Definizione di matrice reale

Siano m e n due naturali positivi.
Una **matrice** $m \times n$ a elementi reali è una **tabella** di $m \times n$ numeri reali disposti come segue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si può denotare una matrice con una lettera maiuscola M oppure con $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ o più semplicemente con (a_{ij}), ove il primo indice i è una *informazione sulle righe*, il secondo j è una *informazione sulle colonne*.
M si dice anche matrice di m righe ed n colonne.
Un **elemento della matrice** che appartiene alla riga i e alla colonna j si indica genericamente con a_{ij}.
Quando non c'è pericolo di ambiguità, si può omettere la virgola di separazione fra l'indice di riga e l'indice di colonna (come nella notazione usata).

La ***i*-esima riga** della matrice si denota con $M_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$, mentre la ***j*-esima colonna** si indica con $M^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Esempio

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

M è una matrice 2×3 (con due righe e tre colonne).
0 è l'elemento a_{21} o di posizione $(2, 1)$.
-5 è l'elemento a_{13} o di posizione $(1, 3)$.

$$M_2 = (0\ 7\ 1) \text{ seconda riga} \quad M^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ prima colonna}$$

- **La definizione di matrice ad elementi reali si può generalizzare a matrice ad elementi in un campo K se $a_{ij} \in K$ per ogni i, j.**
- Una matrice $1 \times n$ data da $(a_{11} \dots a_{1n})$, si dice **vettore riga** (può essere considerato un elemento di $\mathbb{R}^n$, si può sopprimere il primo indice perchè è uguale per tutti gli elementi).
- Una matrice $m \times 1$ data da $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, si dice **vettore colonna** (può essere considerato un elemento di $\mathbb{R}^m$, si può sopprimere il secondo indice perchè è uguale per tutti gli elementi).
- Se $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ è una matrice $m \times n$, la i-esima riga è un **vettore riga**, la j-esima colonna è un **vettore colonna**; pertanto una matrice $m \times n$ si può **pensare** come un elemento di $(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})^{\mathbf{n}}$ (vettore riga di n elementi i cui elementi sono vettori colonna di $\mathbb{R}^m$) o di $(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})^{\mathbf{m}}$ (vettore colonna di m elementi i cui elementi sono vettori riga di $\mathbb{R}^n$):

$$M = (M^1 \ M^2 \ \dots \ M^n) \qquad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix}$$

- Due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, entrambe $m \times n$ (ossia con lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne) sono **uguali**, ossia $A = B$, se $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\ i, j$.
Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha che $A = C$ e $A \neq B$.
Se due matrici hanno elementi con lo stesso valore, ma hanno dimensioni diverse, non sono comunque uguali. Ad esempio, se

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che $D \neq E$.
- Se $m = n = 1$, la matrice 1×1 è un **elemento** di $\mathbb{R}$.

- Una matrice si dice **quadrata** se $m = n$ e in tal caso n si dice **ordine della matrice**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$$

- Se $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ e $a_{ij} = 0$ per ogni $i \in \{1\dots, m\}$ e ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, la matrice si dice **matrice zero o matrice nulla**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Per ogni m, n, esiste una matrice nulla. Si denota anche con 0_{mn}.

- Si dice **diagonale principale** di una matrice $m \times n$ il vettore dato dagli elementi con uguale indice: $(a_{11}, \ldots, a_{kk})$, $k = min(m, n)$.
  Si dice **diagonale secondaria** o **antidiagonale** il vettore dato dagli elementi: $(a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \ldots, a_{kn-k+1})$, $k = min(m, n)$.
- Si dice **matrice diagonale** M una matrice $m \times n$ in cui tutti gli elementi che non stanno sulla diagonale principale sono nulli: $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$.
  Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

- Si dice **matrice unità o identità di ordine** n una matrice quadrata diagonale di ordine n con tutti 1 sulla diagonale:

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Data $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$, si dice **opposta** di A la matrice $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ i cui elementi sono gli opposti degli elementi di A, ossia $b_{ij} = -a_{ij}$.

  Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

- Una matrice A $m \times n$ si dice **trapezoidale inferiore** se $a_{ij} = 0$ per $j > i$; si dice invece **trapezoidale superiore** se $a_{ij} = 0$ se $i > j$.
  Esempio

$$\text{trap. inf.: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \pi & 0 \end{pmatrix} \quad \text{trap. sup.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \pi & 1 \end{pmatrix}$$

- Una matrice A quadrata di ordine n si dice **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$ per $j > i$; si dice invece **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$ se $i > j$.
  Esempio

$$\text{triang. inf.: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \pi & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{triang. sup.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Una matrice A quadrata di ordine n si dice **strettamente triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$ per $j \geq i$; si dice invece **strettamente triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$ se $i \geq j$.

Esempio

$$\text{strett. triang. inf.:} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{strett. triang. sup.:} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Una matrice A $m \times n$ si dice **di Hessemberg inferiore** se $a_{ij} = 0$ per $j > i + 1$; si dice invece **di Hessemberg superiore** se $a_{ij} = 0$ se $i > j + 1$.

  Esempio

$$\text{Hess. inf.:} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & \pi & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Hess. sup.:} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & -\pi & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Data $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ di dimensioni $m \times n$ si dice **trasposta** di A la matrice $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ di dimensioni $n \times m$ tale che $b_{ij} = a_{ji}$. In pratica la trasposta di A si ottiene scambiando le righe con le colonne. La trasposta si indica con A^T.
  Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & \pi & 1 \end{pmatrix} \quad B = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & \pi \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Una matrice si dice **simmetrica** se $A = A^T$, ossia $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni i, j. Una matrice simmetrica è necessariamente quadrata.
  Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & \pi & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A^T$$

- Una matrice si dice **emisimmetrica o antisimmetrica** se $A = -A^T$, ossia $a_{ij} = -a_{ji}$, per ogni i, j.
  Una matrice antisimmetrica è necessariamente quadrata e ha elementi diagonali nulli; $a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} = 0$.
  Esempio
  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -A^T$$

L'insieme delle matrici a m righe e n colonne con elementi in un campo K si indica con $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. In particolare $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici reali $m \times n$. Se $m = n$, si può semplificare la notazione in $\mathcal{M}_n(K)$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ rispettivamente.

