Trabajo Práctico N°1

19 de Mayo de 2025 Introducción a la Investigación Operativa y Optimización

Grupo 4

Integrante	LU	Correo electrónico
Suarez Ines	890/22	`ine.suarez22@gmail.com`
Navarro Solana	906/22	`solanan3@gmail.com`
Wittmund Montero, Lourdes	1103/22	`lourdesmonterochiara@gmail.com`

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Resolución

1. Calcular la ganancia o pérdida (prorrateando los gastos fijos) de cada producto que se obtuvo en el mes anterior (cuando se produjeron 500.000 litros de combustible para aviones, 3.000.000 de combustible para vehículos y 6.000.000 litros de kerosene) y la ganancia (o pérdida) total de la compañía.

Para resolver este problema necesitamos calcular los ingresos, los costos variables y el prorrateo de los gastos fijos por producto. Luego, con estos datos podremos determinar la ganancia o pérdida total de la compañía y la de cada producto.

1. **Ingresos por producto:**

   Dado que el precio de venta está expresado por cada mil litros, y conocemos la producción mensual en litros, basta con dividir cada volumen por mil y multiplicarlo por su respectivo precio para obtener los ingresos.

   - Combustible para aviones: $500 \times 16{,}000 = 8{,}000{,}000$
   - Combustible para vehículos: $3{,}000 \times 8{,}000 = 24{,}000{,}000$
   - Kerosene: $6{,}000 \times 4{,}000 = 24{,}000{,}000$

   Total ingresos: $56,000,000

2. **Costos variables por producto:**

   Los costos unitarios por mil litros compuestos por materia prima, refinado, fraccionado y embalaje se suman para obtener el costo total por producto. Este valor se multiplica luego por la producción del mes pasado para conocer el gasto total asociado.

   - Aviones: $4{,}000+4{,}100+1{,}000+1{,}000=10{,}100$ Total: $500\times 10{,}100=5{,}050{,}000$
   - Vehículos: $1{,}000+3{,}000+600+500=5{,}100$ Total: $3{,}000\times 5{,}100=15{,}300{,}000$
   - Kerosene: $500+1{,}500+400+400=2{,}800$ Total: $6{,}000\times 2{,}800=16{,}800{,}000$

   Total costos variables: $37,150,000

3. **Gastos fijos prorrateados:**

   Prorratear quiere decir repartir un gasto común entre los productos, según cuánto lo usa cada uno. En este caso, hablamos de gastos fijos como el del sector de refinado o fraccionado, que se mantienen igual sin importar cuántos litros se hagan. Para saber cuánto le corresponde a cada producto, vemos qué porcentaje del recurso utiliza y se lo multiplicamos por el gasto fijo total.

   Gastos fijos por proceso:

   - Refinado: $5,000,000
   - Fraccionado: $5,000,000
   - Embalaje aviones: $2,000,000
   - Embalaje vehículos: $1,000,000
   - Embalaje kerosene: $500,000

   Total gastos fijos: $13,500,000

   Vamos a prorratear los gastos calculando las horas por proceso y por producto.

   - Refinado:
     - Aviones: $500 \times 10 = 5{,}000$ hs
     - Vehículos: $3.000 \times 5 = 15.000$ hs
     - Kerosene: $6.000 \times 3 = 18.000$ hs

Total: 38.000 hs

$$\begin{aligned}
\text{Aviones:} \quad & \frac{5{,}000}{38{,}000} = 13{,}16\,\% \quad \Rightarrow \quad 0{,}1316 \times \$5{,}000{,}000 = \$657,894{,}74 \\
\text{Vehículos:} \quad & \frac{15{,}000}{38{,}000} = 39{,}47\,\% \quad \Rightarrow \quad 0{,}3947 \times \$5{,}000{,}000 = \$1,973,684{,}21 \\
\text{Kerosene:} \quad & \frac{18{,}000}{38{,}000} = 47{,}35\,\% \quad \Rightarrow \quad 0{,}4735 \times \$5{,}000{,}000 = \$2,368,421{,}05
\end{aligned}$$

- Fraccionado:
  - Aviones: 500 $\times$ 20 = 10,000 hs
  - Vehículos: 3.000 $\times$ 10 = 30.000 hs
  - Kerosene: 6.000 $\times$ 6 = 36.000 hs

  Total: 76.000 hs

$$\begin{aligned}
\text{Aviones:} \quad & \frac{10{,}000}{76{,}000} = 13{,}16\,\% \quad \Rightarrow \quad 0{,}1316 \times \$5{,}000{,}000 = \$657,894{,}74 \\
\text{Vehículos:} \quad & \frac{30{,}000}{76{,}000} = 39{,}47\,\% \quad \Rightarrow \quad 0{,}3947 \times \$5{,}000{,}000 = \$1,973,684{,}21 \\
\text{Kerosene:} \quad & \frac{36{,}000}{76{,}000} = 47{,}35\,\% \quad \Rightarrow \quad 0{,}4735 \times \$5{,}000{,}000 = \$2,368,421{,}05
\end{aligned}$$

- Embalaje:
  - Aviones: $2,000,000
  - Vehículos: $1,000,000
  - Kerosene: $500,000

Ganancia o pérdida por producto:

- Combustible para aviones:
  Ingreso: $8,000,000
  Costos variables: $5,050,000
  Costos fijos prorrateados:
  - Refinado: $657,895
  - Fraccionado: $657,895
  - Embalaje: $2,000,000

  Total: $3,315,789
  Resultado: 8,000,000 - 5,050,000 - 3,315,789 = **-365,789**
  Como el número es negativo, el combustible para aviones por sí solo genera una *pérdida* para la compañía.
- Combustible para vehículos:
  Ingreso: $24,000,000
  Costos variables: $15,300,000
  Costos fijos prorrateados:
  - Refinado: $1,973,684
  - Fraccionado: $1,973,684
  - Embalaje: $1,000,000

  Total: $4,947,368
  Resultado: 24,000,000 - 15,300,000 - 4,947,368 = **3,752,632**
  Como el número es positivo, el combustible para vehículos por sí solo genera una *ganancia* para la compañía.

- Kerosene:
  Ingreso: $24,000,000
  Costos variables: $16,800,000
  Costos fijos prorrateados:
  - Refinado: $2,368,421
  - Fraccionado: $2,368,421
  - Embalaje: $500,000

  Total: $5,236,842
  Resultado: 24,000,000 - 16,800,000 - 5,236,842 = **1,963,158**
  Como el número es positivo, el kerosene por sí solo genera una *ganancia* para la compañía.

Ganancia o pérdida total de la empresa: -365,789 + 3,752,632 + 1,963,158 = $5,350,000

Como el número es positivo, la empresa generó una *ganancia* el mes anterior.

2. Si la empresa no hubiese producido combustible para aviones manteniendo en los mismos valores los otros productos, ¿la ganancia de la compañía habría sido mejor? Suponer que se cierra el sector de embalaje de combustibles para aviones.

Para resolver este problema necesitamos calcular los ingresos, los costos variables y los nuevos gastos fijos. Luego, con estos datos podremos determinar si la ganancia de la compañía mejora si no se hubiese producido combustible para aviones.

La producción sin el combustible para aviones quedaría con 3.000.000 litros de combustible para vehículos y 6.000.000 litros de kerosene. Se nos eliminaría el gasto fijo de embalaje de aviones. Juntemos esta nueva información para ver cómo queda:

1. **Ingresos por producto:**
   Para calcular esto, multiplicamos precio por la cantidad de miles de litros producidos.
   - Combustible para vehículos: 3.000 $\times$ 8.000 = 24.000.000
   - Kerosene: 6.000 $\times$ 4.000 = 24.000.000

   Total ingresos: $48.000.000
2. **Costos variables por producto:**
   Como calculamos en el ejercicio anterior:
   - Vehículos: $15.300.000
   - Kerosene: $18.800.000

   Total costos variables: $32.100.000
3. **Nuevos gastos fijos prorrateados:**
   Ya no tenemos el gasto fijo de embalaje de aviones. Entonces, los gastos fijos que quedan son:
   - Refinado: $5.000.000
   - Fraccionado: $5.000.000
   - Embalaje de vehículos: $1.000.000
   - Embalaje de kerosene: $500.000

   Total costos fijos: $11.500.000

Vamos a prorratear igual que antes, pero con nuestros nuevos datos sin combustible para aviones.

- Refinado:
  - Vehículos: 3.000 $\times$ 5 = 15.000 hs
  - Kerosene: 6.000 $\times$ 3 = 18.000 hs

Total: 33.000 hs

$$\begin{array}{rll} \text{Vehículos:} & \dfrac{15{,}000}{33{,}000} = 45{,}45\,\% & \Rightarrow \quad 0{,}4545 \times \$5{,}000{,}000 = \$2{,}272{,}727 \\ \text{Kerosene:} & \dfrac{18{,}000}{33{,}000} = 54{,}55\,\% & \Rightarrow \quad 0{,}5455 \times \$5{,}000{,}000 = \$2{,}727{,}273 \end{array}$$

- Fraccionado:
  - Vehículos: 3.000 × 10 = 30.000 hs
  - Kerosene: 6.000 × 6 = 36.000 hs

  Total: 66.000 hs

$$\begin{array}{rll} \text{Vehículos:} & \dfrac{30{,}000}{66{,}000} = 45{,}45\,\% & \Rightarrow \quad 0{,}4545 \times \$5{,}000{,}000 = \$2{,}272{,}727 \\ \text{Kerosene:} & \dfrac{36{,}000}{66{,}000} = 54{,}55\,\% & \Rightarrow \quad 0{,}5455 \times \$5{,}000{,}000 = \$2{,}727{,}273 \end{array}$$

- Embalaje:
  - Vehículos: $1.000.000
  - Kerosene: $500.000

Ganancia o pérdida por producto:

- Combustible para vehículos:

  Ingreso: $24.000.000

  Costos variables: $15.300.000

  Costos fijos prorrateados:
  - Refinado: $2.272.727
  - Fraccionado: $2.272.727
  - Embalaje: $1.000.000

  Total: $5.545.455

  Resultado: 24.000.000 - 15.300.000 - 5.545.455 = **3.154.545**

- Kerosene:

  Ingreso: $24.000.000

  Costos variables: $18.800.000

  Costos fijos prorrateados:
  - Refinado: $2.727.273
  - Fraccionado: $2.727.273
  - Embalaje: $500.000

  Total: $5.954.545

  Resultado: 24.000.000 - 18.800.000 - 5.954.545 = **1.245.455**

Resultado final:

La ganancia total sin producir combustible para aviones es: la ganancia del combustible para vehículos + la ganancia del kerosene.

$$3{,}154{,}545 + 1{,}245{,}455 = \boxed{\mathbf{4{,}400{,}000}}$$

Comparación:

Comparación de escenarios

Escenario	**Ganancia neta ($)**
Con aviones	5,350,000
Sin aviones	4,400,000

Aunque el combustible para aviones generó una pérdida individual, la empresa gana más manteniéndolo porque los costos fijos se distribuyen entre más productos. El área de embalaje de aviones parece ineficiente por sí sola, pero eliminar el producto reduce la escala total, lo que aumenta el peso de los costos fijos sobre los otros productos. Por lo tanto, la ganancia de la compañía hubiese sido peor sin la producción de combustible para aviones.

3. ¿Y si hubiese aumentado lo máximo posible la producción de los otros productos? Suponer que se cierra el sector de embalaje de combustibles para aviones.

Planteamos un modelo de programación lineal para ver qué pasa si queremos maximizar la producción de vehículos y kerosene, pero respetando las capacidades de los sectores disponibles.

Variables:

- x: miles de litros de combustible para vehículos.
- y: miles de litros de kerosene.

Modelo:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & x + y \\
\text{Sujeto a} \quad & \begin{cases}
5x + 3y \leq 38,000 & \text{(refinado)} \\
10x + 6y \leq 80,000 & \text{(fraccionado)} \\
2x \leq 6,000 & \text{(embalaje vehículos)} \\
y \leq 7,000 & \text{(embalaje kerosene)} \\
x \geq 0,\ \ y \geq 0 & \text{(no negatividad)}
\end{cases}
\end{aligned}$$

Como el embalaje de vehículos permite que la producción de miles de litros de combustible para vehículos sea hasta 3,000 y el embalaje de kerosene permite hasta 7,000, vamos a probar llevar estas variables a esos máximos y ver si se cumplen las restricciones.

Refinado usado:

$$5.(3,000) + 3.(7,000) = 15,000 + 21,000 = 36,000 \leq 38,000 \quad \checkmark$$

Fraccionado usado:

$$10.(3,000) + 6.(7,000) = 30,000 + 42,000 = 72,000 \leq 80,000 \quad \checkmark$$

Perfecto: podemos producir 3,000 de vehículos y 7,000 de kerosene.

Cálculo de ganancias

Ingresos:

$$\begin{array}{rl}
\text{Vehículos:} & 3,000 \times 8,000 = 24,000,000 \\
\text{Kerosene:} & 7,000 \times 4,000 = 28,000,000 \\
\hline
\text{Total ingresos:} & 24,000,000 + 28,000,000 = 52,000,000
\end{array}$$

Costos variables:

$$\text{Vehículos (3,000 mil litros):} \begin{cases} \text{Materia prima:} & 3,000 \times 1,000 = 3,000,000 \\ \text{Refinado:} & 3,000 \times 3,000 = 9,000,000 \\ \text{Fraccionado:} & 3,000 \times 600 = 1,800,000 \\ \text{Embalaje:} & 3,000 \times 500 = 1,500,000 \\ \hline \text{Total vehículos:} & 15,300,000 \end{cases}$$

$$\text{Kerosene (7,000 mil litros):} \begin{cases} \text{Materia prima:} & 7,000 \times 500 = 3,500,000 \\ \text{Refinado:} & 7,000 \times 1,500 = 10,500,000 \\ \text{Fraccionado:} & 7,000 \times 400 = 2,800,000 \\ \text{Embalaje:} & 7,000 \times 400 = 2,800,000 \\ \hline \text{Total kerosene:} & 19,600,000 \end{cases}$$

$$\text{Total costos variables:} \quad 15,300,000 + 19,600,000 = 34,900,000$$

Gastos fijos (con el sector de aviones cerrado):

Gastos fijos por sector

Sector	Monto ($)
Refinado	5,000,000
Fraccionado	5,000,000
Embalaje vehículos	1,000,000
Embalaje kerosene	500,000
Total	11,500,000

Ganancia total:

$$52,000,000 - 34,900,000 - 11,500,000 = 5,600,000$$

Comparación de los tres escenarios:

Comparación de escenarios

Escenario	Ganancia ($)
Producción original (con aviones)	5,350,000
Sin aviones, misma producción que antes	4,400,000
Sin aviones, maximizando otros productos	5,600,000

Conclusión final: Si se cierra el sector de aviones pero se maximizan los otros productos, la empresa gana más que en cualquier otro escenario.
La clave está en usar eficientemente los recursos libres que deja de usar el combustible para aviones.

4. Determinar la cantidad óptima de producción mensual de cada producto para maximizar la ganancia de la compañía.

Planteamos un modelo de programación lineal para ver qué pasa si queremos maximizar la ganancia mensual de la compañía respetando las capacidades de los sectores disponibles.

