线代期中考试试卷解析（2019.11.11）

一、（本题 10 分）设有下列n阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 4 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & \cdots\\ & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 4 & 4 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 4\end{vmatrix},\text{试证明：}D_n=(1+n)2^n.$$

证：用数学归纳法. 当$n=1$时，$D_1=4=2^2=(1+n)2^n$，即命题成立；当$n=2$时，$D_2=12=3\times 4=(1+n)2^n$，即命题也成立. 假设当$n<k, k\geq 3$($k$为正整数)时，命题成立，即$\forall n=1,\ldots,k-1, D_n=(1+n)2^n$，则当$n=k$时，按第一列展开有 $D_k=4D_{k-1}-4D_{k-2}=4(1+k-1)2^{k-1}-4(1+k-2)2^{k-2}=(1+k)2^k$. 从而有$\forall n\in Z^+, D_n=(1+n)2^n$.证毕.

二、（本题 10 分）设$\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵$A=\alpha\alpha^T$. 又设n为一正整数，试求$|2E-(A^*)^n+A^n|$.

解：由于$A=\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 故$A^*=O_{3\times 3}$，其中$O_{3\times 3}$为三阶零矩阵，于是$(A^*)^n=O_{3\times 3}$，又$A^n=(\alpha\alpha^T)^n=\alpha(\alpha^T\alpha)(\alpha^T\ldots\alpha)=2^{n-1}\alpha\alpha^T=2^{n-1}A$. 于是

$$|2E-(A^*)^n+A^n|=|2E+2^{n-1}A|=\begin{vmatrix}2+2^{n-1} & 0 & -2^{n-1}\\ 0 & 2 & 0\\ -2^{n-1} & 0 & 2+2^{n-1}\end{vmatrix}=8+2^{n+2}.$$

三、（本题 15 分）设有实方阵$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 2 & 0 & 6\\ -3 & 1 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，其中$a,b$为实常数. 已知$r(A)=r(B)$，且线性方程组$AX=(b,1,0)^T$有解，试求$a,b$的值.

解：对线性方程组$AX=(b,1,0)^T$的增广矩阵作初等行变换得：

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & b\\ 2 & 0 & 6 & 1\\ -3 & 1 & -7 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & b\\ 0 & -6 & -12 & 1-2b\\ 0 & 10 & 20 & 3b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & b\\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{2b-1}{6}\\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{3b}{10}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & b\\ 0 & 1 & 2 & \frac{2b-1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{3b}{10}-\frac{2b-1}{6}\end{pmatrix},$$

因为线性方程组$AX=(b,1,0)^T$有解，故其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩. 因此$\frac{3b}{10}-\frac{2b-1}{6}=0$, 解之得$b=5$, 又可知$r(A)=2$，由已知条件知$r(B)=2$，故$|B|=0$，即$\begin{vmatrix}0 & a & 5\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$，解之得$a=15$.

四、（本题 20 分）当实数a取何值时线性方程组$\begin{cases} -x_1-4x_2+x_3=1 \\ ax_2-3ax_3=3 \\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0 \end{cases}$无解，有唯一解，有无穷多解？有解时请求出所有解.

解：对其增广矩阵进行初等行变换可得：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & a & -3a & 3 \\ 1 & 3 & (a+1) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & a & -3a & 3 \\ 0 & -1 & (a+2) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & (a+2) & 1 \\ 0 & a & -3a & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & (a+2) & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a & a+3 \end{pmatrix}$$

于是有：

当$a=0$或 1 时，由于$r(A)=2\neq 3=r(\bar{A})$，故原方程组无解；

当$a\neq 0$且$a\neq 1$时，由于$r(A)=r(\bar{A})=3=$未知数个数，故原方程组有唯一解，

此时解为$(x_1,x_2,x_3)=(\frac{-a^2-22a-21}{a^2-a},\frac{6a+6}{a^2-a},\frac{a+3}{a^2-a})$；

由上分析亦知没有实数a使得该线性方程组有无穷多解.

五、（本题 15 分）设$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & k & k & k \end{pmatrix}$，其中$k$为实常数，试求$A$的秩$r(A)$.

解：对A作初等行变换得：

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & k & k & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ k & k & k & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \\ 0 & 0 & k-k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \\ 0 & 0 & k-k^2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \\ 0 & 0 & k-k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

于是有：

当$k=1$时，$r(A)=1$；

当$k=0$时，$r(A)=3$；

当$k\neq 0$且$k\neq 1$时，$r(A)=4$.

六、（本题 20 分）设A,B为n阶方阵，试证明：

(1) $tr(A+B)=trA+trB$；

(2) $tr(AB)=tr(BA)$；

(3) 设P是一个n阶可逆矩阵，则有$tr(P^{-1}AP)=trA$；

(4) 若$A=E_{ij}$，其中E_{ij}是第i行第j列处的元素为 1，其余元素为全部为零的n阶方阵，试求trA.

