浙江大学 2018 - 2019 学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：__________

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2019 年 6 月 29 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：__________学号：__________专业：__________作业编号：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.9772$, $t_{0.05}(15)=1.75$, $t_{0.025}(15)=2.13$, $t_{0.005}(15)=2.95$, $t_{0.05}(25)=1.71$, $t_{0.025}(25)=2.06$, $\chi^2_{0.05}(3)=7.82$, $\chi^2_{0.05}(1)=3.84$.

一．填空题（每小格 3 分，共 33 分）

1. 设 A, B, C 为三个随机事件，已知 A 发生时 B 必定发生，$P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(A\mid C)=0.4$, $P(B\mid C)=0.5$, $P(C)=0.6$, 则 $P(C\mid A)=$ __________；$P(A\cup B\cup C)=$ __________.

2. 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$\lambda>0$，(1)若 $P(X\le 1)=3e^{-2}$，则 $\lambda=$__________；(2)若 $E(X^2)=2\mathrm{Var}(X)$，则 $\lambda=$ __________.

3. 设 X 服从参数 $\lambda=2$ 的指数分布，则 $P(X\leqslant 3\mid X>1)=$__________，对 X 独立重复观察 n 次，记结果为 $X_1,\dots,X_n$，当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P}$ __________.

4. 游客喜欢向景区的一个景观投币，假设游客独立投掷 10000 次，投中率为 0.1，设 X 表示投中的次数，则 X 服从__________分布（写出参数），$P(X>970)\approx$ __________.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_6$ 是 X 的简单随机样本，$\overline{Y}_1=\frac{X_1+X_2}{2}$，$\overline{Y}_2=\frac{X_3+\dots+X_6}{4}$，若 $c[(X_1-\overline{Y}_1)^2+(X_2-\overline{Y}_1)^2]/[(X_3-\overline{Y}_2)^2+\dots+(X_6-\overline{Y}_2)^2]\sim F(1,3)$，则 $c=$ ______；$P(|\overline{Y}_1-\overline{Y}_2|<\sqrt{3}\sigma)=$ ______；$Var[(X_1-\overline{Y}_1)^2+(X_2-\overline{Y}_1)^2]=$ ______.

二. (15 分) 某种产品的价格 X(单位：百元) 具有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.3, & 1\le x\le 2,\\ 0.5, & 2<x\le 3,\\ 0.4, & 3<x\le 3.5,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 小王要购买该产品，当价格 X 在[1, 1.5)时他购买的概率为 0.3， 价格 X 在[1.5, 2]时他购买的概率为 0.5， 价格 X 在(2,2.5]时他购买的概率为 0.6， 价格 X 在(2.5, 3]时他购买的概率为 0.4，价格 X 在(3, 3.5]时他购买的概率为 0.2. 求(1)价格 X 在 [1.5, 2.5]的概率；(2)价格 X 的分布函数 $F(x)$；(3) 已知小王购买了该产品，求其购买价格 X 在 [1.5, 2.5]的概率.

三. (15 分) 设(X, Y)的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求(1)分布函数值 $F(0.5, 0.5)$；(2) Y 的边际密度函数 $f_Y(y)$；(3) $P(X<0.4|Y=0.8)$；(4) $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

四．（12 分）设 X 的分布律为 $P(X=0)=a$、 $P(X=1)=0.6-a$、 $P(X=2)=0.4$，$0<a<0.6$. (1)已知 Y 服从 0-1 分布， $P(X=0, Y=1)=P(X=2, Y=1)=0.08$、 $P(X=1, Y=1)=b$，$0\leqslant b\leqslant 0.6-a$. 若 X 与 Y 不相关且不独立，求 a 的值及 b 的范围；(2)对 X 独立重复观察 n 次，得到简单随机样本 $X_1,\ldots,X_n$， $\bar{X}$ 是样本均值，求 a 的矩估计量 $\hat{a}$，判断其是否为 a 的无偏估计，说明理由.

