



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche

Corso di Laurea Magistrale in Scienze Statistiche per la Finanza

Tesina in *Finanza Stocastica*

**APPLICAZIONE DEL DEFINED
CONTRIBUTION PENSION PLAN
ALLA POPOLAZIONE FRANCESE**

Ch.ma Prof.ssa Valeria D'Amato

Gabriele Sollai

matr. 0222400653

Anno Accademico 2019/2020

INDICE

INTRODUZIONE	3
IL DEFINED CONTRIBUTION PENSION PLAN.....	4
PROIEZIONI DEMOGRAFICHE	5
IL MODELLO LEE CARTER	6
RENSHAW AND HABERMAN MODEL.....	9
IL MODELLO APC	12
IL MODELLO CBD	14
IL MODELLO M7.....	17
IL MODELLO PLAT	19
LA SCELTA DEI MODELLI	22
LE PREVISIONI.....	23
LE TAVOLE ATTUARIALI	27
L'APPLICAZIONE FINANZIARIA.....	28

INTRODUZIONE

Il presente lavoro si basa sull'applicazione di un contratto pensionistico detto "Defined contributions" alle proiezioni demografiche, implementate con il software statistico R, sulla popolazione Francese.

I dati della popolazione sono stati estrapolati dal sito mortality.org, uno dei siti più completi e dettagliati per quanto riguarda i dati sulla mortalità delle popolazioni mondiali e utilizzati per fini accademici o didattici da studenti e ricercatori di tutto il mondo.

La presente tesina si può dividere in due parti complementari: la prima in cui verrà effettuata un'analisi sulla longevità della popolazione implementata attraverso lo studio di alcuni modelli presenti nei pacchetti "demography" e "StMoMo" del software e una seconda parte incentrata invece sull'applicazione del contratto pensionistico alle proiezioni effettuate con un confronto ulteriore tra i dati ricavati da due modelli adattabili alla popolazione Francese.

Si partirà, inoltre, dal presupposto che gli aderenti al fondo siano 1000 e con un'età compresa tra i 25 e i 62 anni, prese in considerazione in quanto età medie rispettivamente di inizio della carriera lavorativa e di ritiro dalla stessa in Francia secondo quanto riportato da anpalservizi.it.

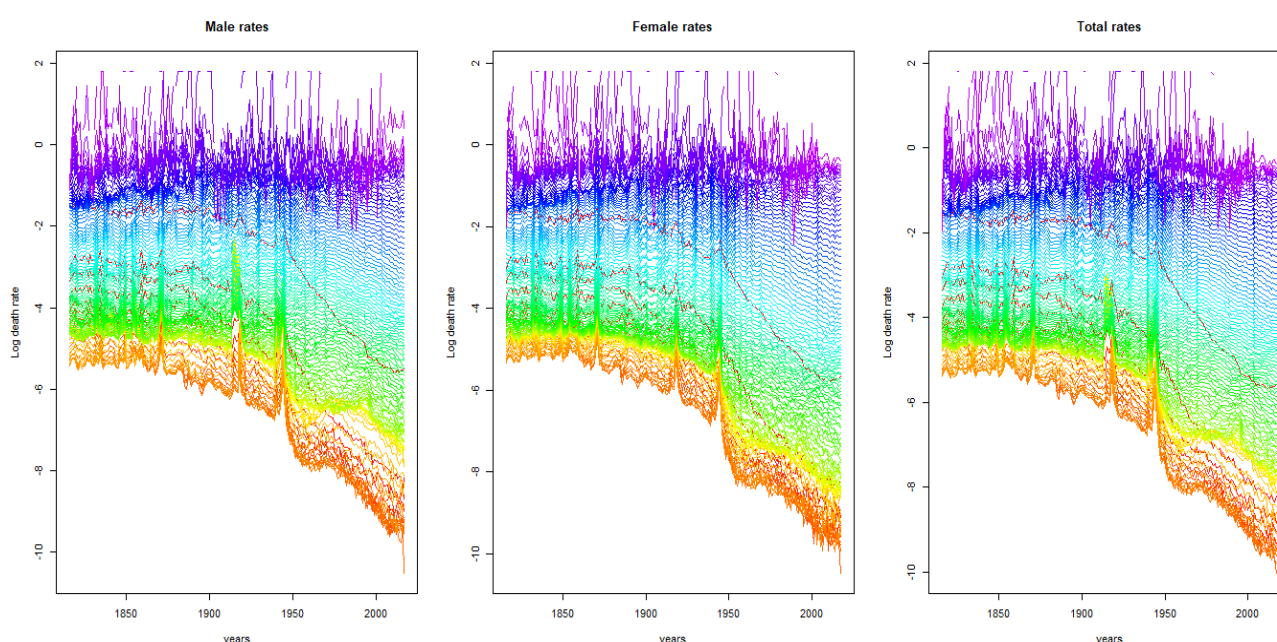
IL DEFINED CONTRIBUTION PENSION PLAN

Il Defined Contribution (DC) Pension Plan è una tipologia di contratto pensionistico che sta diventando sempre più diffuso sia negli Stati Uniti che nel Regno Unito. Questo contratto si basa sull'assunto che, a differenza del Defined Benefit (DB), i contributi versati dal lavoratore sono già predefiniti, solitamente una percentuale del proprio salario annuo o una certa quota stabilita al momento dell'adesione, mentre l'importo che riceverà è per definizione incerto in quanto questo potrà essere definito solo al momento della richiesta di ritiro da parte del lavoratore stesso e dipenderà dal rendimento maturato dal fondo durante il periodo di investimento. Da questa prima definizione si può notare subito che una differenza principale tra DC e DB sta nel rischio: nel primo questo ricade in capo al lavoratore che alla fine della propria carriera potrebbe anche ricevere molto meno di quanto versato nel periodo lavorativo in quanto il Fondo potrebbe andare in perdita sulla somma investita durante il periodo, nel secondo invece questo rischio ricade sul gestore del Fondo che si impegna a garantire un determinato risultato di gestione anche se i contributi versati dal lavoratore non saranno prefissati ma potrebbero variare nel tempo a seconda di quanto in alto o in basso venga fissata la prestazione dovuta dal Fondo nei confronti del lavoratore stesso, essendo la contribuzione strettamente legata al risultato da raggiungere e ai risultati storici ottenuti. I vantaggi della scelta di un DC sono vari, primo è che il valore del fondo adeguatamente gestito potrebbe superare di gran lunga ciò che il lavoratore ha versato, secondo punto è la tassazione: in questo tipo di contratto, infatti, l'importo versato al fondo viene solitamente detratto dalla base imponibile del lavoratore che avrà quindi un valore finale del proprio salario più basso, sul quale poi pagherà le tasse dovute allo Stato a cui appartiene, e di conseguenza una pressione fiscale minore al momento del versamento che verrà invece posticipata al momento dell'incasso della rendita o del capitale.

PROIEZIONI DEMOGRAFICHE

In questa sezione del lavoro si procederà ad analizzare la popolazione Francese e la sua mortalità in modo tale da andare a stimare un modello idoneo per l'applicazione dello schema pensionistico definito precedentemente.

Nella prima figura è stato effettuato un plot dei tassi di log-mortalità delle tre serie: maschile, femminile e totale.



Come è possibile notare da tutti e tre i grafici i tassi di mortalità sono decisamente diminuiti per tutte le età col passare degli anni, dandoci dunque idea di quanto la longevità, e di conseguenza l'età lavorativa e la durata di erogazione della pensione, sia aumentata dalla metà dell'800 ad oggi.

Ai fini di questo lavoro ho proceduto poi ad estrarre dalla serie originale una seconda serie, composta dai dati appartenenti a un periodo che va dal 1963 al 2017, con soggetti di età compresa tra 0 e 100 anni, prendendo in considerazione solo la serie composta da donne e uomini, dunque la serie totale.

Una volta completato il processo di estrazione ho poi provveduto ad effettuare le analisi per la ricerca del modello che meglio si adattasse ai dati della serie ottenuta.

IL MODELLO LEE CARTER

Il modello Lee Carter, implementato nel 1992 dagli omonimi Ronald Lee e Lawrence Carter, è stato uno dei più influenti modelli per questo genere di lavori. Questo è stato sviluppato in modo da utilizzare le principali componenti dell'analisi per decomporre la matrice età-tempo dei tassi di mortalità in una combinazione bilineare di età e parametri di periodo che vengono poi trattati come serie storica utile a produrre le proiezioni di mortalità. In prima istanza viene ricavato il tasso centrato di mortalità centrato come rapporto tra il numero delle persone decedute, al numeratore, e la media della popolazione, al denominatore:

$$m_{x,t} = \frac{D(x,t)}{E(x,t)}$$

Dopodiché viene ipotizzato un andamento esponenziale del tasso centrato di mortalità e che quindi l'aspettativa di vita aumenti, a parità di età nel tempo, ma con un andamento via via più lento e che quindi va ad impattare sempre meno positivamente sull'aspettativa. Questo è riassunto dal predittore del modello che è $m_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t})$ da cui poi si ricava la formula “finale” del predittore:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

Possiamo osservare che:

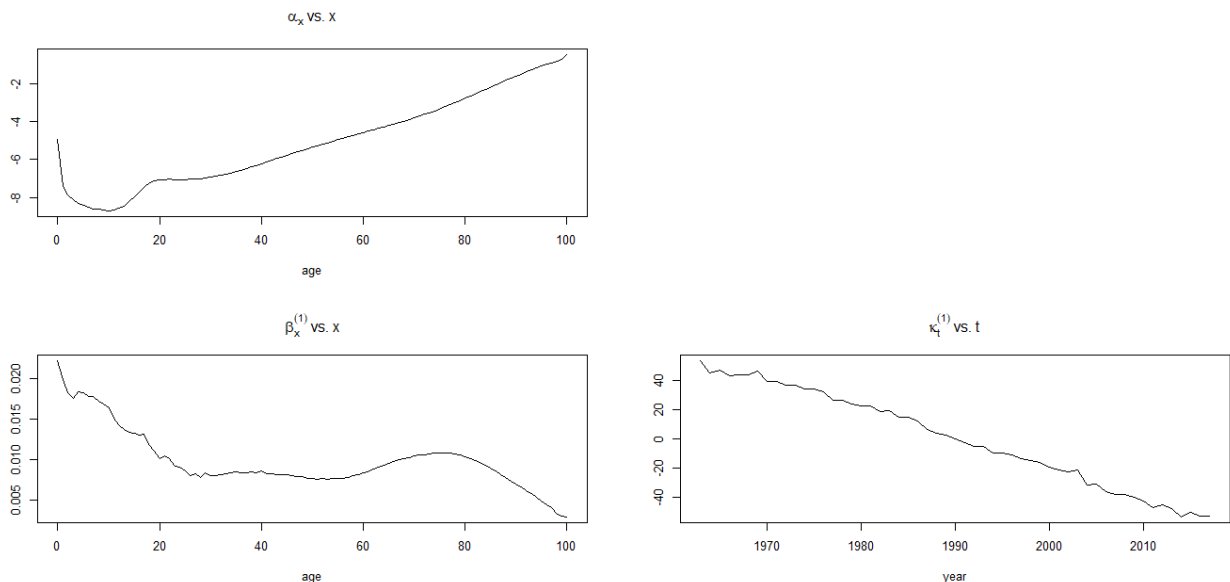
- X e T rappresentano rispettivamente l'età del soggetto preso in considerazione e il tempo;
- α è un coefficiente che descrive il pattern dell'età specifica in base al tasso di mortalità;
- k denota la variazione nel tempo della mortalità;

- β è il coefficiente che descrive quanto i tassi di log mortalità siano influenzati da k ;
- ε , infine, è la parte dei dati non catturata dal modello, su cui si ipotizza l'omoschedasticità, una media pari a 0 e una non dipendenza da t .

