Variabili Aleatorie Continue 3

Stefania Bartoletti

5 Maggio 2021

Variabili aleatorie discrete notevoli

- Uniforme $\mathsf{X} \sim \mathcal{U}(n)$
  - supporto $1, \ldots, n$.
  - p.m.f.: $f_\mathsf{X}(k) = \frac{1}{k}$ per $k = 1, \ldots, n$
  - ogni punto del supporto ha la stessa probabilità
- Bernoulli $\mathsf{X} \sim \mathsf{Ber}(p)$
  - supporto $0, 1$.
  - p.m.f.: $f_\mathsf{X}(0) = 1 - p$, $f_\mathsf{X}(1) = p$
  - lancio di una moneta, evento con due esiti.
- Binomiale $\mathsf{X} \sim \mathsf{Bin}(n, p)$
  - supporto $0, 1, \ldots, n$.
  - p.m.f.: $f_\mathsf{X}(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
  - somma di esiti testa, per il lancio di n monete, con probabilità p

Variabili aleatorie continue notevoli

- Uniforme $\mathsf{X} \sim \mathcal{U}([a,b])$
  - intervallo $[a,b]$.
  - densità: $f_{\mathsf{X}}(x) = \frac{1}{b-a}$ per $a \leqslant x \leqslant b$
  - distribuzione: $F_{\mathsf{X}}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ per $a \leqslant x \leqslant b$
  - ogni punto dell'intervallo ha la stessa densità
- Gaussiana $\mathsf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
  - intervallo $(-\infty, +\infty)$.
  - densità: $f_{\mathsf{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  - distribuzione: $F_{\mathsf{X}}(x)$ non esiste in forma chiusa, si usano tavole o il calcolatore
  - Errori di misura e in generale moltissime variabili (vedremo meglio tra poco...)
- Esponenziale $\mathsf{X} \sim \exp(\lambda)$
  - intervallo $[0, \infty)$.
  - densità: $f_{\mathsf{X}}(x) = \lambda e^{(-\lambda x)}$ per $x \geqslant 0$
  - distribuzione: $F_{\mathsf{X}}(x) = 1 - e^{(-\lambda x)}$ per $x \geqslant 0$
  - Tempo di attesa tra due eventi, senza memoria

Variabile aleatoria di Poisson

Una variabile aleatoria X che assuma i valori interi positivi $0, 1, 2, \ldots$ è una variabile aleatoria di Poisson o poissoniana di parametro $\lambda > 0$, se la sua funzione di massa di probabilità è data da

$$f_{\mathsf{X}}(i) = \mathbb{P}\left\{\mathsf{X} = i\right\} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{(-\lambda)}$$

Il totale dei "successi" in un gran numero n di ripetizioni indipendenti di un esperimento che ha una piccola probabilità di riuscita p, è una variabile aleatoria con distribuzione approssimativamente di Poisson, con media $\lambda = np$.

Esempio

Un macchinario produce oggetti che hanno una probabilità di essere difettosi pari a $p = 0.1$. Supponendo l'indipendenza nella qualità dei pezzi successivi, con che probabilità un campione di 10 oggetti ne conterrà al più uno di difettoso?

Esempio

Un macchinario produce oggetti che hanno una probabilità di essere difettosi pari a $p = 0.1$. Supponendo l'indipendenza nella qualità dei pezzi successivi, con che probabilità un campione di 10 oggetti ne conterrà al più uno di difettoso?

- Il numero di pezzi difettosi è una variabile aleatoria binomiale di parametri $(10, 0.1)$

Esempio

Un macchinario produce oggetti che hanno una probabilità di essere difettosi pari a $p = 0.1$. Supponendo l'indipendenza nella qualità dei pezzi successivi, con che probabilità un campione di 10 oggetti ne conterrà al più uno di difettoso?

- Il numero di pezzi difettosi è una variabile aleatoria binomiale di parametri $(10, 0.1)$
- La probabilità richiesta è quindi $\binom{10}{0} 0.1^0 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 0.9^9 = 0.7361$.

Esempio

Un macchinario produce oggetti che hanno una probabilità di essere difettosi pari a $p = 0.1$. Supponendo l'indipendenza nella qualità dei pezzi successivi, con che probabilità un campione di 10 oggetti ne conterrà al più uno di difettoso?

- Il numero di pezzi difettosi è una variabile aleatoria binomiale di parametri $(10, 0.1)$
- La probabilità richiesta è quindi $\binom{10}{0}0.1^0 0.9^{10} + \binom{10}{1}0.1^1 0.9^9 = 0.7361.$
- Usando l'approssimazione di Poisson, si ottiene 0.7358

Distribuzione Chi-quadrato

Se $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sono variabili aleatorie normali standard e indipendenti, la somma dei loro quadrati

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

è una variabile aleatoria chi-quadro con n gradi di libertà, e si scrive $X \sim \chi_n^2$.
Qual è il valore atteso?