UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

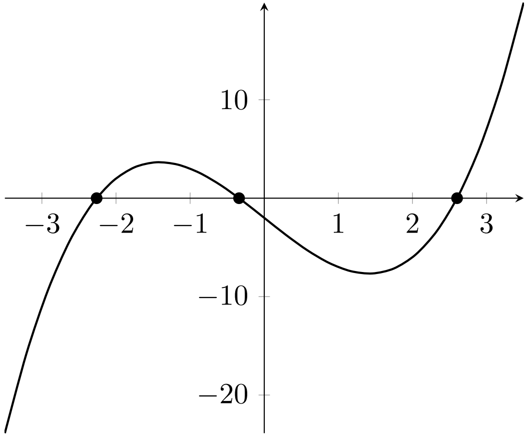
INF 285 - Computación Científica
Ingeniería Civil Informática

03: Raíces en 1D (I)

Raíces en 1D

Definición 1

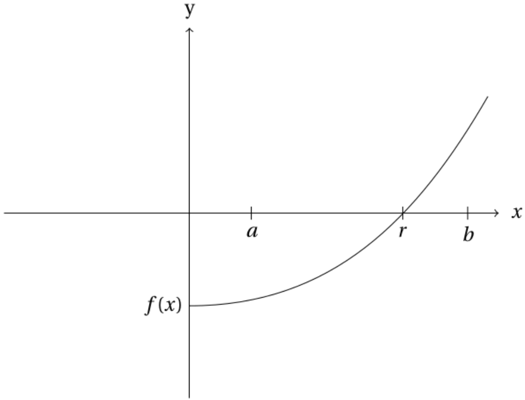
La función $f(x)$ tiene una raíz en $x = r$ si $f(r) = 0$.



Método de la Bisección

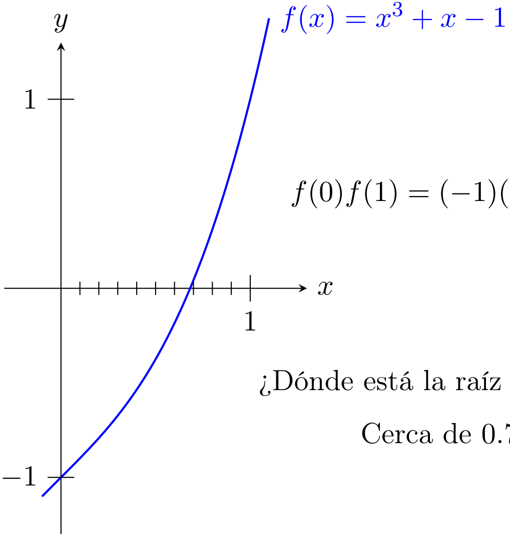
Teorema 1

Sea f una función continua en $[a, b]$, satisfaciendo $f(a)\,f(b) < 0$. Entonces f tiene una raíz entre a y b; es decir, existe un número r que satisface $a < r < b$ y $f(r) = 0$.



Método de la Bisección

Ejemplo



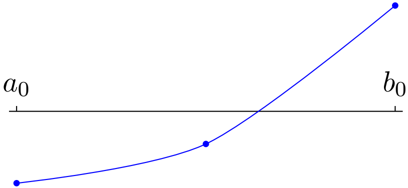
$$f(0)f(1) = (-1)(1) < 0$$

¿Dónde está la raíz de $f(x)$?

