**Matematica discreta - a.a. 2021-22**
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti) Determinare il vettore $v = (x, y)$ che ha lunghezza 2, è posizionato nel secondo quadrante e forma un angolo di $\theta = \pi/3$ con il vettore $w = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (usare la nozione di prodotto scalare $< v, w >= |v||w| \cos\theta = xw_x + yw_y$).

2. (4 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:
   - $U_1 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}, (x - y)^2 + z^2 = 0\}$,
   - $U_2 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}, (x - y)^2 + z^2 = 1\}$,
   - $U_3 = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$,

   Dire quali di questi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$, motivando i casi in cui un sottoiensieme non è sottospazio. In caso contrario fornire la dimensione del sottospazio.
   Determinare il sottospazio somma $U_1 + U_3$ e verificare se si tratta di una somma diretta.

3. (4 punti) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   si dica se $A^T B$ e $AB^T$ sono invertibili e in tal caso calcolare l'inversa.

4. (4 punti) Risolvere, se possibile, al variare del parametro $h$ il seguente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= h \end{aligned}$$

5. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare definita da $f(x, y, z, t) = (ax, y - t, 2x + az)$, ove $a$ è un parametro reale.
   - Determinare, se esistono, i valori di $a$ per i quali la dimensione dell'immagine di $f$ è 3.
   - Per tali valori di $a$ determinare una base del nucleo e una base dell'immagine. L'applicazione è iniettiva? E' suriettiva?

6. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare associata alla matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
rispetto alla base
$$\mathcal{B} \quad = \quad \{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$$
sia nel dominio che nel codominio. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

7. (4 punti) Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - 2x_2, -x_1 + x_3)$. Stabilire se essa è diagonalizzabile e, nel caso lo sia, trovare la base rispetto a cui $f$ è rappresentata mediante una matrice diagonale; fornire anche la matrice diagonale che rappresenta $f$ rispetto a tale base.

8. (4 punti) Dati i vettori $(2,-1,2),(1,1,4),(2,1,3)$, calcolare una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$. Calcolare le componenti del vettore $(5,6,1)$ rispetto alla base ortonormale.

9. (4 punti) Scrivere la matrice che rappresenta la forma quadratica $q(x,y,z) = 5x^2 + 2xz - 3y^2 + 5z^2$ e stabilire il segno della forma quadratica. Determinare la base (ortonormale) che diagonalizza la forma quadratica.

1.

$v = (x, y) \qquad w = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$|v| = \sqrt{x^2+y^2} = 2 \qquad |w| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 2 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1$

$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ 4 = x^2+y^2 \end{cases}$

$x = 2 - \sqrt{3}y$

$4 = (4 + 3y^2 - 4\sqrt{3}y) + y^2$

$\cancel{4} = \cancel{4} + 4y^2 - 4\sqrt{3}y$

$y(y-\sqrt{3}) = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

Per $y=0$, $x = 2$

Per $y=\sqrt{3}$, $x=-1$ ← soluzione

Il vettore $v$ deve stare nel secondo quadrante.

2)

$$U_1 = \{(x,y,z) \in R^3 , (x-y)^2 + z^2 = 0\}$$

E' sottospazio dato che

$$U_1 = \{(x,y,z) \in R^3, \quad x-y=0 \, , \, z=0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in R^3 \quad x=y \, , \, z=0\}$$

$$= \{(x,x,0) \in R^3\} = [(1,1,0)] \quad \dim U_1 = 1$$

Infatti

1. $(0,0,0) \in U_1$

2. Se $(x_1, x_1, 0), (x_2, x_2, 0) \in U_1$

$$\Rightarrow (x_1, x_1, 0) + (x_2, x_2, 0) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, 0) \in U_1$$

3. $$c \cdot (x_1, x_1, 0) = (c x_1, c x_1, 0) \in U_1$$

$$U_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \quad (x-y)^2 + z^2 = 1\}$$

non è sottospazio perché $(0,0,0) \notin U_2$

$U_3 = \{(x,x,x) \in R^3\}$ è sottospazio di dim. 1

$$= [(1,1,1)]$$

$$U_1 + U_3 = \left[ (1,1,0), (1,1,1) \right]$$

I due generatori sono linearmente indipendenti.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Dunque $\dim (U_1 + U_3) = 2$

Poichè $\dim U_1 + \dim U_3 = 2$

$\Rightarrow \dim (U_1 \cap U_3) = \{0\} \Rightarrow$ è somma diretta, ossia $U_1 \oplus U_3$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -48 + 4(16-4)$$

$$= -48 + 4\,(12) = 0$$

non invertibile

$$A B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 28 & -2 \end{pmatrix}$$

invertibile $\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 28 & -2 \end{vmatrix} = -20 - 28 = -48$

$$(AB^T)^{-1} = \frac{1}{-48} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -28 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{48} \\ \frac{\cancel{14}\,7}{\cancel{24}\,12} & -\frac{5}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{48} \\ \frac{7}{12} & -\frac{5}{24} \end{pmatrix}$$

