Consideriamo ora il caso in cui ci sia sempre un servitore disponibile

- Sistema $M/M/\infty$

$$\lambda_k = \lambda$$
$$\mu_k = k\mu \quad \text{il servitore cresce prop. col carico}$$

$$P_k = P_\phi \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = P_\phi \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = P_\phi \left(\lambda/\mu\right)^k \frac{1}{k!}$$

$$P_\phi = \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \left[\sum_{k=\phi}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\boxed{P_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} e^{-\lambda/\mu} \quad ; \; k \geq \phi} \qquad \text{Poissoniana}$$

$$L_s = \mathbb{E}\{k\} = \lambda/\mu$$

$$L_q = \phi \quad , \quad W_q = \phi$$

$$W_s = \frac{L_s}{\mathbb{E}\{\lambda\}} = \frac{1}{\mu} \quad W_x$$

Non ha senso definire il fattore di utilizzo.

## Sistema M/M/c

Il numero di servitori è $c$ per cui il tasso di servizio può arrivare fino a $c\mu$.

$$\lambda_k = \lambda$$
$$\mu_k = \min\{k\mu, c\mu\}$$

da cui

$$P_k = \begin{cases} P_\phi \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} & ; k \le c \\ P_\phi \prod_{i=\phi}^{c-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=c}^{k-1} \frac{\lambda}{c\mu} & ; \mu > c \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P_k = \begin{cases} P_\phi \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} & ; k \le c \\ P_\phi \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{c!\,c^{k-c}} & ; k > c \end{cases}$$

$E\{A\} E\{T_x\} = \frac{\lambda}{\mu}$ e max tasso di smaltimento $c$, quindi il fattore di utilizzo è $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$

tasso complessivo di servizio $\mu_{TOT}$

$$P_k = \begin{cases} P_\phi \frac{(c\rho)^k}{k!} & ; k \le c \\ P_\phi \frac{(c\rho)^k}{c!\,c^{k-c}} = P_\phi \frac{\rho^k c^c}{c!} & ; k > c \end{cases}$$

Imponiamo $\sum_{k=\phi}^{+\infty} P_k = 1$ per determinare $P_\phi$.

$$P_\phi = \left[1 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \sum_{k=c}^{+\infty} \frac{\rho^k c^c}{c!}\right]^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$P_\emptyset = \left[ \sum_{k=\emptyset}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \underbrace{\sum_{k=c}^{+\infty} \rho^{k-c}}_{\frac{1}{1-\rho}} \right]^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$P_\emptyset = \left[ \sum_{k=\emptyset}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

Un pkt/ut va in coda se ce ne sono già $c$ nel sistema che stanno occupando tutti i server

$$\mathbb{P}\{queue\} = \sum_{k=c}^{+\infty} P_k = \sum_{k=c}^{+\infty} P_\emptyset \frac{c^c}{c!} \rho^k$$

$$= P_\emptyset \frac{(c\rho)^c}{c!} \sum_{k=c}^{+\infty} \rho^{k-c} = P_\emptyset \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}$$

$$= \frac{\frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}{\sum_{k=\emptyset}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}$$

Formula C-Erlang $\quad C(c, A) = \dfrac{\frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-A/c}}{\sum_{k=\emptyset}^{c-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-\frac{A}{c}}}$

quindi

$\mathbb{P}\{queue\} = C(c, A)$ con $c = \#$ server

$A = c\rho$

vale $\emptyset$ per $\rho = \emptyset$

mediamente in coda c'è un numero di pkt/ut

$$L_q = E\{q\} = \sum_{k=c}^{+\infty} \underbrace{(k-c)}_{\text{ut. in coda nello stato } k} P_k = C(c, c\rho)\frac{\rho}{1-\rho}$$

il numero medio di pkt/utenti in servizio $(x = k - q)$ è

$$L_x = E\{x\} = \sum_{k=0}^{c} \underbrace{k}_{\text{ut in servizio nello stato } k} P_k + \sum_{k=c+1}^{+\infty} \underbrace{c}\, P_k = c\rho$$

