浙江大学 2019 - 2020 学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：________

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2020 年 9 月 1 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：________学号：________专业：________作业编号：________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2)=0.9772$, $t_{0.05}(63)=1.669$, $t_{0.025}(63)=1.998$, $t_{0.0025}(63)=2.909$, $\chi^2_{0.95}(63)=45.7$, $\chi^2_{0.05}(63)=82.5$, $\chi^2_{0.05}(2)=5.99$, $\chi^2_{0.05}(3)=7.82$.

一．填空题（每小格 3 分，共 36 分）

1. 一盒中有 5 个球，其中 3 个红球，2 个白球，采用不放回抽样取 3 个球，则至少取到 2 个红球的概率为________，第 2 次取到红球的概率为________.

2. 设 $(X,Y)\sim N(1,1,1,4,0.5)$，则 $P(|X-1|<1)=$________，$Var(X-Y)=$________.

3. 设 X 与 Y 均服从 0-1 分布，$P(X=1)=3/4$，$P(X=1，Y=1)=1/4$. (1)若 X 与 Y 独立，则 $P(X=0，Y=1)=$________；(2) 若 X 与 Y 的协方差为-1/16，则 $P(X=0，Y=1)=$________.

4. 设 X 与 Y 独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 服从(0, 1)上均匀分布，则 $E(X^2Y^2)=$____.

5. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，X_1,X_2 是 X 的简单随机样本，$\overline{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则 $P(X_1=1|\overline{X}=1)=$________，$E(\overline{X}^2)=$________，$E(S^2)=$________.

6. 为检验总体 X 的分布律 $H_0:P(X=i)=\frac{i}{10}, i=1,2,3,4.$ 是否成立，从总体中抽取容量为 100 的简单随机样本，统计结果为“1”、“2”、“3”、“4”分别观测到 16，18，25，41 次．采用拟合优度检验，则检验统计量的值为________，假设检验统计量的值为 6.3，在显著水平 $\alpha=0.05$ 下是否拒绝原假设并说明理由。答：________________.

二．(10 分) 设某地区居民患有某种疾病的概率为 0.001，用于疾病检测的方法存在误判，设患病者检测结果呈阳性的概率为 0.95，未患病者检测为阳性的概率为 0.002。若在该地区随机选一人进行检测，结果呈阳性，求他的确患病的概率；若对他独立进行两次检测，且假设两次检测都处于相同的状态，如果结果都是阳性，求他患病的概率。(保留 3 位小数)

三．(14 分) 设(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3y}{2}, & 0<y<2x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (1)求 $P(\max(X,Y)<1)$；(2) 分别求 X,Y 的边际密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$；(3) 求 $P(Y>\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2})$；(4) 判断 X 与 Y 是正相关，负相关，还是不相关？说明理由.

四．（15 分）设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0<x<1, \\ \dfrac{2}{3}, 1<x<2, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$ 对 X 独立重复观测 n 次，结果记为 $X_1,\dots,X_n$. (1) 求 X 的分布函数 $F(x)$；(2) 若 $Y=\min\{X,1\}$，求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；(3) 当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛到何值？(4) 若 n=450，Z 表示 450 次观测中 $\{X_i<1\}$ 出现的次数，求 $P(Z>160)$ 的近似值.

五．(10 分)为了解某县粮食产量情况，随机调查该县 64 个乡当年的粮食产量，得到样本均值为 1120 吨，样本方差 108900，设乡粮食产量（单位：吨）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知.
(1)在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0:\mu\le 1000, H_1:\mu>1000$，并计算相应的 p-值；(2)求 σ 的置信度为 90%的双侧置信区间.（保留 1 位小数）

六．（15 分）设总体 X 的分布律为 $P(X=0)=1-p$，$P(X=1)=p/2$，$P(X=2)=p/3$，$P(X=3)=p/6$，其中 $p\in(0,1)$是未知参数，$X_1,\dots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，设其中“0”、“1”、“2”、“3” 出现的次数分别为 n_0，n_1，n_2，n_3. (1)求 p 的矩估计量 $\hat{p}_1$，并判断其是否为 p 的无偏估计，说明理由；(2)求 p 的极大似然估计量 $\hat{p}_2$，并判断其是否为 p 的无偏估计，说明理由；(3)分别计算这两个估计量的方差，并比较哪个更小.

