# ESERCIZI SUI SISTEMI LINEARI

① Risolvere se possibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = -1 \\ x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare $\rightarrow Ax = b \quad A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^m$

Osserviamo che non è omogeneo $(b \neq \vec{0})$

eq. = equazione
sol. = soluzione

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$ matrice dei coefficienti, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vettore dei termini noti

Per trovare la sol. sfrutto il rango...

## MINI RIPASSO DI TEORIA

**DEF** Un sistema si dice compatibile se ammette almeno una soluzione, incompatibile se non ammette soluzioni.

**OSS** • Un sistema omogeneo è SEMPRE compatibile perché ammette sempre $\vec{0}$ come soluzione

• La soluzione non banale di un sistema omogeneo (se $\exists$) stabilisce la lin. dip. delle colonne di A.

$$Ax = 0 \iff x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = 0$$

Se $\exists$ solo la sol. nulla $\Rightarrow$ le colonne sono lin. indip.

**TEO 0** Se un sistema di m eq. in n incognite è compatibile, le sue sol. sono tutte e sole le n-uple ottenute sommando a una sol. particolare di $Ax=b$ le sol. del sistema omogeneo associato $Ax=0$.

**TEO 1** Dato un sistema lineare OMOGENEO di m eq. in n incognite, se $n > m$ il sistema ammette soluzione non banale

**DEF** L'insieme delle sol. di un sistema omogeneo $Ax=b$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ ed è detto sottospazio nullo di A oppure $\underbrace{\text{nucleo di A}}_{\text{Kernel di A}}$ e si indica con $\mathrm{Ker}(A)$

**OSS** • Per un qualunque sistema compatibile $Ax=b$, ogni sua sol. appartiene a $\bar{x} + \mathrm{Ker}(A)$, ove $\bar{x}$ è una sol. particolare di $Ax=b$.

• Dato un sistema compatibile, esso ammette un'unica sol. se $\mathrm{Ker}(A)=\{0\}$ oppure equivalentemente le colonne di A sono lin. indip.

**TEO 2** Dato un sistema di $m$ eq in $n$ incognite, se $n=m$ e le colonne di $A$ sono lin. indip. ($\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$), il sistema ammette un'unica sol.

↳ Regola di Cramer: $x_j = \dfrac{|A^1, \dots, A^{j-1}, b, A^{j+1}, \dots, A^n|}{|A|}$ $\quad j = 1, \dots, n$

$x_j$: componente j-esima della sol.

**TEOREMA DI ROUCHÈ-CAPELLI**

Un sistema lineare di $m$ eq. in $n$ incognite ha sol. $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) = k$

Se $k = n \Rightarrow$ sistema determinato ($\exists!$ sol.)

se $k < n \Rightarrow$ sistema sottodeterminato $\infty^{n-k}$ sol.

Ora riprendiamo l'esercizio...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Il primo minore è nullo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

$rg(A) \leq \min\{3, 4\} = 3 \qquad \Rightarrow 2 \leq rg(A) \leq 3$

$\Rightarrow$ Considero questa sottomatrice poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Contiene delle eq. dipendenti

ha due colonne uguali

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6+3-2(-3+6)-(-1+4) =$$

$$= -3 - 6 - 3 = -12 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

Considero la matrice completa

$$[A, b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rg([A,b]) \leq 4 \text{ e } rg([A,b]) \geq 3$$

Posso sostituire alla riga $R_2$ la somma della medesima $R_2$ con $R_1$: $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg([A,b]) = 3$$

$C_2 = -1 \cdot C_3$ colonne lin dip.

$\Rightarrow rg(A) = rg([A,b]) = 3 \underset{\text{ROUCHÈ CAPELLI}}{\Rightarrow}$ il sistema è compatibile

↳ $n = 3$ incognite, $rg(A) = k = 3$ $\Rightarrow \exists!$ sol.

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = -1 \\ -x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Per usare la regola di Cramer calcolo il determinante di $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$\det(M) = -12$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}}{-12} = 0 \quad \text{perché } R_3 = R_1 + R_2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-(-1-2)-3(-1-2)}{-12} = \frac{3+9}{-12} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-(-1-2)-3(-1-2)}{-12} = \frac{3+9}{-12} = -1$$

insieme delle soluzioni.

$\Rightarrow$ La soluzione è $(0,-1,-1) \Rightarrow S = \{(0,-1,-1)\}$.

