④ Sia dato il vettore $u_h = (h, h, -1)$, $h \in \mathbb{R}$ e i due vettori $\vec{v} = (1,1,0)$, $\vec{w} = (4,4,-2)$. Determinare $h \in \mathbb{R}$ in modo che

a) u_h formi un angolo $\varphi = 45°$ con $\vec{v}$

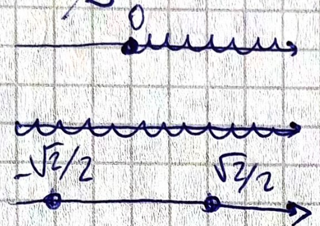
$$\langle \vec{u}_h, \vec{v} \rangle = |\vec{u}_h||\vec{v}| \cdot \cos(45°)$$

$$\langle \vec{u}_h, \vec{v} \rangle = h + h + 0 = 2h \qquad |\vec{u}_h| = \sqrt{h^2+h^2+1} = \sqrt{2h^2+1}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2} \qquad \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2h = \sqrt{2h^2+1} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \Rightarrow 2h = \sqrt{2h^2+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2h \geq 0 \\ 2h^2+1 \geq 0 \\ 4h^2 = 2h^2+1 \end{cases}$$



$$2h^2 = 1$$

$$h = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\vec{u}_h$ sia parallelo a $\vec{w}$

$$\vec{u}_h \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h & h & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} h & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} h & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} h & h \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-2h+4) - \vec{j}(-2h+4) + \vec{k}(\overbrace{4h \cancel{-} 4h}^{=0}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -2h+4 = 0 \Leftrightarrow h = 2$$

c) $\vec{u}_h$ sia complanare con $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\langle \vec{u}_h, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} h & h & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} h & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2h+4) + (-2h+4) = 0$$ $\Rightarrow$ u_h è complanare con $\vec{v}$ e $\vec{w}$ $\forall\, h \in \mathbb{R}$

CAPITOLO 2: Spazi vettoriali

1 Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

In simboli sottsp. vett. $W_1 \sqsubseteq V$

a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$

RICORDO (I) W è sottospazio vettoriale di V $\Leftrightarrow$
- $\vec{0} \in W$ $(W \neq \emptyset)$
- chiuso rispetto alla somma
- chiuso rispetto al prodotto di uno scalare

Ci sono due forme per dimostrarlo

(II) W è sottospazio vettoriale di V $\Leftrightarrow$ $\forall\, w_1, w_2 \in W$ e $\forall\, c \in \mathbb{R}$ $\quad c w_1 - w_2 \in W$

(I). $(0,0,0) \in W_1$? $\quad 2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 0 \overset{?}{=} 0$ sì $\Rightarrow \vec{0} \in W_1$

- Siano $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W_1$

$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) \in W_1$?

cioè $\Leftrightarrow$ $2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$?

$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + 3y_1 + 3y_2 - z_1 - z_2 =$

$= \underbrace{(2x_1 + 3y_1 - z_1)}_{=0 \text{ perché } w_1 \in W_1} + \underbrace{(2x_2 + 3y_2 - z_2)}_{=0 \text{ perché } w_2 \in W_1} = 0$ sì $\Rightarrow w_1 + w_2 \in W_1$

- Sia $w_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W_1$ e sia $c \in \mathbb{R}$. $c w_1 \in W_1$?

Cioè $c(x_1, y_1, z_1) \in W_1$?

$\Leftrightarrow$ $2(cx_1) + 3(cy_1) - cz_1 = 0$? Basta raccogliere c

$c\underbrace{(2x_1 + 3y_1 - z_1)}_{=0 \text{ perché } w_1 \in W_1} = 0$ sì $\Rightarrow c w_1 \in W_1$.

$\Rightarrow W_1$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z + 1 = 0\}$

- $(0,0,0) \in W_2$? No perché $2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 0 + 1 \neq 0$

$\Rightarrow W_2$ non è sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$.

c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y,\ y = 2z\}$

(II) Siano $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $w_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W_3$ e sia $c \in \mathbb{R}$

$c w_1 - w_2 \overset{?}{\in} W_3$ cioè $(cx_1 - x_2,\ cy_1 - y_2,\ cz_1 - z_2) \overset{?}{\in} W_3$

$cx_1 - x_2 = 2y_1 \cdot c - 2y_2 = 2(cy_1 - y_2)$ ✓

uso il fatto che w_1 e $w_2 \in W_3 \Rightarrow x_1 = 2y_1$ e $x_2 = 2y_2$

$cy_1 - y_2 = c \cdot 2z_1 - 2z_2 = 2(cz_1 - z_2)$ ✓

$\Rightarrow cw_1 - w_2 \in W_3 \quad \forall\, w_1, w_2 \in W_3$ e $\forall\, c \in \mathbb{R} \Rightarrow W_3$ è sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$

d) $W_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1,\ y = 1\} \rightarrow$ questi elementi sono del tipo $(1,1,z)$ $z \in \mathbb{R}$

Si vede subito che $\vec{0} = (0,0,0) \notin W_4$ poiché $0 \neq 1$

$\Rightarrow W_4$ non è sottosp. vett.