浙江大学 2019－2020 学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：________

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2020 年 9 月 1 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：________学号：________专业：________作业编号：________

题序	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.8413,\ \Phi(2)=0.9772,\ t_{0.05}(63)=1.669,\ t_{0.025}(63)=1.998,$
$t_{0.0025}(63)=2.909,\ \chi^2_{0.95}(63)=45.7,\ \chi^2_{0.05}(63)=82.5,\ \chi^2_{0.05}(2)=5.99,\ \chi^2_{0.05}(3)=7.82.$

一．填空题（每小格 3 分，共 36 分）

1. 一盒中有 5 个球，其中 3 个红球，2 个白球，采用不放回抽样取 3 个球，则至少取到 2 个红球的概率为 __0.7__，第 2 次取到红球的概率为 __0.6__.

2. 设 $(X,Y)\sim N(1,1,1,4,0.5)$，则 $P(|X-1|<1)=$ __0.6826__，$Var(X-Y)=$ __3__.

3. 设 X 与 Y 均服从 0-1 分布，$P(X=1)=3/4$，$P(X=1,Y=1)=1/4$．(1)若 X 与 Y 独立，则 $P(X=0,Y=1)=$ __1/12__；(2) 若 X 与 Y 的协方差为-1/16，则 $P(X=0,Y=1)=$ __1/6__.

4. 设 X 与 Y 独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 服从(0, 1)上均匀分布，则 $E(X^2Y^2)=$ __2/3__.

5. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，X_1,X_2 是 X 的简单随机样本，$\bar{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则 $P(X_1=1|\bar{X}=1)=$ __1/2__，$E(\bar{X}^2)=$ __$\lambda^2+\lambda/2$__，$E(S^2)=$ __λ__.

6. 为检验总体 X 的分布律 $H_0:P(X=i)=\dfrac{i}{10},i=1,2,3,4.$ 是否成立，从总体中抽取容量为 100 的简单随机样本，统计结果为"1"、"2"、"3"、"4"分别观测到 16，18，25，41 次．采用拟合优度检验，则检验统计量的值为 __$\chi^2=4.66$__．假设检验统计量的值为 6.3，在显著水平 $\alpha=0.05$ 下是否拒绝原假设并说明理由．答：__接受H_0（因为 $6.3<\chi^2_{0.05}(3)$）__

二．(10 分) 设某地区居民患有某种疾病的概率为 0.001，用于疾病检测的方法存在误判，设患病者检测结果呈阳性的概率为 0.95，未患病者检测为阳性的概率为 0.002。若在该地区随机选一人进行检测，结果呈阳性，求他的确患病的概率；若对他独立进行两次检测，且假设两次检测都处于相同的状态，如果结果都是阳性，求他患病的概率。(保留 3 位小数)

设 A 表示患病，B_1、B_2 分别表示第 1、2 次检测阳性．

则 $P(A)=0.001$，$P(B_1|A)=P(B_2|A)=0.95$，$P(B_1|\bar{A})=P(B_2|\bar{A})=0.002$.

