45. $S = \{(1,2,3)\ (-1,0,2)\ (k,0,2)\}$

Determinare i valori di K per cui S è una base di $\mathbb{R}^3$. Trovare una base e la dim di $[S]$ nei diversi casi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ K & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = -2(-2-2K) = 4+4K$$

$\det A = 0$ per $K = -1$

$K \neq -1 \Rightarrow$ S è base, dim S = 3

$K = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è una base, dim S = 2

Per quali valori di α, $(\alpha, 2, 1) \in [S]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ K & 0 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

se $K \neq -1$ per ogni valore di α

se $K = -1$, si valuta

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2(-1-2\alpha) - 2(2+3) = 2 + 4\alpha - 10 = -8 + 4\alpha = 0$$

$\alpha = 2$

Per $\left.\begin{matrix} \alpha = 2 \\ k = -1 \end{matrix}\right\}$, $(\alpha, 2, 1) \in [S]$

46. Calcolare al variare di $\lambda \in R$ il rango della matrice A

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$ $\quad r(A) \leq 3$

Si osserva

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad r(A) \geq 2$$

$$\det A = -(2+2) - \lambda(-\lambda - 3)$$
$$= -4 + \lambda^2 + 3\lambda = \lambda^2 + 3\lambda - 4$$
$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -4 \Rightarrow r(A) = 3$

per $\lambda = 1$ o $\lambda = -4 \Rightarrow r(A) = 2$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad r(A) \leq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1-6) + (4+3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 6) + (-4-3) = \lambda - 1$$

per $\lambda \neq 1$, $r(A) = 3$

per $\lambda = 1$, $r(A) = 2$

47. Dire per quali valori di λ, si ha $r(A) = r(A, B)$, ove

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A, B) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A) \geq 2$ $\left(\text{perché } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$

$\det A = \lambda(-3) + (1 + 2) = -3\lambda + 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda \neq 1, & r(A) = 3 \\ \lambda = 1, & r(A) = 2 \end{cases}$$

$r(A, B) = 3$ per $\lambda \neq 1$

Per $\underline{\lambda = 1}$, occorre calcolare

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{-}1 + 1 = 0$$

$\Rightarrow r(A, B) = 2$