Definizione di applicazione lineare

Siano V e W due spazi vettoriali sullo *stesso* campo K.
Una applicazione $f : V \to W$ si dice **applicazione lineare o omomorfismo** se

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall\ v_1, v_2 \in V$ (proprietà additiva)
2. $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall\ v \in V, \alpha \in K$ (proprietà di omogeneità)

Osservazione

Le operazioni al I membro sono effettuate in V, mentre quelle al II membro sono effettuate in W.

Siano V e W spazi vettoriali su K.

- La funzione $\mathbf{0} : V \to W$ tale che $\mathbf{0}(v) = \mathbf{0}$, $\forall\ v \in V$ è una funzione lineare.

$$\mathbf{0}(v_1 + v_2) \overbrace{=}^{\text{per def.}} \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}(v_1) + \mathbf{0}(\mathbf{v_2})$$

$$\mathbf{0}(\alpha v) \overbrace{=}^{\text{per def.}} \mathbf{0}_W = \alpha \mathbf{0}_W = \alpha \mathbf{0}(v)$$

  Viene detta **funzione nulla**.

- La funzione $i : V \to V$ tale che $i(v) = v$, $\forall\ v \in V$ è una funzione lineare.

$$i(v_1 + v_2) \overbrace{=}^{\text{per def.}} v_1 + v_2 = i(v_1) + i(v_2)$$

$$i(\alpha v) \overbrace{=}^{\text{per def.}} \alpha v = \alpha i(v)$$

  Viene detta **funzione identità**; viene indicata anche con i_V oppure con 1.

- La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) = (x, y, x + 2y)$ è una funzione lineare.

  Si può verificare nel seguente modo.
  Posto $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta:

$$
\begin{aligned}
& f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f((\underbrace{x_1 + x_2}, \underbrace{y_1 + y_2})) = \\
& \overbrace{=}^{\text{per def.}} \ (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2)) = \\
& = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, (x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2)) = \\
& = (x_1, y_1, x_1 + 2y_1) + (x_2, y_2, x_2 + 2y_2) = \\
& = f((x_1, y_1)) + f((x_2, y_2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& f(\alpha(x_1, y_1)) = f((\underbrace{\alpha x_1}, \underbrace{\alpha y_1})) = \\
& \overbrace{=}^{\text{per def.}} \ (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha x_1 + 2(\alpha y_1)) = \\
& = \alpha(x_1, y_1, x_1 + 2y_1) = \alpha f((x_1, y_1))
\end{aligned}
$$

- $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, con $0 < m \leq n$. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $f(x_1, ..., x_m, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m)$ è lineare.
  Infatti date due n-uple $(x_1, ..., x_n)$,$(y_1, ..., y_n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha:

$$f((x_1, ...x_n) + (y_1, ..., y_n)) = f((x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)) =$$

$$\overbrace{=}^{\text{per def.}} (x_1 + y_1, ..., x_m + y_m) = (x_1, ..., x_m) + (y_1, ..., y_m) =$$

$$= f(x_1, ..., x_n) + f(y_1, ..., y_n)$$

$$f(\alpha(x_1, ..., x_n)) = f((\alpha x_1, ..., \alpha x_n)) =$$

$$\overbrace{=}^{\text{per def.}} (\alpha x_1, ..., \alpha x_m) =$$

$$= \alpha(x_1, ..., x_m) = \alpha f((x_1, ..., x_n))$$

  Tale funzione si dice **proiezione.**
  Per esempio, se $n = 2$, $m = 1$, l'applicazione che associa ad ogni punto del piano la sua prima coordinata è la **proiezione** sull'asse x.
  Se $n = 3$ e $m = 2$, l'applicazione che associa ad ogni punto dello spazio (terna ordinata di reali) le sue prime due coordinate è la **proiezione** sul piano coordinato xy, parallelamente all'asse z.

- Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
  Si consideri la funzione $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $\mathcal{L}_A(x) = Ax$. Si osservi che $x \in \mathbb{R}^n$ e $Ax \in \mathbb{R}^m$. **La funzione $\mathcal{L}_A$ è lineare**.
  Infatti, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\mathcal{L}_A(x+y) \overbrace{=}^{\text{per def.}} A(x+y) = Ax + Ay = \mathcal{L}_A(x) + \mathcal{L}_A(y)$$

$$\mathcal{L}_A(\alpha x) \overbrace{=}^{\text{per def.}} A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \mathcal{L}_A(x)$$

Dunque per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si può costruire una applicazione lineare.

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'applicazione lineare associata ad A è data da

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_A : \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teorema 1 - Caratterizzazione di una applicazione lineare

Siano V e W spazi vettoriali su K. Allora
$f : V \to W$ è lineare $\Leftrightarrow$ $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$, $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in K, v_1, v_2 \in V$

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Se f è lineare, usando le proprietà si ha:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1 v_1) + f(\alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

$\Leftarrow$ Assumiamo che $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$, $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in K, v_1, v_2 \in V$.
Allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) = f(1\ v_1 + 1\ v_2) &= 1\ f(v_1) + 1\ f(v_2) = f(v_1) + f(v_2) \text{ proprietà operazioni in } W \\ f(\alpha_1 v_1) = f(\alpha_1 v_1 + 0\ v_2) &= \alpha_1 f(v_1) + 0 f(v_2) = \alpha_1 f(v_1) \end{aligned}$$

Quindi f è lineare.

Conseguenza. Sia $f : V \to W$. f è una applicazione lineare se e solo se

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

$\forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, v_1, \dots, v_n \in V$.

Composizione di applicazioni lineari

Siano U, V, W spazi vettoriali su K.
Sia $f : U \to V$ lineare, $g : V \to W$ lineare. L'applicazione $g \circ f : U \to W$ è lineare.

Dimostrazione.
Si ricorda che $g \circ f : U \to W$ e $(g \circ f)(u) = g(f(u))$.
Per ogni $u_1, u_2 \in U$ e $c_1, c_2 \in K$ vale che:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(c_1 u_1 + c_2 u_2) & \overbrace{=}^{\text{per def.}} g(f(c_1 u_1 + c_2 u_2)) \\
& \overbrace{=}^{\text{linearità di } f} g(c_1 f(u_1) + c_2 f(u_2)) \\
& \overbrace{=}^{\text{linearità di } g} c_1 g(f(u_1)) + c_2 g(f(u_2)) \\
& = c_1 (g \circ f)(u_1) + c_2 (g \circ f)(u_2)
\end{aligned}$$

Data $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, si consideri $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $\mathcal{L}_A(x) = Ax$ e $\mathcal{L}_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ tale che $\mathcal{L}_B(y) = By$.

L'applicazione composta $\mathcal{L}_B \circ \mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ **è lineare** perchè composizione di applicazioni lineari.

Tale applicazione è data da:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_B \circ \mathcal{L}_A)(x) &= \mathcal{L}_B(\mathcal{L}_A(x)) = \\ &= \mathcal{L}_B(Ax) = B(Ax) = (BA)x\end{aligned}$$

Dunque $BA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ è la matrice che definisce l'applicazione composta.

ATTENZIONE: dato che il prodotto matriciale è non commutativo, l'ordine con cui si moltiplicano le matrici è importante! Anche perché può accadere che il prodotto nell'ordine inverso sia non definito per incompatibilità dimensionale delle matrici: questo corrisponde al fatto che l'applicazione composta in odine inverso $\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B$ può essere non definita anche quando $\mathcal{L}_B \circ \mathcal{L}_A$ lo è.

Somma e prodotto per scalare di applicazioni lineari I

Siano V, W spazi vettoriali su K. Si denota l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V a W con $\mathrm{Hom}(V, W)$ (gli elementi di questo insieme, quindi, sono funzioni fra spazi vettoriali, non numeri).

Siano $f : V \to W$ e $g : V \to W$ due applicazioni lineari ($f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$).
E' possibile definire una operazione di **somma** $f + g : V \to W$ ponendo

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall\, v \in V$$

e se $\alpha \in K$, una operazione di **prodotto per uno scalare** $\alpha f : V \to W$ ponendo

$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v) \quad \forall\, v \in V$$

Dimostriamo che $f + g$ e αf sono lineari (ossia che si tratta di leggi di composizione interna ed esterna per $\mathrm{Hom}(V, W)$).

Infatti per ogni $v_1, v_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, vale che

$$\begin{aligned}
(f+g)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &\overbrace{=}^{\text{per def.}} f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \\
&\overbrace{=}^{f,g \text{ lineari}} \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_1 g(v_1) + \alpha_2 g(v_2) = \\
&= \alpha_1 (f(v_1) + g(v_1)) + \alpha_2 (f(v_2) + g(v_2)) = \\
&\overbrace{=}^{\text{def. di } +} \alpha_1 (f+g)(v_1) + \alpha_2 (f+g)(v_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha f)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &\overbrace{=}^{\text{per def.}} \alpha f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \\
&\overbrace{=}^{f \text{ lineare}} \alpha(\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)) = \alpha\alpha_1 f(v_1) + \alpha\alpha_2 f(v_2) = \\
&\overbrace{=}^{\text{def. di } \cdot} \alpha_1 (\alpha f)(v_1) + \alpha_2 (\alpha f)(v_2)
\end{aligned}$$

Questo prova che la somma di applicazioni lineari è una legge di composizione interna:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(V,W)\times\mathrm{Hom}(V,W) & \to & \mathrm{Hom}(V,W) \\ (f,g) & \to f+g & \end{array}$$

e il prodotto di uno scalare per una applicazione lineare è una legge di composizione esterna:

$$\begin{array}{rcl} K\times\mathrm{Hom}(V,W) & \to & \mathrm{Hom}(V,W) \\ (\alpha,f) & \to \alpha f & \end{array}$$

$\mathrm{Hom}(V,W)$ come spazio vettoriale

$\mathrm{Hom}(V,W)$ è uno spazio vettoriale su K.

Occorre far vedere che per le due operazioni valgono gli assiomi.
Ciò segue dal fatto che le operazioni in V e W godono di tali proprietà.

Facciamo un esempio di come si possono dimostrare gli assiomi, dimostrando il primo.

$$
\begin{aligned}
&(f + (g + h))(v) = f(v) + (g + h)(v) = f(v) + (g(v) + h(v)) = \\
&= (f(v) + g(v)) + h(v) = (f + g)(v) + h(v) = ((f + g) + h)(v)
\end{aligned}
$$

L'elemento neutro rispetto alla somma è la funzione $\mathbf{0}(v) = 0$ per ogni $v \in V$.

L'opposto di f è la funzione $-f$ definita come $(-f)(v) = -f(v)$ per ogni $v \in V$.

Siano U, V, W spazi vettoriali su K.
Sia $f, f' \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g, g' \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
Valgono le seguenti proprietà:

1. $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$ (distributiva della composizione rispetto alla somma)
2. $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$
3. $(cg) \circ f = c(g \circ f)$, $c \in K$

Teorema 2 - Proprietà delle funzioni lineari

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora:

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, ossia al vettore nullo di V corrisponde sempre il vettore nullo di W
2. $f(-v) = -f(v)$
3. $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$
4. Se $v_1, ..., v_n \in V$ sono linearmente dipendenti, allora $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono linearmente dipendenti in W
5. Se $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W, allora $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti
6. Se $V' \sqsubseteq V$, allora $f(V') \sqsubseteq W$
7. Se $W' \sqsubseteq W$, allora $f^{-1}(W') \sqsubseteq V$

Osservazione. Le funzioni lineari conservano la lineare dipendenza di un insieme di vettori, **ma non**, in generale, la lineare indipendenza.

Dimostrazione.

Teorema 2

Dimostrazione.

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
   $f(v) = f(v + \mathbf{0}_V) = f(v) + f(\mathbf{0}_V)$; dunque $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, perchè è elemento neutro in W rispetto alla somma e l'elemento neutro è unico.

Dimostrazione.

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
   $f(v) = f(v + \mathbf{0}_V) = f(v) + f(\mathbf{0}_V)$; dunque $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, perchè è elemento neutro in W rispetto alla somma e l'elemento neutro è unico.

2. $f(-v) = -f(v)$
   $f(-v) = f((-1)v) = -1f(v) = -f(v)$

Dimostrazione.

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
   $f(v) = f(v + \mathbf{0}_V) = f(v) + f(\mathbf{0}_V)$; dunque $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, perchè è elemento neutro in W rispetto alla somma e l'elemento neutro è unico.
2. $f(-v) = -f(v)$
   $f(-v) = f((-1)v) = -1f(v) = -f(v)$
3. $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$
   $f(v_1 - v_2) = f(v_1 + (-1)v_2) = f(v_1) + (-1)f(v_2) = f(v_1) - f(v_2)$

Dimostrazione.

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
   $f(v) = f(v + \mathbf{0}_V) = f(v) + f(\mathbf{0}_V)$; dunque $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, perchè è elemento neutro in W rispetto alla somma e l'elemento neutro è unico.

2. $f(-v) = -f(v)$
   $f(-v) = f((-1)v) = -1f(v) = -f(v)$

3. $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$
   $f(v_1 - v_2) = f(v_1 + (-1)v_2) = f(v_1) + (-1)f(v_2) = f(v_1) - f(v_2)$

4. **Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente dipendenti in W.**
   Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti, esistono scalari non tutti nulli $a_1, \dots, a_n$ tali che
   $$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}_V$$
   Allora dalla 1) segue
   $$\mathbf{0}_W = f(\mathbf{0}_V) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$
   Da cui $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente dipendenti in W.

Dimostrazione.

5. **Se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W, allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti in V.**
   Se per assurdo $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti in V, allora per 4) lo sono in W anche $f(v_1), \dots, f(v_n)$. Cio è in evidente contraddizione con l'ipotesi.

Dimostrazione.

5. **Se $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W, allora $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti in V.**
   Se per assurdo $v_1, ..., v_n$ sono linearmente dipendenti in V, allora per 4) lo sono in W anche $f(v_1), ..., f(v_n)$. Cio è in evidente contraddizione con l'ipotesi.

6. **Se $V' \sqsubseteq V$ allora $f(V') \sqsubseteq W$.**
   Sia $V' \sqsubseteq V$.

$$f(V') = \{w \in W : \exists\ v' \in V', f(v') = w\} = \{f(v') : v' \in V'\} \subseteq W$$

   Si usa la II caratterizzazione dei sottospazi.
   Siano $w_1, w_2 \in f(V')$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora $w_1 = f(v_1)$, $v_1 \in V'$, e $w_2 = f(v_2)$, $v_2 \in V'$. Occorre provare che $cw_1 - w_2 \in f(V')$.
   Infatti

$$cw_1 - w_2 = cf(v_1) - f(v_2) = f(cv_1 - v_2)$$

   Poichè $cv_1 - v_2 \in V'$ ($V' \sqsubseteq V$), allora $f(cv_1 - v_2) = cw_1 - w_2 \in f(V')$. Segue $f(V') \sqsubseteq W$.

Dimostrazione.

7. **Se $W' \sqsubseteq W$ allora $f^{-1}(W') \sqsubseteq V$.**
   Sia $W' \sqsubseteq W$.
   $$f^{-1}(W') = \{v' \in V : f(v') \in W'\} \subseteq V$$
   Si usa la II caratterizzazione dei sottospazi.
   Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(W')$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora $w_1 = f(v_1)$, $w_1 \in W'$, e $w_2 = f(v_2)$, $w_2 \in W'$. Poichè W' è un sottospazio di W, $cw_1 - w_2 \in W'$. Per la linearità di f, segue che
   $$cw_1 - w_2 = cf(v_1) - f(v_2) = f(cv_1 - v_2)$$
   Allora $cv_1 - v_2 \in f^{-1}(W')$ e $f^{-1}(W') \sqsubseteq V$.

Conseguenze

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora:

- $f(V) \sqsubseteq W$
- $f^{-1}(0) \sqsubseteq V$

Immagine e nucleo di una applicazione lineare

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
Il sottospazio $f(V)$ di W si dice **immagine** di f e si indica con $\mathrm{Imm}(f)$.
Il sottospazio $f^{-1}(\mathbf{0}_W)$ di V si dice **nucleo** di f e si indica con $\ker(f)$.

$$\mathrm{Imm}(f) = \{f(v) : v \in V\} \sqsubseteq W$$

$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = \mathbf{0}_W\} \sqsubseteq V$$

$\mathrm{Imm}(f)$ è il sottospazio di W di tutti gli elementi di W che provengono tramite f da tutti gli elementi di V.
$\ker(f)$ è il sottospazio di V di tutti gli elementi di V che tramite f finiscono nello 0_W di W.

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare tale che $\mathcal{L}_A(x) = Ax$. Allora si ha che

$$\ker(\mathcal{L}_A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\} = \ker(A)$$

Inoltre in questo caso le colonne di A sono generatori di

$$\mathrm{Imm}(\mathcal{L}_A) = \{Ax\} = \{A^1 x_1 + A^2 x_2 + ... + A^n x_n\}$$

La dimensione del sottospazio $\mathrm{Imm}(\mathcal{L}_A)$ è minore o uguale a $min(m, n)$ ed è pari al rango della matrice (massimo numero di colonne linearmente indipendenti).

Teorema 3

Una funzione è iniettiva se $\forall\ v', v''$ in V accade che

$$v' \neq v'' \Rightarrow f(v') \neq f(v'') \text{ o equivalentemente se } f(v') = f(v'') \Rightarrow v' = v''$$

Teorema 3 - Caratterizzazione delle funzioni iniettive

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
Allora

$$f \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow \ker(f) = \{\mathbf{0}_V\}$$

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Sia f iniettiva. Sempre si verifica che $\{\mathbf{0}_V\} \subseteq \ker(f)$.
Sia $v \in \ker(f)$. Allora $f(v) = \mathbf{0}_W$. Ma anche $\mathbf{0}_V \in V$ ha come corrispondente lo $\mathbf{0}_W \in W$. Siccome f è iniettiva, allora $v = \mathbf{0}_V$. Dunque non solo $\{\mathbf{0}_V\} \subseteq \ker(f)$, ma anche $\ker(f) \subseteq \{\mathbf{0}_V\}$. Per cui i due insiemi coincidono.

$\Leftarrow$ Sia $\ker(f) = \{\mathbf{0}_V\}$. Supponiamo che $f(v_1) = f(v_2)$. Allora $f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2) = \mathbf{0}_W \in W$. Pertanto $v_1 - v_2 \in \ker(f)$. Per ipotesi, $\ker(f) = \{\mathbf{0}_V\}$. Dunque $v_1 - v_2 = \mathbf{0}_V \Rightarrow v_1 = v_2$, da cui l'iniettività della f.

Teorema 4

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare iniettiva. Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti in V allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ lo sono in W.

Dimostrazione.
Data la combinazione lineare

$$a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = \mathbf{0}_W$$

con $a_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, per la linearità di f , si ha che

$$\mathbf{0}_W = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$

Dunque $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \ker(f)$. Per l'iniettività di f, $\ker(f) = \{\mathbf{0}_V\}$, e dunque $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}_V$. Per la lineare indipendenza di $v_1, \dots, v_n$ segue $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Se Imm$(f) = W$, allora f è suriettiva.

Teorema 5

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Se $v_1, ..., v_n$ sono generatori di V allora $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono generatori di $\mathrm{Imm}(f)$.

Dimostrazione.
Occorre provare che $[f(v_1), ..., f(v_n)] = \mathrm{Imm}(f)$.
E' vero che $[f(v_1), ..., f(v_n)] \subseteq \mathrm{Imm}(f)$. Proviamo l'inclusione contraria.
Sia $w \in \mathrm{Imm}(f)$. Allora esiste $v \in V$ tale che $f(v) = w$. Per l'ipotesi $[v_1, ..., v_n] = V$, si ha che esistono $a_1, ..., a_n \in K$ tale che

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

Dalla linearità di f, si ha:

$$w = f(v) = f(a_1 v_1 + ... + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + ... + a_n f(v_n)$$

Dunque $w \in [f(v_1), ..., f(v_n)]$.

Segue che **Imm(f) non può avere più generatori di V e quindi ha dimensione minore o uguale a $n = \dim V$: $= \dim \mathrm{Imm}(f) \leq \dim V$.**

Teorema 6

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare iniettiva. Se $v_1, ..., v_n$ sono una base di V allora $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono una base di $\mathrm{Imm}(f)$.

E' una conseguenza immediata dei Teoremi 5 e 4: se $v_1, ..., v_n$ sono una base di V, essi sono generatori di V e sono linearmente indipendenti; allora $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono generatori di $\mathrm{Imm}(f)$ (Teorema 5) e, poichè f è iniettiva, essi sono linearmente indipendenti (Teorema 4). Dunque sono una base di $\mathrm{Imm}(f)$.

