L'Algebra Lineare studia le strutture algebriche sugli insiemi.
Introduciamo un concetto alla base di tutta l'algebra lineare, cioè quello di

spazio vettoriale

Il concetto è utile per trattare insiemi astratti **come se** fossero vettori liberi del piano o dello spazio.

L'Algebra Lineare studia le strutture algebriche sugli insiemi.
Introduciamo un concetto alla base di tutta l'algebra lineare, cioè quello di

spazio vettoriale

Il concetto è utile per trattare insiemi astratti **come se** fossero vettori liberi del piano o dello spazio.

Se è possibile dare a un insieme di oggetti la struttura di spazio vettoriale, tutte le proprietà teoriche che valgono per gli spazi vettoriali restano verificate per l'insieme.
Poichè lo spazio euclideo è uno spazio vettoriale, insiemi complessi cui si riesce a dare una struttura di spazio vettoriale possono essere trattati come fossero vettori dello spazio.

L'Algebra Lineare studia le strutture algebriche sugli insiemi.
Introduciamo un concetto alla base di tutta l'algebra lineare, cioè quello di

spazio vettoriale

Il concetto è utile per trattare insiemi astratti **come se** fossero vettori liberi del piano o dello spazio.

Sia V **un insieme** e K **un campo** (in genere $K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$).
Assumiamo che sia definita su V una **legge di composizione interna** o una operazione binaria detta **somma**:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \rightarrow & V \\ (v_1, v_2) & \rightarrow & v_1 + v_2 \end{array}$$

e una **legge di composizione esterna** detta **prodotto per uno scalare**:

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \rightarrow & V \\ (c, v) & \rightarrow & cv \end{array}$$

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3, \ \forall \ v_1, v_2, v_3 \in V$ (proprietà associativa di $+$)

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$, $\forall\ v_1, v_2, v_3 \in V$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v$, $\forall\ v \in V$ (0 è elemento neutro per $+$)

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$, $\forall\ v_1, v_2, v_3 \in V$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v$, $\forall\ v \in V$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall\ v \in V, \exists\ w \in V$, con $w = -v = (-1)v$ tale che $v + w = w + v = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3,\ \forall\ v_1, v_2, v_3 \in V$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v,\ \forall\ v \in V$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall\ v \in V, \exists\ w \in V$, con $w = -v = (-1)v$ tale che $v + w = w + v = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall\ v_1, v_2 \in V,\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (proprietà commutativa di $+$)

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$, $\forall\ v_1, v_2, v_3 \in V$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v$, $\forall\ v \in V$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall\ v \in V, \exists\ w \in V$, con $w = -v = (-1)v$ tale che $v + w = w + v = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall\ v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $a(bv) = (ab)v$, $\forall a, b \in K$, $\forall\ v \in V$ (proprietà associativa mista)

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3,\ \forall\ v_1, v_2, v_3 \in V$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v,\ \forall\ v \in V$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall\ v \in V, \exists\ w \in V$, con $w = -v = (-1)v$ tale che $v + w = w + v = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall\ v_1, v_2 \in V,\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $a(bv) = (ab)v,\ \forall a, b \in K,\ \forall\ v \in V$ (proprietà associativa mista)
6. $(a + b)v = av + bv,\ \forall a, b \in K,\ \forall\ v \in V$ (distributiva di $\cdot$ rispetto alla somma di scalari)

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3,\ \forall\ v_1, v_2, v_3 \in V$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v,\ \forall\ v \in V$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall\ v \in V, \exists\ w \in V$, con $w = -v = (-1)v$ tale che $v + w = w + v = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall\ v_1, v_2 \in V,\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $a(bv) = (ab)v,\ \forall a, b \in K,\ \forall\ v \in V$ (proprietà associativa mista)
6. $(a + b)v = av + bv,\ \forall a, b \in K,\ \forall\ v \in V$ (distributiva di $\cdot$ rispetto alla somma di scalari)
7. $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2,\ \forall a \in K,\ \forall\ v_1, v_2 \in V$ (distributiva di $\cdot$ rispetto alla somma di vettori)

Definizione di spazio vettoriale

Un **insieme** V dotato di una **legge di composizione interna** e di una **legge di composizione esterna** su un campo K ha una struttura di **spazio vettoriale su** K se le due operazioni godono delle seguenti proprietà o **assiomi**:

1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3,\ \forall\ v_1, v_2, v_3 \in V$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v,\ \forall\ v \in V$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall\ v \in V, \exists\ w \in V$, con $w = -v = (-1)v$ tale che $v + w = w + v = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall\ v_1, v_2 \in V,\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $a(bv) = (ab)v, \forall a, b \in K, \forall\ v \in V$ (proprietà associativa mista)
6. $(a + b)v = av + bv, \forall a, b \in K, \forall\ v \in V$ (distributiva di $\cdot$ rispetto alla somma di scalari)
7. $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2, \forall a \in K, \forall\ v_1, v_2 \in V$ (distributiva di $\cdot$ rispetto alla somma di vettori)
8. $\exists\ 1 \in K$ tale che $1v = v,\ \forall\ v \in V$ (1 è elemento neutro per $\cdot$)

Gli elementi di V si dicono **vettori** e gli elementi di K si dicono **scalari**.
$\mathbf{0}$ si dice **vettore nullo**.
$-v$ si dice **opposto** di v.

Gli elementi di V si dicono **vettori** e gli elementi di K si dicono **scalari**.
$\mathbf{0}$ si dice **vettore nullo**.
$-v$ si dice **opposto** di v.

Esempio: I vettori liberi del piano o dello spazio
L'insieme dei vettori del piano o dello spazio V con le operazioni di somma e prodotto per un reale forma uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Infatti per le operazioni di somma tra vettori e il prodotto per uno scalare valgono gli assiomi.

$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Infatti in $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di somma e di prodotto:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & x+y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & xy \end{array}$$

Inoltre si può verificare che per tali operazioni valgono gli assiomi ($\mathbb{R}$ è un campo):

1. $x+(y+z)=(x+y)+z, \quad \forall x,y,z \in R$
2. $\exists\ 0 \in V$ tale che $x+0=0+x=x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$
3. $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad x+(-x)=0$
4. $\forall\ x,y \in \mathbb{R}, \quad x+y=y+x$
5. $x(yz)=(xy)z, \quad \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$
6. $(x+y)z=xz+yz, \quad \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$
7. $x(y+z)=xy+xz, \quad \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$
8. $1x=x, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, per $n \geq 1$.
Infatti sono definite le operazioni di **somma** e di **prodotto per uno scalare**:

$$\begin{aligned} \text{somma: } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) &\rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

definita come $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$$\begin{aligned} \text{prodotto per uno scalare: } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\rightarrow \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

Occorre **verificare** che per tali operazioni valgono gli assiomi.

Esempio

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, per $n \geq 1$.
Infatti sono definite le operazioni di **somma** e di **prodotto per uno scalare**:

$$\begin{aligned} \text{somma}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) &\rightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

definita come $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

$$\begin{aligned} \text{prodotto per uno scalare}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) &\rightarrow \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

Occorre **verificare** che per tali operazioni valgono gli assiomi.

Un esempio
Si consideri $\mathbb{R}^3$:

$$(1, 3, 5) + (-1, 0, 2) = (1 - 1, 3 + 0, 5 + 2) = (0, 3, 7)$$

$$-4 \cdot (1, -1, 6) = (-4 \cdot 1, -4 \cdot (-1), -4 \cdot 6) = (-4, 4, -24)$$

Verifichiamo gli assiomi:

1. proprietà associativa della somma:
   $\forall\ (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$(x_1, ...x_n) + ((y_1, ..., y_n) + (z_1, ..., z_n)) = (x_1, ..., x_n) + (y_1 + z_1, ..., y_n + z_n) =$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1), ..., x_n + (y_n + z_n)) =$$

associativa della somma tra reali

$$= ((x_1 + y_1) + z_1, ..., (x_n + y_n) + z_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) + (z_1, ..., z_n) =$$
$$= ((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)) + (z_1, ..., z_n)$$

Verifichiamo gli assiomi:

1. proprietà associativa della somma:
$\forall\ (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n),(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ si ha:

$$(x_1,\ldots x_n)+((y_1,\ldots,y_n)+(z_1,\ldots,z_n)) = (x_1,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,\ldots,y_n+z_n) =$$
$$= (x_1+(y_1+z_1),\ldots,x_n+(y_n+z_n)) =$$

associativa della somma tra reali

$$= ((x_1+y_1)+z_1,\ldots,(x_n+y_n)+z_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,\ldots,z_n) =$$
$$= ((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n))+(z_1,\ldots,z_n)$$

2. $\exists\ 0\in\mathbb{R}^n$, $0=(0,\ldots,0)$ tale che

$$(x_1,\ldots,x_n)+(0,\ldots,0) = (x_1+0,\ldots,x_n+0) = (x_1,\ldots,x_n)$$

perchè 0 è elemento **neutro** della somma in $\mathbb{R}$;

Verifichiamo gli assiomi:

1. proprietà associativa della somma:
$\forall\ (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$(x_1, ...x_n)+((y_1, ..., y_n) + (z_1, ..., z_n)) = (x_1, ..., x_n) + (y_1 + z_1, ..., y_n + z_n) =$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1), ..., x_n + (y_n + z_n)) =$$

associativa della somma tra reali

$$= ((x_1 + y_1) + z_1, ..., (x_n + y_n) + z_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) + (z_1, ..., z_n) =$$
$$= ((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n))+(z_1, ..., z_n)$$

2. $\exists\ 0 \in \mathbb{R}^n$, $0 = (0, ..., 0)$ tale che

$$(x_1, ..., x_n) + (0, ..., 0) = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = (x_1, ..., x_n)$$

perchè 0 è elemento **neutro** della somma in $\mathbb{R}$;

3. $\forall\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, vale che

$$(x_1, ...x_n) + (-1)(x_1, ..., x_n) =$$
$$= (x_1, ...x_n) + (-x_1, ..., -x_n) =$$
$$= (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0)$$

per l'**esistenza dell'opposto** in $\mathbb{R}$

4. $\forall\ (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, ...x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) =$$

commutativa della somma tra reali

$$= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n)$$

4. $\forall\ (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, ...x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) =$$

commutativa della somma tra reali

$$= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n)$$

5. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lambda(\mu(x_1, ...x_n)) = \lambda(\mu x_1, ..., \mu x_n) =$$

$$= (\lambda\mu x_1, ..., \lambda\mu x_n) =$$

associativa del prodotto tra reali

$$= (\lambda\mu)(x_1, ..., x_n)$$

4. $\forall\ (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, ...x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) =$$

commutativa della somma tra reali

$$= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n)$$

5. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lambda(\mu(x_1, ...x_n)) = \lambda(\mu x_1, ..., \mu x_n) =$$

$$= (\lambda\mu x_1, ..., \lambda\mu x_n) =$$

associativa del prodotto tra reali

$$= (\lambda\mu)(x_1, ..., x_n)$$

6. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\ (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$(\lambda + \mu)(x_1, ...x_n) = ((\lambda + \mu)x_1, ..., (\lambda + \mu)x_n) =$$

distributiva del prodotto rispetto alla somma tra reali

$$= (\lambda x_1 + \mu x_1, ..., \lambda x_n + \mu x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) + (\mu x_1, ..., \mu x_n) =$$

$$= \lambda(x_1, ..., x_n) + \mu(x_1, ..., x_n)$$

7. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lambda((x_1, ...x_n) + (y_1, ..., y_n)) = \lambda(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) =$$
$$= (\lambda(x_1 + y_1), ..., \lambda(x_n + y_n)) =$$

distributiva del prodotto rispetto alla somma tra reali

$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, ..., \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) + (\lambda y_1, ..., \lambda y_n) =$$
$$= \lambda(x_1, ..., x_n) + \lambda(y_1, ..., y_n)$$

7. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lambda((x_1, ...x_n) + (y_1, ..., y_n)) = \lambda(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) =$$
$$= (\lambda(x_1 + y_1), ..., \lambda(x_n + y_n)) =$$

distributiva del prodotto rispetto alla somma tra reali

$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, ..., \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) + (\lambda y_1, ..., \lambda y_n) =$$
$$= \lambda(x_1, ..., x_n) + \lambda(y_1, ..., y_n)$$

8. $\forall\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$1(x_1, ..., x_n) = (1x_1, ..., 1x_n) = (x_1, ..., x_n)$$

1 è **elemento neutro** per il prodotto tra reali.