Defnizione di somma di matrici e prodotto per uno scalare

Siano $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.
La **somma di due matrici** A e B è una matrice $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, che si indicherà con $A + B$, i cui elementi sono dati da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.
La somma di matrici è una legge di composizione interna:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Il **prodotto** della matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ per lo scalare α è una matrice $D \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $D = (d_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, che si indica con αA, i cui elementi sono dati da

$$d_{ij} = \alpha a_{ij}$$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.
Il prodotto di matrici per scalari è una legge di composizione esterna:

$$\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \alpha = 3$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 2 \\ 5 & 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 & 9 \\ 12 & 6 & 24 & 3 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che per le operazioni di somma di matrici e di prodotto di una matrice per scalare valgono gli **assiomi** visti per gli spazi vettoriali, perchè valgono per le operazioni $+$ e . tra i numeri reali:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C, \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
2. $\exists\ 0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tale che $A + 0 = 0 + A = A, \forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
3. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ A + (-A) = 0$
4. $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ A + B = B + A$
5. $x(yA) = (xy)A, \forall\ x, y \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
6. $(x + y)A = xA + yA, \forall\ x, y \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
7. $x(A + B) = xA + xB, \forall\ x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
8. $1A = A, \forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ **è uno spazio vettoriale su** $\mathbb{R}$.

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Verifichiamo gli assiomi:

1. proprietà associativa della somma:
   $\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si ha:

   $$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \xRightarrow[\text{somma tra reali}]{\text{associatività della}} (A + B) + C = A + (B + C)$$

2. la matrice nulla $m \times n$ è elemento neutro. Infatti per ogni $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

   $$a_{ij} + 0 = 0 + a_{ij} = a_{ij}$$

   perchè 0 è neutro in $\mathbb{R}$;

3. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, esiste $-A$ tale che $A + (-A) = 0$:

   $$a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$$

   per l'esistenza dell'opposto in $\mathbb{R}$

Verifica degli assiomi II

4. $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \quad \text{(commutatività della somma tra reali)}$$

5. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si ha

$$x(ya_{ij}) = (xy)a_{ij} \quad \text{(associatività del prodotto tra reali)}$$

6. $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ \forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si ha

$$(x + y)a_{ij} = xa_{ij} + ya_{ij}$$

   per la distributività del prodotto rispetto alla somma tra reali

7. $\forall\ x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si ha

$$x(a_{ij} + b_{ij}) = xa_{ij} + xb_{ij}$$

   per la distributività del prodotto rispetto alla somma tra reali

8. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, si ha (1 è elemento neutro per il prodotto tra reali)

$$1a_{ij} = a_{ij}$$

La dimensione di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è mn.
Infatti si verifica che una base di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle mn matrici che hanno un solo elemento uguale a 1 e tutti gli altri elementi nulli.

Esempio: base di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ogni matrice di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ si scrive come combinazione lineare di queste matrice E_{ij} ed esse sono linearmente indipendenti.

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + a_{23}E_{23}$$

Proprietà della trasposizione

$A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(A - B)^T = A^T - B^T$

$A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(A-B)^T = A^T - B^T$

Dimostrazione di $(A+B)^T = A^T + B^T$:

$$
\begin{array}{lcl}
C = (A+B)^T & \Rightarrow & c_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} \\
D = A^T + B^T & \Rightarrow & d_{ij} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ij}
\end{array}
$$

$A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(A-B)^T = A^T - B^T$

Dimostrazione di $((A)^T)^T = A$:

$$C = ((A)^T)^T \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = (A^T)_{ji} = a_{ij} = A$$

$A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(A - B)^T = A^T - B^T$

Dimostrazione di $(\alpha A)^T = \alpha A^T$:

$$
\begin{aligned}
C = (\alpha A)^T \quad &\Rightarrow \quad c_{ij} = \alpha a_{ji} \\
D = \alpha A^T \quad &\Rightarrow \quad d_{ij} = \alpha a_{ji} = c_{ij}
\end{aligned}
$$

Esercizio. Ogni matrice quadrata A di ordine n si scrive come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.
Infatti siano $S = \frac{A+A^T}{2}$ e $T = \frac{A-A^T}{2}$.
Si osserva che

$$S + T = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = \frac{A + A^T + A - A^T}{2} = A$$

Si prova che S è simmetrica: $S^T = (\frac{A+A^T}{2})^T = \frac{(A+A^T)^T}{2} = \frac{A^T+A}{2} = S$
Si prova che T è antisimmetrica: $T^T = (\frac{A-A^T}{2})^T = \frac{(A-A^T)^T}{2} = \frac{A^T-A}{2} = -T$

Inoltre S e T sono uniche.
Infatti se si assume che esistano S' simmetrica e T' antisimmetrica tali che $A = S' + T'$, allora

$$A^T = (S' + T')^T = S' - T'$$

Allora, sommando membro a membro $A + A^T = 2S'$ e dunque $S' = S$.
Sottraendo membro a membro, $A - A^T = 2T'$ e dunque $T' = T$.

Scomporre $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nella somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{A - A^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazioni.

- Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora $A + A^T$ è simmetrica e $A - A^T$ è antisimmetrica.
- Se A è simmetrica (antisimmetrica), anche αA è simmetrica (antisimmetrica).

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & -8 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -9 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & -17 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} = (A + B)^T$$

Dire per quali valori di x e y la matrice

$$M = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonale oppure simmetrica.
Eseguendo i calcoli, si ha

$$M = \begin{pmatrix} 2y & x+3y+1 \\ x+3y+2 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora M è diagonale se

$$x+3y+1 = 0 = x+3y+2 = \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2$$

cioè per nessun valore di x e y.
M è simmetrica se

$$x+3y+1 = x+3y+2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2$$

cioè per nessun valore di x e y.

Dire per quali valori di x e y la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x+2y & x+2y \\ x+2y & 2x+5y+3 \end{pmatrix}$$

è diagonale oppure simmetrica.
La matrice M è simmetrica per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Dunque essa è diagonale se e solo se

$$x + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2y\,.$$

Definizione di prodotto tra matrici

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ossia il numero di colonne di A sia uguale al numero di righe di B:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$$

Il **prodotto righe per colonne** tra le matrici A e B è una matrice $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$ data da

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1,\dots,n} a_{ik}b_{kj}$$

Dunque il generico elemento c_{ij} si ottiene **sommando i prodotti termine a termine** degli elementi della i-esima riga di A con la j-esima colonna di B; si dice $c_{ij} = A_i B^j$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B: è possibile moltiplicare e la matrice prodotto è una matrice 2×3:

$$\begin{aligned} C = AB \quad &= \begin{pmatrix} 1(-1) + 2\ 2 + 3\ 0 & 1\ 0 + 2(-1) + 3\ 0 & 1\ 1 + 2\ 0 + 3(-1) \\ 4(-1) + (-1)2 + 2\ 0 & 4\ 0 + (-1)(-1) + 2\ 0 & 4\ 1 + (-1)0 + 2(-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Non è possibile calcolare BA, perchè il numero delle colonne di B non è uguale al numero delle righe di A.

- Se $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ allora AB e BA sono calcolabili e sono matrici di ordine n. **ATTENZIONE!!** Il prodotto tra matrici **non** è commutativo, ossia, anche se sono moltiplicabili, $AB \neq BA$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto di due matrici può fornire la matrice nulla senza che entrambe siano nulle.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Si può verificare che $AB = AC$ pur essendo $A \neq 0$ e $B \neq C$. Infatti

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = AC$$

Alcune proprietà

1. Siano $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. A e $B + C$ così come AB e AC possono essere moltiplicate:
$$A(B + C) = AB + AC$$
2. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. $A + B$ e C così come AC e BC possono essere moltiplicate:
$$(A + B)C = AC + BC$$
3. Siano $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$. A e B così come B e C possono essere moltiplicate
$$(AB)C = A(BC)$$
4. Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Vale che
$$I_m A = A \quad AI_n = A$$
5. $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. A e B possono essere moltiplicate:
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$
6. Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Vale che
$$A0_{n,n} = 0_{m,m}A = 0_{m,n}$$

Siano $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Allora

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Attenzione all'ordine rovesciato!! Altrimenti non sono moltiplicabili.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} C = (AB)^T \quad &\Leftrightarrow \quad c_{ij} = ((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = A_j B^i = a_{j1} b_{1i} + \ldots + a_{jn} b_{ni} \\ D = B^T A^T \quad &\Leftrightarrow \quad d_{ij} = (B^T)_i (A^T)^j = B^i A_j = A_j B^i = a_{j1} b_{1i} + \ldots + a_{jn} b_{ni} \end{aligned}$$

Definizione di potenza naturale di matrice

Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e $n \in \mathbb{N}$. La **potenza n-esima** di A è la matrice di ordine n così definita:

$$A^0 = I_n \qquad A^n = \underbrace{A\ A\ \ldots A}_{n \text{ volte}}$$

Dato il polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$ data $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, è possibile definire il polinomio matrice:

$$p_n(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad p(x) = 2 + 3x^2 - x^3$$

Si calcoli $p(A) = 2I_2 + 3A^2 - A^3$:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$p(A) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Inversa di una matrice quadrata

Definizione di inversa di una matrice

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si dice che A è **invertibile (o non singolare)** se esiste una matrice quadrata $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ di ordine n tale che

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B si dice **inversa** di A.

Teorema

Se A è invertibile e B è l'inversa di A, essa è unica.

Dimostrazione.
Siano B'' e B' due inverse. Allora

$$\begin{aligned} AB' = B'A &= I_n \\ AB'' = B''A &= I_n \end{aligned}$$

Segue che

$$B' = B'I_n = B'(AB'') = (B'A)B'' = I_nB'' = B''$$

Dunque l'inversa è unica. **Essa si denota con A^{-1}.**

- Se A è invertibile, allora
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

- Vale che $(A^{-1})^{-1} = A$.
Infatti poichè l'inversa è unica, l'inversa di A^{-1} ossia la matrice che moltiplicata per A^{-1} fornisce I_n può essere solo A.

- Esistono matrici non invertibili o singolari. Per esempio, presa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se fosse invertibile esisterebbe una matrice quadrata tale che
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$
Ma $1 \neq 0$.

- Se A e B sono matrici quadrate di ordine n invertibili, allora
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
Basta verificare che
$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B &= I_n \\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} &= I_n\end{aligned}$$

Definizione di sottomatrice

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Consideriamo m_1 righe e n_1 colonne di A con $m_1 \leq m$ e $n_1 \leq n$. La matrice formata dagli elementi di incrocio tra le m_1 righe e le n_1 colonne considerate si dice **sottomatrice** di A di dimensioni $m_1 \times n_1$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Sono sottomatrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima è formata dagli elementi all'incrocio tra le colonne 1,2,4 e le righe 1 e 3 mentre la seconda da quelli all'incrocio tra le colonne 2 e 3 e le righe 1 e 3.

Il determinante è una funzione definita dall'insieme delle matrici quadrate all'insieme dei numeri reali:

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

che verrà definita **per induzione** sull'ordine n della matrice quadrata.

Il **determinante di una matrice** A si indica con $\det(A)$ oppure con $|A|$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinante

Sia A una matrice di ordine n.
Se $n = 1$, il **determinante** di A vale $\det(A) = a_{11}$.
Supponiamo che sia stato definito il determinante di matrici di ordine inferiore a n.
Allora il **determinante** di una matrice A di ordine n è :

$$\det(A) = \sum_{h=1}^{n} a_{1h}A_{1h} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}$$

ove A_{ij} indica il prodotto tra $(-1)^{i+j}$ e il determinante della sottomatrice che si ottiene da A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima.
A_{ij} viene detto **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij}.

Esempi.
Determinante di una matrice di ordine 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante III

Determinante di una matrice di ordine 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Esiste anche la famosa regola di Sarrus per il calcolo del determinante di matrici quadrate di ordine 3, ma vale solo per l'ordine 3!!!

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|cc} & & & - & - \quad - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \end{array}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 0.3 = 2$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 1.A_{11} + 2.A_{12} + 3.A_{13} = \\
&= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= 1.1 - 2.0 + 3(-2) = -5
\end{aligned}$$

Le proprietà seguenti possono essere dimostrate per induzione sull'ordine delle matrici. Per alcune ci si limita agli esempi.

1. Se $A^j = C + C'$, allora:

$$\det(A^1, \ldots, \underbrace{C + C'}_{=A^j}, \ldots, A^n) \quad = \quad \det(A^1, \ldots, \underbrace{C}_{j}, \ldots, A^n) + \det(A^1, \ldots, \underbrace{C'}_{j}, \ldots, A^n)$$

Esempio

$$\begin{vmatrix} 2+3 & 5 \\ 1+4 & 7 \end{vmatrix} = (2+3)\cdot 7 - (1+4)\cdot 5 = 2\cdot 7 - 1\cdot 5 + 3\cdot 7 - 5\cdot 4 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 1+2 & 3 \\ 4 & 2+1 & 0 \\ 5 & 3-1 & 4 \end{vmatrix} &= 5\begin{vmatrix} 2+1 & 0 \\ 3-1 & 4 \end{vmatrix} - (1+2)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2+1 \\ 5 & 3-1 \end{vmatrix} \\
&= 5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

2. Se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\det(A^1, \ldots, \underbrace{cA^j}_{j}, \ldots, A^n) \quad = \quad c\det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^n)$$

Esempio

$$\begin{vmatrix} 2\cdot 3 & 5 \\ 2\cdot 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 7 - 5\cdot 2\cdot 4 = 2\cdot(3\cdot 7 - 5\cdot 4) = 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 2\cdot 2 & 3 \\ 4 & 2\cdot 1 & 0 \\ 5 & 2\cdot(-1) & 4 \end{vmatrix} &= 5\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 0 \\ 2\cdot(-1) & 4 \end{vmatrix} - 2\cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2\cdot 1 \\ 5 & 2\cdot(-1) \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3. Se due colonne contigue sono uguali, $\det(A) = 0$
   Esempio

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

4. $\det(I_n) = 1$
   Esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Queste proprietà **caratterizzano** il determinante.

- Se una colonna di A è nulla, il determinante è nullo. Segue da 2) con $c = 0$.
- Scambiando due colonne adiacenti, il determinante cambia di segno, ossia

$$|A^1, ..., A^j, A^{j+1}, ..., A^n| = -|A^1, ..., A^{j+1}, A^j, ..., A^n|$$

Infatti, da 3) segue

$$\begin{aligned}
0 &= |A^1, ..., \underbrace{A^j + A^{j+1}}_{j}, \underbrace{A^j + A^{j+1}}_{j+1}, ..., A^n| = \\
&= |A^1, ..., A^j, A^j + A^{j+1}, ..., A^n| + |A^1, ..., A^{j+1}, A^j + A^{j+1}, ..., A^n| = \\
&= \underbrace{|A^1, ..., A^j, A^j, ..., A^n|}_{=0} + |A^1, ..., A^j, A^{j+1}, ..., A^n| + \\
&+ |A^1, ..., A^{j+1}, A^j, ..., A^n| + \underbrace{|A^1, ..., A^{j+1}, A^{j+1}, ..., A^n|}_{=0} = \\
&= |A^1, ..., A^j, A^{j+1}, ..., A^n| + |A^1, ..., A^{j+1}, A^j, ..., A^n|
\end{aligned}$$

- Se due colonne A^i e A^j di A con $i \neq j$ sono uguali, $\det(A) = 0$. Infatti scambiando successivamente le posizioni, le due colonne si possono rendere adiacenti (cambia il segno), per cui segue che il determinante è nullo.