五．(10 分) 为调查某减肥药的疗效，随机选择 16 位服药一个疗程的使用者，记录他们的减肥重量 X(单位：公斤)，假设 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，已测得样本均值 $\bar{x}=1.18$，样本标准差 $s=1.6$. (1) 对于假设：$H_0: \mu\leq 0, H_1:\mu>0$，求 P_值并进行检验(取 $\alpha=0.05$)；(2)现有对照组 11 人，服用安慰剂，记录他们的减肥重量 Y(单位：公斤)，假设 $Y\sim N(\mu_Y, \sigma^2)$，测得样本均值 $\bar{y}=0.02$，样本标准差 $s_Y=0.9$，求 $\mu-\mu_Y$ 的置信度为 95%的双侧置信区间.（保留两位小数）

六. (15 分) 设总体 X 的分布律为 $P(X=0)=a$, $P(X=1)=b$, $P(X=2)=a+b$, $P(X=3)=1-2(a+b)$. 未知参数 $a>0, b>0, a+b<0.5$，$X_1,\dots,X_{400}$ 是总体 X 的简单随机样本，其中 0，1，2，3 分别出现 60，100，140，100 次，(1)求 a, b 的极大似然估计值；(2)在显著水平 0.05 下，用 χ^2 拟合优度检验法检验假设 $H_0: a=0.15$， $b=0.25$.

浙江大学 2018 - 2019 学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：________

考试试卷：A 卷 √、B 卷（请在选定项上打 √）

考试形式：闭 √、开卷（请在选定项上打 √），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2019 年 6 月 29 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：________ 学号：________ 专业：________ 作业编号：________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.9772$, $t_{0.05}(15)=1.75$, $t_{0.025}(15)=2.13$, $t_{0.005}(15)=2.95$, $t_{0.05}(25)=1.71$, $t_{0.025}(25)=2.06$, $\chi^2_{0.05}(3)=7.82$, $\chi^2_{0.05}(1)=3.84$.

一. 填空题（每小格 3 分，共 33 分）

1. 设 A, B, C 为三个随机事件，已知 A 发生时 B 必定发生，$P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(A\mid C)=0.4$, $P(B\mid C)=0.5$, $P(C)=0.6$, 则 $P(C\mid A)=$ 0.8；$P(A\cup B\cup C)=$ 0.7.

2. 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$\lambda>0$，(1)若 $P(X\le 1)=3e^{-2}$，则 $\lambda=$ 2；(2)若 $E(X^2)=2\operatorname{Var}(X)$，则 $\lambda=$ 1.

3. 设 X 服从参数 $\lambda=2$ 的指数分布，则 $P(X\leqslant 3\mid X>1)=$ $1-e^{-4}$，对 X 独立重复观察 n 次，记结果为 $X_1,\dots,X_n$，当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}$ 0.5.

4. 游客喜欢向景区的一个景观投币，假设游客独立投掷 10000 次，投中率为 0.1，设 X 表示投中的次数，则 X 服从 $B(10000, 0.1)$ 分布（写出参数），$P(X>970)\approx$ 0.8413.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_6$ 是 X 的简单随机样本，$\overline{Y}_1=\frac{X_1+X_2}{2}$，$\overline{Y}_2=\frac{X_3+\dots+X_6}{4}$，若 $c[(X_1-\overline{Y}_1)^2+(X_2-\overline{Y}_1)^2]/[(X_3-\overline{Y}_2)^2+\dots+(X_6-\overline{Y}_2)^2]\sim F(1,3)$，则 $c=$ 3；$P(|\overline{Y}_1-\overline{Y}_2|<\sqrt{3}\sigma)=$ 0.9544；$Var[(X_1-\overline{Y}_1)^2+(X_2-\overline{Y}_1)^2]=$ $2\sigma^4$.

二. (15 分) 某种产品的价格 X(单位：百元) 具有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.3, & 1\le x\le 2,\\ 0.5, & 2<x\le 3,\\ 0.4, & 3<x\le 3.5,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 小王要购买该产品，当价格 X 在[1, 1.5)时他购买的概率为 0.3， 价格 X 在[1.5, 2]时他购买的概率为 0.5， 价格 X 在(2,2.5]时他购买的概率为 0.6， 价格 X 在(2.5, 3]时他购买的概率为 0.4，价格 X 在(3, 3.5]时他购买的概率为 0.2. 求(1)价格 X 在 [1.5, 2.5]的概率；(2)价格 X 的分布函数 $F(x)$；(3) 已知小王购买了该产品，求其购买价格 X 在 [1.5, 2.5]的概率.