$\mathbb{R}^n$ dunque è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

In modo analogo:

- $\mathbb{Q}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Più in generale, **se K è un campo, K^n è uno spazio vettoriale su K.**

Sia dato l'**insieme dei polinomi** a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a n:

$$P_n(x) = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, n \text{ fissato}\}$$

In $P_n(x)$ si possono definire le operazioni $+$ e $\cdot$ (somma e prodotto per uno scalare):

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) \quad &+ \quad (b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) = \\ &= \quad (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n \\ \lambda\cdot(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) \quad &= \quad (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + ... + (\lambda a_n)x^n \end{aligned}$$

per ogni $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in P_n(x)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$P_n(x)$ è uno **spazio vettoriale** su $\mathbb{R}$.
Infatti **per le operazioni sopra definite valgono tutti gli assiomi**. Per esempio l'elemento neutro è il polinomio con coefficienti tutti nulli.

Sia dato l'**insieme dei polinomi** a coefficienti in $\mathbb{R}$ di qualunqe grado:

$$P(x) = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

$P(x)$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ è uno **spazio vettoriale** su $\mathbb{R}$.

Osservazioni

- $\mathbb{Z}$ non è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ poichè, se $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$, $az \notin \mathbb{Z}$!
  Non si può definire la legge di composizione esterna.

Osservazioni

- $\mathbb{Z}$ non è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ poichè, se $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$, $az \notin \mathbb{Z}$!
  Non si può definire la legge di composizione esterna.

- Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\forall\ v, u, w \in V$
  $v + u + w$ è **ben determinato** in quanto **non** ha importanza l'ordine in cui si eseguono le somme
  Più in generale, dati $v_1, ..., v_n \in V$, il vettore

$$v_1 + ... + v_n$$

  è **ben determinato**

  .

- $\mathbb{Z}$ non è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ poichè, se $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$, $az \notin \mathbb{Z}$!
  Non si può definire la legge di composizione esterna.
- Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\forall\ v, u, w \in V$
  $v + u + w$ è **ben determinato** in quanto **non** ha importanza l'ordine in cui si eseguono le somme
  Più in generale, dati $v_1, ..., v_n \in V$, il vettore
  $$v_1 + ... + v_n$$
  è **ben determinato**

  .
- Si definisce la **differenza** come
  $$v - u = v + (-u) \qquad \forall\ u, v \in V$$

Teorema 1: proprietà degli spazi vattoriali

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

1. L'elemento neutro rispetto alla $+$ è **unico**.
2. L'opposto di un vettore v è **unico** $(-v)$.
3. Se $v_1, v_2, v \in V$, e $v_1 + v = v_2 + v$, allora $v_1 = v_2$.
4. Se $a \in \mathbb{R}$, allora $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
5. Se $v \in V$, allora $0v = \mathbf{0}$.
6. Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$ e $av = \mathbf{0}$, allora $a = 0$ oppure $v = \mathbf{0}$.
7. Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$, $a(-v) = (-a)v = -(av)$.
8. Se $a \in \mathbb{R}, u, v \in V$, $a(u - v) = au - av$.
9. Se $v_1, ..., v_n \in V$ e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, allora $a_1v_1 + ... + a_nv_n \in V$.

1. **L'elemento neutro rispetto alla $+$ è unico.**
Supponiamo per assurdo che $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ siano due elementi neutri diversi; allora

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}' \quad \text{perchè } \mathbf{0} \text{ è el. neutro}$$
$$\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0} \quad \text{perchè } \mathbf{0}' \text{ è el. neutro}$$

Poichè vale la proprietà commutativa, $\mathbf{0}=\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'$. Questo è in contraddizione con l'ipotesi che quindi non è vera.
Dunque l'elemento neutro è unico.

Dimostrazione

1. **L'elemento neutro rispetto alla $+$ è unico.**
   Supponiamo per assurdo che $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ siano due elementi neutri diversi; allora
   $$\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}' \quad \text{perchè } \mathbf{0} \text{ è el. neutro}$$
   $$\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0} \quad \text{perchè } \mathbf{0}' \text{ è el. neutro}$$
   Poichè vale la proprietà commutativa, $\mathbf{0}=\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'$. Questo è in contraddizione con l'ipotesi che quindi non è vera.
   Dunque l'elemento neutro è unico.
2. **L'opposto di un vettore v è unico ($-v$).**
   Siano v' e v'' opposti di $v \in V$. Allora $v+v'=\mathbf{0}$, $v+v''=\mathbf{0}$ e dunque
   $$v'=v'+\mathbf{0}=v'+(v+v'')=(v'+v)+v''=\mathbf{0}+v''=v''$$

Dimostrazione

1. **L'elemento neutro rispetto alla $+$ è unico.**
   Supponiamo per assurdo che $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ siano due elementi neutri diversi; allora

   $$\begin{array}{ll} \mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}' & \text{perchè } \mathbf{0} \text{ è el. neutro} \\ \mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0} & \text{perchè } \mathbf{0}' \text{ è el. neutro} \end{array}$$

   Poichè vale la proprietà commutativa, $\mathbf{0}=\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'$. Questo è in contraddizione con l'ipotesi che quindi non è vera.
   Dunque l'elemento neutro è unico.

2. **L'opposto di un vettore v è unico $(-v)$.**
   Siano v' e v'' opposti di $v \in V$. Allora $v+v'=\mathbf{0}$, $v+v''=\mathbf{0}$ e dunque

   $$v'=v'+\mathbf{0}=v'+(v+v'')=(v'+v)+v''=\mathbf{0}+v''=v''$$

3. **Se $v_1, v_2, v \in V$, e $v_1+v=v_2+v$, allora $v_1=v_2$.**
   Se $v_1+v=v_2+v$ allora

   $$\begin{aligned} v_1 &= v_1+\mathbf{0}=v_1+(v+(-v))=(v_1+v)+(-v) \\ &= (v_2+v)+(-v)=v_2+(v+(-v))=v_2+\mathbf{0}=v_2 \\ \Rightarrow &\quad v_1=v_2 \end{aligned}$$

1. **L'elemento neutro rispetto alla $+$ è unico.**
Supponiamo per assurdo che $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ siano due elementi neutri diversi; allora

$$\begin{aligned} \mathbf{0}+\mathbf{0}' = \mathbf{0}' &\quad \text{perchè } \mathbf{0} \text{ è el. neutro} \\ \mathbf{0}'+\mathbf{0} = \mathbf{0} &\quad \text{perchè } \mathbf{0}' \text{ è el. neutro} \end{aligned}$$

Poichè vale la proprietà commutativa, $\mathbf{0} = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$. Questo è in contraddizione con l'ipotesi che quindi non è vera.
Dunque l'elemento neutro è unico.

2. **L'opposto di un vettore v è unico ($-v$).**
Siano v' e v'' opposti di $v \in V$. Allora $v + v' = \mathbf{0}$, $v + v'' = \mathbf{0}$ e dunque

$$v' = v' + \mathbf{0} = v' + (v + v'') = (v' + v) + v'' = \mathbf{0} + v'' = v''$$

3. **Se $v_1, v_2, v \in V$, e $v_1 + v = v_2 + v$, allora $v_1 = v_2$.**
Se $v_1 + v = v_2 + v$ allora

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1 + \mathbf{0} = v_1 + (v + (-v)) = (v_1 + v) + (-v) \\ &= (v_2 + v) + (-v) = v_2 + (v + (-v)) = v_2 + \mathbf{0} = v_2 \\ &\Rightarrow \quad v_1 = v_2 \end{aligned}$$

4. **Se $a \in \mathbb{R}$, allora $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.**
$a\mathbf{0} + \mathbf{0} = a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = a\mathbf{0}$

Dimostrazione

5. **Se $v \in V$, allora $0v = \mathbf{0}$.**
   $0v + \mathbf{0} = 0v = (0+0)v = 0v + 0v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = 0v$

Dimostrazione

5. **Se $v \in V$, allora $0v = \mathbf{0}$.**
   $0v + \mathbf{0} = 0v = (0+0)v = 0v + 0v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = 0v$
6. **Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$ e $av = \mathbf{0}$, allora $a = 0$ oppure $v = \mathbf{0}$.**
   Sia $av = \mathbf{0}$. Se $a \neq 0$, allora in $\mathbb{R}$, esiste $\frac{1}{a}$ e dunque

$$v = 1v = (\frac{1}{a}a)v = \frac{1}{a}(av) = \frac{1}{a}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

   Dunque $v = \mathbf{0}$.

5. **Se $v \in V$, allora $0v = \mathbf{0}$.**
   $0v + \mathbf{0} = 0v = (0+0)v = 0v + 0v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = 0v$
6. **Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$ e $av = \mathbf{0}$, allora $a = 0$ oppure $v = \mathbf{0}$.**
   Sia $av = \mathbf{0}$. Se $a \neq 0$, allora in $\mathbb{R}$, esiste $\frac{1}{a}$ e dunque
   $$v = 1v = (\frac{1}{a}a)v = \frac{1}{a}(av) = \frac{1}{a}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
   Dunque $v = \mathbf{0}$.
7. **Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$, $a(-v) = (-a)v = -(av)$.**
   Facciamo vedere che $a(-v)$ e $(-a)v$ sono opposti di av e dunque coincidono per l'unicità dell'opposto. Si ha:
   $$a(-v) + av = a((-v) + v) = a\mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad (-a)v + av = (-a+a)v = 0v = \mathbf{0}$$

5. **Se $v \in V$, allora $0v = \mathbf{0}$.**
   $0v + \mathbf{0} = 0v = (0+0)v = 0v + 0v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = 0v$
6. **Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$ e $av = \mathbf{0}$, allora $a = 0$ oppure $v = \mathbf{0}$.**
   Sia $av = \mathbf{0}$. Se $a \neq 0$, allora in $\mathbb{R}$, esiste $\frac{1}{a}$ e dunque
   $$v = 1v = (\frac{1}{a}a)v = \frac{1}{a}(av) = \frac{1}{a}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
   Dunque $v = \mathbf{0}$.
7. **Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$, $a(-v) = (-a)v = -(av)$.**
   Facciamo vedere che $a(-v)$ e $(-a)v$ sono opposti di av e dunque coincidono per l'unicità dell'opposto. Si ha:
   $$a(-v) + av = a((-v) + v) = a\mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad (-a)v + av = (-a+a)v = 0v = \mathbf{0}$$
8. **Se $a \in \mathbb{R}, u, v \in V$, $a(u-v) = au - av$.**
   Si ha $a(u-v) = a(u+(-v)) = au + a(-v) = au + (-(av)) = au - av$

Dimostrazione

5. **Se $v \in V$, allora $0v = \mathbf{0}$.**
$0v + \mathbf{0} = 0v = (0+0)v = 0v + 0v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = 0v$

6. **Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$ e $av = \mathbf{0}$, allora $a = 0$ oppure $v = \mathbf{0}$.**
Sia $av = \mathbf{0}$. Se $a \neq 0$, allora in $\mathbb{R}$, esiste $\frac{1}{a}$ e dunque

$$v = 1v = (\frac{1}{a}a)v = \frac{1}{a}(av) = \frac{1}{a}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Dunque $v = \mathbf{0}$.

