ISTITUZIONI DI MATEMATICA

~ TEORIA ~

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Docenti: Prof. O. Ascenzi,
Prof. M.D. Rosini

Tutrice: S. Bagossi

a.a. 2021-2022

Indice

Lo scopo di queste note non è quello di essere studiate, ma solo quello di dare un quadro generale del programma svolto durante le lezioni. Per lo studio si consiglia l'utilizzo dei libri disponibili nelle biblioteche universitarie ed elencati nella bibliografia.

Durante la prima lettura, si consiglia di soprassedere alle dimostrazioni e di concentrarsi sulla parte di teoria utile allo svolgimento degli esercizi.

Il simbolo sarà utilizzato per segnalare materiale di approfondimento non strettamente necessario al superamento dell'esame.

Capitolo 0

Prima di iniziare…

Lettere greche

α	alfa	ι	iota	ρ	ro
β	beta	κ	kappa	σ	sigma
γ	gamma	λ	lambda	τ	tau
δ	delta	μ	mu	υ	upsilon
ε	epsilon	ν	nu	ϕ,φ	fi
ζ	zeta	ξ	xi	χ	chi
η	eta	o	omicron	ψ	psi
θ	teta	π	pi greco	ω	omega

Connettivi logici

$\neg A$	non A
$A \wedge B$	A e B
$A \vee B$	A oppure B
$A \Longrightarrow B$	se A allora B (A implica B)
$A \Longleftrightarrow B$	A se e solo se B

Visto che
$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg B) \Longrightarrow (\neg A)),$$
dimostrare che

A implica B

equivale a dimostrare che

se B non vale, allora A non vale.

Il secondo modo di procedere è tipico delle **dimostrazioni per assurdo**.

Quantificatori

$\forall a \dots$	per ogni $a \dots$
$\exists a : \dots$	esiste a tale che …
$\exists! a : \dots$	esiste un unico a tale che …

Si noti che
$$(\neg(\forall a)) \Longleftrightarrow (\exists a).$$

Insiemi e sottoinsiemi

$x \in A$	x appartiene all'insieme A,
$x \notin A$	x non appartiene all'insieme A,
$A \subseteq B$	A è sottoinsieme di B,
$A \subset B$	A è strettamente contenuto in B,
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$	A unione B,
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$	A intersezione B,
$\emptyset$	insieme vuoto,
$A \cap B = \emptyset$	A e B sono disgiunti,
$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e non } x \in B\}$	insieme differenza di A e B,
$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$	insieme prodotto di A e B.

Un sottoinsieme A di B ha la forma
$$A = \{x \in B : P(x)\},$$
dove $P(x)$ è una proposizione che dipende dalla variabile x che appartiene all'insieme B, quindi x è un elemento di A se e solo se la proposizione $P(x)$ è vera.

Osserviamo che:
$$\begin{aligned}
A \subseteq B &\iff (x \in A \Longrightarrow x \in B) &&\iff (x \notin B \Longrightarrow x \notin A),\\
A = B &\iff (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A) &&\iff (x \in A \Longleftrightarrow x \in B),\\
A \subset B &\iff A \subseteq B \text{ e } B \setminus A \neq \emptyset.
\end{aligned}$$
Osserviamo che se $A \neq B$, allora
$$A \setminus B \neq B \setminus A, \qquad A \times B \neq B \times A.$$

Intervalli

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è un **intervallo** se e solo se A gode della seguente proprietà: se $x_1,\ x_2 \in A$ ed $x_1 < x_2$, allora $[x_1, x_2] \subseteq A$. Ricordiamo la seguente caratterizzazione degli intervalli:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	intervallo aperto e limitato;
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$	intervallo chiuso e limitato;
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$	intervallo aperto a sinistra, chiuso a destra e limitato;
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$	intervallo chiuso a sinistra, aperto a destra e limitato;
$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$	intervallo illimitato a sinistra e chiuso a destra;
$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	intervallo illimitato a sinistra ed aperto a destra;
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$	intervallo chiuso a sinistra ed illimitato a destra;
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	intervallo aperto a sinistra ed illimitato a destra.

Potenze e radici

Se $n \in \mathbb{N}$ ed $a \in \mathbb{R}$, allora per definizione:
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}.$$
$a^0 = 1\ \forall a \in \mathbb{R}$, in particolare $0^0 = 1$.
Se $n \in \mathbb{N}$ ed $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora
$$a^{-n} = 1/a^n.$$

Il fatto che $a^0 = 1$ per $a \neq 0$ segue in maniera naturale dal seguente ragionamento. Prendiamo $a = 2$. Sappiamo come costruire la seguente lista da sinistra verso destra partendo da $2^1 = 2$: basta moltiplicare ad ogni passo per 2.

$$2^0 = ? \qquad 2^1 = 2 \xrightarrow{\times 2} 2^2 = 4 \xrightarrow{\times 2} 2^3 = 8 \xrightarrow{\times 2} 2^4 = 16$$

In realtà, dalla costruzione da sinistra verso destra segue anche la costruzione da destra verso sinistra: invece di moltiplicare per 2 basta dividere per 2, ed è pertanto ovvio perché debba essere

$2^0 = 1$, $2^{-1} = 1/2$ e così via.

$$2^{-1}=\tfrac{1}{2} \xleftarrow{\div 2} 2^0=1 \xleftarrow{\div 2} 2^1=2 \xleftarrow{\div 2} 2^2=4 \xleftarrow{\div 2} 2^3=8 \xleftarrow{\div 2} 2^4=16$$

Se $n \in \mathbb{N}$ ed $a \in \mathbb{R}$, allora per definizione:
$$\sqrt[n]{a} = r \in \mathbb{R} \iff r^n = a.$$
In particolare, se n è pari, allora deve essere $a \geqslant 0$.
Se $a \in \mathbb{R}$ e $r = m/n \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{Z}$ ed $n \in \mathbb{N}$, allora per definizione:
$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$
In particolare, se n è pari, allora deve essere $a \geqslant 0$.
Se $x \in \mathbb{R}$ ed $a > 0$, allora per definizione:
$$a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}.$$
Proprietà:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x / a^y = a^{x-y} = 1/a^{y-x}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x / b^x = (a/b)^x = (b/a)^{-x}$
- $a^{-x} = 1/a^x = (1/a)^x$
- $\sqrt[x]{a} = a^{1/x}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- $\sqrt[y]{a^x} = a^{x/y} = (\sqrt[y]{a})^x$

Logaritmi

Se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, allora per definizione:
$$\log_a(b) = c \iff a^c = b$$
Dunque, dati $a > 0$ ed $b > 0$, per definizione $\log_a(b)$ è quel numero $c \in \mathbb{R}$ tale che elevando a a tale numero si ottiene b, cioè $a^c = b$.
Per ricordare tale regola può essere utile il seguente disegno.

$$\log_a(b) = c \iff a^c = b$$

Proprietà:

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(\sqrt[b]{x}) = \frac{1}{b} \cdot \log_a(x)$
- $x^{\log_a(y)} = y^{\log_a(x)}$
- $b \cdot \log_a(x) + c \cdot \log_a(y) = \log_a(x^b \cdot y^c)$
- $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$
- $\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$
- $\log_{b^n}(a) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(a)$
- $-\log_b(a) = \log_b\left(\frac{1}{a}\right) = \log_{1/b}(a)$

Il $\log_a(x)$ è ben definito per $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ed $x > 0$.

Prodotti notevoli

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Potenze di binomi

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale la **formula del binomio di Newton**
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$
dove
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
è il **binomio di Newton**, detto anche **coefficiente binomiale**. Si ricordi che
$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n & \text{altrimenti} \end{cases}$$
è il **fattoriale**. Così ad esempio abbiamo
$$(a+b)^0 = 1,$$
$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Il fatto che $0! = 1$ segue in maniera naturale dal seguente ragionamento. Sappiamo come costruire la seguente lista da sinistra verso destra partendo da $1! = 1$: basta moltiplicare prima per 2, poi per 3, poi per 4 e così via.

$$0! = ? \qquad 1! = 1 \xrightarrow{\times 2} 2! = 2 \xrightarrow{\times 3} 3! = 6 \xrightarrow{\times 4} 4! = 24$$

In realtà, dalla costruzione da sinistra verso destra segue anche la costruzione da destra verso sinistra: invece di moltiplicare basta dividere, ed è pertanto ovvio perché debba essere $0! = 1$.

$$0! = 1 \xleftarrow{\div 1} 1! = 1 \xleftarrow{\div 2} 2! = 2 \xleftarrow{\div 3} 3! = 6 \xleftarrow{\div 4} 4! = 24$$

Per ricordare i coefficienti si può utilizzare il **triangolo di Tartaglia**.

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & (a+b)^0 = 1,\ a+b \neq 0 \\ 1 \quad 1 & (a+b)^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 & (a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & (a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & \end{array}$$

Divisione tra polinomi

Dati due polinomi
$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$
di grado m ed n, con $m \geqslant n \geqslant 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ e a_m, b_n non nulli, si ha che
$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)}$$
dove $P_{m-n}(x)$ e $P_r(x)$ sono *opportuni* polinomi di grado $m - n \geqslant 0$ ed $r < n$, detti **polinomio quoziente** e **polinomio resto**. Per calcolare $P_{m-n}(x)$ e $P_r(x)$ si procede come segue: si divide il monomio di grado più alto di $P_m(x)$ per il monomio di grado più alto di $P_n(x)$; si

moltiplica il monomio così ottenuto per il polinomio divisore $P_n(x)$ e si sottrae il polinomio risultante dal dividendo $P_m(x)$ ottenendo così un nuovo polinomio $\widetilde{P}(x)$ di grado non superiore a $m-1$. Si itera l'operazione precedente con $\widetilde{P}(x)$ al posto di $P_m(x)$, finché il polinomio risultante dalla sottrazione non sarà di grado $r<n$ (si ricordi che una costante è un polinomio di grado zero). Quest'ultimo è il polinomio resto $P_r(x)$, mentre il polinomio quoziente $P_{m-n}(x)$ si ottiene sommando tutti i monomi ottenuti dalle operazioni di divisione. Se $P_r(x)$ è il polinomio identicamente nullo allora $P_m(x)$ è **divisibile** per $P_n(x)$.

Esempio

Dividiamo $P_4(x)=5x^4+3x^3+2x$ per $P_2(x)=x^2+1$. In questo caso $m=4$ e $n=2$. Dividendo il monomio di grado più alto di $P_m(x)$, cioè $5x^4$, per il monomio di grado più alto di $P_n(x)$, cioè x^2, si ottiene $5x^2$. Moltiplicando il monomio così ottenuto, cioè $5x^2$, per il polinomio divisore $P_n(x)$ si ottiene $5x^4+5x^2$, e lo si sottrae dal dividendo $P_m(x)$ ottenendo così $\tilde{P}(x)=3x^3-5x^2+2x$. Iteriamo l'operazione con $\tilde{P}(x)$ al posto di $P_m(x)$. Si ottiene così $P_{m-n}(x)=5x^2+3x-5$, $P_r(x)=-x+5$ e pertanto

$$\frac{5x^4+3x^3+2x}{x^2+1}=\left(5x^2+3x-5\right)+\frac{5-x}{x^2+1}.$$

Le operazioni fatte possono essere schematicamente rappresentate come segue.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+5x^4 & +3x^3 & & +2x & & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & & -5x^2 & & & 5x^2+3x-5 \\ \cline{1-5}
 & +3x^3 & -5x^2 & +2x & & \\
 & -3x^3 & & -3x & & \\ \cline{2-5}
 & & -5x^2 & -x & & \\
 & & +5x^2 & & +5 & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +5 &
\end{array}$$

Divisione di un polinomio per un binomio

Sia $n\in\mathbb{N}$. Dato un polinomio

$$A(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

con $a_n\neq 0$ (quindi $A(x)$ ha grado n) ed un **binomio**

$$B(x)=x-b,$$

si può applicare la **regola di Ruffini** per ottenere il **polinomio quoziente**

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{n-1}q_kx^k=q_{n-1}x^{n-1}+q_{n-2}x^{n-2}+\cdots+q_1x+q_0,$$

ed il **resto** r che è un termine costante (nullo se $A(x)$ è divisibile per $B(x)$), tali che

$$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+r.$$

Per dividere $A(x)$ per $B(x)$ si procede come segue:

- Si prendono i coefficienti di $A(x)$ e si scrivono in ordine. Si scrive poi b in basso a sinistra, proprio sopra la riga.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
b & & & & & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}$$

- Si copia il coefficiente di sinistra a_n in basso subito sotto la riga.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
b & & & & & \\ \hline
 & \underbrace{a_n}_{q_{n-1}} & & & &
\end{array}$$

- Si moltiplica per b il numero più a destra di quelli sotto la riga, ed il risultato lo si scrive sopra la riga, spostato di un posto a destra.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
b & & q_{n-1}\cdot b & & & \\ \hline
 & \underbrace{a_n}_{q_{n-1}} & & & &
\end{array}$$

- Si somma questo valore con quello sopra di lui nella stessa colonna e lo si scrive sotto la riga.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
b & & q_{n-1}\cdot b & & & \\ \hline
 & \underbrace{a_n}_{q_{n-1}} & \underbrace{a_{n-1}+q_{n-1}\cdot b}_{q_{n-2}} & & &
\end{array}$$

- Si procede iterativamente fino al termine dei coefficienti.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
b & & q_{n-1}\cdot b & \ldots & q_1\cdot b & q_0\cdot b \\ \hline
 & \underbrace{a_n}_{q_{n-1}} & \underbrace{a_{n-1}+q_{n-1}\cdot b}_{q_{n-2}} & \ldots & \underbrace{a_1+q_1\cdot b}_{q_0} & \underbrace{a_0+q_0\cdot b}_{r}
\end{array}$$

Se $A(b)=0$, allora $A(x)$ è **divisibile** per $B(x)$, $r=0$ e quindi $A(x)=Q(x)\cdot B(x)$.

Esempio

Dividiamo $A(x)=5x^4+3x^3+x$ per $B(x)=x+1$ utilizzando la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & & -5 & 2 & -2 & 1 \\ \hline
 & 5 & -2 & 2 & -1 & 1
\end{array}$$

e pertanto

$$5x^4+3x^3+x=(5x^3-2x^2+2x-1)(x+1)+1.$$

Capitolo 1

Numeri reali

1 Introduzione

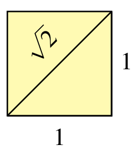
In maniera *non rigorosa*, i numeri reali possono essere descritti come numeri positivi, negativi o nulli, che possono avere uno sviluppo decimale finito o infinito.

Esempio

$-\frac{1}{4} = -0,25$	è un numero negativo con sviluppo decimale finito
$\frac{167}{33} = 5,060606\ldots = 5,\overline{06}$	è un numero positivo con sviluppo decimale (periodico) infinito
$\sqrt{2} = 1,4142\ldots$	è un numero positivo con sviluppo decimale infinito
$\pi = 3,14\ldots$	è un numero positivo con sviluppo decimale infinito
$e = 2,718\ldots$	è un numero positivo con sviluppo decimale infinito

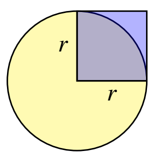
Osservazione

$\sqrt{2}$ è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario.



Osservazione

π è il pi greco ed è il rapporto tra l'area di un cerchio di raggio r e l'area del quadrato di lato r.

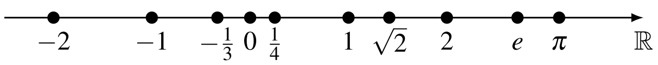


Osservazione

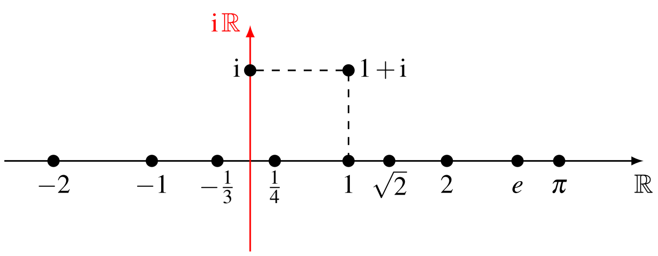
e è il numero di Eulero ed è definito da

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

L'insieme dei numeri reali è indicato con $\mathbb{R}$ e può essere rappresentato con una retta orientata.

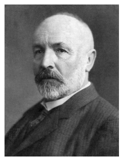


L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ comprende i numeri naturali $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, i numeri interi $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, i numeri razionali $\mathbb{Q} = \{n/m : n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}\}$ ed i numeri irrazionali $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (come $\sqrt{2},\pi,e$). A loro volta, i numeri reali $\mathbb{R}$ sono compresi nei numeri complessi $\mathbb{C}$, che si rappresentano con un piano in cui l'asse orizzontale rappresenta $\mathbb{R}$.



Osservazione

Nel 1874 il matematico Georg Ferdinand Ludwig Philipp **Cantor** riuscì a dimostrare che l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile (cioè può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$), mentre l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è *più che numerabile*. Questo permise di mettere in evidenza che gli insiemi infiniti possono avere differenti ordini di infinità. Le sue teorie non incontrarono subito l'assenso dei colleghi. Ad esempio il matematico Leopold **Kronecker** giudicò le sue scoperte "prive di senso". Impoveritosi durante la prima guerra mondiale, Cantor morì in un ospedale psichiatrico.



Georg **Cantor**
San Pietroburgo, 1845
Halle, 1918

Leopold **Kronecker**
Legnica, 1823
Berlino, 1891

Il paradosso del Grand Hotel di David Hilbert

Consideriamo un hotel con *infinite* stanze, *tutte occupate*. Qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, il furbo albergatore sa come ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito, purché numerabile. Vediamo come ci riesce.
Iniziamo considerando il caso semplice in cui arriva un singolo nuovo ospite. Visto che l'albergo ha tutte le stanze occupate, non è possibile indirizzare il nuovo ospite in una stanza. L'albergatore può però spostare tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, etc.); in questo modo, visto che l'albergo ha un numero infinito di stanze, tutti avranno una stanza e sarà possibile sistemare il nuovo ospite nella 1. È ora chiaro come sistemare n nuovi ospiti: basta spostare l'ospite della 1 alla $n+1$, quello della 2 alla $n+2$, etc., in modo da liberare n stanze.
Consideriamo ora il caso in cui arrivano infiniti nuovi ospiti, ma numerabili. Procedere come nel modo visto in precedenza significherebbe scomodare infinite volte gli ospiti. Piuttosto, in questo caso conviene spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4, etc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono esse stesse infinite, risolvendo dunque il problema. Dunque, anche in questo caso tutti i nuovi ospiti sono sistemati, benché l'albergo fosse pieno.

Osservazione

- La rappresentazione decimale di un numero non è univoca. Ad esempio si ha che 1 e $0,99999\ldots = 0,\overline{9}$ rappresentano lo stesso numero in quanto
$$0,\overline{9} = 0,\overline{3}\cdot 3 = \tfrac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$
- La rappresentazione frazionaria di un numero non è univoca. Ad esempio si ha che
$$1 = \tfrac{1}{1} = \tfrac{2}{2} = \tfrac{3}{3} = \ldots = \tfrac{-1}{-1} = \tfrac{-2}{-2} = \tfrac{-3}{-3} = \ldots$$
Tuttavia, c'è un'unica rappresentazione frazionaria in cui numeratore e denominatore sono primi tra loro ed il denominatore è positivo.

Osservazione

In informatica, i computer possono solo approssimare i numeri irrazionali con numeri razionali. Alcuni programmi riescono a trattare in modo esatto i **numeri irrazionali algebrici**, cioè i numeri che sono soluzioni di equazioni polinomiali con coefficienti interi (ad esempio, $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale algebrico in quanto soluzione dell'equazione $x^2-2=0$). Poiché esiste un'infinità numerabile di equazioni polinomiali con coefficienti interi ma un'infinità più che numerabile di numeri reali, "quasi tutti" i numeri reali non possono essere trattati in maniera esatta da un computer.

La definizione **rigorosa** (cioè matematica) dei numeri reali ha rappresentato uno degli sviluppi più significativi del XIX secolo. Le definizioni maggiormente utilizzate oggi si basano sulle classi di equivalenza di successioni di Cauchy di numeri razionali, oppure sulle sezioni di Dedekind, oppure su una ridefinizione del termine "sviluppo decimale", oppure tramite una caratterizzazione assiomatica come unico campo totalmente ordinato e completo. Noi diamo quest'ultima definizione.

Definizione

L'insieme dei **numeri reali** $\mathbb{R}$ è un campo totalmente ordinato e completo.

In altre parole, l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è l'unico insieme di numeri tale che $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ è un campo totalmente ordinato e $(\mathbb{R},\leqslant)$ è completo. Per completezza, diamo le definizioni di campo, insieme totalmente ordinato, campo ordinato ed insieme completo.

Definizione

Un insieme non vuoto $\mathbb{K}$ è un **campo** se è dotato di due operazioni binarie, chiamate **addizione** $+\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ e **moltiplicazione** $\cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, tali che $\forall a,b,c\in\mathbb{K}$ si ha:

i.1) proprietà commutativa

- $a+b=b+a$ • $a\cdot b=b\cdot a$

i.2) proprietà associativa

- $(a+b)+c=a+(b+c)$ • $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

i.3) proprietà distributiva

- $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

i.4) esistenza degli elementi neutri

- $\exists 0\in\mathbb{R}$ t.c. $a+0=a$ • $\exists 1\in\mathbb{R}$ t.c. $a\cdot 1=a$

i.5) esistenza dell'opposto e dell'inverso

- $\exists -a\in\mathbb{R}$ t.c. $a+(-a)=0$
- se $a\neq 0$ allora $\exists \frac{1}{a}\in\mathbb{R}$ t.c. $a\cdot\frac{1}{a}=1$

Definizione

Un insieme non vuoto X è **ordinato** se è dotato di una relazione binaria "$\leqslant$", chiamata **relazione di minore o uguale**, tale che $\forall a,b,c\in X$ si ha:

ii.1) proprietà riflessiva

- $a\leqslant a$

ii.2) proprietà antisimmetrica

- se $a\leqslant b$ e $b\leqslant a$ allora $a=b$

ii.3) proprietà transitiva

- se $a\leqslant b$ e $b\leqslant c$ allora $a\leqslant c$

Se inoltre vale la

ii.4) proprietà totale

- $a\leqslant b$ oppure $b\leqslant a$

allora l'insieme è **totalmente ordinato**.

Definizione

Un insieme non vuoto $\mathbb{K}$ è un **campo totalmente ordinato** se $(\mathbb{K},+,\cdot)$ è un campo, $(\mathbb{K},\leqslant)$ è totalmente ordinato e $\forall a,b,c\in\mathbb{K}$ si ha:

iii.1) legame tra "$\leqslant$" e "$+$"

- se $a\leqslant b$ allora $a+c\leqslant b+c$

iii.2) legame tra "$\leqslant$" e "$\cdot$"

- se $a\leqslant b$ e $0\leqslant c$ allora $a\cdot c\leqslant b\cdot c$

Definizione

Un insieme ordinato $(X,\leqslant)$ è **completo** se vale la

iv.1) proprietà di completezza: se $A,B\subseteq\mathbb{R}$ sono **separati**, cioè

se $a\in A$ e $b\in B$ allora $a\leqslant b$,

allora esiste un **elemento di separazione** $s\in\mathbb{R}$, cioè

$$a\leqslant s\leqslant b \qquad \forall a\in A \text{ e } \forall b\in B.$$

Concludiamo questa sezione introducendo le operazioni algebriche elementari della sottrazione "$-$" e della divisione "$/$" a partire dalle operazioni algebriche di base, cioè la somma e la moltiplicazione.

Definizione

La **sottrazione** $-\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e la **divisione** $/\colon\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R}$ sono definite come segue:

- $a-b=a+(-b)$, • $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$.

Il **minore** "$<$", il **maggiore o uguale** "$\geqslant$" ed il **maggiore** "$>$" sono definiti come segue

- $a<b \iff (a\leqslant b$ ed $a\neq b)$,
- $a\geqslant b \iff b\leqslant a$,
- $a>b \iff b<a$.

2 Proprietà dei numeri reali

Proposizione

Valgono le seguenti proprietà $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$:

i) legge di cancellazione rispetto alla somma ed al prodotto

- se $a+b=c+b$ allora $a=c$
- se $a\cdot b=c\cdot b$ e $b\neq 0$ allora $a=c$

ii) legge dell'annullamento del prodotto

- $a\cdot 0=0$
- se $a\cdot b=0$ allora $a=0$ oppure $b=0$

iii) unicità dell'opposto e dell'inverso

- l'opposto di un numero reale è unico
- l'inverso di un numero reale è unico

iv) • $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$ • $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

v) • $a>0$ se e solo se $-a<0$
• $a>0$ se e solo se $\frac{1}{a}>0$

vi) • $a\leqslant b$ se e solo se $a-b\leqslant 0$

vii) regola dei segni

- $a\cdot b\geqslant 0$ se e solo se $\begin{cases}a\geqslant 0\\ b\geqslant 0\end{cases}$ oppure $\begin{cases}a\leqslant 0\\ b\leqslant 0\end{cases}$
- $\frac{a}{b}\geqslant 0$ se e solo se $\begin{cases}a\geqslant 0\\ b>0\end{cases}$ oppure $\begin{cases}a\leqslant 0\\ b<0\end{cases}$

viii) • se $a\neq 0$ allora $a^2>0$

Dimostrazione. Nella dimostrazione possiamo utilizzare le proprietà elencate nella definizione di $\mathbb{R}$ e le proprietà che mano a mano andiamo a dimostrare.

i) Si ha

- $a+b=c+b \Longrightarrow a=a+0=a+(b-b)=(a+b)-b$
$=(c+b)-b=c+(b-b)=c+0=c,$
- $a\cdot b=c\cdot b \quad \Longrightarrow a=a\cdot 1=a\cdot\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=(a\cdot b)\cdot\frac{1}{b}$
$=(c\cdot b)\cdot\frac{1}{b}=c\cdot\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=c\cdot 1=c.$

ii) Si ha

- $a\cdot 0=a\cdot 0+0=a\cdot 0+(a\cdot a-a\cdot a)=(a\cdot 0+a\cdot a)-a\cdot a$
$=a\cdot(0+a)-a\cdot a=a\cdot a-a\cdot a=0.$

Per quanto appena dimostrato

- $a\cdot b=0$ e $b\neq 0\Rightarrow a=a\cdot 1=a\cdot\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=(a\cdot b)\cdot\frac{1}{b}=0\cdot\frac{1}{b}=0.$

iii) Si ha

- $a+b=0\Rightarrow b=b+0=b+(a-a)=(b+a)-a=0-a=-a,$
- $a\cdot b=1\Rightarrow a\neq 0$ e $b=b\cdot 1=b\cdot\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=(b\cdot a)\cdot\frac{1}{a}=1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.$

iv) Per l'unicità dell'opposto e l'annullamento del prodotto

- $a\cdot b+(-a)\cdot b=(a+(-a))\cdot b=0\cdot b=0\Longrightarrow(-a)\cdot b=-(a\cdot b).$

Per quanto appena dimostrato, l'annullamento del prodotto e la legge di cancellazione

- $(-a)\cdot(-b)-(a\cdot b)=(-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot b=(-a)\cdot(-b+b)$
$=-a\cdot 0=0=a\cdot b-(a\cdot b)\Longrightarrow(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$

v) • Si ha $a>0\Longleftrightarrow a+(-a)>0+(-a)\Longleftrightarrow 0>-a.$

- Assumiamo per assurdo che $a>0$ e $1/a<0$. Allora

$$a>0 \text{ e } \frac{1}{a}<0\Longrightarrow a\cdot\frac{1}{a}<a\cdot 0\Longrightarrow 1<0$$

ma questo è assurdo.

vi) • $a\leqslant b\Longleftrightarrow a+(-b)\leqslant b+(-b)\Longleftrightarrow a-b\leqslant 0$

vii) • "$\Longrightarrow$" Dimostriamo che

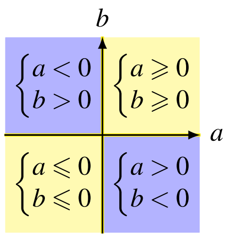
$$a\cdot b\geqslant 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}a\geqslant 0\\ b\geqslant 0\end{cases} \text{ oppure } \begin{cases}a\leqslant 0\\ b\leqslant 0.\end{cases}$$

Procediamo per assurdo. Assumiamo che non sia vero che

$$\begin{cases}a\geqslant 0\\ b\geqslant 0\end{cases} \text{ oppure } \begin{cases}a\leqslant 0\\ b\leqslant 0,\end{cases}$$

ovvero che

$$\begin{cases}a>0\\ b<0\end{cases} \text{ oppure } \begin{cases}a<0\\ b>0.\end{cases}$$



Nel primo caso $a>0$ e $b<0$, per **iii.2)** si ha

$$b<0\Longrightarrow a\cdot b<a\cdot 0=0$$

e quindi $a\cdot b\geqslant 0$ non è soddisfatto. Nel secondo caso $a<0$ e $b>0$, per **iii.2)** si ha

$$a<0\Longrightarrow a\cdot b<0\cdot b=0$$

e quindi $a\cdot b\geqslant 0$ non è soddisfatto.

"$\Longleftarrow$" Se $a\geqslant 0$ e $b\geqslant 0$, allora per **iii.2)** si ha

$$a\geqslant 0\Longrightarrow a\cdot b\geqslant 0\cdot b=0.$$

Se $a\leqslant 0$ e $b\leqslant 0$, allora $-a\geqslant 0$, $-b\geqslant 0$ e quindi, per quanto appena dimostrato e per **iv**)$_2$ si ha

$$0\leqslant(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$$

- La seconda asserzione segue dalla prima e dal fatto che $1/b>0$ se e solo se $b>0$.

viii) Basta applicare la legge dell'annulamento del prodotto (**ii)**) e la regola dei segni (**vii)**). □

3 Equazioni di secondo grado

Teorema

Per ogni $a\geqslant 0$ esiste un unico $b\geqslant 0$ tale che

$$b^2=a.$$

Dimostrazione. Se $a=0$, allora per la legge dell'annullamento del prodotto deve essere $b=0$. Se $a\neq 0$, allora $b\neq 0$ e quindi deve essere $a=b^2>0$.

Esistenza. Dimostriamo che

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0,\ x^2\leqslant a\right\},\quad B=\left\{y\in\mathbb{R}:y>0,\ a\leqslant y^2\right\}$$

sono separati: se $x\in A$ ed $y\in B$, allora

$$x^2\leqslant a\leqslant y^2\Longrightarrow x^2\leqslant y^2\Longleftrightarrow x^2-y^2\leqslant 0$$
$$\Longleftrightarrow(x-y)\underbrace{(x+y)}_{>0}\leqslant 0\Longleftrightarrow x-y\leqslant 0\Longleftrightarrow x\leqslant y.$$

A e B sono dunque separati e per la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ esiste un elemento di separazione b tale che

$$x\leqslant b\leqslant y \qquad \forall x\in A \qquad \text{e} \qquad \forall y\in B.$$

Notiamo che l'elemento di separazione b è strettamente positivo in quanto, dato un $x\in A$, si ha $b\geqslant x>0$. Dimostriamo ora che $b^2=a$ ragionando per assurdo.

Primo caso: $b^2<a$. Basta dimostrare che esiste $\varepsilon>0$ tale che $(b+\varepsilon)^2\leqslant a$, perché in tal caso $x=b+\varepsilon\in A$ e $x>b$, ma questo contraddice la definizione di elemento di separazione. Se $\varepsilon\in(0,1)$, allora $\varepsilon^2<\varepsilon$ e quindi

$$x^2=(b+\varepsilon)^2=b^2+2b\varepsilon+\varepsilon^2<b^2+2b\varepsilon+\varepsilon=b^2+\varepsilon(2b+1).$$

Osserviamo che

$$b^2+\varepsilon(2b+1)\leqslant a\Longleftrightarrow\varepsilon\leqslant\frac{a-b^2}{2b+1},$$

dove $\frac{a-b^2}{2b+1}>0$ in quanto $b^2<a$ e $b>0$. Quindi basta prendere un qualsiasi ε nell'intervallo

$$\left(0,\frac{a-b^2}{2b+1}\right]\cap(0,1)$$

per ottenere una $x=b+\varepsilon$ con le proprietà volute in quanto

$$\varepsilon>0\Longrightarrow x=b+\varepsilon>b,$$

$$\varepsilon\leqslant\frac{a-b^2}{2b+1} \text{ ed } \varepsilon<1\Longrightarrow x^2=(b+\varepsilon)^2<b^2+\varepsilon(2b+1)\leqslant a.$$

Secondo caso: $b^2>a$. Basta dimostrare che esiste $y\in B$ tale che $y<b$, perché allora avremmo un assurdo per la definizione di elemento di separazione. Questo equivale a dimostrare che esiste $\varepsilon\in(0,b)$ tale che $y=b-\varepsilon\in B$, ovvero $y^2\geqslant a$. Osserviamo che

$$(b-\varepsilon)^2=b^2-2b\varepsilon+\varepsilon^2>b^2-2b\varepsilon\geqslant a\Longleftrightarrow\varepsilon\leqslant\frac{b^2-a}{2b}$$

e quindi basta prendere un qualsiasi ε nell'intervallo

$$\left(0,\frac{b^2-a}{2b}\right]\cap(0,b).$$

Visto che abbiamo un assurdo sia se assumiamo $b^2<a$, che se assumiamo $b^2>a$, l'unica possibilità è che $b^2=a$.

Unicità. Per dimostrare l'unicità basta far vedere che se $c>0$ è tale che $c^2=a$, allora $c=b$. Dimostriamolo ragionando per assurdo.

I caso: se $c<b$, allora moltiplicando (a destra e a sinistra) per c si ha $c^2<b\cdot c$, mentre moltiplicando per b si ha $c\cdot b<b^2$; quindi per la proprietà transitiva $c^2<b^2=a\Rightarrow c^2\neq a$ e questo è assurdo.

II caso: analogamente, se $c>b$, allora $c^2>b^2=a\Rightarrow c^2\neq a$ e questo è assurdo.

Visto che abbiamo un assurdo sia se assumiamo $c<b$, che se assumiamo $c>b$, l'unica possibilità è che $c=b$. □

Definizione

Per ogni $a\geqslant 0$, il numero $b\geqslant 0$ tale che $b^2=a$ viene indicato col simbolo $\sqrt{a}$ ed è chiamato la **radice quadrata** di a.

Osservazione

Si noti che se $a \neq 0$, allora $(-\sqrt{a})^2 = a$ e $-\sqrt{a} < 0 < \sqrt{a}$. Dunque $\sqrt{a}$ non è l'unico numero il cui quadrato è a; piuttosto esso è l'unico numero positivo il cui quadrato è a.

Proposizione

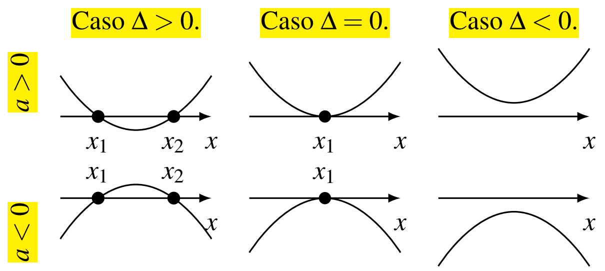
Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Per determinare le soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'equazione (algebrica) di secondo grado
$$ax^2 + bx + c = 0$$
si calcola il **delta** (detto anche **discriminante**) dell'equazione
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
e si distinguono i seguenti casi.

- Se $\Delta > 0$, allora l'equazione ha due soluzioni (distinte) e sono
$$x_1 = \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Se $\Delta = 0$, allora l'equazione ha come unica soluzione
$$x_1 = \tfrac{-b}{2a}.$$
- Se $\Delta < 0$, allora l'equazione non ha soluzione (in $\mathbb{R}$).

Dimostrazione. Osserviamo che se $\Delta > 0$ allora
$$a(x-x_1)(x-x_2) = a\left(\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)+\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)-\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$= a\left(\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\right)$$
e che
$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\right). \qquad (\clubsuit)$$
Dunque $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ e quindi il caso $\Delta > 0$ è sistemato. Per gli altri casi basta osservare che la formula ($\clubsuit$) vale anche per $\Delta \leqslant 0$. □

Osservazione

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, vedremo che il grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una parabola e che i tre casi appena descritti corrispondono ai tre casi riportati in figura.



Regola di Cartesio

Il massimo numero di radici reali positive di un'equazione di secondo grado è dato dal numero di variazioni di segno fra coefficienti consecutivi, trascurando eventuali coefficienti nulli.

René **Descartes**
La Haye en Touraine (oggi Descartes), 1596
Stoccolma, 1650

Ad esempio:
- l'equazione $x^2 + x - 1 = 0$ ammette una soluzione positiva;
- l'equazione $x^2 - 3x + 1 = 0$ ha due soluzioni positive;
- l'equazione $x^2 - x + 1 = 0$ non ha radici reali (positive).

Esempio

Vediamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione nell'incognita x
$$\tfrac{x+1}{x^2+x+1} = a \qquad (\spadesuit)$$
ammette almeno una soluzione. L'equazione di secondo grado
$$x^2 + x + 1 = 0$$
ha $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ e quindi non ha soluzione in $\mathbb{R}$. Pertanto
$$x^2 + x + 1 \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
e quindi il denominatore non si annulla mai. Dunque si ha che
$$(\spadesuit) \iff ax^2 + (a-1)x + a - 1 = 0.$$
L'equazione di secondo grado ottenuta ha almeno una soluzione se e solo se ha $\Delta \geqslant 0$, ovvero
$$\Delta = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (a-1)(a-1-4a)$$
$$= (a-1)(-3a-1) \geqslant 0 \iff a \in [-1/3, 1].$$
In conclusione l'equazione ($\spadesuit$) ammette almeno una x-soluzione se e solo se $a \in [-1/3, 1]$.

4 Numeri complessi

Come già dimostrato, un'equazione di secondo grado a coefficienti reali non ha soluzioni reali se e solo se $\Delta < 0$. Ad esempio, questo è il caso di
$$x^2 + 1 = 0.$$
Questo motiva l'introduzione dell'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$, che contiene $\mathbb{R}$ ed in cui qualsiasi equazione di secondo grado a coefficienti reali ha (almeno) una soluzione.

Definizione

Un **numero complesso** è un numero che può essere espresso nella forma algebrica $a + \mathrm{i}b$, dove a e b sono numeri reali ed i è l'**unità immaginaria**. L'insieme dei **numeri complessi** si indica con $\mathbb{C}$.

La **parte reale** e la **parte immaginaria** di un numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$ sono rispettivamente
$$\Re e(z) = a \qquad \text{ed} \qquad \Im m(z) = b.$$
In $\mathbb{C}$ l'**addizione** $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e la **moltiplicazione** $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono definite come segue:
$$(a+\mathrm{i}b) + (c+\mathrm{i}d) = (a+c) + \mathrm{i}(b+d),$$
$$(a+\mathrm{i}b) \cdot (c+\mathrm{i}d) = (a \cdot c - b \cdot d) + \mathrm{i}(a \cdot d + b \cdot c).$$

Osservazione

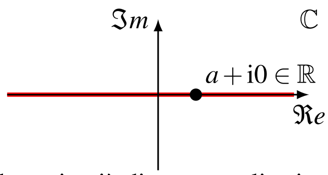
Per moltiplicare numeri complessi basta ricordare che $\mathrm{i}^2 = -1$; infatti, ad esempio, si ha

- $\mathrm{i}^2 = (0+\mathrm{i}1)\cdot(0+\mathrm{i}1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + \mathrm{i}(0\cdot 1 + 1\cdot 0) = -1,$
- $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = ac + a\mathrm{i}d + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2bd = ac - bd + \mathrm{i}(ad+bc),$
- $\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2-(\mathrm{i}b)^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2},$
- $(1+\mathrm{i})^6 = \left((1+\mathrm{i})^2\right)^3 = \left(1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2\right)^3 = (2\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}^3 = -8\mathrm{i}.$

Proposizione

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Se $a \in \mathbb{R}$, allora $a = a + \mathrm{i}0 \in \mathbb{C}$ e quindi
$$\mathbb{R} = \mathbb{R} + \mathrm{i}0 = \{x + \mathrm{i}0 \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$
D'altro canto, questo corrisponde al fatto che i numeri reali $\mathbb{R}$ sono rappresentati dall'asse orizzontale nel piano complesso.



In realtà vale qualcosa in più di una semplice inclusione di insiemi, in quanto l'addizione $+_{\mathbb{C}}$ e la moltiplicazione $\cdot_{\mathbb{C}}$ tra numeri complessi si riducono all'addizione $+_{\mathbb{R}}$ ed alla moltiplicazione $\cdot_{\mathbb{R}}$ tra

numeri reali se sono coinvolti numeri reali, ovvero
$$+_{\mathbb{C}}\big|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \equiv +_{\mathbb{R}}, \qquad \cdot_{\mathbb{C}}\big|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \equiv \cdot_{\mathbb{R}}.$$
Infatti $\forall a, c \in \mathbb{R}$ si ha che
$$\begin{aligned} a +_{\mathbb{C}} c &= (a+\mathrm{i}0) +_{\mathbb{C}} (c+\mathrm{i}0) = (a +_{\mathbb{R}} c) + \mathrm{i}(0 +_{\mathbb{R}} 0) = a +_{\mathbb{R}} c, \\ a \cdot_{\mathbb{C}} c &= (a+\mathrm{i}0) \cdot_{\mathbb{C}} (c+\mathrm{i}0) = (a \cdot_{\mathbb{R}} c - 0 \cdot_{\mathbb{R}} 0) + \mathrm{i}(a \cdot_{\mathbb{R}} 0 + 0 \cdot_{\mathbb{R}} c) \\ &= a \cdot_{\mathbb{R}} c. \end{aligned}$$
□

Proposizione

Per l'addizione e la moltiplicazione tra numeri complessi valgono la proprietà commutativa, associativa, distributiva, esistenza degli elementi neutri, esistenza dell'opposto e dell'inverso.

Dimostrazione. L'elemento neutro per l'addizione è $0 = 0 + \mathrm{i}0$ in quanto $\forall a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ si ha che
$$(a+\mathrm{i}b) + (0+\mathrm{i}0) = (a+0) + \mathrm{i}(b+0) = a + \mathrm{i}b.$$
L'elemento neutro per la moltiplicazione è $1 = 1 + \mathrm{i}0$ in quanto $\forall a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ si ha che
$$(a+\mathrm{i}b)\cdot(1+\mathrm{i}0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0) + \mathrm{i}(a\cdot 0 + b\cdot 1) = a + \mathrm{i}b.$$
Dimostriamo che $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}\setminus\{0+\mathrm{i}0\}$ è invertibile. Calcoliamo il suo inverso $x + \mathrm{i}y$. Visto che $(a,b) \neq (0,0)$, abbiamo $a^2+b^2 \neq 0$ e quindi
$$\begin{aligned} &(a+\mathrm{i}b)\cdot(x+\mathrm{i}y) = 1 + \mathrm{i}0 \\ \iff &(a\cdot x - b\cdot y) + \mathrm{i}(a\cdot y + b\cdot x) = 1 + \mathrm{i}0 \\ \iff &\begin{cases} a\cdot x - b\cdot y = 1 \\ a\cdot y + b\cdot x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a^2\cdot x - ab\cdot y = a \\ ab\cdot y + b^2\cdot x = 0 \\ ab\cdot x - b^2\cdot y = b \\ a^2\cdot y + ab\cdot x = 0 \end{cases} \\ \implies &\begin{cases} (a^2+b^2)\cdot x = a \\ (a^2+b^2)\cdot y = -b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a}{a^2+b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2+b^2}. \end{cases} \end{aligned}$$
Dunque l'elemento candidato ad essere l'inverso di $a + \mathrm{i}b$ è
$$\frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2}$$
ed in effetti
$$\begin{aligned} &(a+\mathrm{i}b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \\ &= \left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2} - b\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}\right) + \mathrm{i}\left(a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2} + b\cdot\frac{a}{a^2+b^2}\right) = 1 + \mathrm{i}0. \end{aligned}$$
La dimostrazione delle altre proprietà è lasciata come esercizio per casa. □

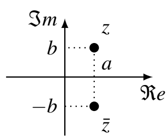
Proposizione

Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha
$$\begin{aligned} (z+w)^2 &= z^2 + 2zw + w^2 & (z+w)^3 &= z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3 \\ (z-w)^2 &= z^2 - 2zw + w^2 & (z-w)^3 &= z^3 - 3z^2w + 3zw^2 - w^3 \\ z^2 - w^2 &= (z-w)(z+w) & z^3 + w^3 &= (z+w)(z^2 - zw + w^2) \\ & & z^3 - w^3 &= (z-w)(z^2 + zw + w^2) \end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata come esercizio per casa. □

Definizione

Il **numero complesso coniugato** di
$$z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$$
è
$$\bar{z} = a - \mathrm{i}b \in \mathbb{C}.$$

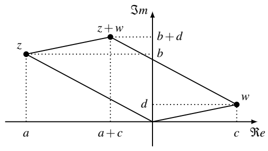


Proposizione

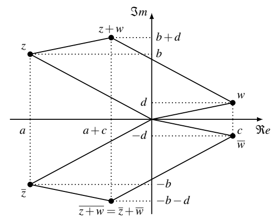
Se $z = a + \mathrm{i}b$, $w = c + \mathrm{i}d \in \mathbb{C}$ ed $n \in \mathbb{N}$, allora
$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{n\cdot z} = n\cdot\bar{z}, \qquad \overline{(\bar{z})} = z,$$
$$\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}, \qquad \overline{z^n} = (\bar{z})^n, \qquad z\cdot\bar{z} = a^2 + b^2,$$
$$\Re e(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \Im m(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}, \qquad z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

Dimostrazione. La verifica è lasciata come esercizio per casa. □

Osservazione



Visto che ad ogni numero complesso $a + \mathrm{i}b$ restano associati due numeri reali a e b, possiamo rappresentare $\mathbb{C}$ nel piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Questo permette di dare un'interpretazione geometrica della somma, detta **regola del parallelogramma**.
È infatti facile vedere che la somma di due numeri complessi $z = a + \mathrm{i}b$ e $w = c + \mathrm{i}d$, cioè il numero $z + w = (a+c) + \mathrm{i}(b+d)$, corrisponde al vertice di coordinate $(a+c, b+d)$ del parallelogramma disegnato come in figura.
Inoltre, questo permette di dare una dimostrazione geometrica della uguaglianza $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, come mostrato in figura.



Infine, le uguaglianze $\Re e(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $\Im m(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} = \frac{(z-\bar{z})\cdot\mathrm{i}}{2}$ si possono dimostrare analogamente.
Per quanto riguarda invece la visualizzazione del prodotto di numeri complessi, conviene prima studiare la rappresentazione trigonometrica o quella esponenziale dei numeri complessi, cosa che faremo più avanti.

Esempio

Per calcolare la parte reale e quella immaginaria di
$$z = \frac{1}{\mathrm{i}}$$
basta osservare che
$$\Re e(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{i}} + \overline{\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{1}{\mathrm{i}}\right) = 0,$$
$$\Im m(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}} - \overline{\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}} + \frac{1}{\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{2}{\mathrm{i}} = -1.$$
In alternativa, si può osservare che
$$z = \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{-1} = -\mathrm{i}$$
e quindi
$$\Re e(z) = 0, \qquad \Im m(z) = -1.$$

Esempio

Per calcolare la parte reale e quella immaginaria di
$$z = \frac{3+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$$
basta osservare che
$$z = \frac{3+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(3+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{6-2+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}$$
e quindi
$$\Re e(z) = 4/5, \qquad \Im m(z) = 7/5.$$

Esempio

Per calcolare la parte reale e quella immaginaria di
$$z = (2-3\mathrm{i})^3$$
basta applicare la formula $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ con $a = 2$ e $b = -3\mathrm{i}$, ottenendo che
$$z = 8 + 3\cdot 4\cdot(-3\mathrm{i}) + 3\cdot 2\cdot(-3\mathrm{i})^2 + (-3\mathrm{i})^3$$

$$= 8 - 36\mathrm{i} - 54 + 27\mathrm{i} = -46 - 9\mathrm{i}$$
e quindi
$$\Re e(z) = -46, \qquad \Im m(z) = -9.$$

Esempio

Calcoliamo
$$\mathrm{i}^{387}.$$
Prima osserviamo che le potenze naturali di i possono assumere solo i seguenti quattro valori
$$\mathrm{i}, \quad -1, \quad -\mathrm{i}, \quad 1.$$
Dividendo 387 per 4 otteniamo che $387 = 4 \cdot 96 + 3$ e quindi
$$\mathrm{i}^{387} = (\mathrm{i}^4)^{96}\mathrm{i}^3 = (1)^{96}\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}.$$
In alternativa, si può procedere come segue:
$$\mathrm{i}^{387} = \mathrm{i}^{2\cdot 193+1} = (\mathrm{i}^2)^{193} \cdot \mathrm{i} = (-1)^{193} \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}.$$

Esempio

Per dimostrare che
$$\left(\tfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 = \left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^6$$
basta applicare la formula $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ottenendo che
$$\left(\tfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}(-1 + 3\sqrt{3}\mathrm{i} + 9 - 3\sqrt{3}\mathrm{i}) = 1,$$
$$\left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \tfrac{1+3\sqrt{3}\mathrm{i}-9-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{8} = -1$$
$$\Rightarrow \left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(\left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$
In alternativa, una volta dimostrata la prima uguaglianza, si può sfruttare la formula $\overline{z^3} = \overline{z}^3$ con $z = \left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3$, ottenendo che
$$\left(\tfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \Longrightarrow$$
$$1 = \overline{1} = \overline{\left(\tfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \left(\overline{\tfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}\right)^3 = \left(\tfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$\Longrightarrow \left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(-\left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Un'importante proprietà dei numeri reali $\mathbb{R}$ che si perde introducendo $\mathbb{C}$ è quella dell'ordinamento.

Proposizione

Non è possibile introdurre in $\mathbb{C}$ un ordinamento totale.

Dimostrazione. Dimostriamolo per assurdo. Assumiamo che in $\mathbb{C}$ esista un ordinamento totale $\leqslant$, la cui restrizione ad $\mathbb{R}$ sia magari diversa da quella introdotta in $\mathbb{R}$. Visto che $\mathrm{i} \neq 0$, avremmo $0 < \mathrm{i}$ oppure $\mathrm{i} < 0$. Se $0 < \mathrm{i}$, allora $0 \cdot \mathrm{i} < \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} \Longleftrightarrow 0 < -1$, sommando 1 si ottiene $1 < 0$ e moltiplicando per i otteniamo che $\mathrm{i} < 0$, ma questo contraddice l'ipotesi. Una contraddizione analoga si ottiene se si assume che $\mathrm{i} < 0$. □

Teorema fondamentale dell'Algebra

- Per ogni $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, l'equazione algebrica
$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$
ammette n soluzioni complesse (contate con la loro molteplicità).
- Se $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ è soluzione, allora anche $\overline{z_0}$ è soluzione.
- Se $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ed n è dispari, allora esiste sempre almeno una soluzione reale.

Dimostrazione. La prima asserzione sarà dimostrata solo nel caso $n = 2$ nella seguente proposizione. Per semplicità, qui dimostriamo solo le ultime due asserzioni e solo per $n = 3$. Fissati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, consideriamo il polinomio di terzo grado $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$. Per le proprietà della coniugazione
$$\overline{P(z)} = \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d} = a\overline{z}^3 + b\overline{z}^2 + c\overline{z} + d = P(\overline{z}).$$
Dunque, se z_1 è una soluzione, allora anche $\overline{z_1}$ lo è. Pertanto il numero delle soluzioni complesse e non reali è pari. Per la prima asserzione, le soluzioni sono tre e quindi almeno una di esse deve essere reale. □

Proposizione

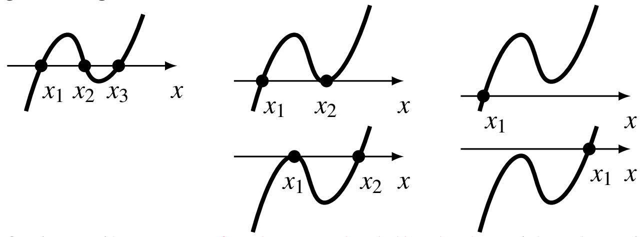
Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Per determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione (algebrica) di secondo grado
$$az^2 + bz + c = 0$$
si calcola il discriminante
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
e si distinguono i seguenti casi.
- Se $\Delta > 0$, allora l'equazione ha due soluzioni (distinte) reali (e quindi anche complesse), e sono
$$z_1 = \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad z_2 = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Se $\Delta = 0$, allora l'equazione ha un'unica soluzione reale (e quindi anche complessa), ed è
$$z_1 = \tfrac{-b}{2a}.$$
- Se $\Delta < 0$, allora l'equazione ha due soluzioni (distinte) complesse e non reali, e sono
$$z_1 = \tfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad z_2 = \tfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Dimostrazione. Se $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, è una soluzione, allora
$$0 = az^2 + bz + c = a\big(x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2\big) + b(x + \mathrm{i}y) + c$$
$$= \big(ax^2 - ay^2 + bx + c\big) + \mathrm{i}(2axy + by)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - ay^2 + bx + c = 0 \\ (2ax + b)y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ ay^2 = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$
(il primo sistema non ha soluzione perché $\Delta < 0$ ed $x \in \mathbb{R}$)
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$
e quindi abbiamo che z_1 e z_2 sono tutte e sole le soluzioni.

In alternativa, come fatto per le equazioni di secondo grado in $\mathbb{R}$, basta verificare che
$$a \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) = az^2 + bz + c$$
e questo termina la dimostrazione. □

Osservazione 1.1

Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, il grafico del polinomio di terzo grado $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ è uno tra quelli rappresentati nella seguente figura.



Infatti, per il teorema fondamentale dell'Algebra si ha che esiste $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_1) = 0$. Pertanto $P(z) = a(z - x_1)Q(z)$ dove $Q(z)$ è un polinomio di secondo grado a cui possiamo applicare la proposizione precedente. Pertanto, se Δ è il discriminante di

$Q(z)$, allora la figura a sinistra corrisponde al caso $\Delta > 0$, le due figure centrali corrispondono al caso $\Delta = 0$, ed infine le due figure a destra corrispondono al caso $\Delta < 0$.

Osservazione

Una soluzione in $\mathbb{C}$ dell'equazione
$$z^2 + 1 = 0 \qquad (\clubsuit)$$
è $z = \mathrm{i}$ in quanto
$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + \mathrm{i}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = -1.$$
Un'altra soluzione in $\mathbb{C}$ dell'equazione ($\clubsuit$) è $z = -\mathrm{i}$. La verifica è lasciata come esercizio per casa.

Esempio

Risolviamo l'equazione di secondo grado
$$z^2 - \mathrm{i} = 0.$$
Posto $z = x + \mathrm{i}y$, deve essere
$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = \mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y \\ -2x^2 = 1 \end{cases}$$
(il secondo sistema non ha soluzioni)
$$\iff \begin{cases} x = 1/\sqrt{2} \\ y = 1/\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1/\sqrt{2} \\ y = -1/\sqrt{2} \end{cases}$$
e quindi le due soluzioni sono
$$z_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}), \qquad z_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}).$$

5 Principali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

Definizione

L'insieme dei **numeri naturali** è $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
L'insieme dei **numeri interi relativi** è $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.
L'insieme dei **numeri razionali** è $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$.

Per dimostrare che $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ non coincidono con $\mathbb{R}$, basta verificare che tali insiemi non soddisfano tutte le proprietà elencate nella definizione di $\mathbb{R}$.

Proposizione

- $\mathbb{N}$ non soddisfa la proprietà di esistenza dello zero, dell'esistenza dell'opposto o dell'inverso.
- $\mathbb{Z}$ non soddisfa la proprietà dell'esistenza dell'inverso.
- $\mathbb{Q}$ non soddisfa la proprietà di completezza.

Dimostrazione. La dimostrazione delle prime due asserzioni è lasciata come esercizio per casa. Per verificare l'ultima asserzione basta verificare che i due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$
$$A = \{ r \in \mathbb{Q} : r > 0,\ r^2 \leqslant 2 \}, \qquad B = \{ s \in \mathbb{Q} : s > 0,\ s^2 \geqslant 2 \}$$
sono separati, ma non esiste in $\mathbb{Q}$ un elemento di separazione. □

Proposizione

Le seguenti inclusioni valgono strettamente.
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

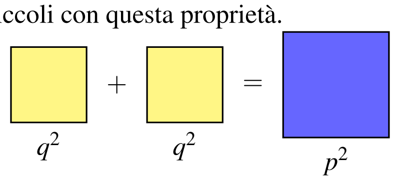
Dimostrazione. $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$ perché $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, come dimostrato nel seguente lemma; le restanti inclusioni sono lasciate come esercizio per casa. □

Lemma

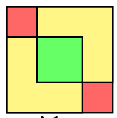
$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per assurdo.
I metodo (analitico). Se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, allora esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Possiamo assumere che p e q siano primi tra loro. Risulta dunque
$$2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2$$
e quindi p^2 è (un numero) pari. Verifichiamo che anche p è pari. Se per assurdo p è dispari, ossia è della forma $p = 2p_0 + 1$ per un $p_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, allora $p^2 = (2p_0 + 1)^2 = 4p_0(p_0 + 1) + 1$ è dispari e questo ci dà una contraddizione. Dunque anche p è pari, ossia esiste $p_0 \in \mathbb{N}$ tale che $p = 2p_0$. Si ha pertanto
$$p^2 = 4p_0^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2p^2.$$
Dunque q^2 è pari e quindi anche q è pari. Questo è però assurdo perché due numeri pari non sono primi tra loro.

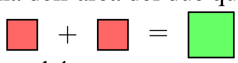
II metodo (geometrico). Oltre alla dimostrazione analitica appena conclusa, possiamo dare una dimostrazione geometrica. Riprendiamo dall'uguaglianza $p^2 = 2q^2$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Con riferimento alla figura seguente, tale uguaglianza significa che la somma dell'area di due quadrati gialli di lato q è pari all'area del quadrato blu di lato p. Visto che $p, q \in \mathbb{N}$, possiamo assumere che questi siano i quadrati più piccoli con questa proprietà.



Sovrapponiamo al quadrato blu i due quadrati gialli come nella figura seguente.



In verde abbiamo messo in evidenza l'area in cui i due quadrati gialli si sovrappongono ed in rosso l'area del quadrato blu non coperta dai due quadrati gialli. È chiaro che i due quadrati gialli non possono non sovrapporsi visto che non tutto il quadrato blu è coperto dai due quadrati gialli. Si ha quindi che l'area del quadrato verde è pari alla somma dell'area dei due quadrati rossi.



Ma questo è assurdo perché avevamo assunto che i quadrati gialli e blu erano i più piccoli con questa proprietà. □

6 Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ dati tramite disuguaglianze

Siamo interessati a studiare sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ corrispondenti a delle disuguaglianze.

Caso generale: funzioni

Per prima cosa definiamo cosa è una funzione, il suo grafico ed introduciamo la somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni.

Definizione

Una **funzione** f da $A \subseteq \mathbb{R}$ a valori in $B \subseteq \mathbb{R}$, o più brevemente $f : A \to B$, è una legge che associa ad ogni elemento x di A uno ed un solo elemento $y = f(x)$ di B. Il suo **grafico** è dato dai punti $(x, f(x)) \in A \times B$ al variare di x in A.

Definizione

Siano $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ due funzioni.

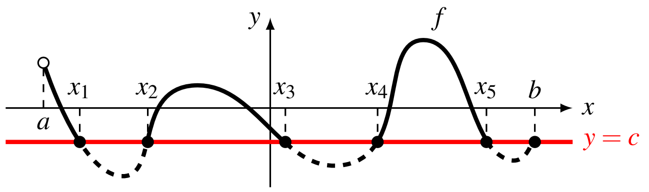
- La **somma** di f e g è la funzione $f+g \colon A \to \mathbb{R}$ definita da $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- La **differenza** di f e g è la funzione $f-g \colon A \to \mathbb{R}$ definita da $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$.
- Il **prodotto** di f e g è la funzione $f \cdot g \colon A \to \mathbb{R}$ definita da $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- Se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora il **quoziente** di f e g è la funzione $f/g \colon A \to \mathbb{R}$ definita da $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

Se si vuole determinare l'insieme $X = \{x \in A : f(x) \geqslant c\}$ e si conosce il grafico di f, allora basta calcolare (se esistono) i punti di intersezione del grafico di f con la retta orizzontale $y = c$ e considerare le x corrispondenti alle parti del grafico di f che si trovano sopra tale retta.

Esempio

Se il grafico di $f \colon (a,b] \to \mathbb{R}$ e la retta $y = c$ sono come in figura, allora

$$\{x \in (a,b] : f(x) \geqslant c\} = (a,x_1] \cup [x_2,x_3] \cup [x_4,x_5] \cup \{b\}.$$



Consideriamo ora un caso meno semplice. Siano $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ delle funzioni. Per determinare l'insieme

$$X = \left\{x \in \mathbb{R} : \tfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant \tfrac{h(x)}{k(x)}\right\}$$

basta studiare la disuguaglianza

$$\tfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant \tfrac{h(x)}{k(x)} \Leftrightarrow \tfrac{f(x)}{g(x)} - \tfrac{h(x)}{k(x)} = \tfrac{f(x)\cdot k(x) - g(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot k(x)} \geqslant 0.$$

Per la regola dei segni **vii)** l'ultima disuguaglianza è soddisfatta se e solo se

$$I\colon \begin{cases} f(x)\cdot k(x) - g(x)\cdot h(x) \geqslant 0 \\ g(x)\cdot k(x) > 0 \end{cases} \vee \quad II\colon \begin{cases} f(x)\cdot k(x) - g(x)\cdot h(x) \leqslant 0 \\ g(x)\cdot k(x) < 0. \end{cases}$$

Dunque, se $X_I \subseteq \mathbb{R}$ corrisponde al primo sistema e $X_{II} \subseteq \mathbb{R}$ corrisponde al secondo sistema, allora

$$X = X_I \cup X_{II}.$$

Di seguito consideriamo dei casi meno generali per i quali si riesce a dire qualcosa in più (in generale).

Primo caso particolare: polinomi

Tra le funzioni più semplici ci sono i polinomi. Iniziamo dando la definizione di polinomio ed alcune proprietà di base dei polinomi.

Definizione

Un **polinomio** di **grado** n è una funzione $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

per certe costanti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ed $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposizione

- Le funzioni costanti sono dei polinomi di grado zero: $p(x) = a_0$.
- La somma, la differenza ed il prodotto di polinomi è un polinomio.
- Se $p(x_0) = 0$, allora il polinomio $p(x)$ di grado $n \geqslant 1$ è divisibile per il binomio $q(x) = x - x_0$, ovvero esiste un polinomio $r(x)$ di grado $n-1$ tale che $p(x) = q(x) \cdot r(x)$.

Osservazione

Dall'ultimo punto della proposizione precedente segue che se x_1 ed x_2 sono due soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

allora

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Inoltre, visto che $c = a x_1 x_2$, nel caso speciale in cui $c/a, x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, si ha che x_1 ed x_2 sono divisori di c/a.

Più in generale, se $x_1, \ldots, x_n$ sono radici dell'equazione di grado n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

allora

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Inoltre, visto che $a_0 = a_n x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, nel caso speciale in cui $a_0/a_n, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, si ha che $x_1, \ldots, x_n$ sono divisori di a_0/a_n.

Esempio

Visto che gli zeri del polinomio di quarto grado[a]

$$p(x) = 3x^4 - 15x^3 - 21x^2 + 87x + 90$$

sono $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 5$, si ha che

$$p(x) = 3(x+2)(x+1)(x-3)(x-5).$$

In alternativa, utilizziamo Ruffini per fare la divisione tra polinomi come segue. Dividiamo $p(x)$ per $x+2$:

	3	−15	−21	87	90
−2		−6	42	−42	−90
	3	−21	21	45	0

e quindi

$$p(x) = (x+2)(3x^3 - 21x^2 + 21x + 45).$$

Dividiamo $3x^3 - 21x^2 + 21x + 45$ per $x+1$:

	3	−21	21	45
−1		−3	24	−45
	3	−24	45	0

e quindi

$$3x^3 - 21x^2 + 21x + 45 = (x+1)(3x^2 - 24x + 45).$$

Dividiamo $3x^2 - 24x + 45$ per $x - 3$:

	3	−24	45
3		9	−45
	3	−15	0

e quindi

$$3x^2 - 24x + 45 = (x-3)(3x-15) = 3(x-3)(x-5).$$

Questo conferma quanto già sapevamo dalla teoria.

[a] Si noti che $a_0/a_4 = 90/3 = 30, x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = 5 \in \mathbb{N}$, e che $x_1, \ldots, x_4$ sono divisori di a_0/a_4.

Proposizione

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. Per determinare

$$A = \{x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c > 0\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c < 0\},$$

si pone $\Delta = b^2 - 4ac$ e si distinguono i seguenti casi.

- Se $\Delta > 0$, allora
  $$A = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), \qquad B = (x_1, x_2),$$
  dove $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Se $\Delta = 0$, allora
  $$A = \mathbb{R} \setminus \{x_1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq x_1\}, \qquad B = \emptyset,$$
  dove $x_1 = \frac{-b}{2a}$.

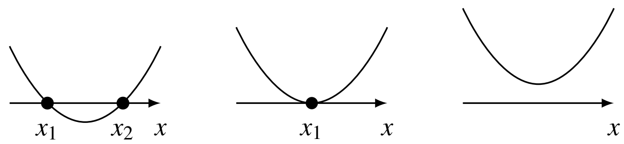
- Se $\Delta < 0$, allora
$$A = \mathbb{R}, \qquad B = \emptyset.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $\Delta > 0$, gli altri casi sono lasciati come esercizio per casa. Abbiamo già dimostrato che in questo caso x_1 ed x_2 sono le due soluzioni (distinte) dell'equazione di secondo grado
$$ax^2 + bx + c = 0.$$
Dunque per l'osservazione precedente
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
e quindi per concludere la dimostrazione basta applicare la regola dei segni **vii)**. □

Osservazione

Vedremo che se $a > 0$, allora il grafico di $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una parabola e che i tre casi appena descritti corrispondono ai tre casi riportati in figura.

Caso $\Delta > 0$. Caso $\Delta = 0$. Caso $\Delta < 0$.



Dati dei polinomi $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ ed $s(x)$, vogliamo studiare l'insieme
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p(x)}{q(x)} \geqslant \frac{r(x)}{s(x)}\right\}.$$
Si dimostra che A può essere riscritto come unione di intervalli. Ricordiamo che

Definizione

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è un **intervallo** se e solo se A gode della seguente proprietà: se x_1, $x_2 \in A$ ed $x_1 < x_2$, allora $[x_1, x_2] \subseteq A$.

- Il caso più semplice è quando tutti i polinomi sono costanti: $p(x) = p_0$, $q(x) = q_0$, $r(x) = r_0$, $s(x) = s_0$ con $p_0, r_0 \in \mathbb{R}$ e $q_0, s_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In questo caso basta calcolare i quozienti p_0/q_0 ed r_0/s_0: se $p_0/q_0 \geqslant r_0/s_0$ allora $A = \mathbb{R}$, mentre se $p_0/q_0 < r_0/s_0$ allora $A = \emptyset$.
- Un altro caso semplice è quello in cui p è un polinomio di primo grado e gli altri polinomi sono costanti: $p(x) = p_0 + p_1 x$, $q(x) = q_0$, $r(x) = r_0$, $s(x) = s_0$ con $p_0, r_0 \in \mathbb{R}$ e $p_1, q_0, s_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In questo caso per la regola dei segni **vii)** si ha
$$\frac{p(x)}{q(x)} \geqslant \frac{r(x)}{s(x)} \iff \frac{p_1 x + p_0}{q_0} \geqslant \frac{r_0}{s_0} \iff \frac{p_1}{q_0} x \geqslant \frac{r_0}{s_0} - \frac{p_0}{q_0}$$
$$\iff \begin{cases} x \geqslant \frac{q_0}{p_1}\left(\frac{r_0}{s_0} - \frac{p_0}{q_0}\right) & \text{se } \frac{p_1}{q_0} > 0, \\ x \leqslant \frac{q_0}{p_1}\left(\frac{r_0}{s_0} - \frac{p_0}{q_0}\right) & \text{se } \frac{p_1}{q_0} < 0, \end{cases}$$
e quindi
$$A = \begin{cases} \left[\frac{q_0}{p_1}\left(\frac{r_0}{s_0} - \frac{p_0}{q_0}\right), +\infty\right) & \text{se } \frac{p_1}{q_0} > 0, \\ \left(-\infty, \frac{q_0}{p_1}\left(\frac{r_0}{s_0} - \frac{p_0}{q_0}\right)\right] & \text{se } \frac{p_1}{q_0} < 0. \end{cases}$$
- Consideriamo il caso generale. Per quanto visto per le funzioni
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0\right\},$$
dove $P(x) = p(x) \cdot s(x) - q(x) \cdot r(x)$ e $Q(x) = q(x) \cdot s(x)$. Anche P e Q sono dei polinomi, e quindi hanno la forma
$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} P_k x^k = P_0 + P_1 x + \ldots + P_m x^m,$$
$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} Q_k x^k = Q_0 + Q_1 x + \ldots + Q_n x^n.$$

Il passaggio successivo è quello di riscrivere $P(x)$ e $Q(x)$ come prodotti di polinomi di primo o secondo grado.

Nei seguenti esempi consideriamo il caso in cui $P(x)$ e $Q(x)$ possono essere espressi come prodotti di polinomi di primo grado.

Esempio

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+2}{x-2} \geqslant x + 2\right\} = (2, +\infty)$$
in quanto
$$\frac{x^2+2}{x-2} \geqslant x + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x-2} - (x+2) = \frac{(x^2+2)-(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$= \frac{(x^2+2)-(x^2-4)}{x-2} = \frac{6}{x-2} \geqslant 0 \iff x - 2 > 0 \iff x > 2.$$

Esempio

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x-2} \geqslant \frac{x-2}{x+2}\right\} = (-2, 0] \cup (2, +\infty)$$
in quanto
$$\frac{x+2}{x-2} \geqslant \frac{x-2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0.$$

		-2		0		2		x
$4x$	$-$		$-$		$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$	$+$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{4x}{(x-2)(x+2)}$	$-$		$+$		$-$		$+$	
		$\nexists$		0		$\nexists$		

Esempio

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 7 \geqslant \frac{8}{x+1}\right\} = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$
in quanto
$$x^2 - 4x + 7 \geqslant \frac{8}{x+1} \iff x^2 - 4x + 7 - \frac{8}{x+1} =$$
$$= \frac{(x^2-4x+7)(x+1)-8}{x+1} = \frac{(x^3+(1-4)x^2+(7-4)x+7)-8}{x+1}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x+1} = \frac{(x-1)^3}{x+1} \geqslant 0.$$

		-1		1		x
$(x-1)^3$	$-$		$-$		$+$	
$x+1$	$-$		$+$		$+$	
$\frac{(x-1)^3}{x+1}$	$+$		$-$		$+$	
		$\nexists$		0		

Esempio

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x-1} - \frac{x-1}{x-2} \leqslant 1\right\} = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup (2, +\infty)$$
perché
$$\frac{x-2}{x-1} - \frac{x-1}{x-2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2-(x-1)^2-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} =$$
$$= \frac{(x^2-4x+4)-(x^2-2x+1)-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{-x^2+x+1}{(x-1)(x-2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x-1)(x-2)} \geqslant 0$$
dove
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		2		x
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$(x-1)(x-2)$	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x-1)(x-2)}$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	
		0		$\nexists$		0		$\nexists$		

Esempio

$$\left\{x\in\mathbb{R}:\tfrac{x-\sqrt2}{x+\sqrt2}-\tfrac{x+\sqrt2}{x-\sqrt2}\leqslant 1\right\}=$$
$$=\left(-\infty,-2\sqrt2-\sqrt{10}\right]\cup\left(-\sqrt2,-2\sqrt2+\sqrt{10}\right]\cup\left(\sqrt2,+\infty\right)$$

perché

$$\frac{x-\sqrt2}{x+\sqrt2}-\frac{x+\sqrt2}{x-\sqrt2}\leqslant 1\Leftrightarrow\frac{(x-\sqrt2)^2-(x+\sqrt2)^2-(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}=$$
$$=\frac{-x^2-4\sqrt2x+2}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}=\frac{-(x-x_1)(x-x_2)}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}\geqslant 0$$

dove

$$x_{1,2}=-2\sqrt2\pm\sqrt{8+2}=-2\sqrt2\pm\sqrt{10}.$$

x		$-2\sqrt2-\sqrt{10}$		$-\sqrt2$		$-2\sqrt2+\sqrt{10}$		$\sqrt2$	
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$		$-$		$-$		$+$		$+$
$(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)$	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$
		0		$\nexists$		0		$\nexists$	

Esempio

$$\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2+\sqrt[3]{2}x+2^{2/3}}{x+\sqrt2}\leqslant\frac{x-\sqrt2}{x-\sqrt[3]{2}}\right\}=(-\infty,-\sqrt2)\cup\{0\}\cup[1,\sqrt[3]{2})$$

in quanto

$$\frac{x^2+\sqrt[3]{2}x+2^{2/3}}{x+\sqrt2}\leqslant\frac{x-\sqrt2}{x-\sqrt[3]{2}}\iff\frac{x^2+\sqrt[3]{2}x+2^{2/3}}{x+\sqrt2}-\frac{x-\sqrt2}{x-\sqrt[3]{2}}=$$
$$=\frac{(x^2+\sqrt[3]{2}x+2^{2/3})(x-\sqrt[3]{2})-(x-\sqrt2)(x+\sqrt2)}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt[3]{2})}$$
$$=\frac{(x^3-2)-(x^2-2)}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt[3]{2})}=\frac{x^3-x^2}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt[3]{2})}=\frac{x^2(x-1)}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt[3]{2})}\leqslant 0.$$

x		$-\sqrt2$		0		1		$\sqrt[3]{2}$	
x^2	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$(x+\sqrt2)(x-\sqrt[3]{2})$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$
$\frac{x^2(x-1)}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt[3]{2})}$	$-$		$+$		$+$		$-$		$+$
		$\nexists$		0		0		$\nexists$	

Nei seguenti esempi consideriamo il caso in cui almeno uno dei due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ non può essere espresso come prodotto di polinomi di primo grado, in quanto almeno uno dei fattori è un polinomio di secondo grado con $\Delta<0$.

Esempio

$$\left\{x\in\mathbb{R}:\tfrac{x^3-1}{x^3+x}\geqslant\tfrac{3x-3}{x^2+1}\right\}=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$$

in quanto

$$\frac{x^3-1}{x^3+x}\geqslant\frac{3x-3}{x^2+1}\Leftrightarrow\frac{x^3-1}{x(x^2+1)}-\frac{3x-3}{x^2+1}=\frac{(x^3-1)-(3x-3)x}{x(x^2+1)}$$
$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)x}{x(x^2+1)}=\frac{(x-1)\left((x^2+x+1)-3x\right)}{x(x^2+1)}$$
$$=\frac{(x-1)(x^2-2x+1)}{x(x^2+1)}=\frac{(x-1)(x-1)^2}{x(x^2+1)}=\frac{(x-1)^3}{x(x^2+1)}\geqslant 0.$$

x		0		1	
$(x-1)^3$	$-$		$-$		$+$
x	$-$		$+$		$+$
x^2+1	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x-1)^3}{x(x^2+1)}$	$+$		$-$		$+$
		$\nexists$		0	

Esempio

$$\left\{x\in\mathbb{R}:\tfrac{x-2}{x+1}-\tfrac{x-1}{x+2}\leqslant 1\right\}=(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$$

perché

$$\tfrac{x-2}{x+1}-\tfrac{x-1}{x+2}\leqslant 1\iff 0\leqslant 1-\tfrac{x-2}{x+1}+\tfrac{x-1}{x+2}$$
$$=\tfrac{(x+1)(x+2)-(x^2-4)+(x^2-1)}{(x+1)(x+2)}=\tfrac{(x^2+3x+2)+3}{(x+1)(x+2)}=\tfrac{x^2+3x+5}{(x+1)(x+2)}$$

ed il polinomio di secondo grado al numeratore ha $\Delta=9-4\cdot5=-11<0$.

x		-2		-1	
x^2+3x+5	$+$		$+$		$+$
$(x+1)(x+2)$	$+$		$-$		$+$
$\frac{x^2+3x+5}{(x+1)(x+2)}$	$+$		$-$		$+$
		0		$\nexists$	

Esempio

$$\left\{x\in\mathbb{R}:\tfrac{x-\sqrt2}{x+\sqrt2}+\tfrac{x+\sqrt2}{x-\sqrt2}\leqslant 1\right\}=(-\sqrt2,\sqrt2)$$

perché

$$\tfrac{x-\sqrt2}{x+\sqrt2}+\tfrac{x+\sqrt2}{x-\sqrt2}\leqslant 1\Leftrightarrow\tfrac{(x-\sqrt2)^2+(x+\sqrt2)^2-x^2+2}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}=\tfrac{x^2+6}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}\leqslant 0$$

ed il numeratore è sempre positivo mentre il polinomio di secondo grado al denominatore si annulla per $x=x_{1,2}=\pm\sqrt2$.

x		$-\sqrt2$		$\sqrt2$	
x^2+6	$+$		$+$		$+$
$(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)$	$+$		$-$		$+$
$\frac{x^2+6}{(x+\sqrt2)(x-\sqrt2)}$	$+$		$-$		$+$
		$\nexists$		$\nexists$	

Esempio

Verifichiamo la seguente uguaglianza al variare del parametro a in $\mathbb{R}$.

$$\{x\in\mathbb{R}:x^2-2x+a>0\}=\begin{cases}(-\infty,1-\sqrt{1-a})\cup(1+\sqrt{1-a},+\infty) & \text{se } a<1\\ \mathbb{R}\setminus\{1\} & \text{se } a=1\\ \mathbb{R} & \text{se } a>1\end{cases}$$

Il polinomio di secondo grado corrisponde ad una parabola rivolta verso l'alto ed i tre casi corrispondono, rispettivamente, a $\Delta>0$, $\Delta=0$ e $\Delta<0$. Infatti, $\Delta=4-4a=4(1-a)$ e quindi si ha

$$\begin{aligned}\Delta>0 &\quad\Leftrightarrow\quad a<1,\\ \Delta=0 &\quad\Leftrightarrow\quad a=1,\\ \Delta<0 &\quad\Leftrightarrow\quad a>1.\end{aligned}$$

Infine, per concludere basta osservare che $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}$.

Secondo caso particolare: radici quadrate

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due funzioni.

