Esercitazione 1: Forme SOP, POS e mappe di Karnaugh

Corso di Architettura degli Elaboratori (A.A. 2021/22)

Tutor: Dall’Occo Francesco (francesco.dallocco@unife.it)

Ripasso

Nota la tabella di verità di una funzione logica, la si vuole sintetizzare in modo ottimale

Per fare questo abbiamo due strumenti:

- Algebra di boole
- Mappe di Karnaugh

Tabella di verità

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
…	…	…	…
1	1	1	1

Semplificazione algebrica

$$f = ab'c + a' + b =$$
$$a + b'c + b =$$
$$a + b + c$$

Mappe di Karnaugh

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Forma di costo minimo

Mappe di Karnaugh

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Sono una rappresentazione alternativa della tabella di verità.
Il valore delle variabili indica le «coordinate» sulla tabella, mentre il valore contenuto nella casella della mappa corrisponde al valore di verità della funzione

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Mappe di Karnaugh

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Sono una rappresentazione alternativa della tabella di verità.
Il valore delle variabili indica le «coordinate» sulla mappa, mentre il valore contenuto nella casella corrisponde al valore di verità della funzione

ab / c	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

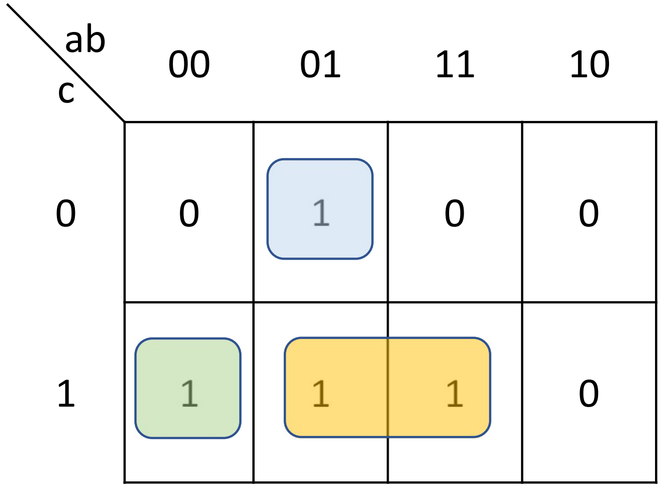
Mappe di Karnaugh

L’obiettivo è riuscire a ***«coprire» tutti gli 1*** presenti sulla mappa, ***senza coprire nessuno 0***.
Gli ***implicanti*** possono coprire una o più caselle adiacenti.
Ogni implicante può coprire 1, 2, 4, 8, …, 2^n caselle

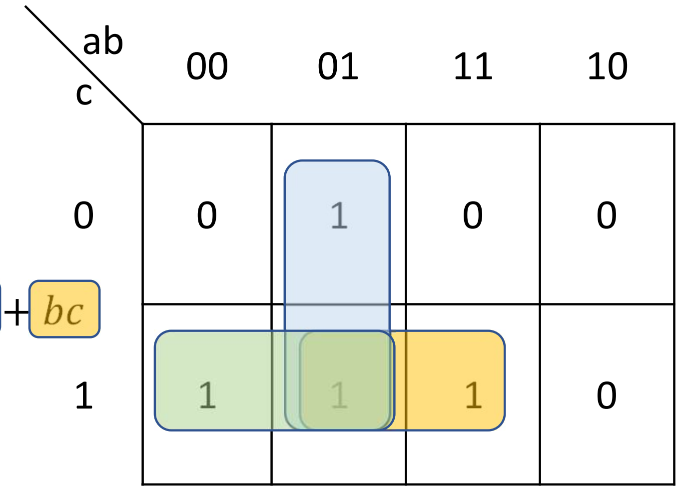
Ad ogni implicante corrisponde un termine prodotto.
L’espressione finale è la somma di tutti i termini prodotto ottenuti dagli implicanti.