Variables:

- C_A: miles de litros de combustible para aviones

- C_V: miles de litros de combustible para vehículos
- K: miles de litros de kerosene

Modelo:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 16{,}000\,C_A - 10{,}100\,C_A + 8{,}000\,C_V - 5{,}100\,C_V + 4{,}000\,K - 2{,}800\,K \\ \text{Sujeto a} & \begin{cases} 10\,C_A + 5\,C_V + 3\,K \leq 38{,}000 & \text{(refinado)} \\ 20\,C_A + 10\,C_V + 6\,K \leq 80{,}000 & \text{(fraccionado)} \\ 4\,C_A \leq 4{,}000 & \text{(embalaje aviones)} \\ 2\,C_V \leq 6{,}000 & \text{(embalaje vehículos)} \\ K \leq 7{,}000 & \text{(embalaje kerosene)} \\ C_A \geq 0,\ C_V \geq 0,\ K \geq 0 & \text{(no negatividad)} \end{cases} \end{array}$$

Solución usando el método del simplex:
Se resolvió el modelo mediante el método del simplex, obteniendo la siguiente solución óptima:

- $C_A = 1{,}000$ (mil litros)
- $C_V = 3{,}000$ (mil litros)
- $K = \dfrac{13{,}000}{3} \approx 4{,}333$ (mil litros)

Resultado óptimo:

$$Z_{\text{máx}} = 19{,}800{,}000$$

Ahora, a esto le restamos los gastos fijos para ver cuál sería la ganancia máxima.
Gastos fijos por proceso:

- Refinado: \$5,000,000
- Fraccionado: \$5,000,000
- Embalaje aviones: \$2,000,000
- Embalaje vehículos: \$1,000,000
- Embalaje kerosene: \$500,000

Total gastos fijos: \$13,500,000

Ganancia máxima:

$$19{,}800{,}000 - 13{,}500{,}000 = 6{,}300{,}000$$

Conclusión: Maximizando la producción de cada producto, produciendo combustible para aviones, se logra una ganancia mayor comparada con cualquiera de los 3 escenarios anteriores.

5. Indicar al director estas cantidades, el costo por 1.000 litros de cada producto (prorrateando los costos fijos) y la ganancia total de la empresa.

Las cantidades óptimas de producción mensual de cada producto y la ganancia de la compañía son las que calculamos en el ejercicio anterior, para el resto de las cosas, en primer lugar, debemos considerar cuánto tiempo de capacidad se utiliza de cada sector para producir cada producto.

Cálculo de horas totales utilizadas por cada producto:
Para calcular esto, multiplicamos la cantidad producida de cada producto por la cantidad de horas requeridas por litro en cada sector:

- Combustible para aviones:
  - Refinado: $10 \times 1{,}000 = 10{,}000$ horas
  - Fraccionado: $20 \times 1{,}000 = 20{,}000$ horas
  - Embalaje: $4 \times 1{,}000 = 4{,}000$ horas
  - **Total:** $10{,}000 + 20{,}000 + 4{,}000 = 34{,}000$ horas
- Combustible para vehículos:
  - Refinado: $5 \times 3{,}000 = 15{,}000$ horas
  - Fraccionado: $10 \times 3{,}000 = 30{,}000$ horas
  - Embalaje: $2 \times 3{,}000 = 6{,}000$ horas
  - **Total:** $15{,}000 + 30{,}000 + 6{,}000 = 51{,}000$ horas
- Kerosene:
  - Refinado: $3 \times 4{,}333{,}33 = 13{,}000$ horas
  - Fraccionado: $6 \times 4{,}333{,}33 = 26{,}000$ horas
  - Embalaje: $1 \times 4{,}333{,}33 = 4{,}333{,}33$ horas
  - **Total:** $13{,}000 + 26{,}000 + 4{,}333{,}33 = 43{,}333{,}33$ horas

Total de horas utilizadas por todos los productos: 128,333,33 horas

En segundo lugar, calculemos el prorrateo del gasto fijo de $13.500.000 según el uso de horas por producto:

$$\begin{aligned}
\text{Aviones:} \quad & \frac{34{,}000}{128{,}333{,}33} \times 13{,}500{,}000 = 3{,}612{,}000 \\
\text{Vehículos:} \quad & \frac{51{,}000}{128{,}333{,}33} \times 13{,}500{,}000 = 5{,}418{,}000 \\
\text{Kerosene:} \quad & \frac{43{,}333{,}33}{128{,}333{,}33} \times 13{,}500{,}000 = 4{,}470{,}000
\end{aligned}$$

Costo total por producto (por 1.000 litros):
Sumamos los costos variables y el gasto fijo prorrateado (dividido por los miles de litros producidos):

- Aviones: $10{,}100 + \frac{3{,}612{,}000}{1{,}000} = 10{,}100 + 3{,}612 = \$13{,}712$
- Vehículos: $5{,}100 + \frac{5{,}418{,}000}{3{,}000} = 5{,}100 + 1{,}806 = \$6{,}906$
- Kerosene: $2{,}800 + \frac{4{,}470{,}000}{4{,}333{,}33} \approx 2{,}800 + 1{,}032 = \$3{,}832$

Ganancia bruta:

$$5{,}900 \times 1{,}000 + 2{,}900 \times 3{,}000 + 1{,}200 \times 4{,}333{,}33 = 5{,}900{,}000 + 8{,}700{,}000 + 5{,}200{,}000 = \$19{,}800{,}000$$

Gastos fijos totales:

$$\$13{,}500{,}000$$

Resultado final (ganancia neta):

$$19{,}800{,}000 - 13{,}500{,}000 = \boxed{\$6{,}300{,}000}$$

6. Al escuchar esto, el gerente de producción propuso aumentar la producción contratando 500 horas extras al mes del personal del sector de fraccionado. Asesorar al director sobre esta propuesta.