Teorema 7

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare iniettiva e suriettiva. Se $v_1, ..., v_n$ sono una base di V allora $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono una base di W.

Segue dal Teorema 6 e dalla suriettività di f.

Teorema 8 - Teorema di rappresentazione

Siano V e W spazi vettoriali su K.
Sia $v_1, ..., v_n$ una base di V e siano $w_1, ..., w_n$ elementi di W.
Allora esiste **una e una sola funzione lineare** $f : V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$.

Dimostrazione.
Sia $v \in V$. Allora

$$v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$$

con $x_i \in K$ **univocamente** determinati perchè sono i coefficienti di v rispetto alla base scelta.
Si consideri la funzione $f : V \to W$ definita nel seguente modo:

$$f(v) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_n w_n \in W$$

per ogni $v \in V$.
f **è una funzione ben definita**: ad ogni $v \in V$, f associa uno e un solo elemento di W.
Inoltre essa è tale che $f(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$.
Si può far vedere che f **è lineare**.

Siano $u', u'' \in V$, $u' = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ e $u'' = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n$ e siano $\alpha_1, \alpha_2 \in K$.
Si ha

$$\begin{aligned}\alpha_1 u' + \alpha_2 u'' &= \alpha_1(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) + \alpha_2(b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n) = \\ &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1) v_1 + \ldots + (\alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n) v_n\end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}f(\alpha_1 u' + \alpha_2 u'') &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1) w_1 + \ldots + (\alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n) w_n = \\ &= \alpha_1(a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n) + \alpha_2(b_1 w_1 + \ldots + b_n w_n) = \alpha_1 f(u') + \alpha_2 f(u'')\end{aligned}$$

Resta da provare che f **è unica**.
Assumiamo che esista una ulteriore applicazione lineare $g : V \to W$ tale che $g(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$. Allora dato $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \in V$, si ha

$$\begin{aligned}g(v) &= g(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = x_1 g(v_1) + \ldots + x_n g(v_n) = \\ &= x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n = x_1 f(v_1) + \ldots + x_n f(v_n) = f(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = f(v)\end{aligned}$$

Perciò $f = g$.

Osservazione

Una funzione lineare è univocamente determinata dalla conoscenza di una base del dominio e dei trasformati dei vettori di tale base.

Quindi due funzioni lineari f e g tra due spazi vettoriali V e W **sono diverse** se data una base $v_1, ..., v_n$ di V, esiste $k \in 1, ..., n$ tale che $f(v_k) \neq g(v_k)$.

Sia data una matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Si è già visto che ad ogni matrice A è possibile associare una applicazione lineare

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tale che $\mathcal{L}_A(x) = Ax$.
Questa applicazione lineare è quella per cui, considerata la base canonica in $\mathbb{R}^n$, essa è individuata da:

$$\mathcal{L}_A(e_1) = Ae_1 = A^1 \quad \mathcal{L}_A(e_2) = Ae_2 = A^2 \quad \dots \quad \mathcal{L}_A(e_n) = Ae_n = A^n$$

Infatti ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si esprime come:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Dunque si ha

$$\mathcal{L}_A(x) = x_1 \mathcal{L}_A(e_1) + \dots + x_n \mathcal{L}_A(e_n) = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = Ax$$

Viceversa ad ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, fissata la base canonica in $\mathbb{R}^n$, si può associare una matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ **definita univocamente da** $A = [f(e_1), ..., f(e_n)]$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n) = \\ &= x_1 A^1 + ... + x_n A^n = [A^1, ..., A^n]x = Ax \end{aligned}$$

Pertanto esiste una corrispondenza biunivoca tra lo spazio vettoriale delle matrici $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ e lo spazio vettoriale degli omomorfismi tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$: Hom$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$:

$$\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Esempio

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo la matrice associata. In tal caso la matrice è (basta vedere i corrispondenti della base canonica):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Infatti

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Si osservi che il rango di A è la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$ e $\ker(A) = \ker(f)$.

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(e_1) = (1, 2, 3)^T$ e $f(e_2) = (3, 2, 1)^T$. Allora

$$f\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} x + 3y \\ 2x + 2y \\ 3x + y \end{array}\right)$$

Infatti $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{array}\right)$ e dunque $f\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)\right) = A\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$. Si osservi che il rango di A è la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$ e $\ker(A) = \ker(f)$.

Teorema 9

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
Allora

1. $\dim(\mathrm{Imm}(f))$ è finita
2. $\dim(V) = \dim(\mathrm{Imm}(f)) + \dim(\ker(f))$

Dimostrazione.

1. Segue dal Teorema 5 (la dimensione di $\dim(\mathrm{Imm}(f))$ non può superare la dimensione di V.
2. Sia $\dim(V) = n$, $\dim(\mathrm{Imm}(f)) = s$ e $\dim(\ker(f)) = q$. Si vuole provare che $n = s + q$.
   Consideriamo i seguenti due casi.
   - Sia $\mathrm{Imm}(f) = \{\mathbf{0}\}$, allora $s = 0$ e $\ker(f) = V$. Dunque $n = q$.
   - Assumiamo $s > 0$ e sia $w_1, ..., w_s$ una base di $\mathrm{Imm}(f)$. Esistono $v_1, ..., v_s \in V$ tali che $f(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., s$. Per il Teorema 2 (punto 5), $v_1, ..., v_s$ sono linearmente indipendenti.
     Siano ora $u_1, ..., u_q$ una base di $\ker(f)$. Basta provare che $v_1, ... v_s, u_1, ..., u_q$ sono una base di V.

