

1. Considere que usted tiene a su disposición una iteración de punto fijo, $r = g(r)$, divergente, es decir, $|g'(r)| = S > 1$. Proponga un algoritmo que permita encontrar el punto fijo r a partir de la iteración de punto fijo divergente.
2. Considere la siguiente función dependiente de la variable temporal t y la variable espacial x ,

$$f(t, x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

De la función anterior nos interesa obtener los valores de t y x en donde se anula la función. En particular se debe considerar que las funciones $a(t)$, $b(t)$, y $c(t)$ son parámetros conocidos. Para el estudio de los ceros de la función $f(t, x)$, se analizará para distintos casos que se listan a continuación:

- (**Caso 1**) $a(t) = 0$, $b(t) = 0$, y $c(t) = 0$. En este caso $f(t, x)$ es la función nula, por lo que es 0 en todo el dominio.
- (**Caso 2**) $a(t) = 0$, $b(t) = 0$, y $c(t) \neq 0$. En este caso $f(t, x)$ es distinto de 0 en todo el dominio, por lo tanto nunca se anula $f(t, x)$.
- (**Caso 3**) $a(t) = 0$ y $b(t) \neq 0$. En este caso se obtendrá para cada tiempo t un solo valor x , que asegura que $f(t, x)$ sea 0.
- (**Caso 4**) $a(t) \neq 0$. En este caso para cada tiempo t existirán 2 valores de x para los cuales la función $f(t, x)$ sea 0.

Los casos 1, 2, y 3 no entregan mayor dificultad de análisis e implementación, por lo cual serán omitidos. Sin embargo el caso 4 sí es mucho más interesante de estudiar en detalle. Responda las siguientes preguntas considerando el caso 4 y también, por simplicidad, considere que las raíces serán reales.

- (a) 🚧 Explique cómo puede obtener, para cada t , las 2 raíces de $f(t, x)$, asegurando que la posible pérdida de importancia no sea catastrófica.
- (b) 🧱 Implemente el **algoritmo propuesto** y considerando que solo puede utilizar las operaciones fundamentales: suma, resta, multiplicación y división. Además está permitido utilizar las siguientes funciones de NumPy `np.sqrt`, `np.power` y `np.exp`. Su implementación debe recibir t , $a(t)$, $b(t)$, y $c(t)$ como *inputs* y retornar las raíces en un *NumPy Array* unidimensional con 2 componentes, donde la primera y segunda componente debe incluir la primera y segunda raíz respectivamente.
- (c) 🧱 Entregue las soluciones obtenidas para $t = 10^5$, $a(t) = t$, $b(t) = t^5$, $c(t) = -1 + \exp(-t)$. Entregue como respuesta el logaritmo en base 10 del valor absoluto de las raíces obtenidas con 5 decimales.