# UN PO' DI TEORIA DEI CAPITOLI 0 E 1

**DEF** Siano $X$ e $Y$ insiemi.

SLIDE → • Ogni sottoinsieme $R$ di $X \times Y$ (prodotto cartesiano) viene chiamato relazione (binaria) fra $X$ e $Y$.

• Una relazione binaria è una terna ordinata $(X, Y, R)$ dove $X$ e $Y$ sono insiemi e $R$ è una relazione binaria fra $X$ e $Y$.

• Se $R$ è una relazione binaria fra $X$ e $Y$ diciamo che $x \in X$ è in relazione $R$ con $y \in Y$, cioè $x R y$, se $(x, y) \in R$. Altrimenti $x \not R y$

• Se $X = Y$ diciamo che $R$ è una relazione binaria sull'insieme $X$.

**DEF** Sia $R \subseteq X \times X$ una relazione binaria su un insieme $X$. $R$ è:

- riflessiva se $x R x$ $\forall x \in R$, cioè: $x \in X \iff x R x$
- simmetrica se, dati $x, y \in X$, da $x R y$ segue che $y R x$, cioè: $x R y \Rightarrow y R x$, $x, y \in X$.
- transitiva se, dati $x, y, z \in X$, da $x R y$, $y R z$ segue che $x R z$, cioè: $(x R y$ e $y R z) \Rightarrow x R z$, $x, y, z \in X$.

Si dice che $R$ è una relazione di equivalenza se $R$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

**ESEMPIO** La relazione binaria $R$ su $\mathbb{Q}$ data da

$$x R y \iff x - y \in \mathbb{Z} \qquad x, y \in \mathbb{Q}$$

è una relazione di equivalenza

DD = Devo Dimostrare

Vediamo ...

1) $x R x \Rightarrow x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ ✓

2) $x R y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ DD: $y - x \in \mathbb{Z}$

$-(x - y) = -x + y = y - x \in \mathbb{Z}$ ✓

3) $x R y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ e $y R z \Rightarrow y - z \in \mathbb{Z}$

DD: $x - z \in \mathbb{Z}$

$$x - z = \underbrace{(x - y)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(y - z)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} \quad ✓$$

Sommo e sottraggo $y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ È una relazione di equivalenza

**DEF** Sia $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ una relazione binaria su un insieme $X$. Diciamo che $\mathcal{R}$ è:

- antisimmetrica o propria se, dati $x$ e $y \in X$, da $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ segue che $x = y$, cioè $(x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y \quad x, y \in X$.
- un' ordine parziale o relazione d'ordine parziale se $\mathcal{R}$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva (si indica con $\leq$)

Un insieme parzialmente ordinato è una coppia $(X, \leq)$, dove $X$ è un insieme e $\leq$ è una relazione di ordine parziale su $X$.

Un' ordine parziale su $X$ si dice totale se dati comunque $x, y \in X$ si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$; in altre parole, se due suoi elementi sono sempre confrontabili.

**ESEMPI** 1. Sia $X$ un insieme. La relazione $\mathcal{R}$ definita su $\mathcal{P}(X)$ da

$$A \mathcal{R} B \iff A \subseteq B$$

è una relazione d'ordine parziale su $\mathcal{P}(X)$.

insieme delle parti di $X$

2. L'usuale $\leq$ su $\mathbb{N}$ è una relazione d'ordine totale.

**DEF** Sia $\mathcal{R}$ una relazione su $X$. Dato $x \in X$ si definisce classe di $x$ un sottoinsieme di $X$ dato da tutti gli elementi di $X$ in relazione con $x$

$$cl(x) =: \{ y \in X : (x, y) \in \mathcal{R} \}.$$

$x$ può appartenere o meno a $cl(x)$.

~~vale~~ la proprietà riflessiva $\Rightarrow x \in cl(x)$

Se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza $\Rightarrow cl(x)$ è detta classe di equivalenza e $x$ è detto rappresentante della classe

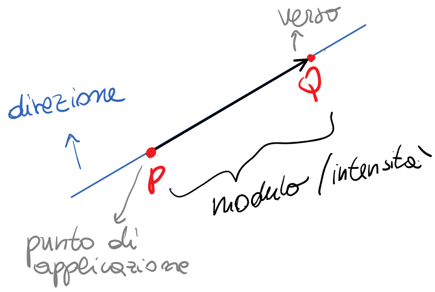
**DEF** L'insieme delle classi di equivalenza di $X$ rispetto a $\mathcal{R}$ viene chiamato insieme quoziente di $X$ rispetto a $\mathcal{R}$ e si indica con $X/\mathcal{R}$.

per indicarle si usa appunto un rappresentante.

**DEF** Dati due punti $P$ e $Q$ nel piano o nello spazio, il vettore geometrico in $P$ e di estremo $Q$ è il segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$. Esso è caratterizzato da:

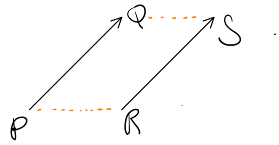
- una direzione, quella della retta a cui appartengono
- un verso, quello che si osserva percorrendo il segmento orientato $PQ$
- un modulo (o norma) $|\overrightarrow{PQ}|$ che è il numero reale non negativo che esprime la lunghezza del segmento.

**OSS** 
- Se $P \equiv Q \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$ vettore nullo
- Esiste l'opposto di $\overrightarrow{PQ}$, ossia $-\overrightarrow{PQ}$
- Versore = vettore con modulo unitario.




**DEF** $\boxed{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}) \in \mathcal{R}} \iff$ i segmenti PQ e RS sono $//$, concordi e $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RS}|$

sono equipollenti — Relazione di equipollenza

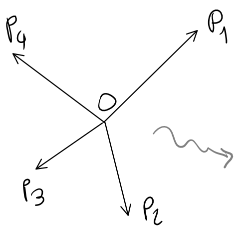



Equivalentemente: se $\exists$ una traslazione che permette di sovrapporre l'uno all'altro

Tale relazione è di equivalenza $\Rightarrow$ le classi di equiv. inducono una partizione

$\Downarrow$

ogni classe è un elemento di $V/\mathcal{R}$, denotato con $V$ e detto insieme dei vettori liberi del piano / spazio.




I vettori applicati in O sono rappresentanti di tutti i vettori liberi.

**DEF** Versori degli assi cartesiani:

| | | $\mathbb{R}^2$ | $\mathbb{R}^3$ | $\mathbb{R}^n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{i}$ | $= \vec{e}_1$ | $(1,0)$ | $(1,0,0)$ | $(1,0,\dots,0)$ |
| $\vec{j}$ | $= \vec{e}_2$ | $(0,1)$ | $(0,1,0)$ | $(0,1,0,\dots,0)$ |
| $\vec{k}$ | $= \vec{e}_3$ | $\nexists$ | $(0,0,1)$ | $(0,0,\dots,1)$ |

Operazioni coi vettori:
Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ dei vettori, $\lambda \in \mathbb{R}$ uno scalare

- Somma / differenza $\rightarrow$ regola del parallelogramma $\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2$ = VETTORE
- prodotto per uno scalare $\lambda \cdot \vec{v}_1$ = VETTORE
- prodotto scalare tra due vettori $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ = SCALARE (NUMERO)
- prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ = VETTORE
- prodotto misto: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \rangle$ = SCALARE (NUMERO)