Esercizi

1. Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi:
   (a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y + 1 = 0\}$
   (b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x = 0\}$
   (c) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 7y = 0\}$
   (d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$
   (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0; 2x - 4y + 5z + 1 = 0\}$
   (f) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 4z = 0; x + 2y - z = 0\}$
   (g) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x - y + 4z)^2 + (x + 2y - z)^2 = 0\}$
2. Dire se $S = \{(1, 2, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.
3. Trovare un insieme di generatori per $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+5z = 0\}$.
4. Trovare un insieme di generatori per $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0, x + y + 6z = 0\}$.
5. Trovare un insieme di generatori per $W = \{(x+y, 2x-y+z, x+z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
6. Verificare se $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 3)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
7. Verificare che l'insieme $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è costituito da vettori linearmente indipendenti.
8. Verificare che l'insieme $S = \{(1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è costituito da vettori linearmente indipendenti.
9. Verificare che l'insieme $S = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\} \subseteq V$ è costituito da vettori linearmente indipendenti.
10. Verificare che l'insieme $S = \{1, x, x^2, ..., x^n\} \subseteq P_n$ è costituito da vettori linearmente indipendenti.
11. Verificare se $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ e $v_3 = (2, 2, 2)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
12. Stabilire se i seguenti insiemi sono linearmente indipendenti.
    (a) $S = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
    (b) $S = \{(0, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
    (c) $S = \{(0, 0), (1, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
    (d) $S = \{(1, 2, 3), (2, 4, 6)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(e) $S = \{(1,2,3),(2,4,5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(f) $S = \{(1,0,0),(0,1,1),(3,4,4)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(g) $S = \{(1,2,4),(2,4,8),(1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(h) $S = \{(1,2,-1),(2,-3,5),(7,9,26)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(i) $S = \{2+3x+5x^2, 4+6x+10x^2\} \subseteq P_2(x)$

(j) $S = \{2+3x+5x^2, 2x+3x^2+5x^3\} \subseteq P_3(x)$

13. Dire se è vero o no che

(a) $\mathbb{R}^2 \sqsubseteq \mathbb{R}^3$

(b) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

(c) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

(d) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

(e) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y+3z)^2 + (2x-y+z)^2 = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^3$

(f) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^3$

(g) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

(h) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)(x-y) = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

14. Verificare che i seguenti insiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e per ognuno di essi trovare un insieme di generatori:

(a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 5z = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^3$

(b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0, x - y + 5z = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^3$

(c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3z = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^3$

15. Dire se i seguenti insiemi sono basi di $\mathbb{R}^3$:

(a) $S = \{(1,0,0),(1,2,0),(1,2,3)\}$

(b) $S = \{(1,0,0),(1,2,1),(5,4,2)\}$

(c) $S = \{(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,1)\}$

(d) $S = \{(1,2,3),(5,4,2)\}$

(e) $S = \{(1,2,3),(-3,4,5),(4,3,-2),(1,1,1)\}$

16. Stabilire se $S = \{(1,0,0),(1,2,0),(1,2,3)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

17. Stabilire se $S = \{(1,1,1),(2,-1,1),(3,0,2)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

18. Dire se in $\mathbb{R}^3$

(a) $(3,2,1) \in [(3,0,1),(0,1,0),(1,0,0)]$

(b) $(3,2,1) \in [(3,0,1),(1,-2,1)]$

(c) $(3,2,1) \in [(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)]$

19. Trovare un insieme di generatori, una base e la dimensione di $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3z = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^3$

20. Sia $W = \{(x - y + z, 2x + y - 4z, x - z), x, y, z \in \mathbb{R}\} \sqsubseteq \mathbb{R}^3$. Trovare una base e la dimensione di W. Verificare che $(2, -5, -1 \in W$ e trovare le coordinate del vettore rispetto alla base.

21. Sia $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$; dimostrare che sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Trovare la loro intersezione e stabilire se è un sottospazio.

22. Sia $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$; dimostrare che sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Trovare la loro intersezione e stabilire se è un sottospazio.

23. Sia $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$; determinare $U + V$ e verificare se si tratta di una somma diretta.

24. Sia $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$; determinare $U + W$ e verificare se si tratta di una somma diretta.

25. Sia $U = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(y, 0, y), y \in \mathbb{R}\}$; determinare $U + W$ e verificare se si tratta di una somma diretta.

26. Dati $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$, trovare il sottospazio generato dai due vettori di $\mathbb{R}^3$.