2 Stabilire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vett.

a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

I . $\vec{0} \in W$? $(0,0) \in ? W \Rightarrow 0 \cdot 0 \geq 0$ ✓

· $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2) \in W$. $w_1 + w_2 \in ? W$

$(x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) \geq 0$? questo mi dice che $x_1 y_1 \geq 0$ e $x_2 y_2 \geq 0$

$x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 \geq 0$?

So che: $x_1 y_1 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 > 0 \text{ e } y_1 > 0}$ oppure $x_1 < 0$ e $y_1 < 0$

$x_2 y_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 > 0$ e $y_2 > 0$ oppure $\boxed{x_2 < 0 \text{ e } y_2 < 0}$

Se scelgo i casi non è detto che la somma sia ≥ 0 $\forall$ elemento io scelga

$\Rightarrow W$ non è sottospazio di $\mathbb{R}^2$. Infatti vediamo un controesempio:

Siano $w_1 = (-3,-2)$ e $w_2 = (5,1) \in W$

$w_1 + w_2 = (-3+5, -2+1) = (2,-1) \notin W$ poiché $2 \cdot (-1) < 0$

b) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y = 0\} =$

$= \{(0,0)\} = \{\vec{0}\} \Rightarrow W$ è sottosp. vett.

c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y + 3z)^2 + (2x - y + z)^2 = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0,\ 2x - y + z = 0\} =$ Isolo x e sostituisco nella seconda eq.

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 3z,\ 2y - 6z - y + z = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 3z,\ y = 5z\} =$ sostituisco

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2z,\ y = 5z\}$

II Siano $w_1, w_2 \in W$ e sia $c \in \mathbb{R}$. $cw_1 - w_2 \in ? W$

$\Rightarrow x_1 = 2z_1$ e $y_1 = 5z_1$ $\quad x_2 = 2z_2$ e $y_2 = 5z_2$

$cw_1 - w_2 = c(x_1 - x_2) + c(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2)$

$c(x_1 - x_2) = cx_1 - cx_2 = c2z_1 - c2z_2 = 2(cz_1 - cz_2)$

$c(y_1 - y_2) = cy_1 - cy_2 = c5z_1 - c5z_2 = 5(cz_1 - cz_2)$

$\Rightarrow$ W è sottospazio vett.

(3) Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, dire quali fra questi sono rispettivamente:
- insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$
- un sottoinsieme linear. indip. di $\mathbb{R}^3$
- una base di $\mathbb{R}^3$.

a) $S_1 = \{(2,1,0), (\frac{1}{2},1,1), (0,1,0)\}$

- $(x,y,z) = \alpha(2,1,0) + \beta(\frac{1}{2},1,1) + \gamma(0,1,0) \Rightarrow$ ottengo un sistema lineare parametrico nelle incognite α, β e γ

$$\begin{cases} x = 2\alpha + \frac{\beta}{2} \\ y = \alpha + \beta + \gamma \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{2} - \frac{z}{4} \\ \beta = z \\ \gamma = y - \left(\frac{x}{2} - \frac{z}{4}\right) - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}z \\ \beta = z \\ \gamma = -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{4}z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$, cioè qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$ può essere scritto come combinazione lineare dei 3 vettori in S_1

- RICORDO Linearmente indipendenti significa che se $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$ $\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

TEOREMA $v_1, \dots, v_m$ sono lin. dip. $\Leftrightarrow$ almeno uno può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti (come spazio considero $\mathbb{R}^m$)

$(0,0,0) = \alpha(2,1,0) + \beta(\frac{1}{2},1,1) + \gamma(0,1,0)$

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + \frac{\beta}{2} \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sono lin. indip.}$$

- S_1 è base di $\mathbb{R}^3$.

RICORDO Base = generatori + lin. indip.

b) $S_2 = \{(1,3,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}$

- $(x,y,z) = \alpha(1,3,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,-1,1) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = 3\alpha + \beta - \gamma \\ z = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = z} \\ y = 3\alpha + \beta - \gamma \end{cases}$ trovo tutti i vettori con $x = z$ ☹ $\Rightarrow$ non sono generatori $\Rightarrow$ ★

★ $\Rightarrow$ non possono formare una base di $\mathbb{R}^3$

- $(0,0,0) = \alpha(1,3,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,-1,1)$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = 3\alpha + \beta - \gamma \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 3\alpha + \beta - \gamma \end{cases}$$

$\Rightarrow$ non sono lin. indip.

c) $S_3 = \{(4,1,0), (0,1,1)\}$.

- Questi non possono essere generatori di $\mathbb{R}^3$ perchè sono solo 2 (dovr. avere almeno 3 vettori) $\Rightarrow$ non formano una base.

- $(0,0,0) = \alpha(4,1,0) + \beta(0,1,1)$

$$\begin{cases} 0 = 4\alpha \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sono lin. indip.