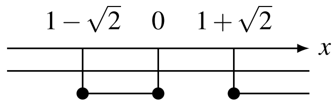
- Per determinare l'insieme
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\sqrt{p(x)}\geqslant\sqrt{q(x)}\right\}$$
basta studiare il sistema
$$\begin{cases}q(x)\geqslant 0\\ p(x)\geqslant q(x).\end{cases}$$
- Per determinare l'insieme
$$B=\left\{x\in\mathbb{R}:\sqrt{p(x)}\geqslant q(x)\right\}$$
basta studiare la coppia di sistemi
$$I:\begin{cases}q(x)<0\\ p(x)\geqslant 0\end{cases}\vee\ II:\begin{cases}q(x)\geqslant 0\\ p(x)\geqslant q(x)^2,\end{cases}$$

perché, se $B_I \subseteq \mathbb{R}$ corrisponde al primo sistema e $B_{II} \subseteq \mathbb{R}$ corrisponde al secondo sistema, allora
$$B = B_I \cup B_{II}.$$

- Per determinare l'insieme
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{p(x)} \leqslant q(x)\right\}$$
basta studiare il sistema
$$\begin{cases} q(x) \geqslant 0 \\ p(x) \geqslant 0 \\ p(x) \leqslant q(x)^2. \end{cases}$$

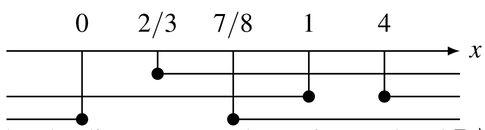
Esempio

Dimostriamo che
$$\left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^3 - x^2 + 2} \geqslant \sqrt{x^2 + x + 2}\right\} = [1 - \sqrt{2}, 0] \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty).$$
Poniamo
$$p(x) = x^3 - x^2 + 2, \qquad q(x) = x^2 + x + 2.$$
Osserviamo che il delta dell'equazione $q(x) = x^2 + x + 2 = 0$ è
$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$
e quindi $q(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo che
$$p(x) \geqslant q(x) \iff x^3 - x^2 + 2 \geqslant x^2 + x + 2 \iff$$
$$x^3 - 2x^2 - x = x(x^2 - 2x - 1) = x(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) \geqslant 0$$
$$\iff x \in [1 - \sqrt{2}, 0] \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty)$$
in quanto
$$x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x_{1,2} = \tfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$
Dunque abbiamo che
$$\begin{cases} q(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ p(x) \geqslant q(x) \iff x \in [1 - \sqrt{2}, 0] \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty). \end{cases}$$



Esempio

Esprimiamo gli insiemi
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 5x + 4} \leqslant 3x - 2\right\},$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 5x + 4} > 3x - 2\right\},$$
come unione di intervalli. Poniamo
$$p(x) = x^2 - 5x + 4, \qquad q(x) = 3x - 2.$$
A) Chiaramente $q(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 2/3$. Osserviamo che
$$p(x) = x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \tfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$
e quindi $p(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 1 \ \vee \ x \geqslant 4$. Inoltre si ha
$$p(x) = x^2 - 5x + 4 = 0 \leqslant q(x)^2 = (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$
$$\iff 8x^2 - 7x = x(8x - 7) \geqslant 0 \iff x \leqslant 0 \ \vee \ x \geqslant 7/8.$$
In conclusione abbiamo
$$\begin{cases} q(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 2/3 \\ p(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 1 \ \vee \ x \geqslant 4 \\ p(x) \leqslant q(x)^2 \iff x \leqslant 0 \ \vee \ x \geqslant 7/8 \end{cases}$$
e quindi $A = [7/8, 1] \cup [4, +\infty)$.



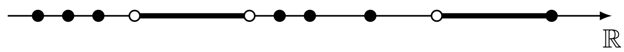
B) Sarebbe sbagliato pensare che B sia uguale ad $\mathbb{R} \setminus A$; infatti si può solo dire che $B \subseteq \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, \frac{7}{8}) \cup (1, 4)$. Osserviamo che $\mathbb{R} \setminus (1,4)$ è l'insieme di definizione di $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$, pertanto $A \cup B = \mathbb{R} \setminus (1,4)$. Di conseguenza $B = (\mathbb{R} \setminus (1,4)) \setminus A = (-\infty, 7/8)$. In effetti, visto che
$$\begin{cases} q(x) < 0 \iff x < 2/3 \\ p(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 1 \vee x \geqslant 4 \end{cases} \iff x < 2/3$$
e
$$\begin{cases} q(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 2/3 \\ p(x) > q(x)^2 \iff 0 < x < 7/8 \end{cases} \iff 2/3 \leqslant x < 7/8$$
si ha che $B = (-\infty, 2/3) \cup [2/3, 7/8) = (-\infty, 7/8)$.

7 Estremi superiore ed inferiore

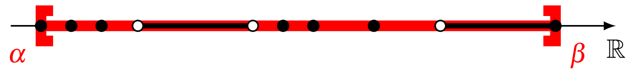
Dato un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$, sono interessato a determinare il più piccolo intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ che contiene A. Nei seguenti esempi consideriamo alcuni possibili casi.

Esempio

Consideriamo l'insieme A dato come in figura.



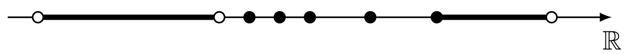
È evidente che il più piccolo intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ che contiene A esiste ed è dato da $[\alpha, \beta]$ con α e β come in figura.



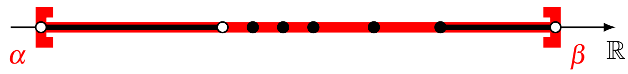
Si noti che $\alpha, \beta \in A$.

Esempio

Consideriamo ora l'insieme A dato come in figura.



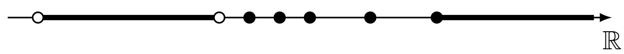
È evidente che il più piccolo intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ che contiene A esiste ed è dato da $[\alpha, \beta]$ con α e β come in figura.



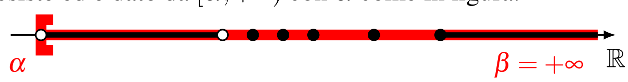
Si noti che $\alpha, \beta \notin A$.

Esempio

Consideriamo ora l'insieme A dato come in figura.



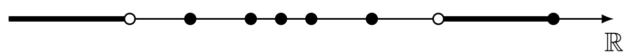
È evidente che il più piccolo intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ che contiene A esiste ed è dato da $[\alpha, +\infty)$ con α come in figura.



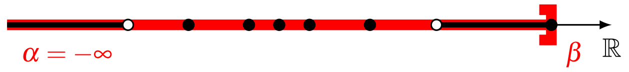
Si noti che $\alpha \notin A$.

Esempio

Consideriamo l'insieme A dato come in figura.



È evidente che il più piccolo intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ che contiene A esiste ed è dato da $(-\infty, \beta]$ con β come in figura.



Si noti che $\beta \in A$.

Gli esempi precedenti mostrano che il più piccolo intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ che contiene A può essere della forma $[\alpha, \beta]$, oppure $[\alpha, +\infty)$, oppure $(-\infty, \beta]$. Osserviamo che in ogni caso caso, esso è dato dall'intersezione di tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ che contengono A, ovvero da

$$\bigcap \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ è un intervallo, } I \supseteq A\}.$$

Data l'importanza di α e β, si introducono dei simboli per indicarli: si pone $\alpha = \inf(A)$, $\beta = \sup(A)$ e li si chiamano, rispettivamente, estremo inferiore ed estremo superiore di A. Inoltre, nel caso particolare in cui $\alpha \in A$, si pone $\alpha = \min(A)$ e lo si chiama minimo di A; analogamente, nel caso particolare in cui $\beta \in A$, si pone $\beta = \max(A)$ e lo si chiama massimo di A.

Diamo di seguito una definizione più formale.

Definizione

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

- $C \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se
$$C \geqslant a \quad \forall a \in A \qquad \text{e} \qquad \forall b < C\ \exists a \in A \text{ t.c. } a > b.$$
Se una tale C non esiste, allora l'estremo superiore di A è $+\infty$.
- $C \in \mathbb{R}$ è il **massimo** di A se
$$C \geqslant a \quad \forall a \in A \qquad \text{e} \qquad C \in A.$$
Se una tale C non esiste, allora il massimo di A non esiste.
- $C \in \mathbb{R}$ è l'**estremo inferiore** di A se
$$C \leqslant a \quad \forall a \in A \qquad \text{e} \qquad \forall b > C\ \exists a \in A \text{ t.c. } a < b.$$
Se una tale C non esiste, allora l'estremo inferiore di A è $-\infty$.
- $C \in \mathbb{R}$ è il **minimo** di A se
$$C \leqslant a \quad \forall a \in A \qquad \text{e} \qquad C \in A.$$
Se una tale C non esiste, allora il minimo di A non esiste.

L'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo ed il minimo di A sono indicati rispettivamente con

$$\sup(\mathbf{A}), \qquad \inf(\mathbf{A}), \qquad \max(\mathbf{A}), \qquad \min(\mathbf{A}).$$

Osservazione

$\sup(A)$ ed $\inf(A)$ esistono sempre, finiti o infiniti. Al contrario $\max(A)$ e $\min(A)$ potrebbero non esistere.

La seguente proposizione riguarda l'unicità del sup, inf, max e min.

Proposizione

- L'estremo superiore è unico.
- L'estremo inferiore è unico.
- Se il massimo esiste, allora esso è unico.
- Se il minimo esiste, allora esso è unico.

Dimostrazione. • Supponiamo per assurdo che C_1 e C_2 siano due estremi superiori distinti di A. Non è limitativo assumere che $C_1 < C_2$. Visto che C_1 soddisfa la prima proprietà dell'estremo superiore, si ha che

$$a \leqslant C_1 \quad \forall a \in A.$$

Visto che C_2 soddisfa la seconda proprietà dell'estremo superiore, si ha che

$$C_1 < C_2 \Longrightarrow \exists a \in A \text{ t.c. } a > C_1.$$

Siamo quindi giunti ad una contraddizione.

La dimostrazione delle altre asserzioni è analoga ed è lasciata come esercizio per casa. □

La seguente proposizione riguarda il rapporto che c'è tra $\sup(A)$ e $\inf(A)$, e tra $\max(A)$ e $\min(A)$.

Proposizione

Dato un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$, si ha

$$\inf(A) \leqslant \sup(A).$$

Inoltre, se $\min(A)$ e $\max(A)$ esistono, allora si ha

$$\min(A) \leqslant \max(A).$$

Dimostrazione. • Sia a un generico elemento di A. Per la prima proprietà dell'estremo superiore e quella dell'estremo inferiore, si ha che $\inf(A) \leqslant a \leqslant \sup(A)$, pertanto $\inf(A) \leqslant \sup(A)$.

La dimostrazione delle altre asserzioni è analoga ed è lasciata come esercizio per casa. □

Esercizio

Determinare i sottoinsiemi A di $\mathbb{R}$ per cui risulta $\inf(A) = \sup(A)$. Per tali sottoinsiemi, si ha anche che $\min(A) = \max(A)$?

La seguente proposizione riguarda il rapporto che c'è tra $\sup(A)$ e $\max(A)$, e tra $\inf(A)$ e $\min(A)$.

Proposizione

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e $C \in \mathbb{R}$ una costante.

- Se C è il massimo di A, allora C è l'estremo superiore di A.
- Se C è l'estremo superiore di A e $C \in A$, allora C è il massimo di A.
- Se C è il minimo di A, allora C è l'estremo inferiore di A.
- Se C è l'estremo inferiore di A e $C \in A$, allora C è il minimo di A.

Dimostrazione. • Sia C il massimo di A. Per dimostrare che C è l'estremo superiore di A basta osservare che la condizione

$$b < C \Longrightarrow \exists a \in A \text{ t.c. } a > b$$

è verificata in quanto basta prendere $a = C$.

• Se C è l'estremo superiore di A e $C \in A$, allora C soddisfa entrambe le condizioni date nella definizione di massimo e quindi C è il massimo di A.

La dimostrazione delle altre condizioni è analoga ed è lasciata come esercizio per casa. □

Osservazione

- $\max(A)$ non esiste se $\sup(A)$ non appartiene ad A.
- $\min(A)$ non esiste se $\inf(A)$ non appartiene ad A.

Esempio

Dimostrare utilizzando la definizione precedente quanto riportato nella seguente tabella.

A	$\inf(A)$	$\min(A)$	$\sup(A)$	$\max(A)$
$[-1,1]$	-1	-1	1	1
$[-1,1)$	-1	-1	1	$\nexists$
$(-1,1]$	-1	$\nexists$	1	1
$(-1,1)$	-1	$\nexists$	1	$\nexists$
$[-1,+\infty)$	-1	-1	$+\infty$	$\nexists$
$(-1,+\infty)$	-1	$\nexists$	$+\infty$	$\nexists$
$(-\infty,1]$	$-\infty$	$\nexists$	1	1
$(-\infty,1)$	$-\infty$	$\nexists$	1	$\nexists$
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\nexists$	$+\infty$	$\nexists$

Esercizio

Dimostrare che per $A = (-3,1] \cup (5,9]$ risulta

$$\sup(A) = 9, \quad \inf(A) = -3, \quad \max(A) = 9, \quad \nexists \min(A).$$

Definizione

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.
- A è **limitato superiormente** se $\sup(A) < +\infty$.
- A non è limitato superiormente se $\sup(A) = +\infty$.
- A è **limitato inferiormente** se $\inf(A) > -\infty$.
- A non è limitato inferiormente se $\inf(A) = -\infty$.
- A è **limitato** se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Proposizione\Definizione

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

i) A non è limitato superiormente se e solo se
$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a > C.$$
ii) A è limitato superiormente se e solo se
$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad C \geqslant a \quad \forall a \in A.$$
In tal caso tutti i C che soddisfano tale condizione sono detti **maggioranti** di A ed il più piccolo dei maggioranti è l'estremo superiore di A.

iii) A non è limitato inferiormente se e solo se
$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a < C.$$
iv) A è limitato inferiormente se e solo se
$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad C \leqslant a \quad \forall a \in A.$$
In tal caso tutti i C che soddisfano tale condizione sono detti **minoranti** di A ed il più grande dei minoranti è l'estremo inferiore di A.

Dimostrazione. Dimostriamo solo il primo punto; gli altri sono lasciati come esercizio per casa.

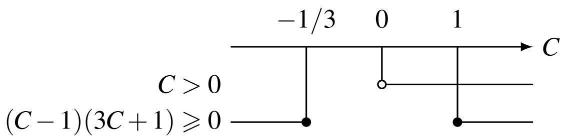
i) Per definizione, A non è limitato superiormente se e solo se $\sup(A) = +\infty$, ovvero non esiste una C in $\mathbb{R}$ che soddisfa entrambe le seguenti condizioni
$$C \geqslant a \quad \forall a \in A \qquad \text{e} \qquad \forall b < C \ \exists a \in A \text{ t.c. } a > b. \qquad (\clubsuit)$$
Questo significa che per ogni $C \in \mathbb{R}$, si ha che C non soddisfa la prima condizione $(\clubsuit)_1$, ossia
$$\exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad C < a,$$
oppure C non soddisfa la seconda condizione $(\clubsuit)_2$, ossia
$$\exists b < C \quad \text{t.c.} \quad a \leqslant b \ \forall a \in A.$$
Osserviamo che, in quest'ultimo caso, visto che comunque la b non può soddisfare $(\clubsuit)$ e visto che però soddisfa $(\clubsuit)_1$, deve per forza di cose non soddisfare $(\clubsuit)_2$; dunque, iterando questo ragionamento, otteniamo che o A è un insieme vuoto, oppure esiste finito $\sup(A)$, ma in entrambe i casi si giunge ad una contraddizione. Di conseguenza, l'unica possibilità è che C non soddisfa $(\clubsuit)_1$ e questo conclude la dimostrazione per l'arbitrarietà di $C \in \mathbb{R}$. □

Esempio

- Gli insiemi
$$[-1,1], \qquad [-1,1), \qquad (-1,1], \qquad (-1,1)$$
sono limitati (sono cioè limitati sia inferiormente che superiormente).
- $A = (-1,+\infty)$ è limitato inferiormente ma non superiormente.
- $A = (-\infty,1)$ è limitato superiormente ma non inferiormente.
- $A = \mathbb{R}$ non è limitato né inferiormente né superiormente.

Esempio

Sia
$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2+x+1} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$
Dimostriamo che A è limitato superiormente, ovvero che
$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad a \leqslant C \quad \forall a \in A.$$
Un generico elemento di A è della forma $a = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ per un $x \in \mathbb{R}$.

Basta quindi dimostrare che
$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \frac{x+1}{x^2+x+1} \leqslant C \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Osserviamo che il denominatore è strettamente positivo in quanto ha $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$ ed il coefficiente di x^2 è 1 che è strettamente positivo. Pertanto per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$\frac{x+1}{x^2+x+1} \leqslant C \Leftrightarrow x+1 \leqslant C(x^2+x+1)$$
$$\Leftrightarrow Cx^2 + (C-1)x + (C-1) \geqslant 0$$
e quindi basta dimostrare che
$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad Cx^2 + (C-1)x + (C-1) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Osserviamo che $C = 0$ non va bene visto che $\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $0 \cdot x^2 + (0-1)x + (0-1) = -x-1 < 0$: basta prendere un qualsiasi $x > -1$. Dunque deve essere $C \neq 0$. Allora $y = Cx^2 + (C-1)x + (C-1)$ rappresenta una parabola e richiedere che $Cx^2 + (C-1)x + (C-1) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ significa richiedere che la parabola sia rivolta verso l'alto, cioè che $C > 0$, e che $\Delta \geqslant 0$, ovvero
$$\begin{cases} C > 0 \\ \Delta = (C-1)^2 - 4C(C-1) = (C-1)((C-1)-4C) = (C-1)(-3C-1) \leqslant 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} C > 0 \\ (C-1)(3C+1) \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow C \geqslant 1.$$


In conclusione abbiamo dimostrato che
$$a \leqslant 1 \quad \forall a \in A \qquad \text{e} \qquad \forall C < 1 \quad \exists a \in A \text{ t.c. } a > C$$
e quindi
$$\sup(A) = 1.$$
Osserviamo infine che
$$1 = \left. \frac{x+1}{x^2+x+1} \right|_{x=0} \in A \quad \Longrightarrow \quad \max(A) = 1.$$

Esercizio

Studiare l'estremo inferiore ed il minimo dell'insieme considerato nell'esempio precedente.

Esempio

Cerchiamo il sup di
$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2+x+3} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$
Osserviamo che l'equazione di secondo grado $x^2 + x + 3 = 0$ ha
$$a > 0 \quad \text{e} \quad \Delta = 1 - 12 = -11 < 0,$$
e pertanto $x^2 + x + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque si ha
$$\frac{x+1}{x^2+x+3} \leqslant C \ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x+1 \leqslant C\big(x^2+x+3\big) \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Longleftrightarrow Cx^2 + (C-1)x + 3C - 1 \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (\clubsuit).$$
Osserviamo che prendendo $x = 0$ otteniamo che
$$\frac{x+1}{x^2+x+3} = \frac{1}{3} \in A$$
e per questo assumiamo che $C \geqslant 1/3 > 0$. Di conseguenza abbiamo che
$$(\clubsuit) \Longleftrightarrow \Delta = (C-1)^2 - 4C(3C-1) = -11C^2 + 2C + 1 \leqslant 0$$
$$\Longleftrightarrow 11C^2 - 2C - 1 \geqslant 0$$
$$\Longleftrightarrow C \geqslant \frac{1+\sqrt{1+11}}{11} = \frac{1+2\sqrt{3}}{11}.$$
Abbiamo appena dimostrato che tutti i $C \geqslant \frac{1+2\sqrt{3}}{11}$ sono dei maggioranti e quindi, visto che il sup è il più piccolo dei maggioranti, si ha che
$$\sup(A) = \frac{1+2\sqrt{3}}{11}.$$
Osserviamo che per i conti già fatti risulta
$$\frac{x+1}{x^2+x+3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{11}$$

$$\iff \tfrac{1+2\sqrt{3}}{11}x^2+\left(\tfrac{1+2\sqrt{3}}{11}-1\right)x+3\tfrac{1+2\sqrt{3}}{11}-1=0$$
$$\iff (1+2\sqrt{3})x^2+2(\sqrt{3}-5)x+(6\sqrt{3}-8)=0$$
$$\iff x=\tfrac{-(\sqrt{3}-5)+\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2-(1+2\sqrt{3})(6\sqrt{3}-8)}}{1+2\sqrt{3}}=\tfrac{5-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$$
$$=\tfrac{(5-\sqrt{3})\cdot(1-2\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{3})\cdot(1-2\sqrt{3})}=\tfrac{11-11\sqrt{3}}{1-12}=\sqrt{3}-1$$

e pertanto
$$\max(A)=\tfrac{1+2\sqrt{3}}{11}.$$

Esercizio

Studiare l'estremo inferiore ed il minimo dell'insieme considerato nell'esempio precedente.

Vedremo che lo studio degli estremi di un insieme del tipo
$$\{f(x): x\in D\}$$
è più semplice se f è monotona oppure se è derivabile e se ne può studiare la monotonia.

8 Ulteriori proprietà dei numeri reali

Proprietà archimedea dei numeri reali

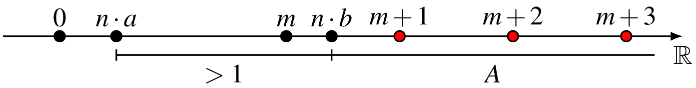
Per ogni coppia di numeri reali positivi α e β, esiste un numero naturale n tale che
$$n\cdot\alpha>\beta.$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per assurdo. La proprietà Archimedea può essere scritta nella forma
$$\forall\alpha,\beta>0\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.c. } n\cdot\alpha>\beta,$$
pertanto, visto che negando $\forall$ si ottiene $\exists$ e negando $\exists$ si ottiene $\forall$, negare la proprietà Archimedea significa assumere che
$$\exists\alpha,\beta>0 \text{ t.c. } n\cdot\alpha\leqslant\beta\ \forall n\in\mathbb{N}.$$
In tal caso β è un maggiorante dell'insieme
$$A=\{n\cdot\alpha : n\in\mathbb{N}\},$$
che è quindi limitato superiormente. Dunque esiste finito $C=\sup(A)$. Per le proprietà dell'estremo superiore si ha che
$$a\leqslant C \quad \forall a\in A \qquad \text{e} \qquad \forall b<C\ \exists a\in A \text{ t.c. } a>b. \qquad (\spadesuit)$$
Se scelgo $b=C-\alpha$, allora esiste $a\in A$ tale che $a>b$. Visto che $a\in A$, esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $a=n\cdot\alpha$. Pertanto si ha $n\cdot\alpha=a>b=C-\alpha$. Da ciò segue che $(n+1)\cdot\alpha>C$ e questo contraddice $(\spadesuit)_1$ in quanto $(n+1)\cdot\alpha\in A$. □

Proposizione

$\mathbb{Q}$ è **denso** in $\mathbb{R}$, ossia $\forall a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, $\exists r\in\mathbb{Q}$ con $a<r<b$.

Dimostrazione. Se $a<0<b$ allora basta prendere $r=0$. Assumiamo che
$$0\leqslant a<b, \qquad (\clubsuit)$$
il caso $a<b\leqslant 0$ è analogo e lasciato come esercizio per casa. Basta dimostrare che esistono $m,n\in\mathbb{N}$ tali che
$$a<\tfrac{m}{n}<b. \qquad (\spadesuit)$$



Per la proprietà archimedea dei numeri reali con $\alpha=b-a$ e $\beta=1$, esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che
$$n\cdot(b-a)>1. \qquad (\heartsuit)$$
Cerchiamo ora una $m\in\mathbb{N}$ per cui $(\spadesuit)$ sia soddisfatta, ossia $n\cdot a<m<n\cdot b$. L'insieme
$$A=\{k\in\mathbb{N}: k\geqslant n\cdot b\}=[n\cdot b,+\infty)\cap\mathbb{N}$$
non è vuoto in quanto, per la proprietà archimedea dei numeri reali con $\alpha=1$ e $\beta=n\cdot b$, sappiamo che esiste $k\in\mathbb{N}$ tale che $k=k\cdot 1>n\cdot b$, e pertanto $k\in A$. Inoltre $A\subseteq\mathbb{N}$ e quindi A ha un minimo. Dimostriamo che $m=\min(A)-1$ soddisfa $(\spadesuit)$. Per $(\heartsuit)$ e $(\clubsuit)$ si ha
$$1\underset{(\heartsuit)}{<}n\cdot(b-a)\underset{(\clubsuit)}{\leqslant}n\cdot b\Longrightarrow 1<n\cdot b\Longrightarrow 1\notin A\Longrightarrow \min(A)>1$$
e quindi $m=\min(A)-1\geqslant 1$. Per le proprietà del minimo $m+1=\min(A)\in A$ ed $m=\min(A)-1\notin A$, ovvero
$$m<n\cdot b\leqslant m+1 \iff \boxed{\tfrac{m}{n}<b}\leqslant\tfrac{m+1}{n}.$$
Di conseguenza per $(\heartsuit)$ abbiamo che
$$\tfrac{m}{n}=\tfrac{m+1}{n}-\tfrac{1}{n}>b-(b-a)=a\Longrightarrow\boxed{\tfrac{m}{n}>a}.$$
Quanto racchiuso nei due rettangoli assicura che $(\spadesuit)$ è soddisfatta e quindi la dimostrazione è completa. □

9 Principio di induzione

Il principio di induzione è uno strumento utile per dimostrare proposizioni P legate a numeri naturali $\mathbb{N}$, ovvero $P=P(n)$, $n\in\mathbb{N}$. Ad esempio, se una proposizione $P(n)$ relativa ad $n\in\mathbb{N}$ è tale che

i. $P(1)$ è vera,

ii. se $P(n)$ è vera allora anche $P(n+1)$ è vera,

allora $P(n)$ è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Esempio

Sia $A\subseteq\mathbb{N}$ e consideriamo la proposizione
$$P(n)\ :\ n\in A.$$
Se valgono le seguenti proprietà

i. $P(1)$ è vera, ovvero $1\in A$;

ii. se $P(n)$ è vera allora anche $P(n+1)$ è vera, ovvero se $n\in A$ allora anche $n+1\in A$;

allora $A=\mathbb{N}$.

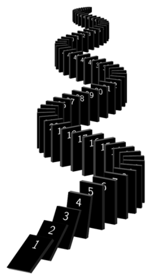
Esempio

Vogliamo far cadere (verificare) tutte le "infinite" carte (proposizioni) numerate e disposte come in figura. Per farlo, dobbiamo assicurarci che

i. la prima carta cade,

ii. per ogni $n\geqslant 1$, se la n-esima carta cade allora anche la $n+1$-esima carta cade (basta verificare che la distanza tra due carte consecutive è inferiore alla lunghezza delle carte),

perché allora tutte le carte cadono.



Più in generale vale quanto segue.

Principio di induzione

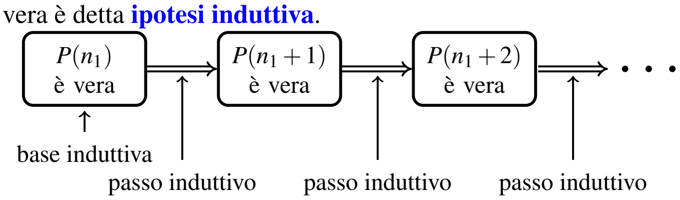
Se esiste $n_1\in\mathbb{N}$ tale che $P(n)$ verifica le seguenti proprietà

i. $P(n_1)$ è vera,

ii. per ogni $n\geqslant n_1$ si ha che se $P(n)$ è vera allora anche $P(n+1)$ è vera,

allora $P(n)$ è vera per ogni $n\geqslant n_1$.

La condizione **i.** è detta **base di induzione**, o **base induttiva**. La condizione **ii.** è detta **passo induttivo** e l'ipotesi per cui $P(n)$ sia vera è detta **ipotesi induttiva**.



Esempio

Fissato $x \geqslant -1$, applichiamo il principio di induzione per dimostrare che la seguente proposizione (detta **disuguaglianza di Bernoulli**)

$$P(n): \qquad (1+x)^n \geqslant 1+n\cdot x$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

i. $P(1): (1+x)^1 \geqslant 1+1\cdot x$ è vera in quanto
$$(1+x)^1 = 1+x \geqslant 1+x = 1+1\cdot x.$$

ii. Se $P(n)$ è vera allora anche
$$P(n+1): \qquad (1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$$
è vera in quanto
$$(1+x)^{n+1} = \overbrace{(1+x)^n}^{\geqslant 1+nx \geqslant 0} \overbrace{(1+x)}^{\geqslant 0} \geqslant (1+nx)(1+x)$$
$$= 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1+(n+1)x.$$

Esempio

Per il principio di induzione la seguente proposizione
$$P(n): \qquad 2^n \geqslant n^2$$
è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 4$, perché:

i. $P(4)$ è vera in quanto
$$2^4 \geqslant 4^2;$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche
$$P(n+1): \qquad 2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$$
è vera in quanto
$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \geqslant 2\cdot n^2$$
ed inoltre
$$2n^2 \geqslant (n+1)^2 \iff 2n^2 \geqslant n^2+2n+1$$
$$\iff n^2-2n-1 \geqslant 0 \iff n \geqslant 1+\sqrt{2} \iff n \geqslant 3$$
visto che le soluzioni dell'equazione $n^2-2n-1=0$ sono
$$n_1 = 1-\sqrt{2} < 0, \qquad n_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.41$$
ed n è un numero naturale.

Esempio

Per il principio di induzione la seguente proposizione
$$P(n): \qquad n! > 2^n$$
è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 4$, perché:

i. $P(4)$ è vera in quanto
$$4! = 24 \geqslant 2^4 = 16;$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche
$$P(n+1): \qquad (n+1)! > 2^{n+1}$$
è vera in quanto
$$(n+1)! = n!\cdot(n+1) > 2^n\cdot(n+1) > 2^n\cdot 2 = 2^{n+1}.$$

Esempio

Fissati $a,b \in \mathbb{R}$, applichiamo il principio di induzione per dimostrare che la seguente proposizione (**formula del binomio di Newton**)
$$P(n): \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ è il **coefficiente binomiale**.

i. $P(1): (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k}$ è vera in quanto
$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \binom{1}{0}a^0 b^{1-0}+\binom{1}{1}a^1 b^{1-1}$$
$$= a^0 b^1 + a^1 b^0 = a+b.$$

ii. Se $P(n)$ è vera allora anche
$$P(n+1): \qquad (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$
è vera; infatti
$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
$$= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$
$$\underset{(\heartsuit)}{=} \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$
$$= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right\}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1}$$
$$\underset{(\diamondsuit)}{=} \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}$$
$$\underset{(\clubsuit)}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$
in quanto
$$(\heartsuit)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = \left(\begin{matrix} h=k+1 \\ h\in[1,n+1]\end{matrix}\right) = \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h},$$
$$(\diamondsuit)\ \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\tfrac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\tfrac{1}{n-k+1}+\tfrac{1}{k}\right) = \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\tfrac{n+1}{k(n-k+1)}$$
$$= \tfrac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k},$$
$$(\clubsuit)\ \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1.$$

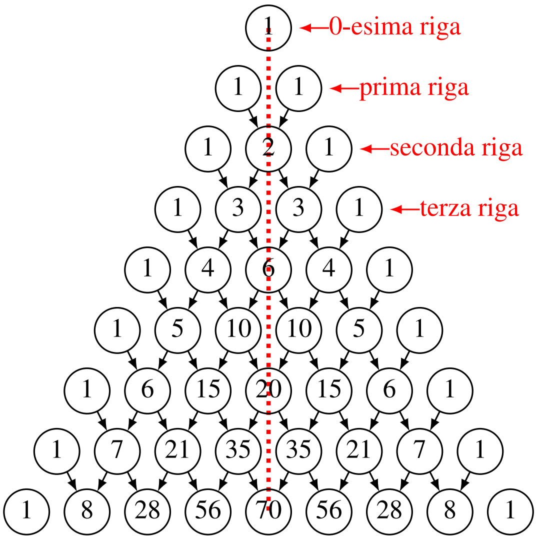
Osservazione

Prendendo nella formula del binomio di Newton $a=b=1$ si ha
$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$
Di conseguenza, la somma dei valori della n-esima riga del triangolo di Tartaglia è 2^n.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
8^a riga 1 8 28 56 70 56 28 8 1

Osservazione

L'elemento del triangolo di Tartaglia nella n-esima riga e posizione k-esima è $\binom{n}{k-1}$. Visto che il triangolo di Tartaglia è simmetrico e visto che la somma di due elementi consecutivi è pari all'elemento corrispondente della riga successiva, abbiamo che
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$



Esercizio

Verificare la prima uguaglianza data nell'osservazione precedente utilizzando la definizione analitica di coefficiente binomiale.

Esempio

Per il principio di induzione la seguente proposizione

$$P(n): \qquad \prod_{j=2}^{n}\left(1-\tfrac{1}{j^2}\right)=\tfrac{n+1}{2n}$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$, perché:

i. $P(2)$ è vera in quanto

$$\prod_{j=2}^{2}\left(1-\tfrac{1}{j^2}\right)=1-\tfrac{1}{2^2}=\tfrac{3}{4}=\tfrac{2+1}{2\cdot 2};$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche

$$P(n+1): \qquad \prod_{j=2}^{n+1}\left(1-\tfrac{1}{j^2}\right)=\tfrac{n+2}{2(n+1)}$$

è vera in quanto

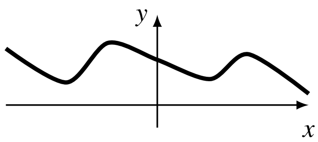
$$\prod_{j=2}^{n+1}\left(1-\tfrac{1}{j^2}\right)=\left(1-\tfrac{1}{(n+1)^2}\right)\prod_{j=2}^{n}\left(1-\tfrac{1}{j^2}\right)$$
$$=\left(1-\tfrac{1}{(n+1)^2}\right)\tfrac{n+1}{2n}=\tfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\cdot\tfrac{n+1}{2n}=\tfrac{(n+1)^2-1}{2n(n+1)}=\tfrac{(n+1)+1}{2(n+1)}.$$

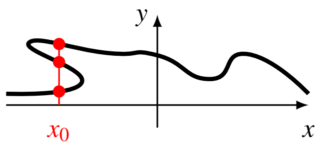
Capitolo 2

Funzioni

10 Definizioni e proprietà generali

In maniera *non rigorosa*, una legge f definita in tutto $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione se è possibile disegnarne il grafico muovendosi sempre verso destra con la penna. In altri termini, f è una funzione se ad ogni x in $\mathbb{R}$ corrisponde un unico valore $f(x)$ in $\mathbb{R}$. Ricordiamo che il grafico di f è ottenuto disegnando nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tutti punti $(x, f(x))$ al variare di x in $\mathbb{R}$. È allora intuitivamente chiaro che il grafico a sinistra corrisponde ad una funzione, mentre quello a destra no visto che, ad esempio, ad x_0 corrispondono ben tre punti.



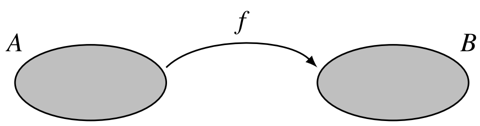


Diamo ora le prime nozioni utili per lo studio di una funzione. Le diamo nella loro massima generalità, in quanto esse valgono non solo per funzioni che vanno da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ma anche per quelle che vanno da un generico insieme A ad un generico insieme B.

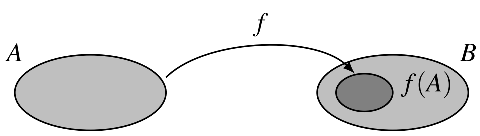
Definizione

Siano A e B insiemi non vuoti.

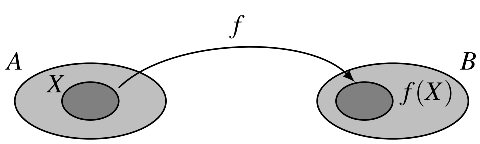
- Una **funzione** f con **dominio** A e **codominio** B, o più brevemente
$$f : A \to B,$$
è un processo o una relazione che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B, ossia
$$\forall x \in A \quad \exists! y \in B \quad \text{t.c.} \quad y = f(x).$$



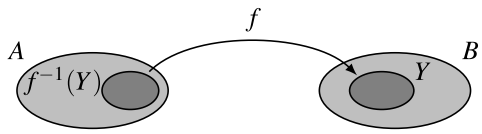
- L'**immagine** di f è il sottoinsieme $f(A)$ di B dato da
$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ t.c. } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}.$$



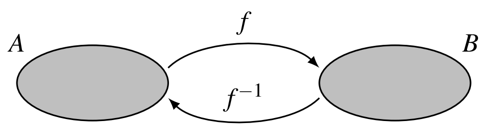
- Il **grafico** di f è il sottoinsieme G di $A \times B$ dato da
$$G = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$
- L'**immagine** di $X \subseteq A$ tramite f è dato da
$$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X \text{ t.c. } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}.$$



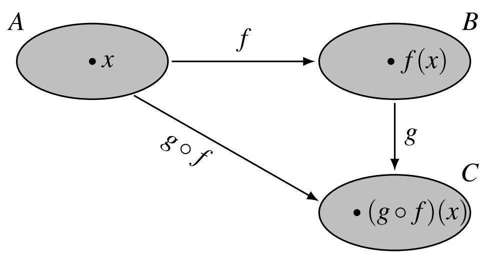
- La **controimmagine** di $Y \subseteq B$ tramite f è dato da
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : \exists y \in Y \text{ t.c. } y = f(x)\} = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$



- La funzione f è **iniettiva** se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$
ovvero
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$
- La funzione f è **suriettiva** se
$$f(A) = B$$
ovvero
$$\forall y \in B \; \exists x \in A \text{ t.c. } y = f(x).$$
- La funzione f è **biettiva** se f è iniettiva e suriettiva.
- Se f biettiva, allora la sua **funzione inversa** $f^{-1} : B \to A$ è definita per ogni $y \in B$ come segue
$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y.$$



- La **funzione composta** di $f : A \to B$ e $g : B \to C$ è la funzione $g \circ f : A \to C$ definita per ogni $x \in A$ da
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



- L'**insieme di definizione** di f è il più grande insieme D per cui $f(x)$ è ben definita per ogni $x \in D$.

Osservazione

Notare che $f^{-1}(y)$ è il valore assunto dalla funzione inversa di f calcolata in y, mentre $f(x)^{-1}$ è l'inverso del valore assunto dalla funzione f calcolata in x.

Proposizione

Se $f : A \to B$ è biettiva, allora si ha che:
$$(f \circ f^{-1})(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = y \qquad \forall y \in B,$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in A.$$

Nella seguente definizione utilizziamo l'ordinamento di $\mathbb{R}$, e per questo consideriamo A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Definizione

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti ed $f : A \to B$ una funzione.

- f è **crescente** se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

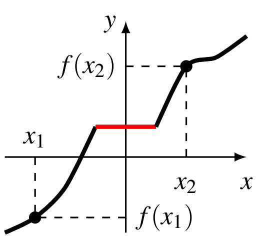
- f è **strettamente crescente** se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
- f è **decrescente** se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$
- f è **strettamente decrescente** se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
- f è **monotona** se è crescente o decrescente.
- f è **strettamente monotona** se è strettamente crescente o strettamente decrescente.
- f è **pari** se per ogni $x \in A$ si ha
$$f(-x) = f(x).$$
- f è **dispari** se per ogni $x \in A$ si ha
$$f(-x) = -f(x).$$
- f è **periodica** se esiste $T > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si ha
$$f(x+T) = f(x).$$
In tal caso il più piccolo $T > 0$ per cui vale l'uguaglianza precedente è detto **periodo**.

Esempio

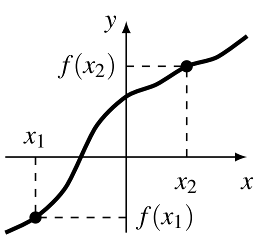
Vedremo in seguito che tutte le funzioni trigonometriche sono periodiche.

Osservazione

Una funzione è crescente se, spostandomi verso destra, ho che il suo grafico cresce, ovvero il corrispondente punto del grafico si sposta verso l'alto. Se oltre a ciò il grafico cresce strettamente, allora la funzione è strettamente crescente.



Funzione crescente.

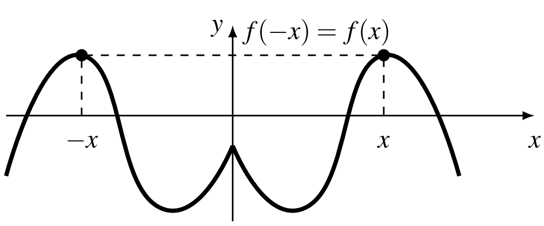


Funzione strettamente crescente.

Analogo discorso vale per le funzioni decrescenti e quelle strettamente decrescenti.

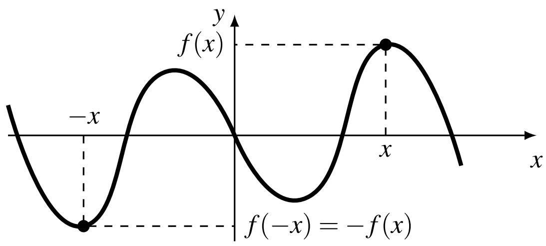
Osservazione

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle y. In altre parole, una volta disegnato i punti del grafico $(x, f(x))$ per $x \geqslant 0$, allora posso ottenere il grafico per $x \leqslant 0$ semplicemente ruotando il foglio tenendo fisso l'asse delle y.



Funzione pari.

Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine. In altre parole, una volta disegnato i punti del grafico $(x, f(x))$ per $x \geqslant 0$, allora posso ottenere il grafico per $x \leqslant 0$ semplicemente ruotando il foglio due volte, con una tenendo fisso l'asse delle x e l'altra tenendo fisso l'asse delle y.



Funzione dispari.

Si noti che se f è una funzione dispari e non ha salti in zero, allora $f(0) = 0$.

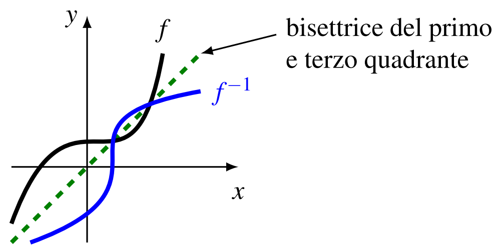
Proposizione

Una funzione strettamente monotona è iniettiva.

Dimostrazione. Basta osservare che se $x \neq y$ allora $f(x) \neq f(y)$. Infatti, se f è ad esempio strettamente crescente ed $x \neq y$, ad esempio $x < y$, allora $f(x) < f(y)$ e quindi $f(x) \neq f(y)$. □

Osservazione

Ruotando il grafico di una funzione (biettiva) f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante si ottiene il grafico della funzione inversa f^{-1}. Questo significa che, una volta disegnato su di un foglio il grafico di f, se ruotiamo il foglio tenendo le mani sull'angolo in basso a sinistra ed in alto a destra, quello che si vede in controluce è il grafico della funzione inversa f^{-1}.



Proposizione

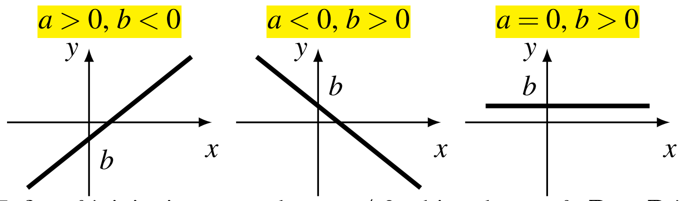
Data una funzione invertibile, essa è strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se la sua funzione inversa è strettamente crescente (rispettivamente, decrescente).

Dimostrazione. Sia f una funzione invertibile. Consideriamo $y_1 = f(x_1)$ ed $y_2 = f(x_2)$. Se f è strettamente crescente allora anche f^{-1} lo è. Dimostriamolo per assurdo. Supponiamo che $y_1 < y_2$ ed $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$. Per definizione si ha $x_1 \geqslant x_2$ e quindi, per la monotonia di f, si ha $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, ma questo è assurdo. Infine, il viceversa è ovvio in quanto la funzione inversa di f^{-1} è $(f^{-1})^{-1} = f$. □

Esempio

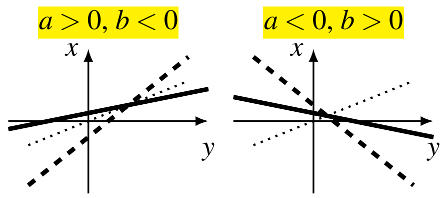
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo che
$$f(x) = ax + b$$
ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$ e come grafico una **retta**. Inoltre se $a \neq 0$ allora l'immagine è $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, mentre se $a = 0$ allora l'immagine è $f(\mathbb{R}) = \{b\}$. Osserviamo che f è strettamente crescente se e solo se $a > 0$, mentre è strettamente decrescente se e solo se $a < 0$. In particolare a ci dà la rapidità con cui la

funzione cresce se $a>0$, o decresce se $a<0$.



Infine f è iniettiva se e solo se $a \neq 0$ ed in tal caso $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biettiva e la funzione inversa è

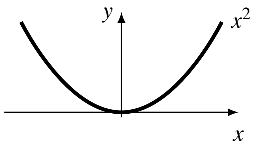
$$f^{-1}(y) = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}.$$



Esempio

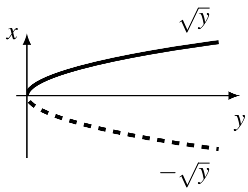
La funzione

$$f(x) = x^2$$



ha come insieme di definizione $D=\mathbb{R}$, è una funzione pari e ha come grafico la **parabola**. Inoltre $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ha come immagine $f(D) = [0,+\infty)$ e non è iniettiva in $\mathbb{R}$.

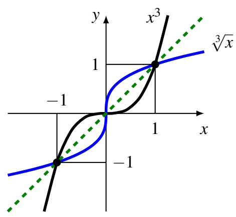
Osserviamo che f è strettamente decrescente in $(-\infty,0]$ e strettamente crescente in $[0,+\infty)$. Pertanto $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ è biettiva e la sua funzione inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Anche $f\colon (-\infty,0] \to [0,+\infty)$ è biettiva e la sua funzione inversa è $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.



Esempio

La funzione

$$f(x) = x^3$$



ha come insieme di definizione $D=\mathbb{R}$, è una funzione dispari e ha come grafico quello riportato in figura. Inoltre f ha come immagine $f(D)=\mathbb{R}$ ed è strettamente crescente. Infine $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è biettiva e la sua funzione inversa è

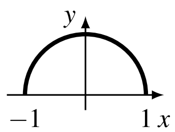
$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}.$$

Esempio

La funzione

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

ha come insieme di definizione $D=[-1,1]$, è una funzione pari e ha come grafico il semicerchio superiore. Inoltre f ha come immagine $f(D)=[0,1]$, è strettamente crescente in $[-1,0]$, è strettamente decrescente in $[0,1]$ e non è iniettiva in $[-1,1]$.

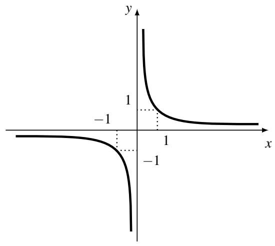


Osserviamo che $f\colon [0,1]\to[0,1]$ è biettiva e la sua funzione inversa è $f^{-1}\equiv f$.

Esempio

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



ha come insieme di definizione $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, è una funzione dispari e ha come grafico l'**iperbole equilatera**. Inoltre f ha come immagine $f(D)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, è strettamente decrescente in $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$, ma non in $\mathbb{R}$ (ad esempio $-1<1$ ma $f(-1)<f(1)$).
Infine $f\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è biettiva ed $f^{-1}\equiv f$.

Esempio

Consideriamo

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

Il suo dominio di definizione è $D=\{x\in\mathbb{R} : x\neq -2\} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
f è iniettiva in quanto per ogni $x,y\in D$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff \frac{2x+1}{x+2} = \frac{2y+1}{y+2} \\ &\iff (2x+1)(y+2) = (2y+1)(x+2) \\ &\iff 2xy+y+4x+2 = 2xy+x+4y+2 \iff x=y. \end{aligned}$$

Visto che

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{2x+1}{x+2} &\iff 2x+1 = xy+2y \\ &\iff (2-y)x = 2y-1 \iff y\neq 2 \text{ e } x = \frac{2y-1}{2-y}, \end{aligned}$$

si ha che l'immagine di f è $f(D)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, che $f\colon D\to f(D)$ è biettiva e la funzione inversa $f^{-1}\colon f(D)\to D$ è definita da

$$f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{2-y}.$$

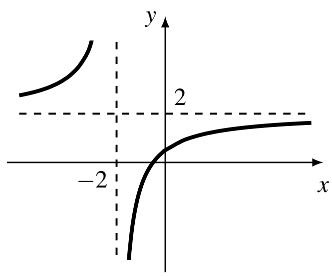
Verifichiamolo direttamente

$$f(f^{-1}(y)) = \frac{2f^{-1}(y)+1}{f^{-1}(y)+2} = \frac{2\frac{2y-1}{2-y}+1}{\frac{2y-1}{2-y}+2} = \frac{4y-2+2-y}{2y-1+4-2y} = \frac{3y}{3} = y.$$

Studiamone la monotonia:

$$\begin{aligned} f(x)<f(y) &\iff \frac{2x+1}{x+2} < \frac{2y+1}{y+2} \iff \frac{2x+1}{x+2} - \frac{2y+1}{y+2} < 0 \\ &\iff \frac{(2x+1)(y+2)-(2y+1)(x+2)}{(x+2)(y+2)} = \frac{3(x-y)}{(x+2)(y+2)} < 0 \end{aligned}$$

e quindi f è strettamente crescente in $(-\infty,-2)$ e $(-2,+\infty)$, ma non in $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.



Esempio

Consideriamo

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Il suo dominio di definizione è $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è una funzione dispari. La funzione non è iniettiva perché per ogni $x,y\in D$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff x+\frac{1}{x} = y+\frac{1}{y} \iff x^2y+y = xy^2+x \\ &\iff 0 = xy(x-y)+y-x = (x-y)(xy-1) \\ &\iff (x=y \text{ oppure } x = 1/y). \end{aligned}$$

L'immagine è $f(D) = (-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ in quanto

$$f(x) = x+\frac{1}{x} = y \iff x^2-yx+1 = 0$$

dove il polinomio di secondo grado (in x) ottenuto ha $\Delta = y^2-4$ che non è negativo se e solo se $y \in (-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, ed in tal caso le soluzioni sono

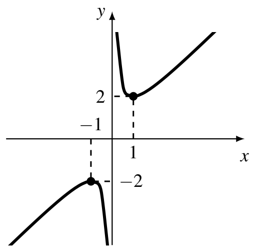
$$x_1 = \tfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}, \qquad x_2 = \tfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}.$$

Si noti che $x_1 = x_2$ se e solo se $y=-2$ oppure $y=2$. Studiamo la monotonia di f. Visto che f è dispari, basta considerare $0<x<y$. In tal caso si ha

$$f(x)<f(y) \iff x+\tfrac{1}{x} < y+\tfrac{1}{y} \iff x^2y+y<xy^2+x \iff$$
$$0 > xy(x-y)+y-x = \underbrace{(x-y)}_{<0}(xy-1) \iff xy>1.$$

e quindi

$$\begin{cases}0<x<y\\ f(x)<f(y)\end{cases} \iff \begin{cases}0<x<y\\ xy>1\end{cases}$$
$$\iff y > \max\{x,\tfrac{1}{x}\}>0$$
$$\iff \begin{cases}x\in(0,1)\\ y>1/x\end{cases} \text{oppure} \begin{cases}x\geqslant 1\\ y>x.\end{cases}$$



Dunque f è strettamente crescente in $(-\infty,-1]$, in $[1,+\infty)$ e strettamente decrescente in $[-1,0)$ e $(0,1]$.

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}-x.$$

L'insieme di definizione è $D=\mathbb{R}$. f è iniettiva in quanto se $x \geqslant y$ allora

$$f(x)=f(y) \iff \sqrt{x^2+1}-x = \sqrt{y^2+1}-y$$
$$\iff \sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} = x-y$$
$$\iff x^2+1+y^2+1-2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} = x^2+y^2-2xy$$
$$\iff 1+xy = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$$
$$\iff 1+x^2y^2+2xy = x^2y^2+x^2+y^2+1$$
$$\iff 0 = x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2 \iff x=y.$$

L'immagine è $f(D)=(0,+\infty)$ in quanto

$$y=f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \iff \sqrt{x^2+1}=x+y \iff$$
$$\begin{cases}x+y\geqslant 0\\ x^2+1 = x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow y^2+2xy-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1-y^2}{2y}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1-y^2}{2y}+y\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1+y^2}{2y}\geqslant 0 \Leftrightarrow y>0\\ x=\frac{1-y^2}{2y}.\end{cases}$$

Inoltre dai conti precedenti abbiamo che $f\colon D\to f(D)$ è biettiva e la sua inversa $f^{-1}\colon f(D)\to D$ è definita da

$$f^{-1}(y) = \tfrac{1-y^2}{2y}.$$

Verifichiamolo direttamente

$$f(f^{-1}(y)) = \sqrt{f^{-1}(y)^2+1}-f^{-1}(y)$$
$$= \sqrt{\left(\tfrac{1-y^2}{2y}\right)^2+1}-\tfrac{1-y^2}{2y} = \sqrt{\tfrac{1+y^4-2y^2+4y^2}{4y^2}}-\tfrac{1-y^2}{2y}$$
$$= \sqrt{\tfrac{y^4+2y^2+1}{4y^2}}-\tfrac{1-y^2}{2y} = \tfrac{1+y^2}{2y}-\tfrac{1-y^2}{2y} = y.$$

Infine f è strettamente decrescente in quanto, se $x>y$, allora

$$f(x)<f(y) \iff \sqrt{x^2+1}-x<\sqrt{y^2+1}-y$$
$$\iff \sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}<x-y$$
$$\iff x^2+1+y^2+1-2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}<x^2+y^2-2xy$$
$$\iff 1+xy<\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$$
$$\iff 1+xy<0 \text{ oppure } \begin{cases}1+xy\geqslant 0\\ 1+x^2y^2+2xy<x^2y^2+x^2+y^2+1\end{cases}$$
$$\iff 1+xy<0 \text{ oppure } \begin{cases}1+xy\geqslant 0\\ 0<x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\end{cases}$$
$$\iff 1+xy<0 \text{ oppure } 1+xy\geqslant 0 \iff \text{sempre.}$$

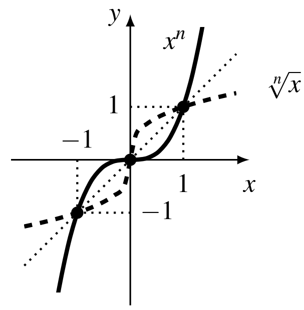
11 Alcune funzioni elementari

11.1 Funzione potenza con esponente naturale

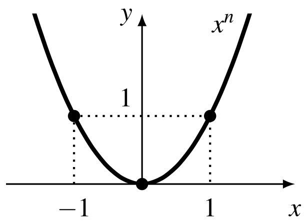
Sia $n\in\mathbb{N}$. La **funzione potenza n-esima** $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è definita da

$$f(x)=x^n.$$

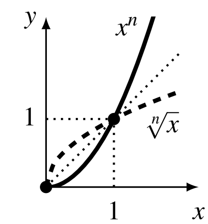
- Se $n\in\mathbb{N}$ è dispari, allora $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione dispari, è strettamente crescente (quindi è anche iniettiva) ed è biettiva in quanto suriettiva, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$; la sua funzione inversa $f^{-1}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è la **funzione radice n-esima** definita da
$$f^{-1}(y)=\sqrt[n]{y}.$$



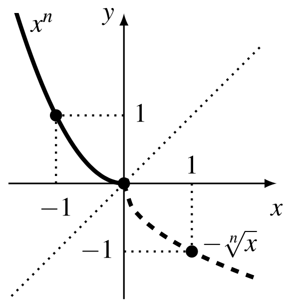
- Se $n\in\mathbb{N}$ è pari, allora $f\colon\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ è una funzione pari, è suriettiva ma non è iniettiva.



- Se $n\in\mathbb{N}$ è pari, allora $f\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ è strettamente crescente (quindi è anche iniettiva) e biettiva in quanto suriettiva, $f([0,+\infty))=[0,+\infty)$; la sua funzione inversa $f^{-1}\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ è la funzione radice n-esima $f^{-1}(y)=\sqrt[n]{y}$.



- Se $n\in\mathbb{N}$ è pari, allora $f\colon(-\infty,0]\to[0,+\infty)$ è strettamente decrescente (quindi è anche iniettiva) e biettiva in quanto suriettiva, $f((-\infty,0])=[0,+\infty)$; la sua funzione inversa $f^{-1}\colon[0,+\infty)\to(-\infty,0]$ è definita da $f^{-1}(y)=-\sqrt[n]{y}$.



11.2 Funzione esponenziale

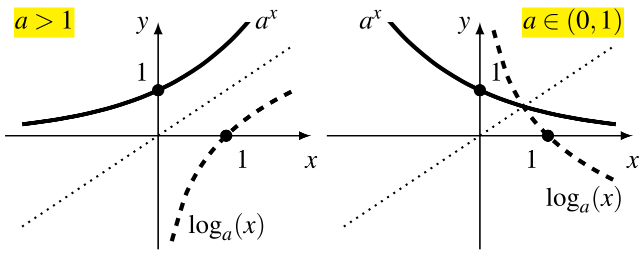
Prima di introdurre la funzione esponenziale, ricordiamo che se $a>0$, $m\in\mathbb{Z}$ ed $n\in\mathbb{N}$, allora $r=m/n\in\mathbb{Q}$ ed

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,$$

mentre per un generico $x \in \mathbb{R}$ si definisce
$$a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}.$$
Sia $a \in (0,+\infty)$. La **funzione esponenziale** $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ è definita da
$$f(x) = a^x.$$
Osserviamo che:

- $a > 1 \implies f$ è strettamente crescente;
- $a = 1 \implies f$ è costante;
- $a \in (0,1) \implies f$ è strettamente decrescente.

In particolare, se $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$, allora f è una funzione biettiva e la sua funzione inversa è
$$f^{-1}(x) = \log_a(x).$$

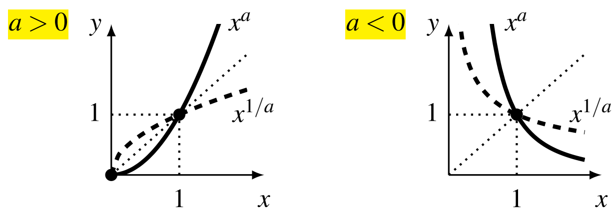


11.3 Funzione potenza con esponente reale

Sia $a \in \mathbb{R}$. La **funzione potenza** $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ è definita da
$$f(x) = x^a = 10^{a\log_{10}(x)} = e^{a\ln(x)}.$$
Osserviamo che: Osserviamo che:

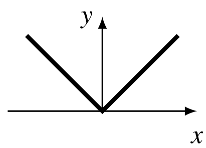
- $a > 0 \implies f$ è strettamente crescente,
- $a = 0 \implies f$ è costante,
- $a < 0 \implies f$ è strettamente decrescente.

Dunque, se $a \neq 0$, allora f è una funzione biettiva e la sua funzione inversa è
$$f^{-1}(x) = x^{1/a}.$$



11.4 Funzione modulo

La **funzione modulo**
$$|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$$
è definita da
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0, \\ -x & \text{se } -x < 0. \end{cases}$$

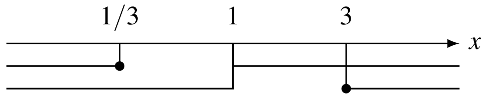


Osserviamo che la funzione modulo $|\cdot|$ è una funzione pari.
Di seguito alcune proprietà del modulo, facilmente deducibili dal suo grafico, valide ogni costante $a > 0$:

- $|x| \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
- $|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, (disuguaglianza triangolare)
- $|x| < a \iff -a < x < a$,
- $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$,
- $|x| > a \iff x < -a \vee x > a$,
- $|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a \vee x \geqslant a$.

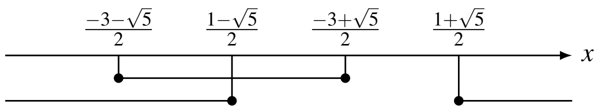
Esempio

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left|\tfrac{x+1}{x-1}\right| \leqslant 2\right\} = \left(-\infty, \tfrac{1}{3}\right] \cup [3,+\infty)$$
visto che
$$\left|\tfrac{x+1}{x-1}\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant \tfrac{x+1}{x-1} \leqslant 2 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \tfrac{x+1}{x-1} + 2 = \tfrac{3x-1}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \tfrac{1}{3} \vee x > 1 \\ \tfrac{x+1}{x-1} - 2 = \tfrac{3-x}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leqslant \tfrac{1}{3} \vee x \geqslant 3.$$



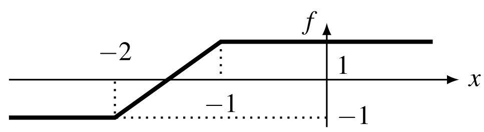
Esempio

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 + x\right| \geqslant 2x + 1\right\} = \left(-\infty, \tfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$
visto che
$$\left|x^2 + x\right| \geqslant 2x + 1 \iff x^2 + x \leqslant -(2x+1) \vee x^2 + x \geqslant 2x + 1$$
dove
$$\begin{aligned} x^2 + x \leqslant -(2x+1) &\iff x^2 + 3x + 1 \leqslant 0 \\ &\iff \tfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \tfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, \\ x^2 + x \geqslant 2x + 1 &\iff x^2 - x - 1 \geqslant 0 \\ &\iff x \leqslant \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x \geqslant \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$
con
$$\tfrac{-3-\sqrt{5}}{2} < \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} < \tfrac{-3+\sqrt{5}}{2} < \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$
in quanto
$$\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} < \tfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \iff 4 < 2\sqrt{5} \iff 16 < 20.$$



Esempio

Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Osserviamo che
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x+1)^2} = |x+2| - |x+1| \\ &= \begin{cases} (x+2) - (x+1) = 1 & \text{se } x \geqslant -1 \\ (x+2) + (x+1) = 2x + 3 & \text{se } -2 \leqslant x < -1 \\ -(x+2) + (x+1) = -1 & \text{se } x < -2 \end{cases} \end{aligned}$$
$$\iff f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant -1 \\ 2x + 3 & \text{se } -2 \leqslant x < -1 \\ -1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$
ha il seguente grafico.



È quindi evidente che la funzione non è iniettiva in $\mathbb{R}$ (ma solo in $[-2,-1]$), è crescente in $\mathbb{R}$ (ma strettamente crescente solo in $[-2,-1]$) e l'insieme dei valori è $[-1,1]$.

11.5 Funzione parte intera

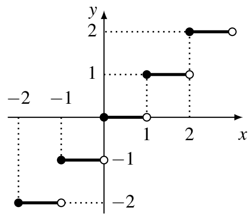
La **funzione parte intera**

$$[\cdot] \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$

è definita da

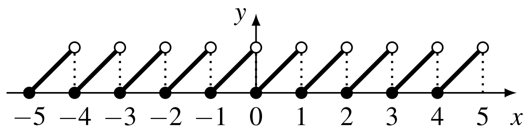
$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leqslant x\}.$$

Osserviamo che la funzione parte intera $[\cdot]$ è crescente, ma non strettamente crescente.



Esempio

La funzione $f(x) = x - [x]$ è periodica con periodo $T = 1$.



11.6 Grafici deducibili da quello della funzione f

Dal grafico della funzione f possiamo facilmente dedurre quelli delle seguenti funzioni:

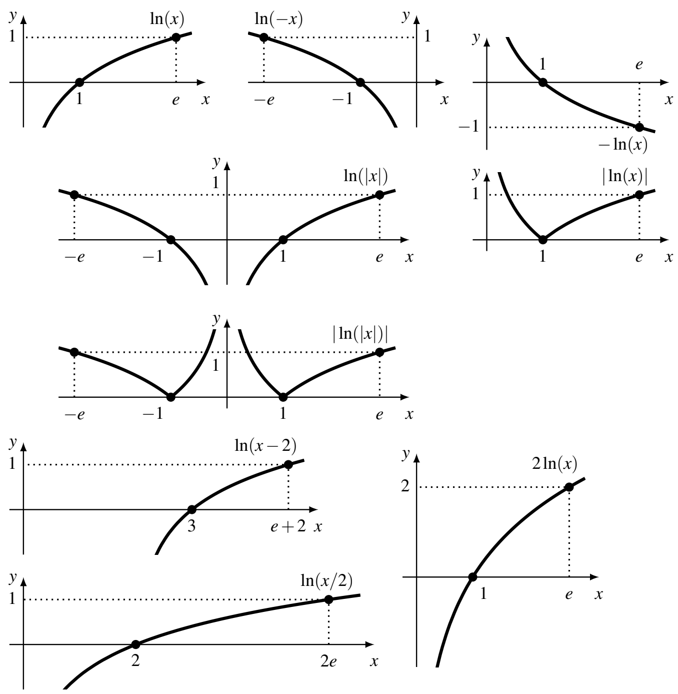
- $x \mapsto f(-x)$, • $x \mapsto f(|x|)$, • $x \mapsto -f(x)$,
- $x \mapsto |f(x)|$, • $x \mapsto |f(|x|)|$, • $x \mapsto a \cdot f(b \cdot x + c)$.

Infatti per l'ultima funzione basta fare quanto segue:

- considerare il grafico di f;
- traslarlo orizzontalmente di $-c$;
- "riscalare" l'asse delle x di un fattore $\frac{1}{b}$ e l'asse delle y di un fattore a.

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.



Esercizio

Ripetere la costruzione fatta nell'esempio precedente considerando $f(x) = x^3$.

Capitolo 3

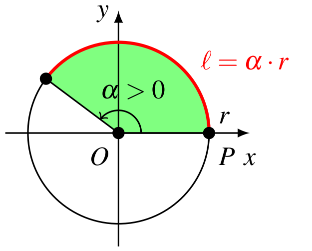
Trigonometria

12 Introduzione

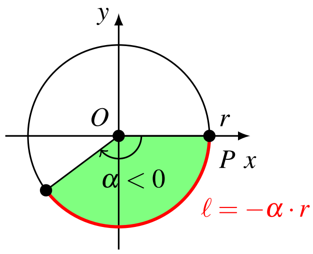
In trigonometria di solito gli angoli non sono misurati in gradi ma in radianti.

Definizione

Consideriamo una circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$ come in figura. Se si parte da $P = (r, 0)$ e ci si muove lungo la circonferenza girando in senso antiorario e percorrendo una distanza pari ad ℓ, allora l'angolo al centro corrispondente misura $\alpha = \ell/r \geqslant 0$ **radianti**.



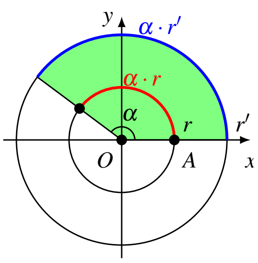
Diversamente, se si parte da $P = (r, 0)$ e ci si muove lungo la circonferenza girando in senso orario e percorrendo una distanza pari ad ℓ, allora l'angolo al centro corrispondente misura $\alpha = -\ell/r \leqslant 0$ radianti.



Si noti che se $|\alpha| = \ell/r > 2\pi$, allora significa che si è compiuto più di un giro completo.

Osservazione

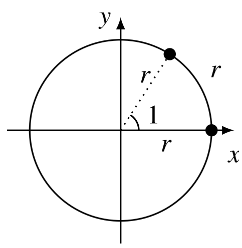
Si noti che nella definizione precedente non si specifica il valore del raggio della circonferenza. Il motivo è che la definizione di un angolo in radianti non dipende dal raggio della circonferenza scelta. Infatti la lunghezza di un arco corrispondente ad un angolo al centro è direttamente proporzionale al raggio e per definizione il coefficiente di proporzionalità è proprio l'angolo espresso in radianti visto che



$$\text{ampiezza dell'angolo in radianti} = \frac{\text{lunghezza dell'arco corrispondente}}{\text{raggio delle circonferenza}}.$$

Osservazione

L'**angolo di 1 radiante** è per definizione quell'angolo che, posto al centro di una circonferenza, determina su di essa un arco la cui lunghezza è uguale al raggio della circonferenza stessa.



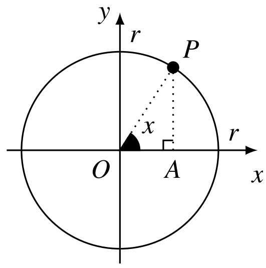
Definizione

Considerato un angolo che misura $x \in \mathbb{R}$ radianti ed il corrispondente punto $P = (p_1, p_2)$ come in figura, definiamo

$$\cos(x) = \frac{p_1}{r}, \qquad \sin(x) = \frac{p_2}{r}.$$

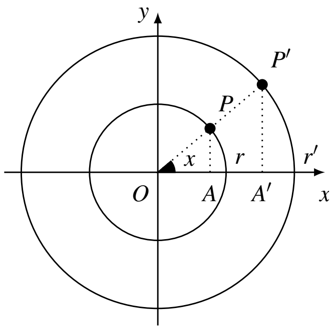
In altre parole, con riferimento al triangolo rettangolo OAP con $O = (0,0)$ ed $A = (p_1, 0)$, si definisce

$$\cos(x) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}, \qquad \sin(x) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}.$$



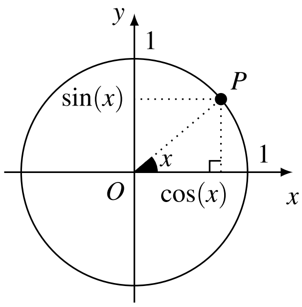
Osservazione

Si noti che nella definizione precedente non si specifica il valore del raggio r della circonferenza. Il motivo è che le definizioni di coseno e seno non dipendono dal raggio della circonferenza scelta. Infatti le lunghezze di $\overline{OA}$ e $\overline{AP}$ sono direttamente proporzionali al raggio e per definizione i coefficienti di proporzionalità sono rispettivamente il coseno ed il seno.



Per questo motivo, nella definizione precedente si può considerare un cerchio di raggio unitario così da avere $\overline{OP} = 1$. In tal caso, si ha semplicemente che il coseno ed il seno sono le coordinate del punto P, ovvero

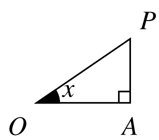
$$P = (\cos(x), \sin(x)).$$



Osservazione

Per definizione del coseno e del seno, si ha che i due cateti del triangolo rettangolo OAP misurano

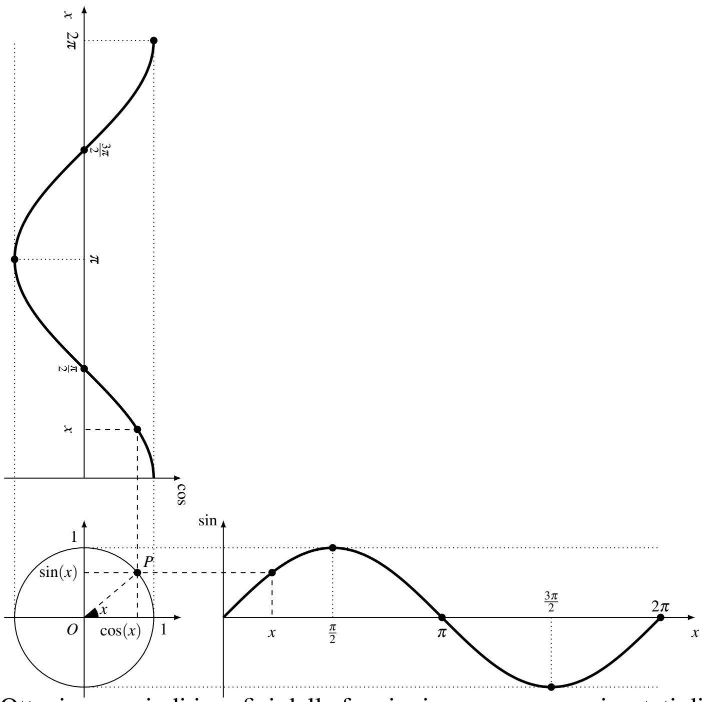
$$\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos(x), \quad \overline{AP} = \overline{OP} \cdot \sin(x).$$



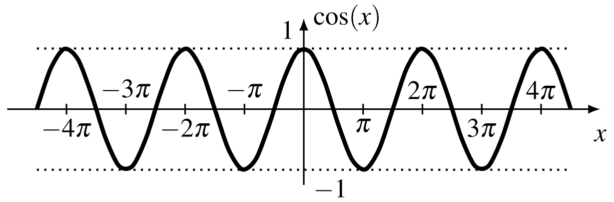
Dalla precedente definizione si ottengono le **funzioni coseno** e **seno**

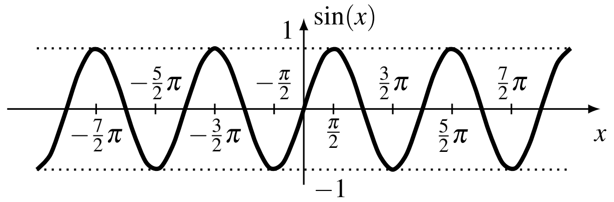
$$\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1], \qquad \sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

Osserviamo che i grafici sono facilmente deducibili dalla seguente figura, facendo ruotare il punto P lungo la circonferenza unitaria di centro l'origine O e raggio unitario e ricordando che $P = (\cos(x), \sin(x))$, dove x è l'angolo al centro individuato da OP ed il semiasse positivo delle ascisse.



Otteniamo quindi i grafici delle funzioni coseno e seno riportati di seguito.





Come chiaro anche dai grafici, entrambe le funzioni coseno e seno sono periodiche di periodo 2π, ma la funzione coseno è pari, mentre la funzione seno è dispari, in quanto

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x),$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Teorema di Pitagora

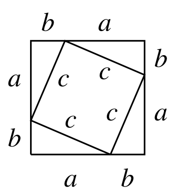
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema di Pitagora basta utilizzare la seguente figura dalla quale segue che

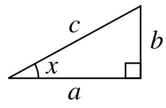
- l'area del quadrato di lato $a+b$ è $(a+b)^2$,
- l'area del quadrato di lato c è c^2,
- l'area dei triangoli rettangoli è $\frac{ab}{2}$,

e pertanto



$$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2} \iff a^2 + \underline{2ab} + b^2 = c^2 + \underline{2ab}$$
$$\iff a^2 + b^2 = c^2.$$

Per dimostrare che $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ basta far riferimento alla figura a fianco ed utilizzare il teorema di Pitagora con



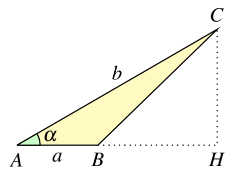
$$a = c\cos(x), \qquad b = c\sin(x). \qquad \square$$

Diamo alcune semplici applicazioni della trigonometria.

Proposizione

Per un triangolo qualsiasi, date le lunghezze a, b di due lati e la misura α dell'angolo tra essi compresi, si ha che

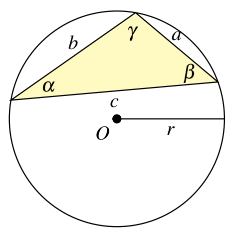
$$\text{area del triangolo} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(\alpha).$$



Dimostrazione. Basta osservare che la base $\overline{AB}$ misura a e l'altezza corrispondente $\overline{CH}$ misura $b\cdot\sin(\alpha)$. $\square$

Teorema dei seni

Considerato un triangolo qualsiasi, il rapporto tra i lati ed i seni dei rispettivi angoli opposti è costante ed è uguale al diametro della circonferenza circoscritta; ovvero, se a, b, c sono le lunghezze dei lati, α, β, γ sono gli angoli ad essi opposti ed r è il raggio della circonferenza circoscritta, si ha

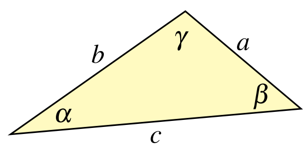


$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r.$$

Teorema dei coseni

Considerato un triangolo qualsiasi, il quadrato di un lato è uguale alla differenza tra la somma dei quadrati degli altri due lati ed il doppio prodotto di tali lati per il coseno dell'angolo compreso tra essi; ovvero, se a, b, c sono le lunghezze dei lati ed α, β, γ sono gli angoli ad essi opposti, si ha

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\alpha),$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos(\beta),$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\gamma).$$

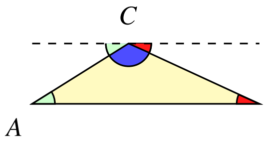


Osservazione

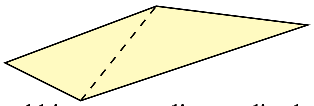
Dimostriamo che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $\pi\cdot(n-2)$ radianti.

pligono	numero di lati	somma angoli interni
triangolo	3	π
quadrilatero	4	$2\cdot\pi$
pentagono	5	$3\cdot\pi$
esagono	6	$4\cdot\pi$
ettagono	7	$5\cdot\pi$
ottagono	8	$6\cdot\pi$

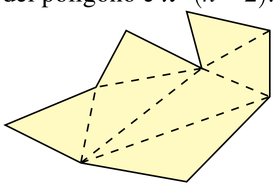
Iniziamo con i triangoli. Consideriamo un triangolo generico come nella figura seguente. Tracciamo la retta passante per C e parallela al lato $\overline{AB}$. Il lato $\overline{AC}$ e la retta individua un angolo uguale all'angolo opposto al lato $\overline{BC}$ e sono i due angoli evidenziati in verde. Analogamente, il lato $\overline{BC}$ e la retta individua un angolo uguale all'angolo opposto al lato $\overline{AC}$ e sono i due angoli evidenziati in rosso. È quindi ora evidente che la somma degli angoli interni al triangolo è π.



Se invece abbiamo un quadrilatero generico come in figura, allora possiamo scomporlo in due triangoli, ciascuno dei quali ha somma di angoli interni pari a π, e pertanto la somma degli angoli interni del quadrilatero è 2π.



Più in generale, se abbiamo un poligono di n lati, allora lo scomponiamo in maniera opportuna in $n-2$ triangoli ciascuno dei quali ha somma degli angoli interni pari a π e pertanto la somma degli angoli interni del poligono è $\pi \cdot (n-2)$.



