线代期中考试试卷（考试时间：2019.11.06）

一、（本题 10 分）设有下列n阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 4 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & \cdots\\ & & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 4 & 4 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 4\end{vmatrix}$$, 试证明：$D_n=(1+n)2^n$.

二、（本题 10 分）设$\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵$A=\alpha\alpha^T$. 又设n为一正整数，试求$|2E-(A^*)^n+A^n|$.

三、（本题 15 分）设有实方阵$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 2 & 0 & 6\\ -3 & 1 & -7\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，其中$a,b$为实常数. 已知$r(A)=r(B)$，且线性方程组$AX=(b,1,0)^T$有解，试求$a,b$的值.

四、（本题 20 分）当实数a取何值时线性方程组$\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1\\ ax_2-3ax_3=3\\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷多解？有解时请求出所有解.

五、（本题 15 分）设$A=\begin{pmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ k & k & k & k\end{pmatrix}$，其中$k$为实常数，试求$A$的秩$r(A)$.

六、（本题 20 分）设A,B为n阶方阵，试证明：

(1) $tr(A+B)=trA+trB$；

(2) $tr(AB)=tr(BA)$；

(3) 设P是一个n阶可逆矩阵，则有$tr(P^{-1}AP)=trA$；

(4) 若$A=E_{ij}$，其中E_{ij}是第i行第j列处的元素为 1，其余元素为全部为零的n阶方阵，试求trA.

七、（本题 5 分）设A是一个$n(\geq 2)$阶方阵. A^*是A的伴随矩阵. 若存在n维非零列向量α使得$A\alpha=\theta$, 其中θ为n维零列向量. 且非齐次线性方程组$A^*X=\alpha$有解，试证明：$r(A)=n-1$.

八、（本题 5 分）设A为n阶可逆矩阵. α,β为两个n维列向量. 试证明：$|A+\alpha\beta^T|=|A|+\beta^TA^*\alpha$.