TUTORATO MATEMATICA DISCRETA

CAPITOLI 0 e 1 : Relazioni di equivalenza e prodotto scalare

① Sia $A = \{0,1,2,3,4\}$ e si considerino su A le seguenti relazioni

$R_1 = \{(0,0),(0,1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}$

$R_3 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,4),(4,3)\}$

Stabilire quali delle precedenti relazioni sono di equivalenza e per quelle che lo sono determinare l'insieme quoziente.

Relazione di equiv.:

- **Riflessività**: se $x R_i x \quad \forall x \in A$ per $i = 1,2,3$
- **Simmetria**: [se $(x,y) \in R_i$ $i=1,2,3$ $\Rightarrow (y,x) \in R_i$ $i=1,2,3$]
  se $x R_i y \Rightarrow y R_i x$
- **Transitività**: se $x R_i y$, $y R_i z \Rightarrow x R_i z$

Antisimmetria: se $x R_i y$, $y R_i x \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$ Relazione d'ordine

- R_1 è simmetrica? Se $x R_1 y \Rightarrow y R_1 x$?
  No perchè $0 R_1 1$, ma non si ha $1 R_1 0$ $\Rightarrow$ Non è relazione di equiv.
  R_1 è riflessiva.
- R_2 è riflessiva
  R_2 è simmetrica poichè $0 R_1 1 \Rightarrow 1 R_1 0$ e $\Rightarrow$ Non è relazione di equiv.
  $1 R_1 2 \Rightarrow 2 R_1 1$

  R_2 non è transitiva perchè se lo fosse dovrei avere ad esempio $0 R_2 1$, $1 R_2 2 \Rightarrow 0 R_2 2$, cioè $(0,2) \in R_2$ ma ciò non si verifica
- R_3 è riflessiva ed è anche simmetrica perchè $0 R_3 1 \Rightarrow 1 R_3 0$ e $3 R_3 4 \Rightarrow 4 R_3 3$.

  R_3 è transitiva perchè $0 R_3 0$, $0 R_3 1 \Rightarrow 0 R_3 1$
  $1 R_3 0$, $0 R_3 1 \Rightarrow 1 R_3 1$ ecc...

Data una relazione di equivalenza R definita su un insieme A, l'insieme $A/_R = \{ [a]_R \mid a \in A \}$ di tutte le classi di equivalenza modulo R è detto insieme quoziente di A per R

Si definisce classe di un elemento $a \in A$ un sottoinsieme di A da tutti gli elementi di A in relazione con a:

$$cl(a) = [a]_R = \{ y \in A : (a,y) \in R \}$$

Se R è una relazione di equiv $\Rightarrow cl(a)$ è una classe di equiv.

a è detto rappresentante della classe.

$$[0]_{R_3} = \{ y \in A \mid y R_3 0 \} = \{0,1\}$$
$$[1]_{R_3} = \{ y \in A \mid y R_3 1 \} = \{0,1\}$$
$$[2]_{R_3} = \{ y \in A \mid y R_3 2 \} = \{2\}$$
$$[3]_{R_3} = \{ y \in A \mid y R_3 3 \} = \{3,4\}$$
$$[4]_{R_3} = \{ y \in A \mid y R_3 4 \} = \{4,3\}$$
$$A/_R = \{ [0]_{R_3}, [2]_{R_3}, [3]_{R_3} \}$$

2. Stabilire se le seguenti relazioni sono di equivalenza

- $R_1 = \{ \overbrace{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}}^{X \times X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \}$

(Qui l'insieme $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$) quindi l'insieme di tutte le coppie ordinate (x,y) t.c. $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Tali coppie sono infinite, quindi se prendo la coppia $(\bar{x},\bar{x}) := (10,10)$ si ha che $\bar{x} \not R_1 \bar{x}$. Dunque so già che R_1 non è di equiv, perché R_1 non è riflessiva.

- $R_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x-y| \le 1 \}$

$x R_2 x$? cioè $|x-x| \le 1$?

$|x-x| = |0| \le 1$ ✓ $\Rightarrow R_2$ è riflessiva

$x R_2 y \Rightarrow ?\ y R_2 x$

$|x-y| \le 1 \Rightarrow ?\ |y-x| = |-(x-y)| = |x-y| \le 1$ ✓

$\Rightarrow R_2$ è simmetrica

R_2 non è transitiva perchè se $1 R_2 2$ perchè $|1-2| = |-1| = 1$

$2 R_2 3$ perchè $|2-3| = |-1| = 1$

$\Rightarrow$ dovrei avere $|1-3| = |-2| = 2 \leq 1$ e non è vero!

infatti $1 \not R_2 3$.

$\Rightarrow R_2$ non è una relazione di equiv.

- $R_3 = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid x = y \text{ oppure } x+y=1\}$

R_3 è riflessiva perchè $x = x \ \forall x \in [0,1]$

R_3 è simmetrica? Se $x R_3 y \Rightarrow y R_3 x$?

$$x R_3 y \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \vee \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=x \\ y+x=1 \end{matrix} \Rightarrow y R_3 x \rightarrow R_3 \text{ è simmetr}$$

R_3 è transitiva? Se $x R_3 y$, $y R_3 z \Rightarrow x R_3 z$?

$$\Rightarrow \begin{matrix} x=y \\ \vee \\ x+y=1 \end{matrix} \quad e \quad y R_3 z \begin{cases} y=z \\ \vee \\ y+z=1 \end{cases}$$

Se $x=y$ e $y=z \Rightarrow x=z$

Se $x=y$ e $y+z=1 \Rightarrow x+z=1$

Se $x+y=1$ e $y=z \Rightarrow x+z=1$

Se $x+y=1$ e $y+z=1 \Rightarrow \cancel{1}-x+z=\cancel{1} \Leftrightarrow x=z$

$\Updownarrow$

$y = 1-x$

$\Rightarrow R_3$ è transitiva

$\Rightarrow R_3$ è rel. di equiv.

3) Dati i vettori $\vec{v} = (3,4,-2)$ $\vec{w} = (2,1,-1)$ di $\mathbb{R}^3$ determinare

a) l'angolo φ tra i due vettori.

Usiamo la formula del prodotto scalare $\boxed{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\varphi}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}} = \frac{12}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{29}}$$

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 12$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$|\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{29}}\right)$

è un vettore

b) la proiezione ortogonale $\vec{v}'$ di $\vec{v}$ su $\vec{w}$

$$\boxed{\vec{v}' = \langle \vec{v}, \frac{\vec{w}}{|w|} \rangle \cdot \frac{\vec{w}}{|w|}} = \frac{1}{|w|} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \cdot \frac{\vec{w}}{|w|} =$$

versore di $\vec{w}$

$$= \frac{\vec{w}}{|w|^2} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{(2, 1, -1)}{\cancel{6}} \cdot \cancel{12}^{\,2} = (4, 2, -2)$$

$$|w| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = \sqrt{6} \Rightarrow |w|^2 = 6$$

c) la componente ortogonale α di $\vec{v}$ sulla retta parallela e con

è uno scalare

al versore $\frac{\vec{w}}{|w|}$.

Occorre determinare α t.c. $\vec{v}' = \alpha \cdot \frac{\vec{w}}{|w|} \Rightarrow (4, 2, -2) = \alpha \frac{(2, 1, -1)}{\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 2 = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -2 = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{6}$$