Cerca de 0.7

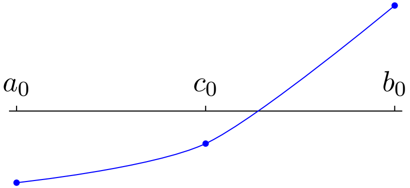
Método de la Bisección

Algoritmo



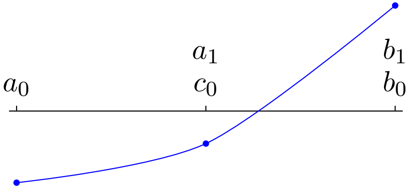
Método de la Bisección

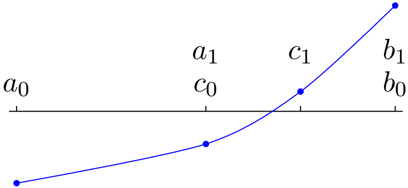
Algoritmo



Método de la Bisección

Algoritmo

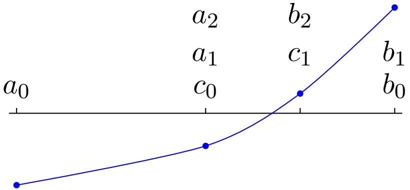


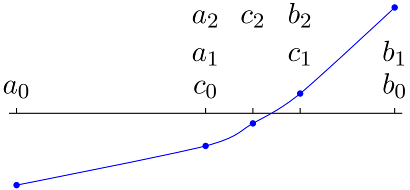


a_1
c_1
b_1
a_0
c_0
b_0

Método de la Bisección

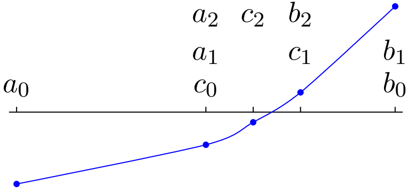
Algoritmo




a_2
c_2
b_2
a_1
c_1
b_1
a_0
c_0
b_0

Método de la Bisección

Algoritmo



Algoritmo 1 Bisection

```
procedure Bis(f(x), a, b, TOL)
    while (b − a)/2 > TOL do
        c = (a + b)/2
        if f(c) = 0 then
            STOP
        if f(a) f(c) < 0 then
            b = c
        else
            a = c
    return r̃ = (a + b)/2
```

Método de la Bisección

Ejemplo 1

Encontrar una raíz de la función $f(x) = x^3 + x - 1$ *utilizando el método de la bisección en el intervalo* $[0, 1]$ *con 10 iteraciones.*

Método de la Bisección

¿Cuán preciso y cuán rápido?

$[a,b] \Longrightarrow n \Longrightarrow [a_n, b_n] \to$ longitud $(b-a)/2^n$.

Punto medio $x_c = (a_n + b_n)/2$, mejor aproximación para r.

$$\text{Error} = |x_c - r| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

$$\text{Evaluaciones} = n + 2$$

Método de la Bisección

Definición 2

Una solución es **correcta con** p **decimales** *si el error es menor que* 0.5×10^{-p}.

Método de la Bisección

Definición 2

Una solución es **correcta con p decimales** *si el error es menor que* 0.5×10^{-p}.

Ejemplo 2

Utilizar el método de la bisección para encontrar una raíz de $f(x) = x^3 + x - 1$ *en el intervalo* $[0, 1]$ *con* 6 *decimales de precisión.*

Ejercicio 1

Considere la ecuación $x^4 = x^3 + 10$

(a) Encuentre un intervalo $[a, b]$ *de longitud* 1 *en el cual la ecuación tiene una solución.*

(b) Comenzando con $[a, b]$*, ¿Cuántas iteraciones son necesarias para calcular la solución con* 10 *decimales de precisión?*

Método de Punto Fijo

Secuencia de números producida al evaluar una función varias veces.

La secuencia converge a una cantidad r.

Esta cantidad se denomina **punto fijo**.

Definición 3

*El número real r es un **punto fijo** de la función g si $g(r) = r$.*

$g(x) = \cos x$, $r \approx 0.7390851332$

$g(x) = x^3$, $r = ?$

La ecuación debe ser escrita de la forma $g(x) = x$.

Luego se aplica el método de punto fijo, comenzando de un punto inicial x_0.

1. $x_0 =$ punto inicial.
2. $x_{i+1} = g(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, ...,$ entonces

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) \\
x_2 &= g(x_1) \\
x_3 &= g(x_2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$g(r) = g\left(\lim_{i\to\infty} x_i\right) = \lim_{i\to\infty} g(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = r$$

Método de Punto Fijo

¿Cada ecuación $f(x) = 0$ puede ser convertida a un problema de punto fijo $g(x) = x$?

Ejemplo:

$$x^3 + x - 1 = 0$$

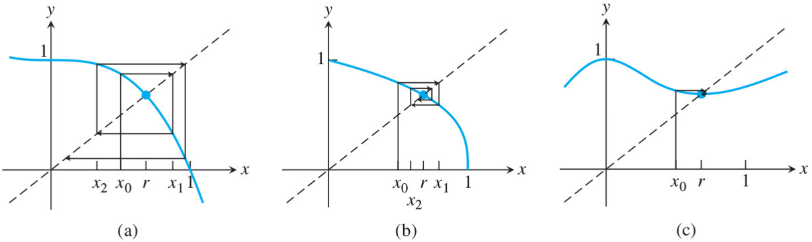
Reescribiendo

$$x = 1 - x^3$$

y podemos definir $g(x) = 1 - x^3$.

¿Es posible obtener otras formas?

Método de Punto Fijo



$(a)\ 1 - x^3$ $\qquad$ $(b)\ \sqrt[3]{x-1}$ $\qquad$ $(c)\ \dfrac{1+2x^3}{1+3x^2}$