Il concetto di **prodotto scalare** è stato introdotto **per i vettori del piano e dello spazio**. Si estende ora il concetto a uno spazio vettoriale qualunque.

Definizione di prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale su K.
Si dice che in V è definito un **prodotto scalare** quando è definita una funzione

$$\begin{aligned} <>: \quad & V \times V \rightarrow K \\ & (v, u) \rightarrow < v, u > \end{aligned}$$

in modo che valgono le seguenti proprietà:

1. $< v, u >=< u, v > \quad \forall v, u \in V$ (commutativa)
2. $< v, u + w >=< v, u > + < v, w > \quad \forall v, u, w \in V$ (distributiva rispetto alla somma di vettori)
3. $< v, \alpha u >= \alpha < v, u > \quad \forall v, u \in V, \alpha \in K$

Lo **scalare** $< v, u >$ si dice **prodotto scalare** di v e u.

Se vale anche che

$$< v, u >= 0 \quad \forall u \in V \Rightarrow v = 0$$

il prodotto scalare si dice **non degenere**.

Quando $K = \mathbb{R}$ e oltre alle proprietà precedenti, vale anche che

$$< v, v > > 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0$$

il prodotto scalare si dice **definito positivo.**

Uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ dotato di un prodotto scalare definito positivo viene detto spazio euclideo reale.

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e siano $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $y = (y_1, ..., y_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Si definisce

$$< x, y >= x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y$$

E' una **generalizzazione** del prodotto scalare tra vettori del piano e dello spazio. Si può verificare che valgono le **proprietà caratteristiche** del prodotto scalare:

- $< x, y >= x_1 y_1 + ... + x_n y_n = y_1 x_1 + ... + y_n x_n = < y, x >$ (commutativa)
- dato $z = (z_1, ..., z_n)^T$, si ha (distributiva)

$$\begin{aligned} < x, y + z > &= x_1(y_1 + z_1) + ... + x_n(y_n + z_n) = \\ &= x_1 y_1 + x_1 z_1 + ... + x_n y_n + x_n z_n = \\ &= x_1 y_1 + ... + x_n y_n + x_1 z_1 + ... + x_n z_n = < x, y > + < x, z > \end{aligned}$$

- se $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$< x, \alpha y >= x_1(\alpha y_1) + ... + x_n(\alpha y_n) = \alpha(x_1 y_1 + ... + x_n y_n) = \alpha < x, y >$$

- supponiamo $< x, y >= 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ e proviamo che $x = 0$; infatti se si prende successivamente $y = e_1$, ...,$y = e_n$, si ha

$$< x, e_1 >= x_1 = 0 \quad < x, e_n >= x_n = 0$$

  Dunque $x = 0$. Il prodotto scalare è **non degenere**.

- sia $x \neq 0$, ossia esiste un indice i per cui $x_i \neq 0$; allora

$$< x, x >= x_1^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2 > 0$$

  Il prodotto scalare è **definito positivo**.

Allora $\mathbb{R}^n$ **con tale prodotto scalare è uno spazio euclideo reale.**
Il prodotto scalare così definito viene detto **prodotto scalare canonico** di $\mathbb{R}^n$.

Esempio.

- $\mathbb{R}^2$ è uno spazio euclideo reale e $< (x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T >= x_1x_2 + y_1y_2$.
  $< (2, -3)^T, (1, 5)^T >= 2.1 + (-3).5 = -13$.
- $\mathbb{R}^3$ è uno spazio euclideo reale e $< (x_1, y_1, z_1)^T, (x_2, y_2, z_2)^T >=$
  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  $< (2, -1, 4)^T, (1, 2, 3)^T >= 2.1 + (-1).2 + 4.3 = 12$.

Teorema

Siano V uno spazio euclideo reale.

1. $< v+w, u > = < v, u > + < w, u > \quad \forall v, w, u \in V$
2. $< \alpha v, u > = \alpha < v, u > \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, u \in V$
3. $< 0, v > = < v, 0 > = 0 \quad \forall v \in V$
4. $< v, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n > = \alpha_1 < v, v_1 > + ... + \alpha_n < v, v_n > \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, v, v_i \in V,\ i = 1, ..., n$
5. Se $< w, v > = < u, v >$ per ogni $v \in V$, allora $w = u$

Dimostrazione.

