ESERCIZI SU INTERVALLI DI CONFIDENZA

1. Sulla base del seguente campione casuale estratto da una popolazione normale di varianza nota $\sigma^2 = 2.5$

2.0 1.6 2.5 2.4 2.0 3.1 1.3 2.2 1.8 1.1

determinare l'intervallo di confidenza di μ al livello di probabilità $1-\alpha$=0.95.

Soluzione

La media campionaria calcolata sui 10 elementi selezionati risulta

$$\bar{x} = 2$$

per cui l'intervallo di confidenza di μ è dato da

$$\bar{x} \mp z_{0.975}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 2 \mp 1.96\sqrt{\frac{2.5}{10}} \cong \begin{cases} 1.02 \\ 2.98 \end{cases}$$

2. Sulla base del seguente campione casuale estratto da una popolazione normale

1.8 1.2 0.5 0.3 0.2 -0.1 -0.7 -1.2

determinare l'intervallo di confidenza di μ al livello di probabilità $1-\alpha$=0.95

Soluzione

Sui dati campionari si ottiene

$$\bar{x} = 0.25$$

$$s^2 = 0.8125$$

$$s_c^2 = \frac{8}{7} \times 0.8125 \cong 0.92857$$

per cui l'intervallo richiesto risulta

$$\bar{x} \mp t_{7,0,975}\sqrt{\frac{s_c^2}{n}} = 0.25 \mp 2.365\sqrt{\frac{0.92857}{8}} \cong \begin{cases} -0.5577 \\ 1.0557 \end{cases}$$

3. Sulla base del seguente campione casuale estratto da una popolazione normale

1.3 2.7 2.5 4.1 2.4 2.8 3.5 1.2 1.9 2.6

determinare l'intervallo di confidenza di μ al livello di probabilità $1-\alpha=0.99$

Soluzione

Sui dati campionari si ottiene

$\bar{x} = 2.5$

$s^2 = 0.72$

$s_c^2 = \frac{10}{9} \times 0.72 = 0.8$

per cui l'intervallo richiesto risulta

$$\bar{x} \mp t_{9,0,995}\sqrt{\frac{s_c^2}{n}} = 2.5 \mp 3.25\sqrt{\frac{0.8}{10}} \cong \begin{cases} 1.5808 \\ 3.4192 \end{cases}$$

4. Dati i seguenti risultati ottenuti su un campione casuale di 2500 elementi

Classi	Frequenze assolute
0 – 40	1450
40 – 100	750
100 – 200	300
	2500

determinare l'intervallo di confidenza di μ al livello di probabilità $1-\alpha=0.90$

Soluzione

Sui dati campionari si ottiene

$\bar{x} = 50.6$

$s^2 = 1841.64$

$s_c^2 = \frac{2500}{2499} \times 1841.64 \cong 1842.3770$

per cui l'intervallo richiesto risulta

$$\bar{x} \mp z_{0.95}\sqrt{\frac{s_c^2}{n}} = 50.6 \mp 1.645\sqrt{\frac{1842.3770}{2500}} \cong \begin{cases} 49.1878 \\ 52.0122 \end{cases}$$

5. Dati i seguenti risultati ottenuti su un campione casuale di 2000 elementi

Classi	Frequenze relative
-2 – 0	0.5
0 – 1	0.4
1 – 3	0.1
	1.0

determinare l'intervallo di confidenza di μ al livello di probabilità $1-\alpha$=0.90

Soluzione

Sui dati campionari si ottiene

$\vec{x} = -0.1$

$s^2 = 0.99$

$s_c^2 = \frac{2000}{1999} \times 0.99 \cong 0.9905$

per cui l'intervallo richiesto risulta

$$\bar{x} \mp z_{0.95}\sqrt{\frac{s_c^2}{n}} = -0.1 \mp 1.645\sqrt{\frac{0.9905}{2000}} \cong \begin{cases} -0.1366 \\ -0.0634 \end{cases}$$

6. Su un campione casuale di 10 elementi estratto da una popolazione normale si è ottenuta una media pari a 15 ed una varianza campionaria corretta pari a 3.5. Determinare l'intervallo di confidenza di μ al livello di probabilità $1-\alpha$=0.90

Soluzione

Il quantile della $t_{9,0.95}$ è pari a 1.833, per cui l'intervallo di confidenza di μ risulta

$$15 \mp 1.833\sqrt{\frac{3.5}{10}} \cong \begin{cases} 13.9156 \\ 16.0844 \end{cases}$$

7. Su un campione casuale di 2000 elementi 1650 presentano una certa caratteristica A. Costruire l'intervallo di confidenza della proporzione di individui con tale caratteristica nella popolazione al livello di probabilità $1-\alpha=0.99$

Soluzione

La proporzione campionaria di elementi con la caratteristica A risulta pari a

$$\hat{p} = \frac{1650}{2000} = 0.825$$

pertanto l'intervallo di confidenza di π è dato da

$$\hat{p} \mp z_{0.995}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.825 \mp 2.576\sqrt{\frac{0.825(1-0.825)}{2000}} \cong \begin{cases} 0.8031 \\ 0.8469 \end{cases}$$

8. Su un campione di 2500 individui 725 sono disoccupati. Costruire l'intervallo di confidenza della proporzione di disoccupati nella popolazione al livello di probabilità $1-\alpha=0.99$

Soluzione

La proporzione campionaria di disoccupati risulta pari a

$$\hat{p} = \frac{725}{2500} = 0.29$$

pertanto l'intervallo di confidenza di π è dato da

$$\hat{p} \mp z_{0.995}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.29 \mp 2.576\sqrt{\frac{0.29(1-0.29)}{2500}} \cong \begin{cases} 0.2666 \\ 0.3134 \end{cases}$$