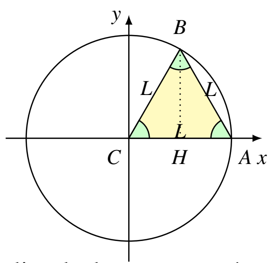
Esempio

Consideriamo un triangolo equilatero ABC di lato L ed una circonferenza di raggio L come in figura. L'altezza $\overline{BH}$ divide la base $\overline{CA}$ in due:

$$\overline{CH} = \frac{L}{2} = \overline{HA}.$$

Per il teorema di Pitagora abbiamo che

$$\overline{BH} = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$



Visto che gli angoli interni sono uguali e la loro somma è π radianti, abbiamo che ciascun angolo misura $\pi/3$ radianti. Per definizione del coseno e del seno si ha

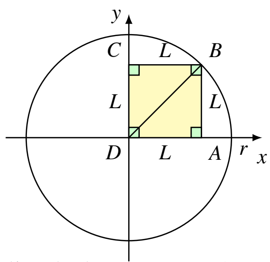
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esempio

Consideriamo un quadrato $ABCD$ di lato L ed una circonferenza con centro nell'origine e di raggio r come in figura. Per il teorema di Pitagora abbiamo che

$$\overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 \iff$$

$$2L^2 = r^2 \iff L = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r.$$



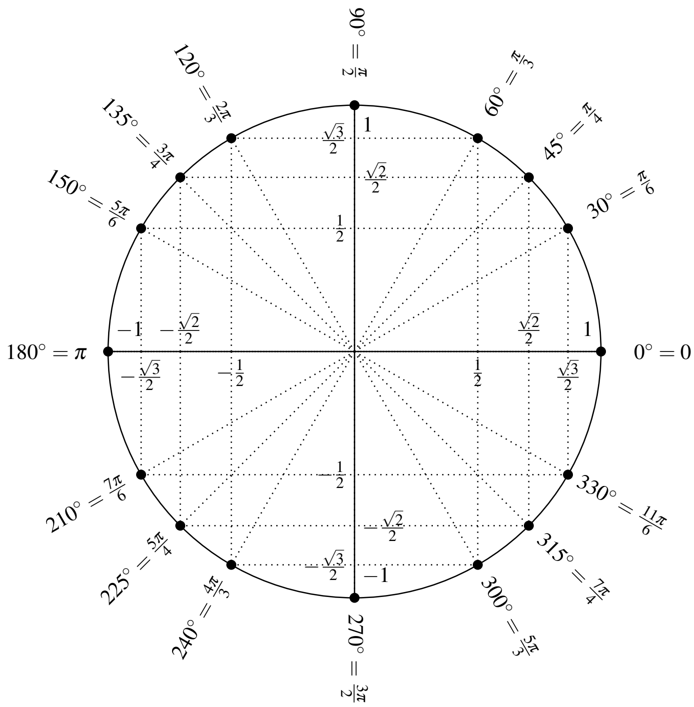
Visto che gli angoli interni sono uguali e la loro somma è 2π radianti, abbiamo che ciascun angolo misura $\pi/2$ radianti. Visto che le diagonali dividono in due gli angoli interni, per la definizione del coseno e del seno si ha

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Osservazione

Possiamo misurare gli angoli anche in gradi. Per passare da gradi a radianti o viceversa basta risolvere la seguente proporzione.

$$\pi : 180^\circ = \text{radianti} : \text{gradi}$$



radianti	gradi	cos	sin
0	0°	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	0	1
$\frac{2}{3}\pi$	120°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

radianti	gradi	cos	sin
π	180°	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$	240°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$	270°	0	-1
$\frac{5}{3}\pi$	300°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11}{6}\pi$	330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

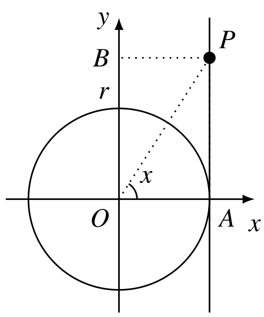
Definizione

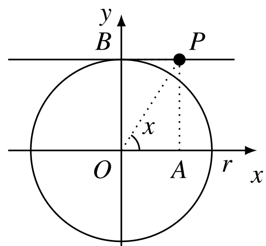
Le **funzioni tangente** e **cotangente**

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad \cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

sono definite da

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}, \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}.$$

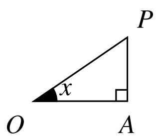




Osservazione

Per definizione della tangente e della cotangente, si ha che i due cateti del triangolo rettangolo OAP misurano

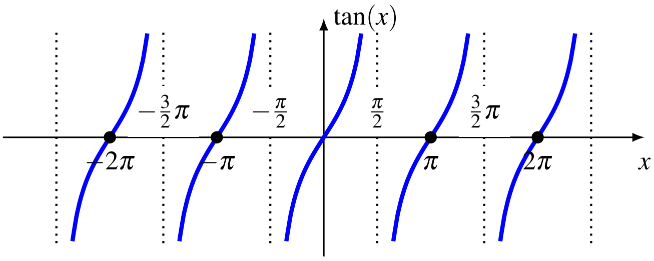
$$\overline{OA} = \overline{AP} \cdot \cot(x), \quad \overline{AP} = \overline{OA} \cdot \tan(x).$$

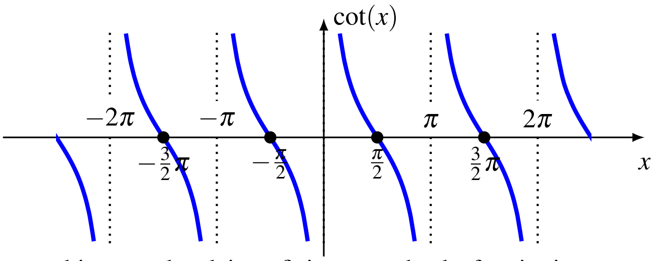


radianti	gradi	tan	cot
0	$0°$	0	$\nexists$
$\frac{1}{6}\pi$	$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$45°$	1	1
$\frac{1}{3}\pi$	$60°$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

radianti	gradi	tan	cot
$\frac{1}{2}\pi$	$90°$	$\nexists$	0
$\frac{2}{3}\pi$	$120°$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$135°$	-1	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$150°$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

I grafici delle funzioni tangente e cotangente sono riportati di seguito.





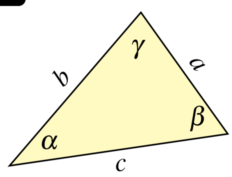
Come chiaro anche dai grafici, entrambe le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π e dispari, in quanto

$$\tan(x+\pi) = \tan(x), \qquad \tan(-x) = -\tan(x),$$
$$\cot(x+\pi) = \cot(x), \qquad \cot(-x) = -\cot(x).$$

Teorema delle tangenti (o di Nepero)

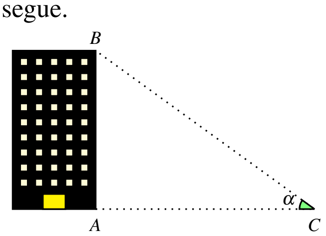
Considerato un triangolo qualsiasi, se a, b, c sono le lunghezze dei lati, α, β, γ sono gli angoli ad essi opposti, si ha

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$



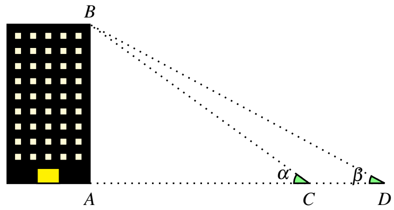
Esempio

Se vogliamo calcolare l'altezza $\overline{AB}$ di un grattacielo possiamo procedere come segue.



Se possiamo raggiungere il piede A del grattacielo, allora possiamo misurare $\overline{AC}$ e dal punto C misurare l'angolo α. Allora per definizione abbiamo che

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \tan(\alpha).$$



Se invece non possiamo raggiungere il piede A del grattacielo, allora possiamo misurare dal punto C l'angolo α, dal punto D l'angolo β e la distanza $\overline{CD}$. Si ha allora che

$$\begin{cases}\overline{AB} = \overline{AC}\cdot\tan(\alpha)\\ \overline{AB} = \overline{AD}\cdot\tan(\beta) = \left(\overline{AC}+\overline{CD}\right)\cdot\tan(\beta)\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\overline{AC}\cdot\tan(\alpha) = \left(\overline{AC}+\overline{CD}\right)\cdot\tan(\beta)\\ \overline{AB} = \overline{AC}\cdot\tan(\alpha)\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\overline{AC} = \overline{CD}\cdot\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}\\ \overline{AB} = \overline{CD}\cdot\frac{\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}{\tan(\alpha)-\tan(\beta)} = \frac{\overline{CD}}{\cot(\beta)-\cot(\alpha)}.\end{cases}$$

13 Identità trigonometriche

Ciascuna funzione trigonometrica può essere espressa in termini delle altre come riportato nella seguente tabella, in cui i "$\pm$" evidenziano che il segno dipende dal quadrante in cui si giunge dopo una rotazione attorno all'origine di x radianti.

$=$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$\cos(x)$	$\pm\sqrt{1-\sin(x)^2}$	$\cos(x)$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}$	$\pm\frac{\cot(x)}{\sqrt{1+\cot(x)^2}}$
$\sin(x)$	$\sin(x)$	$\pm\sqrt{1-\cos(x)^2}$	$\pm\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot(x)^2}}$
$\tan(x)$	$\pm\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin(x)^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos(x)^2}}{\cos(x)}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cot(x)}$
$\cot(x)$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin(x)^2}}{\sin(x)}$	$\pm\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\cos(x)^2}}$	$\frac{1}{\tan(x)}$	$\cot(x)$

Dimostrazione. Tali identità seguono dal teorema di Pitagora e la loro dimostrazione è lasciata come esercizio per casa. □

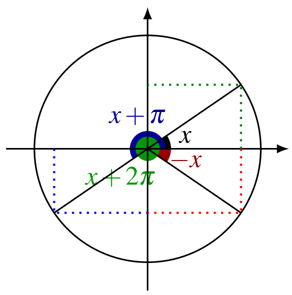
Valgono le seguenti proprietà di periodicità, simmetria, traslazioni, somma, sottrazione e raddoppio.

$\circ$	$-x$	$x+\pi$	$x+2\pi$	$x+\frac{\pi}{2}$	$x\pm y$	$2x$
cos	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$	$1-2\sin(x)^2$
sin	$-\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)$	$2\sin(x)\cos(x)$
tan	$-\tan(x)$	$\tan(x)$	$\tan(x)$	$-\cot(x)$	$\frac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\tan(y)}$	$\frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$
cot	$-\cot(x)$	$\cot(x)$	$\cot(x)$	$-\tan(x)$	$\frac{\cot(x)\cot(y)\mp1}{\cot(y)\pm\cot(x)}$	$\frac{\cot(x)^2-1}{2\cot(x)}$

Dimostrazione. Basta studiare il coseno ed il seno, perché poi per la tangente e la cotangente basta applicare le loro definizioni; lo si verifichi come esercizio per casa.

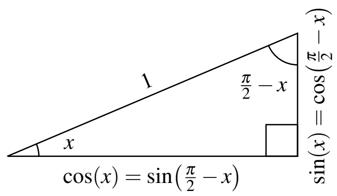
Dalla figura a fianco segue che:

- $\cos(-x) = \cos(x)$,
- $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$,
- $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$,
- $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$,
- $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.



Dalla figura a fianco segue che

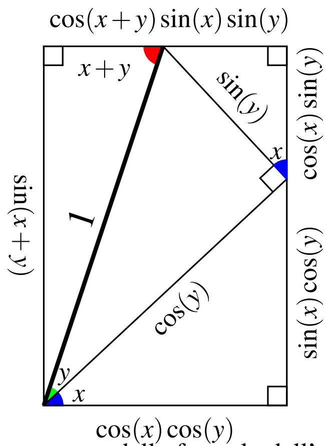
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$.



Per quanto già dimostrato si ha pertanto che

$$\cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-x-\tfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(-x+\tfrac{\pi}{2}\right)=-\sin(x),$$
$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(-x-\tfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-x+\tfrac{\pi}{2}\right)=\cos(x).$$

Le formule dell'addizione per il conseno ed il seno seguono dalla figura a fianco uguagliando le espressioni trovate ai lati del rettangolo.



Le formule della sottrazione seguono dalle formule dell'addizione e dal fatto che $\cos(-x)=\cos(x)$ e $\sin(-x)=-\sin(x)$; infatti si ha

$$\begin{aligned}\cos(x-y)&=\cos(x+(-y))=\cos(x)\cos(-y)-\sin(x)\sin(-y)\\&=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y),\\ \sin(x-y)&=\sin(x+(-y))=\sin(x)\cos(-y)+\cos(x)\sin(-y)\\&=\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Infine le formule per il raddoppio seguono da quelle dell'addizione prendendo $x=y$; infatti si ha

$$\begin{aligned}\cos(2x)&=\cos(x+x)=\cos(x)^2-\sin(x)^2=1-2\sin(x)^2,\\ \sin(2x)&=\sin(x+x)=\sin(x)\cos(x)+\cos(x)\sin(x)\\&=2\sin(x)\cos(x).\end{aligned}$$

□

Proposizione

Per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze.

- $\cos(x)\cos(y)=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$
- $\sin(x)\sin(y)=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
- $\sin(x)\cos(y)=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$
- $\cos(x)\sin(y)=\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$

Dimostrazione. Visto che

$$\begin{aligned}\sin(x+y)&=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y), &&\text{(a)}\\ \sin(x-y)&=\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y), &&\text{(b)}\\ \cos(x+y)&=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y), &&\text{(c)}\\ \cos(x-y)&=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y), &&\text{(d)}\end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}\text{(a)+(b)}:&\quad \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin(x)\cos(y),\\ \text{(a)−(b)}:&\quad \sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos(x)\sin(y),\\ \text{(c)+(d)}:&\quad \cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos(x)\cos(y),\\ \text{(c)−(d)}:&\quad \cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Da tali uguaglianze è poi facile concludere la dimostrazione. □

Proposizione

Per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze.

- $\sin(x)+\sin(y)=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x)-\sin(y)=2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- $\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x)-\cos(y)=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Dimostrazione. Basta sostituire $\frac{x+y}{2}$ ad x e $\frac{x-y}{2}$ ad y nelle identità trigonometriche elencate nella precedente proposizione. □

Proposizione

Per ogni $x\in\mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze.

- $\cos(x)^2=\frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin(x)^2=\frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\tan(x)^2=\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$
- $\cot(x)^2=\frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$

Dimostrazione. Visto che $\cos(2x)=1-2\sin(x)^2$, abbiamo che la seconda uguaglianza è verificata. Dalla seconda uguaglianza segue che

$$\cos(x)^2=1-\sin(x)^2=1-\frac{1-\cos(2x)}{2}=\frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Le ultime due uguaglianze seguono dalle prime due e sono lasciate come esercizio per casa. □

Proposizione

Per ogni $x\in\mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze.

- $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$
- $\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$
- $\cot\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$

Dimostrazione. Per dimostrare le prime due uguaglianze, basta utilizzare le uguaglianze della proposizione precedente con $x/2$ al posto di x. Per dimostrare infine le ultime due uguaglianze, basta utilizzare le prime due uguaglianze ed osservare che la tangente e la cotangente hanno lo stesso segno del seno nel loro dominio di definizione (si guardi il loro grafico). □

Proposizione

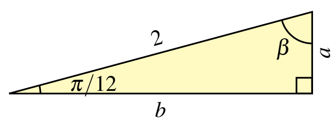
Per ogni $x\in\mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze.

$$t=\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\implies\begin{cases}\bullet\ \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} & \bullet\ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}\\ \bullet\ \tan(x)=\frac{2t}{1-t^2} & \bullet\ \cot(x)=\frac{1-t^2}{2t}\end{cases}$$

Dimostrazione. Basta utilizzare le uguaglianze della proposizione precedente. I dettagli della dimostrazione sono lasciati come esercizio per casa. □

Esempio

Dato un triangolo rettangolo la cui ipotenusa misura 2 ed ha un angolo di $\pi/12$, calcoliamo le lunghezze dei cateti ed il valore dell'altro angolo acuto.



Visto che la somma degli angoli interni di un triangolo è π e l'angolo retto misura $\pi/2$, l'altro angolo acuto misura

$$\beta=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{5}{12}\pi.$$

Utilizzando l'identità trigonometrica

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$$

si ottiene che

$$\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right)&=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{6}\right)\\&=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Utilizzando l'identità trigonometrica

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$$

si ottiene che

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

In alternativa si può utilizzare il teorema di Pitagora come segue

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1-\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1-\frac{6+2+2\sqrt{6}\sqrt{2}}{16}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

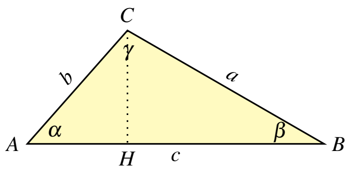
Dunque i due cateti misurano

$$b = 2\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad a = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Esempio

Dato un triangolo come in figura e sapendo che $b=1$, $\beta=\pi/6$, $\sin(\alpha)=3/4$ e che α è un angolo acuto, ovvero $\alpha<\pi/2$, calcoliamo $\cos(\gamma)$, $\sin(\gamma)$, a e c.

$b=1$
$\beta=\pi/6$
$\sin(\alpha)=3/4$
$\alpha<\pi/2$



Per il teorema di Pitagora abbiamo che

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin(\alpha)^2} = \sqrt{1-\left(\tfrac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\tfrac{9}{16}} = \tfrac{\sqrt{7}}{4}.$$

Essendo la somma degli angoli interni di un triangolo π, sappiamo che l'angolo γ vale

$$\gamma = \pi-\alpha-\beta = \pi-\alpha-\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{5}{6}\pi-\alpha.$$

Utilizzando l'identità trigonometrica

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$$

si ottiene che

$$\cos(\gamma) = \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi-\alpha\right) = \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)\cos(\alpha)+\sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)\sin(\alpha)$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3-\sqrt{21}}{8}.$$

Osserviamo che $\cos(\gamma)<0$ e quindi $\gamma>\pi/2$, ovvero γ è un angolo ottuso. Utilizzando l'identità trigonometrica

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$$

si ottiene che

$$\sin(\gamma) = \sin\left(\tfrac{5}{6}\pi-\alpha\right) = \sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)\cos(\alpha)-\cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)\sin(\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}.$$

Osserviamo che in accordo con il teorema di Pitagora si ha

$$\cos(\gamma)^2+\sin(\gamma)^2 = \left(\frac{3-\sqrt{21}}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}\right)^2$$
$$= \frac{(9+21-6\sqrt{21})+(7+27+6\sqrt{21})}{64} = 1.$$

Infine abbiamo

$$\overline{CH} = b\cdot\sin(\alpha) = a\cdot\sin(\beta)$$
$$\implies a = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{1\cdot(3/4)}{\sin(\pi/6)} = \frac{3/4}{1/2} = \frac{3}{2},$$
$$\overline{AH} = b\cdot\cos(\alpha) = 1\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$
$$\overline{HB} = a\cdot\cos(\beta) = \frac{3}{2}\cdot\cos(\pi/6) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$
$$c = \overline{AH}+\overline{HB} = \frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{4}.$$

Esercizio

Verificare che se nell'esempio precedente si assume che α sia un angolo convesso, ovvero $\alpha>\pi/2$, allora si ha $\sin(\gamma) = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}$ e $\cos(\gamma) = \frac{3+\sqrt{21}}{8}$.

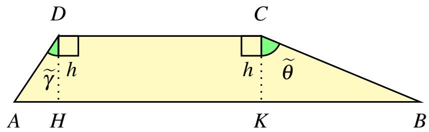
Esempio

Di un trapezio come in figura si sa che l'altezza misura 5, che la base maggiore misura il doppio di quella minore, e che gli angoli γ e θ adiacenti alla base minore sono tali che

$$\theta = 2\gamma-\tfrac{\pi}{2}, \qquad \cos(\theta) = -\tfrac{12}{13}.$$

Calcoliamo il perimetro del trapezio.

$h=5$
$\overline{AB}=2\overline{CD}$
$\theta=2\gamma-\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)=-12/13$



Poniamo

$$\widetilde{\gamma} = \gamma-\tfrac{\pi}{2}, \qquad \widetilde{\theta} = \theta-\tfrac{\pi}{2}.$$

Per ipotesi si ha

$$\widetilde{\theta} = \theta-\tfrac{\pi}{2} = \left(2\gamma-\tfrac{\pi}{2}\right)-\tfrac{\pi}{2} = 2\gamma-\pi = 2\widetilde{\gamma}$$

e quindi

$$\widetilde{\theta} = 2\widetilde{\gamma}.$$

Utilizzando l'identità trigonometrica

$$\sin\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$$

otteniamo che

$$\sin(\widetilde{\theta}) = \sin\left(\theta-\tfrac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta) = \tfrac{12}{13}.$$

Visto che $\widetilde{\theta}\in(0,\pi/2)$ si ha $\cos(\widetilde{\theta})>0$ e quindi per il teorema di Pitagora risulta

$$\cos(\widetilde{\theta}) = \sqrt{1-\sin(\widetilde{\theta})^2} = \sqrt{1-\left(\tfrac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\tfrac{144}{169}} = \tfrac{5}{13}.$$

Osserviamo che

$$\overline{AH} = \overline{DH}\cdot\tan(\widetilde{\gamma}) = h\cdot\tan(\widetilde{\gamma}),$$
$$\overline{KB} = \overline{CK}\cdot\tan(\widetilde{\theta}) = h\cdot\tan(\widetilde{\theta}).$$

Pertanto risulta

$$2\overline{CD} = \overline{AB} = \overline{AH}+\overline{HK}+\overline{KB} = h\cdot\tan(\widetilde{\gamma})+\overline{CD}+h\cdot\tan(\widetilde{\theta})$$
$$\implies \overline{CD} = h\left(\tan(\widetilde{\gamma})+\tan(\widetilde{\theta})\right).$$

Utilizzando l'identità trigonometrica

$$\tan\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

si ottiene che

$$\overline{CD} = h\left(\tan(\widetilde{\gamma})+\tan(\widetilde{\theta})\right) = h\left(\tan\left(\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right)+\tan(\widetilde{\theta})\right)$$
$$= h\left(\frac{\sin(\widetilde{\theta})}{1+\cos(\widetilde{\theta})}+\frac{\sin(\widetilde{\theta})}{\cos(\widetilde{\theta})}\right) = 5\left(\frac{12/13}{1+(5/13)}+\frac{12/13}{5/13}\right) = \frac{46}{3}.$$

Di conseguenza si ha $\overline{AB} = 92/3$. Utilizzando l'identità trigonometrica

$$\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

e ricordando che $\theta\in(0,\pi/2)$ si ha

$$\cos(\widetilde{\gamma}) = \cos\left(\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\widetilde{\theta})}{2}} = \sqrt{\frac{1+(5/13)}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Inoltre

$$\overline{DH} = \overline{AD}\cdot\cos(\widetilde{\gamma}) \implies \overline{AD} = \frac{\overline{DH}}{\cos(\widetilde{\gamma})} = \frac{h}{\cos(\widetilde{\gamma})} = \frac{5}{3/\sqrt{13}} = \frac{5}{3}\sqrt{13},$$
$$\overline{CK} = \overline{CB}\cdot\cos(\widetilde{\theta}) \implies \overline{CB} = \frac{\overline{CK}}{\cos(\widetilde{\theta})} = \frac{h}{\cos(\widetilde{\theta})} = \frac{5}{5/13} = 13.$$

In conclusione il perimetro misura

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} = \frac{92}{3}+13+\frac{46}{3}+\frac{5}{3}\sqrt{13} = 59+\frac{5}{3}\sqrt{13}.$$

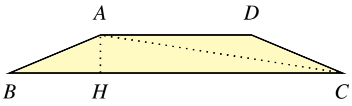
Esempio

È dato un trapezio isoscele $ABCD$ la cui base maggiore BC misura 44, la base minore AD misura 20 e il coseno dell'angolo ABC è $12/13$. Determinare il perimetro e l'area del trapezio, la diagonale AC ed il coseno dell'angolo ACB.

$AD = 20$

$BC = 44$

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{12}{13}$



Il trapezio è isoscele e quindi

$$BH = \frac{BC-AD}{2} = \frac{44-20}{2} = 12.$$

Poiché $\widehat{AHB} = \pi/2$, abbiamo che

$$BH = AB\cos(\widehat{ABC}) \Longrightarrow AB = \frac{BH}{\cos(\widehat{ABC})} = \frac{12}{12/13} = 13.$$

Per il teorema di Pitagora si ha

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Possiamo ora calcolare l'area ed il perimetro del trapezio:

$$A_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot AH = \frac{44+20}{2} \cdot 5 = 160,$$

$$P_{ABCD} = BC + AD + AB + CD = 44 + 20 + 13 + 13 = 90.$$

Consideriamo ora il triangolo rettangolo AHC. Osserviamo che

$$HC = BC - BH = 44 - 12 = 32.$$

Per il teorema di Pitagora si ha

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{5^2 + 32^2} = \sqrt{1049}$$

e pertanto

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{HC}{AC} = \frac{32}{\sqrt{1049}}.$$

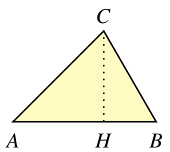
Esempio

Un triangolo come in figura ha una base lunga $3+\sqrt{3}$ e gli angoli ad essa adiacenti di 45° e 60°. Cerchiamo le lunghezze degli altri due lati ed i segmenti in cui la base data viene divisa dall'altezza ad essa relativa.

$AB = 3 + \sqrt{3}$

$\widehat{ABC} = 60°$

$\widehat{CAB} = 45°$



Calcoliamo l'ampiezza del terzo angolo ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°:

$$\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{CAB} + \widehat{CBA}) = 180° - (45° + 60°) = 75°.$$

Per trovare gli altri due lati possiamo applicare il teorema dei seni:

$$\frac{AC}{\sin(\widehat{CBA})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})} \Longrightarrow AC = \frac{AB\cdot\sin(\widehat{CBA})}{\sin(\widehat{ACB})}.$$

Ricaviamo il seno di 75° osservando che $75° = 30° + 45°$:

$$\sin(75°) = \sin(30° + 45°) = \sin(30°)\cos(45°) + \cos(30°)\sin(45°)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Sostituiamo il valore trovato nell'uguaglianza precedente:

$$AC = \frac{(3+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{2\cdot(3+3\sqrt{3})}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2\cdot(3+3\sqrt{3})}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = 3\sqrt{2}.$$

Con lo stesso procedimento possiamo ricavare l'altro lato:

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{CAB})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})} \Longrightarrow BC = \frac{AB\cdot\sin(\widehat{CAB})}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{(3+\sqrt{3})\cdot\sin(45°)}{\sin(75°)}$$

$$= \frac{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}.$$

Infine, considerando i triangoli rettangoli AHC e BHC, si ha:

$$AH = AC\cdot\cos(45°) = 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3,$$

$$BH = BC\cdot\cos(60°) = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

Esempio

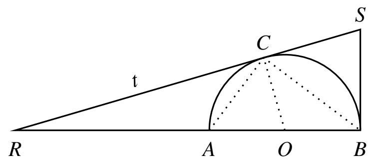
Nella semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$ consideriamo la corda $AC = 6r/5$. Sia t la tangente in C alla semicirconferenza. Siano R e S i punti d'intersezione di t rispettivamente con il prolungamento di AB e con la tangente in B alla semicirconferenza. Calcoliamo il perimetro del triangolo RBS.

$AC = 6r/5$

$AO = OB = r$

$\widehat{OCR} = 90°$

$\widehat{RBS} = 90°$



Per farlo basta calcolare AR, BS e $RS = CR + CS$, ovvero i lati dei triangoli ACR e BCS, che andiamo a studiare separatamente.

• Iniziamo con il triangolo ACR. Per il teorema dei seni si ha

$$\frac{CR}{\sin(\widehat{CAR})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ARC})} = \frac{AR}{\sin(\widehat{ACR})}. \qquad (\clubsuit)$$

Visto che l'angolo formato dalla tangente e da una corda della circonferenza è uguale all'angolo alla circonferenza che insiste su quella corda, si ha

$$\widehat{ACR} = \widehat{ABC}.$$

ABC è un triangolo rettangolo, poiché inscritto in una semicirconferenza il cui diametro è AB; pertanto

$$\sin(\widehat{ACR}) = \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{6r/5}{2r} = \frac{3}{5}$$

e quindi per il teorema di Pitagora si ha

$$\cos(\widehat{ACR}) = \cos(\widehat{ABC}) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Per il teorema di Pitagora si ha

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{6}{5}r\right)^2} = \sqrt{4r^2 - \frac{36}{25}r^2} = \frac{8}{5}r.$$

Visto che $\widehat{CAR} = 180° - \widehat{BAC}$, si ha che

$$\sin(\widehat{CAR}) = \sin(180° - \widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{8r/5}{2r} = \frac{4}{5}$$

e quindi per il teorema di Pitagora si ha

$$\cos(\widehat{CAR}) = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}.$$

Visto che $\widehat{ARC} = 180° - \widehat{ACR} - \widehat{CAR}$, si ha che

$$\sin(\widehat{ARC}) = \sin\Big(180° - (\widehat{ACR} + \widehat{CAR})\Big) = \sin(\widehat{ACR} + \widehat{CAR})$$

$$= \sin(\widehat{ACR})\cos(\widehat{CAR}) + \cos(\widehat{ACR})\sin(\widehat{CAR})$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{7}{25}.$$

Possiamo ora inserire quanto calcolato in ($\clubsuit$) ottenendo

$$\frac{CR}{4/5} = \frac{6r/5}{7/25} = \frac{AR}{3/5} \Longrightarrow \begin{cases} CR = \frac{4}{5}\cdot\frac{6r/5}{7/25} = \frac{24}{7}r \\ AR = \frac{3}{5}\cdot\frac{6r/5}{7/25} = \frac{18}{7}r. \end{cases}$$

• Studiamo ora il triangolo BCS. Per il teorema dei seni si ha

$$\frac{CS}{\sin(\widehat{CBS})} = \frac{BS}{\sin(\widehat{BCS})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{BSC})}. \qquad (\spadesuit)$$

Visto che $\widehat{CBS} = 90° - \widehat{ABC}$, si ha che

$$\sin(\widehat{CBS}) = \sin(90° - \widehat{ABC}) = \cos(\widehat{ABC}) = \frac{4}{5}$$

Sempre per il teorema di Pitagora si ha

$$\cos(\widehat{CBS}) = \sqrt{1 - \sin(\widehat{CBS})^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Visto che $\widehat{BCS} = 180° - \widehat{ACR} - 90°$, si ha che

$$\sin(\widehat{BCS}) = \sin(90° - \widehat{ACR}) = \cos(\widehat{ACR}) = \frac{4}{5}$$

e per il teorema di Pitagora si ha

$$\cos(\widehat{BCS}) = \sqrt{1 - \sin(\widehat{BCS})^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Visto che $\widehat{BSC} = 180° - \widehat{BCS} - \widehat{CBS}$, si ha che

$$\sin(\widehat{BSC}) = \sin\Big(180° - (\widehat{BCS} + \widehat{CBS})\Big) = \sin(\widehat{BCS} + \widehat{CBS})$$

$$= \sin(\widehat{BCS})\cos(\widehat{CBS}) + \cos(\widehat{BCS})\sin(\widehat{CBS})$$
$$= \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} + \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} = \tfrac{24}{25}.$$

Possiamo ora inserire quanto calcolato in (♠) ottenendo

$$\frac{CS}{4/5} = \frac{BS}{4/5} = \frac{8r/5}{24/25} \implies \begin{cases} CS = \frac{4}{5}\cdot\frac{8r/5}{24/25} = \frac{4}{3}r \\ BS = \frac{4}{5}\cdot\frac{8r/5}{24/25} = \frac{4}{3}r. \end{cases}$$

In conclusione il perimetro del triangolo BRS è

$$P_{BRS} = AR + AB + BS + SC + CR$$
$$= \left(\tfrac{18}{7} + 2 + \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{24}{7}\right)r = \tfrac{32}{3}r.$$

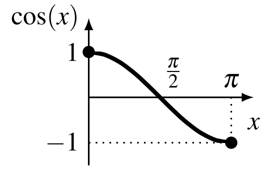
14 Funzioni trigonometriche inverse

La funzione $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ è strettamente decrescente (e quindi biettiva). Questo è chiaro dal suo grafico, ma lo possiamo dimostrare anche analiticamente come segue: se $0 \leqslant x < y \leqslant \pi$, allora

$$\cos(y) - \cos(x) = -2\underbrace{\sin\left(\tfrac{y-x}{2}\right)}_{>0}\cdot\underbrace{\sin\left(\tfrac{y+x}{2}\right)}_{>0} < 0$$

visto che

$$\tfrac{y+x}{2} \in (0,\pi), \qquad \tfrac{y-x}{2} \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

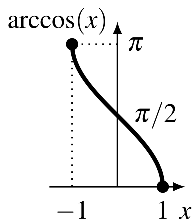


Definizione

La funzione inversa

$\cos^{-1}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$

è detta **arcocoseno** ed indicata con **arccos**.

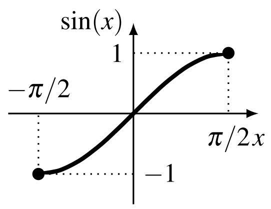


La funzione $\sin\colon [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$ è strettamente crescente (e quindi biettiva). Questo è chiaro dal suo grafico, ma lo possiamo dimostrare anche analiticamente come segue: se $-\pi/2 \leqslant x < y \leqslant \pi/2$, allora

$$\sin(y) - \sin(x) = 2\underbrace{\cos\left(\tfrac{y+x}{2}\right)}_{>0}\cdot\underbrace{\sin\left(\tfrac{y-x}{2}\right)}_{>0} > 0$$

visto che

$$\tfrac{y+x}{2} \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad \tfrac{y-x}{2} \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

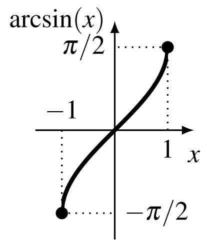


Definizione

La funzione inversa

$\sin^{-1}\colon [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$

è detta **arcoseno** ed indicata con **arcsin**.



Proposizione

Valgono le seguenti uguaglianze per ogni $x \in [-1,1]$.

a) $\sin(\arcsin(x)) = x$ *b*) $\cos(\arccos(x)) = x$

c) $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ *d*) $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

e) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

Dimostrazione. Le prime due uguaglianze sono ovvie perché in generale $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Inoltre, visto che

c) $\sin\big(\overbrace{\arccos(x)}^{\in[0,\pi]}\big) = \sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2} = \sqrt{1-x^2}$,

d) $\cos\big(\overbrace{\arcsin(x)}^{[-\pi/2,\pi/2]}\big) = \sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2} = \sqrt{1-x^2}$,

e) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \iff \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$

$\iff x = \sin(\arcsin(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right) = \cos(\arccos(x)) = x$,

anche le altre uguaglianze sono vere. □

La funzione $\tan\colon (-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente (e quindi anche iniettiva) in quanto se $-\pi/2 < x < y < \pi/2$, allora

$$\tan(y) - \tan(x) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$= \frac{\sin(y)\cos(x) - \sin(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} = \frac{\sin(y-x)}{\cos(x)\cos(y)} > 0$$

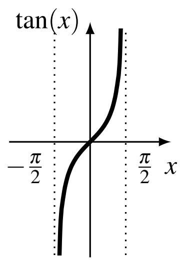
visto che

$$x, y \in (-\pi/2,\pi/2) \implies \cos(x) > 0 \text{ e } \cos(y) > 0,$$
$$-\pi/2 < x < y < \pi/2 \implies y - x \in (0,\pi) \implies \sin(y-x) > 0.$$

Osserviamo infine che

$$\lim_{x\to-\pi/2^+} \tan(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pi/2^-} \tan(x) = +\infty.$$

Pertanto la funzione tangente è una funzione iniettiva e suriettiva (e quindi biettiva) da $(-\pi/2,\pi/2)$ in $\mathbb{R}$.

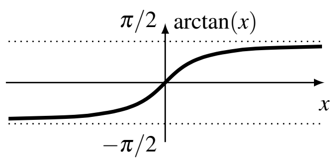


Definizione

La sua funzione inversa

$\tan^{-1}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

viene chiamata **arcotangente** ed indicata col simbolo arctan.



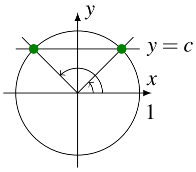
15 Equazioni trigonometriche

Per semplicità, consideriamo solo l'equazione trigonometrica elementare

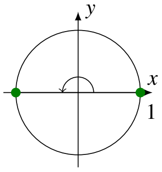
$$\sin(x) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni possono essere visualizzate disegnando la retta $y = c$ e la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. Di seguito mostriamo come farlo distinguendo i seguenti casi ed ottenendo le soluzioni corrispondenti alle intersezioni rappresentate con dei pallini pieni in verde.

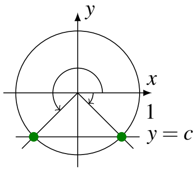
- $c \in (0,1)$: la retta $y = c$ incontra la circonferenza in due punti distinti situati sopra l'asse x, unendoli con l'origine otteniamo due angoli $\alpha = \arcsin(c) \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\beta = \pi - \alpha$, pertanto l'equazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \{\alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$



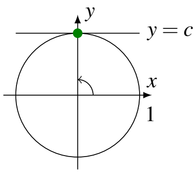
- $c = 0$: la retta $y = c$ incontra la circonferenza in $(1,0)$ e $(-1,0)$, a cui corrispondono gli angoli $\alpha = \arcsin(c) = 0$ e $\beta = \pi$, pertanto l'equazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \{\alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$



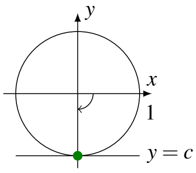
- $c \in (-1,0)$: la retta $y = c$ incontra la circonferenza in due punti distinti situati sotto l'asse x, unendoli con l'origine otteniamo due angoli $\alpha = \arcsin(c) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $\beta = \pi - \alpha$, pertanto l'equazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \{\alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$



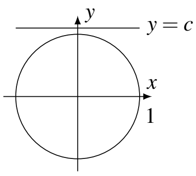
- $c = 1$: la retta $y = c$ incontra la circonferenza in $(0,1)$, a cui corrisponde l'angolo $\alpha = \arcsin(c) = \frac{\pi}{2}$, pertanto l'equazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \{\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$



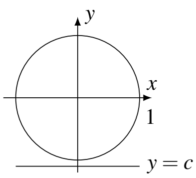
- $c = -1$: la retta $y = c$ incontra la circonferenza in $(0,-1)$, a cui corrisponde l'angolo $\alpha = \arcsin(c) = -\frac{\pi}{2}$, pertanto l'equazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \{-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$



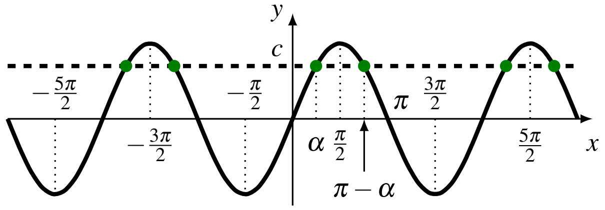
- $c > 1$: la retta $y = c$ non incontra la circonferenza, pertanto l'equazione non ammette soluzioni.

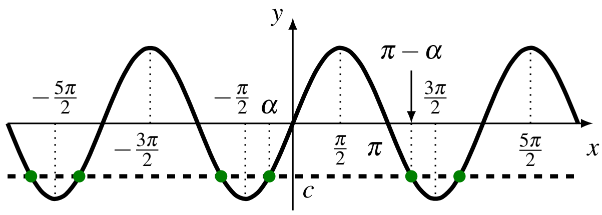


- $c < -1$: la retta $y = c$ non incontra la circonferenza, pertanto l'equazione non ammette soluzioni.



In alternativa, le soluzioni della equazione trigonometrica possono essere visualizzate disegnando la retta $y = c$ ed il grafico del seno. Di seguito mostriamo come farlo considerando, per semplicità, solo i casi $c \in (0,1)$, $c \in (-1,0)$, ed ottenendo le soluzioni corrispondenti alle intersezioni rappresentate con dei pallini pieni in verde.





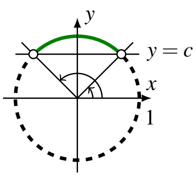
Esempio

Studiamo la seguente equazione trigonometrica:
$$2\cos(2\theta) + 2\sqrt{3}\sin(\theta) = 2.$$
Poiché $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin(\theta)^2$, l'equazione si riscrive nella forma $2\sin(\theta)(2\sin(\theta) - \sqrt{3}) = 0$, ossia $\sin(\theta) = 0$ o $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pertanto le soluzioni sono $\theta \in \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

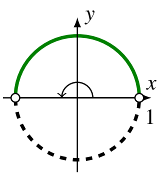
16 Disequazioni trigonometriche

Per semplicità, consideriamo solo la disequazione trigonometrica elementare
$$\sin(x) > c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$
Consideriamo la retta $y = c$, la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario, e distinguiamo i seguenti casi.

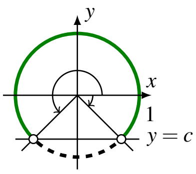
- $c \in (0,1)$: la parte della circonferenza che si trova sopra la retta $y = c$ corrisponde agli angoli compresi tra gli angoli $\alpha = \arcsin(c) \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\beta = \pi - \alpha$, pertanto la disequazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha + 2\pi k, \beta + 2\pi k).$$



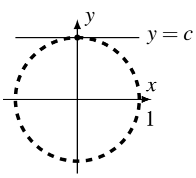
- $c = 0$: la parte della circonferenza che si trova sopra la retta $y = c$ corrisponde agli angoli compresi tra gli angoli $\alpha = \arcsin(c) = 0$ e $\beta = \pi$, pertanto la disequazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi k, \pi + 2\pi k).$$



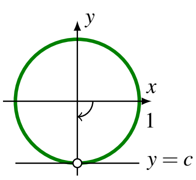
- $c \in (-1,0)$: la parte della circonferenza che si trova sopra la retta $y = c$ corrisponde agli angoli compresi tra gli angoli $\alpha = \arcsin(c) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $\beta = \pi - \alpha$, pertanto la disequazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha + 2\pi k, \beta + 2\pi k).$$



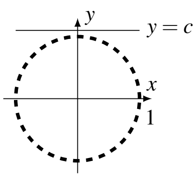
- $c = 1$: non ci sono punti della circonferenza che si trovano sopra la retta $y = c$, pertanto la disequazione non ammette soluzioni.



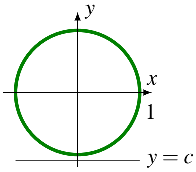
- $c = -1$: l'unico punto della circonferenza che non si trova sopra la retta $y = c$ è $(0,-1)$, che corrisponde all'angolo $\alpha = \arcsin(c) = -\frac{\pi}{2}$, pertanto la disequazione è soddisfatta per tutte le
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$



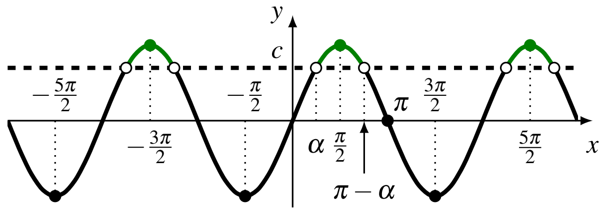
- $c > 1$: non ci sono punti della circonferenza che si trovano sopra la retta $y = c$, pertanto la disequazione non ammette soluzioni.

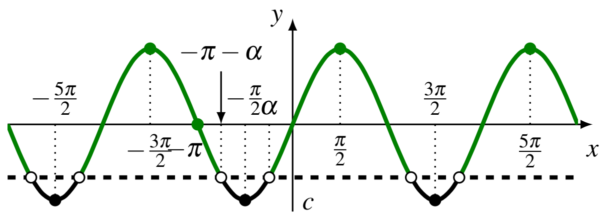


- $c < -1$: tutti i punti della circonferenza si trovano sopra la retta $y = c$, pertanto l'equazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.



In alternativa, le soluzioni della equazione trigonometrica possono essere visualizzate disegnando la retta $y = c$ ed il grafico del seno. Di seguito mostriamo come farlo considerando, per semplicità, solo i casi $c \in (0,1)$, $c \in (-1,0)$, ed ottenendo le soluzioni corrispondenti alle parti di grafico del seno evidenziate in verde.





Esempio

Studiamo le seguenti disequazioni trigonometriche.

$a)$ $\cos(\theta) + \sin(\theta)\tan(\theta) > 1$

$b)$ $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+\sin(\theta)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$

$c)$ $\frac{1}{2}\sin(2\theta)\tan(\theta) \geqslant 1 + \cos(\theta)^2$

$d)$ $\frac{1}{2}\sin(2\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\theta) \geqslant \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$

$e)$ $\sin(2\theta) \geqslant \tan(\theta)$

$a)$ La tangente (e quindi anche la disequazione) è definita solo per $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. Poiché $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ e $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$, la disequazione si riconduce a $\frac{1}{\cos(\theta)} > 1$, le cui soluzioni sono

$$\theta \in \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi k)\Big) \cup \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2\pi k, \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k)\Big)$$
$$= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big((-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k) \setminus \{2\pi k\}\Big).$$

$b)$ Imponendo che i denominatori non si annullino, si ha

$$\cos(\theta) \neq \sin(\theta) \iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\cos(\theta) \neq -\sin(\theta) \iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{3\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

e quindi i due quozienti (e quindi anche la disequazione) sono ben definiti solo per $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Utilizzando le uguaglianze

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta), \qquad \cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2,$$

la disequazione si riscrive nella forma $\frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \tan(2\theta) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$, valida se $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2\theta \leqslant \frac{\pi}{6} + k\pi$. Dunque le soluzioni della disequazione iniziale sono $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k]$.

$c)$ La tangente (e quindi anche la disequazione) è definita solo per $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. Poiché $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ e $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos\theta}$, la disequazione si riscrive nella forma $\sin(\theta)^2 \geqslant 1 + \cos(\theta)^2$. Poiché $\sin(\theta)^2 \in [0,1]$ e $1 + \cos(\theta)^2 \in [1,2]$, deve essere $\sin(\theta)^2 = 1$ e $\cos(\theta)^2 = 0$, ovvero $\theta \in \{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. Per questi valori, però, la disequazione non è definita; pertanto la disequazione è impossibile.

$d)$ Per le formule di addizione e di duplicazione si ha

$$\tfrac{1}{2}\sin(2\theta) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\theta) = \cos(\tfrac{\pi}{3})\sin(2\theta) + \sin(\tfrac{\pi}{3})\cos(2\theta) =$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{3} + 2\theta) = \sin\big(2(\tfrac{\pi}{6} + \theta)\big) = 2\sin(\tfrac{\pi}{6} + \theta)\cos(\tfrac{\pi}{6} + \theta)$$

e quindi la disequazione si riscrive nella forma

$$\sin(\tfrac{\pi}{6} + \theta)\big(2\cos(\tfrac{\pi}{6} + \theta) - 1\big) \geqslant 0$$
$$\iff \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{6} + \theta) \geqslant 0 \\ \cos(\frac{\pi}{6} + \theta) \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \bigcup \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{6} + \theta) \leqslant 0 \\ \cos(\frac{\pi}{6} + \theta) \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Considerando solo l'intervallo $[-\pi, \pi]$, abbiamo

$$\begin{cases} 0 \leqslant \frac{\pi}{6} + \theta \leqslant \pi \\ -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{6} + \theta \leqslant \frac{\pi}{3} \end{cases} \bigcup \begin{cases} -\pi \leqslant \frac{\pi}{6} + \theta \leqslant 0 \\ -\pi \leqslant \frac{\pi}{6} + \theta \leqslant -\frac{\pi}{3} \end{cases} \bigcup \begin{cases} -\pi \leqslant \frac{\pi}{6} + \theta \leqslant 0 \\ \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{6} + \theta \leqslant \pi \end{cases}$$
$$\iff \{0 \leqslant \theta + \tfrac{\pi}{6} \leqslant \tfrac{\pi}{3}\} \cup \{-\pi \leqslant 0 + \tfrac{\pi}{6} \leqslant -\tfrac{\pi}{3}\}$$

da cui, per periodicità, le soluzioni sono

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big([-\tfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \tfrac{\pi}{6} + 2\pi k] \cup [-\tfrac{7\pi}{6} + 2\pi k, -\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k]\Big).$$

$e)$ La tangente (e quindi anche la disequazione) è definita solo per $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. Si riscrive la disequazione nella forma

$$2\sin(\theta)\cos(\theta) - \tan(\theta) \geqslant 0 \iff \tan(\theta)(2\cos(\theta)^2 - 1) \geqslant 0$$
$$\iff \tan(\theta)\,\frac{1-\tan(\theta)^2}{1+\tan(\theta)^2} \geqslant 0 \iff \tan(\theta)\big(1 - \tan(\theta)^2\big) \geqslant 0.$$

Ponendo $t = \tan(\theta)$, si ottiene la disequazione $t(t^2 - 1) \leqslant 0$, le cui soluzioni sono $t \leqslant -1$ e $0 \leqslant t \leqslant 1$, ovvero $\tan(\theta) \leqslant -1$ e $0 \leqslant \tan(\theta) \leqslant 1$. Dunque le soluzioni della disequazione iniziale sono

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big((-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, -\tfrac{\pi}{4} + k\pi] \cup [k\pi, \tfrac{\pi}{4} + k\pi]\Big).$$

Capitolo 4

Potenze di numeri complessi

17 Numeri complessi dati in forma trigonometrica

Dato un numero complesso in forma algebrica $z = a + ib$, lo possiamo riscrivere in **forma trigonometrica** come

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

dove

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e $\theta \in \mathbb{R}$ è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} a = \rho\cos(\theta) \\ b = \rho\sin(\theta). \end{cases} \qquad (\clubsuit)$$

Osservazione

- Se $\theta \in \mathbb{R}$ è una soluzione di $(\clubsuit)$, allora anche $\theta + 2k\pi$ è una soluzione $\forall k \in \mathbb{Z}$.
- Si ha che $\theta = \arccos(a/\rho) = \arcsin(a/\rho)$ se e solo se $a, b > 0$.

Definizione

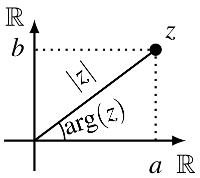
Il **modulo** di $z = a + ib \in \mathbb{C}$ è il numero reale

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Se $\rho \neq 0$, allora l'**argomento** (principale) di z è l'unico $\theta \in (-\pi, \pi]$ che soddisfa $(\clubsuit)$ e viene indicato con $\arg(z)$.

Osservazione

Ricordando la rappresentazione in $\mathbb{R}^2$ di $\mathbb{C}$, il modulo di z è la distanza del punto corrispondente in $\mathbb{R}^2$ dall'origine degli assi.



Proposizione

Se $z, w \in \mathbb{C}$, allora:

- $-|z| \leqslant \Re e(z) \leqslant |z|$
- $-|z| \leqslant \Im m(z) \leqslant |z|$
- $|z| \geqslant 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (**disuguaglianza triangolare**)
- $|z| - |w| \leqslant |z + w|$
- $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$

Dimostrazione. Dimostriamo la disuguaglianza triangolare: se $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ e $w = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, allora

$$z + w = (\rho\cos(\theta) + r\cos(\varphi)) + i(\rho\sin(\theta) + r\sin(\varphi)) \implies$$

$$|z + w| = \sqrt{(\rho\cos(\theta) + r\cos(\varphi))^2 + (\rho\sin(\theta) + r\sin(\varphi))^2}$$

$$= \sqrt{\rho^2 + r^2 + 2\rho r(\cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi))}$$

$$= \sqrt{\rho^2 + r^2 + 2\rho r\cos(\theta - \varphi)}$$

e pertanto

$$|z + w| \leqslant |z| + |w| \iff \sqrt{\rho^2 + r^2 + 2\rho r\cos(\theta - \varphi)} \leqslant \rho + r$$

$$\iff \rho^2 + r^2 + 2\rho r\cos(\theta - \varphi) \leqslant (\rho + r)^2 = \rho^2 + r^2 + 2\rho r$$

$$\iff \rho r\cos(\theta - \varphi) \leqslant \rho r.$$

La penultima disuguaglianza segue dalla disuguaglianza triangolare, in quanto

$$|z| = |z + w - w| \leqslant |z + w| + |w|$$

da cui si ricava che $|z| - |w| \leqslant |z + w|$. Infine, l'ultima uguaglianza segue dalla uguaglianza $|z|^2 = z\bar{z}$, in quanto

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w})$$

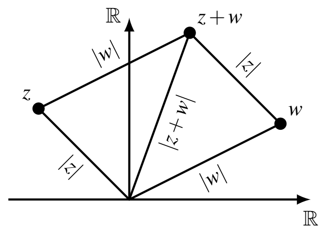
$$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w}$$

$$= 2(z\bar{z} + w\bar{w}) = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Per concludere, la dimostrazione delle altre proprietà è lasciata come esercizio per casa. □

Osservazione

La disuguaglianza triangolare afferma che, in un triangolo, la lunghezza di un lato è minore o uguale della somma delle lunghezze degli altri due.



Proposizione

Se $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sono tali che

$$|z + w| = |z| + |w|,$$

allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda > 0$, tale che $z = \lambda w$.

Dimostrazione. Dalla dimostrazione della disuguaglianza triangolare ricaviamo che

$$|z + w| = |z| + |w| \iff \cos(\theta - \varphi) = 1$$

$$\iff \theta - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z} \iff \theta \in \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$$

e quindi esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\theta = \varphi + 2\pi k$ e quindi

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \rho(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$$

$$= \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \frac{\rho}{r} w.$$

Dunque basta prendere $\lambda = \rho/r$. □

Proposizione

Se $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ e $w = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ sono due numeri complessi in forma trigonometrica, allora

- $z \cdot w = \rho r(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi))$,
- $w \neq 0 \implies \frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}(\cos(\theta - \varphi) + i\sin(\theta - \varphi))$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima uguaglianza

$$z \cdot w = \rho r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

$$= \rho r(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + i(\cos(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\theta)))$$

$$= \rho r(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)).$$

La dimostrazione delle altri uguaglianze sono lasciate come esercizio per casa. □

Teorema della formula di De Moivre

Dati $n \in \mathbb{N}$ ed un numero complesso in forma trigonometrica $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, si ha

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Dimostrazione. Basta utilizzare la formula del prodotto e procedere per induzione. I dettagli della dimostrazione sono lasciati come esercizio per casa. □

Osservazione

A differenza della radice quadrata di un numero reale, non si può parlare della radice quadrata di un numero complesso. Questo accade non perché la radice quadrata di un numero complesso non esista, anzi al contrario il problema è che ne esistono due! Questo segue dal seguente corollario.

Corollario

Sia $w = r(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))$ un numero complesso in forma trigonometrica ed $n \in \mathbb{N}$, allora l'equazione nell'incognita z

$$z^n = w$$

ha per soluzioni

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\tfrac{\varphi}{n}+\tfrac{2\pi}{n}k\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\varphi}{n}+\tfrac{2\pi}{n}k\right)\right), \qquad k \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

Dimostrazione. Se $z=\rho(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))$ è una soluzione, allora

$$z^n = w \iff \rho^n(\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)) = r(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))$$

$$\iff \begin{cases}\rho^n = r\\ \cos(n\theta)=\cos(\varphi)\\ \sin(n\theta)=\sin(\varphi)\end{cases} \iff \begin{cases}\rho = \sqrt[n]{r}\\ \theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n}, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Per concludere osserviamo che le soluzioni corrispondenti a $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ sono distinte e che per la periodicità del seno e del coseno sono le uniche soluzioni. □

Esempio

Risolviamo l'equazione

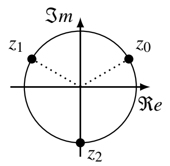
$$z^3 = \mathrm{i}.$$

Essendo $\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ abbiamo che le soluzioni sono

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2},$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2},$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}.$$



Esempio

Risolviamo l'equazione

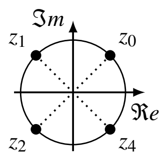
$$z^4+1=0.$$

Riscrivendo -1 in forma trigonometrica otteniamo

$$-1 = 1\Big(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)\Big)$$

e quindi le soluzioni sono

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right), \qquad k\in\{0,1,2,3\},$$



ovvero

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}),$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i}),$$

$$z_3 = \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}).$$

Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1+\mathrm{i}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l}\Re e(z)=1\\ \Im m(z)=1\\ |z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l}\cos(\theta)=\sqrt{2}/2\\ \sin(\theta)=\sqrt{2}/2\end{array}\right\} \implies \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è

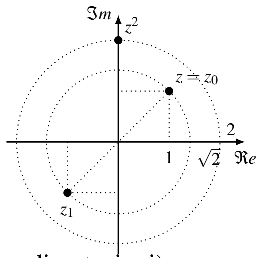
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right).$$

Per la formula di De Moivre la forma trigonometrica di z^2 è

$$z^2 = 2\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2\mathrm{i},$$

le cui radici quadrate sono

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= z,\\ z_1 &= \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\right)\\ &= -1-\mathrm{i}.\end{aligned}$$



Le radici cubiche di z sono (con un abuso di notazioni)

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\Big((1+\sqrt{3})+\mathrm{i}(\sqrt{3}-1)\Big),$$

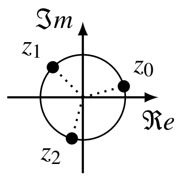
$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(-1+\mathrm{i}),$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\tfrac{17\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{17\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\Big(-(\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}(\sqrt{3}+1)\Big),$$

in quanto

$$\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\\ \sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\\ \cos\left(\tfrac{17\pi}{12}\right) &= \cos\left(\pi+\tfrac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\tfrac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right)\\ &= -\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= -\left(-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\\ \sin\left(\tfrac{17\pi}{12}\right) &= \sin\left(\pi+\tfrac{5\pi}{12}\right) = -\sin\left(\tfrac{5\pi}{12}\right) = -\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right)\\ &= -\left(\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= -\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

ed inoltre $\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{2} = 2^{1/6}\cdot 2^{1/2} = 2^{(1/6)+(1/2)} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$.



Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l}\Re e(z)=1\\ \Im m(z)=\sqrt{3}\\ |z|=\sqrt{1+3}=2\end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l}\cos(\theta)=1/2\\ \sin(\theta)=\sqrt{3}/2\end{array}\right\} \implies \theta = \pi/3.$$

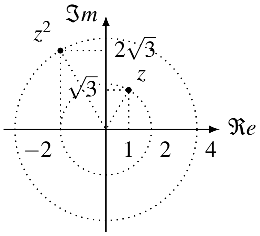
Dunque la forma trigonometrica di z è

$$z = 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right).$$

Per la formula di De Moivre la forma trigonometrica di z^2 è

$$z^2 = 4\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Abbiamo quindi che
$|z^2| = 4$,
$\Re e(z^2) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$,
$\Im m(z^2) = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$,
e pertanto la forma algebrica di z^2 è
$$z^2 = -2 + \mathrm{i}\,2\sqrt{3}.$$



Le quattro radici quarte di z sono
$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$, $\quad z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$,
$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$, $\quad z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$.
Abbiamo quindi che $|z_0| = |z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt[4]{2}$ e
$\Re e(z_0) = \sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(\sqrt{3}+1)}{4}$, $\quad \Im m(z_0) = \sqrt[3]{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(\sqrt{3}-1)}{4}$,
$\Re e(z_1) = \sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(1-\sqrt{3})}{4}$, $\quad \Im m(z_1) = \sqrt[3]{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(1+\sqrt{3})}{4}$,
$\Re e(z_2) = \sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt[4]{8}(1+\sqrt{3})}{4}$, $\quad \Im m(z_2) = \sqrt[3]{2}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(1-\sqrt{3})}{4}$,
$\Re e(z_3) = \sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(\sqrt{3}-1)}{4}$, $\quad \Im m(z_3) = \sqrt[3]{2}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt[4]{8}(1+\sqrt{3})}{4}$.

18 Numeri complessi in forma esponenziale

Teorema della formula di Eulero per i numeri complessi

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha che
$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).$$

La formula di Eulero dà origine ad un'identità considerata tra le più affascinanti della matematica, nota come **identità di Eulero**
$$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0,$$
che mette in relazione tra loro cinque simboli e, i, π, 1 e 0 che sono alla base dell'analisi matematica.

Grazie alla formula di Eulero un numero complesso dato in forma trigonometrica $z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ può essere espresso anche in **forma esponenziale** come
$$z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}.$$

Con la seguente definizione generalizziamo la definizione di elevamento a potenza al caso in cui l'esponente sia un numero complesso.

Definizione

Per ogni numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ si pone
$$e^z = e^a \cdot e^{\mathrm{i}b} = e^a \cdot (\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)).$$

Proposizione

Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha che
- $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$, $\qquad$ • $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$.

Dimostrazione. Siano $z = a + \mathrm{i}b$ e $w = c + \mathrm{i}d$ due numeri complessi con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. • Osserviamo che
$$e^z \cdot e^w = e^{a+\mathrm{i}b} \cdot e^{c+\mathrm{i}d} = \left(e^a \cdot e^{\mathrm{i}b}\right) \cdot \left(e^c \cdot e^{\mathrm{i}d}\right)$$
$$= e^{a+c}(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)) \cdot (\cos(d) + \mathrm{i}\sin(d))$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \Re e(e^z \cdot e^w) = e^{a+c} \cdot (\cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d)), \\ \Im m(e^z \cdot e^w) = e^{a+c} \cdot (\cos(b)\sin(d) + \sin(b)\cos(d)). \end{cases}$$
D'altro canto si ha che
$$e^{z+w} = e^{(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)} = e^{(a+c)+\mathrm{i}(b+d)}$$
$$= e^{a+c} \cdot (\cos(b+d) + \mathrm{i}\sin(b+d))$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \Re e(e^{z+w}) = e^{a+c}\cos(b+d), \\ \Im m(e^{z+w}) = e^{a+c} \cdot \sin(b+d). \end{cases}$$
Dunque per concludere la dimostrazione del primo punto basta applicare le seguenti identità trigonometriche
$$\cos(b+d) = \cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d),$$
$$\sin(b+d) = \cos(b)\sin(d) + \sin(b)\cos(d).$$
• Per il primo punto si ha che
$$\left.\begin{array}{l} \frac{e^z}{e^w} \cdot e^w = e^z \\ e^{z-w} \cdot e^w = e^{(z-w)+w} = e^z \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 = \left(\frac{e^z}{e^w} \cdot e^w\right) - \left(e^{z-w} \cdot e^w\right)$$
$$= \left(\frac{e^z}{e^w} - e^{z-w}\right) \cdot e^w \Longrightarrow \frac{e^z}{e^w} - e^{z-w} = 0.$$ □

Corollario

Per ogni $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}, w = re^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C}$ si ha che
$$z \cdot w = (\rho r) \cdot e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}.$$
Se inoltre $w \neq 0$, ovvero $r \neq 0$, allora
$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r} \cdot e^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}.$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente si ha che:
$$z \cdot w = (\rho e^{\mathrm{i}\theta}) \cdot (re^{\mathrm{i}\varphi}) = (\rho r) \cdot (e^{\mathrm{i}\theta} e^{\mathrm{i}\varphi}) = (\rho r) \cdot (e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)})$$
$$z/w = (\rho e^{\mathrm{i}\theta})/(re^{\mathrm{i}\varphi}) = (\rho/r) \cdot (e^{\mathrm{i}\theta}/e^{\mathrm{i}\varphi}) = (\rho r) \cdot e^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}.$$ □

Esercizio

Trovare quale delle seguenti uguaglianze è falsa:
$$\mathrm{i} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}^{(4/4)} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{1/4} = 1^{1/4} = \sqrt[4]{1} = 1.$$

Sappiamo benissimo che $\mathrm{i} \neq 1$ e quindi siamo sicuri che almeno una delle uguaglianze deve essere falsa. Possiamo dire immediatamente che in effetti l'ultima uguaglianza non è vera in quanto quella che si sta calcolando è la radice quarta nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e non in quello dei numeri reali $\mathbb{R}$. Dunque, in realtà, a $\sqrt[4]{1}$ corrispondono quattro numeri complessi e sono
$$1, \qquad \mathrm{i} \qquad -1, \qquad -\mathrm{i}.$$
Per questo motivo, con un leggero abuso di notazioni, si ha piuttosto che
$$\mathrm{i} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}^{(4/4)} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{1/4} = 1^{1/4} \in \sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}.$$
Proviamo ora a sistemare l'equazione di partenza utilizzando lo stesso leggero abuso di notazioni appena introdotto:
$$\mathrm{i} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}^{(4/4)} = (\mathrm{i}^{1/4})^4 = \left\{(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^4, (e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}})^4, (e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{2}})^4, (e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{2}})^4\right\}$$
$$= \{\mathrm{i}\} = \mathrm{i}.$$

Il precedente esercizio mostra che in generale la formula
$$(z^m)^{1/n} = (z^{1/n})^m$$
non è vera. In realtà si dimostra che tale formula è vera se m ed n sono primi tra loro.

Esempio

Verifichiamo che $(\mathrm{i}^3)^{1/4} = (\mathrm{i}^{1/4})^3$. Osserviamo che
$$(\mathrm{i}^3)^{1/4} = (-\mathrm{i})^{1/4} = \left\{e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}}\right\}$$
ed inoltre
$$(\mathrm{i}^{1/4})^3 = \left\{(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}})^3, (e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}})^3, (e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{8}})^3, (e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{8}})^3\right\}$$
$$= \left\{e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{27\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{39\pi}{8}}\right\} = \left\{e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}\right\}$$
e pertanto l'uguaglianza è vera. In effetti, $m = 3$ ed $n = 4$ sono primi tra loro.

In conclusione, se si vuole calcolare $z^{m/n}$ allora conviene prima ridurre ai minimi termini la frazione m/n e poi calcolare la potenza risultante. In alternativa, se non si vuole ridurre ai minimi termini la frazione m/n, allora la formula da applicare è
$$z^{m/n} = (z^{1/n})^m.$$

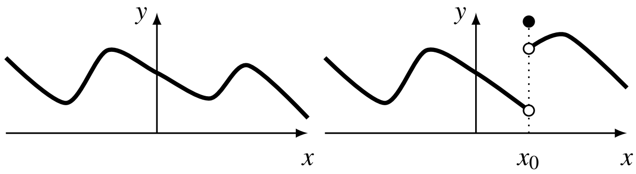
Capitolo 5

Limiti e continuità di funzioni

19 Limite e continuità puntuali

Nello studio di una funzione, la prima proprietà da studiare è la sua continuità. In maniera *non rigorosa*, una funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ è continua se il grafico è una singola curva ininterrotta (nel disegnarla non si alza mai la penna). Di conseguenza, se una funzione è continua, allora non ha istantanei cambiamenti di valore, noti come discontinuità. Più precisamente, cambiamenti sufficientemente piccoli nell'input di una funzione continua comportano cambiamenti arbitrariamente piccoli nel suo output.

È allora intuitivamente chiaro che, con riferimento ai grafici seguenti, il grafico a sinistra corrisponde ad una funzione continua, mentre quello a destra corrisponde ad una funzione discontinua in quanto ha una discontinuità in x_0.



Definizione

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è **punto di accumulazione** per l'insieme A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste (almeno) un elemento x diverso da x_0 ed appartenente ad $A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di A è detto **insieme derivato** di A e si indica con A'.

Osservazione

- Un punto di A' potrebbe non appartenere ad A.
- Un punto di A potrebbe non appartenere ad A'.

Ad esempio, l'insieme $A = (-1,1) \cup \{2\}$ ha insieme derivato $A' = [-1,1]$, quindi -1 ed 1 appartengono ad A' ma non ad A, mentre 2 appartiene ad A ma non ad A'.

- Un insieme potrebbe non avere punti di accumulazione.

Ad esempio, sia $A = \{0\}$ che $\mathbb{N}$ non hanno punti di accumulazione: $A' = \emptyset$ ed $\mathbb{N}' = \emptyset$.

Esercizio

Verificare che il derivato di $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ è $A' = \{0\}$.

Definizione

Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ ed $f : D \to \mathbb{R}$.

- Il **limite** per $x \in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $L \in \mathbb{R}$ se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che}$$
$$|f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta$$
ed in tal caso si dice che f **converge ad L** per x che tende ad x_0 e si scrive
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$
- Il **limite** per $x \in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $+\infty$ se
$$\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ tale che}$$
$$f(x) > M\ \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta$$
ed in tal caso si dice che f **diverge a $+\infty$** per x che tende ad x_0 e si scrive
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$
- Il **limite** per $x \in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $-\infty$ se
$$\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ tale che}$$
$$f(x) < -M\ \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta$$
ed in tal caso si dice che f **diverge a $-\infty$** per x che tende ad x_0 e si scrive
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$
- f è **regolare** in x_0 se il suo limite per x che tende ad x_0 esiste finito o infinito.
- f è **irregolare** in x_0 se non è regolare in x_0.

Dubbio sull'unicità del limite

Può una funzione convergere a due numeri distinti? Per sciogliere questo dubbio ragioniamo per assurdo. Assumiamo che una funzione f converga sia ad L_1 che L_2, ovvero

$$\left.\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_i > 0 \text{ tale che} \\ |f(x) - L_i| < \varepsilon\ \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_i \end{cases}\right\} \quad \text{per } i \in \{1,2\}.$$

Posto $\varepsilon = |L_1 - L_2|/2$, utilizzando la disuguaglianza triangolare, per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si ha

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2|$$
$$\leqslant |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = |L_1 - L_2|$$

e quindi risulta $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$: un assurdo!

Definizione

Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ed $f : D \to \mathbb{R}$.

- Si dice che f è **continua in x_0** se $x_0 \in D \setminus D'$, oppure $x_0 \in D'$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Si dice che f è **continua** se è continua in ogni punto di D.

Osservazione

Per definizione, $f : D \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in D \cap D'$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } \forall x \in D \text{ con}$$
$$|x - x_0| < \delta \text{ risulta } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Si noti che, a differenza di quanto richiesto nella definizione di limite puntuale, nella condizione appena data per la continuità si ha che $x_0 \in D$ e che la x può assumere il valore x_0 in quanto non si richiede che $0 < |x - x_0|$.

Osservazione

Osserviamo che:

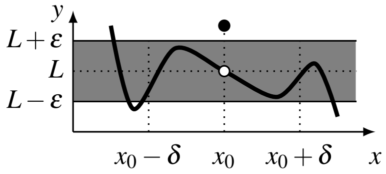
$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon,$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

Osservazione

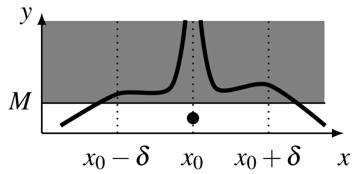
Lo studio del limite puntuale è utile nello studio del grafico di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, specie (ma non solo!) nei punti x_0 di accumulazione di D che non appartengono a D, cioè $x_0 \in D' \setminus D$.

- Se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
allora $f(x)$ è tanto più vicino ad L quanto più $x \neq x_0$ è vicino ad x_0. Infatti per definizione per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

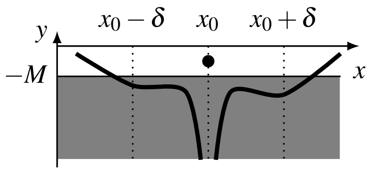
i punti del grafico $(x, f(x))$ appartengono alla striscia $\mathbb{R} \times (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$.



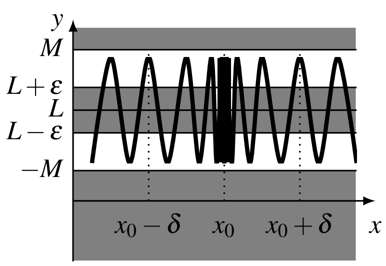
- Se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$
allora $f(x)$ è tanto più grande quanto più $x \neq x_0$ è vicino ad x_0. Infatti per definizione per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che i punti del grafico $(x, f(x))$ appartengono al semipiano $\mathbb{R} \times (M, +\infty)$ per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$.



- Se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$
allora $f(x)$ è tanto più piccolo quanto più $x \neq x_0$ è vicino ad x_0. Infatti per definizione per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che i punti del grafico $(x, f(x))$ appartengono al semipiano $\mathbb{R} \times (-\infty, -M)$ per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$.



- Se f è irregolare in x_0, allora per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$, esiste un $x_1 \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ tale che $|f(x_1) - L| > \varepsilon$, ed inoltre esiste $M > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$, esistono $x_2, x_3 \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ tali che $f(x_2) < M$ ed $f(x_3) > -M$.

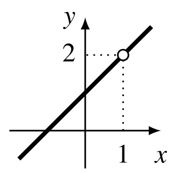


Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x \to 0} |x| = 0.$$
Per ogni $\varepsilon > 0$, la condizione richiesta dalla definizione di limite puntuale è soddisfatta prendendo $\delta = \varepsilon$ perché con tale scelta si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - 0| < \delta$ risulta $||x| - 0| = |x| < \varepsilon$.

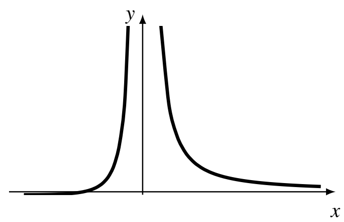
Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$
Osserviamo che f non è definita in $x_0 = 1$, che il suo dominio di definizione è $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e che $1 \in D' = \mathbb{R}$. Per ogni $x \in D$ si ha che
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$
Dunque per ogni $\varepsilon > 0$, la condizione richiesta dalla definizione di limite puntuale è soddisfatta con $\delta = \varepsilon > 0$ perché con tale scelta si ha che per ogni $x \in D$ con $0 < |x-1| < \delta$ risulta
$$|f(x) - L| = |(x+1) - 2| = |x-1| < \delta = \varepsilon.$$
Questo trova riscontro nel grafico di f.



Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x^2} = +\infty.$$
Osserviamo che f non è definita in $x_0 = 0$, che il suo dominio di definizione è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e che $0 \in D' = \mathbb{R}$. Fissato $M > 0$, risulta
$$f(x) > M \iff f(x) - M = \frac{x+1}{x^2} - M = \frac{-Mx^2+x+1}{x^2} > 0$$
$$\iff Mx^2 - x - 1 < 0 \iff \frac{1-\sqrt{1+4M}}{2M} < x < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M}.$$
Osserviamo che
$$\frac{1-\sqrt{1+4M}}{2M} < 0 < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M}$$
e che
$$\min\left\{-\frac{1-\sqrt{1+4M}}{2M}, \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M}\right\} = \frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M}.$$
Pertanto la condizione richiesta dalla definizione di limite puntuale è soddisfatta con $\delta = \frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M} > 0$ perché
$$0 < |x| < \delta \Rightarrow -\frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M} < x < \frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M}$$
$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{1+4M}}{2M} < x < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M} \Leftrightarrow f(x) > M.$$
Questo trova riscontro nel grafico di f.



Esercizio

Verificare che $\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$.

20 Proprietà di limiti e funzioni continue

Calcolare i limiti o verificare che una funzione è continua utilizzando solo le definizioni può essere abbastanza laborioso. Le proprietà dei limiti e delle funzioni continue ci possono però dare una mano.

Proprietà dei limiti

Iniziamo mostrando che il limite puntuale commuta con le operazioni algebriche. Per semplicità consideriamo separatamente il caso in cui tutte le funzioni coinvolte convergono dal caso in cui almeno una di esse diverge.

Proposizione

Se $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ convergono rispettivamente ad F e G per x che tende ad $x_0 \in D'$, allora

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = F+G,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = F\cdot G,$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } g\neq 0 \text{ e } G\neq 0,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = F^G \quad \text{se } f^g \text{ e } F^G \text{ sono ben definiti,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ F\neq 0 = G\\ \bullet\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } f(x)/g(x)>0\\ \quad \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ F\neq 0 = G\\ \bullet\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } f(x)/g(x)<0\\ \quad \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Osservazione

Dal solo fatto che f converge ad $F\neq 0$ e g converge a zero per x che tende ad x_0, non i può dedurre che f/g diverge a $-\infty$ o a $+\infty$. Per poter asserire ciò, serve che f/g abbia un segno per x sufficientemente vicino ad x_0 ma distinto da x_0. Infatti, come controesempio basta considerare $x_0 = 0$, $f(x) = 1$ e $g(x) = x$.

Dimostrazione. Dimostriamo la seconda uguaglianza, le altre sono lasciate come esercizio per casa. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono $\delta_f = \delta_f(\varepsilon) > 0$ e $\delta_g = \delta_g(\varepsilon) > 0$ tali che

$$|f(x)-F| < \varepsilon \quad \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta_f,$$
$$|g(x)-G| < \varepsilon \quad \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta_g.$$

Osserviamo che dalla disuguaglianza triangolare e la prima condizione segue che per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta_f$ risulta

$$|f(x)| \leqslant |f(x)-F| + |F| < \varepsilon + |F|.$$

Posto $\delta = \max\{\delta_f, \delta_g\}$, per la disuguaglianza triangolare per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$ risulta

$$|f(x)\cdot g(x) - F\cdot G| = |(f(x)\cdot(g(x)-G)) + ((f(x)-F)\cdot G)|$$
$$\leqslant |f(x)|\cdot|g(x)-G| + |f(x)-F|\cdot|G| < (|F|+\varepsilon)\cdot\varepsilon + \varepsilon\cdot|G|.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. □

Consideriamo ora il caso in cui almeno una delle funzioni coinvolte diverge.

Proposizione

Se per x che tende ad $x_0\in D'$ si ha che $f\colon D\to\mathbb{R}$ converge ad F e $g,h\colon D\to\mathbb{R}$ divergono a $+\infty$, allora

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = F + (+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big) = F - (+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(g(x)+h(x)\big) = (+\infty)+(+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(-g(x)-h(x)\big) = -(+\infty)-(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = F\cdot(+\infty)\begin{cases}+\infty & \text{se } F>0,\\ -\infty & \text{se } F<0,\end{cases}$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(g(x)\cdot h(x)\big) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{+\infty} = 0,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = F^{+\infty} = \begin{cases}+\infty & \text{se } F>1,\\ 0 & \text{se } |F|<1,\\ \nexists & \text{se } F\leqslant -1,\end{cases} \quad \text{se } f^g \text{ è ben definita.}$$

Osservazione

Visto che g ed h divergono per x che tende ad x_0, si ha che esse non sono ben definite in x_0 e quindi $x_0\in D'\setminus D$.

Dimostrazione. Dimostriamo la penultima uguaglianza, mentre le altre sono lasciate come esercizio per casa. Sia $\varepsilon>0$ e poniamo $M = 1/\varepsilon$. Per ipotesi esiste $\delta>0$ tale che per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$ si ha

$$|f(x)-F|<\varepsilon \qquad \text{e} \qquad |g(x)|>M=\tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Pertanto per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{|f(x)-F|+|F|}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon+|F|}{1/\varepsilon} = (|F|+\varepsilon)\,\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$ segue la tesi. □

Dimostriamo che il limite preserva l'ordinamento.