Per la stima di questi parametri, però, non è possibile utilizzare il modello di regressione in quanto porterebbe a infiniti risultati con identiche previsioni. Viene quindi utilizzato il metodo Singular Value Decomposition (SVD) e vengono imposti anche due limiti ai parametri, al fine di ottenere poi un'unica soluzione:

$$\sum \beta_x = 1 \quad \sum k_t = 0$$

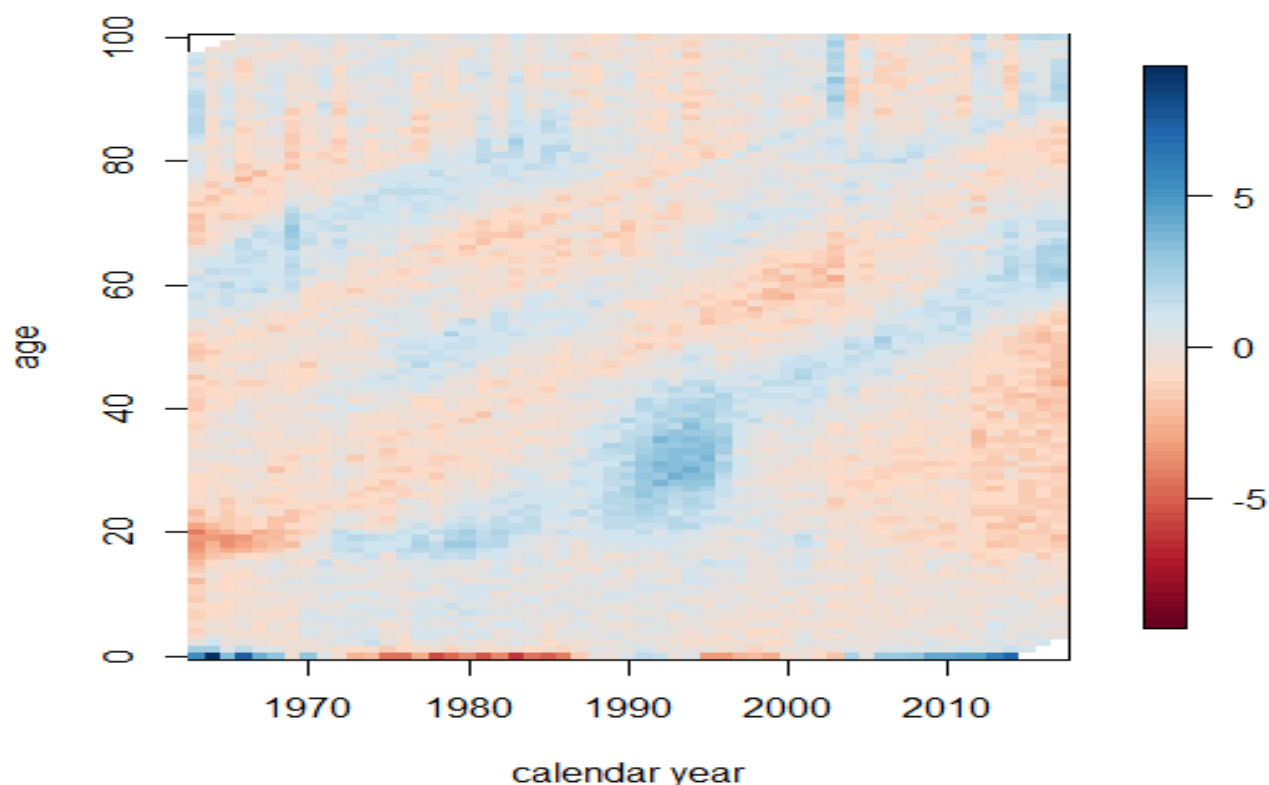
Attraverso questo modello, implementato poi da Brouhns assumendo una distribuzione di Poisson del numero dei morti, quindi, è stata effettuata la stima dei parametri sul software come riportato nella seguente immagine:



Possiamo dunque notare i tre parametri come sono stati stimati, un alfa che, come ipotizzabile, ha un tasso di mortalità leggermente elevato in età infantile che col tempo decresce, si stabilizza e poi inizia nel suo tratto crescente al crescere dell'età. Si osserva poi come il beta vari a seconda dell'età presa in considerazione e come

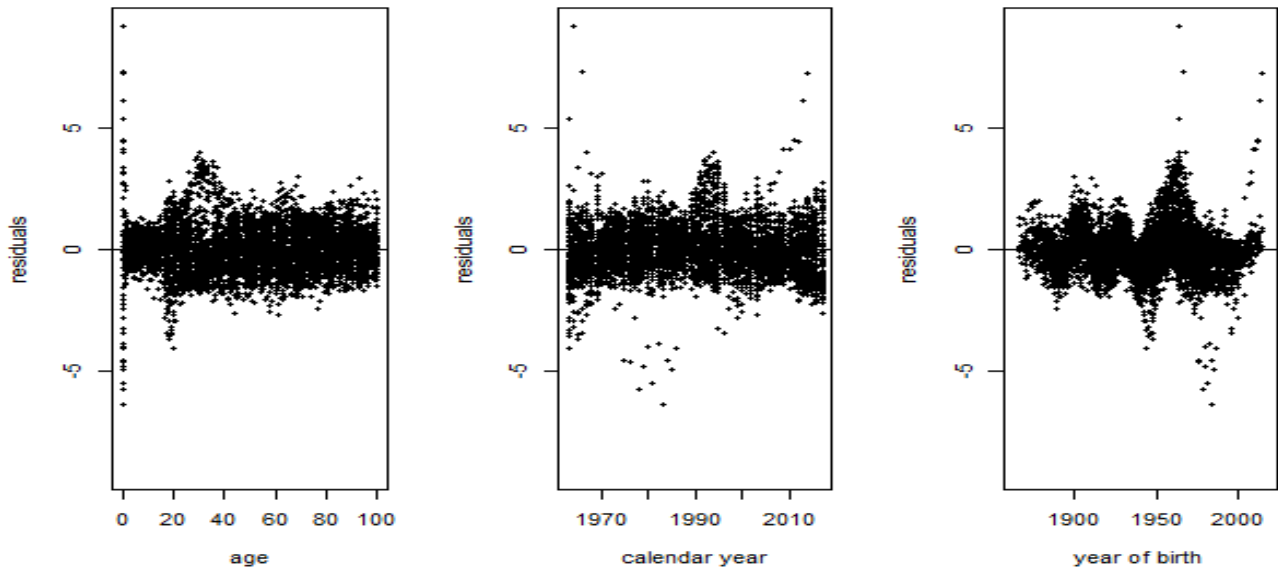
k, infine, sia decrescente col passare degli anni, dandoci dunque modo di vedere come la mortalità, a parità di età, abbia un trend decrescente.

Il secondo step è l'analisi dei residui attraverso la mappa di calore, riportata in seguito:



Questa analisi, fatta poi per tutti gli altri modelli, ci permette di visualizzare se gli errori sono distribuiti in modo casuale o se vi sono degli agglomerati tali da rendere meno preciso l'adattamento. Possiamo notare come il modello si sia adattato abbastanza bene ai dati anche se vi sono delle piccole aree in cui si formano degli agglomerati.

Viene poi eseguita l'analisi sui residui attraverso una tipologia “scatter” riportata come segue:



Possiamo notare come l'andamento del grafico a destra ci suggerisca come l'effetto coorte, una conseguenza delle caratteristiche uniche che ogni gruppo di persone della stessa età ha, non sia catturato perfettamente in quanto vi sono dei pattern visualizzabili ma non pregiudica definitivamente il modello anche se potrebbe mostrare delle imprecisioni.

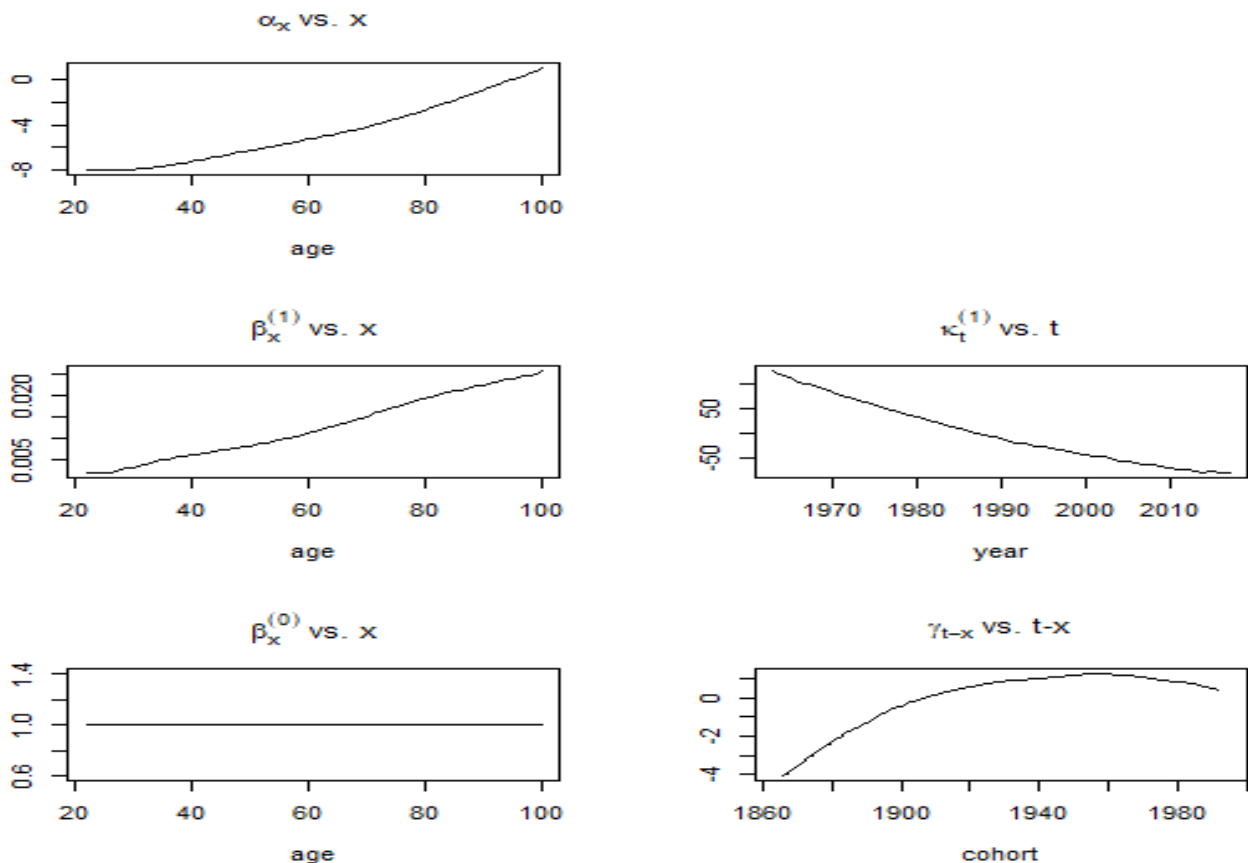
RENSHAW AND HABERMAN MODEL

Il secondo modello è l'RH. Questo modello è caratterizzato dalle stesse assunzioni fatte precedentemente per il Lee-Carter ma, a differenza di quest'ultimo, viene implementato un nuovo parametro tale da tenere conto dell'effetto coorte che proprio il modello precedente non era riuscito a catturare. Il predittore sarà dunque:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}$$

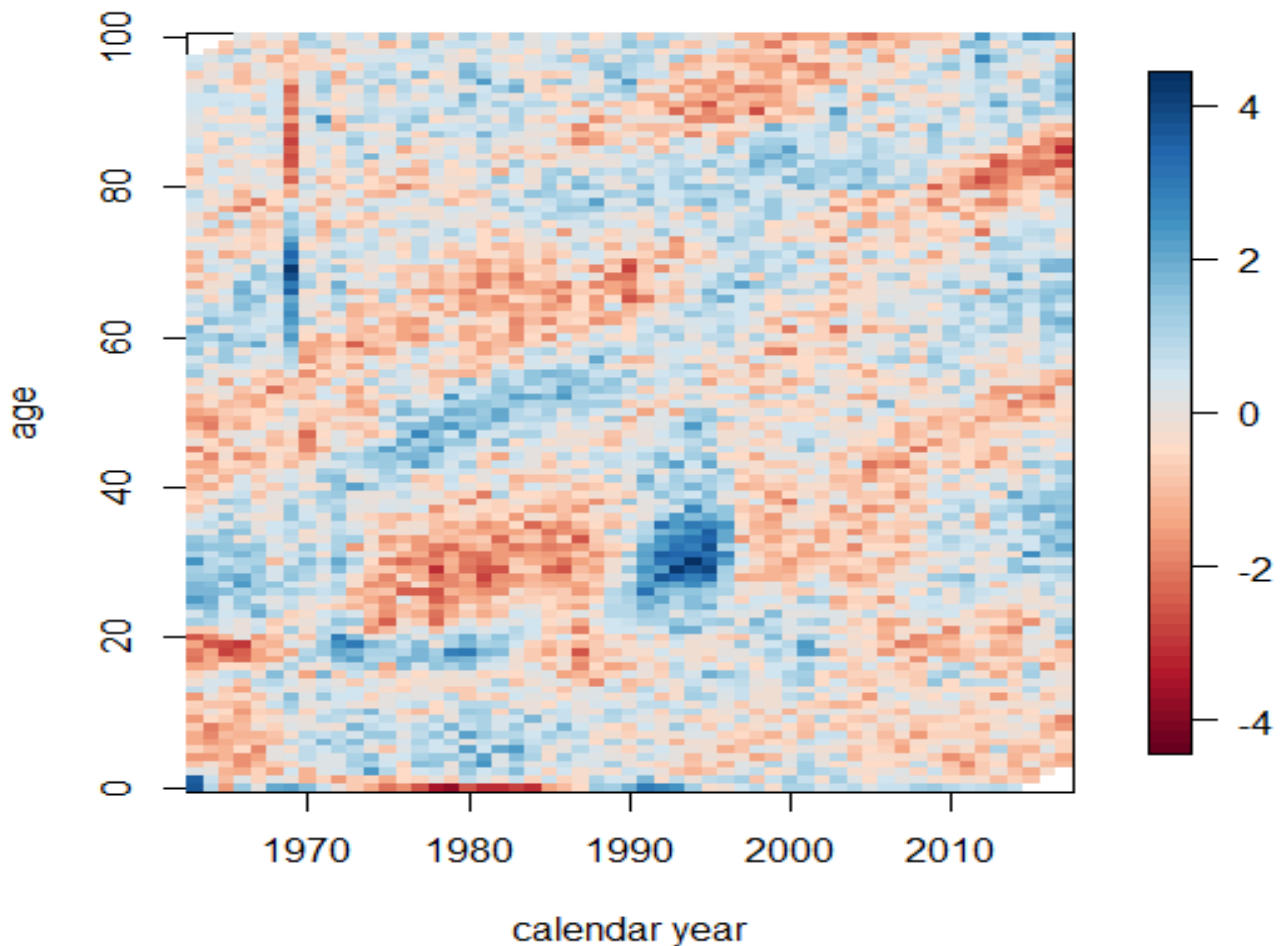
Le proiezioni di mortalità, questa volta, sono effettuate stimando le previsioni dei parametri k e γ usando un processo AutoRegressive Integrated Moving Average (ARIMA) univariato, con l'assunzione di indipendenza tra il periodo e l'effetto coorte.