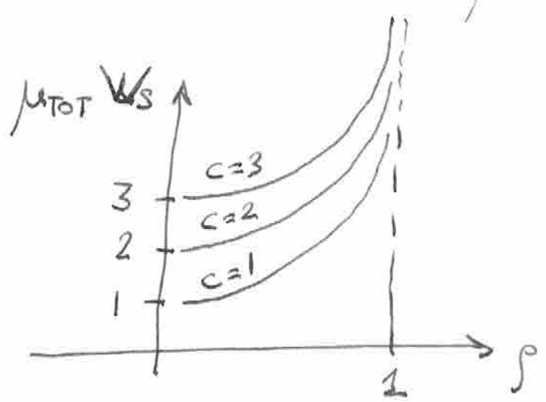
numero medio pkt/ut. nel sistema

$$L_s = L_q + L_x = \left[\frac{C(c, c\rho)}{1-\rho} + c\right]\rho \qquad L_s = E\{k\}$$

dalla relazione di Little

$$W_q = \frac{L_q}{E\{\lambda\}} = \frac{C(c, c\rho)}{\mu_{TOT}(1-\rho)} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu_{TOT}}$$

$$W_s = \frac{L_s}{E\{\lambda\}} = \frac{C(c, c\rho) + c(1-\rho)}{\mu_{TOT}(1-\rho)}$$




<u>Osservazione:</u> Conviene un sistema con pochi servitori veloci rispetto ad uno con molti servitori lenti

verificatelo

Es. Si consideri un sistema M/M/c con $c=2$ serventi e $\mu=4$ ut/s. all'equilibrio. Si determini il max ritmo degli arrivi affinché il tempo medio in coda non superi $W_q^* = 300$ ms.

$$W_q = \frac{C(c, c\rho)}{\mu_{TOT}(1-\rho)} \quad ; \quad \mu_{TOT} = c\mu = 8 \text{ ut/s.}$$

$$C(c, A) = \frac{\frac{A^c}{c!}\frac{1}{1-\frac{A}{c}}}{\sum_{k=0}^{c-1}\frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!}\frac{1}{1-\frac{A}{c}}} \quad ; \quad A = c\rho = \frac{\lambda}{4} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu_{TOT}} = \frac{\lambda}{8}$$

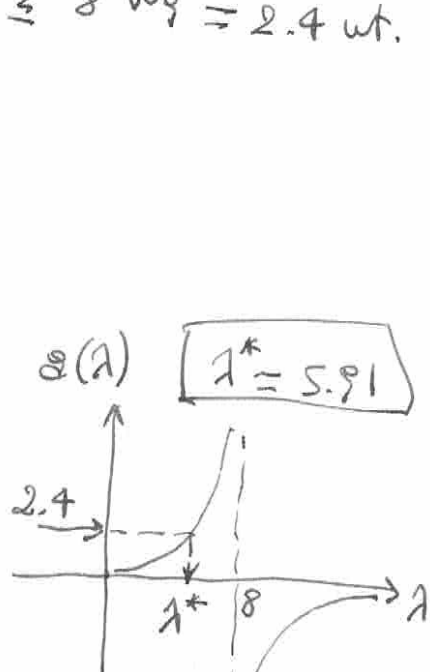
$$W_q \le W_q^* \iff \frac{C\left(2, \frac{\lambda}{4}\right)}{1-\lambda/8} \le 8\, W_q^*$$

$$\iff \frac{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-\lambda/8}}{1 + \frac{\lambda}{4} + \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-\frac{\lambda}{8}}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{8}} \le 8\, W_q^* = 2.4 \text{ ut.}$$

$$\iff \frac{\lambda^2}{32\left(1-\frac{\lambda}{8}\right)\left(1+\frac{\lambda}{8}\right)} \le 2.4$$

$$\iff \underbrace{\frac{\lambda^2}{32}\ \frac{1}{1-\frac{\lambda^2}{64}}}_{g(\lambda)} \le 2.4$$

$g(\lambda)$ $\boxed{\lambda^* = 5.91}$



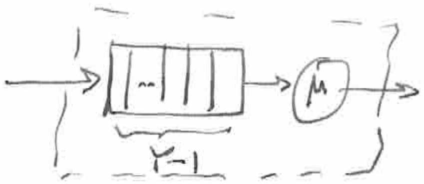

$g(6) \simeq 2.57$, $g(5) \simeq 1.28$, $g(5.7) \simeq 2.06$, $g(5.8) \simeq 2.22$, $g(5.9) \simeq 2.38$, $g(5.95) \simeq 2.47$, $g(5.92) \simeq 2.42$, $g(5.91) \simeq 2.402$

Vediamo ora la caratterizzazione di un sistema con coda finita (capacità del buffer limitata).

