线代期末考试复习知识点概要（2019.12.30）

教师：汤树元　助教：唐松乔

一、行列式的主要定义和常用方法

1. n阶行列式的定义：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\dots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\dots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$，其中$j_1j_2\dots j_n$为$1,2,\dots,n$的全排列.

定义解读：

(1) n阶行列式共有$n!$项代数和；

(2) 每项有n个来自不同行，不同列元素的乘积；

(3) 每项带有符号，当行标为标准排列时，该项的符号由列标的逆序数决定（当列标为标准排列时，该项的符号由行标的逆序数决定）.

2. 行列式的性质

性质 1：$D=D^T$；

性质 2：交换两行（列），行列式变号；

性质 3：如果行列式中某一行（列）所有元素有公因子k，则可将k提到行列式外. 或者用k乘行列式的某一行（列），等于用k乘行列式；

性质 4：行列式中有两行（列）对应元素成比例，则行列式$D=0$；

性质 5：（分行（列）的可加性）如果行列式的某行（列）元素都是两个元素的和，则行列式可以表示为两个行列式的和. 如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}^* & a_{22}+a_{22}^* & a_{23}+a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

性质 6：把行列式某行（列）的k倍加到另一行（列）上，行列式的值不变，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31}+a_{33} \end{vmatrix};$$

3. 行列式的展开

(1)按某一行（列）展开

$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}$（按行展开）$=\begin{cases}D, i=k \\ 0, i\neq k\end{cases}$

$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}$（按列展开）$=\begin{cases}D, j=k \\ 0, j\neq k\end{cases}$

(2)按某$k(\geq 2)$行（列）展开（拉普拉斯定理）

设D为n阶行列式，任取定其中k行（列）（$1\leq k\leq n$），则由这k行（列）构成的一切k阶子式$N_1,N_2,\dots,N_t$与它们所对应代数余子式$A_1,A_2,\dots,A_t$乘积之和等于D，即：$D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t$，其中$t=C_n^k$.

在计算或者证明行列式的过程中，要熟记 10 类行列式的基本类型：

第 1，2 类：关于主对角线上（下）三角行列式，$D_n=$主对角线上元素的乘积

第 3，4 类：关于次对角线上（下）三角行列式，$D_n=$次对角线上元素的乘积且带有符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

第 5 类：箭形，三对角形等；

第 6 类：范德蒙行列式：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \cdots & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$；

第 7，8 类：关于主对角块上（下）三角行列式：$D=$主对角上两个行列式的乘积（特点：分成 4 块后，次对角块上至少有一块元素全为零，主对角两块均为方块）；

第 9，10 类：关于次对角块上（下）三角行列式：$D=$次对角上两个行列式的乘积且带有符号$(-1)^{s\times t}$（特点：分成 4 块后，主对角块上至少有一块元素全为零，次对角两块均为方块）.

二、行列式的计算常用方法

1. 化为三角形行列式或利用行列式的性质，化为 10 类行列式的基本类型；
2. 递推公式：如果行列式在元素分布上比较有规律，则可以设法找出n阶行列式D_n与较低阶的行列式之间的关系，依次递推来计算行列式的值；
3. 加边法：又称升级法，在原来行列式中增加一行一列，且保持原行列式的值不变；
4. 数学归纳法：先通过计算一些低阶行列式D_1,D_2,D_3等，找出它们的结果与阶数之间的关系，对D_n的结果提出猜想，再利用数学归纳法证明猜想.

三、线性方程组的求解

1. 非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad \text{(I)}$$

系数矩阵为$A_{m\times n}$，增广矩阵为$\overline{A}_{m\times(n+1)}$，则：

(1) 当$R(A)\ne R(\overline{A})$，方程组无解；

(2) 当$R(A)=R(\overline{A})=r$，方程组有解，且：$\begin{cases} a.\text{若}r=n\Rightarrow\text{有唯一一组解} \\ b.\text{若}r<n\Rightarrow\text{有无穷多组解，} \\ \quad\text{且有}n-r\text{个自由变量.} \end{cases}$

2. 齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

(II)是(I)中$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$的特例，所以可以直接利用(I)的结论.
因为$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$为(II)的解（零解），故(II)必有解.
(II)有非零解$\Leftrightarrow R(A)<n$；
(II)只有零解$\Leftrightarrow R(A)=n$.

