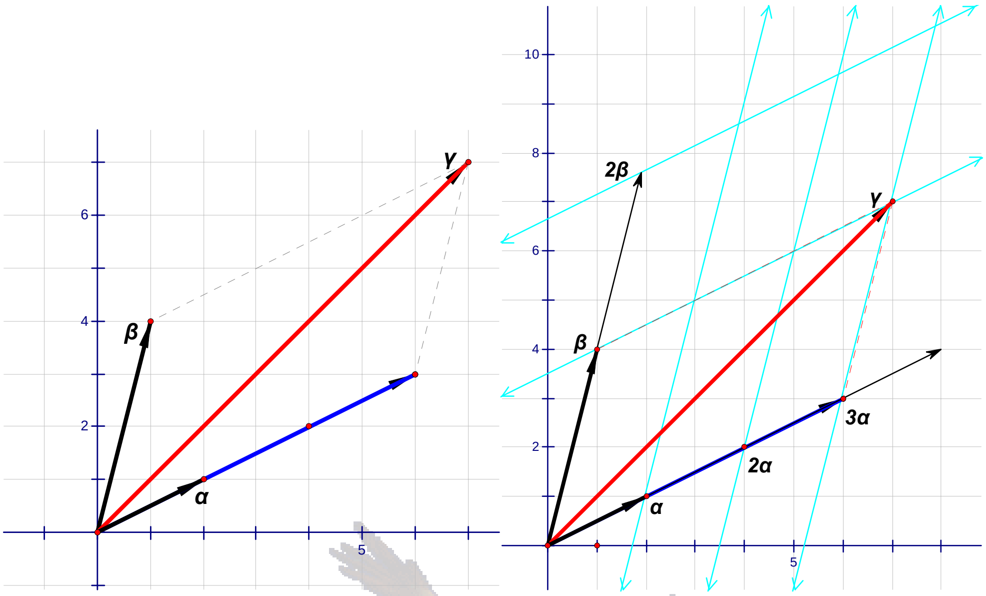
特别的，如果仿射坐标系 $\{\mathbf{o},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ 的坐标向量 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 是两两垂直的单位向量，则称之为直角坐标系。$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 所在的坐标系分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴。我们常用的直角坐标系为右手直角坐标系。

基及其坐标的例子：

在直角平面坐标系（实际上为单位正交基 $\mathbf{i},\mathbf{j}$）的空间中，有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1)$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(1,4)$。这两个向量线性无关（不成倍数关系），我们可以让他们构成平面空间一对新基。那么有另外一个向量 $\boldsymbol{\gamma}=(7,7)$ 可以写为这两个新基的线性组合：

$$\boldsymbol{\gamma} = 3\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$$

因此，向量$\boldsymbol{\gamma}$相对于基$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$的坐标向量为$(3,1)$。图解如下：



4.2.4. 基变换的几何意义

前面的讨论告诉我们，在一个 n 维的线性空间中，可以取不同的向量组（每个向量组含有 n 个线性无关的向量）作为基。那么这个线性空间的任意两个基之间必有关联，这个关联是什么？还有，一个向量$\mathbf{a}$在一个确定的基下有一个确定的坐标，这个向量在不同的基下有不同的坐标。第二个问题是，任意两个基上的坐标之间有什么关联？

一个 n 维线性空间$\mathbf{V}$，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots \boldsymbol{\alpha}_n$和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots \boldsymbol{\beta}_n$是$\mathbf{V}$的两个基。先将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots \boldsymbol{\alpha}_n$作为空间的基，那么向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots \boldsymbol{\beta}_n$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示：

$$\boldsymbol{\beta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \end{pmatrix} = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n})\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{2n} \end{pmatrix} = (a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n})\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

....

$$\boldsymbol{\beta}_n = a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn})\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

将以上 n 个表示式合并为：

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

或者

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

上式 1 或 2 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots \boldsymbol{\beta}_n$ 的基变换公式，其中，矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 或 $\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵。

注意两点：

1、$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}'$ 互为转置矩阵，这取决于你对基向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 和 $\boldsymbol{\beta}_i$ 看作是行向量还是列向量；

2、过渡矩阵 $\mathbf{P}$ 的列向量和 $\mathbf{P}'$ 的行向量分别是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots \boldsymbol{\beta}_n$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots \boldsymbol{\alpha}_n$ 上的坐标（按序排列成矩阵），换句话说，把 $\boldsymbol{\beta}_i$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots \boldsymbol{\alpha}_n$ 上的坐标一列列的排列而成过渡矩阵 $\mathbf{P}$。