El gerente de producción propone modificar la cantidad de horas disponibles mensualmente en el sector de **fraccionado**, es decir, el segundo recurso del modelo. Para evaluar si esta modificación afectará al plan óptimo actual, debemos analizar si el **término independiente** de las restricciones (vector $\vec{b}$) puede cambiar sin alterar la base óptima.

Condición para mantener la base óptima

La solución básica factible actual se obtiene al calcular:

$$x^\star = B^{-1} \cdot \vec{b}$$

Donde B^{-1} es la inversa de la matriz que contiene las columnas correspondientes a las variables básicas en la base óptima, y $\vec{b}$ es el vector de términos independientes con b_2 como valor variable. A continuación, presentamos ambas matrices:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 38,000 \\ \mathbf{b_2} \\ 4,000 \\ 6,000 \\ 7,000 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-5}{6} & \frac{-5}{6} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando el producto $x^\star = B^{-1} \cdot \vec{b}$, obtenemos:

$$x^\star = \begin{bmatrix} 0 \cdot 38,000 + 0 \cdot b_2 + \frac{1}{4} \cdot 4,000 + 0 \cdot 6,000 + 0 \cdot 7,000 \\ 0 \cdot 38,000 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot 4,000 + \frac{1}{2} \cdot 6,000 + 0 \cdot 7,000 \\ \frac{1}{3} \cdot 38,000 + 0 \cdot b_2 + \frac{-5}{6} \cdot 4,000 + \frac{-5}{6} \cdot 6,000 + 0 \cdot 7,000 \\ -2 \cdot 38000 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot 4000 + 0 \cdot 6000 + 0 \cdot 7000 \\ \frac{-1}{3} \cdot 38,000 + 0 \cdot b_2 + \frac{5}{6} \cdot 4,000 + \frac{5}{6} \cdot 6,000 + 1 \cdot 7,000 \end{bmatrix}$$

$$x^\star = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 3,000 \\ \frac{13,000}{3} \\ -76,000 + b_2 \\ \frac{8,000}{3} \end{bmatrix}$$

Para que la solución siga siendo factible, todas las componentes de $x^\star$ deben ser no negativas. Por lo tanto, la cuarta componente nos da la condición:

$$-76,000 + b_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 \geq 76,000$$

¿Conviene contratar las horas extras?

El valor sombra asociado al recurso del sector de fraccionado indica el aumento en la ganancia máxima por cada hora adicional disponible en ese sector. Si el gerente propone aumentar la disponibilidad de horas a $b_2 = 80,500$, que está dentro del rango factible (mayor o igual a 76,000), la base óptima actual permanece válida.

Sin embargo, para saber si conviene contratar esas 500 horas extras, debemos comparar el costo por hora extra con el valor sombra:

- Si el costo por hora extra es **menor** que el valor sombra, conviene contratar porque la ganancia aumentará más que el costo adicional.
- Si el costo por hora extra es **mayor** o igual que el valor sombra, no conviene, pues se pagaría más de lo que se gana.

Interpretación económica y cálculo del vector de precios duales para el sector de fraccionado

Para determinar cuánto se debería pagar como máximo por cada unidad adicional de un recurso, calculamos el **vector de precios duales** o **valores sombra** $y^\star$.

Este vector indica cuánto aumentaría la ganancia máxima si se incrementara en una unidad la disponibilidad de cada recurso, siempre que se mantenga la base óptima actual.

Matemáticamente, el vector de precios duales se calcula como:

$$y^\star = C_B \cdot B^{-1}$$

donde:
- C_B es el vector de costos o beneficios asociados a las variables básicas en la solución óptima,
- B^{-1} es la inversa de la matriz formada por las columnas básicas.

En este caso, tenemos:

$$C_B = \begin{bmatrix} 5900 & 2900 & 1200 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos el producto:

$$y^\star = C_B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 5,900 & 2,900 & 1,200 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

El resultado es:

$$y^\star = \begin{bmatrix} 400 & \boxed{0} & 475 & 450 & 0 \end{bmatrix}$$

El valor sombra para el recurso de fraccionado es entonces $\boxed{0}$.

Esto significa que agregar horas extras en el sector de fraccionado no incrementará la ganancia máxima, pues el recurso no es limitante en el plan actual.

Por lo tanto, no conviene pagar por horas extras en este sector.

Conclusión

- La base óptima no cambia siempre que la disponibilidad mensual del sector de fraccionado sea al menos **76,000** horas.
- Como la propuesta de 80,500 horas cumple esta condición, el plan óptimo actual **permanece válido**.
- **Sin embargo, como el valor sombra para este recurso es 0, no se recomienda contratar las horas extras**, ya que el plan de producción no se modifica y no se obtiene beneficio adicional.