- Se due colonne A^i e A^j con $i \neq j$ sono scambiate, il determinante cambia segno. Infatti si ha

$$
\begin{aligned}
0 &= |A^1, ..., A^i + A^j, ..., A^i + A^j, ..., A^n| = \\
&= |A^1, ..., A^i, ..., A^i + A^j, ..., A^n| + |A^1, ..., A^j, ..., A^i + A^j, ..., A^n| = \\
&= \underbrace{|A^1, ..., A^i, ..., A^i, ..., A^n|}_{=0} + |A^1, ..., A^i, ..., A^j, ..., A^n| + \\
&+ |A^1, ..., A^j, ..., A^i, ..., A^n| + \underbrace{|A^1, ..., A^j, ..., A^j, ..., A^n|}_{=0} = \\
&= |A^1, ..., A^i, ..., A^j, ..., A^n| + |A^1, ..., A^j, ..., A^i, ..., A^n|
\end{aligned}
$$

- Se due colonne sono proporzionali oppure una colonna è combinazione lineare di altre, allora $|A| = 0$. Infatti

$$|A^1, ..., A^i, ..., kA^i, ..., A^n| = k\,\underbrace{|A^1, ..., A^i, ..., A^i, ..., A^n|}_{=0} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&|A^1, ..., kA^i + hA^j, ..., A^i, ..., A^j, ..., A^n| = \\
&= k|A^1, ..., A^i, ...A^i, ..., A^j, ..., A^n| + h|A^1, ..., A^j, ...A^i, ..., A^j, ..., A^n| = 0
\end{aligned}
$$

Conseguenze delle proprietà caratteristiche III

- Sommando ad una colonna una combinazione lineare di altre colonne il determinante non cambia.

$$
\begin{aligned}
|A^1, \dots, \underbrace{A^i + (tA^j + sA^k)}_{\text{posizione } i}, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^n| = & \\
= & \; |A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^n| \\
& + t|A^1, \dots, A^j, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^n| \\
& + s|A^1, \dots, A^k, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^n| \\
= & \; |A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^n|
\end{aligned}
$$

- **Se le colonne di A sono linearmente dipendenti, $|A| = 0$.** Infatti in tal caso almeno una colonna di A si può scrivere come combinazione delle altre:

$$
\begin{aligned}
A^s &= \sum_{i \neq s} x_i A^i \Rightarrow |A^1, ..., A^s, ..., A^n| = \\
&= |A^1, ..., \sum_{i \neq s} x_i A^i, ..., A^n| = \sum_{i \neq s} x_i |A^1, ..., A^i, ..., A^i, ..., A^n| = 0
\end{aligned}
$$

perchè in ogni determinante ci sono due colonne uguali.

- **Se $|A| \neq 0$, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.** (Infatti se fossero dipendenti, $|A| = 0$.)

Si calcoli il determinante della seguente matrice applicando le proprietà del determinante ai fini di semplificare i conti.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sommiamo alla seconda e quarta colonna la prima moltiplicata per 2 e per -3 rispettivamente $A^2 \leftarrow 2A^1 + A^2$; $A^4 \leftarrow -3A^1 + A^4$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 1 & -4 \\ -3 & -5 & 1 & 11 \\ 4 & 6 & 1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -4 \\ -5 & 1 & 11 \\ 6 & 1 & -9 \end{vmatrix}$$

Sommiamo alla prima e terza colonna la seconda moltiplicata per -9 e per 4 rispettivamente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -14 & 1 & 15 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -14 & 15 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} -14 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -115$$

E' possibile mostrare che le proprietà 1)2)3)4) determinano univocamente (caratterizzano) il determinante di una matrice.

Per $n = 2$. Le colonne della matrice sono elementi di $\mathbb{R}^2$ e si scrivono come combinazioni lineari della base canonica e_1, e_2.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \left|A^1, A^2\right| = \left|a_{11}e_1 + a_{21}e_2,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2\right| \\
&= a_{11}\left|e_1,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2\right| + a_{21}\left|e_2,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2\right| \\
&= a_{11}a_{12}\left|e_1,\ e_1\right| + a_{11}a_{22}\left|e_1,\ e_2\right| + a_{21}a_{12}\left|e_2,\ e_1\right| + a_{21}a_{22}\left|e_2,\ e_2\right| \\
&= +a_{11}a_{22} \ -a_{21}a_{12} = \sum_{\ell=1,2} (-1)^{\epsilon(\sigma_\ell)} a_{\sigma_\ell(1),1}a_{\sigma_\ell(2),2}
\end{aligned}$$

dove ogni σ_ℓ è una permutazione di $(1,2)$ e $\epsilon(\sigma_\ell)$ è il numero di trasposizioni (cioè di scambi di posto di elementi contigui) necessarie per ottenere σ_ℓ a partire da $(1,2)$. In questo caso le permutazioni di $(1,2)$ sono solo 2: $(1,2)$ e $(2,1)$. Allora

$$(1,2) \xrightarrow[\ell=1]{0 \text{ scambi}} (1,2) = \sigma_1 \quad\Rightarrow\quad \epsilon(\sigma_1) = 0,\ (-1)^{\epsilon(\sigma_1)} = +1 \quad\Rightarrow\quad +a_{11}a_{22}$$

$\sigma_1(1)=1$ $\quad$ $\sigma_1(2)=2$

$$(1,2) \xrightarrow[\ell=2]{1 \text{ scambio}} (2,1) = \sigma_2 \quad\Rightarrow\quad \epsilon(\sigma_2) = 1,\ (-1)^{\epsilon(\sigma_2)} = -1 \quad\Rightarrow\quad -a_{21}a_{12}$$