3. Cramer 法则

特别地，当$m=n$时：

$$\begin{cases}若|A|\neq 0,非齐次方程组(\mathrm{I})有唯一解，齐次方程组(\mathrm{II})只有零解\\ 若|A|=0,齐次方程组(\mathrm{II})有非零解，非齐次方程组(\mathrm{I})暂不确定\end{cases}.$$

四、矩阵的定义和运算

1. 定义

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \cdots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ \cdots a_{2n}\\ \cdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \cdots a_{mn}\end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}，称为m\times n矩阵.$$

2. 特殊矩阵

(1) 单位矩阵E，数量矩阵λE；

(2) 转置矩阵：将$A_{m\times n}$的行与列互换后得到的矩阵，记为$A_{n\times m}^T$；

(3) 对称矩阵：若$A=A^T$, 反对称矩阵：若$A=-A^T$；

3. 矩阵的运算

(1) 矩阵的数乘：设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$（k为常数）；

(2) 矩阵的加减法：设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$，则$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$；

(3) 矩阵的乘法：设$A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$，则$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1,\dots,m;j=1,\dots,n)$；

(4) 矩阵的转置：$(A^T)^T=A,(kA)^T=kA^T,(A\pm B)^T=A^T\pm B^T,(AB)^T=B^TA^T$.

五、伴随矩阵，逆矩阵

1. 伴随矩阵的定义

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，称$A^*=(A_{ji})_{n\times n}$为A的伴随矩阵，其中$A_{ji}=(-1)^{j+i}M_{ji}$，M_{ji}为A中划去第j行第i列后得到的$n-1$阶行列式.

2. 伴随矩阵的主要公式

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$；

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$；

(3) 当A可逆时，$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|},(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$;

(4) A^*可逆$\Leftrightarrow A$可逆；

(5) 若A，B均可逆，则$(AB)^*=B^*A^*$；

(6) 当A可逆时，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；

(7) $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)<n-1\end{cases}$；

(8) $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1},(A^T)^*=(A^*)^T,(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

3. 逆矩阵的定义

设A为n阶方阵，如果存在n阶方阵B使得$AB = BA = E$，则称A可逆.

4. 逆矩阵的性质

设A, B为同阶可逆阵，则：

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$；

(2) $(kA^{-1})^{-1} = k^{-1}A(k \neq 0)$；

(3) AB也可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

(4) A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$；

(5) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

5. A可逆$\Leftrightarrow$(1) $|A| \neq 0$；

(2) A^*可逆；

(3) $AX = 0$只有零解；

(4) A可以表示为一系列初等矩阵的乘积；

(5) A与E等价.

6. 逆矩阵的求法

(1) 利用定义求逆矩阵，如果$AB = E$或$BA = E$，则$A^{-1} = B$；

(2) 利用伴随矩阵求逆矩阵，$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$;

(3) 利用初等变换求逆矩阵；

(4) 利用分块矩阵求逆矩阵.

六、矩阵的初等变换，初等矩阵

1. 初等变换的定义

对矩阵进行交换行（列）;

用非零数乘矩阵的某行（列）;

把矩阵某行（列）的k倍加到另一行（列）上.

2. 初等矩阵的定义

对单位矩阵进行一次初等变换后得到的矩阵，为$E(i,j), E\big(i(k)\big), E(i+j(k),j)$.

3. 初等矩阵在矩阵乘法中的作用

初等矩阵左乘A，相当于对A进行一次初等行变换；

初等矩阵右乘A，相当于对A进行一次初等列变换.

4. 初等矩阵的逆，行列式

$(E(i,j))^{-1} = E(i,j), |E(i,j)| = -1$；

$(E\big(i(k)\big))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right), \left|E\big(i(k)\big)\right| = k$；

$(E(i+j(k),j))^{-1} = E(i+j(-k),j), |E(i+j(k),j)| = 1$.

