

Nome, Cognome.....

Matricola

Compito 35Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022Svolgere solo ed esclusivamente il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON** si devono includere gli svolgimenti. Il punteggio massimo è 25.**Esercizio 1 (5 punti)** Data la funzione

$$f(x) = \frac{3+5x}{-2-5x},$$

si determinino:

☐ a) l'insieme di definizione D di f ;☐ d) l'immagine $I = f(D)$ di f ;☐ b) la derivata $f'(x)$;☐ e) il grafico di f , le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.☐ c) l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;**Esercizio 2 (2 punti)** Calcolare i seguenti limiti.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 + 4)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e+x) - \cos(x)}{x \sin(3x)}$

Esercizio 3 (1 punto) Calcolare il valore della serie numerica $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})$ con

$$a_n = \arctan\left(\frac{4^n + n^2 - 3}{7^n + n^3 - 3}\right).$$

Esercizio 4 (2 punti) Data la serie numerica

$$\sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n}\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

☐ a) La serie converge.☐ b) La serie diverge.☐ c) La serie è irregolare.**Esercizio 5 (3 punti)** Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.

$$z^3 = -4 - 4\sqrt{3}i$$

Esercizio 6 (4 punti) Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'inf, il sup, e, se esistono, min e max.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+7}{x+2} \leq \frac{x+3}{x+5} \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x^2 - 9x - 12} < \sqrt{6x^2 - 42} \right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) Calcolare i seguenti integrali.

a) $\int \cos(x) e^{\sin(x)} dx$

b) $\int_0^1 t \left[\frac{\ln(1+t^2)+1}{1+t^2} \right] dt$

c) $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \ln(x) dx$

Esercizio 8 (2 punti) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 29y(x) = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

Compito 35

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

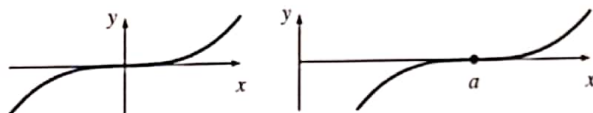
Risposta corretta: +0.5. Risposta mancante: -0.1. Risposta errata: -0.2.

Enunciato 1. L'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} è un campo.

V

Enunciato 2. Se quello riportato a sinistra è il grafico di $f(x)$, allora quello a destra è il grafico di $f(x-a)$.

V



Enunciato 3. Se C è l'estremo superiore di $A \subset \mathbb{R}$ e $C \in A$, allora C è il massimo di A .

V

Enunciato 4. Ciascun angolo di un triangolo equilatero misura $\pi/2$.

F



Enunciato 5. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

V

Enunciato 6. Se $z \in \mathbb{C}$, allora $\overline{z^n} = -(\overline{z})^n$.

F

Enunciato 7. Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ se
 $\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. $f(x) > M \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

F

Enunciato 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \forall a > 0$

V

Enunciato 9. Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$ allora $a_n \downarrow 0$.

F

Enunciato 10. La serie armonica converge.

F

Enunciato 11. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora l'immagine di un intervallo aperto è un intervallo aperto.

F

Enunciato 12. Tutte le funzioni integrabili sono derivabili.

F

Enunciato 13. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile ed $x_0 \in (a, b)$ è tale che $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo o di minimo.

F

Enunciato 14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arcsin(x) + c$

F

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														

Compito 36

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere solo ed esclusivamente il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON** si devono includere gli svolgimenti. Il punteggio massimo è 25.

Esercizio 1 (5 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{3x^2 + 12x - 15}{6x^2 + 24x + 78},$$

si determinino:

☐ a) l'insieme di definizione D di f ;

☐ d) l'immagine $I = f(D)$ di f ;

☐ b) la derivata $f'(x)$;

☐ e) il grafico di f , le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.

☐ c) l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare i seguenti limiti.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4n + \frac{8}{n} \right) \ln \left(1 + \frac{20}{n} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} \sin(x-1)^2}{(x+1)^3 \ln(x)^2}$

Esercizio 3 (1 punto) Calcolare il valore della seguente somma finita.

$$\sum_{n=0}^4 4^n$$

Esercizio 4 (2 punti) Data la serie numerica

$$\sum_{n \geq 1} n^5 \arctan \left(\frac{1}{n^7} \right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

☐ a) La serie converge.

☐ b) La serie diverge.

☐ c) La serie è irregolare.

Esercizio 5 (3 punti) Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.

$$z^3 = 1$$

Esercizio 6 (4 punti) Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'inf, il sup, e, se esistono, min e max.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - x - 2} \geq 0 \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x^2 + 6x - 20} < \sqrt{3x^2 + 10x - 25} \right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) Calcolare i seguenti integrali.

a) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

b) $\int_0^1 \frac{\ln(\arctan(x) + 1)}{(1+x^2)(\arctan(x) + 1)^2} dx$

c) $\int_0^1 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$

Esercizio 8 (2 punti) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{x} y(x) + x^7 \\ y(2) = -3 \end{cases}$$

Compito 36

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

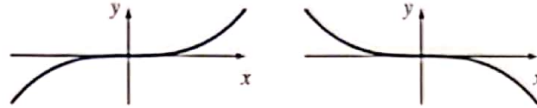
Risposta corretta: +0.5. Risposta mancante: -0.1. Risposta errata: -0.2.

Enunciato 1. L'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} è ordinato e completo.

F

Enunciato 2. Se quello riportato a sinistra è il grafico di $f(x)$, allora quello a destra è il grafico di $-f(x)$.

V



Enunciato 3. $\{x \in \mathbb{R} : |x| > a\} = (-a, a)$

F

Enunciato 4. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

F

Enunciato 5. $\cos(-x) = -\cos(x)$

F

Enunciato 6. Se $z \in \mathbb{C}$, allora $\overline{\overline{z}} = -z$

F

Enunciato 7. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon \forall x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$.

V

Enunciato 8. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se
 $\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. $f(x) > M \forall x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$.

V

Enunciato 9. Se per ogni $\{x_n\}_n$ convergente ad x_0 si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$, allora f è continua in x_0 .

V

Enunciato 10. Se $a_n > 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, allora $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge.

F

Enunciato 11. Se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$, allora $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

F

Enunciato 12. Le funzioni dispari non sono derivabili in $x = 0$.

F

Enunciato 13. Se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili su $[a, b]$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che
 $(g(b) - g(a)) f'(x_0) = (f(b) - f(a)) g'(x_0)$.

V

Enunciato 14. $\int \cos(x) dx = -\sin(x) + c$

F

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														