Calcolo della Probabilità (1/2)

Stefania Bartoletti

8 Marzo 2022

Indice

Definizioni

- Esperimento: una procedura ripetibile che ha un certo numero di esiti possibili e ben definiti

Definizioni

- Esperimento: una procedura ripetibile che ha un certo numero di esiti possibili e ben definiti
- Spazio degli eventi: insieme di tutti i possibili esiti, solitamente indicato con Ω

Definizioni

- Esperimento: una procedura ripetibile che ha un certo numero di esiti possibili e ben definiti
- Spazio degli eventi: insieme di tutti i possibili esiti, solitamente indicato con Ω
- Evento: un elemento o sottoinsieme dello spazio degli eventi

Definizioni

- Esperimento: una procedura ripetibile che ha un certo numero di esiti possibili e ben definiti
- Spazio degli eventi: insieme di tutti i possibili esiti, solitamente indicato con Ω
- Evento: un elemento o sottoinsieme dello spazio degli eventi

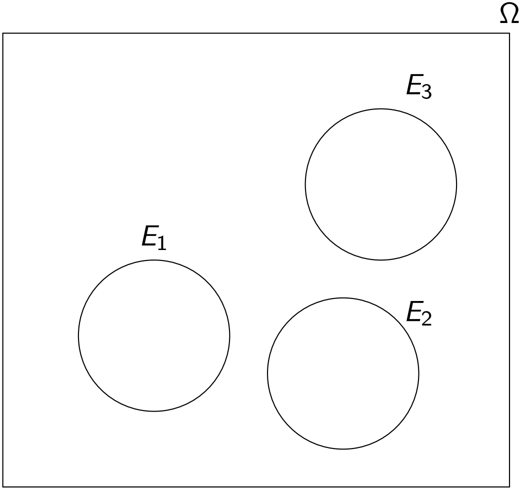
Lancio di una moneta

- Esperimento: si lancia una moneta
- Spazio degli eventi: $\Omega = \{H, T\}$
- Evento: H

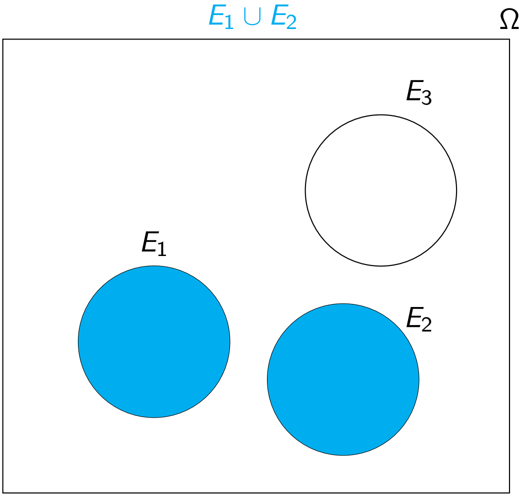
Lancio di due monete

- Esperimento: si lanciano due monete
- Spazio degli eventi: $\Omega = \{HH, TT, HT, TH\}$
- Evento: HT, {at least one H}, {first is H}, {second is T}