七、矩阵的秩（初步）

1. 秩的定义：A的不等于 0 的子式的最大阶数，称为A的秩，记为$r(A)$；

秩的等价定义：A的秩等于$r \Leftrightarrow A$中至少有一个r阶子式不等于 0，且所有$r+1$阶子式（如果有的话）都等于 0.

2. 秩的性质

(1) $r(A_{m\times n}) \leq min\,(m,n)$；

(2) 初等变换不改变矩阵的秩，当P, Q可逆时有：$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；

(3) $r\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\right)=r(A)+r(B)$；

(4) $r(A+B)\le r(A)+r(B); r(A,B)\le r(A)+r(B)$；

(5) $r(A)+r(B)-n\le r(A_{m\times n}B_{n\times t})\le \min\big(r(A),r(B)\big)$；

(6) 如果$A_{m\times n}B_{n\times t}=0$，则$r(A)+r(B)\le n$；

(7) 如果A列满秩，则$r(AB)=r(B)$, 如果B行满秩，则$r(AB)=r(A)$.

3. 矩阵秩的求法

将矩阵A通过初等变换化为阶梯型矩阵B，则$r(A)=$阶梯型矩阵B的非零行数.

八、分块矩阵，矩阵的等价

1. 分块矩阵的运算

(1) 数乘：设$A=(A_{ij})_{s\times t}$，则$kA=(kA_{ij})_{s\times t}$（k为常数）；

(2) 加减法：设$A=(A_{ij})_{s\times t}, B=(B_{ij})_{s\times t}$有相同的分块方法，则$A\pm B=(A_{ij}\pm B_{ij})_{s\times t}$；

(3) 乘法：设$A_{m\times n}=(A_{ij})_{s\times p}, B_{n\times t}=(B_{ij})_{p\times l}$，如果$A$的列上和$B$的行上有相同的分块方法，则$AB=(C_{ij})_{s\times l}$，其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}A_{ik}B_{kj}(i=1,\dots,s;j=1,\dots,l)$；

(4) 转置：设$A=(A_{ij})_{s\times t}$，则$A^T=(A_{ji}^T)_{t\times s}$；

(5) 求逆：如果矩阵分块后为如下情形：（其中$A_{r\times r}, B_{s\times s}$）

$G_1=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}, G_2=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, G_3=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}, G_4=\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 则：

$G_1^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}, G_2^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$,

$G_3^{-1}=\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}, G_4^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$;

(6) 初等变换：

对分块矩阵的其中一行（列）乘一个同阶可逆矩阵；或者交换二行（列）；或者某一行（列）乘一个相应矩阵加到另一行（列），这三种变换称为分块矩阵的初等变换.

对分块矩阵做一次初等行（列）变换，等于用相应的分块初等矩阵左（右）乘这个矩阵.

分块矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

2. 矩阵的等价

(1) 等价的定义：若$A_{m\times n}$能够经过初等变换化为$B_{m\times n}$，则称A与B等价.

(2) 等价的性质：设$r(A_{m\times n})=r$，则A与$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$等价，称$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$为$A$的等价标准形；等价具有自反性，对称性，传递性.

(3) 等价的判断：A与B等价$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P,Q使得$PAQ=B$

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

$\Leftrightarrow A,B$有相同的标准形.

九、线性空间定义

1. 设P是一个数域，V是非空集合，有两个运算：

加法(+)：$V\times V\to V:(\alpha,\beta)\to\alpha+\beta$

数乘(•)：$P\times V\to V:(k,\alpha)\to k\alpha$

满足下面 8 个性质：

(1) 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) 结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) 零元存在：$\exists\theta\in V,s.t.\theta+\alpha=\alpha,\forall\alpha\in V$；

(4) 负元存在：$\forall\alpha\in V,\exists\beta\in V,s.t.\alpha+\beta=\theta$；

(5) 分配律：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

(6) 分配律：$(k+t)\alpha=k\alpha+t\alpha$；

(7) $(k.t).\alpha=k(t.\alpha)$；

(8) $1.\alpha=\alpha,\forall\alpha\in V$.

称V为数域P上的线性空间.