Il problema è che a noi non basta trovare una copertura qualsiasi, vogliamo quella che ottimizzi l’espressione finale.

Cerchiamo gli ***implicanti primi essenziali***



$a'bc' + a'b'c + bc$
8 letterali



$a'b + a'c + bc$
6 letterali!

Esercizio 1.1

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Ottenere l'equazione di questa funzione logica in forma minima:

- Semplificazione algebrica in forma SOP
- Mappe di Karnaugh

Es 1.1 - SOP

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Mintermine $a \cdot b'$

Mintermine $a \cdot b$

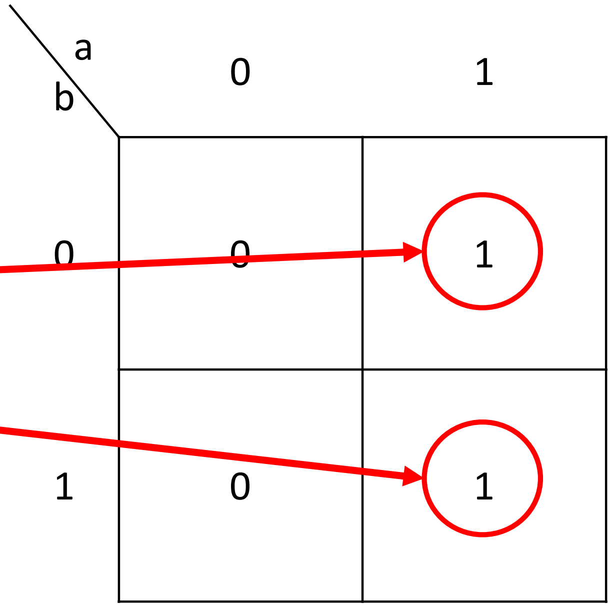
Espressione (non semplificata): $f = ab' + ab$

Semplificazione con algebra di boole:

1) proprietà distributiva: $f = a(b' + b)$
2) $x + x' = 1$ $\quad f = a \cdot 1 = a$

Es 1.1 - Karnaugh

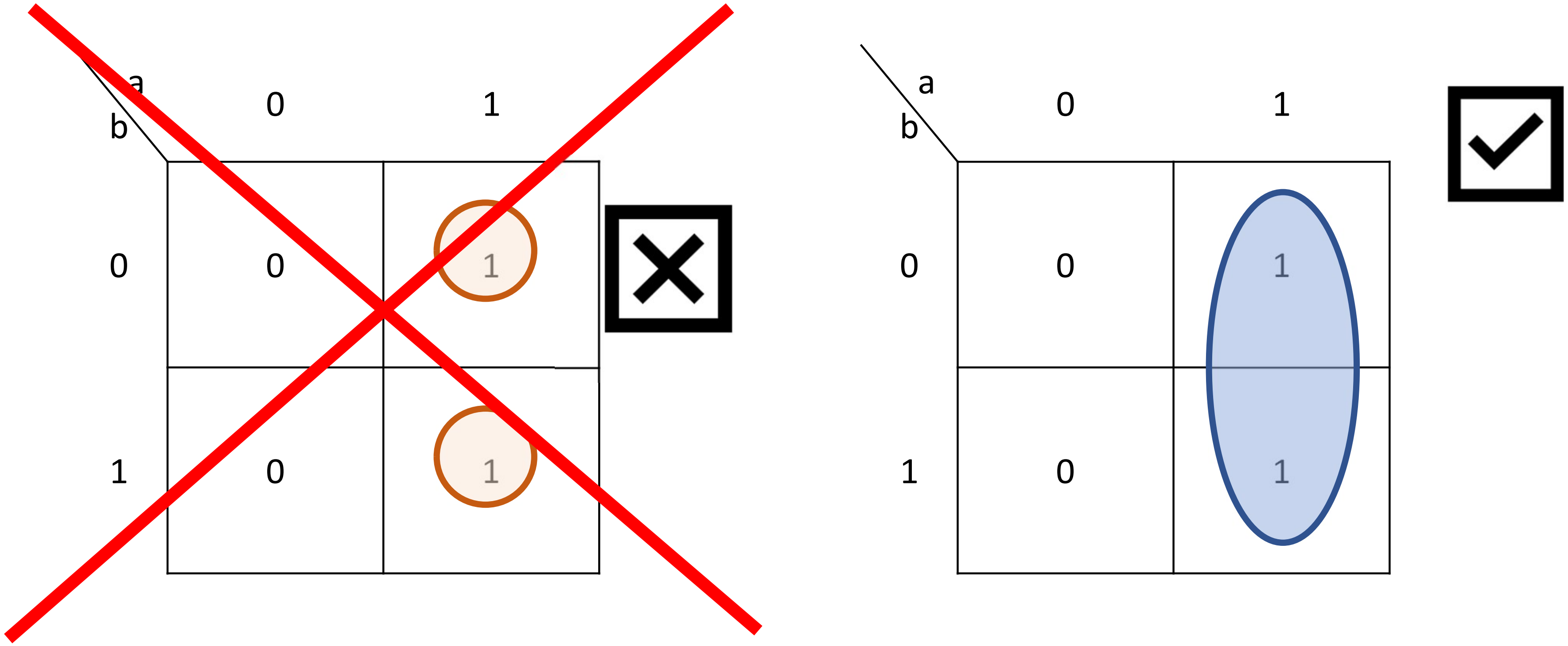
a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1



