Calcolo della Probabilità (2/2)

Stefania Bartoletti

14 Marzo 2022

Indice

Probabilità condizionata

La probabilità condizionata risponde alla domanda "come cambia la probabilità di un evento quando ottengo informazioni ulteriori?"

Probabilità condizionata

La probabilità condizionata risponde alla domanda "come cambia la probabilità di un evento quando ottengo informazioni ulteriori?"

Esempio: Si lanci una moneta tre volte.

- Qual è la probabilità di ottenere tre teste?
  - Spazio degli eventi $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
  - Gli eventi sono equiprobabili, quindi $\mathbb{P}(HHH) = 1/8$

Probabilità condizionata

La probabilità condizionata risponde alla domanda "come cambia la probabilità di un evento quando ottengo informazioni ulteriori?"

Esempio: Si lanci una moneta tre volte.

- Qual è la probabilità di ottenere tre teste?
  - Spazio degli eventi $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
  - Gli eventi sono equiprobabili, quindi $\mathbb{P}(HHH) = 1/8$
- Supponiamo ci venga detto che il risultato del primo lancio è H. Come ricalcoliamo la probabilità di avere $\{HHH\}$?
  - Il nostro spazio degli eventi risulta ridotto: $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$
  - Gli eventi sono equiprobabili, quindi $\mathbb{P}(HHH \text{ dato che il primo lancio è } H) = 1/4$.

Questo è un esempio di calcolo di probabilità condizionata, in quanto tiene conto di informazioni aggiuntive.

Probabilità condizionata

- Sia A l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità (e.g., $\{\text{tre teste}\} = \{H, H, H\}$), sia B l'evento che sappiamo essersi verificato come informazione aggiuntiva (e.g., $\{\text{il primo lancio è testa}\} = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$).

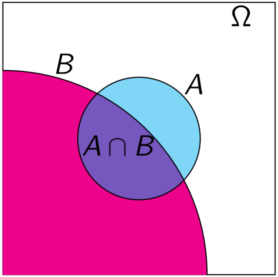
Probabilità condizionata

- Sia A l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità (e.g., $\{\text{tre teste}\} = \{H, H, H\}$), sia B l'evento che sappiamo essersi verificato come informazione aggiuntiva (e.g., $\{\text{il primo lancio è testa}\} = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$).
- La probabilità condizionata di A dato che si è verificato B si denota come

$$\mathbb{P}(A|B)$$

e si dice *"probabilità di A dato B"* o *"probabilità di A condizionata a B"*.

Interpretazione grafica

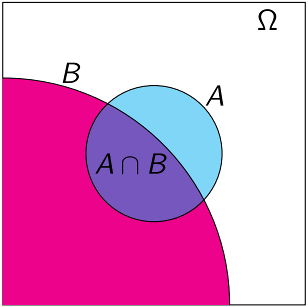


Per il calcolo di $\mathbb{P}(A|B)$ ci restringiamo a B anzichè guardare a Ω.

Probabilità condizionata

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \text{se } \mathbb{P}(B) > 0$$

Interpretazione grafica



$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$
$$A = \{HHH\}, B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$$
$$A \cap B = A = \{HHH\}, B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = 1/8$$
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/8}{4/8} = 1/4$$

Fattorizzazione

Probabilità condizionata

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \text{se } \mathbb{P}(B) > 0$$

Fattorizzazione

Probabilità condizionata

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \text{se } \mathbb{P}(B) > 0$$

Riscrivendo la formula:

Formula di fattorizzazione

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

Fattorizzazione

Formula di fattorizzazione

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Fattorizzazione

Formula di fattorizzazione

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$

Esempio: Pescando due carta da un mazzo francese (52 carte), considero due eventi: $E_1 =$ “la prima carta è cuori ”, $E_2 =$ “la seconda carta è cuori”. Quanto vale $\mathbb{P}(E_2|E_1)$?

