8. Sia $f: R^3 \to R^4$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) =$
$= (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_2 - x_3)$.
Trovare Imm f e Ker f e le dimensioni dei due sottospazi.

$$f: R^3 \to R^4$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Imm} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Per trovare dim Imm f devo verificare quanti generatori sono linearmente indipendenti.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \dim \text{Imm} f = 2$$

$$\text{Imm} f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Si risolve il sistema omogeneo.
Si possono eliminare terza e quarta equazione

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \dim \operatorname{Ker} f = 1$$

Alla luce di quanto visto sulla corrispondenza biunivoca tra matrici e applicazioni lineari tra R^n e R^m, si possono riconsiderare gli esercizi precedenti:

6. $f: R^3 \longrightarrow R^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ matrice 4×3

Imm f = sottospazio generato dalle colonne di A

dim Imm f = rango $(A) = 2$

Ci sono due colonne di A linearmente indipendenti, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed esse sono una base per Imm f.

$$\text{Ker } f = \text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad Ax = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

7. $f: R^4 \to R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \left[f(e_1) \;\; f(e_2) \;\; f(e_3) \;\; f(e_4) \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{matrice } 3 \times 4$$

$$\text{rango}(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \qquad \text{rango}(A) = 2$$

$$\text{Imm } f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad \dim \text{Imm } f = 2$$

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : Ax = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad \dim \text{Ker } f = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

8. $f : R^3 \to R^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \left[f(e_1) \;\; f(e_2) \;\; f(e_3) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ matrice 4×3

rango di $A \leq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

$$\text{Imm } f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$ $\dim \text{Imm } f = 2$

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : Ax = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\; \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$ $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } A = 1$

14. Sia $f: R^2 \to R^3$ tale che $f(x_1, x_2) =$

$= (x_1 + 2x_2,\ 3x_2,\ x_1)$

Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche:

$$A = \left[f(e_1) \quad f(e_2) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Sia $f: R^4 \to R^3$ tale che

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + x_4)$

Trovare Imm f e la dimensione del sottospazio. Trovare Ker (f) e la dimensione del sottospazio.

$f: R^4 \to R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$A = \left[f(e_1) \; f(e_2) \; f(e_3) \; f(e_4) \right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si cerca $r(A)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \qquad r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0$$

$r(A) = 3$

$$\text{Imm} f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \dim \text{Imm} f = 3$$

$$\text{Imm} f = R^3$$

L'applicazione è suriettiva.

$$\ker f = \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : Ax = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema non singolare} \quad x_1 = x_2 = x_4 = 0$$

$$\ker A = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad \dim \ker f = 1$$

l'applicazione non è iniettiva.

12. Sia $f: R^3 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f: R^3 \to R^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+3y+4z \\ 2x+y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix}$$

Trovare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di R^3, la dimensione di Im f, una base di Ker f. Per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$ appartiene all'Im f? L'applicazione è iniettiva o suriettiva?

$$A = \left[f(e_1) \; f(e_2) \; f(e_3) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ matrice 3×3

Si cerca $r(A)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 - 3 \cdot 5 + 4 \; 5 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \qquad r(A) = 2$$

$$\text{Im} f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$ $\dim \text{Im} f = 2$

$\text{Im} f \subsetneq R^3$

l'applicazione non è suriettiva

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : A x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -4z \\ 2x + y = -3z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4z & 3 \\ -3z & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-4z + 9z}{-5} = -z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3z + 8z}{-5} = -z$$

Soluzioni : $z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1$ l'applicazione non è iniettiva.

Verifico se $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} \in \operatorname{Imm} f$, trovando al variare di h il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & h \end{pmatrix}$, costituita dalla base di $\operatorname{Imm} f$ e dal vettore. Se $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} \in \operatorname{Imm} f$, il rango della matrice deve rimanere uguale alla dim Im f = 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & h \end{vmatrix} = h - 6 - 3(2h+3) + 2.5$$

$$= h - 6h - 9 + 4 = -5h - 5$$

Per $h = -1$, il determinante è 0, il rango non aumenta e $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$

Se $h \neq -1$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} f$.

