Ejercicio en clases
Scientific Computing Team - Semana - 08

1. Considere los siguientes datos: $(0,1)$, $(1,2)$, y $(3,4)$, donde la primera componentes del par ordenado corresponde a la variable x y la segunda a la variable y. Construya el polinomio interpolador $y = p(x)$ con cada algoritmo estudiado, es decir, con la Matriz de Vandermonde, interpolación de Lagrange e interpolación Baricéntrica.

2. El primer algoritmo que tradicionalmente se discute cuando se estudia interpolación polinomial en una variable utiliza la matriz de Vandermonde y rápidamente se llega a la conclusión que la matriz es **mal condicionada**, por lo cual es poco recomendable trabajar directamente con esta matriz utilizando aritmética de punto flotante. El segundo algoritmo que se tradicionalmente estudia es la Interpolación de Lagrange y luego, en programas avanzados, se estudia Interpolación Baricéntrica, todos los algoritmos son capaces de encontrar el polinomio interpolador en cuestión.

Considere el problema de interpolar 3 puntos: (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), donde $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ y $x_2 \neq x_3$. Si se utiliza la matriz de Vandermonde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}}_{V_3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde a, b y c, son los coeficientes del polinomio interpolador $p_3(x) = a + b\,x + c\,x^2$. Un dato importante sobre la matriz de Vandermonde cuando interpola n puntos es que su determinante puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Lo que indica que el determinante es no-nulo siempre y cuando $x_i \neq x_j\ \forall i \neq j$. En nuestro caso particular nosotros tenemos $\det(V_3) = \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_j - x_i) \neq 0$. Ahora, dado que sabemos que V_3 no es singular, podemos estudiar la inversa de la matriz asociada, i.e. V_3^{-1}.

(a) Construya la interpolación de Lagrange o Baricéntrica para obtener el polinomio interpolador de (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3).

(b) Explique cómo puede usted obtener V_3^{-1} a partir de las interpolaciones anteriormente encontradas.

(c) Obtenga V_3^{-1} utilizando el procedimiento descrito anteriormente. Note que V_3^{-1} satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{V_3^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Donde $\left(V_3^{-1}\right)_{ij} = b_{ij}$ para $i, j = 1, 2, 3$, i.e. b_{ij} son los coeficientes de la matriz V_3^{-1}.

3. Una de las funciones más interesantes dentro del mundo de la Computación Científica es la función Exponencial, $\exp(x)$, y se vuelve aún más interesante cuando su argumento es un número complejo $z = x + \mathrm{i}\,y$, donde $\mathrm{i}^2 = -1$, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Por simplicidad considere solo el dominio $\Omega = \{z = x + \mathrm{i}\,y \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, x \in \mathbb{R} \text{ and } y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Obtenga la parte real e imaginaria de $\exp(z)$, donde $z = x + \mathrm{i}\,y$. Es decir, obtenga $\mathrm{Re}(\exp(z))$ y $\mathrm{Im}(\exp(z))$, respectivamente. Hint: Do you recall the Euler's formula $\exp(\mathrm{i}\,\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)$? It may be helpful, but please read carefully before you may apply it.

(b) Explique cómo se puede utilizar interpolación polinomial para poder obtener la parte real e imaginaria de $\exp(z)$. Es decir, para cada $z = x + \mathrm{i}\,y$ usted debe entregar el valor de $\mathrm{Re}(\exp(z))$ e $\mathrm{Im}(\exp(z))$ para $z \in \Omega$. Por simplicidad considere x e y es un input.

Nota : No construya el interpolador, solo explique cómo lo construirá. Hint: Recall you only know how to do 1D interpolation, so please use it wisely.

(c) Explique claramente cómo puede asegurar que cada componente de su algoritmo de interpolación tendrá un error menor a ε. Determine todas las cotas que necesite para obtener todo el puntaje.