(1) $P(B_1)=P(A)P(B_1|A)+P(\bar{A})P(B_1|\bar{A})=0.002948$

$$P(A|B_1)=\frac{P(A)P(B_1|A)}{P(B_1)}=0.322$$

(2) $P(B_1B_2)=P(A)P(B_1B_2|A)+P(\bar{A})P(B_1B_2|A)$

$=0.001\times0.95^2+0.999\times0.002^2=0.000906496$

$$P(A|B_1B_2)=\frac{P(A)P(B_1B_2|A)}{P(B_1B_2)}\approx0.996$$

三．(14 分) 设 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3y}{2}, & 0<y<2x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (1)求 $P(\max(X,Y)<1)$；

(2) 分别求 X,Y 的边际密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$；(3) 求 $P(Y>\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2})$；(4) 判断 X 与 Y 是正相关，负相关，还是不相关？说明理由.

(1) $P(\max(X,Y)<1)=P(X<1,Y<1)$

$=\int_0^1dy\int_{\frac{y}{2}}^1\frac{3y}{2}dx=\frac{1}{2}$

(2) $f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2x}\frac{3y}{2}dy=3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^1\frac{3y}{2}dx=\frac{3y}{2}-\frac{3y^2}{4}, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

(3) 当 $0<x<1$ 时 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{y}{2x^2}, & 0<y<2x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$P(Y>\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})dy=\frac{3}{4}$

(4)

$E(X)=\int_0^1dx\int_0^{2x}x\cdot\frac{3y}{2}dy\overset{or}{=}\int_0^13x^3dx=\frac{3}{4}$

$E(Y)=\int_0^1dx\int_0^{2x}y\cdot\frac{3y}{2}dy\overset{or}{=}\int_0^2y\cdot\frac{3}{4}y(2-y)dy=1$

$E(XY)=\int_0^1dx\int_0^{2x}xy\cdot\frac{3y}{2}dy=\frac{4}{5}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{20}>0$

X 与 Y 是正相关.

四．(15 分) 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0<x<1, \\ \frac{2}{3}, 1<x<2, \\ 0, \ 其他. \end{cases}$ 对 X 独立重复观测 n 次，结果记为 $X_1,\dots,X_n$. (1) 求 X 的分布函数 $F(x)$；(2) 若 $Y=\min\{X,1\}$，求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；(3) 当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛到何值？(4) 若 n=450，Z 表示 450 次观测中 $\{X_i<1\}$ 出现的次数，求 $P(Z>160)$ 的近似值.

(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases} 0 & , x<0 \\ \int_0^x t^2dt=\frac{x^3}{3} & , 0\le x<1 \\ \int_0^1 t^2dt+\int_1^x \frac{2}{3}dt=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3} & , 1\le x<2 \\ 1 & , x\ge 2 \end{cases}$

(2) $F_Y(y)=P(\min(X,1)\le y)$

$=P(\min(X,1)\le y, X<1)+P(\min(X,1)\le y, X\ge 1)$

$=P(X\le y, X<1)+P(1\le y, X\ge 1)$

$=\begin{cases} P(X\le y)+0=0+0=0 & , y<0 \\ P(X\le y)+0=\int_0^y x^2dx=\frac{x^3}{3} & , 0\le y<1 \\ P(X<1)+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1, & y\ge 1 \end{cases}$

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x\frac{2}{3}dx=\frac{5}{4}$

(4) $p=P(X<1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

$Z\sim B(450,\frac{1}{3})$,

由中心极限定理得

$Z\overset{\cdot}{\sim}N(150,100)$

$P(Z>160)=1-\Phi(\frac{160-150}{10})$

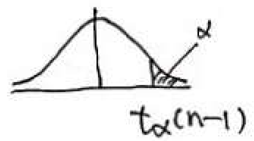
$=1-\Phi(1)=0.1587$

五．(10 分)为了解某县粮食产量情况，随机调查该县 64 个乡当年的粮食产量，得到样本均值为 1120 吨，样本方差 108900，设乡粮食产量（单位：吨）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知.

