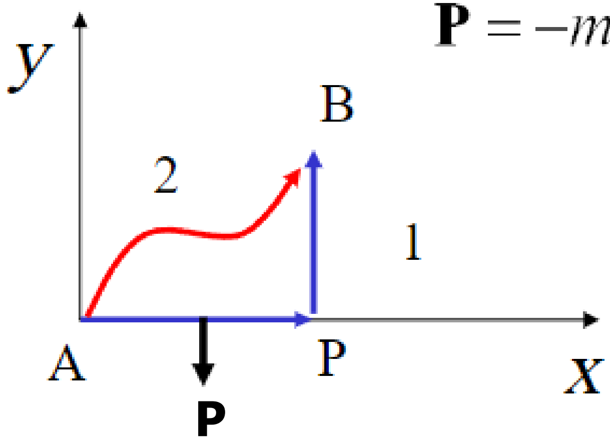
Fisica
per LT Informatica
Università di Ferrara

Lucia Del Bianco

Dip.to di Fisica e Scienze della Terra

LAVORO DELLA FORZA PESO



$$\vec{\mathbf{P}} = -mg\hat{\mathbf{j}}$$

1

$$W_{AP} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{d}}_{AP} = mg\ell_{AP} \cos 90 = 0$$

$$W_{PB} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{d}}_{PB} = mg\ell_{PB} \cos 180 = -mg(y_B - y_A)$$

2

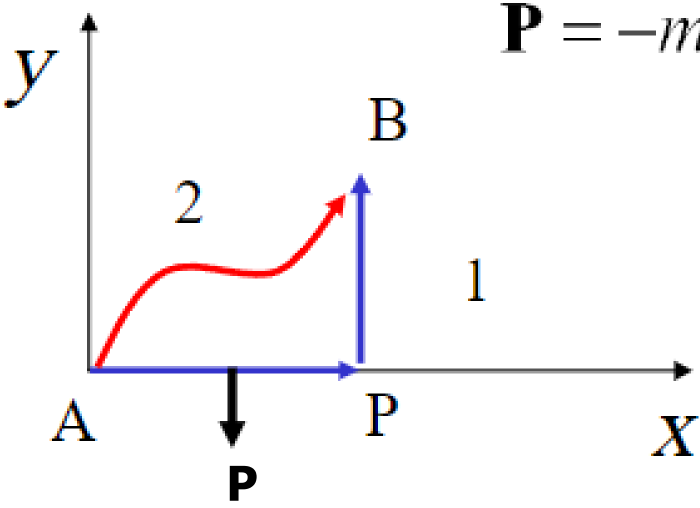
$$W_{AB} = \int_{A,2}^{B} \vec{\mathbf{P}} \cdot d\vec{s} \qquad d\vec{s} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}$$

$$W_{AB} = \int_{A,2}^{B} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \int_{A,2}^{B} -mgdy = -mg\int_{A,2}^{B} dy =$$

$$\boxed{W_{AB} = -mg[y]_{y_A}^{y_B} = -(mgy_B - mgy_A)}$$

LAVORO DELLA FORZA PESO

$$\vec{\mathbf{P}} = -mg\hat{\mathbf{j}}$$

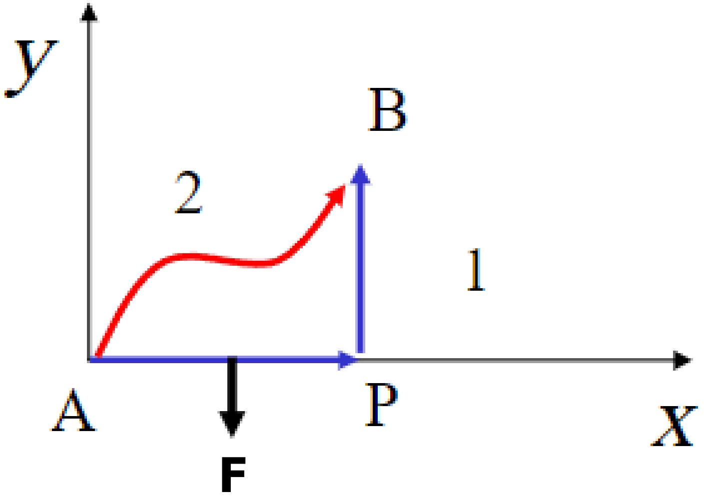


$$W = -(mgy_B - mgy_A)$$

Il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale

LAVORO DI UNA FORZA COSTANTE

Generalizzazione del caso della forza peso



Consideriamo un asse y discorde a **F** (cioè con verso opposto a quello dell'asse y)

$$W = -(F y_B - F y_A)$$

Il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale

LAVORO DELLA FORZA ELASTICA

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

k= costante elastica (positiva)

$$W = \int_A^B -kx\hat{\imath} \cdot dx\hat{\imath} = -k\int_A^B x dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$W = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

Il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale.

LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO DINAMICO

$$\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \hat{u}$$

Versore nella direzione dello spostamento, cioè parallelo e concorde con d**s**

Modulo della forza vincolare normale al piano di appoggio

$$W = \int_A^B \vec{F}_{ad} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d N \hat{u} \cdot d\vec{s} = -\mu_d \int_A^B N ds$$

N = costante

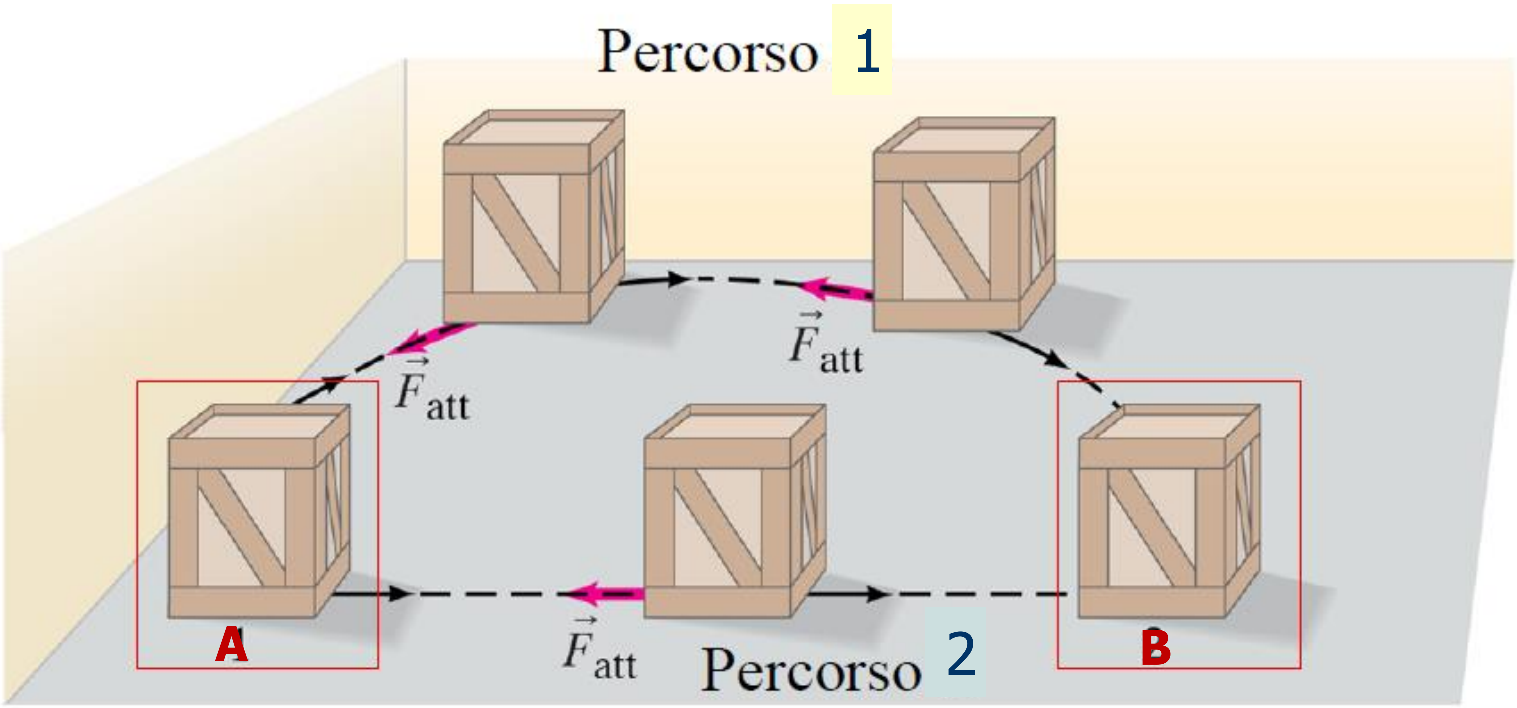
$$W = -\mu_d N \int_A^B ds = -\mu_d N s_{AB}$$

s_{AB} = lunghezza del percorso da A a B

Il lavoro è sempre negativo (*sempre lavoro resistente*)

Il lavoro dipende dal percorso

LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO DINAMICO

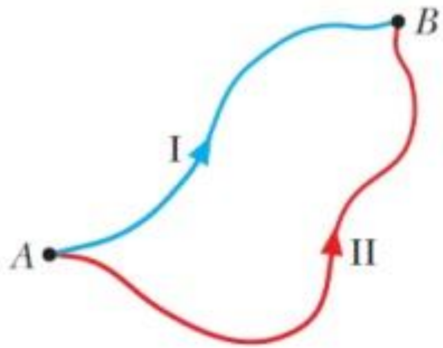


Una cassa viene spinta sul pavimento dalla posizione A alla posizione B lungo due percorsi di lunghezza diversa.
Essendo il verso della forza di attrito (di modulo costante) sempre ***opposto*** a quello dello spostamento, il lavoro da essa compiuto $W_{att} = -F_{att}\, s_{AB}$ è proporzionale alla lunghezza s_{AB} del percorso. Dunque è diverso lungo i due percorsi.

Il lavoro dipende dal percorso e non solo dalla posizione iniziale e finale.

FORZE CONSERVATIVE

Il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dalla posizione iniziale e finale.

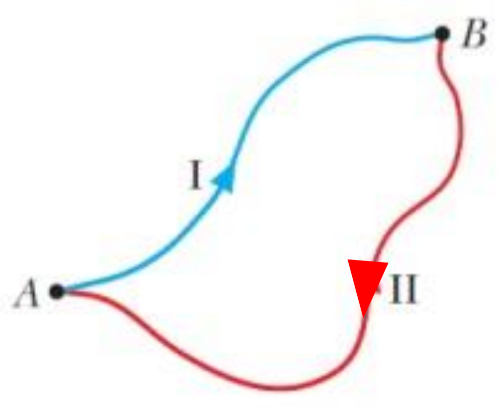


$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s})_{\mathrm{I}} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s})_{\mathrm{II}}$$

▲ **Figura 4.7** Il lavoro calcolato lungo due diverse traiettorie che uniscono due punti è lo stesso se la forza è conservativa.

FORZE CONSERVATIVE

Il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dalla posizione iniziale e finale.



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Per un percorso chiuso ABA

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I + \int_B^A (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I - \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II} = 0$$

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

Il lavoro lungo un percorso chiuso è nullo

ENERGIA POTENZIALE

$$W = \int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Se **F** è conservativa, fissato O (posizione di riferimento), W dipende solo da P (x, y, z)

$$E_p(x, y, z) = E_{p,P} = -\int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Energia potenziale del punto P, associata alla forza considerata

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^O \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$$

Lavoro di una forza conservativa

ENERGIA POTENZIALE

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$$

Lavoro di una forza conservativa

$$\Delta E_p < 0$$

Il lavoro è positivo

$$\Delta E_p > 0$$

Il lavoro è negativo

Per un percorso chiuso
(A ≡ B)

$$E_{p,A} = E_{p,B} \Longrightarrow W = 0$$

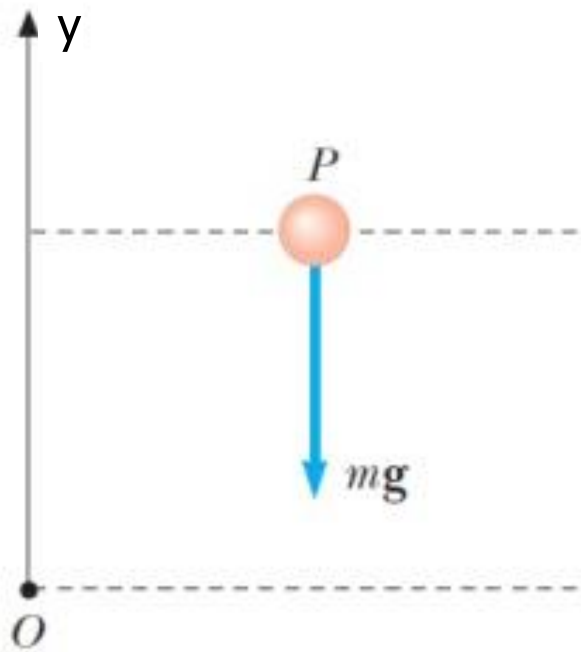
Da una forza conservativa non si può ricavare lavoro in un percorso chiuso

ENERGIA POTENZIALE

Per forze non conservative, non si può introdurre il concetto di energia potenziale.

Non vale la proprietà di invarianza del lavoro rispetto al percorso $\Longrightarrow$ non si può esprimere il lavoro tramite la differenza tra valori di una funzione delle coordinate.

ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA PESO



$$W = -(mgy_B - mgy_A)$$

$$\boxed{E_p = mgy}$$

Spostamento verso il basso $\Rightarrow$ E_p diminuisce
(W > 0, lavoro motore della forza peso)

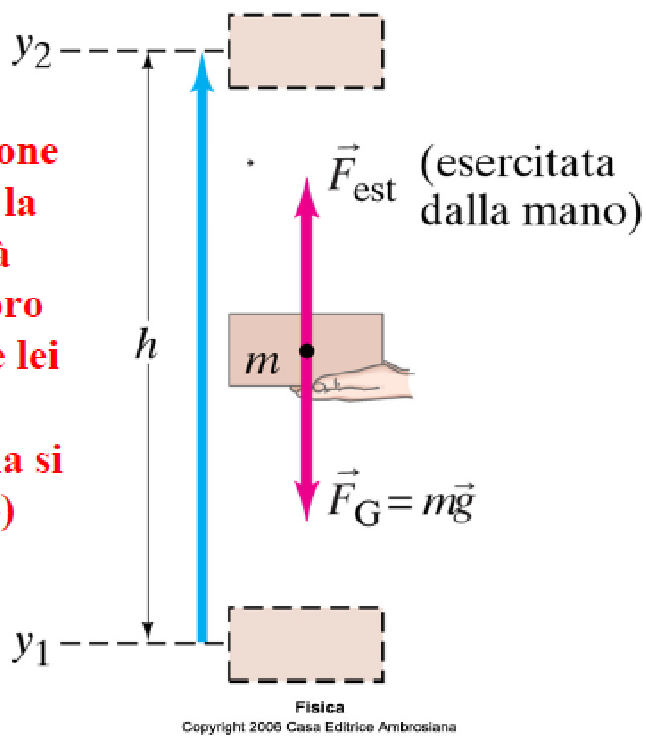
Spostamento verso l'alto $\Rightarrow$ E_p aumenta
(W < 0, lavoro resistente della forza peso)

ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA PESO

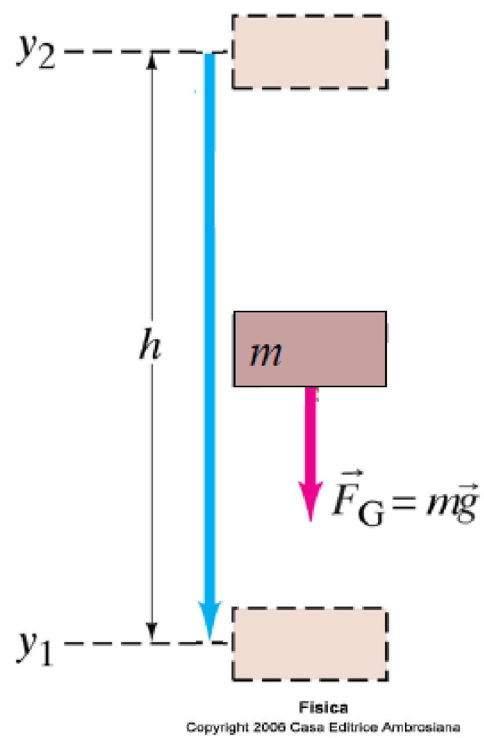
Nell'esempio di sollevamento del mattone, se consideriamo il **processo complessivo di sollevamento e caduta dell'oggetto**, notiamo una particolarità: mentre la **forza esterna** compie un lavoro complessivamente positivo (visto che non è responsabile del processo di caduta ma solo di quello di salita), **la forza di gravità compie un lavoro complessivamente nullo**

$$W_g < 0$$

Mentre il mattone viene sollevato la forza di gravità compie un lavoro negativo (non è lei a causare lo spostamento ma si oppone ad esso)



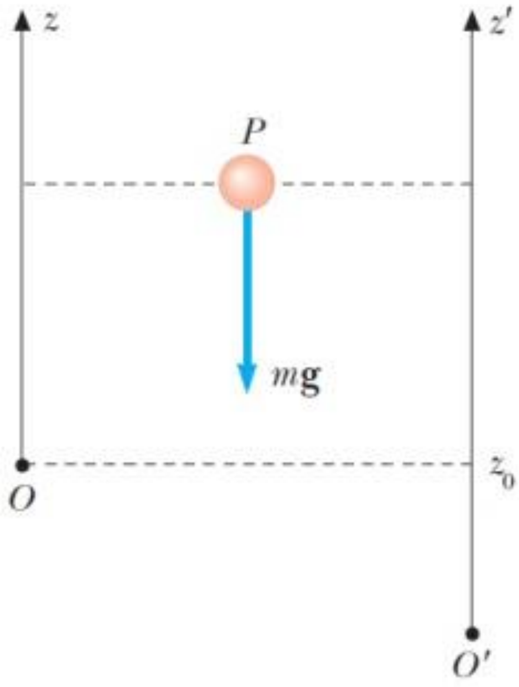
$$W_g > 0$$



$$W_{TOT} = 0$$

Quando il mattone ricade a terra, la forza di gravità compie lo stesso lavoro di prima, ma positivo (è lei che causa lo spostamento). In totale, quindi, il lavoro compiuto dalla forza di gravità è nullo!

ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA PESO



▲ Figura 4.8 Calcolo dell'energia potenziale della forza peso.

$$E_p = mgz$$

$$E'_p = mgz' = mg(z + z_0)$$

$$E'_p = E_p + mgz_0$$

$$W = -\Delta E_p = -\Delta E'_p$$

Ai fini del calcolo del lavoro, **la scelta del punto di riferimento O per il calcolo di E_p è ininfluente**, in quanto la differenza di E_p tra due punti è indipendente da tale scelta.

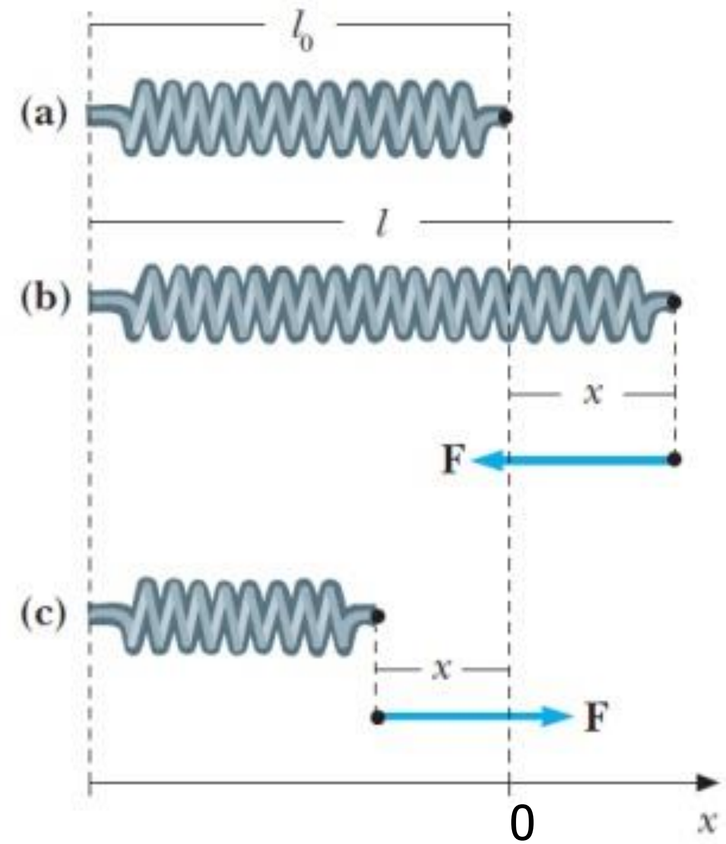
ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA ELASTICA

$$W = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

E_p è tanto maggiore quanto più la molla è deformata rispetto alla sua lunghezza di riposo.

E_p aumenta spostandosi in direzione opposta alla forza e diminuisce per spostamenti concordi alla forze



▲ Figura 2.34 Forza elastica esercitata da una molla a riposo (*a*), in estensione (*b*) e in compressione (*c*).

EdiSES

ENERGIA POTENZIALE

$$W = \int_A^B F_x\, dx = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$$

Lavoro di una forza conservativa diretta lungo x e che determina uno spostamento lungo x

$$\Delta E_p = E_{p,B} - E_{p,A} = -\int_A^B F_x\, dx$$

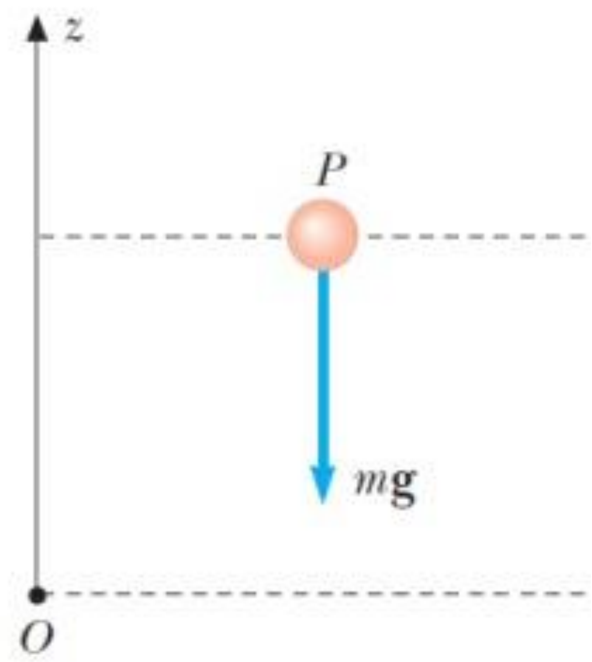
Supponiamo uno spostamento infinitesimo dx $\Rightarrow$ possiamo esprimere la variazione infinitesima di energia potenziale come

$$dE_p = -F_x dx$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

La forza F_x è pari alla derivata rispetto ad x, cambiata di segno, della energia potenziale del sistema

ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA PESO



$$W = -(mgz_B - mgz_A)$$

$$\boxed{E_p = mgz}$$

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dz} = -mg}$$

FORZA PESO

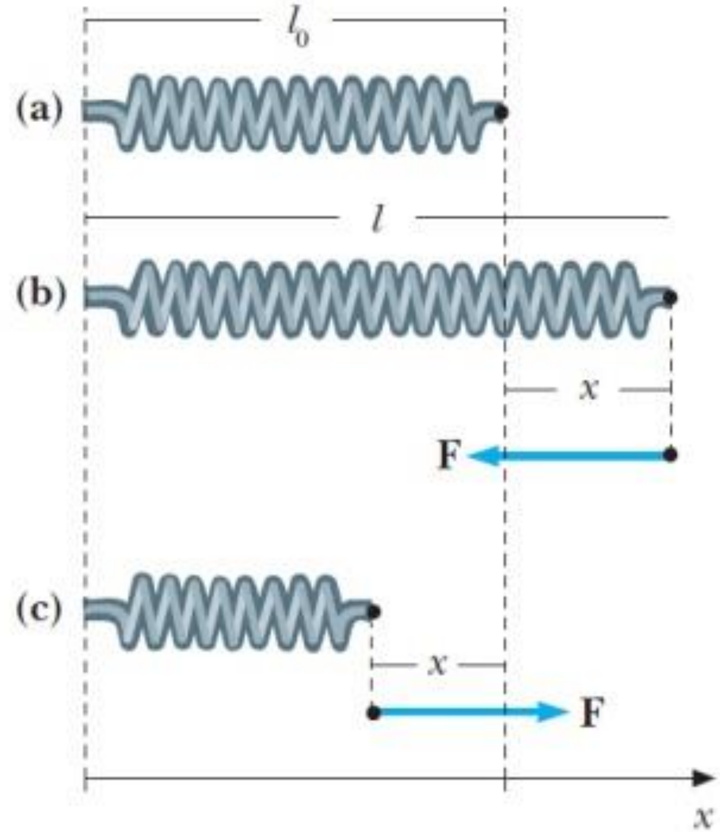
ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA ELASTICA

$$W = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$$

FORZA ELASTICA



▲ **Figura 2.34** Forza elastica esercitata da una molla a riposo (*a*), in estensione (*b*) e in compressione (*c*).

EdiSES

CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA

Se agiscono solo forze conservative, valgono le relazioni

$$\left.\begin{aligned} W &= E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K \\ W &= E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p \end{aligned}\right\} \quad \Delta E_K = -\Delta E_p$$

$$E_{K,A} + E_{p,A} = E_{K,B} + E_{p,B}$$

La somma della energia cinetica e potenziale (**energia meccanica**) di un punto materiale resta costante durante il moto, cioè **si conserva**.

$$E_m = E_K + E_p = \text{costante}$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA

CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA

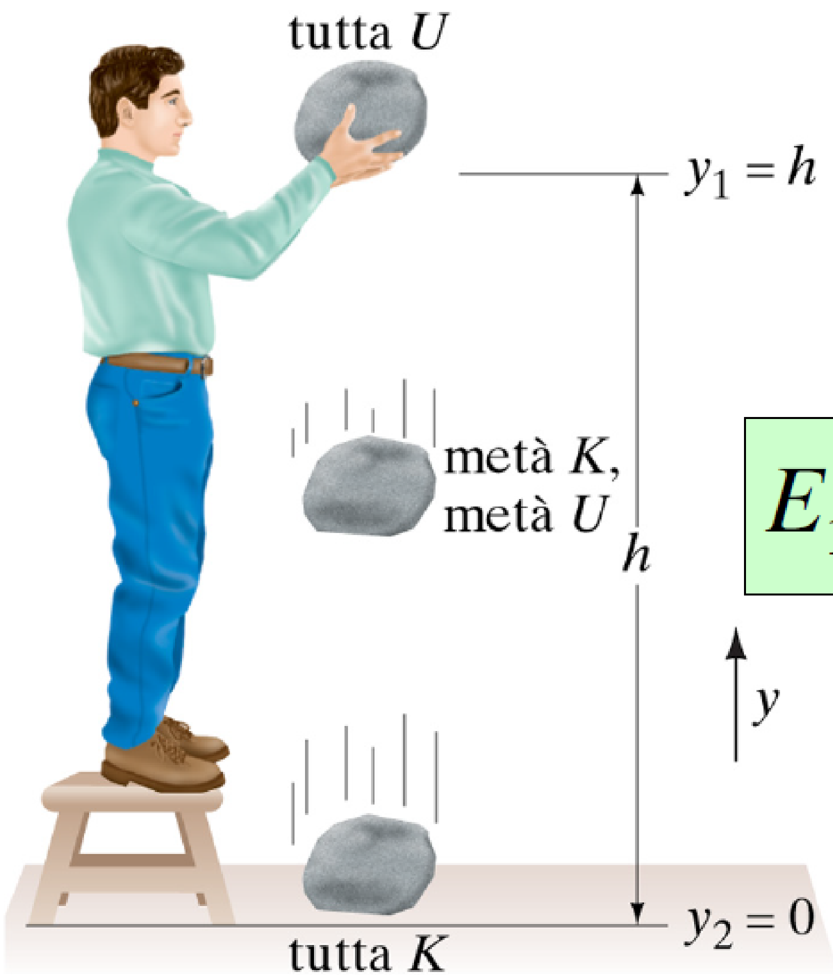
Il risultato appena trovato è chiamato "**Principio di conservazione dell'energia meccanica totale**" e può essere enunciato più precisamente nel seguente modo:

Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l'energia cinetica e l'energia potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, cioè l'energia meccanica totale del sistema, non cambia ma si mantiene costante nel tempo:

$$\Delta E_m = \Delta E_K + \Delta E_p = 0 \quad \rightarrow \quad E_m = \text{costante}$$

CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA

Un semplice esempio di conservazione dell'energia meccanica è dato da una pietra che viene lasciata cadere da un'altezza h sotto l'azione della gravità:



$$\rightarrow E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + mgy_1 = 0 + mgy_1$$

$$\boxed{E_1 = E_2 = E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy}$$

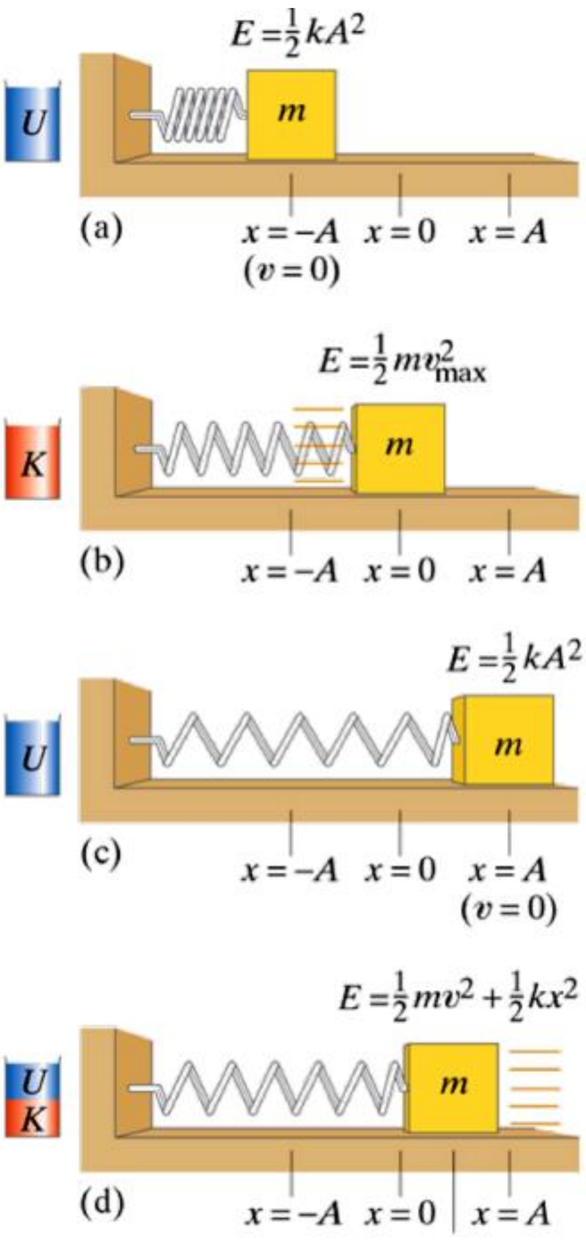
$$\rightarrow E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} + mgy_2 = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} + 0$$

Fisica

CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA
Caso dell'oscillatore armonico

In ogni istante, l'energia totale dell'oscillatore armonico è costante

$$E_m = E_K + E_p = \frac{1}{2}\mathrm{m}v^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k}x^2$$



CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA

Se l'altezza da cui cade la pietra è y_1=h=3.0 m, il **principio di conservazione dell'energia** permette di calcolare facilmente la sua velocità quando arriva ad un'altezza di 1.0 m dal suolo, *senza bisogno di conoscere le equazioni della cinematica*.

Al momento del rilascio la pietra è ferma nella posizione y_1=h=3.0 m, quindi v_1=0. Per trovare la velocità v_2 che la pietra ha quando si trova nella posizione y_2=1.0 m, basta imporre l'uguaglianza dell'energia totale nelle due posizioni:

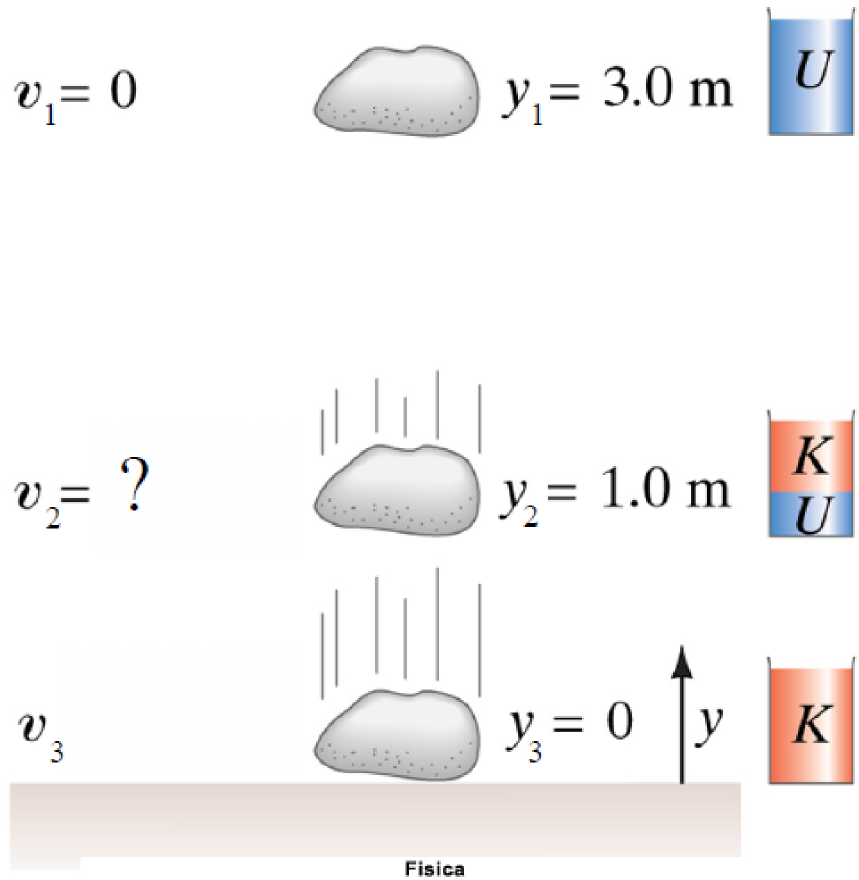
$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2} + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} + mgy_2$$

da cui, considerando che la massa m si semplifica e che v_1=0, avremo immediatamente, risolvendo rispetto a v_2:

$$v_2^{\,2} = 2g(y_1 - y_2) =$$

$$= 2(9.8m/s^2)[(3.0m) - (1.0m)] = 39.2m^2/s^2$$

$$\rightarrow \quad v_2 = \sqrt{39.2m^2/s^2} = 6.3m/s$$



Fisica

Analogamente si trova che v_3 = 7.7 m/s

CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA

Consideriamo ad esempio una **bambina** di massa m che, partendo da ferma ($v_1=0$), si lanci lungo uno **scivolo a spirale** da un'altezza $y_1=h=8.5m$ sopra il livello della piscina, e chiediamoci con quale velocità v_2 arriverà in acqua. Supponiamo che lo scivolo, su cui scorre continuamente dell'acqua, sia **privo di attrito**.

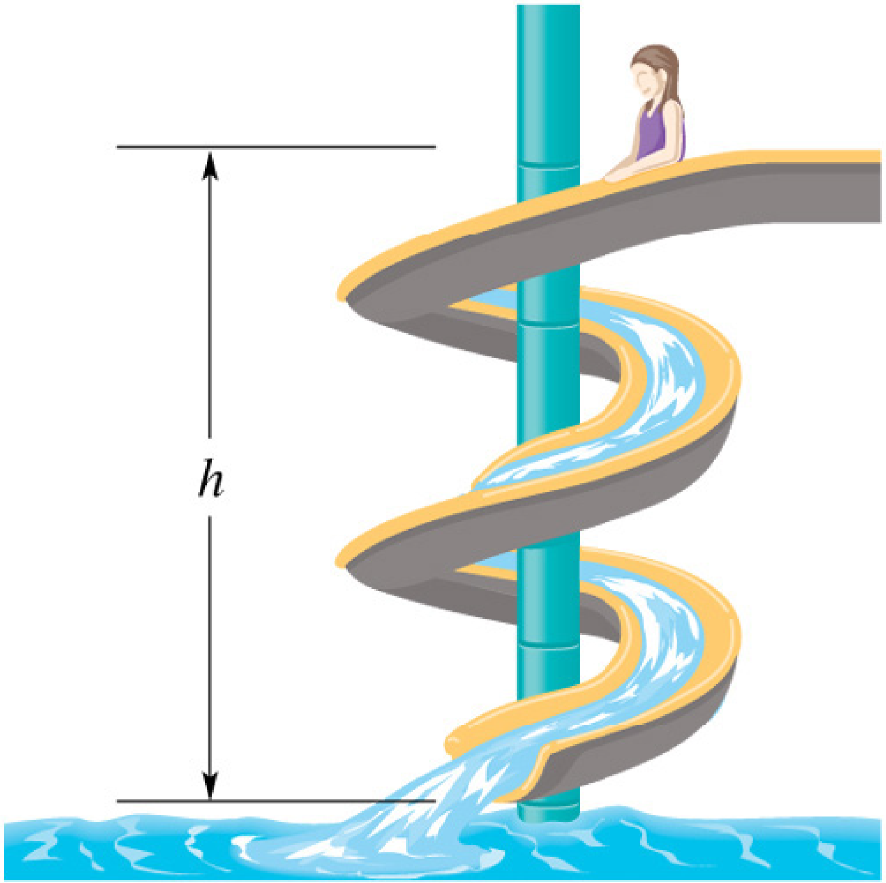
Non conoscendo la **pendenza** dello scivolo non possiamo usare le equazioni della cinematica e comunque il problema è tridimensionale e abbastanza complicato dalla forma dello scivolo.

Dato però che la **forza normale**, essendo sempre perpendicolare allo spostamento, non compie lavoro, l'unica forza che compie lavoro sulla bambina è quella **gravitazionale**, che è conservativa, dunque possiamo usare il principio di conservazione dell'energia come nell'esempio della pietra che cade, con $y_2=0$:

$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2}+mgy_1=\frac{1}{2}mv_2^{\,2}+mgy_2$$

$$\rightarrow v_2^{\,2}=2g(y_1-y_2)=2gy_1 \;\rightarrow\; v_2=\sqrt{2gh}$$

$$\rightarrow\; v_2=\sqrt{2(9.8m/s^2)(8.5m)}=13m/s$$



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

ENERGIA MECCANICA

Se agiscono sia forze conservative che non-conservative

$$W = W_c + W_{nc} = E_{K,B} - E_{K,A}$$

$$W_c = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$W_{nc} = (E_{K,B} + E_{p,B}) - (E_{K,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A}$$

In presenza di forze non-conservative, l'**energia meccanica non** resta costante e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non-conservative.

ENERGIA MECCANICA

$$W_{nc} = (E_{K,B} + E_{p,B}) - (E_{K,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A}$$

In presenza di forze non-conservative, l'**energia meccanica non** resta costante e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non-conservative.

In qualunque processo meccanico agiscono **forze di attrito** che si oppongono al moto (lavoro resistente, $W_{attrito}<0$). Se tutte le altre forze sono conservative, **l'energia meccanica diminuisce** durante il processo.

$$E_{m,A} - |W_{attrito}| = E_{m,B}$$