5. Determinare la proiezione del vettore $u = (1,1,1)$ sul piano contenente i vettori $(2,1,0)$ e $(1,0,1)$

Il piano ha un versore ortogonale dato da $w = \dfrac{(2,1,0) \times (1,0,1)}{|(2,1,0) \times (1,0,1)|}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1i - 2j - k \; ; \; |i-2j-k| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{6}} i - \frac{2}{\sqrt{6}} j - \frac{1}{\sqrt{6}} k$$

La proiezione di u nella direzione ortogonale al piano è

$$u' = \langle u, w \rangle w = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{6}} i - \frac{2}{\sqrt{6}} j - \frac{1}{\sqrt{6}} k\right]$$

$$= -\frac{1}{3} i + \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k$$

Dunque la proiezione sul piano di u è

$$u'' = u - u' = (1,1,1) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

6. Utilizzare i vettori

$u = (1, -2, 0)$

$v = (0, 3, 4)$

$w = (1, -1, 1)$

per dimostrare che il prodotto vettoriale non è associativo.

$$(u \times v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -8i - 4j + 3k$$

$$(u \times v) \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-i + 11j + 12k}}$$

$$(v \times w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7i + 4j - 3k$$

$$u \times (v \times w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{6i + 3j + 18k}}$$

$$(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$$

7. $v = (2, -1, 3)$, $u = (1, 1, 0)$

$\langle v, u \rangle = 2 - 1 = 1 \neq 0$ non perpendicolari

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3i + 3j + 3k \neq 0$$ non paralleli

9. Si determinino h_1 e h_2 t.c.

$$v = 2i + j - 3k$$
$$w = i + h_1 j + h_2 k$$

siano paralleli.

Occorre che

$$0 = v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & h_1 & h_2 \end{vmatrix} = (h_2 + 3h_1)i + (-2h_2 - 3)j + (2h_1 - 1)k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_2 + 3h_1 = 0 \\ 2h_2 + 3 = 0 \\ 2h_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} h_1 = \frac{1}{2} \\ h_2 = -\frac{3}{2} \end{matrix}}$$

$-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ Verificata!!

10. Determinare h in modo che $v = (2, h, 1-h)$ sia complanare con i vettori $u = (1,2,1)$ e $w = (3,1,5)$.

Occorre che

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & h & 1-h \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 18 - 2h + (1-h)(-5)$$

$$\Rightarrow \quad 13 + 3h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = -\frac{13}{3}$$

11. Esprimere il vettore $v = (2, -1, 1)$ come somma di v_1 parallelo al vettore $w_1 = (0, 1, 1)$ e di v_2 complanare ai vettori $w_2 = (1, 2, 0)$ e $w_3 = (2, 0, 1)$

$$v = \alpha (0, 1, 1) + v_2$$

v_2 deve avere coordinate (β, γ, δ) tali che

$$0 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\beta - \gamma - 4\delta$$

$$\Rightarrow \gamma = 2\beta - 4\delta$$

$$v_1 = \alpha (0, 1, 1) + (\beta, 2\beta - 4\delta, \delta) = (2, -1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = \beta \\ -1 = \alpha + 2\beta - 4\delta \\ 1 = \alpha + \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = 2, \quad \delta = \frac{6}{5}, \quad \alpha = -\frac{1}{5}$$

$$v_1 = \left(0, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) \qquad v_2 = \left(2, -\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$= \alpha (0, 1, 1) \qquad = (\beta, 2\beta - 4\delta, \delta)$$

14. $v = i - j + k$, $w = -2i + k$

$\langle v, w \rangle = -2 + 1 = -1$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3j - 2k$$

15. $v_1 = (1, 0, 1)$

$v_2 = (0, 1, 0)$

$v_3 = (1, 1, 2)$

Determinare le componenti del vettore proiezione ortogonale di v_1 sul piano contenente v_2 e v_3

$$u = \frac{v_2 \times v_3}{|v_2 \times v_3|} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \frac{1}{|v_2 \times v_3|} =$$

$$= \frac{1}{|v_2 \times v_3|} \left(2i - k \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (2i - k)$$

$$v_1' = v_1 - \langle v_1, u \rangle u =$$

$$= (1, 0, 1) - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} (2i - k)$$

$$= (1, 0, 1) - \frac{1}{5} (2i - k) = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5} \right)$$

16. Siano $v_1 = (1, 0, 1)$

$v_2 = (0, 1, 0)$

$v_3 = (1, 1, 2)$

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |2 - 1| = 1$$