7. **Se $a \in \mathbb{R}, v \in V$, $a(-v) = (-a)v = -(av)$.**
Facciamo vedere che $a(-v)$ e $(-a)v$ sono opposti di av e dunque coincidono per l'unicità dell'opposto. Si ha:

$$a(-v) + av = a((-v) + v) = a\mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad (-a)v + av = (-a+a)v = 0v = \mathbf{0}$$

8. **Se $a \in \mathbb{R}, u, v \in V$, $a(u - v) = au - av$.**
Si ha $a(u-v) = a(u + (-v)) = au + a(-v) = au + (-(av)) = au - av$

9. **Se $v_1, ..., v_n \in V$ e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, allora $a_1v_1 + ... + a_nv_n \in V$.**
Basta applicare le proprietà.

Definizione di combinazione lineare

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Se $v_1, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, allora il vettore $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ di V si dice **combinazione lineare** dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ a coefficienti $a_1, \ldots, a_n$.

Definizione di combinazione lineare

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, allora il vettore $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ di V si dice **combinazione lineare** dei vettori $v_1, \dots, v_n$ a coefficienti $a_1, \dots, a_n$.

Esempio.
Dato $\mathbb{R}^2$, siano dati tre vettori $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$ e tre scalari $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 4$. Allora

$$\begin{aligned} & a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 2(1, 0) - 1(0, 1) + 4(1, 1) = \\ = \quad & (2, 0) + (0, -1) + (4, 4) = (2 + 0 + 4, 0 - 1 + 4) = (6, 3) \end{aligned}$$

Dunque $(6, 3)$ è una combinazione lineare di $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (1, 1)$ con coefficienti dati dagli scalari $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ e $a_3 = 4$.

Un ulteriore esempio di spazio vettoriale

Sia X un insieme. Si considera l'insieme delle funzioni da X in $\mathbb{R}$:

$$V_X = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

Si definisce la **somma** di due elementi di V_X

$$\begin{array}{rcl} V_X \times V_X & \to & V_X \\ (f, g) & \to & f + g \end{array}$$

ove $f + g : X \to \mathbb{R}$ è un elemento di V_X definito come

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$$

e il **prodotto per uno scalare**:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V_X & \to & V_X \\ (c, f) & \to & cf \end{array}$$

ove $cf : X \to \mathbb{R}$ è un elemento di V_X definito come

$$(cf)(x) = cf(x) \;\forall\, x \in X$$

Esempio

Si consideri l'insieme delle funzioni $V_{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
Due elementi di $V_{\mathbb{R}}$ sono

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \qquad & g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to 2x \qquad & x &\to x+1 \end{aligned}$$

$f + g$ è la funzione definita in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} & f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + x + 1 = 3x + 1 \end{aligned}$$

Se $c = 4$, cf è la funzione definita in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} & cf : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to (cf)(x) = cf(x) = 4(2x) = 8x \end{aligned}$$

Si può mostrare che le operazioni definite in V_X godono di tutte gli assiomi **cosicchè V_X è uno spazio vettoriale su** $\mathbb{R}$.

1. $\forall\ f, g, h \in V_X$, si consideri $(f+g)+h : X \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in X$ il reale

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$

Vale la proprietà associativa per i numeri reali:

$$(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$$

Dunque $(f+g)+h = f+(g+h)$.

Dimostrazione

1. $\forall\ f, g, h \in V_X$, si consideri $(f+g)+h : X \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in X$ il reale
$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$
Vale la proprietà associativa per i numeri reali:
$$(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$$
Dunque $(f+g)+h = f+(g+h)$.
2. $\exists\ f \in V_X$ tale che $f : X \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$ per ogni $x \in X$. Allora per ogni $g \in V_x$, vale che
$$(g+f)(x) = g(x) + f(x) = g(x) + 0 = g(x)$$
Dunque f è elemento neutro.

Dimostrazione

1. $\forall\, f, g, h \in V_X$, si consideri $(f+g)+h : X \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in X$ il reale
$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$
Vale la proprietà associativa per i numeri reali:
$$(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$$
Dunque $(f+g)+h = f+(g+h)$.
2. $\exists\, f \in V_X$ tale che $f : X \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$ per ogni $x \in X$. Allora per ogni $g \in V_x$, vale che
$$(g+f)(x) = g(x) + f(x) = g(x) + 0 = g(x)$$
Dunque f è elemento neutro.
3. $\forall\, f \in V_X$ tale che $f : X \to \mathbb{R}$, si definisce $(-f) : X \to \mathbb{R}$ con $(-f)(x) = -f(x)$ per ogni $x \in X$. Si ha
$$(f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = 0$$
Dunque $-f$ è elemento opposto ad f.

4. $\forall\ f, g \in V_X$, si consideri $(f+g) : X \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in X$ il reale

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Vale la proprietà commutativa per i numeri reali:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

Dunque $f + g = g + f$.

4. $\forall\ f, g \in V_X$, si consideri $(f+g): X \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in X$ il reale
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
Vale la proprietà commutativa per i numeri reali:
$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$
Dunque $f+g = g+f$.
5. $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ f \in V_X$, si ha
$$(a(bf))(x) = a(bf(x)) = (ab)f(x) = ((ab)f)(x)$$

4. $\forall\, f, g \in V_X$, si consideri $(f+g) : X \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in X$ il reale

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

   Vale la proprietà commutativa per i numeri reali:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

   Dunque $f + g = g + f$.

5. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $f \in V_X$, si ha

$$(a(bf))(x) = a(bf(x)) = (ab)f(x) = ((ab)f)(x)$$

6. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $f \in V_X$, si ha

$$((a+b)f)(x) = (a+b)f(x)$$

   Vale la proprietà distributiva tra numeri reali:

$$(a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x) = (af+bf)(x)$$

7. $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $f, g \in V_X$, si ha

$$(a(f+g))(x) = a(f+g)(x) = a(f(x)+g(x))$$

Vale la proprietà distributiva tra numeri reali:

$$a(f(x)+g(x)) = af(x)+ag(x) = (af)(x)+(ag)(x) = (af+bg)(x)$$

7. $\forall\ a \in \mathbb{R},\ f, g \in V_X$, si ha

$$(a(f+g))(x) = a(f+g)(x) = a(f(x)+g(x))$$

Vale la proprietà distributiva tra numeri reali:

$$a(f(x)+g(x)) = af(x)+ag(x) = (af)(x)+(ag)(x) = (af+bg)(x)$$

8. $\forall\ f \in V_x$, vale che

$$(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$$

Definizione di sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$.
W si dice **sottospazio vettoriale** di V se W è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ a sua volta rispetto alle stesse operazioni definite in V e indotte da V in W.
Si scrive $W \sqsubseteq V$.

Definizione di sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$.
W si dice **sottospazio vettoriale** di V se W è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ a sua volta rispetto alle stesse operazioni definite in V e indotte da V in W.
Si scrive $W \sqsubseteq V$.

Esempi

- $P_n(x)$ è un sottospazio di $P(x)$.
- Sia $A = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$; $A \subset \mathbb{R}^3$ ed è chiuso rispetto alle operazioni di somma di terne e di prodotto di una terna per uno scalare. Infatti, se si considerano due elementi $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0)$ di A e $c \in \mathbb{R}$, allora

$$(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in A$$
$$c(x_1, y_1, 0) = (cx_1, cy_1, 0) \in A$$

e valgono gli 8 assiomi per le operazioni. Pertanto $A \sqsubseteq \mathbb{R}^3$.

Definizione di sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$.
W si dice **sottospazio vettoriale** di V se W è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ a sua volta rispetto alle stesse operazioni definite in V e indotte da V in W.
Si scrive $W \sqsubseteq V$.

Teorema 2 - Caratterizzazione dei sottospazi vettoriali - forma I

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$.
W è un sottospazio di V se e solo se

(a). $\forall\ w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$ (W è chiuso rispetto a $+$);

(b). $\forall\ w \in W, a \in \mathbb{R}$, $aw \in W$ (W è chiuso rispetto a $\cdot$);

(c). $W \neq \emptyset$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se W è un sottospazio di V (ipotesi), allora è uno spazio vettoriale e quindi la somma di due elementi di W sta in W, il prodotto di uno scalare per un elemento di W sta in W e almeno un elemento (per esempio il vettore nullo) sta in W; dunque le tre proposizioni sono verificate.

$\Leftarrow$ Viceversa, se $W \subseteq V$ e valgono la (a), (b) e (c) (ipotesi); allora le operazioni indotte su W soddisfano gli assiomi 1-4-5-6-7-8 (perchè sono verificati per le operazioni in V).
Inoltre, poichè $W \neq \emptyset$ (ipotesi (c)), esiste almeno un $w \in W$.
Vale che $\mathbf{0} = 0w \in W$ perchè W è chiuso rispetto $\cdot$ (ipotesi (b)). Dunque vale l'assioma 2.
Inoltre, per ogni $w \in W$, allora $-w = (-1)w$ e siccome $(-1)w \in W$ perchè W è chiuso rispetto $\cdot$ (ipotesi (b)), $-w \in W$. Vale dunque l'assioma 3.

La condizione (c) può essere sostituita da $\mathbf{0} \in W$.

Dunque per verificare che un sottoinsieme W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio, basta verificare che sia chiuso rispetto alle operazioni e contenga il vettore nullo.

Osservazioni

- Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora $\{0\}$ e V sono sottospazi di V detti **sottospazi banali.**

- Per un sottospazio vale sempre che $W \neq \emptyset$!!!!

- Dato lo spazio dei vettori del piano, i sottospazi non banali sono le rette passanti per l'origine.

- Dato lo spazio dei vettori dello spazio, i sottospazi non banali sono le rette e i piani passanti per l'origine.

- Se $W \sqsubseteq V$ e $v_1, ..., v_n \in W$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, allora una combinazione lineare di elementi di W con coordinate scalari appartiene ancora a W, ossia $a_1 v_1 + ... + a_n v_n \in W$

Esempio

Sia $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^2$), W è una retta passante per l'origine (insieme dei punti (x, y) tali che $y = x/3$), quindi $W \sqsubseteq V$.

Esempio

Sia $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^2$), W è una retta passante per l'origine (insieme dei punti (x, y) tali che $y = x/3$), quindi $W \sqsubseteq V$.
- **Si può verificare direttamente**: si ha

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\} = \{(3y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

Ovviamente $W \subseteq \mathbb{R}^2$ e precisamente è l'insieme delle coppie in cui la prima componente è tripla della seconda. Verifichiamo se valgono le proprietà caratterizzanti.

Sia $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^2$), W è una retta passante per l'origine (insieme dei punti (x, y) tali che $y = x/3$), quindi $W \sqsubseteq V$.
- **Si può verificare direttamente**: si ha

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\} = \{(3y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

Ovviamente $W \subseteq \mathbb{R}^2$ e precisamente è l'insieme delle coppie in cui la prima componente è tripla della seconda. Verifichiamo se valgono le proprietà caratterizzanti.