Anche qui viene assunta una distribuzione di Poisson del numero dei deceduti, e attraverso l'implementazione del modello ai dati della popolazione Francese ho ottenuto i seguenti risultati grafici per la stima dei parametri:

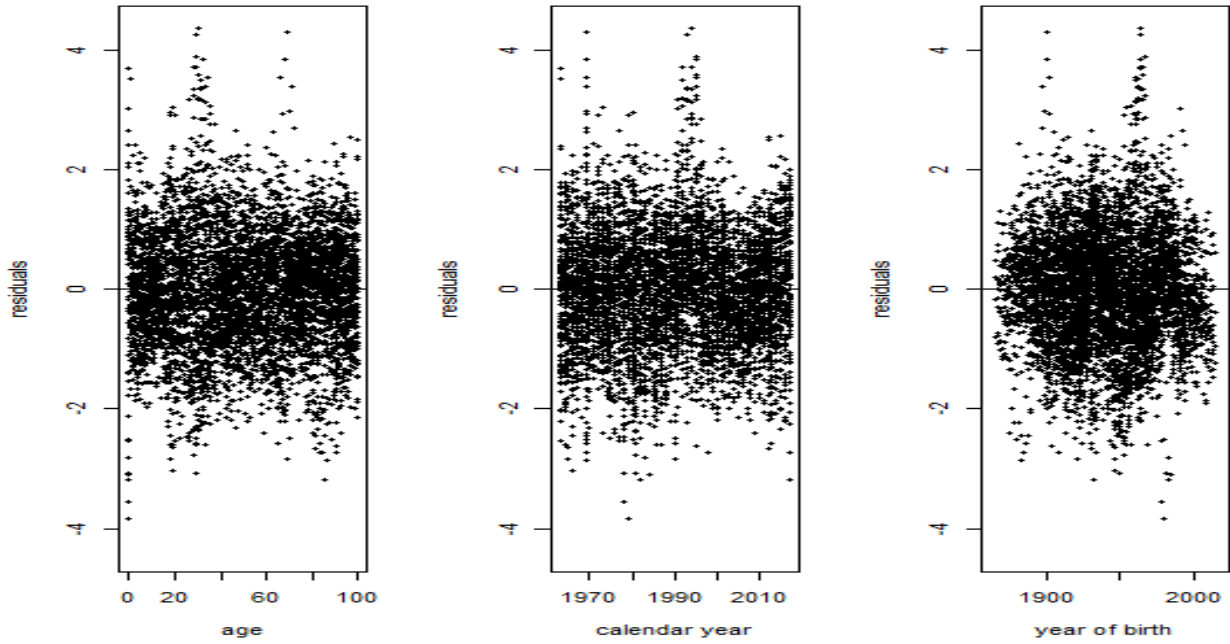


Vediamo, similmente a quanto evidenziato prima, che il k tende a decrescere anche se notiamo un rallentamento verso i primi anni del 2000, mentre il β con 0 ha un andamento costante e pari a 1 per evidenziare la forza dell'impatto del parametro

gamma che misura l'effetto coorte. Andando a visualizzare i residui e il loro andamento, invece:



Notiamo subito come il modello abbia sicuramente una mappa di calore con più raggruppamenti rispetto al modello Lee-Carter senza il parametro per la cattura dell'effetto coorte, viene ora presentato lo scatterplot dello stesso modello per verificarne i risultati più dettagliatamente:



Si può osservare dai tre grafici di tipo “Scatter” che questa volta il modello ha catturato sicuramente meglio l’effetto coorte rispetto al primo e che quindi va tenuto in considerazione per l’analisi finale sulla scelta del modello più adatto alla rappresentazione.

IL MODELLO APC

Questo modello, age-period-cohort, è una sottostruttura del modello RH, questo infatti innova semplicemente i due beta della formula precedente imponendoli pari a 1. La formula del predittore del modello sarà dunque:

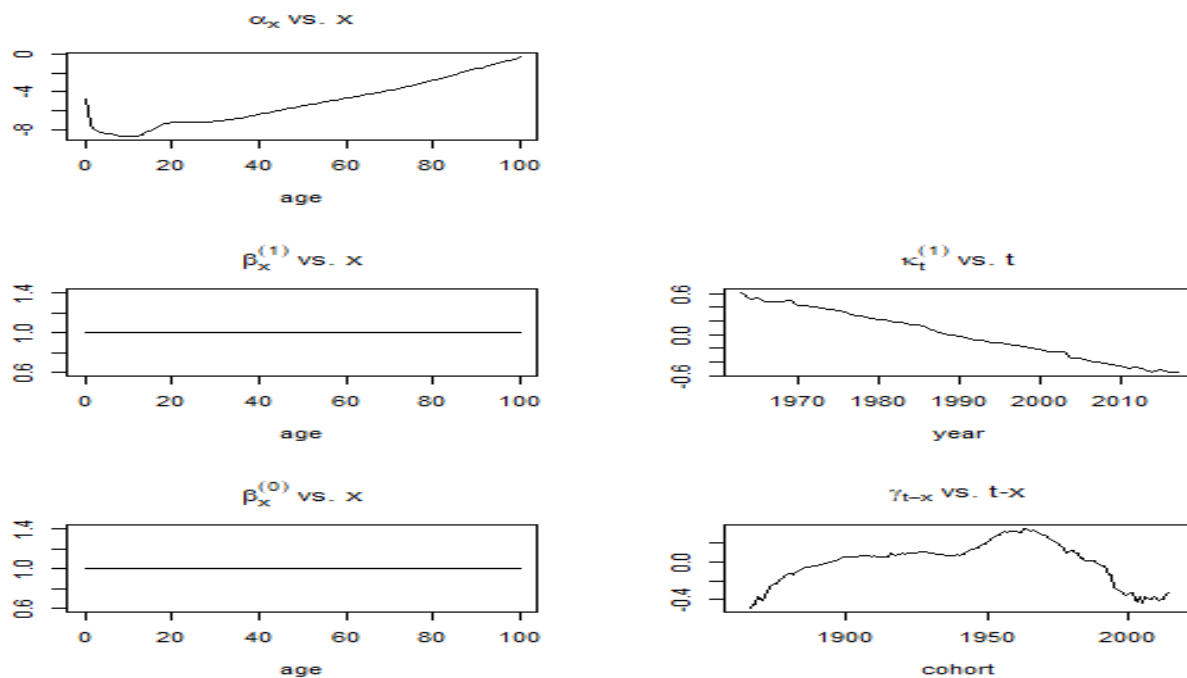
$$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}$$

L’identificabilità del modello viene poi assicurata dall’imposizione di tre vincoli che sono:

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 1, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c\gamma_c = 0$$

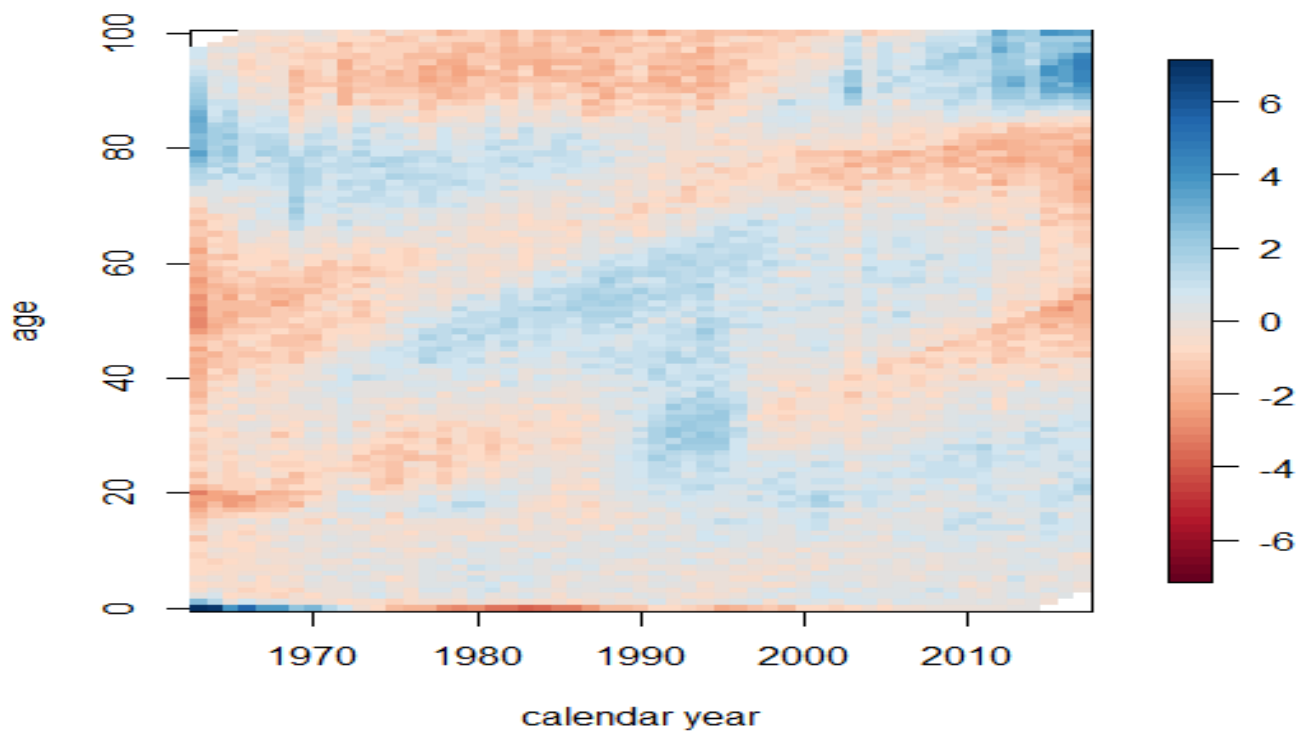
E possiamo dire che gli ultimi due vincoli rappresentano l’assenza di trend lineari e implicano dunque che l’effetto coorte fluttui intorno allo 0.