11. Sia $f: R^2 \to R^3$ una applicazione lineare iniettiva. Mostrare che Im f ha dimensione 2.

Per il teorema dimensionale

$$\dim R^2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

f iniettiva

$$\Rightarrow \quad 2 = 0 + \dim \operatorname{Im} f$$

$$\Rightarrow \quad \dim \operatorname{Im} f = 2.$$

10. Sia $tr : M_n(R) \longrightarrow R$ t.c.

$tr(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$ (traccia di una matrice di ordine n)

Trovare dim Im tr e dim Ker tr

Si ricorda che la dimensione dell'insieme delle matrici di ordine n è n^2.

$$\dim M_n(R) = \dim \operatorname{Im} tr + \dim \operatorname{Ker} tr$$

Siccome $\operatorname{Im} tr \equiv \mathbb{R}$, $\dim \operatorname{Im} tr = 1$

$$n^2 - 1 = \dim \operatorname{Ker}(tr)$$

Ker(tr) è il sottospazio delle matrici a traccia nulla.

13. Sia $f: R^4 \to R^4$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 0$, $f(e_3) = e_2$, $f(e_4) = e_3$.
Trovare dim Im f, base di Ker f.
Scrivere la matrice che rappresenta f^2 rispetto alla base canonica e determinare dim Im(f^2) e una base di Ker(f^2).

$f: R^4 \longrightarrow R^4$

$$A = \left[f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f è l'applicazione data da

$$f(x, y, z, t) = (x, z, t, 0) \qquad \left(\text{infatti } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$r(A) = 3$

dim Im $f = 3$

$$\text{Ker} f = \text{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

dim Ker $f = 1$.

Matrice che rappresenta $f^2 = f \circ f$

$$B = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Im} B = 2 \qquad (r(B) = 2)$

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Im} f^2$

$$\operatorname{Ker} B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] ; \dim \operatorname{Ker} B = 2$$

$\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2$

15. Sia $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3)$

Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche -

Trovare dim Im f, dim Ker f e le basi dei due sottospazi.

$$A = \left[f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)\ f(e_4)\ f(e_5) \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matrice } 3 \times 5$$

$r(A) = 3$

dim Im $f = 3 \Rightarrow f$. suriettiva

$\mathrm{Im} f = [e_1\ e_2\ e_3]$

$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

dim Ker $f = 5 - 3 = 2$

$$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+3z \\ x+y+z \\ x+2y-z \\ y+kz \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Imm} f$.
Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

$$A = \left[f(e_1) \ f(e_2) \ f(e_3) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$r(A) \leq 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$r(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-3) + 3(1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = 1(k-1) + 3(1) = k+2$$

Per $k \neq -2$, $r(A) = 3$

Per $k = -2$, $r(A) = 2$

Si esegue la discussione nei due casi

Per $\underline{\underline{k \neq -2}}$, $\dim \operatorname{Imm} f = 3 \ \underline{< 3}$ f non è suriettiva

$$\operatorname{Imm} f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \right]$$

$\dim \operatorname{Ker}(f) = 3 - 3 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow f$ è iniettiva

Per $K=-2$, $\dim \operatorname{Imm} f = 2 < 4$

$\operatorname{Imm} f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ f non è suriettivo

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$

$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ x + y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = 2z \end{cases}$

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

f non è ~~i~~iniettiva.

In sintesi

$K \neq -2$: $\dim \operatorname{Im} f = 3$ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$
f iniettivo ma non suriettivo

$K = -2$: $\dim \operatorname{Imm} f = 2$ $\dim \operatorname{Ker} f = 1$
f non iniettivo e non suriettivo

(b) Se $K = -2$, per quali valori di α il vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Imm} f$?

Per $K = -2$, $\dim \operatorname{Imm} f = 2$. Occorre controllare per quali valori di α

la matrice le cui colonne sono una base di Imm f e il vettore w ha rango 2:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 2 + 1 = \alpha - 1 = 0$$

Per $\alpha = 1 \Rightarrow w \in \text{Imm} f \qquad (r(C) = 2)$

per $\alpha \neq 1 \Rightarrow w \notin \text{Imm} f \qquad (r(C) = 3)$

Sia dato lo spazio dei polinomi.

Siano

$$f(x) = 2$$
$$g(x) = 1+x$$
$$h(x) = x+x^2$$
$$K(x) = 3+2x - x^2$$

Trovare la dimensione del sottospazio generato da f, g, h, K.

f, g, h, k sono elementi dell'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a 2, che è un sottospazio di dimensione 3 isomorfo a R^3

$$\mathbb{P}_2(x) \longrightarrow R^3$$
$$1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nell'isomorfismo,

$$f \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per trovare la dimensione del sottospazio generato dai 4 polinomi si trova la dimensione di

$$S = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad r(D) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad r(D) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad r(D) = 3$$

$\dim S = 3$

Il sottospazio di $P_2(x)$ generato da f, g, h, k ha dimensione 3 e f, g, h sono una base.