- Conteggio: se la prima carta è cuori, tra le 51 rimanenti, restano 12 carte cuori: $\mathbb{P}(E_2|E_1) = 12/51$

Fattorizzazione

Formula di fattorizzazione

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$

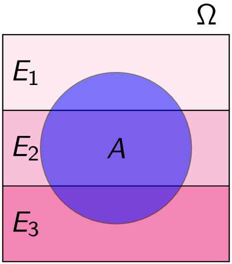
Esempio: Pescando due carta da un mazzo francese (52 carte), considero due eventi: $E_1 =$ "la prima carta è cuori ", $E_2 =$ "la seconda carta è cuori". Quanto vale $\mathbb{P}(E_2|E_1)$?

- Conteggio: se la prima carta è cuori, tra le 51 rimanenti, restano 12 carte cuori: $\mathbb{P}(E_2|E_1) = 12/51$
- Se uso il calcolo di probabilità condizionata:
  - considero $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = 13/52 = 1/4$
  - $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = 3/51$
  - $\mathbb{P}(E_2|E_1) = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)/\mathbb{P}(E_1) = \frac{3/51}{1/4} = 12/51$

Legge di probabilità totale

Supponiamo che lo spazio degli eventi Ω sia diviso in tre eventi disgiunti $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ for $i, j = 1, 2, 3$. Per ogni evento A

- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap E_1) + \mathbb{P}(A \cap E_2) + \mathbb{P}(A \cap E_3)$
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|E_1)\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A|E_2)\mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(A|E_3)\mathbb{P}(E_3)$



Legge di probabilità totale

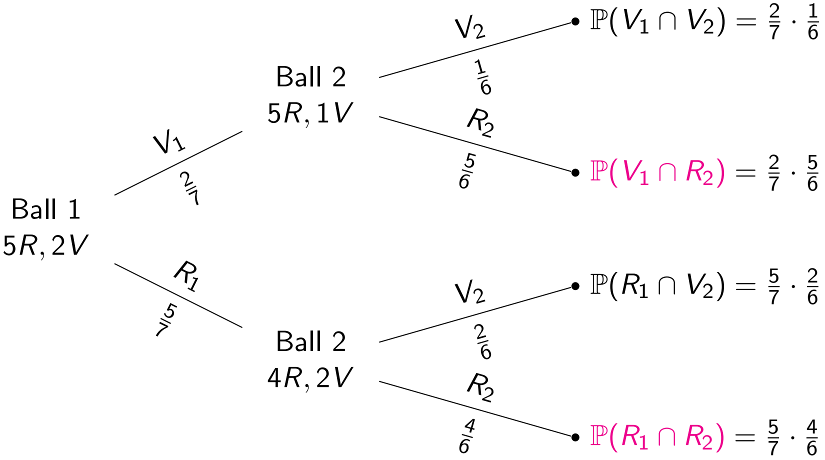
La legge di probabilità totale resta valida qualsiasi sia il numero di eventi in cui dividiamo lo spazio Ω. Nel caso generale, si usa una *partizione* di Ω una successione di n eventi disgiunti.

Esempio: Un'urna contiene 5 palline rosse e 2 verdi. Si pescano due palline di seguito. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia rossa?

- Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{RR, RV, VR, VV\}$
  - $R_1 = \{\text{la prima pallina è rossa}\}$
  - $V_1 = \{\text{la prima pallina è verde}\}$
  - $R_2 = \{\text{la seconda pallina è rossa}\}$
  - $V_2 = \{\text{la seconda pallina è verde}\}$
- Ogni pallina può essere con pari probabilità la seconda pallina: $\mathbb{P}(R_2) = 5/7$.
- Usiamo la legge della probabilità totale:
  - $\mathbb{P}(R_2|R_1) = 4/6$, $\mathbb{P}(R_2|V_1) = 5/6$.
  - Siccome R_1 and V_1 sono una partizione di Ω

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|V_1)\mathbb{P}(V_1) = 4/6 \cdot 5/7 + 5/6 \cdot 2/7$$

Rappresentazione tramite alberi



$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(V_1 \cap R_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{7}$$

Indipendenza

Due eventi si dicono indipendenti se conoscere che uno dei due sia avvenuto non cambia la probabilità che l'altro avvenga.
Informalmente, gli eventi indipendenti non si influenzano a vicenda.
Se A e B sono indipendenti $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Pertanto, considerando la formula di fattorizzazione:

Indipendenza

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

N.B. A è indipendente da B se e solo se B è indipendente da A.