Attraverso l'applicazione del modello sono stati quindi ottenuti i seguenti risultati:

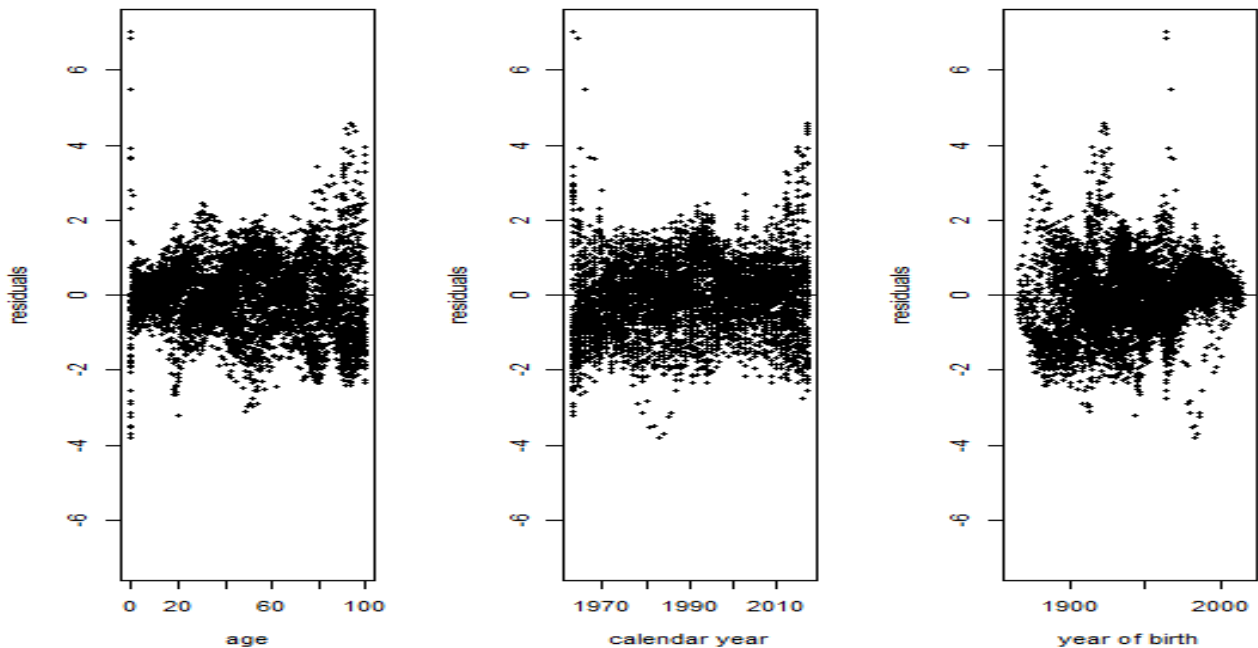


Osservabili, come detto precedentemente durante la spiegazione del modello, come i due coefficienti beta siano costanti e pari a 1, mentre il parametro che rappresenta l'impatto dell'effetto coorte sia di valori sempre minori a partire dal 1970 in poi.

Per quanto riguarda i residui:



Vediamo questa volta come la mappa di calore appaia relativamente omogenea, passando poi allo scatterplot:



Possiamo questa volta notare come vi siano dei pattern nel grafico a sinistra e a destra della figura da tener conto al momento della scelta del modello adatto per l'applicazione finanziaria.

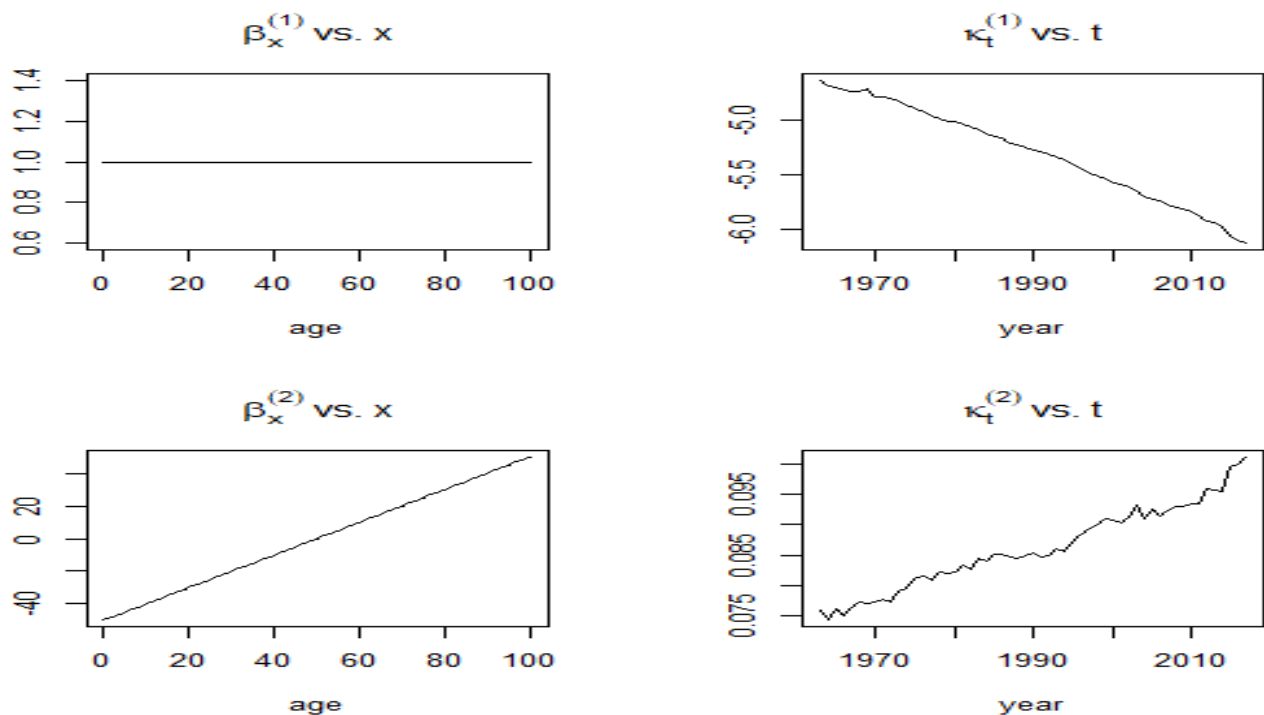
IL MODELLO CBD

Implementato da Cairns, Blake e Dowd, il modello CBD, che prende il nome dai suoi autori, è strutturato con due termini età-periodo, e con due coefficienti beta preimpostati, il primo pari a 1, il secondo pari a $x - \bar{x}$, dove \bar{x} rappresenta la media dell'età nella serie storica. L'espressione che riassume questo modello quindi è:

$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}$$

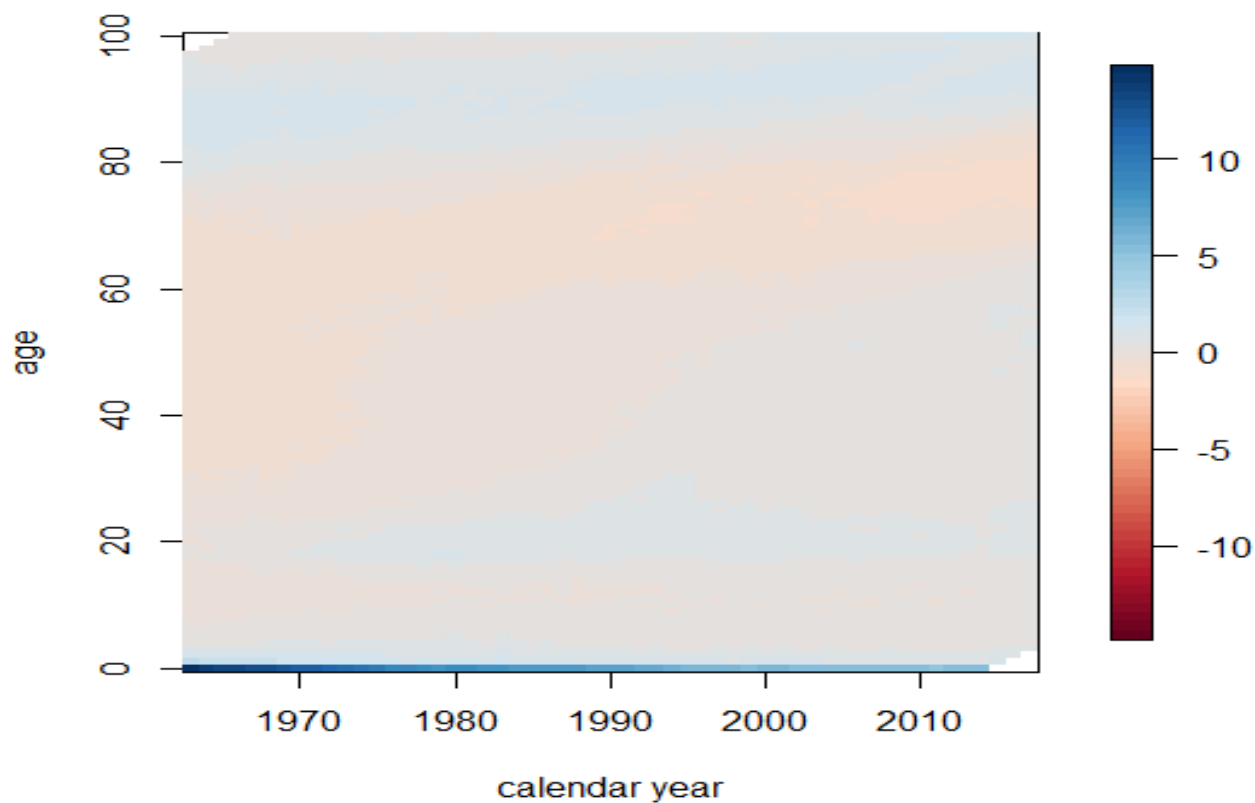
Il modello non ha problemi per l'identificabilità e dunque non vengono imposti ulteriori vincoli, la stima viene effettuata proiettando i due parametri κ utilizzando un random walk bivariato con deriva. Si ipotizza poi, come nell'RH una distribuzione binomiale del numero dei decessi e utilizzando una funzione logit link che hanno come

obiettivo la probabilità di decesso in un anno, q_{xt} . Applicando questo modello alla popolazione francese avremo:

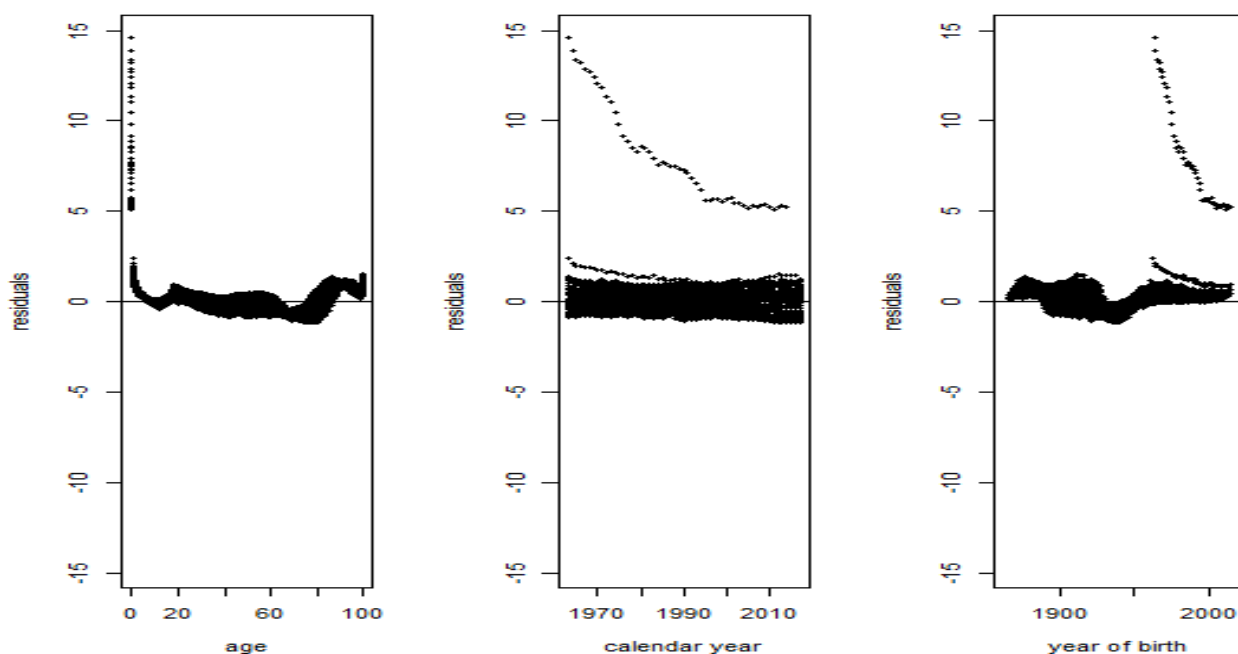


Come dicevamo precedentemente, nella parte teorica, il primo coefficiente beta è pari ad uno, il secondo ha un trend crescente, come prospettabile, crescente. Vediamo questa volta come l'andamento della mortalità sul primo parametro k ha un trend strettamente decrescente, senza arrestarsi questa volta negli anni 2000.

