1. Determinare se possibile le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Si tratta di 3 equazioni in 3 incognite.
Si calcola il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{A^2+A^1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{A^3-2A^1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6+2 = -4$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ esiste una e una sola soluzione (sistema di Cramer)

$$x_1 = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{-4}\left(3(-2)+2\right) = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4}\left(-3(-2)+2(-3)\right) = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4}\left(3 \cdot 0 - 2 \cdot 2\right) = \frac{-4}{-4} = 1$$

Soluzione: $(1, 0, 1)$

2. Determinare se possibile le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - 3y + 2z = 2 \\ 5x + 13y - 10z = 6 \end{cases}$$

Sistema di tre equazioni in tre incognite. Si calcola il det(A)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -10 \end{vmatrix} = 2(30-26) - (-10-10) - (13+15)$$

$$= 2 \cdot 4 - 28 + 20 = 0$$

rango$(A) < 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6-1 = -7 \neq 0 \quad \text{rango}(A) = 2$$

Occorre trovare $r([A:b])$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-18-26) - (6-10) +$$

$$+ 3(13+15) = -88 + 4 + 84 = 0$$

rango$([A:b]) = 2$

Il sistema è compatibile.

Si elimina la terza equazione e si porta al secondo membro la terza colonna di A relativa a z

$$\begin{cases} 2x + y = 3 + z \\ x - 3y = 2 - 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} 3+z & 1 \\ 2-2z & -3 \end{vmatrix} = \frac{-3(3+z) - 2 + 2z}{-7} = \frac{z+11}{7}$$

$$y = \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} 2 & 3+z \\ 1 & 2-2z \end{vmatrix} = \frac{4 - 4z - 3 - z}{-7} = \frac{5z-1}{7}$$

Soluzioni:

soluzione particolare

$$\begin{pmatrix} \frac{z+11}{7} \\ \frac{5z-1}{7} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + z \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}}_{Ker(A)}$$

Si hanno ∞^1 soluzioni. $\left(3 - r(A)\right)^{n-k}$

3. Determinare se possibile le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Si calcola det(A) (si tratta di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (-15+16) + (10-12) + (-8+9) =$$

$$= 1 - 2 + 1 = 0$$

rango(A) < 3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0 \qquad \text{rango}(A) = 2$$

Si valuta $r([A:b])$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-8+9) - 3(-4+3) =$$

$$= 1 + 3 = 4 \neq 0 \qquad \text{rango}([A:b]) = 3$$

$r(A) \neq$ rango$([A:b])$

$\Rightarrow$ sistema impossibile

4. Discutere il seguente sistema lineare al variare di k:

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-3y+5z=4 \\ kx+7y-11z=-4 \end{cases}$$

Sistema di 3 equazioni in 3 incognite. Si calcola det(A)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ k & 7 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 11 \\ k & 7-2k & -11+3k \end{vmatrix}$$

$$= -7(-11+3k) - 11(7-2k) =$$

$$= 77 - 21k - 77 + 22k = k$$

Se $k \neq 0$, rango$(A)=3$ $(\det(A) \neq 0)$ e dunque il sistema ammette una e una sola soluzione.

Se $k=0$, poiché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \underbrace{-3-4}^{-7} \neq 0$, rango$(A)=2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 12-28+16=0 \quad \text{rango}([A:b])=2$$

Il sistema ammette ∞^1 soluzioni per $k=0$

Si calcolano le soluzioni.

Per $k \neq 0$

$$x = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 5 \\ -4 & 7 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ k & -4 & -11 \end{vmatrix} = -\cancel{\frac{4}{k}}\ 12$$

$$z = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ k & 7 & -4 \end{vmatrix} = 8$$

Per $k = 0$, si considera

$$x + 2y = 3z$$
$$2x - 3y = 4 - 5z$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & 2 \\ 4-5z & -3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-z+8}{+7} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3z \\ 2 & 4-5z \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-4+11z}{7}$$

sol. particolare

$$\begin{pmatrix} -\frac{z+8}{7} \\ \frac{-4+11z}{7} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + z \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{11}{7} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Ker}\, A}$$

8. Determinare, se possibile, le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni in tre incognite.
Si calcola $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$\text{rango}(A) < 3$

Siccome si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \text{rango}(A) = 2$$

Verificchiamo la compatibilità, calcolando $r([A \vdots b])$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(2 colonne uguali)}$$

$$\Rightarrow \quad r(A) = r([A|b]) = 2$$

Il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^{1}$ soluzioni.

<u>Soluzioni:</u>

$$\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ x = 0 - z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ -z & 0 \end{vmatrix}}{-1} = -z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2z - 1 - z}{-1} = 3z + 1$$

Soluzioni:

$$\begin{pmatrix} -z \\ 3z+1 \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. particolare}} + \overbrace{z\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\ker(A)}$$

9. Determinare, se possibile, le soluzioni del seguente sistema:

$$
\begin{cases}
2x + y - z = 1 \\
3x + y = 1 \\
5x + 2y - z = 5
\end{cases}
$$

3 equazioni in 3 incognite.

