浙江大学 2019 - 2020 学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：__________

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2020 年 1 月 15 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：__________学号：__________专业：__________作业编号：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.8413,\ \Phi(2)=0.9772,\quad z_{0.05}=1.645,\ z_{0.025}=1.96,\ n\geq 50, t_\alpha(n)\approx z_\alpha,$
$F_{0.025}(99,99)=1.49, F_{0.05}(99,99)=1.39, F_{0.1}(99,99)=1.30, \chi^2_{0.05}(4)=9.49, \chi^2_{0.05}(3)=7.82.$

一. 填空题（每小格 3 分，共 36 分）

1. 设 A, B 为两个随机事件，已知 $P(A)=0.45$，$P(A|B)=P(\bar{A}|\bar{B})=0.6$，则 A 与 B 是否独立？

答：__________；$P(B)=$__________.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim B(1,0.5)$，$Y\sim B(2,0.5)$，则 $\mathrm{Var}(2X-Y)=$__________，

$E[\min(X,Y)]=$__________.

3. (1) 设 X 服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布，则 $P(|X-3|\geq 2)=$__________；(2) 设 Y 的数学期望和方差均为 3，用切比雪夫不等式估计 $P(|Y-3|\geq 2)$ 的上界为__________.

4. 设 (X, Y) 在上半单位圆 $D=\{(x,y):x^2+y^2<1, y>0\}$ 服从均匀分布，则在 D 上概率密度函数 $f(x,y)=$__________.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$，$X_1,\dots,X_{16}$ 是 X 的简单随机样本，$\bar{Y}_1=(X_1+\dots+X_4)/4$，

$\bar{Y}_2=(X_5+\dots+X_{16})/12$，则 $P(|\bar{Y}_1-\mu|<1)=$__________；$3(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\sim$__________分布（写出参数），$Var[\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{Y}_1)^2+\sum_{i=5}^{16}(X_i-\bar{Y}_2)^2]=$__________.

6. 为检验总体 X 的分布律 $H_0: P(X=i)=\frac{i+1}{20}, i=1,2,3,4,5.$ 是否成立，从总体中抽取容量为 100 的简单随机样本，观测结果为“1”观测到 5 次，“2” 观测到 17 次，“3” 观测到 19 次，“4” 观测到 28 次，“5” 观测到 31 次. 采用拟合优度检验，则检验统计量的值为______，在 $\alpha=0.05$ 下是否拒绝原假设？说明理由：________________________.

二.（15 分）设(X, Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}0.75, & y^2<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (1)分别求 X, Y 的边际密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$；(2) 求 $P(Y>0.1 \mid X=0.25)$；(3)判断 X 与 Y 是否相关？说明理由；

(4) 令 $Z=\begin{cases}0, & 0\le Y<\sqrt{X}<1,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$ 判断 X 与 Z 是否独立？说明理由.

三.（9 分）设 X 与 Y 服从相同的 0-1 分布， $P(X=1)=p$. (1)若 X 与 Y 独立，求 (X, Y)的联合分布律；(2) 若 X 与 Y 的相关系数为 0.5，求 (X, Y)的联合分布律.

四．（15分）设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}, & 0<x<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$对$X$独立重复观测$n$次，结果记为$X_1,\dots,X_n$.（1）求$X$的分布函数$F(x)$；（2）若$Y=X^2$，求$Y$的概率密度函数$f_Y(y)$；（3）当$n\to+\infty$时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{-2}e^{-X_i}$依概率收敛到何值？（4）求$\dfrac{1}{81}\sum_{i=1}^{81}X_i^3$的近似分布，并写出该分布的概率密度函数$g(z)$.

五．（10分）为了解某市两所高校学生的消费情况，在两所高校各随机调查100人，调查结果为甲校学生月平均消费2583元，样本方差882669，乙校学生月平均消费2439元，样本方差678976，设甲校学生月平均消费额$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，乙校学生月平均消费额$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$未知，两个样本独立.（1)在显著水平0.05下检验假设$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，并计算相应的p-值；(2) 若$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为95%的双侧置信区间.（保留1位小数）

六. (15 分) 设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\theta,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\theta-x)^{\lambda-1}}{\theta^{\lambda}}, & 0<x\le\theta\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $\theta>0,\lambda>0.$

$X_1,\ldots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，(1) $\lambda=2$, θ 为未知参数，求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$，并判断其是否为 θ 的无偏估计，说明理由；(2) $\theta=2,\lambda$ 为未知参数，求 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}$，并判断其是否为 λ 的相合估计，说明理由.

浙江大学 2019 - 2020 学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷解答

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：________

考试试卷：A 卷 √、B 卷（请在选定项上打 √）

考试形式：闭 √、开卷（请在选定项上打 √），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2020 年 1 月 15 日，考试时间：120 分钟

一．填空题（每小格 3 分，共 36 分）：

1. 不独立，0.25.　　2. 3/2，3/8.