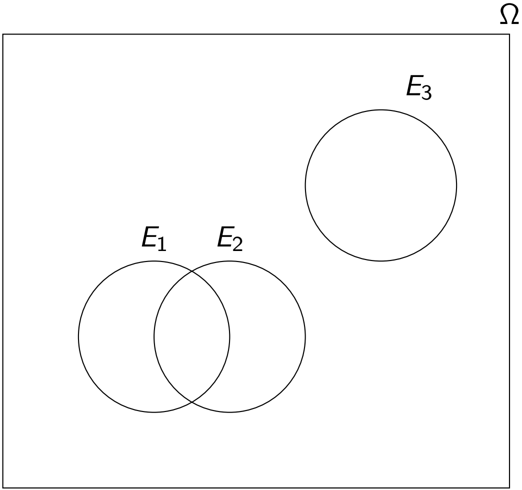
Rappresentazione grafica



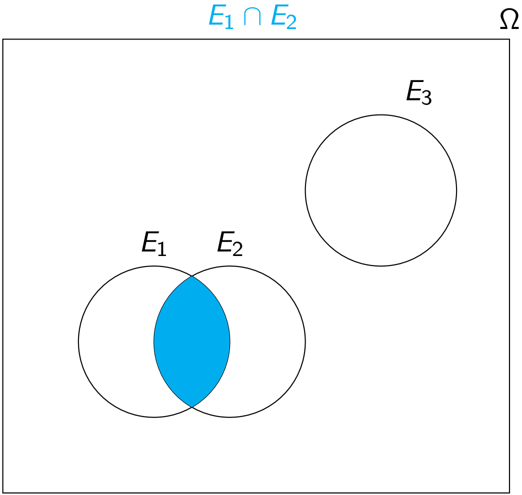
Rappresentazione grafica



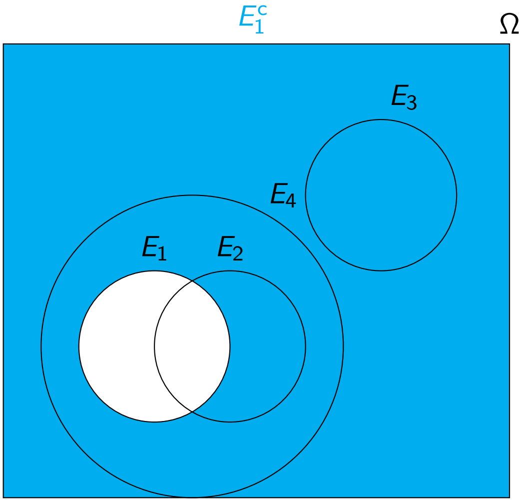
Rappresentazione grafica



Rappresentazione grafica



Rappresentazione grafica



Proprietà

- Commutativa: $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$
- Associativa: $(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$
- Distributiva: $(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$

Proprietá

- Commutativa: $E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$
- Associativa: $(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$
- Distributiva: $(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$
- Leggi di De Morgan:
  - $(E_1 \cup E_2)^c = E_2^c \cap E_1^c$
  - $(E_1 \cap E_2)^c = E_2^c \cup E_1^c$

Definizioni

- Esperimento: una procedura ripetibile che ha un certo numero di esiti possibili e ben definiti
- Spazio degli eventi: insieme di tutti i possibili esiti, solitamente indicato con Ω
- Evento: un elemento o sottoinsieme dello spazio degli eventi
- Funzione di probabilità: una funzione che associa ad ogni evento un valore di probabilità

Funzione di probabilità

- Se si ripete molte volte un esperimento nelle stesse condizioni, la frazione di casi sul totale in cui si realizza un qualunque evento E_i tende - al crescere dei tentativi - ad un valore costante che dipende solo da E_i:

$$\frac{\text{number of times the outcome was } E_i}{\text{number of trials}} \tag{1}$$

- Ad esempio, che se si lancia tante volte una moneta, il rapporto tra il numero di risultati testa e il numero di tentativi, man mano che anmentiamo il numero di lanci, tende ad un· valore costante: 0.5.

Funzione di probabilità

- Ad ogni evento E sullo spazio degli esiti Ω si associa un numero che si denota con $\mathbb{P}(E)$ e che si dice probabilità dell' evento E. La funzione di probabilità deve rispettare alcuni assiomi:
  - Assioma 1: Ogni valore di probabilità è un numero compreso tra 0 e 1.

    $$0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$$

  - Assioma 2: L'evento Ω si verifica con probabilità 1.

    $$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

  - Assioma 3: Preso un insieme finito o numerabile di eventi mutuamente esclusivi, la probabilità che se ne verifichi almeno uno è uguale alla somma delle loro probabilità.

    $$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

Lancio di una moneta

- Esperimento: si lancia una moneta
- Spazio degli eventi: $\Omega = \{H, T\}$
- Evento: H
- Funzione di probabilità: $\mathbb{P}(H) = 0.5$, $\mathbb{P}(T) = 0.5$.