2. 线性空间的子空间

设V为数域P上的线性空间，$\emptyset\neq W\subseteq V$，如果$W$对$V$中的加法和数乘运算也构成数域$P$上的线性空间，称$W$为$V$的子空间.

十、线性相关性的证明

1. 线性组合、线性表示的概念

2. 线性相关、线性无关的概念：设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\in V$，若存在一组不全为 0 的数$k_1,k_2,\ldots,k_s$满足$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\theta$，称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关.

若有一组数$k_1,k_2,\ldots,k_s$满足$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\theta$，可推出$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关.

3. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，而$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$唯一线性表示.

4. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$线性表示且$r>s$，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性相关.

5. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$线性表示且$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关，则$r\leq s$.

6. 在具体线性空间P^n中可通过秩来判断线性表示和线性相关性：

设$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix},1\leq i\leq s$,

且$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s),r(\bar{A})=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta)$. 则：

(1) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表示$\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})$；
(2) β不可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表示$\Leftrightarrow r(A)\neq r(\bar{A})$；
(3) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(A)<s$；
(4) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r(A)=s$.

十一、向量组的秩和线性空间维数

1. 向量组的极大无关组：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$中的一个部分向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$若满足条件：

(1) 无关性：$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$线性无关；

(2) 极大性：$\forall\beta\in\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$, $\beta,\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$线性相关.

则称向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$的一个极大无关组.

极大无关组的另一个等价定义：

(1) $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$线性无关；

(2) $\forall\beta\in\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$, β可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$线性表示.

2. 向量组等价的概念.
3. 等价的线性无关向量组所含向量个数相同.
4. 向量组都与其极大无关组等价，由此可知向量组的极大无关组彼此等价.
5. 向量组的秩：极大无关组中所含向量个数.

6. 若秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}=r,\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$为线性无关的部分向量组，则

$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$为$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$的一个极大无关组.

7. 线性空间的基：设V是数域P上的线性空间，向量组$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}\subseteq V$满足：
(1) $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$线性无关；
(2) $\forall\beta\in V$, $\beta,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$线性相关或$\forall\beta\in V$, β可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$线性表示；
则称$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$为$V$的一组基.
与极大无关组类似，基不唯一，但基中所含向量个数相同. 定义$dimV=$基中所含向量个数.
8. 子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$的基和维数：$dimL(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=$秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$，向量组的极大无关组构成$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$的一组基，建立了极大无关组与基之间的联系.

十二、线性空间基和坐标的变换

1. 设V为n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$为$V$的一组基. $\forall\alpha$可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$唯一线性表示，即：

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

称$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$为$\alpha$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$下的坐标.

2. 设V为n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$为$V$的一组基.

$$\alpha_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix},1\le i\le s$$

由这些$\alpha_i(1\le i\le s)$的坐标构成$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$，有：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(A)<s$；

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r(A)=s$.

推论：当$s>n$（个数>维数）时，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$一定线性相关.

3. 设$(I):\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$和$(II):\varepsilon_1',\varepsilon_2',\dots,\varepsilon_n'$为线性空间$V$的两组基，这样$\varepsilon_i'(i=1,2,\dots,n)$可由基$(I)$线性表示：

$$\begin{cases} \varepsilon_1'=m_{11}\varepsilon_1+m_{21}\varepsilon_2+\cdots+m_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon_2'=m_{12}\varepsilon_1+m_{22}\varepsilon_2+\cdots+m_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots \\ \varepsilon_n'=m_{1n}\varepsilon_1+m_{2n}\varepsilon_2+\cdots+m_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

即

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\dots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ & & \cdots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

记$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ & & \cdots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$，称为基$(I)$到基$(II)$的过渡矩阵.

由上面 2 可知M为可逆矩阵，$r(M)=n$，(1)式称为基变换公式，由此可推得$X'=M^{-1}X$（坐标变换公式），其中$\alpha=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\dots,\varepsilon_n')X'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)X$.

十三、矩阵秩的等式和求解线性方程组

1. 设A为$m\times n$矩阵，则$r(A)=A$的行秩$=A$的列秩.