以上得到的矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P'}$ 给出了第一个问题的答案，就是线性空间的两个基之间是可以互相转换或变换的，变换的矩阵称为过渡矩阵。下面我们看看一个向量的坐标的转换是什么？

设向量 $\mathbf{a}$ 在两个基下 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots\boldsymbol{\beta}_n$ 的坐标分别是 $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 和 $(x_1',x_2',\dots,x_n')$，则它们之间的关系可有：

向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots\boldsymbol{\alpha}_n$ 上表示为 $\mathbf{a}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \dots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$ ----------1；

同时，向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots\boldsymbol{\beta}_n$ 上表示为 $\mathbf{a}=(x_1',x_2',\dots,x_n')\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \dots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \dots\\ x_n'\end{pmatrix}$ -----2;

把前面的基变换公式代入 2 得到

$$\mathbf{a}=(x_1',x_2',\dots,x_n')\mathbf{P}'\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \dots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots\boldsymbol{\alpha}_n)\ \mathbf{P}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \dots\\ x_n'\end{pmatrix}\text{-----------------3}$$

因为一个向量在同一个基下的坐标是唯一的，因此，对比上式 3 和 1 式中的坐标部分，得到：

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1',x_2',\dots,x_n')\mathbf{p}'$$

或

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \dots\\ x_n'\end{pmatrix}$$

至此，我们得到了坐标转换的公式。

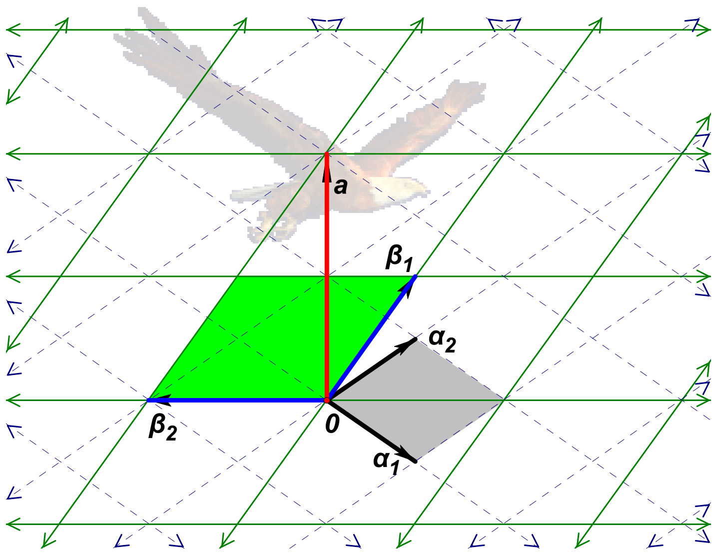
假设已知坐标 $(x_1',x_2',\dots,x_n')$，直接使用上式及得到坐标 $(x_1,x_2,\dots,x_n)$。反之，如果已知 $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 求 $(x_1',x_2',\dots,x_n')$，即公式：

$$\begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ \cdots \\ x_n^{'} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

下面我们来个例子来了解具体的基过渡矩阵和坐标转换计算。看下图说话。

在 2 维平面空间的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$（没有具体值），空间一向量 $\mathbf{a}$，由图知 $\mathbf{a} = (-2, 2)$；我们再取一组基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$，基向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 在原来基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 上的坐标分别是 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (-1, -1)$，具体即：

$$\boldsymbol{\beta}_1 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$$
$$\boldsymbol{\beta}_2 = -\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$$



因此我们得到了由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 过渡到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵（由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 的坐标按列排列得到）为：

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c:c} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

过渡矩阵对不对，我们验证一下，用过渡矩阵求向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 上的坐标，用坐标转换公式：

$$\begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

看看图上，向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 的坐标网络中的坐标正是 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，过渡矩阵和坐标转换公式得到验证。

4.2.5. 标准正交基的几何解释

标准正交基也叫规范正交基。实际上，如果这些基向量互相垂直，就叫正交基，而且每个基向量的长度等于单位 1 的话，那么这个基就叫标准正交基。

- 标准正交基的好处

为什么要得到标准正交基呢？主要原因是如果基是正交且标准的，就很容易计算向量子空间的投影和基坐标。换句类似的话是说，如果你取的坐标系是垂直的，而且取的坐标单位是 1，就很容易计算向量空间里面的向量的坐标值。