② Discutere e risolvere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 3x-2y+5z=\lambda \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & -2 \end{matrix} & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$rg(A) \leq 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$

$\Rightarrow$ minore di ordine 3, ossia $\det(A)$

$$* \begin{vmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}1 & {}^{+}1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-15+8) - (10-12) + (-4+9) = -7+2+5 = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & \lambda \end{array}\right)$$

So già che $\det(A) = 0 \Rightarrow$ considero il minore di ordine 3 formato dalle prime due colonne e da b.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0^{+} \\ 2 & -3 & 0^{-} \\ 3 & -2 & \lambda^{+} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \lambda(-3-2) = \underbrace{-5\lambda}_{} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Dobbiamo studiare al variare di $\lambda$ il rango delle matrici

$\Rightarrow$ Se $\lambda \neq 0 \Rightarrow rg([A|b]) = 3 \Rightarrow rg(A) \neq rg([A|b]) \Rightarrow$ il sistema è incompatibile

Se $\lambda = 0 \Rightarrow rg([A|b]) = 2 \Rightarrow rg(A) = rg([A|b]) \Rightarrow$ il sistema è compatibile

Nel caso $\lambda = 0$ posso trovare le sol:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ La 3ª eq. dipende dalle altre: 3ª eq. = 1ª eq. + 2ª eq. $\Rightarrow$ la elimino

Lo si vede anche da ★

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$$ è un sistema di 2 eq. in 3 incognite $\Rightarrow$ vedo $z$ come un parametro $\Rightarrow$ lo porto al 2° membro

Come scelgo l'incognita da considerare come parametro?
Osservo qual è il minore $\neq 0$ e vedo quali coefficienti non compaiono in tale minore.
Infatti abbiamo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ (colonne $x$, $y$) $\Rightarrow$ considero $z$ come parametro

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = -z \\ 2x - 3y = -4z \end{cases}$$ $\Rightarrow$ la sol. dipenderà da $z$ $\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ è la matrice dei coeff. del nuovo sistema

$\Rightarrow \det B = -5$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -4z & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3z + 4z}{-5} = -\frac{7}{5}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -4z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-4z + 2z}{-5} = \frac{2}{5}z$$

"Raccolgo $z$"

$$\Rightarrow S = \left\{ \left( -\frac{7}{5}z, \frac{2}{5}z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\} = \left[ \left( -\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right) \right]$$

$$= \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} z \right] \quad z \in \mathbb{R}$$

sol. di $Ax = 0$ omog. — sol. di $Ax = b$ particolare

③ Discutere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2\lambda x + y + z + t = 1 \\ x - y + t = \lambda - 1 \\ 4\lambda x + 5y + 3z + t = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4\lambda & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Il minore $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$ e $rg(A) \leq \min\{4, 3\} = 3$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 1^{+} \\ 1 & 0 & 1^{-} \\ 4\lambda & 3 & 1^{+} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4\lambda & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 4\lambda & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 - (6\lambda - 4\lambda) - 1 = 2 - 2\lambda = 2(1 - \lambda)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^{-} & 1 \\ -1 & 0^{+} & 1 \\ 5 & 3^{-} & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-5) - 3(1+1) = 6 - 6 = 0$$

- Se $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow rg(A) = 2$
- Se $1 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow rg(A) = 3$

$$[A,b] = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 2\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & \lambda-1 \\ 4\lambda & 5 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad 2 \le rg([A,b]) \le \min\{3,5\} = 3$$

$\Rightarrow$ Rimane da controllare solo un minore $3\times3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 3-\lambda+1+3(\lambda-1-1) = 3-\lambda+1+3\lambda-6 =$$
$$= 2\lambda - 2 = 2(\lambda-1)$$

- Se $\lambda = 1 \Rightarrow rg(A) = 2$ e $rg([A|b]) = 2 \Rightarrow$ il sistema è compatibile con $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni

  $\infty^{\#\text{incognite} - rg(A)}$

- Se $\lambda \neq 1 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg([A|b]) \Rightarrow$ il sistema è compatibile con $\infty^{4-3} = \infty$ sol.

(4) Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k^2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$. Determinare:

a) $Ker(A)$ e $\dim(Ker(A))$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

b) discutere e risolvere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema $Ax = b$ dove $b^T = (k+1, 4, 1)$

a) Ricordiamo che $Ker(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x + k^2 z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k^2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - k^2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-2-2) - k^2(4-2) = 8 - 2k^2 =$$
$$= 2(4-k^2) = 2(2-k)(2+k)$$

- Se $k \neq \pm 2 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow$ ammette un'unica sol.

  Ma il sistema è omogeneo $\Rightarrow$ ammette sempre $\vec{0}$ come sol $\Big\} \Rightarrow \vec{0}$ è l'unica sol.

  $\Rightarrow Ker(A) = \{\vec{0}\}$ e $\dim(Ker(A)) = 0$

- Se $k = \pm 2 \Rightarrow rg(A) = 2$

  Dalla teoria $\dim(Ker(A)) = \underset{\#\text{colonne}}{n} - \underset{\text{rango}}{r(A)} = 3 - 2 = 1$

Per trovare la sol. occorre risolvere il sistema iniziale. Possiamo eliminare un'eq. perché non abbiamo rango massimo, cioè le eq. sono dipendenti tra loro.

