Norma di un vettore

Una **norma vettoriale** su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, che associa ad ogni vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, di componenti x_i, $i = 1, \dots, n$, uno scalare, in modo che valgano le seguenti proprietà:

- $\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$;
- $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (se non vale tale proprietà si parla di seminorma);
- $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$;
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (disuguaglianza triangolare).

Segue che $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geqslant |\ \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\ |$.

In $\mathbb{R}^n$ si definiscono le seguenti norme:

- $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$ (norma euclidea)
- $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1,n} |x_i|$ (norma uniforme o norma del massimo)
- $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Si dimostra che queste funzioni godono delle proprietà delle norme (ossia sono norme).

Norma di un vettore

In particolare per dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma euclidea è necessario dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2$$

Esempio. Se $\boldsymbol{x} = (1, -1, 2)^T$ allora $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{6}$, $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 4$ e $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 2$.

Le norme 1, 2 e ∞ sono casi particolari di norma p, definita in generale da:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad p \geqslant 1$$

Questo vale anche per la norma uniforme perché si ha

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \leqslant n^{1/p} \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \qquad \text{e} \qquad n^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1$$

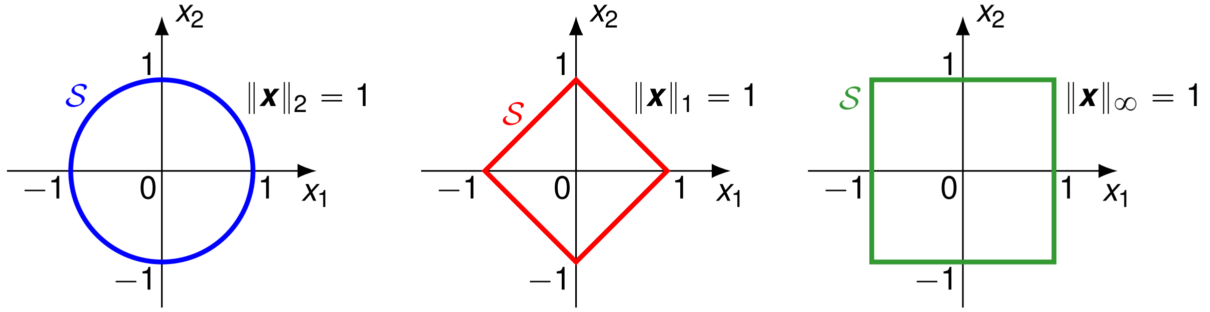
dunque $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Norma di un vettore

Si dicono rispettivamente sfera unitaria e palla unitaria di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una norma i seguenti insiemi:

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqslant 1\}$$

In $\mathbb{R}^2$, le sfere unitarie rispetto alle norme 2,1 e ∞ sono le seguenti:



$\mathcal{B}$ è un insieme convesso, ossia se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{B}$, anche $\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in \mathcal{B}$, per $\alpha \in (0,1)$: infatti è $\|\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}\| \leqslant \alpha\|\boldsymbol{x}\| + (1-\alpha)\|\boldsymbol{y}\| \leqslant 1$.
Inoltre si dice che la norma è una funzione strettamente convessa se

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$$

La norma euclidea è una funzione strettamente convessa, le norme 1 e ∞ non lo sono (si veda norma 1 con $\boldsymbol{x} = (0,1)^T$, $\boldsymbol{y} = (1,0)^T$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (1,1)^T$).
La norma è una funzione uniformemente continua delle sue componenti.

Norma di un vettore

Definizione. Due norme $\|\cdot\|_+$ e $\|\cdot\|_*$ si dicono equivalenti se esistono costanti positive A e B tali che per ogni $\boldsymbol{x}$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_+ \leqslant A\|\boldsymbol{x}\|_*$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_* \leqslant B\|\boldsymbol{x}\|_+$$

Proprietà.

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_2$$

Teorema. In uno spazio di dimensione finita, tutte le norme sono equivalenti.

Dunque in $\mathbb{R}^n$, che ha dimensione $n < \infty$, tutte le norme sono equivalenti.

Convergenza di una successione di vettori

Definizione. Una successione di vettori $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\} \in \mathbb{R}^n$ si dice che converge a un vettore $\boldsymbol{x}^*$ per $k \to \infty$ se esiste una norma per cui $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\| = 0$.

Questa definizione è ben posta poiché tutte le norme sono equivalenti. Dunque se in una norma vale che $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\| = 0$, allora vale in qualunque norma.

Inoltre,

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^* \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| = 0$$

Esempio. Sia $\boldsymbol{x}^{(k)} = (1/k, 1, 1/k^2)^T$: allora $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = (0, 1, 0)^T$.

