Definizione di matrice ortogonale

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si dice che la matrice A è ortogonale se A è invertibile e l'inversa coincide con la trasposta: $A^T = A^{-1}$.

Come conseguenza, dalla definizione di inversa, si ha che

$$A \text{ è ortogonale} \Leftrightarrow AA^T = I$$

Infatti se A è ortogonale, segue che $A^T = A^{-1}$. Dunque $I = AA^{-1} = AA^T$. Viceversa se $AA^T = I$, per l'unicità dell'inversa segue che $A^T = A^{-1}$ e dunque A è invertibile con inversa uguale alla trasposta.

Osservazioni

- A è ortogonale $\Leftrightarrow A^T A = I$
  Segue dalla definizione di matrice non singolare.

- A è ortogonale $\Leftrightarrow A^T$ è ortogonale
  Segue dall'unicità dell'inversa.

- Se A è ortogonale, $\det(A) = +1$ o $\det(A) = -1$ (il viceversa non è vero)
  Dal teorema di Binet e dalle proprietà del determinante:

$$1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$$

  Da cui $\det(A) = \pm 1$.

- Se A è ortogonale, il cofattore $A_{ij} = a_{ij}$ o $A_{ij} = -a_{ij}$ (il viceversa non è vero)
  Segue da $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)^T = A^T$. Siccome $\det(A) = \pm 1$, $A_{ij} = \pm a_{ij}$.

Teorema

Sia A una matrice di ordine n.
Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. A è ortogonale
2. $< x, y >=< Ax, Ay >$, per ogni $x, y \in R^n$ (A conserva il prodotto scalare)
3. $\|x\| = \|Ax\|$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (A conserva la norma)
4. $\|x - y\| = \|Ax - Ay\|$, per ogni $x, y \in R^n$ (A conserva le distanze)
5. Se $\|x\| = 1$, allora $\|Ax\| = 1$ (A conserva la norma dei vettori unità)

Dimostrazione.
(1)⇒(2): $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y = x^T I y = x^T A^T A y =< Ax, Ay >$
(2)⇒(3): $\|x\|^2 =< x, x >=< Ax, Ax >= \|Ax\|^2$
(3)⇒(4): $\|x - y\| = \|A(x - y)\| = \|Ax - Ay\|$
(4)⇒(3): basta prendere $y = 0$.
(3)⇒(1): Da $\|x\|^2 =< x, x >=< Ax, Ax >= x^T A^T Ax$, segue $A^T A = I$ e dunque A è ortogonale.
Inoltre si ha:
(1)⇒(5): infatti se A è ortogonale, vale (3) e dunque (5).
(5)⇒(1): evidente.

Teorema

Se A e B sono matrici ortogonali di ordine n, allora anche AB è ortogonale.

Dimostrazione.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$$

Da cui segue che AB è ortogonale.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

si può vedere che essa è ortogonale. Infatti si può mostrate che $AA^T = I_2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente $A^T A = I_2$.

Esempio II

Si può provare che le matrici ortogonali in $\mathbb{R}^{2x2}$ sono tutte e sole quelle date da

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- Prima di tutto, verifichiamo che A_θ è ortogonale:

$$A_\theta A_\theta^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Analogamente per B_θ.

- Viceversa sia $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice ortogonale. Poichè $M^T M = I_2$, segue che deve essere

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ b^2 + d^2 &= 1 \end{aligned}$$

Esempio III

La prima e la terza equazione ci permettono di affermare che esistono $\theta, \psi \in [0, 2\pi]$ tali che $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, $b = \sin\psi$, $d = \cos\psi$. Sostituendo nella seconda equazione si ha:

$$\cos\theta \sin\psi + \sin\theta \cos\psi = \sin(\theta + \psi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta + \psi = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto $\psi = k\pi - \theta$, $k \in \mathbb{Z}$. Allora la matrice M vale

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin(k\pi - \theta) \\ \sin\theta & \cos(k\pi - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -(-1)^k \sin\theta \\ \sin\theta & (-1)^k \cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui si ottengono le matrici A_θ e B_θ, supponendo alternativamente k pari e dispari.