I residui stimati, invece, hanno le seguenti caratteristiche:



Notiamo anche qui, come nel modello APC, come la mappa di calore sia totalmente omogenea, passando al grafico di tipo scatter:



Osservabile, questa volta, una distribuzione con pattern dei residui, ancora una volta da tenere in conto nel momento in cui si andrà ad effettuare la scelta dei modelli.

IL MODELLO M7

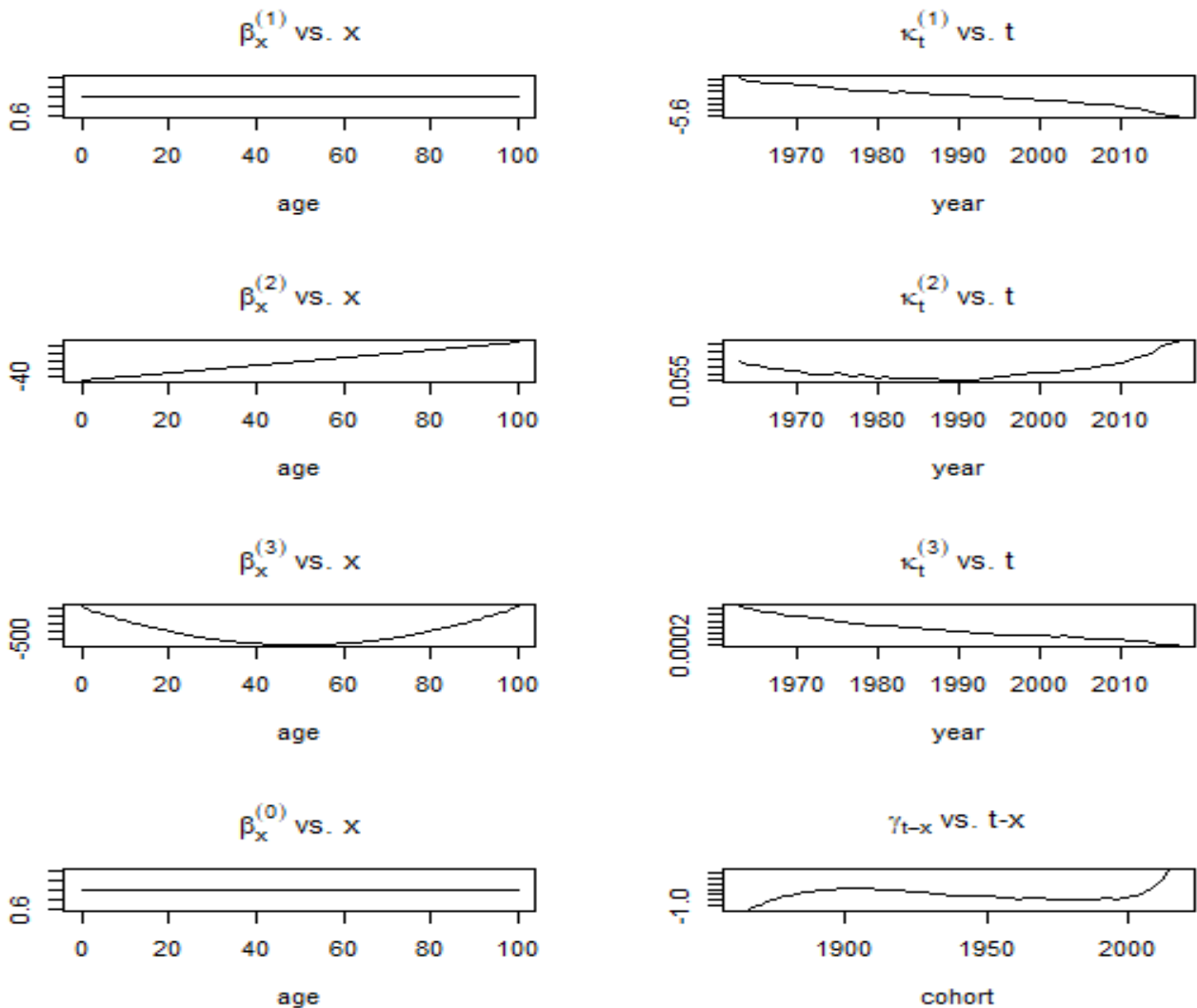
Gli stessi autori del CBD, inoltre, implementarono un altro modello, con l'aggiunta, questa volta, due ulteriori parametri in grado di incorporare l'effetto coorte e un effetto quadratico dell'età con, inoltre, un parametro stimato σ_x^2 che rappresenta la media degli scarti. Il predittore, così, diventa:

$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \widehat{\sigma_x^2})\kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$$

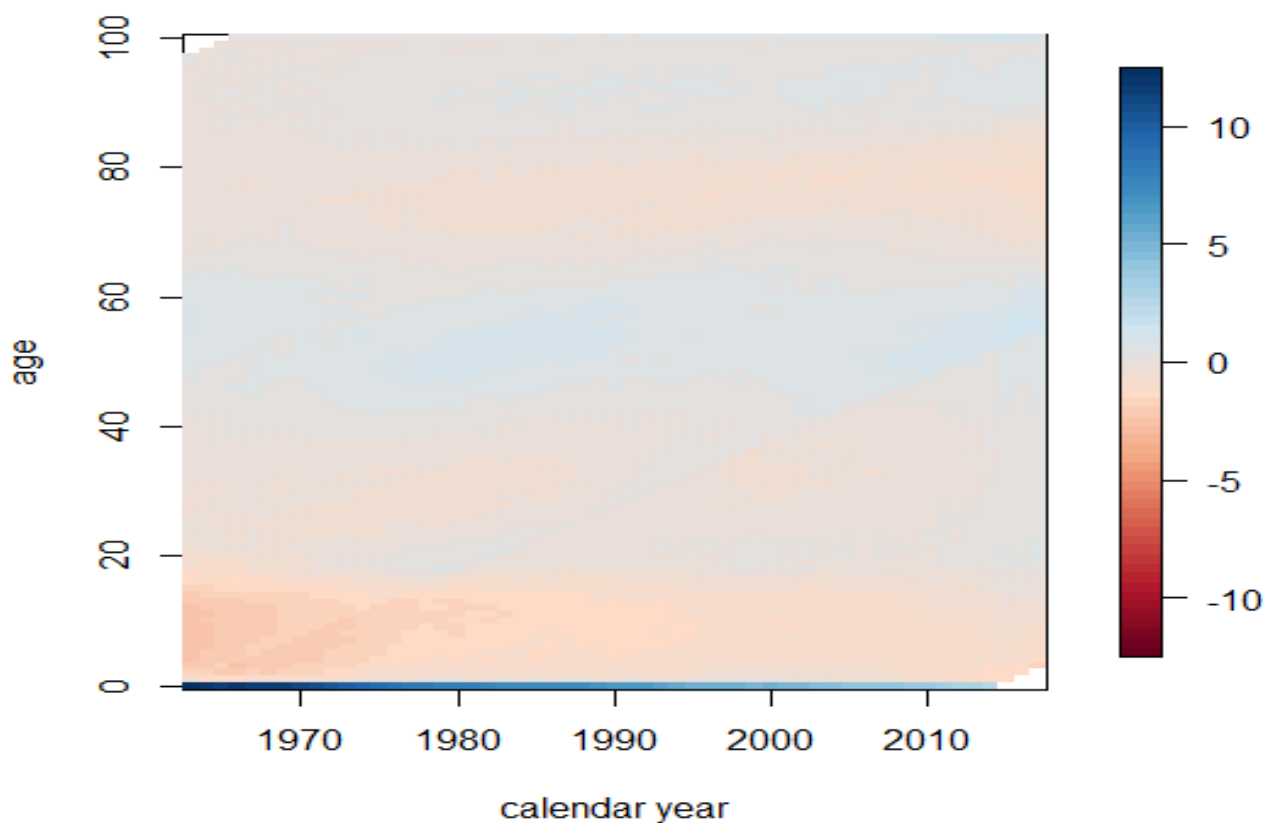
Il modello, anche questa volta, deve essere identificato attraverso dei vincoli:

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c\gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2\gamma_c = 0$$

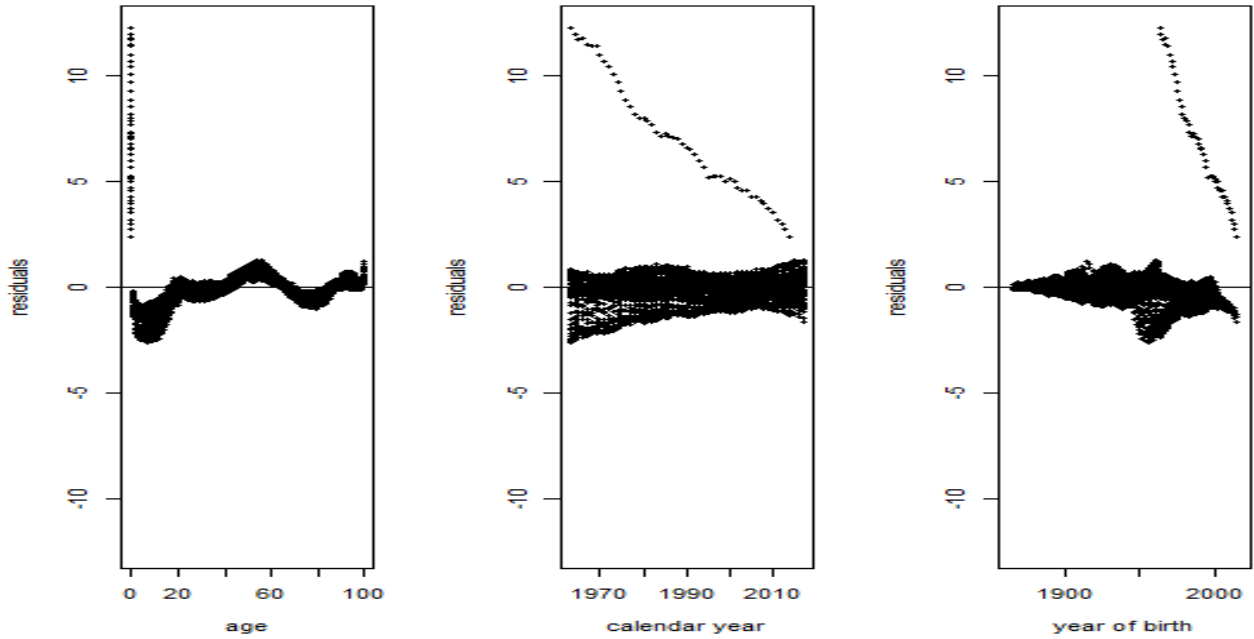
Il fitting del modello implementato con R quindi sarà rappresentato come segue:



Osservabile, in questo grafico, come l'andamento del parametro aggiuntivo per l'effetto quadratico dell'età abbia un andamento parabolico, mentre l'effetto coorte abbia un andamento quasi sinusoidale. I residui stimati nel modello sono quindi descritti:



Anche questa volta la mappa di calore evidenzia una certa omogeneità senza raggruppamenti rilevanti. Lo scatterplot invece viene rappresentato dalla seguente immagine:



Osservabili, anche questa volta notevoli pattern con valori eccezionali in tutti e tre i grafici.