  - Se w_1 e $w_2 \in W$, allora esistono $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, tali che $w_1 = (3y_1, y_1), w_2 = (3y_2, y_2)$. Quindi

$$w_1 + w_2 = (3y_1, y_1) + (3y_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, y_1 + y_2) = (3(y_1 + y_2), y_1 + y_2)$$

e perciò $w_1 + w_2 \in W$.

Esempio

Sia $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^2$), W è una retta passante per l'origine (insieme dei punti (x, y) tali che $y = x/3$), quindi $W \sqsubseteq V$.
- **Si può verificare direttamente**: si ha

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\} = \{(3y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

  Ovviamente $W \subseteq \mathbb{R}^2$ e precisamente è l'insieme delle coppie in cui la prima componente è tripla della seconda. Verifichiamo se valgono le proprietà caratterizzanti.

  - Se w_1 e $w_2 \in W$, allora esistono $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, tali che $w_1 = (3y_1, y_1), w_2 = (3y_2, y_2)$. Quindi

  $$w_1 + w_2 = (3y_1, y_1) + (3y_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, y_1 + y_2) = (3(y_1 + y_2), y_1 + y_2)$$

    e perciò $w_1 + w_2 \in W$.
  - Se $w \in W$, allora esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $w = (3y, y)$. Se $a \in \mathbb{R}$,

  $$a(3y, y) = (3ay, ay) = (3(ay), ay)$$

    Perciò $aw \in W$.

Sia $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^2$), W è una retta passante per l'origine (insieme dei punti (x,y) tali che $y = x/3$), quindi $W \sqsubseteq V$.
- **Si può verificare direttamente**: si ha

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\} = \{(3y,y), y \in \mathbb{R}\}$$

Ovviamente $W \subseteq \mathbb{R}^2$ e precisamente è l'insieme delle coppie in cui la prima componente è tripla della seconda. Verifichiamo se valgono le proprietà caratterizzanti.

  - Se w_1 e $w_2 \in W$, allora esistono $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, tali che $w_1 = (3y_1, y_1), w_2 = (3y_2, y_2)$. Quindi

  $$w_1 + w_2 = (3y_1, y_1) + (3y_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, y_1 + y_2) = (3(y_1 + y_2), y_1 + y_2)$$

  e perciò $w_1 + w_2 \in W$.
  - Se $w \in W$, allora esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $w = (3y, y)$. Se $a \in \mathbb{R}$,

  $$a(3y, y) = (3ay, ay) = (3(ay), ay)$$

  Perciò $aw \in W$.
  - $(0,0) \in W$ perchè $0 = 3 \cdot 0$.

  In conclusione $W \sqsubseteq \mathbb{R}^2$.

Esempio

Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^3$), W è un piano passante per l'origine, quindi $W \sqsubseteq V$.

Esempio

Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^3$), W è un piano passante per l'origine, quindi $W \sqsubseteq V$.
- **Si può verificare direttamente**: si ha

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z\} = \\ &= \{(x, x + z, z), x, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^3$), W è un piano passante per l'origine, quindi $W \sqsubseteq V$.
- **Si può verificare direttamente**: si ha

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z\} = \\ &= \{(x, x + z, z), x, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  - Se $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$, allora

$$y_1 = x_1 + z_1, \quad y_2 = x_2 + z_2$$

Occorre provare che il vettore somma $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ appartiene a W. Infatti basta verificare che

$$y_1 + y_2 = (x_1 + z_1) + (x_2 + z_2) = (x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)$$

Pertanto il vettore somma appartiene a W.

Esempio

Sia $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^3$), W è un piano passante per l'origine, quindi $W \sqsubseteq V$.
- **Si può verificare direttamente**: si ha

$$\begin{aligned} W &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z\} = \\ &= \{(x, x+z, z), x, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  - Se $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$, allora

$$y_1 = x_1 + z_1, \quad y_2 = x_2 + z_2$$

    Occorre provare che il vettore somma $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ appartiene a W. Infatti basta verificare che

$$y_1 + y_2 = (x_1 + z_1) + (x_2 + z_2) = (x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)$$

    Pertanto il vettore somma appartiene a W.
  - Se $(x,y,z) \in W$, ossia $y = x + z$, occorre provare che il vettore (ax, ay, az) appartiene a W, con $a \in \mathbb{R}$. Infatti

$$ay = a(x + z) = (ax) + (az)$$

    Dunque (ax, ay, az) appartiene a W

Esempio

Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

- **Geometricamente** (ricordiamo che V è in corrispondenza con $\mathbb{R}^3$), W è un piano passante per l'origine, quindi $W \sqsubseteq V$.
- **Si può verificare direttamente**: si ha

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z\} = \\ &= \{(x, x + z, z), x, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  - Se $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$, allora
$$y_1 = x_1 + z_1, \quad y_2 = x_2 + z_2$$
Occorre provare che il vettore somma $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ appartiene a W. Infatti basta verificare che
$$y_1 + y_2 = (x_1 + z_1) + (x_2 + z_2) = (x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)$$
Pertanto il vettore somma appartiene a W.
  - Se $(x, y, z) \in W$, ossia $y = x + z$, occorre provare che il vettore (ax, ay, az) appartiene a W, con $a \in \mathbb{R}$. Infatti
$$ay = a(x + z) = (ax) + (az)$$
Dunque (ax, ay, az) appartiene a W
  - $(0, 0, 0) \in W$ perchè $0 = 0 + 0$.

Osservazione

Se le condizioni che caratterizzano gli elementi $(x_1, ..., x_n)$ di un sottoinsieme W di $\mathbb{R}^n$ sono esprimibili mediante una equazione o un sistema di equazioni di primo grado in $x_1, ..., x_n$ prive del termine noto, allora W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
In particolare, condizioni che garantiscono che un sottoinsieme è un sottospazio (condizioni sufficienti):

- un'equazione di primo grado in x, y priva del termine noto rappresenta in $\mathbb{R}^2$ una retta per l'origine
- un'equazione di primo grado in x, y, z priva del termine noto rappresenta in $\mathbb{R}^3$ un piano per l'origine
- un sistema di due equazioni (non equivalenti) di primo grado in x, y, z prive del termine noto rappresenta in $\mathbb{R}^3$ una retta per l'origine

Possono esserci altri casi (vedi esercizi).

Teorema 3 - Caratterizzazione dei sottospazi vettoriali - forma II

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$.
W è un sottospazio di V se e solo se $\forall\ c \in \mathbb{R}$, $\forall w_1, w_2 \in W$

$$cw_1 - w_2 \in W$$

Teorema 3 - Caratterizzazione dei sottospazi vettoriali - forma II

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$.
W è un sottospazio di V se e solo se $\forall\ c \in \mathbb{R}$, $\forall w_1, w_2 \in W$

$$cw_1 - w_2 \in W$$

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Se W è un sottospazio di V, allora è uno spazio vettoriale e quindi $cw_1 - w_2 \in W$.

Teorema 3 - Caratterizzazione dei sottospazi vettoriali - forma II

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$.
W è un sottospazio di V se e solo se $\forall\ c \in \mathbb{R}$, $\forall w_1, w_2 \in W$

$$cw_1 - w_2 \in W$$

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Se W è un sottospazio di V, allora è uno spazio vettoriale e quindi $cw_1 - w_2 \in W$.
$\Leftarrow$ Viceversa, se $W \subseteq V$ per dimostrare che è un sottospazio di V, occorre far vedere che valgono le tre proprietà della caratterizzazione (forma I):

- Per $c = 1$, $w_1 = w_2 = w \in W$, vale che $1w - w \in W$ per l'ipotesi e dunque $\mathbf{0} \in W$
- Sia $c \in \mathbb{R}$, $w \in W$, allora $cw - \mathbf{0} \in W$ per l'ipotesi e dunque $cw \in W$
- Sia $w_1, w_2 \in W$. Allora $(-1)w_2 \in W$. Segue che $1w_1 - (-1)w_2 \in W$ per l'ipotesi e dunque $w_1 + w_2 \in W$

Sia $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con la II caratterizzazione.
Si ha

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\} = \{(3y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

Ovviamente $W \subseteq \mathbb{R}^2$ e precisamente è l'insieme delle coppie in cui la prima componente è tripla della seconda. Se w_1 e $w_2 \in W$, allora esistono $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, tali che $w_1 = (3y_1, y_1)$, $w_2 = (3y_2, y_2)$.
Quindi

$$\begin{aligned} cw_1 - w_2 &= c(3y_1, y_1) - (3y_2, y_2) = (3cy_1, cy_1) - (3y_2, y_2) = \\ &= (3cy_1 - 3y_2, cy_1 - y_2) = (3(cy_1 - y_2), cy_1 - y_2) \end{aligned}$$

e perciò $cw_1 - w_2 \in W$. In conclusione $W \sqsubseteq \mathbb{R}^2$.

Esempio

Sia $W = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} = \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0)\}$, $n \geq 2$.

Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Basta verificare che per ogni $c \in \mathbb{R}$ e $w_1 = (x_1, ..., x_{n-1}, 0), w_2 = (y_1, ..., y_{n-1}, 0) \in W$, $cw_1 - w_2 \in W$ (II forma).

In effetti

$$c(x_1, ..., x_{n-1}, 0) - (y_1, ..., y_{n-1}, 0) = (cx_1, ..., cx_{n-1}, 0) - (y_1, ..., y_{n-1}, 0)$$
$$= (cx_1 - y_1, ..., cx_{n-1} - y_{n-1}, 0) \in W$$

Analogamente se $W = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\} = \{(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)\}$, $n \geq 2$.

Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Basta verificare che per ogni $c \in \mathbb{R}$ e
$w_1 = (x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n), w_2 = (y_1, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ..., y_n) \in W$, $cw_1 - w_2 \in W$ (II forma).

In effetti

$$c(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) - (y_1, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ..., y_n) =$$
$$= (cx_1, ..., cx_{i-1}, 0, cx_{i+1}, ..., cx_n) - (y_1, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ..., y_n)$$
$$= (cx_1 - y_1, ..., cx_{i-1} - y_{i-1}, 0, cx_{i+1} - y_{i+1}, ..., cx_n - y_n) \in W$$

Insersezione di sottospazi: Teorema 4

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano W_1 e W_2 sottospazi di V.
Allora $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V.
Più in generale l'intersezione di una famiglia di sottospazi di V è un sottospazio di V.

Insersezione di sottospazi: Teorema 4

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano W_1 e W_2 sottospazi di V.
Allora $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V.
Più in generale l'intersezione di una famiglia di sottospazi di V è un sottospazio di V.

Dimostrazione.
Si usa la forma I della caratterizzazione dei sottospazi, verificando che valgono le tre proprietà.

- Poichè $\mathbf{0} \in W_1$ e $\mathbf{0} \in W_2$, allora $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$
- Siano $v_1, v_2 \in W_1 \cap W_2$; allora $v_1, v_2 \in W_1$ e $v_1, v_2 \in W_2$. Poichè W_1 e W_2 sono sottospazi, allora $v_1 + v_2 \in W_1$ e $v_1 + v_2 \in W_2$. Quindi $v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$.
- Siano $a \in \mathbb{R}$ e $v \in W_1 \cap W_2$; allora $v \in W_1$ e $v \in W_2$. Poichè W_1 e W_2 sono sottospazi, allora $av \in W_1$ e $av \in W_2$. Quindi $av \in W_1 \cap W_2$.

L'unione di sottospazi non è un sottospazio.

