

Nome, Cognome..... Matricola

Compito 38

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere solo ed esclusivamente il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. NON si devono includere gli svolgimenti. Il punteggio massimo è 25.

Esercizio 1 (5 punti) Data la funzione

$$f(x) = -\frac{2x^2 + 12x - 54}{2x^2 + 12x + 34},$$

si determinino:

☐ a) l'insieme di definizione D di f ;

☐ d) l'immagine $I = f(D)$ di f ;

☐ b) la derivata $f'(x)$;

☐ e) il grafico di f , le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.

☐ c) l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare i seguenti limiti.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{\sqrt[n]{14^n}} \right) \ln \left(\left(\frac{n+8}{n} \right)^8 \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 5x})$

Esercizio 3 (1 punto) Calcolare il valore della seguente somma finita.

$$\sum_{n=1}^{41} n$$

Esercizio 4 (2 punti) Data la serie numerica

$$\sum_{n \geq 1} n^{11} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n^4} \right) \right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

☐ a) La serie converge.

☐ b) La serie diverge.

☐ c) La serie è irregolare.

Esercizio 5 (3 punti) Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.

$$z^3 = -\frac{125}{2}\sqrt{3} - \frac{125}{2}i$$

Esercizio 6 (4 punti) Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'inf, il sup, e, se esistono, min e max.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x^2 + 16x + 30}{3x^2 + 3x - 18} \geq 0 \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x^2 - 48} < \sqrt{4x^2 - 6x - 43} \right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) Calcolare i seguenti integrali.

a) $\int e^x \cos(x) dx$

b) $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$

c) $\int_{8^{-1/9}}^{+\infty} \frac{-8x^8}{1 + 64x^{18}} dx$

Esercizio 8 (2 punti) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 85y(x) = 0 \\ y(0) = -4 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Nome, Cognome..... Matricola

Compito 37

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere solo ed esclusivamente il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON** si devono includere gli svolgimenti. Il punteggio massimo è 25.

Esercizio 1 (5 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{-11 - 12x}{3 + 3x},$$

si determinino:

☐ a) l'insieme di definizione D di f ;

☐ d) l'immagine $I = f(D)$ di f ;

☐ b) la derivata $f'(x)$;

☐ e) il grafico di f , le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.

☐ c) l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;
(massimi e minimi)

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare i seguenti limiti.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \frac{4}{n} \right) \ln \left(1 - \frac{4}{n} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(e + x^4) - 3}{1 - \cos(x^2)}$

Esercizio 3 (1 punto) Calcolare il valore della serie numerica $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})$ con

$$a_n = \frac{(-5n+2)^2}{(-5n+9)^2}.$$

Esercizio 4 (2 punti) Data la serie numerica

$$\sum_{n \geq 1} n^7 \tan \left(\frac{1}{n^9} \right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

☐ a) La serie converge.

☐ b) La serie diverge.

☐ c) La serie è irregolare.

Esercizio 5 (3 punti) Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.

$$z^3 = -\frac{27}{2}\sqrt{2} - \frac{27}{2}\sqrt{2}i$$

Esercizio 6 (4 punti) Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'inf, il sup, e, se esistono, min e max.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x+6} \leq \frac{x+1}{x-9} \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x^2+14x+20} \leq \sqrt{3x^2+20x+25} \right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) Calcolare i seguenti integrali.

a) $\int \frac{3x^2 - 2x}{5 - x^2 + x^3} \ln(5 - x^2 + x^3) dx$

b) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x \sin(x)^2 dx$

c) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$

Esercizio 8 (2 punti) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + x^{-1} \\ y(3) = 2 \end{cases}$$

Compito 38

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

Risposta corretta: +0.5. **Risposta mancante:** -0.1. **Risposta errata:** -0.2.

Enunciato 1. L'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} è ordinato e completo.

F

Enunciato 2. Se $n \in \mathbb{N}$ è pari allora $f(x) = x^n$ è una funzione dispari nel suo dominio di definizione.

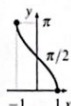
F

Enunciato 3. $\sqrt{p(x)} \geq \sqrt{q(x)} \iff \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0. \end{cases}$

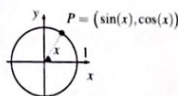
F

Enunciato 4. Quello riportato di seguito è il grafico di $f(x) = \arccos(x)$.

V



Enunciato 5.



F

Enunciato 6. Se $z \in \mathbb{C}$, allora $\Im m(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

V

Enunciato 7. Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ se

V

$$\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) > M \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Enunciato 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1 \forall a > 0$

F

Enunciato 9. Se tutte le sottosuccessioni di $\{a_n\}_n$ convergono ad L , allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$.

V

Enunciato 10. La serie armonica a segno alterno diverge.

F

Enunciato 11. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $f([a, b])$ è un intervallo, allora f è continua in $[a, b]$.

F

Enunciato 12. $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$

V

Enunciato 13. Per la regola di De L'Hôpital si ha che

F

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin(x)}{x + 2 \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos(x)}{1 - 2 \sin(x)} = +\infty$$

Enunciato 14. $\int \frac{dx}{\cos(x)^2} = \tan(x) + c$

V

| Enunciato | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| V | | | | | | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | | | | | | |

Compito 37

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

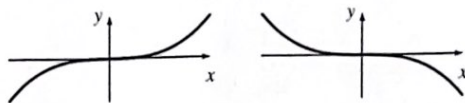
Risposta corretta: +0.5. **Risposta mancante:** -0.1. **Risposta errata:** -0.2.

Enunciato 1. L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è un campo.

F

Enunciato 2. Se quello riportato a sinistra è il grafico di $f(x)$, allora quello a destra è il grafico di $f(|x|)$.

F



Enunciato 3. $\{x \in \mathbb{R} : |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

V

Enunciato 4. $\tan(0) = 0$

V

Enunciato 5. $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

V

Enunciato 6. Se $z \in \mathbb{C}$, allora $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$.

V

Enunciato 7. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se
 $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \exists x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ t.c. $|f(x) - L| > \varepsilon$.

F

Enunciato 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1 \quad \forall a > 0$

F

Enunciato 9. Se per ogni $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0 si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

V

Enunciato 10. Se $a_n, b_n > 0$, $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora nulla si può dire della convergenza di $\sum_{n \geq 1} b_n$.

F

Enunciato 11. Se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

V

Enunciato 12. $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

V

Enunciato 13. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile ed $x_0 \in (a, b)$ è tale che $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo o di minimo.

F

Enunciato 14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \arcsin(x) + c$

F

| Enunciato | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| V | | | | | | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | | | | | | |