Consideriamo un **sistema di riferimento cartesiano ortonormale** $Oxyz$ **nello spazio** V.
Si è visto che ogni punto P dello spazio V può essere rappresentato con una terna ordinata di numeri reali $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (e viceversa), scrivendo $P(x, y, z)$.

Piano passante per l'origine

Un **piano passante per l'origine** può essere visto come **un sottospazio di dimensione 2** di V.
Pertanto dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ **linearmente indipendenti**, il piano π generato dai due vettori passante per l'origine è individuato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x &= x_1 t + x_2 s \\ y &= y_1 t + y_2 s \\ z &= z_1 t + z_2 s \end{aligned}$$

dette **equazioni parametriche**.
Infatti ogni punto v del piano è combinazione lineare dei due vettori (**vettori direttori**) che lo generano:

$$v = tv_1 + sv_2$$

Equazioni del piano: piano per l'origine II

Ricavando dalle equazioni parametriche i parametri s e t, si ottiene la corrispondente **equazione cartesiana** del piano passante per l'origine, espressa in forma implicita:

$$ax + by + cz = 0$$

dove i coefficienti a, b, c sono legati alle coordinate dei vettori di base (a meno di una costante moltiplicativa):

$$a = y_1 z_2 - y_2 z_1 \quad b = z_1 x_2 - x_1 z_2 \quad c = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

Dati $v_1 = (2, 0, 2)$ e $v_2 = (1, -1, 0)$, il piano π passante per l'origine è individuato dalle equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} x &= 2t + s \\ y &= -s \\ z &= 2t \end{aligned}$$

Ricavando s e t, si ottiene l'equazione cartesiana:

$$x + y - z = 0$$

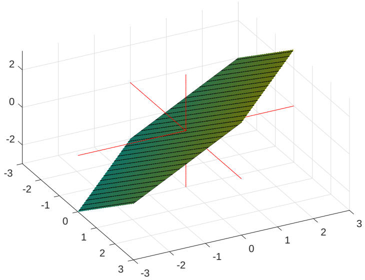
che è **definita a meno di una costante moltiplicativa**.

L'equazione del piano $ax + by + cz = 0$ si può anche esprimere come

$$(a, b, c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ **individua un vettore ortogonale al piano.**

Nel caso dell'esempio, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è il vettore ortogonale al piano.



Se π è un piano non passante per l'origine, fissato un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ del piano e due vettori linearmente indipendenti che generano il piano parallelo a π passante per l'origine (**vettori direttori** $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$), le **equazioni parametriche** del piano sono date da:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x_1 t + x_2 s \\
y &= y_0 + y_1 t + y_2 s \\
z &= z_0 + z_1 t + z_2 s
\end{aligned}
$$

(Ogni punto del piano si ottiene come la somma di P e di un elemento del piano parallelo passante per l'origine).

Ricavando s e t, si ottiene la corrispondente equazione cartesiana, detta **equazione affine** del piano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

dove i coefficienti a, b, c, d sono legati alle coordinate dei vettori di base e di P.

Esempio

Trovare l'equazione del piano passante passante per i punti $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$.
I vettori $P_1P_2 \equiv (-1,1,0)$ e $P_1P_3 \equiv (-1,0,1)$ sono vettori direttori (linearmente indipendenti) e il piano passa per P_1. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} x &= 1 \quad -t-s \\ y &= \quad t \\ z &= \quad s \end{aligned}$$

Da cui si ricava l'equazione affine:

$$x + y + z - 1 = 0$$

Equazione affine del piano

Un piano π è rappresentato da una equazione lineare in x, y, z (e viceversa), ossia da una equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

con a, b, c, d reali non tutti nulli:

$$P(x_0, y_0, z_0) \in \pi \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_0, y_0, z_0) \text{ è soluzione dell'equazione } ax + by + cz + d = 0$$

I coefficienti a, b, c, d **sono individuati a meno di una costante moltiplicativa**.

Le equazioni $2x - 3y + 5z + 7 = 0$ e $4x - 6y + 10z + 14 = 0$ rappresentano lo stesso piano.

L'equazione del piano si può anche esprimere come

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d = 0$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ **individua un vettore ortogonale al piano.**

Trovare l'equazione del piano passante passante per i punti $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$.
Oltre a come si è fatto precedentemente, si può anche ragionare in modo diverso.
Si impone il passaggio per P_1, P_2, P_3 di $ax + by + cz + d = 0$:

$$\begin{aligned} a + d &= 0 \qquad \text{passaggio per } P_1 \\ b + d &= 0 \qquad \text{passaggio per } P_2 \\ c + d &= 0 \qquad \text{passaggio per } P_3 \end{aligned}$$

Da cui $a = -d; b = -d; c = -d$, con $d \neq 0$ e quindi, π è dato da

$$-d(x + y + z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$$

Si determinino le equazioni dei piani passanti per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (**stella dei piani per** P_0).
Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Imponendo il passaggio per P_0 si ha:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \qquad \text{passaggio per } P_0$$
$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Sostituendo tale espressione al posto di d nell'equazione iniziale si ottiene:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Esempio.
Se $P_0(1, 2, -3)$, la stella di piani per P_0 è data da:

$$a(x - 1) + b(y - 2) + c(z + 3) = 0$$

Al variare di a, b, c si ottengono tutti i piani passanti per P_0 (sono infiniti).

Teorema

Se $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, allora

- $d = 0 \Leftrightarrow \pi$ passa per l'origine
- il coefficiente di una incognita è nulla $\Leftrightarrow$ il piano è **parallelo** all'**asse** che porta il nome di quella incognita.

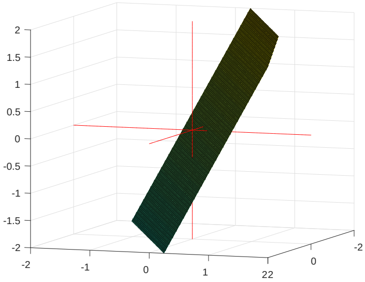
Esempio.

- $\pi \equiv 2x + y - 5 = 0$ è parallelo all'asse z perchè $c = 0$ (qualunque valore assunto da z soddisfa l'equazione)
- $\pi \equiv 2x - 5 = 0$ è parallelo all'asse y perchè $b = 0$ ed è parallelo all'asse z perchè $c = 0$; quindi è parallelo al piano yz
- $\pi \equiv 3x - z = 0$ è parallelo all'asse y perchè $b = 0$ e passa per l'origine perchè $d = 0$; quindi π **contiene** l'asse y
- $\pi \equiv z = 0$ è parallelo agli assi x e y (perchè $a = b = 0$) e passa per l'origine perchè $d = 0$; quindi π **è** il piano xy
- Analogamente $\pi \equiv y = 0$ è il piano xz e $\pi \equiv x = 0$ è il piano yz.

Osservazione.
Se $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ e $c \neq 0$ (ossia π non è parallelo all'asse z), allora l'equazione di π si può scrivere nella forma

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c} \Leftrightarrow z = px + qy + r$$

con $p = -\frac{a}{c}; q = -\frac{b}{c}; r = -\frac{d}{c}$, detta **equazione esplicita** del piano π; π interseca l'asse z nel punto $P(0, 0, r)$.



Dati due piani

$$\begin{aligned}\pi_1 \equiv \qquad & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv \qquad & a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\end{aligned}$$

le soluzioni del seguente sistema rappresentano i punti di intersezione tra i piani:

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= -d_2\end{aligned}$$

La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ e il termine noto è $d = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \end{pmatrix}$.