4)

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = h$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & & III+II \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2II-I & \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$r(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & h \end{vmatrix} = 2(-h+1) + 2(-3+5)$$

$$= -2h + 2 + 4 = -2h + 6$$

$$-2h + 6 \neq 0 \quad \text{per} \quad h \neq 3$$

Per $h \neq 3$ $\quad r(A|b) = 3$ sistema impossibile

Per $h = 3$ $\quad r(A|b) = 2$ esistono $\infty^1$ soluzioni

$$2x_1 + x_2 = 2 + x_3$$
$$3x_1 + x_2 = 1 - 2x_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$x_1 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2 + x_3 & 1 \\ 1 - 2x_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2 + x_3 - 1 + 2x_3}{-1} = \frac{1 + 3x_3}{-1}$$

$$= -3x_3 - 1$$

$$x_2 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2 & 2 + x_3 \\ 3 & 1 - 2x_3 \end{vmatrix} = \frac{2 - 4x_3 - 6 - 3x_3}{-1} = \frac{-4 - 7x_3}{-1}$$

$$= 7x_3 + 4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax \\ y-t \\ 2x+az \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \qquad a \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Per $a \neq 0$, $r(A) = 3$

$$\operatorname{Imm} f = \left[ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right] \qquad \dim \operatorname{Imm} f = 3$$

$\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \begin{array}{l} ax = 0 \\ y - t = 0 \\ 2x + az = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ y \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

$a \neq 0$

$$= \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

L'applicazione non è iniettiva ma è suriettiva (per $a \neq 0$)

6)

$$f: R^3 \longrightarrow R^3$$

$$A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$$

$$M_C^C(f) = M_C^B(i_{R^3})\; M_B^B(f)\; M_B^C(i_{R^3})$$

$$M_C^B(i_{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overset{x}{\overset{\equiv}{a}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{y}{\overset{=}{b}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \overset{z-y}{\overset{\equiv}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = b + c \end{cases} \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z - y \end{cases}$$

$$M_B^C(i_{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7)

$$f: R^3 \longrightarrow R^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda + 2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) + 2(-2(\lambda - 1))$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) - 4(\lambda - 1)$$

$$= (\lambda - 1)\left[(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4\right]$$

$$= (\lambda - 1)\left[\lambda^2 + \lambda - 6\right]$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$\lambda = 2$

$\lambda = -3$

matrice diagonalizzabile

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -2y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \right\} = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 - 2x_2 = 0 \\ \cancel{-2x_1 + 4x_2 = 0} \\ x_1 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{matrix} \right\} = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cancel{-4x_1 - 2x_2 = 0} \\ -2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = \frac{1}{4} x_1 \end{matrix} \right\} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ [illegible] \end{pmatrix} \right]$$

La matrice le cui colonne formano la base per cui A è diagonalizzabile

è $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ $v_1 = (2, -1, 2)$

$v_2 = (1, 1, 4)$

$v_3 = (2, 1, 3)$

$v_1' = v_1 \qquad |v_1'| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$$v_2' = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \frac{2-1+8}{9}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$|v_2'| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$$v_3' = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \frac{4-1+6}{9}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} +$$

$$= \frac{-2+2+6}{9}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+\frac{2}{3}\\2-\frac{4}{3}\\1-\frac{4}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$|v_3'| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = 1$

<u>Bese</u>

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ -\frac{1}{3}\right)\right\}$$

Componenti di $(5, 6, 1)$

$$v_x = 5 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$v_y = -\frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 3$$

$$v_z = 5 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 7$$

9 $q(x,y,z) = 5x^2 + 2xz - 3y^2 + 5z^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & & 1 \\ & -3 & \\ 1 & & 5 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda+3)\left((\lambda-5)^2 - 1\right)$$

$$= (\lambda+3)\left(\lambda^2 + 25 - 10\lambda - 1\right)$$

$$= (\lambda+3)\left(\lambda^2 - 10\lambda + 24\right)$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}^{\,2}}{2} = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

$\lambda = -3$

$\lambda = 6$ segno indefinito

$\lambda = 4$

$$V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{array}{l} -8x - z = 0 \\ -x - 8z = 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{6} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3y = 0 \\ -x + z = 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{4} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{array}{l} -x - z = 0 \\ 7y = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$B = \left\{ (0, 1, 0) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$