Si calcola

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

$\text{rango}(A) < 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0 \qquad \text{rango}(A) = 2$$

$$|A|b| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\,(5-2) - (15-5) + (6-5) = 6 - 10 + 1$$

$$= -3 \neq 0$$

$\text{rango}([A|b]) = 3 \Rightarrow$ sistema impossibile

10. Determinare se possibile le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ 4y + 3t = 5 \\ 2x + 5t = 4 \\ -3z - 2t = 1 \end{cases}$$

4 equazioni in 4 incognite.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(40-2) - 2 \cdot (-8) = 130$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{130} = -\frac{35}{130} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{130} = \frac{-122}{130}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{130} = \frac{74}{130} \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{130} = \frac{118}{130}$$

Unica soluzione: $\left(-\frac{7}{26}, \frac{37}{65}, -\frac{61}{65}, \frac{59}{65}\right)$

11. Determinare, se possibile, le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

2 equazioni in 3 incognite.
Il sistema è omogeneo. Esiste sempre la soluzione.
In questo caso l'insieme delle soluzioni è $\ker(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11,$$

si determinano le soluzioni di

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4z \\ x + 4y = 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4z & -3 \\ 2z & 4 \end{vmatrix}}{11} = \frac{16z + 6z}{11} = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4z \\ 1 & 2z \end{vmatrix}}{11} = \frac{4z - 4z}{11} = 0;$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \ker(A)$$

12. Determinare, se possibile, le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

3 equazioni in 3 incognite.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$$

rango$(A) < 3$

Il sistema è omogeneo. La soluzione esiste sempre.

In tal caso l'insieme delle soluzioni è Ker(A).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \qquad \text{rango}(A) = 2$$

Si hanno infinite soluzioni.

$$\begin{cases} x + 3y = -z \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{z}{2} \,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{z}{2}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} z \\ -z \\ 2z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \,; \quad \text{dimensione } 1$$

13. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ quante soluzioni possiede il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = k+1 \\ 4x + 5y + 6z = k \\ 7x + 8y + 9z = k+1 \end{cases}$$

3 equazioni in 3 incognite

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(9-6) + 3(4-7) = 6 - 9 = -3 \neq 0$$

Esiste <u>una e una sola soluzione</u> per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & 2 & 3 \\ k & 5 & 6 \\ k+1 & 8 & 9 \end{vmatrix}}{-3} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k+1 & 3 \\ 4 & k & 6 \\ 7 & k+1 & 9 \end{vmatrix}}{-3} = -k-2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & k+1 \\ 4 & 5 & k \\ 7 & 8 & k+1 \end{vmatrix}}{-3} = k + \frac{1}{3}$$

14. Determinare, al variare di $k \in R$, quante soluzioni possiede il seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 7 \\ 8x + 3y = k^2 \end{cases}$$

3 equazioni in 2 incognite.
Si determina rango(A)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11 \neq 0 \qquad r(A) = 2$$

$$|A|b| = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & k^2 \end{vmatrix} = 5(k^2 - 21) + 3(2k^2 - 56) + 6 - 8$$

$$= 11k^2 - 275$$

$$11k^2 - 275 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{275}{11}} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Per $K = \pm 5$ rango$(A|b) = 2 = r(A)$

Il sistema ammette soluzione e la soluzione è unica $(\infty^{2-2} = 1)$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{11} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{11} = 3$$

$(2,3)$ è la soluzione.

Per $k \neq \pm 5$, $r(A) \neq r(A|b) = 3$

Sistema incompatibile.

15. Determinare, al variare di $k \in R$, quante soluzioni possiede il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ kx + 2z = 1 \\ -x + 3z = 1 \end{cases}$$

3 equazioni in 3 incognite.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2(3k+2) = -6k-4$$

Per $k \neq -\frac{2}{3}$, $r(A) = 3$; si tratta di un sistema di Cramer che ha una sola soluzione:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-6k-4} = \frac{1}{3k+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ k & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-6k-4} = -\frac{k+1}{3k+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-6k-4} = \frac{k+1}{3k+2}$$

Per $k = -\frac{2}{3}$, rango$(A) < 3$.

Poichè $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ $\quad r(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\left(-\frac{2}{3}+1\right) = +\frac{2}{3} \neq 0$$

$r(A \vdots b) = 3$

$r(A) \neq r(A \vdots b) \Rightarrow$ il sistema è impossibile (incompatibile)

16. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni non banali:

$$\begin{cases} 2x + ky + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ kx - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

3 equazioni in 3 incognite.

La soluzione banale esiste sempre.

Perchè ci siano anche altre soluzioni, occorre che $\det(A)=0$ e rango $A<3$

$$\begin{vmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ k & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 = 2\,(2-6) - k\,(2+3k) - 1\,(-2-k) =$$

$$= -8 - 2k - 3k^2 + 2 + k =$$

$$= -3k^2 - k - 6$$

$$\Delta = 1 - 72 < 0$$

Per ogni valore di k, $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow r(A) = 3$

Per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste solo la soluzione banale.

15. Risolviamo il seguente sistema con il metodo a gradini:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ kx + 2z = 1 \\ -x + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ k & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2k & 2+k & 1+k \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} A_2 \leftarrow A_2 - k A_1 \\ A_3 \leftarrow A_3 + A_1 \end{array}$$

Scambio la seconda e la terza riga

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2k & 2+k & 1+k \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+k+2k & 1+k \end{array}\right) \quad A_3 \leftarrow A_3 + kA_2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3k & 1+k \end{array}\right)$$

Se $2+3k \neq 0$, ossia $k \neq -\frac{2}{3}$,
$r(A) = r(A|b) = 3$
e si ha una e una sola soluzione

$$z = \frac{1+k}{2+3k}$$

$$y = \left(-2\left(\frac{1+k}{2+3k}\right)\right)\frac{1}{2} = \frac{-k-1}{2+3k}$$

$$x = -1 + \frac{+k+1}{2+3k} - 2\left(\frac{-k-1}{2+3k}\right) = \frac{1}{2+3k}$$

Se $k = -\frac{2}{3}$, $r(A) = 2$, ma $r(A|b) = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{1-\frac{2}{3}}_{\frac{1}{3}} \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Il sistema è impossibile.