A. Dimostriamo prima che $v_1, \dots v_s, u_1, \dots, u_q$ sono un insieme di generatori di V.
Sia $v \in V$ e, poichè $\{w_1, \dots, w_s\}$ sono una base di $\mathrm{Imm}(f)$, vale che $f(v) = x_1 w_1 + \dots + x_s w_s$.
Dunque

$$f(v) = x_1 w_1 + \dots + x_s w_s = x_1 f(v_1) + \dots + x_s f(v_s)$$

Ma per la linearità di f, si ha:

$$\begin{aligned} & f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_s f(v_s) = f(x_1 v_1 + \dots + x_s v_s) \\ & \Rightarrow f(v) - f(x_1 v_1 + \dots + x_s v_s) = \mathbf{0} \\ & \Rightarrow f(v - x_1 v_1 - \dots - x_s v_s) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dunque $z = v - x_1 v_1 - \dots - x_s v_s \in \ker(f)$. Dunque esistono $y_1, \dots y_q \in K$ tali che

$$v - x_1 v_1 - \dots - x_s v_s = y_1 u_1 + \dots + y_q u_q$$

Pertanto

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_s v_s + y_1 u_1 + \dots + y_q u_q \in [v_1, \dots v_s, u_1, \dots, u_q]$$

Poichè questo accade per ogni $v \in V$, si ha $V = [v_1, \dots v_s, u_1, \dots, u_q]$.

B. Si prova ora che $v_1, \ldots v_s, u_1, \ldots, u_q$ sono linearmente indipendenti.
Data la combinazione lineare

$$x_1 v_1 + \ldots + x_s v_s + y_1 u_1 + \ldots + y_q u_q = \mathbf{0}$$

applicando f a entrambe i membri e considerando la linearità di f e $f(u_i) = 0, i = 1, \ldots, q$, si ottiene

$$\begin{aligned} & x_1 f(v_1) + \ldots + x_s f(v_s) + y_1 f(u_1) + \ldots + y_q f(u_q) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ & x_1 w_1 + \ldots + x_s w_s = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Per la lineare indipendenza di $w_1, \ldots, w_s$, segue $x_1 = \ldots = x_s = 0$. Pertanto $y_1 u_1 + \ldots + y_q u_q = \mathbf{0}$. Poichè $u_1, \ldots, u_q$ sono linearmente indipendenti, si ha $y_1 = \ldots = y_q = 0$.
Perciò, dalla definizione di lineare indipendenza, $v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots, u_q$ sono anche linearmente indipendenti e dunque costituiscono una base di V.

Teorema 10

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
Se $\dim(V) = \dim(W)$ e $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, allora $\mathrm{Imm}(f) = W$.

Infatti si ha

$$\dim(W) = \dim(V) = \dim(\mathrm{Imm}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathrm{Imm}(f))$$

Poichè $\mathrm{Imm}(f) \sqsubseteq W$ che ha la sua stessa dimensione, W e $\mathrm{Imm}(f)$ coincidono.

Una applicazione lineare iniettiva tra due spazi vettoriali di uguale dimensione è anche suriettiva; dunque essa è biettiva.

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tale che $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x - 4y \end{pmatrix}$.
Determinare la matrice associata all'applicazione, $\ker(f)$ e $\mathrm{Imm}(f)$ e stabilire se f è iniettiva o suriettiva.

La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

$\ker(f) = \ker A = \{(x, y) : x - 2y = 0, 2x - 4y = 0)\} = \left\{\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}\right\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Dunque il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ genera il nucleo di f, è linearmente indipendente ed è una base di $\ker(f)$. Pertanto $\dim(\ker(f)) = 1$ e la funzione non è iniettiva.
Segue che $\dim(\mathrm{Imm}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) - 1 = 1$ e f non è suriettiva. 1 è anche il rango di A.

$\mathrm{Imm}(f) = \left\{\begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x - 4y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} y; x, y \in \mathbb{R}\right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right]$. Pertanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ generano l'immagine di f, ma non sono linearmente dipendenti; una base di $\mathrm{Imm}(f)$ è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Si consideri la corrispondenza biettiva tra tra $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Dal teorema 9 segue che **la dimensione n per colonne di una matrice A di $m \times n$ è pari al rango di A più la dimensione del $\ker(A)$:**

$$n = r(A) + \mathbf{dim}(\mathbf{ker}(A))$$

Si osservi che la **dimensione di ker**(A), ossia del sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ è pari a

$$\dim(\ker(A)) = n - r(A)$$

come già visto in precedenza.

Definizione di endomorfismo

Sia V uno spazio vettoriale su K. Una applicazione lineare $f : V \to V$ si dice **endomorfismo**.

Definizione di isomorfismo

Siano V e W spazi vettoriali su K. Una **applicazione lineare biettiva** $f : V \to W$ si dice **isomorfismo**.
In tal caso V e W si dicono **isomorfi** e si scrive $V \sim W$.