Il rango della matrice A è al più 2; quindi i casi possibili sono:

- Se $r(A) = r(A|d) = 2$ il sistema ha un numero infinito di soluzioni ∞^{3-2}, ossia i due piani **si intersecano in una retta**
- Se $r(A) = 1$ e $r(A|d) = 2$, allora il sistema non ha soluzione e i piani sono **paralleli distinti**. In questo caso si ha che i vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono proporzionali
- Se $r(A) = r(A|d) = 1$ allora i due piani **coincidono**, perchè si hanno $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni

Teorema

Dati i piani

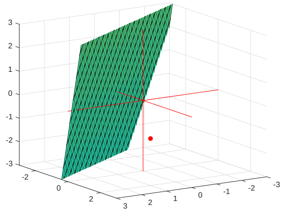
$$\pi \equiv \quad ax + by + cz + d = 0$$
$$\pi_1 \equiv \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

allora

- $\pi \| \pi_1 \Leftrightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$
- $\pi \perp \pi_1 \Leftrightarrow aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$

Il piano passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e parallelo a $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ è univocamente determinato e ha equazione

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



Esistono invece infiniti piani passanti per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e perpendicolari a $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$.

- I piani $\pi \equiv x - 3y + 5z + 1 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x - 6y + 10z - 3 = 0$ sono paralleli distinti: $(1, -3, 5) = \frac{1}{2}(2, -6, 10)$.
- I piani $\pi \equiv x - 3y + 5 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x - 6y + 7 = 0$ sono paralleli distinti: $(1, -3, 0) = \frac{1}{2}(2, -6, 0)$.
- I piani $\pi \equiv x - 2y + 3z + 5 = 0$ e $\pi_1 \equiv x - y - z + 8 = 0$ sono perpendicolari:
$$(1, -2, 3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.1 + (-2)(-1) + 3.(-1) = 0.$$
- I piani $\pi \equiv x - z = 0$ e $\pi_1 \equiv x + z = 0$ sono perpendicolari:
$$(1, 0, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.1 + 0.0 + (-1).1 = 0.$$
- I piani $\pi \equiv x - 5 = 0$ e $\pi_1 \equiv z + 3 = 0$ sono perpendicolari:
$$(1, 0, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.0 + 0.0 + 0.1 = 0.$$
- I piani $\pi \equiv x + 3y - z = 0$ e $\pi_1 \equiv 3x + y + 4 = 0$ non sono nè paralleli, nè perpendicolari, ma hanno una retta in comune ($r(A) = r(A|d) = 2$):
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \quad \text{retta} \rightarrow (x, y, z) = (-3/2, 1/2, 0) + (-1/8, 3/8, 1)t$$

- Determinare l'equazione del piano (o dei piani) passante per $P_0(1, 2, -1)$ e
  - parallelo a $\pi_1 \equiv 3x - 5y + z - 8 = 0$

$$\Downarrow$$

$$\pi \equiv 3(x-1) - 5(y-2) + (z+1) = 0 \qquad \to 3x - 5y + z + 8 = 0$$

  - perpendicolare a $\pi_2 \equiv x - y + 3z + 7 = 0$

$$\Downarrow$$

Occorre che $a - b + 3c = 0$; dunque posto $a = b - 3c$, ci sono ∞ piani dati da

$$\pi \equiv (b - 3c)(x-1) + b(y-2) + c(z+1) = 0$$

  - perpendicolare a $\pi_3 \equiv x - y + 4z + 1 = 0$ e $\pi_4 \equiv 2x + y - z + 8 = 0$

$$\Downarrow$$

Occorre che $a - b + 4c = 0$ e $2a + b - c = 0$; da cui $a = -c, b = 3c$; pertanto posto $c = -1$, si ha

$$\pi \equiv (x-1) - 3(y-2) - (z+1) = 0 \qquad \to x - 3y - z + 4 = 0$$

- Determinare l'equazione del piano (o dei piani) passante per $P_0(1, 2, -1)$ $(a(x-1) + b(y-2) + c(z+1) = 0)$
  - parallelo al piano xy

$$\Downarrow$$

poichè $a = b = 0$ e $c = 1$,

$$\pi \equiv z + 1 = 0$$

  - parallelo al piano xz

$$\Downarrow$$

$$\pi \equiv y - 2 = 0$$

  - parallelo al piano yz

$$\Downarrow$$

$$\pi \equiv x - 1 = 0$$

Nello spazio, è possibile chiedersi se quattro punti stiano sullo stesso piano.
Ciò è equivalente a chiedersi se il quarto punto appartiene o meno al piano passante per i primi tre.
Dati quindi i punti $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $S(x_3, y_3, z_3)$ e $T(x_4, y_4, z_4)$ si ha che i due vettori che generano il piano cercato sono, ad esempio,
$PQ \equiv (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e $PS \equiv (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.
L'appartenenza di T a tale piano equivale a dire che il vettore
$PT \equiv (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$ è combinazione lineare dei due precedenti, ossia al fatto che:

$$A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$

abbia **determinante nullo**.
Sfruttando le proprietà del determinante, operando sulle righe della matrice A' (II riga -I riga; III riga- I riga; IV riga - I riga), si ha che:

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{pmatrix} = -\det(A)$$

Quindi dato un punto di generiche coordinate (x_4, y_4, z_4), la condizione di complanarità con altri tre punti P, Q ed S, è equivalente ad avere $\det(A') = 0$.

Una retta dello spazio V passante per l'origine è un sottospazio di dimensione uno. Quindi corrisponde a tutti i multipli di un vettore dato, ossia, una retta r con generatore dato dal vettore $v = (v_1, v_2, v_3)$ può essere espressa da:

$$r \equiv (x, y, z) = t(v_1, v_2, v_3) \quad t \in \mathbb{R}$$

che si traduce in tre equazioni lineari, dette **equazioni parametriche** della retta:

$$\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t \\ z = v_3 t \end{cases}$$

Si dicono **parametri direttori** della retta le coordinate del vettore v e di ogni vettore non nullo parallelo alla retta.
Osservazione. I parametri direttori di una retta sono definiti **a meno di un fattore di proporzionalità non nullo** (se v è parallelo a r, αv lo è pure, per ogni $\alpha \neq 0$).

Dalle equazioni parametriche della retta, esplicitando il parametro t si hanno

$$\frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} = \frac{z}{v_3}$$

che sono invece dette **equazioni cartesiane** di una retta.

Equazioni della retta nello spazio I

Per descrivere una retta dello spazio **non passante per l'origine**, è sufficiente specificare un vettore direttore $v = (v_1, v_2, v_3)$ e un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ appartenente alla retta. Si ottengono così le **equazioni parametriche**:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$$

e, ricavando t, le **equazioni cartesiane**:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Qui v_1, v_2, v_3 sono i **parametri direttori** della retta.

Equivalentemente, dati due punti $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$, per essi passa una e una sola retta con vettore direttore $v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ passante per P. Le **equazioni parametriche** si possono scrivere come:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

e le **equazioni cartesiane** come:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

dette anche **equazioni frazionarie della retta** PQ**.**

Dalle equazioni cartesiane o frazionarie, ponendo $v_1 = x_2 - x_1$, $v_2 = y_2 - y_1$, $v_3 = z_2 - z_1$, si possono dedurre le **equazioni ridotte** della retta, dove due incognite sono espresse in funzione della terza; per esempio:

$$\begin{aligned} x &= gz + p \\ y &= hz + q \end{aligned}$$

Si vedano gli esempi.

- La retta passante per $P_1(1,2,3)$ e $P_2(2,3,4)$ è data da

$$r \equiv \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z-3}{4-3}$$

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

da cui si ha

$$r \equiv \begin{cases} x-1 = z-3 \\ y-2 = z-3 \end{cases}$$

Queste $(x = z-2; y = z-1)$ sono dette **equazioni ridotte** di r, perchè due incognite sono espresse in funzione della terza (sono due piani, uno parallelo all'asse y e l'altro parallelo all'asse x che contengono r).
Da queste si ottengono anche le equazioni parametriche date da

$$r \equiv \begin{cases} x = t-2 \\ y = t-1 \\ z = t \end{cases}$$

Al variare di t, si ottengono tutti i punti della retta $P(t-2, t-1, t)$.

- La retta passante per $P_1(1,2,3)$ e $P_2(1,3,4)$ è data da

$$r \equiv \frac{x-1}{1-1} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z-3}{4-3}$$

Convenendo di annullare il numeratore quando il denominatore si annulla, si ottiene che la retta è l'intersezione di (equazioni ridotte)

$$x = 1, y - 2 = z - 3$$

La retta appartiene al piano parallelo a yz dato da $x - 1 = 0$.

