Esercizi

1. Dato uno spazio vettoriale V e un vettore $v_0 \in V$, mostrare che $T : V \to V$ definita come $T(v) = v + v_0$ è lineare se e solo se $v_0 = 0$.

2. Dato uno spazio vettoriale V e un vettore $v_0 \in V$, mostrare che $T : V \to V$ definita come $T(v) = v_0$ è lineare se e solo se $v_0 = 0$.

3. Si dice traccia di una matrice quadrata A la somma degli elementi diagonali: $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Mostrare che $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è lineare.

4. Sia $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ fissata. Mostrare che l'applicazione $f : \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$ definita da $f(B) = AB$ è lineare.

5. Sia $B \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$ fissata. Mostrare che l'applicazione $f : \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ definita da $f(A) = BA$ è lineare.

6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3, 0)$. Dire se f è lineare; trovare $\mathrm{Imm}(f)$ e la dimensione del sottospazio; trovare $\ker(f)$ e la dimensione del sottospazio.

7. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$. Dire se f è lineare; trovare $\mathrm{Imm}(f)$ e la dimensione del sottospazio; trovare $\ker(f)$ e la dimensione del sottospazio.

8. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1+x_2-x_3, 2x_1+x_2-x_3, x_2-x_3)$. Dire se f è lineare; trovare $\mathrm{Imm}(f)$ e la dimensione del sottospazio; trovare $\ker(f)$ e la dimensione del sottospazio.

9. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + x_4)$. Dire se f è lineare; trovare $\mathrm{Imm}(f)$ e la dimensione del sottospazio; trovare $\ker(f)$ e la dimensione del sottospazio.

10. La traccia di una matrice quadrata A, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, è una applicazione lineare $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; trovare la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$ e di $\ker(f)$.

11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare iniettiva. Mostrare che $\mathrm{Imm}(f)$ ha dimensione 2.

12. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f((x, y, z)^T) = (x+3y+4z, 2x + y + 3z, -x + 2y + z)^T$. Trovare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$, una base di $\ker(f)$. Per quali valori di h il vettore $(2, 3, h)^T$ appartiene all'immagine di f? L'applicazione è iniettiva o suriettiva?

13. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 0$, $f(e_3) = e_2$, $f(e_4) = e_3$. Trovare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$, una base di $\ker(f)$. Scrivere la matrice che rappresenta f^2 rispetto alla base canonica, determinare la dimensione dell'immagine di f^2 e una base del $\ker(f^2)$.

14. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_2, x_1)$. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

15. Sia $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3)$. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.Trovare la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$ e una sua base, la dimensione di $\ker(f)$ e una sua base