IL MODELLO PLAT

Quest'ultimo modello è un mix tra modello CBD e Lee-Carter, fatto in modo da catturare tutti i range d'età e l'effetto coorte. È costituito da un parametro statico alfa, triparametrico con $N=3$, da tre coefficienti beta pari rispettivamente a: $\beta_x^{(1)} = 1$, $\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$, $\beta_x^{(3)} = (\bar{x} - x)^+$ con $(x - \bar{x})^+ = \max(0, \bar{x} - x)$. Ottenendo dunque un predittore come il seguente:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+\kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$$

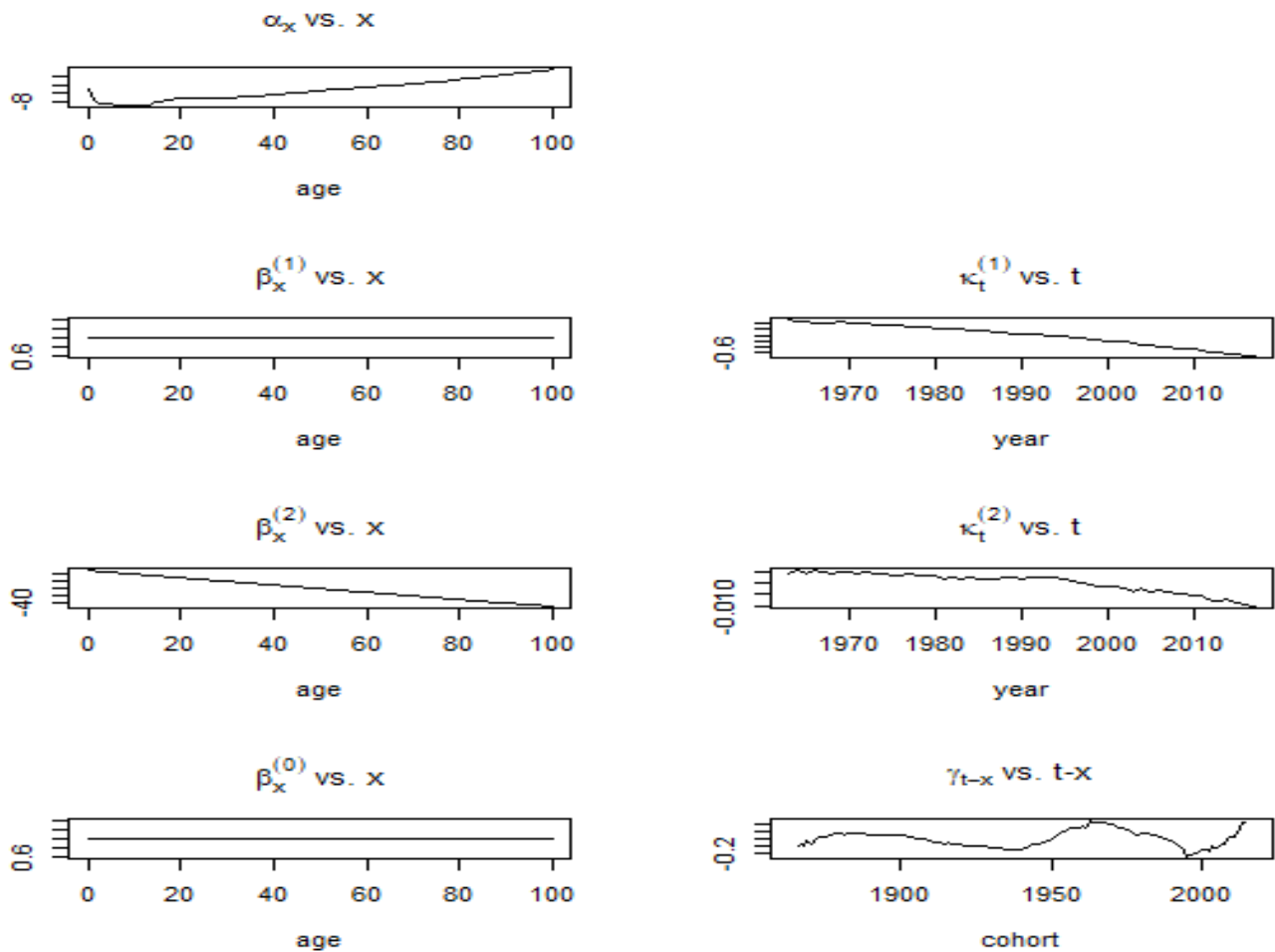
L'obiettivo sarà dunque la forza della mortalità con la log link, assumendo una distribuzione di Poisson del numero dei decessi per la stima dei parametri.

Il modello, inoltre, per essere identificato, impone i seguenti vincoli sui parametri:

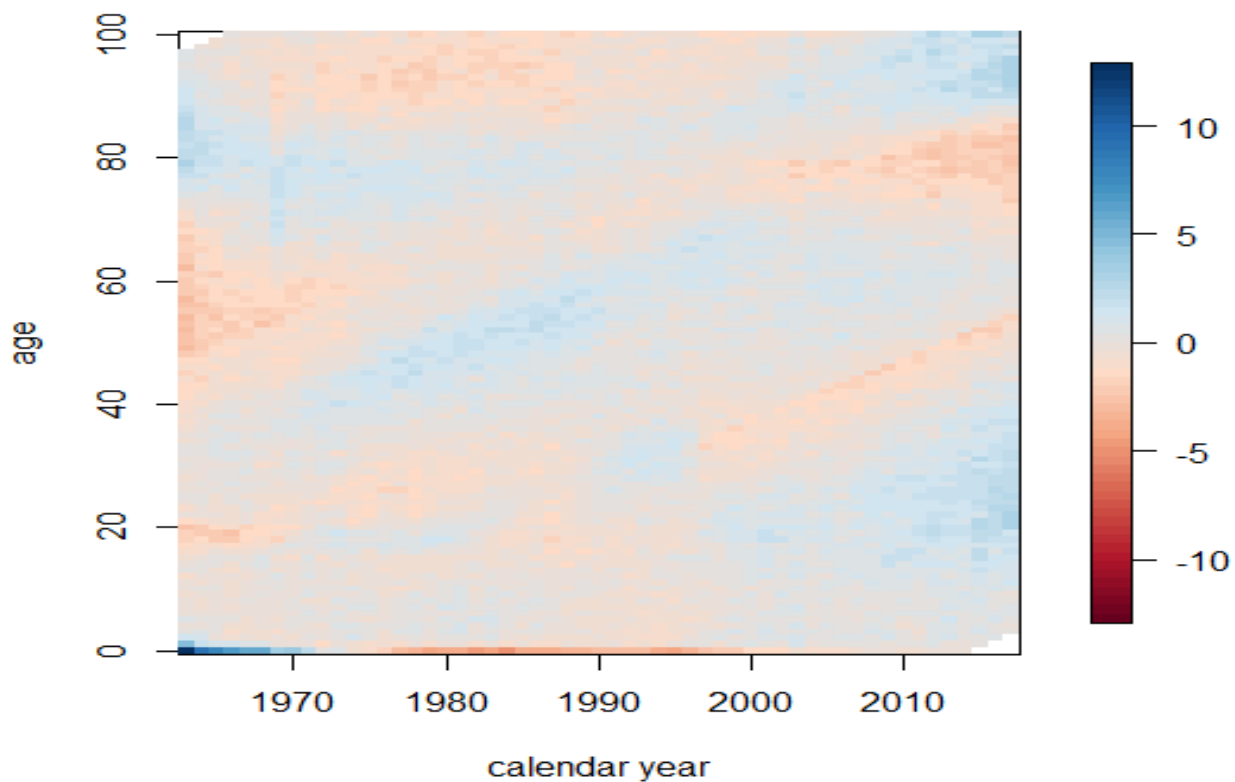
$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c\gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2\gamma_c = 0 \text{ e le sommatorie dei tre parametri } k \text{ pari a } 0.$$

Questi ultimi 3 assicurano che gli indici di periodo fluttuino intorno allo 0 mentre, come per il modello CBD, i primi tre assicurano una fluttuazione dell'effetto coorte intorno allo 0 e l'assenza di trend lineari o quadratici.

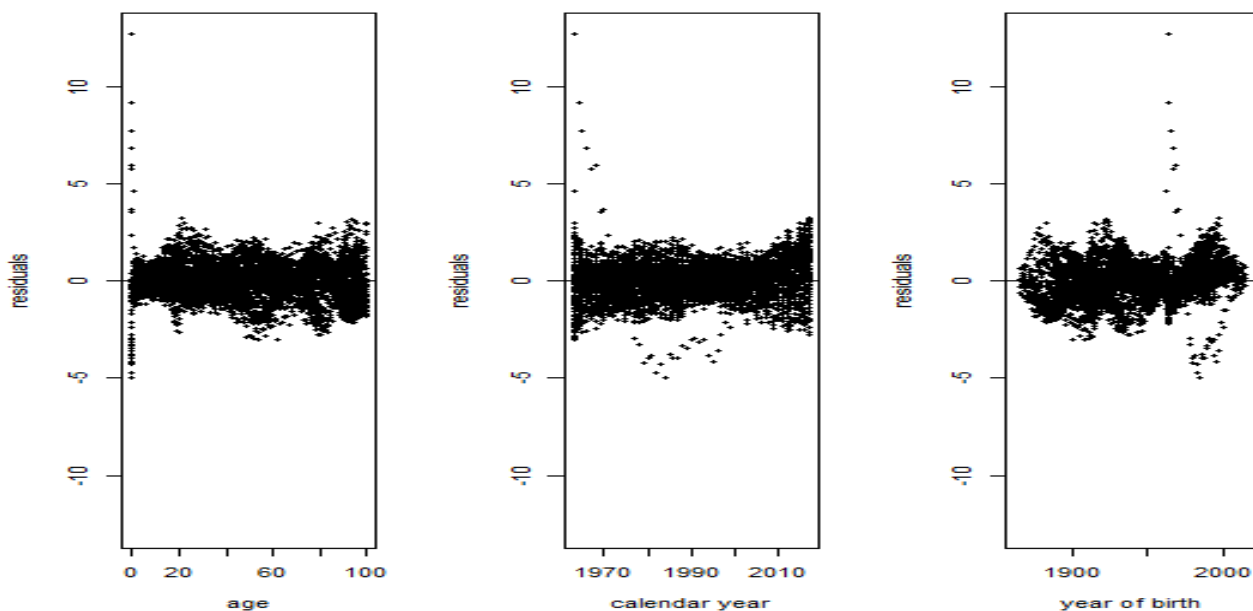
Si riporta, dunque, di seguito il fitting del modello:



Analizzando poi i residui, con la mappa di calore:



Anche questa volta la mappa non mostra particolari raggruppamenti, passando al diagramma scatter, invece:



Possiamo notare come vi siano meno pattern individuabili rispetto agli altri modelli, rendendo il modello abbastanza preciso anche se vi sono dei valori eccezionali nel terzo grafico.

LA SCELTA DEI MODELLI

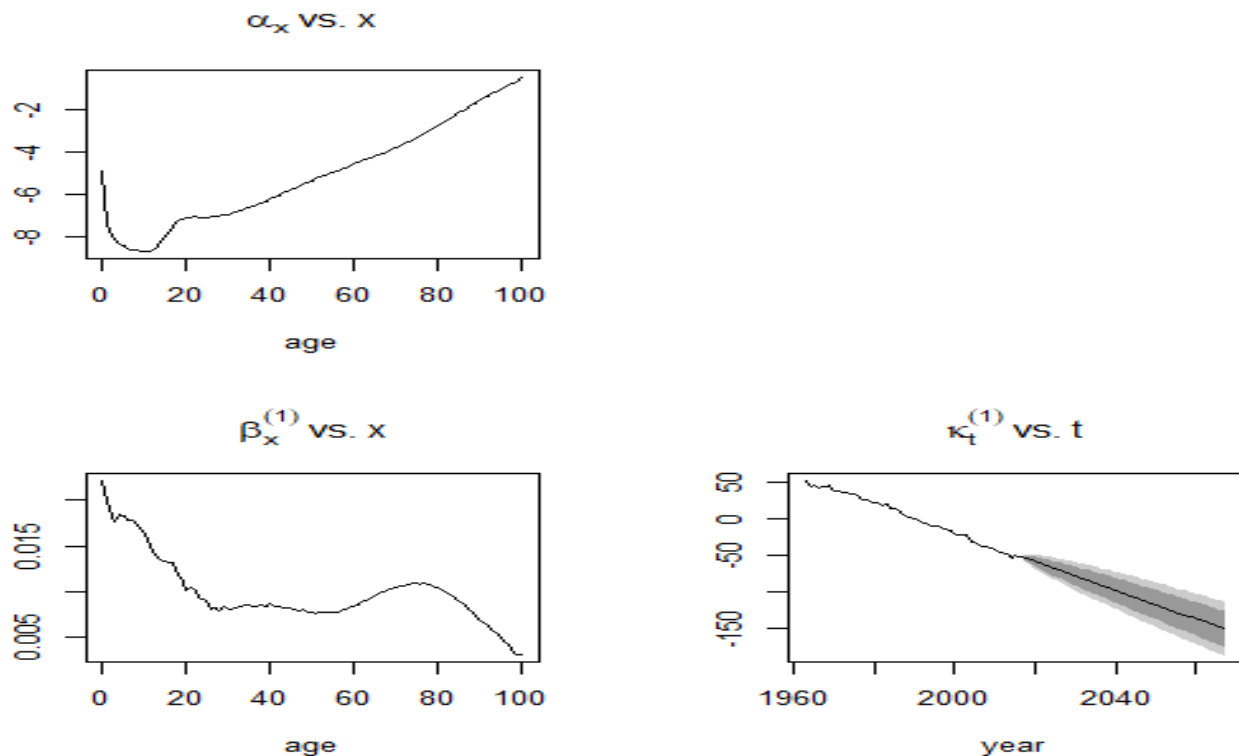
Ho poi effettuato una scelta dei modelli basata, cercando di tener conto del criterio della parsimonia dei parametri da stimare, sui criteri AIC, BIC e devianza stimata. Con AIC o indice di akaike pari a $2k-2\ln(L)$, il criterio Bayesiano pari a $-2\ln(L)+k \ln(n)$ e la devianza pari a $-2\log(p(y|\theta))+C$. Il modello che meglio si adatta ai dati avrà questi tre criteri sopra descritti inferiori rispetto agli altri, dando anche un efficace ed efficiente metodo di scelta ottima. I criteri dei modelli sono riportati nella seguente tabella.