Teorema della permanenza del segno

Sia $f\colon D\to\mathbb{R}$ convergente ad L per x che tende ad $x_0\in D'$.

(1) Se esiste $\delta>0$ tale che $f(x)\geqslant 0$ per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$, allora $L\geqslant 0$.

(2) Se $L>0$, allora esiste $\delta>0$ tale che $f(x)>0$ per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$.

Osservazione

Si noti che in **(1)** la disuguaglianza non può essere "stretta". Infatti, ad esempio, si ha che $f(x) = x^2 > 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e converge ad $L=0$ per x che tende a $x_0=0$. Dunque, in parole povere

$$f>0 \qquad \not\Longrightarrow \qquad L>0.$$

Dimostrazione. **(1)** Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta_\varepsilon>0$ tale che per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ si ha

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon.$$

Allora per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\min\{\delta_\varepsilon,\delta\}$ si ha

$$0\leqslant f(x) < L+\varepsilon \Longrightarrow L+\varepsilon>0.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$ si ha che $F\geqslant 0$.

(2) Per ipotesi $\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0$, ovvero per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)>0$ tale che $|f(x)-L|<\varepsilon$ per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$. Prendendo $\varepsilon = L>0$ si ha che esiste $\delta>0$ tale che per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$ risulta

$$|f(x)-L|<L \Longleftrightarrow -L<f(x)-L<L \Longrightarrow 0<f(x). \qquad \square$$

Teorema del confronto

Siano $f,g,h\colon D\to\mathbb{R}$ convergenti rispettivamente ad F,G,H per x che tende ad $x_0\in D'$.

(1) Se esiste $\delta>0$ tale che $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$, allora $F\leqslant G\leqslant H$.

(2) Se $F<G<H$, allora esiste $\delta>0$ tale che $f(x)<g(x)<h(x)$ per ogni $x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$.

Dimostrazione. Segue dal teorema della permanenza del segno applicato alle funzioni $h-g, g-f\colon D\to\mathbb{R}$ e dal fatto che $\lim_{x\to x_0}(h-g)(x) = H-G$ e $\lim_{x\to x_0}(g-f)(x) = G-F$. I dettagli sono lasciati come esercizio per casa. □

Teorema dei carabinieri o del sandwich

Date $f,g,h\colon D\to\mathbb{R}$ ed $x_0\in D'$, si ha che

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)\\ \quad \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta\\ \bullet\ \lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x)\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Dimostrazione. Segue dal teorema del confronto. I dettagli sono lasciati come esercizio per casa. □

Esempio

Dal teorema dei carabinieri segue che

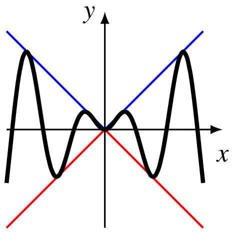
$$\lim_{x\to 0} x\sin(x) = 0$$

in quanto

$$-|x| \leqslant x\sin(x) \leqslant |x|$$

ed inoltre per quanto già visto si ha che

$$\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim_{x\to 0}|x|.$$



Esempio

Per verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

basta osservare che

$$[x] \leqslant x < [x]+1 \Longrightarrow 1-\frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leqslant 1$$

ed applicare il teorema dei carabinieri.

Il seguente teorema riguarda il limite di funzioni composte.

Teorema del limite delle funzioni composte

Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ tali che $f(A) \subset B$. Se si ha che

(1) $x_0 \in A'$ ed esiste finito
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R},$$

(2) esiste $\delta_{x_0} > 0$ tale che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in A$ con $0 < |x-x_0| < \delta$,

(3) $y_0 \in B'$ ed esiste finito
$$\lim_{y\to y_0} g(y) = L \in \mathbb{R},$$

allora
$$\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = L.$$

Il risultato vale anche nei casi in cui $y_0 = \pm\infty$ e/o $L = \pm\infty$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $y_0, L \in \mathbb{R}$; gli altri casi sono lasciati come esercizio per casa. Per (3), $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_g = \delta_g(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall y \in B$ con $0 < |y-y_0| < \delta_g$ risulta $|g(y)-L| < \varepsilon$. D'altra parte per (1), $\exists \delta_f = \delta_f(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall x \in A$ con $0 < |x-x_0| < \delta_f$ si ha $|f(x)-y_0| < \delta_g$. Infine per (2), posto $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_{x_0}\}$, risulta che se $0 < |x-x_0| < \delta$ allora $0 < |f(x)-y_0| < \delta_g$ e quindi $|g(f(x))-L| < \varepsilon$. □

Teorema del limite delle funzioni inverse

Sia $f\colon A \to B$ una funzione invertibile. Se si ha che

(1) $x_0 \in A'$ ed esiste finito
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R},$$

(2) $y_0 \in B'$ ed esiste finito
$$\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = L \in A,$$

allora $L = x_0$ e
$$\lim_{x\to x_0} (f^{-1}\circ f)(x) = x_0.$$

Il risultato vale anche nei casi in cui $y_0 = \pm\infty$ e/o $L = \pm\infty$.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema del limite delle funzioni composte osservando che la condizione condizione **(2)** segue dalla iniettività di f. □

Proprietà delle funzioni continue

Dalle proprietà appena dimostrate per i limiti seguono le seguenti proprietà per la continuità.

Proposizione

Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon D \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in D \cap D'$ allora lo sono anche

$$\begin{aligned}
f+g&\colon D \to \mathbb{R},\\
f-g&\colon D \to \mathbb{R},\\
f\cdot g&\colon D \to \mathbb{R},\\
\tfrac{f}{g}&\colon D \to \mathbb{R} && \text{se } g(x)\neq 0\ \forall x \in D,\\
f^g&\colon D \to \mathbb{R} && \text{se } f(x)^{g(x)} \text{ è ben definita } \forall x \in D.
\end{aligned}$$

Proposizione

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in D \cap D'$.

(1) Se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x-x_0| < \delta$, allora $f(x_0) \geqslant 0$.

(2) Se $f(x_0) > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$ con $|x-x_0| < \delta$.

Dimostrazione. **(1)** Per ipotesi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x-x_0| < \delta$. Dal teorema della permanenza del segno segue allora che $f(x_0) \geqslant 0$.
(2) Per ipotesi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$. Dal teorema della permanenza del segno segue che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x-x_0| < \delta$. Visto che $f(x_0) > 0$, si ha che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$ con $|x-x_0| < \delta$. □

Proposizione

Siano $f,g,h\colon D \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in D \cap D'$.

(1) Se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x-x_0| < \delta$, allora $f(x_0) \leqslant g(x_0) \leqslant h(x_0)$.

(2) Se $f(x_0) < g(x_0) < h(x_0)$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) < g(x) < h(x)$ per ogni $x \in D$ con $|x-x_0| < \delta$.

Proposizione

Siano $f,g,h\colon D \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in D \cap D'$. Se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x-x_0| < \delta$, allora

$$f(x_0) = h(x_0) \Longrightarrow g(x_0) = f(x_0) = h(x_0).$$

Proposizione

Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ tali che $f(A) \subset B$. Se si ha che

(1) $x_0 \in A' \cap A$ ed f è continua in x_0,

(2) $y_0 \in B' \cap B$ e g è continua in y_0,

allora anche $g\circ f\colon A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

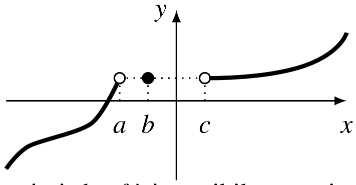
Proposizione

Se $f\colon A \to B$ è una funzione invertibile e continua in $x_0 \in A \cap A'$, allora la sua funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$ è continua in $y_0 = f(x_0)$.

Le dimostrazioni seguono da quanto visto per i limiti. I dettagli delle dimostrazioni sono lasciati come esercizio per casa.

Esercizio

Sia $f\colon D \to f(D)$ la funzione avente il grafico riportato in figura, dove $D = (-\infty, a) \cup \{b\} \cup (c, +\infty)$.



Dopo essersi convinti che f è invertibile e continua in D, disegnare il grafico di f^{-1} ed osservare che f^{-1} non è continua in $f(D)$. Perché questo non contraddice quanto asserito nella proposizione precedente?

21 Alcune funzioni continue elementari

Proposizione

La funzione modulo è una funzione continua in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $x_0 > 0$, allora $\lim_{x\to x_0} |x| = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = |x_0|$. Se invece $x_0 < 0$, allora $\lim_{x\to x_0} |x| = \lim_{x\to x_0} (-x) = -x_0 = |x_0|$. Infine, se $x_0 = 0$ allora basta ricordare che abbiamo già dimostrato che $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$. $\square$

Proposizione

I polinomi sono funzioni continue in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Basta osservare che le funzioni costanti sono continue, la funzione $x \mapsto x$ è continua e che sia la somma che il prodotto di funzioni continue sono funzioni continue. $\square$

Proposizione

Fissato $a > 0$ si ha che $f(x) = a^x$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, vogliamo dimostrare che
$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}.$$
Consideriamo il caso $a > 1$, gli altri casi sono lasciati come esercizio per casa. Fissato $\varepsilon \in (0, a^{x_0})$, poniamo
$$\delta = \min\left\{\log_a(1+\varepsilon a^{-x_0}), -\log_a\left(1-\varepsilon a^{-x_0}\right)\right\} > 0.$$
Se $0 < |x - x_0| < \delta$ allora
$$\log_a(1-\varepsilon a^{-x_0}) \leqslant -\delta < x - x_0 < \delta \leqslant \log_a(1+\varepsilon a^{-x_0})$$
e quindi
$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right) < a^{x_0}\left(a^{\log_a(1+\varepsilon a^{-x_0})} - 1\right) = \varepsilon,$$
$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right) > a^{x_0}\left(a^{\log_a\left(1-\varepsilon a^{-x_0}\right)} - 1\right) = -\varepsilon,$$
ovvero $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$. $\square$

Proposizione

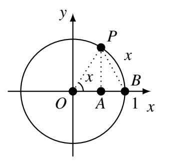
Fissato $0 < a \neq 1$ si ha che $f(x) = \log_a(x)$ è continua in $(0, +\infty)$.

Dimostrazione. Visto che f è la funzione inversa di $x \mapsto a^x$, che abbiamo già dimostrato essere continua, e visto che ogni punto di $(0, +\infty)$ è un suo punto di accumulazione, si ha che anche f è continua. Per completezza, dimostriamo la continuità di f verificando direttamente la definizione. Fissato $x_0 > 0$, vogliamo dimostrare che
$$\lim_{x\to x_0} \log_a(x) = \log_a(x_0).$$
Consideriamo il caso $a > 1$, gli altri casi sono lasciati come esercizio per casa. Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo
$$\delta = \min\left\{x_0(a^\varepsilon - 1), x_0\left(1 - a^{-\varepsilon}\right)\right\}.$$
Se $0 < |x - x_0| < \delta$ allora
$$-x_0\left(1 - a^{-\varepsilon}\right) \leqslant -\delta < x - x_0 < \delta \leqslant x_0(a^\varepsilon - 1)$$
$$\Longrightarrow x_0 a^{-\varepsilon} < x < x_0 a^\varepsilon \Longrightarrow a^{-\varepsilon} < x/x_0 < a^\varepsilon$$
e quindi per la crescenza del logaritmo con base maggiore di uno
$$\log_a(a^{-\varepsilon}) < \log_a(x/x_0) < \log_a(a^\varepsilon)$$
$$\iff -\varepsilon < \ln(x) - \ln(x_0) < \varepsilon \iff |\log_a(x) - \log_a(x_0)| < \varepsilon. \square$$

Proposizione

Le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente sono continue nel loro dominio di definizione.

Dimostrazione. Osserviamo che
$$|\sin(x)| \leqslant |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{$\clubsuit$}$$
in quanto, con riferimento alla figura a fianco, risulta

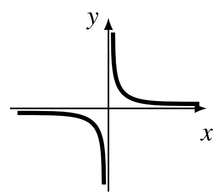


$$|x| \geqslant \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin(x)| \leqslant 1 < \tfrac{\pi}{2} \leqslant |x|,$$
$$0 < x < \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin(x) = \overline{PA} < \overline{PB} < \widehat{PB} = x,$$
e per l'ultima stima ottenuta si ha
$$-\tfrac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow 0 > \sin(x) = -\sin(-x) > -x.$$
Di conseguenza abbiamo che
$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = 2\left|\sin\left(\tfrac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x+x_0}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\tfrac{x-x_0}{2}\right)\right| \underset{(\clubsuit)}{\leqslant} |x - x_0|,$$
$$|\cos(x) - \cos(x_0)| = 2\left|\sin\left(\tfrac{x-x_0}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x+x_0}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\tfrac{x-x_0}{2}\right)\right| \underset{(\clubsuit)}{\leqslant} |x - x_0|,$$
e quindi
$$\lim_{x\to x_0}\left(\sin(x) - \sin(x_0)\right) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0}\left(\cos(x) - \cos(x_0)\right) = 0.$$
Infine, per dimostrare che anche la tangente e la cotangente sono continue, basta osservare che il quoziente di funzioni continue è una funzione continua nel suo dominio di definizione. $\square$

22 Limiti destro e sinistro

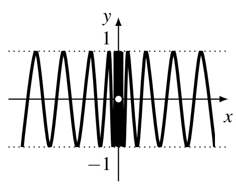
Esempio

La funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$ non è regolare in $x_0 = 0 \in D' \setminus D$. Per capirlo basta disegnare il suo grafico, che è l'iperbole equilatera.



Esempio

La funzione $g\colon D \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \sin(1/x)$ non è regolare in $x_0 = 0 \in D' \setminus D$. Per capirlo basta disegnare il suo grafico.



Sia la funzione $f(x) = 1/x$ che $g(x) = \sin(1/x)$ sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non sono regolari in $x_0 = 0$. Eppure c'è una bella differenza tra le oscillazioni di g ed il comportamento di f vicino a 0. Infatti f è regolare in 0 se la restringiamo a $(-\infty, 0)$ o a $(0, +\infty)$ mentre g non lo è. Questo motiva l'introduzione della seguente definizione.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$ non sono vuoti ed x_0 è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+ (e quindi anche per D).

- f ha **limite sinistro** $L \in \mathbb{R}$ per x che tende ad x_0 da sinistra se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in D^-$ con $-\delta < x - x_0 < 0$, ed in tal caso si scrive
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$
- f ha **limite sinistro** $+\infty$ per x che tende ad x_0 da sinistra se $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $f(x) > M\ \forall x \in D^-$ con $-\delta < x - x_0 < 0$, ed in tal caso si scrive
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty.$$
- f ha **limite sinistro** $-\infty$ per x che tende ad x_0 da sinistra se $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $f(x) < -M\ \forall x \in D^-$ con $-\delta < x - x_0 < 0$, ed in tal caso si scrive
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$
- f ha **limite destro** $L \in \mathbb{R}$ per x che tende ad x_0 da destra se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in D^+$ con $0 < x - x_0 < \delta$, ed in tal caso si scrive
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$
- f ha **limite destro** $+\infty$ per x che tende ad x_0 da destra se $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. $f(x) > M\ \forall x \in D^+$ con $0 < x - x_0 < \delta$, ed in tal caso si scrive
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty.$$
- f ha **limite destro** $-\infty$ per x che tende ad x_0 da destra se $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. $f(x) < -M\ \forall x \in D^+$ con $0 < x - x_0 < \delta$, ed in tal caso si scrive
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Osservazione

Se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, allora
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b} f(x).$$

Proposizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D, $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$. Si ha allora che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata come esercizio per casa. □

Esempio

Disegnando il grafico si vede subito che
$$\lim_{x \to 0^-} \tfrac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \tfrac{1}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 0^-} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \nexists, \qquad \lim_{x \to 0^+} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \nexists,$$
e pertanto
$$\lim_{x \to 0} \tfrac{1}{x} \nexists, \qquad \lim_{x \to 0} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \nexists.$$

Esempio

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x e^{-1/x} &= \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y}}{y} = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} x e^{-1/x} &= \lim_{y \to -\infty} \frac{e^{-y}}{y} = -\infty \end{aligned}\right\} \implies \nexists \lim_{x \to 0} x e^{-1/x}.$$

23 Limite all'infinito

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente ed $f\colon D \to I$.
- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $L \in \mathbb{R}$ se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists X = X(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in D \text{ con } x > X$$
ed in tal caso si dice che f **converge ad L** per x che tende a $+\infty$ e si scrive
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$
- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $+\infty$ se
$$\forall M > 0\ \exists X = X(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) > M\ \forall x \in D \text{ con } x > X$$
ed in tal caso si dice che f **diverge a $+\infty$** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ e si scrive
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $-\infty$ se
$$\forall M > 0\ \exists X = X(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M\ \forall x \in D \text{ con } x > X$$
ed in tal caso si dice che f **diverge a $-\infty$** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ e si scrive
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$
- f è **regolare** a $+\infty$ se il suo limite per x che tende a $+\infty$ esiste finito o infinito.
- f è **irregolare** a $+\infty$ se non è regolare a $+\infty$.

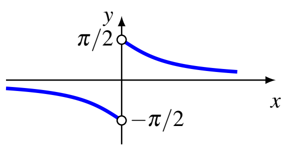
I limiti per $x \to -\infty$ si definiscono in maniera analoga.

Esempio

$\lim_{x \to +\infty} x\big(2 + \sin(x)\big) = +\infty$ in quanto $x\big(2 + \sin(x)\big) \geqslant x$ e pertanto per ogni $M > 0$ basta prendere $X = M$.

Esempio

Osserviamo che
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \tfrac{1}{x} = -\infty &\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = -\tfrac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to 0^+} \tfrac{1}{x} = +\infty &\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) \nexists,$$
ed inoltre
$$\lim_{x \to \pm\infty} \tfrac{1}{x} = 0 \implies \lim_{x \to \pm\infty} \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0.$$
Infine, data la monotonia di $x \mapsto \frac{1}{x}$ e di $x \mapsto \arctan(x)$, $f(x) = \arctan(1/x)$ è decrescente sia in $(-\infty, 0)$ ed in $(0, +\infty)$, per cui il suo grafico è quello riportato in figura.



24 Forme indeterminate

Se durante il calcolo dei limiti giungiamo ad uno dei seguenti casi*
$$(\pm\infty) + (\mp\infty),\ \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \tfrac{\pm\infty}{\mp\infty},\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \tfrac{0}{0},\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 0^0$$
allora abbiamo una **forma indeterminata**. Vediamo come provare a "sciogliere" una forma indeterminata che coinvolge delle radici.

- Se si ha la forma indeterminata
$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{+\infty}{+\infty},$$
allora si raccoglie al numeratore il termine che va a $+\infty$ più velocemente e lo stesso si fa con il denominatore. Se f e g coinvolgono solo termini della forma x^a, allora il termine più veloce è quello con esponente maggiore. Se f e g hanno forme più generali, allora si può utilizzare la scala di crescita fornita più avanti.

* Ad esempio, con la scrittura $(+\infty) + (-\infty)$ si intende il caso $\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n)$ con $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$.

- Se si ha la forma indeterminata
$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty)-(+\infty),$$
allora si utilizza il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ come segue
$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}.$$
Il passo successivo consiste nel semplificare l'espressione del numeratore $f(x)-g(x)$ in modo da sciogliere la forma indeterminata.
- Se si ha la forma indeterminata
$$\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty)-(+\infty),$$
allora si utilizza il prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ come segue
$$\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}=\left(\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}\right)\frac{\sqrt[3]{f(x)^2}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g(x)^2}}{\sqrt[3]{f(x)^2}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g(x)^2}}$$
$$=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt[3]{f(x)^2}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g(x)^2}}.$$
Il passo successivo consiste nel semplificare l'espressione del numeratore $f(x)-g(x)$ in modo da sciogliere la forma indeterminata.
- Per le altre forme indeterminate basta aguzzare l'ingegno. ☺

Esempio

Verifichiamo che

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^2+x+e}=+\infty,$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^{5/2}+x^2+x+e}=1,$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^3+x+e}=0.$

Abbiamo delle forme indeterminate $\frac{+\infty}{+\infty}$. Per scioglierle basta mettere in evidenza a numeratore e denominatore il termine che cresce più velocemente:

- $\frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^2+x+e}=\underbrace{\frac{x^{5/2}}{x^2}}_{=x^{1/2}}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\pi}{x^{5/2}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{e}{x^2}}$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}(+\infty)\cdot\frac{1+\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}+\frac{\pi}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{e}{+\infty}}=(+\infty)\cdot 1=+\infty,$$
- $\frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^{5/2}+x^2+x+e}=\underbrace{\frac{x^{5/2}}{x^{5/2}}}_{=1}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\pi}{x^{5/2}}}{1+\frac{1}{x^{1/2}}+\frac{1}{x^{3/2}}+\frac{e}{x^{5/2}}}$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}1\cdot\frac{1+\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}+\frac{\pi}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}+\frac{e}{+\infty}}=1\cdot 1=1,$$
- $\frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^3+x+e}=\underbrace{\frac{x^{5/2}}{x^3}}_{=x^{-1/2}}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\pi}{x^{5/2}}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{e}{x^3}}$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\cdot\frac{1+\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}+\frac{\pi}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{e}{+\infty}}=0\cdot 1=0.$$

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{x^3+x^2}=8$$
si può utilizzare la formula del binomio di Newton $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ visto che
$$(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1,$$
$$(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1,$$
e quindi
$$\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{x^3+x^2}=\frac{8x^3+8x}{x^3+x^2}=\frac{x^3\left(8+\frac{8}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{8+0}{1+0}=8.$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^9-(x-1)^9}{(x+1)^8+(x-1)^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18x^8+\sum_{n=2}^{9}\binom{9}{n}\left(1-(-1)^n\right)x^{9-n}}{(x+1)^8+(x-1)^8}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{18+\sum_{n=2}^{9}\binom{9}{n}\left(1-(-1)^n\right)x^{1-n}}{\left(1+\frac{1}{x^8}\right)^8+\left(1-\frac{1}{x^8}\right)^8}=\frac{18}{2}=9$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=0.$$
Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ visto che
$$\sqrt{x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty,\qquad \sqrt{x-1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$
Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, in quanto
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=$$
$$\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{2}{(+\infty)+(+\infty)}=\frac{2}{+\infty}=0.$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+10}-x\right)=+\infty.$$
Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ visto che
$$\sqrt{2x^2-x+10}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty,\qquad x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$
Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, in quanto
$$\sqrt{2x^2-x+10}-x=\left(\sqrt{2x^2-x+10}-x\right)\frac{\sqrt{2x^2-x+10}+x}{\sqrt{2x^2-x+10}+x}$$
$$=\frac{(2x^2-x+10)-x^2}{\sqrt{2x^2-x+10}+x}=\frac{x^2-x+10}{\sqrt{2x^2-x+10}+x}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)}$$
$$=x\cdot\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}{\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty\cdot\frac{1-0+0}{\sqrt{2-0+0}+1}=+\infty.$$
In alternativa, si può procedere come segue
$$\sqrt{2x^2-x+10}-x=x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}-1\right)$$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty\cdot\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{>0}=+\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\frac{1}{2}.$$
Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ visto che
$$\sqrt{x^2+x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty,\qquad x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$
Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, in quanto
$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{1+\frac{1}{+\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}+1}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\tfrac{2}{x}}-1\right)=1.$$
Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)\cdot 0$ visto che
$$x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad \sqrt{1+\tfrac{2}{x}}-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, in quanto
$$x\left(\sqrt{1+\tfrac{2}{x}}-1\right)=x\left(\sqrt{1+\tfrac{2}{x}}-1\right)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=x\,\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{+\infty}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-x\right)=0.$$
Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ visto che
$$\sqrt[3]{x^3+x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty, \qquad x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$
Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, in quanto
$$\sqrt[3]{x^3+x+1}-x=\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-x\right)\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}$$
$$=\frac{(x^3+x+1)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}=\frac{x+1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}$$
$$=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1\right)}$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\cdot\frac{1+0}{\left(\sqrt[3]{1+0+0}\right)^2+\sqrt[3]{1+0+0}+1}=0.$$

Esercizio

Studiare i limiti per $x\to+\infty$ delle seguenti funzioni.

1) $\frac{x-x^2}{1+x}$ 2) $\frac{\sqrt[5]{x^2(2x+1)^3}\ \sqrt[3]{(x+3)(2x+e)^2}}{\left(\sqrt[5]{x^2(2x+1)^3}+\sqrt[3]{(x+3)(2x+e)^2}\right)^2}$

3) $\frac{x+2\sqrt{x}}{2x+3}$ 4) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}$

5) $\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)x^2$ 6) $\sqrt{2x^2-x+10}-x$

7) $\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x}$ 8) $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}$

9) $\frac{(x+1)^5-(x-1)^5}{x^4}$ 10) $x\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

11) $x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1\right)$ 12) $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}$

13) $\sqrt{x^2+4x+6}-x$ 14) $x\cdot\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x}}$

1) $-\infty$ 2) $\frac{\sqrt[15]{2}}{(1+\sqrt[15]{2})^2}$ 3) $1/2$ 4) $+\infty$ 5) $1/2$ 6) $+\infty$ 7) $+\infty$
8) 1 9) 10 10) $1/4$ 11) $1/2$ 12) 1 13) 2 14) $3/2$

Se si ha la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ e si vuole determinare i termini al numeratore ed al denominatore che crescono più velocemente può essere utile utilizzare la seguente scala di crescita.

Proposizione

Se $a>1$, allora la **"scala" di crescita** per $x\to+\infty$ è
$$\ln(x) \ll x \ll a^x \ll x^x.$$
Questo significa che, ad esempio, risulta
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{a^x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^x}=0.$$
Tale ordinamento di infiniti vale anche nel caso in cui ciascun elemento della catena sia elevato alla stessa potenza positiva (ad esempio $\ln(x)^3$ è un infinito di ordine inferiore a x^3). L'ordinamento degli infiniti continua a valere anche se ogni elemento della catena viene elevato ad una potenza positiva differente (ad esempio x^{150} è un infinito di ordine inferiore a $e^{x/100}$).

Esempio

- $\frac{3^x+2x^3+\ln(x^4)+1}{3^{x-1}+3}=\underbrace{\boxed{\frac{3^x}{3^{x-1}}}}_{=3}\cdot\frac{1+\overbrace{\boxed{\frac{2x^3}{3^x}}}^{\to 0}+\overbrace{\boxed{\frac{4\ln(x)}{3^x}}}^{\to 0}+\overbrace{\boxed{\frac{1}{3^x}}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\boxed{\frac{9}{3^x}}}_{\to 0}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}3\cdot\frac{1+0+0+0}{1+0}=3$
- $\frac{x^2+2^x}{x^3+3^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{\frac{x^2}{2^x}+1}{\frac{x^3}{3^x}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\cdot\frac{0+1}{0+1}=0$
- $\frac{x+2^x}{x^2+3^x}=\frac{2^x\left(\frac{x}{2^x}+1\right)}{3^x\left(\frac{x^2}{3^x}+1\right)}=\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{\frac{x}{2^x}+1}{\frac{x^2}{3^x}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\cdot\frac{0+1}{0+1}=0$
- $\sqrt[x]{2^x+x^2+1}=2\cdot\sqrt[x]{1+\frac{x^2}{2^x}+\frac{1}{2^x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}2$
- $\frac{x+2\sqrt{x}}{2x+3}=\frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{2+\frac{3}{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$

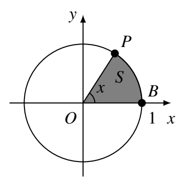
Limiti notevoli

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a(e)$ $\quad\forall a>0,\ a\neq 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)$ $\quad\forall a>0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[a]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{a}$ $\quad\forall a>0$

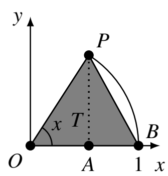
Dimostrazione. Osserviamo che i limiti notevoli sono delle forme indeterminate. Vedremo che tali limiti si possono facilmente calcolare applicando la regola di de l'Hôpital. Per questo motivo qui dimostriamo solo quelli trigonometrici, lasciando come esercizio per casa la dimostrazione del resto dei limiti notevoli, una volta aver studiato la regola di de l'Hôpital.

- Verifichiamo che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1. \qquad (\clubsuit)$$

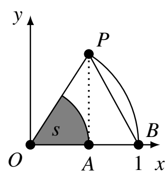
L'area del settore S come in figura soddisfa la proporzione
$$\frac{S}{\pi\cdot 1^2}=\frac{x}{2\pi}$$
e quindi
$$S=\frac{x}{2}.$$



L'area del triangolo T come in figura è
$$T=\frac{1\cdot\sin(x)}{2}=\frac{\sin(x)}{2}.$$



L'area del settore s come in figura soddisfa la proporzione
$$\frac{s}{\pi\cdot\cos(x)^2}=\frac{x}{2\pi}$$
e quindi
$$s=\frac{x\cdot\cos(x)^2}{2}.$$



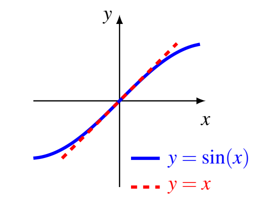
Per costruzione abbiamo che
$$s<T<S\iff\frac{x\cdot\cos(x)^2}{2}<\frac{\sin(x)}{2}<\frac{x}{2}.$$
Moltiplicando per $2/x$ otteniamo che
$$\cos(x)^2<\frac{\sin(x)}{x}<1.$$

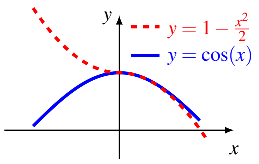
Infine, osservando che $\lim_{x\to 0}\cos(x)^2 = 1$, per il teorema dei carabinieri abbiamo (♣).

- $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos(x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}$
$$= \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
- $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot\frac{1}{1} = 1$
- $\frac{\arctan(x)}{x} = \begin{pmatrix} y = \arctan(x) \\ x = \tan(y)\end{pmatrix} = \frac{y}{\tan(y)} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$ □

Osservazione

I limiti notevoli suggeriscono come approssimare il grafico di una funzione nelle vicinanze di $x = 0$. Ad esempio, il fatto che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ significa che il grafico del seno può essere approssimato con la retta $y = x$ nelle vicinanze di $x = 0$. Analogamente, il fatto che $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ significa che il grafico del coseno può essere approssimato con $y = 1-\frac{x^2}{2}$ nelle vicinanze di $x = 0$. Questo trova riscontro nei grafici riportati a fianco.





Proposizione

- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} x^a\log_b(x) = 0\ \forall a,b>0,\ b\neq 1$
- $\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ 1 & \text{se } a=0 \\ 0 & \text{se } a<0\end{cases}$
- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{a^x+b^x} = \max\{a,b\}\ \forall a,b>0$
- $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } a\in[0,1)\end{cases}$
- $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \begin{cases} e^a & \text{se } a\neq 0, \\ 1 & \text{se } a=0,\end{cases}$

dove $e\approx 2{,}71828$ è il **numero di Eulero** o di **Nepero**.

Dimostrazione. • Per dimostrare che $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[x]{x} = 1$ è sufficiente osservare che
$$\sqrt[x]{x} = x^{1/x} = e^{\ln(x^{1/x})} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$$
in quanto $x\mapsto e^x$ è una funzione continua e per la scala di crescita $\frac{1}{x}\ln(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

• Studiamo ora il limite $\lim_{x\to+\infty} x^a$. Se $a>0$, allora $x^a\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ perché per ogni $M>0$ risulta $x^a>M$ per ogni $x>X=M^{1/a}=\sqrt[a]{M}$. Se $a=0$, allora $x^a = 1\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Se $a<0$, per quanto già visto nel caso $a>0$ risulta $x^a = \frac{1}{x^{-a}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{1}{+\infty} = 0$.

• Sia $f(x) = a^x$.

◦ Se $a = 1$, allora $f(x) = 1\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

◦ Se $a>1$, allora per ogni $M>0$ abbiamo che
$$a^x > M \iff x\ln(a) > \ln(M) \iff x > \frac{\ln(M)}{\ln(a)}$$
e quindi f soddisfa la definizione di funzione divergente a $+\infty$ con $X = \ln(M)/\ln(a)$.

◦ Se $a\in(0,1)$, allora $a^{-1}>1$ e per quanto appena dimostrato $|a^{-1}|^x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$; dunque $|f(x)| = 1/|a^{-1}|^x\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ e quindi $f(x) = 1/(a^{-1})^x\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

◦ Infine, $a = 0$, allora $f(x) = 0\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

• Per dimostrare che $\lim_{x\to 0^+} x^a\log_b(x) = 0$ basta osservare che per la scala di crescita si ha
$$\lim_{x\to 0^+} x^a\log_b(x) = \begin{pmatrix} y = 1/x \\ y\to+\infty\end{pmatrix} = \lim_{y\to+\infty}\frac{-\log_b(x)}{y^a} = 0.$$

• Se $a>b$, allora per quanto appena visto $(b/a)^x\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ e quindi
$$\sqrt[x]{a^x+b^x} = a\cdot\sqrt[x]{1+\left(\tfrac{b}{a}\right)^x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} a\cdot 1 = a.$$

• Studiamo l'ultimo limite. Il caso $a = 0$ è banale ed è lasciata come esercizio per casa. Studiamo l'ultimo limite nel caso $a\neq 0$. Visto che
$$\ln\left(\left(1+\tfrac{a}{x}\right)^x\right) = x\cdot\ln\left(1+\tfrac{a}{x}\right) = a\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{a/x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} a\cdot 1 = a$$
ed il logaritmo è sia continuo che iniettivo, deve essere $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$. Da ciò segue anche che $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ in quanto
$$\left(1+\tfrac{a}{x}\right)^x = \begin{pmatrix} y = -x \\ y\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty\end{pmatrix} = \left(1-\tfrac{a}{y}\right)^{-y}$$
$$= \left(\left(1-\tfrac{a}{y}\right)^y\right)^{-1}\xrightarrow[y\to+\infty]{}(e^{-a})^{-1} = e^a.$$ □

Esempio

Sia $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Per verificare che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = a$$
osserviamo che
$$\frac{\sin(ax)}{x} = a\frac{\sin(ax)}{ax}$$
e la funzione
$$\frac{\sin(ax)}{ax}$$
è la funzione composta delle funzioni $f(x) = ax$ e $g(y) = \frac{\sin(y)}{y}$ e per questo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = a\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = a.$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\cos(x)}{x} = \frac{1}{2}$$
in quanto
$$\frac{\sqrt{1+x}-\cos(x)}{x} = \underbrace{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}}_{\to 1/2} + \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to 1/2}\cdot\underbrace{x}_{\to 0}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}.$$
In alternativa si può procedere come segue
$$\frac{\sqrt{1+x}-\cos(x)}{x} = \frac{1+x-\cos(x)^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\cos(x)\right)}$$
$$= \left(1+\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 x\right)\frac{1}{\sqrt{1+x}+\cos(x)}\xrightarrow[x\to 0]{}(1+0)\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} = \begin{pmatrix} y = x-1 \\ y\to 0\end{pmatrix} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y\to 0}-\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{y} = -\frac{\pi}{2}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{1/2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{1+2x+x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)}{\frac{2x}{1+x^2}}\frac{2x}{1+x^2}x = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$$

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

basta porre $y = 1/x$ ed osservare che
$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e,$$
$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Esempio

Possiamo ora dimostrare uno dei limiti notevoli lasciati come esercizio per casa:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a\left((1+x)^{1/x}\right) = \log_a(e).$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \begin{pmatrix} y = e^x-1 \\ y\to 0\end{pmatrix} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \begin{pmatrix} y = 1/x \\ y\to 0^+\end{pmatrix} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-2}\right)^{x^2} = \begin{pmatrix} y = x^2-2 \\ y\to+\infty\end{pmatrix}$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^y\cdot\left(1+\frac{2}{y}\right)^2 = e^2\cdot 1 = e^2$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2x+3}{2x+6}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{3}{2x+6}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{3}{2x+6}\right)}{-\frac{3}{2x+6}}\cdot\frac{-3}{2x+6}\cdot x = 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(\pi x)}{x-3} = \begin{pmatrix} y = x-3 \\ y = 0\end{pmatrix} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi(y+3))}{y} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y)}{y} = -\pi$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-3)(x+1)}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)(x+1)-x^2}{\sqrt{(x-3)(x+1)}+x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-3}{\sqrt{(x-3)(x+1)}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1} = -1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x(1+e^{-x})\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x)+\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 1+0 = 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \begin{pmatrix} x = e^{-y} \\ y\to+\infty\end{pmatrix} = \lim_{y\to+\infty} -\left(\frac{y}{e^y}\right) = 0$$

Esempio

$$\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^x = \left(1-\frac{2}{2x+5}\right)^x = \left(\left(1-\frac{2}{2x+5}\right)^{2x+5}\right)^{\frac{x}{2x+5}}$$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} (e^{-2})^{1/2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}\ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right) = 2$$

in quanto
$$\sqrt{1+x^2}\ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right) = \sqrt{1+x^2}\ln\left(1+\frac{2x}{x^2-x}\right)$$
$$= \frac{\ln\left(1+\frac{2x}{x^2-x}\right)}{\frac{2x}{x^2-x}}\,\frac{2x}{x^2-x}\sqrt{1+x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1\cdot 2 = 2$$

Esempio

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2)\ln\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}\right) = 3$$

in quanto
$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3} = \frac{x^2-x+3+3x-2}{x^2-x+3} = 1+\frac{3x-2}{x^2-x+3}$$

e quindi
$$f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{3x-2}{x^2-x+3}\right)}{\frac{3x-2}{x^2-x+3}}\,\frac{3x-2}{x^2-x+3}(x+2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1\cdot 3 = 3.$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+4}{x+5}\right) = \begin{pmatrix} y = \frac{1}{x+4} \\ y\to 0^+\end{pmatrix} = \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{y}-4\right)\ln\left(\frac{1}{1+y}\right)$$
$$= \lim_{y\to 0^+}\left(-\frac{\ln(1+y)}{y}+4\ln(1+y)\right) = -1+0 = -1$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{0}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esempio

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$

Esempio

Calcoliamo
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x^2-1}.$$
Si tratta della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ in quanto
$$x^3+x^2+x-3 \xrightarrow[x\to 1]{} 0, \qquad x^2-1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0.$$
Visto che sia il numeratore che il denominatore sono dei polinomi, il fatto che entrambe si annullino per $x=1$ significa che entrambe sono divisibili per $x-1$:
$$x^3+x^2+x-3 = (x^2+2x+3)(x-1), \quad x^2-1 = (x+1)(x-1).$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Pertanto si ha
$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+3}{x+1}=\frac{6}{2}=3.$$

Esempio

$$\frac{e^{x+x^2}-e^{-2x}}{\sin(3x)}=e^{-2x}\frac{e^{3x+x^2}-1}{\sin(3x)}=e^{-2x}\left(\frac{e^{3x+x^2}-1}{3x+x^2}\right)\frac{3x+x^2}{\sin(3x)}\xrightarrow[x\to0]{}1$$

Esempio

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x\tan(x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}}\frac{2x^2}{\tan(x)\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}}\frac{x}{\tan(x)}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to1}\left(1+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=e^{\sqrt{3}/6}.$$
Osserviamo che
$$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}$$
$$=\frac{(x^2+2)-(2x+1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}=\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}$$
e quindi
$$\left(1+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=\left(1+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$$
$$=\left(1+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}\right)^{\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}}$$
dove
$$\lim_{x\to1}\left(1+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}\right)^{\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}{(x-1)^2}}=\left(\begin{array}{c}y=\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}{(x-1)^2}\\ y\xrightarrow[x\to1]{}+\infty\end{array}\right)$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e,$$
e
$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$
pertanto
$$\lim_{x\to1}\left(1+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=e^{\sqrt{3}/6}.$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x^3-1}=-\frac{\pi}{6}.$$
Osserviamo che
$$\frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x^3-1}=\frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$
e che
$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\left(\begin{array}{c}y=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\\ y\xrightarrow[x\to1]{}0\end{array}\right)=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,$$
$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=\left(\begin{array}{c}y=x-1\\ y\xrightarrow[x\to1]{}0\end{array}\right)=\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)}{y}$$
$$=-\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{y}=-\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}.$$

Pertanto
$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x^3-1}=1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}=-\frac{\pi}{6}.$$

Esempio

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-10x+21}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-7)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x-7)=-4$$

Esempio

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to4}\frac{(2x+1)-9}{(x-2)-2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}$$
$$=\lim_{x\to4}2\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Esempio

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin(x))-\ln(x)}{(x+1)^{1/x}}=\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\cdot\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{(1/y+1)^y}$$
$$=\ln(1)\cdot\left(\lim_{y\to\pm\infty}\left(\frac{1}{y}+1\right)^y\right)^{-1}=0\cdot e^{-1}=0$$

Esempio

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}=0$ per il test del confronto visto che
$$0\xleftarrow[x\to+\infty]{}-\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

Esempio

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$$

Esempio

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(7x)}{x(x+3)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(7x)}{7x}\cdot\frac{7}{x+3}=1\cdot7=7$$

Esempio

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)=\left(\begin{array}{c}y=x-\frac{\pi}{2}\\ y\to0\end{array}\right)=\lim_{y\to0}y\tan\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\lim_{y\to0}\frac{y\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to0}\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\frac{y}{-\sin(y)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-1)=-1$$

Esempio

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-1}{x^2}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{1/x}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+1}}\frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}}-1}{\frac{1}{x(x+1)}}\frac{x^2}{x(x+1)}=e^0\cdot1\cdot1=1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(5^{1/x}-2^{1/x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}\ln(5)}-e^{\frac{1}{x}\ln(2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(2)}\frac{e^{\frac{1}{x}\left(\ln(5)-\ln(2)\right)}-1}{\frac{1}{x}\left(\ln(5)-\ln(2)\right)}(\ln(5)-\ln(2))$$
$$=e^0\cdot1\cdot\left(\ln(5)-\ln(2)\right)=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

Esempio

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos(3x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(3x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \cdot \frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)} \cdot \frac{1}{9} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})(1-\cos(x))}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^2}{1-\cos(x)} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1/2} = 2$$

Capitolo 6

Successioni

25 Introduzione

Ricordiamo che $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

Definizione

Una **successione (numerica)** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una funzione che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un numero reale $a_n \in \mathbb{R}$. In altre parole, una successione è una sequenza ordinata e numerabile di numeri reali

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ldots$$

L'elemento di una successione associato ad $n \in \mathbb{N}$ è detto **termine n-esimo** ed è indicato con a_n.

Esempio

Una successione (triviale) è quella con tutti i termini uguali a zero

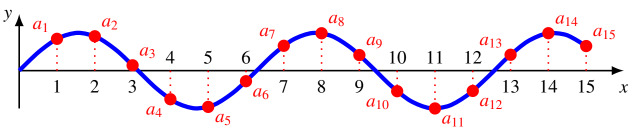
$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots$$

Esempio

Ad ogni funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possiamo associare una successione ponendo

$$a_n = f(n).$$

La seguente figura corrisponde ad $f(x) = \sin(x)$ ed alla successione associata $a_n = \sin(n)$.



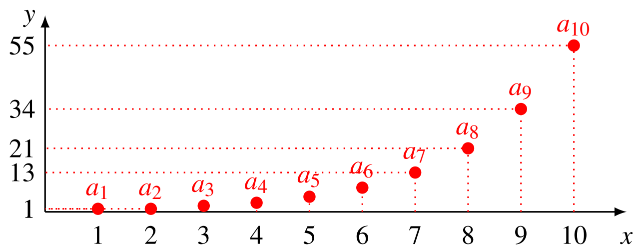
Esempio

Tra le successioni più famose c'è quella di **Fibonacci**

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ldots$$

in cui ciascun termine è ottenuto sommando i due precedenti, ovvero la successione è **definita per ricorrenza** da

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

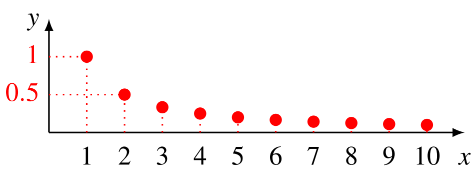


Esempio

La **successione armonica**

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{10},\ \tfrac{1}{11},\ \tfrac{1}{12},\ \tfrac{1}{13},\ \tfrac{1}{14},\ldots$$

ha come termine n-esimo $a_n = 1/n$.



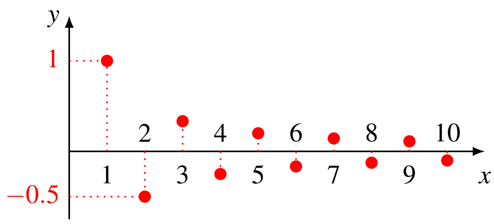
Esempio

La **successione armonica a segno alterno**

$$1,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{7},\ -\tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{9},\ -\tfrac{1}{10},\ \tfrac{1}{11},\ -\tfrac{1}{12},\ldots$$

ha come termine n-esimo $a_n = (-1)^{n+1}/n$, visto che

$$(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari,}\\ -1 & \text{se } n \text{ è pari.}\end{cases}$$

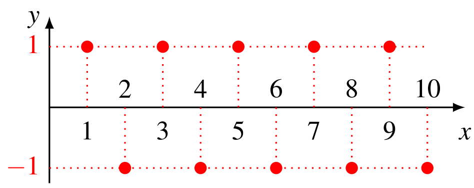


Esempio

La **successione dei segnali alterni**

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ldots$$

ha come termine n-esimo $a_n = (-1)^{n+1}$.



Ricapitolando, una successione generale si indica con

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ldots$$

o più brevemente con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove a_1 è il primo termine, a_2 è il secondo termine ed a_n è l'n-esimo termine della successione.

Esercizio

Scrivere i primi quattro termini delle seguenti successioni.

- $a_n = 1 + 2^n$
- $a_n = (-2)^n$
- $a_n = 1 + \frac{1}{n}$
- $a_n = \begin{cases} 2n+1 & \text{se } n \text{ è pari}\\ \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari}\end{cases}$

Esercizio

Scrivere i primi quattro termini delle seguenti successioni definite per ricorrenza.

- $\begin{cases} a_1 = 2\\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2}\end{cases}$
- $\begin{cases} a_1 = -1\\ a_{n+1} = -(a_n+1)^2\end{cases}$

Esempio

Sia $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ed $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo per induzione che

$$P(n): \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

i. Osserviamo che $P(1)$ e $P(2)$ sono entrambe vere in quanto

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 = a_1 \Longrightarrow P(1) \text{ è vera,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = 0 + 1 = a_2 \Longrightarrow P(2) \text{ è vera.}$$

ii. Se $P(n-1)$ e $P(n-2)$ sono vere allora, visto che $a = (1 -$

$\sqrt{5})/2$ e $b=(1+\sqrt{5})/2$ sono le soluzioni dell'equazione
$$x^2-x-1=0,$$
si ha che anche $P(n)$ è vera in quanto
$$\frac{1}{\sqrt{5}}[b^n-a^n]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[b^{n-1}-a^{n-1}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[b^{n-2}-a^{n-2}\right]$$
$$\iff b^n-a^n=b^{n-1}-a^{n-1}+b^{n-2}-a^{n-2}$$
$$\iff b^n-b^{n-1}-b^{n-2}=a^n-a^{n-1}-a^{n-2}$$
$$\iff b^{n-2}\underbrace{(b^2-b-1)}_{=0}=a^{n-2}\underbrace{\left(a^2-a-1\right)}_{=0}.$$

26 Limiti di successioni

Visto che $\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione, non ha senso fare il limite di una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per n che tende ad un $n_0\in\mathbb{N}$ in quanto di sicuro n_0 non è di accumulazione. Ha invece senso fare il limite per n che tende a $+\infty$. La seguente definizione segue da quella di limite di funzione per x che tende a $+\infty$.

Definizione

- La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** ad $L\in\mathbb{R}$ se
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=L,$$
ovvero
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\text{ t.c. }|a_n-L|<\varepsilon\ \forall n>N.$$
In tal caso la successione è **convergente**.
- La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge a $+\infty$** se
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty,$$
ovvero
$$\forall M>0\ \exists N=N(M)\in\mathbb{N}\text{ t.c. }a_n>M\ \forall n>N.$$
- La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge a $-\infty$** se
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=-\infty,$$
ovvero
$$\forall M>0\ \exists N=N(M)\in\mathbb{N}\text{ t.c. }a_n<-M\ \forall n>N.$$
- La successione è **divergente** se diverge a $+\infty$ o $-\infty$.
- La successione è **regolare** se converge o diverge.
- La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è **irregolare** se non è regolare, ovvero non è né convergente né divergente, cioè
$$\nexists\lim_{n\to+\infty}a_n.$$

Osservazione

Visto che la negazione di $\forall$ è $\exists$ e che la negazione di $\exists$ è $\forall$, si ha che
$$\nexists\lim_{n\to+\infty}a_n$$
equivale a
$$\forall L\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\text{ t.c. }\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n=n(L,\varepsilon,N)>N\text{ t.c. }|a_n-L|>\varepsilon,$$
$$\exists M_1>0\text{ t.c. }\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n_1=n_1(M_1,N)>N\text{ t.c. }a_{n_1}<M_1,$$
$$\exists M_2>0\text{ t.c. }\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n_2=n_2(M_2,N)>N\text{ t.c. }a_{n_2}>-M_2.$$

Osservazione

DUBBIO SULL'UNICITÀ DEL LIMITE: possono due numeri distinti soddisfare entrambe la definizione di limite? Per sciogliere questo dubbio ragioniamo per assurdo. Assumiamo che una successione $\{a_n\}_n$ converge sia ad L_1 che L_2, ovvero
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_i\in\mathbb{N}\text{ t.c. }|a_n-L_i|<\varepsilon\ \forall n>N_i,\quad\text{per }i\in\{1,2\}.$$
Posto $\varepsilon=|L_1-L_2|/2$, per la disuguaglianza triangolare si ha
$$|L_1-L_2|=|L_1-a_n+a_n-L_2|$$
$$\leqslant|L_1-a_n|+|a_n-L_2|<\varepsilon+\varepsilon=|L_1-L_2|$$
$\forall n>N=\max\{N_1,N_2\}$ e quindi $|L_1-L_2|<|L_1-L_2|$: un assurdo!

Proposizione 6.1

Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ regolare per $x\to+\infty$. Se $a_n=f(n)$, allora
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$
L'uguaglianza vale in ogni caso, sia che il limite esista finito o infinito.

Osservazione

Se f non è regolare per $x\to+\infty$, allora non si può affermare l'uguaglianza dei due limiti (ad esempio $a_n=\sin(n\pi)=0\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ mentre $f(x)=\sin(x\pi)$ è irregolare per $x\to+\infty$).

Dimostrazione. Segue direttamente dalle definizioni di limite per una funzione e per una successione. Infatti, dalla condizione data nella definizione di limite per una funzione segue quella data nella definizione di limite per una successione prendendo $N=\lceil X\rceil$. □

Esempio

La **successione dei segnali alterni**
$$a_n=(-1)^{n+1}$$
è irregolare in quanto
$$\forall L\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\text{ t.c. }\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n=n(L,\varepsilon,N)>N\text{ t.c. }|a_n-L|>\varepsilon,\quad(\heartsuit)$$
$$\exists M_1>0\text{ t.c. }\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n_1=n_1(M_1,N)>N\text{ t.c. }a_{n_1}<M_1,\quad(\diamondsuit)$$
$$\exists M_2>0\text{ t.c. }\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n_2=n_2(M_2,N)>N\text{ t.c. }a_{n_2}>-M_2.\quad(\clubsuit)$$
Dimostriamo $(\heartsuit)$. Se $L\geqslant 0$, allora basta prendere $\varepsilon=1/2$ e notare che $\forall N\in\mathbb{N}$ si ha che $n=2N$ è t.c.
$$n>N\qquad\text{e}\qquad|a_n-L|=|-1-L|=1+L\geqslant 1>\varepsilon.$$
Il caso $L<0$ è analogo e lasciato come esercizio per casa. Per dimostrare $(\diamondsuit)$ e $(\clubsuit)$ basta prendere $M=2$ ed osservare che $|a_n|<M$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Esempio

La **successione di Fibonacci**
$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ldots$$
diverge a $+\infty$ in quanto
$$\forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N}\text{ t.c. }a_n>M\ \forall n>N.$$
Per dimostrarlo mi serve prima dimostrare che $a_n\geqslant 1$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Procedo per induzione:

1) per definizione $a_1=1$ ed $a_2=1$ e pertanto entrambe soddisfano la condizione $a_n\geqslant 1$;

2) se assumo che $a_n,a_{n+1}\geqslant 1$, allora anche $a_{n+2}\geqslant 1$ in quanto per definizione $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\geqslant 1+1=2\geqslant 1$.

Dunque $a_n\geqslant 1$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, pertanto
$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\geqslant a_{n+1}+1$$
e quindi, iterando questa stima otteniamo
$$a_{n+2}\geqslant a_{n+1}+1\geqslant(a_n+1)+1=a_n+2\geqslant a_{n-1}+3$$
$$\geqslant\ldots\geqslant a_2+n=1+n\quad\Longrightarrow\quad a_{n+2}\geqslant 1+n.$$
Se quindi prendo $N=\lceil M\rceil+1$, dove per definizione $\lceil M\rceil=\min\{n\in\mathbb{N}:n\geqslant M\}$, allora per ogni $n>N$ si ha $a_n\geqslant n-1>N-1=\lceil M\rceil\geqslant M$. Si noti che $M>0$ potrebbe non essere un numero naturale, ecco perché consideriamo $\lceil M\rceil$ che per definizione è un numero naturale.

Esempio

La **successione armonica** è definita da
$$a_n=1/n$$

e converge ad $L=0$ in quanto
$$\forall \varepsilon>0\ \exists N=\left\lceil \frac{1}{\varepsilon}\right\rceil \text{ t.c. } |a_n-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon\ \forall n>N.$$
D'altronde $a_n=f(n)$ con $f(x)=\frac{1}{x}$ e quindi basta applicare la proposizione precedente, in quanto sappiamo già che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Esempio

La **successione armonica a segno alterno** è definita da
$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
e converge ad $L=0$ in quanto
$$\forall \varepsilon>0\ \exists N=\left\lceil \frac{1}{\varepsilon}\right\rceil\in\mathbb{N} \text{ t.c. } |a_n-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon\ \forall n>N.$$

Esempio

Quali delle seguenti successioni è convergente?

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right),\dots,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\dots$

2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi/2},\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)}{2\pi/2},\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3\pi/2},\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)}{4\pi/2},\dots,\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi/2},\dots$

1) Calcolando i seni della successione si ottiene che
$$a_n=\begin{cases}0 & \text{se } n \text{ è pari},\\ 1 & \text{se } n\in\{1+4k:k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\},\\ -1 & \text{se } n\in\{3+4k:k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\},\end{cases}$$
ed è quindi chiaro che la successione è irregolare.

2) Calcolando i seni della successione si ottiene che
$$a_n=\begin{cases}0 & \text{se } n \text{ è pari},\\ \frac{2}{n\pi} & \text{se } n\in\{1+4k:k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\},\\ -\frac{2}{n\pi} & \text{se } n\in\{3+4k:k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\},\end{cases}$$
ed è quindi chiaro che la successione converge a zero.

Esempio

Sia $b>0$. La successione
$$a_n=\sqrt[n]{b}$$
converge ad 1. Infatti, se
$$b>1 \qquad (\heartsuit)$$
allora
$$|a_n-L|=\left|\sqrt[n]{b}-1\right|\overset{(\heartsuit)}{=}\sqrt[n]{b}-1<\varepsilon\iff\sqrt[n]{b}<1+\varepsilon$$
$$\iff \frac{1}{n}\ln(b)<\ln(1+\varepsilon)\iff n>\frac{\ln(b)}{\ln(1+\varepsilon)}$$
e quindi basta prendere $N=\left\lceil\frac{\ln(b)}{\ln(1+\varepsilon)}\right\rceil$. Il caso $b\in(0,1]$ viene lasciato come esercizio per casa.

Esempio

Consideriamo la successione
$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{3},\dots,\ a_n=\frac{n+2}{n},\dots$$
Visto che $a_n=f(n)$ con $f(x)=\frac{x+2}{x}$, si ha $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. D'altronde, per dimostriamolo usando la definizione di limite, basta osservare che
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=\left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil \text{ t.c. } |a_n-1|=\frac{2}{n}<\varepsilon\ \forall n>N.$$

Esempio

Consideriamo la successione
$$\frac{3}{1\cdot2},\ \frac{4}{2\cdot3},\ \frac{5}{3\cdot4},\dots,\ a_n=\frac{n+2}{n\cdot(n+1)},\dots$$
Visto che $a_n=f(n)$ con $f(x)=\frac{x+2}{x\cdot(x+1)}$, si ha $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. D'altronde, per dimostriamolo usando la definizione di limite, basta osservare che per ogni $\varepsilon>0$ si ha che
$$0<a_n=\frac{(n+1)+1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$
per ogni $n>N=\left\lceil\max\left\{\frac{2}{\varepsilon},\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8}{\varepsilon}}-1\right)\right\}\right\rceil$.

Esempio

Consideriamo la successione
$$a_n=\frac{2n+1}{n+3}.$$
Visto che $a_n=f(n)$ con $f(x)=\frac{2x+1}{x+3}$, si ha che $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$. Dimostriamolo ora utilizzando la definizione di limite: per ogni $\varepsilon>0$ risulta
$$|a_n-L|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{2n+1}{n+3}-2\right|=\left|\frac{-5}{n+3}\right|=\frac{5}{n+3}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{5}{\varepsilon}-3$$
e quindi basta prendere $N=\left\lceil\frac{5}{\varepsilon}-3\right\rceil$.

Esempio

Dimostriamo che
$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0.$$
Visto che $a_n=f(n)$ con $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, si ha che $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Dimostriamolo ora utilizzando la definizione di limite. Fissato $\varepsilon>0$, cerchiamo una $N\in\mathbb{N}$ tale che
$$\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|<\varepsilon\qquad\forall n>N. \qquad (\heartsuit)$$
Osserviamo che per ogni $n\in\mathbb{N}$ abbiamo
$$1+\frac{1}{n}>1\Longrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0\Longrightarrow\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
e quindi
$$(\heartsuit)\iff\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\varepsilon\iff1+\frac{1}{n}<e^{\varepsilon}$$
$$\iff\frac{1}{n}<\underbrace{e^{\varepsilon}-1}_{>0}\iff n>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}.$$
Possiamo dunque prendere
$$N=\left\lceil\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}\right\rceil.$$

Esempio

Dimostriamo che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n+1}=+\infty.$$
Visto che $a_n=f(n)$ con $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$, si ha che $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Dimostriamolo ora utilizzando la definizione di limite. Fissato $M>0$, cerchiamo una $N\in\mathbb{N}$ tale che
$$\frac{n^2+1}{n+1}>M\qquad\forall n>N. \qquad (\diamondsuit)$$
Osserviamo che
$$(\diamondsuit)\iff n^2+1>M(n+1)\iff n^2-Mn+1-M>0.$$
Vediamo quando l'equazione di secondo grado
$$n^2-Mn+1-M=0 \qquad (\clubsuit)$$
ha il delta che si annulla:
$$\Delta=M^2+4M-4=0\iff M=-2\pm\sqrt{4+4}=2\left(-1\pm\sqrt{2}\right).$$
Non è limitativo assumere che $M>2\left(-1+\sqrt{2}\right)$. In tal caso $\Delta>0$ e le due soluzioni dell'equazione di secondo grado ($\clubsuit$) sono
$$n_1=\frac{M-\sqrt{M^2+4M-4}}{2},\qquad n_2=\frac{M+\sqrt{M^2+4M-4}}{2},$$
Possiamo dunque prendere
$$N=\left\lceil\frac{M+\sqrt{M^2+4M-4}}{2}\right\rceil.$$

Osservazione

Dal grafico di una successione $\{a_n\}_n$ è *spesso* facile capire se essa è convergente, divergente o irregolare. Infatti $\{a_n\}_n$ diverge a $+\infty$ se per ogni $M>0$ si ha che i punti $(n,a_n)\in\mathbb{R}^2$ appartengono al semipiano $\mathbb{R}\times(M,+\infty)$ da un certo N in poi. Analogamente, $\{a_n\}_n$ diverge a $-\infty$ se per ogni $M>0$ si ha che i punti $(n,a_n)\in$

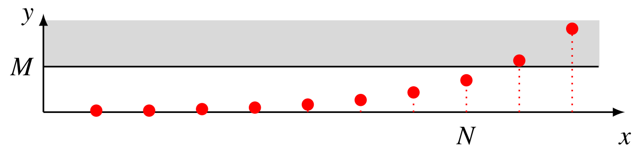
$\mathbb{R}^2$ appartengono al semipiano $\mathbb{R}\times(-\infty,-M)$ da un certo N in poi. Inoltre, visto che

$$|a_n - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \iff a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon),$$

si ha che $\{a_n\}_n$ converge ad L se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che i punti $(n,a_n)\in\mathbb{R}^2$ appartengono alla striscia $\mathbb{R}\times(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ da un certo N in poi. Ovviamente una successione è irregolare se il suo grafico non soddisfa le proprietà appena descritte.

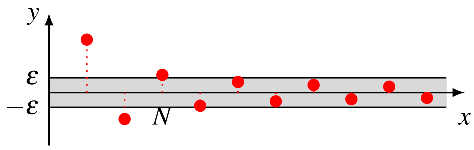
Esempio

Nella figura seguente abbiamo riportato il grafico della successione di Fibonacci, che sappiamo divergere a $+\infty$. In effetti si vede che per ogni $M>0$ i punti (n,a_n) appartengono al semipiano $\mathbb{R}\times(M,+\infty)$ da un certo N in poi.



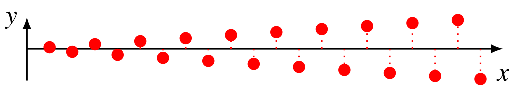
Esempio

Nella figura seguente abbiamo riportato il grafico della successione armonica a segno alterno, che sappiamo convergere ad $L=0$. In effetti si vede che per ogni $\varepsilon>0$ i punti (n,a_n) appartengono alla striscia $\mathbb{R}\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ da un certo N in poi.



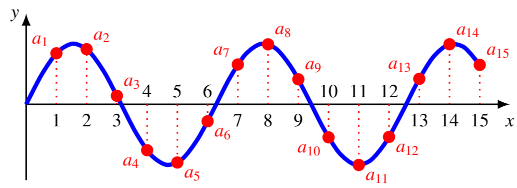
Esempio

Nella figura seguente abbiamo riportato il grafico della successione $a_n=(-1)^{n+1}n$. Dal suo grafico si vede che è una successione irregolare: non esiste una striscia o un semipiano che contengano tutti i punti (n,a_n) da un certo N in poi.



Esempio

La successione $a_n=\sin(n)$ è irregolare. Infatti dal suo grafico si vede che i punti (n,a_n) oscillano intorno allo zero ma non convergono a zero.



27 Teorema di Bolzano-Weierstrass

Definizione

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è **limitata** se l'immagine $I=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ è un insieme limitato, ovvero esiste $M>0$ tale che

$$|a_n|\leqslant M \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Proposizione

Ogni successione convergente è limitata.

Dimostrazione. Se $\{a_n\}_n$ converge ad L, allora posto $\varepsilon=1$ esiste $N\in\mathbb{N}$ tale che $|a_n-L|<1$ per ogni $n>N$. Per la disuguaglianza triangolare

$$|a_n|\leqslant|a_n-L|+|L|<1+|L| \qquad \forall n>N.$$

Dunque basta prendere $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_N|,|L|+1\}$ per avere $|a_n|\leqslant M$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. □

Il viceversa della proposizione precedente non vale: esistono successioni limitate ma non convergenti, come ad esempio $a_n=(-1)^n$. Vale però il seguente teorema sulle sottosuccessioni.

Definizione

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una sua **sottosuccessione** è della forma $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione strettamente crescente a valori in $\mathbb{N}$.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_n$ una successione limitata. Esistono allora $A,B\in\mathbb{R}$ tali che $A\leqslant a_n\leqslant B$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Iniziamo con la costruzione della sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_k$. Poniamo $n_1=1$ in modo che il primo termine della sottosuccessione a_{n_k} coincida con quello della successione $\{a_n\}_n$.

Sia $M=(A+B)/2$ il punto medio tra A e B. Dividiamo l'intervallo $[A,B]$ in due considerando $[A,M]$ ed $(M,B]$. Consideriamo i corrispondenti insiemi di indici

$$I_1=\{n\in\mathbb{N} : n>n_1,\ a_n\in[A,M]\},$$
$$J_1=\{n\in\mathbb{N} : n>n_1,\ a_n\in(M,B]\}.$$

Osserviamo che I_1 è l'insieme degli indici n più grandi di n_1 e tali che a_n è nell'intervallo $[A,M]$. Analogamente, J_1 è l'insieme degli indici n più grandi di n_1 e tali che a_n è nell'intervallo $(M,B]$.

Visto che $I_1\cup J_1=\mathbb{N}\setminus\{n_1\}$, almeno uno dei due insiemi di indici I_1 e J_1 deve contenere un numero infinito di elementi. Se I_1 contiene un numero infinito di elementi, allora poniamo $A_1=A$, $B_1=M$ e definiamo $n_2=\min I_1$. Se invece I_1 contiene un numero finito di elementi, allora J_1 contiene un numero infinito di elementi; in tal caso poniamo $A_1=M$, $B_1=B$ e definiamo $n_2=\min J_1$.

Sia $M_1=(A_1+B_1)/2$ il punto medio tra A_1 e B_1. Dividiamo l'intervallo $[A_1,B_1]$ in due considerando $[A_1,M_1]$ ed $(M_1,B_1]$. Consideriamo i corrispondenti insiemi di indici

$$I_2=\{n\in\mathbb{N} : n>n_2,\ a_n\in[A_1,M_1]\},$$
$$J_2=\{n\in\mathbb{N} : n>n_2,\ a_n\in(M_1,B_1]\}.$$

Di nuovo, almeno uno due insiemi di indici I_2 e J_2 deve contenere un numero infinito di elementi visto che $I_2\cup J_2=\mathbb{N}\setminus[1,n_2]$. Se I_2 contiene un numero infinito di elementi, allora poniamo $A_2=A_1$, $B_2=M_1$ e definiamo $n_3=\min I_2$. Se invece I_2 contiene un numero finito di elementi, allora J_2 contiene un numero infinito di elementi; in tal caso poniamo $A_2=M_1$, $B_2=B_1$ e definiamo $n_3=\min J_2$.

Iterando questa procedura otteniamo una successione di intervalli $\{[A_k,B_k]\}_k$ tali che

$$[A_1,B_1]\supset[A_2,B_2]\supset\ldots\supset[A_k,B_k]\supset[A_{k+1},B_{k+1}]\supset\ldots$$

ed una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che

$$a_{n_k}\in[A_k,B_k]. \qquad (\heartsuit)$$

Visto che la lunghezza L_k di ciascun intervallo $[A_k,B_k]$ converge a zero in quanto

$$L_k=B_k-A_k=\frac{B-A}{2^k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0,$$

si ha che esiste $a \in [A,B]$ tale che per k che va a $+\infty$ l'intervallo $[A_k, B_k]$ degenera nell'insieme singoletto* $\{a\}$. Di conseguenza, da $(\heartsuit)$ si ha che la sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ converge ad a. □

Esempio

La successione $a_n = (-1)^n$ è limitata in quanto $|a_n| \leqslant 1$ e quindi soddisfa le ipotesi del teorema di Bolzano-Weierstrass. In effetti, ad esempio, essa ammette $a_{2k} = 1$ ed $a_{2k+1} = -1$ come sottosuccessioni convergenti.

Il teorema di Bolzano-Weierstrass ci dice che la limitatezza di una successione è una condizione sufficiente a garantire l'esistenza di una sottosuccessione convergente ma non è una condizione necessaria, come mostrato dal seguente esempio.

Esempio

La successione
$$a_n = \begin{cases} n \text{ se } n \text{ è pari,} \\ 1 \text{ se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$
non è una successione limitata ma ammette $a_{2k+1} = 1$ come sottosuccessione convergente.

Proposizione

Una successione $\{a_n\}_n$ converge ad L se e solo se tutte le sue sottosuccessioni convergono ad L. Inoltre, l'equivalenza vale anche nei casi in cui $L = \pm\infty$.

Dimostrazione. Consideriamo il primo caso; il secondo è lasciato come esercizio per casa. Sia $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione. Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che
$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$
Visto che $n_k \geqslant k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha anche che
$$\left|a_{n_k} - L\right| < \varepsilon \quad \forall k > N.$$
Il viceversa è banale visto che $\{a_n\}_n$ è sottosuccessione di se stessa. □

Osservazione

Se una successione ammette due sottosuccessioni che non convergono allo stesso limite, allora la successione non converge.

Esempio

Per verificare che la successione
$$a_n = (-1)^n \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+3}$$
è irregolare, basta trovare due sottosuccessioni che convergono a due limiti distinti. Ad esempio vedremo che
$$a_{2n} = \frac{4n^2+2n+1}{4n^2+4n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$
$$a_{2n-1} = -\frac{(2n-1)^2+2n}{(2n-1)^2+4n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n n^2}{3n^2+\pi}$$
non esiste, basta osservare che
$$a_{2n} = \frac{2n+(-1)^{2n}(2n)^2}{3(2n)^2+\pi} = \frac{2n+4n^2}{12n^2+\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3},$$
$$a_{2n+1} = \frac{2n+1+(-1)^{2n+1}(2n+1)^2}{3(2n+1)^2+\pi} = \frac{-4n^2-2n}{12n^2+12n+3+\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{3}.$$

Proposizione 6.2

Se $\{a_n\}_n$ è limitata e $\{b_n\}_n$ converge a zero, allora anche $a_n \cdot b_n$ converge a zero.

Osservazione

Si noti che non è richiesta la convergenza di $\{a_n\}_n$.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leqslant M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste $N = N(\varepsilon/M) \in \mathbb{N}$ tale che
$$|b_n| < \varepsilon/M \quad \forall n > N.$$
Di conseguenza si ha che
$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall n > N.$$ □

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$$
basta osservare che $a_n = \cos(n)$ è limitata e $b_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

28 Teorema ponte

Il seguente teorema generalizza la proposizione 6.1.

Teorema ponte

Data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) esiste il limite
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R},$$
(2) per ogni successione $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ si ha che
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L \in \mathbb{R}.$$

L'equivalenza vale anche nei casi in cui $L = \pm\infty$ e/o $x_0 = \pm\infty$.

Dimostrazione. "$(1) \implies (2)$" Assumiamo (1) e dimostriamo (2). Sia $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi
$$\exists\delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta, \qquad (\clubsuit)$$
$$\exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |x_n - x_0| < \delta\ \forall n > N. \qquad (\spadesuit)$$
Visto che $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $0 < |x_n - x_0| < \delta\ \forall n > N$, dunque per $(\clubsuit)$ e $(\spadesuit)$ si ha
$$|f(x_n) - L| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$
"$(2) \implies (1)$" Assumiamo (2) e dimostriamo (1). Ragioniamo per assurdo ed assumiamo che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L,$$
ovvero
$\exists\varepsilon > 0$ t.c. $\forall\delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ t.c. $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon$.
Scegliendo $\delta = 1/n$ otteniamo una successione $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$ tale che
$$0 < |x_n - x_0| < 1/n \quad \text{e} \quad |f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon.$$
Per costruzione $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ e $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq L$, ma questo contraddice (2). □

Dal teorema ponte seguono i seguenti due corollari; i dettagli delle dimostrazioni sono lasciati come esercizi per casa.

Corollario

Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ è tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, allora
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Corollario 6.3

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se esistono due successioni $\{x_n\}_n$ ed $\{y_n\}_n$ in $\mathbb{R}$ tali che

- $x_n \neq x_0, \quad y_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

*Ovvero insieme con un solo elemento. Singleton in inglese.

- $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x_0$,
- $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$,

allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste. Il risultato vale anche nei casi in cui $x_0 = \pm\infty$.

Esempio

Per verificare che il limite
$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
non esiste basta considerare le successioni
$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \qquad y_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}$$
in quanto $x_n, y_n \neq 0$ ed inoltre
$$\lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi n) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Esempio

Per verificare che il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin(x)}{1+x^2}$$
non esiste basta considerare le successioni
$$x_n = 2\pi n, \qquad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$
in quanto
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n^2}{1+y_n^2} = 1.$$

Esempio

Per verificare che il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x(1+\sin(x))$$
non esiste basta considerare le successioni $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ed $y_n = 2\pi n$, in quanto
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty.$$

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{x\to+\infty} x(1-\cos(x))$$
non esiste basta considerare le successioni $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ed $y_n = 2\pi n$ perché allora
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 0.$$

Dal teorema ponte e dai limiti notevoli per le funzioni segue quanto asserito nella seguente proposizione.

Limiti notevoli

Se $x_n \neq 0$ converge a zero ed $a > 0$, allora si ha:

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(1+x_n)}{x_n} = \log_a(e) \quad a \neq 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(x_n)}{x_n^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln(a)$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(x_n)}{x_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[a]{1+x_n}-1}{x_n} = \frac{1}{a}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(x_n)}{x_n} = 1$

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \sin\left(\frac{2n+6}{n^2+n+3}\right) = 2$$
basta osservare che
$$\frac{2n+6}{n^2+n+3} = \frac{2+\frac{6}{n}}{n+1+\frac{3}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2+0}{(+\infty)+1+0} = 0$$
e quindi
$$n \cdot \sin\left(\frac{2n+6}{n^2+n+3}\right) = \underbrace{\boxed{n \cdot \frac{2n+6}{n^2+n+3}}}_{\to 2} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin\left(\frac{2n+6}{n^2+n+3}\right)}{\frac{2n+6}{n^2+n+3}}}}_{\to 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \cdot 1 = 2.$$

29 Calcolo dei limiti di successioni

Nel calcolo dei limiti può essere utile conoscere le **proprietà dei limiti** che andiamo ad elencare. Per semplicità consideriamo separatamente le successioni convergenti da quelle divergenti.

Proposizione

Il limite commuta con le operazioni algebriche: se le successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ convergono rispettivamente ad a e b allora
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{se } b_n, b \neq 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = a^b \quad \text{se } (a_n)^{b_n} \text{ e } a^b \text{ sono ben definiti},$$
$$\left.\begin{array}{l} a \neq 0 = b \\ \exists N \text{ t.c. } a_n/b_n > 0 \ \forall n > N \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty,$$
$$\left.\begin{array}{l} a \neq 0 = b \\ \exists N \text{ t.c. } a_n/b_n < 0 \ \forall n > N \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la seconda uguaglianza, le altre sono lasciate come esercizio per casa. Visto che le successioni convergenti sono limitate, esistono $M_a, M_b > 0$ tali che
$$|a_n| < M_a \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad |b_n| < M_b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono $N_a = N_a\left(\frac{\varepsilon}{2M_b}\right)$ ed $N_b = N_b\left(\frac{\varepsilon}{2M_a}\right)$ tali che
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M_b} \quad \forall n > N_a \qquad \text{e} \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M_a} \quad \forall n > N_b.$$
Posto $N = \max\{N_a, N_b\}$, per la disuguaglianza triangolare per ogni $n > N$ risulta
$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = \big|(a_n \cdot (b_n - b)) + ((a_n - a) \cdot b)\big|$$
$$\leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \leqslant M_a \cdot \frac{\varepsilon}{2M_a} + M_b \cdot \frac{\varepsilon}{2M_b} = \varepsilon.$$
Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. □

Esempio

Dimostriamo di nuovo che se $a > 0$, allora
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$
procedendo come segue
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \left(\lim_{n\to+\infty} a\right)^{\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\right)} = a^0 = 1.$$

Il limite preserva l'ordinamento. Infatti vale la seguente proposizione.

Proposizione

Se le successioni $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ convergono rispettivamente ad a, b e c, allora
$$a_n \geqslant 0 \implies a \geqslant 0,$$
$$a_n \leqslant b_n \implies a \leqslant b,$$
$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \implies a \leqslant b \leqslant c.$$
La prima è detta **proprietà della permanenza del segno** e la seconda è la **proprietà del confronto**.

Osservazione

Si noti che le disuguaglianze non possono essere "strette". Infatti, ad esempio, si ha che $a_n = 1/n > 0$ converge ad $a = 0$ e quindi
$$a_n > 0 \qquad \not\Rightarrow \qquad a > 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà della permanenza del segno, le altre sono lasciate come esercizio per casa. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant a_n < a + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad 0 < a + \varepsilon.$$
Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha che $a \geqslant 0$. □

Consideriamo ora successioni divergenti.

Proposizione

Se la successione $\{a_n\}_n$ converge ad a e le successioni $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ divergono a $+\infty$, allora
$$\lim_{n\to+\infty} \big(a_n + b_n\big) = a + (+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \big(a_n - b_n\big) = a - (+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \big(b_n + c_n\big) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \big(-b_n - c_n\big) = -(+\infty) - (+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \big(a_n \cdot b_n\big) = a \cdot (+\infty) = \pm\infty \qquad \text{se } \pm a > 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \big(b_n \cdot c_n\big) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = \tfrac{a}{+\infty} = 0 \quad \text{se } b_n \neq 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = \begin{cases} +\infty \text{ se } a > 1, \\ 0 \quad \text{se } |a| < 1, \\ \nexists \quad \text{se } a \leqslant -1, \end{cases} \quad \text{se } (a_n)^{b_n} \text{ è ben definito.}$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'ultima uguaglianza, le altre sono lasciate come esercizio per casa. Sia $\varepsilon > 0$ e poniamo $M = 1/\varepsilon$. Per ipotesi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha
$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |b_n| > M = \tfrac{1}{\varepsilon}.$$
Pertanto per la disuguaglianza triangolare si ha
$$\left|\tfrac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \tfrac{|a_n - a| + |a|}{|b_n|} < \tfrac{\varepsilon + |a|}{1/\varepsilon} = (|a| + \varepsilon)\,\varepsilon.$$
Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. □

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$$
basta osservare che
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) + \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} + 1$$
e che
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0 \\ &\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0.$$

Si noti che nella precedente proposizione mancano i casi*
$$(\pm\infty) + (\mp\infty),\ \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \tfrac{\pm\infty}{\mp\infty},\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \tfrac{0}{0},\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 0^0.$$
Il motivo è che questi casi corrispondono a delle **forme indeterminate dei limiti**. Nei seguenti esempi faremo vedere come in certi casi sia possibile "sciogliere" una forma indeterminata.

Per la proposizione 6.1 e per quanto già visto per i limiti di funzioni, non è difficile risolvere il seguente esercizio: basta sostituire la x con la n nei calcoli.

*Ad esempio, se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, allora il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n)$ ci dà la forma indeterminata $[(+\infty) + (-\infty)]$. Analogamente, se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, allora il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n}$ ci dà la forma indeterminata $[1^{+\infty}]$.

Esercizio

Studiare i limiti per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni.