$\sigma_2(1)=2$ $\quad$ $\sigma_2(2)=1$

Univocità del determinante II

Sia $n = 3$.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \left| A^1, A^2, A^3 \right|$$

$$= \left| a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3,\; a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3,\; a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 \right|$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\left|e_1, e_2, e_3\right| + a_{11}a_{32}a_{23}\left|e_1, e_3, e_2\right|$$

$$+ a_{21}a_{12}a_{33}\left|e_2, e_1, e_3\right| + a_{21}a_{32}a_{13}\left|e_2, e_3, e_1\right|$$

$$+ a_{31}a_{12}a_{23}\left|e_3, e_1, e_2\right| + a_{31}a_{22}a_{13}\left|e_3, e_2, e_1\right|$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3!} (-1)^{\epsilon(\sigma_\ell)} a_{\sigma_\ell(1),1} a_{\sigma_\ell(2),2} a_{\sigma_\ell(3),3}$$

dove σ_ℓ è una delle $n! = 3! = 6$ permutazioni di $(1, 2, 3)$ e, per ogni $\ell = 1, \ldots, 6$, $\epsilon(\sigma_\ell)$ è il numero di trasposizioni necessarie per ottenere σ_ℓ a partire da $(1, 2, 3)$. Ad esempio, sia $\sigma_\ell = (2, 3, 1)$ (ossia $\sigma_\ell(1) = 2$, $\sigma_\ell(2) = 3$, $\sigma_\ell(3) = 1$). Allora:

$$1\;\;2\;\;3 \xrightarrow{1^\circ\ \text{scambio}} 2\;\;1\;\;3 \quad \text{poi} \quad 2\;\;1\;\;3 \xrightarrow{2^\circ\ \text{scambio}} 2\;\;3\;\;1 \quad \text{dunque } \epsilon(\sigma_\ell) = 2$$

Vale anche che:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33}|e_1, e_2, e_3| + a_{11}a_{32}a_{23}|e_1, e_3, e_2| + \\
&+ a_{21}a_{12}a_{33}|e_2, e_1, e_3| + a_{21}a_{32}a_{13}|e_2, e_3, e_1| + \\
&+ a_{31}a_{12}a_{23}|e_3, e_1, e_2| + a_{31}a_{22}a_{13}|e_3, e_2, e_1| = \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}|e_1, e_2, e_3| + a_{11}a_{23}a_{32}|e_1, e_3, e_2| + \\
&+ a_{12}a_{21}a_{33}|e_2, e_1, e_3| + a_{13}a_{21}a_{32}|e_2, e_3, e_1| + \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31}|e_3, e_1, e_2| + a_{13}a_{22}a_{31}|e_3, e_2, e_1| = \\
&= \sum_{\ell=1}^{n!}(-1)^{\epsilon(\sigma_\ell)} a_{1\sigma_\ell(1)}a_{2\sigma_\ell(2)}a_{3\sigma_\ell(3)}
\end{aligned}
$$

In altre parole $\det(A)$ è la somma algebrica di prodotti di 3 elementi di A, uno per ogni riga (o per ogni colonna) in cui l'altro indice dell'elemento considerato appartiene a una permutazione di $\{1, 2, 3\}$ e ogni addendo è moltiplicato per il segno della permutazione. Pertanto i termini della somma sono 3!.

E' possibile dimostrare che ciò vale anche in generale per $n \geq 3$ e che pertanto nello sviluppo del determinante ci sono $n!$ termini:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\ell=1}^{n!} (-1)^{\epsilon(\sigma_\ell)} a_{\sigma_\ell(1),1} a_{\sigma_\ell(2),2} a_{\sigma_\ell(3),3} \dots, a_{\sigma_\ell(n),n} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n!} (-1)^{\epsilon(\sigma_\ell)} a_{1,\sigma_\ell(1)} a_{2,\sigma_\ell(2)} a_{3,\sigma_\ell(3)} \dots, a_{n,\sigma_\ell(n)}\end{aligned}$$

Una immediata e importante conseguenza è che:

Teorema

Una matrice A e la matrice A^T hanno lo stesso determinante.

Esempio

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \qquad \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 20 - 4 + 36 = 52 \qquad \det \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 20 + 56 - 24 = 52$$

La conseguenza è che **tutte le proprietà che valgono per le colonne di un determinante valgono per le righe.**

In particolare, si può calcolare il determinante di A sviluppando secondo la prima colonna anzichè rispetto alla prima riga

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} A_{k1}$$

La seconda immediata conseguenza della univocità del determinante è che qualunque sia la riga (o la colonna) secondo cui si calcola il determinante, il suo valore resta uguale.

Regola di Laplace o Primo teorema di Laplace

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad i = 1, \ldots, n \quad \text{(sviluppo secondo la } i\text{-esima riga)}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \qquad j = 1, \ldots, n \quad \text{(sviluppo secondo la } j\text{-esima colonna)}$$

Esempio

Sviluppo secondo la terza colonna:

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} 3 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 0 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} 1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 52$$

- Il determinante di una matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi diagonali.

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$$

- Il determinante di una matrice triangolare inferiore oppure triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi diagonali.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -8 & 8 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 2 = 10$$

Secondo teorema di Laplace

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} A_{jh} = 0 \qquad 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

$$\sum_{h=1}^{n} a_{hi} A_{hj} = 0 \qquad 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

ossia la somma dei prodotti di una riga (colonna) di A per i complementi algebrici di un'altra riga (colonna) è 0.

È come se la riga j coincidesse con la riga i, (la colonna j con la colonna i). Dunque il determinante di una matrice con due righe (colonne) uguali è 0.

Teorema di Binet

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Di conseguenza:

- $\det(AB) = \det(BA)$, anche se $AB \neq BA$;
- Se $\det(AB) = 0$, allora $\det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 0$, pur non essendo necessariamente $A = 0$ o $B = 0$.