- Sistema $M/M/1/Y$ — al max $Y$ pkt/ut nel sistema di cui 1 nel server

Se la coda è piena si scartano gli arrivi

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & ; \ k < Y \\ \emptyset & ; \ k \geq Y \end{cases}$$




$$\mu_k = \mu$$

$$P_k = \begin{cases} P_\emptyset \prod_{i=\emptyset}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu} = P_\emptyset \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & ; \ k \overset{\text{nota}}{\leq} Y \\ \emptyset & ; \ k > Y \end{cases}$$

non si definisce un fattore di utilizzo che dipenderebbe dallo stato rispetto a $Y$. Definiamo $A = \frac{\lambda}{\mu}$

$$P_\emptyset = \left[1 + \sum_{k=1}^{Y} A^k\right]^{-1} = \left[\frac{1-A^{Y+1}}{1-A}\right]^{-1} \qquad A<1$$

$$" \left[\sum_{k=\emptyset}^{Y} A^k\right]^{-1}$$

da cui

$$P_k = \begin{cases} \frac{1-A}{1-A^{Y+1}} A^k & ; \ k \leq Y \\ \emptyset & ; \ k > Y \end{cases} \qquad ; \ k \geq \emptyset$$

La prob. di scartare un arrivo è la prob. che ci siano già $Y$ pkt/ut. nel sistema

$$P_Y = \frac{(1-A)A^Y}{1-A^{Y+1}} = P\{block\}$$

numero medio utenti nel sistema

$$L_s = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} k\, P_k = \underbrace{\frac{A}{1-A}}_{\text{come } M/M/1} - \underbrace{\frac{(Y+1)\, A^{Y+1}}{1-A^{Y+1}}}_{\text{limitazione buffer}}$$

ritmo medio degli arrivi

$$E\{\lambda\} = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} \lambda_k P_k = \lambda \sum_{k=\emptyset}^{Y-1} P_k = \lambda\,(1-P_Y)$$

$$= \lambda\, \frac{1-A^{Y}}{1-A^{Y+1}}$$

$$\lambda\Big(1-\underbrace{\sum_{k=Y}^{+\infty} P_k}_{P_Y}\Big)$$

dalla relazione di Little $\quad W_s = \dfrac{L_s}{E\{\lambda\}}$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

dalla relazione di Little $\quad L_q = E\{\lambda\}\, W_q$

Consideriamo ora un caso di interesse per la rete telefonica in cui possono entrare utenti fino a che li si può servire (no coda) e poi vengono scartati (es. commut. di circuito)

Sistema M/M/Y/Y

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & ; \ k < Y \\ \emptyset & ; \ k \geq Y \end{cases}$$

$$\mu_k = k\mu \qquad \text{(il caso } k \geq Y \text{ già contemplato in } \lambda_k\text{)}$$

$$P_k = P_\emptyset \sum_{i=\emptyset}^{+\infty} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = \begin{cases} P_\emptyset \prod_{i=\emptyset}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} & ; \ k \leq Y \\ \emptyset & ; \ k > Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_k = \begin{cases} P_\emptyset \, A^k/k! & ; \ k \leq Y \\ \emptyset & ; \ k > Y \end{cases} \qquad A = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_\emptyset = \left[ 1 + \sum_{i=\emptyset}^{Y} \frac{A^i}{i!} \right]^{-1} = \left[ \sum_{i=\emptyset}^{Y} \frac{A^i}{i!} \right]^{-1}$$

quindi

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{A^k/k!}{\sum_{i=\emptyset}^{Y} A^i/i!} & ; \ k \leq Y \\ \emptyset & ; \ k > Y \end{cases}$$

La prob. di blocco degli arrivi è la prob. che tutti i serventi risultino occupati $P_Y$

$$P\{\text{block}\} = P_Y = \frac{A^Y/Y!}{\sum_{i=\emptyset}^{Y} A^i/i!} = B(Y, A)$$

formula B-Erlang

$$L_s = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} k\, P_k = \frac{\sum_{j=\emptyset}^{Y} j \frac{A^j}{j!}}{\sum_{i=\emptyset}^{Y} \frac{A^i}{i!}} = \frac{A \sum_{j=1}^{Y} \frac{A^{j-1}}{(j-1)!}}{\sum_{i=\emptyset}^{Y} \frac{A^i}{i!}}$$

$$= A \frac{\sum_{i=\emptyset}^{Y-1} \frac{A^i}{i!}}{\sum_{i=\emptyset}^{Y} \frac{A^i}{i!}} = A \left[ P_\emptyset + P_1 + \dots + P_{Y-1} \right]$$

$P_k = \emptyset$ se $k > Y$

$$= A \left[ 1 - P_Y \right] = A \left[ 1 - B(Y,A) \right]$$

Nessun utente in coda perché il # di server eguaglia quello degli utenti/pkt.

$$L_q = \emptyset \qquad W_q = \emptyset$$

$$W_s = \mathbb{E}\{T_x\} = \frac{1}{\mu}$$

$$\mathbb{E}\{\lambda\} = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} \lambda_k P_k = \lambda (1 - P_Y) = \lambda \left[ 1 - B(Y,A) \right]$$

$$L_s = \mathbb{E}\{k\} = W_s\, \mathbb{E}\{\lambda\} = A \left[ 1 - B(Y,A) \right]$$