(1) $P(1.5\le X\le 2.5)=\int_{1.5}^{2.5}f(x)dx=\int_{1.5}^{2}0.3dx+\int_{2}^{2.5}0.5dx=0.4$ ---- 3'

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.3x-0.3, & 1\le x<2\\ 0.5x-0.7, & 2\le x<3\\ 0.4x-0.4, & 3\le x<3.5\\ 1, & x\ge 3.5\end{cases}$ ----- 5'

(3) $A=$"小王购买了产品"，$B_1=$"$1\le X<1.5$"，$B_2=$"$1.5\le X<2$"

$B_3=$"$2\le X<2.5$"，$B_4=$"$2.5\le X<3$"，$B_5=$"$3\le X<3.5$"

则 $P(A|B_1)=0.3$，$P(A|B_2)=0.5$，$P(A|B_3)=0.6$，$P(A|B_4)=0.4$，$P(A|B_5)=0.2$. ------ 3'

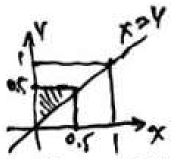
$P(B_1)=0.15$，$P(B_2)=0.15$，$P(B_3)=0.25$，$P(B_4)=0.25$，$P(B_5)=0.2$

$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(B_i)P(A|B_i)=0.15\times0.3+0.15\times0.5+0.25\times0.6+0.25\times0.4+0.2\times0.2=0.41$

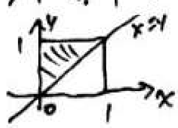
$P(B_2\cup B_3|A)=P(B_2|A)+P(B_3|A)=\frac{0.15\times0.5}{0.41}+\frac{0.25\times0.6}{0.41}=\frac{45}{82}=0.549$ --- 4'

三. (15 分) 设(X,Y)的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 求(1)分布函数值 $F(0.5, 0.5)$；

(2) Y 的边际密度函数 $f_Y(y)$；(3) $P(X<0.4|Y=0.8)$；(4) $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.



(1) $F(0.5,0.5)=P(X\le0.5,Y\le0.5)=\iint\limits_{\substack{x\le0.5\\ y\le0.5}}f(x,y)dxdy=\int_0^{0.5}dx\int_x^{0.5}8xy\,dy=\frac{1}{16}$ ---- 3'



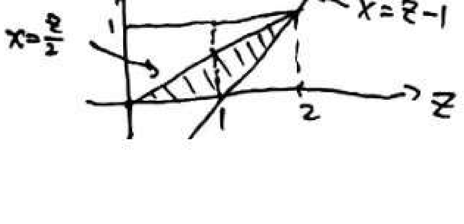
(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx=4y^3, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ----- 3'

(3) 当 $0<y<1$ 时，

$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{y^2}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_{X|Y}(x|0.8)=\begin{cases}\frac{25x}{8}, & 0<x<0.8\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ --- 2'

$P(X<0.4|Y=0.8)=\int_0^{0.4}f_{X|Y}(x|0.8)dx=\int_0^{0.4}\frac{25x}{8}dx=\frac{1}{4}$ ——— 2'

(4) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^{z/2}8x(z-x)dx=2z^3/3, & 0<z<1\\ \int_{z-1}^{z/2}8x(z-x)dx=-2z^3/3+4z-8/3, & 1<z<2\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ ---- 5'



四．(12 分) 设 X 的分布律为 $P(X=0)=a$, $P(X=1)=0.6-a$, $P(X=2)=0.4$, $0<a<0.6$. (1)已知 Y 服从 0-1 分布，$P(X=0, Y=1)=P(X=2, Y=1)=0.08$, $P(X=1, Y=1)=b$, $0\leqslant b\leqslant 0.6-a$. 若 X 与 Y 不相关且不独立，求 a 的值及 b 的范围；(2)对 X 独立重复观察 n 次，得到简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$, $\overline{X}$ 是样本均值，求 a 的矩估计量 $\hat{a}$，判断其是否为 a 的无偏估计，说明理由.

(1)

$X\backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$a-0.08$	0.08	a
1	$0.6-a-b$	b	$0.6-a$
2	0.32	0.08	0.4
$p_{\cdot j}$	$0.84-b$	$0.16+b$	1

$E(X)=1.4-a$

$E(Y)=0.16+b$

$E(XY)=0.16+b$

由不相关得 $E(XY)=E(X)E(Y)$

$\Rightarrow a=0.4$ ------ 4'

若 X 与 Y 独立，则 $0.08=0.4\times(0.16+b)$, $b=0.04$.