Teorema

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. A è ortogonale
2. le colonne (righe) di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
3. fissato uno spazio euclideo reale V di dimensione n esistono basi ortonormali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V tali che $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V)$

Dimostrazione.
(1)$\Leftrightarrow$(2): segue dalla uguaglianza $A^T A = I_n$ oppure $AA^T = I_n$.
(2)$\Rightarrow$(3): sia $i_V : V \rightarrow V$. Fissata una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{v'_1, ..., v'_n\}$ di V, prendiamo come $\mathcal{B}$ l'insieme dei vettori $\{v_1, .., v_n\}$ di V le cui coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ sono le colonne di A:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{1,1}v'_1 + a_{2,1}v'_2 + \ldots + a_{n,1}v'_n \\ v_2 &= a_{1,2}v'_1 + a_{2,2}v'_2 + \ldots + a_{n,2}v'_n \\ &\ldots \\ v_n &= a_{1,n}v'_1 + a_{2,n}v'_2 + \ldots + a_{n,n}v'_n \end{aligned}$$

Chiaramente $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(i_V) = A$ e la base $\mathcal{B}$ è ortonormale poichè le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
(3)$\Rightarrow$(2): l'ortogonalità delle basi in V implica l'ortogonalità delle coordinate rispetto alle basi in $\mathbb{R}^n$.

Teorema

1. Se λ è autovalore reale di una matrice ortogonale A, allora $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.
2. Se v_1 e v_2 sono autovettori della matrice ortogonale A associati ad autovalori distinti reali, $v_1 \perp v_2$.

Dimostrazione.

1. Sia v autovettore di A relativo all'autovalore λ. Allora $Av = \lambda v$ e passando alle norme, vale
$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$
Poichè A è ortogonale, segue $\|Av\| = \|v\|$ e dunque sottraendo membro a membro segue
$$\|v\| = |\lambda|\|v\| \Rightarrow (1 - |\lambda|)\|v\| = 0$$
Poichè $v \neq 0$, segue $|\lambda| = 1$ e quindi se λ è reale, $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

2. Se v_1 e v_2 sono autovettori della matrice ortogonale A associati ad autovalori reali distinti, risulta

$$< Av_1, Av_2 >=< \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 >= \lambda_1\lambda_2 < v_1, v_2 >$$

Poichè $< Av_1, Av_2 >=< v_1, v_2 >$, e $\lambda_1\lambda_2 = -1$ (gli autovalori sono distinti), segue

$$< v_1, v_2 >= - < v_1, v_2 >$$

Pertanto $< v_1, v_2 >= 0$.

Osservazione
Le soluzioni dell'equazione caratteristica di una matrice ortogonale possono anche essere numeri complessi, ma in ogni caso $|\lambda| = 1$.
Per esempio, se si considera la matrice associata a $f(x, y) = (y, -x)$, allora

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Le radici sono $\pm i$.

Osservazione

Si determinino $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile.

L'equazione caratteristica è :

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

Il discriminante dell'equazione di secondo grado vale

$$(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

che è sempre non negativo.

- Se $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$, allora ci sono due soluzioni reali coincidenti e pertanto A ha un autovalore reale λ con **molteplicità algebrica 2**. In questo caso, siccome $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$, segue $b = 0$ e $a = c$. Pertanto $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ è già una matrice diagonale con autovalore $\lambda = a$. L'autospazio ha dimensione 2; infatti può essere generato dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

- Se $(a-c)^2 + 4b^2 > 0$, allora ci sono due soluzioni reali distinte, ciascuna **con molteplicità algebrica 1** e quindi la matrice è diagonalizzabile (I criterio di diagonalizzazione); se v_1 e v_2 sono autovettori (che possono essere scelti come versori) associati ai due autovalori distinti λ_1 e λ_2, allora essi sono tali che $< v_1, v_2 >= 0$.
  In altre parole, la matrice che diagonalizza la A è ortogonale.
  Infatti si ha

  $$\begin{aligned} < v_1, Av_2 > &= \lambda_2 < v_1, v_2 > \\ < Av_1, v_2 > &= \lambda_1 < v_1, v_2 > \end{aligned}$$

  Osservando che $< v_1, Av_2 >= v_1^T A v_2 = v_1^T A^T v_2 =< Av_1, v_2 >$, segue che

  $$0 = (\lambda_2 - \lambda_1) < v_1, v_2 >= 0$$

  Siccome $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue $< v_1, v_2 >= 0$.

