41. Determinare il rango delle seguenti matrici:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$r(A) \leq 3$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-3 \neq 0 \qquad r(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$

$\det A \neq 0 \implies$ rango $A = 3$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A) \leq 3$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad r(A) \geq 2$

$\det A = 1 - 1 = 0 \qquad r(A) = 2$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) \leq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad r(A) = 2$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

la seconda riga è 2 volte la prima $\implies r(A) = 1$.

43. Determinare il rango di una matrice trapezoidale e di una matrice diagonale.

Caso di una matrice trapezoidale:

$r(A) \geq$ numero degli elementi diagonali non nulli

Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$r(A) \geq 2$ ma in questo caso

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0 \quad r(A)=3$$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 3 \end{pmatrix} \quad r(A) \geq 2$$

ma la terza riga è 3 volte la seconda e dunque $r(A)=2$

Nel caso di una matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \qquad r(A) = \#(d_i \neq 0)$$

Trovare per quale valore di k la matrice A è invertibile:

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

A è invertibile $\iff$ $\det A \neq 0 \iff$ $r(A) = 3$.

Si osserva che

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \qquad r(A) \geq 2$$

$$\det A = -2 \cdot \begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{vmatrix} = -2\left(k^2+1\right) \neq 0 \text{ sempre}$$

La matrice è invertibile per ogni valore di k.

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & k \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2k & -2 \\ -(k^2+1) & k^2+1 & 0 \\ 0 & 2 & -2k \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2\left(k^2+1\right)} \begin{pmatrix} 0 & -(k^2+1) & 0 \\ -2k & k^2+1 & 2 \\ -2 & 0 & -2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{k}{k^2+1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{k^2+1} \\ \frac{1}{k^2+1} & 0 & \frac{k}{k^2+1} \end{pmatrix}$$

43. Determinare al variare di k il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k & k \\ 0 & k & 2 & 2k \\ \underline{1} & k & \underline{\underline{k}} & k \end{pmatrix} \qquad r(A) \leq 3$$

Si osserva che

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -2 \quad \text{per ogni valore di } k$$

$$r(A) \geq 2$$

I CASO

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 2 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} = k\left(k^2 - 2k\right) + k(-k) =$$

$$= k^3 - 3k^2 = k^2(k-3) \neq 0$$

per $k \neq 0$
e $k \neq 3$

II CASO

$$\begin{vmatrix} k & k & k \\ 0 & 2 & 2k \\ 1 & k & k \end{vmatrix} = k\left(2k - 2k^2\right) + \left(2k^2 - 2k\right) =$$

$$= 2k^2 - 2k^3 + 2k^2 - 2k =$$

$$= 4k^2 - 2k^3 - 2k = 2k\left(2k - k^2 - 1\right)$$

$$= -2k(k-1)^2 \neq 0$$

per $k \neq 0$ e $k \neq 1$

$\Rightarrow$ per $k \neq 0$ $\quad r(A) = 3$

$k = 0$ $\quad r(A) = 2$

44. Determinare al variare di k il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & k & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 1 & -1-k \\ 0 & k+5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad r(A) \leq 3$$

Si osserva che

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \qquad r(A) \geq 2$$

<u>I CASO</u>

$$\begin{vmatrix} -5 & k & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & k+5 & 3 \end{vmatrix} = -5(-9-k-5) - k(-9)$$

$$= -5(-14-k) + 9k =$$

$$= 70 + 14k \neq 0$$

$$\text{per } k \neq -\frac{\cancel{70}^{\,5}}{\cancel{14}} = -5$$

<u>II CASO</u>

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1-k \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -5(3+3+3k) + 5(-9)$$

$$= -75 - 15k \neq 0$$

$$\text{per } k \neq -\frac{\cancel{75}}{\cancel{15}} = -5$$

per $k \neq -5$ si ha $r(A) = 3$

per $k = -5$ si ha $r(A) = 2$