Per esempio, se nell'insieme dei vettori del piano si considerano gli assi coordinati ($W_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$)in $\mathbb{R}^2$) ciascuno di essi è un sottospazio, ma la loro unione non lo è perchè non è chiusa rispetto alla somma. Infatti presi ad esempio $(1, 0) \in W_1$ e $(0, 1) \in W_2$, la somma

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2$$

Teorema 5

Siano W_1 e W_2 sottospazi di V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si consideri

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

ossia l'insieme i cui elementi sono somma di un elemento di W_1 e di un elemento di W_2.

1. $W_1 + W_2$ è un **sottospazio** di V: $W_1 + W_2 \sqsubseteq V$
2. $W_1 \cup W_2$ è un **sottoinsieme** di $W_1 + W_2$: $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$
3. Se $W \sqsubseteq V$ e $W_1 \cup W_2 \subseteq W$, allora $W_1 + W_2 \subseteq W$

In altri termini $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene $W_1 \cup W_2$.

Sottospazio somma II

Dimostrazione.

1. Si dimostra che $W_1 + W_2 \sqsubseteq V$: si usa la forma I.
   $\mathbf{0} \in W_1, W_2$; dunque $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$.
   Siano $v, w \in W_1 + W_2$; allora $v = v_1 + v_2$ e $w = w_1 + w_2$, con $v_1, w_1 \in W_1$, $v_2, w_2 \in W_2$. Allora
   $$v + w = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \in W_1 + W_2$$
   perchè essendo W_1, W_2 sottospazi, $v_i + w_i \in W_i$, $i = 1, 2$.
   Sia $c \in \mathbb{R}, w \in W_1 + W_2$; allora $w = w_1 + w_2$, con $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$. Allora
   $$cw = c(w_1 + w_2) = cw_1 + cw_2 \in W_1 + W_2$$
   perchè essendo W_1, W_2 sottospazi, $cw_i \in W_i$, $i = 1, 2$.
2. Si dimostra che $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$.
   Sia $w \in W_1 \cup W_2$; allora $w \in W_1$ oppure $w \in W_2$; nel primo caso $w = w + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$, mentre nel secondo caso $w = \mathbf{0} + w \in W_1 + W_2$.
3. Sia $W \sqsubseteq V$ e $W_1 \cup W_2 \subseteq W$. Occorre provare che $W_1 + W_2 \subseteq W$.
   Sia $w = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$, con $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$. Allora $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2 \subseteq W$. Essendo W un sottospazio $w = w_1 + w_2 \in W$.

Definizione di somma e somma diretta

Siano W_1 e W_2 sottospazi dello spazio vettoriale V.
$W_1 + W_2$ è chiamato **sottospazio somma** dei due sottospazi W_1 e W_2.
Se in particolare $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, la somma si dice **diretta** e si scrive $W_1 \oplus W_2$.

Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e $W_1 + W_2 = V$, V **si dice somma diretta di W_1 e W_2 e si scrive $V = W_1 \oplus W_2$.**

Osservazioni

Sia W è un sottospazio di V; si dice sottospazio complementare a W in V il sottospazio di U di V tale che $V = W \oplus U$.
Se W è un sottospazio di V, il suo complementare $V - W$ non può esserlo, perchè $\mathbf{0}$ non appartiene al complemento.
Nel piano, data una retta per l'origine, chi è il sottospazio complementare?
Nello spazio, data una retta per l'origine, chi è il sottospazio complementare? Dato un piano passante per l'origine, chi è il sottospazio complementare?

Esempio

Considero il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ dato da $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$.

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - 3z\} = \{(2y - 3z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2y, y, 0) + (-3z, 0, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1),\ y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Quindi W si può considerare come l'**insieme di tutte le combinazioni lineari** di $v_1 = (2, 1, 0)$ e di $v_2 = (-3, 0, 1)$.
Si dice che v_1 e v_2 sono un insieme di **generatori** oppure **generano** il sottospazio W; si può scrivere che $W = [v_1, v_2]$ oppure che $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$.

Esempio

Considero il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ dato da $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$.

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - 3z\} = \{(2y - 3z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2y, y, 0) + (-3z, 0, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1),\ y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Quindi W si può considerare come l'**insieme di tutte le combinazioni lineari** di $v_1 = (2, 1, 0)$ e di $v_2 = (-3, 0, 1)$.
Si dice che v_1 e v_2 sono un insieme di **generatori** oppure **generano** il sottospazio W; si può scrivere che $W = [v_1, v_2]$ oppure che $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$.

Teorema 6

Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori di V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si consideri il sottoinsieme di V dato da tutte le combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_n$:

$$W = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n : a_i \in \mathbb{R}, i = 1., , , ., n\}$$

W è un sottospazio vettoriale di V che si dice **sottospazio generato** da $v_1, \ldots, v_n$.
$v_1, \ldots, v_n$ sono i **generatori** di W e W si può indicare con $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ oppure con $\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Dimostrazione.
Basta far vedere che $\forall\ c \in \mathbb{R}, w_1, w_2 \in W,\ cw_1 - w_2 \in W$ (forma II).
Siano $w_1 = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$; $w_2 = y_1 v_1 + ... + y_n v_n$; allora

$$\begin{aligned} cw_1 - w_2 &= c(x_1 v_1 + ... + x_n v_n) - (y_1 v_1 + ... + y_n v_n) = \\ &= (cx_1 v_1 + ... + cx_n v_n) - (y_1 v_1 + ... + y_n v_n) = \\ &= (cx_1 - y_1) v_1 + ... + (cx_n - y_n) v_n \end{aligned}$$

Questa è una combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ e quindi esso è un elemento di W.

Si consideri lo spazio vettoriale dei vettori in corrispondenza biunivoca con il piano, fissato un sistema di riferimento con origine O, ossia con i vettori applicati in O.

- $n = 1$, $v_1 = \mathbf{0}$. $W = \{\mathbf{0}\}$ è un sottospazio, ossia il sottospazio dato dal solo $\mathbf{0}$.

Si consideri lo spazio vettoriale dei vettori in corrispondenza biunivoca con il piano, fissato un sistema di riferimento con origine O, ossia con i vettori applicati in O.

- $n = 1$, $v_1 = \mathbf{0}$. $W = \{\mathbf{0}\}$ è un sottospazio, ossia il sottospazio dato dal solo $\mathbf{0}$.
- $n = 1$, $v_1 = [\overrightarrow{OP}] \neq \mathbf{0}$. Il sottospazio generato da v_1 è l'insieme di tutti i vettori applicati $\overrightarrow{OB}$ che appartengono alla retta che contiene $\overrightarrow{OP}$.

Si consideri lo spazio vettoriale dei vettori in corrispondenza biunivoca con il piano, fissato un sistema di riferimento con origine O, ossia con i vettori applicati in O.

- $n = 1$, $v_1 = \mathbf{0}$. $W = \{\mathbf{0}\}$ è un sottospazio, ossia il sottospazio dato dal solo $\mathbf{0}$.
- $n = 1$, $v_1 = [\overrightarrow{OP}] \neq \mathbf{0}$. Il sottospazio generato da v_1 è l'insieme di tutti i vettori applicati $\overrightarrow{OB}$ che appartengono alla retta che contiene $\overrightarrow{OP}$.
- $n = 2$; se $v_1 = \overrightarrow{OP_1}, v_2 = \overrightarrow{OP_2}$ sono allineati, allora il sottospazio W è la retta cui appartengono.
  Se i due vettori non sono allineati, allora il sottospazio W è tutto il piano.

Sia S un sottoinsieme dello spazio vettoriale V.

Teorema 7

Sia $S \subseteq V$, V spazio vettoriale su K. Allora se si denota con $[S]$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di S, vale che

1. $[S] \sqsubseteq V$
2. $S \subseteq [S]$
3. Se $W \sqsubseteq V$ e $S \subseteq W$, allora $[S] \subseteq W$

In altri termini, $[S]$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene S.

Dimostrazione.

1. E' una variante del Teorema 6, già provato.
2. Sia $v_i \in S$, allora v_i si scrive come combinazione lineare di se stesso e di altri vettori di S: $v_i = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + ... + 0v_n \in [S]$. Dunque $v_i \in [S]$.
3. Sia $v \in [S]$. Allora esistono $a_1, ..., a_n$ tali che $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ con $v_i \in S$.
   Siccome $v_i \in S \subseteq W$, allora $v_i \in W$. Siccome W è un sottospazio di V, allora una combinazione lineare di elementi di W appartiene a W. Pertanto $v \in W$.

Definizione di sottospazio associato ad S

Sia $S \subseteq V$, V spazio vettoriale su K.
Si definisce il **sottospazio associato a** S nel seguente modo:

- se $S = \emptyset$, $[S] = \{0\}$
- Se $S = \{v_1, \ldots v_n\}$, $n \geq 1$, $[S] = [v_1, \ldots, v_n]$, ossia il sottospazio di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_n$ a coefficienti in K
- Se S è infinito, allora $[S]$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti in K dei sottoinsiemi finiti di S:

$$[S] = \{v \in V : \exists k \geq 1, \exists v_1, \ldots, v_k \in S, \exists\ x_1, \ldots, x_k \in K : v = x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k\}$$

$[S]$ si dice il sottospazio di V generato da S.

Se $[S] = V$, allora si dice che S genera V o che S è un insieme di generatori di V.
Se esiste un insieme finito S tale che $[S] = V$, allora si dice che V è **finitamente generato**.

Se V è uno spazio vettoriale su K e $S \subseteq V$, allora

$$[S] = V \quad \Leftrightarrow \quad V \subseteq [S],$$

in quanto l'inclusione $[S] \subseteq V$ è sicuramente vera.

Esempi

- $S = \{v_1\}$, con v_1 vettore del piano non nullo; allora $[S] = \{\alpha v_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$ e quindi $[S]$ è una retta contenente v_1. In questo caso $[S] \neq V$ e perciò S non genera il piano V.
- $S = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\} \subseteq V$ genera V, perchè ogni vettore del piano si scrive come combinazione degli elementi di S, ossia $v = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$; si conlude che $[S] = V$, ossia S genera il piano V.
- $S = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\} \subseteq V$ genera V, ossia lo spazio dei vettori di $[S] = V$.

Osservazioni II

- $S = \{u, v\}$, dove u e v sono vettori dello spazio non nulli e non paralleli; allora l'insieme delle combinazioni lineari di u e v, ossia $w = \alpha u + \beta v$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ è il piano contenente u e v passanti per l'origine; in questo caso $[S]$ non genera lo spazio.
- $S = \{(1,0), (0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^2$; infatti ogni elemento (x, y) di $\mathbb{R}^2$ si scrive come $(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$
- $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$;
- $S = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ...), ..., (0, 0, ..., 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ genera R^n
- $S = \{1, x, x^2, ..., x^n\} \subseteq P_n(x)$ genera $P_n(x)$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \in P_n(x)$$

- $S = \{1, x, x^2, ..., x^n, x^{n+1}, ... : n \in \mathbb{N}\} \subseteq P(x)$ genera $P(x)$
I polinomi di qualunque grado appartengono a $P(x)$.

Esempi I

1. Dire se $v = (5, -3, 2) \in [v_1, v_2]$, con $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$.
   Occorre vedere se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

   $$(5, -3, 2) = a(1, -1, 0) + b(1, 0, 1)$$

   In altri termini occorre trovare a, b tali che

   $$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ -a &= -3 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

   Dunque $b = 2, a = 3$, ossia $v = 3v_1 + 2v_2$ (geometricamente significa che il vettore v appartiene al piano generato da v_1 e da v_2).