Funzione di probabilità

- Definendo $\mathbb{P}(E)$ come la frequenza relativa dell'evento E quando l'esperimento è ripetuto un gran numero di volte, questa definizione soddisfa i predetti assiomi:
  - Assioma 1: la frequenza relativa di un evento sia sempre compresa tra 0 e 1;
  - Assioma 2: l'evento Ω si verifica ad ogni esperimento, quindi con probabilità 1;
  - Assioma 3: se E_1 e E_2 sono eventi che non hanno esiti in comune, il numero di casi in cui si verifica $E_1 \cup E_2$ è pari alla somma dei casi in cui si verificano E_1 e E_2

Funzione di probabilità

Gli assiomi permettono di dedurre le proprietà della funzione di probabilità

- $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$
- $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$ (principio di inclusione-esclusione)

Funzione di probabilità

Gli assiomi permettono di dedurre le proprietà della funzione di probabilità

- $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$
- $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$ (principio di inclusione-esclusione)

Examples

- Generiamo un numero casuale intero. Se la probabilità di avere un numero pari è is $\mathbb{P}(even) = 0.6$, qual è la probabilità $\mathbb{P}(odd)$?

$$\{odd\} = \{even\}^c \rightarrow \mathbb{P}(odd) = 1 - \mathbb{P}(even) = 0.4$$

- Consideriamo due eventi: $E_1 = \{X \text{ è multiplo di } 2\}$ e $E_2 = \{X \text{ è dispari e minore di } 10\}$. Supponiamo $\mathbb{P}(E_1) = 0.6$ and $\mathbb{P}(E_2) = 0.25$. Qual è $E_1 \cap E_2$? Calcolare $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2)$.

Spazio di eventi equiprobabili

Consideriamo uno spazio composto da N eventi equiprobabili

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = \ldots = \mathbb{P}(E_N) = p$$
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_n) = np$$

da cui si deduce che $\mathbb{P}(E_i) = p = 1/n \; \forall i = 1, 2, ..., n$.

Spazio di eventi equiprobabili

Consideriamo uno spazio composto da N eventi equiprobabili

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = \ldots = \mathbb{P}(E_N) = p$$
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_n) = np$$

da cui si deduce che $\mathbb{P}(E_i) = p = 1/n \; \forall i = 1, 2, ..., n$.

$$E = \bigcup_{i \in \mathcal{E}} E_i \implies \mathbb{P}(E) = |\mathcal{E}|/n$$

Esempio: Lo spazio degli eventi per il lancio di un dado conta 6 eventi equiprobabili.
$E = \{dispari\} = \{1, 3, 5\} \implies \mathbb{P}(E) = 3/6 = 0.5$

Principio di enumerazione generalizzato

Se si realizzano due diversi esperimenti contemporaneamente, il primo con n possibili esiti e il secondo con m possibili esiti, complessivamente vi sono mn possibili esiti.

Principio di enumerazione generalizzato

Se si realizzano due diversi esperimenti contemporaneamente, il primo con n possibili esiti e il secondo con m possibili esiti, complessivamente vi sono mn possibili esiti.

Esempio 1: Si lancino due dadi. Qual è la probabilità che il risultato sia 1 per entrambi i dadi?

Principio di enumerazione generalizzato

Se si realizzano due diversi esperimenti contemporaneamente, il primo con n possibili esiti e il secondo con m possibili esiti, complessivamente vi sono mn possibili esiti.

Esempio 1: Si lancino due dadi. Qual è la probabilità che il risultato sia 1 per entrambi i dadi?

- Per ogni risultato del primo dado, abbiamo 6 possibili risultati del secondo.
- Enumerando i risultati complessivi, questi sono 36.
- L'evento $\{1,1\}$ è uno dei 36 possibili esiti, equiprobabili. Pertanto $\mathbb{P}(\{1,1\}) = 1/36$.

Esempio 2:

Si estraggano a caso due palline da un'urna che ne contiene 6 bianche e 5 nere. Qual è la probabilità che le due palline estratte siano una bianca e una nera?