Definizione di automorfismo

Sia V uno spazio vettoriale su K. Una applicazione lineare biettiva $f : V \to V$ si dice **automorfismo** (endomorfismo biettivo).

Teorema 11

Siano V e W spazi vettoriali su K di dimensione finita.

$$V \sim W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Se $V \sim W$, esiste $f : V \to W$ lineare e biettiva. Poichè $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Imm}(f) = W$, dal teorema 9 (dimensionale) segue che $\dim V = \dim W$.

$\Leftarrow$ Sia $\dim V = \dim W = n$.
Sia $v_1, ..., v_n$ una base di V e $w_1, ..., w_n$ una base di W.
Per il Teorema 8 (di rappresentazione), esiste una e una sola applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$. **Basta provare che l'applicazione è biettiva.**
Per provare che f è iniettiva, mostriamo che $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Sia $v \in \ker(f)$; $v \in V$ e dunque $v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$. Allora

$$\mathbf{0} = f(v) = f(a_1 v_1 + ... + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + ... + a_n f(v_n) = a_1 w_1 + ... + a_n w_n$$

Per la lineare indipendenza di $w_1, ..., w_n$, segue $a_1 = ... = a_n = 0$. Per cui $v = \mathbf{0}$ e $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.
Per provare che f è suriettiva, proviamo che $\mathrm{Imm}(f) = W$; vale che $\mathrm{Imm}(f) \sqsubseteq W$.
Devo provare che vale l'inclusione $\mathrm{Imm}(f) \sqsupseteq W$. Sia $w \in W$, $w = b_1 w_1 + ... + b_n w_n$.
Allora si ha

$$w = b_1 f(v_1) + ... + b_n f(v_n) = f(b_1 v_1 + ... + b_n v_n) = f(v)$$

con $v = b_1 v_1 + ... + b_n v_n \in V$. Allora $w \in \mathrm{Imm}(f)$.

Si è visto che esiste una corrispondenza biunivoca tra Hom$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e le matrici $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$:

- ad ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ corrisponde l'applicazione lineare $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $\mathcal{L}_A(x) = Ax$;

$$\psi : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

con $\psi(A) = \mathcal{L}_A$.

L'applicazione è lineare.

Infatti date $A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha che $\psi(\alpha_1 A + \alpha_2 B)$ è l'applicazione lineare $\mathcal{L}_{\alpha_1 A + \alpha_2 B}$ tale che

$$\mathcal{L}_{\alpha_1 A + \alpha_2 B}(x) = (\alpha_1 A + \alpha_2 B)(x) = \alpha_1 Ax + \alpha_2 Bx = \alpha_1 \mathcal{L}_A(x) + \alpha_2 \mathcal{L}_B(x)$$

Dunque

$$\psi(\alpha_1 A + \alpha_2 B) = \alpha_1 \psi(A) + \alpha_2 \psi(B)$$

- ad ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ corrisponde la matrice $A = [f(e_1), ..., f(e_n)]$ per cui $f(x) = Ax$

$$\varphi : \mathbf{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

Vale che $\varphi(f) = A$. L'applicazione è lineare.
Infatti siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tale che $f(x) = Ax$ e $g(x) = Bx$;
$\varphi(f) = A, \varphi(g) = B$.
Si deve provare che

$$\varphi(\alpha_1 f + \alpha_2 g) = \alpha_1 \varphi(f) + \alpha_2 \varphi(g)$$

Sia C la matrice che corrisponde all'applicazione lineare $\alpha_1 f + \alpha_2 g$:

$$\begin{aligned} C &= [(\alpha_1 f + \alpha_2 g)(e_1), ..., (\alpha_1 f + \alpha_2 g)(e_n)] = \\ &= [\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 g(e_1), ..., \alpha_1 f(e_n) + \alpha_2 g(e_n)] = \\ &= \alpha_1 [f(e_1), ..., f(e_n)] + \alpha_2 [g(e_1), ..., g(e_n)] = \alpha_1 A + \alpha_2 B \end{aligned}$$

Segue che φ è lineare.

Inoltre ψ e φ sono l'una l'inversa dell'altra:

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \quad \psi(A) = \mathcal{L}_A \Rightarrow \varphi(\mathcal{L}_A) = [\mathcal{L}_A(e_1), \ldots, \mathcal{L}_A(e_n)] = A$$

ossia

$$\varphi \circ \psi = i_{\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$$

Inoltre

$$\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \varphi(f) = [f(e_1), \ldots, f(e_n)] = B \Rightarrow \psi(B) = \mathcal{L}_B = f$$

ossia

$$\psi \circ \varphi = i_{\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$

Dunque **i due spazi vettoriali sono isomorfi e pertanto hanno la stessa dimensione.**

Isomorfismo tra V e K^n

Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $dim(V) = n$. Allora $V \sim K^n$.

Fissata una base $\{v_1, ..., v_n\}$ in V e la base canonica $\{e_1, ..., e_n\}$ in K^n, l'applicazione lineare $f : V \to K^n$ si può definire nel seguente modo:
dato $v = a_1 v_1 + .. + a_n v_n$, allora $f(v) = a_1 e_1 + ... + a_n e_n = (a_1, ..., a_n)$.
Quindi, **fissata una base in V, la funzione che associa ad ogni $v \in V$, la n-upla delle sue coordinate rispetto alla base fissata è un isomorfismo.**

Esempio

Sia $V = P_n$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a n.
Esso è isomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$.