2. Dire se $v = (1, 2, 0) \in [v_1, v_2]$, con $v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1)$.
   Occorre vedere se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$(1, 2, 0) = a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1)$$

   In altri termini occorre trovare a, b tali che

$$\begin{aligned} -a - b &= 1 \\ a &= 2 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

   Questo è impossibile; dunque $v \notin [v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1)]$ (geometricamente v non appartiene al piano generato da v_1 e da v_2).

3. Dire se $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.
   Occorre vedere se ogni elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere come combinazione di $(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$, ossia esistono a, b, c tali che
   $$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$$
   Occorre che
   $$\begin{aligned} a+b+c &= x \\ b+c &= y \\ c &= z \end{aligned}$$
   Questo sistema è soddisfatto da $a = x - y, b = y - z, c = z$.
4. Trovare il sottospazio generato da $S = \{(1,3),(-4,5)\}$.
   Il sottospazio $[S]$ è dato da tutti i vettori del tipo
   $$x(1,3) + y(-4,5) = (x - 4y, 3x + 5y)$$
   ossia $[S] = \{(x - 4y, 3x + 5y) \in \mathbb{R}^2\}$.
5. Trovare un insieme di generatori per $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$. Poichè $y = 2x$, vale che $W = \{(x,2x), x \in \mathbb{R}\} = [(1,2)]$.
   Dunque $(1,2)$ è un generatore.

Definizione di vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Siano $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, con V spazio vettoriale su K.
Si dice che i vettori sono **linearmente dipendenti** se esistono scalari non tutti nulli $a_1, ..., a_n$ tali che:

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$$

ossia se è possibile ottenere il vettore nullo come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ con scalari non tutti nulli.
Si dice che i vettori sono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti, ossia se da

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$$

segue che $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, ossia se da $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$ segue che $a_1 = ... = a_n = 0$.

Definizione di vettori linearmente dipendenti e indipendenti

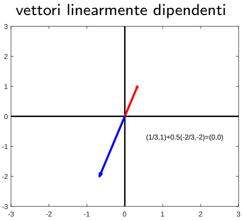
Siano $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, con V spazio vettoriale su K.
Si dice che i vettori sono **linearmente dipendenti** se esistono scalari non tutti nulli $a_1, ..., a_n$ tali che:

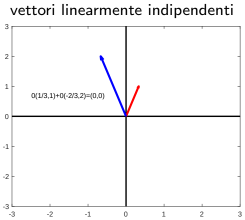
$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$$

ossia se è possibile ottenere il vettore nullo come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ con scalari non tutti nulli.
Si dice che i vettori sono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti, ossia se da

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$$

segue che $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, ossia se da $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$ segue che $a_1 = ... = a_n = 0$.





Definizione di vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Siano $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, con V spazio vettoriale su K.
Si dice che i vettori sono **linearmente dipendenti** se esistono scalari non tutti nulli $a_1, ..., a_n$ tali che:

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$$

ossia se è possibile ottenere il vettore nullo come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ con scalari non tutti nulli.
Si dice che i vettori sono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti, ossia se da

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$$

segue che $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, ossia se da $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$ segue che $a_1 = ... = a_n = 0$.

Sia dato un insieme infinito S di elementi di V.
S è costituito da elementi linearmente dipendenti se esiste un sottoinsieme finito di S che è linearmente dipendente.
S è costituito da elementi linearmente indipendenti se ogni sottoinsieme finito di S ha elementi linearmente indipendenti.

- Verificare se $(1,2)$ e $(-1,3)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
  Si considera:
  $$a(1,2) + b(-1,3) = (0,0)$$
  Dunque $a - b = 0; 2a + 3b = 0$, che vuol dire $a = 0,\ b = 0$. Dunque i vettori sono linearmente indipendenti, perchè non è possibile trovare scalari non nulli nella combinazione lineare che fornisce il vettore nullo.
- Verificare se $(1,2)$ e $(2,4)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
  Si considera:
  $$a(1,2) + b(2,4) = (0,0)$$
  Dunque $a + 2b = 0; 2a + 4b = 0$, che vuol dire $a = -2b$. Dunque i vettori sono linearmente dipendenti, perchè esistono valori di a e b non nulli ($b = 1, a = -2; b = 2, a = -4; ....$) tali che la combinazione lineare fornisce il vettore nullo.

- Verificare se $v_1 = (3,3,4)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (0,0,1)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
  Si considera:
  $$a(3,3,4) + b(1,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$$
  Dunque $3a + b = 0; 3a + b = 0; 4a + c = 0$, che vuol dire $b = -3a; c = -4a$. Dunque ci sono infinite soluzioni non nulle $(a, -3a, -4a)$. Dunque i vettori sono linearmente dipendenti: se si fissa $a = 1$, si ha
  $$v_1 - 3v_2 - 4v_3 = 0$$
  Dunque $v_1 = 3v_2 + 4v_3$, ossia quando un insieme di vettori è costituito da elementi linearmente dipendenti, allora un vettore si scrive come combinazione lineare degli altri.
- Verificare che l'insieme $S = \{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è costituito da vettori linearmente indipendenti.
  Da $a(1,0) + b(0,1) = (0,0)$ segue $a = 0, b = 0$.
- Verificare che l'insieme $S = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\} \subseteq V$ è costituito da vettori linearmente indipendenti.
  Infatti $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = 0$ se e solo se $x = y = 0$.

Teorema 8

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, ..., v_n$ elementi di V, con $n > 1$.
$v_1, ..., v_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ uno di questi vettori è combinazione lineare degli altri.

Teorema 8

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n$ elementi di V, con $n > 1$.
$v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ uno di questi vettori è combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, dalla definizione, esistono scalari non tutti nulli $a_1, \dots, a_n$ tali che:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}$$

Sia per esempio $a_1 \neq 0$. Allora

$$v_1 = \frac{-a_2}{a_1} v_2 + \dots + \frac{-a_n}{a_1} v_n$$

e quindi v_1 è combinazione lineare degli altri vettori $v_2, \dots, v_n$.

Teorema 8

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n$ elementi di V, con $n > 1$.
$v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ uno di questi vettori è combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, dalla definizione, esistono scalari non tutti nulli $a_1, \dots, a_n$ tali che:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}$$

Sia per esempio $a_1 \neq 0$. Allora

$$v_1 = \frac{-a_2}{a_1} v_2 + \dots + \frac{-a_n}{a_1} v_n$$

e quindi v_1 è combinazione lineare degli altri vettori $v_2, \dots, v_n$.
$\Leftarrow$ Sia v_1 (per esempio) combinazione lineare di $v_2, \dots, v_n$. Allora

$$v_1 = b_2 v_2 + \dots + b_n v_n \quad b_2, \dots, b_n \in K$$

Segue

$$v_1 + (-b_2) v_2 + \dots + (-b_n) v_n = \mathbf{0}$$

e almeno il coefficiente di v_1 è non nullo. Dunque $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

Osservazione

- $n = 1$; v linearmente dipendente $\Leftrightarrow v = \mathbf{0}$
- $n = 2$; v_1, v_2 linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ uno dei due vettori è multiplo dell'altro, ossia esiste $\alpha \neq 0$ tale che $v_1 = \alpha v_2$.
  Se v_1, v_2 sono vettori, dire che sono linearmente dipendenti vuol dire che sono paralleli.
- Se 0 appartiene a un insieme S di vettori, allora gli elementi di S sono dipendenti (*non vale il viceversa!!*).

Esempi

- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in V$ sono linearmente indipendenti (anche a due a due).
- Due vettori del piano sono linearmente dipendenti se e solo se sono allineati (paralleli).
- Tre vettori dello spazio sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.

Esempi II

- $(1,0,0),(1,2,0),(1,2,3)$ sono dipendenti? Data la combinazione lineare:

$$a_1(1,0,0) + a_2(1,2,0) + a_3(1,2,3) = 0$$

vediamo per quali valori di a_1, a_2, a_3 è verificata:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

implica $a_3 = 0, a_2 = 0, a_1 = 0$. Dunque i vettori sono linearmente indipendenti.

- $(1,2,0),(1,2,3),(3,6,3)$ sono dipendenti? Data la combinazione lineare:

$$a_1(1,2,0) + a_2(1,2,3) + a_3(3,6,3) = 0$$

vediamo per quali valori di a_1, a_2, a_3 è verificata:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 6a_3 &= 0 \\ 3a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

implica $a_2 = -a_3, a_1 = -2a_3$. Dunque i vettori sono linearmente dipendenti.

Esempi III

- $(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1) \in K^n$ sono linearmente indipendenti.
- $1, x, ..., x^n \in P_n(x)$ sono linearmente indipendenti.
  Infatti, per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio non nullo di grado n a coefficienti reali si annulla solo se x è uguale a uno zero del polinomio e gli zeri sono al più n numeri distinti; di conseguenza per essere uguale a zero per ogni x, il polinomio deve avere tutti i coefficienti nulli.
- $1, x, ..., x^n, x^{n+1}, ... \in P(x)$ sono linearmente indipendenti (per il teorema fondamentale dell'algebra).

Teorema 9

Sia V uno spazio vettoriale su K. $v_1, ..., v_n \in V$.

1. Se $\mathbf{0}$ appartiene a un insieme di vettori, essi sono linearmente dipendenti.
2. Se $v_1, ...v_n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow v_1, ..., v_r$ lo sono pure per ogni $r \leq n$.
3. Se $v_1, ...v_n$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow v_1, ..., v_n, v$, con $v \in V$ lo sono pure.
4. Siano $v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ...v_n$ linearmente indipendenti. Allora i sottospazi generati da vettori diversi hanno intersezione data dal vettore nullo: $[\{v_1, ...v_r\}] \cap [\{v_{r+1}, ..., v_n\}] = \{\mathbf{0}\}$

Dimostrazione.

1. Infatti, comunque siano presi $v_1, ..., v_n \in V$, si ha

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_n = \mathbf{0}$$

e dunque almeno il coefficiente di $\mathbf{0}$ nella combinazione lineare è non nullo.

2. Se, per assurdo, $v_1, ...v_r$, $r \leq n$ fossero linearmente dipendenti, esisterebbero $a_1, ..., a_r$ non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + ... + a_r v_r = \mathbf{0}$$

Ma allora anche

$$a_1 v_1 + ... + a_r v_r + 0 \cdot v_{r+1} + ... + 0 \cdot v_n = \mathbf{0}$$

e quindi $v_1, ..., v_n$ sarebbero linearmente dipendenti, contraddicendo l'ipotesi. Dunque $v_1, ..., v_r$, $r \leq n$ sono indipendenti.

3. Se $v_1, ...v_n$ sono linearmente dipendenti, esistono $a_1, ..., a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0} = a_1 v_1 + ... + a_n v_n + 0 \cdot v$$

Ma allora anche $v_1, ..., v_n, v$ sono dipendenti.

4. Si sa che $\{\mathbf{0}\} \subseteq [\{v_1, ...v_r\}] \cap [\{v_{r+1}, ..., v_n\}]$, perchè l'intersezione di sottospazi è un sottospazio.
Assumiamo $w \in [\{v_1, ...v_r\}] \cap [\{v_{r+1}, ..., v_n\}]$. Allora w è combinazione lineare sia di $v_1, ..., v_r$, sia di $v_{r+1}, ..., v_n$:

$$\begin{aligned} w &= x_1 v_1 + ... + x_r v_r \\ w &= y_{r+1} v_{r+1} + ... + y_{r+n} v_n \end{aligned}$$

Allora, sottraendo membro a membro, segue che
$\mathbf{0} = x_1 v_1 + ... + x_r v_r - y_{r+1} v_{r+1} - ... - y_{r+n} v_n$.
Siccome i vettori $v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ...v_n$ sono linearmente indipendenti, segue che
$x_1 = ... = x_r = y_{r+1} = ... = y_{r+n} = 0$.
Dunque $w = \mathbf{0}$. Pertanto $[\{v_1, ...v_r\}] \cap [\{v_{r+1}, ..., v_n\}] \subseteq \{\mathbf{0}\}$.