- $\frac{n^{5/2}+n^{3/2}-n^{1/2}+\pi}{n^2+n+e}$
- $\frac{n^{5/2}+n^{3/2}-n^{1/2}+\pi}{n^{5/2}+n^2+n+e}$
- $\frac{n^{5/2}+n^{3/2}-n^{1/2}+\pi}{n^3+n+e}$
- $\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^3+n^2}$
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
- $\sqrt{n^2+n+1} - n$
- $\sqrt{2n^2-n+10} - n$
- $n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1\right)$
- $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$
- $\sqrt[3]{n^3+n+1} - n$
- $\frac{n-n^2}{1+n}$
- $\frac{\sqrt[5]{n^2(2n+1)^3}\ \sqrt[3]{(n+3)(2n+e)^2}}{\left(\sqrt[5]{n^2(2n+1)^3} + \sqrt[3]{(n+3)(2n+e)^2}\right)^2}$
- $\frac{n+2\sqrt{n}}{2n+3}$
- $\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}$
- $\sqrt{n^2+n+1} - n$
- $\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)n^2$
- $\sqrt{2n^2-n+10} - n$
- $\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n}$
- $\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^3+n^2+1}$
- $\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-1}$
- $\frac{(n+1)^5-(n-1)^5}{n^4}$
- $n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
- $n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right)$
- $\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-1}$
- $\sqrt{n^2+4n+6} - n$
- $n \cdot \frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+6}+\sqrt{n}}$

Mostriamo ora altri modi per sciogliere forme indeterminate.

Proposizione

Se $a > 1$, allora vale la **"scala" di crescita**
$$\ln(n) \ll n \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$
Questo significa che, ad esempio, risulta
$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{n^n}{n!} = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \tfrac{n!}{n^n} = 0.$$
Tale ordinamento di infiniti vale anche nel caso in cui ciascun elemento della catena sia elevato alla stessa potenza positiva (ad esempio $\ln(n)^3$ è un infinito di ordine inferiore a n^3). Inoltre, se si esclude dall'ordinamento $n!$, l'ordinamento degli infiniti continua a valere anche se ogni elemento della catena viene elevato ad una potenza positiva differente (ad esempio n^{150} è un infinito di ordine inferiore a $e^{n/100}$). Nel caso del fattoriale, questa proprietà non è più vera.

Osservazione

Il precedente ordinamento di infiniti continua a valere se si sostituisce alla successione $\{n\}_n$ una qualunque successione positivamente divergente $\{a_n\}_n$; ad esempio, $\ln(n!)$ è un infinito di ordine inferiore a $e^{n!}$.

Dimostrazione.

- Per dimostrare che per ogni $a > 1$ risulta
$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{a^n}{n} = +\infty$$
basta osservare che $b = a - 1 > 0$ e per la formula del binomio di Newton con $n \geqslant 3$ si ha
$$a^n = (1+b)^n = 1 + \binom{n}{1}b + \binom{n}{2}b^2 + \overbrace{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}b^k}^{>0} > 1 + nb + \tfrac{n(n-1)}{2}b^2$$
$$\Longrightarrow \tfrac{a^n}{n} > \tfrac{1}{n} + b + \tfrac{n-1}{2}b^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$
dove, ricordiamo, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.
- Dimostriamo che per ogni $a > 1$ risulta
$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{a^n}{n!} = 0.$$

Se $n > k+1$ allora
$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \cdot \overbrace{\frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k+2} \cdots \frac{a}{n}}^{n-k \text{ termini}} < \frac{a^k}{k!} \cdot \left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k}.$$
Se $k \geqslant [a]$ allora $\frac{a}{k+1} < 1$ e quindi si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a^k}{k!} \cdot \left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k} = 0$$
e per concludere basta utilizzare la proprietà del confronto. □

Per quanto già visto per i limiti di funzioni, non è difficile risolvere il seguente esercizio visto che le successioni proposte sono della forma $x_n = f(n)$.

Esercizio

Studiare i limiti per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni.

- $\frac{3^n+2n^3+\ln(n^4)+1}{3^{n-1}+3}$
- $\frac{n^2+2^n}{n^3+3^n}$
- $\frac{n+2^n}{n^2+3^n}$
- $\sqrt[n]{2^n+n^2+1}$
- $\frac{n+2\sqrt{n}}{2n+3}$

Esercizio

Studiare i limiti per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni.

1) $\frac{2^n \cdot n!}{(3n)!}$ 2) $\frac{n \cdot 2^n}{n+2^n}$ 3) $\ln(n!) - n \cdot \ln(n)$

4) $\left(3 \cdot \ln(2n) - n \cdot \ln(3)\right)^{2/3}$ 5) $\frac{n^n - n!}{e^n - n^2}$ 6) $\sqrt[n]{4^n+n^3+3}$

1) 0 2) $+\infty$ 3) $-\infty$ 4) $+\infty$ 5) $+\infty$ 6) 4

Proposizione

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$,
- $\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0, \\ 1 & \text{se } a = 0, \\ 0 & \text{se } a < 0, \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 1 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{se } |a| < 1, \\ \nexists & \text{se } a \leqslant -1, \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{se } a,b > 0 \text{ allora} \\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}, \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \begin{cases} e^a & \text{se } a \neq 0, \\ 1 & \text{se } a = 0, \end{cases}$

dove $e \approx 2{,}71828$ è il **numero di Eulero** o di **Nepero**.

Dimostrazione. Quasi tutti i limiti seguono da quanto già visto per limiti analoghi per le funzioni. Consideriamo quindi solo i restanti limiti.

- Dimostriamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$. Sia $N \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande. Allora per ogni $n > N$ abbiamo che
$$n! = (N-1)! \cdot N \cdot (N+1) \cdot \ldots \cdot n > (N-1)! N^{n-N+1}$$
$$\Longrightarrow \sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{(N-1)!} \cdot \sqrt[n]{N^{1-N}} \cdot N.$$
Visto che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$, per n sufficientemente grande abbiamo
$$\sqrt[n]{(N-1)!} > 1/2 \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{N^{1-N}} > 1/2$$
e quindi
$$\sqrt[n]{n!} > N/4.$$
Dunque, per l'arbitrarietà di N la dimostrazione è conclusa.
- Sia $a_n = a^n$.
  - Se $a = -1$ allora otteniamo, a meno di moltiplicare per -1, la successione a segnali alterni che è irregolare.
  - Se $a \in (-1, 0)$, allora $|a^{-1}| > 1$ e per quanto appena dimostrato $|a^{-1}|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$; dunque $|a_n| = 1/|a^{-1}|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e quindi $a_n = 1/(a^{-1})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  - Infine, se $a < -1$, allora $a_n = (-1)^n \cdot |a|^n$ dove, per quanto abbiamo già visto, $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare e $|a|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ in quanto $|a| > 1$. Dunque anche $\{a_n\}_n$ è irregolare. □

Esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = \left(e^{-1}\right)^{-1} = e$$

Esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-2n} = \left(\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-2} = \left(e^{-1}\right)^{-2} = e^2$$

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2-n}{n-1}\right)^{n^2} = 0$$
basta osservare che per l'identità $(-1)^n = (-1)^{n^2}$, si ha
$$\left(\frac{2-n}{n-1}\right)^{n^2} = (-1)^n \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n^2} = (-1)^n \left(\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{n^2/(n-1)}$$
ed applicare la proposizione 6.2, in quanto $a_n = (-1)^n$ è una successione limitata e $b_n = \left(\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{n^2/(n-1)}$ converge a zero in quanto
$$\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} \in (0,1), \qquad \frac{n^2}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2-n}{n-1}\right)^n$$
non esiste. Osserviamo che
$$a_n = \left(\frac{2-n}{n-1}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^n = (-1)^n \left(\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{n/(n-1)}$$
e che inoltre
$$\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$
Per questo motivo consideriamo le due sottosuccessioni $\{a_{2n}\}_n$ e $\{a_{2n+1}\}_n$, perché allora si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} 1 \cdot \left(\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right)^{2n/(2n-1)} = \frac{1}{e},$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} (-1) \cdot \left(\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{(2n+1)/(2n)} = -\frac{1}{e},$$
e da ciò segue che il limite non esiste per il corollario 6.3.

Esercizio

Calcolare i limiti per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni.

1) $n \cdot \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)$ 2) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

3) $\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n/2}$ 4) $\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^n$

5) $\sqrt[n]{\frac{1+n}{1+2^n}}$ 6) $\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+n!}}$

7) $(n^2+n)\ln\left(\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)\right)$ 8) $\left(\frac{n+1}{n+\sqrt{n}}\right)^n$

9) $\frac{n+1}{(n+2)^3} \cdot \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{1-\cos(1/n)}$ 10) $\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n}\right)^n$

11) $n \cdot \ln\left(\frac{2n+3}{2n+6}\right)$ 12) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

13) $\frac{2^n+4^n}{n+5^n}$ 14) $\sqrt[n]{\frac{2^n+n}{2^n}}$

15) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ 16) $\ln(1+e^n) - n$

17) $\left(\frac{n^2-1}{n^2+3n}\right)^n$ 18) $\left(\frac{n^2-3n}{n^2+5}\right)^{2n}$

19) $n^3\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

1) 1	5) $1/2$	9) $\nexists$	13) 0	17) e^{-3}
2) $1/e$	6) 0	10) $+\infty$	14) 1	18) e^{-6}
3) $\sqrt{e}/e^2$	7) $-9/2$	11) $-3/2$	15) 1	19) $-1/24$
4) 1	8) 0	12) 1	16) 0	

30 Asintoticità

Definizione

Due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, i cui termini sono definitivamente non nulli, sono dette **asintotiche** (o **asintoticamente equivalenti**) fra loro, se
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$
ed in tal caso si scrive $\boldsymbol{a_n \sim b_n}$.

Si noti che per definizione $a_n \sim b_n$ se e solo se $b_n \sim a_n$. Inoltre, per definizione, nessuna successione può essere asintotica a 0.

Osservazione

Se $a_n \sim b_n$ e $a_n \to L$, allora anche $b_n \to L$. Il viceversa non vale in quanto due successioni che hanno lo stesso limite non sono necessariamente asintotiche fra loro (per esempio $\frac{1}{n}\to 0$ e $\frac{1}{n^2}\to 0$, ma $\frac{1}{n}\not\sim\frac{1}{n^2}$). Se però $a_n, b_n \to L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, cioè entrambe le successioni hanno lo stesso limite finito e non nullo, allora $a_n \sim b_n$. Inoltre, due successioni possono essere fra loro asintotiche, anche se non ammettono limite (ad esempio $(-1)^n\frac{n}{n+e}\sim(-1)^n\frac{n}{n+\pi}$).

La nozione di asintotico è spesso utile nel calcolo dei limiti, poiché permette di sostituire a successioni complicate delle successioni più semplici. Tale nozione va però usata con cautela. Di seguito segnaliamo alcune situazioni significative.

Osservazione

Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni regolari, fra loro asintotiche, e $\{c_n\}$ sia un'altra successione regolare. Allora vale quanto segue.

- $a_n\cdot c_n \sim b_n\cdot c_n,\quad a_n/c_n\sim b_n/c_n,\quad c_n/a_n\sim c_n/b_n.$
- $a_n\pm c_n \sim b_n\pm c_n$ solo se tra b_n e c_n "non avvengono delle semplificazioni". Ad esempio
$$\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\sim\tfrac{1}{n}\quad\text{e}\quad\arctan\left(\tfrac{2}{n}-\tfrac{1}{n^4}\right)\sim\tfrac{2}{n}-\tfrac{1}{n^4}$$
da cui
$$\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)-\arctan\left(\tfrac{2}{n}-\tfrac{1}{n^4}\right)\sim\tfrac{1}{n}-\left(\tfrac{2}{n}-\tfrac{1}{n^4}\right)=-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^4}\sim-\tfrac{1}{n}$$
mentre $\{\sin(\frac{1}{n})-\arctan(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4})\}$ non è asintotica a $\{\frac{1}{n^4}\}$ anche se $\arctan(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4})\sim\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}$.
- Se $c_n\to L\in\mathbb{R}$ (cioè $\{c_n\}$ non diverge), si ha che $(a_n)^{c_n}\sim(b_n)^{c_n}$. Nel caso in cui invece $c_n\to+\infty$, in generale non si può affermare che $\{(a_n)^{c_n}\}$ sia asintotica a $\{(b_n)^{c_n}\}$: ad esempio le due successioni $(1+\frac{1}{n})^n$ e $(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$ sono fra loro asintotiche, poiché entrambe convergono ad e, ma $(1+\frac{1}{n})^{n^2}=\left((1+\frac{1}{n})^n\right)^n$ e $(1+\frac{1}{n^2})^{n^3}=\left((1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\right)^n$ non sono fra loro asintotiche.
- Le successioni della forma $\{(c_n)^{a_n}\}$ e $\{(c_n)^{b_n}\}$ con $c_n>0$, possono essere riscritte nella forma $\{e^{a_n\ln(c_n)}\}$ e $\{e^{b_n\ln(c_n)}\}$, che per essere fra loro asintotiche, devono necessariamente avere o che $c_n\to1$ oppure che $a_n-b_n\to0$, proprietà che non è implicata dal fatto che $a_n\sim b_n$ (ad esempio $n^2\sim n^2+n$, ma $n^2-(n^2+n)=-n\to-\infty\neq0$); inoltre, queste condizioni non sono sufficienti (ad esempio, $3+1/\ln(n)\sim3+1/n$ e la loro differenza è infinitesima, ma $\{n^{3+1/\ln(n)}\}$ e $\{n^{3+1/n}\}$ non sono fra loro asintotiche).
- Se $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ non convergono ad 1, $\ln(a_n)\sim\ln(b_n)$. Ciò non vale in generale se $a_n,b_n\to1$ (ad esempio, $1+1/n\sim1+1/n^2$, ma $\ln(1+1/n)\sim1/n$ e $\ln(1+1/n^2)\sim1/n^2$, quindi non sono asintotiche fra loro).

Proposizione

Per $n\to+\infty$ si ha la **formula di Stirling**
$$n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n},\qquad \ln(n!)\sim n\ln(n)-n.$$

Esempio

Calcoliamo il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ delle seguenti successioni.
$$(\heartsuit)\ a_n=\sqrt[n]{\frac{5^n+n^3}{n!}}\qquad(\diamondsuit)\ a_n=\frac{n!}{(n^n)^{1/2}}\qquad(\clubsuit)\ a_n=\frac{(n!)^2e^{2n}}{n^{2n+1}}$$
$(\heartsuit)$ Per gli ordini di infinito e la formula di Stirling si ha
$$\sqrt[n]{\frac{5^n+n^3}{n!}}=\sqrt[n]{\frac{5^n\left(1+\frac{n^3}{5^n}\right)}{n!}}\sim\sqrt[n]{\frac{5^n}{n!}}\sim\frac{5}{\sqrt[n]{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}}=\frac{5e}{n\sqrt[2n]{2\pi n}}\to0$$
perché $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5e}{n}=0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi n}}=1$.

$(\diamondsuit)$ Utilizzando la formula di Stirling si ha
$$\frac{n!}{(n^n)^{1/2}}\sim\frac{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^{n/2}}=\frac{n^{n/2}\sqrt{2\pi n}}{e^n}=\frac{(n^n)^{1/2}}{e^n}\sqrt{2\pi n}\to+\infty.$$
Dunque $n!$ è di ordine superiore a $(n^n)^{1/2}$.

$(\clubsuit)$ Il limite è 2π perché per la formula di Stirling si ha
$$\frac{(n!)^2e^{2n}}{n^{2n+1}}\sim\frac{(n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n})^2e^{2n}}{n^{2n+1}}=\frac{n^{2n}e^{-2n}2\pi ne^{2n}}{n^{2n+1}}=2\pi\to2\pi.$$

31 Test di convergenza

Per verificare la condizione data nella definizione di convergenza
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \text{t.c.}\ |a_n-L|<\varepsilon\ \forall n>N$$
è necessario conoscere a priori il valore del limite L. Nel caso in cui non fosse possibile pronosticare il valore di L ma volessimo verificare la convergenza di una successione, possiamo utilizzare i seguenti test.

Test per successioni monotone crescenti

Tutte le **successioni monotone crescenti** $\{a_n\}_n$, cioè tali che $a_n\leqslant a_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$, sono regolari e
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\sup\{a_n:n\in\mathbb{N}\}.$$

Osservazione

In particolare, posto $L=\sup\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$, risulta che:
- se $\{a_n\}_n$ è **limitata superiormente**, cioè
$$\exists M\in\mathbb{R}\ \text{t.c.}\ a_n\leqslant M\ \forall n\in\mathbb{N},$$
allora $L\in(-\infty,M]$, $\{a_n\}_n$ è convergente ed il suo limite è L;
- se $\{a_n\}_n$ non è limitata superiormente, cioè
$$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}\ \text{t.c.}\ a_n>M,$$
allora $L=+\infty$ ed $\{a_n\}_n$ diverge a $L=+\infty$.

Dimostrazione. • Dimostriamo che se a_n è limitata superiormente, ovvero $L=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n$ esiste finito, allora a_n converge ad $L=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n$, ovvero che
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \text{t.c.}\ L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon\ \forall n>N.\qquad(\clubsuit)$$
Sia $\varepsilon>0$. Per le proprietà del sup risulta
$$a_n\leqslant L<L+\varepsilon\qquad\forall n\in\mathbb{N},$$
ed inoltre esiste $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tale che
$$L-\varepsilon<a_N.$$
Essendo a_n monotona crescente, dalla precedente stima segue che
$$L-\varepsilon<a_n\qquad\forall n\geqslant N.$$
Questo conclude la dimostrazione del primo punto.

• Dimostriamo che se $\{a_n\}_n$ non è limitata superiormente, cioè
$$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}\ \text{t.c.}\ a_n>M,\qquad(\diamondsuit)$$

allora $\{a_n\}_n$ diverge $+\infty$, ovvero
$$\forall M > 0\ \exists N = N(M) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n > M\ \forall n > N.$$
Sia $M > 0$. Per ($\diamondsuit$) abbiamo che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_N > M$. Visto che $\{a_n\}_n$ è monotona crescente, segue che $a_n > M\ \forall n \geqslant N$ e questo conclude la dimostrazione della seconda asserzione. $\square$

Test per successioni monotone decrescenti

Tutte le **successioni monotone decrescenti** $\{a_n\}_n$, cioè tali che $a_n \geqslant a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$, sono regolari e
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Osservazione

In particolare, posto $L = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, risulta che:

- se $\{a_n\}_n$ è **limitata inferiormente**, cioè
$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a_n \geqslant M\ \forall n \in \mathbb{N},$$
allora $L \in [M, -\infty)$, $\{a_n\}_n$ è convergente ed il suo limite è L;
- se $\{a_n\}_n$ non è limitata inferiormente, cioè
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n < M,$$
allora $L = -\infty$ ed $\{a_n\}_n$ diverge a $-\infty$.

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata come esercizio per casa. $\square$

Esercizio

Calcoliamo $\sup(A)$ ed $\inf(A)$ dove
$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}.$$
Osserviamo che
$$a_n = \frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}} = \frac{2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}$$
è strettamente decrescente in quanto
$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{2}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}} < \frac{2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}$$
$$\iff \sqrt{n+5} + \sqrt{n+3} > \sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}$$
$$\Longleftarrow \sqrt{n+5} > \sqrt{n+4} \text{ e } \sqrt{n+3} > \sqrt{n+2}.$$
Pertanto A non ha un minimo ed inoltre
$$\inf(A) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}} = 0,$$
$$\sup(A) = \max(A) = a_1 = \sqrt{1+4} - \sqrt{1+2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Esempio

Utilizziamo i test per le successioni monotone per dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$
esiste finito. Consideriamo due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ con
$$a_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
Dimostriamo che $\{a_n\}_n$ è monotona crescente mentre $\{b_n\}_n$ è monotona decrescente:

- per la monotonia di $\{a_n\}_n$ basta osservare che
$$a_{n-1} < a_n \iff \left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$
$$\iff \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n \iff \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^{-1} < \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^n$$
$$\iff \tfrac{n-1}{n} < \left(\tfrac{n^2-1}{n^2}\right)^n \iff 1 - \tfrac{1}{n} < \left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right)^n$$
e che l'ultima disuguaglianza è vera per la disuguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n > 1+nx$ con $x = -1/n^2$;
- per la monotonia di $\{b_n\}_n$ basta osservare che
$$b_n < b_{n-1} \Leftrightarrow \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^n$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{n+1}{n} < \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^n \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(\tfrac{n^2}{n^2-1}\right)^n \Leftrightarrow 1 + \tfrac{1}{n} < \left(1+\tfrac{1}{n^2-1}\right)^n$$
e che l'ultima disuguaglianza è vera perché per la disuguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n > 1+nx$ con $x = \frac{1}{n^2-1}$ e

perché
$$1 + \tfrac{n}{n^2-1} > 1 + \tfrac{1}{n}.$$
Dimostriamo che $\{a_n\}_n$ è limitata superiormente e $\{b_n\}_n$ è limitata inferiormente:

- visto che
$$b_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \cdot \underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)}_{>1} > a_n \Longrightarrow a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
per la monotonia di $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ abbiamo che
$$a_n < b_1 = 4, \qquad b_n > a_1 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per i test per le successioni monotone abbiamo che $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ convergono. Visto inoltre che
$$b_n = a_n \cdot \underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)}_{\to 1}$$
le due successioni hanno lo stesso limite. Tale limite è il **numero di Eulero**
$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
Per quanto già dimostrato
$$a_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Tale stima ci permette di approssimare il valore di $e \approx 2.718$, come mostrato dalla seguente tabella.

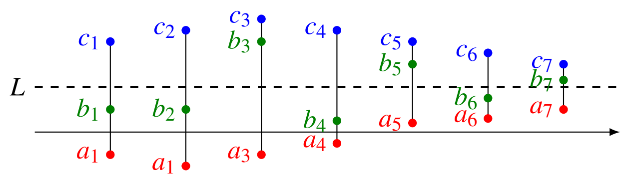
n	a_n	b_n
1	2	4
2	$(3/2)^2 = 2.25$	$(3/2)^3 = 3.375$
3	$(4/3)^3 \approx 2.370$	$(4/3)^4 \approx 3.160$
4	$(5/4)^4 \approx 2.441$	$(5/4)^5 \approx 3.052$
5	$(6/5)^5 \approx 2.488$	$(6/5)^6 \approx 2.986$

Test dei carabinieri o del sandwich

Date le successioni $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$, se valgono le seguenti condizioni

- $\{a_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ convergono entrambe ad L,
- $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ per ogni n,

allora anche $\{b_n\}_n$ converge ad L.



Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste $N > 0$ tale che per ogni $n > N$ si ha
$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \qquad \text{ed} \qquad L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$
Di conseguenza, per ogni $n > N$ si ha anche che
$$L - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < L + \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |b_n - L| < \varepsilon.$$
Dunque anche $\{b_n\}_n$ converge ad L. $\square$

Esempio

Dimostriamo di nuovo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Siano $b_n = \sqrt{\sqrt[n]{n}}$ e $c_n = b_n - 1$. Visto che $n \geqslant 1$ si ha $b_n \geqslant 1$ e quindi $c_n \geqslant 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli si ha
$$\sqrt{n} = (b_n)^n = (1+c_n)^n \geqslant 1 + n\,c_n \iff 0 \leqslant c_n \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
e quindi per il test del confronto si ha
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} b_n = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} b_n^2 = 1.$$

Esempio

Per verificare che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n}{n+1}\right)^{1/n}=1$, basta osservare che
$$1^{1/n}\leqslant\left(1+\frac{n}{n+1}\right)^{1/n}=\left(2-\frac{1}{n+1}\right)^{1/n}\leqslant 2^{1/n}$$
ed utilizzare il test del confronto.

Il seguente esempio generalizza quanto ottenuto in quello precedente.

Esempio

Se $a_n>0$ e converge ad $a>0$, allora
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$$
Infatti per ipotesi esiste $N=N(a/2)$ tale che
$$|a_n-a|<\frac{a}{2}\quad\forall n>N$$
Di conseguenza per ogni $n>N$ si ha
$$\frac{a}{2}<a_n<\frac{3}{2}a\implies\sqrt[n]{\frac{a}{2}}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3}{2}a}.$$
Per completare la dimostrazione basta ora osservare che
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a}{2}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{2}a}=1$$
ed utilizzare il test del confronto.

Test del rapporto

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di termini positivi, $a_n>0$, tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è regolare, cioè il $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ esiste finito o infinito.

- Se $L<1$ allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.
- Se $L>1$ allora $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

Osservazione

Se $L=1$ allora il test del rapporto non ci dice nulla.

Dimostrazione. Assumiamo $L\in[0,1)$; i casi $L>1$ ed $L=+\infty$ sono lasciati come esercizio per casa. Per definizione di L,
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\text{ t.c. } L-\varepsilon<a_{n+1}/a_n<L+\varepsilon\ \forall n>N.$$
Se scegliamo $\varepsilon=(1-L)/2\in(0,1)$, allora
$$n>N\implies a_{n+1}/a_n<L+\varepsilon=1-\varepsilon\implies a_{n+1}<(1-\varepsilon)a_n.$$
Da questo deriva che $\{a_n\}_n$ è strettamente decrescente. Ragionando iterativamente, per ogni $n>N$ si ha
$$\begin{aligned}a_{n+1}&<(1-\varepsilon)a_n<(1-\varepsilon)^2a_{n-1}<(1-\varepsilon)^3a_{n-2}\\&<\ldots<(1-\varepsilon)^{1+n-N}a_N\end{aligned}$$
e quindi
$$0<a_{n+1}<(1-\varepsilon)^{1+n-N}a_N.$$
Per concludere è ora sufficiente applicare il test del confronto:
$$1-\varepsilon=\frac{1+L}{2}\in(0,1)$$
$$\implies\lim_{n\to+\infty}(1-\varepsilon)^{1+n-N}a_N=\frac{a_N}{(1-\varepsilon)^{N-1}}\lim_{n\to+\infty}(1-\varepsilon)^n=0.\qquad\square$$

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^nn!}{(3n)!}=0$$
basta osservare che
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{2^nn!}=\frac{2\cdot2^n\cdot(n+1)\cdot n!}{(3n+3)\cdot(3n+2)\cdot(3n+1)\cdot(3n)!}\cdot\frac{(3n)!}{2^nn!}\\&=\frac{2(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\end{aligned}$$
ed applicare il test del rapporto.

Esempio

Per verificare che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=0$$
basta osservare che
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{\big((n+1)!\big)^2}{\big(2(n+1)\big)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\\&=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac14<1,\end{aligned}$$
ed applicare il test del rapporto.

Esempio

Utilizziamo il test del rapporto per dimostrare parte della scala di crescita.

- Se $a_n=n^b/a^n$ con $a>1$ e $b>0$, allora
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^b}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{n^b}=\frac1a\left(1+\frac1n\right)^b\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac1a<1$$
e quindi per il test del rapporto abbiamo che $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
- Se $a_n=a^n/n!$ con $a>1$, allora
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1$$
e quindi per il test del rapporto abbiamo che $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
- Se $a_n=n!/n^n$, allora
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{1}{\left(1+\frac1n\right)^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac1e<1$$
e quindi per il test del rapporto abbiamo che $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Per completezza osserviamo che il test del rapporto non è utile a dimostrare che $a_n=\ln(n)/n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ in quanto
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\ln(n+1)}{n+1}\cdot\frac{n}{\ln(n)}=\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\cdot\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1\cdot1=1.$$
Se però applichiamo la regola di de l'Hôpital otteniamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$$
e quindi $a_n=\ln(n)/n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Un altro modo per calcolare il limite è procedere come segue
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\begin{pmatrix}x=e^y\\y\to+\infty\end{pmatrix}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(e^y)}{e^y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=0.$$

Test della radice

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di termini positivi, $a_n>0$, tale che $\sqrt[n]{a_n}$ è regolare, cioè il $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ esiste finito o infinito.

- Se $L<1$ allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.
- Se $L>1$ allora $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

Osservazione

Se $L=1$ allora il test della radice non ci dice nulla.

Dimostrazione. Basta applicare il test del rapporto e la seguente proposizione. $\square$

Proposizione 6.4

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di termini positivi, $a_n>0$. Se uno dei seguenti limiti esiste finito o infinito
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n},\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$
allora essi coincidono, ovvero
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L>0$; i casi $L=+\infty$ ed $L=0$ sono lasciati come esercizio per casa. Fissato $\varepsilon\in(0,L)$, esiste $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tale che
$$L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\varepsilon\qquad\forall n\geqslant N.\qquad(\heartsuit)$$
Ragionando iterativamente, per ogni $n\geqslant N$ si ha
$$a_{n+1}<(L+\varepsilon)a_n<(L+\varepsilon)^2a_{n-1}<(L+\varepsilon)^3a_{n-2}$$

$$\begin{aligned}&< \dots < (L+\varepsilon)^{1+n-N} a_N,\\ a_{n+1} > (L-\varepsilon)\, a_n > (L-\varepsilon)^2 a_{n-1} > (L-\varepsilon)^3 a_{n-2}\\ &> \dots > (L-\varepsilon)^{1+n-N} a_N,\end{aligned}$$

e quindi

$$(L-\varepsilon)^{n-N} a_N < a_n < (L+\varepsilon)^{n-N} a_N \qquad \forall n \geqslant N+1. \qquad (\diamondsuit)$$

Estraendo la radice di ($\diamondsuit$) otteniamo

$$(L-\varepsilon)\sqrt[n]{\tfrac{a_N}{(L-\varepsilon)^N}} < \sqrt[n]{a_n} < (L+\varepsilon)\sqrt[n]{\tfrac{a_N}{(L+\varepsilon)^N}}. \qquad (\clubsuit)$$

Visto che

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\tfrac{a_N}{(L-\varepsilon)^N}} = 1 = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\tfrac{a_N}{(L+\varepsilon)^N}},$$

a meno di prendere una N più grande, non è limitativo assumere che

$$\sqrt[n]{\tfrac{a_N}{(L-\varepsilon)^N}} > 1-\varepsilon \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{\tfrac{a_N}{(L+\varepsilon)^N}} < 1+\varepsilon \qquad \forall n > N.$$

Per concludere basta ora osservare che per tali stime e la ($\clubsuit$), per ogni $n > N$ si ha

$$\begin{aligned}&(L-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (L+\varepsilon)(1+\varepsilon)\\ \iff &L-\varepsilon(1+L-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon(1+L+\varepsilon).\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo la tesi. I restanti casi sono lasciati come esercizio per casa. □

Esempio

Utilizzando il test della radice è immediato dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases}+\infty & \text{se } a > 1,\\ 0 & \text{se } a \in (0,1).\end{cases}$$

Esempio

Per verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+4^n}{n+5^n} = 0$$

basta osservare che

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{2^n+4^n}}{\sqrt[n]{n+5^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\max\{2,4\}}{5} = \frac{4}{5} < 1,$$

ed applicare il test della radice.

Test di Cauchy

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n,m > N. \qquad (\heartsuit)$$

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N = N(\varepsilon/2)$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon/2\ \forall n > N.$$

Per ottenere ($\heartsuit$) basta ora utilizzare la disuguaglianza triangolare come segue:

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - L| + |L - a_m| < \varepsilon\ \forall n,m > N.$$

"$\Longleftarrow$" Assumiamo ($\heartsuit$). $\{a_n\}_n$ non diverge in quanto per ($\heartsuit$) con $m = N+1$ e per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < |a_{N+1}| + \varepsilon\ \forall n > N.$$

Questa stima implica anche che $\{a_n\}_n$ è limitata e quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge, diciamo ad $L \in \mathbb{R}$.

Per completare la dimostrazione basta dimostrare che anche la successione originale $\{a_n\}_n$ converge ad L. Sia $\varepsilon > 0$. Visto che a_{n_k} converge ad L, abbiamo che

$$\exists K = K(\varepsilon/2) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |a_{n_k} - L| < \varepsilon/2\ \forall k > K.$$

Inoltre per ($\heartsuit$) abbiamo che

$$\exists N = N(\varepsilon/2) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |a_n - a_{n_k}| < \varepsilon/2\ \forall n,k > N.$$

Pertanto per la disuguaglianza triangolare per ogni $n > \max\{K,N\}$ risulta

$$|a_n - L| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε abbiamo che anche $\{a_n\}_n$ converge ad L e questo conclude la dimostrazione. □

Esempio

Studiamo la successione $\{a_n\}_n$ definita per ricorrenza come

$$a_1 = \tfrac{3}{2}, \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{2}{a_n}\right).$$

Dimostriamo per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

1) $a_1 > 0$ per definizione;

2) se $a_n > 0$ allora $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) > 0$.

Dunque se $\{a_n\}_n$ converge ad L, allora $L \geqslant 0$ e

$$\begin{aligned}&L = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{2}{a_n}\right) = \tfrac{1}{2}\left(L + \tfrac{2}{L}\right) \Longrightarrow\\ &L = \tfrac{1}{2}\left(L + \tfrac{2}{L}\right) \iff 2L^2 = L^2 + 2 \iff L^2 = 2 \iff L = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Pertanto l'unico candidato ad essere limite di $\{a_n\}_n$ è $L = \sqrt{2}$. Resta ora da dimostrare che in effetti $\{a_n\}_n$ converge. A scopo illustrativo, lo dimostriamo applicando sia il test delle successioni monotone che quello del confronto.

- Per dimostrare che $\{a_n\}_n$ converge utilizzando il test delle successioni monotone basta dimostrare che $\{a_n\}_n$ è limitata inferiormente da $\sqrt{2}$ e che è monotona decrescente. Dimostriamo per induzione che $a_n > \sqrt{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

1) $a_1 = 3/2 > \sqrt{2}$ per definizione;

2) se $a_n > \sqrt{2}$ allora

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{2}{a_n}\right) = \tfrac{a_n^2+2}{2a_n} - \sqrt{2} + \sqrt{2}\\ &= \tfrac{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2}{2a_n} + \sqrt{2} = \tfrac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n} + \sqrt{2} > \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Dalla stima appena dimostrata segue che $\{a_n\}_n$ è monotona decrescente visto che

$$a_{n+1} - a_n = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{2}{a_n}\right) - a_n = \tfrac{1}{a_n} - \tfrac{a_n}{2} = \tfrac{2-a_n^2}{2a_n} < 0.$$

Dunque abbiamo che $\{a_n\}_n$ è monotona decrescente e limitata inferiormente. Possiamo pertanto applicare il test delle successioni monotone ed asserire che $\{a_n\}_n$ converge ad $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. A questo punto non serve calcolare $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ per ottenere il valore del limite in quanto già sappiamo che $\sqrt{2}$ è l'unico limite possibile.

- In alternativa, per dimostrare che $\{a_n\}_n$ converge a $\sqrt{2}$ utilizzando il test del confronto basta dimostrare che

$$\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \tfrac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (\star)$$

Abbiamo già visto che $a_n > \sqrt{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo ora per induzione che $a_n < \sqrt{2} + \frac{1}{2^n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

1) $a_1 = \frac{3}{2} < \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ per definizione;

2) se $a_n < \sqrt{2} + \frac{1}{2^n}$ allora, visto che $a_n > \sqrt{2}$, si ha

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{a_n} < \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \tfrac{1}{2^n}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2^{n+1}} + \sqrt{2}.$$

Dunque ($\star$) è vera e quindi basta applicare il test del confronto per ottenere che $\{a_n\}_n$ converge a $\sqrt{2}$.

Esempio

Studiamo la successione $\{a_n\}_n$ definita per ricorrenza come

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Per induzione si dimostra che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque se $\{a_n\}_n$ converge ad L, allora $L \geqslant 0$ e

$$\begin{aligned}&L = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+L}\\ &\Longrightarrow L^2 = 2 + L \iff L^2 - L - 2 = (L+1)(L-2) = 0 \Leftrightarrow L = 2.\end{aligned}$$

Pertanto l'unico candidato ad essere limite di $\{a_n\}_n$ è $L = 2$. Resta ora da dimostrare che in effetti $\{a_n\}_n$ converge. A scopo illustrativo, lo dimostriamo applicando sia il test delle successioni monotone che quello del confronto.

• Per dimostrare che $\{a_n\}_n$ converge utilizzando il test delle successioni monotone basta dimostrare che $\{a_n\}_n$ è limitata superiormente da 2 e che è monotona crescente. Dimostriamo per induzione che $a_n < 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

1) $a_1 = 1 < 2$;
2) se $a_n < 2$, allora $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$.

$\{a_n\}_n$ è monotona crescente visto che

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > a_n \overset{a_n>0}{\iff} a_n^2 - a_n - 2 = (a_n+1)(a_n-2) < 0 \iff a_n \in (-1,2)$$

e che per quanto già dimostrato $a_n \in (0,2)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque abbiamo che $\{a_n\}_n$ è monotona crescente e limitata superiormente. Possiamo pertanto applicare il test delle successioni monotone ed asserire che $\{a_n\}_n$ converge a $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. A questo punto non serve calcolare $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ per ottenere il valore del limite in quanto già sappiamo che 2 è l'unico limite possibile.

• In alternativa, per dimostrare che $\{a_n\}_n$ converge a 2 utilizzando il test del confronto basta dimostrare che

$$2 - \tfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant a_n < 2. \qquad (\star)$$

Abbiamo già visto che $a_n < 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo ora per induzione che $a_n \geqslant 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1) $a_1 = 1 \geqslant 2 - \frac{1}{2^{1-1}} = 1$;
2) Se $a_n \geqslant 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, allora $a_{n+1} \geqslant 2 - \frac{1}{2^n}$ in quanto

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geqslant \sqrt{4 - \tfrac{1}{2^{n-1}}}$$

ed inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sqrt{4 - \tfrac{1}{2^{n-1}}} \geqslant 2 - \tfrac{1}{2^n} \iff 4 - \tfrac{2}{2^n} \geqslant 4 - \tfrac{4}{2^n} + \tfrac{1}{2^{2n}}$$
$$\iff \tfrac{2}{2^n} \geqslant \tfrac{1}{2^{2n}} \iff 1 \geqslant \tfrac{2^n}{2 \cdot 2^{2n}} = \tfrac{1}{2^{n+1}}.$$

Dunque $(\star)$ è vera e quindi basta applicare il test del confronto per ottenere che $\{a_n\}_n$ converge a 2.

Esercizio

Studiare i limiti per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni.

1) $\frac{n^2 \cdot 10^n}{n^2+n!}$ 2) $\frac{n^n}{10^n \cdot n!}$ 3) $\frac{(n!)^2}{2^n+n^n}$

Capitolo 7

Serie

32 Somme finite

La **somma finita** dei primi N termini della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indicata con

$$\sum_{n=1}^{N} a_n$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N.$$

Osservazione

Il ruolo di n nella notazione della somma finita $\sum_{n=1}^{N} a_n$ è fittizio e per questo è detto **indice muto**. Infatti n può essere sostituita da qualsiasi altra lettera diversa da N; ad esempio

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N = \sum_{m=1}^{N} a_m.$$

Esempio

Utilizzando la notazione appena introdotta si ha che

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2 = 385,$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{10} = \frac{7381}{2520},$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520}.$

Esercizio

Scrivere le seguenti somme finite in forma compatta e calcolarne il valore.

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{10\cdot 11}$$

$$S_2 = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{10}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{-2\cdot 1 - 1} + \frac{1}{2\cdot 2 - 1} + \frac{1}{-2\cdot 3 - 1} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 10 - 1}$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{10}{11} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{10} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(11) \quad S_3 = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(-1)^n 2n - 1} = 0$$

Esercizio

Scrivere esplicitamente i termini della seguente somma finita e calcolarne il valore.

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} = -\frac{227}{1200}$$

Esercizio

Scrivere i primi tre termini e l'ultimo delle seguenti somme finite.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{3^{n-1}(18-n)}{n!}$
- $\displaystyle\sum_{n=4}^{8} \frac{n!}{n^{n/2}}$

- $17, 24, \frac{45}{2}, \ldots, \frac{243}{5600}$
- $\frac{3}{2}, \frac{24}{5\sqrt{5}}, \frac{10}{3}, \ldots, \frac{315}{32}$

Il calcolo del valore di una somma finita non è in generale un'operazione veloce. In alcuni casi si possono però applicare delle formule esplicite che lo velocizzano.

Proposizione

- Per una **somma geometrica** si ha
$$\sum_{n=1}^{N} a^n = \begin{cases} \frac{a\cdot(1-a^N)}{1-a} & \text{se } a \neq 1, \\ N & \text{se } a = 1. \end{cases}$$
- Per una **somma aritmetica** si ha
$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N\cdot(N+1)}{2}.$$
- Per una **somma telescopica** si ha
$$\sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_1.$$

Osservazione

Se la somma parte da 0 invece che da 1, allora si ha

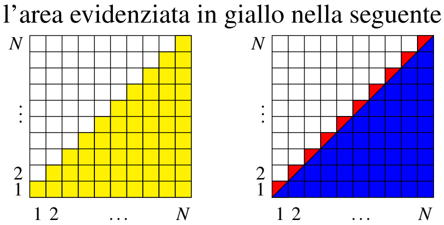
$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{N+1}}{1-a} & \text{se } a \neq 1, \\ N+1 & \text{se } a = 1, \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N\cdot(N+1)}{2}, \qquad \sum_{n=0}^{N} (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_0.$$

Dimostrazione.

- Studiamo il caso $a \neq 1$, visto che il caso $a = 1$ è ovvio. Poniamo
$$G = \sum_{n=1}^{N} a^n = a + a^2 + \ldots + a^{N-1} + a^N.$$
Se $a = 1$ allora $G = N$. Se $a \neq 1$, allora
$$\begin{aligned} G\cdot(1-a) &= G - G\cdot a \\ &= (a + a^2 + \ldots + a^{N-1} + a^N) \\ &\quad - (a^2 + a^3 + \ldots + a^{N-1} + a^N + a^{N+1}) \\ &= a - a^{N+1} = a\cdot(1 - a^N) \end{aligned}$$
$$\Longrightarrow G = \frac{a\cdot(1-a^N)}{1-a}.$$
- Poniamo
$$A = \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + \ldots + (N-1) + N.$$
Per la proprietà commutativa dell'addizione
$$\begin{aligned} A &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (N-2) + (N-1) + N, \\ A &= N + (N-1) + (N-2) + \ldots + 3 + 2 + 1, \end{aligned}$$
e sommando termine a termine si ottene
$$\begin{aligned} 2A &= (N+1) + (N+1) + (N+1) + \ldots + (N+1) \\ &= N\cdot(N+1) \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{N\cdot(N+1)}{2}. \end{aligned}$$

In alternativa, diamo di seguito una dimostrazione geometrica. Dividiamo un quadrato di lato N in quadratini di lato unitario e calcoliamo l'area evidenziata in giallo nella seguente figura.



Come primo passo calcoliamo la superficie evidenziata in blue, ottenendo $\frac{N^2}{2}$. A questa va aggiunta la superficie evidenziata in rosso, che è pari a $\frac{N}{2}$, in quanto ciascun quadratino ha area unitaria e lungo al diagonale ci sono N quadratini. Otteniamo così che l'area evidenziata in giallo è $\frac{N^2}{2}+\frac{N}{2}=\frac{N(N+1)}{2}$, che è pari anche alla somma dei primi N numeri naturali visto che la somma delle aree dei quadrati disposti sulla n-esima colonna è pari ad n.

Infine, ricordiamo che abbiamo già dimostrato questa formula utilizzando il principio di induzione.

- Per definizione si ha
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n) &= (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\dots\\ &\quad +(a_N-a_{N-1})+(a_{N+1}-a_N)\\ &= a_{N+1}-a_1.\end{aligned}$$ $\square$

Gli esempi che seguono mostrano come applicare:

- la formula per la somma geometrica ogni volta che a_{n+1}/a_n è una costante che non dipende da n;
- la formula per la somma aritmetica ogni volta che $a_{n+1}-a_n$ è una costante che non dipende da n.

Esempio

Per calcolare $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{162}+\frac{1}{486}$, basta osservare che $a_{n+1}/a_n=1/3$ in quanto
$$\frac{1}{3}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1/18}{1/6}=\frac{1/54}{1/18}=\frac{1/162}{1/54}=\frac{1/486}{1/162}$$
ed applicare la formula per le somme geometriche come segue:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{162}+\frac{1}{486}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1/3}{2/3}\cdot\frac{3^6-1}{3^6}=\frac{1}{4}\cdot\frac{728}{3^5}=\frac{182}{243}.$$

Esempio

Per calcolare $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}-\frac{1}{54}+\frac{1}{162}-\frac{1}{486}$ basta osservare che $a_{n+1}/a_n=-1/3$ in quanto
$$-\frac{1}{3}=\frac{-1/6}{1/2}=\frac{1/18}{-1/6}=\frac{-1/54}{1/18}=\frac{1/162}{-1/54}=\frac{-1/486}{1/162}$$
ed applicare la formula per le somme geometriche come segue:
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}-\frac{1}{54}+\frac{1}{162}-\frac{1}{486}=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-1/3}{4/3}\cdot\frac{3^6-1}{3^6}=\frac{1}{8}\cdot\frac{728}{3^5}=\frac{91}{243}.$$

Esempio

Per calcolare $9+\frac{21}{2}+12+\frac{27}{2}+15+\frac{33}{2}$ basta osservare che $a_{n+1}-a_n=3/2$ in quanto
$$\frac{3}{2}=\frac{21}{2}-9=12-\frac{21}{2}=\frac{27}{2}-12=15-\frac{27}{2}=\frac{33}{2}-15,$$
ed applicare la formula per le somme aritmetiche come segue:
$$9+\frac{21}{2}+12+\frac{27}{2}+15+\frac{33}{2}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{6}(5+n)=\frac{3}{2}\left(6\cdot 5+\frac{6\cdot(6+1)}{2}\right)=\frac{153}{2}.$$

Esempio

Calcoliamo la somma dei primi 100 numeri naturali applicando la formula per le somma aritmetiche come segue:
$$1+2+3+4+\ldots+100=\sum_{n=1}^{100}n=\frac{100\cdot(100+1)}{2}=5050.$$
Ricordiamo che questo esercizio fu risolto da Gauss quando aveva tra i 7 ed i 9 anni.

A differenza delle somme geometriche e di quelle aritmetiche, non c'è un modo semplice per riconoscere se una somma sia telescopica o meno: serve avere il "colpo d'occhio".

Esempio

Per calcolare $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$ basta applicare la formula per le somme telescopiche come segue:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}.$$

Mostriamo infine come dimostrate per induzione alcune formule utili a calcolare somme finite.

Esempio

Per il principio di induzione la seguente proposizione
$$P(n):\qquad \sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$, perché:

i. $P(1)$ è vera in quanto
$$\sum_{k=1}^{1}k=1=\frac{1(1+1)}{2};$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche
$$P(n+1):\qquad \sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
è vera in quanto
$$\sum_{k=1}^{n+1}k=\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Abbiamo quindi dimostrato in un altro modo la formula per la somma aritmetica.

Esempio

Per il principio di induzione la seguente proposizione
$$P(n):\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n}{6}(2n+1)(n+1)$$
è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$, perché:

i. $P(1)$ è vera in quanto
$$\sum_{k=1}^{1}k^2=1^2=\frac{1}{6}\cdot(2\cdot 1+1)(1+1);$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche
$$P(n+1):\qquad \sum_{k=1}^{n+1}k^2=\frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2)$$
è vera in quanto
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^2&=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(n+1)+(n+1)^2\\ &=\frac{(n+1)}{6}(n(2n+1)+6(n+1))=\frac{(n+1)}{6}\left(2n^2+7n+6\right)\\ &=\frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2).\end{aligned}$$

Esempio

Fissato $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, per il principio di induzione la seguente proposizione
$$P(n):\qquad \sum_{k=0}^{n}a^k=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$
è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$, perché:

i. $P(1)$ è vera in quanto
$$\sum_{k=0}^{1}a^k=1+a=\frac{1-a^{1+1}}{1-a}\iff(1+a)(1-a)=1-a^2;$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche

$$P(n+1): \qquad \sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

è vera in quanto

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

Abbiamo quindi dimostrato in un altro modo la formula per la somma geometrica.

Esempio

Per il principio di induzione la seguente proposizione

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero la somma dei primi n numeri dispari è pari ad n^2, perché:

i. $P(1)$ è vera in quanto

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2;$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche

$$P(n+1): \qquad \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

è vera in quanto

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1)-1)$$
$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Esempio

Per il principio di induzione la seguente proposizione

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot k = \frac{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)}{3}$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, perché:

i. $P(1)$ è vera in quanto

$$\sum_{k=1}^{1} (k-1) \cdot k = 0 = \frac{(1-1)\cdot 1 \cdot (1+1)}{3};$$

ii. se $P(n)$ è vera allora anche

$$P(n+1): \qquad \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) \cdot k = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

è vera in quanto

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1) \cdot k = n \cdot (n+1) + \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot k$$
$$= \frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{3} + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)}{3}.$$

33 Somme infinite

Definizione

Una **serie numerica** è la somma (infinita) di tutti i termini di una successione.

Generalizzando il simbolo di somma finita, la serie numerica associata alla successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indicata con

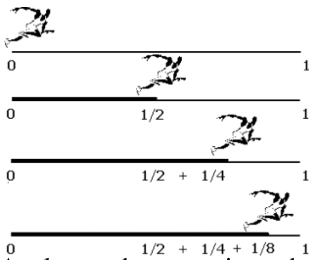
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{n\geqslant 1} a_n.$$

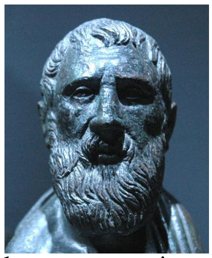
La prima notazione mette in evidenza che si tratta di una somma infinita di termini, la seconda è leggermente più compatta.

DUBBIO: Può la somma infinita di termini (strettamente positivi) essere finita? La domanda è tutt'altro che banale! Si pensi ad esempio al seguente paradosso (filosofico).

Primo paradosso di Zenone

Non si può giungere all'estremità di uno stadio senza prima aver raggiunto la metà di esso, ma una volta raggiunta la metà si dovrà raggiungere la metà della metà rimanente e così via, senza quindi mai riuscire a raggiungere l'estremità dello stadio.





Zenone di Elea
489 a.C.-431 a.C.
filosofo greco

A tale paradosso corrisponde la seguente serie numerica

$$\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \ldots = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{L}{2^p},$$

dove L è la lunghezza dello stadio. Dimostreremo rigorosamente, ovvero matematicamente, che tale serie non solo è finita, ma (come è lecito aspettarsi) vale L, risolvendo così il primo paradosso di Zenone.

Esempio

- La **serie armonica** è
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$
- La **serie armonica a segno alterno** è
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$
- La **serie armonica generalizzata** è
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \ldots \qquad , a \in \mathbb{R}.$$
- La **serie geometrica** è
$$\sum_{n\geqslant 1} a^n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots \qquad , a \in \mathbb{R}.$$

Lo studio di una serie ha come primo obbiettivo quello di vedere se il suo valore è finito o meno e, nel primo caso, calcolarne il valore. È chiaro che la serie

$$\sum_{p\geqslant 1} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

vale $+\infty$. È meno chiaro se la serie armonica o la serie armonica a segno alterno hanno un valore finito o meno. Vedremo che in effetti la prima vale $+\infty$ mentre la seconda vale $\ln(2)$.

Di seguito forniremo dei test facili da verificare per studiare le serie, ma prima abbiamo bisogno di introdurre un po' di terminologia.

Definizione

Una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ è **convergente**, **divergente**, **regolare**, **irregolare** se lo è la corrispondente **successione delle somme parziali** $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ definita da

$$s_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

La **serie converge ad s** se $s = \lim_{N\to\infty} s_N$, in tal caso si scrive $\sum_{n\geqslant 1} a_n = s$. In maniera più coincisa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Osservazione

Il carattere di una serie non cambia se si altera un numero finito di suoi termini: se $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge allora anche $\sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n\geqslant N+1} a_n$ converge.

Test di Cauchy

Una serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \left| \sum_{p=m+1}^{n} a_p \right| < \varepsilon\ \forall n > m > N.$$

Dimostrazione. Per definizione la serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge se e solo se la successione delle somme parziali $\{s_p\}_p$ converge; per il test di Cauchy per le successioni questo accade se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |s_n - s_m| < \varepsilon\ \forall n > m > N.$$

Infine, per concludere basta osservare che per definizione $s_n - s_m = \sum_{p=m+1}^{n} a_p$. □

La serie data dalla somma dei termini di una successione che non converge a zero non può converge. In maniera più formale si ha il seguente

Test necessario

Condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ è che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Se la serie converge allora anche la successione delle sue somme parziali $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge e quindi, ricordando che $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, si ha che

$$a_{n+1} = s_{N+1} - s_N \xrightarrow[n\to+\infty]{} s - s = 0.$$ □

Questo test è utile per dimostrare che una serie non converge.

Esempio

Utilizziamo il test necessario per capire quali delle seguenti serie di sicuro non converge.

- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

- Poichè $a_n = \frac{n}{n+1}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0$, di sicuro la serie non converge.
- Poichè $a_n = \frac{1}{n}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, la serie potrebbe convergere.
- Poichè $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, la serie potrebbe convergere.

Il test necessario ci dice che affinché la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n$$

converga serve che la successione a_n converga a zero, ma che questo non basta: serve infatti che la successione a_n converga sufficientemente veloce a zero.

Proposizione

La **serie armonica** diverge.

Dimostrazione. Consideriamo la serie armonica

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Il suo termine generico $a_n = 1/n$ converge a zero, ma non in maniera sufficientemente veloce e per questo diverge. Dimostriamolo. La successione delle somme parziali $\{s_N\}_N$ è (strettamente) monotona crescente in quanto $1/n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il test delle successioni monotone crescenti si ha che $\{s_N\}_N$ è regolare. Di conseguenza, o $\{s_N\}_N$ converge ed in questo caso tutte le sottosuccessioni convergono allo stesso limite, oppure $\{s_N\}_N$ diverge a $+\infty$ ed in questo caso tutte le sottosuccessioni divergono a $+\infty$. Consideriamo la sottosuccessione $\{s_{2^N}\}_n$. Per definizione s_{2^N} è data dalla somma dei primi 2^N termini

$$s_{2^N} = \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \dots + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right) + \dots$$

Osserviamo che

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \dots + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} > \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \dots + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{2},$$

e così via. Pertanto

$$\begin{aligned} s_{2^N} &= \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \dots + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right) + \dots \\ &\geqslant 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

e l'ultima somma parziale diverge in quanto la successione dei suoi termini non converge a zero (ma ad $1/2$). Quindi la sottosuccessione $\{s_{2^N}\}_n$ diverge a $+\infty$ e di conseguenza anche $\{s_N\}_N$ diverge a $+\infty$. □

Esempio

Un esempio notevole è la **serie armonica generalizzata** per la quale vale (lo dimostreremo in seguito)

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{converge se } a > 1, \\ \text{diverge} \quad \text{se } a \leqslant 1. \end{cases}$$

Si noti che se $a \leqslant 0$, allora i termini della serie non convergono a zero e quindi la serie diverge per il test necessario.

Proposizione

La **serie armonica a segno alterno** converge.

Dimostrazione. Dimostriamo che la serie armonica a segno alterno

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \dots$$

converge. Consideriamo la somma parziale $s_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ con un numero pari di termini e la somma parziale $s_{2m+1} = \sum_{n=1}^{2m+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ con un numero dispari di termini. La successione $\{s_{2m+1}\}_m$ è strettamente decrescente mentre la successione $\{s_{2m}\}_m$ è strettamente crescente in quanto

$$s_{2(m+1)+1} - s_{2m+1} = -\tfrac{1}{2m+2} + \tfrac{1}{2m+3} < 0,$$
$$s_{2(m+1)} - s_{2m} = \tfrac{1}{2m+1} - \tfrac{1}{2m+2} > 0.$$

Inoltre si ha $s_{2m+1} - s_{2m} = \frac{1}{2m+1} > 0$ e di conseguenza

$$\tfrac{1}{2} = a_1 - a_2 = s_2 \leqslant s_{2m} < s_{2m+1} \leqslant s_1 = a_1 = 1.$$

Dunque $\{s_{2m+1}\}_m$ e $\{s_{2m}\}_m$ sono successioni monotone e limitate, pertanto per il test per successioni monotone le due successioni $\{s_{2m}\}_m$ ed $\{s_{2m+1}\}_m$ convergono. Siano L_P ed L_D i limiti rispettivamente di $\{s_{2m}\}_m$ ed $\{s_{2m+1}\}_m$. Si ha allora

$$L_D - L_P \xleftarrow[m\to+\infty]{} s_{2m+1} - s_{2m} = \frac{1}{2m+1} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow L_D - L_P = 0$$

e quindi $L_P = L_D$. Poniamo $L = L_P = L_D \in [1/2, 1]$. Allora dato $\varepsilon > 0$ esistono $P, D \in \mathbb{N}$ tali che

$$|s_{2m} - L| < \varepsilon \quad \forall m > P, \qquad |s_{2m+1} - L| < \varepsilon \quad \forall m > D.$$

Sia $N = \max\{2P, 2D+1\}$, allora

$$|s_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > M$$

e quindi anche $\{s_n\}_n$ converge ad L. Si dimostra che $L = \ln(2)$. □

Proposizione

La **serie geometrica** $\sum_{n\geqslant 1} a^n$ converge se e solo se $|a| < 1$ ed in tal caso il suo valore è $\frac{a}{1-a}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che la serie geometrica

$$\sum_{n\geqslant 1} a^n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } a \geqslant 1, \\ \frac{a}{1-a} & \text{se } |a| < 1, \\ \text{irregolare} & \text{se } a \leqslant -1. \end{cases}$$

Se $a = 1$, allora otteniamo la serie $\sum_{n\geqslant 1} 1^n = 1 + 1 + \ldots$ che diverge. Se $a \neq 1$, allora sappiamo già che la somma parziale è

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a\cdot(1-a^N)}{1-a}.$$

Non resta quindi altro da fare che calcolare il limite di s_N:

$$\lim_{N\to+\infty} s_N = \lim_{N\to+\infty} \frac{a\cdot(1-a^N)}{1-a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ \frac{a}{1-a} & \text{se } |a| < 1, \\ \nexists & \text{se } a \leqslant -1. \end{cases}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Esempio

Risolviamo il primo paradosso di Zenone. Per dimostrare che

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{L}{2^n} = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \ldots = L,$$

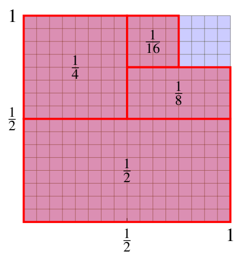
basta applicare la formula per le serie geometriche come segue

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{L}{2^n} = L \cdot \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = L \cdot \frac{1/2}{1-(1/2)} = L \cdot 1 = L.$$

Esempio

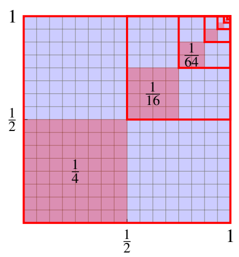
Consideriamo un quadrato di lato unitario. Dividiamo il quadrato in due. Dei due rettangoli ottenuti, uno viene colorato di rosso, mentre l'altro viene a sua volta diviso in due ottenendo due quadrati. Dei due quadrati ottenuti, uno viene colorato di rosso, mentre l'altro viene a sua volta diviso in due ottenendo due rettangoli. Iterando tale procedura all'infinito, ci chiediamo se tutto il quadrato sarà alla fine colorato di rosso. La risposta è sì e questo è chiaro considerando la serie geometrica

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$



Di seguito il disegno corrispondente alla serie geometrica

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$



Come si può dedurre dal disegno che la serie ha valore $1/3$?

Esempio

Applicando la formula per le serie geometriche otteniamo

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\tfrac{4}{5}\right)^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \left(\tfrac{4}{5}\right)^n = 1 + \frac{4/5}{1-4/5} = 1 + 4 = 5.$$

34 Test di convergenza

Le tecniche utilizzate nella precedente sezione sono difficilmente adattabili ad altri tipi di serie. In questa sezione diamo dei test utili per lo studio di serie più generali. Ci limiteremo a considerare solo i test più facili da verificare. Per maggiore chiarezza, considereremo separatamente i test per le serie a termini positivi da quelli per le serie di segno qualsiasi.

Test per serie con termini di segno costante

Iniziamo con i test per le serie con termini positivi. Dato che in questo caso la somma parziale è monotona crescente, la serie corrispondente è regolare: o converge o diverge a $+\infty$. Per dimostrarne la convergenza o divergenza basta quindi verificarne rispettivamente la limitatezza o meno.

Test del confronto

Date due successioni $\{a_p\}_p$ e $\{b_p\}_p$ tali che

$$0 \leqslant a_p \leqslant b_p,$$

si ha che:

- $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge,
- $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ diverge.

Dimostrazione. Visto che $0 \leqslant a_p \leqslant b_p$, si ha che le successioni delle somme parziali

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} a_p, \qquad t_n = \sum_{p=1}^{n} b_p$$

sono monotone crescenti, con $0 \leqslant s_n \leqslant t_n$. • Se la seconda serie converge, ovvero t_n converge ad una t, allora s_n è limitata superiormente da t e quindi, per il test per le successioni monotone crescenti, anche s_n converge, ovvero la prima serie converge. • Se la prima serie diverge, ovvero s_n diverge a $+\infty$, allora anche t_n diverge a $+\infty$ per il test del confronto per le successioni numeriche in quanto $s_n \leqslant t_n$, ovvero anche la seconda serie diverge. □

Test della radice

Data una serie di termini strettamente positivi $\sum_{p\geqslant 1} a_p$, cioè $a_p > 0$, sia

$$L = \lim_{p\to+\infty} \sqrt[p]{a_p}.$$

Si ha che:

- $L < 1 \Longrightarrow \sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge,
- $L > 1 \Longrightarrow \sum_{p\geqslant 1} a_p$ diverge.

Osservazione

Se $L = 1$ allora il test della radice non ci dice nulla.

Dimostrazione. Per definizione di L, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $P \in \mathbb{N}$ tale che

$$p > P \quad\Longrightarrow\quad L - \varepsilon < \sqrt[p]{a_p} < L + \varepsilon.$$

• Se $L < 1$, allora possiamo scegliere $\varepsilon = (1-L)/2 > 0$ ed avere

$$p > P \quad\Longrightarrow\quad \sqrt[p]{a_p} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad a_p < (1-\varepsilon)^p.$$

Visto che $0 < 1-\varepsilon < 1$, la serie geometrica $\sum_{p\geqslant 1}(1-\varepsilon)^p$ converge; quindi per il test del confronto anche la serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge.
• Il caso $L > 1$ è analogo ed è lasciato come esercizio per casa. □

Esempio

Studiamo la serie $\sum_{p\geqslant 1} \frac{a^p}{p^p}$ con $a > 0$ utilizzando il test della radice. Visto che

$$\sqrt[p]{\frac{a^p}{p^p}} = \frac{a}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

si ha che $L = 0 < 1$ e quindi la serie converge.

Esempio

Studiamo la serie $\sum_{p\geqslant 1} p^x \cdot y^p$ con $x \in \mathbb{R}$ ed $y > 0$ utilizzando il test della radice. Visto che

$$\sqrt[p]{p^x \cdot y^p} = y \cdot p^{x/p} = y \cdot \exp\left(\frac{x}{p}\cdot \ln(p)\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} y\cdot e^0 = y$$

si ha che $L = y$ e quindi la serie converge se $y < 1$ e diverge se $y > 1$. Se $y = 1$ allora la serie si riduce a $\sum_{p\geqslant 1} p^x$ che converge se $x < -1$ e diverge se $x \geqslant -1$.

Test del rapporto

Data una serie di termini strettamente positivi $\sum_{p\geqslant 1} a_p$, cioè $a_p > 0$, sia

$$L = \lim_{p\to+\infty} \frac{a_{p+1}}{a_p}.$$

Si ha che:

• $L < 1 \implies \sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge,

• $L > 1 \implies \sum_{p\geqslant 1} a_p$ diverge.

Osservazione

Se $L = 1$ allora il test del rapporto non ci dice nulla.

Dimostrazione. Per definizione di L, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $P \in \mathbb{N}$ tale che

$$p > P \implies L-\varepsilon < a_{p+1}/a_p < L+\varepsilon.$$

Se $L < 1$, allora possiamo scegliere $\varepsilon = (1-L)/2 > 0$ ed avere

$$p > P \implies a_{p+1}/a_p < L+\varepsilon = 1-\varepsilon \implies a_{p+1} < (1-\varepsilon)\cdot a_p.$$

Ragionando iterativamente per ogni $p > P$ si ha

$$\begin{aligned} a_{p+1} &< (1-\varepsilon)\cdot a_p < (1-\varepsilon)^2 \cdot a_{p-1} < (1-\varepsilon)^3\cdot a_{p-2} \\ &< \ldots < (1-\varepsilon)^{1+p-P}\cdot a_P. \end{aligned}$$

Pertanto risulta

$$\sum_{p=1}^{+\infty} a_p = \sum_{p=1}^{P+1} a_p + \sum_{p=P+2}^{+\infty} a_p \leqslant \sum_{p=1}^{P+1} a_p + \left(\sum_{p=P+2}^{+\infty} (1-\varepsilon)^{p-P}\right) a_P.$$

Visto che $0 < 1-\varepsilon < 1$, la serie geometrica $\sum_{p\geqslant 1}(1-\varepsilon)^p\cdot a_P$ converge; quindi per il test del confronto anche la serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge. Il caso $L > 1$ è analogo ed è lasciato come esercizio per casa. □

Osservazione

Le analogie tra il test del rapporto ed il test della radice sono dovute alla proposizione 6.4.

Esempio

La serie di termini positivi $\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p!}$ converge per il test del rapporto perché

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{p!}{(p+1)\cdot p!} = \frac{1}{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

e quindi $L = 0 < 1$. Vedremo in seguito che

$$\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p!} = e-1.$$

Esempio

Studiamo la serie geometrica $\sum_{p\geqslant 1} x^p$ al variare del parametro x in $[0,+\infty)$ utilizzando il test del rapporto dove è possibile.
Se $x = 0$, allora $a_p = 0$ per ogni p e quindi la serie converge. Se $x > 0$ allora possiamo applicare il test del rapporto. Visto che

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{x^{p+1}}{x^p} = x \xrightarrow[p\to+\infty]{} x$$

si ha che $L = x$. Quindi la serie converge se $x < 1$ e diverge se $x > 1$. Se $x = 1$, allora $a_p = 1$ e quindi la serie diverge. In conclusione la serie converge se $x \in [0,1)$ e diverge se $x \in [1,+\infty)$.

Test del confronto asintotico

Se $a_p \geqslant 0$, $b_p > 0$ ed $L \neq 0$, allora si ha che:

• $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{p\to+\infty}\frac{a_p}{b_p} = 0 \\ \sum\limits_{p\geqslant 1} b_p \text{ converge} \end{array}\right\} \implies \sum\limits_{p\geqslant 1} a_p$ converge,

• $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{p\to+\infty}\frac{a_p}{b_p} = +\infty \\ \sum\limits_{p\geqslant 1} b_p \text{ diverge} \end{array}\right\} \implies \sum\limits_{p\geqslant 1} a_p$ diverge,

• $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{a_p}{b_p} = L \implies \begin{cases} \text{le due serie } \sum\limits_{p\geqslant 1} a_p \text{ e } \sum\limits_{p\geqslant 1} b_p \\ \text{hanno lo stesso comportamento.} \end{cases}$

Osservazione

Detto in parole povere, se $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ converge allora $\lim\limits_{p\to+\infty} b_p = 0$, e se $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{a_p}{b_p} = 0$ allora a_p converge a zero più velocemente di b_p, ecco perché $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ non può fare altro che convergere. Analogo discorso vale per i restanti due casi considerati.

Dimostrazione. Se $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{a_p}{b_p} = L$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $P \in \mathbb{N}$ tale che

$$p > P \implies \left|\frac{a_p}{b_p} - L\right| < \varepsilon \implies L-\varepsilon < \frac{a_p}{b_p} < L+\varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = L/2$ otteniamo che

$$\frac{L}{2}\cdot b_p < a_p < \frac{3L}{2}\cdot b_p. \tag{♣}$$

Per il test del confronto abbiamo

$$\sum_{p\geqslant 1} b_p \text{ converge} \implies \sum_{p\geqslant 1}\frac{3L}{2}\cdot b_p \text{ converge} \underset{(♣)}{\implies} \sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ converge},$$
$$\sum_{p\geqslant 1} b_p \text{ diverge} \implies \sum_{p\geqslant 1}\frac{L}{2}\cdot b_p \text{ diverge} \underset{(♣)}{\implies} \sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ diverge}.$$

I restanti casi sono analoghi e lasciati come esercizio per casa. □

Esempio

Studiare le seguenti serie.

(a) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ **(b)** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}$ **(c)** $\sum\limits_{n\geqslant 2} n\left(\sqrt{\frac{n^3+2}{n^3-1}}-1\right)$

(a) La serie diverge perché $a_n \sim \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ e la serie armonica diverge.

(b) La serie converge perché $a_n \sim \frac{1/n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ e la serie armonica generalizzata con $a = 3/2$ converge.

(c) La serie converge perché

$$a_n = n\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{n^3+2}{n^3-1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{n^3+2}{n^3-1}}+1\right)}{\sqrt{\frac{n^3+2}{n^3-1}}+1} = n\cdot\frac{\frac{n^3+2}{n^3-1}-1}{\sqrt{\frac{n^3+2}{n^3-1}}+1}$$
$$= \frac{3n}{(n^3-1)\left(\sqrt{\frac{n^3+2}{n^3-1}}+1\right)} \sim \frac{3}{2n^2}$$

e la serie armonica generalizzata con $a = 2$ converge.

Osservazione

Sia il test del confronto che quello del confronto asintotico utilizzano una seconda serie per dimostrare la convergenza o la divergenza della serie di partenza. Si noti che le due serie potrebbero avere somme diverse, come mostra il seguente esempio.

Esempio

Le due serie

$$\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p(p+1)} = 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

soddisfano il test del confronto asintotico, in particolare hanno lo stesso comportamento, pur avendo somme diverse.

Proposizione

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ converge}\end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n) \text{ converge},$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge}\end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n) \text{ diverge},$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ diverge a } +\infty \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge a } +\infty\end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n) \text{ diverge a } +\infty,$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ diverge a } -\infty \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge a } -\infty\end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n) \text{ diverge a } -\infty.$$

Infine, nel caso in cui

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ diverge a } +\infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge a } -\infty$$

non si può dire nulla su $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)$: si deve usare un altro test.

Esempio

Studiamo la serie

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\left(-\tfrac{1}{e}\right)^n + \tfrac{e}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

considerando separatamente le due serie

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(-\tfrac{1}{e}\right)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\tfrac{e}{\sqrt[3]{n^2}}\,.$$

La prima è una serie geometrica di ragione $-1/e \in (-1,1)$ e quindi converge. La seconda è una serie armonica generalizzata con $a = 2/3$ e quindi diverge. Pertanto la serie di partenza diverge.

Esempio

Se prendiamo

$$a_n = \tfrac{n^2+1}{n^3+n^2+1} \qquad \text{e} \qquad b_n = -\tfrac{n^2-n}{n^3+n^2+1}$$

allora per il test del confronto asintotico

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ diverge a } +\infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge a } -\infty$$

ma

$$\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n) = \sum_{n\geqslant 0}\tfrac{n+1}{n^3+n^2+1} \text{ converge.}$$

Test per serie con termini di segno qualsiasi

Osserviamo che una serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ di termini negativi ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ i cui termini $b_p = -a_p$ sono positivi. Pertanto i test introdotti per le serie con termini positivi sono facilmente adattabili a quelle con termini negativi.

Restano quindi da considerare le serie con termini di segno sia positivo che negativo.

Test della convergenza assoluta

Data una serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$, si ha che

$$\sum_{p\geqslant 1}|a_p| \text{ converge} \qquad \implies \qquad \sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ converge.}$$

Dimostrazione. Se la serie dei valori assoluti $\sum_{p\geqslant 1}|a_p|$ converge, allora per il test di Cauchy si ha che
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) > 0$ t.c. $\left|\sum_{p=m+1}^n |a_p|\right| = \sum_{p=m+1}^n |a_p| < \varepsilon\ \forall n > m > N$.
Per concludere basta osservare che per la disuguaglianza triangolare

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n} a_p\right| \leqslant \sum_{p=m+1}^{n} |a_p|$$

e quindi anche la serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ soddisfa il test di Cauchy e pertanto converge. □

Il test della convergenza assoluta permette di passare da una serie con termini di segno qualsiasi, $\sum_{p\geqslant 1} a_p$, ad una con termini di segno positivo, $\sum_{p\geqslant 1}|a_p|$, a cui possiamo applicare i test già descritti. Purtroppo questo test è di solito molto "brutale" come vedremo nel seguente esempio.

Esempio

Abbiamo già visto che la serie armonica a segno alterno

$$\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^{p+1}}{p} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$

converge. Se applichiamo il test della convergenza assoluta non riusciamo a dimostrarne la convergenza visto che la sua serie dei valori assoluti $\sum_{p\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{p+1}}{p}\right| = \sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p}$ non è altro che la serie armonica che sappiamo divergere.

Proprio la brutalità di questo test rende speciali le serie che lo soddisfano e motivano la seguente

Definizione

Una serie $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ **converge assolutamente** se la sua serie dei valori assoluti $\sum_{p\geqslant 1}|a_p|$ converge.

Per evidenziare il fatto che ci si riferisce alla convergenza "standard" e non a quella assoluta, si parla di **convergenza semplice**.

Osservazione

$$\sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ converge assolutamente} \Rightarrow \sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ converge semplicemente}$$

Esempio

La serie armonica a segno alterno converge semplicemente ma non converge assolutamente.

Esempio

Studiamo la serie $\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^p}{(2p)!}$. Applichiamo il test della convergenza assoluta e consideriamo la serie dei valori assoluti

$$\sum_{p\geqslant 1}|a_p| = \sum_{p\geqslant 1}\left|\tfrac{(-1)^p}{(2p)!}\right| = \sum_{p\geqslant 1}\tfrac{1}{(2p)!}.$$

Applichiamo il test del rapporto a $\sum_{p\geqslant 1}|a_p|$:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{(2(p+1))!}\cdot(2p)! &= \tfrac{(2p)!}{(2p+2)\cdot(2p+1)\cdot(2p)!}\\ &= \tfrac{1}{(2p+2)\cdot(2p+1)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Dunque $\sum_{p\geqslant 1}|a_p|$ converge e quindi la serie originale converge assolutamente.

Definizione

Una **serie di segno alterno** è una serie i cui termini hanno segno alterno l'uno rispetto al successivo, ovvero sono della forma
$$\sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}a_p = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$
dove gli a_i hanno tutti lo stesso segno, ad esempio sono tutti positivi.

Esempio

Le seguenti serie sono di segno alterno.

- $\sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- $\sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}\frac{p}{p+2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{3}{5} - \frac{4}{6} + \dots$
- $\sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Test per le serie di segno alterno

Se la successione $\{a_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ decresce a zero, ovvero
$$a_p \geqslant a_{p+1} \geqslant 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{p\to+\infty} a_p = 0,$$
allora la serie di segno alterno $\sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}a_p$ converge.

Dimostrazione. Consideriamo la somma parziale con un numero dispari di termini e quella con un numero pari di termini
$$s_{2m+1} = \sum_{p=1}^{2m+1}(-1)^{p+1}a_p \qquad \text{e} \qquad s_{2m} = \sum_{p=1}^{2m}(-1)^{p+1}a_p.$$
Visto che $\{a_p\}_p$ è decrescente, la successione $\{s_{2m+1}\}_m$ è decrescente mentre la successione $\{s_{2m}\}_m$ è crescente perché
$$s_{2(m+1)+1} - s_{2m+1} = -a_{2m+2} + a_{2m+3} < 0,$$
$$s_{2(m+1)} - s_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m+2} > 0.$$
Inoltre $s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1} > 0$. Abbiamo pertanto
$$a_1 - a_2 = s_2 \leqslant s_{2m} \leqslant s_{2m+1} \leqslant s_1 = a_1.$$
Per il test per successioni monotone le due successioni $\{s_{2m}\}_m$ ed $\{s_{2m+1}\}_m$ convergono. Inoltre esse hanno lo stesso limite perché
$$\lim_{m\to+\infty}|s_{2m+1} - s_{2m}| = \lim_{m\to+\infty} a_{2m+1} = 0.$$
Sia $L \in [a_1 - a_2, a_1]$ tale limite. Allora dato $\varepsilon > 0$ esistono $P, D \in \mathbb{N}$ tali che
$$|s_{2m} - L| < \varepsilon \quad \forall m > P, \qquad |s_{2m+1} - L| < \varepsilon \quad \forall m > D.$$
Sia $N = \max\{2P, 2D+1\}$, allora
$$|s_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > N$$
e quindi anche $\{s_n\}_n$ converge ad L. □

Osservazione

Il viceversa del test per le serie di segno alterno non vale, ovvero
$$\left.\begin{array}{l} a_p \geqslant 0,\ \lim_{p\to+\infty} a_p = 0 \\ a_p \geqslant a_{p+1} \text{ non vale} \end{array}\right\} \not\Rightarrow \sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}a_p \text{ non converge.}$$
Ad esempio
$$a_p = \begin{cases} 1/p^2 & \text{se } p \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } p \text{ è dispari} \end{cases}$$
è tale che $a_p \geqslant 0$, $\lim_{p\to+\infty} a_p = 0$, $a_p \geqslant a_{p+1}$ non vale ma $\sum_{p\geqslant 1}(-1)^p a_p = \sum_{p\geqslant 1} a_{2p} = \sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4}\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p^2}$ converge perché la serie armonica generalizzata con $a = 2$ converge.

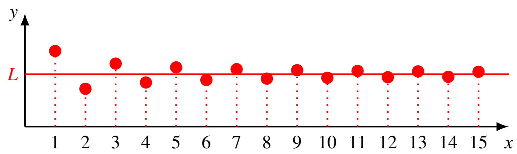
Osservazione

La convergenza della serie armonica a segno alterno $\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^{p+1}}{p}$ segue immediatamente dal test per le serie di segno alterno.

Altre importanti proprietà delle serie di segno alterno sono elencate nella seguente proposizione.

Proposizione

Sia L il limite di una serie di segno alterno $\sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}a_p$ con $a_p > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti stime
$$s_{2n} \leqslant L \leqslant s_{2n+1}, \qquad |s_n - L| \leqslant a_{n+1}.$$



Dimostrazione. La prima stima segue da quanto visto nella precedente dimostrazione. Per la seconda stima basta osservare che
$$|s_{2n+1} - L| = s_{2n+1} - L \leqslant s_{2n+1} - s_{2n+2} = a_{(2n+1)+1}$$
e
$$|s_{2n} - L| = L - s_{2n} \leqslant s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}.$$ □

Esempio

Studiamo le seguenti serie di segno alterno.
$$\textbf{1)}\ \sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}\frac{1}{p^2} \qquad \textbf{2)}\ \sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}\cdot\frac{\sqrt{p}-(-1)^p}{p}$$
$$\textbf{3)}\ \sum_{p\geqslant 1}\frac{p+\sqrt{p+1}+(-1)^p p^{5/2}}{p^3}$$
1) Visto che
$$\frac{1}{p^2} > \frac{1}{(p+1)^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p^2} = 0$$
abbiamo che la serie converge per il test delle serie di segno alterno.
2) Visto che a_p non è decrescente, non possiamo utilizzare il test per le serie di segno alterno. Per questo non possiamo dedurre dal fatto che
$$a_p = \frac{\sqrt{p}-(-1)^p}{p} > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{p\to+\infty} a_p = 0$$
che la serie converga. Osserviamo che possiamo scrivere la serie come somma delle serie $\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}}$ e $-\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p}$, dove la prima serie converge per il test delle serie a segno alterno mentre la seconda diverge a $-\infty$. Dunque la serie diverge.
3) Basta scrivere la serie come somma di $\sum_{p\geqslant 1}\frac{p+\sqrt{p+1}}{p^3}$ e $\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, notare che la prima converge per il test del confronto asintotico, mentre la seconda converge per il test delle serie a segno alterno.

Esempio

Studiamo la serie di segno alterno $\sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}\frac{2p-1}{2p+1}$. Visto che
$$\frac{2p-1}{2p+1} = \underbrace{\frac{p}{p}}_{1}\cdot\frac{2-\frac{1}{p}}{2+\frac{1}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1\cdot\underbrace{\frac{2-\frac{1}{+\infty}}{2+\frac{1}{+\infty}}}_{1} = 1$$
si ha che la serie non converge.

Esempio

La serie a segno alterno
$$\sum_{p\geqslant 1} a_p = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \dots$$
con
$$a_p = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } p = 2n-1 \text{ è dispari,} \\ -\frac{1}{3n} & \text{se } p = 2n \text{ è pari,} \end{cases}$$
non soddisfa le condizioni del test per le serie di segno alterno; dobbiamo pertanto utilizzare altri test. Osserviamo che la serie

diverge in quanto

$$\begin{aligned}\sum_{p\geqslant 1} a_p &= \sum_{n\geqslant 1}\left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{3n}\right)\\ &= \left(1-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{9}\right)+\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{12}\right)+\dots\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\tfrac{2}{3n}=\tfrac{2}{3}\sum_{n\geqslant 1}\tfrac{1}{n}=+\infty.\end{aligned}$$

Definizione

La **serie telescopica** associata ad una successione $\{a_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ è

$$\sum_{p\geqslant 1}(a_p-a_{p+1}).$$

Osservazione

Si noti che:

- il p-esimo termine della serie telescopica è a_p-a_{p+1};
- la convergenza di $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ implica la convergenza di $\sum_{p\geqslant 1}(a_p-a_{p+1})$, ma non vale il viceversa.

Test per le serie telescopiche

Una serie telescopica ha lo stesso comportamento della successione ad essa associata. Inoltre se entrambe convergono allora

$$\sum_{p\geqslant 1}(a_p-a_{p+1})=a_1-\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Dimostrazione. Visto che la successione delle somme parziali è

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{p=1}^{n}(a_p-a_{p+1})\\ &= (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1})\\ &= a_1-a_{n+1}\end{aligned}$$

si ha che

$$\sum_{p\geqslant 1}(a_p-a_{p+1})=\begin{cases} a_1-\lim\limits_{n\to+\infty} a_n & \text{se } \{a_n\}_n \text{ converge,}\\ \text{diverge} & \text{se } \{a_n\}_n \text{ diverge,}\\ \text{irregolare} & \text{se } \{a_n\}_n \text{ irregolare.}\end{cases}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Esempio

Per dimostrare che la **serie di Mengoli** $\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p\cdot(p+1)}=1$ basta osservare che

$$\frac{1}{p\cdot(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1},$$

e che quindi si tratta di una serie telescopica con $a_p=1/p$.

Osservazione

Grazie alla convergenza della serie di Mengoli e per il test del confronto asintotico, si ha che $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge. Per il test del confronto, da ciò segue che $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^a}$ con $a\geqslant 2$ converge. Ricordiamo che più in generale si ha che

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^a} \text{ converge } \iff a>1.$$

Capitolo 8

Funzioni continue in un intervallo

35 Funzioni continue in un intervallo

Definizione

$f\colon D \to \mathbb{R}$ è **continua in un intervallo** $I \subseteq D$ se per ogni $x_0 \in I$ si ha che f è continua in x_0.

Teorema degli zeri

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ è continua in } [a,b] \\ \bullet\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tale che } f(c) = 0.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $f(a)\cdot f(b) < 0$ se e solo se $f(a) > 0$ ed $f(b) < 0$, oppure $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. Consideriamo il caso primo caso, il secondo è lasciato come esercizio per casa. Sia $c = \sup(A)$, dove

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}.$$

Visto che $f(a) > 0 > f(b)$ ed f è continua sia in a che in b, per il teorema della permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, a+\delta) \quad &\Longleftrightarrow \quad [a, a+\delta) \subseteq A, \\ f(x) < 0 \quad \forall x \in (b-\delta, b] \quad &\Longleftrightarrow \quad A \cap (b-\delta, b] = \emptyset. \end{aligned}$$

Ne deriva che

$$a+\delta \leqslant c \leqslant b-\delta \Longrightarrow c \in (a,b).$$

Dimostriamo che $f(c) = 0$. Ragioniamo per assurdo ed assumiamo che $f(c) \neq 0$. Distinguiamo i casi $f(c) > 0$ ed $f(c) < 0$.

- Assumiamo che $f(c) > 0$. Poiché f è continua in c, per il teorema della permanenza del segno esiste $r > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (c-r, c+r)$. Ne deriva che $(c-r, c+r) \subset A$ e pertanto
$$\sup(A) = c < c + \tfrac{r}{2} \in A.$$
Questo però è in contrasto con la prima proprietà caratteristica dell'estremo superiore ($x \leqslant \sup(A)$ per ogni $x \in A$).
- Assumiamo che $f(c) < 0$. Per il teorema della permanenza del segno esiste $r > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in (c-r, c+r)$. Ne deriva che $(c-r, c+r) \cap A = \emptyset$. Per la seconda proprietà dell'estremo superiore (se $x < \sup(A)$ allora esiste $a \in A$ tale che $x < a$) si ha che
$$\begin{aligned} c - r < c = \sup(A) &\Longrightarrow \exists a \in A \text{ tale che } c - r < a \\ &\Longrightarrow c - r < a \leqslant c = \sup(A) < c + r \\ &\Longrightarrow a \in (c-r, c+r) \cap A \\ &\Longrightarrow (c-r, c+r) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$
Siamo dunque giunti ad una contraddizione. □

Grazie al teorema degli zeri, possiamo dimostrare di nuovo l'osservazione 1.1 ottenuta tramite il teorema fondamentale dell'Algebra.

Corollario

Se $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ed $a \neq 0$, allora l'equazione di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ammette almeno una soluzione reale.

Dimostrazione. Poniamo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Assumiamo che $a > 0$ (il caso $a < 0$ è analogo ed è lasciato come esercizio per casa). Visto che

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty,$$

esistono $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$ e tali che $p(\alpha) < 0 < p(\beta)$. Allora, per il teorema degli zeri, esiste $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tale che $p(\gamma) = 0$. □

Esempio

Verifichiamo che l'equazione

$$\tfrac{x}{3} = \ln(x)$$

ammette almeno due soluzioni. Poniamo

$$f(x) = \tfrac{x}{3} - \ln(x)$$

ed osserviamo che

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e che

$$f(e) = \tfrac{e}{3} - \ln(e) = \tfrac{e}{3} - 1 < 0.$$

Dalla definizione di limite esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < e < b$ e tali che $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$. Per il teorema degli zeri esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $a < x_1 < e < x_2 < b$ e tali che $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Esempio

Dimostriamo che la seguente equazione ha infinite soluzioni.

$$\tan(x) = x$$

Sia $a_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. La funzione $f(x) = \tan(x) - x$ è definita in ogni intervallo del tipo $A_k = (a_{k-1}, a_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, e risulta

$$\lim_{x\to a_{k-1}^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a_k^-} f(x) = +\infty.$$

Possiamo quindi applicare il teorema degli zeri per ottenere che esiste $z_k \in (a_{k-1}, a_k)$ con $f(z_k) = 0$ ossia con $\tan(z_k) = z_k$.

L'immagine continua di un intervallo è un intervallo, ovvero, vale il seguente teorema.

Teorema dei valori assunti

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $I \subseteq D$ è un intervallo, allora anche $f(I)$ è un intervallo.

Dimostrazione. Si deve dimostrare che se $y_1, y_2 \in f(I)$ ed $y_1 < y_2$, allora $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$, ovvero che per ogni $y \in (y_1, y_2)$ si ha che $y \in f(I)$. Siccome $y_1,\ y_2 \in f(I)$, esistono $x_1,\ x_1 \in I$ tali che $y_1 = f(x_1)$ ed $y_2 = f(x_2)$. Assumiamo che sia $x_1 < x_2$ (il caso $x_1 > x_2$ è lasciato come esercizio per casa). Poiché I è un intervallo ed $x_1, x_2 \in I$, si ha che $[x_1, x_2] \subset I$. Consideriamo $g\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = y - f(x).$$

La funzione g è continua in $[x_1, x_2]$ perché f lo è ed inoltre

$$\begin{aligned} g(x_1) &= y - f(x_1) = y - y_1 > 0, \\ g(x_2) &= y - f(x_2) = y - y_2 < 0. \end{aligned}$$

Applicando il teorema degli zeri alla funzione g in $[x_1, x_2]$, si ha che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$g(c) = y - f(c) = 0 \Longleftrightarrow y = f(c) \Longrightarrow y \in f(I).$$ □

Esempio

Dimostriamo che l'equazione $x\sin(x) = 10$ ha infinite soluzioni. Poniamo $f(x) = x\sin(x)$. Osserviamo che per

$$a_k = 2k\pi \quad \text{e} \quad b_k = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{N}$$

si ha

$$f(a_k) = 0 \quad \text{e} \quad f(b_k) = b_k = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Pertanto se $k \in \mathbb{N}$ è scelto in modo che

$$\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi > 10$$

per il teorema dei valori assunti, esiste $x_k \in (a_k, b_k)$ con $f(x_k) = 10$, ossia una soluzione dell'equazione considerata.

Definizione

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- $x_1 \in D$ è un punto di **minimo assoluto** di f in D se
$$f(x_1) = \min\{f(x) : x \in D\}$$
ed in tal caso $f(x_1)$ è detto **valore minimo** di f in D.
- $x_2 \in D$ è un punto di **massimo assoluto** di f in D se
$$f(x_2) = \max\{f(x) : x \in D\}$$
ed in tal caso $f(x_2)$ è detto **valore massimo** di f in D.

Osservazione

- Se $x_1 \in D$ è un punto di minimo assoluto di f in A allora
$$f(x_1) \leqslant f(x) \qquad \forall x \in D.$$
- Se $x_2 \in D$ è un punto di massimo assoluto di f in A allora
$$f(x_2) \geqslant f(x) \qquad \forall x \in D.$$

L'immagine continua di un intervallo chiuso è un intervallo chiuso, ovvero, vale il seguente teorema.

Teorema di Weierstrass

Se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è continua ed $A = [a,b]$, allora essa ammette massimo e minimo assoluti.

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione dell'esistenza di un punto di massimo, quella dell'esistenza di un punto di minimo è lasciata come esercizio per casa.

I passo. Dimostriamo che l'insieme dei valori $f([a,b])$ è limitato superiormente. Se per assurdo $f([a,b])$ non fosse limitato superiormente, allora
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x_M \in [a,b] \text{ con } f(x_M) > M.$$
Scegliendo $M = 1, 2, 3, \dots$ otterremmo dei numeri $x_n \in [a,b]$ con $f(x_n) > n$. La successione x_n è limitata, infatti
$$a \leqslant x_n \leqslant b \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Possiamo quindi applicare ad x_n il teorema di Bolzano-Weierstrass ed estrarre da x_n una sottosuccessione convergente. Indichiamo tale sottosuccessione con
$$y_n = x_{k_n} \quad n \in \mathbb{N}$$
ed allora
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \bar{x}.$$
Siccome
$$a \leqslant y_n = x_{k_n} \leqslant b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
deve essere $a \leqslant \bar{x} \leqslant b$, ossia $\bar{x} \in [a,b]$ e quindi la funzione f è definita in $\bar{x}$. Essendo la funzione continua in $\bar{x}$, si ottiene:
$$f(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_k) \geqslant \lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$$
(abbiamo usato la disuguaglianza $f(x_{k_n}) > k_n$ valida per la scelta di x_n). Si avrebbe quindi $f(\bar{x}) = +\infty$, mentre, essendo $\bar{x} \in [a,b]$, risulta $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$.

II passo. Indichiamo con $M = \sup f([a,b])$ e verifichiamo che esiste $\bar{x} \in [a,b]$ con $f(x) = M$. Dalle proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, si ricava che:
$$f(x) \leqslant M \qquad \forall x \in [a,b] \qquad (\clubsuit)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < M,\ \exists x_\lambda \in [a,b] \text{ tale che } f(x_\lambda) > \lambda. \qquad (\spadesuit)$$
Applicando la seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore a $\lambda = M - \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, otteniamo una successione $x_n \in [a,b]$ con $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Ragionando ora come nel primo passo, applichiamo il teorema di Bolzano-Weierstrass, per ottenere una sottosuccessione $y_n = x_{k_n}$ con
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \bar{x} \in [a,b].$$
Allora, essendo la funzione f continua in $\bar{x}$
$$f(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = M$$
(da notare che l'ultimo uguale nella relazione precedente deriva dal fatto che $M - \frac{1}{k_n} < f(y_n) \leqslant M$). □

Osservazione

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $f([a,b])$ è un intervallo per il teorema dei valori assunti che risulta essere un intervallo limitato e chiuso per il teorema di Weierstrass, dunque $f([a,b]) = [m,M]$.

Teorema

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che A sia un intervallo. Supponiamo inoltre che f sia iniettiva. Allora f è o strettamente crescente o strettamente decrescente.

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$. Supponiamo, dovendo essere $f(x_1) \neq f(x_2)$, che sia $f(x_1) < f(x_2)$ e proviamo che allora la funzione f è strettamente crescente. Osserviamo in primo luogo che se $x \in A$ e $x < x_1$, allora $f(x) < f(x_1)$. Infatti se fosse $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$, per il teorema dei valori assunti, esisterebbe $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ con $f(\bar{x}) = f(x)$, contro l'ipotesi che f è iniettiva (infatti $\bar{x} \neq x$). In modo analogo si può vedere che non può essere $f(x_1) < f(x_2) < f(x)$. In modo del tutto simile si prova che se $x \in A$ e $x_1 < x < x_2$, allora $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$ e che se $x \in A$ e $x_2 < x$ allora $f(x_2) < f(x)$. Ragionando nello stesso modo si può infine verificare che se $x, y \in A$ e $x < y$, allora $f(x) < f(y)$. □

Teorema

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione monotona definita in un intervallo A. Supponiamo inoltre che $f(A)$ sia pure un intervallo. Allora f è continua.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente. Se x_0 è un punto interno ad A, allora esistono i limiti:
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$
Risulta inoltre
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L = \sup\{f(x) : x \in A,\ x < x_0\} \leqslant f(x_0),$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = M = \inf\{f(x) : x \in A,\ x > x_0\} \geqslant f(x_0).$$
Si tratta quindi di dimostrare che $L = M = f(x_0)$. Supponiamo, ragionando per assurdo, che sia $L < f(x_0)$. Osserviamo che se $x < x_0$, allora $f(x) \leqslant L$, mentre se $x \geqslant x_0$, allora $f(x) \geqslant f(x_0)$. Ne deriverebbe quindi che $f(A)$ non è un intervallo. Analogamente si prova che deve essere $M = f(x_0)$. □

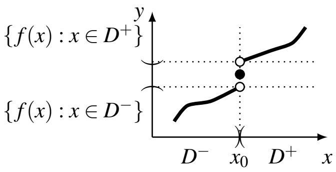
Corollario

Sia A un intervallo e sia $f\colon A \to B$ una funzione continua e biettiva. Allora pure la funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$ è una funzione continua.

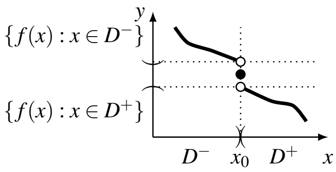
Dimostrazione. Per il teorema dei valori assunti, $B = f(A)$ è un intervallo. Inoltre f è o strettamente crescente o strettamente decrescente. La funzione inversa f^{-1} è monotona dello stesso tipo della diretta, è definita in un intervallo: B e $f^{-1}(B) = A$ è ancora un intervallo. Allora f^{-1} è una funzione continua. □

36 Applicazioni allo studio degli estremi di un insieme

Se $f\colon D\to\mathbb{R}$ è una funzione monotona (crescente o decrescente) ed $x_0\in\mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per $D^-=D\cap(-\infty,x_0)$ e $D^+=D\cap(x_0,+\infty)$, allora i limite destro e sinistro sono legati agli estremi superiore ed inferiore di $\{f(x):x\in D^\pm\}$, come facilmente intuibile dal seguente disegno.



funzione monotona crescente



funzione monotona decrescente

Più in generale si ha quanto riportato nei seguenti teoremi.

Teorema

Sia $f\colon D\to\mathbb{R}$ una funzione crescente.

(1) Se x_0 è un punto di accumulazione per $D^-=D\cap(-\infty,x_0)$, allora
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\sup\big\{f(x):x\in D^-\big\}.$$

(2) Se x_0 è un punto di accumulazione per $D^+=D\cap(x_0,+\infty)$, allora
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\inf\big\{f(x):x\in D^+\big\}.$$

(3) Se x_0 appartiene a D ed è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+, allora
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\leqslant f(x_0)\leqslant \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (**1**); le altre sono lasciate come esercizio per casa. f è crescente e quindi
$$(x_1,x_2\in D \text{ e } x_1<x_2)\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2).$$
Distinguiamo due casi.

• Se $\{f(x):x\in D^-\}$ è limitato superiormente, allora dobbiamo verificare che $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$, dove $L=\sup\{f(x):x\in D^-\}\in\mathbb{R}$. Sia $\varepsilon>0$. Per le proprietà del sup, esiste $x_\varepsilon\in D^-$ tale che $f(x_\varepsilon)>L-\varepsilon$. Per la crescenza di f si ha che per ogni $x\in D^-$ tale che $x_\varepsilon<x<x_0$ si ha
$$L-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\leqslant f(x)\leqslant L<L+\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$
Dunque basta prendere $\delta=x_0-x_\varepsilon>0$ nella definizione di limite sinistro convergente.

• Se $\{f(x):x\in D^-\}$ non è limitato superiormente, allora dobbiamo verificare che $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$. Sia $M>0$. Per le proprietà del sup esiste $x_M\in D^-$ tale che $f(x_M)>M$. Per la crescenza di f si ha che per ogni $x\in D^-$ tale che $x_M<x<x_0$ si ha
$$f(x)\geqslant f(x_M)>M.$$
Dunque basta prendere $\delta=x_0-x_M>0$ nella definizione di limite sinistro divergente. □

Teorema

Sia $f\colon D\to\mathbb{R}$ una funzione decrescente.

(1) Se x_0 è un punto di accumulazione per $D^-=D\cap(-\infty,x_0)$, allora
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\inf\big\{f(x):x\in D^-\big\}.$$

(2) Se x_0 è un punto di accumulazione per $D^+=D\cap(x_0,+\infty)$, allora
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\sup\big\{f(x):x\in D^+\big\}.$$

(3) Se x_0 appartiene a D ed è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+, allora
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\leqslant f(x_0)\leqslant \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente alla funzione crescente $g(x)=-f(x)$ ed osservare che
$$\sup\big\{-f(x):x\in D^-\big\}=-\inf\big\{f(x):x\in D^-\big\},$$
$$\inf\big\{-f(x):x\in D^+\big\}=-\sup\big\{f(x):x\in D^+\big\}.$$
□

Teorema

Sia $f\colon D\to\mathbb{R}$ una funzione crescente.

(1) Se D non è inferiormente limitato, allora
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\inf\{f(x):x\in D\}.$$

(2) Se D non è superiormente limitato, allora
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sup\{f(x):x\in D\}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata come esercizio per casa. □

Teorema

Sia $f\colon D\to\mathbb{R}$ una funzione decrescente.

(1) Se D non è inferiormente limitato, allora
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\sup\{f(x):x\in D\}.$$

(2) Se D non è superiormente limitato, allora
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\inf\{f(x):x\in D\}.$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente alla funzione crescente $g(x)=-f(x)$ ed osservare che
$$\sup\{-f(x):x\in D\}=-\inf\{f(x):x\in D\},$$
$$\inf\{-f(x):x\in D\}=-\sup\{f(x):x\in D\}.$$
□

Esempio

Consideriamo l'insieme
$$A=\big\{\tfrac{x}{x+1}:x\geqslant 0\big\}.$$
$f(x)=\frac{x}{x+1}$ è (strettamente) crescente in quanto se $x<y$ allora
$$f(x)-f(y)=\tfrac{x}{x+1}-\tfrac{y}{y+1}=\tfrac{x-y}{(x+1)(y+1)}<0.$$
Inoltre si ha
$$f(x)=1-\tfrac{1}{x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0, \qquad f(0)=0,$$
e pertanto
$$\sup(A)=1, \qquad \inf(A)=\min(A)=0,$$
Infine $\max(A)$ non esiste in quanto
$$f(x)=1-\tfrac{1}{x+1}<1=\sup(A) \qquad \forall x\geqslant 0$$
e quindi $\sup(A)\notin A$.

Esempio

Consideriamo l'insieme
$$A=\Big\{\sqrt{n^2-n+1}-n:n\in\mathbb{N}\Big\}.$$
Verifichiamo che $a_n=\sqrt{n^2-n+1}-n$ è decrescente:
$$\begin{aligned}
&a_{n+1}<a_n\\
\iff&\sqrt{n^2+2n+1-n-1+1}-n-1<\sqrt{n^2-n+1}-n\\
\iff&\sqrt{n^2+n+1}<\sqrt{n^2-n+1}+1\\
\iff&n^2+n+1<n^2-n+1+1+2\sqrt{n^2-n+1}
\end{aligned}$$

$$\iff 2n+1 < 2\sqrt{n^2-n+1}$$
$$\iff 4n^2-4n+1 < 4n^2-4n+4 \iff 1 < 4.$$

Ne deriva che

$$\sup(A) = \max(A) = a_1 = 0,$$
$$\inf(A) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio

Verificare quanto riportato in tabella.

A	$\inf(A)$	$\min(A)$	$\sup(A)$	$\max(A)$
$\left\{\frac{2n+5}{n+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$	2	$\nexists$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$
$\left\{\frac{n+2\sqrt{n}}{n+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$	1	$\nexists$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$
$\{\sqrt{n^2+2n}-n : n\in\mathbb{N}\}$	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{3}-1$	1	$\nexists$
$\left\{\frac{2n^2-n+1}{n^2+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$	1	1	2	$\nexists$
$\left\{\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} : n\in\mathbb{N}\right\}$	1	$\nexists$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$\{\sqrt{n^2+n}-n : n\in\mathbb{N}\}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$	$1/2$	$\nexists$
$\{\sqrt{n^2+7n}-n : n\in\mathbb{N}\}$	$2\sqrt{2}-1$	$2\sqrt{2}-1$	$7/2$	$\nexists$
$\{\sqrt{n^2+3}-n : n\in\mathbb{N}\}$	0	$\nexists$	1	1
$\{\sqrt{n^2+2n}-n : n\in\mathbb{N}\}$	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{3}-1$	1	$\nexists$
$\{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1} : n\in\mathbb{N}\}$	0	$\nexists$	$\sqrt{5}-\sqrt{2}$	$\sqrt{5}-\sqrt{2}$
$\{\sqrt{n^2+n+1}-n : n\in\mathbb{N}\}$	$1/2$	$\nexists$	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{3}-1$

Esercizio

Dimostrare che se $A\subseteq\mathbb{N}$ è diverso dall'insieme vuoto, allora A ha un elemento minimo.

Capitolo 9

Derivate

37 Definizione e prime proprietà

Definizione

Consideriamo una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

- f è **derivabile a destra** in $x_0 \in [a,b)$ se esiste finito
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
In tal caso tale limite è la **derivata destra** di f nel punto x_0 ed è indicato con $f'_+(x_0)$.
- f è **derivabile a sinistra** in $x_0 \in (a,b]$ se esiste finito
$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
In tal caso tale limite è la **derivata sinistra** di f nel punto x_0 ed è indicato con $f'_-(x_0)$.
- f è **derivabile** in $x_0 \in [a,b]$ se esiste finito
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
In tal caso tale limite è la **derivata** di f nel punto x_0 ed è indicato con $f'(x_0)$.

Osservazione

Ponendo $t = x - x_0$, la definizione precedente può essere riformulata in termini del **rapporto incrementale**
$$\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}.$$

- f è derivabile a destra in $x_0 \in [a,b)$ se esiste finito il limite destro del rapporto incrementale
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},$$
ed in tal caso tale limite è la derivata destra di f in x_0.
- f è derivabile a sinistra in $x_0 \in (a,b]$ se esiste finito il limite sinistro del rapporto incrementale
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},$$
ed in tal caso tale limite è la derivata sinistra di f in x_0.
- f è derivabile in $x_0 \in [a,b]$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},$$
ed in tal caso tale limite è la derivata di f in x_0.

Proposizione

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ se e solo se è derivabile sia a destra che a sinistra di x_0 ed inoltre $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. In tal caso si ha che $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Dimostrazione. Basta sfruttare il fatto che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x). \qquad \square$$

Osservazione

La definizione di funzione derivabile può essere riformulata richiedendo che
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x \in [a,b] \text{ con } 0 < |x-x_0| < \delta_\varepsilon \text{ si ha}$$
$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Osservazione

Per definizione, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 = a$ se esiste finito
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} = f'_+(a),$$
ovvero
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x \in [a,b] \text{ con } 0 < x-a < \delta_\varepsilon \text{ si ha}$$
$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$
Considerazioni analoghe valgono per $x_0 = b$.

Esempio

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$. Se $x_0 > 0$, allora
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1,$$
e pertanto $f'(x_0) = 1$. Analogamente, se $x_0 < 0$, allora $f'(x_0) = -1$. Infine, se $x_0 = 0$, allora
$$\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
in quanto
$$f'_-(0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -1 \neq f'_+(0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1,$$
e pertanto f non è derivabile in $x_0 = 0$, ma lo è sia a sinistra che a destra di $x_0 = 0$. In conclusione, il dominio di definizione di $f'(x)$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ed inoltre
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Osservazione

Se consideriamo $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$, allora f è derivabile in tutto $[0,+\infty)$ ed $f'(x) = 1$ per ogni $x \geqslant 0$. Infatti $f(x) = x$ per ogni $x \geqslant 0$ e pertanto
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$
Analogamente, se consideriamo $f\colon (-\infty,0] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$, allora f è derivabile in tutto $(-\infty,0]$ ed $f'(x) = -1$ per ogni $x \leqslant 0$ visto che $f(x) = -x$ per ogni $x \leqslant 0$.

Esempio

Se $f(x) = x^2$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$, allora
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x+x_0) = 2x_0.$$

Esempio

Se $f(x) = x^3$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$, allora
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(x^2+xx_0+x_0^2\right) = 3x_0^2.$$

Esempio

Se $f(x) = \sqrt{x}$ ed $x_0 > 0$, allora
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$
Infine, f non è derivabile in $x_0 = 0$ in quanto
$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Esempio

Se $f(x)=\sin(x)$ ed $x_0\in\mathbb{R}$, allora per l'identità trigonometrica $\sin(x)-\sin(x_0)=2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$ si ha

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}=\cos(x_0).$$

Esempio

Se $f(x)=\cos(x)$ ed $x_0\in\mathbb{R}$, allora per l'identità trigonometrica $\cos(x)-\cos(x_0)=-2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0}\\ &=-\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}=-\sin(x_0).\end{aligned}$$

Esempio

Se $f(x)=e^x$ ed $x_0\in\mathbb{R}$, allora

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}e^{x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}=e^{x_0}.$$

Esempio

Se $f(x)=\ln(x)$ ed $x_0>0$, allora

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)}{x-x_0}=\frac{1}{x_0}.$$

Proposizione

Se $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ è derivabile in $x_0\in[a,b]$, allora f è anche continua in x_0.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0.\quad\square$$

Osservazione

Il viceversa della proposizione precedente non è vero: una funzione continua in un punto potrebbe non essere ivi derivabile. Ad esempio $f(x)=|x|$ è continua in $x_0=0$ ma non è ivi derivabile.

38 Significato geometrico della derivata

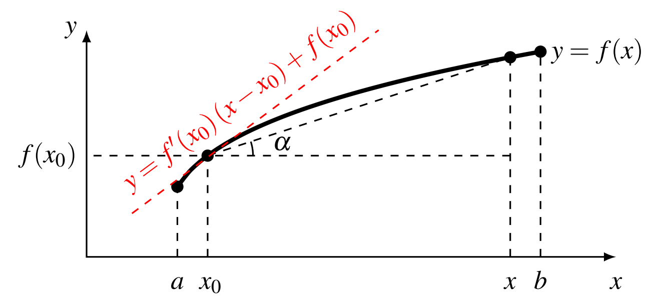
Si consideri una funzione $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ e due punti $x_0,x\in[a,b]$. La retta passante per $(x_0,f(x_0))$ ed $(x,f(x))$ forma un angolo α (misurato in radianti) con l'asse delle x e quindi

$$\tan(\alpha)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Se f è derivabile in x_0, allora possiamo mandare x ad x_0 ed ottenia-mo al limite una retta che passa per $(x_0,f(x_0))$ e forma un angolo $\arctan(f'(x_0))$ con l'asse delle x e quindi è il grafico della funzione

$$T(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Tale retta è detta **retta tangente** al grafico di f nel punto x_0, o più brevemente retta tangente ad f in x_0.



Osservazione

Sia $d(x)$ la "distanza verticale" con segno tra il punto $(x,f(x))$ del grafico f ed il punto $(x,T(x))$ della retta tangente. Per definizione si ha

$$d(x)=f(x)-\big(f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\big)$$

e valgono le seguenti proprietà:

(1) $\lim_{x\to x_0}d(x)=\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\big)=0$,

(2) $\lim_{x\to x_0}\frac{d(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0$.

In realtà, la retta tangente $T(x)$ è l'unica retta con tali proprietà. Infatti l'equazione generale di una retta passante per $(x_0,f(x_0))$ è

$$r(x)=m(x-x_0)+f(x_0)$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-r(x)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(m(x-x_0)+f(x_0))}{x-x_0}\\ &=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m=f'(x_0)-m=0\iff m=f'(x_0).\end{aligned}$$

Dunque, **(1)** e **(2)** possono essere utilizzate per dare una definizione alternativa alla retta tangente.

39 Regole di derivazione

Proposizione

Siano $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0\in[a,b]$.

(1) $f+g$ è derivabile in x_0 e vale la formula

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

(2) $f\cdot g$ è derivabile in x_0 e vale la formula

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

(3) se $g(x_0)\neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e vale la formula

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Dimostrazione.

(1) La dimostrazione è lasciata come esercizio per casa.

(2) Basta osservare che

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}&=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

e mandare $x\to x_0$.

(3) Basta osservare che

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}&=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\\ &=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\\ &=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{g(x)g(x_0)},\end{aligned}$$

dividere per $x-x_0$ e poi mandare $x\to x_0$. $\square$

Proposizione

Siano $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g\colon[c,d]\to\mathbb{R}$ tali che $f([a,b])\subseteq[c,d]$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g\circ f$ è derivabile in x_0 e vale la formula

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Dimostrazione. Posto $y_0=f(x_0)$, sia $h\colon[c,d]\to\mathbb{R}$ definita da

$$h(y)=\begin{cases}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{se } y\in[c,d]\setminus\{y_0\},\\ g'(y_0) & \text{se } y=y_0.\end{cases}$$

Dalla definizione di derivata si ha che

$$\lim_{y\to y_0}h(y)=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=g'(y_0)=h(y_0)$$

e quindi h è continua in y_0. Dalla definizione di h si ha che

$$g(y)-g(y_0)=h(y)(y-y_0)\qquad\forall y\in[c,d].$$

Ponendo $y = f(x)$ nella formula precedente, dividendo per $x - x_0$ e ricordando che $y_0 = f(x_0)$, si ha

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x))\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Per il teorema sul limite della funzione composta si ha che

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} h(y) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = h(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \quad \square$$

Dalla proposizione precedente segue immediatamente il seguente

Corollario

Se $f\colon [a,b] \to [c,d]$ è una funzione continua, biettiva e derivabile in $x_0 \in [a,b]$ con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Visto che $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, per la proposizione precedente si ha

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x))\, f'(x) = 1,$$

da cui segue immediatamente l'asserzione. $\square$

Esempio

$$(x\cos(x))' = \cos(x) - x\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x+1)\left(x^2+1\right) - (x^2+x+1)2x}{(x^2+1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio

Se $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, allora

$$f'(x_0) = \frac{\cos(x_0)\cos(x_0) - \sin(x_0)(-\sin(x_0))}{\cos(x_0)^2}$$

$$= \frac{1}{\cos(x_0)^2} = 1 + \tan(x_0)^2 \quad \forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio

$$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostriamolo per induzione. Se $n = 1$, la formula è vera. Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo numero naturale n, allora si ha

$\left(x^{n+1}\right)' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n$

e quindi la formula vale anche per $n+1$. Pertanto la formula in generale vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Esempio

$$g(y) = \arctan(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

è la funzione inversa di $f(x) = \tan(x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, quindi per $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ ed $y_0 = \tan(x_0)$ si ha

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan(x_0)^2} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Esempio

$$g(y) = \arcsin(y), \quad y \in [-1, 1]$$

è la funzione inversa di $f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, quindi per $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ ed $y_0 = \sin(x_0) \in (-1, 1)$ si ha

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Esempio

$$f(x) = x^x \quad x > 0 \Longrightarrow f(x) = e^{x\ln(x)} \quad x > 0 \Longrightarrow$$

$$f'(x) = e^{x\ln(x)}\left(\ln(x) + x \cdot \tfrac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x) + 1) \quad x > 0$$

e più in generale se $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, allora

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

$$\Longrightarrow h'(x) = h(x)\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Esempio

Se $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, allora

$$f'(x_0) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0}\right)^2}\left(-\frac{1}{x_0^2}\right) = -\frac{1}{1 + x_0^2}, \quad x_0 \neq 0.$$

Esempio

Se $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, allora

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\,\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Esempio

Le **funzioni iperboliche**

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

godono delle seguenti proprietà:

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1,$$

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x),$$

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

Diamo di seguito una lista di alcune derivate immediate.

$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$	$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2}$
$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln(a)$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$, $x > 0$, $a > 0$	$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$
$\frac{d}{dx}\log_a(\lvert x\rvert) = \frac{1}{x\ln(a)}$, $x \neq 0$, $a > 0$	$\frac{d}{dx}\ln(\lvert x\rvert) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$
$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$	$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$
$\frac{d}{dx}\coth(x) = -\operatorname{csch}(x)^2$	

Capitolo 10

Applicazioni delle derivate

40 Massimi e minimi relativi

Definizione

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in [a,b]$.

- x_0 è un **punto di minimo relativo** se:
$$\exists r > 0 \text{ tale che } \forall x \in [a,b] \cap [x_0 - r, x_0 + r] \text{ si ha } f(x) \geqslant f(x_0).$$
- x_0 è un **punto di massimo relativo** se:
$$\exists r > 0 \text{ tale che } \forall x \in [a,b] \cap [x_0 - r, x_0 + r] \text{ si ha } f(x) \leqslant f(x_0).$$

Teorema di Fermat

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in [a,b]$. Supponiamo che:

i) x_0 sia un punto di minimo (massimo) relativo per f;
ii) $x_0 \in (a,b)$;
iii) f è derivabile in x_0.

Allora risulta $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che il punto x_0 sia di minimo relativo. Allora $\exists r > 0$ tale che $\forall x \in [a,b] \setminus [x_0 - r, x_0 + r]$ vale la disuguaglianza $f(x) \geqslant f(x_0)$. Inoltre, usando la seconda ipotesi e scegliendo r eventualmente più piccolo, possiamo supporre che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [a,b]$. Ne segue quindi che:
$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0 \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$
Il rapporto incrementale della funzione f nel punto x_0 gode pertanto delle seguenti proprietà
$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0),$$
$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + r).$$
Visto che f è derivabile in x_0, si ha
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0,$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0,$$
e quindi deve essere $f'(x_0) = 0$. □

Osservazione

Se il punto di minimo (massimo) relativo x_0 è tale che $x_0 = a$ o $x_0 = b$ (e quindi l'ipotesi **ii)** del teorema di Fermat non è verificata), allora in generale non si ha che $f'(x_0) = 0$. Ad esempio $f(x) = x$ con $x \in [0,1]$ ha $x_0 = 0$ come punto di minimo in $[0,1]$ (e quindi anche un punto di minimo relativo), ma $f'(0) = 1$.

Osservazione

La condizione $f'(x_0) = 0$ è una condizione solo necessaria affinché x_0 sia punto di minimo o di massimo relativo. In altre parole, una funzione può avere derivata nulla in un punto senza che tale punto sia di minimo o di massimo relativo per la funzione. Ad esempio la funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è una funzione strettamente crescente anche se $f'(0) = 0$.

Teorema di Rolle

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

i) f è continua in $[a,b]$;
ii) f è derivabile in (a,b);
iii) $f(a) = f(b)$.

Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. f è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$, quindi per il teorema di Weierstrass abbiamo che
$$\exists x_1, x_2 \in [a,b] \text{ t.c. } f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \ \forall x \in [a,b]$$
(ossia f assume in $[a,b]$ sia valore minimo che valore massimo). Consideriamo ora i seguenti casi.

- Se il punto di minimo x_1 è in (a,b), allora per il teorema di Fermat $f'(x_1) = 0$ ed il teorema di Rolle è dimostrato prendendo $c = x_1$.
- Se x_1 coincide con a o con b, ed il punto di massimo x_2 è in (a,b), allora per il teorema di Fermat $f'(x_2) = 0$ ed il teorema di Rolle è dimostrato prendendo $c = x_2$.
- Infine, se x_1 ed x_2 coincidono entrambi con gli estremi (ad esempio $x_1 = a$ ed $x_2 = b$), allora dall'ipotesi $f(a) = f(b)$ segue che il valore minimo di f coincide col suo valore massimo, ovvero f è costante ($f(x) = f(a) = f(b)$ per ogni $x \in [a,b]$) e pertanto $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$. □

Teorema di Cauchy

Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni tale che:

i) f e g sono continue in $[a,b]$;
ii) f e g sono derivabili in (a,b).

Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che
$$(g(b) - g(a)) f'(x_0) = (f(b) - f(a)) g'(x_0).$$

Dimostrazione. La funzione
$$h(x) = (g(b) - g(a)) f(x) - (f(b) - f(a)) g(x)$$
verifica le ipotesi del teorema di Rolle, in quanto
$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a)) f(a) - (f(b) - f(a)) g(a) \\ &= g(b) f(a) - f(b) g(a), \\ h(b) &= (g(b) - g(a)) f(b) - (f(b) - f(a)) g(b) \\ &= -g(a) f(b) + f(a) g(b) = h(a). \end{aligned}$$
Di conseguenza esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $h'(x_0) = 0$ e questo conclude la dimostrazione del teorema in quanto
$$h'(x) = (g(b) - g(a)) f'(x) - (f(b) - f(a)) g'(x).$$ □

Teorema di Lagrange

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

i) f è continua in $[a,b]$;
ii) f è derivabile in (a,b).

Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione. L'equazione della retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ è $y = s(x)$ con
$$s(x) = f(a) + \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a).$$
Notiamo infine che la funzione differenza
$$g(x) = f(x) - s(x) = f(x) - \Big(f(a) + \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) \Big)$$
verifica le ipotesi del teorema di Rolle: infatti g è continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ perché f ed s lo sono, è derivabile nell'intervallo aperto (a,b), sempre perché f ed s lo sono, ed inoltre risulta

$g(a) = 0 = g(b)$. Allora, per il teorema di Rolle esiste un punto c tale che $g'(c) = 0$, ossia

$$0 = g'(c) = f'(c) - s'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Pertanto il teorema di Lagrange è dimostrato. □

Osservazione

Il teorema di Rolle segue da quello di Lagrange.

Proposizione

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $[a,b]$.

- Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora f è strettamente crescente in $[a,b]$.
- Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora f è strettamente decrescente in $[a,b]$.
- Se $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora f è crescente in $[a,b]$.
- Se $f'(x) \leqslant 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora f è decrescente in $[a,b]$.
- Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora f è costante in $[a,b]$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo il primo punto; il resto è lasciato come esercizio per casa. Se $x_1, x_2 \in [a,b]$ sono tali che $x_1 < x_2$, applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$, si ottiene che esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

ed essendo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$, risulta

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$$

e quindi $f(x_2) > f(x_1)$. □

Corollario

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $[a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

- Se esiste $r > 0$ tale che $f'(x) \leqslant 0$ per ogni $x \in (x_0 - r, x_0) \cap [a,b]$ ed $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + r) \cap [a,b]$, allora x_0 è un punto di minimo relativo.
- Se esiste $r > 0$ tale che $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (x_0 - r, x_0) \cap [a,b]$ ed $f'(x) \leqslant 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + r) \cap [a,b]$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

Dimostrazione. Segue dalla proposizione precedente. I dettagli sono lasciati come esercizio per casa. □

Esercizio

Verificare quanto riportato in tabella.

A	$\inf(A)$	$\min(A)$	$\sup(A)$	$\max(A)$
$\{2\sqrt{x^2+x} - x : x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$	0	0	$+\infty$	$\nexists$
$\left\{\frac{x}{x-1} : x \in \mathbb{R},\ x \neq 1\right\}$	$-\infty$	$\nexists$	$+\infty$	$\nexists$
$\left\{\frac{x-2}{x^2-2x+3} : x \in \mathbb{R}\right\}$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$
$\{\sqrt{x^2+x} - x : x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$	0	0	$1/2$	$\nexists$
$\left\{\frac{x+1}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
$\left\{\frac{x+1}{x-1} : x \in \mathbb{R},\ x > 1\right\}$	1	$\nexists$	$+\infty$	$\nexists$
$\left\{\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1} : x \in \mathbb{R},\ x \neq 1\right\}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$	$\nexists$
$\{\sqrt{x^2+x+2} - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$	$-\frac{1}{2}$	$\nexists$	$+\infty$	$\nexists$
$\left\{\frac{x+3}{(x-1)^2} : x \in \mathbb{R},\ x \neq 1\right\}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$+\infty$	$\nexists$
$\left\{\frac{3x-1}{x^2+x+3} : x \in \mathbb{R}\right\}$	$-\frac{5+2\sqrt{31}}{11}$	$-\frac{5+2\sqrt{31}}{11}$	$\frac{2\sqrt{31}-5}{11}$	$\frac{2\sqrt{31}-5}{11}$
$\left\{\frac{x^2+6x+1}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\}$	-2	-2	4	4
$\left\{\frac{x^2+x+1}{x^2} : x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\right\}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$	$\nexists$
$\left\{\frac{x+1}{x^2-x+1} : x \in \mathbb{R}\right\}$	$1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

41 Derivate di ordine superiore

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in ogni punto di $[a,b]$, possiamo considerare la funzione derivata $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, cioè la funzione che ad ogni $x \in [a,b]$ associa $f'(x)$. Se la funzione f' è derivabile in un punto $x_0 \in [a,b]$, allora diremo che la funzione f è derivabile due volte in x_0 e chiameremo tale derivata la **derivata seconda** di f in x_0 e la indicheremo col simbolo $f''(x_0)$. Per definizione

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Esempio

$$f(x) = x\sin(x) \Longrightarrow f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$$
$$\Longrightarrow f''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$$

Esempio

Per $x \neq \pi/2 + k\pi k \in \mathbb{Z}$ abbiamo che

$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan(x)^2 \Rightarrow f''(x) = 2\tan(x)\big(1+\tan(x)^2\big)$.

Proposizione

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione dotata di derivata seconda continua in ogni punto di $[a,b]$ ed $x_0 \in (a,b)$.

- Se $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) > 0$, allora il punto x_0 è di minimo relativo per f.
- Se $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) < 0$, allora il punto x_0 è di massimo relativo per f.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima asserzione; la seconda è lasciata come esercizio per casa. Visto che f'' è una funzione continua ed $f''(x_0) > 0$, per il teorema della permanenza del segno, esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [a,b]$ ed $f''(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Di conseguenza f' è una funzione crescente (avendo derivata positiva) e siccome $f'(x_0) = 0$, risulta $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + r)$ e $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0)$. Pertanto x_0 è punto di minimo relativo. □

42 Funzioni concave e funzioni convesse

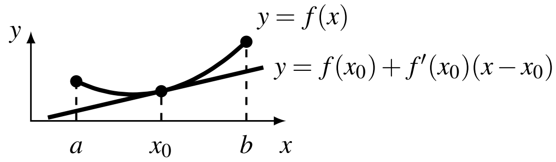
Definizione

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $[a,b]$.

- f è **concava** se la funzione $-f$ è convessa, ovvero
$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x, x_0 \in [a,b].$$
- f è **convessa** nell'intervallo $[a,b]$ se
$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x, x_0 \in [a,b].$$

Osservazione

Se una funzione f è convessa, allora il grafico di f sta sempre "sopra" la retta tangente (qualunque sia il punto in cui tale tangente viene considerata).



Esempio

- Le funzioni costanti sono sia concave che convesse.
- Esistono funzioni che non sono né concave, né convesse. Basti

pensare ad $f(x)=x^3$.

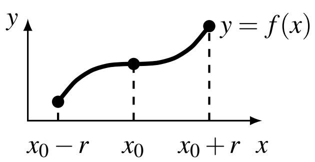
Proposizione

Sia $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione dotata di derivata seconda.
- Se $f''(x)\geqslant 0$ per ogni $x\in[a,b]$, allora f è convessa in $[a,b]$.
- Se $f''(x)\leqslant 0$ per ogni $x\in[a,b]$, allora f è concava in $[a,b]$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima asserzione; la seconda è lasciata come esercizio per casa. Se la derivata seconda è maggiore o uguale a zero, allora la derivata prima è crescente e quindi, supponendo $x_0<x$ ed applicando il teorema di Lagrange, otteniamo che $\exists c\in(x_0,x)$ tale che
$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c)\geqslant f'(x_0)$$
e quindi la funzione f è convessa. □

Definizione

$x_0\in(a,b)$ è un **flesso** per la funzione f se esiste $r>0$ tale che f è convessa in $[x_0-r,x_0]$ ed è concava in $[x_0,x_0+r]$, o viceversa.



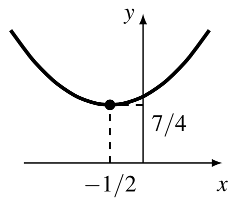
43 Studio del grafico di una funzione

Applicheremo le considerazioni dei paragrafi precedenti allo studio del grafico di una funzione. Indichiamo il metodo generale di procedere:

- Determinare l'insieme di definizione D e calcolare i limiti quando x tende agli estremi di D.
- Evidenziare proprietà qualitative di f come, ad esempio, se f è pari o dispari, dove la funzione si annulla e dove la funzione è positiva o negativa.
- Calcolare la derivata prima f' e studiarne il segno per vedere dove f è crescente o decrescente e per trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi.
- Calcolare la derivata seconda f'' e studiarne il segno per vedere dove la funzione è concava o convessa e per trovare gli eventuali punti di flesso.
- Vedere se f ha asintoti obliqui, ossia vedere se esiste una retta di equazione $y=mx+q$ tale che:
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+q))=0, \qquad \text{(asintoto a } +\infty)$$
oppure tale che
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+q))=0. \qquad \text{(asintoto a } -\infty)$$
Si noti che la retta $y=mx+q$ è asintoto di f a $+\infty$ se e solo se
$$m=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad q=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx).$$
Analogamente la retta $y=mx+q$ è asintoto di f a $-\infty$ se e solo se
$$m=\lim_{x\to-\infty}\tfrac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad q=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx).$$

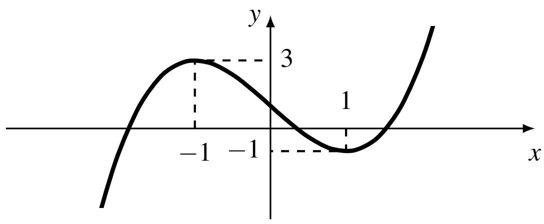
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x)=x^2+x+2.$$
Il dominio di definizione è $D=\mathbb{R}$. Inoltre $f'(x)=2x+1$ e quindi $x=-1/2$ è un punto di minimo relativo per f. Inoltre risulta $f(-1/2)=7/4$. Infine $f''(x)=2>0$ e pertanto f è convessa. In conclusione, il grafico di f è del tipo riportato in figura.



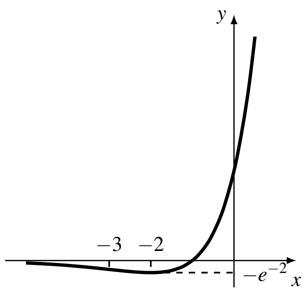
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x)=x^3-3x+1.$$
Il dominio di definizione è $D=\mathbb{R}$ e
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$
Inoltre $f'(x)=3x^2-3$ e quindi $f'(x)>0$ se e solo se $x<-1$ o $x>1$. Il punto $x=-1$ è pertanto di massimo relativo ed il punto $x=1$ è di minimo relativo. Da notare che $f(-1)=3$ ed $f(1)=-1$. Risulta infine $f''(x)=6x$ e quindi f è convessa in $[0,+\infty)$ ed è concava in $(-\infty,0]$. Pertanto il grafico di f è del tipo riportato in figura.



Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x)=(x+1)e^x.$$
Il dominio di definizione è $D=\mathbb{R}$, inoltre
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$
La funzione è positiva se e solo se $x>-1$. Risulta



$$f'(x)=e^x(1+x+1)=e^x(x+2)$$
e quindi $f'(x)>0$ se e solo se $x>-2$. Il punto $x=-2$ è un punto di minimo relativo ed $f(-2)=-e^{-2}$. Inoltre $f''(x)=e^x(x+3)$ e quindi f è convessa in $[-3,+\infty)$ e concava in $(-\infty,-3]$. Pertanto il grafico di f è del tipo riportato in figura.

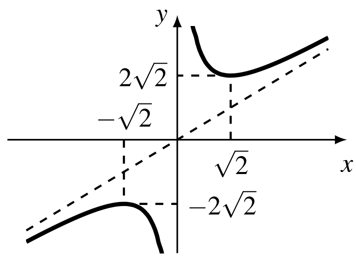
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x)=x+\tfrac{2}{x}.$$
Il dominio di definizione è $D=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 0\}$ e
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty.$$
Risulta inoltre
$$f'(x)=1-\tfrac{2}{x^2}=\tfrac{x^2-2}{x^2}$$
e quindi $f'(x)>0$ se e solo se $x<-\sqrt{2}$ o $x>\sqrt{2}$. Il punto $x=-\sqrt{2}$ è pertanto di massimo relativo ed il punto $x=\sqrt{2}$ è di minimo relativo. Da notare che risulta $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ e $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$. Inoltre $f''(x)=4/x^3$ e pertanto f è convessa in

$(0,+\infty)$ e concava in $(-\infty,0)$. Osserviamo che f è dispari e che si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0.$$

Dunque la retta $y=x$ è asintoto di f sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Pertanto il grafico di f è del tipo riportato in figura.



Esempio

Tracciamo il grafico di

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Il dominio di definizione è $D=\mathbb{R}$ e risulta

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

La funzione è positiva se e solo se $x>-1$. Risulta

$$f'(x)=\frac{x^2+x+1-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

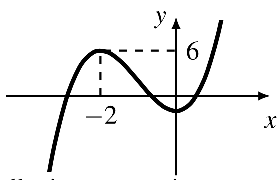
e quindi $f'(x)>0$ se e solo se $x\in(-2,0)$. Il punto $x=-2$ è un punto di minimo relativo ed il punto $x=0$ è di massimo relativo, con $f(0)=1$ ed $f(-2)=-1/3$. Osserviamo che

$$f''(x)=-\frac{(2x+2)(x^2+x+1)^2-(x^2+2x)2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$$
$$=\frac{2x^3+6x^2-2}{(x^2+x+1)^3}$$

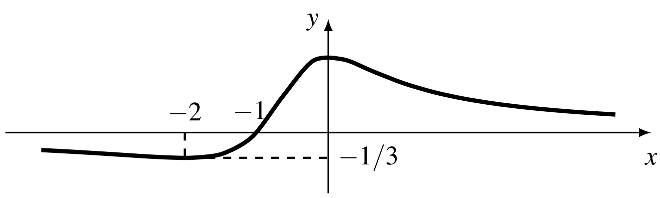
Il segno di f'', essendo il denominatore sempre positivo, è determinato dal segno del numeratore $g(x)=2x^3+6x^2-2$, che è un polinomio di terzo grado. Studiamo g. Risulta

$$g'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)>0\iff x<-2 \text{ o } x>0.$$

Essendo $g(-2)>0$ e $g(0)<0$, otteniamo per la funzione g un grafico del tipo riportato in figura.



Dunque g si annulla in tre punti: x_1, x_2, x_3 con $x_1<-2$, $-1<x_2<0$ e $0<x_3<1$ ed il segno di g è quello indicato in figura. Pertanto la funzione f è convessa negli intervalli $[x_1,x_2]$ e $[x_3,+\infty)$ ed è concava negli intervalli $(-\infty,x_1]$ e $[x_2,x_3]$. Il grafico di f è quindi del tipo riportato in figura.



Esempio

Tracciamo il grafico di

$$f(x)=x-\sqrt{4-x^2}.$$

Dovendo essere $4-x^2\geqslant 0$, il dominio della funzione è $D=[-2,2]$. Osserviamo che $f(-2)=-2$, $f(2)=2$, $f(0)=-2$ ed inoltre:

$$f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow x>\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x>0 \text{ e } x^2\geqslant 4-x^2\Leftrightarrow x\geqslant\sqrt{2}.$$

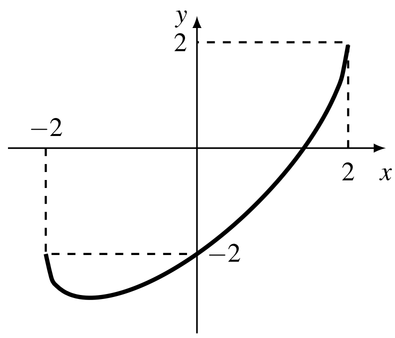
Osserviamo che

$$f'(x)=1-\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}\geqslant 0$$
$$\iff \sqrt{4-x^2}\geqslant -x, \qquad (\clubsuit)$$

dove se $x\geqslant 0$ allora ($\clubsuit$) è sempre verificata, mentre se $x<0$ allora ($\clubsuit$) si riduce a $4-x^2\geqslant x^2\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leqslant x<0$. Possiamo quindi concludere che $f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2$. Il punto $x=-\sqrt{2}$ è quindi un punto di minimo relativo. Inoltre

$$f''(x)=\left(\sqrt{4-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)\frac{1}{4-x^2}=\frac{4}{(4-x^2)^{3/2}}$$

e quindi f è convessa. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



Esempio

Tracciare il grafico della funzione:

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)(x+2)}$$

Il dominio di definizione è $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$. f è positiva in $(-2,0)$ e $(1,+\infty)$, mentre è negativa in $(-\infty,-2)$ e $(0,1)$. Risulta

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty\qquad \lim_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty\qquad \lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$$

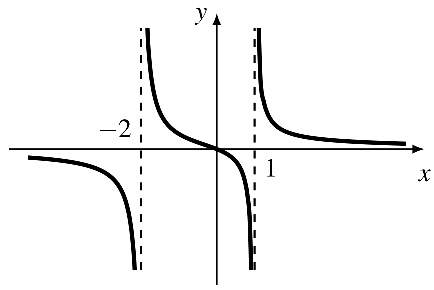
Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x)=\frac{(x^2+x-2)-x(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=-\frac{2+x^2}{(x^2+x-2)^2}$$

Ne deriva che la derivata prima è sempre negativa. Risulta ora:

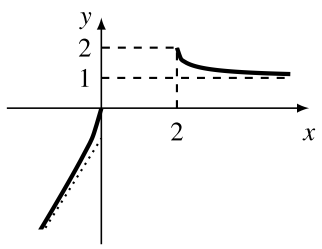
$$f''(x)=-\frac{2x(x^2+x-2)^2-(2+x^2)(2x+1)2(x^2+x-2)}{(x^2+x-2)^4}$$
$$=\frac{2(x^3+6x+2)}{(x^2+x-2)^3}.$$

Posto $g(x)=x^3+6x+2$, osserviamo che $g'(x)=3(x^2+2)$. Pertanto g è strettamente crescente e, siccome $g(-1)=-5$ e $g(0)=2$, esiste un unico punto $x_0\in(-1,0)$ tale che $g(x)>0$ se e solo se $x>x_0$. Ne deriva quindi che la funzione di partenza f è convessa negli intervalli $(-2,x_0)$ e $(1,+\infty)$ ed è concava negli intervalli $(-\infty,-2)$ e $(x_0,1)$. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



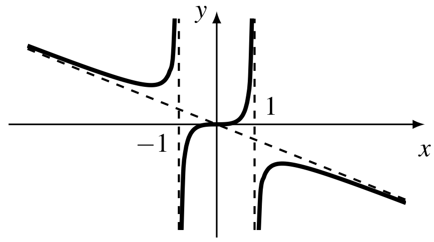
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x) = x - \sqrt{x(x-2)}.$$
Il dominio di definizione è $D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Risulta inoltre $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ e
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-2x)}{x+\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\sqrt{1-2/x}} = 1.$$
Osserviamo che
$$f'(x) = 1 - \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geqslant x-1. \quad (\spadesuit)$$
Se $x < 1$ allora ($\clubsuit$) è verificata, mentre se $x \geqslant 1$ allora ($\clubsuit$) è equivalente a $x^2 - 2x \geqslant x^2 - 2x + 1$ e questa disuguaglianza non è vera. Possiamo concludere quindi che $f'(x) > 0$ se $x < 0$, mentre $f'(x) < 0$ se $x > 2$. Osserviamo che
$$f''(x) = -\left(\sqrt{x^2-2x} - (x-1)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\right)\frac{1}{x^2-2x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}(x^2-2x)} > 0.$$
Verifichiamo infine che f ha un asintoto a $-\infty$: visto che se $x < 0$ allora $\sqrt{x^2} = -x$, si ha
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1 + \sqrt{1-2/x}) = 2,$$
$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x - \sqrt{x^2-2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x+\sqrt{x^2-2x}} = -1.$$
La retta $y = 2x - 1$ è dunque asintoto di f. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



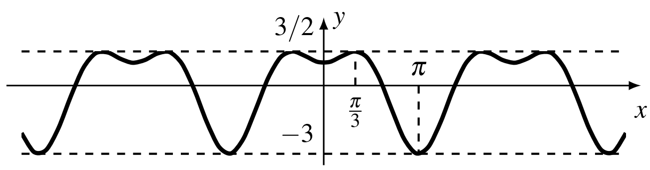
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}.$$
Il dominio di definizione è $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. La funzione è dispari e risulta $f(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, mentre $f(x) < 0$ se $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty.$$
Osserviamo che
$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2)+x^3 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$
e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cap D$, $x \neq 0$. Allora $x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = -\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo. Inoltre
$$f''(x) = \frac{(6x-4x^3)(1-x^2)^2 + (3x^2-x^4)2(1-x^2)2x}{(1-x^2)^4}$$
$$= \frac{x(6+x^2)}{(1-x^2)^3}$$
e quindi f è convessa in $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$ ed è concava negli intervalli $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$. Osserviamo che
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + x) = 0,$$
quindi la retta $y = -x$ è un asintoto di f sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



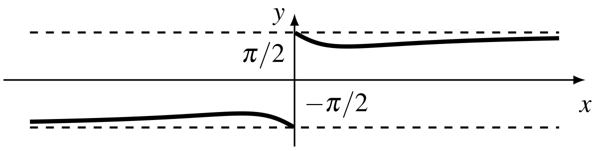
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x).$$
Il dominio di definizione è $D = \mathbb{R}$. f è periodica di periodo 2π ed è pari, ossia $f(-x) = f(x)$. Possiamo quindi studiarla solo nell'intervallo $[0, \pi]$. Osserviamo inoltre che
$$f(x) = 2\cos(x) - \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 2\cos(x) - 2\cos(x)^2 + 1.$$
Risulta quindi che $f(x) = 0$ se e solo se $\cos(x) = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Scartiamo la soluzione $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ in quanto > 1. Dunque
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \alpha = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$
Osserviamo infine che
$$f(0) = 1, \qquad f(\pi/2) = 1, \qquad f(\pi) = -3.$$
Calcoliamo ora la derivata prima
$$f'(x) = 4\cos(x)\sin(x) - 2\sin(x) = 2\sin(x)(2\cos(x) - 1).$$
Quindi , se $x \in [0, \pi]$ allora
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{0, \pi, \pi/3\},$$
$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, \pi/3).$$
$x = \pi/3$ è quindi un punto di massimo relativo con $f(\pi/3) = 3/2$ e $x = \pi$ è un punto di minimo relativo e $f(\pi) = -3$. Visto che $f''(x) = 2\cos(x)(2\cos(x) - 1) - 4\sin(x)^2 = 8\cos(x) - 2\cos(x) - 4$. si ha che $f''(x) = 0$ se e solo se $\cos(x) = \frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$, ossia se e solo se $x = \beta = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$ e $x = \gamma = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$. Per di più $f''(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, \beta) \cup (\gamma, \pi)$. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



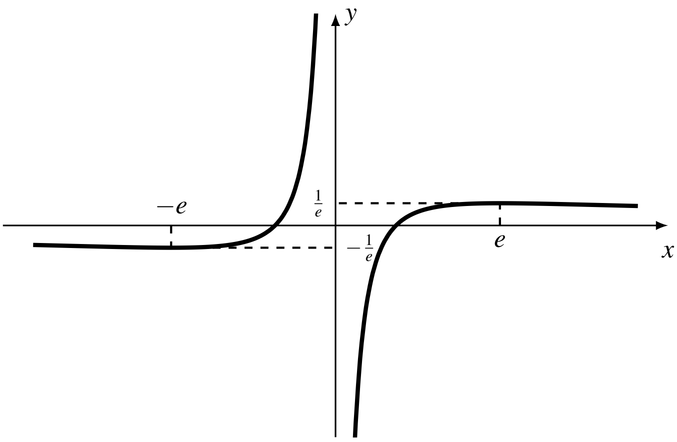
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{x}\right).$$
Il dominio di definizione è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la funzione è dispari e quindi basta studiarla per $x > 0$. Risulta
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$
Derivando , si ha
$$f'(x) = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+(x+1/x)^2} = \frac{x^2-1}{x^2+\left(x^2+1\right)^2}.$$
Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. Pertanto il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo. Calcoliamo anche la derivata seconda
$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2+\left(x^2+1\right)^2\right)-\left(x^2-1\right)\left(2x+4x\left(x^2+1\right)\right)}{\left(x^2+\left(x^2+1\right)^2\right)^2}.$$
Prendendo in esame solo il numeratore $N(x)$ si ottiene
$$N(x) = -2x^5 + 4x^3 + 8x = -2x\left(x^4 - 2x^2 - 4\right).$$
Ne deriva che $f''(x) > 0$ solo se $0 < x < 1+5$. Pertanto il punto $x = \sqrt{1+\sqrt{5}}$ è un flesso. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



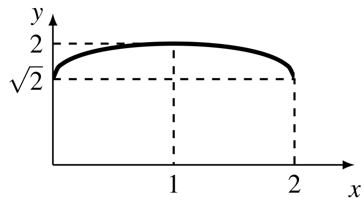
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x) = \frac{\ln(|x|)}{x}.$$
Il dominio di definizione è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f è dispari e quindi basta studiarla per $x > 0$. Risulta
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Inoltre
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x-\ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e.$$
Pertanto $x = e$ è un punto di massimo relativo e risulta $f(e) = 1/e$. Infine
$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln(x))2x}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$
e quindi f è convessa per $x > e^{3/2}$. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



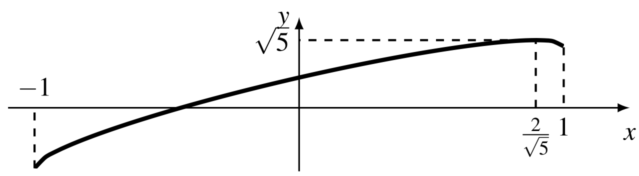
Esempio

Tracciamo il grafico di
$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}.$$
Il dominio di definizione è $D = [0,2]$ ed $f(0) = \sqrt{2} = f(2)$. Risulta
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}} > 0$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{2-x} > \sqrt{x} \Longleftrightarrow 2-x > x \Longleftrightarrow x < 1$$
e quindi $x = 1$ è un punto di massimo relativo ed $f(1) = 2$. Infine
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^{-3/2} + (2-x)^{-3/2}\right) < 0 \qquad \forall x \in D$$
e quindi la funzione è concava. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



Esempio

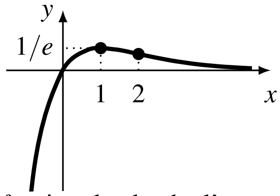
Tracciamo il grafico di
$$f(x) = 2x + \sqrt{1-x^2}.$$
Il dominio di definizione è $D = [-1,1]$. Risulta $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$ ed $f(0) = 1$. Osserviamo che
$$f(x) < 0 \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} < -2x \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1-x^2 < 4x^2 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 5x^2 > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$
Osserviamo che
$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} < 0$$
$$\Longleftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} < x \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4\left(1-x^2\right) < x^2 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 5x^2 > 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1.$$
Pertanto $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ è un punto di massimo relativo con $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$. Si ha inoltre
$$f''(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}+x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} < 0$$
e quindi f è concava. Il grafico è pertanto del tipo riportato in figura.



Esempio

Vediamo, al variare di $a \in \mathbb{R}$, quante soluzioni ha l'equazione
$$e^x = ax.$$
Ovviamente se $a = 0$, l'equazione non ha nessuna soluzione. Se $a \neq 0$, possiamo scrivere l'equazione nella forma
$$xe^{-x} = \frac{1}{a}.$$
Se studiamo la funzione
$$f(x) = xe^{-x}$$
e ne disegniamo il grafico, potremo determinare il numero di soluzioni dell'equazione dal numero di intersezioni che il grafico di f ha con la retta orizzontale di equazione $y = 1/a$. Il dominio

dalla funzione f è $D=\mathbb{R}$ e risulta
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$
Inoltre $f(x)>0$ se e solo se $x>0$ ed $f(0)=0$. Derivando si ottiene
$$f'(x)=e^{-x}(1-x)$$
e quindi $f'(x)>0$ se e solo se $x<1$. Pertanto il punto $x=1$ è un punto di massimo relativo con $f(1)=1/e$. Inoltre $f''(x)=e^{-x}(x-2)$ e quindi la funzione f è convessa se e solo se $x>2$. Il grafico della funzione f dunque è del tipo.



Visto il grafico di f e ricordando che l'equazione da considerare è $f(x)=1/a$ solo se $a\neq 0$, possiamo concludere che:
- se $a<0$, allora l'equazione ha una unica soluzione ed è negativa;
- se $a=0$, allora l'equazione non ha soluzione;
- se $0<1/a<1/e$, ossia se $a>e$, allora l'equazione ha due soluzioni;
- se $a=e$, allora l'equazione ha una soluzione ed è $x=1$;
- se $1/a>1/e$, ossia se $0<a<e$, allora l'equazione non ha nessuna soluzione.

44 Regole di De L'Hôpital

Teorema di De L'Hôpital

i) Siano $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili nell'intervallo $[a,b]$ e sia $x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)=g(x_0)=0$. Se esiste il limite
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \ (\text{o } \pm\infty),$$
allora esiste anche il limite
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$
ed ha lo stesso valore.
ii) Sia $x_0\in(a,b)$ e siano $f,g\colon [a,b]\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $[a,b]\setminus\{x_0\}$ tali che
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \ (\text{o } -\infty), \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty \ (\text{o } -\infty).$$
Se esiste il limite
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \ (\text{o } \pm\infty)$$
allora esiste anche il limite
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$
ed ha lo stesso valore.

La stessa regola si può usare pure per calcolare limiti del tipo
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$
sempre che tale limite sia della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Esempio
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2(e^x-1-x)}{x^3}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2(e^x-1-x)-x^2}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2(e^x-1)-2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2(e^x-1)}{6x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Esempio
$$\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\sin(x)}{x\tan(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-\cos(x)}{\tan(x)+x\left(1+\tan(x)^2\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2e^x+xe^x+\sin(x)}{2\left(1+\tan(x)^2\right)+x2\tan(x)\left(1+\tan(x)^2\right)}=1$$

Esempio
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\sin(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\sin(x)+x\cos(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{(1+x)(\sin(x)+x\cos(x))}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+x)\left(\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)\right)}=\frac{1}{2}$$

Esempio
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x}{\ln(1+x)(1-\cos(x))}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}\frac{x^2}{1-\cos(x)}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

Esempio
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin(x)}\cos(x)-1-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin(x)}\left(\cos(x)^2-\sin(x)\right)-1}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin(x)}\left(\cos(x)^3-3\sin(x)\cos(x)-\cos(x)\right)}{6x}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}e^{\sin(x)}\left(\cos(x)\frac{\cos(x)^2-1}{x}-3\cos(x)\frac{\sin(x)}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot1(1\cdot0-3\cdot1\cdot1)=-\frac{1}{2}$$

Esempio
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-\arctan(x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-\frac{1}{1+x^2}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin(x)+\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}=0$$

Esempio
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-1}{1+x}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-\frac{1}{2}$$

Esempio
$$\lim_{x\to1}\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}e^{\frac{\ln\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)}{x-1}}=\frac{4}{27}$$
in quanto
$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)}\left(3^{1/x}\ln3\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2^{1/x}\ln(2)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$=-3\ln3+2\ln(2)=\ln\left(\frac{4}{27}\right)$$

Esempio
$$\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\sin(x)}{x\arctan(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-\cos(x)}{\arctan(x)+\frac{x}{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^x+xe^x+\sin(x)}{\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}=\frac{2}{2}=1$$

Esempio
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)=\begin{pmatrix}y=1/x\\ y\to0^+\end{pmatrix}$$
$$=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{y^2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}}-\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+y^3}-1}{y^3}$$
$$=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{3}\left(1+y^3\right)^{-2/3}\frac{3y^2}{3y^2}=\frac{1}{3}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Esempio

Vediamo se possiamo applicare le regole di De L'Hôpital per calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\cos(2x)}{2x+\sin(3x)} = \frac{3}{2}.$$
Si ha la forma indeterminata $+\infty/+\infty$, ma il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{3+2\sin(2x)}{2+3\cos(3x)}$ non esiste in quanto i due limiti al numeratore e al denominatore non esistono. Pertanto non si possono applicare le regole di De L'Hôpital. In effetti, il fatto che non esista tale limite non implica la non esistenza del limite dato, infatti:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\cos(2x)}{2x+\sin(3x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{\cos(2x)}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\sin(3x)}{x}\right)} = \frac{3}{2}.$$

Esempio

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\arctan(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-\cos(x)+x\sin(x)}{\arctan(x)+\frac{x}{1+x^2}}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)+x\cos(x)}{\frac{1}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)+x\cos(x)}{\frac{2}{(1+x^2)^2}} = 0$$

Esempio

$$\lim_{x\to0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))} = e^{-1/2}$$
perché
$$\lim_{x\to0} \frac{\ln\big(\cos(x)\big)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos(x)} \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Esempio

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{1-\cos(x)}\right) = \lim_{x\to0} \frac{2(1-\cos(x))-x^2}{x^2(1-\cos(x))}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{2\sin(x)-2x}{2x(1-\cos(x))+x^2\sin(x)}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{2(\cos(x)-1)}{2(1-\cos(x))+4x\sin(x)+x^2\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{2(\cos(x)-1)}{x^2}}{\frac{2(1-\cos(x))}{x^2}+4\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)} = -\frac{1}{6}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^3}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right) = \left(y=\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{y\to0^+} \frac{\sqrt{1+y^2}-\sqrt[3]{1+y^3}}{y^2} = \lim_{y\to0^+} \frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{y^2}{(\sqrt[3]{1+y^3})^2}}{2y} = \frac{1}{2}$$

45 Polinomio di Taylor

Abbiamo visto che la retta tangente ad una funzione f nel punto x_0 è la miglior retta che approssima f in un intorno di x_0, nel senso che
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-\big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big)}{x-x_0} = 0.$$
Osserviamo che
$$P_1(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
è un polinomio di primo grado. In questa sezione vedremo che si può ottenere una miglior approssimazione di f in un intorno di x_0 utilizzando polinomi di grado n con $n>1$, ovvero funzioni della forma
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$
per i quali si ha
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Definizione

Sia $f(x)$ una funzione $C^n(a,b)$ ed $x_0\in(a,b)$. Il **polinomio di Taylor** di ordine n della funzione f nel punto x_0 è il polinomio di grado n
$$\mathscr{T}_n[f,x_0](x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Esempio

Ad esempio, per $n=1$ si ottiene
$$\mathscr{T}_1[f,x_0](x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$
che corrisponde alla retta tangente.

Per "misurare" il grado di approssimazione del polinomio di Taylor alla funzione f in x_0 diamo un nome alla funzione $f(x)-\mathscr{T}_n[f,x_0](x)$.

Definizione

Il **resto di Taylor** di ordine n della funzione f in x_0 è la funzione
$$\mathscr{R}_n[f,x_0](x) = f(x)-\mathscr{T}_n[f,x_0](x) = f(x)-\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Siamo interessati al comportamento del resto di Taylor per $x\to x_0$: tanto più velocemente il resto $\mathscr{R}_n[f,x_0](x)$ va a zero per x che va a x_0, tanto migliore è l'approssimazione di $f(x)$ in un intorno di x_0 tramite il polinomio di Taylor $\mathscr{T}_n[f,x_0](x)$.

Teorema

Se $f\colon (x_0-r,x_0+r)\to\mathbb{R}$ è derivabile n volte nell'intervallo (x_0-r,x_0+r), allora
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathscr{R}_n[f,x_0](x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad (\clubsuit)$$

Dimostrazione. Di seguito, per semplicità di notazioni, indichiamo $\mathscr{R}_n[f,x_0](x)$ con $\mathscr{R}_n(x)$. Per definizione, il resto è derivabile n volte nell'intervallo (x_0-r,x_0+r) e per $h\leqslant n$ risulta
$$\mathscr{R}_n^{(h)}(x) = f^{(h)}(x)-\sum_{j=h}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}j(j-1)\dots(j-h+1)(x-x_0)^{j-h}.$$
In particolare
$$\mathscr{R}_n^{(h)}(x_0)=0 \quad \forall h\in\mathbb{N},\quad h\leqslant n$$
e
$$\mathscr{R}_n^{(n-1)}(x) =$$
$$= f^{(n-1)}(x)-\sum_{j=n-1}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}j(j-1)\dots(j-n+2)(x-x_0)^{j-n+1}$$
$$= f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0).$$
Usando pertanto il teorema di De L'Hôpital, si ottiene
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathscr{R}_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{\mathscr{R}_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$
$$= \frac{1}{n!}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}-f^{(n)}(x_0)\right) = 0. \qquad \square$$

In virtù di ($\clubsuit$), si ha che $\mathscr{R}_n[f,x_0](x)$ è una **o piccolo** di $(x-x_0)^n$ per $x\to x_0$ o, più semplicemente, si scrive
$$\mathscr{R}_n[f,x_0](x) = o\big((x-x_0)^n\big).$$
Il resto può quindi essere espresso anche nella forma
$$\mathscr{R}_n[f,x_0](x) = o((x-x_0)^n) = \varepsilon(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n,$$

dove la funzione $\varepsilon(x-x_0)$ è infinitesima per $x \to x_0$. In particolare, risulta

$$f(x) = \mathscr{T}_n[f,x_0](x) + o((x-x_0)^n)$$

e questo vuol dire che abbiamo approssimato la funzione con il polinomio di Taylor $\mathscr{T}_n[f,x_0](x)$ di ordine n, con un resto infinitesimo di ordine superiore ad n. Questo ci permette di ottenere il seguente risultato.

Corollario

Sia $f(x)$ una funzione $C^2(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.
- Se $f''(x_0) > 0$, allora il punto x_0 è un minimo locale.
- Se $f''(x_0) < 0$, allora il punto x_0 è un massimo locale.

Osservazione

Se $f''(x_0) = 0$, allora il corollario precedente non ci dice nulla.

Dimostrazione. Dal teorema precedente ricaviamo che

$$f(x) = f(x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + o\big((x-x_0)^2\big).$$

Il fatto che $o\big((x-x_0)^2\big) = \varepsilon(x-x_0)\cdot(x-x_0)^2$ mi permette di dire che

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x-x_0)\right)(x-x_0)^2.$$

Si noti che per x sufficientemente vicino a x_0, il segno di $\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x-x_0)$ è lo stesso di $f''(x_0)$.
- Se $f''(x_0) > 0$, allora per x sufficientemente vicino ad x_0 si ha che $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$ e pertanto x_0 è un minimo locale.
- Se $f''(x_0) < 0$, allora per x sufficientemente vicino ad x_0 si ha che $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ e pertanto x_0 è un massimo locale. □

Il precedente corollario può essere generalizzato come segue.

Corollario

Sia $f(x)$ una funzione $C^n(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$

per un $k \in [2,n] \cap \mathbb{N}$.
- Se k è dispari, allora il punto x_0 non è né di massimo, né minimo.
- Se k è pari, allora distinguiamo due casi:
  - se $f^{(k)}(x_0) > 0$, allora il punto x_0 è di minimo locale;
  - se $f^{(k)}(x_0) < 0$, allora il punto x_0 è di massimo locale.