Infatti, considerate le funzioni potenza reale intera non negativa di grado minore o uguale a n

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \dots \quad , \quad x^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

esse sono la basa canonica di $P_n(\mathbb{R})$. Allora possiamo definire l'applicazione lineare biiettiva che fa corrispondere ad ogni polinomio reale $p_n(x) \in P_n(\mathbb{R})$, di grado minore o uguale ad n, la $n+1$-pla formata dai sui coefficienti:

$$f : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$$
$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

Esempi:

- dato $p_3(x) = 2 - 3x^2 + 4x^3 \in P_3(\mathbb{R})$, è $f\left(p_3(x)\right) = (2, 0, -3, 4) \in \mathbb{R}^4$
- dato $p_5(x) = \frac{3}{7}x - 0.763x^2 + 3\pi x^4 + \sqrt{2}x^5 \in P_5(\mathbb{R})$, è

$$f\left(p_5(x)\right) = \left(0,\ 3/7,\ -0.763, 0,\ 3\pi,\ \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^6$$

$$f : V \to W \text{ isomorfismo}$$

1. Se $\dim V = \dim W$, esistono infiniti isomorfismi tra V e W, in quanto essi dipendono dalle due basi che si scelgono.
   Tuttavia non è detto che tutte le applicazioni lineari tra V e W siano isomorfismi.
2. Se $f : V \to W$ è un isomorfismo, anche $f^{-1} : W \to V$ lo è .
3. La funzione $f : P_n(x) \to \mathbb{R}^{n+1}$ definita da $f(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = (a_0, ..., a_n)$ è un isomorfismo; quindi due polinomi sono linearmente dipendenti/indipendenti se e solo se lo sono le $n+1$-uple associate.
4. **Un isomorfismo conserva la lineare dipendenza, la lineare indipendenza e la dimensione dei sottospazi.**

Teorema 12

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare e $\dim V = \dim W$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è isomorfismo
2. f è iniettiva
3. f è suriettiva

Dimostrazione.
$1 \to 2$. Ovvio

$2 \to 3$. Se f è iniettiva, $\ker(f) = \{0\}$; dal Teorema 9, $\dim V = \dim(\mathrm{Imm}(f))$ e dunque $\mathrm{Imm}(f)$ è un sottospazio di W che ha la sua stessa dimensione. Pertanto essi coincidono e f è suriettiva.

$3 \to 1$. In tal caso per il Teorema 9, $\dim(\ker(f)) = \dim V - \dim W = 0$. Pertanto f è iniettiva. Pertanto l'applicazione lineare è biettiva e dunque è un isomorfismo.

Teorema 13

Siano V e W spazi vettoriali su K di dimensione finita e sia $\dim V > \dim W$. Allora non esiste alcuna funzione iniettiva lineare da V a W e non esiste alcuna funzione suriettiva lineare da W a V.

Dimostrazione.
Sia $f : V \to W$ lineare.
Per il Teorema 9,

$$\dim V = \dim(\mathrm{Imm}(f)) + \dim(\ker(f))$$

Quindi

$$\dim(\ker(f)) = \dim V - \dim(\mathrm{Imm}(f)) > \dim W - \dim(\mathrm{Imm}(f))$$

Poichè $\mathrm{Imm}(f) \sqsubseteq W$ e $\dim(\mathrm{Imm}(f)) \leq \dim W < \dim V$, segue che $\dim(\ker(f)) > 0$. f non può essere iniettiva.
Sia $g : W \to V$ lineare.
Per il Teorema 9,

$$\dim W = \dim(\mathrm{Imm}(g)) + \dim(\ker(g))$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{Imm}(g)) = \dim W - \dim(\ker(g)) < \dim V - \dim(\ker(g)) \leq \dim V$$

Poichè $\dim(\mathrm{Imm}(g)) \leq \dim W < \dim V$, segue che $\mathrm{Imm}(g)$ è un sottospazio proprio di V e g non può essere suriettiva.

Teorema 14

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare tra spazi di dimensione finita.
Sia $\dim V = n$, $\dim W = m$ e $\dim(\mathrm{Imm}(f)) = k$. Allora si ha che:

1. f è iniettiva se e solo se $n = k$
2. f è suriettiva se e solo se $m = k$
3. f è un isomorfismo se e solo se $n = m = k$

Le affermazioni seguono dal teorema 9.

Dato il sistema di m equazioni in n incognite $Ax = b$, la sua compatibilità si può studiare in termini dell'applicazione lineare:

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tale che $\mathcal{L}_A(x) = Ax$.
Infatti

$$r(A) = k = \dim(Imm(\mathcal{L}_A)) \qquad \ker(\mathcal{L}_A) = \ker(A)$$

Allora si ha che **il sistema è compatibile se e solo se $b \in Imm(\mathcal{L}_A)$, ossia $r(A) = r(A|b)$; in tal caso l'insieme delle soluzioni ha la dimensione di $\ker(A) = n - k$**. Inoltre si ha:

- se $k = m$ (suriettività), il sistema ammette sempre almeno una soluzione
- se $k = n$ (iniettività), si ha al più una soluzione ($\ker(A) = \{0\}$)
- se $k = n = m$ (biettiva), esiste una e una sola soluzione