Dimostrazione

Sia $C = AB$. Allora la s-esima colonna di C è ottenuta come A per la s-esima colonna di B:

$$C^s = AB^s = (A^1, A^2, ..., A^n) \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{ns} \end{pmatrix} = A^1 b_{1s} + A^2 b_{2s} + ... + A^n b_{ns}$$

Per esempio, nel caso $n = 3$,

$$C^1 = A^1 b_{11} + A^2 b_{21} + A^3 b_{31} \quad C^2 = A^1 b_{12} + A^2 b_{22} + A^3 b_{32} \quad C^3 = A^1 b_{13} + A^2 b_{23} + A^3 b_{33}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= |C^1, C^2, C^3| = \\
&= |A^1 b_{11} + A^2 b_{21} + A^3 b_{31}, A^1 b_{12} + A^2 b_{22} + A^3 b_{32}, A^1 b_{13} + A^2 b_{23} + A^3 b_{33}| = \\
&= b_{11} b_{22} b_{33} |A^1, A^2, A^3| + b_{11} b_{32} b_{23} |A^1, A^3, A^2| + b_{21} b_{12} b_{33} |A^2, A^1, A^3| + \\
&\quad + b_{21} b_{32} b_{13} |A^2, A^3, A^1| + b_{31} b_{12} b_{23} |A^3, A^1, A^2| + b_{31} b_{22} b_{13} |A^3, A^2, A^1| = \\
&= (b_{11} b_{22} b_{33} - b_{11} b_{32} b_{23} - b_{21} b_{12} b_{33} + b_{21} b_{32} b_{13} + b_{31} b_{12} b_{23} - b_{31} b_{22} b_{13}) \cdot \\
&\quad |A^1, A^2, A^3| = \\
&= \det(A) \det(B)
\end{aligned}$$

Questo vale in generale:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= |C^1, ..., C^n| = \\ &= |A^1 b_{11} + A^2 b_{21} + ... + A^n b_{n1}, ..., A^1 b_{1n} + A^2 b_{2n} + ... + A^n b_{nn}| = \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^{n!} (-1)^{\sigma_\ell} b_{\sigma_\ell(1)1} b_{\sigma_\ell(2)2} ... b_{\sigma_\ell(n)n} \right) |A^1, ..., A^n| = \\ &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

Definizione di matrice aggiunta

La seguente matrice si dice **matrice aggiunta** di A e si indica con $\mathrm{adj}(A)$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ove A_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} di A.

Teorema sulla invertibilità di matrici

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Sia A invertibile. Allora esiste A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Per il teorema di Binet, segue che

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

Dunque necessariamente $\det(A) \neq 0$ e inoltre $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

$\Leftarrow$ Assumiamo $\det(A) \neq 0$.

Si vuole mostrare che la seguente matrice è l'inversa di A:

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)^T$$

ove A_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} di A.

Si esegue il prodotto $D = AX$:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= a_{i1}\frac{A_{j1}}{|A|} + a_{i2}\frac{A_{j2}}{|A|} + \ldots + a_{in}\frac{A_{jn}}{|A|} = \\ &= \frac{a_{i1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn}}{|A|} = \frac{1}{|A|}\sum_{h=1}^{n} a_{ih}A_{jh} \end{aligned}$$

Se $i = j$ allora $d_{ii} = 1$ perchè $\sum_{h=1}^{n} a_{ih}A_{ih} = |A|$.
Se $i \neq j$, allora $d_{ij} = 0$ per il secondo teorema di Laplace.
Dunque $AX = I_n$.
In modo analogo si prova che $XA = I_n$. Dunque $X = A^{-1}$.
Resta immediatamente provato anche che se A è invertibile,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 10 \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -9$$

$$\mathrm{adj}(A)^T = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = 0$, allora $B = 0$.**
  Infatti poichè $\det(A) \neq 0$, A ammette inversa A^{-1}; segue
  $B = I\ B = A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0$ e dunque $B = 0$.
- **Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = AC$, allora $B = C$.**
  Infatti poichè $\det(A) \neq 0$, A ammette inversa A^{-1}; segue
  $B = I\ B = A^{-1}AB = A^{-1}AC = I\ C = C$.
- **Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $AB = I$, segue che l'una è l'inversa dell'altra.**
- **Sia A invertibile; allora $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.**
  Infatti se A invertibile, $\det(A) \neq 0$; dunque anche A^T è invertibile. E' immediato provare che l'inversa di A^T vale $(A^{-1})^T$. Infatti da $C^T B^T = (BC)^T$ segue

  $$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n$$

  Per l'unicità dell'inversa, $(A^{-1})^T$ è l'inversa di A^T.

Definizione di matrice ortogonale

Una matrice A quadrata di ordine n si dice ortogonale se la sua inversa coincide con la sua trasposta: $A^{-1} = A^T$:

$$AA^T = A^T A = I_n$$

Se A è simmetrica ortogonale, allora $A^2 = I_n$ (matrice involutoria).

Se A è ortogonale

$$\det(A)^2 = \det(A)\det(A^T) = 1$$

Se una matrice è ortogonale, il suo determinante vale ± 1.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad AA^T = I_2$$

Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le righe (colonne) di A sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$.
Equivalentemente si ha che le righe (colonne) di A sono **linearmente indipendenti** $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Se le righe (colonne) di A sono linearmente dipendenti, una si scrive come combinazione lineare delle altre e dunque $\det(A) = 0$.
$\Leftarrow$ Sia $\det(A) = 0$. Supponiamo per assurdo che le colonne di A siano indipendenti. Allora poichè sono n vettori di $\mathbb{R}^n$, esse formano una base di $\mathbb{R}^n$. Ne consegue che i vettori della base canonica si scrivono come combinazione lineare di $A^1, \dots, A^n$, ossia esistono scalari b_{ij} tali che:

$$\begin{aligned}
e_1 &= b_{11}A^1 + b_{21}A^2 + \dots + b_{n1}A^n = AB^1 \\
e_2 &= b_{12}A^1 + b_{22}A^2 + \dots + b_{n2}A^n = AB^2 \\
&\dots \\
e_n &= b_{1n}A^1 + b_{2n}A^2 + \dots + b_{nn}A^n = AB^n
\end{aligned}$$

Sintetizzando si ha:

$$[e_1 \ e_2 \ ... \ e_n] = A[B^1 \ B^2 \ ...B^n]$$

Allora, ponendo $B = (b_{ij})$, segue che $I_n = A \ B$.
Dunque $1 = \det(I_n) = \det(A)\det(B)$. Allora deve essere $\det(A) \neq 0$, contro l'ipotesi.
Segue che le colonne di A sono dipendenti.
Lo stesso ragionamento si può ripetere sulle righe.