Calcolo della norma di un vettore (in Matlab)

```
function [y] = normvett(x,p)
% normvett - Calcolo della norma di un vettore (1, 2 o uniforme)
%   Calcolo della norma p di un vettore x nei tre casi p = 1, 2, o infinito
%   (N.B.: esiste la funzione predefinita 'norm')
% SYNOPSIS:
%   [y] = normvett(x, p)
% INPUT:
%    x (double array) - il vettore di cui calcolare la norma
%    p (scalar)       - il tipo di norma da calcolare
%                       se p = 1, norma 1
%                       se p = 2, norma 2
%                       se p = inf, norma infinito
% OUTPUT:
%    y (double)       - la norma calcolata
%
  if ( isempty(find(x)) )
     y = 0;
  else
     switch p
     case 1
        y = sum(abs(x));
     case 2
        t = max(abs(x));
        y = sqrt( sum((x/t).^2)) *t;
     case inf
        y = max(abs(x));
     otherwise
        error('p non valido');
     end
  end
end
```

Calcolo della norma di un vettore

In Matlab esiste una funzione predefinita che fornisce la norma di un **vettore $\boldsymbol{x}$**:

- `y = norm(x)` restituisce la norma euclidea (o norma 2);
- `y = norm(x,p)`, con p intero maggiore o uguale a 1, restituisce la norma p;
- `y = norm(x,inf)` restituisce la norma del massimo (o norma uniforme)

Norma di una matrice

Poiché una matrice $m \times n$ si può **pensare** come un vettore di $m \cdot n$ componenti (ordinando gli elementi della matrice per righe o per colonne), segue che una norma matriciale generalizzata è una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, tale che:

- $\|A\| \geqslant 0$ per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$;
- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}_{m\times n}$;
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$;
- $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

Di conseguenza, una norma matriciale generalizzata è una funzione uniformemente continua delle sue componenti, tutte le norme matriciali generalizzate sono equivalenti e vale che

$$\|A - B\| \geqslant \Big|\|A\| - \|B\|\Big|$$

Una norma matriciale generalizzata è una norma matriciale se vale la seguente proprietà submoltiplicativa o proprietà di consistenza:

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$$

ove A e B sono matrici moltiplicabili.

Norma di una matrice

Una norma matriciale $\|\cdot\|_M$ si dice **compatibile con una norma vettoriale** $\|\cdot\|_V$ se

$$\|A\boldsymbol{x}\|_V \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_V \|A\|_M$$

per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Non tutte le norme matriciali generalizzate sono consistenti. Per esempio, se si definisce

$$\|A\|_M = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

questa è una norma generalizzata. Tuttavia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\|AB\|_M = 2$, mentre $\|A\|_M = \|B\|_M = 1$: non vale dunque la consistenza.

Tuttavia a partire da una norma matriciale generalizzata, moltiplicandola per una opportuna costante, si ottiene una norma matriciale. Per esempio, la seguente definizione della norma di Turing fornisce una norma matriciale:

$$\|A\|_T = \sqrt{mn}\, \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Norme matriciali

Siamo interessati a introdurre norme matriciali indotte da una norma vettoriale $\|\cdot\|_V$.
Una norma di questo tipo è detta **norma naturale o norma indotta dalla norma vettoriale**. Essa viene definita come la più piccola costante C per cui vale la condizione:

$$\|Ax\|_V \leqslant C\|\boldsymbol{x}\|_V \Leftrightarrow \frac{\|Ax\|_V}{\|\boldsymbol{x}\|_V} \leqslant C \quad \text{per } \|\boldsymbol{x}\|_V \neq 0$$

Pertanto la definizione di norma naturale è la seguente:

$$\|A\|_N = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_V \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_V}{\|\boldsymbol{x}\|_V}$$

