线代期中考试复习知识点概要（2019.10.28）

一、行列式的主要定义和常用方法

1. n阶行列式的定义：

$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\dots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\dots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$，其中$j_1j_2\dots j_n$为$1,2,\dots,n$的全排列.

定义解读：

(1) n阶行列式共有$n!$项代数和；

(2) 每项有n个来自不同行，不同列元素的乘积；

(3) 每项带有符号，当行标为标准排列时，该项的符号由列标的逆序数决定（当列标为标准排列时，该项的符号由行标的逆序数决定）.

2. 行列式的性质

性质 1：$D=D^T$；

性质 2：交换两行（列），行列式变号；

性质 3：如果行列式中某一行（列）所有元素有公因子k，则可将k提到行列式外. 或者用k乘行列式的某一行（列），等于用k乘行列式；

性质 4：行列式中有两行（列）对应元素成比例，则行列式$D=0$；

性质 5：（分行（列）的可加性）如果行列式的某行（列）元素都是两个元素的和，则行列式可以表示为两个行列式的和. 如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}^* & a_{22}+a_{22}^* & a_{23}+a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

性质 6：把行列式某行（列）的k倍加到另一行（列）上，行列式的值不变，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31}+a_{33} \end{vmatrix};$$

3. 行列式的展开

(1)按某一行（列）展开

$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}$（按行展开）$=\begin{cases} D, i=k \\ 0, i\neq k \end{cases}$

$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}$（按列展开）$=\begin{cases} D, j=k \\ 0, j\neq k \end{cases}$

(2)按某$k(\geq 2)$行（列）展开（拉普拉斯定理）

设D为n阶行列式，任取定其中k行（列）$(1\leq k\leq n)$，则由这k行（列）构成的一切k阶子式$N_1,N_2,\dots,N_t$与它们所对应代数余子式$A_1,A_2,\dots,A_t$乘积之和等于D，即：$D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t$，其中$t=C_n^k$.

在计算或者证明行列式的过程中，要熟记 10 类行列式的基本类型：

第 1，2 类：关于主对角线上（下）三角行列式，$D_n=$主对角线上元素的乘积

第 3，4 类：关于次对角线上（下）三角行列式，$D_n=$次对角线上元素的乘积且带有符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

第 5 类：箭形，三对角形等；

第 6 类：范德蒙行列式：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \cdots & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$；

第 7，8 类：关于主对角块上（下）三角行列式：$D=$主对角上两个行列式的乘积（特点：分成 4 块后，次对角块上至少有一块元素全为零，主对角两块均为方块）；

第 9，10 类：关于次对角块上（下）三角行列式：$D=$次对角上两个行列式的乘积且带有符号$(-1)^{s\times t}$（特点：分成 4 块后，主对角块上至少有一块元素全为零，次对角两块均为方块）.

二、行列式的计算常用方法

1. 化为三角形行列式或利用行列式的性质，化为 10 类行列式的基本类型；
2. 递推公式：如果行列式在元素分布上比较有规律，则可以设法找出n阶行列式D_n与较低阶的行列式之间的关系，依次递推来计算行列式的值；
3. 加边法：又称升级法，在原来行列式中增加一行一列，且保持原行列式的值不变；
4. 数学归纳法：先通过计算一些低阶行列式D_1,D_2,D_3等，找出它们的结果与阶数之间的关系，对D_n的结果提出猜想，再利用数学归纳法证明猜想.

三、线性方程组的求解

1. 非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad \text{(I)}$$

系数矩阵为$A_{m\times n}$，增广矩阵为$\overline{A}_{m\times(n+1)}$，则：

(1) 当$R(A)\ne R(\overline{A})$，方程组无解；

(2) 当$R(A)=R(\overline{A})=r$，方程组有解，且：$\begin{cases} a.\text{若}r=n\to\text{有唯一一组解} \\ b.\text{若}r<n\to\text{有无穷多组解，} \\ \quad\text{且有}n-r\text{个自由变量.} \end{cases}$

2. 齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

(II)是(I)中$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$的特例，所以可以直接利用(I)的结论.
因为$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$为(II)的解（零解），故(II)必有解.
(II)有非零解$\leftrightarrow$ $R(A)<n$；
(II)只有零解$\leftrightarrow$ $R(A)=n$.

3. Cramer 法则

特别地，当$m=n$时：

$$\begin{cases} 若|A|\neq 0,非齐次方程组(\mathrm{I})有唯一解，齐次方程组(\mathrm{II})只有零解 \\ 若|A|=0,齐次方程组(\mathrm{II})有非零解，非齐次方程组(\mathrm{I})暂不确定 \end{cases}.$$

四、矩阵的定义和运算

1. 定义

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}，称为m\times n矩阵.$$

2. 特殊矩阵

(1) 单位矩阵E，数量矩阵λE；

(2) 转置矩阵：将$A_{m\times n}$的行与列互换后得到的矩阵，记为$A^T_{n\times m}$；

(3) 对称矩阵：若$A=A^T$, 反对称矩阵：若$A=-A^T$；

3. 矩阵的运算

(1) 矩阵的数乘：设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$（k为常数）；

(2) 矩阵的加减法：设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$，则$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$；

(3) 矩阵的乘法：设$A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$，则$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1,\dots,m;j=1,\dots,n);$$

(4) 矩阵的转置：$(A^T)^T=A,(kA)^T=kA,(A\pm B)^T=A^T\pm B^T,(AB)^T=B^TA^T$.

五、伴随矩阵，逆矩阵

1. 伴随矩阵的定义

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，称$A^*=(A_{ji})_{n\times n}$为A的伴随矩阵，其中$A_{ji}=(-1)^{j+i}M_{ji}$，M_{ji}为A中划去第j行第i列后得到的$n-1$阶行列式.