Dimostrazione. Per ipotesi, il polinomio di Taylor di ordine k di $f(x)$ in x_0 è

$$\mathscr{T}_k[f,x_0](x) = f(x_0) + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

e pertanto

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \varepsilon(x-x_0)(x-x_0)^k \\ &= \left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0) + \varepsilon(x-x_0)\right)(x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Si noti che se x è sufficientemente vicino a x_0, allora il segno di $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0) + \varepsilon(x-x_0)$ è lo stesso di $f^{(k)}(x_0)$.
- Se k è dispari, il termine $(x-x_0)^k$ è positivo se $x > x_0$ e negativo se $x < x_0$, pertanto $f(x) - f(x_0)$ cambia segno nell'intorno di x_0 e questo ci dice che x_0 non è né di massimo, né di minimo.
- Se k è pari, il termine $(x-x_0)^k$ è sempre positivo e, in un intorno di x_0 il segno di $f(x) - f(x_0)$ dipende da quello di $f^{(k)}(x_0)$:
  - se $f^{(k)}(x_0) > 0$ allora $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$ per x sufficientemente vicino ad x_0 e pertanto x_0 è un punto di minimo relativo;
  - se $f^{(k)}(x_0) < 0$ allora $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ per x sufficientemente vicino ad x_0 e pertanto x_0 è un punto di massimo relativo. □

Possiamo scrivere il resto di Taylor in maniera diversa che ci permette di stimare $\mathscr{R}_n[f,x_0](x)$ nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia $C^{n+1}(a,b)$.

Teorema del resto di Lagrange

Se $f(x)$ è una funzione $C^{n+1}(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$, allora

$$f(x) - \mathscr{T}_n[f,x_0](x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z_0)\,(x-x_0)^{n+1},$$

dove z_0 è un opportuno punto nell'intervallo (a,b).

Dimostrazione. Di seguito, per semplicità di notazioni, indichiamo $\mathscr{T}_n[f,x_0](x)$ con $\mathscr{T}_n(x)$. Siano $F(x) = f(x) - \mathscr{T}_n(x)$ e $G(x) = (x-x_0)^{n+1}$. Chiaramente $F^{(h)}(x_0) = G^{(h)}(x_0) = 0$ per ogni $h \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Si fissi un $y_0 \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Per il teorema di Cauchy si ha che esiste y_1 tra y_0 e x_0 tale che

$$\frac{F(y_0)}{G(y_0)} = \frac{F(y_0)-F(x_0)}{G(y_0)-G(x_0)} = \frac{F'(y_1)}{G'(y_1)}.$$

Analogamente, per il teorema di Cauchy esiste y_2 tra y_1 e x_0 tale che

$$\frac{F'(y_1)}{G'(y_1)} = \frac{F'(y_1)-F'(x_0)}{G'(y_1)-G'(x_0)} = \frac{F''(y_2)}{G''(y_2)}.$$

Iterando n volte otteniamo

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \ldots = \frac{F^{(n+1)}(y_{n+1})}{G^{(n+1)}(y_{n+1})}$$

dove $y_{n+1} \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Visto che

$$G^{(n+1)}(x) = (n+1)!, \qquad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

si ha

$$\frac{f(x)-\mathscr{T}_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(y_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Dunque basta scegliere $z_0 = y_{n+1}$. □

Osservazione

Di seguito i polinomi di Taylor di ordine 3 in $x_0 = 0$ di alcune funzioni elementari.
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $e^x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$
- $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2n^2}x^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3}x^3 + o(x^3)$

Proprietà degli o piccolo

Se $n,m \in \mathbb{N}$, allora per $x \to x_0$ si ha:
- $C\cdot o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^n) \quad \forall C \neq 0$
- $(x-x_0)^m \cdot o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^{m+n})$
- $o((x-x_0)^m)\cdot o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^{m+n})$
- $\big(o((x-x_0)^m)\big)^n = o((x-x_0)^{m\cdot n})$
- $\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^m} = o((x-x_0)^{n-m})$ con $n \geqslant m$
- $\frac{o((x-x_0)^n)}{o((x-x_0)^m)} = o((x-x_0)^{n-m})$ con $n > m$
- $o((x-x_0)^n) \pm o((x-x_0)^m) = o((x-x_0)^m)$ con $n \geqslant m$

Dimostrazione. Basta applicare la definizione. I dettagli sono lasciati come esercizio per casa. □

Esempio

Calcoliamo il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x-\arctan(x)}.$$

Per la formula di Taylor si ha

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

e pertanto

$$\frac{x-\sin(x)}{x-\arctan(x)} = \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \frac{\frac{1}{6}-\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3}-\frac{o(x^3)}{x^3}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1/6}{1/3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Esempio

Calcoliamo il seguente limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\frac{\sin(x)}{x}}{1-\cos(x)}.$$
Per la formula di Taylor si ha
$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2), \qquad \sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$
$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3),$$
e pertanto
$$\frac{e^x-x-\frac{\sin(x)}{x}}{1-\cos(x)} = \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x-\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2/3}{1/2} = \frac{4}{3}.$$

Esempio

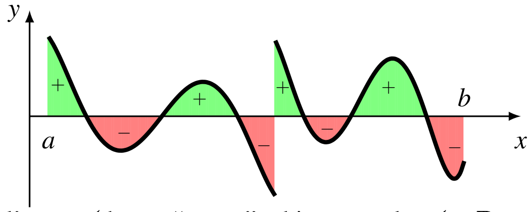
Cerchiamo (se esiste) $a\in\mathbb{R}$, tale che il seguente limite esista finito.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-(ax)^2}-\frac{\sin(x)}{x}}{x^4}$$
Per la formula di Taylor si ha
$$(1+y)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+o(y^2),$$
$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6),$$
e pertanto
$$\sqrt{1-(ax)^2}-\frac{\sin(x)}{x} =$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}a^2x^2-\frac{1}{8}a^4x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{5!}-\frac{o(x^6)}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-a^2\right)x^2-\left(\frac{1}{8}a^4+\frac{1}{5!}\right)x^4+o(x^4).$$
Di conseguenza risulta
$$\frac{\sqrt{1-(ax)^2}-\frac{\sin(x)}{x}}{x^4} = \frac{1}{2x^2}\left(\frac{1}{3}-a^2\right)-\left(\frac{1}{8}a^4+\frac{1}{5!}\right)+\frac{o(x^4)}{x^4}$$
e quindi, affinché il limita esista, deve essere $a^2 = 1/3$, ed in tal caso si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-(ax)^2}-\frac{\sin(x)}{x}}{x^4} = -\left(\frac{1}{72}+\frac{1}{120}\right) = -\frac{1}{45}.$$

Capitolo 11

Integrale di Riemann

46 Definizioni e proprietà generali

Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ che sia limitata ma non necessariamente continua, vogliamo calcolare l'area $\mathscr{A}$ racchiusa tra il grafico di f e l'asse delle x. Visto che f non è necessariamente positiva, distinguiamo le porzioni di area che si trovano nel semipiano delle $y > 0$ da quelle che si trovano nel semipiano delle $y < 0$ dando un valore positivo alle prime e negativo alle seconde.



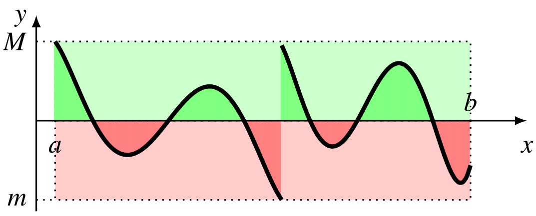
Dunque l'area $\mathscr{A}$ ha un "segno" ed in generale $\mathscr{A} \in \mathbb{R}$.

Una prima stima grossolana di $\mathscr{A}$ la otteniamo tramite

$$m = \inf_{x\in[a,b]} \{f(x)\}, \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} \{f(x)\},$$

in quanto

$$m(b-a) \leqslant \mathscr{A} \leqslant M(b-a).$$



Per migliorare tale approssimazione procediamo come segue.

Definizione

Una **partizione dell'intervallo** $[a,b]$ è un insieme finito di punti

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. L'insieme di tutte la partizioni dell'intervallo $[a,b]$ si indica con $\mathscr{P}$. Dati $P, P' \in \mathscr{P}$, si dice che P' è una **partizione più fine** di P se $P \subseteq P'$.

Osservazione

In altre parole, se ad una partizione aggiungiamo dei punti allora otteniamo una partizione più fine.

Fissata una partizione $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}$, per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$ poniamo

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\}, \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\},$$

e chiamiamo

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

la **somma integrale inferiore** di f (relativa alla partizione P) ed

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

la **somma integrale superiore** di f (relativa alla partizione P).

Osservazione

Visto che

$$m \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

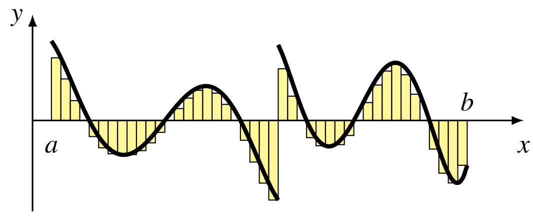
si ha

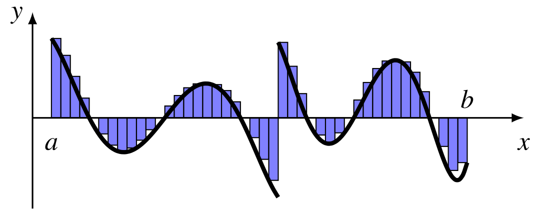
$$m(b-a) \leqslant m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b-a),$$

e quindi vale la seguente catena di disuguaglianze

$$m(b-a) \leqslant s(f,P) \leqslant \mathscr{A} \leqslant S(f,P) \leqslant M(b-a).$$

Nelle seguenti figure, la somma delle aree dei rettangoli gialli vale $s(f,P)$, mentre la somma delle aree dei rettangoli blue vale $S(f,P)$.





Disuguaglianze fondamentali delle somme integrali

Se $P, P' \in \mathscr{P}$ sono due partizione con P' più fine di P, allora

$$s(f,P) \leqslant s(f,P') \leqslant \mathscr{A} \leqslant S(f,P') \leqslant S(f,P)$$

ed inoltre

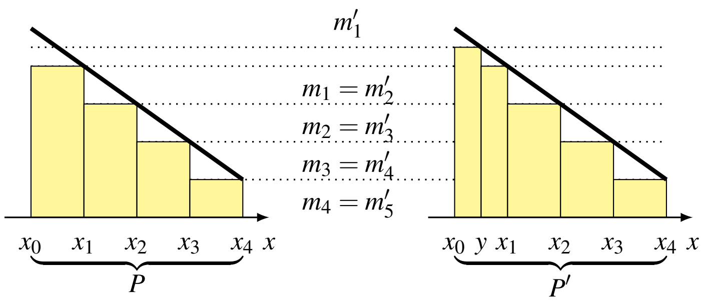
$$S(f,P') - s(f,P') \leqslant S(f,P) - s(f,P).$$

Osservazione

Raffinando la partizione miglioriamo l'approssimazione di $\mathscr{A}$.

Dimostrazione. Verifichiamo la prima disuguaglianza della prima catena di disuguaglianze; l'ultima è lasciata come esercizio per casa. Per semplicità assumiamo che P' si ottenga da P aggiungendo un solo punto $y \in (x_0, x_1)$, ovvero

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \qquad P' = \{x_0, y, x_1, \ldots, x_n\}.$$



Calcoliamo $s(f,P')$: posto

$$m'_1 = \inf_{x\in[x_0,y]} \{f(x)\},$$
$$m'_2 = \inf_{x\in[y,x_1]} \{f(x)\},$$
$$m'_i = m_{i-1} \qquad i \in \{3, \ldots, n+1\},$$

si ha

$$\begin{aligned} s(f,P') &= m_1'(y-x_0)+m_2'(x_1-y)+\sum_{i=3}^{n} m_i'(x_{i-1}-x_{i-2}) \\ &= m_1'(y-x_0)+m_2'(x_1-y)+\sum_{i=3}^{n} m_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2}) \\ &= m_1'(y-x_0)+m_2'(x_1-y)+\sum_{i=2}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}). \end{aligned}$$

Inoltre per definizione si ha

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) = m_1(x_1-x_0)+\sum_{i=2}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),$$

e pertanto risulta

$$\begin{aligned} & s(f,P')-s(f,P) = m_1'(y-x_0)+m_2'(x_1-y)-m_1(x_1-x_0) \\ &= \big(m_1'-m_1\big)(y-x_0)+\big(m_2'-m_1\big)(x_1-y) \geqslant 0 \end{aligned}$$

in quanto per definizione $\min\{m_1',m_2'\}=m_1$.
Infine, la seconda catena di disuguaglianze segue dalla prima. □

Proposizione

Gli insiemi

$$A=\{s(f,P) : P\in\mathscr{P}\}, \qquad B=\{S(f,P) : P\in\mathscr{P}\}$$

sono separati.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che

$$a\leqslant b \qquad \forall a\in A \text{ e } \forall y\in B.$$

Per definizione di A e B bisogna dimostrare che

$$s(f,P_1)\leqslant S(f,P_2) \qquad \forall P_1,P_2\in\mathscr{P}.$$

Date due partizioni $P_1,P_2\in\mathscr{P}$ di $[a,b]$, la partizione $P_1\cup P_2$ è più fine sia di P_1 che di P_2 e quindi per le disuguaglianze fondamentali delle somme integrali

$$s(f,P_1)\leqslant s(f,P_1\cup P_2)\leqslant S(f,P_1\cup P_2)\leqslant S(f,P_2).$$ □

Per le proprietà degli insiemi separati si ha

$$\sup(A)\leqslant\inf(B).$$

Definizione

Una funzione limitata f è **integrabile** (secondo Riemann) nell'intervallo $[a,b]$ se

$$\sup(A)=\inf(B).$$

In tal caso, il valore comune è l'**integrale** (definito) della funzione f nell'intervallo $[a,b]$ ed è indicato col simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$R([a,b])$ è l'insieme delle funzioni che sono integrabili (secondo Riemann) nell'intervallo $[a,b]$.
Se si scambiano gli estremi di integrazione allora si pone

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Infine, se gli estremi coincidono, ossia $a=b$, allora si pone

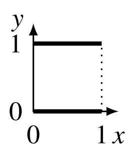
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Non tutte le funzioni limitate sono integrabili, come mostra il seguente esempio.

Esempio

Consideriamo la **funzione di Dirichlet** $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$



Sia $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ una partizione di $[0,1]$ con $0=x_0<x_1<\dots<x_n=1$. In ciascun intervallo $[x_{i-1},x_i]$ ci sono infiniti numeri razionali ed infiniti numeri irrazionali. Pertanto si ha

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}=0, \qquad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}=1,$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=0, \\ S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=1. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di P si ha che

$$\begin{aligned} A&=\{s(f,P) : P\in\mathscr{P}\}=\{0\}, \\ B&=\{S(f,P) : P\in\mathscr{P}\}=\{1\}. \end{aligned}$$

Dunque f non è integrabile visto che

$$\sup(A)=0\neq 1=\inf(B).$$

Diamo quattro teoremi utili a capire se una funzione è integrabile. Il primo teorema è l'unico che ci dà una condizione sia necessaria che sufficiente, ma è più utile nelle dimostrazioni che negli esercizi. Gli altri tre teoremi ci danno solo condizioni sufficienti, ma sono più facilmente applicabili negli esercizi.

Test di Cauchy per l'integrabilità

Sia $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. f è integrabile in $[a,b]$ se e solo se

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P=P(\varepsilon)\in\mathscr{P} \text{ tale che } S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon.$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Sia $\varepsilon>0$. Per le proprietà del sup e dell'inf esistono $P_1,P_2\in\mathscr{P}$ tali che

$$\sup(A)-\tfrac{\varepsilon}{2}<s(f,P_1), \qquad \inf(B)+\tfrac{\varepsilon}{2}>S(f,P_2).$$

Visto che f è integrabile abbiamo $\sup(A)=\inf(B)$ e quindi

$$S(f,P_2)-s(f,P_1)<\big(\inf(B)+\tfrac{\varepsilon}{2}\big)-\big(\sup(A)-\tfrac{\varepsilon}{2}\big)=\varepsilon.$$

Poniamo $P=P_1\cup P_2$. Visto che P è più fine sia di P_1 che di P_2, per le disuguaglianze fondamentali delle somme integrali si ha

$$s(f,P_1)\leqslant s(f,P)\leqslant S(f,P)\leqslant S(f,P_2),$$

e pertanto

$$S(f,P)-s(f,P)\leqslant S(f,P_2)-s(f,P_1)<\varepsilon.$$

"$\Leftarrow$" Supponiamo per assurdo che f non sia integrabile in $[a,b]$, ossia che

$$\sup(A)<\inf(B).$$

Sia $\varepsilon=\inf(B)-\sup(A)>0$. Per ipotesi esiste $P\in\mathscr{P}$ tale che $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$. Per le proprietà del sup e dell'inf si ha

$$\sup(A)\geqslant s(f,P), \qquad \inf(B)\leqslant S(f,P),$$

e pertanto $S(f,P)-s(f,P)\geqslant\inf(B)-\sup(A)=\varepsilon$. Siamo però arrivati ad un assurdo visto che non può essere

$$\varepsilon>S(f,P)-s(f,P)\geqslant\varepsilon.$$ □

Integrabilità delle funzioni continue

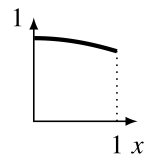
Una funzione continua in $[a,b]$ è anche integrabile in $[a,b]$.

Esempio

La funzione $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x\in(0,1], \\ 1 & \text{se } x=0, \end{cases}$$

è continua e di conseguenza è integrabile.

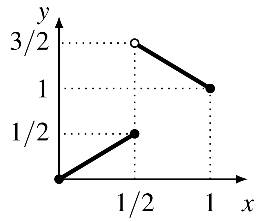


Integrabilità delle funzioni continue a tratti

Una funzione limitata in $[a,b]$ con un numero finito di punti di discontinuità è integrabile $[a,b]$.

Esempio

La funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1/2], \\ 2-x & \text{se } x \in (1/2,1], \end{cases}$$
non è continua ma ha un solo punto di discontinuità, $x = 1/2$, e di conseguenza è integrabile.

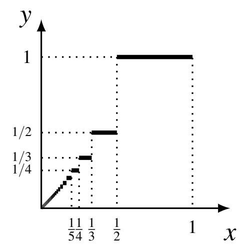


Integrabilità delle funzioni monotone

Una funzione monotona in $[a,b]$ è anche integrabile in $[a,b]$.

Esempio

La funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor} & \text{se } x \in (0,1], \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$
dove $\lfloor \cdot \rfloor$ è la funzione parte intera, ha un numero infinito di discontinuità ma è monotona (crescente) e questo ci basta per dire che è integrabile.



Diamo alcune proprietà di $R([a,b])$.

Proprietà degli integrali

Siano $f,g \in R([a,b])$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1) additività degli integrali
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$
2) omogeneità degli integrali
$$\int_a^b \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$
3) linearità degli integrali
$$\int_a^b \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. **1) I passo: $f+g \in R([a,b])$.** Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono due partizioni P_f e P_g di $[a,b]$ tali che
$$S(f,P_f) - s(f,P_f) < \varepsilon, \qquad S(g,P_g) - s(g,P_g) < \varepsilon.$$
La partizione $P = P_f \cup P_g$ è più fine sia di P_f che di P_g e quindi per le disuguaglianze fondamentali delle somme integrali si ha
$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon, \qquad S(g,P) - s(g,P) < \varepsilon.$$
Visto che
$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)+g(x)\} \geqslant \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\} + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{g(x)\},$$
si ha
$$s(f+g,P) \geqslant s(f,P) + s(g,P).$$
Analogamente, visto che
$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)+g(x)\} \leqslant \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\} + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{g(x)\},$$
si ha
$$S(f+g,P) \leqslant S(f,P) + S(g,P).$$
Vale pertanto la catena di disuguaglianze
$$s(f,P) + s(g,P) \leqslant s(f+g,P) \leqslant S(f+g,P) \leqslant S(f,P) + S(g,P)$$
e dunque
$$S(f+g,P) - s(f+g,P) \leqslant \overbrace{S(f,P) - s(f,P)}^{<\varepsilon} + \overbrace{S(g,P) - s(g,P)}^{<\varepsilon} < 2\varepsilon.$$
Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha che $f+g$ è integrabile in $[a,b]$.

II passo: dimostrare l'uguaglianza. Per definizione si ha
$$s(f,P) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S(f,P),$$
$$s(g,P) \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S(g,P),$$
$$s(f+g,P) \leqslant \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant S(f+g,P).$$
Di conseguenza risulta
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant S(f+g,P) - s(f,P) - s(g,P) \leqslant S(f,P) - s(f,P) + S(g,P) - s(g,P) < 2\varepsilon.$$
D'altro canto si ha
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right) \geqslant s(f+g,P) - S(f,P) - S(g,P) \geqslant s(f,P) - S(f,P) - s(g,P) - S(g,P) > -2\varepsilon.$$
Abbiamo quindi dimostrato che
$$-2\varepsilon \leqslant \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant 2\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \left|\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \leqslant 2\varepsilon.$$
La tesi segue dall'arbitrarietà di ε.

2) Assumiamo $\alpha > 0$; i casi $\alpha = 0$ ed $\alpha < 0$ sono analoghi e sono lasciati come esercizio per casa.

I passo: $\alpha f \in R([a,b])$. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste una partizione P di $[a,b]$ tale che
$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$
Visto che $\alpha > 0$ si ha
$$\inf\{\alpha f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} = \alpha \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\},$$
$$\sup\{\alpha f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} = \alpha \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}.$$
Pertanto risulta
$$\begin{aligned} S(\alpha f,P) - s(\alpha f,P) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{\alpha f(x)\} - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{\alpha f(x)\}\right)(x_i - x_{i-1}) = \\ &\sum_{i=1}^n \alpha \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\} - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\}\right)(x_i - x_{i-1}) = \\ &\alpha \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\} - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\}\right)(x_i - x_{i-1}) = \\ &\alpha\big(S(f,P) - s(f,P)\big) < \alpha\varepsilon. \end{aligned}$$
Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha che αf è integrabile in $[a,b]$.

II passo: dimostrare l'uguaglianza. Per definizione si ha
$$s(\alpha f,P) \leqslant \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S(\alpha f,P),$$
$$s(f,P) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S(f,P).$$
Di conseguenza si ha
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S(\alpha f,P) - \alpha s(f,P) = \alpha\big(S(f,P) - s(f,P)\big) < \alpha\varepsilon,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant s(\alpha f,P) - \alpha S(f,P) = \alpha\big(s(f,P) - S(f,P)\big) > -\alpha\varepsilon.$$

Abbiamo quindi dimostrato che
$$-\alpha\varepsilon \leqslant \int_a^b \alpha f(x)\,dx - \alpha\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \alpha\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \left|\int_a^b \alpha f(x)\,dx - \alpha\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \alpha\varepsilon.$$
La tesi segue dall'arbitrarietà di ε.

3) Segue dalle due uguaglianze appena dimostrate. □

Additività dell'integrale

Se $f \in R([a,b])$ e $c \in [a,b]$, allora $f \in R([a,c]) \cap R([c,b])$ e si ha
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Osservazione

Non si confonda l'additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda e l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione.

Dimostrazione. **I passo: $f \in R([a,c]) \cap R([c,b])$.** Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste una partizione P di $[a,b]$ tale che
$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$
La partizione $P_{[a,b]} = P \cup \{c\}$ di $[a,b]$ coincide con P se $c \in P$, mentre è più fine di P se $c \notin P$. In entrambe i casi per le disuguaglianze fondamentali delle somme integrali si ha
$$S(f,P_{[a,b]}) - s(f,P_{[a,b]}) \leqslant S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$
Consideriamo la partizione $P_{[a,c]} = P' \cap [a,c]$ di $[a,c]$ e la partizione $P_{[c,b]} = P' \cap [c,b]$ di $[c,b]$. Per costruzione si ha
$$S(f,P_{[a,b]}) = S(f,P_{[a,c]}) + S(f,P_{[c,b]}),$$
$$s(f,P_{[a,b]}) = s(f,P_{[a,c]}) + s(f,P_{[c,b]}),$$
e pertanto
$$S(f,P_{[a,b]}) - s(f,P_{[a,b]}) = \big(S(f,P_{[a,c]}) - s(f,P_{[a,c]})\big) + \big(S(f,P_{[c,b]}) - s(f,P_{[c,b]})\big) < \varepsilon,$$
da cui segue che
$$S(f,P_{[a,c]}) - s(f,P_{[a,c]}) < \varepsilon, \qquad S(f,P_{[c,b]}) - s(f,P_{[c,b]}) < \varepsilon.$$
Di conseguenza abbiamo che $f \in R([a,c]) \cap R([c,b])$.

II passo: dimostrare l'uguaglianza. Per quanto già visto si ha
$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant S(f,P_{[a,b]}) < s(f,P_{[a,b]}) + \varepsilon$$
$$= s(f,P_{[a,c]}) + s(f,P_{[c,b]}) + \varepsilon \leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$
D'altro canto, per quanto già visto si ha anche che
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leqslant S(f,P_{[a,c]}) + S(f,P_{[c,b]})$$
$$= S(f,P_{[a,b]}) < s(f,P_{[a,b]}) + \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$
In conclusione abbiamo dimostrato che
$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$
e per l'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

Corollario

Se $f \in R([a,b])$ e $[c,d] \subset [a,b]$, allora $f \in R([c,d])$.

Monotonia dell'integrale

Se $f,g \in R([a,b])$ ed $f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Corollario

Se $f \in R([a,b])$ ed $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Integrabilità del modulo

Se $f \in R([a,b])$, allora $|f| \in R([a,b])$ e vale la disuguaglianza
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Definizione

La **media integrale** di f (sull'intervallo $[a,b]$) è la quantità
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema della media integrale

Sia $f \in R([a,b])$ e poniamo
$$m = \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \qquad M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$
Vale la disuguaglianza
$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$
Se f è anche continua in $[a,b]$, allora esiste $c \in [a,b]$ tale che
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Osservazione

La media integrale è l'altezza del rettangolo la cui base è l'intervallo $[a,b]$ e la cui area è uguale all'$\int_a^b f(x)\,dx$.

Definizione

Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, una funzione $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una **primitiva** di f se G è derivabile e risulta
$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$
L'**integrale indefinito** di f è l'insieme di tutte le sue primitive. Esso si denota con il simbolo
$$\int f(x)\,dx.$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se $f \in R([a,b])$ è continua nell'intervallo $[a,b]$, allora la funzione $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$
è derivabile in $[a,b]$ ed è una primitiva di f.

Dimostrazione. Si deve verificare che F è derivabile e che
$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$
Siano $x,y \in (a,b)$ con $x < y$. Per l'additività dell'integrale si ha
$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$
$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt$$
e quindi
$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt.$$
Per la continuità di f si può applicare il teorema della media integrale ad f nell'intervallo $[x,y]$, ottenendo l'esistenza di un punto $c_y \in (x,y)$ tale che
$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(c_y).$$
D'altra parte se y tende ad x anche c_y tende a x ed essendo f continua in x, si ottiene
$$\lim_{y\to x}\frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} f(c_y) = f(x).$$

Dunque F è derivabile in x e per definizione $F'(x) = f(x)$. I casi $x = a$ ed $x = b$ sono analoghi e sono lasciati come esercizio per casa. □

Proposizione

Se $f \in R([a,b])$ è continua nell'intervallo $[a,b]$, allora

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x)+c : c \in \mathbb{R}\}, \qquad (\clubsuit)$$

dove la funzione $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è definita da

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dimostrazione. "$\subseteq$" Basta dimostrare che se G è una primitiva di f, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$. Visto che sia F che G sono delle primitive di f si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(G(x) - F(x)\big) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

e quindi $x \mapsto G(x) - F(x)$ è costante.
"$\supseteq$" Basta osservare che per ogni costante $c \in \mathbb{R}$ si ha che $G(x) = F(x) + c$ è una primitiva di f visto che

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(F(x)+c\big) = F'(x) = f(x).$$ □

Osservazione

Sia $f \in R([a,b])$ continua nell'intervallo $[a,b]$. È chiaro che se G è una primitiva di f, allora

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{G(x)+c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Per semplicità di notazione si scrive semplicemente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + c$$

dove G è una qualsiasi primitiva di f.

Formula fondamentale del calcolo integrale

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e G una sua primitiva, allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b],$$

e pertanto per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

Proprietà degli integrali indefiniti

Siano $f, g \in R([a,b])$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1) se f è derivabile in $[a,b]$ allora

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c;$$

2) derivabilità degli integrali indefiniti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x);$$

3) additività degli integrali indefiniti

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x;$$

4) omogeneità degli integrali indefiniti

$$\int \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x;$$

5) linearità degli integrali indefiniti

$$\int \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diamo una lista di primitive.

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c \qquad \int \Big(a\,f(x) + b\,g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + c \text{ con } a \neq -1 \qquad \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \tfrac{a^x}{\ln(a)} + c \text{ con } 0 < a \neq 1 \qquad \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(|x|) + c \qquad \int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c \qquad \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln\big(|\cos(x)|\big) + c \qquad \int \cot(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + c$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{\cos(x)} = \ln\Big(\Big|\tfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\Big|\Big) + c \qquad \int \tfrac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \ln\Big(\Big|\tfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\Big|\Big) + c$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{\cos(x)^2} = \tan(x) + c \qquad \int \tfrac{\mathrm{d}x}{\sin(x)^2} = -\cot(x) + c$$

$$\int \tfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{\cos(x)} + c \qquad \int \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{\sin(x)} + c$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\big(\tfrac{x}{a}\big) + c \qquad \int \tfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \tfrac{1}{a}\arctan\big(\tfrac{x}{a}\big) + c$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \tfrac{1}{a}\arccos\big(\tfrac{a}{x}\big) + c \qquad \int \tfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \tfrac{1}{2a}\ln\big(\big|\tfrac{x-a}{x+a}\big|\big) + c$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2a}\ln\big(\big|\tfrac{x+a}{x-a}\big|\big) + c \qquad \int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\Big(\Big|x+\sqrt{x^2+a^2}\Big|\Big)}{2} + c$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\Big(\Big|x+\sqrt{x^2-a^2}\Big|\Big) + c \qquad \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Big(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\big(\tfrac{x}{a}\big)\Big) + c$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\Big(\Big|x+\sqrt{x^2+a^2}\Big|\Big) + c \qquad \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\Big(\Big|(x+\sqrt{x^2-a^2})\Big|\Big)}{2} + c$$

Esercizio

Dimostrare le seguenti formule date per ricorrenza.

1) $I_{n+1} = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\, I_{n-1}$

$I_0 = \arctan(x) + c$

$I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c$

2) $I_n = \displaystyle\int \sin(x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\big(-\sin(x)^{2n-1}\cos(x) + (2n-1)\,I_{n-1}\big)$

$I_0 = x + c$

3) $I_n = \displaystyle\int \cos(x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\big(\sin(x)\,\cos(x)^{n-1} + (n-1)\,I_{n-2}\big)$

$I_0 = x + c$

$I_1 = \sin(x) + c$

4) $I_n = \displaystyle\int \ln(x)^n\,\mathrm{d}x = x\,\ln(x)^n - n\,I_{n-1}$

$I_0 = x + c$

5) $I_n = \displaystyle\int x^n\,e^x\,\mathrm{d}x = x^n\,e^x - n\,I_{n-1}$

$I_0 = e^x + c$

$$\textbf{5)}\ I_n = \int x^n\,e^x\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c}\int f'g\,\mathrm{d}x = fg - \int fg'\,\mathrm{d}x \\ f = e^x,\ g = x^n\end{array}\right) = x^n\,e^x - \int n\,x^{n-1}\,e^x\,\mathrm{d}x = x^n\,e^x - n\,I_{n-1}$$

47 Integrali per funzioni razionali

In questa sezione vediamo come calcolare

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$

nel caso in cui $N(x)$ e $D(x)$ siano semplicemente dei polinomi. Siano

$$n \geqslant 0 \qquad \text{e} \qquad d \geqslant 0$$

i gradi rispettivamente di $N(x)$ e di $D(x)$.

Prima di considerare il caso generale, iniziamo con quello che tra quelli non banali è il più semplice e che, come vedremo, tornerà utile anche per studiare il caso generale.

Caso numeratore lineare, $n=1$, e denominatore quadratico, $d=2$

Un caso particolarmente semplice è quello in cui
$$N(x)=\alpha x+\beta, \qquad D(x)=x^2+bx+c,$$
con $\alpha,\beta,b,c\in\mathbb{R}$ ed $\alpha\neq 0$. Distinguiamo alcuni casi.

I caso: $\Delta>0$.

Se $\Delta=b^2-4c>0$ allora $D(x)=(x-x_1)(x-x_2)$ dove
$$x_1=\tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}, \qquad x_2=\tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}.$$
In questo caso si cercano delle costanti $A,B\in\mathbb{R}$ tali che
$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}=\frac{(A+B)x-Ax_2-Bx_1}{x^2+bx+c}.$$
Tale uguaglianza vale per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}$ se e solo se
$$\begin{cases}A+B=\alpha\\ -Ax_2-Bx_1=\beta.\end{cases}$$
Risolto questo sistema, si trovano $A,B\in\mathbb{R}$ e si ha che
$$\int\frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x=A\ln(|x-x_1|)+B\ln(|x-x_2|)+c.$$

Esempio

$$\int\frac{x+1}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$$
Ci troviamo nel primo caso in quanto
$$\Delta=9+16=25>0.$$
Osserviamo che
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} \begin{array}{l}\nearrow\ x_1=-4,\\ \searrow\ x_2=1,\end{array}$$
ed inoltre
$$\frac{x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}=\frac{(A+B)x+4A-B}{(x-1)(x+4)}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1 & \Leftrightarrow A=1-B \quad A=2/5\\ 4A-B=1 & -5B=-3\Leftrightarrow B=3/5.\end{cases}$$
Pertanto si ha
$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x+4)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2/5}{x-1}+\frac{3/5}{x+4}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\tfrac{2}{5}\ln(|x-1|)+\tfrac{3}{5}\ln(|x+4|)+c.$$

II caso: $\Delta=0$.

Se $\Delta=b^2-4c=0$ allora
$$D(x)=(x-x_1)^2$$
dove $x_1=-b/2$. In questo caso si cercano delle costanti $A,B\in\mathbb{R}$ tali che
$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}=\frac{Ax-Ax_1+B}{(x-x_1)^2}.$$
Tale uguaglianza vale per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1\}$ se e solo se
$$\begin{cases}A=\alpha\\ -Ax_1+B=\beta.\end{cases}$$
Risolto questo sistema, si trovano $A,B\in\mathbb{R}$ e si ha che
$$\int\frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x=A\ln(|x-x_1|)-\frac{B}{x-x_1}+c.$$

Esempio

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$$
Ci troviamo nel secondo caso in quanto
$$\Delta=4-4=0.$$
Osserviamo che
$$x_1=\tfrac{-2}{2}=-1,$$
ed inoltre
$$\frac{x-1}{x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B}{x^2+2x+1}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=1 & \Leftrightarrow A=1\\ A+B=-1 & B=-2.\end{cases}$$
Pertanto si ha
$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\ln(|x+1|)+\tfrac{2}{x+1}+c.$$

III caso: $\Delta<0$.

Se $\Delta=b^2-4c<0$ allora
$$D(x)=x^2+bx+c=\left(x+\tfrac{b}{2}\right)^2-\tfrac{b^2}{4}+c$$
$$=\left(x+\tfrac{b}{2}\right)^2-\tfrac{\Delta}{4}=-\tfrac{\Delta}{4}\left(1+\left(\tfrac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right).$$
Pertanto si ha
$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\alpha x+\beta}{D(x)}=$$
$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2x+b}{x^2+bx+c}+\frac{2\beta-\alpha b}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{\Delta}{4}\left(1+\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right)}$$
e quindi
$$\int\frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}\ln\left(x^2+bx+c\right)+\frac{(2\beta-\alpha b)}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c.$$

Esempio

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$
Ci troviamo nel terzo caso in quanto
$$\Delta=1-4=-3<0.$$
Osserviamo che
$$x^2+x+1=\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}=\tfrac{3}{4}\left(1+\tfrac{4}{3}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$=\tfrac{3}{4}\left(1+\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$
e quindi
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

Esempio

$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$
Ci troviamo nel terzo caso in quanto
$$\Delta=4-8=-4<0.$$
Osserviamo che
$$\frac{x+3}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2}{1+(x+1)^2}$$
e quindi
$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}x}{1+(x+1)^2}$$
$$=\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+2\arctan(x+1)+c.$$

Caso generale

Passiamo ora a studiare il caso generale.

I caso generale: $d=0$.

Il caso $d=0$ corrisponde ad avere $D(x)$ costante e pertanto $N(x)/D(x)$ è semplicemente un polinomio, il cui integrale è

facilmente calcolabile utilizzando la formula
$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \qquad a \neq -1.$$

Esempio

$$\int (3x^4 + 5x) \, dx = \tfrac{3}{5} x^5 + \tfrac{5}{2} x^2 + c$$

Passiamo ora a considerare i casi in cui $d > 0$. Come prima cosa si confrontano i gradi n e q di $N(x)$ e $D(x)$: se $n < d$ allora ci troviamo nel II caso, mentre se $n \geqslant d$ allora siamo nel III caso.

II CASO GENERALE: $0 \leqslant n < d$.

Assumiamo che $0 \leqslant n < d$, ossia che $N(x)$ sia un polinomio di grado (strettamente) inferiore a quello di $D(x)$. In questo caso si può procedere come segue.

- Come prima cosa, a meno di un fattore moltiplicativo che si tira fuori dall'integrale, si riscrive $D(x)$ nella forma
$$D(x) = \left(\prod_{i=1}^{h} (x - x_i)^{\nu_i} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{k} (x^2 - 2\Re e(z_j)\, x - |z_j|^2)^{\eta_j} \right),$$
dove $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in [1,h] \cap \mathbb{N}$, e $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $j \in [1,2k] \cap \mathbb{N}$, sono tutte le soluzioni dell'equazione $D(x) = 0$ con $\overline{z_j} = z_{j+k}$ per $j \in [1,k] \cap \mathbb{N}$, ν_i è la molteplicità della radice x_i, η_j è la molteplicità della radice z_j e sono tali che
$$\nu_1 + \ldots + \nu_h + 2(\eta_1 + \ldots + \eta_k) = q.$$
- Il passaggio successivo è cercare delle costanti $A_m^n, B_m^n, C_m^n \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{i=1}^{h} \left(\frac{A_1^i}{x - x_i} + \ldots + \frac{A_{\nu_1}^i}{(x - x_i)^{\nu_i}} \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{B_1^j x + C_1^j}{x^2 - 2\Re e(z_j) x + |z_j|^2} + \ldots + \frac{B_{\eta_j}^j x + C_{\eta_j}^j}{(x^2 - 2\Re e(z_j) x + |z_j|^2)^{\eta_j}} \right).$$
- A questo punto si sfrutta la linerità dell'integrale ottenendo che
$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \, dx = \sum_{i=1}^{h} \left(\int \frac{A_1^i}{x - x_i} \, dx + \ldots + \int \frac{A_{\nu_1}^i}{(x - x_i)^{\nu_i}} \, dx \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \left(\int \frac{B_1^j x + C_1^j}{x^2 - 2\Re e(z_j) x + |z_j|^2} \, dx + \ldots + \int \frac{B_{\eta_j}^j x + C_{\eta_j}^j}{(x^2 - 2\Re e(z_j) x + |z_j|^2)^{\eta_j}} \, dx \right)$$
e si utilizzano le seguenti formule dopo opportuni passaggi algebrici
$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(|x+a|) + c,$$
$$\int \frac{dx}{(x+a)^\nu} = \frac{(x+a)^{1-\nu}}{1-\nu} + c, \ \nu \neq 1,$$
$$\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b} \, dx = \ln(x^2+ax+b) + c,$$
$$\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^\nu} \, dx = \frac{(x^2+ax+b)^{1-\nu}}{1-\nu} + c, \ \nu \neq 1,$$
$$I_{\nu+1} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\nu+1}} = \frac{x}{2\nu(1+x^2)^\nu} + \frac{2\nu-1}{2\nu} I_{\nu-1},$$
$$I_0 = \int \frac{dx}{(1+x^2)} = \arctan(x) + c,$$
$$I_1 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c.$$

Esempio

$$\int \frac{x^7 - x^6 - 7x^5 - 6x^4 - x^3 - 3x^2 - 6x - 2}{x^8 + 5x^7 + 11x^6 + 13x^5 + 8x^4 + 2x^3} \, dx$$

Ci troviamo nel secondo caso generale. Come prima cosa cerchiamo le soluzioni di
$$D(x) = x^8 + 5x^7 + 11x^6 + 13x^5 + 8x^4 + 2x^3 = 0.$$
Osserviamo che $x_1 = 0$ è una soluzione con molteplicità $\nu_1 = 3$ e che
$$D(x) = x^3(x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 13x^2 + 8x + 2).$$
Osserviamo che $x_2 = -1$ è una soluzione di
$$x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 13x^2 + 8x + 2 = 0$$
ed utilizzando Ruffini
$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 1 & 5 & 11 & 13 & 8 & 2 \\ -1 & & -1 & -4 & -7 & -6 & -2 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 0 \end{array}$$
si ha che
$$D(x) = x^3(x+1)(x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2).$$
Osserviamo che $x_2 = -1$ è una soluzione di
$$x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2 = 0$$
ed utilizzando Ruffini
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 \\ -1 & & -1 & -3 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$
si ha che $x_2 = -1$ ha molteplicità almeno due e che
$$D(x) = x^3(x+1)^2(x^3 + 3x^2 + 4x + 2).$$
Osserviamo che $x_2 = -1$ è una soluzione di
$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$$
ed utilizzando Ruffini
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & & -1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$
si ha che $x_2 = -1$ ha molteplicità almeno tre e che
$$D(x) = x^3(x+1)^3(x^2 + 2x + 2).$$
Osserviamo che
$$x^2 + 2x + 2 = 0$$
non ha soluzioni reali visto che ha $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ e che
$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$
Il passaggio successivo consiste nel cercare delle costanti $A, B, C, D, E, F, G, H \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^7 - x^6 - 7x^5 - 6x^4 - x^3 - 3x^2 - 6x - 2}{x^8 + 5x^7 + 11x^6 + 13x^5 + 8x^4 + 2x^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{(x+1)^3} + \frac{Gx+H}{(x+1)^2+1}$$
$$= \frac{\begin{pmatrix} A(x^7 + 5x^6 + 11x^5 + 13x^4 + 8x^3 + 2x^2) \\ +B(x^6 + 5x^5 + 11x^4 + 13x^3 + 8x^2 + 2x) \\ +C(x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 13x^2 + 8x + 2) \\ +D(x^7 + 4x^6 + 7x^5 + 6x^4 + 2x^3) \\ +E(x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 2x^3) \\ +F(x^5 + 2x^4 + 2x^3) \\ +(Gx+H)(x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3) \end{pmatrix}}{x^3(x+1)^3(x^2+2x+2)}$$
$$= \frac{\begin{pmatrix} (A+D+G)x^7 + (5A+B+4D+E+3G+H)x^6 \\ +(11A+5B+C+3E+7D+F+3G+3H)x^5 \\ +(13A+11B+5C+6D+4E+2F+G+3H)x^4 \\ +(8A+13B+11C+2D+2E+2F+H)x^3 \\ +(2A+8B+13C)x^2 + (2B+8C)x + 2C \end{pmatrix}}{x^3(x+1)^3(x^2+2x+2)}$$

ovvero nel risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} A+D+G=1 \\ 5A+B+4D+E+3G+H=-1 \\ 11A+5B+C+7D+3E+F+3G+3H=-7 \\ 13A+11B+5C+6D+4E+2F+G+3H=-6 \\ 8A+13B+11C+2D+2E+2F+H=-1 \\ 2A+8B+13C=-3 \\ 2B+8C=-6 \\ 2C=-2. \end{cases}$$

Dalle ultime tre condizioni ricaviamo che

$$\begin{cases} 2A+8B+13C=-3 \\ 2B+8C=-6 \\ 2C=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1. \end{cases}$$

Utilizzando quanto appena trovato nelle altre condizioni si ha

$$\begin{cases} D+G=0 \\ 4D+E+3G+H=-7 \\ 7D+3E+F+3G+3H=-22 \\ 6D+4E+2F+G+3H=-25 \\ 2D+2E+2F+H=-11. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ricava che

$$G=-D, \qquad (\clubsuit)$$

ed utilizzandola nelle altre condizioni si ha

$$\begin{cases} D+E+H=-7 \\ 4D+3E+F+3H=-22 \\ 5D+4E+2F+3H=-25 \\ 2D+2E+2F+H=-11. \end{cases}$$

Dalla seconda condizione si ricava che

$$F=-22-4D-3E-3H, \qquad (\spadesuit)$$

ed utilizzandola nelle altre condizioni si ha

$$\begin{cases} D+E+H=-7 \\ -3D-2E-3H=19 \\ -6D-4E-5H=33. \end{cases}$$

Sottraendo alla terza due volte la seconda equazione si ha $H=-5$. Dunque resta da risolvere il sistema

$$\begin{cases} D+E=-2 \\ -3D-2E=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=-2-D \\ -D+4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=-2 \\ D=0. \end{cases}$$

Sostituendo quanto trovato, cioè che

$$D=0, \qquad E=-2, \qquad H=-5,$$

in ($\clubsuit$) e ($\spadesuit$) si ha che

$$G=0, \qquad F=-22+6+15=-1.$$

Abbiamo quindi che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^7-x^6-7x^5-6x^4-x^3-3x^2-6x-2}{x^8+5x^7+11x^6+13x^5+8x^4+2x^3} = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{5}{(x+1)^2+1}$$

e pertanto

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{5}{(x+1)^2+1}\right)dx$$
$$= \ln(|x|)-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}-5\arctan(x+1)+c.$$

III CASO GENERALE: $n \geqslant d > 0$.

Se $n \geqslant d > 0$, allora come prima cosa si cercano due polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ tali che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Q(x)}{D(x)} + R(x),$$

con $Q(x)$ che ha grado $d-1$ ed $R(x)$ ha grado $q-d$. I due polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ possono essere ottenuti scrivendoli in forma generale e risolvendo un sistema algebrico per determinare i coefficienti di $Q(x)$ ed $R(x)$. Una volta fatto ciò basta osservare che per la linerità dell'integrale

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \frac{Q(x)}{D(x)}\,dx + \int R(x)\,dx,$$

applicare quanto descritto nel II caso per calcolare $\int \frac{Q(x)}{D(x)}\,dx$, mentre per il calcolo di $\int R(x)\,dx$ basta applicare quanto descritto nel I caso.

Esempio

$$\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^2+x+2}\,dx$$

Ci troviamo nel III caso generale. Cerchiamo pertanto dei polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ tali che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Q(x)}{D(x)} + R(x), \qquad (\clubsuit)$$

con $Q(x)$ che ha grado $2-1=1$ ed $R(x)$ ha grado $4-2=2$. Questo equivale a cercare $A,B,C,D,E \in \mathbb{R}$ tali che

$$Q(x)=Ax+B, \qquad R(x)=Cx^2+Dx+E,$$

e che soddisfano ($\clubsuit$). Visto che

$$\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2+x+2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+2}+Cx^2+Dx+E = \frac{Cx^4+(C+D)x^3+(2C+D+E)x^2+(A+2D+E)x+B+2E}{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ C+D=0 \\ 2C+D+E=1 \\ A+2D+E=1 \\ B+2E=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ D=-1 \\ E=0 \\ A=3 \\ B=1 \end{cases}$$

risulta

$$\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2+x+2} = \frac{3x+1}{x^2+x+2}+x^2-x$$

e pertanto

$$\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^2+x+2}\,dx = \int\left(\frac{3x+1}{x^2+x+2}+x^2-x\right)dx = \int \frac{3x+1}{x^2+x+2}\,dx + \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}.$$

Per calcolare l'ultimo integrale rimasto applichiamo il metodo descritto nel II caso. Osserviamo che

$$D(x)=x^2+x+2=0$$

non ha soluzioni reali in quanto ha

$$\Delta = 1-8=-7<0.$$

Visto che

$$x^2+x+2 = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4} = \frac{7}{4}\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

si ha

$$\frac{3x+1}{x^2+x+2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+2}-\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{2/\sqrt{7}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

e pertanto

$$\int \frac{3x+1}{x^2+x+2}\,dx = \int\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+2}-\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{2/\sqrt{7}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2}\right)dx$$
$$= \frac{3}{2}\ln(|x^2+x+2|)-\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+c.$$

Abbiamo quindi che

$$\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^2+x+2}\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln(x^2+x+2)-\frac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+c.$$

Esempio

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

in quanto

$$\frac{x^3+x+1}{x^2-1} = x+\frac{2x+1}{x^2-1}$$

e
$$\frac{2x+1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$
$$\iff \begin{cases}A+B=2\\4A-B=1\end{cases}\iff\begin{cases}A=3/2\\B=1/2\end{cases}$$

48 Integrazione per sostituzione

Proposizione

Sia $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione C^0 e sia $g\colon[\alpha,\beta]\to[a,b]$ una funzione C^1. Se $g(\alpha)=a$ e $g(\beta)=b$ allora
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è derivabile ed $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$. Visto che la composizione di funzioni derivabili è derivabile, la funzione
$$H(t)=F\big(g(t)\big),\qquad t\in[\alpha,\beta],$$
è derivabile. Derivando otteniamo
$$H'(t)=F'\big(g(t)\big)g'(t)=f\big(g(t)\big)g'(t)$$
e quindi integrando sull'intervallo $[\alpha,\beta]$ si ha
$$\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta H'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=H(\beta)-H(\alpha)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\qquad\square$$

Esempio

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}x=\sin(t)\\ \mathrm{d}x=\cos(t)\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}=$$
$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\cos(t)^2\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\pi/2}\tfrac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\tfrac12\left[t+\tfrac12\sin(2t)\right]_0^{\pi/2}=\tfrac{\pi}{4}$$

Esempio

$$\int_0^1 x\sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}4-x=t\\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\end{pmatrix}=-\int_4^3(4-t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_3^4\left(4t^{1/2}-t^{3/2}\right)\mathrm{d}t=\left[4\cdot\tfrac23t^{3/2}-\tfrac25t^{5/2}\right]_3^4=\tfrac{2}{15}\left(64-33\sqrt3\right)$$

Esempio

$$\int_0^2\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}x-1=t\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=$$
$$\begin{pmatrix}t=\sin(s)\\ \mathrm{d}t=\cos(s)\,\mathrm{d}s\end{pmatrix}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin(s)^2}\cos(s)\,\mathrm{d}s=$$
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(s)^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\tfrac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\tfrac12\left[t+\tfrac12\sin(2t)\right]_{-\frac12}^{\frac12}=\tfrac{\pi}{2}$$

Esempio

$$\int_0^1\sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}x=\frac{\sqrt3t-1}{2}\\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt3}{2}\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\int_{1/\sqrt3}^{\sqrt3}\sqrt{\tfrac34(1+t^2)}\cdot\tfrac{\sqrt3}{2}\,\mathrm{d}t=$$
$$\tfrac34\int_{1/\sqrt3}^{\sqrt3}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\tfrac34\tfrac12\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_{1/\sqrt3}^{\sqrt3}$$

Esempio

$$\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}t=\tan(x/2),\ x=2\arctan(t)\\ \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}=$$
$$\int_0^1\tfrac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\tfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\tfrac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}=-\left[\tfrac{2}{t+1}\right]_0^1=1$$
in quanto
$$\sin(x)=2\sin(x/2)\cos(x/2)=\tfrac{2\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)^2}$$

Esempio

$$\int_1^2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}t=x+\sqrt{x^2-1},\ x=\frac{t^2+1}{2t}\\ \mathrm{d}x=\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}=$$
$$\int_1^{2+\sqrt3}\left(t-\tfrac{t^2+1}{2t}\right)\tfrac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t=$$
$$\tfrac14\int_1^{2+\sqrt3}\tfrac{(t^2-1)^2}{t^3}\,\mathrm{d}t=\tfrac14\int_1^{2+\sqrt3}\left(t-\tfrac2t+\tfrac1{t^3}\right)\mathrm{d}t=$$
$$\tfrac14\left[\tfrac{t^2}{2}-2\ln(|t|)-\tfrac{1}{2t^2}\right]_1^{2+\sqrt3}=\sqrt3-\tfrac12\ln\left(\sqrt3+2\right)$$

Esempio

$$\int_0^1\tfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}x=2\sin(t)\\ \mathrm{d}x=2\cos(t)\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\int_0^{\pi/6}\tfrac{4\sin(t)^2}{2\cos(t)}2\cos(t)\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\pi/6}4\sin(t)^2\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi/6}(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t=2\left[t-\tfrac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/6}=\tfrac16\left(2\pi-3\sqrt3\right)$$

Esempio

$$\int_0^{\pi/2}\sin(3x)\cos(5x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\tfrac12\big(\sin(8x)-\sin(2x)\big)\,\mathrm{d}x=$$
$$\tfrac12\left[-\tfrac{\cos(8x)}{8}+\tfrac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}=-\tfrac12$$
visto che da
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)$$
segue che
$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\tfrac12(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

Esempio

$$\int_0^1\tfrac{1-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}e^x=t,\ x=\ln(t)\\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{pmatrix}=\int_1^e\tfrac{1-t}{1+t}\cdot\tfrac1t\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_1^e\left(\tfrac1t-\tfrac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\Big[\ln(|t|)-2\ln(|1+t|)\Big]_1^e$$
in quanto
$$\tfrac{1-t}{1+t}\cdot\tfrac1t=\tfrac{A}{t}+\tfrac{B}{1+t}=\tfrac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)}\iff\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$$

Esempio

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\tfrac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}=\begin{pmatrix}\tan(x/2)=t,\ x=2\arctan(t)\\ \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}=$$
$$\int_{\tan(\pi/8)}^1\tfrac{1+t^2}{2t}\tfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\tan(\pi/8)}^1\tfrac{\mathrm{d}t}{t}=-\ln\left(\tan\left(\tfrac{\pi}{8}\right)\right)$$

Esempio

$$\int_0^{\pi/4}\tfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}\tan(x/2)=t,\ x=2\arctan(t)\\ \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}$$
$$=\int_0^{\tan(\pi/8)}\tfrac{2t}{(1+t^2)\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)}\cdot\tfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\tan(\pi/8)}\tfrac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2}\,\mathrm{d}t=(\clubsuit)$$

$$\frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$$
$$\iff (At+B)(t^2-2t+1) + c(1+t^2)(t-1) + D(11+t^2) = 4t$$
$$\iff \begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-C+D=0 \\ A-2B+C=0 \\ B-C+D=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0 \\ B=-2 \\ C=0 \\ D=2 \end{cases}$$
$$(\clubsuit) = \int_0^{\tan(\pi/8)} \left(\frac{-2}{1+t^2} + \frac{2}{(t-1)^2}\right) dt = \left[-2\arctan(t) - \frac{2}{t-1}\right]_0^{\tan(\pi/8)} =$$
$$-\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\tan(\pi/8)-1} - 2 = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{1-\cot\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

Esempio

$$\int e^{-6t}\cos(2t)dt = \frac{1}{20}e^{-6t}\big(\sin(2t) - 3\cos(2t)\big),$$
$$\int e^{-6t}\sin(2t)dt = -\frac{1}{20}e^{-6t}\big(3\sin(2t) + \cos(2t)\big),$$
in quanto
$$\int e^{-6t}\big(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)\big)\,dt = \int e^{(-6+2\mathrm{i})t}\,dt$$
$$= \begin{pmatrix} s = (-6+2\mathrm{i})t \\ ds = (-6+2\mathrm{i})\,dt \end{pmatrix} = \frac{1}{-6+2\mathrm{i}} \int e^s\,ds = \frac{1}{-6+2\mathrm{i}} e^s$$
$$= -\frac{6+2\mathrm{i}}{40} e^{(-6+2\mathrm{i})t} = -\frac{3+\mathrm{i}}{20} e^{-6t}\big(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)\big)$$
$$= \frac{1}{20}e^{-6t}\big(\sin(2t) - 3\cos(2t)\big) - \frac{1}{20}e^{-6t}\big(3\sin(2t) + \cos(2t)\big)\,\mathrm{i}$$
e quindi per concludere basta considerare la parte reale e quella immaginaria.

49 Formula di integrazione per parti

Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni C^1 in $[a,b]$. Dalla formula di derivazione del prodotto si ha
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
Integrando tale relazione e ricordando che
$$\int (fg)'(x)\,dx = f(x)g(x)$$
si ha la seguente formula di integrazione per parti*
$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$
Se invece vogliamo calcolare l'integrale definito si ha
$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx,$$
dove
$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Esempio

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \begin{pmatrix} \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \\ f = -\cos(x),\ g = x \end{pmatrix} =$$
$$\Big[-x\cos(x)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx = \pi + \Big[\sin(x)\Big]_0^\pi = \pi.$$

Esempio

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)^2\,dx = \begin{pmatrix} \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \\ f = -\cos(x),\ g = x\sin(x) \end{pmatrix} =$$
$$\Big[-\cos(x)x\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\big(\sin(x) + x\cos(x)\big)\,dx =$$
$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin(x)\,dx + \int_0^{\pi/2} x\cos(x)^2\,dx =$$
$$\left[\frac{\sin(x)^2}{2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x\big(1 - \sin(x)^2\big)\,dx =$$
$$\frac{1}{2} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x\sin(x)^2\,dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\pi/2} x\sin(x)^2\,dx$$
e quindi
$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)^2\,dx = \frac{1}{16}\big(4 + \pi^2\big)$$

Esempio

$$\int_0^\pi \sin(x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}$$
in quanto
$$\int_0^\pi \sin(x)^2\,dx = \begin{pmatrix} \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \\ f = -\cos(x),\ g = \sin(x) \end{pmatrix} =$$
$$\Big[-\cos(x)\sin(x)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)^2\,dx = \int_0^\pi \big(1 - \sin(x)^2\big)\,dx =$$
$$\Big[x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)^2\,dx = \pi - \int_0^\pi \sin(x)^2\,dx.$$
In alternativa l'integrale può essere calcolato come segue:
$$\int_0^\pi \sin(x)^2\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx =$$
$$\int_0^\pi \frac{dx}{2} - \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Esempio

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)^4\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin(x)^3\,dx =$$
$$\begin{pmatrix} \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \\ f = -\cos(x),\ g = \sin(x)^3 \end{pmatrix} =$$
$$\Big[-\cos(x)\sin(x)^3\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\cdot 3\sin(x)^2\cos(x)\,dx =$$
$$3\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\big(1 - \sin(x)^2\big)\,dx = 3\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\,dx - 3\int_0^{\pi/2} \sin(x)^4\,dx$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin(x)^4\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx =$$
$$\frac{3}{4}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}$$

Esempio

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)^3\,dx = \begin{pmatrix} \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \\ f = \sin(x),\ g = \cos(x)^2 \end{pmatrix} =$$
$$\Big[\sin(x)\cos(x)^2\Big]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\cos(x)\,dx =$$
$$2\int_0^{\pi/2} \big(\cos(x) - \cos(x)^3\big)\,dx$$
$$\Longrightarrow \int_0^{\pi/2} \cos(x)^3\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \frac{2}{3}\Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

Esempio

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \begin{pmatrix} \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \\ f = x,\ g = \ln(1+x^2) \end{pmatrix} =$$
$$\Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x\cdot 2x}{1+x^2}\,dx = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$
$$\ln(2) - 2 + 2\arctan(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{4}$$

*Una filastrocca spagnola "un (u) día vi (dv) una (u) vaca (v) vestida (v) de uniforme" serve per ricordare la formula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Esempio

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int f'g\,\mathrm{d}x = fg - \int fg'\,\mathrm{d}x \\ f = x,\ g = \arctan(x) \end{pmatrix} =$$
$$x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Esempio

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int f'g\,\mathrm{d}t = fg - \int fg'\,\mathrm{d}t \\ f = t,\ g = \ln(t) \end{pmatrix} =$$
$$\Big[t\ln(t)\Big]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1 = x\big(\ln(x) - 1\big) + 1$$

Esempio

$$\int_0^x e^t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int f'g\,\mathrm{d}t = fg - \int fg'\,\mathrm{d}t \\ f = e^t,\ g = \sin(t) \end{pmatrix} =$$
$$\big[e^t\sin(t)\big]_0^x - \int_0^x e^t\cos(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$e^x\sin(x) - \left(\big[e^t\cos t\big]_0^x + \int_0^x e^t\sin(t)\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$e^x\sin(x) - e^x\cos(x) + 1 - \int_0^x e^t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\implies \int_0^x e^t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^x\big(\sin(x) - \cos(x)\big) + \frac{1}{2}$$

Esempio

$$\int_2^3 x\ln(x^2+x-2)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int f'g\,\mathrm{d}x = fg - \int fg'\,\mathrm{d}x \\ f = \frac{x^2}{2},\ g = \ln(x^2+x-2) \end{pmatrix} =$$
$$\left[\frac{x^2}{2}\ln\big(x^2+x-2\big)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{9}{2}\ln(10) - 2\ln(4) - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x^3+x^2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = (\clubsuit)$$

Visto che

$$x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

risulta

$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1).$$

Osserviamo che

$$\frac{2x^3+x^2}{x^2+x-2} = Ax+B+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-1} =$$
$$\frac{(Ax+B)(x^2+x-2)+C(x-1)+D(x+2)}{x^2+x-2} =$$
$$\frac{Ax^3+(A+B)x^2+(-2A+B+C+D)x-2B-C-2D}{x^2+x-2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 & \Leftrightarrow A = 2 & \\ A+B = 1 & B = -1 & \\ -2A+B+C+D = 0 & C+D = 5 & D = 1 \\ -2B-C+2D = 0 & C-2D = 2 & C = 4 \end{cases}$$

e pertanto risulta

$$\frac{2x^3+x^2}{x^2+x-2} = 2x-1+\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-1}.$$

Di conseguenza

$$\int_2^3 \frac{x^2(2x+1)}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(2x-1+\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x =$$
$$\Big[x^2-x+4\ln(|x+2|)+\ln(|x-1|)\Big]_2^3 =$$
$$(3^2-3)-(2^2-2)+4\big(\ln(5)-\ln(4)\big)+\ln(2) = 4+\ln\left(\frac{625}{128}\right)$$

e pertanto

$$(\clubsuit) = \frac{9}{2}\ln(10) - 2\ln(4) - 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{625}{128}\right) = \ln\left(400\sqrt{5}\right) - 2$$

Esempio

$$\int_0^1 x\ln(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int f'g\,\mathrm{d}x = fg - \int fg'\,\mathrm{d}x \\ f = \frac{x^2}{2},\ g = \ln(x^2+x+1) \end{pmatrix} =$$
$$\left[\frac{x^2}{2}\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x^3+x^2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = (\clubsuit)$$

e visto che

$$\frac{2x^3+x^2}{x^2+x+1} = Ax+B+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{(Ax+B)(x^2+x+1)+Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{Ax^3+(A+B)x^2+(A+B+C)x+B+D}{x^2+x+1}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 & \Leftrightarrow A = 2 \\ A+B = 1 & B = -1 \\ A+B+C = 0 & C = -1 \\ B+D = 0 & D = 1 \end{cases}$$

si ha

$$(\clubsuit) = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x-1+\frac{-x+1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\Big[x^2-x\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = (\clubsuit)$$

e visto che $x^2+x+1 = 0$ ha $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ e

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} =$$
$$\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$$

si ha

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1} =$$
$$\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} =$$
$$\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \sqrt{3}\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

e pertanto

$$(\clubsuit) =$$
$$\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \sqrt{3}\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 =$$
$$\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(3) - \sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) =$$
$$\frac{3}{4}\ln(3) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}\ln(3) - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

Esempio

$$\int_0^1 x^2\ln\big(1+4x^2\big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln\big(1+4x^2\big)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3 8x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln\big(1+4x^2\big)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(2x^2-\frac{1}{2}+\frac{1/2}{1+4x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln\big(1+4x^2\big) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\arctan(2x)\right)\right]\Bigg|_0^1$$

Esempio

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+x^2} = t+x \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{2t} \\ dx = \frac{1}{2}\frac{-2t^2-1+t^2}{t^2} = \frac{t^2+1}{2t^2} \end{pmatrix}$$
$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2} \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2} \frac{2}{1-t^2}\,dt$$
$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2} \left(\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \left[\ln\left(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2}$$

Esempio

$$\int_0^1 x^2 \arctan(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

Esempio

$$\int_0^2 e^x \sin(x)^2\,dx = \left[e^x \sin(x)^2\right]_0^2 - \int_0^2 e^x 2\sin(x)\cos(x)\,dx$$
$$= \left[e^x\sin(x)^2 - 2e^x\sin(x)\cos(x)\right]_0^2 + 2\int_0^2 e^x\left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right) dx$$
$$= \left[e^x\sin(x)^2 - 2e^x\sin(x)\cos(x)\right]_0^2 + 2\int_0^2 e^x\left(1 - 2\sin(x)^2\right) dx$$

e quindi

$$\int_0^2 e^x\sin(x)^2\,dx = \frac{1}{5}\left[e^x\sin(x)^2 - 2e^x\sin(x)\cos(x) + 2e^x\right]_0^2$$

Esempio

I metodo: per sostituzione

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \begin{pmatrix} x = \sinh(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ dx = \cosh(t)\,dt \\ t = \operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \end{pmatrix} =$$
$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{1+\sinh(t)^2}\cosh(t)\,dt = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \cosh(t)^2\,dt =$$
$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} =$$
$$\frac{1}{8}\cdot(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) =$$
$$\frac{3+2\sqrt{2}}{8} - \frac{3-2\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \operatorname{arcsinh}(1)\right)$$

II metodo: per parti

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \begin{pmatrix} \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \\ f = x,\ g = \sqrt{1+x^2} \end{pmatrix} =$$
$$\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

III metodo: per sostituzione

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \begin{pmatrix} x = \frac{t^2-1}{2t} \\ t = \dots \end{pmatrix} = \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t - \frac{t^2-1}{2t}\right)\frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^4+2t^2+1}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2\ln(|t|) - \frac{1}{2t^2}\right)\Big|_1^{1+\sqrt{2}}$$

Esempio

$$\int t\,e^{-6t}\cos(2t)dt = \frac{e^{-6t}}{200}\left[(10t+3)\sin(2t) - (30t+4)\cos(2t)\right],$$
$$\int t\,e^{-6t}\sin(2t)dt = -\frac{e^{-6t}}{200}\left[(30t+4)\sin(2t) + (10t+3)\cos(2t)\right]$$

in quanto

$$\int t\,e^{-6t}\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) dt = \int t\,e^{(-6+2i)t}\,dt$$
$$= \begin{pmatrix} s = (-6+2i)t \\ ds = (-6+2i)\,dt \end{pmatrix} = \frac{1}{(-6+2i)^2}\int s\,e^s\,ds$$
$$= \begin{pmatrix} \int f'g = -\int fg' + fg \\ f = e^s,\ g = s \end{pmatrix} = \frac{(6+2i)^2}{1600}\left(-\int e^s\,ds + s\,e^s\right)$$
$$= \frac{(3+i)^2}{400}(s-1)e^s + C = \frac{4+3i}{200}\left((-6+2i)t - 1\right)e^{(-6+2i)t} + C$$
$$= \frac{4+3i}{200}\left((-6+2i)t - 1\right)e^{-6t}\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) + C$$
$$= \frac{e^{-6t}}{200}\left((10t+3)\sin(2t) - (30t+4)\cos(2t)\right)$$
$$- \frac{e^{-6t}}{200}\left((30t+4)\sin(2t) + (10t+3)\cos(2t)\right) i$$

e quindi per concludere basta considerare la parte reale e quella immaginaria.

50 Integrali generalizzati

In alcuni casi l'integrale di una funzione si può definire con un passaggio al limite anche se:

- la funzione non è limitata nell'intervallo di definizione,
- l'intervallo su cui si integra non è limitato.

Definizione

- Sia $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(a,b]$ ma non limitata, cioè
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$
Si dice che f è **integrabile in senso generalizzato sull'intervallo** $(a,b]$ se esiste finito
$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$
ed in tal caso si pone
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx.$$
- Sia $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b)$ ma non limitata, cioè
$$\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty.$$
Si dice che f è **integrabile in senso generalizzato sull'intervallo** $[a,b)$ se esiste finito il limite
$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$
ed in tal caso si pone
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

Definizione

- Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua $[a,+\infty)$. Si dice che f è **integrabile in senso generalizzato sull'intervallo** $[a,+\infty)$ se esiste finito il limite
$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
ed in tal caso si pone
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$
- Sia $f\colon (-\infty,a] \to \mathbb{R}$ una funzione continua $(-\infty,a]$. Si dice che f è **integrabile in senso generalizzato sull'intervallo** $(-\infty,a]$

se esiste finito il limite
$$\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$
ed in tal caso si pone
$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esempio

Sia $f(x)=x^{-\alpha}$, $\alpha>0$, $x\in(0,1]$. Se $c\in(0,1]$ allora
$$\int_c^1\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-c^{1-\alpha}\right) & \text{se } \alpha\neq 1\\ -\ln(c) & \text{se } \alpha=1\end{cases}$$
$$\implies \lim_{c\to0^+}\int_c^1\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha<1\\ +\infty & \text{se } \alpha\geqslant 1.\end{cases}$$
Pertanto la funzione f è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $(0,1]$ se e solo se $\alpha<1$ ed in tal caso
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}.$$

Esempio

Sia $f(x)=x^{-\alpha}$, $\alpha>0$, $x\in(0,1]$. Se $c>1$ allora
$$\int_1^c\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}\left(c^{1-\alpha}-1\right) & \text{se } \alpha\neq 1\\ \ln(c) & \text{se } \alpha=1\end{cases}$$
$$\implies \lim_{c\to+\infty}\int_1^c\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1\\ +\infty & \text{se } \alpha\leqslant 1.\end{cases}$$
Pertanto la funzione f è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[1,+\infty)$ se e solo se $\alpha>1$ ed in tal caso
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Esempio

Sia
$$f(x)=\frac{1}{x(x+2)},\qquad x\in[1,+\infty).$$
Visto che
$$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}$$
$$\iff\begin{cases}A+B=0\\ 2A=1\end{cases}\iff\begin{cases}A=1/2\\ B=-1/2\end{cases}$$
si ha
$$\int_1^b\frac{1}{x(x+2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\big(\ln(b)-\ln(b+2)+\ln(3)\big)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{b}{b+2}\right)+\ln(3)\right]\xrightarrow[b\to+\infty]{}\frac{\ln(3)}{2}$$
e pertanto f è integrabile in $[1,+\infty)$ con
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}=\frac{\ln(3)}{2}.$$

Capitolo 12

Equazioni differenziali

51 Definizioni e proprietà generali

Un'**equazione differenziale** è una relazione espressa da una formula matematica tra una variabile (indipendente) x, una funzione (incognita) y della x ed alcune derivate di y. L'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione differenziale si chiama **ordine dell'equazione differenziale**.

Ad esempio un'**equazione del primo ordine in forma normale** (ossia esplicita rispetto ad y') è un'equazione del tipo

$$y' = f(x,y),$$

dove $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione assegnata. Per soluzione di un'equazione differenziale del tipo considerato si intende una funzione $y(x)$ definita e derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, tale che $\forall\, x \in I$ la coppia $(x, y(x)) \in A$ e valga l'identità

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall\, x \in I.$$

Da notare che l'incognita in un'equazione differenziale non è un numero come accade ad esempio nell'equazione algebrica di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, ma è una funzione.

Di seguito diamo alcuni esempi.

- $y' = y$
- $y' = xy + \sin(x)$
- $y' = e^y$
- $y' = \frac{y}{1+xy^2}$

In generale un'equazione differenziale del primo ordine ha infinite soluzioni.

Esempio

L'equazione differenziale

$$y' = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ha per soluzioni tutte e sole le funzioni costanti.

Per individuarne una particolare in generale è necessario assegnare qualche ulteriore condizione. Ad esempio, fissato $(x_0, y_0) \in A$ (dove A è l'insieme di definizione di f) possiamo cercare, se esiste, una soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x,y)$ che verifichi l'ulteriore condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, ovvero sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Questo problema viene chiamato **problema di Cauchy** per l'equazione differenziale considerata. Consideriamo ora alcuni semplici esempi.

Esempio

Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Supponendo $y(x) > 0$, l'equazione può essere scritta come

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1$$

o anche come $(\ln(y(x)))' = 1$. Risulta pertanto $\ln(y(x)) = x + c$ con c costante in $\mathbb{R}$. Ne deriva quindi che

$$y(x) = e^c\, e^x.$$

Infine la condizione $y(0) = 3$ implica $e^c = 3$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x) = 3\, e^x$.

Esempio

Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Supponendo $y(x) < 0$, l'equazione può essere scritta come

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1$$

o anche come $(\ln(-y(x)))' = 1$. Risulta pertanto $\ln(-y(x)) = x + c$ con c costante in $\mathbb{R}$. Ne deriva quindi che

$$y(x) = -e^c\, e^x.$$

Infine la condizione $y(0) = -3$ implica $e^c = 3$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x) = -3\, e^x$.

Esempio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Supponendo $y(x) > 0$ e ragionando come prima, si ottiene:

$$1 = \frac{y'(x)}{y^2(x)} = \left(-\frac{1}{y(x)}\right)'$$

e quindi

$$-\frac{1}{y(x)} = x + c$$

(c costante in $\mathbb{R}$). Risolvendo in y, si ha infine:

$$y(x) = -\frac{1}{x+c}.$$

La condizione iniziale $y(0) = 1$ implica ora che $c = -1$. Pertanto la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad x \in (-\infty, 1).$$

Teorema di esistenza ed unicità locali

Se f è continua e localmente lipschitziana rispetto ad y uniformemente rispetto a x in un aperto A di $\mathbb{R}^2$, allora esiste un'unica soluzione $y\colon J \to \mathbb{R}$ su un intervallo $J = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Teorema di esistenza locale

Se f è continua in un aperto A di $\mathbb{R}^2$, allora esiste una soluzione $y\colon J \to \mathbb{R}$ su un intervallo $J = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

52 Equazioni differenziali del primo ordine lineari

Un'equazione differenziale del primo ordine lineare è del tipo

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

dove $a, b\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

Teorema

Fissati $x_0 \in [a,b]$ ed $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)\, y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è data dalla seguente formula risolutiva

$$y(x) = e^{A(x)}\left(y_0\, e^{-A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, \mathrm{d}t\right)$$

dove $A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $a(x)$ (ad esempio $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(x)\, \mathrm{d}x$).

Dimostrazione. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale per $e^{-A(x)}$ si ottiene:

$$b(x)\, e^{-A(x)} = \big(y'(x) - a(x)\, y(x)\big)\, e^{-A(x)} = \big(y(x)\, e^{-A(x)}\big)'.$$

Integrando questa identità nell'intervallo $[x_0, x]$ con $x \in [a,b]$ e ricordando la formula fondamentale del calcolo integrale, si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, \mathrm{d}t = y(x)\, e^{-A(x)} - y(x_0)\, e^{-A(x_0)}$$

e quindi, risolvendo in y, si ottiene la formula risolutiva. □

Esempio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + \cos(x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Essendo $a(x) = 1$, risulta $A(x) = x$. Applicando la formula risolutiva, otteniamo

$$y(x) = e^{x} \int_0^x e^{-t} \cos(t)\, \mathrm{d}t.$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\int_0^x e^{-t}\cos(t)\, \mathrm{d}t = -e^{-t}\cos(t)\Big|_0^x - \int_0^x e^{-t}\sin(t)\, \mathrm{d}t$$

$$= 1 - e^{-x}\cos(x) - \left[-e^{-t}\sin(t)\Big|_0^x + \int_0^x e^{-t}\cos(t)\, \mathrm{d}t\right].$$

ossia

$$\int_0^x e^{-t}\cos(t)\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\sin(x)\right)$$

Possiamo concludere che

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - \cos(x) + \sin(x)\right)$$

Esempio

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y' = \tfrac{y}{x} + x^2$$

In questo caso $a(x) = \frac{1}{x}$ e quindi $A(x) = \ln(|x|)$. Moltiplicando per $e^{-A(x)}$, si ha

$$x^2\, e^{-\ln(|x|)} = e^{-\ln(|x|)}\left(y' - \tfrac{y}{x}\right) = \left(y(x)\, e^{-\ln(|x|)}\right)'.$$

Supponendo ora $x > 0$, otteniamo

$$\left(\tfrac{y}{x}\right)' = \tfrac{x^2}{x} = x = \left(\tfrac{x^2}{2}\right)'$$

e quindi

$$\tfrac{y}{x} = \tfrac{x^2}{2} + c \iff y(x) = \tfrac{1}{2}x^3 + c\,x$$

dove c è una costante arbitraria.

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione

$$y' - 2y = \sin(x).$$

L'equazione considerata è del primo ordine lineare. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per e^{-2x} si ottiene

$$e^{-2x}\big(y'(x) - 2y(x)\big) = \big(e^{-2x}y(x)\big)' = e^{-2x}\sin(x)$$

e quindi

$$e^{-2x}y(x) = c + \int_0^x e^{-2t}\sin(t)\, \mathrm{d}t.$$

D'altra partner, integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^x e^{-2t}\sin(t)\, \mathrm{d}t = -\tfrac{e^{-2t}}{2}\sin(t)\Big|_0^x + \tfrac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\cos(t)\, \mathrm{d}t$$

$$= -\tfrac{e^{-2x}}{2}\sin(x) + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{e^{-2t}}{2}\cos(t)\Big|_0^x - \tfrac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\sin(t)\, \mathrm{d}t\right)$$

Se ne conclude che

$$\int_0^x e^{-2t}\sin(t)\, \mathrm{d}t = \tfrac{4}{5}\left(-\tfrac{e^{-2x}}{2}\sin(x) - \tfrac{e^{-2x}}{4}\cos(x) + \tfrac{1}{4}\right).$$

Otteniamo quindi che

$$y(x) = c\, e^{2x} - \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{\sin(x)}{2} + \tfrac{\cos(x)}{4}\right).$$

53 Equazioni differenziali a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine **a variabili separabili** è del tipo

$$y' = a(x)\, b(y)$$

dove $a(x)$ e $b(y)$ sono funzioni continue nei loro insiemi di definizione. Il secondo membro dell'equazione in questo caso è il prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y. Si noti che se esiste $y_0 \in \mathbb{R}$ tale che $b(y_0) = 0$, allora la funzione costante $y \equiv y_0$ è una soluzione dell'equazione differenziale. Se invece $b(y_0) \neq 0$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $b(y) \neq 0$ per ogni $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Dividendo per $b(y)$ si ottiene

$$\tfrac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x).$$

Integrando su di un intervallo $[x_0, x]$, si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \tfrac{y'(t)}{b(y(t))}\, \mathrm{d}t.$$

Operando la sostituzione $s = y(t)$ nel secondo integrale si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \tfrac{\mathrm{d}s}{b(s)}.$$

Se A è una primitiva di a e B di $1/b$, allora l'equazione integrale precedente diventa

$$A(x) - A(x_0) = B\big(y(x)\big) - B\big(y(x_0)\big)$$

$$\iff B\big(y(x)\big) = A(x) - A(x_0) + B\big(y(x_0)\big).$$

Infine, si risolve in maniera esplicita l'equazione differenziale se dalla relazione precedente si riesce a ricavare $y(x)$, ovvero se la funzione inversa di B è nota, altrimenti si è risolto in maniera implicita l'equazione differenziale.