2. 设A为$m\times n$矩阵且$r(A)=r$，则$AX=O$的解空间W的维数为$n-r$(未知数个数$-r(A)$). W的一组基$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-r}$称为基础解系.

3. 非齐次线性方程组$AX=b(b\ne\theta)$的通解为：$\xi=\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，其中$A\xi_0=b$(即$\xi_0$为$AX=b$的一个特解)，而$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-r}$为导出组$AX=O$的一组基础解系.

十四、欧氏空间

1. 设V为实线性空间. 二元函数内积$(\cdot,\cdot):V\times V\to R$满足：

(1) 对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

(2) 线性性：$(k\alpha+l\beta,r)=k(\alpha,r)+l(\beta,r)$；

(3) 正定性：$(\alpha,\alpha)\ge 0$且$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\theta$

则称V为欧式空间.

2. $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)},\alpha\in V$称为$\alpha$的长度. 有性质:

(1) $\|\alpha\|\geq 0$且$\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=\theta$;
(2) $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$;
(3) $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$（三角不等式）;
(4) $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$且等号成立的充要条件是$\alpha,\beta$线性相关（柯西施瓦茨不等式）.
3. $\forall$非零向量$\alpha,\beta\in$欧氏空间V，定义夹角:

$$<\alpha,\beta>=arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$$

$0\leq<\alpha,\beta>\leq\pi$. 若$(\alpha,\beta)=0$，称$\alpha$与$\beta$正交，记为$\alpha\perp\beta$.
勾股定理：若$\alpha\perp\beta$，则$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$.
正交向量组一定线性无关，反之未必.

4. 度量矩阵：$A=((\varepsilon_i,\varepsilon_j))_{n\times n}$，其中$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$为$V$的一组基. 有$(\alpha,\beta)=X^TAY$，其中$X,Y$为$\alpha,\beta$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$下的坐标.
5. $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$为标准正交基$\Leftrightarrow$它的度量矩阵为单位阵$E_n\Leftrightarrow A^TA=E_n$，其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，即$A$为正交阵.
6. $Schmidt$正交化方法（详见课本 167 页）.

十五、特征值与特征向量
1. A为数域P上的n阶方阵，$\lambda\in P$. 非零向量ξ满足$A\xi=\lambda\xi$，称λ为A的特征值，ξ称为A的属于λ的特征向量.
2. 求特征值的方法:
λ为A的特征值
$\Leftrightarrow\exists$非零向量$\xi\ s.t.A\xi=\lambda\xi$
$\Leftrightarrow\exists$非零向量$\xi\ s.t.(\lambda E_n-A)\xi=O$
$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(\lambda E_n-A)X=O$有非零解
$\Leftrightarrow|\lambda E_n-A|=0$.
定义$f(\lambda)=|\lambda E_n-A|$为$A$的特征多项式. 因此$\lambda$为$A$的特征值$\Leftrightarrow\lambda$为特征方程$f(\lambda)=|\lambda E_n-A|=0$的根.
3. 求属于特征值λ的特征向量的方法:
$\xi\neq\theta$且$A\xi=\lambda\xi\Leftrightarrow(\lambda E_n-A)\xi=O\Leftrightarrow\xi$为$(\lambda E_n-A)X=O$的非零解.
(1) $|\lambda E_n-A|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$;
(2) $\sum_{i=1}^n a_{ii}=\sum_{i=1}^n\lambda_i,|A|=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$.
4. 若$A\xi=\lambda\xi$，则$A^2\xi=\lambda^2\xi,\dots,A^k\xi=\lambda^k\xi,P(A)\xi=P(\lambda)\xi$（$P(\lambda)$为多项式）.
若A可逆，则$A^{-1}\xi=\lambda^{-1}\xi$.

5. $\{A^2$的特征值全体$\}=\{\lambda^2|\lambda$为A的特征值$\}$;

$\{P(A)$的特征值全体$\}=\{P(\lambda)|\lambda$为A的特征值$\}$（$P(\lambda)$为多项式）.