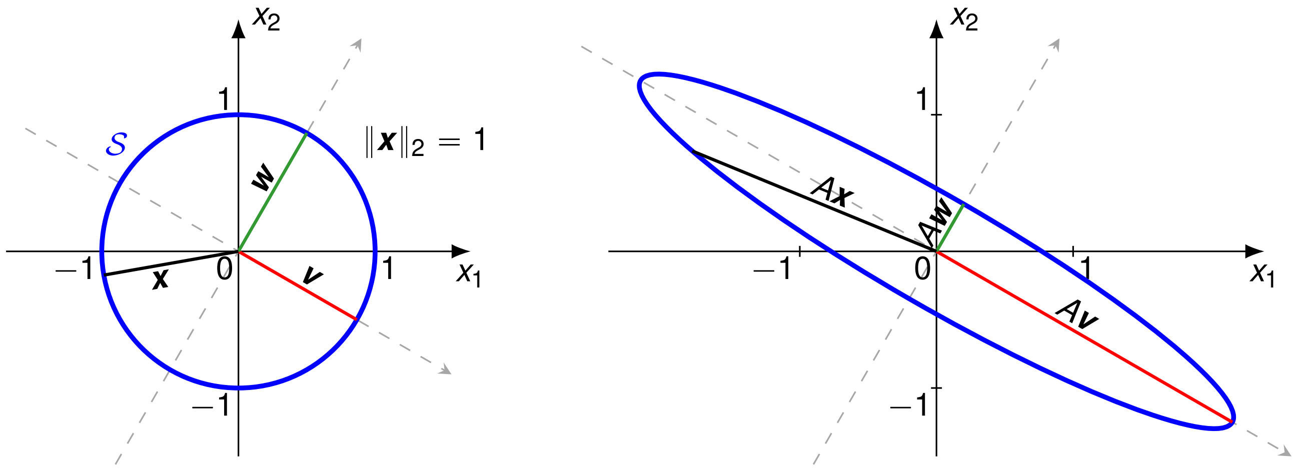
Lo scalare non cambia se si sostituisce $\boldsymbol{x}$ con un suo multiplo. Allora si può prendere un versore $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|_V$, dove $\boldsymbol{y}$ ha norma unitaria. Tenendo conto che $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{y} \mid \|\boldsymbol{y}\|_V = 1\}$ è un compatto e la norma è funzione uniformemente continua, l'estremo superiore è un massimo:

$$\|A\|_N = \max_{\|\boldsymbol{y}\|_V = 1} \|A\boldsymbol{y}\|_V$$

Si dimostra che $\|A\|_N$ è una norma matriciale, che è compatibile con $\|\cdot\|_V$ e che tale norma (per come è definita) è **la più piccola norma matriciale compatibile con la norma** $\|\cdot\|_V$.

Norme matriciali

Significato della norma naturale: quando si opera in algebra lineare, le applicazioni lineari che trasformano dati in risultati sono lineari e dunque associabili a una matrice.
La $\|A\|_N$ esprime la massima perturbazione relativa che subisce una qualsiasi direzione dello spazio $\mathbb{R}^n$ per effetto della trasformazione lineare associata ad A.
Ciò permette di *misurare* come gli errori sui dati si amplificano per effetto di una trasformazione lineare.
Se $m = n = 2$, $\|A\|_2$ è il massimo semiasse dell'ellissoide $A\boldsymbol{x}$.



Norme matriciali

Norma matriciale compatibile con la norma ∞

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Norma matriciale compatibile con la norma 1

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Norma matriciale compatibile con la norma 2 (euclidea), detta norma spettrale

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

dove $\lambda_{max}(A^T A)$ indica l'autovalore massimo della matrice simmetrica semidefinita positiva $A^T A$.

Un'altra norma matriciale compatibile con la norma euclidea è la norma di Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j (a_{ij})^2} = \sqrt{\mathrm{trace}(A^T A)}$$

dove $\mathrm{trace}(A^T A)$ è la somma degli elementi diagonali di $A^T A$. Vale che

$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\|A\|_T = 3\sqrt{6} \quad \|A\|_F = \sqrt{16} \quad \|A\|_1 = 4 \quad \|A\|_\infty = 5$$

La norma naturale dell'identità è sempre 1.

$$\|I\|_N = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_V=1} \|I\boldsymbol{x}\|_V = 1$$

Tutte le norme matriciali sono equivalenti.

Allora, data la successione di matrici $\{A^{(k)}\}$ si dice che la successione è convergente alla matrice A^* per $k \to \infty$ se esiste una norma matriciale per cui $\lim_{k\to\infty} \|A^{(k)} - A^*\| = 0$.
Questa definizione è ben posta poiché tutte le norme sono equivalenti. Inoltre,

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^* \quad \forall i,j$$

Raggio spettrale

Definizione. Si chiama raggio spettrale di una matrice quadrata A di ordine n il massimo dei valori assoluti degli autovalori di A, denotato con $\rho(A) = \max_{i=1,n} |\lambda_i(A)|$.

Teorema

Rispetto ad una qualunque norma naturale, vale che $\rho(A) \leqslant \|A\|_N$.