若 $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_r$ 是子空间的 V 的一个标准正交基，则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都能有标准正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_r$ 线性表示：

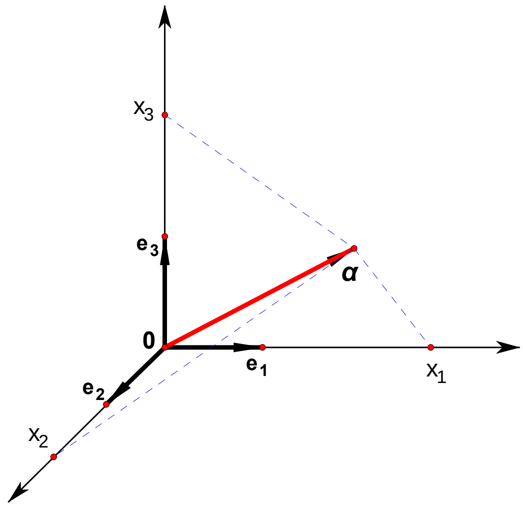
$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_r\mathbf{e}_r$$

其中 $(x_1, x_2, \ldots x_r)$ 就是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标。

如果想求坐标 $(x_1, x_2, \ldots x_r)$ 中一个 x_i，只要把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 向对应的基元 $\mathbf{e}_r$ 投影并求投影长度即可得到，求投影长度就是求内积，也就是公式

$$x_i = [\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_r] = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}_r^{\mathrm{T}}$$

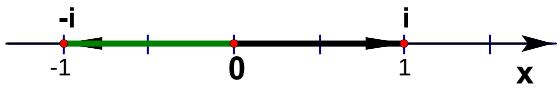
下图给出了三维向量空间的一个标准正交基的图示。向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别对基坐标轴上的投影分向量分别是 $x_1\mathbf{e}_1$， $x_2\mathbf{e}_2$ 和 $x_3\mathbf{e}_3$，对应的坐标分别是 x_1， x_2 和 x_3。



坐标计算公式方便、简捷，是因为向量空间的基是标准正交基。所以，我们在给出向量空间的德基时总是求取规范正交基。实际上，我们最常用的笛卡尔坐标系就是标准正交基的坐标系，只是在使用中忽略掉了 x，y 和 z 轴上的单位向量罢了。

- 一维空间的标准正交基

一维的标准正交基只有两个：$\mathbf{i}=\{(1)\}$ 和 $-\mathbf{i}=\{(-1)\}$。在 X 直线上的任意一个向量 (x) 都可以表示成为 $\mathbf{i}$ 的倍数，其坐标是 x；任意向量 (x) 也能表示成为 $-\mathbf{i}$ 的倍数，其坐标是 $-x$。



- 二维空间的标准正交基

二维欧几里德空间的单位坐标向量组 $\{(1,0),(0,1)\}$ 就是一个标准正交基。除了这个标准正交基外还有其他的标准正交基吗?

有！比如把向量组内的向量位置交换一下：$\{(0,1),(1,0)\}$，就是一个新的标准正交基。

还有！比如下面向量组也是一个标准正交基：

$$\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\}$$

验证一下：

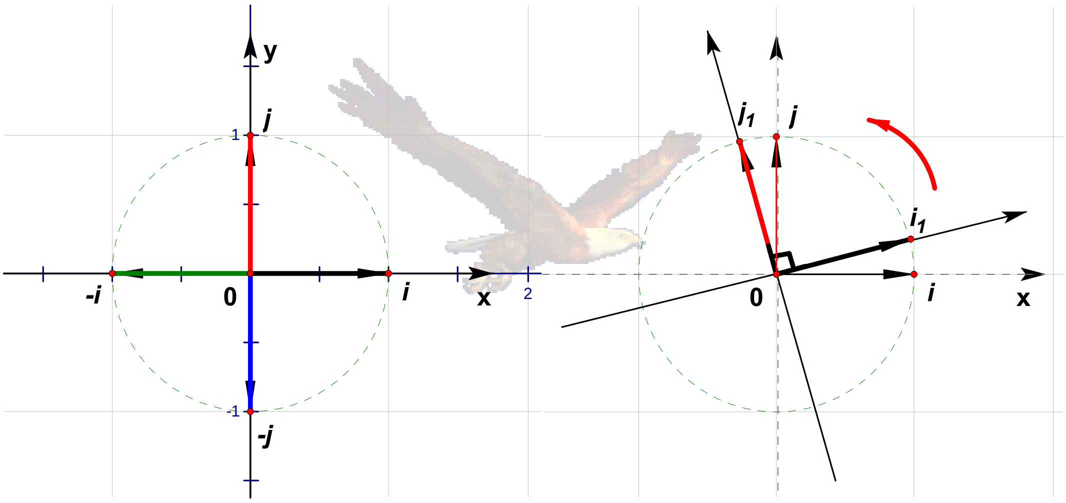
两个向量内积：$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=0$， 内积为 0，两个向量正交。