1. $< v+w, u > = < u, v+w >$ (proprietà commutativa)
   $< u, v+w > = < u, v > + < u, w > = < v, u > + < w, u >$;
2. $< \alpha v, u > = < u, \alpha v > = \alpha < u, v > = \alpha < v, u >$;
3. poichè $< v, v > = < 0+v, v > = < 0, v > + < v, v >$, si deduce $< 0, v > = 0$; per la proprietà commutativa, segue $< v, 0 > = 0$;

4. dalle proprietà del prodotto scalare:

$$\begin{aligned}&< v, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n > = \\ &=< v, \alpha_1 v_1 > +...+ < v, \alpha_n v_n >= \\ &= \alpha_1 < v, v_1 > +... + \alpha_n < v, v_n >\end{aligned}$$

5. Se $< w, v >=< u, v >$ per ogni $v \in V$, allora $< w, v > - < u, v >= 0$; dunque $< w - u, v >= 0$ per ogni $v \in V$. Dunque $w - u = 0 \Rightarrow w = u$.

Osservazione

Le proprietà del prodotto scalare

- $< v, u + w > = < u, v > + < v, w > \quad \forall v, u, w \in V$
- $< v, \alpha u > = \alpha < u, v > \quad \forall v, u \in V, \alpha \in K$

e quelle del Teorema precedente

- $< v + w, u > = < v, u > + < w, u > \quad \forall v, u, w \in V$
- $< \alpha v, u > = \alpha < v, u > \quad \forall v, u \in V, \alpha \in K$

dicono che il prodotto scalare è lineare rispetto a ciascuna componente, ossia è **bilineare**.

Definizione

Sia V uno spazio euclideo reale.
Dati $u, v \in V$, si dice che u è **ortogonale** a v se $< u, v >= 0$.
In tal caso si scrive $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Definizione

Sia V uno spazio euclideo reale e sia S un sottoinsieme di V.
Si consideri l'insieme di tutti i vettori di V ortogonali a tutti i vettori di S:

$$S^{\perp} = \{v \in V :< v, s >= 0, \ \forall s \in S\}$$

Tale sottoinsieme di V si dice **complemento ortogonale** di S.

Teorema

Sia V uno spazio euclideo reale e sia S un sottoinsieme di V.
Allora

- $S^{\perp}$ è un sottospazio di V
- $S^{\perp} = [S]^{\perp}$

Dimostrazione.

- Siano $v_1, v_2 \in S^{\perp}$; allora per definizione di $S^{\perp}$, si ha $< v_1, s >= 0, < v_2, s >= 0$ per ogni $s \in S$.
  Dato uno scalare $c \in \mathbb{R}$, allora occorre provare che $cv_1 - v_2$ appartiene a $S^{\perp}$, ossia che **è ortogonale a ogni elemento di** S. Infatti

$$< cv_1 - v_2, s >= c < v_1, s > - < v_2, s >= 0 \quad \forall s \in S$$

- Sia $v \in S^{\perp}$ e sia $w \in [S]$. Allora esistono $s_1, ..., s_k \in S$ e $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$, tali che

$$w = \alpha_1 s_1 + ... + \alpha_k s_k$$

Risulta

$$< v, w >=< v, \alpha_1 s_1 + ... + \alpha_k s_k >= \alpha_1 < v, s_1 > +... + \alpha_k < v, s_k >= 0$$

perchè $< v, s_i >= 0$, essendo $s_i \in S$, $i = 1, ..., k$. Dunque $v \in [S]^{\perp}$ perchè v è ortogonale a ogni elemento di $[S]$: $S^{\perp} \subseteq [S]^{\perp}$.
Se viceversa $v \in [S]^{\perp}$, ossia v è ortogonale a tutti i gli elementi di $[S]$, esso è in particolare ortogonale a tutti gli elementi di S, in quanto $S \subset [S]$. Pertanto $v \in S^{\perp}$ e si può concludere $[S]^{\perp} \subseteq S^{\perp}$.
Pertanto $S^{\perp} = [S]^{\perp}$.