Esempio

Verificare se $S = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,5,-4)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
Poichè si tratta di tre vettori di $\mathbb{R}^3$, occorre verificare che sono linearmente indipendenti. Per farlo occorre vedere se la matrice formata dai tre vettori ha determinante non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$

S è una base.
Verificare se $S = \{(2,-1,5),(1,0,0),(7,-2,10)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
Poichè si tratta di tre vettori di $\mathbb{R}^3$, occorre verificare che sono linearmente indipendenti. Per farlo occorre vedere se la matrice formata dai tre vettori ha determinante non nullo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

S non è una base

Sia $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.
La matrice si può vedere come una n-upla di colonne $(A^1, ..., A^n)$ di $\mathbb{R}^m$ oppure come una m-upla di righe $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ ... \\ A_m \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^n$.

Rango per righe e rango per colonne

Si dice **rango per righe** r di una matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ il massimo numero di righe di A linearmente indipendenti; vale $r \leq \min(m, n)$.
Si dice **rango per colonne** c di una matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ il massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti; vale $c \leq \min(m, n)$.

Per una matrice quadrata di ordine n non singolare (tale cioè che $|A| \neq 0$), si ha $r = c = n$.

Definizione. Data una matrice A, si chiama minore di ordine k di A il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata di ordine k.

Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ con $m \leq n$.
Le m righe di A sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ tutti i minori di ordine m sono nulli.
Equivalentemente:
le m righe di A sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ esiste un minore di ordine m di A che sia non nullo.
Risultati analoghi valgono per le colonne.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Il rango per righe non è 3. Ma esiste un minore di ordine 2 non nullo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$. Per cui $r = 2$.

Il rango per righe r di una matrice A è uguale a k se esiste un minore di ordine k non nullo e tutti i minori di ordine $k+1$ sono nulli.
Analogamente il rango per colonne c di una matrice A è uguale a s se esiste un minore di ordine s non nullo e tutti i minori di ordine $s+1$ sono nulli.

Teorema

Data una matrice A, si ha che $r = c$.
Tale valore si dice rango (o caratteristica) di una matrice e si indica con $r(A)$.

Dimostrazione.
Se r è il rango per righe di A, allora esiste un minore non nullo di ordine r e tutti i minori di ordine $r+1$ sono nulli.
Poichè il determinante di una matrice e della sua trasposta sono uguali, segue che A^T ha un minore di ordine r non nullo e quelli di ordine $r+1$ sono nulli. Allora il rango per righe di A^T vale r. Ma le righe di A^T sono colonne di A e dunque il massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti è r, ossia $c = r$.

Osservazioni.

- $r(A)$ è il massimo numero di righe o colonne di A linearmente indipendenti.
- $r(A) \geq 0$
- $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (matrice identicamente nulla)
- Se $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, allora $r(A) \leq \min(m, n)$.
- $r(A) = r(A^T)$
- Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$
- $r(I_n) = n$

Esempio I

Determiniamo il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Essendo una matrice 3×4, $r(A) \leq 3$. Poichè $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(A) \geq 2$. Si calcolano i minori di ordine 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -12 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & -12 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto $r(A) = 2$.

Osservazione. Per il calcolo del rango si può sfruttare il seguente risultato:

$r(A) = k \Leftrightarrow$ esiste un minore $|\bar{A}|$ di ordine k non nullo e ogni minore di ordine $k+1$ ottenuto orlando $\bar{A}$ o che contenga $\bar{A}$ è nullo.

Nell'esempio precedente, posto $|\bar{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, basta guardare i primi due minori di ordine 3 che contengono $\bar{A}$. Siccome essi sono nulli, ciò è sufficiente a garantire che il rango è 2.

- Se $S = \{A_1, ..., A_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ e se A è la matrice $m \times n$ che ha per righe gli elementi di S, allora la dimensione del sottospazio generato da S è uguale al rango di A, ossia $\dim([S]) = r(A)$.

  Se $S = \{(1,2,-1,3),(2,1,4,7),(1,-1,5,4)\}$, è possibile trovare la dimensione del sottospazio generato da S, trovando il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

  Dunque $r(A) \leq 3$. Il minore di ordine 2 dato da $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, per cui $r(A) \geq 2$. I minori di ordine 3 che contengono C sono nulli. Perciò $r(A) = \dim([S]) = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

- Se $r(A) = k$ e se C è relativo a una sottomatrice di ordine k che ha determinante non nullo, le k righe di A che contengono tale sottomatrice formano una base di $[S]$ (perchè sono linearmente indipendenti).

Nell'esempio precedente la base di $[S]$ è data da $(1,2,-1,3),(2,1,4,7)$.

- Se si vuole stabilire se una n-upla A_{m+1} appartiene a $[S]$, cioè se A_{m+1} si scrive come combinazione lineare degli elementi di $[S]$, basta considerare la matrice B che ha per righe le n-uple della base di $[S]$ e come ulteriore riga A_{m+1}.
  Si ha che $A_{m+1} \in [S] \Leftrightarrow r(B) = k$ ossia $r(B) = \dim([S])$.

Esempio. Si verifica se $(3,3,3,10) \in [S]$.
Si calcola il rango di

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Si ha che C è non nullo; dunque $r(B) \geq 2$. Poichè tutti i minori di ordine 3 di B che contengono C sono nulli (la terza riga è la somma delle prime due), $(3,3,3,10) \in [S]$.