Esercizi

1. Calcolare
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2. Calcolare:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Calcolare A^2, $3A^3 - \frac{1}{2}A + A^0$, $(A^T)^2 + A^TA + AA^T - 3I_2$.

4. Dimostrare che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A^TA è simmetrica.

5. Sia $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Dimostrare che AA^T e A^TA sono simmetriche.

6. Esprimere le seguenti matrici come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica:
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è nilpotente se esiste un intero $k \geq 1$ tale che $A^k = 0_n$.
Dimostrare che ogni matrice strettamente triangolare superiore (inferiore) è nilpotente.

8. Dimostrare che una matrice nilpotente non è invertibile.

9. Date due matrici A, B diagonali quadrate di ordine n, dimostrare che $AB = BA$.

10. Dimostrare che le seguenti matrici sono linearmente indipendenti:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La traccia di A è la somma degli elementi diagonali di A.
Dimostrare che il sottoinsieme di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici a traccia nulla è un sottospazio vettoriale e calcolarne la dimensione.

12. Determinare se le seguenti matrici sono ortogonali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

13. Dimostrare le seguenti uguaglianze:
    - $I^k = I$, per ogni $k \geq 1$
    - $0^k = 0$, per ogni $k \geq 1$
    - per ogni matrice diagonale A, A^k è diagonale per ogni $k \geq 1$ e ha elementi diagonali dati da a_{ii}^k
    - sia I l'identità di ordine n; mostrare che $(\lambda I)B = B(\lambda I)$, per ogni matrice quadrata B di ordine n
    - mostrare che $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1-a^2 & -a \end{pmatrix}^2 = -I$, con a reale

14. Data $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, determinare tutte le matrici A di ordine 2 tali che $AB = BA$;

15. Trovare due matrici A e D di ordine 2, con D diagonale, tali che $AD \neq DA$

16. Data A matrice di ordine 2, dimostrare che se A commuta con tutte le matrici di ordine 2, ossia $AB = BA$ per ogni B di ordine 2, allora A è un multiplo scalare dell'identità

17. Se A è invertibile, si mostri che vale che: $AB = AC \Rightarrow B = C$ e $BA = CA \Rightarrow B = C$

18. Se A è invertibile, A^{-k} è definito come $(A^{-1})^k$ per ogni $k \geq 1$. Mostrare che l'inversa di A^k è A^{-k}.

19. Mostrare che una matrice diagonale A è invertibile se e solo se i suoi elementi diagonali sono non nulli e in tal caso l'inversa è una matrice diagonale con elementi diagonali uguali ai reciproci degli elementi diagonali di A

20. Trovare una base per le matrici quadrate simmetriche di ordine 2. Ripetere per l'ordine 3.

21. Dimostrare che le matrici simmetriche di ordine n sono un sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e trovare la dimensione del sottospazio.

22. Dimostrare che le matrici antisimmetriche di ordine n sono un sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e trovare la dimensione del sottospazio.

23. Trovare una base per le matrici quadrate antisimmetriche di ordine 2. Ripetere per l'ordine 3.

24. Mostrare che il prodotto di due matrici simmetriche A e B è una matrice simmetrica se e solo se $AB = BA$

25. Mostrare che se A è non singolare, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

26. Mostrare che l'inversa di una matrice A simmetrica è una matrice simmetrica.

27. Calcolare l'inversa della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

29. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

30. Calcolare il determinante della seguente matrice (senza fare conti!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

31. Mostrare che $\det(tA) = t^n \det(A)$, se A è quadrata di ordine n.

32. Se $A = vv^T$, ove v è un vettore colonna di $\mathbb{R}^n$, allora $\det(A) = 0$.

33. Sia B una matrice $n \times p$, $p < n$. Allora BB^T è una matrice di ordine n. Dimostrare che $\det(BB^T) = 0$.

34. Una matrice si dice di permutazione elementare se si ottiene dall'identità scambiando due righe (colonne). Il suo determinante è -1. Una matrice di dice di permutazione se è il prodotto di permutazioni elementari. Calcolarne il determinante.

35. Verificare che l'inversa di una matrice di permutazione elementare è la matrice stessa e che l'inversa di una matrice di permutazione è la sua trasposta.

36. Se A è quadrata di ordine n, determinare il determinante di A^k per gli interi $k \geq 1$.

37. Data una matrice ortogonale, calcolare il suo determinante.

38. Data la seguente matrice (detta di Vandermonde)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix}$$

mostrare che $\det(V) = \Pi_{0 \leq i \leq n; j > i}(x_j - x_i)$. Vale che la matrice ha determinante non nullo se e solo se gli x_i sono distinti.

39. Determinare se esistono le matrici inverse delle seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

40. Per quali valori di k le seguenti matrici sono invertibili:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & k & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

41. Determinare i ranghi delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

42. Determinare il rango di una matrice trapezoidale e di una matrice diagonale.

43. Determinare al variare di k il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & k & k \\ 0 & k & 2 & 2k \\ 1 & k & k & k \end{pmatrix}$$

44. Determinare al variare di k il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} -5 & k & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 1 & -1-k \\ 0 & k+5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

45. Sia $S = \{(1,2,3), (-1,0,2), (k,0,2\} \subseteq \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di k per cui S è una base di $\mathbb{R}^3$. Trovare una base e la dimensione di $[S]$ nei diversi casi. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, la terna $(\alpha, 2, 1) \in [S]$

46. Calcolare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il rango della matrice A nei seguenti casi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

47. Dire per quali valori di λ si ha $r(A) = r(A,B)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (A,B) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$