(1)在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0:\mu\le 1000, H_1:\mu>1000$，并计算相应的 p-值；(2)求 σ 的置信度为 90%的双侧置信区间.（保留 1 位小数）

(1) $H_0:\mu\le\mu_0=1000$, $H_1:\mu>\mu_0$

取检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

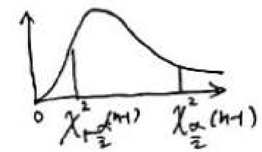


H_0 的拒绝域 $t\ge t_\alpha(n-1)$

$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{1120-1000}{\sqrt{108900}/\sqrt{64}}=2.909>t_{0.05}(63)=1.669$，拒绝 H_0

$P\_=P(t(63)\ge 2.909)=0.0025$.

(2) 取枢轴量 $G=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$



设 $P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$

得 σ 的 $1-\alpha$ 区间为 $\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$

$=\left(S\sqrt{\frac{63}{\chi^2_{0.05}(63)}}, S\sqrt{\frac{63}{\chi^2_{0.95}(63)}}\right)=(288.4, 387.5)$

六．(15 分) 设总体 X 的分布律为 $P(X=0)=1-p$，$P(X=1)=p/2$，$P(X=2)=p/3$，$P(X=3)=p/6$，其中 $p\in(0,1)$是未知参数，$X_1,\dots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，设其中 “0” 、“1” 、“2” 、“3” 出现的次数分别为 n_0，n_1，n_2，n_3. (1)求 p 的矩估计量 $\hat{p}_1$，并判断其是否为 p 的无偏估计，说明理由；(2)求 p 的极大似然估计量 $\hat{p}_2$，并判断其是否为 p 的无偏估计，说明理由；(3)分别计算这两个估计量的方差，并比较哪个更小.

(1) $\mu=E(X)=1\times\frac{p}{2}+2\times\frac{p}{3}+3\times\frac{p}{6}=\frac{5p}{3}$, $p=\frac{3}{5}\mu_1$, $\hat{p}_1=\frac{3}{5}\bar{X}$.

$E(\hat{p}_1)=E(\frac{3}{5}\bar{X})=\frac{3}{5}E(\bar{X})=\frac{3}{5}E(X)=p$，∴ $\hat{p}_1$ 是 p 的无偏估计.

(2) $L(p)=(1-p)^{n_0}(p/2)^{n_1}(p/3)^{n_2}(p/6)^{n_3}=c\cdot p^{n-n_0}(1-p)^{n_0}$，$c$ 是常数

$\ln L(p)=\ln c+(n-n_0)\ln p+n_0\ln(1-p)$.

$\frac{d\ln L(p)}{dp}=0+\frac{n-n_0}{p}-\frac{n_0}{1-p}\overset{令}{=}0$. $\Rightarrow\hat{p}_2=\frac{n-n_0}{n}$.

∵ $n_0\sim B(n,1-p)$. $E(\hat{p}_2)=E(\frac{n-n_0}{n})=\frac{1}{n}(n-E(n_0))=\frac{1}{n}(n-n(1-p))=p$.

∴ $\hat{p}_2$ 也是 p 的无偏估计.

(3) $E(X^2)=1\times\frac{p}{2}+4\times\frac{p}{3}+9\times\frac{p}{6}=\frac{10p}{3}$.

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5(6-5p)p}{9}$.

$Var(\hat{p}_1)=\frac{9}{25}Var(\bar{X})=\frac{9}{25n}Var(X)=\frac{1}{n}(\frac{6}{5}p-p^2)$

$Var(\hat{p}_2)=Var(1-\frac{n_0}{n})=Var(\frac{n_0}{n})=\frac{1}{n^2}Var(n_0)=\frac{1}{n^2}n(1-p)p=\frac{p-p^2}{n}$

$Var(\hat{p}_1)-Var(\hat{p}_2)=\frac{1}{n}(\frac{6}{5}p-p^2)-\frac{p-p^2}{n}=\frac{p}{5n}>0$.

∴ p 的极大似然估计量的方差小于矩估计量 $\hat{p}_1$ 的方差.