3. $1-\dfrac{99}{8}e^{-3}=0.384$，0.75.　　4. $\dfrac{2}{\pi}$.　　5. 0.9544，$\chi^2(1)$，28.

6. $\chi^2=3.21$，接受原假设，因为 $\chi^2=3.21<\chi^2_{0.05}(4)=9.49$.

二．(15 分)解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}0.75\mathrm{d}y=1.5\sqrt{x}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y^2}^{1}0.75\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}(1-y^2), & -1<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) $f_{Y|X}(y|0.25)=\dfrac{f(x,0.25)}{f_X(0.25)}=\begin{cases}1, & -0.5<y<0.5,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　　均匀分布，

$P(Y>0.1|X=0.25)=0.4$；

(3) 因为 $E(Y)=0,E(XY)=0,Cov(X,Y)=0,$ 所以 X 与 Y 不相关；

(4) X 与 Z 独立. 因为对一切 x，z，$P(X\le x,Z\le z)=P(X\le x)P(Z\le z)$.

三．（9 分）(1)若 X 与 Y 独立， $P(X=1, Y=1)=p^2$，

(X, Y) 的联合分布律为

$X \setminus Y$	0	1	$P(X=i)$
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
$P(Y=j)$	$1-p$	p	

(2)若 X 与 Y 的相关系数为 0.5，$E(XY)-E(X)E(Y)=0.5p(1-p)$，$P(X=1, Y=1)=E(XY)=0.5p(1+p)$，

(X, Y) 的联合分布律为

$X \setminus Y$	0	1	$P(X=i)$
0	$(1-p)(1-0.5p)$	$0.5p(1-p)$	$1-p$
1	$0.5p(1-p)$	$0.5p(1+p)$	p
$P(Y=j)$	$1-p$	p	

四．（15 分）解：(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^3}{27}, & 0\le x<3,; \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{18}, & 0<y<9, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(3) $E(X^{-2}e^{-X})=\int_0^3 x^{-2}e^{-x}\dfrac{x^2}{9}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{9}(1-e^{-3})$，当 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{-2}e^{-X_i} \xrightarrow{P} \dfrac{1}{9}(1-e^{-3})$.

(4) $E(X^3)=\int_0^3 x^3\dfrac{x^2}{9}\mathrm{d}x=\dfrac{27}{2}$，$E(X^6)=\int_0^3 x^6\dfrac{x^2}{9}\mathrm{d}x=243$，

$\mathrm{Var}(X^3)=243-\dfrac{27\times 27}{4}=\dfrac{243}{4}$，

$\dfrac{1}{81}\sum_{i=1}^{81} X_i^3 \overset{\text{近似}}{\sim} N(\dfrac{27}{2}, \dfrac{3}{4})$，

概率密度函数 $g(z)=\sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}\exp[\dfrac{-2}{3}(z-\dfrac{27}{2})^2]$，$-\infty<z<+\infty$.

五(10 分) 解：(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

拒绝域为$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\geq F_{0.025}(99,99)=1.49$或$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\leq\dfrac{1}{F_{0.025}(99,99)}$，

计算得 $f_0=\dfrac{882669}{678976}=1.30$，未落在拒绝域内，接受原假设，

$P\_=2P(F(99,99)\geq 1.30)=0.2$

(2) $\mu_1-\mu_2$的置信度为95%的双侧置信区间为

$(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{0.025}(198)\sqrt{\dfrac{S_1^2+S_2^2}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100}})$，计算得(-100.9, 388.9).

其中$s_w=\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{2}}=883.64$，$t_{0.025}(198)\approx 1.96$

$t_{0.025}(198)\sqrt{\dfrac{S_1^2+S_2^2}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100}}$=244.9

六. (15 分) 解：(1) $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}, 0<x\leq\theta\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$，$\mu_1=E(X)=\int_0^\theta x\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{3}$，

θ的矩估计$\hat{\theta}=3\bar{X}$，

$E(\hat{\theta})=3E(\bar{X})=\theta$，$\hat{\theta}$为$\theta$的无偏估计；

(2)似然函数 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\lambda)=\dfrac{\lambda^n[\prod_{i=1}^n(2-x_i)]^{\lambda-1}}{2^{n\lambda}}$

$l(\lambda)=n\ln\lambda+(\lambda-1)\sum_{i=1}^n\ln(2-x_i)-n\lambda\ln 2, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}l(\lambda)=\dfrac{n}{\lambda}+\sum_{i=1}^n\ln(2-x_i)-n\ln 2=0$，

解得 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{n\ln 2-\sum_{i=1}^n\ln(2-X_i)}=[\ln 2-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln(2-X_i)]^{-1}$.

$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln(2-X_i)\xrightarrow{P}E(\ln(2-X))=\ln 2-\dfrac{1}{\lambda}$，所以 $\hat{\lambda}\xrightarrow{P}\lambda$，即$\hat{\lambda}$ 为λ的相合估计.