Infatti, se $\boldsymbol{x}$ è un autovettore relativo a un autovalore λ di A, vale che

$$\lambda\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \Rightarrow |\lambda|\|\boldsymbol{x}\| = \|A\boldsymbol{x}\| \leqslant \|A\|_N\|\boldsymbol{x}\|$$

Dividendo per $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ e ricordando che λ è un autovalore qualunque (anche quello di modulo massimo), si ha la tesi.

Inoltre per ogni $\epsilon > 0$ esiste una norma naturale per cui

$$\|A\|_N \leqslant \rho(A) + \epsilon$$

Matrici definite

Definizione. Sia A una matrice simmetrica. Allora A è definita positiva se, per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$. La matrice A è semidefinita positiva se, per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \geqslant 0$.

Definizione. Sia A una matrice simmetrica. Allora A è definita negativa se, per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} < 0$, mentre è semidefinita negativa se $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \leqslant 0$.

Si dimostra che A è definita positiva (semidefinita positiva) se e solo se gli autovalori di A sono positivi (non negativi).

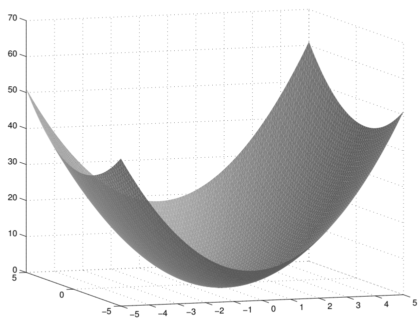
Si dimostra che A è definita negativa (semidefinita negativa) se e solo se gli autovalori di A sono negativi (non positivi).

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Allora $A^T A$ e AA^T sono simmetriche e semidefinite positive.
Infatti per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^T A^T A \boldsymbol{x} = \|A\boldsymbol{x}\|^2 \geqslant 0$. Analogamente $\boldsymbol{x}^T AA^T \boldsymbol{x} = \|A^T \boldsymbol{x}\|^2 \geqslant 0$.

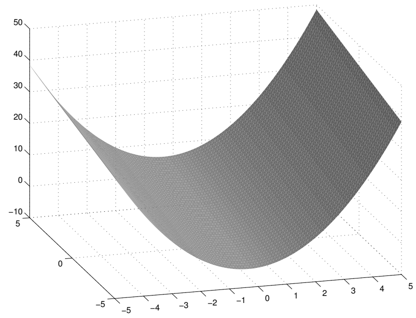
Se $m > n$ e A è di rango massimo per colonne, $A^T A$ è definita positiva.
Infatti non è possibile che $\|A\boldsymbol{x}\|^2 = 0$. Se così fosse, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ e dunque esisterebbe una n-upla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tale $A_{*1}x_1 + \ldots + A_{*n}x_n = \mathbf{0}$; ma allora le colonne di A sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi fatta.

Se $m \leqslant n$ e A è di rango massimo per righe, AA^T è definita positiva.

Esempio per matrici di ordine 2



forma quadratica definita positiva



forma quadratica semidefinita positiva

Calcolo della norma di una matrice

```
function [y] = normmat(A, p)
% normmat - Calcolo della norma di una matrice (1, di Frobenius, di Turing, uniforme)
%   Calcolo della norma di una matrice A nei quattro casi: 1, Frobenius, Turing, infinito
% SYNOPSIS:
%   [y] = normmat(A, p)    (N.B.: esiste la funzione predefinita 'norm')
% INPUT:
%    A (double array)     - la matrice di cui calcolare la norma
%    p (scalar or string) - il tipo di norma da calcolare
%                           se p = 1, norma 1
%                           se p = 'Fro', norma di Frobenius (o di Schur)
%                           se p = 'Tur', norma di Turing
%                           se p = inf, norma infinito
% OUTPUT:
%    y (double)           - la norma calcolata
%
   if ( isempty(find(A)) )
      y = 0;
   else
      switch p
      case 1
         y = max( sum(abs(A)) );
      case 'Fro'
         t = max( abs(A(:)) );
         y = sqrt( sum( A(:)/t ).^2 ) * t;
      case 'Tur'
         y = sqrt( prod(size(A)) ) * max(abs(A(:)));
      case inf
         y = max( sum(abs(A')) );
      otherwise
         error('p non valido');
      end
   end
end
```


Calcolo della norma di una matrice

In Matlab esiste la **funzione predefinita** `norm` che fornisce la norma di una matrice A:

- `y = norm(A)` restituisce la norma euclidea (o norma 2)
- `y = norm(A,1)` restituisce la norma 1
- `y = norm(A,inf)` restituisce norma del massimo (o norma infinito)
- `y = norm(A,'fro')` restituisce la norma di Frobenius