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, ..., v_n \in V$ linearmente indipendenti.
Esiste **un solo modo** di scrivere un vettore v come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$.
Infatti se $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$, $v = y_1 v_1 + ... + y_n v_n$, allora

$$x_i = y_i \quad i = 1, ..., n$$

Infatti, sottraendo membro a membro, si ha

$$\mathbf{0} = (x_1 - y_1)v_1 + (x_2 - y_2)v_2 + ... + (x_n - y_n)v_n$$

e siccome i vettori $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, segue che $x_i - y_i = 0$ per ogni i.

Definizione di base

Sia V uno spazio vettoriale su K. Si dice **base** di V un insieme elementi di V tali che

- sono generatori di V
- sono linearmente indipendenti

In base all'osservazione precedente, **fissato l'ordine degli elementi di una base**, le componenti di ogni vettore $v \in V$ rispetto alla base **sono univocamente determinate**. Esse vengono dette **coordinate** di v rispetto alla base fissata.

Esempi

Quali di questi insiemi sono basi di $\mathbb{R}^2$?

- $S = \{(1,2),(2,4)\}$: NO (lin.dip.)
- $S = \{(1,2)\}$: NO (non genera)
- $S = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$: NO (lin. dip.)
- $S = \{(1,1),(2,5)\}$: SI
  Infatti si ha

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(2,5) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2\beta; y = \alpha + 5\beta$$

  e quindi

$$\alpha = \frac{5x - 2y}{3} \quad \beta = \frac{y - x}{3}$$

  Dunque $(1,1)$ e $(2,5)$ sono generatori. Inoltre se si pone $x = 0, y = 0$ per controllare la lineare indipendenza, $\alpha = \beta = 0$. Dunque i due vettori formano una base.

E' facile verificare che:

- $(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)$ è una base di K^n (**base canonica**); gli elementi di tale base sono indicati convenzionalmente anche con $e_i = (0, ..., 1, ...0)$, ove 1 occupa la posizione i-esima del vettore
- $1, x, ..., x^n$ è una base di $P_n(x)$
- $1, x, ..., x^n, x^{n+1}, ...,\ n \in \mathbb{N}$ è una base di $P(x)$ (è una base non finita)
- $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ è una base dei vettori del piano
- $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ è una base dei vettori dello spazio
- $\emptyset$ per convenzione è una base di $\{0\}$.

Definizione di sottoinsieme massimale

Sia V spazio vettoriale su K.
Un sottoinsieme $v_1, ..., v_r$ di un insieme $v_1, ..., v_r, ..., v_n$ di vettori è un **sottoinsieme massimale di elementi linearmente indipendenti** quando:

- $v_1, ..., v_r$ sono linearmente indipendenti
- $v_1, ..., v_r, v_i$ sono linearmente dipendenti per $i > r$

Esempio
$(1, 0), (0, 1)$ sono un sottoinsieme massimale di elementi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$; infatti essi sono linearmente indipendenti e, aggiungendo un qualunque vettore (x, y), esso è dipendente da $(1, 0), (0, 1)$; infatti $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.

Teorema 10

Sia V spazio vettoriale su K.
Sia $v_1, ..., v_n$ un insieme di **generatori** di V, ossia $V = [v_1, ..., v_n]$, e sia $v_1, ..., v_r$ $(r \leq n)$ un **sottoinsieme massimale di elementi linearmente indipendenti** di $v_1, ..., v_n$.
Allora $v_1, ..., v_r$ è una **base** di V.

Dimostrazione.
Siccome $v_1, ..., v_r$ sono linearmente indipendenti, per dimostrare che formano una base occorre dimostrare che sono un insieme di generatori.
Per prima cosa si dimostra che ogni v_i, $i > r$, si scrive come combinazione lineare di $v_1, ..., v_r$.
Questo deriva dal fatto che $v_1, ..., v_r, v_i$, $i > r$ sono linearmente dipendenti; dunque esistono $a_1, ..., a_r, a_i$ non tutti nulli tali che:

$$a_1 v_1 + ... + a_r v_r + a_i v_i = \mathbf{0}$$

Deve essere $a_i \neq 0$, perchè se fosse $a_i = 0$, allora seguirebbe che $v_1, ..., v_r$ sono linearmente dipendenti $(a_1, ..., a_r$ non tutti nulli$)$, contro l'ipotesi per cui $v_1, ..., v_r$ $(r \leq n)$ sono un sottoinsieme massimale di elementi linearmente indipendenti.
Per $a_i \neq 0$ si ha

$$v_i = \frac{-a_1}{a_i} v_1 + ... + \frac{-a_r}{a_i} v_r \quad i > r$$

Ora si può dimostrare che $[v_1, ..., v_r] = V$. E' ovviamente $[v_1, ..., v_r] \subseteq V$. Proviamo l'altra inclusione.
Sia $v \in V$. Poichè $v_1, ..., v_n$ sono un insieme di generatori di V, segue che

$$
\begin{aligned}
v &= x_1 v_1 + ... + x_r v_r + x_{r+1} v_{r+1} + ... + x_n v_n = \\
&= x_1 v_1 + ... + x_r v_r + x_{r+1} \left(\frac{-a_1}{a_{r+1}} v_1 + ... + \frac{-a_r}{a_{r+1}} v_r \right) + \\
&+ ... + x_n \left(\frac{-z_1}{z_n} v_1 + ... + \frac{-z_r}{z_n} v_r \right) = \\
&= \left(x_1 - x_{r+1} \frac{a_1}{a_{r+1}} - ... - x_n \frac{z_1}{z_n} \right) v_1 + \\
&+ ... + \left(x_r - x_{r+1} \frac{a_r}{a_{r+1}} - ... - x_n \frac{z_r}{z_n} \right) v_r
\end{aligned}
$$

Dunque v si esprime come combinazione di $v_1, ..., v_r$, ossia $v \in [v_1, ..., v_r]$. Dunque $V \subseteq [v_1, ..., v_r]$.

Il risultato precedente mostra che è sempre possibile estrarre una base di V da un insieme di generatori di V.

Infatti sia $V = [v_1, ..., v_n]$.

- Allora se $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base.

Osservazione

Il risultato precedente mostra che è sempre possibile estrarre una base di V da un insieme di generatori di V.

Infatti sia $V = [v_1, ..., v_n]$.

- Allora se $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base.
- In caso contrario, si considerino i sottoinsiemi di $v_1, ..., v_n$ con $n-1$ elementi. Se uno di questi (per esempio $v_1, ..., v_{n-1}$) è costituito da elementi linearmente indipendenti, allora questo insieme forma una base, perchè v_n è combinazione di $v_1, ..., v_{n-1}$ e vale $[v_1, ..., v_n] = [v_1, ..., v_{n-1}] = V$.

Il risultato precedente mostra che è sempre possibile estrarre una base di V da un insieme di generatori di V.

Infatti sia $V = [v_1, ..., v_n]$.

- Allora se $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base.
- In caso contrario, si considerino i sottoinsiemi di $v_1, ..., v_n$ con $n-1$ elementi. Se uno di questi (per esempio $v_1, ..., v_{n-1}$) è costituito da elementi linearmente indipendenti, allora questo insieme forma una base, perchè v_n è combinazione di $v_1, ..., v_{n-1}$ e vale $[v_1, ..., v_n] = [v_1, ..., v_{n-1}] = V$.
- Se invece tutti i sottoinsiemi di $n-1$ elementi sono linearmente dipendenti, si considerano i sottoinsiemi di $v_1, ..., v_n$ con $n-2$ elementi. Se uno di questi (per esempio $v_1, ..., v_{n-2}$) è costituito da elementi linearmente indipendenti, allora questo insieme forma una base, perchè v_n e v_{n-1} sono combinazione di $v_1, ..., v_{n-2}$ e vale $[v_1, ..., v_n] = [v_1, ..., v_{n-2}] = V$.

Il risultato precedente mostra che è sempre possibile estrarre una base di V da un insieme di generatori di V.

Infatti sia $V = [v_1, ..., v_n]$.

- Allora se $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base.
- In caso contrario, si considerino i sottoinsiemi di $v_1, ..., v_n$ con $n-1$ elementi. Se uno di questi (per esempio $v_1, ..., v_{n-1}$) è costituito da elementi linearmente indipendenti, allora questo insieme forma una base, perchè v_n è combinazione di $v_1, ..., v_{n-1}$ e vale $[v_1, ..., v_n] = [v_1, ..., v_{n-1}] = V$.
- Se invece tutti i sottoinsiemi di $n-1$ elementi sono linearmente dipendenti, si considerano i sottoinsiemi di $v_1, ..., v_n$ con $n-2$ elementi. Se uno di questi (per esempio $v_1, ..., v_{n-2}$) è costituito da elementi linearmente indipendenti, allora questo insieme forma una base, perchè v_n e v_{n-1} sono combinazione di $v_1, ..., v_{n-2}$ e vale $[v_1, ..., v_n] = [v_1, ..., v_{n-2}] = V$.
- Se invece tutti i sottoinsiemi di $n-2$ elementi sono linearmente dipendenti, si ripete per $n-3$...

Il risultato precedente mostra che è sempre possibile estrarre una base di V da un insieme di generatori di V.

Infatti sia $V = [v_1, ..., v_n]$.

- Allora se $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base.
- In caso contrario, si considerino i sottoinsiemi di $v_1, ..., v_n$ con $n-1$ elementi. Se uno di questi (per esempio $v_1, ..., v_{n-1}$) è costituito da elementi linearmente indipendenti, allora questo insieme forma una base, perchè v_n è combinazione di $v_1, ..., v_{n-1}$ e vale $[v_1, ..., v_n] = [v_1, ..., v_{n-1}] = V$.
- Se invece tutti i sottoinsiemi di $n-1$ elementi sono linearmente dipendenti, si considerano i sottoinsiemi di $v_1, ..., v_n$ con $n-2$ elementi. Se uno di questi (per esempio $v_1, ..., v_{n-2}$) è costituito da elementi linearmente indipendenti, allora questo insieme forma una base, perchè v_n e v_{n-1} sono combinazione di $v_1, ..., v_{n-2}$ e vale $[v_1, ..., v_n] = [v_1, ..., v_{n-2}] = V$.
- Se invece tutti i sottoinsiemi di $n-2$ elementi sono linearmente dipendenti, si ripete per $n-3$...
- Il processo ha termine dopo un numero finito di passi. In questo modo si ottiene una base di V.

Sia $S = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

- **E' un insieme di generatori** di $\mathbb{R}^2$. Infatti

$$\begin{array}{rcl} (x,y) = & & a(0,1)+b(1,0)+c(1,1) \\ & \Updownarrow & \\ x = b+c; & & y = a+c \\ & \Updownarrow & \\ b = x-c; & & a = y-c; c \in \mathbb{R} \end{array}$$

- $(0,1),(1,0),(1,1)$ sono linearmente dipendenti; quindi **non** formano una base.
- Se si considera $\{(0,1),(1,0)\}$ essi sono linearmente indipendenti; quindi formano una base.
  Anche $\{(0,1),(1,1)\}$ è una base.
  Anche $\{(1,0),(1,1)\}$ è una base.
  Osservazione: tutte le basi trovate di $\mathbb{R}^2$ hanno 2 elementi.