Osservazione: basta l'ortogonalità ad una base!
Se W è un sottospazio vettoriale di V e $\mathcal{B}$ è una base di W, allora $W^{\perp} = [\mathcal{B}]^{\perp}$ e quindi $W^{\perp} = \mathcal{B}^{\perp}$.

$$W = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x+y-3z=0, x-y+z=0\}$$

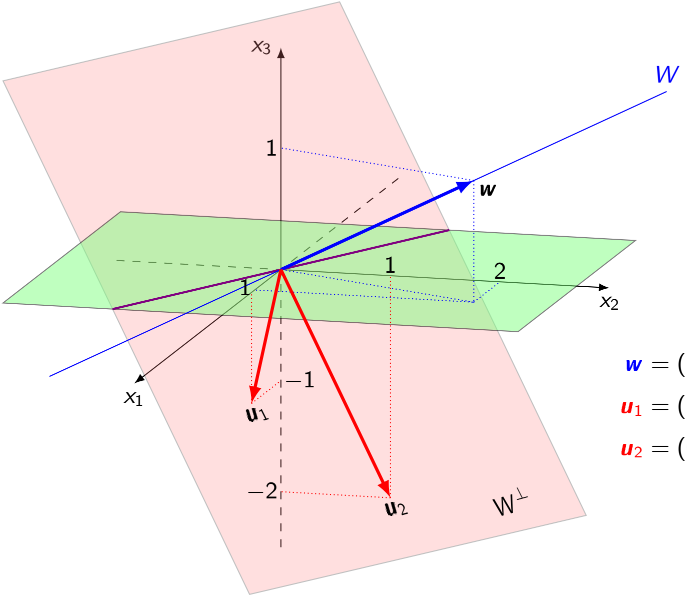
Determiniamo $W^\perp$.
Risulta

$$W = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z=x, y=2x\} = \{(x,2x,x)\} = [(1,2,1)^T]$$

e $(1,2,1)^T$ è una base. Per determinare $W^\perp$, basta trovare tutti i vettori ortogonali a $(1,2,1)^T$:

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 :< (x,y,z)^T, (1,2,1)^T >= 0\} = \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x+2y+z=0\} = \{(x,y,-x-2y)^T, x,y \in \mathbb{R}\} = \\ &= [(1,0,-1)^T, (0,1,-2)^T] \end{aligned}$$

I vettori $(1,0,-1)^T$, $(0,1,-2)^T$ sono una base di $W^\perp$.



$$\boldsymbol{w} = (1, 2, 1)^T$$

$$\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1)^T \in W^{\perp}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, -2)^T \in W^{\perp}$$

Definizione

Sia V uno spazio euclideo reale.
Si dice che $v_1, \ldots, v_n$ è una **base ortogonale** di V se

- $v_1, \ldots, v_n$ una base di V
- $< v_i, v_j >= 0$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$

In altre parole, $v_1, \ldots, v_n$ è una **base ortogonale** di V se e solo se è una base di V formata da vettori **a due a due ortogonali**.

Esempio.
Verificare che $\{(1,2)^T, (-6,3)^T\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$:

- i due vettori sono linearmente indipendenti:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 6\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = 0 = \alpha_2$$

- $< (1,2)^T, (-6,3)^T >= -6 + 6 = 0$

N.B.: La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortogonale, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Coordinate rispetto a una base ortogonale I

Sia V uno spazio euclideo reale.
Siano $v \in V$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonale di V. Allora

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

Tramite il prodotto scalare, si possono calcolare le componenti a_i di v rispetto alla base. Infatti, moltiplicando scalarmente ambo i membri per v_i, si ha:

$$\langle v, v_i \rangle = a_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{=0} + \ldots + a_i \langle v_i, v_i \rangle + \ldots + a_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{=0}$$

e, per l'ortogonalità della base, discende

$$\langle v, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

da cui si ricava

$$a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

Le coordinate di un vettore rispetto a una base ortogonale si dicono **coefficienti di Fourier** di v rispetto agli elementi della base.