7. Otra propuesta del gerente es contratar 1000 horas extras al mes del personal del sector de refinado. Indicar al director si es conveniente aceptar esta nueva propuesta y hasta cuánto debería pagar por cada hora extra de este sector.

El gerente de producción propone modificar la cantidad de horas disponibles mensualmente en el sector de **refinado**, es decir, el primer recurso del modelo. Para evaluar si esta modificación afectará al plan óptimo actual, analizamos si el **miembro derecho** de las restricciones (vector $\vec{b}$) puede cambiar sin alterar la base óptima.

Condición para mantener la base óptima

La solución básica óptima actual se obtiene a partir del producto:

$$x^\star = B^{-1} \cdot \vec{b}$$

donde:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 80,000 \\ 4,000 \\ 6,000 \\ 7,000 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos B^{-1} por el nuevo $\vec{b}$ con b_1 variable, y nos centramos en mantener la factibilidad (es decir, que todas las componentes de $x^\star$ sean no negativas):

$$x^\star = B^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot 4,000 = 1,000 \\ \frac{1}{2} \cdot 6,000 = 3,000 \\ \frac{1}{3}b_1 - \frac{5}{6} \cdot 4,000 - \frac{5}{6} \cdot 6,000 \\ -2b_1 + 80,000 \\ -\frac{1}{3}b_1 + \frac{5}{6} \cdot 4,000 + \frac{5}{6} \cdot 6,000 + 7,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 3,000 \\ \frac{1}{3}b_1 - 8,333.\overline{3} \\ -2b_1 + 80,000 \\ -\frac{1}{3}b_1 + 15,333.\overline{3} \end{bmatrix}$$

Condiciones de factibilidad:

- Tercera componente:
$$\frac{1}{3}b_1 - 8,333.\overline{3} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 \geq 25,000$$
- Cuarta componente:
$$-2b_1 + 80,000 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 \leq 40,000$$
- Quinta componente:
$$-\frac{1}{3}b_1 + 15,333.\overline{3} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 \leq 46,000 \quad \text{(menos restrictiva que } b_1 \leq 40,000)$$

Por lo tanto, el rango permitido para mantener la base óptima es:

$$\boxed{25,000 \leq b_1 \leq 40,000}$$

Interpretación económica y recomendación

Actualmente, el sector de refinado cuenta con $b_1 = 38,000$ horas mensuales. La propuesta es contratar 1000 horas extras, aumentando b_1 a 39000 horas.

Dado que $39,000 \in [25,000, 40,000]$, la base óptima no cambiará y la solución actual sigue siendo válida.

¿Conviene aceptar esta propuesta?

- Al estar dentro del rango de factibilidad, el plan óptimo no se altera.
- El valor sombra asociado a la restricción de refinado indica cuánto beneficio adicional se obtendría por cada hora extra contratada.
- Si el valor sombra es positivo (lo cual se deduce de la restricción no estar al límite o por la función objetivo), entonces **sí conviene contratar horas extra siempre que el costo por hora sea menor o igual al valor sombra**.
- Si el costo por hora es mayor al valor sombra, contratar horas extras no incrementará la ganancia neta.

Análisis para el sector de refinado

Al analizar el sector de **refinado** con el mismo vector $y^\star = \begin{bmatrix} \boxed{400} & 0 & 475 & 450 & 0 \end{bmatrix}$, obtenemos un valor sombra igual a $\boxed{400}$.

Esto implica que cada hora adicional en refinado aumentaría la ganancia máxima en 400 unidades monetarias, siempre que la base óptima se mantenga.

Por lo tanto, desde el punto de vista económico, conviene aceptar la propuesta de contratar horas extras en refinado, y el máximo que debería pagarse por cada hora extra es justamente el valor sombra, es decir, 400 unidades monetarias por hora.

Conclusión: Para el sector de refinado el valor sombra es positivo, lo que indica que vale la pena ampliar la disponibilidad pagando hasta ese valor sombra por hora adicional.

8. Si el director decide pagar por hora extra la mitad del valor máximo indicado en el punto anterior, ¿en cuánto aumentaría la ganancia mensual de la compañía?

Para determinar cómo se vería afectada la ganancia mensual al contratar horas extra, utilizamos el **valor sombra** del recurso en cuestión. Recordemos que el valor sombra representa cuánto aumentaría la ganancia si se incrementa en una unidad la disponibilidad del recurso, manteniendo constante la base óptima.

La fórmula general para calcular el aumento en la ganancia es:

$$\text{Aumento en la ganancia} = (\text{Valor sombra} - \text{Costo real por unidad}) \times \text{Cantidad adicional}$$

Aplicando esta fórmula al caso del sector **refinado**, tenemos:

- Valor sombra del recurso refinado: 400
- Costo real por hora extra: 200
- Cantidad de horas extra contratadas: 1000

Entonces:

$$\text{Aumento en la ganancia} = (400 - 200) \times 1000 = 200 \times 1000 = \boxed{200{,}000}$$

Conclusión

Si la empresa decide contratar **1000 horas extra en el sector refinado** a un costo de **200 por hora**, obtendría un **aumento neto en la ganancia mensual de 200.000 unidades monetarias**. Esto se debe a que cada hora extra aporta un beneficio marginal mayor al costo que representa.