Esempio

Consideriamo l'equazione differenziale $y' = y^2$. L'equazione ammette come soluzione la funzione costante $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Cerchiamo altre soluzioni. Fissato ad arbitrio $x_0 \in \mathbb{R}$ e supposto $y \neq 0$ e procedendo come nel caso generale, risulta

$$1 = \tfrac{y'}{y^2} \implies \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \tfrac{y'(t)}{y(t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \tfrac{\mathrm{d}s}{s^2}$$

$$\implies x - x_0 = \left[-\tfrac{1}{s}\right]_{y(x_0)}^{y(x)} = -\tfrac{1}{y(x)} + \tfrac{1}{y(x_0)} \implies y(x) = -\tfrac{1}{x+c},$$

dove si è posto per semplicità $c = -x_0 - \frac{1}{y(x_0)}$. In conclusione, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$y(x) = -\tfrac{1}{x+c}$$

definita per $x \neq -c$ è soluzione dell'equazione considerata.

Esempio

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\,(y-1) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Osserviamo che le funzioni costanti $y \equiv 0$ ed $y \equiv 1$ sono soluzioni dell'equazione differenziale, ma non soddisfano la condizione iniziale, e pertanto non sono soluzioni del problema di Cauchy.

In particolare, da questo e dalla condizione iniziale $y(0)=2>1$, segue che per il teorema di esistenza ed unicità locali si ha che localmente la soluzione del problema di Cauchy soddisfa $y(x)>1$. Procedendo come nel caso generale, risulta

$$\begin{aligned} x &= \int_0^x \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)(y(t)-1)}\,\mathrm{d}t = \int_2^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{s(s-1)} \\ &= \int_2^{y(x)} \left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)\mathrm{d}s = \left[\ln\left(\left|\frac{s-1}{s}\right|\right)\right]_2^{y(x)} \\ &= \ln\left(\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right|\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ne deriva che

$$\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = \frac{1}{2}e^x.$$

Visto che $y(x)>1$ si ha

$$y(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^x} = \frac{2}{2-e^x}.$$

Esempio

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2}{2y+1} \\ y(0)=0. \end{cases}$$

L'equazione considerata è a variabili separabili. Visto che

$$(2y+1)y' = x^2 \Longrightarrow \left(y^2+y\right)' = x^2$$

si ha che

$$y^2(x)+y(x) = \frac{x^3}{3}+c.$$

Ora, dalla condizione iniziale $y(0)=0$ otteniamo che la costante c deve essere zero, $c=0$. Risolvendo infine rispetto a y e considerando solo la soluzione che verifica la condizione $y(0)=0$, otteniamo

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{3}x^3}-1\right).$$

54 Equazioni differenziali del secondo ordine, lineari, omogenee ed a coefficienti costanti

Un'**equazione differenziale del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti ed omogenea** è del tipo

$$y''+ay'+by=0, \qquad (\spadesuit)$$

dove $a,b\in\mathbb{R}$ sono due numeri fissati. Mostriamo come ottenere due soluzioni y_1 ed y_2 dell'equazione differenziale ($\spadesuit$) che siano **linearmente indipendenti**, cioè tali che $\alpha y_1+\beta y_2 \not\equiv 0$ per ogni $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Il **polinomio associato** all'equazione differenziale ($\spadesuit$) è il polinomio di secondo grado

$$P(\lambda) = \lambda^2+a\lambda+b.$$

Considereremo separatamente i tre casi in cui $\Delta=a^2-4b$ sia positivo, nullo o negativo.

Caso $\Delta>0$. In questo caso l'equazione $P(\lambda)=0$ ammette due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2},$$

a cui corrispondono le due funzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x},$$

che sono due soluzioni linearmente indipendenti. Infatti, è ovvio che sono linearmente indipendenti. Inoltre, ragionando su y_1, risulta

$$y_1'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, \qquad y_1''(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x},$$

e pertanto

$$y_1''+ay_1'+by_1 = e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2+a\lambda_1+b) = e^{\lambda_1 x}P(\lambda_1) = 0.$$

Caso $\Delta=0$. In questo caso l'equazione $P(\lambda)=0$ ammette un'unica soluzione $\lambda_1=-\frac{a}{2}$ (contata due volte essendo in questo caso $P(\lambda)$ un quadrato) e due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziali ($\spadesuit$) sono date da

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}.$$

Infatti, ragionando sulla seconda, otteniamo

$$y_2'(x) = e^{\lambda_1 x}(1+\lambda_1 x), \qquad y_2''(x) = e^{\lambda_1 x}(2\lambda_1+\lambda_1^2 x),$$

e pertanto

$$\begin{aligned} y_2''+ay_2'+by_2 &= e^{\lambda_1 x}(2\lambda_1+\lambda_1^2 x+a+a\lambda_1 x+bx) \\ &= e^{\lambda_1 x}(P(\lambda_1)x-a+a) = 0. \end{aligned}$$

Caso $\Delta<0$. In questo caso l'equazione $P(\lambda)=0$ ha due radici complesse (e coniugate) distinte date da

$$\lambda_1 = \frac{-a-i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta, \qquad \lambda_2 = \frac{-a+i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha+i\beta,$$

dove abbiamo posto

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale ($\spadesuit$) sono date da

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x), \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Verifichiamolo ad esempio per y_1:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x)+\beta\cos(\beta x)), \\ y_1''(x) &= e^{\alpha x}(\alpha^2\sin(\beta x)+2\alpha\beta\cos(\beta x)-\beta^2\sin(\beta x)), \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} &y_1''(x)+ay_1'(x)+by_1(x) \\ &= e^{\alpha x}\left(\sin(\beta x)\left(\alpha^2-\beta^2+a\alpha+b\right)+\cos(\beta x)(2\alpha\beta+a\beta)\right). \end{aligned}$$

Per concludere basta ricordare che $\alpha=-\frac{a}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}=\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ e quindi

$$\begin{aligned} &\alpha^2-\beta^2+a\alpha+b = \frac{a^2}{4}-\frac{4b-a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b = 0, \\ &2\alpha\beta+a\beta = \beta(2\alpha+a) = 0. \end{aligned}$$

Usando le due soluzioni linearmente indipendenti y_1, y_2 trovate nelle considerazioni precedenti a seconda dei tre casi, è possibile scrivere la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale ($\spadesuit$).

Teorema

Le soluzioni dell'equazione ($\spadesuit$) sono tutte e sole le funzioni della famiglia

$$y(x) = Ay_1(x)+By_2(x)$$

dove $A,B\in\mathbb{R}$ sono numeri arbitrari ed y_1,y_2 sono le due soluzioni linearmente indipendenti trovate in precedenza.

Il teorema precedente ci dice che per ogni valore assegnato ad A e a B, la funzione

$$y(x) = Ay_1(x)+By_2(x)$$

è una soluzione dell'equazione differenziale ($\spadesuit$) e, viceversa, se y è una soluzione dell'equazione differenziale ($\spadesuit$), allora si possono trovare due numeri $A,B\in\mathbb{R}$ tali che

$$y(x) = Ay_1(x)+By_2(x).$$

Concludiamo questa sezione osservando che, dati $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{R}$, per trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+ay'+by=0 \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=z_0, \end{cases}$$

si deve prima calcolare le due soluzioni linearmente indipendenti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dell'equazione differenziale, e poi determinare $A,B\in\mathbb{R}$ tali che $y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$ soddisfi le condizioni in x_0, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} Ay_1(x_0)+By_2(x_0)=y_0 \\ Ay_1'(x_0)+By_2'(x_0)=z_0. \end{cases}$$

55 Equazioni differenziali del secondo ordine, lineari ed a coefficienti costanti

Un'**equazione differenziale del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti** non omogenea è del tipo

$$y'' + ay' + by = f(x), \qquad (\star)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono numeri fissati ed $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ è una funzione data.

Usando le due soluzioni linearmente indipendenti y_1, y_2 dell'equazione omogenea associata ($\spadesuit$) trovate nella sezione precedente, e una sola soluzione $\bar{y}$ dell'equazione non omogenea ($\star$), è possibile scrivere la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale ($\star$).

Teorema

Se $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione non omogenea ($\star$), allora le soluzioni dell'equazione non omogenea ($\star$) sono tutte e sole le funzioni della famiglia

$$y(x) = \bar{y}(x) + Ay_1(x) + By_2(x)$$

dove $A, B \in \mathbb{R}$ sono numeri arbitrari ed y_1, y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata $y'' + ay' + by = 0$.

Mostriamo alcuni metodi per trovare una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione ($\star$) distinguendo i seguenti casi a seconda dell'espressione di f.

CASO 1. Supponiamo di dover trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea ($\star$) con

$$f(x) = Q(x)\,e^{\alpha x},$$

dove Q è un polinomio in x di grado $n \geqslant 0$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ è un numero fissato. Consideriamo il polinomio associato all'equazione differenziale

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b,$$

e distinguiamo i seguenti casi:

- **i)** se $P(\alpha) \neq 0$, allora una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni dei tipo
$$\bar{y}(x) = R(x)\,e^{\alpha x},$$
dove R è un polinomio in x di grado n;
- **ii)** se $P(\alpha) = 0$ ed α è una soluzione dell'equazione $P(\lambda) = 0$ con molteplicità uno (ossia il polinomio $P(\lambda)$ è divisibile per il binomio $(x-\alpha)$, ma non per $(x-\alpha)^2$), allora una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni dei tipo
$$\bar{y}(x) = xR(x)\,e^{\alpha x},$$
dove R è un polinomio in x di grado n;
- **iii)** se $P(\alpha) = 0$ ed α è una soluzione dell'equazione $P(\lambda) = 0$ con molteplicità due (ossia il polinomio $P(\lambda)$ è divisibile per $(x-\alpha)^2$, ma non per $(x-\alpha)^3$), allora una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni del tipo
$$\bar{y}(x) = x^2 R(x)\,e^{\alpha x},$$
dove R è un polinomio in x di grado n.

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' - 4y' + 3y = x^2 + 2x.$$

Il secondo membro è del tipo considerato con $\alpha = 0$ e $Q(x) = x^2 + 2x$. Siccome $P(0) = 3 \neq 0$, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Risulta

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B \ , \quad \bar{y}''(x) = 2A$$

e quindi

$$\begin{aligned}\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 3\bar{y} &= 2A - 8Ax - 4B + 3Ax^2 + 3Bx + 3C \\ &= 3Ax^2 + (3B - 8A)x + 2A - 4B + 3C.\end{aligned}$$

Ottengo quindi che $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione completa se e solo se A, B, C verificano il sistema

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 3B - 8A = 2 \\ 2A - 4B + 3C = 0 \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$A = \tfrac{1}{3} \ , \quad B = \tfrac{1}{3}\left(2 + \tfrac{8}{3}\right) = \tfrac{14}{9} \ , \quad C = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{56}{9} - \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{50}{27}.$$

Allora una soluzione è data da

$$\bar{y}(x) = \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{14}{9}x + \tfrac{50}{27}.$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x.$$

Il secondo membro è del tipo considerato con $\alpha = 1$ e $Q(x) = x$. Siccome $P(1) = 0$ e 1 è una soluzione con molteplicità uno, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = x\,(Ax + B)\,e^x = e^x\left(Ax^2 + Bx\right).$$

Risulta

$$\begin{aligned}\bar{y}'(x) &= e^x\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right) \\ \bar{y}''(x) &= e^x\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A\right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 3\bar{y} =$$
$$e^x[x^2(A - 4A + 3A) + x(B + 4A - 4B - 8A + 3B) + 2B + 2A - 4B]$$
$$= e^x(-4Ax + 2A + 2B).$$

Ottengo quindi che $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione completa se e solo se A, B verificano il sistema

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$A = -\tfrac{1}{4} \ , \quad B = \tfrac{1}{4}.$$

Allora una soluzione è data da

$$\bar{y}(x) = -\tfrac{1}{4}x\,(x-1)\,e^x.$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Il secondo membro è del tipo considerato con $\alpha = 1$ e $Q(x) = x$. Siccome $P(1) = 0$ e 1 è una soluzione con molteplicità due, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = x^2\,(Ax + B)\,e^x = e^x\left(Ax^3 + Bx^2\right).$$

Risulta

$$\bar{y}'(x) = e^x\left(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx\right)$$
$$\bar{y}''(x) = e^x\left(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 2Bx + 6Ax + 2B\right)$$

e quindi

$$\bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} =$$
$$e^x[x^3(A - 2A + A) + x^2(B + 6A - 6A - 2B + B) + x(4B + 6A - 4B) + 2B]$$
$$= e^x(6Ax + 2B)$$

Si ha quindi che $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione completa se e solo se A, B verificano il sistema

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$A = \tfrac{1}{6} \ , \quad B = 0.$$

Allora una soluzione è data da
$$\bar{y}(x) = -\tfrac{1}{6}x^3 e^x.$$
Osserviamo che se per errore si fosse cercata una soluzione del tipo
$$\bar{y}(x) = x(Ax+B)e^x = e^x\left(Ax^2+Bx\right)$$
il calcolo non avrebbe dato alcun risultato. Infatti risulterebbe
$$\bar{y}'(x) = e^x\left(2Ax+B+Ax^2+Bx\right)$$
$$\bar{y}''(x) = e^x\left(2Ax+B+Ax^2+Bx+2A+2Ax+B\right)$$
e quindi
$\bar{y}''-2\bar{y}'+\bar{y} =$
$e^x\left[x^2(A-2A+A)+x(4A+B-4A-2B+B)++2A+B-2B\right]$
$= e^x(2A-B)$.
Si dovrebbe avere quindi, affinchè $\bar{y}$ fosse soluzione dell'equazione completa che $2A-B=x$. Relazione che contrasta col fatto che A, B sono costanti.

CASO 2. Supponiamo di dover trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea $(\star)$ con
$$f(x) = Q(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{oppure} \quad f(x) = Q(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)),$$
dove Q è un polinomio in x di grado $n \geqslant 0$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono due numeri fissati. In questo secondo caso, vale la seguente regola:

- **i)** se $P(\alpha+i\beta) \neq 0$, allora una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni dei tipo
$$\bar{y}(x) = R_1(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)+R_2(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$
dove R_1, R_2 sono due polinomi in x di grado n;
- **ii)** se $P(\alpha+i\beta) = 0$, allora una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni del tipo
$$\bar{y}(x) = x(R_1(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)+R_2(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)),$$
dove R_1, R_2 sono due polinomi in x di grado n.

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione
$$y''+y = \sin(x).$$
Il secondo membro è del tipo considerato nel caso 2 con $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $Q(x) = 1$. Siccome $P(\alpha+i\beta) = P(i) = 0$, cerchiamo una soluzione del tipo
$$\bar{y}(x) = x\,(A\cos(x)+B\sin(x)).$$
Risulta
$$\bar{y}'(x) = A\cos(x)+B\sin(x)+x(-A\sin(x)+B\cos(x))$$
$$\bar{y}''(x) = -A\sin(x)+B\cos(x)-A\sin(x)+B\cos(x)$$
$$+x(-A\cos(x)-B\sin(x))$$
e quindi
$$\bar{y}''+\bar{y} = \cos(x)(-Ax+2B+Ax)+\sin(x)(-Bx-2A+Bx)$$
$$= 2B\cos(x)-2A\sin(x).$$
Ottengo quindi che $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione completa se e solo se $B = 0$ e $-2A = 1$. Allora una soluzione è data da
$$\bar{y}(x) = -\tfrac{1}{2}x\cos(x).$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione
$$y''+y' = x\sin(x).$$
Il secondo membro è del tipo considerato con $\alpha = 0 \beta = 1$ e $Q(x) = x$. Siccome $P(i) = i-1 \neq 0$, cerchiamo una soluzione del tipo
$$\bar{y}(x) = (Ax+B)\sin(x)+(Cx+D)\cos(x).$$
Risulta
$$\bar{y}'(x) = A\sin(x)+(Ax+B)\cos(x)+C\cos(x)-(Cx+D)\sin(x)$$
$$\bar{y}''(x) = 2A\cos(x)-(Ax+B)\sin(x)-2C\sin(x)-(Cx+D)\cos(x)$$
e quindi
$$\bar{y}''+\bar{y}' = \cos(x)[2A-cx-D+Ax+B+C]$$
$$+\sin(x)[-Ax-B-2C+A-Cx-D].$$
Ottengo quindi che $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione completa se e solo se A, B, C, D verificano il sistema
$$\begin{cases} A-C=0 \\ 2A-D+B+C=0 \\ -A-C=1 \\ B-2C-D=0. \end{cases}$$
Ora sommando la prima e la terza equazione si ottiene $-2C = 1$ e quindi $C = -\frac{1}{2}$ e $A = C = -\frac{1}{2}$. Infine dalla seconda e quarta equazione, si ricava
$$\begin{cases} -1-D+B-\frac{1}{2}=0 \\ -B+1-\frac{1}{2}-D=0 \end{cases} \quad \begin{cases} B-D=\frac{3}{2} \\ B+D=\frac{1}{2} \end{cases}$$
Si ottiene dunque $B = 1$ e $D = -\frac{1}{2}$. Allora una soluzione è data da
$$\bar{y}(x) = \left(-\tfrac{1}{2}x+1\right)\sin(x)+\left(-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\right)\cos(x).$$

Esempio

Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''-2y'+2y=\sin(x) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$
Il polinomio associato all'equazione differenziale è $P(\lambda) = \lambda^2-2\lambda+2 = 0$ che ammette le due soluzioni complesse $1 \mp i$. Una soluzione particolare è dunque del tipo
$$\bar{y}(x) = A\sin(x)+B\cos(x).$$
Risulta
$$\bar{y}'(x) = A\cos(x)-B\sin(x)$$
$$\bar{y}''(x) = -A\sin(x)-B\cos(x)$$
e quindi
$\bar{y}''-2\bar{y}'+2\bar{y} = \sin(x)[-A+2B+2A]+\cos(x)[-B-2A+2B]$.
Ottengo quindi che $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione completa se e solo se A, B verificano il sistema
$$\begin{cases} 2B+A=1 \\ B-2A=0. \end{cases}$$
Ne deriva che $A = 1-2B$ e quindi $B-2+4B = 0$. Ossia $B = \frac{2}{5}$ e quindi $A = \frac{1}{5}$. Allora una soluzione particolare è data da
$$\bar{y}(x) = \tfrac{1}{5}\sin(x)+\tfrac{2}{5}\cos(x).$$
Possiamo quindi concludere che l'integrale generale dell'equazione considerata è dato dalla famiglia di funzioni
$$y(x) = \tfrac{1}{5}\sin(x)+\tfrac{2}{5}\cos(x)+Ae^x\sin(x)+Be^x\cos(x).$$
Osservando infine che
$$y'(x) = \tfrac{1}{5}\cos(x)-\tfrac{2}{5}\sin(x)$$
$$+e^x(A\sin(x)+B\cos(x)+A\cos(x)-B\sin(x))$$
e quindi le condizioni iniziali sono verificate se
$$y(0) = \tfrac{2}{5}+B = 0 \quad y'(0) = \tfrac{1}{5}+B+A = 1$$
ossia $B = -\frac{2}{5}$ e $A = 1+\frac{2}{5}-\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy cercata è data dalla funzione
$$y(x) = \tfrac{1}{5}\sin(x)+\tfrac{2}{5}\cos(x)+\tfrac{6}{5}e^x\sin(x)-\tfrac{2}{5}e^x\cos(x).$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione
$$y''+4y = \sin(x)^2.$$

Osserviamo che risulta
$$\sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
e quindi se $\overline{y}_1$ è soluzione dell'equazione
$$y'' + 4y = \frac{1}{2}$$
e $\overline{y}_2$ è soluzione della seconda equazione
$$y'' + 4y = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$
allora la funzione somma
$$\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x)$$
è soluzione dell'equazione differenziale iniziale.
Consideriamo dunque la prima equazione. Una soluzione particolare è del tipo $\overline{y}_1(x) = A$, se la costante A verifica la condizione $4A = \frac{1}{2}$, ossia se $A = \frac{1}{8}$. D'altra parte una soluzione particolare della seconda equazione, essendo $P(2i) = 0$, è del tipo
$$\overline{y}_2(x) = x(A\cos(2x) + B\sin(2x)).$$
Risulta
$$\begin{aligned}\overline{y}_2'(x) &= A\cos(2x) + B\sin(2x)\\ &\quad + x(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x))\\ \overline{y}_2''(x) &= -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) - 2A\sin(2x)\\ &\quad + 2B\cos(2x) + x(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x))\end{aligned}$$
e quindi
$$\begin{aligned}\overline{y}_2'' + 4\overline{y}_2 = &\sin(2x)[x(-4B+4B) - 4A + 4B]\\ &+ \cos(2x)[x(-4A+4A) + 4B + 4A].\end{aligned}$$
Ottengo quindi che $\overline{y}_2$ è una soluzione dell'equazione completa se e solo se A, B verificano il sistema
$$\begin{cases}-4A + 4B = 0\\ 4A + 4B = -\frac{1}{2}\end{cases}$$
Ne deriva quindi che
$$A = -\frac{1}{16}\ ,\ \ B = A = -\frac{1}{16}.$$
Allora una soluzione particolare dell'equazione iniziale è data da
$$\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(\cos(2x) + \sin(2x)).$$

CASO 3. Supponiamo di dover trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea ($\star$) con f che ha una espressione analitica diversa da quelle considerate nei due casi precedenti. Proviamo ora il seguente **metodo della variazione delle costanti**.

Teorema

Data un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea
$$y'' + ay' + b = f(x),$$
se y_1, y_2 sono due soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata
$$y'' + ay' + b = 0,$$
e se $A(x), B(x)$ sono due funzioni derivabili le cui derivate prime A' e B' verificano il sistema
$$\begin{cases}A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0\\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x),\end{cases} \qquad (\bigstar)$$
allora la funzione
$$\overline{y}(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$$
è una soluzione dell'equazione differenziale non omogenea.

Dimostrazione. Utilizzando la prima equazione del sistema ($\bigstar$) per semplificare la derivata prima, si ha
$$\begin{aligned}\overline{y}'(x) &= A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) + A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x)\\ &= A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x),\end{aligned}$$
di conseguenza
$$\overline{y}''(x) = A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) + A(x)y_1''(x) + B(x)y_2''(x),$$
e pertanto, utilizzando la seconda equazione del sistema ($\bigstar$), si ha
$$\begin{aligned}\overline{y}''(x) + a\overline{y}'(x) + b\overline{y}(x) &= A(x)(y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x))\\ &\quad + B(x)(y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x))\\ &\quad + A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x)\\ &= A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' + y' - 2y = \frac{1}{1+e^x}.$$
Il polinomio associato all'equazione è $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ che ha le due soluzioni
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{9}}{2} = \begin{cases}-2\\ 1.\end{cases}$$
Allora la funzione
$$\overline{y}(x) = A(x)e^{-2x} + B(x)e^x$$
è soluzione dell'equazione se A' e B' sono soluzioni del sistema
$$\begin{cases}A'(x)e^{-2x} + B'(x)e^x = 0\\ -2A'(x)e^{-2x} + B'(x)e^x = \frac{1}{1+e^x}.\end{cases}$$
Dalla prima equazione, si ricava $A' = -B'e^{3x}$ e quindi
$$2B'e^x + B'e^x = \frac{1}{1+e^x}$$
e quindi
$$B'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{e^{-x}}{1+e^x}\ ,\ \ A'(x) = -\frac{1}{3}\,\frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$
Usando ora la sostituzione $e^t = s$ ossia $t = \ln(s)$, si ha
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,dt &= \int_1^{e^x} \frac{s^2}{1+s}\,\frac{1}{s}\,ds = \int_1^{e^x} \frac{s}{1+s}\,ds\\ &= \int_1^{e^x}\left(1 - \frac{1}{1+s}\right)ds = (s - \ln(1+s))\Big|_1^{e^x}.\end{aligned}$$
Ne deriva quindi che possiamo prendere
$$A(x) = -\frac{1}{3}[e^x - \ln(1+e^x)].$$
Analogamente utilizzando la sostituzione $e^{-t} = s$ ossia $t = -\ln(s)$, si ha
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^t}\,dt &= \int_1^{e^{-x}} \frac{s}{1+1/s}\left(-\frac{1}{s}\right)ds = -\int_1^{e^{-x}} \frac{s}{1+s}\,ds\\ &= \int_1^{e^{-x}}\left(1 - \frac{1}{1+s}\right)ds = (s - \ln(1+s))\Big|_1^{e^{-x}}\end{aligned}$$
Ne deriva quindi che possiamo prendere
$$B(x) = -\frac{1}{3}\left[e^{-x} - \ln\left((1+e^{-x})\right)\right].$$
Pertanto si ottiene la soluzione
$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{3}[e^x - \ln((1+e^x))]\,e^{-2x} - \frac{1}{3}\left[e^{-x} - \ln\left((1+e^{-x})\right)\right]e^x.$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' + y = \tan x.$$
Il polinomio associato all'equazione è $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ che ha le due soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm i$. Allora la funzione
$$\overline{y}(x) = A(x)\sin(x) + B(x)\cos(x)$$
è soluzione dell'equazione se A' e B' sono soluzioni del sistema
$$\begin{cases}A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) = 0\\ A'(x)\cos(x) - B'(x)\sin(x) = \tan x.\end{cases}$$
Dalla prima equazione, si ricava $A' = -B'\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ e quindi
$$-B'\frac{\cos^2 x}{\sin(x)} - B'\sin(x) = \tan x$$
e quindi
$$B'(x) = -\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}\ ,\ \ A'(x) = \sin(x).$$
Pertanto $A(x) = -\cos(x)$. Per ottenere B, osserviamo in primo luogo che
$$B'(x) = -\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)} = -\frac{1}{\cos(x)} + \cos(x).$$

D'altra parte, usando la sostituzione $\tan(t/2) = s$ ossia $t = 2\arctan s$, si ha
$$\int_0^x \frac{dt}{\cos(t)} = \int_0^{\tan(t/2)} \frac{1+s^2}{1-s^2}\,\frac{2}{1+s^2}\,dt = -2\int_0^{\tan(t/2)} \frac{dt}{s^2-1}.$$
Usando infine la decomposizione
$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$$
posso concludere che
$$B(x) = \sin(x) + \ln\left(\left|\frac{\tan(x/2)-1}{\tan(x/2)+1}\right|\right).$$
Otteniamo quindi che
$$\bar{y}(x) = -\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) + \ln\left(\left|\frac{\tan(x/2)-1}{\tan(x/2)+1}\right|\right)\cos(x)$$
$$= \ln\left(\left|\frac{\tan(x/2)-1}{\tan(x/2)+1}\right|\right)\cos(x).$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' - y' - 2y = x^2.$$
Il polinomio associato è $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Allora $\Delta = 1+8 = 9$ e quindi l'equazione $P(\lambda) = 0$ ammette le due radici distinte
$$\lambda_{1,2} = \frac{1\mp 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2. \end{cases}$$
Pertanto due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata sono
$$y_1(x) = e^{-x}\,,\quad y_2(x) = e^{2x}.$$
Volendo applicare il metodo della variazione delle costanti considero il sistema
$$\begin{cases} A'(x)\,e^{-x} + B'(x)\,e^{2x} = 0 \\ -A'(x)\,e^{-x} + 2B'(x)\,e^{2x} = x^2. \end{cases}$$
Si ricava quindi
$$B'(x) = \frac{1}{3}\,x^2 e^{-2x} \qquad A'(x) = -\frac{1}{3}\,x^2 e^x.$$
Integrando per parti si ottiene infine
$$A(x) = -\frac{1}{3}\int_0^x t^2 e^t\,dt = -\frac{1}{3}\left[x^2 e^x - 2\int_0^x t\,e^t\,dt\right]$$
$$= -\frac{1}{3}\left[x^2 e^x - 2x e^x + 2\int_0^x e^t\,dt\right]$$
$$= -\frac{1}{3}\left[x^2 e^x - 2x e^x + 2(e^x - 1)\right]$$
Analogamente si ottiene
$$B(x) = \frac{1}{3}\int_0^x t^2 e^{-2t}\,dt = \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \frac{x e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{-2x}}{2}\right).$$
Una soluzione particolare dell'equazione differenziale è data pertanto dalla funzione
$$\bar{y}(x) = A(x)\,e^{-x} + B(x)\,e^{2x}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 - 2x + 2 - e^{-x}\right) + \frac{1}{6}\left(-x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,e^{2x}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}\,e^{-x} + \frac{1}{12}\,e^{2x}.$$
Da notare che si poteva anche usare il metodo considerato nel CASO 1 e ottenere una soluzione particolare con un calcolo più semplice. Infatti se ricerchiamo una soluzione del tipo
$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$
otteniamo
$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B \quad \text{e} \quad \bar{y}''(x) = 2A.$$
Pertanto
$$\bar{y}''(x) - \bar{y}'(x) - 2\bar{y}(x) = 2A - 2Ax - B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C$$
e quindi devono essere verificate le condizioni
$$A = -\frac{1}{2}\,,\quad -2A - 2B = 0\,,\quad 2A - B - 2C = 0$$
e quindi
$$A = -\frac{1}{2}\,,\quad B = \frac{1}{2}\,,\quad C = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$
Otteniamo quindi la soluzione
$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Esempio

Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$
Osserviamo che una soluzione particolare dell'equazione considerata la possiamo ricercare tra le funzioni del tipo
$$\bar{y}(x) = x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x)).$$
Infatti risulta
$$\bar{y}'(x) = (A\cos(2x) + B\sin(2x)) + x(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x))$$
$$\bar{y}''(x) = (-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x))$$
$$+ x(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)).$$
Otteniamo infine
$$\bar{y}''(x) + 4\bar{y}(x) = \sin(2x)[x(-4B + 4B) - 4A + 4B]$$
$$+ \cos(2x)[x(-4A + 4A) + 4B + 4A]$$
Pertanto l'equazione sarà verificata se e solo se A, B verificano il sistema
$$\begin{cases} -4A + 4B = 0 \\ 4B + 4A = 1 \end{cases}$$
ossia $A = B = 1/2$. Allora l'integrale generale è dato dalla famiglia di funzioni
$$y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) + \frac{1}{2}x(\sin(2x) + \cos(2x)).$$
Essendo infine
$$y'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) + \frac{1}{2}(\sin(2x) + \cos(2x)$$
$$+ \frac{1}{2}x(2\cos(2x) - 2\sin(2x))$$
le condizioni iniziali portano alle condizioni $y(0) = B = 1$, $2A + \frac{1}{2} = 2$ ossia $A = \frac{3}{4}$. Pertanto la soluzione del Problema di Cauchy cercata è
$$y(x) = \frac{3}{4}\sin(2x) + \cos(2x) + \frac{1}{2}x(\sin(2x) + \cos(2x)).$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione
$$y'' - y = \ln(1 + e^x).$$
Applicando il metodo della variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione del tipo
$$\bar{y}(x) = A(x)\,e^x + B(x)\,e^{-x}$$
dove A, B si ricavano risolvendo il sistema
$$\begin{cases} A'(x)\,e^x + B'(x)\,e^{-x} = 0 \\ A'(x)\,e^x - B'(x)\,e^{-x} = \ln(1 + e^x) \end{cases}$$
e quindi
$$\begin{cases} B'(x) = -\frac{1}{2}\,e^x\,\ln(1 + e^x) \\ A'(x) = \frac{1}{2}\,e^{-x}\,\ln(1 + e^x). \end{cases}$$
Usando ora la sostituzione $t = \ln(s)$, otteniamo
$$\int_0^x e^{-t}\ln\left(1 + e^t\right)dt = \int_1^{e^x} \frac{\ln(1+s)}{s^2}\,ds$$
$$= -\frac{\ln(1+s)}{s}\Big|_1^{e^x} + \int_1^{e^x} \frac{ds}{s(1+s)}$$
$$= -\frac{\ln(1+s)}{s} + \ln\left(\frac{s}{1+s}\right)\Big|_1^{e^x}.$$
Possiamo quindi prendere
$$A(x) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - e^{-x}\,\ln(1 + e^x)\right).$$
Analogamente, otteniamo
$$\int_0^x e^t\ln\left(1 + e^t\right)dt = \int_1^{e^x} \ln(1 + s)\,ds$$

$$= s\ln(1+s)\big|_1^{e^x} - \int_1^{e^x} \tfrac{s}{1+s}\,\mathrm{d}s$$
$$= s\ln(1+s) - (s-\ln(1+s))\big|_1^{e^x}.$$
Possiamo quindi prendere
$$B(x) = -\tfrac{1}{2}(e^x\ln(1+e^x) - e^x + \ln(1+e^x)).$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione
$$y'' - y' - 2y = xe^{2x}.$$
Il polinomio associato all'equazione differenziale ha come soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$ e quindi una soluzione dell'equazione considerata si può trovare tra le funzioni del tipo
$$\overline{y}(x) = x(Ax+B)e^{2x} = \left(Ax^2+Bx\right)e^{2x}.$$
Risulta
$$\overline{y}'(x) = \left(2Ax^2+2Bx+2Ax+2B\right)e^{2x}$$
$$\overline{y}''(x) = \left(4Ax^2+4Bx+4Ax+2B+4Ax+2B+2A\right)e^{2x}$$
Pertanto si ottiene
$$\overline{y}''(x) - \overline{y}'(x) - 2\overline{y}(x) = e^{2x}\left[x^2(4A-2A-2A)+\right.$$
$$\left.+x(4B+8A-2B-2A-2B)+2B+2A+B\right].$$
Deve dunque essere $6A = 1$ e $3B+2A = 0$ e quindi $A = \frac{1}{6}$ e $B = -\frac{1}{9}$. Pertanto otteniamo
$$\overline{y}(x) = x\left(\tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{9}\right)e^{2x}.$$

Esempio

Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \left(y^2-1\right)2x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
L'equazione è a variabili separabili e quindi, con la sostituzione $y(t) = s$, si ottiene
$$x^2 = \int_0^x \tfrac{y'(t)}{y^2(t)-1}\,\mathrm{d}t = \int_{y(0)}^{y(x)} \tfrac{\mathrm{d}s}{s^2-1}.$$
Ricordando infine che
$$\tfrac{1}{s^2-1} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{s-1} - \tfrac{1}{s+1}\right)$$
ed usando anche la condizione iniziale $y(0) = 0$, si ha
$$x^2 = \tfrac{1}{2}\log\left(\left|\tfrac{y(x)-1}{y(x)-1}\right|\right)$$
e quindi, esplicitando rispetto a y
$$y(x) = \tfrac{1-e^{2x^2}}{1+e^{2x^2}}.$$

Esempio

Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' - (\sin(x))\,y = \sin(2x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$
Moltiplicando per $e^{\cos(x)}$, si ottiene
$$e^{\cos(x)}\left(y'(x) - (\sin(x))\,y(x)\right) = e^{\cos(x)}\sin(2x) = 2e^{\cos(x)}\sin(x)\cos(x).$$
Usando infine la sostituzione $\sin(t) = s$, si ottiene
$$e^{\cos(x)}y(x) + e = 2\int_0^x e^{\cos(t)}\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = -2\int_1^{\cos(x)} e^s s\,\mathrm{d}s$$
$$= -2\,(e^s s - e^s)\big|_1^{\cos(x)} = -2\left[e^{\cos(x)}\cos(x) - e^{\cos(x)}\right].$$
Possiamo infine concludere che
$$y(x) = -e\,e^{-\cos(x)} - 2\cos(x) + 2.$$

Esempio

Trovare una soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' + 3y' + 2y = \sqrt{1+e^x}.$$
Il polinomio associato all'equazione ha come soluzioni $\lambda = -2$ e $\lambda = -1$ e quindi, usando il metodo della variazione delle costanti, posso cercare una soluzione particolare del tipo
$$\overline{y}(x) = A(x)\,e^{-2x} + B(x)\,e^{-x}.$$
Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} A'(x)\,e^{-2x} + B'(x)e^{-x} = 0 \\ -2A'(x)\,e^{-2x} - B'(x)e^{-x} = \sqrt{1+e^x} \end{cases}$$
si ottiene $A' = -B'e^x$ e quindi $B' = e^x\sqrt{1+e^x}$ e $A' = -e^{2x}\sqrt{1+e^x}$. Infine, usando la sostituzione $e^t = s$ si ottiene
$$\int_0^x e^{2t}\sqrt{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{e^x} s^2\sqrt{1+s}\,\mathrm{d}s = \int_2^{1+e^x}(v-1)^2\sqrt{v}\,dv$$
$$= \int_2^{1+e^x}\left(v^{5/2} - 2v^{3/2} + v^{1/2}\right)dv$$
Possiamo quindi prendere
$$A(x) = -\tfrac{2}{7}(1+e^x)^{7/2} + \tfrac{4}{5}(1+e^x)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(1+e^x)^{3/2}.$$
Analogamente, si ha
$$\int_0^x e^t\sqrt{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{e^x} s\sqrt{1+s}\,\mathrm{d}s = \int_2^{1+e^x}(v-1)\sqrt{v}\,dv$$
$$= \int_2^{1+e^x}\left(v^{3/2} - v^{1/2}\right)dv.$$
Possiamo quindi prendere
$$B(x) = \tfrac{2}{5}(1+e^x)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(1+e^x)^{3/2}.$$

Capitolo 13

Ulteriori considerazioni sulle serie

56 Le serie ed il polinomio di Taylor

Esempio

Studiamo la convergenza della serie
$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\arctan(n^2)-\arctan(n^3)\right).$$
Abbiamo visto che per la regole di De L'Hôpital si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x)}{1/x}=1.$$
Pertanto
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(n^2)}{1/n^2}=1,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(n^3)}{1/n^3}=1,$$
e quindi per il test del confronto asintotico le serie $\sum_{n\geqslant 0}\arctan(n^2)$ e $\sum_{n\geqslant 0}\arctan(n^3)$ convergono, di conseguenza anche la serie originale converge.

Più in generale se lo sviluppo di Taylor di f in zero è
$$f(x)=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k+o(x^k),$$
ed $\{a_n\}_n$ converge a zero, allora per il test del confronto asintotico
$$\sum_{n\geqslant 0} f(a_n)\text{ converge}\iff\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a_n)^k}{k!}\text{ converge.}$$

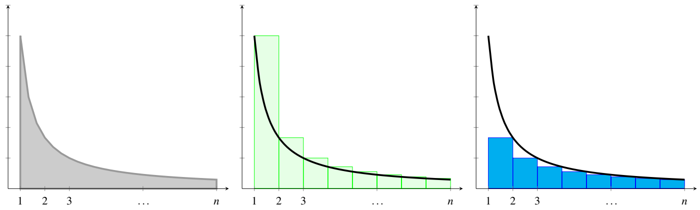
57 Le serie e gli integrali

Test dell'integrale

Sia $f\colon\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ una funzione decrescente. La serie $\sum_{p\geqslant 1} f(p)$ ha lo stesso comportamento dell'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali e degli integrali parziali
$$s_n=\sum_{p=1}^{n} f(p),\qquad i_n=\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Per l'additività dell'integrale abbiamo che $i_n=\sum_{p=1}^{n-1}\int_p^{p+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Visto che f è decrescente abbiamo
$$\int_p^{p+1} f(p+1)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_p^{p+1} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_p^{p+1} f(p)\,\mathrm{d}x$$
$$\iff f(p+1)\leqslant\int_p^{p+1} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(p).$$
Di conseguenza
$$\sum_{p=1}^{n-1} f(p+1)\leqslant\sum_{p=1}^{n-1}\int_p^{p+1} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{p=1}^{n-1} f(p)\Leftrightarrow s_n-f(1)\leqslant i_n\leqslant s_{n-1}.$$
Se quindi s_n converge, allora per il test del confronto anche i_n converge. Dalla stima precedente segue anche che
$$i_{n+1}\leqslant s_n\leqslant i_n+f(1).$$
Se quindi i_n converge allora per il test del confronto anche s_n converge.



La figura precedente rappresenta quanto fatto nella dimostrazione. Il grigio corrisponde ad $i_n=\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Il verde corrisponde ad $s_n=\sum_{p=1}^{n} f(p)$. Il blu corrisponde ad $s_n-f(1)=\sum_{p=1}^{n} f(p+1)$. □

Esempio

Possiamo applicare il test dell'integrale per dimostrare che la serie armonica generalizzata soddisfa
$$\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p^a}=\begin{cases}\text{converge se } a>1,\\ \text{diverge se } a\leqslant 1.\end{cases}$$
Basta infatti ricordare che
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\text{converge se } a>1,\\ \text{diverge se } a\leqslant 1.\end{cases}$$

Esercizio

Studiare le seguenti serie.

- $\sum_{p\geqslant 1}\frac{p}{(p^2+1)^{3/5}}$
- $\sum_{p\geqslant 1} p\,e^{-p^2}$

• Consideriamo $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^{3/5}}$. Osserviamo che
$$f'(x)=\frac{5-x^2}{5\left(1+x^2\right)^{8/5}}=0\iff x=\pm\sqrt{5}.$$
Dunque f è decrescente in $[3,+\infty)$. Ovviamente $\sum_{p\geqslant 1}\frac{p}{(p^2+1)^{3/5}}$ ha lo stesso comportamento di $\sum_{p\geqslant 3}\frac{p}{(p^2+1)^{3/5}}$. Applichiamo il test dell'integrale:
$$\int_3^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_3^R\frac{x}{(x^2+1)^{3/5}}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}y=x^2+1\\ \mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x\end{pmatrix}$$
$$=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{10}^{R^2+1} y^{-3/5}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{5}{2}\cdot y^{2/5}\right]_{10}^{R^2+1}=+\infty$$
e quindi anche la serie diverge.

• Consideriamo $f(x)=x\,e^{-x^2}$. Chiaramente $f>0$ in $(0,+\infty)$. Osserviamo inoltre che
$$f'(x)=(1-2x^2)\,e^{-x^2}=0\iff x=\pm 1/\sqrt{2}.$$
Pertanto f è decrescente in $[1,+\infty)$. Possiamo pertanto applicare il test dell'integrale. Visto che l'integrale
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_1^R x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}y=-x^2\\ \mathrm{d}y=-2x\,\mathrm{d}x\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-1}^{-R^2} e^y\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\left[e^y\right]_{y=-1}^{y=-R^2}$$
$$=\lim_{R\to+\infty}\frac{e^{-1}-e^{-R^2}}{2}=\frac{1}{2e}$$
converge, anche la serie converge.

Riassunto

Potenze

Se $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, allora $a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$.

Proprietà:
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x / a^y = a^{x-y} = 1/a^{y-x}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x / b^x = (a/b)^x = (b/a)^{-x}$
- $a^{-x} = (1/a)^x$
- $\sqrt[x]{a} = a^{1/x}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- $\sqrt[y]{a^x} = a^{x/y} = (\sqrt[y]{a})^x$

Logaritmi

Se $0 < a \neq 1$ e $x > 0$, allora
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(\sqrt[b]{x}) = \frac{1}{b} \cdot \log_a(x)$
- $x^{\log_a(y)} = y^{\log_a(x)}$
- $b \cdot \log_a(x) + c \cdot \log_a(y) = \log_a(x^b \cdot y^c)$
- $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$
- $\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$
- $\log_{b^n}(a) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(a)$
- $-\log_b(a) = \log_b\left(\frac{1}{a}\right) = \log_{1/b}(a)$

Prodotti notevoli

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Formula del binomio di Newton

Se $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ è il **coefficiente binomiale**. Ad esempio:

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

Disequazioni radicali

$$\sqrt{p(x)} \geqslant \sqrt{q(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} q(x) \geqslant 0 \\ p(x) \geqslant q(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{p(x)} \geqslant q(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} q(x) \geqslant 0 \\ p(x) \geqslant q(x)^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{p(x)} \leqslant q(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} q(x) \geqslant 0 \\ p(x) \geqslant 0 \\ p(x) \leqslant q(x)^2 \end{cases}$$

Estremi di un sottoinsieme

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.
- $C \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se
  $C \geqslant a \quad \forall a \in A \qquad$ e $\qquad \forall b < C\ \exists a \in A$ t.c. $a > b$.
  Se una tale C non esiste, allora l'estremo superiore di A è $+\infty$.
- $C \in \mathbb{R}$ è il **massimo** di A se
  $C \geqslant a \quad \forall a \in A \qquad$ e $\qquad C \in A$.
  Se una tale C non esiste, allora il massimo di A non esiste.
- $C \in \mathbb{R}$ è l'**estremo inferiore** di A se
  $C \leqslant a \quad \forall a \in A \qquad$ e $\qquad \forall b > C\ \exists a \in A$ t.c. $a < b$.
  Se una tale C non esiste, allora l'estremo inferiore di A è $-\infty$.
- $C \in \mathbb{R}$ è il **minimo** di A se
  $C \leqslant a \quad \forall a \in A \qquad$ e $\qquad C \in A$.
  Se una tale C non esiste, allora il minimo di A non esiste.

L'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo ed il minimo di A sono indicati rispettivamente con

$$\sup(A), \qquad \inf(A), \qquad \max(A), \qquad \min(A).$$

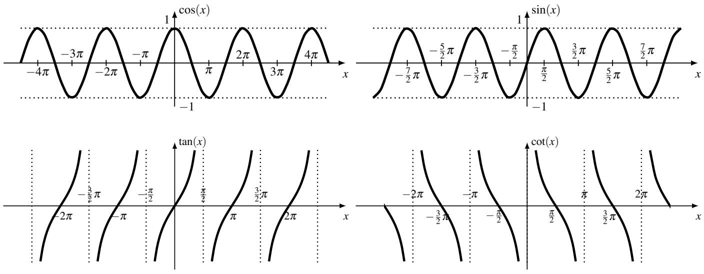
Disuguaglianza di Bernoulli

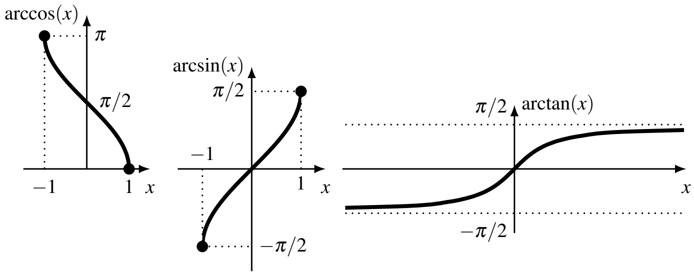
Se $x \geqslant -1$ ed $n \in \mathbb{N}$, allora $(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x$.

Trigonometria

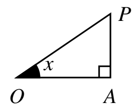
radianti	gradi	cos	sin	tan	cot
0	$0°$	1	0	0	$\nexists$
$\frac{1}{6}\pi$	$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{1}{3}\pi$	$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	$90°$	0	1	$\nexists$	0
$\frac{2}{3}\pi$	$120°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$135°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$150°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

radianti	gradi	cos	sin
π	$180°$	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	$210°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	$225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$	$240°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$	$270°$	0	-1
$\frac{5}{3}\pi$	$300°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	$315°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11}{6}\pi$	$330°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$





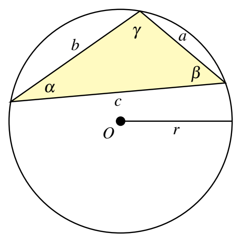
- $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos(x)$
- $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \sin(x)$
- $\overline{OA} = \overline{AP} \cdot \cot(x)$
- $\overline{AP} = \overline{OA} \cdot \tan(x)$



Teorema di Pitagora: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

Teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r.$$



Teorema dei coseni:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

$=$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$\cos(x)$	$\pm\sqrt{1-\sin(x)^2}$	$\cos(x)$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}$	$\pm\frac{\cot(x)}{\sqrt{1+\cot(x)^2}}$
$\sin(x)$	$\sin(x)$	$\pm\sqrt{1-\cos(x)^2}$	$\pm\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot(x)^2}}$
$\tan(x)$	$\pm\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin(x)^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos(x)^2}}{\cos(x)}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cot(x)}$
$\cot(x)$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin(x)^2}}{\sin(x)}$	$\pm\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\cos(x)^2}}$	$\frac{1}{\tan(x)}$	$\cot(x)$

$\circ$	$-x$	$x+\pi$	$x+2\pi$	$x+\frac{\pi}{2}$	$x \pm y$	$2x$
cos	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	$1-2\sin(x)^2$
sin	$-\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$	$2\sin(x)\cos(x)$
tan	$-\tan(x)$	$\tan(x)$	$\tan(x)$	$-\cot(x)$	$\frac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\tan(y)}$	$\frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$
cot	$-\cot(x)$	$\cot(x)$	$\cot(x)$	$-\tan(x)$	$\frac{\cot(x)\cot(y)\mp 1}{\cot(y)\pm\cot(x)}$	$\frac{\cot(x)^2-1}{2\cot(x)}$

$\cos(x)\cos(y)=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$ $\quad$ $\sin(x)\sin(y)=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

$\sin(x)\cos(y)=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$ $\quad$ $\cos(x)\sin(y)=\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$

$\sin(x)+\sin(y)=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\quad$ $\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(x)-\sin(y)=2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ $\quad$ $\cos(x)-\cos(y)=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$ $\quad$ $\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$

$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ $\quad$ $\cot\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$

$\cos(x)^2=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\quad$ $\sin(x)^2=\frac{1-\cos(2x)}{2}$ $\quad$ $\tan(x)^2=\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$ $\quad$ $\cot(x)^2=\frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$

$$t=\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\implies\begin{cases}\bullet\ \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} & \bullet\ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}\\ \bullet\ \tan(x)=\frac{2t}{1-t^2} & \bullet\ \cot(x)=\frac{1-t^2}{2t}\end{cases}$$

$\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $\arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}$

Numeri complessi

Un numero complesso $z\in\mathbb{C}$ si può rappresentare in

forma cartesiana	$z=(a,b)$,
forma algebrica	$z=a+ib$,
forma trigonometrica	$z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$,
forma esponenziale	$z=\rho e^{i\theta}$,

con

$$a=\rho\cos(\theta),\quad b=\rho\sin(\theta),$$
$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos(\theta)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin(\theta)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

dove

- $a\in\mathbb{R}$ è la **parte reale** e si indica con $\Re e(z)$,
- $b\in\mathbb{R}$ è la **parte immaginaria** e si indica con $\Im m(z)$,
- $\rho\in[0,+\infty)$ è il **modulo** e si indica anche con $|z|$,
- $\theta\in\mathbb{R}$ è l'**argomento** e si indica con $\arg(z)$ (se $\theta\in(-\pi,\pi]$ esso è detto **argomento principale** e si indica con il simbolo $\operatorname{Arg}(z)$),
- i è l'**unità immaginaria** ($i^2=-1$).

Se $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=\rho e^{i\theta}$ e $w=r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))=re^{i\varphi}$, allora

coniugato: • $\bar{z}=\rho(\cos(\theta)-i\sin(\theta))=\rho e^{-i\theta}$

prodotto: • $z\cdot w=\rho r(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi))=\rho re^{i(\theta+\varphi)}$

quoziente: $w\neq 0\implies$ • $\frac{z}{w}=\frac{\rho}{r}(\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi))=\frac{\rho}{r}e^{i(\theta-\varphi)}$

formula di De Moivre: • $z^n=\rho^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))=\rho^n e^{in\theta}$

Se $w=r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ ed $n\in\mathbb{N}$, allora l'equazione $z^n=w$ ha per soluzioni
$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right),\quad k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema fondamentale dell'Algebra

- Per ogni $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$, l'equazione algebrica
$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0,$$
ammette n soluzioni complesse (contate con la loro molteplicità).
- Se $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ e $z_0\in\mathbb{C}$ è soluzione, allora anche $\overline{z_0}$ è soluzione.
- Se $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ ed n è dispari, allora esiste almeno una soluzione reale.

Proposizione

Dati $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$, le soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'**equazione di secondo grado**
$$ax^2+bx+c=0 \qquad (\bigstar)$$
si ottengono calcolando $\Delta=b^2-4ac$ e distinguendo i seguenti casi.
- $\Delta>0\implies(\bigstar)$ ha due soluzioni (distinte) e sono $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ed $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta=0\implies(\bigstar)$ ha come unica soluzione $x_1=\frac{-b}{2a}$.
- $\Delta<0\implies(\bigstar)$ non ha soluzione (in $\mathbb{R}$).

Proposizione

Dati $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$, le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'**equazione di secondo grado**
$$ax^2+bx+c=0 \qquad (\bigstar)$$
si ottengono calcolando $\Delta=b^2-4ac$ e distinguendo i seguenti casi.
- $\Delta>0\Rightarrow z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ sono le due soluzioni di $(\bigstar)$ e sono reali.
- $\Delta=0\Rightarrow z_1=\frac{-b}{2a}$ è l'unica soluzione di $(\bigstar)$ ed è reale.
- $\Delta<0\Rightarrow z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sono le due soluzioni di $(\bigstar)$ e sono complesse ma non reali.

Limiti di funzioni

Definizione

Siano $D\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in D'$ ed $f\colon D\to\mathbb{R}$.
- Il **limite** per $x\in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $L\in\mathbb{R}$ se
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: |f(x)-L|<\varepsilon\ \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta$$
ed in tal caso si dice che f **converge ad L** per x che tende ad x_0 e si scrive
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L.$$
- Il **limite** per $x\in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $+\infty$ se
$$\forall M>0\ \exists\delta=\delta(M)>0: f(x)>M\ \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta$$
ed in tal caso si dice che f **diverge a $+\infty$** per x che tende ad x_0 e si scrive
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty.$$
- Il **limite** per $x\in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $-\infty$ se
$$\forall M>0\ \exists\delta=\delta(M)>0: f(x)<-M\ \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta$$
ed in tal caso si dice che f **diverge a $-\infty$** per x che tende ad x_0 e si scrive
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty.$$
- f è **regolare** in x_0 se il suo limite per x che tende ad x_0 esiste finito o infinito.
- f è **irregolare** in x_0 se non è regolare in x_0.

Proposizione

Se $\lim_{x\to x_0}f(x)=F$ e $\lim_{x\to x_0}g(x)=G$, allora
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=F+G$$
$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=F\cdot G$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F}{G}\quad\text{se } g\neq 0 \text{ e } G\neq 0$$
$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=F^G\quad\text{se } f^g \text{ e } F^G \text{ sono ben definiti}$$
$$\left.\begin{array}{l}F\neq 0=G\\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \pm f(x)/g(x)>0\ \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$$

Proposizione

Se $\lim_{x\to x_0}f(x)=F$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to x_0}h(x)=+\infty$, allora
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty,\qquad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(g(x)+h(x)\big)=+\infty,\qquad \lim_{x\to x_0}\big(-g(x)-h(x)\big)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\begin{cases}+\infty & \text{se } F>0,\\ -\infty & \text{se } F<0,\end{cases}$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(g(x)\cdot h(x)\big)=+\infty,\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$
$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}+\infty & \text{se } F>1,\\ 0 & \text{se } |F|<1,\\ \nexists & \text{se } F\leqslant -1,\end{cases}\quad\text{se } f^g \text{ è ben definita.}$$

Teorema della permanenza del segno

Sia $f\colon D\to\mathbb{R}$ convergente ad L per $x\to x_0\in D'$.

1) Se $\exists\delta>0: f(x)\geqslant 0\ \forall x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$, allora $L\geqslant 0$.

2) Se $L>0$, allora $\exists\delta>0: f(x)>0\ \forall x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$.

Teorema del confronto

Siano $f,g,h\colon D\to\mathbb{R}$ convergenti rispettivamente ad F,G,H per $x\to x_0\in D'$.

1) Se $\exists\delta>0: f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)\ \forall x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$, allora $F\leqslant G\leqslant H$.

2) Se $F<G<H$, allora $\exists\delta>0: f(x)<g(x)<h(x)\ \forall x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$.

Teorema dei carabinieri o del sandwich

Date $f,g,h\colon D\to\mathbb{R}$ ed $x_0\in D'$, si ha che
$$\left.\begin{array}{l}\exists\delta>0 \text{ t.c. } f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)\ \forall x\in D \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta\\ \lim_{x\to x_0}f(x)=L=\lim_{x\to x_0}h(x)\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}g(x)=L.$$

Teorema del limite delle funzioni composte

Siano $f\colon A\to\mathbb{R}$ e $g\colon B\to\mathbb{R}$ tali che $f(A)\subset B$.
$$\left.\begin{array}{l}x_0\in A' \text{ e } \lim_{x\to x_0}f(x)=y_0\in\mathbb{R}\\ \exists\delta_{x_0}>0 \text{ t.c. } f(x)\neq y_0\ \forall x\in A \text{ con } 0<|x-x_0|<\delta\\ y_0\in B' \text{ e } \lim_{y\to y_0}g(y)=L\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=L$$
Il risultato vale anche nei casi in cui $y_0=\pm\infty$ e/o $L=\pm\infty$.

Teorema del limite delle funzioni inverse

Sia $f\colon A\to B$ una funzione invertibile.
$$\left.\begin{array}{l}x_0\in A' \text{ ed esiste finito } \lim_{x\to x_0}f(x)=y_0\in\mathbb{R}\\ y_0\in B' \text{ ed esiste finito } \lim_{y\to y_0}f^{-1}(y)=L\in A\end{array}\right\}\Rightarrow L=x_0 \text{ e } \lim_{x\to x_0}(f^{-1}\circ f)(x)=x_0$$

Il risultato vale anche nei casi in cui $y_0 = \pm\infty$ e/o $L = \pm\infty$.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$ non sono vuoti ed x_0 è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+ (e quindi anche per D).

- f ha **limite sinistro** $L \in \mathbb{R}$ per x che tende ad x_0 da sinistra se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in D^-$ con $-\delta < x - x_0 < 0$, ed in tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.
- f ha **limite sinistro** $+\infty$ per x che tende ad x_0 da sinistra se $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $f(x) > M\ \forall x \in D^-$ con $-\delta < x - x_0 < 0$, ed in tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.
- f ha **limite sinistro** $-\infty$ per x che tende ad x_0 da sinistra se $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $f(x) < -M\ \forall x \in D^-$ con $-\delta < x - x_0 < 0$, ed in tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.
- f ha **limite destro** $L \in \mathbb{R}$ per x che tende ad x_0 da destra se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in D^+$ con $0 < x - x_0 < \delta$, ed in tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.
- f ha **limite destro** $+\infty$ per x che tende ad x_0 da destra se $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. $f(x) > M\ \forall x \in D^+$ con $0 < x - x_0 < \delta$, ed in tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.
- f ha **limite destro** $-\infty$ per x che tende ad x_0 da destra se $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. $f(x) < -M\ \forall x \in D^+$ con $0 < x - x_0 < \delta$, ed in tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Proposizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D, $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$. Si ha allora che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente ed $f\colon D \to I$.

- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $L \in \mathbb{R}$ se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists X = X(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in D \text{ con } x > X$$
ed in tal caso si dice che f **converge ad L** per x che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $+\infty$ se
$$\forall M > 0\ \exists X = X(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) > M\ \forall x \in D \text{ con } x > X$$
ed in tal caso si dice che f **diverge a $+\infty$** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $-\infty$ se
$$\forall M > 0\ \exists X = X(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M\ \forall x \in D \text{ con } x > X$$
ed in tal caso si dice che f **diverge a $-\infty$** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- f è **regolare** a $+\infty$ se il suo limite per x che tende a $+\infty$ esiste finito o infinito.
- f è **irregolare** a $+\infty$ se non è regolare a $+\infty$.

Forme indeterminate per i limiti

$$(\pm\infty) + (\mp\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (\pm\infty)^0, \quad 0^0$$

Se $a > 1$, allora la **"scala" di crescita** per $x \to +\infty$ è

$$\ln(x) \ll x \ll a^x \ll x^x.$$

L'ordinamento vale anche se ogni elemento della catena viene elevato ad una potenza positiva differente.

Limiti notevoli

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e) \qquad \forall a > 0,\ a \neq 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \qquad \forall a > 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[a]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{a} \qquad \forall a > 0$

Proposizione

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0^+} x^a \log_b(x) = 0\ \forall a, b > 0,\ b \neq 1$
- $\lim_{x \to +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[x]{a^x + b^x} = \max\{a, b\}\ \forall a, b > 0$
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a \in [0, 1) \end{cases}$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \begin{cases} e^a & \text{se } a \neq 0, \\ 1 & \text{se } a = 0 \end{cases}$

Continuità di funzioni

Definizione

Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ed $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- f è **continua in x_0** se $x_0 \in D \setminus D'$, oppure $x_0 \in D'$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f è **continua** se è continua in ogni punto di D.

Proposizione

Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon D \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in D \cap D'$ allora lo sono anche

$$f + g\colon D \to \mathbb{R}, \qquad f - g\colon D \to \mathbb{R}, \qquad f \cdot g\colon D \to \mathbb{R},$$
$$\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R} \quad \text{se } g(x) \neq 0\ \forall x \in D,$$
$$f^g\colon D \to \mathbb{R} \quad \text{se } f(x)^{g(x)} \text{ è ben definita } \forall x \in D.$$

Proposizione

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in D \cap D'$.

1) Se $\exists \delta > 0 : f(x) \geqslant 0\ \forall x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $f(x_0) \geqslant 0$.

2) Se $f(x_0) > 0$, allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0\ \forall x \in D$ con $|x - x_0| < \delta$.

Proposizione

Siano $f, g, h\colon D \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in D \cap D'$.

1) Se $\exists \delta > 0 : f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)\ \forall x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $f(x_0) \leqslant g(x_0) \leqslant h(x_0)$.

2) Se $f(x_0) < g(x_0) < h(x_0)$, allora $\exists \delta > 0 : f(x) < g(x) < h(x)\ \forall x \in D$ con $|x - x_0| < \delta$.

Proposizione

Siano $f, g, h\colon D \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in D \cap D'$. Se esiste $\delta > 0$ t.c. $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)\ \forall x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, allora

$$f(x_0) = h(x_0) \Longrightarrow g(x_0) = f(x_0) = h(x_0).$$

Proposizione

Se $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ sono tali che $f(A) \subset B$, allora

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ è continua in } x_0 \in A' \cap A \\ g \text{ è continua in } y_0 \in B' \cap B \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f\colon A \to \mathbb{R} \text{ è continua in } x_0.$$

Proposizione

Se $f\colon A \to B$ è una funzione invertibile e continua in $x_0 \in A \cap A'$, allora $f^{-1}\colon B \to A$ è continua in $y_0 = f(x_0)$.

Successioni numeriche

Definizione

Una **successione (numerica) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$** è una funzione che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un numero reale $a_n \in \mathbb{R}$. L'elemento di una successione associato ad $n \in \mathbb{N}$ è detto **termine n-esimo** ed è indicato con a_n.

Definizione

- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** ad $L \in \mathbb{R}$ se
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L.$$
In tal caso la successione è **convergente**.
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge a $\pm\infty$** se
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty.$$
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è **divergente** se diverge a $+\infty$ o $-\infty$.
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è **regolare** se converge o diverge.
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è **irregolare** se non è regolare, ovvero $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$.

Proposizione

Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare per $x \to +\infty$ ed $a_n = f(n)$, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Definizione

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è **limitata** se $\exists M > 0$ tale che $|a_n| \leqslant M\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposizione

Ogni successione convergente è limitata.

Definizione

Data $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, una sua **sottosuccessione** è della forma $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione strettamente crescente a valori in $\mathbb{N}$.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Proposizione

$\{a_n\}_n$ converge ad L se e solo se tutte le sue sottosuccessioni convergono ad L. Inoltre, l'equivalenza vale anche nei casi in cui $L = \pm\infty$.

Osservazione

Se una successione ammette due sottosuccessioni che non convergono allo stesso limite, allora la successione non converge.

Proposizione

Se $\{a_n\}_n$ è limitata e $\{b_n\}_n$ converge a zero, allora anche $a_n \cdot b_n$ converge a zero.

Teorema ponte

Dati $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:
1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$,
2) $\forall \{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L \in \mathbb{R}$.
Inoltre, l'equivalenza vale anche nei casi in cui $L = \pm\infty$ e/o $x_0 = \pm\infty$.

Corollario

Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Corollario

$$\left.\begin{array}{l} x_n \neq x_0, \quad y_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) \end{array}\right\} \implies \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Limiti notevoli

Se $x_n \neq 0$ converge a zero ed $a > 0$, allora si ha:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log_a(1+x_n)}{x_n} = \log_a(e) \quad a \neq 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(x_n)}{x_n^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln(a)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\tan(x_n)}{x_n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[a]{1+x_n}-1}{x_n} = \frac{1}{a}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\arctan(x_n)}{x_n} = 1$

Proposizione

Se $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ convergono rispettivamente ad a e b allora

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{se } b_n, b \neq 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = a^b \quad \text{se } (a_n)^{b_n} \text{ e } a^b \text{ sono ben definiti,}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \neq 0 = b \\ \exists N \text{ t.c. } a_n/b_n > 0\ \forall n > N \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty,$$

$$\left.\begin{array}{l} a \neq 0 = b \\ \exists N \text{ t.c. } a_n/b_n < 0\ \forall n > N \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty.$$

Proposizione

Se $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ convergono rispettivamente ad a, b e c, allora

proprietà della permanenza del segno: $a_n \geqslant 0 \implies a \geqslant 0$,

proprietà del confronto: $a_n \leqslant b_n \implies a \leqslant b$,

$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \implies a \leqslant b \leqslant c$.

Proposizione

Se $\{a_n\}_n$ converge ad a e $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ divergono a $+\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + (+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = a - (+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n + c_n) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (-b_n - c_n) = -(+\infty) - (+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \pm\infty \quad \text{se } \pm a > 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n \cdot c_n) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{+\infty} = 0 \quad \text{se } b_n \neq 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 0 & \text{se } |a| < 1, \\ \nexists & \text{se } a \leqslant -1, \end{cases} \quad \text{se } (a_n)^{b_n} \text{ è ben definito.}$$

Forme indeterminate per i limiti

$$(\pm\infty) + (\mp\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty},\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 0^0$$

"Scala" di crescita: $\ln(n) \ll n \ll a^n \ll n! \ll n^n$

Proposizione

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leqslant -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{se } ab > 0 \text{ allora} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\} \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \begin{cases} e^a & \text{se } a \neq 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \end{cases}$

Proposizione

Se $a_n > 0$ ed uno dei seguenti limiti esiste finito o infinito

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

allora essi coincidono, ovvero $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Definizione

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ definitivamente non nulle sono **asintotiche** fra loro, se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ed in tal caso si scrive $a_n \sim b_n$.

Osservazione

- Se $a_n \sim b_n$ ed $a_n \to L$, allora anche $b_n \to L$.
- Se $a_n, b_n \to L \neq 0$, allora $a_n \sim b_n$.
- Due successioni possono essere fra loro asintotiche, anche se non ammettono limite.

Osservazione

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ regolari e $a_n \sim b_n$. Allora vale quanto segue.
- $a_n c_n \sim b_n c_n, \quad a_n/c_n \sim b_n/c_n, \quad c_n/a_n \sim c_n/b_n$.
- $a_n \pm c_n \sim b_n \pm c_n$ solo se tra b_n e c_n "non avvengono delle semplificazioni".
- Se $c_n \to L \in \mathbb{R}$, si ha che $(a_n)^{c_n} \sim (b_n)^{c_n}$.
- Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non convergono ad 1, $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$.

Proposizione

Formula di Stirling: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \qquad \ln(n!) \sim n\ln(n) - n$.

Test per successioni monotone

- Se $\{a_n\}_n$ è monotona crescente, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Se $\{a_n\}_n$ è monotona decrescente, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Test dei carabinieri o del sandwich

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L \\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

Test del rapporto/radice

Se $a_n > 0$ ed il $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ esiste finito o infinito, allora:
- $L < 1 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;
- $L > 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Test di Cauchy

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m > N$

Somme finite

Proposizione

sommageometrica : $\sum_{n=1}^{N} a^n = \begin{cases} \frac{a-a^{N+1}}{1-a} & \text{se } a \neq 1 \\ N & \text{se } a = 1 \end{cases}$ $\quad \sum_{n=0}^{N} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{N+1}}{1-a} & \text{se } a \neq 1 \\ N+1 & \text{se } a = 1 \end{cases}$

sommaaritmetica : $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N\cdot(N+1)}{2}$ $\quad \sum_{n=0}^{N} n = \frac{N\cdot(N+1)}{2}$

sommatelescopica : $\sum_{n=1}^{N} (a_{n+1}-a_n) = a_{N+1}-a_1$ $\quad \sum_{n=0}^{N} (a_{n+1}-a_n) = a_{N+1}-a_0$

Serie

Definizione

$\sum_{p\geqslant 1} a_p$ è **convergente**, **divergente**, **regolare**, **irregolare** se lo è la corrispondente **successione delle somme parziali** $\{s_n\}_n$ definita da $s_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$, ossia

$$\sum_{p=1}^{+\infty} a_p = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} a_p.$$

Esempio

seriearmonica : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge

seriearmonicageneralizzata : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ $\begin{cases} \text{converge se } a>1 \\ \text{diverge} \quad \text{se } a \leqslant 1 \end{cases}$

seriearmonicaasegnoalterno : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge

seriegeometrica : $\sum_{n\geqslant 0} r^n$ $\begin{cases} \text{diverge} & \text{se } r \geqslant 1 \\ = \frac{1}{1-r} & \text{se } |r|<1 \\ \text{irregolare se } r \leqslant -1 \end{cases}$

$\sum_{n\geqslant 1} r^n$ $\begin{cases} \text{diverge} & \text{se } r \geqslant 1 \\ = \frac{r}{1-r} & \text{se } |r|<1 \\ \text{irregolare se } r \leqslant -1 \end{cases}$

Test di convergenza generali:

Test di Cauchy

$$\sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ converge} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \text{ t.c. } \left|\sum_{p=m+1}^{n} a_p\right| < \varepsilon\ \forall n>m>N$$

Test necessario

$$\sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ converge} \implies \lim_{p\to+\infty} a_p = 0$$

Test di convergenza per serie con termini di segno costante:

Test del confronto

Date $\{a_p\}_p$ e $\{b_p\}_p$ tali che $0 \leqslant a_p \leqslant b_p$, si ha che

- $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ converge $\implies \sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge,
- $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ diverge $\implies \sum_{p\geqslant 1} b_p$ diverge.

Test della radice/rapporto

Data $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ con $a_p>0$, sia $L = \lim_{p\to+\infty} \sqrt[p]{a_p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{a_{p+1}}{a_p}$. Si ha che

- $L<1 \implies \sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge,
- $L>1 \implies \sum_{p\geqslant 1} a_p$ diverge.

Test di condensazione

Se $a_p \geqslant a_{p+1} \geqslant 0$, allora $\sum_{p\geqslant 1} a_p$ ha lo stesso comportamento della sua **serie condensata**

$$\sum_{p\geqslant 1} 2^p \cdot a_{2^p}\ .$$

Test del confronto asintotico

Se $a_p \geqslant 0$, $b_p>0$ ed $L\neq 0$, allora si ha che:

- $\left.\begin{array}{l} \lim_{p\to+\infty} \frac{a_p}{b_p} = 0 \\ \sum_{p\geqslant 1} b_p \text{ converge} \end{array}\right\} \implies \sum_{p\geqslant 1} a_p$ converge
- $\left.\begin{array}{l} \lim_{p\to+\infty} \frac{a_p}{b_p} = +\infty \\ \sum_{p\geqslant 1} b_p \text{ diverge} \end{array}\right\} \implies \sum_{p\geqslant 1} a_p$ diverge
- $\lim_{p\to+\infty} \frac{a_p}{b_p} = L \implies \sum_{p\geqslant 1} a_p$ e $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ hanno lo stesso comportamento

Proposizione

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ converge} \end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) \text{ converge,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge} \end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) \text{ diverge,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ diverge a } +\infty \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge a } +\infty \end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) \text{ diverge a } +\infty,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ diverge a } -\infty \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge a } -\infty \end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) \text{ diverge a } -\infty.$$

Test dell'integrale

$f\colon \mathbb{R}\to[0,+\infty)$ decrescente $\implies \sum_{p\geqslant 1} f(p)$ ha lo stesso comportamento di $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Test di convergenza per serie con termini di segno qualsiasi:

Definizione

$\sum_{p\geqslant 1} a_p$ **converge assolutamente** se $\sum_{p\geqslant 1} |a_p|$ converge.

Test della convergenza assoluta

$$\sum_{p\geqslant 1} |a_p| \text{ converge} \iff \sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ converge assolutamente}$$
$$\implies \sum_{p\geqslant 1} a_p \text{ converge semplicemente}$$

Definizione

Una **serie di segno alterno** ha la forma $\sum_{p\geqslant 1} (-1)^{p+1} a_p$ con a_i tutti dello stesso segno.

Test per le serie di segno alterno

$$\left.\begin{array}{l} a_p \geqslant a_{p+1} \geqslant 0 \\ \lim_{p\to+\infty} a_p = 0 \end{array}\right\} \implies \sum_{p\geqslant 1} (-1)^{p+1} a_p \text{ converge}$$

Proposizione

Se L è il limite di una serie di segno alterno $\sum_{p\geqslant 1} (-1)^{p+1} a_p$ con $a_p>0$, allora

$$s_{2n} \leqslant L \leqslant s_{2n+1}, \qquad |s_n - L| \leqslant a_{n+1}.$$

Definizione

La **serie telescopica** associata ad una successione $\{a_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ è $\sum_{p\geqslant 1} (a_p - a_{p+1})$.

Test per le serie telescopiche

$$\sum_{p\geqslant 1} (a_p - a_{p+1}) = a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Funzioni continue in un intervallo

Definizione

$f\colon D\to\mathbb{R}$ è **continua in un intervallo** $I\subseteq D$ se per ogni $x_0\in I$ si ha che f è continua in x_0.

Teorema degli zeri

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f\colon [a,b]\to\mathbb{R} \text{ è continua in } [a,b] \\ \bullet\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(a,b) \text{ tale che } f(c)=0.$$

Teorema dei valori assunti

L'immagine continua di un intervallo è un intervallo.

Definizione

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- $x_1 \in D$ è un punto di **minimo assoluto** di f in D se
$$f(x_1) = \min\{f(x) : x \in D\}$$
ed in tal caso $f(x_1)$ è detto **valore minimo** di f in D.
- $x_2 \in D$ è un punto di **massimo assoluto** di f in D se
$$f(x_2) = \max\{f(x) : x \in D\}$$
ed in tal caso $f(x_2)$ è detto **valore massimo** di f in D.

Teorema di Weierstrass

Se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è continua ed $A = [a,b]$, allora essa ammette massimo e minimo assoluti.

Teorema

Una funzione continua ed iniettiva su un intervallo è o strettamente monotona.

Teorema

Tutte le funzioni monotone, definite in un intervallo ed aventi per immagine un intervallo, sono funzioni continue.

Corollario

Se A è un intervallo ed $f\colon A \to B$ è continua e biettiva, allora pure la funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$ è una funzione continua.

Teorema

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione crescente.

(1) Se x_0 è un punto di accumulazione per $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$, allora
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D^-\}.$$
(2) Se x_0 è un punto di accumulazione per $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$, allora
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D^+\}.$$
(3) Se x_0 appartiene a D ed è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+, allora
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Teorema

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione crescente.

(1) Se D non è inferiormente limitato, allora
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D\}.$$
(2) Se D non è superiormente limitato, allora
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D\}.$$

Derivate

Definizione

Consideriamo una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

- f è **derivabile a destra** in $x_0 \in [a,b)$ se esiste finita la **derivata destra** di f nel punto x_0
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
- f è **derivabile a sinistra** in $x_0 \in (a,b]$ se esiste finita la **derivata sinistra** di f nel punto x_0
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
- f è **derivabile** in $x_0 \in [a,b]$ se esiste finita la **derivata** di f nel punto x_0
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Proposizione

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b) \iff f$ è derivabile sia a destra che a sinistra di x_0 ed inoltre $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. In tal caso si ha che $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Proposizione

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in [a,b] \implies f$ continua in x_0

Il viceversa della proposizione precedente non è vero.

Se f è derivabile in x_0, allora retta tangente ad f in x_0 è il grafico della funzione
$$T(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

Proposizione

$$f,g \text{ derivabili in } x_0 \implies \begin{cases} (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} & \text{se } g(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Proposizione

Siano $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ tali che $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale la formula
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Corollario

Se $f\colon [a,b] \to [c,d]$ è una continua, biettiva e derivabile in $x_0 \in [a,b]$ con $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$	$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2}$
$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\text{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln(a)$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)},\ x > 0,\ a > 0$	$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$
$\frac{d}{dx}\log_a(\lvert x\rvert) = \frac{1}{x\ln(a)},\ x \neq 0,\ a > 0$	$\frac{d}{dx}\ln(\lvert x\rvert) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$
$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$	$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$
$\frac{d}{dx}\coth(x) = -\text{csch}(x)^2$	

Bibliografia

[1] M. Amar and A. Bersani. Analisi Matematica I. *La Dotta*, 2013.

[2] M. Bertsch, R. Dal Passo, and L. Giacomelli. Analisi matematica. *McGraw-Hill Italia, Milano*, 2011.

[3] M. Bramanti, C. Pagani, and S. Salsa. Matematica. *Zanichelli*, 2000.

[4] G. Buttazzo, G. Gambini, and E. Santi. Esercizi di Analisi Matematica I. *Pitagora Editrice, Bologna*, 1991.

[5] B. Demidovic. Esercizi e problemi di Analisi Matematica. *Editori Riuniti*, 1999.

[6] G. G. Q. Gutierrez. Il bernoccolo del calcolo I, Esercizi di analisi matematica I. *C.L.U.T.*, 2014.

[7] C. Marcelli. Analisi matematica 1. *Pearson*, 2019.

[8] P. Marcellini and C. Sbordone. Analisi Matematica I. *Liguori Editore, Napoli*, 1998.

[9] U. Massari. Dispense per il corso di Istituzioni di Matematica per il corso di laurea in Informatica. *UNIFE*, 2018.

[10] F. Rosso and L. Fusi. Matematica per le lauree triennali. *CEDAM, Trento*, 2013.

[11] S. Salsa and A. Squellati. Esercizi di Matematica, volume 1. *Zanichelli*, 2002.

Indice analitico