Pertanto tutte le matrici simmetriche di ordine 2 sono diagonalizzabili in $\mathbb{R}$ mediante una matrice ortogonale.

Più in generale si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema spettrale

Se A è una matrice reale simmetrica di ordine n, allora esiste una matrice ortogonale U che la diagonalizza, ossia $U^T AU = D$, ove D è la matrice diagonale degli autovalori reali. Equivalentemente $A = UDU^T$ e U è la matrice degli autovettori di A.
Tali autovettori formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
Se $U = (U^1, ..., U^n)$, allora

$$A = (U^1, ..., U^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & \lambda_i & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {U^1}^T \\ ... \\ {U^n}^T \end{pmatrix} = \lambda_1 U^1 {U^1}^T + ... + \lambda_n U^n {U^n}^T$$

Infatti, dalla decomposizione spettrale di una matrice simmetrica, si ha

$$A = UDU^{-1} \Leftrightarrow A = A^T = U^{-T} DU^T \Leftrightarrow U^{-1} = U^T$$

Osservazione. Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili, ossia ammettono decomposizione spettrale e sono diagonalizzabili mediante una matrice ortogonale.
Pertanto se A è simmetrica, si ha che

- tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica sono numeri reali
- per ogni autovalore λ di A, molteplicità algebrica e geometrica coincidono.

Costruzione della matrice U

- Si trovano gli autovalori e gli autospazi di A.
- Si determina una base ortonormale di ogni autospazio, eventualmente applicando il procedimento di Gram-Schmidt e ortonormalizzando gli autovettori.
- Si uniscono le basi ortonormali dei singoli autospazi e si ottiene una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A
- La matrice U che ha per colonne gli elementi della base è quella che diagonalizza A.

Sia dato l'operatore $f((x,y,z)^T) = (7x+y+z, x+7y+z, x+y+7z)^T$.

1. Si verifica che la matrice associata all'operatore rispetto alla base canonica è simmetrica:
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$
Poichè A è simmetrica, l'operatore è diagonalizzabile.
2. Si può trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ cercando gli autovettori di f. Si determinano gli autovalori di A:

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-7 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-7 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-7 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-7 & -\lambda+6 \\ -1 & -1 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-7 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-7 & -(\lambda-6) \\ -2 & \lambda-8 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (\lambda-6)((\lambda-7)(\lambda-8)-2) = (\lambda-6)\underbrace{(\lambda^2-15\lambda+54)}_{(\lambda-6)(\lambda-9)} = \\
&= (\lambda-6)^2(\lambda-9)
\end{aligned}$$

Esempio II

Pertanto $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 9$ sono gli autovalori di A. La molteplicità algebrica di λ_1 è 2, quella di λ_2 è 1.
Si determinano gli autospazi:

$$
\begin{aligned}
V_6 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \{(x, y, -x - y)^T\} = \\
&= [(1, 0, -1)^T, (0, 1, -1)^T] \\
V_9 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0; -x + 2y - z = 0\} = \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\} = \{(x, x, x)^T\} = [(1, 1, 1)^T]
\end{aligned}
$$

Si osserva che gli elementi di V_6 e di V_9 sono ortogonali tra loro:

$$
\begin{aligned}
(1, 0, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
(0, 1, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned}
$$

Tuttavia, pur essendo l'insieme $\{v_1 = (1, 0, -1)^T, v_2 = (0, 1, -1)^T\}$ una base di V_6, non è una base ortogonale.