Esempio 2:

Si estraggano a caso due palline da un'urna che ne contiene 6 bianche e 5 nere. Qual è la probabilità che le due palline estratte siano una bianca e una nera?

- Per ogni pallina estratta (11 esiti) abbiamo 10 possibili esiti per la seconda pallina.
- Enumerando i risultati complessivi, questi sono 110.
- Abbiamo 6×5 casi in cui estraiamo la prima pallina bianca e la seconda nera. Analogamente, 5×6 casi in cui estraiamo prima la nera e poi la bianca.
- In totale $60/110$ casi in cui abbiamo una pallina bianca e una nera.

Principio di enumerazione generalizzato

- Si eseguono r esperimenti
- Il primo esperimento ammette n_1
- Per ogni esito del primo esperimento, il secondo esperimento ammette n_2 esiti diversi
- ...
- Per ogni esito del $(r-1)$-esimo esperimento, l'r-esimo esperimento ammette n_r esiti diversi.
- Complessivamente, abbiamo $\prod_{i=1}^{r} n_i$ possibili esiti.

Principio di enumerazione e permutazioni

Il principio di enumerazione è utile a determinare il numero di modi diversi in cui si possono ordinare n oggetti.
Esempio: I possibili ordinamenti di tre simboli a, b e c sono sei:

$$\{abc\}, \{acb\}, \{bac\}, \{bca\}, \{cab\}, \{cba\}$$

Il primo simbolo della permutazione può essere scelto in tre modi diversi; per ogni scelta del primo simbolo, il secondo può essere preso tra i due restanti; il terzo e ultimo viene individuato per esclusione (una sola scelta). Totale: $3 \times 2 \times 1 = 6$

La permutazione di n oggetti, analogamente, conta un numero $n!$ di ordinamenti, noto come *n fattoriale* e definito come

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

Esercizio

Se in una stanza sono radunate n persone, qual è la probabilità che **non** ve ne siano due che compiono gli anni lo stesso giorno dell'anno?

Principio di enumerazione e combinazioni

Quanti diversi gruppi di r oggetti si possono formare partendo da un insieme di $n \geq r$, ogni gruppo è detto combinazione.
Esempio: Quanti diversi gruppi di tre lettere si possono formare usaodo le cinque lettere a,b,c,d,e?

- 5 scelte per la prima lettere
- 4 scelte per la seconda lettera
- 3 scelte per la terza lettera
- In totale, vi sono $5 \times 4 \times 3$ modi per scegliere tre lettere su cinque, **tenendo conto dell'ordine**.

In questo modo teniamo conto però di tutte le permutazioni di ogni tripletta, che sono $3! = 6$: vengono contate $\{abc\}, \{acb\}, \{bac\}, \{bca\}, \{cab\}, \{cba\}$ per la tripletta $\{a, b, c\}$.
Il numero di combinazioni diverse di tre lettere può essere ricavato come $(5 \times 4 \times 3)/(3 \times 2 \times 1) = 10$.

Principio di enumerazione e combinazioni

Quanti diversi gruppi di r oggetti si possono formare partendo da un insieme di $n \geq r$, ogni gruppo è detto combinazione.

Principio di enumerazione e combinazioni

Quanti diversi gruppi di r oggetti si possono formare partendo da un insieme di $n \geq r$, ogni gruppo è detto combinazione.

In generale, il numero di combinazioni di n elementi presi r alla volta è

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-(r-1))}{r!}$$

e si indica con il simbolo $\binom{n}{r}$ che prende il nome di coefficiente binomiale

Esempio

Un gruppo di 5 studenti deve essere scelto da una classe formata da 6 uomini e 9 donne. Se la scelta viene fatta a caso, qual è la probabilità che il gruppo sia formato da 2 uomini e 3 donne?·

- Il numero totale di combinazioni equiprobabili è $\binom{15}{5}$
- Le possibili combinazioni dei 2 uomini sono $\binom{6}{2}$
- Le possibili combinazioni delle 3 donne sono $\binom{6}{3}$
- $\mathbb{P}(\{2 \text{ uomini e } 3 \text{ donne}\}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{9}{3}}{\binom{15}{5}}$