$k=\pm 2$ (tanto $k^2$) $\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x+4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2y=-z \\ 2x=-4z \end{cases}$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 2 \\ -4z & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{8z}{-4} = -2z \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 2 & -4z \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8z+2z}{-4} = \frac{-6z}{-4} = \frac{3}{2}z$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \left(-2z, \tfrac{3}{2}z, z\right) : z \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$$

b) $[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & k+1 \\ 2 & 0 & k^2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\qquad rg([A|b]) \leq \min\{3,4\} = 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & k+1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & k+1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2(2-4) - 2(8-2k-2) =$$

$$= 4 - 2(6-2k) = 4 - 12 + 4k = 4k - 8 = 4(k-2)$$

- Se $k \neq \pm 2 \Rightarrow rg([A|b]) = 3 = rg(A) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e $\exists!$ sol.
  $\Rightarrow$ uso Cramer $\qquad \infty^{3-3} = \infty^0$ soluzioni
- Se $k = 2 \Rightarrow rg(A) = 2 = rg([A|b]) \Rightarrow$ il sistema è compatibile con $\infty^1$ sol.

$\begin{cases} 2x+2y+z=3 \\ 2x+4z=4 \end{cases} \underset{z \text{ param.}}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x+2y=3-z \\ 2x=4-4z \end{cases}$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 2 \\ 4-4z & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8+8z}{-4} = 2-2z \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3-z \\ 2 & 4-4z \end{vmatrix}}{-4} = \frac{8-8z-6+2z}{-4} = \frac{-6z+2}{-4}$$

- Se $k=-2 \Rightarrow rg(A) = 2$ e $rg([A|b]) = 3 \Rightarrow$ sistema impossibile

5 **Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare**

$$\begin{cases} \alpha x - \alpha y + z = 2 \\ 2x - \alpha y - z = \alpha \\ 2x - 2y + 3z = 2 \\ \alpha x - 2y + z = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 1 \\ 2 & -\alpha & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ \alpha & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$

$\Rightarrow 2 \leq rg(A) \leq 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & -\alpha & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ \alpha & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2+6) - 2(-\alpha-2) + \alpha(-3\alpha-2) =$$

$$= 8 + \cancel{2\alpha} + 4 - 3\alpha^2 - \cancel{2\alpha} = 12 - 3\alpha^2 = 3(4-\alpha^2) = 3(2-\alpha)(2+\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\alpha & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ \alpha & -2 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha(-2+6) - 2(-\alpha+2) + \alpha(-3\alpha+2) =$$

$$= 4\alpha + 2\alpha - 4 - 3\alpha^2 + 2\alpha = -3\alpha^2 + 8\alpha - 4 = -3(\alpha-2)\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)$$

$$\alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-3} = \begin{cases} \frac{-4-2}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2 \\ \frac{-4+2}{-3} = +\frac{2}{3} \end{cases}$$

2° col = 2° + 4° col

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\alpha & 1 & 2 \\ 2 & -\alpha & -1 & \alpha \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ \alpha & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 2-\alpha & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & \alpha \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ \alpha & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (\alpha-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ 2 & 3 & 2 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-2)\left[ 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (\alpha-2)\left[2(6-2) - 2(-2-\alpha) + \alpha(-2-3\alpha)\right] =$$

$$= (\alpha-2)(8+4+\cancel{2\alpha}-\cancel{2\alpha}-3\alpha^2) = -3(\alpha-2)^2(\alpha+2)$$

- Se $\alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -2 \Rightarrow rg([A,b]) = 4$ e $rg(A) = 3 \Rightarrow$ il sistema è incompatibile
- Se $\alpha = 2 \Rightarrow rg([A,b]) = 2$, $rg(A) = 2 \Rightarrow$ il sistema è compatibile con $\infty^1$ sol.
- Se $\alpha = -2 \Rightarrow rg([A,b]) = 3$, $rg(A) = 3 \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione.

**6)** Risolvere se possibile il seguente sistema riducendo la matrice a gradini

$$\begin{cases} -2y + 3z = 3 \\ 3x - z = 8 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 5z = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right) = [A,b]$$

$$[A,b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} =$$

Voglio annullare l'elemento $[A|b]_{21}$
2° Riga = 2° Riga − 3 · 1° Riga

4° Rig = 4° Rig − 2 · 1° Rig.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -7 \end{pmatrix} = \rightarrow R_3 = R_3 - \frac{2}{3} R_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 17/3 & 17/3 \\ 0 & 3 & -7 & -7 \end{pmatrix} \underset{R_4 = R_4 + R_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 17/3 & 17/3 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

perchè il minore di ordine 4 che contiene * è nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 17/3 \end{vmatrix}^{*} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 17/3 \end{vmatrix} = -17 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \qquad rg([A,b]) = 3$$

$\Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette un'unica sol.

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -4 \\ \frac{17}{3}z = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -3y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \{(3,0,1)\}$$