Per ottenere una base ortogonale, si usa il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 = (1,0,-1)^T \\ v_2' &= v_2 - \frac{< v_2, v_1' >}{< v_1', v_1' >} v_1' = (0,1,-1)^T - \frac{1}{2}(1,0,-1)^T = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)^T \end{aligned}$$

Pertanto $\left\{(1,0,-1)^T, \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)^T\right\}$ è una base ortogonale di V_6.
Ovviamente $(1,1,1)^T$ è una base ortogonale di V_9.
Pertanto $\{(1,0,-1)^T, \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)^T, (1,1,1)^T\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.
Basta normalizzare i vettori per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T \right\}$$

3. Verifichiamo che la matrice associata a f rispetto alla base è diagonale $(f((x,y,z)^T) = (7x+y+z, x+7y+z, x+y+7z)^T)$:

$$\begin{aligned}
f(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T) &= \left(\frac{6}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^T = 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T \\
f(\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T) &= \left(-\frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{12}{\sqrt{6}}, -\frac{6}{\sqrt{6}}\right)^T = 6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T \\
f(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T) &= \left(\frac{9}{\sqrt{3}}, \frac{9}{\sqrt{3}}, \frac{9}{\sqrt{3}}\right)^T = 9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T
\end{aligned}$$

Pertanto

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

La matrice che rende la matrice A diagonale è data da

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Pertanto $U^T A U = D$ o $A = U D U^T$.

Esempio V

$$
\begin{aligned}
A &= \lambda_1 U^1 (U^1)^T + \lambda_2 U^2 (U^2)^T + \lambda_3 U^3 (U^3)^T = \\
&= 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \\
&+ 6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} + \\
&+ 9 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Forma quadratica

Sia $A \in \mathcal{M}_n(R)$ una matrice **simmetrica**. Si dice **forma quadratica** associata ad A la funzione

$$\begin{aligned} q: \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x \to x^T A x = < x, Ax > \end{aligned}$$

ossia tale che, pensando a x come un vettore colonna $n \times 1$, $q(x) = x^T A x$.

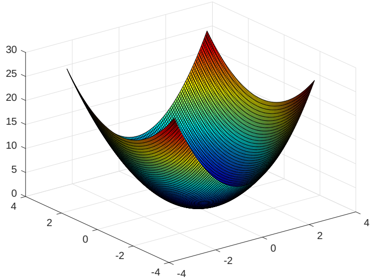
Esempio.
Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

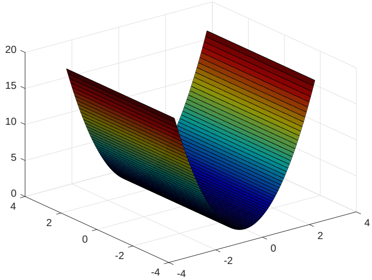
Allora la forma quadratica associata è data da

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^T A x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

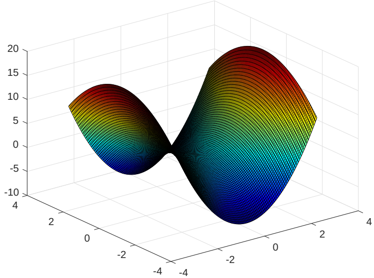
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 \\ 2x_1 - 1x_2 + 4x_3 \\ -1x_1 + 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = 1x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 1x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2$$



$\frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1x_2$



$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$



$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 3x_1x_2$

Come classificare
le forme quadratiche?

Definizione

Data la matrice A simmetrica di ordine n, la forma quadratica $x^T Ax$ si dice

- definita positiva se $x^T Ax > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- definita negativa se $x^T Ax < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- semidefinita positiva se $x^T Ax \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- semidefinita negativa se $x^T Ax \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- indefinita se non è nè definita nè semidefinita.

Come determinare il segno di una forma quadratica?

