**Esercizi**

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare definita come $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_2, x_1)$. Determinare la matrice associata a $f$ rispetto alle seguenti basi:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1,1),(2,1)\} \\ \mathcal{B}' &= \{(1,1,0),(1,0,0),(1,2,1)\} \end{aligned}$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare definita come $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2, x_1 + x_2, x_3)$. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

3. Sia $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare definita come $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3)$. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare definita come $f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1+4x_2-9x_3, 4x_1+5x_2-9x_3, -9x_1-9x_2+9x_3, x_1+x_2+x_3)$. Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica in $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ in $\mathbb{R}^3$.

5. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1,1,0,0),(1,0,0,0),(2,0,0,1),(0,0,1,0)\} \\ \mathcal{B}' &= \{(1,1),(1,0)\} \end{aligned}$$

Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

6. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0)\}$$

sia nel dominio che nel codominio. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

7. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\} \\ \mathcal{B}' &= \{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\} \end{aligned}$$

Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Determinare la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,-1)\}$.

9. In uno spazio vettoriale $V$ di dimensione due, sono date due basi $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{B}'$ data da $e_1' = e_1 + e_2$ e $e_2' = e_1 - e_2$. Dato un vettore $v \in V$, siano $(x, y)$ le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e $(x', y')$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Esprimere $(x, y)$ in funzione di $(x', y')$ e viceversa.

10. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(-1,1,0),(0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e sia $v$ il vettore di coordinate $(1,2,0)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Trovare le coordinate di $v$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.