Istituzioni di Matematica

Docente: Prof. M.D. Rosini

email: massimilianodaniele.rosini@unife.it

Corso di Laurea in Informatica

Università Degli Studi Di Ferrara

a.a. 2022-2023

Somme finite ed infinite

Indice

Sezione 1 Somme finite

La **somma finita** dei primi N termini della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indicata con

$$\sum_{n=1}^{N} a_n$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N.$$

La **somma finita** dei primi N termini della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indicata con

$$\sum_{n=1}^{N} a_n$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N.$$

Esercizio

Riscrivere in maniera estesa le seguenti somme finite e calcolarne il valore.

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2 = \quad 385$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = \qquad ? = \quad ?$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \qquad ? = \quad ?$$

La **somma finita** dei primi N termini della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indicata con

$$\sum_{n=1}^{N} a_n$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N.$$

Esercizio

Riscrivere in maniera estesa le seguenti somme finite e calcolarne il valore.

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2 = 385$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{10} = \frac{7381}{2520}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520}$$

Esercizio

Scrivere le seguenti somme finite in forma compatta e calcolarne il valore.

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{10\cdot 11}$$

$$S_2 = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{-2\cdot 1 - 1} + \frac{1}{2\cdot 2 - 1} + \frac{1}{-2\cdot 3 - 1} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 10 - 1}$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{10}{11}$$

$$S_2 = \quad ? = \quad ?$$

$$S_3 = \quad ? = \quad ?$$

Esercizio

Scrivere le seguenti somme finite in forma compatta e calcolarne il valore.

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{10\cdot 11}$$

$$S_2 = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{-2\cdot 1-1} + \frac{1}{2\cdot 2-1} + \frac{1}{-2\cdot 3-1} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 10-1}$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{10}{11}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{10} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(11)$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(-1)^n 2n-1} = 0$$

Esercizio

Scrivere esplicitamente i termini della seguente somma finita e calcolarne il valore.

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

Esercizio

Scrivere esplicitamente i termini della seguente somma finita e calcolarne il valore.

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} = -\frac{227}{1200}$$

Il calcolo del valore di una somma finita non è in generale un'operazione veloce. In alcuni casi si possono però applicare delle formule esplicite che lo velocizzano.

Proposizione

Per una **somma geometrica** si ha

$$\sum_{n=1}^{N} a^n = \begin{cases} \dfrac{a - a^{N+1}}{1-a} & \text{se } a \neq 1, \\ N & \text{se } a = 1, \end{cases} \qquad \sum_{n=0}^{N} a^n = \begin{cases} \dfrac{1 - a^{N+1}}{1-a} & \text{se } a \neq 1, \\ N+1 & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

Per una **somma aritmetica** si ha

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}, \qquad \sum_{n=0}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

Per una **somma telescopica** si ha

$$\sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_1, \qquad \sum_{n=0}^{N} (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_0.$$

Dimostrazione.

Dimostriamo la formula per la **somma geometrica**

$$\sum_{n=1}^{N} a^n = \begin{cases} \dfrac{a - a^{N+1}}{1-a} & \text{se } a \neq 1, \\ N & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

Poniamo $\quad G = \sum_{n=1}^{N} a^n = a + a^2 + \ldots + a^{N-1} + a^N.$

Se $a = 1$, allora

$$G = \sum_{n=1}^{N} 1^n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{N \text{ volte}} = N.$$

Dimostrazione.

Dimostriamo la formula per la **somma geometrica**

$$\sum_{n=1}^{N} a^n = \begin{cases} \dfrac{a - a^{N+1}}{1-a} & \text{se } a \neq 1, \\ N & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

Poniamo $\quad G = \sum_{n=1}^{N} a^n = a + a^2 + \ldots + a^{N-1} + a^N.$

Se $a \neq 1$, allora

$$\begin{aligned} G \cdot (1-a) &= G - G \cdot a \\ &= (a + a^2 + \ldots + a^{N-1} + a^N) \\ &\quad - (a^2 + a^3 + \ldots + a^{N-1} + a^N + a^{N+1}) \\ &= a - a^{N+1} = a \cdot (1 - a^N) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow G = \frac{a - a^{N+1}}{1-a}.$$

Dimostrazione.

Dimostriamo la formula per la **somma aritmetica**

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

Dimostrazione.

Dimostriamo la formula per la **somma aritmetica**

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

Poniamo $\quad A = \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \ldots + (N-1) + N.$

Dimostrazione.

Dimostriamo la formula per la **somma aritmetica**

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

Poniamo $\quad A = \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \ldots + (N-1) + N.$

Per la proprietà commutativa dell'addizione

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (N-2) + (N-1) + N, \\ A &= N + (N-1) + (N-2) + \ldots + 3 + 2 + 1, \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Dimostriamo la formula per la **somma aritmetica**

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

Poniamo $\quad A = \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \ldots + (N-1) + N.$

Per la proprietà commutativa dell'addizione

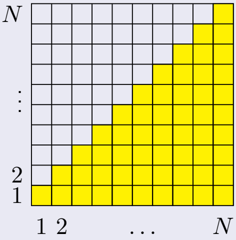
$$\begin{aligned} A &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (N-2) + (N-1) + N, \\ A &= N + (N-1) + (N-2) + \ldots + 3 + 2 + 1, \end{aligned}$$

e sommando termine a termine si ottiene

$$\begin{aligned} 2A &= (N+1) + (N+1) + \ldots + (N+1) + (N+1) + (N+1) \\ &= N \cdot (N+1) \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{N \cdot (N+1)}{2}. \end{aligned}$$

Dimostrazione.

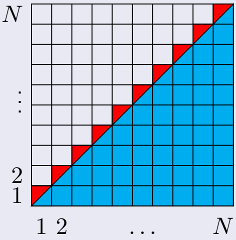
In alternativa, diamo una dimostrazione geometrica. Dividiamo un quadrato di lato N in quadratini di lato unitario e calcoliamo l'area evidenziata in giallo nella figura a fianco.



Come primo passo calcoliamo la superficie evidenziata in blue, ottenendo $N^2/2$. A questa va aggiunta la superficie evidenziata in rosso, che è pari a $N/2$, in quanto ciascun quadratino ha area unitaria e lungo al diagonale ci sono N quadratini. Otteniamo così che l'area evidenziata in giallo è

$$\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2},$$

che è pari anche alla somma dei primi N numeri naturali visto che la somma delle aree dei quadrati disposti sulla n-esima colonna è pari ad n.



Dimostrazione.

In alternativa, dimostriamo per induzione che

$$P(N): \quad \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

i. $P(1)$ è vera in quanto

$$\sum_{n=1}^{1} n = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Dimostrazione.

In alternativa, dimostriamo per induzione che

$$P(N): \quad \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

ii. se $P(N)$ è vera allora anche

$$P(N+1): \qquad \sum_{n=1}^{N+1} n = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

è vera in quanto

$$\sum_{n=1}^{N+1} n = \sum_{n=1}^{N} n + (N+1) = \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

Dimostrazione.

Dimostriamo la formula per la **somma telescopica**

$$\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n)=a_{N+1}-a_1.$$

Dimostrazione.

Dimostriamo la formula per la **somma telescopica**

$$\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_1.$$

Per definizione si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1} - a_n) &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots \\ &\quad + (a_N - a_{N-1}) + (a_{N+1} - a_N) \\ &= a_{N+1} - a_1.\end{aligned}$$

□

Gli esempi che seguono mostrano come applicare:

- la formula per la somma geometrica ogni volta che a_{n+1}/a_n è una costante che non dipende da n;
- la formula per la somma aritmetica ogni volta che $a_{n+1} - a_n$ è una costante che non dipende da n.

Esempio

Per calcolare $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{162} + \frac{1}{486}$, basta osservare che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ in quanto

$$\frac{1}{3} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1/18}{1/6} = \frac{1/54}{1/18} = \frac{1/162}{1/54} = \frac{1/486}{1/162}$$

ed applicare la formula per le somme geometriche come segue:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{162} + \frac{1}{486} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^7}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1/3}{2/3} \cdot \frac{3^6 - 1}{3^6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{728}{3^5} = \frac{182}{243}.$$

Esempio

Per calcolare $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}-\frac{1}{54}+\frac{1}{162}-\frac{1}{486}$ basta osservare che $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{3}$ in quanto

$$-\frac{1}{3}=\frac{-1/6}{1/2}=\frac{1/18}{-1/6}=\frac{-1/54}{1/18}=\frac{1/162}{-1/54}=\frac{-1/486}{1/162}$$

ed applicare la formula per le somme geometriche come segue:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}-\frac{1}{54}+\frac{1}{162}-\frac{1}{486} &= -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\frac{1}{729}\right)\\ &= -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^7}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{-1/3}{4/3}\cdot\frac{3^6-1}{3^6}=\frac{1}{8}\cdot\frac{728}{3^5}=\frac{91}{243}.\end{aligned}$$

Esempio

Per calcolare $9 + \frac{21}{2} + 12 + \frac{27}{2} + 15 + \frac{33}{2}$ basta osservare che $a_{n+1} - a_n = 3/2$ in quanto

$$\frac{3}{2} = \frac{21}{2} - 9 = 12 - \frac{21}{2} = \frac{27}{2} - 12 = 15 - \frac{27}{2} = \frac{33}{2} - 15,$$

ed applicare la formula per le somme aritmetiche come segue:

$$\begin{aligned} 9 + \frac{21}{2} + 12 + \frac{27}{2} + 15 + \frac{33}{2} &= \frac{3}{2}\,(6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) \\ &= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{6}(5+n) = \frac{3}{2}\left(\sum_{n=1}^{6} 5 + \sum_{n=1}^{6} n\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(6 \cdot 5 + \frac{6\cdot(6+1)}{2}\right) = \frac{153}{2}. \end{aligned}$$

Esempio

Calcoliamo la somma dei primi 100 numeri naturali applicando la formula per le somma aritmetiche come segue:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100 = \sum_{n=1}^{100} n = \frac{100 \cdot (100 + 1)}{2} = 5050.$$

Ricordiamo che questo esercizio fu risolto da Gauss quando aveva tra i 7 ed i 9 anni.

A differenza delle somme geometriche e di quelle aritmetiche, non c'è un modo semplice per riconoscere se una somma sia telescopica o meno: serve avere il "colpo d'occhio".

Esempio

Per calcolare $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$ basta applicare la formula per le somme telescopiche come segue:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}\\ &=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}.\end{aligned}$$

Mostriamo come dimostrare per induzione alcune formule utili a calcolare somme finite.

Esercizio

Si dimostri che per la somma dei primi n quadrati vale la seguente formula

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(n+1).$$

Mostriamo come dimostrare per induzione alcune formule utili a calcolare somme finite.

Esercizio

Si dimostri che per la somma dei primi n quadrati vale la seguente formula

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(n+1).$$

i. $P(1)$ è vera in quanto

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1}{6}(2 \cdot 1 + 1)(1 + 1)$$

Mostriamo come dimostrare per induzione alcune formule utili a calcolare somme finite.

Esercizio

Si dimostri che per la somma dei primi n quadrati vale la seguente formula

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(n+1).$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche

$$P(n+1): \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2)$$

è vera in quanto

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(n+1) + (n+1)^2 =$$
$$\frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) = \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2).$$

Mostriamo come dimostrare per induzione alcune formule utili a calcolare somme finite.

Esercizio

Si dimostri che per la somma dei primi n quadrati vale la seguente formula

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(n+1).$$

Abbiamo dunque trovato una formula per calcolare la somma dei primi n quadrati valida per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$.

Si noti che tale somma è un numero naturale, dunque $n\,(n+1)\,(2n+1)$ deve essere divisibile per 6. Chiaramente o n o $n+1$ è divisibile per 2. Da questo segue che almeno uno dei tre numeri n, $n+1$ e $2n+1$ è divisibile per 3.

Esercizio

Dimostrare per induzione le seguenti identità.

$$1)\ P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

$$2)\ P(n) : \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},\ a \neq 1$$

$$3)\ P(n) : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

$$4)\ P(n) : \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot k = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}$$

Sezione 2 Somme infinite

Definizione

Una **serie numerica** è la somma (infinita) di tutti i termini di una successione.

Generalizzando il simbolo di somma finita, la serie numerica associata alla successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indicata con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{n\geqslant 1} a_n.$$

La prima notazione mette in evidenza che si tratta di una somma infinita di termini, la seconda è leggermente più compatta.

DUBBIO: Può la somma infinita di termini (strettamente positivi) essere finita?

DUBBIO: Può la somma infinita di termini (strettamente positivi) essere finita?

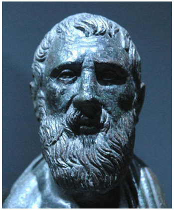
La domanda è tutt'altro che banale!

DUBBIO: Può la somma infinita di termini (strettamente positivi) essere finita?

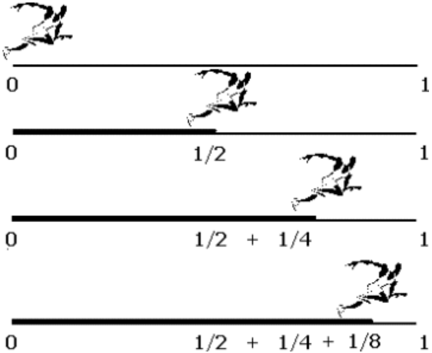
La domanda è tutt'altro che banale!
Si pensi ad esempio al rimo paradosso di Zenone.

Primo paradosso di Zenone

Non si può giungere all'estremità di uno stadio senza prima aver raggiunto la metà di esso, ma una volta raggiunta la metà si dovrà raggiungere la metà della metà rimanente e così via, senza quindi mai riuscire a raggiungere l'estremità dello stadio.



Zenone di Elea
489 a.C.-431 a.C.
filosofo greco



A tale paradosso corrisponde la seguente serie numerica

$$\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \ldots = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{L}{2^p},$$

dove L è la lunghezza dello stadio. Dimostreremo rigorosamente, ovvero matematicamente, che tale serie non solo è finita, ma (come è lecito aspettarsi) vale L, risolvendo così il primo paradosso di Zenone.

Esempio

La **serie armonica** è

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

La **serie armonica a segno alterno** è

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

La **serie armonica generalizzata** è

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \dots \qquad , \ a \in \mathbb{R}.$$

La **serie geometrica** è

$$\sum_{n\geqslant 1} a^n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots \qquad , \ a \in \mathbb{R}.$$

Lo studio di una serie ha come primo obbiettivo quello di vedere se il suo valore è finito o meno e, nel primo caso, calcolarne il valore. È chiaro che la serie

$$\sum_{p \geqslant 1} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

vale $+\infty$. È meno chiaro se la serie armonica o la serie armonica a segno alterno hanno un valore finito o meno. Vedremo che in effetti la prima vale $+\infty$ mentre la seconda vale $\ln(2)$.
Di seguito forniremo dei test facili da verificare per studiare le serie, ma prima abbiamo bisogno di introdurre un po' di terminologia.

Definizione

Una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ è **convergente**, **divergente**, **regolare**, **irregolare** se lo è la corrispondente **successione delle somme parziali** $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ definita da

$$s_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

La **serie converge ad s** se $s = \lim_{N\to\infty} s_N$, in tal caso si scrive $\sum_{n\geqslant 1} a_n = s$. In maniera più coincisa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Esempio

La serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}$ è irregolare perché la corrispondente successione delle somme parziali è

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \end{cases}$$

e quindi oscilla tra 0 ed 1.

Test di Cauchy

Una serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge se e solo se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \left|\sum_{p=m+1}^{n} a_p\right| < \varepsilon\ \forall n > m > N.$$

Dimostrazione.

Per definizione la serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge se e solo se la successione delle somme parziali $\{s_p\}_p$ converge; per il test di Cauchy per le successioni questo accade se e solo se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |s_n - s_m| < \varepsilon\ \forall n > m > N.$$

Infine, per concludere basta osservare che per definizione $s_n - s_m = \sum_{p=m+1}^{n} a_p$. $\square$

Test necessario

Condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ è che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione.

Se la serie converge allora anche la successione delle sue somme parziali $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge e quindi, ricordando che $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, si ha che

$$a_{n+1} = s_{N+1} - s_N \xrightarrow[n\to+\infty]{} s - s = 0. \qquad \square$$

Questo test è utile per dimostrare che una serie non converge.

Esempio

Utilizziamo il test necessario per capire quali delle seguenti serie di sicuro non converge.

- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

- Poichè $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0$, di sicuro la serie non converge.
- Poichè $a_n = \dfrac{1}{n}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, la serie potrebbe convergere.
- Poichè $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, la serie potrebbe convergere.

Il test necessario ci dice che affinché la serie

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n$$

converga serve che la successione $\{a_n\}_n$ converga a zero, ma che questo non basta: serve infatti che la successione $\{a_n\}_n$ converga sufficientemente veloce a zero.

Proposizione

La **serie armonica** diverge.

Ne segue che $1/n$ converge a zero, ma non in maniera sufficientemente veloce.

Proposizione

Per la **serie armonica generalizzata** si ha

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{converge se } a > 1, \\ \text{diverge} \quad \text{se } a \leqslant 1. \end{cases}$$

Ne segue che $1/n^a$ converge a zero in maniera sufficientemente veloce se e solo se $a > 1$.

Proposizione

La **serie armonica a segno alterno** converge.

Proposizione

La **serie geometrica** $\sum_{n\geqslant 1} a^n$ converge se e solo se $|a| < 1$ ed in tal caso il suo valore è $\dfrac{a}{1-a}$.

Dimostrazione.

Dimostriamo che $$\sum_{n\geqslant 1} a^n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } a \geqslant 1, \\ \frac{a}{1-a} & \text{se } |a| < 1, \\ \text{irregolare} & \text{se } a \leqslant -1. \end{cases}$$

Se $a = 1$, allora otteniamo la serie $\sum_{n\geqslant 1} 1^n = 1 + 1 + \ldots$ che diverge.
Se $a \neq 1$, allora sappiamo già che la somma parziale è

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a - a^{N+1}}{1-a}.$$

Non resta quindi altro da fare che calcolare il limite di s_N:

$$\lim_{N\to+\infty} s_N = \lim_{N\to+\infty} \frac{a\cdot(1-a^N)}{1-a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ \dfrac{a}{1-a} & \text{se } |a| < 1, \\ \nexists & \text{se } a \leqslant -1. \end{cases}$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario

La **serie geometrica** $\sum_{n\geqslant 0} a^n$ converge se e solo se $|a| < 1$ ed in tal caso il suo valore è $\dfrac{1}{1-a}$.

Dimostrazione.

Per la proposizione precedente si ha

$$\sum_{n\geqslant 0} a^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1} a^n = 1 + \frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a}. \qquad \square$$

Esempio

Risolviamo il primo paradosso di Zenone. Per dimostrare che

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{L}{2^n} = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \ldots = L,$$

basta applicare la formula per le serie geometriche come segue

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{L}{2^n} = L \cdot \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = L \cdot \frac{1/2}{1 - (1/2)} = L \cdot 1 = L.$$

Esercizio

Calcolare il valore della serie
$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{4}{5}\right)^n .$$

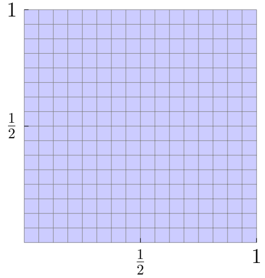
Esercizio

Calcolare il valore della serie
$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Visto che si tratta di una serie geometrica, possiamo applicare la formula appena dimostrata:
$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{1}{1-4/5}=5.$$

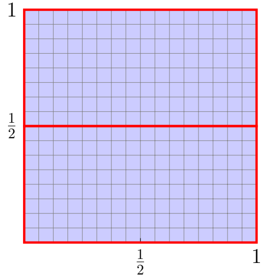
Esempio

Consideriamo un quadrato di lato unitario.



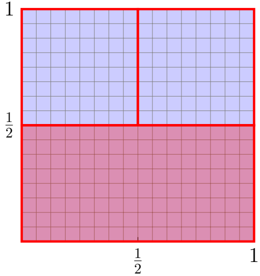
Esempio

Dividiamo il quadrato in due.



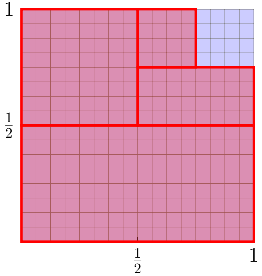
Esempio

Dei due rettangoli ottenuti, uno viene colorato di rosso, mentre l'altro viene a sua volta diviso in due ottenendo due quadrati.



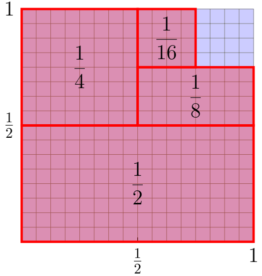
Esempio

Dei due quadrati ottenuti, uno viene colorato di rosso, mentre l'altro viene a sua volta diviso in due ottenendo due rettangoli. Iterando tale procedura all'infinito, ci chiediamo se tutto il quadrato sarà alla fine colorato di rosso.



Esempio

Dei due quadrati ottenuti, uno viene colorato di rosso, mentre l'altro viene a sua volta diviso in due ottenendo due rettangoli. Iterando tale procedura all'infinito, ci chiediamo se tutto il quadrato sarà alla fine colorato di rosso.



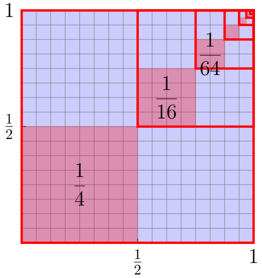
La risposta è sì e questo è chiaro considerando la serie geometrica

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$$

Esempio

Di seguito il disegno corrispondente alla serie geometrica

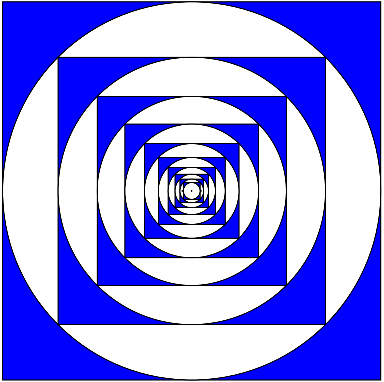
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$



Come si può dedurre dal disegno che la serie ha valore $1/3$?

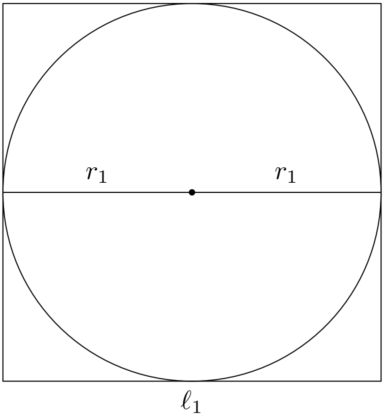
Esempio

Consideriamo la seguente figura costruita come segue: dato un quadrato unitario, iscriviamo in esso un cerchio, in cui iscriviamo un quadrato, in cui iscriviamo un cerchio, e così via.



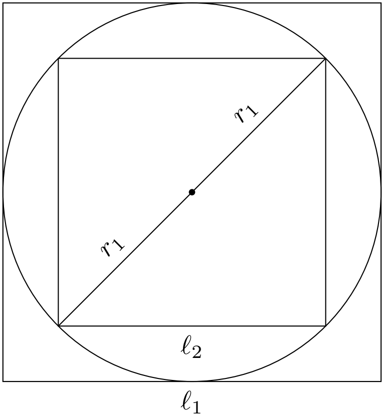
Quanto misura l'area colorata in blu?

Per prima cosa vediamo come costruire la figura. Disegniamo il quadrato esterno di lato $\ell_1 = 1$ ed iscriviamo in esso il cerchio che, per costruzione ha raggio $r_1 = \ell_1/2$.



Iscriviamo ora nel primo cerchio il secondo quadrato. Visto che la sua diagonale è pari al diametro del primo cerchio, il suo lato misura

$$\ell_2 = \frac{2r_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



È ora chiaro come procedere, ottenendo così due successioni definite per ricorrenza

$$\ell_1 = 1, \qquad \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}} r_{n-1} = \sqrt{2} r_{n-1},$$

$$r_1 = \frac{1}{2}, \qquad r_n = \frac{\ell_n}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}.$$

L'area di ciascuna zona blue è ottenuta sottraendo all'area di ciascun quadrato quella del cerchio iscritto, ossia

$$B_1 = \ell_1^2 - \pi r_1^2 = 1 - \frac{\pi}{4},$$

$$B_n = \ell_n^2 - \pi r_n^2 = 2r_{n-1}^2 - \pi \frac{r_{n-1}^2}{2} = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_{n-1}^2.$$

Osserviamo che

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_n^2}{2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_{n-1}^2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto, $\sum_{n\geqslant 1} B_n$ è una serie geometrica e di conseguenza l'area colorata in blu misura

$$\sum_{n\geqslant 1} B_n = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{1-(1/2)} = 2-\frac{\pi}{2}.$$