Osservazione.
La proiezione ortogonale di un vettore v su un vettore w è dato dal vettore cw ove

$$cw = \frac{< v, w >}{< w, w >} w$$

Infatti il vettore $v - cw$ è ortogonale a w:

$$< v - cw, w > = < v, w > - \frac{< v, w >}{< w, w >} < w, w > = 0$$

Esempio.
Determinare le coordinate del vettore $v = (3, -2)^T$ rispetto alla base ortogonale $\{v_1 = (1, 2)^T, v_2 = (-6, 3)^T\}$ di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{< v, v_1 >}{< v_1, v_1 >} = \frac{< (3, -2)^T, (1, 2)^T >}{< (1, 2)^T, (1, 2)^T >} = -\frac{1}{5} \\ a_2 &= \frac{< v, v_2 >}{< v_2, v_2 >} = \frac{< (3, -2)^T, (-6, 3)^T >}{< (-6, 3)^T, (-6, 3)^T >} = -\frac{24}{45} = -\frac{8}{15} \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{8}{15} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà dei vettori ortogonali

Vettori ortogonali sono sempre linearmente indipendenti.
Infatti se $v_1, .., v_s \in V$ sono ortogonali a due a due, allora considerata la seguente combinazione lineare uguale al vettore nullo, si ha

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_i v_i + ... + a_s v_s = 0$$

Se si moltiplica per v_i ambo i membri, $i = 1, ..., s$, usuando l'ortogonalità si ha

$$\begin{aligned} a_1 \underbrace{< v_i, v_1 >}_{=0} + a_2 \underbrace{< v_i, v_2 >}_{=0} + ... + a_i < v_i, v_i > + ... + a_s \underbrace{< v_i, v_s >}_{=0} &= < v_i, 0 > \\ a_i \underbrace{< v_i, v_i >}_{>0} &= 0 \\ \text{per ogni } i = 1, ..., s \qquad a_i &= 0 \end{aligned}$$

Si dimostra ora che ogni spazio euclideo di dimensione finita ha una base ortogonale.

Teorema

Sia V uno spazio euclideo reale di dimensione finita $n > 0$.
Se W è un sottospazio proprio di V e se $\{w_1, ..., w_m\}$ è una base ortogonale di W, esistono $w_{m+1}, ..., w_n \in V$ tali che $\{w_1, ..., w_m, w_{m+1}, ..., w_n\}$ è una base ortogonale di V.

Dimostrazione.
Data la base $\{w_1, ..., w_m\}$ di W, per il teorema della base incompleta, **è possibile trovare** $n - m$ vettori di V linearmente indipendenti tra loro

$$v_{m+1}, ..., v_n$$

che sono anche linearmente indipendenti a $w_1, ..., w_m$ in modo da avere una base di V.

Si può rendere tale base ortogonale, procedendo nel seguente modo:

- dato $v_{m+1} \in V - W$ (ossia v_{m+1} non è esprimile come combinazione lineare di $w_1, \ldots, w_m$), si pone $W_{m+1} = [w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}]$, di dimensione $m+1$; si costruisce allora w_{m+1} nel seguente modo:

$$w_{m+1} = v_{m+1} - \frac{< v_{m+1}, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \ldots - \frac{< v_{m+1}, w_m >}{< w_m, w_m >} w_m$$

Vale che

$$W_{m+1} = [w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}] = [w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}]$$

e quindi $w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}$ è una base di W_{m+1}.
Dimostriamo che è **una base ortogonale**. I primi m vettori sono ortogonali tra loro; dimostriamo che w_{m+1} è ortogonale a w_i, $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned}
< w_{m+1}, w_i > &= < v_{m+1}, w_i > - \frac{< v_{m+1}, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \underbrace{< w_1, w_i >}_{=0} - \ldots - \\
&- \frac{< v_{m+1}, w_i >}{< w_i, w_i >} < w_i, w_i > - \ldots - \frac{< v_{m+1}, w_m >}{< w_m, w_m >} \underbrace{< w_m, w_i >}_{=0} = \\
&= < v_{m+1}, w_i > - \frac{< v_{m+1}, w_i >}{< w_i, w_i >} < w_i, w_i > = 0
\end{aligned}$$

Pertanto $w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}$ formano una base ortogonale di W_{m+1}.

Teorema della base ortogonale incompleta III

- Se $W_{m+1} = V$ il teorema è dimostrato. In caso contrario si procede in modo analogo considerando $W_{m+2} = [w_1, ..., w_m, w_{m+1}, v_{m+2}]$.

Teorema

Sia V uno spazio euclideo reale di dimensione finita $n > 0$. Allora V ha una base ortogonale.

Dimostrazione.
Segue dal teorema precedente, partendo da $W_1 = [w_1]$, con $w_1 \neq 0$, $w_1 \in V$.
Si può trovare $v_2, v_3, ..., v_n \notin W_1$, linearmente indipendenti e poi trovare $w_2, w_3, ..., w_n$ ortogonali tra loro e a w_1. Si determina così una base ortogonale.

Nella pratica, se $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base qualunque di V, si può costruire una base ortogonale di V seguendo il **procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:**

$$
\begin{aligned}
v_1' &= v_1 \\
v_2' &= v_2 - \frac{< v_2, v_1' >}{< v_1', v_1' >} v_1' \\
v_3' &= v_3 - \frac{< v_3, v_1' >}{< v_1', v_1' >} v_1' - \frac{< v_3, v_2' >}{< v_2', v_2' >} v_2' \\
&\vdots \\
v_n' &= v_n - \frac{< v_n, v_1' >}{< v_1', v_1' >} v_1' - ... - \frac{< v_n, v_{n-1}' >}{< v_{n-1}', v_{n-1}' >} v_{n-1}'
\end{aligned}
$$

Allora $\{v_1', ..., v_n'\}$ è una base ortogonale di V.

Costruire una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ a partire da

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0)^T, (3,2,0)^T, (1,1,-2)^T\}$$

utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.
Si pone $v_1 = (1,0,0)^T$, $v_2 = (3,2,0)^T$, $v_3 = (1,1,-2)^T$.

$$v_1' = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In conclusione $\mathcal{B}' = \{(1,0,0)^T, (0,2,0)^T, (0,0,-2)^T\}$ è la base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ ottenuta da $\mathcal{B}$ mediante il procedimento di Gram-Schmidt.

Definizione di norma

Dato uno spazio euclideo $(V, <\cdot,\cdot>)$, si dice **norma di un vettore** $v \in V$ e si indica con $\|v\|$, lo scalare

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

Il concetto permette di introdurre quello di **distanza** tra due vettori.
Si dice **distanza tra due vettori** $v, w \in V$ e la si indica con $d(v, w)$ lo scalare

$$d(v, w) = \|v, w\|$$

Esempio.
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ dotato del prodotto scalare canonico, trovare la norma del vettore $v = (1, 1, 2, 1, 3)^T$ e la sua distanza dal vettore $w = (2, -1, 1, 0, 1)^T$:

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sqrt{1+1+4+1+9} = \sqrt{16} \\ \|v-w\| &= \|(-1, 2, 1, 1, 2)^T\| = \sqrt{1+4+1+1+4} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^n$ la norma di $v = (x_1, \dots, x_n)^T$ rispetto al prodotto scalare canonico è data da:

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$ **Teorema di Pitagora in n dimensioni**

Sia V uno spazio euclideo reale.

- $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$
  Infatti il prodotto scalare è definito positivo:
  $\|v\| = \sqrt{< v, v >} \geq 0$ e, se $v \neq 0$, $\|v\| = \sqrt{< v, v >} > 0$.
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall \alpha \in R, \forall v \in V$
  Infatti $\|\alpha v\| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha^2 < v, v >} = |\alpha| \sqrt{< v, v >} = |\alpha| \|v\|$
- $| < v, w > | \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V$ (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)
  Se $v = 0$ la diseguaglianza è vera perchè diventa l'identità $0 = 0$.
  Se $v \neq 0$, preso $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$< \lambda v - w, \lambda v - w > \geq 0$$

Sviluppando si ha

$$\lambda^2 < v, v > -2\lambda < v, w > + < w, w > \geq 0$$

Questo vale per ogni λ se e soltanto se il discriminante del trinomio in λ è non positivo (essendo $< v, v >> 0$), cioè

$$\frac{\Delta}{4} = < v, w >^2 - < v, v >< w, w > \leq 0$$

da cui si ottiene

$$| < v, w > | \leq \|v\| \|w\|$$

Si noti che il segno di uguaglianza vale se e solo se $\lambda v - w = 0$, ossia se v e w sono linearmente dipendenti.

- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$ (diseguaglianza triangolare)
  Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= < v + w, v + w > = < v, v > + 2 < v, w > + < w, w > = \\
&= \|v\|^2 + 2 < v, w > + \|w\|^2 \leq \\
&\leq \|v\|^2 + 2| < v, w > | + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2
\end{aligned}$$

La diseguaglianza di Cauchy-Schwartz permette di affermare ($v, w \neq 0$)

$$-1 \leq \frac{< v, w >}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

Questo giustifica la seguente definizione.

Definizione

Se dice **angolo tra due vettori** non nulli v, w di uno spazio euclideo reale V l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{< v, w >}{\|v\|\|w\|}$$

Versore

Un vettore non nullo $v \in V$ si dice **vettore unità o versore** se $\|v\| = 1$.

Un qualunque vettore $w \in V$, $w \neq 0$ si può **normalizzare**, ossia si può trovare un versore con la stessa direzione e verso di w: esso è dato da $\frac{w}{\|w\|}$.
Infatti si ha

$$\left\|\frac{w}{\|w\|}\right\| = \frac{1}{\|w\|}\|w\| = 1$$

Esempio. Dato $v = (2, -5)^T$, si ha $\|v\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.
Il versore associato a v è dato da $\frac{v}{\|v\|} = (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}})^T$. Infatti la sua norma vale 1.

Definizione

Sia V uno spazio euclideo reale di dimensione $n > 0$.
Si dice che $\{v_1, ..., v_n\}$ è una **base ortonormale** di V se è ortogonale ed è costituita da versori, ossia vale che

$$< v_i, v_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, ..., n$$

ove δ_{ij} si dice simbolo di Kronecker.

Esempio.
La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale.

Verificare che $\mathcal{B} = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})^T, (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})^T\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$:
Infatti:

1. $\{v_1, v_2\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ perchè sono due generatori linarmente indipendenti;
2. $< v_1, v_2 >= 0$, dunque si tratta di una base ortogonale;
3. $\|v_1\| = \sqrt{1/5 + 4/5} = 1$ e $\|v_2\| = \sqrt{4/5 + 1/5} = 1$, dunque si tratta di versori.

Teorema

Sia V uno spazio euclideo reale di dimensione finita $n > 0$. Allora V ha una base ortonormale.

Dimostrazione.
V possiede almeno una base ortogonale $\{v_1, ..., v_n\}$. Normalizzando ogni elemento della base, ossia considerando $\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, ..., \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$, si ottiene una base ortonormale.

Esempio.
Data una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,1,0)^T, (1,-1,0)^T, (0,0,1)^T\}$, è sempre possibile renderla ortonormale.
Infatti basta dividere ogni elemento per la sua norma:

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, (0,0,1)^T \right\}$$

Proprietà delle basi ortonormali I

Usare le basi ortonormali, porta numerosi **vantaggi**: ci si può ricondurre a lavorare su $\mathbb{R}^n$, usando i coefficienti di Fourier di un vettore.
Infatti, dato un vettore v, le sue coordinate rispetto a una base ortonormale $\{v_1, ..., v_n\}$ sono date da $< v, v_i >$.

Teorema

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormale di V spazio euclideo reale.

1. Se $v \in V$, allora $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$, con $x_i =< v, v_i >$, $i = 1, ..., n$
2. Se $v, w \in V$ e $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + ... + y_n v_n$, allora $< v, w >= x_1 y_1 + ... + x_n y_n$, ossia $< v, w >=< (x_1, ..., x_n)^T, (y_1, ..., y_n)^T >$.
3. $v \perp w \Leftrightarrow (x_1, ..., x_n)^T \perp (y_1, ..., y_n)^T$ e $\|v\| = \|(x_1, ..., x_n)\|$

Dimostrazione.

1. x_i sono i coefficienti di Fourier, ossia

$$x_i = \frac{< v, v_i >}{< v_i, v_i >}$$

ma $< v_i, v_i >= 1$, $i = 1, ..., n$; pertanto $x_i =< v, v_i >$.

2. Per il prodotto scalare, vale che

$$
\begin{aligned}
< v, w > &= < x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n, y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n >=< \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j >= \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < v_i, v_j >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \\
&= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n =< (x_1, \ldots, x_n)^T, (y_1, \ldots, y_n)^T >
\end{aligned}
$$

   Ciò significa che il prodotto scalare in V può essere ricondotto a quello in $\mathbb{R}^n$.
3. Segue immediatamente dal punto precedente: $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|$.

Esempio

Data la base ortonormale

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, (0,0,1)^T \right\}$$

le coordinate di un vettore $v = (x, y, z)^T_{\mathcal{C}}$ rispetto a tale base sono date da:

$$\begin{aligned}
< (x,y,z)^T, v_1 > &= < (x,y,z)^T, (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T >= \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\
< (x,y,z)^T, v_2 > &= < (x,y,z)^T, (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T >= \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\
< (x,y,z)^T, v_3 > &= < (x,y,z)^T, (0,0,1)^T >= z
\end{aligned}$$

$$v = \frac{x+y}{\sqrt{2}} v_1 + \frac{x-y}{\sqrt{2}} v_2 + z v_3$$

Per $v = (1,1,2)^T_{\mathcal{C}} = (\sqrt{2}, 0, 2)^T_{\mathcal{B}}$, si ha

$$\|v\| = \sqrt{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + z^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$$

Teorema

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormale di V spazio euclideo reale. Sia $\mathcal{B}' = \{v'_1, ..., v'_n\}$ un'altra base ortonormale di V. La matrice di cambiamento di base è data da

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V) = (< v'_i, v_j >) \quad i, j = 1, ..., n$$

ossia se $(x_1, ..., x_n)$ sono le coordinate di $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e $(x'_1, ..., x'_n)$ sono le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$, vale che

$$(x'_1, ..., x'_n)^T = (< v'_i, v_j >)(x_1, ..., x_n)^T$$

ossia $x'_i = \sum_{j=1}^{n} < v'_i, v_j > x_j$.

Dimostrazione.
Se si considera $i_V : (V, \mathcal{B}) \to (V, \mathcal{B}')$, con $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi ortonormali, allora la matrice associata al cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V) = \begin{pmatrix} < v'_1, v_1 > & < v'_1, v_2 > & ... & < v'_1, v_n > \\ < v'_2, v_1 > & < v'_2, v_2 > & ... & < v'_2, v_n > \\ & ... & ... & \\ < v'_n, v_1 > & < v'_n, v_2 > & ... & < v'_n, v_n > \end{pmatrix}$$

Segue che se $(x_1, \ldots, x_n)^T_{\mathcal{B}}$ sono le coordinate di $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)^T_{\mathcal{B}'}$ sono le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$, allora

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

ossia $x'_i = \sum_{j=1}^{n} < v'_i, v_j > x_j$.

Osservazione. Si osservi che la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, $N = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V)$, ha l'inversa che è associata al cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$: $N^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_V)$. In questo caso, si ha

$$N^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_V) = \begin{pmatrix} < v_1, v'_1 > & < v_1, v'_2 > & \ldots & < v_1, v'_n > \\ < v_2, v'_1 > & < v_2, v'_2 > & \ldots & < v_2, v'_n > \\ & \ldots & \ldots & \\ < v_n, v'_1 > & < v_n, v'_2 > & \ldots & < v_n, v'_n > \end{pmatrix} = N^T$$

ossia l'inversa di N è uguale alla sua trasposta: $N^{-1} = N^T$.
Questo si esprime dicendo che N è una **matrice ortogonale**.

Siano $\mathcal{B} = \{(1,0)^T, (0,-1)^T\}$ e $\mathcal{B}' = \{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T, \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)^T\}$ basi ortonormali di $\mathbb{R}^2$.

- la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è data:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(i) = \begin{pmatrix} < v_1', v_1 > & < v_1', v_2 > \\ < v_2', v_1 > & < v_2', v_2 > \end{pmatrix} =$$

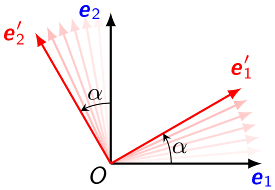
$$= \begin{pmatrix} < \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T, (1,0)^T > & < \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T, (0,-1)^T > \\ < \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)^T, (1,0)^T > & < \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)^T, (0,-1)^T > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Segue che se $v = x(1,0)^T + y(0,-1)^T$, allora le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}'$ si ottengono come:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice N associata al cambiamento di base è una matrice ortogonale, ossia una matrice tale che l'inversa coincide con la trasposta.

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} \begin{pmatrix} n_{22} & -n_{12} \\ -n_{21} & n_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = N^T$$



La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ a $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$, ottenuta attraverso una rotazione piana di angolo α in senso antiorario, è:

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e'_1\rangle & \langle e_2, e'_1\rangle \\ \langle e_1, e'_2\rangle & \langle e_2, e'_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\pi/2-\alpha) \\ \cos(\pi/2+\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Teorema

Sia V uno spazio euclideo reale di dimensione finita $n > 0$ e sia W un sottospazio di V.
Allora vale che

$$V = W \oplus W^{\perp} \text{ e } \dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$$

Dimostrazione.

- Se $W = V$, allora $W^{\perp} = \{0\}$ e il teorema è provato.
- Se $W = \{0\}$, allora $W^{\perp} = V$ e anche in questo caso il teorema è provato.
- Sia W un sottospazio proprio di V e sia $\{w_1, ..., w_m\}$ una base ortogonale di W $(1 \leq m \leq n)$. Per il teorema della **base ortogonale incompleta**, esistono $n - m$ vettori $w_{m+1}, ..., w_n$ tali che $\{w_1, ..., w_n\}$ è una base ortogonale di V.
  Posto $S = \{w_{m+1}, ..., w_n\}$, $V = W + [S]$.
  Proviamo allora che risulta $W^{\perp} = [S]$.
  Sia $w \in W^{\perp}$. Poichè $w \in V$, allora

$$w = x_1 w_1 + ... + x_m w_m + x_{m+1} w_{m+1} + ... + x_n w_n$$

Essendo $w \in W^{\perp}$, w è ortogonale a tutti gli elementi di W, dunque $x_1 =< w, w_1 >= 0, ..., x_m =< w, w_m >= 0$.
Allora

$$w = x_{m+1} w_{m+1} + ... + x_n w_n \in [S]$$

Dunque $W^{\perp} \subset [S]$.
Viceversa, sia $w = x_{m+1} w_{m+1} + ... + x_n w_n \in [S]$ e dimostriamo che $w \in W^{\perp}$, ossia che w è ortogonale a tutti gli elementi di W. Basta dimostrare che w è ortogonale a tutti gli elementi della base di W.
Risulta

$$\begin{aligned} < w, w_i > &= < x_{m+1} w_{m+1} + ... + x_n w_n, w_i >= \\ &= x_{m+1} < w_{m+1}, w_i > + ... + x_n < w_n, w_i >= 0 \quad i = 1, ..., m \end{aligned}$$

Quindi $w \in W^{\perp}$.
Allora si è dimostrato che $V = W + W^{\perp}$ e poichè $W \cap W^{\perp} = [w_1, ..., w_m] \cap [w_{m+1}, ..., w_n] = \{0\}$, è anche $V = W \oplus W^{\perp}$. Dalla relazione di Grassman, si ha $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$.