Fase 1: creare la mappa.

Es 1.1 - Karnaugh

Fase 2: Trovare la copertura ottimale.



Es 1.1 - Karnaugh

Fase 3: ottenere i termini associati ad ogni copertura

b \ a	0	1
0	0	1
1	0	1

$$a(b + b')$$
$$=$$
$$a$$

$$f = a$$

Per ottenere il termine prodotto dall'implicante:

1. Guardo quali variabili non cambiano mai valore nell'implicante. Quelle variabili saranno presenti nel termine prodotto
2. Quelle variabili saranno in forma vera, se il loro valore è 1, in forma negata altrimenti

Esercizio 1.2

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Ottenere l’equazione di questa funzione logica in forma minima:

- Semplificazione algebrica in forma SOP
- Mappe di Karnaugh

Es 1.2 - SOP

1. Genero l'espressione: $a'\underline{b'}c' + a\underline{b'}c' + \underline{a}b'\underline{c} + abc' + \underline{a}b\underline{c}$
2. Distributiva: $(a'+a)b'c' + ac(b' + b) + abc'$
3. $x + x' = 1$: $b'c' + \underline{a}c + \underline{a}bc'$
4. Distributiva: $b'c' + a(c + bc')$
5. $x + x'y = x + y$: $b'c' + a(c + b)$
6. (ci vuole occhio) de Morgan → $(xy)' = x' + y'$:
   $\underbrace{b'c'}_{X} + \underbrace{a}_{Y}\underbrace{(c + b)}_{X'} \rightarrow x + yx' = x + y = b'c' + a$

Es 1.2 - SOP - alternativa

1. Genero l'espressione: $a'\underline{b'c'} + a\underline{b'c'} + \underline{a}b'\underline{c} + abc' + \underline{a}b\underline{c}$
2. Distributiva: $(a'+a)b'c' + ac(b' + b) + abc'$
3. $x + x' = 1$: $b'\underline{c'} + ac + ab\underline{c'}$
4. Distributiva: $c'(b' + ab) + ac$
5. $x + x'y = x + y$: $c'(b' + a) + ac = b'c' + \underline{ac'} + \underline{ac}$
6. Distributiva: $b'c' + a(c'+c)$
7. $x + x' = 1$: $b'c' + a$

Es. 1.2 - Karnaugh

Distanza hamming=1

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

Es. 1.2 - Karnaugh

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

Implicanti di dimensione 4: a

Es. 1.2 - Karnaugh

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

Implicanti di dimensione 2: è nascosto, ma c'è! Ricordatevi che la mappa è un «cubo srotolato»: 100 è adiacente a 000!
Implicante: $b'c'$

Es. 1.2 - Karnaugh

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

Somma degli implicanti primi: $a + b'c'$

Esercizio 1.3 – la macchinina giocattolo

Una macchinina giocattolo è programmata per evitare gli ostacoli in casa.