向量长度：$\left\|\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$，$\left\|\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$；长度为 1，单位长度，因此两个向量都是单位向量。

实际上，我们可以使用这样一种方法来得到无数个包括上述的二维空间中的标准正交基，就是对二维笛卡尔单位坐标向量进行镜像或旋转即可得到。

二维平面的笛卡儿坐标空间中与坐标轴重合的单位向量有四个向量（如图）：

$$\mathbf{i}=(1,0),\quad \mathbf{j}=(0,1),\quad -\mathbf{i}=(-1,0),\quad -\mathbf{j}=(0,-1)$$

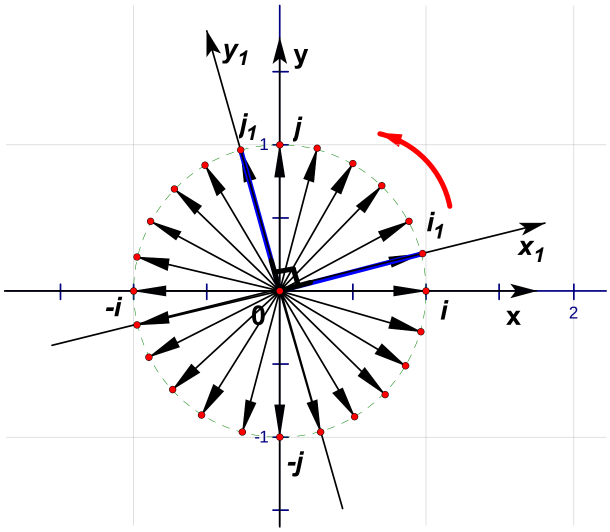


其中，$\mathbf{i}$ 和 $-\mathbf{i}$ 互为镜像，$\mathbf{j}$ 和 $-\mathbf{j}$ 也互为镜像。这四组单位向量中的任意两个向量如果满足正交要求，那么这两个向量组成的有序向量组就构成一个标准正交基。所有的八个与坐标轴重合的标准正交基列举如下

$$\{\mathbf{i},\mathbf{j}\},\ \{-\mathbf{i},\mathbf{j}\},\ \{\mathbf{i},-\mathbf{j}\},\ \{-\mathbf{i},-\mathbf{j}\},\ \{\mathbf{j},\mathbf{i}\},\ \{-\mathbf{j},\mathbf{i}\},\ \{\mathbf{j},-\mathbf{i}\},\ \{-\mathbf{j},-\mathbf{i}\}。$$

另外，要得到不与坐标轴重合的标准正交基，我们可以把上述八个标准正交基进行旋转就可以得到新的标准正交基。比如把上图中标准正交基 $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ 中的向量 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$，同时进行拟时针旋转到 $(\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_1)$（保持垂直角度不变），那么 $(\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_1)$ 也是一个标准正交基，如果旋转角等于 $\frac{\pi}{6}$，这个标准正交基就是前边说的（$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$）。

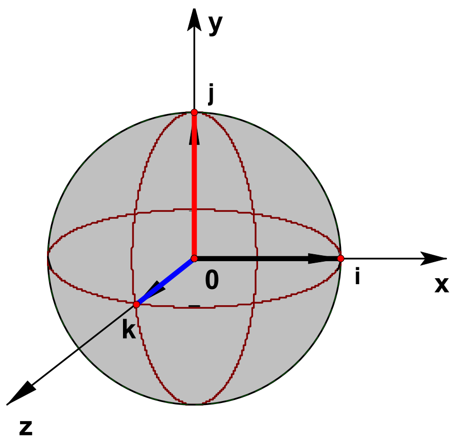
实际上，如果用一个通用的向量表达式表示出二维空间 R^2 上的标准正交基就是 $\{(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\}$，其中 θ 为基向量逆向旋转的角度。这正是单位园的表示式。