Sia $A \in \mathcal{M}_n(R)$ una matrice simmetrica e sia $q(x) = x^T Ax$ la forma quadratica associata.
Allora esiste una matrice ortogonale formata da autovettori di A che diagonalizza A, cioè :

$$U^T AU = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A. Da ciò si ricava

$$A = UDU^T$$

e quindi

$$q(x) = x^T Ax = x^T UDU^T x = (x^T U)D(U^T x)$$

Posto $U^T x = y$, si ottiene la forma quadratica $p(y)$ data da

$$q(x) = p(y) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

La forma quadratica $p(y)$ si dice **forma diagonale o canonica** della forma quadratica $q(x)$.

$q(x)$ e $p(y)$ sono funzioni che assumono **valori uguali** su argomenti legati dalla relazione

$$y = U^T x$$

U^T può essere pensata come matrice del cambiamento di base e dunque x e y sono espressioni dello stesso vettore di $\mathbb{R}^n$ in basi diversi.

Esempio.
Trovare la forma diagonale della forma quadratica associata alla matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La forma quadratica associata è $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2$.
Si determinano autovalori e autovettori. Per gli autovalori si considera:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

Dunque $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$. Gli autospazi sono:

$$\begin{array}{rcl} V_3 & = & [(-2, 1)^T] \\ V_{-2} & = & [(1, 2)^T] \end{array}$$

Normalizzando si ottiene

$$\mathcal{B} = \{(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})^T, (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})^T\}$$

Quindi la matrice U è data da

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Vale che

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

In conclusione

$$p(y) = 3y_1^2 - 2y_2^2$$

$p(y) = q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2$, con $U^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Definizione

Data la matrice A simmetrica di ordine n, la forma quadratica $x^T Ax$ si dice

- definita positiva se $x^T Ax > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- definita negativa se $x^T Ax < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- semidefinita positiva se $x^T Ax \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- semidefinita negativa se $x^T Ax \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- indefinita se non è nè definita nè semidefinita.

Poichè $q(x) = p(y)$, segue che

$$x^T Ax = x^T UDU^T x = y^T Dy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

il segno della forma quadratica è determinato dal segno degli autovalori.
Il seguente teorema allora segue direttamente considerando la forma diagonale della forma quadratica $x^T Ax$.

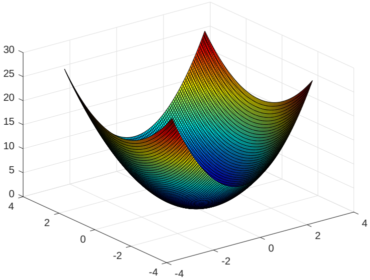
Segno di una forma quadratica II

Teorema

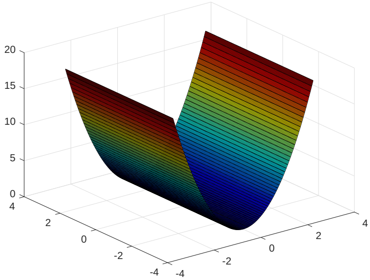
Data la matrice A simmetrica di ordine n, la forma quadratica $x^T A x$ si dice

- definita positiva se e solo se tutti gli autovalori sono positivi;
- definita negativa se e solo se tutti gli autovalori sono negativi;
- semidefinita positiva se e solo se tutti gli autovalori sono non negativi;
- semidefinita negativa se e solo se tutti gli autovalori sono non positivi;
- indefinita se e solo se ci sono due autovalori di segno opposto.

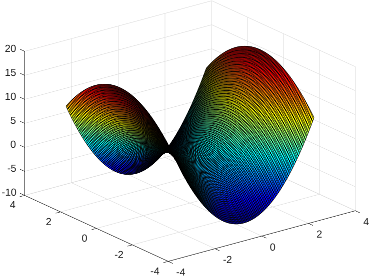
Forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$



definita positiva $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1)$



semidefinita positiva $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0)$



indefinita $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1)$

Esempi I

Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e la forma quadratica associata $q((x_1, x_2, x_3)^T) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3$, gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 6$ con molteplicità algebrica 1. Segue che la forma quadratica è definita positiva.

Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e la forma quadratica associata $q((x_1, x_2)^T) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$, gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$, entrambi di molteplicità 1. Segue che la forma quadratica è semidefinita positiva.