	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>DIC</i>
<i>LC</i>	98149.57	99837.75	45098.55
<i>RH</i>	69651.4	72319.38	16304.38
<i>APC</i>	119736	121735.3	66590.96
<i>CBD</i>	4303326	4304055	4250565
<i>M7</i>	1699894	1701953	1646731
<i>PLAT</i>	105205.1	107555.3	51954.08

Dalla tabella riportata, possiamo notare subito che il modello di Haberman e Renshaw possiede tutti e 3 gli indici contemporaneamente inferiori rispetto agli altri 5 modelli ma, dall'analisi e dalle previsioni da me svolte, risultava poi un andamento previsionale non attinente con la realtà, in quanto risultava che il tasso di mortalità, col passare degli anni, diminuisse anziché, come ragionevolmente ci si aspetta, che aumentasse. È stato dunque scelto, per portare avanti l'analisi previsionale e per applicare il Defined Contribution Pension Plan, il secondo e il terzo modello con AIC, BIC e DIC inferiori e cioè il Lee-Carter e il PLAT.

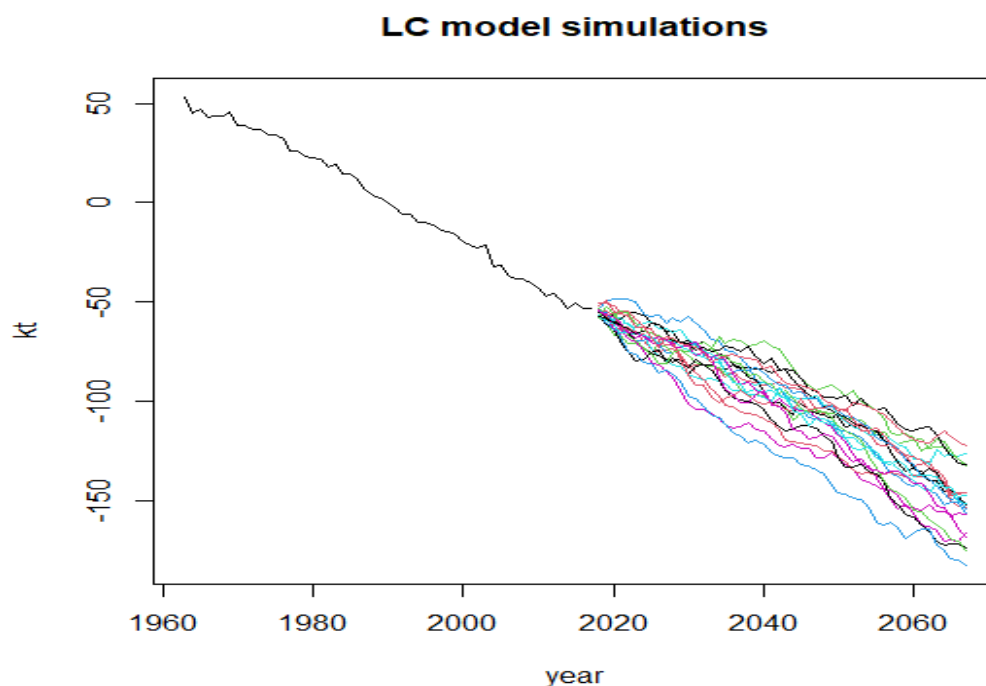
LE PREVISIONI

Sono state quindi effettuate le previsioni col modello Lee-Carter, che vengono riportate qui di seguito per dare un impatto grafico.

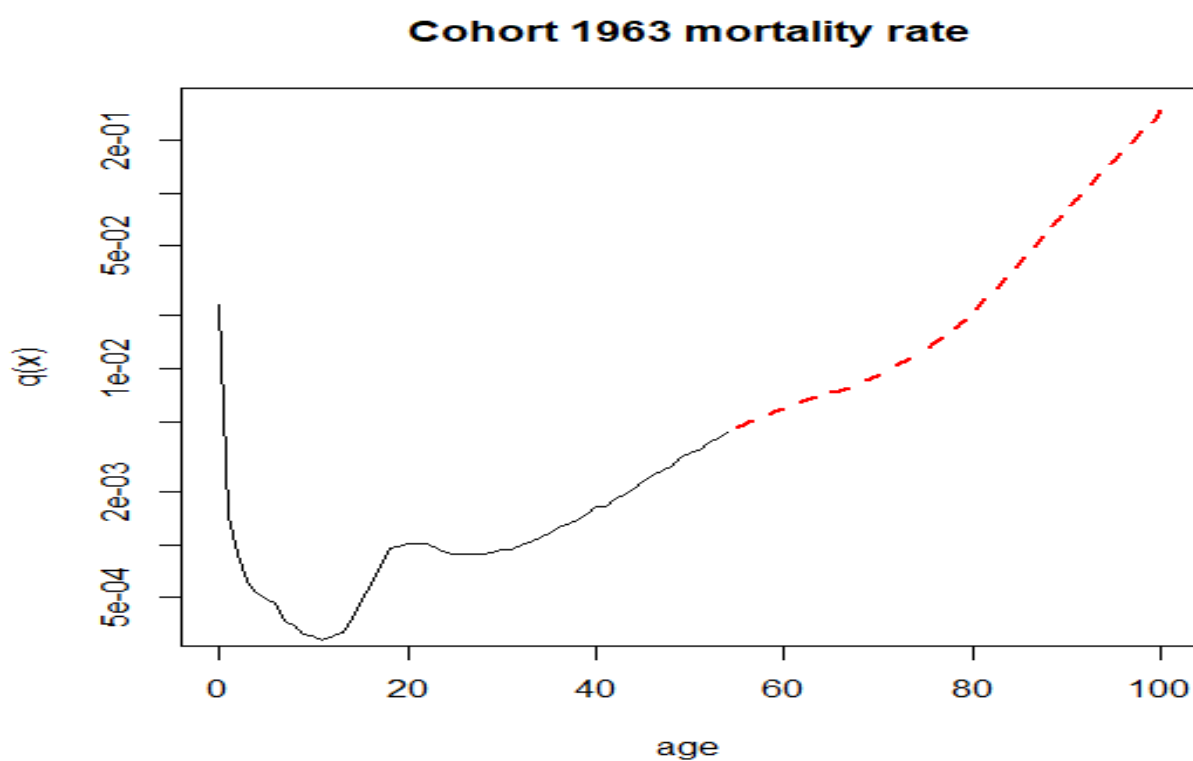


Si può notare come il modello ipotizzi una decrescita del parametro k , rappresentato all'interno degli intervalli di confidenza che ragionevolmente si ampliano dato l'ampio arco temporale richiesto per le previsioni.

Successivamente ho creato, attraverso il software, delle simulazioni di previsioni in modo tale da mostrare graficamente come, in 100 scenari differenti, potrebbe evolversi il parametro k . La figura seguente mostra esattamente ciò, mostrandoci dunque quanto il tasso di mortalità potrebbe continuare a decrescere, portando dunque la longevità di una persona a livelli sempre maggiori e, di conseguenza, a delle osservazioni che i gestori di fondi pensione non possono fare a meno di prendere in considerazione.

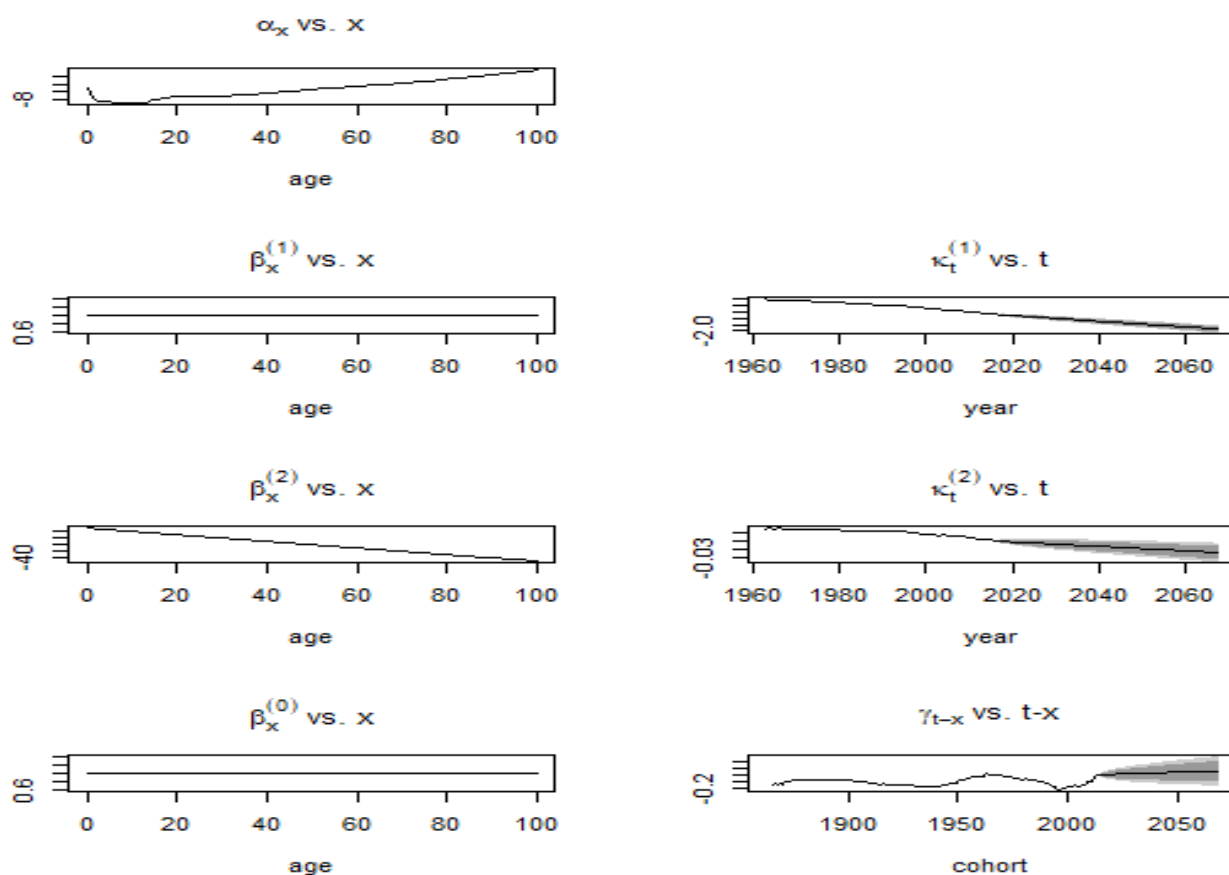


Successivamente alle simulazioni ho poi creato una tavola con i tassi di mortalità per una specifica coorte, quella del 1963, composta sia da tassi di mortalità appartenenti al fitting del modello, e quindi in sample, e da tassi, al contrario, previsti. La figura successiva ci mostra esattamente come dovrebbe evolversi la curva del tasso di mortalità per la specifica coorte con un range periodale che va dal 1963 al 2063.