- 三维空间的标准正交基

对于上述的二维标准正交基的取法，我们有一个统一的几何图形，就是在把标准正交基 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 保持其角度垂直，分别进行拟时针和顺时针旋转，就可以得到全部的二维标准正交基。

类似的，三维空间的标准正交基是由单位坐标向量组 $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ 在保持彼此的相对正交位置的同时进行全方位任意旋转，即可得到全部的标准正交基。显然，全部的标准正交基向量（无数的）的末端组成一个单位球面。



求取规范正交基的一个著名方法是施密特正交化方法，下面我们将进行讨论。

4.2.6. 施密特正交化的几何解释

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量空间$V$的任意一个基，我们要在这组基上重新构造出一个新基，新的基要求是一个标准正交基。换句话讲，要找一组两两正交的单位向量组$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_r$，这个向量组与原基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$等价。把向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$化为$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_r$的过程就是规范正交化。过程及公式如下：

第一步正交化（施密特正交化）：

令

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\\
&\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,\\
&\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2,\\
&......,\\
&\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1},
\end{aligned}$$

第二步单位化：

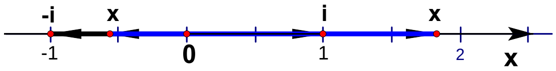
$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\\
&\mathbf{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\\
&.......,\\
&\mathbf{e}_r=\frac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|}
\end{aligned}$$

至此，我们得到了向量空间V的一个规范正交基$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_r$。

下面我们看看求取一至三维向量空间基的规范正交化几何意义是什么？

- 一维向量空间的规范正交基求法的意义：

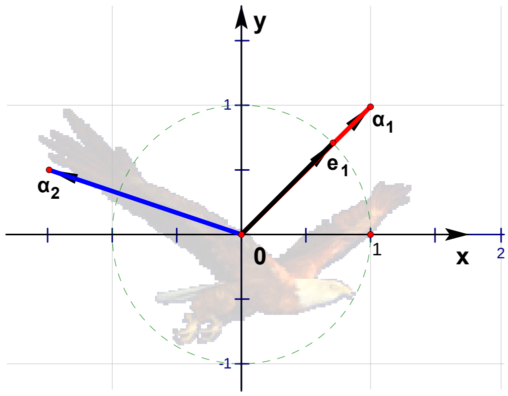
一维的向量中只有一个元素x，设$\{(x)\}$是一维向量空间的一个基，显然，对这个向量进行规范化即得到规范正交基：$\{(\frac{x}{|x|})\}$。



上图中画出了两个方向的 (x) 向量，向量 (x) 的长度被压缩或放大到单位长度 1，方向保持不变。

- 二维向量空间的规范正交基求法的几何意义：

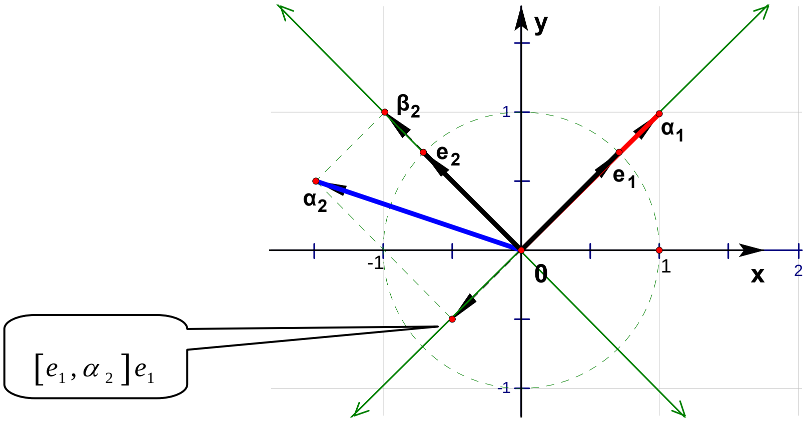
从前面的分析知道，二维向量空间的规范基集中在平面坐标系上单位圆上（自由向量全部从原点出发），设（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$）是二维向量空间上任意的一个基（如图），设想由这个任意基通过斯密特方法得到一个规范正交基，就是想办法用向量的伸缩和加减计算把向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 变化到单位圆上的新向量 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$，而且新向量 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 要互相垂直。



再来看看施密特正交化公式的变形：

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\alpha_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|^2}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\left[\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\boldsymbol{\alpha}_2\right]\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\boldsymbol{\alpha}_2-[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\mathbf{e}_1,$$