- La retta passante per $P_1(1,2,3)$ e $P_2(1,2,4)$ è data da

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-2}{2-2}$$

ossia da due piani che hanno equazione $x = 1, y = 2$; *queste sono le equazioni ridotte*. In questo caso r è parallela all'asse z, in quanto tutti i punti sono del tipo $P(1,2,\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- La retta passante per $P_1(1, 2, -1)$ e parallela a $v = (2, -1, 1)$ è data dalle seguenti equazioni parametriche:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Le equazioni frazionarie sono

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

Le equazioni ridotte sono: $x = 2z + 3, y = -z + 1$.

- La retta passante per $P_1(1, 2, 3)$ e parallela a $v = (1, 2, 0)$ ha equazioni:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$$

Poichè il terzo parametro direttore è nullo, la retta ha valore di quota costante e uguale a 3 ossia è parallela al piano xy (vedi punto P_1). Le equazioni ridotte sono $y = 2x; z = 3$.

- La retta passante per $P_1(1, 2, -4)$ e parallela a $v = (0, 2, 0)$ ha equazioni $x = 1; z = -4$ (parallela all'asse y).
- Le equazioni della retta r passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sono date da

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

(**stella di rette di centro P_0**). Al variare di v_1, v_2, v_3 si ottengono le equazioni di tutte le rette per P_0.

Dati due piani non paralleli

$$\begin{aligned} \pi_1 \equiv \quad & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2 \equiv \quad & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{aligned}$$

una retta r intersezione dei due piani si può descrivere anche come la soluzione del sistema (di rango 2):

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

Esempi

- L'asse z è rappresentato da $x = 0; y = 0$, ma anche ad esempio da $x - 3y = 0; 2x - 5y = 0$; infatti queste ultime sono equazioni di due piani che contengono l'asse z in quanto $c_1 = d_1 = 0; c_2 = d_2 = 0$.
- L'asse y è rappresentato da $x = 0; z = 0$, ma anche ad esempio da $x - 3z = 0; 2x + 6z = 0$; infatti queste ultime sono equazioni di due piani che contengono l'asse y in quanto $b_1 = d_1 = 0; b_2 = d_2 = 0$.
- L'asse x è rappresentato da $y = 0; z = 0$, ma anche ad esempio da $2y + z = 0; y + 6z = 0$; infatti queste ultime sono equazioni di due piani che contengono l'asse x in quanto $a_1 = d_1 = 0; a_2 = d_2 = 0$.

Si dimostra che i **parametri direttori** della retta si ottengono prendendo ordinatamente i determinanti di minori di ordine 2 della matrice, con segno alterno

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

ossia

$$v_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad v_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad v_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Infatti, posto $A_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{A_1}\begin{vmatrix} d_1 - c_1 z & b_1 \\ d_2 - c_2 z & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{A_1}\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{z}{A_1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
y &= \frac{1}{A_1}\begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1 z \\ a_2 & d_2 - c_2 z \end{vmatrix} = \frac{1}{A_1}\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} - \frac{z}{A_1}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Dalle equazioni parametriche con $z = A_1 t$, posto $v_3 = A_1$, si ottengono v_1 e v_2.

Esempio

Trovare i parametri direttori della retta

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z - 1 &= 0 \\ x - 4y + 7z - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Si ottiene

$$v_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -17; \; v_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -13; \; v_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

In generale il problema dell'incidenza tra due rette r ed s, può essere tradotto nel seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4 \end{aligned}$$

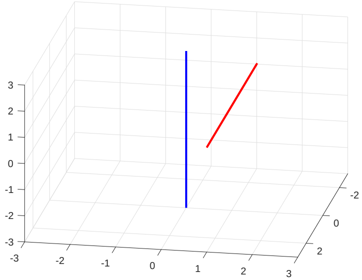
o anche $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = d$, le cui soluzioni sono determinate dalla relazione tra il $r(A)$ e il $r(A|d)$. Chiaramente il rango massimo di A è 3.
Discutendo i vari casi si ha:

- $r(A)$ è almeno 2, in quanto le equazioni che specificano le rette r ed s sono entrambi associate ad una matrice 2×3 di rango 2.
- $r(A) = 2; r(A|d) = 3$: il sistema **non ha soluzione** e quindi le rette **non** sono incidenti;
- $r(A) = r(A|d) = 2$: si hanno un numero ∞^1 di soluzioni, il che implica che **le due rette coincidono**;
- $r(A) = 3; r(A|d) = 4$: non ci sono soluzioni, ossia le due rette **non** sono incidenti;
- $r(A) = 3; r(A|d) = 3$: il sistema ha **una e una sola soluzione**, ossia **le rette sono incidenti**.

Dire che due rette sono incidenti significa che esiste un punto in comune, che corrispone alla soluzione del sistema associato.
Chiaramente quando due rette sono parallele o coincidono oppure non hanno punti in comune.
Non è vero il viceversa. **Esistono rette senza punti in comune ma non parallele,** ad esempio:

$$r \equiv x = 0; y = 0 \qquad s \equiv z = 1; y = 1$$

r è l'asse z, mentre s è una retta parallela all'asse x data dai punti $P(\alpha, 1, 1)$ che non interseca z.



Il problema della perpendicolarità e parallelismo tra rette è del tutto analogo a quello nel piano.
Due rette con vettori direttori v e u sono parallele quando hanno lo stesso vettore direttore a meno di proporzionalità, ossia:

$$v = (v_1, v_2, v_3) = \alpha(u_1, u_2, u_3) = \alpha u$$

Se si tratta di due rette passanti per uno stesso punto queste coincidono.

Teorema

Date due rette r e s con parametri direttori v e u rispettivamente, si ha che:

- $r || s \Leftrightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$
- $r \perp s \Leftrightarrow v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = 0$

Segue che la retta passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e parallela alla retta r di vettore direttore v è **unica** *e ha equazione:*

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Esistono invece **infinite** *rette passanti per P_0 e perpendicolari alla retta r.*

Trovare le equazioni della retta (o delle rette) r tali che:

- passante per $P(1,-1,4)$ e parallela alla retta

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 2z - 1; \\ y = 3z - 4 \end{cases}$$

Le equazioni frazionarie di r_1 sono $r_1 \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1}$
Dunque si ha

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{1}$$

- passante per $P(1,2,3)$ e parallela alla retta

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

I parametri direttori di r_1 sono
$v_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $v_2 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$; $v_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$; dunque si ha

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

o anche $x = -z + 4$; $y = z - 1$;

- passante per $P(1,2,-4)$ e perpendicolare alla retta

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = -3z + 5; \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

r ha equazioni cartesiane date da

$$r \equiv \frac{x-1}{v_1} = \frac{y-2}{v_2} = \frac{z+4}{v_3}$$

ove $v = (v_1, v_2, v_3)$ deve essere ortogonale al vettore direttore di r_1, dati da $-3, 2, 1$; quindi risulta

$$-3v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \Leftrightarrow v_3 = 3v_1 - 2v_2$$

e perciò

$$r \equiv \frac{x-1}{v_1} = \frac{y-2}{v_2} = \frac{z+4}{3v_1 - 2v_2}$$

ottenendo così infinite rette;

- passante per $P(1,2,-4)$ e perpendicolare alle rette

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = -3z + 5; \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = z + 2; \\ y = 4z + 7 \end{cases}$$

r ha equazioni cartesiane date da

$$r \equiv \frac{x-1}{v_1} = \frac{y-2}{v_2} = \frac{z+4}{v_3}$$

In questo caso oltre a $-3v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$, poichè i parametri direttori di r_2 sono $1, 4, 1$ si ha $v_1 + 4v_2 + v_3 = 0$, ottenendo $v_3 = 7v_1$, $v_2 = -2v_1$; pertanto si ha

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{7}$$

che si esprime anche con $y = -2x + 4; z = 7x - 11$.