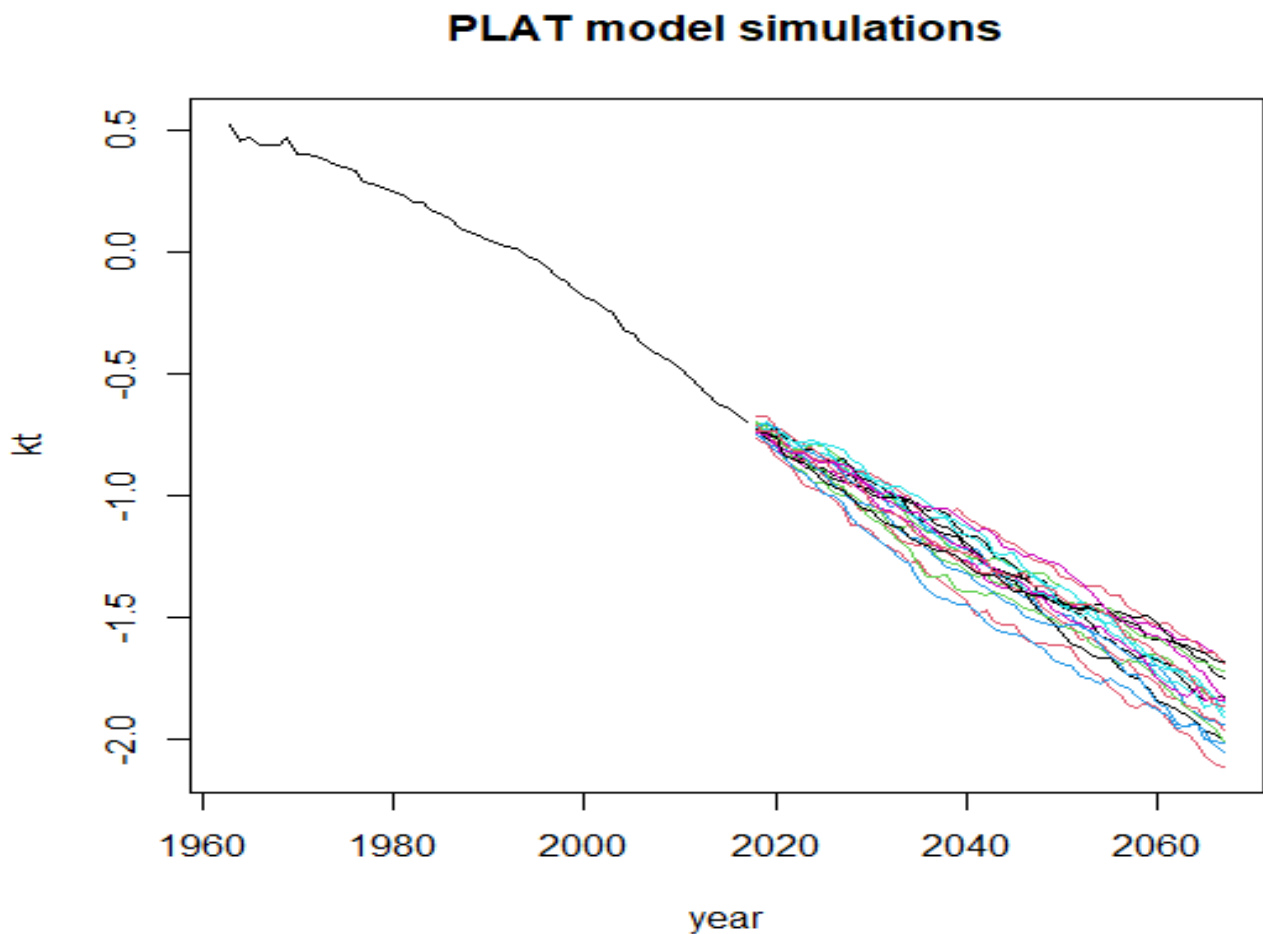
Come è possibile notare, ragionevolmente questa volta, il tasso di mortalità dai 22 anni in poi ha un andamento crescente, dandomi dunque modo di proseguire con la creazione di tavole attuariali stimate partendo dai tassi di mortalità e dalle conseguenti probabilità di morte per poi metterle in confronto con le tavole ricavate con l'utilizzo del modello PLAT.

Sono state poi effettuate le previsioni con il modello PLAT di cui sono riportati i grafici come segue:



Come prima vediamo come i parametri k , anche col modello PLAT, vengono predetti in decrescita mentre l'effetto coorte viene visto con un andamento sostanzialmente stabile anche se con degli intervalli di confidenza piuttosto ampi, dato anche il fatto che le previsioni hanno come range un intervallo temporale molto lungo in cui molte cose potrebbero cambiare.

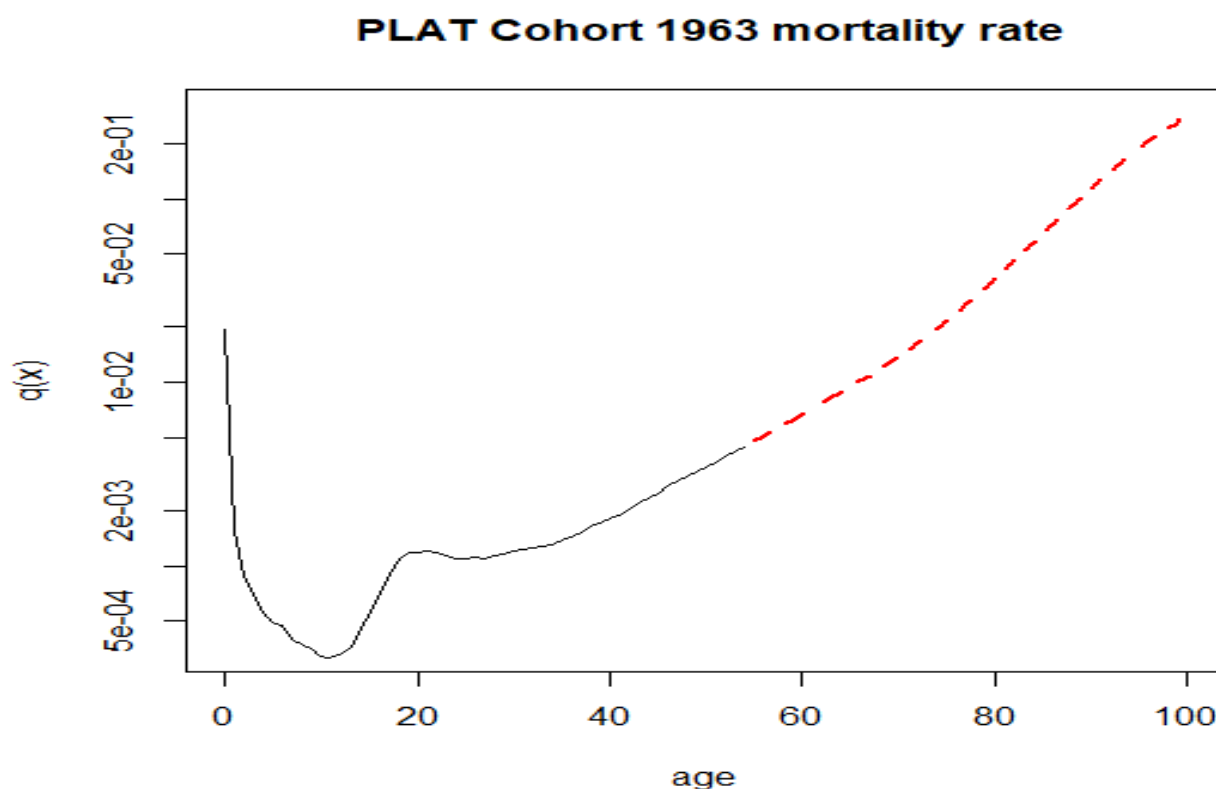
Ho poi creato, come fatto in precedenza col modello LC, un grafico con 100 simulazioni ipotizzate dal software riguardante il parametro k e le riporto di seguito.



Dalle simulazioni esposte possiamo notare, inoltre, anche un andamento più regolare rispetto a quelle effettuate con il modello Lee-Carter anche se, similmente a prima, anche questo modello ipotizza una decrescita del parametro k in tutte le sue simulazioni.

Ho poi effettuato un plot delle previsioni dei tassi di mortalità per età della stessa coorte presa in osservazione precedentemente, quella del 1963.

Qui di seguito viene dunque riportata il grafico della curva dei tassi di mortalità previsti implementata con il modello PLAT:



Come ipotizzabile, anche stavolta abbiamo delle previsioni che potrebbero coincidere con la realtà in quanto effettivamente ragionevoli ma notiamo anche qui un andamento più costante delle previsioni rispetto a quelle effettuate col modello LC che, ricordandolo, non riprende al suo interno l'effetto coorte, a differenza del modello preso in considerazione attualmente.

LE TAVOLE ATTUARIALI

Una volta scelti i modelli con cui fare il confronto, nella mia analisi ho estratto i tassi di mortalità generati trasformandoli nelle corrispettive probabilità di morte associata ad ogni età. Ciò è stato necessario per andare a implementare nel software due diverse tavole attuariali. Le tavole attuariali sono degli strumenti che aiutano gli esperti del settore per andare a calcolare i premi assicurativi o, per l'appunto, i premi per un fondo pensione. Queste tavole sono state dunque ricavate dalle previsioni dei tassi di mortalità effettuate con i due modelli, grazie anche al pacchetto “lifecontingencies”

implementato dal Professor Spedicato e dal Professor Clemente, dandoci ragionevolmente dei risultati diversi.

Qui di seguito vengono riportate le due tavole, considerando però solo gli individui sopravvissuti da età x a $x+1$ per valutare sinteticamente quanto possa cambiare l'applicazione finanziaria scegliendo un modello o un altro.

> head(lc_acttbl_1963)			> head(PLAT_acttbl_1963)		
	x	lx		x	lx
1	0	10000.000	1	0	10000.000
2	1	9770.060	2	1	9806.465
3	2	9755.661	3	2	9791.371
4	3	9747.042	4	3	9782.721
5	4	9740.950	5	4	9775.935
6	5	9735.740	6	5	9770.515

Come anticipato precedentemente notiamo come i due modelli abbiano delle stime diverse della mortalità. Vediamo, infatti, come il modello LC stimi dei circa 35 decessi in più per ogni età presa in considerazione e che quindi questo inciderà anche nel momento in cui si andrà ad ipotizzare un contratto pensionistico e i relativi premi.

L'APPLICAZIONE FINANZIARIA

Parte finale di questo lavoro è quindi l'applicazione dei modelli al contratto ipotizzato, un Defined Contribution Pension Plan, individuando le differenze dei premi pagati dai lavoratori in base al modello usato che quindi influenzerà anche le entrate del fondo pensionistico scelto dal lavoratore.

Sono partito da alcune ipotesi da esporre precedentemente. Ho assunto che gli aderenti al piano pensionistico fossero 1000 con un salario medio di 50000 Euro annui, con un'entrata nel mondo del lavoro a 25 anni e con un'uscita dallo stesso all'età di 62, individuate, come detto prima, come età medie di entrata e uscita nel panorama lavorativo Francese. È stato inoltre applicato un incremento medio del salario lordo annuo del lavoratore dell'1%.

Il tasso di contribuzione, che per ipotesi del defined contribution, viene stabilito nel momento della stipula del contratto e concordato anche col contraente, è stato calcolato con l'Individual Entry-Age Method (IEAM), che assume che il lavoratore abbia aderito al piano nel momento in cui è stato assunto e che vi sia rimasto fino al momento della valutazione. Una volta implementata la funzione ad esso associata, il software ha ricavato un tasso di contribuzione, come auspicabile, distinto in base al modello utilizzato: applicando le tavole attuariali ricavate col modello LC, il tasso di contribuzione è dell'8,15% annuo, mentre con le tavole ricavate con i dati del modello PLAT, il tasso risulta essere circa del 7,56%. Ricordiamo inoltre che l'importo è calcolato sul salario lordo e che dunque vi sarà un differimento del pagamento delle tasse dovute dal lavoratore pari al periodo in cui la pensione non sarà percepita.

A seguito di queste precisazioni, viene quindi riportata la tabella con le entrate del fondo pensioni nelle varie fasi contrattuali, verificando quindi le differenze tra i due modelli:

NUMERO	LEE- CARTER	PLAT
1	407781,5	377881,2
2	411859,3	381660
3	415977,9	385476,6
4	420137,6	389331,4
5	424339	393224,7
6	428582,4	397156,9
7	432868,2	401128,5
8	437196,9	405139,8
9	441568,9	409191,2
10	445984,6	413283,1
11	450444,4	417415,9
12	454948,9	421590,1
13	459498,4	425806
14	464093,3	430064,1
15	468734,3	434364,7
16	473421,6	438708,3
17	478155,8	443095,4
18	482937,4	447526,4
19	487766,8	452001,6
20	492644,4	456521,7
21	497570,9	461086,9
22	502546,6	465697,7
23	507572	470354,7
24	512647,8	475058,3
25	517774,2	479808,8
26	522952	484606,9
27	528181,5	489453
28	533463,3	494347,5
29	538798	499291
30	544185,9	504283,9
31	549627,8	509326,8
32	555124,1	514420
33	560675,3	519564,2
34	566282,1	524759,9
35	571944,9	530007,5
36	577664,3	535307,5
37	583441	540660,6
TOTALE	18149393	16818603

È possibile notare dalle entrate totali come, su 37 contributi, il modello preso in considerazione faccia la differenza. Le entrate generate applicando la tavola attuariale ricavata con il modello LC sono di 18'149'393 Euro mentre applicando la tavola ricavata col modello PLAT sono di 16'818'603 Euro con una netta differenza di circa 1,4 milioni di Euro ogni mille aderenti al fondo. Per dare un riscontro immediato a ciò è stato implementato il grafico per visualizzare l'andamento dei contributi versati nel fondo riportato quindi qui di seguito.

