Compito 3

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{4x^2 - 16x - 84}{9x^2 - 36x + 90},$$

si determinino:

- a) *l'insieme di definizione D di f;*
- b) *la derivata $f'(x)$;*
- c) *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*
- d) *l'immagine $I = f(D)$ di f;*
- e) *il grafico di f, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.*

Esercizio 2 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\text{a)} \lim_{n \to +\infty} \frac{(n!)^4 e^{4n}}{n^{4n+2}}$$

$$\text{b)} \lim_{x \to 0^+} x^x$$

Esercizio 3 (1 punto) *Calcolare il valore della serie numerica* $\sum_{n \geqslant 0} (a_n - a_{n+1})$ *con*

$$a_n = \frac{(4n+3)^2}{-9n^2+4n+6}.$$

Esercizio 4 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n \geqslant 1} n^5 \arctan\left(\frac{1}{n^8}\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

- a) *La serie converge.*
- b) *La serie diverge.*
- c) *La serie è irregolare.*

Esercizio 5 (3 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = 32 + 32\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Esercizio 6 (4 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf, *il* sup, *e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-4}{x-5} < \frac{x-1}{x-2} \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{5x^2-4x-57} > \sqrt{2x^2+2x-12} \right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\text{a)} \int \frac{\tan(x)+1}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{b)} \int_0^2 x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{c)} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 6 = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Nome, Cognome .... Matricola ....

Compito 4

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{4x^2+16x-20}{6x^2+24x+30},$$

si determinino:

$\boxed{a}$ *l'insieme di definizione D di f;*

$\boxed{b}$ *la derivata $f'(x)$;*

$\boxed{c}$ *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*

$\boxed{d}$ *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

$\boxed{e}$ *il grafico di f, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.*

Esercizio 2 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(-9n-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{8}{n}\right)$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}\sin(x-1)^2}{(x+1)^3\ln(x)^2}$$

Esercizio 3 (1 punto) *Calcolare il valore della serie numerica* $\sum_{n\geqslant0}(a_n-a_{n+1})$ *con*

$$a_n = \frac{7n^2+8n-3}{(-2n+4)(5n-4)}.$$

Esercizio 4 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n\geqslant1}(-1)^n n^3 \arctan\left(\frac{1}{n^5}\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

$\boxed{a}$ *La serie converge.*

$\boxed{b}$ *La serie non converge.*

Esercizio 5 (3 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = -\frac{125}{2}\sqrt{2}+\frac{125}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$$

Esercizio 6 (4 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf*, il* sup*, e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x^2-16}{2x^2+14x+24}\geqslant 0\right\}$$

$$C = \left\{x\in\mathbb{R} : \sqrt{2x^2+6x+4} < \sqrt{3x^2+9x-6}\right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\textbf{a)}\ \int x e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{b)}\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{|x^3|}\tan(x)}{\ln(1+x^2)+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{c)}\ \int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y'(x) = (9x-8)\,y(x) + e^{\frac{9}{2}x^2+8x} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Compito 3

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

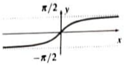
Risposta corretta: $+0.5$. Risposta mancante: -0.1. Risposta errata: -0.2.

Enunciato 1. *L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un campo.* V

Enunciato 2. *$f: A \to B$ è una funzione periodica se esiste $T > 0$ se per ogni $x \in A$ si ha $f(x+T) = f(x)$.* V

Enunciato 3. $\{x \in \mathbb{R} : |x| < a\} = (-a, a)$ V

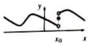
Enunciato 4. *Quello riportato di seguito è il grafico di $f(x) = \arctan(x)$.* V



Enunciato 5. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ F

Enunciato 6. *La moltiplicazione tra numeri complessi è un'operazione binaria commutativa.* V

Enunciato 7. *Se quello riportato di seguito è il grafico della funzione f allora $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.* F



Enunciato 8. *Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ se*

$$\exists M > 0 \text{ t.c. } \forall \delta = \delta(M) > 0\ \exists x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ t.c. } f(x) > -M.$$

F

Enunciato 9. *Ogni successione numerica limitata ammette una sottosuccessione convergente.* V

Enunciato 10. *Se $a_n, b_n > 0$, $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora anche $\sum_{n \geqslant 1} b_n$ converge.* V

Enunciato 11. *Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora essa ammette massimo e minimo assoluti.* V

Enunciato 12. *Tutte le funzioni integrabili sono derivabili.* F

Enunciato 13. *Il polinomio di Taylor è un polinomio.* V

Enunciato 14. $\int \cos(x)\, dx = -\sin(x) + c$ F

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														

Compito 4

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

Risposta corretta: $+0.5$. Risposta mancante: -0.1. Risposta errata: -0.2.

Enunciato 1. *L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è un campo.* F

Enunciato 2. *$f : A \to B$ è strettamente monotona se non è né strettamente crescente, né strettamente decrescente.* F

Enunciato 3. *L'estremo inferiore di un insieme è il più piccolo dei minoranti.* F

Enunciato 4. *La somma degli angoli interni di un triangolo è π.* V

Enunciato 5. $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = -1$ F

Enunciato 6. $e^{i\pi} + 1 = 0$ V

Enunciato 7. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ se*

$$\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

F

Enunciato 8. *La funzione tangente non è continua nel suo dominio di definizione.* F

Enunciato 9. *Tutte le successioni numeriche divergenti non sono limitate.* V

Enunciato 10. *Se $\{a_n\}_n$ converge, allora anche $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge.* F

Enunciato 11. *Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$, allora $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (a,b)$.* F

Enunciato 12. *Tutte le funzioni derivabili sono continue.* V

Enunciato 13. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile ed ha in $x_0 \in (a,b)$ un punto di massimo, allora $f'(x_0) = 0$.* V

Enunciato 14. $$\int \frac{dx}{\sin(x)^2} = \tan(x) + c$$ F