占卜学: 作业 2

截止时间: 1919 年 8 月 10 日

计算机 1919 班
李田所
学号: 114514

2020 年 2 月 22 日

题目 1

求一个合适的整数 c , 使得 $f(n) \leq c \cdot g(n)$ 对 $n > 1$ 恒成立.

1. $f(n) = n^2 + n + 1$, $g(n) = 2n^3$
2. $f(n) = n\sqrt{n} + n^2$, $g(n) = n^2$
3. $f(n) = n^2 - n + 1$, $g(n) = n^2/2$

解:
显然地, 我们可以通过占卜法来解 c 的值 c.

1.

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 = & \\ & \leq n^2 + n^2 + n^2 \\ & = 3n^2 \\ & \leq c \cdot 2n^3 \end{aligned}$$

故 $c = 2$ 满足要求.

2.

$$\begin{aligned} n^2 + n\sqrt{n} = & \\ & = n^2 + n^{3/2} \\ & \leq n^2 + n^{4/2} \\ & = n^2 + n^2 \\ & = 2n^2 \\ & \leq c \cdot n^2 \end{aligned}$$

故 $c = 2$ 满足要求.

3.

$$\begin{aligned} n^2 - n + 1 = & \\ & \leq n^2 \\ & \leq c \cdot n^2/2 \end{aligned}$$

故 $c = 2$ 满足要求.

题目 2

令 $\Sigma = \{0, 1\}$. 建立一个有限状态自动机 A 来识别可以被 5 整除的二进制串.

令状态 q_k 表示 k 被 5 除的余数. 例如,7 对应 q_2 (因为 $7 \mod 5 = 2$).

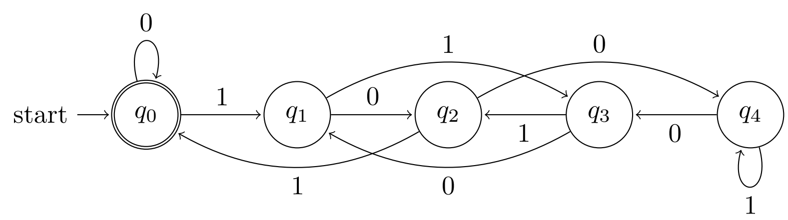

图 1: DFA A 真好看, 是不是?

解释

给出一个二进制表示的数, x. 注意到, 我们的状态机只接受两种输入 (1 或 0). 如果新输入的一位是 0, 就相当于把数字乘 2 如果输入是 1, 就相当于乘 2 再加一。

通过这一点, 我们就可以建立出一个转移表:

	$x \mod 5 = 0$	$x \mod 5 = 1$	$x \mod 5 = 2$	$x \mod 5 = 3$	$x \mod 5 = 4$
$x0$	0	2	4	1	3
$x1$	1	3	0	2	4

然后再考虑 q_0 或者说 ($x \mod 5 = 0$) 的转移, 输入是 0 时状态应该还是 q_0，输入 1 时状态应该转移到 q_1。计算下去我们就得到图 1.

题目 3

写出快速排序算法的一部分 **Quick-Sort**($list, start, end$), 并用 C++ 语言实现。

function Quick-Sort($list, start, end$)
  if $start \geq end$ **then**
    return
  end if
  $mid \leftarrow$ Partition($list, start, end$)
  Quick-Sort($list, start, mid - 1$)
  Quick-Sort($list, mid + 1, end$)
end function

算法 1: 快速排序的开始部分

```cpp
void QuickSort(std::vector<int> &lst, int left, int right){
    if (start >= end) return;
    int mid = (lift + right) >> 1;
    QuickSort(lst, start, mid - 1);
    QuickSort(lst, mid, right);
}
```

题目 4

假设我们想要拟合一条过原点的直线, 如, $Y_i = \beta_1 x_i + e_i$ 其中 $i = 1, \ldots, n$, $\mathrm{E}[e_i] = 0$, $\mathrm{Var}[e_i] = \sigma_e^2$ 且 $\mathrm{Cov}[e_i, e_j] = 0, \forall i \neq j$.

第 1 部分

确定 β_1 的最小二乘估计 $\hat{\beta}_1$ 。

解:

为了确定 β_1 的最小二乘估计, 我们应该最小化残差平方和, RSS:

$$\begin{aligned} RSS &= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 \end{aligned}$$

通过对 $\hat{\beta}_1$ 求偏导, 我们得到:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1}(RSS) = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

由此得到:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - \hat{\beta}_1 x_i) &= \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_1 x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

解出 $\hat{\beta}_1$ ，我们就得到 β_1 的估计:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

第 2 部分

计算估计值偏差和方差。$\hat{\beta}_1$.

解:

为了计算偏差，我们需要先计算期望。$\mathrm{E}[\hat{\beta}_1]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\hat{\beta}_1] &= \mathrm{E}\left[\frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}\right] \\
&= \frac{\sum x_i \mathrm{E}[Y_i]}{\sum x_i^2} \\
&= \frac{\sum x_i (\beta_1 x_i)}{\sum x_i^2} \\
&= \frac{\sum x_i^2 \beta_1}{\sum x_i^2} \\
&= \beta_1 \frac{\sum x_i^2 \beta_1}{\sum x_i^2} \\
&= \beta_1
\end{aligned}$$

由于我们的估计值的期望是 β_1, 所以偏差是 0.

计算方差:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\hat{\beta}_1] &= \mathrm{Var}\left[\frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}\right] \\
&= \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2 \sum x_i^2} \mathrm{Var}[Y_i] \\
&= \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2 \sum x_i^2} \mathrm{Var}[Y_i] \\
&= \frac{1}{\sum x_i^2} \mathrm{Var}[Y_i] \\
&= \frac{1}{\sum x_i^2} \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}
\end{aligned}$$

题目 5

证明一个 k 阶的多项式, $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0$ 是 $\Theta(n^k)$ 的, 其中 $a_k \ldots a_0$ 都是非负常数.

证明 为了证明 $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0$, 只需证明:

$$\exists c_1 \exists c_2 \forall n \geq n_0,\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n).$$

对于第一个不等式, 注意到对任意非负的 a_k, 总能找到一个 c_1, 使得 $c_1 n^k \leq a_k n^k$, 所以 $c_1 n^k \leq a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0$ 对任意的 $a_i, i = 0, 1, \cdots k$ 恒成立。

对于第二个不等式, 我们可以这样证明: 记 $A = \sum_{i=0}^{k} a_i$, 则有,

$$\begin{aligned} a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0 = & \\ & \leq (a_k + a_{k-1} \ldots a_1 + a_0) \cdot n^k \\ & = A \cdot n^k \\ & \leq c_2 \cdot n^k \end{aligned}$$

其中 $n_0 = 1$ 和 $c_2 = A$. c_2 是常数. 这就证明了结论. □

题目 18

比较 $\sum_{k=1}^{5} k^2$ 和 $\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$.

题目 19

求 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$ 的导数.

题目 6

计算定积分 $\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.