Teorema 11

Sia V spazio vettoriale su K.
Sia $v_1, ..., v_n$ una base di V e $w_1, ..., w_m$ un insieme di elementi di V.
Allora se $m > n$, $w_1, ..., w_m$ sono linearmente dipendenti.
In pratica un insieme di vettori che abbia più elementi di quelli di una base è sempre formato da elementi linearmente dipendenti.

Dimostrazione.
Consideriamo due casi.

- Siano $w_1, w_2, ..., w_n$ linearmente dipendenti. Allora (Teorema 9) anche $w_1, ..., w_m$ lo sono e non c'è altro da provare.
- Siano $w_1, w_2, ..., w_n$ linearmente indipendenti. Poichè $v_1, ..., v_n$ è una base di V, allora

  $$w_1 = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

  Uno degli scalari è non nullo, altrimenti $w_1 = \mathbf{0}$ e questo implicherebbe che $w_1, ..., w_n$ linearmente dipendenti.
  Sia $a_1 \neq 0$. Allora

  $$v_1 = \frac{1}{a_1} w_1 - \frac{a_2}{a_1} v_2 - ... - \frac{a_n}{a_1} v_n$$

  Segue che $[w_1, v_2, ..., v_n] = [v_1, ..., v_n] = V$.

Preso ora w_2 esistono $b_1, \dots, b_n \in K$ tali che

$$w_2 = b_1 w_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$$

Uno degli scalari $b_2, \dots, b_n$ è non nullo, altrimenti $w_2 = b_1 w_1$ e questo è contrario all'assunzione fatta che w_1 e w_2 siano **linearmente indipendenti**.
Sia $b_2 \neq 0$. Allora

$$v_2 = -\frac{b_1}{b_2} w_1 + \frac{1}{b_2} w_2 - \frac{b_3}{b_2} v_3 - \dots - \frac{b_n}{b_2} v_n$$

Segue che $[w_1, w_2, v_3, \dots, v_n] = [w_1, v_2, \dots, v_n] = [v_1, \dots, v_n] = V$.
Procedendo nello stesso modo si ottiene che $[w_1, w_2, w_3, \dots, w_n] = [v_1, \dots, v_n] = V$.
Pertanto w_{n+1} che è combinazione di $v_1, \dots, v_n$ e quindi di $w_1, \dots, w_n$, è **linearmente dipendente** da $w_1, \dots, w_n$.
Pertanto, quando $m > n$, $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente dipendenti.

Teorema 12

Sia V spazio vettoriale su K.
Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V e $w_1, \ldots, w_m$ un'altra base di V.
Allora vale che $n = m$.

Dimostrazione.
Se $m \neq n$, allora se $m > n$, segue dal Teorema 11 che $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente dipendenti. Questo è assurdo.
D'altra parte se $m < n$ allora dal Teorema 11 segue che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti. Questo è assurdo. Segue $m = n$.

Dimensione di uno spazio vettoriale

Sia V spazio vettoriale su K.
Se V ha una base finita, allora il numero di elementi della base si dice **dimensione di** V e si denota con $\dim V$.
Per spazi con dimensione finita, la dimensione è un'invariante.
Se V non ha una base finita allora si dice che V ha dimensione infinita.

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ (numero di elementi della base canonica)
- $\dim(P_n(x)) = n + 1$
- $\dim(P(x))$ infinita
- la dimensione dei vettori del piano è 2 (base $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$)
- la dimensione dei vettori dello spazio è 3 (base $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$)

Osservazioni.

Sia V spazio vettoriale su K di dimensione n.

- n è il **numero minimo** di generatori di V.
  Se così non fosse, ci sarebbero $m < n$ generatori e quindi ci potrebbe essere una base con meno di n elementi e ciò è assurdo.
- n è il **massimo numero** di vettori linearmente indipendenti (vedi Teorema 11).

Più di tre elementi di $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente dipendenti.
Più di due elementi di $\mathbb{R}^2$ sono sempre linearmente dipendenti.

Teorema 13

Sia V spazio vettoriale su K.
Sia $v_1, ..., v_r$ un insieme di vettori linearmente indipendenti di V. Se $v \in V - [v_1, ..., v_r]$, allora $v_1, ..., v_r, v$ sono linearmente indipendenti.
In altre parole, se $v_1, ..., v_r$ sono una base di un sottospazio di V, ogni elemento di V che non sta nel sottospazio è linearmente indipendente con gli elementi della base del sottospazio.

Dimostrazione.
Se $v_1, ..., v_r, v$ fossero linearmente dipendenti, allora esisterebbero $a_1, a_2, ..., a_r, a \in K$ non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + ... + a_r v_r + av = 0$$

Se fosse $a = 0$, sarebbero $v_1, ..., v_r$ linearmente dipendenti. Dunque, $a \neq 0$. Pertanto

$$v = -\frac{a_1}{a} v_1 - ... - \frac{a_r}{a} v_r$$

Ma allora $v \in [v_1, ..., v_r]$ contro l'ipotesi. Dunque $v_1, ..., v_r, v$ sono linearmente indipendenti.

Sia V spazio vettoriale su K di dimensione n.

Ogni insieme di generatori con n elementi è una base di V.

Basta mostrare che sono linearmente indipendenti. Se fossero dipendenti, esisterebbe una base con meno di n elementi.

Ogni insieme di n elementi linearmente indipendenti è una base di V.

Basta mostrare che è un insieme di generatori di V. Se i vettori non fossero un insieme di generatori, per il Teorema 13, esisterebbe un vettore da aggiungere agli n elementi ad essi linearmente indipendente. Per il Teorema 11 ciò è impossibile.

Esempio

$(1,2),(1,1)$ è una base di $\mathbb{R}^2$.
Poichè dim $\mathbb{R}^2 = 2$, basta verificare che sono linearmente indipendenti o che sono generatori.
Verifichiamo la lineare indipendenza. Sia data:

$$a(1,2) + b(1,1) = (0,0)$$

Segue

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned}$$

Da cui $a = 0, b = 0$.

Teorema 14

Sia V spazio vettoriale su K di dimensione n. Sia $W \sqsubseteq V$.
Allora $\dim W \leq \dim V$ e $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$.

Dimostrazione.
Sia $v_1, ..., v_r$ una base di W. Poichè tali vettori sono linearmente indipendenti in V e il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in V è n, allora $r \leq n$.
Se $r = n$, allora $v_1, ..., v_n$ sono una base di V oltre che di W e dunque $V = W$.

Conseguenze

- Se $v_1 ... v_r$ è una base di W sottospazio di V e $v_1 ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n$ è una base di V, allora $v_{r+1}, ..., v_n$ è una base del sottospazio complementare a W di V.
- $v_1, ..., v_n$ è una base $\Leftrightarrow$ è un sottoinsieme massimale di V.
  $v_1, ..., v_n$ è una base di V se e solo se $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti e $v_1, ..., v_n, v$ sono linearmente dipendenti per ogni $v \in V$, con $v \neq v_i$, $i \neq 1, ..., n$.

Se $v_1, ..., v_r$ sono elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V su K di dimensione n, allora si ha che:

- $r = n$; i vettori sono una base;
- $r < n$; si considera un elemento di $v_{r+1} \in V - [v_1, ..., v_r]$; per il Teorema 13, $v_1, ..., v_{r+1}$ sono linearmente indipendenti; se $r + 1 = n$ si è determinata la base, altrimenti si ripete fino ad avere n elementi

Relazione di Grassmann

Siano W_1 e W_2 sottospazi di dimensione finita di V. Allora

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Dimostrazione.
Se $W_1 = \{\mathbf{0}\}$ o $W_2 = \{\mathbf{0}\}$, non c'e' nulla da provare.
Sia $v_1, \ldots, v_r$ una base di $W_1 \cap W_2$. Si può completare tale base per avere una base di W_1: $v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_m$. Analogamente per W_2: $v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_t$.
Allora basta provare che $v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_m, w_{r+1}, \ldots, w_t$ è una base di $W_1 + W_2$.
In tal caso $m + t - r = \dim(W_1 + W_2)$.
Dimostriamo che sono generatori.
Sia $v \in W_1 + W_2$. Allora $v = z_1 + z_2$ con $z_1 \in W_1$ e $z_2 \in W_2$. Dunque, scrivendo z_1 e z_2 in termini delle rispettive basi, la prima parte è provata:

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r + a_{r+1} u_{r+1} + \ldots + a_m u_m + b_1 v_1 + \ldots + b_r v_r + b_{r+1} w_{r+1} + \ldots + b_t w_t$$

Ora occorre provare che $v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_m, w_{r+1}, \ldots, w_t$ sono linearmente indipendenti.

Data la combinazione lineare:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m + \beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_t w_t = \mathbf{0}$$

si ha che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m = -(\beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_t w_t)$$

Dunque un elemento $z = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m$ di W_1 si scrive come un elemento di W_2. Allora $z \in W_1 \cap W_2$. Siccome la base di $W_1 \cap W_2$ è costituita solo da $v_1, \dots, v_r$, segue

$$\alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m = \mathbf{0}$$

e dunque $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_m = 0$. Allora

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_t w_t = \mathbf{0}$$

Poichè questi vettori sono una base di W_2, sono indipendenti. Dunque i coefficienti sono 0.
Resta dimostrato che $v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_m, w_{r+1}, \dots, w_t$ sono linearmente indipendenti.

Dimensione della somma diretta

Siano W_1 e W_2 sottospazi di dimensione finita di V. Se $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, allora

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

E' conseguenza della relazione di Grassmann e della definizione di somma diretta.

Teorema 15

Sia V spazio vettoriale su K di dimensione n e siano W_1 e W_2 due sottospazi tali che $V = W_1 \oplus W_2$. Allora

1. $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$
2. Per ogni $v \in V$, esiste uno e solo elemento $v_1 \in W_1$ e uno e un solo elemente $w_2 \in W_2$ tale che $v = v_1 + v_2$, ossia ogni elemento di V si scrive in modo unico come somma di un elemento di W_1 e di un elemento di W_2.

Dimostrazione.

1. La prima affermazione è conseguenza della relazione di Grassmann e della definizione di somma diretta.
2. Sia $v \in V$. Supponiamo che
$$v = w_1 + w_2; \quad v = w_1' + w_2'$$
con $w_1, w_1' \in W_1$ e $w_2, w_2' \in W_2$.
Allora (sottraendo membro a membro), si ha $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$, con $w_1 - w_1' \in W_1$ e $w_2' - w_2 \in W_2$. Dunque il vettore appartiene a $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Segue $w_1 = w_1'$ e $w_2 = w_2'$.

Sia $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$; determinare $U + V$ e verificare se si tratta di una somma diretta.

Il sottospazio U è generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Essi sono linearmente indipendenti. La dimensione di U vale 2.
Il sottospazio V è generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Essi sono linearmente indipendenti. La dimensione di V vale 2.
Il sottospazio somma $U + V$ è generato dai vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$, che sono dipendenti. Da essi si può estrarre una base eliminando uno dei due vettori $(1, 0, 0)$. Allora la dimensione di $U + V$ vale 3.
In effetti $U \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, y = 0\} = \{(x, 0, 0)\}$. Dunque $(1, 0, 0)$ è una base di $U \cap V$ che ha dimensione 1.
Allora

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Poichè $U \cap V \neq \{0\}$, $U + V$ non è somma diretta.