由于 $\begin{cases} X\text{与}Y\text{不独立，则 } b\neq 0.04 \\ 0.6-a-b\geq 0, \text{则 } 0\leq b\leq 0.2 \end{cases}$ ----- 2'

(2) $\mu_1=E(X)=0\times a+1\times(0.6-a)+2\times 0.4=1.4-a$, $a=1.4-\mu_1$, $\hat{a}=1.4-\overline{X}$, ---- 4'

$E(\hat{a})=E(1.4-\overline{X})=1.4-E(\overline{X})=1.4-E(X)=1.4-(1.4-a)=a$,

$\hat{a}$ 是 a 的无偏估计 ----- 2'

五．(10 分) 为调查某减肥药的疗效，随机选择 16 位服药一个疗程的使用者，记录他们的减肥重量 X(单位：公斤)，假设 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，已测得样本均值 $\overline{x}=1.18$，样本标准差 $s=1.6$. (1)对于假设：H_0: $\mu\leq 0$, H_1: $\mu>0$，求 $P_$值并进行检验(取 $\alpha=0.05$)；(2)现有对照组 11 人，服用安慰剂，记录他们的减肥重量 Y(单位：公斤)，假设 $Y\sim N(\mu_Y, \sigma^2)$，测得样本均值 $\overline{y}=0.02$，样本标准差 $s_Y=0.9$，求 $\mu-\mu_Y$ 的置信度为 95%的双侧置信区间.(保留两位小数)

(1) $H_0: \mu\leq\mu_0=0$, $H_1: \mu>\mu_0=0$

取 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

H_0 的拒绝域 $t\geq t_\alpha(n-1)$

$t_0=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{1.18-0}{1.6/\sqrt{16}}=2.95$ .. 2'

$P\_=P(t(16-1)\geq 2.95)=0.005$ ... 2'

$\because P\_=0.005<\alpha=0.05$，所以拒 H_0. ---- 2'

或由 $t=2.95>t_{0.05}(15)=1.75$

得出拒绝 H_0.

(2) 取 $G=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu-\mu_Y)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

设 $P(|G|\leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2))=1-\alpha$.

得 $\mu-\mu_Y$ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)$

$=(0.06, 2.26)$ ...... 4'

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{15S^2+10S_Y^2}{25}}=1.3638$

$t_{0.025}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(25)=2.06$.

六．（15 分）设总体 X 的分布律为 $P(X=0)=a$，$P(X=1)=b$，$P(X=2)=a+b$，$P(X=3)=1-2(a+b)$．未知参数 $a>0, b>0, a+b<0.5$，$X_1,\dots,X_{400}$ 是总体 X 的简单随机样本，其中 0，1，2，3 分别出现 60，100，140，100 次，(1)求 a, b 的极大似然估计值；(2)在显著水平 0.05 下，用 χ^2 拟合优度检验法检验假设 $H_0: a=0.15$， $b=0.25$.

(1) $L(a,b) = a^{60}\cdot b^{100}(a+b)^{140}(1-2a-2b)^{100}$ ——— 3'

$\ln L(a,b) = 60\ln a + 100\ln b + 140\ln(a+b) + 100\ln(1-2a-2b)$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(a,b)}{\partial a} = \dfrac{60}{a} + \dfrac{140}{a+b} - \dfrac{200}{1-2a-2b} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(a,b)}{\partial b} = \dfrac{100}{b} + \dfrac{140}{a+b} - \dfrac{200}{1-2a-2b} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = \dfrac{9}{64} \\ \hat{b} = \dfrac{15}{64} \end{cases}$, $a = 0.6b$ ———— 3'

(2) $H_0: a=0.15, b=0.25$

取检验统计量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i^2}{np_i} - n$ …… 2

H_0的拒绝域 $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha(k-r-1)$ …… 2

X的取值 A_i	0	1	2	3
实际频数 n_i	60	100	140	100
概率 p_i	0.15	0.25	0.4	0.2
理论频数 np_i	60	100	160	80

——— 2

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \dfrac{n_i^2}{np_i} - 400 = \dfrac{60^2}{60} + \dfrac{100^2}{100} + \dfrac{140^2}{160} + \dfrac{100^2}{80} - 400 = 7.5$ --- 2

$k=4$, $r=0$, $\chi^2_\alpha(k-r-1) = \chi^2_{0.05}(3) = 7.82$

$\therefore \chi^2 < \chi^2_\alpha(k-r-1)$, 接受$H_0$. …… 1