1. Sia $f: R^2 \to R^3$ una applicazione lineare definita nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice associata a f rispetto alle seguenti basi

$$\mathcal{B} = \{(1,1)^T, (2,1)^T\}$$

$$\mathcal{B}' = \{(1,1,0)^T, (1,0,0)^T, (1,2,1)^T\}$$

I. TECNICA

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_C \quad ; \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C$$

Si esprimono i vettori di R^3 nella base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a+b+c \\ y = a+2c \\ z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = y - 2z \\ b = x - y + 2z - z = x - y + z \\ c = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} y-2z \\ x-y+z \\ z \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} ; \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B'}$$

$$M^{B}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

II TECNICA

$$\begin{tikzcd} C \; \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{R}^3 \; C \arrow[d, leftrightarrow] \\ B \; \mathbb{R}^2 \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^3 \; B' \end{tikzcd}$$

$$M^{B}_{B'}(f) = M^{C}_{B'}(i_{\mathbb{R}^3}) \cdot M^{C}_{C}(f) \cdot M^{B}_{C}(i_{\mathbb{R}^2})$$

Si trovano le tre matrici:

$$M^{B}_{C}(i_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{C}_{C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{C}_{B'}(i_{R^3})$$

Occorre esprimere gli elementi della base canonica nella base B'!
Usando i conti precedenti per cui

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} y-2z \\ x-y+z \\ z \end{pmatrix}_{B'}$$

si ha

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\Rightarrow M^{C}_{B'}(i_{R^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{B}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare definita nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5x_1 + 4x_2 - 8x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 8x_3 \\ -8x_1 - 8x_2 + 8x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice associata rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{ (1,1,0)^T, (1,0,-1)^T, (0,1,-1)^T \}$$

in $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica in $\mathbb{R}^4$.

L'esercizio è nelle dispense, svolto usando la I tecnica.

Si usa la <u>II</u> tecnica

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^4\ C \\
\mathcal{B}\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "i_{\mathbb{R}^3}"] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$$M_C^{\mathcal{B}}(f) = M_C^{C}(f)\, M_C^{\mathcal{B}}(i_{\mathbb{R}^3})$$

Si determinano le matrici:

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_C^B(i_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 13 \\ 9 & 13 & 14 \\ -18 & -18 & -18 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0)^T, (1,0,0,0)^T, (2,0,0,1)^T, (0,0,1,0)^T\}$$

$$\mathcal{B}' = \{(1,1)^T, (1,0)^T\}$$

Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche $M_C^C(f)$.

L'esercizio è svolto usando la I tecnica nelle dispense.

Si usa ora la II tecnica.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2\ \mathcal{B}' \\ C\ \mathbb{R}^4 \arrow[u, leftrightarrow, "i_{\mathbb{R}^4}"] \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^2\ C \arrow[u, leftrightarrow, "i_{\mathbb{R}^2}"'] \end{tikzcd}$$

$$M_C^C(f) = M_C^{\mathcal{B}'}(i_{\mathbb{R}^2})\, M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)\, M_{\mathcal{B}}^{C}(i_{\mathbb{R}^4})$$

Si determinano le matrici di cambiamento di base.

- $M^{B'}_{C}(i_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Per determinare $M^{C}_{\mathcal{B}}(i_{\mathbb{R}^4})$, si calcola il trasformato di un vettore $(x,y,z,t)^T$ espresso secondo la base canonica in base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a+b+2c \\ y = a \\ z = d \\ t = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = y \\ b = x-y-2t \\ c = t \\ d = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$M^{C}_{\mathcal{B}}(i_{\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$M_c^c(f) = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}^{= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sia $f: R^4 \to R^4$ una applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,-1)^T, (1,0,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,1,0)^T\}$$

sia nel dominio che nel codominio. Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica.

Si tratta di usare la matrice del cambiamento di base $M_C^{\mathcal{B}}(i_{R^4})$ e la sua inversa:

$$M_C^C(f) = M_C^{\mathcal{B}}(i_{R^4}) \underbrace{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}^{=A} M_{\mathcal{B}}^C(i_{R^4})$$

$$= M \; A \; M^{-1} \qquad \text{se } M = M_C^{\mathcal{B}}(i_{R^4})$$

$$M_C^{\mathcal{B}}(i_{R^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

Si può calcolare l'inversa di M oppure formarla, esprimendo un vettore $(x,y,z,t)_C^T$ nella base $\mathcal{B}$ come segue:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b \\ y = c \\ z = c + d \\ t = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -t \\ b = x + t \\ c = y \\ d = z - y \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$M^{-1} = M^C_B(i_{\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^C_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Sia $f: R^3 \to R^3$ una applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = M_{B'}^{B}(f)$$

rispetto alla base B nel dominio e B' nel codominio:

$$B = \{(1,1,0)^T, (1,0,1)^T, (0,0,1)^T\}$$

$$B' = \{(1,0,-1)^T, (1,0,1)^T, (0,1,0)^T\}$$

Determinare $M_C^C(f)$.

I TECNICA

Si esprime un generico vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C$ in termini della base B

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = a + b \\ y = a \\ z = b + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = y \\ b = x - y \\ c = z - x + y \end{cases}$$

Allora gli elementi della base canonica si esprimono in base B nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_C=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_B \ ; \ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_C=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}_B \ ; \ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_C=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B$$

Si calcola ora

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_B\right)=A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}_{B'}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}_B\right)=A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}_{B'}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B\right)=A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}_{B'}$$

$\Rightarrow$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_B\right)=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}_{B'}=-1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}_C$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}_B\right)=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}_{B'}=2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix}_C$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B\right)=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}_{B'}=2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}_C$$

Pertanto

$$M^C_C(f) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -3 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

II TECNICA

$$M^C_C(f) = M^{B'}_C(i_{R^3})\, M^{\overset{A}{\overset{\shortparallel}{B}}}_{B'}(f)\, M^C_B(i_{R^3})$$

$$M^{B'}_C(i_{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda $M^C_B(i)$, si possono ripetere i conti che esprimono un generico vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in coordinate canoniche in termini della base B e calcolare

$$M^C_B(i_{R^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -3 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Sia $f: R^2 \to R^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
Determinare la matrice associata rispetto alla base $B' = \{(1,1)^T, (1,-1)^T\}$

I. TECNICA

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_C = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\Rightarrow M_{B'}^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II TECNICA

$$M^{B'}_{B'}(f) = M^{C}_{B'}(i_{\mathbb{R}^2})\, M^{C}_{C}(f)\, M^{B'}_{C}(i_{\mathbb{R}^2})$$

$$= M^{-1} A M$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^{B'}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 e siano $\mathcal{B}=\{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{B}'=\{e_1', e_2'\}$, $e_1'=e_1+e_2$, $e_2'=e_1-e_2$ due basi.

Dato un vettore $v\in V$, siano (x, y) le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e (x', y') rispetto a $\mathcal{B}'$.

Esprimere (x, y) in funzione di (x', y') e viceversa.

La matrice che esprime il cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i_V)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=M \Rightarrow M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(i_V)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=M^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

10. Si consideri

$$B = \{(1,1,0)^T, (-1,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$$

base di R^3 e sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica di R^3.

Trovare le coordinate di v rispetto alla base B:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_C = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = a - b \\ 2 = a + b \\ 0 = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$