证(1)：设$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$，则有$trA=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}$，$trB=\sum_{k=1}^{n}b_{kk}$. 而$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$，故$tr(A+B)=\sum_{k=1}^{n}(a_{kk}+b_{kk})$，从而有$tr(A+B)=trA+trB$；

证(2)：设$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$，则有$AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right),BA=\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\right)$，于是有$tr(AB)=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}$，$tr(BA)=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{mk}a_{km}$，于是可得：$tr(AB)=tr(BA)$；

证(3)：利用(2)可直接得，将P^{-1}看成A，AP看成B再利用矩阵乘法的结合律即可；

证(4)：直接计算可得：$trE_{ij}=\delta_{ij}$.

七、（本题 5 分）设A是一个$n(\geq 2)$阶方阵. A^*是A的伴随矩阵. 若存在n维非零列向量α使得$A\alpha=\theta$，其中θ为n维零列向量. 且非齐次线性方程组$A^*X=\alpha$有解，试证明：$r(A)=n-1$.

证：因为由题意知齐次线性方程组$A\alpha=\theta$有非零解，故$r(A)\leq n-1$，再证$r(A)\geq n-1$. 用反证法，假设$r(A)<n-1$，则A^*为n阶零矩阵. 从而非齐次线性方程组$A^*X=\alpha$无解，与题设非齐次线性方程组$A^*X=\alpha$有解矛盾. 于是有$r(A)\geq n-1$. 于是命题得证.

八、（本题 5 分）设A为n阶可逆矩阵. α,β为两个n维列向量. 试证明：$|A+\alpha\beta^T|=|A|+\beta^TA^*\alpha$.

证法一：由

$$\begin{vmatrix}A & \alpha\\ -\beta^T & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & \alpha\\ 0 & 1+\beta^TA^{-1}\alpha\end{vmatrix}=|A|(1+\beta^TA^{-1}\alpha)=|A|+\beta^T|A|A^{-1}$$
$$=|A|+\beta^TA^*\alpha.$$

又

$$\begin{vmatrix}A & \alpha\\ -\beta^T & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A+\alpha\beta^T & \alpha\\ 0 & 1\end{vmatrix}=|A+\alpha\beta^T|.$$

因此命题得证.

证法二：$|A+\alpha\beta^T|=|A+AA^{-1}\alpha\beta^T|=|A(E+A^{-1}\alpha\beta^T)|=|A||E+A^{-1}\alpha\beta^T|$.

下面先证结论：设$A_{n\times m},B_{m\times n},n\geq m$，则$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|\ (\lambda\neq 0)$.

证：因为$\lambda\neq 0$，考虑分块矩阵的行列式：

$$\begin{vmatrix}\lambda E_n & A\\ B & E_m\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2-(\frac{1}{\lambda}B)r_1}=\begin{vmatrix}\lambda E_n & A\\ 0 & E_m-\frac{1}{\lambda}BA\end{vmatrix}=\lambda^n\left|E_m-\frac{1}{\lambda}BA\right|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|.$$

另一方面，$\begin{vmatrix}\lambda E_n & A\\ B & E_m\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1-Ar_2}=\begin{vmatrix}\lambda E_n-AB & 0\\ B & E_m\end{vmatrix}=|\lambda E_n-AB|$.

因此，综上有：$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|$，证毕.

（这个结论回忆线代第五次习题课补充题目，或参考课本附录四例 4.1(2)）

由公式$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|\ (\lambda\neq 0)$可知，当$\lambda,m$均取值为 1 时，有：

$|E+A^{-1}\alpha\beta^T|=1^{n-1}|1+\beta^TA^{-1}\alpha|=1+\beta^TA^{-1}\alpha=1+\beta^T\frac{A^*}{|A|}\alpha$，于是有：

$|A+\alpha\beta^T|=|A||E+A^{-1}\alpha\beta^T|=|A|\left(1+\beta^T\frac{A^*}{|A|}\alpha\right)=|A|+\beta^TA^*\alpha$. 证毕.

（注意：一定要强调利用了公式$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|\ (\lambda \neq 0)$，最好再把这个公式证明一遍，不可以直接得$|E + A^{-1}\alpha\beta^T| = 1 + \beta^T A^{-1}\alpha$，要体现出你不是在强行凑相等.题目核心就是分块矩阵初等变换，大家注意体会.）

证法三：设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$，则：

$$|A + \alpha\beta^T| = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha_1\beta_1 & a_{12} + \alpha_1\beta_2 & \cdots a_{1n} + \alpha_1\beta_n \\ a_{21} + \alpha_2\beta_1 & a_{22} + \alpha_2\beta_2 & \cdots a_{2n} + \alpha_2\beta_n \\ & \cdots & \\ a_{n1} + \alpha_n\beta_1 & a_{n2} + \alpha_n\beta_2 & \cdots a_{nn} + \alpha_n\beta_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha_1\beta_i & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \alpha_2\beta_i & \cdots a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & \alpha_n\beta_i & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（按列拆分共有2^n项，但是只有该$(n+1)$项不为 0，其余项均为 0）

由于

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha_1\beta_i & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \alpha_2\beta_i & \cdots a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & \alpha_n\beta_i & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i A_{ji} \alpha_j = \beta^T A^* \alpha$$

故$|A + \alpha\beta^T| = |A| + \beta^T A^* \alpha$，证毕.