十六、矩阵的相似理论

1. A为n阶方阵，A可对角化

$\Leftrightarrow \exists$可逆矩阵$P\ s.t.\ P^{-1}AP=\Lambda$(对角阵)

$\Leftrightarrow \exists$可逆矩阵$P\ s.t.\ AP=P\Lambda$

$\Leftrightarrow \exists\, n$个线性无关的向量$\xi_1,\dots,\xi_n\ s.t.\ A(\xi_1,\dots,\xi_n)=(\xi_1,\dots,\xi_n)\Lambda$，其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \exists\, n$个线性无关的向量$\xi_1,\dots,\xi_n\ s.t.\ A\xi_i=\lambda_i\xi_i$

$\Leftrightarrow \exists\, n$个线性无关的特征向量.

2. 属于不同特征值的特征向量线性无关.

3. 设$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$为$A$的互异特征值，其重数分别为$n_1,n_2,\dots,n_s$.（自然有$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$）

记$(\lambda_iE_n-A)X=O$的解空间为W_{λ_i}，则$dimW_{\lambda_i}=n-r(\lambda_iE_n-A)=r_i\le n_i$. $\xi_{i1},\xi_{i2},\dots,\xi_{ir_i}$为$W_{\lambda_i}$的基础解系.

A可对角化$\Leftrightarrow r_1+r_2+\cdots+r_s=n\Leftrightarrow r_i=n_i(1\le i\le s)$.

当A可对角化，记$P=(\xi_{11},\dots,\xi_{1r_1},\xi_{21},\dots,\xi_{2r_2},\xi_{s1},\dots,\xi_{sr_s})$，则：

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_s & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_s\end{pmatrix}$$

4. 若A可对角化，即$\exists$可逆矩阵$P\ s.t.\ P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $P^{-1}A^2P=\Lambda^2,\dots,P^{-1}g(A)P=g(\Lambda)$，其中$g(x)$为多项式.

5. 若A为实对称阵，A的特征值都为实数且属于不同特征值的特征向量两两正交.

6. 若A为实对称阵，则A一定可对角化. 更进一步，存在正交矩阵$U\ s.t.$

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

十七、二次型化标准型

1. 二次型$f(x_1,\dots,x_n)=X^TAX$与对称阵A一一对应，求非退化线性替换$X=CY\ s.t.f=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y$为标准型

$\Leftrightarrow$求可逆矩阵$C\ s.t.C^TAC=\Lambda$（对角阵）.

2. 配方法（对于有平方项的情形和只有交叉项的情形）.

3. 实二次型$f=X^TAX$，A为实对称阵. 则存在正交阵$U,U^{-1}=U^T$，使得

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

因此，正交线性替换$X=UY$使二次型$f=X^TAX=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

十八、正定矩阵与正定二次型

1. 设A,B为n阶方阵，若存在可逆矩阵$C\ s.t.C^TAC=B$，则称A与B合同.

若A,B为对称阵，则：

(1) 在复数域，A与B合同$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$；

(2) 在实数域，A与B合同$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，且正惯性指数相同.

2. 惯性定理

(1) 实二次型$f=X^TAX$，无论用何种非退化线性替换化为标准型或规范型，平方项中正项个数和不为零的个数都唯一；

(2) 实对称阵A与对角阵$\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}$合同时，对角阵中正数和不为零的数的个数唯一.

3. 对于实二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=X^TAX$，下列等价：

(1) $\forall X\neq\theta,f=X^TAX>0$（正定定义）；

(2) f的正惯性指数$=n$；

(3) A的特征值>0；

(4) 存在可逆矩阵$B\ s.t.A=B^TB$；

(5) A的n个顺序主子式>0.

4. 对于实二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=X^TAX$，且$r(A)=r$，下列等价：

(1) $\forall X\neq\theta,f=X^TAX\geq 0$（半正定定义）；

(2) f的正惯性指数$=r(A)$；

(3) A的特征值≥ 0；

(4) 存在n阶实矩阵$C\ s.t.A=C^TC$；

(5) A的n个所有主子式≥ 0.

5. 如何求正惯性指数

利用惯性定理有下面两种方法：

(1) 配方法：正惯性指数=标准型正项个数；

(2) 求A的特征值，正惯性指数=正特征值的个数.