È dotata di 4 sensori, anteriore (a), posteriore (b), sinistro (c) e destro (d), che si attivano (1) in presenza di un ostacolo nella loro direzione, e restano inattivi (0) in tutti gli altri casi.

La macchinina tuttavia riesce a fare manovra solo se ha ostacoli attorno a sé al massimo in due diverse direzioni.

Se non è in grado di fare manovra, e quindi di evitare gli ostacoli, deve fermarsi e attivare un segnalatore acustico (f), nella speranza che qualcuno la sblocchi.

Scrivere la tabella di verità della funzione f e semplificarla utilizzando le mappe di Karnaugh, per ottenere l'espressione in forma SOP e POS

Es. 1.3 - tabella

Traducendo la consegna, vogliamo che la funzione f sia vera se e solo se almeno tre delle variabili sono vere (1)

a	b	c	d	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Esercizio 1.3 - mappa

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

Esercizio 1.3 – SOP

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

$$f = bcd + acd + abd + abc$$

Esercizio 1.3 – POS

$$f = (a+c)(a+b)(c+d)(b+c)(a+d)(b+d)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

Esercizio 1.4

Vogliamo ottenere l'equazione di questa funzione logica in forma minima:

- Mappe di Karnaugh, forma SOP
- Mappa di karnaugh, forma POS

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Esercizio 1.4 - mappa

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Esercizio 1.4 - SOP

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Implicanti di dimensione 8: c

Esercizio 1.4 - SOP

RICORDA!!! È sempre un (iper)cubo srotolato!
0000 è adiacente a 1000 e 0010, che a loro volta sono adiacenti a 1010

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Implicanti di dimensione 4???

Esercizio 1.4 – implicante dimensione 4 - spiegazione

Srotolando il cubo in modo diverso, sarebbe

cd \ ab	11	10	00	01
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1
00	0	1	1	0
01	0	0	0	1

Occhio alle intestazioni della tabella! Sono cambiate!

Questa mappa è la stessa della slide precedente, sono state solo spostate le righe e le colonne, per evidenziare come l'implicante, di fatto, ci sia.

Implicanti di dimensione 4: $b'd'$

Esercizio 1.4 - SOP

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Rimane solo un 1 da coprire, riusciamo a farlo con un implicante di dimensione 2

Implicanti di dimensione 2: $a'bd$

Esercizio 1.4 – SOP - soluzione

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Soluzione in forma canonica SOP:

$$c + b'd' + a'bd$$

Esercizio 1.4 - POS

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Per la forma POS il procedimento è simile, ma dobbiamo coprire gli 0 anziché gli 1

Esercizio 1.4 - POS

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Di sicuro abbiamo: $(b' + c + d)(b + c + d')$… ma l'ultimo zero come lo copriamo?

Esercizio 1.4 - POS

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Soluzione 1: $(b' + c + d)(b + c + d')(a' + b' + c)$, 9 letterali

Esercizio 1.4 - POS

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Soluzione 2: $(b' + c + d)(b + c + d')(a' + c + d')$, 9 letterali

Esercizio 1.4 - POS

Le soluzioni 1 e 2 sono equivalenti! Non sempre c'è una sola soluzione!

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Soluzione 2: $(b' + c + d)(b + c + d')(a' + c + d')$, 9 letterali

Esercizio 1.4 - POS

Questa soluzione è sbagliata! Ho ottenuto una copertura, ma con implicanti non essenziali

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Soluzione 3 (SBAGLIATA): $(b' + c + d)(b + c + d')(a' + b' + c + d')$, 10 letterali