9. Por otro lado, el gerente de compras propone cambiar algunos proveedores, lo que permitiría bajar el costo de la materia prima del aceite para vehículos de \$1000 a \$800 por cada 1000 litros procesados. ¿Cambiaría el plan de producción óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.

Si se modifica el precio de la materia prima del aceite para vehículos, estaríamos modificando el coeficiente que multiplica a la variable C_V (producción de aceite para vehículos) en la función objetivo. Para determinar si el plan de producción óptimo se ve afectado, vamos a calcular el **rango de valores** que puede tomar este coeficiente sin que cambie la base óptima.

Interpretación del coeficiente

El coeficiente asociado a C_V en la función objetivo está dado por:

$$\text{Precio de venta} - \text{Costo de materia prima} - \text{Costo de refinado} - \text{Costo de fraccionado} - \text{Costo de embalaje}$$

En este caso, se propone modificar el **costo de materia prima**, por lo tanto, ese será nuestro valor variable, al que denotaremos como c_2.

El coeficiente de C_V en la función objetivo se convierte entonces en:

$$8,000 - (c_2 + 4,100) = 3,900 - c_2$$

Condición para que la base no cambie

Para que la base óptima actual se mantenga, el **precio reducido** asociado a una variable no básica debe ser menor o igual a cero. Es decir:

$$\text{Precio reducido} = \vec{c}_N - \vec{c}_B B^{-1} A_N \leq \vec{0}$$

donde:
- C_N es el vector de costos o beneficios asociados a las variables no básicas en la solución óptima
- A_N es la matriz formada por las columnas no básicas.

En este caso, estamos evaluando el cambio en el coeficiente de la variable C_V, por lo tanto:

- $\vec{c}_N = (0,\ 0,\ 0)$
- $\vec{c}_B = (5900,\ 3900 - c_2,\ 1200,\ 0,\ 0)$
- $$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}$$
- $$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando:

$$\vec{c}_N - \vec{c}_B B^{-1} A_N = \left(-400,\ -475,\ \frac{c_2}{2} - 950 \right) \leq (0,\ 0,\ 0)$$

Resolviendo las desigualdades

Despejamos c_2 en cada componente:

$$\frac{c_2}{2} - 950 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 \leq 1900$$

Tomando los valores compatibles en las tres desigualdades, obtenemos el rango:

$$\boxed{c_2 \leq 1,900}$$

Conclusión

El costo de materia prima del aceite de vehículos, c_2, debe ser menor o igual a \$1900 para que se mantenga la base óptima actual. Dado que el gerente propone reducir este costo a \$800, concluimos que:

El plan óptimo de producción no cambiaría si se implementa esta modificación.

10. **Y si se modificara el proceso de refinado de kerosene para bajar de \$1500 a \$900 por cada 1000 litros procesados, ¿cambiaría el plan óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.**

Si se modifica el precio del proceso de refinado del kerosene, estaríamos modificando el coeficiente que multiplica a la variable K (producción de kerosene) en la función objetivo. Para determinar si el plan de producción óptimo se ve afectado, vamos a calcular el **rango de valores** que puede tomar este coeficiente sin que cambie la base óptima.

Interpretación del coeficiente

El coeficiente asociado a K en la función objetivo está dado por:

$$\text{Precio de venta} - \text{Costo de materia prima} - \text{Costo de refinado} - \text{Costo de fraccionado} - \text{Costo de embalaje}$$

En este caso, se propone modificar el **costo de refinado**, por lo tanto, ese será nuestro valor variable, al que denotaremos como c_3.

El coeficiente de K en la función objetivo se convierte entonces en:

$$4,000 - (c_3 + 1,300) = 2,700 - c_3$$

Condición para que la base no cambie

Para que la base óptima actual se mantenga, el **precio reducido** asociado a una variable no básica debe ser menor o igual a cero. Es decir:

$$\text{Precio reducido} = \vec{c}_N - \vec{c}_B B^{-1} A_N \leq \vec{0}$$

En este caso, estamos evaluando el cambio en el coeficiente de la variable K, por lo tanto:

- $\vec{c}_N = (0,\ 0,\ 0)$
- $\vec{c}_B = (5900,\ 2900,\ 2700 - c_3,\ 0,\ 0)$
- $$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}$$
- $$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando:

$$\vec{c}_N - \vec{c}_B B^{-1} A_N = \left(\frac{c_3}{3} - 900,\ 775 - \frac{5c_3}{6},\ 800 - \frac{5c_3}{6} \right) \leq (0,\ 0,\ 0)$$

Resolviendo las desigualdades

Despejamos c_3 en cada componente:

$$\begin{aligned} \frac{c_3}{3} - 900 \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad c_3 \leq 2,700 \\ 775 - \frac{5c_3}{6} \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad c_3 \geq 930 \\ 800 - \frac{5c_3}{6} \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad c_3 \geq 960 \end{aligned}$$

Tomando los valores compatibles en las tres desigualdades, obtenemos el rango:

$$\boxed{960 \leq c_3 \leq 2,700}$$

Conclusión

El costo de refinado del kerosene, c_3, debe estar entre \$960 y \$2,700 para que se mantenga la base óptima actual. Dado que el gerente propone reducir este costo a \$900 (lo cual no pertenece al intervalo), concluimos que:

El plan óptimo de producción cambiaría si se implementa esta modificación.

donde la nueva planificación óptima quedaría:

Resultado óptimo del problema de programación lineal:

- $C_A = 1,000$
- $C_V = 1,400$
- $K = 7,000$

El valor máximo de la función objetivo es:

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{máx}} = 22{,}560{,}000}$$

11. La empresa está evaluando comenzar a procesar gasoil. El tiempo requerido para refinar 1000 litros de gasoil es de 4 horas, mientras que para fraccionarlos son necesarias 8 horas y para su embalaje 1.5 horas. El costo de la materia prima para mil litros de gasoil es de \$4000, el de refinado de \$4100, el de fraccionado de \$1000. El embalaje de gasoil lo realizaría el sector de embalaje de kerosene. ¿Cuál debería ser el menor precio de venta de los 1000 litros de gasoil para que su producción sea conveniente para la empresa?

Se propone incorporar un nuevo producto: **gasoil**, cuya variable de decisión será G, representando los miles de litros producidos mensualmente.

Esto modifica las restricciones del modelo original de la siguiente forma:

$$\text{Sujeto a} \quad \begin{cases} 10C_A + 5C_V + 3K + 4G \leq 38{,}000 & \text{(Refinado)} \\ 20C_A + 10C_V + 6K + 8G \leq 80{,}000 & \text{(Fraccionado)} \\ 4C_A \leq 4{,}000 & \text{(Embalaje de aviones)} \\ 2C_V \leq 6{,}000 & \text{(Embalaje de vehículos)} \\ K + 1{,}5G \leq 7{,}000 & \text{(Embalaje de kerosene)} \\ C_A \geq 0,\ C_V \geq 0,\ K \geq 0,\ G \geq 0 & \text{(No negatividad)} \end{cases}$$

Cálculo del precio mínimo para que el gasoil sea rentable

Para determinar cuál debería ser el menor precio de venta de los 1000 litros de gasoil para que su producción sea conveniente para la empresa, debemos calcular el **precio reducido** asociado a la variable G.

Sea c_4 el coeficiente que multiplicaría a G en la función objetivo, dado por:

$$c_4 = \text{precio de venta} - \text{costos variables}$$

Los costos variables del gasoil se estiman en:

Materia prima: \$4000, Refinado: \$4100, Fraccionado: \$1000, Embalaje: \$400 $\Rightarrow$ Costo total: \$9, 500

Por lo tanto:

$$c_4 = V - 9,500$$

Donde V es el precio de venta.

Asumimos que G entra como variable no básica. Para que esto ocurra, su **precio reducido debe ser positivo**:

$$c_4 - \vec{c}_B B^{-1} A_4 > 0$$

En esta situación:

- $y^* = \vec{c}_B B^{-1} = (4000,\ 0,\ 475,\ 450,\ 0)$
- $A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ (columna correspondiente a G en la matriz de restricciones)

Entonces:

$$c_4 - (4000,\ 0,\ 475,\ 450,\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = c_4 - 1,600 \Rightarrow c_4 > 1,600$$

Recordando que $c_4 = V - 9,500$:

$$V - 9,500 > 1,600 \quad \Rightarrow \quad V > 11,100$$

Conclusión

El precio de venta de los 1000 litros de gasoil debe superar los \$11,100 para que su producción sea conveniente para la empresa.

12. La empresa va a agregar un control de calidad a todos sus productos. Controlar los 1000 litros de combustible para aviones requiere 5 horas, los de combustible para vehículos 3 horas y 2 horas los 1000 litros de kerosene. Si el sector de control de calidad dispone de 20.000 horas mensuales, ¿cambiaría el plan óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.

Se va a agregar una nueva restricción de la siguiente forma:

$$5 \cdot C_A + 3 \cdot C_V + 2 \cdot K \leq 20{,}000$$

Esta restricción introduce una nueva fila en el sistema, y una nueva variable de holgura asociada. Por lo tanto, la nueva matriz B quedará formada por las columnas de las variables básicas, que en este caso son:

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su inversa es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se evalúa ahora $B^{-1} \cdot b$, con el nuevo vector b actualizado:

$$b = \begin{pmatrix} 38,000 \\ 80,000 \\ 4,000 \\ 6,000 \\ 7,000 \\ 20,000 \end{pmatrix}$$

Realizando el producto matricial:

$$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 3,000 \\ 4,334 \\ 4,000 \\ 2,666 \\ -2,667 \end{pmatrix}$$

Observamos que la última componente del vector $B^{-1}b$ es negativa. Esto significa que la nueva solución básica factible deja de serlo. En consecuencia, **el plan óptimo cambiaría** al agregar esta restricción. Por esta razón buscamos la nueva planificación óptima haciendo simplex dual con la ayuda de Python y obtuvimos los siguientes resultados.

```
Nueva planificación óptima:
CA = 1000.00 mil litros
CV = 3000.00 mil litros
K  = 3000.00 mil litros
Ganancia máxima = $18200000.00
```

Figura 1: Planificación óptima haciendo simplex dual