2. 伴随矩阵的主要公式

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$；

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$；

(3) 当A可逆时，$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|},(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$;

(4) A^*可逆$\leftrightarrow A$可逆；

(5) 若A，B均可逆，则$(AB)^*=B^*A^*$；

(6) 当A可逆时，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；

(7) $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$；

(8) $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1},(A^T)^*=(A^*)^T,(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

3. 逆矩阵的定义
设A为n阶方阵，如果存在n阶方阵B使得$AB = BA = E$，则称A可逆.
4. 逆矩阵的性质
设A,B为同阶可逆阵，则：
(1) $(A^{-1})^{-1} = A$；
(2) $(kA^{-1})^{-1} = k^{-1}A(k \neq 0)$；
(3) AB也可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；
(4) A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$；
(5) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
5. A可逆$\leftrightarrow$(1) $|A| \neq 0$；
(2) A^*可逆；
(3) $AX = 0$只有零解；
(4) A可以表示为一系列初等矩阵的乘积；
(5) A与E等价.
6. 逆矩阵的求法
(1) 利用定义求逆矩阵，如果$AB = E$或$BA = E$，则$A^{-1} = B$；
(2) 利用伴随矩阵求逆矩阵，$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$；
(3) 利用初等变换求逆矩阵；
(4) 利用分块矩阵求逆矩阵.

六、矩阵的初等变换，初等矩阵
1. 初等变换的定义
对矩阵进行交换行（列）;
用非零数乘矩阵的某行（列）;
把矩阵某行（列）的k倍加到另一行（列）上.
2. 初等矩阵的定义
对单位矩阵进行一次初等变换后得到的矩阵，为$E(i,j), E\big(i(k)\big), E(i+j(k),j)$.
3. 初等矩阵在矩阵乘法中的作用
初等矩阵左乘A，相当于对A进行一次初等行变换；
初等矩阵右乘A，相当于对A进行一次初等列变换.
4. 初等矩阵的逆，行列式
$(E(i,j))^{-1} = E(i,j), |E(i,j)| = -1$；
$(E\big(i(k)\big))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right), \left|E\big(i(k)\big)\right| = k$；
$(E(i+j(k),j))^{-1} = E(i+j(-k),j), |E(i+j(k),j)| = 1$.

七、矩阵的秩（初步）
1. 秩的定义：A的不等于 0 的子式的最大阶数，称为A的秩，记为$r(A)$；
秩的等价定义：A的秩等于$r \leftrightarrow A$中至少有一个r阶子式不等于 0，且所有$r+1$阶子式（如果有的话）都等于 0.
2. 秩的性质
(1) $r(A_{m\times n}) \leq min\,(m,n)$；

(2) 初等变换不改变矩阵的秩，当P, Q可逆时有：$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；

(3) $r\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\right)=r(A)+r(B)$；

(4) $r(A+B)\le r(A)+r(B); r(A,B)\le r(A)+r(B)$；

(5) $r(A)+r(B)-n\le r(A_{m\times n}B_{n\times t})\le \min\left(r(A),r(B)\right)$；

(6) 如果$A_{m\times n}B_{n\times t}=0$，则$r(A)+r(B)\le n$；

(7) 如果A列满秩，则$r(AB)=r(B)$, 如果B行满秩，则$r(AB)=r(A)$.

3. 矩阵秩的求法

将矩阵A通过初等变换化为阶梯型矩阵B，则$r(A)=$阶梯型矩阵B的非零行数.

八、分块矩阵，矩阵的等价

1. 分块矩阵的运算

(1) 数乘：设$A=(A_{ij})_{s\times t}$，则$kA=(kA_{ij})_{s\times t}$（k为常数）；

(2) 加减法：设$A=(A_{ij})_{s\times t}, B=(B_{ij})_{s\times t}$有相同的分块方法，则$A\pm B=(A_{ij}\pm B_{ij})_{s\times t}$；

(3) 乘法：设$A_{m\times n}=(A_{ij})_{s\times p}, B_{n\times t}=(B_{ij})_{p\times l}$，如果$A$的列上和$B$的行上有相同的分块方法，则$AB=(C_{ij})_{s\times l}$，其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}A_{ik}B_{kj}(i=1,\dots,s; j=1,\dots,l)$；

(4) 转置：设$A=(A_{ij})_{s\times t}$，则$A^T=(A_{ji}^T)_{t\times s}$；

(5) 求逆：如果矩阵分块后为如下情形：（其中$A_{r\times r}, B_{s\times s}$）

$G_1=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}, G_2=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, G_3=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}, G_4=\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 则：

$G_1^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}, G_2^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$,

$G_3^{-1}=\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}, G_4^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$；

(6) 初等变换：

对分块矩阵的其中一行（列）乘一个同阶可逆矩阵；或者交换二行（列）；或者某一行（列）乘一个相应矩阵加到另一行（列），这三种变换称为分块矩阵的初等变换.

对分块矩阵做一次初等行（列）变换，等于用相应的分块初等矩阵左（右）乘这个矩阵.

分块矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

2. 矩阵的等价

(1) 等价的定义：若$A_{m\times n}$能够经过初等变换化为$B_{m\times n}$，则称A与B等价.

(2) 等价的性质：设$r(A_{m\times n})=r$，则A与$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$等价，称$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$为$A$的等价标准形；等价具有自反性，对称性，传递性.

(3) 等价的判断：A与B等价$\leftrightarrow$存在可逆矩阵P,Q使得$PAQ=B$

$\leftrightarrow r(A)=r(B)$

$\leftrightarrow A,B$有相同的标准形.