27. Dati $(-1, 2, 3), (0, -1, 0), (1, 0, 1)$, stabilire se sono linearmente dipendenti o indipendenti.

28. Dati $(1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1), (-1, 2, -1, 0), (-1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)$, stabilire se sono linearmente dipendenti o indipendenti.

29. Dati $(1, 2, 0), (0, 1, a), (1, a, -1)$, stabilire per quali valori di a i vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti.

30. Trovare una base di $\mathbb{R}$.

31. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e consideriamo due basi distinte:

$$B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad B_2 = \{(1, -2), (4, 1)\}$$

Sia v un vettore con componenti $(0, -1)$ rispetto alla base B_1. Trovare le componenti rispetto alla base B_2.

32. Sia $V = \mathbb{R}^4$, $A = \{(x, y, z, t), y = 0, 2z - t = 0\}$, $B = \{(x, y, z, t), x - t = 0, y + z = 0\}$. Si calcoli $\dim(A + B)$.

33. Sia $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(a + b, b, a), a, b \in \mathbb{R}^3\}$, $B = \{(x, y, z), x - y = 0\}$. Si calcoli $\dim(A + B)$.

34. Dato $A = [(2, 0, 0, 1), (0, 0, -2, 0), (0, 0, 1, -1)], B = [(0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0)]$. Trovare la somma dei sottospazi. E' somma diretta?

35. Dato $A = [(2, -1, 0, 1), (1, 3, 1, -1), (0, 1, -1, -1)]$, $B = [(2, 0, 1, 0), (1, 2, 2, 0)]$. Trovare la somma dei sottospazi. E' somma diretta?

36. Si consideri l'insieme delle successioni di numeri reali S_R. Una successione di numeri reali è una applicazione da $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tale che $s(n) = a_n$. Si indica con $\{a_n\}$ tale successione. Nell'insieme S_R si definiscano le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare:

$$\begin{aligned} \{a_n\} + \{b_n\} &= \{a_n + b_n\} \\ c\{a_n\} &= \{ca_n\} \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dimostrare che con tali operazioni S_R è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

37. Una successione di numeri reali $\{a_n\}$ si dice limitata se esiste uno scalare $L \in R$ tale che $a_n \leq L$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che il sottoinsieme delle successioni limitate è un sottospazio vettoriale di S_R.

38. Dimostrare che l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado miore o uguale a n è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

39. Stabilire quali dei seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti, quali sono un sistema di generatori dello spazio e quali costituiscono una base:
in $\mathbb{R}^2$:

    (a) $(1, 123), (-\pi, \pi)$
    (b) $(2, -1/3), (-1, 1/6)$
    (c) $(4/5, 5/4), (4, 5)$
    (d) $(1, 2), (11, -7\sqrt{2}), (-1, 1)$

    in $\mathbb{R}^3$:

    (a) $(1, 1, 3), (2, 2, 0), (3, 3, -3)$
    (b) $(1, -1, -\sqrt{5}), (1, 1, \sqrt{5})(0, 1, 2\sqrt{5})$
    (c) $(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (-1, -2, -3)$

40. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:

    (a) $(0, 0, 0)$
    (b) $\{(t, t, t) : 0 < t < 1\}$
    (c) $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$
    (d) $\{(t, t, t) : 0 \leq t \leq 1\}$
    (e) $\mathbb{R}^3 - [(0, 0, 1)]$
    (f) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(g) $\{(t,1,t) : t \in \mathbb{R}\}$

(h) $\{(x,y,z) : x+y-5z = 0, 2(x+y) = 0\}$

41. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia i, j, k una base di V. Siano $U = [i+j, i-j]$, $W = [j+k, j-k]$. Dimostrare che $V = U + W$ e che la somma non è diretta.

42. Dimostrare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, dove $U = [(1,0,-\sqrt{5},0), (\sqrt{5},0,-1,0)]$ e $W = [(0,-2,0,3), (0,1,0,1)]$

43. Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, dove $U = \{(x,y,z) : x-y = 0\}$ e $W = [(1,0,1)]$

44. Dimostrare che gli n vettori

$$(1,...,1), (0,1,...,1), (0,0,1,...,1), ..., (0,...,0,1,1), (0,...,0,1)$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$

45. Sia V uno spazio vettoriale. Si supponga che $v_1, .., v_n$ siano linearmente indipendenti; dimostrare che $\lambda_1 v_1, .., \lambda_n v_n$ sono linearmente indipendenti per ogni $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} - \{0\}$.

46. Sia $H_i = \{(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ...x_n)\}$, $1 \leq i \leq n$. Determinare una base del sottospazio di K^n.

47. Dimostrare che lo spazio vettoriale delle successioni reali non ha dimensione finita.