Esempio: Si lanci una moneta due volte. Sono H_1 e H_2 indipendenti?

$$\mathbb{P}(H_1 \cap H_2) = 1/4 = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(H_2)$$

Pertanto, gli eventi sono indipendenti.

Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes (la formula di Bayes, la regola di Bayes) è una colonna portante della probabilità e della statistica.

Teorema di Bayes

Dati due eventi A e B,

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

- La regola di Bayes ci dice come calcolare $\mathbb{P}(B|A)$ da $\mathbb{P}(A|B)$ (invertire le probabilità condizionate)
- $\mathbb{P}(A)$ si calcola di solito tramite la legge della probabilità totale.

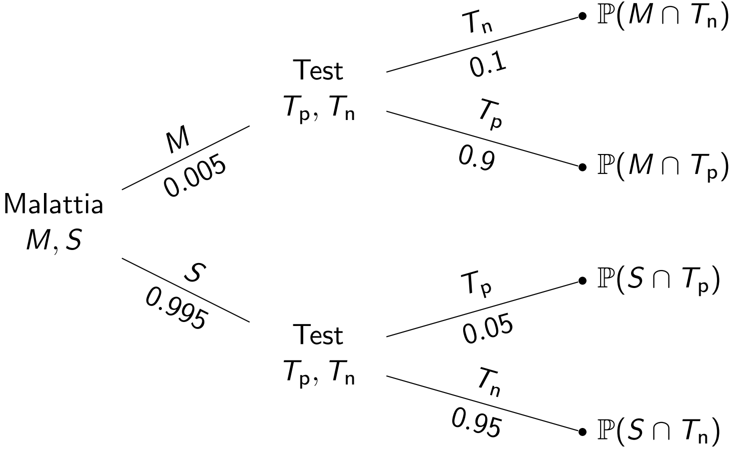
Dimostrazione

La regola di fattorizzazione ci dice che $\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$. La legge di Bayes si ottiene dividendo per $\mathbb{P}(A)$.

Base rate fallacy

Considerate un test per una malattia. La frequenza della malattia nella popolazione (base rate) è 0.005. Il test è molto accurato con 5% di falsi positivi e 10% di falsi negativi. Un test risulta positivo. Qual è al probabilità di avere la malattia?

- $M = \{\text{ho la malattia}\}$, $S = \{\text{non ho la malattia}\}$
- $\mathbb{P}(M) = 0.005$, $\mathbb{P}(S) = 0.995$
- $T_\mathrm{p} = \{\text{test positivo}\}$, $T_\mathrm{n} = \{\text{test negativo}\}$
- $\mathbb{P}(T_\mathrm{p}|S) = 0.05$, $\mathbb{P}(T_\mathrm{n}|M) = 0.10$
- $\mathbb{P}(T_\mathrm{n}|S) = 0.95$, $\mathbb{P}(T_\mathrm{p}|M) = 0.9$



$$\mathbb{P}(T_{\mathrm{p}}) = 0.995 \cdot 0.05 + 0.005 \cdot 0.9$$

$$\mathbb{P}(M | T_{\mathrm{p}}) = \frac{\mathbb{P}(T_{\mathrm{p}} | M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T_{\mathrm{p}})} = \frac{0.9 \cdot 0.005}{0.995 \cdot 0.05 + 0.005 \cdot 0.9} = 0.083$$

Take home message

Il fatto che il 95% dei test sia accurato, non implica che il 95% dei test positivi sia accurato.
Si chiama base rate fallacy perchè la base rate della malattia è così bassa che la maggiorparte delle persone che fanno il test è sana e anche un test accurato avrà molte persone sane tra i positivi.

Rappresentazione grafica