在上式中，$[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$ 是单位向量 $\mathbf{e}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的内积，即向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\mathbf{e}_1$ 上的坐标值；因而 $[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\mathbf{e}_1$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\mathbf{e}_1$ 上投影分向量。向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 减去自己的在 $\mathbf{e}_1$ 上投影 $[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\mathbf{e}_1$，则得到一个正交于向量 $\mathbf{e}_1$ 的分向量 $\boldsymbol{\beta}_2$（如图）。



最后对正交向量$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\beta}_2$单位化，得到了位于单位圆上的标准正交基$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$。

- 三维向量空间的规范正交基求法的几何意义：

类似的，三维向量空间基的规范正交化过程是二维的推广。首先给出施密特正交化的变形公式：

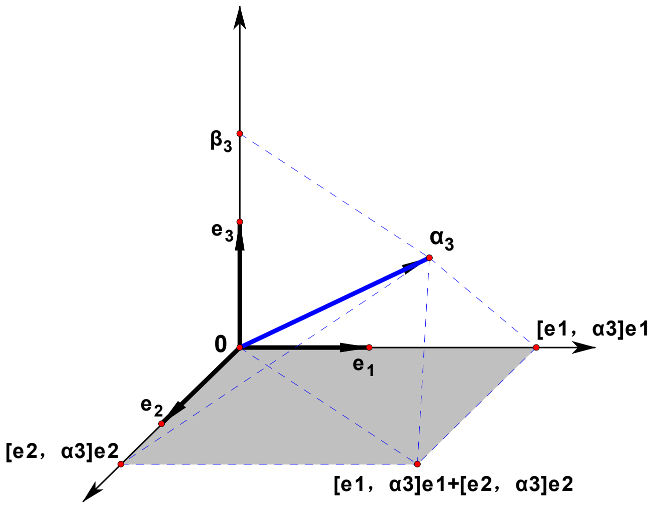
$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\\
&\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\mathbf{e}_1,\\
&\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{e}_1-[\mathbf{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

前面两个公式是二维空间的公式，我们已经讨论过。对于新增的第三个公式的几何含义，我们不难看出：

向量$\boldsymbol{\alpha}_3$是减去自己在二维正交规范基上的投影得到。其中$[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{e}_1$是$\boldsymbol{\alpha}_3$在$\mathbf{e}_1$上的投影，$[\mathbf{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{e}_2$是$\boldsymbol{\alpha}_3$在$\mathbf{e}_2$上的投影。$[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{e}_1+[\mathbf{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{e}_2$是$\boldsymbol{\alpha}_3$在以$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$为基的子空间（平面）上的投影。

这里，向量$\boldsymbol{\alpha}_3$减去自己在$\mathbf{e}_1$上的投影的差向量必垂直于$\mathbf{e}_1$，同时也减去自己在$\mathbf{e}_2$上的投影的差向量亦必垂直于$\mathbf{e}_2$，因而总的差向量$[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{e}_1+[\mathbf{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\mathbf{e}_2$必然垂直于$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$张成的平面空间。

为清楚起见，下图中没有画出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$等向量。



- r 维向量空间的规范正交基求法的几何意义：

至此，多维向量空间的规范正交几何意义显而易见。从几何作图方便性的角度出发，我们建议把施密特正交规范化公式修改一下，不再需要过度向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots\boldsymbol{\beta}_r$，公式如下：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_1\right\|},\\
\mathbf{e}_2 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_2-\left[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right]\mathbf{e}_1}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_2-\left[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right]\mathbf{e}_1\right\|},\\
\mathbf{e}_3 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_3-\left[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\right]\mathbf{e}_1-\left[\mathbf{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right]\mathbf{e}_2}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_3-\left[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\right]\mathbf{e}_1-\left[\mathbf{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right]\mathbf{e}_2\right\|},\\
&\ldots\ldots,\\
\mathbf{e}_r &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_r-\left[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_r\right]\mathbf{e}_1-\left[\mathbf{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_r\right]\mathbf{e}_2-\ldots-\left[\mathbf{e}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r\right]\mathbf{e}_{r-1}}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_r-\left[\mathbf{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_r\right]\mathbf{e}_1-\left[\mathbf{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_r\right]\mathbf{e}_2-\ldots-\left[\mathbf{e}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r\right]\mathbf{e}_{r-1}\right\|}
\end{aligned}
$$

上式看起来比较复杂，其实概念清晰自然，计算方便。