Variabili Aleatorie Continue 2

Stefania Bartoletti

28 Aprile 2020

Indice

- Distribuzione Gaussiana
- Distribuzione esponenziale
- Valore atteso e varianza

Distribuzione Gaussiana

Nel 1809, Carl Friedrich Gauss pubblicò una monografia *"Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium"* (Teoria del moto dei corpi celesti che si muovono lungo sezioni coniche intorno al Sole) in cui presentava diverse nozioni che diventarono fondamentali per la statistica.

Distribuzione Gaussiana

Nel 1809, Carl Friedrich Gauss pubblicò una monografia *"Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium"* (Teoria del moto dei corpi celesti che si muovono lungo sezioni coniche intorno al Sole) in cui presentava diverse nozioni che diventarono fondamentali per la statistica.

Tra queste, vi era la definizione della distribuzione normale, che pertanto si chiama anche Gaussiana e che rappresenta la più importante distribuzione tra le variabili aleatorie continue.

Distribuzione Gaussiana

Una variabile aleatoria X è detta normale (o Gaussiana) di parametri μ e σ^2, e si indica con $\mathsf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ se la sua densità è data da

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

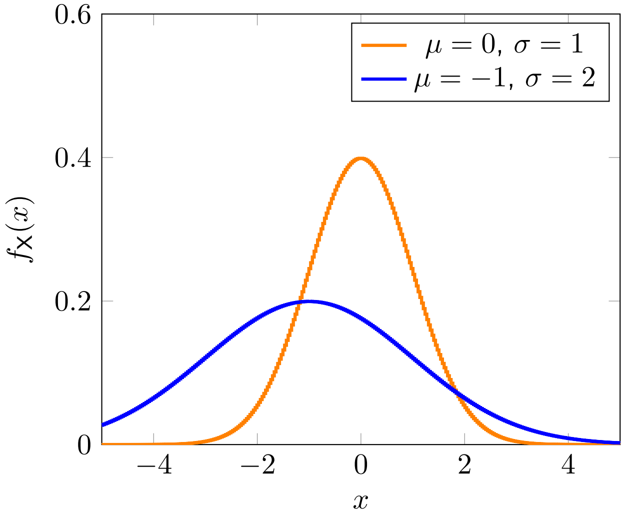
Distribuzione Gaussiana

Una variabile aleatoria X è detta normale (o Gaussiana) di parametri μ e σ^2, e si indica con X $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ se la sua densità è data da

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma} \exp - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Viene utilizzata per modellare errori di misura, altezza, e la media di molti tipi di dato.

Distribuzione Gaussiana



Normale Standard

- Una variabile aleatoria normale $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ è detta normale standard.

Normale Standard

- Una variabile aleatoria normale $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ è detta normale standard.
- Data una variabile aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, la variabile aleatoria $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ è una normale standard

Normale Standard

- Una variabile aleatoria normale $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ è detta normale standard.
- Data una variabile aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la variabile aleatoria $Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$ è una normale standard
- Essendo una variabile speciale, definiremo un simbolo speciale per descrivere la sua densità di probabilità

Normale Standard

- Una variabile aleatoria normale $\mathsf{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ è detta normale standard.
- Data una variabile aleatoria $\mathsf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la variabile aleatoria $\mathsf{Z} = \frac{(\mathsf{X}-\mu)}{\sigma}$ è una normale standard
- Essendo una variabile speciale, definiremo un simbolo speciale per descrivere la sua densità di probabilità

Normale Standard

- Una variabile aleatoria normale $\mathsf{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ è detta normale standard.
- Data una variabile aleatoria $\mathsf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la variabile aleatoria $\mathsf{Z} = \frac{(\mathsf{X}-\mu)}{\sigma}$ è una normale standard
- Essendo una variabile speciale, definiremo un simbolo speciale per descrivere la sua densità di probabilità

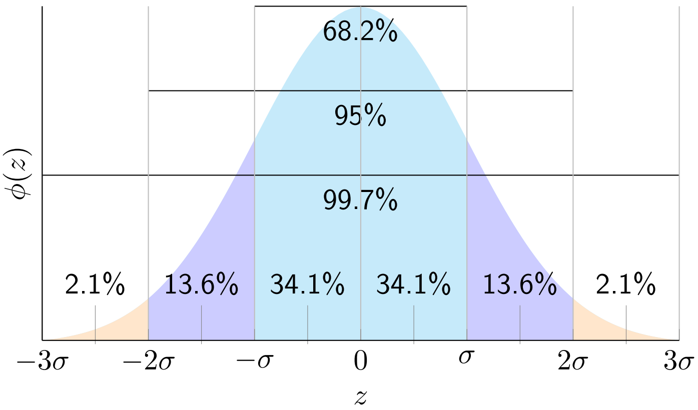
$$\phi(z) = f_{\mathsf{Z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-z^2}{2}$$

Regola Empirica

L'intervallo di una normale standard è $(-\infty, +\infty)$.

Regola Empirica

L'intervallo di una normale standard è $(-\infty, +\infty)$.
Si dimostra che $\mathbb{P}\{-1 \leqslant Z \leqslant 1\} \simeq 68\%$, $\mathbb{P}\{-2 \leqslant Z \leqslant 2\} \simeq 95\%$, e $\mathbb{P}\{-3 \leqslant Z \leqslant 3\} \simeq 99\%$



Esercizio

Calcolare

$$\Phi(z) = F_{\mathsf{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy$$

Esercizio

Calcolare

$$\Phi(z) = F_{\mathsf{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy$$

...in realtà $\Phi(z)$ non ha forma chiusa, per cui si usano tabelle oppure il software per calcolarla.

Esempio

- A partire dalla regola empirica, riusciamo a stimare $\Phi(1)$?

Esempio

- A partire dalla regola empirica, riusciamo a stimare $\Phi(1)$?
- Cerchiamo $\Phi(1) = \mathbb{P}\{Z \leqslant 1\}$.

Esempio

- A partire dalla regola empirica, riusciamo a stimare $\Phi(1)$?
- Cerchiamo $\Phi(1) = \mathbb{P}\{Z \leqslant 1\}$.
- Dalla figura sappiamo che le due code hanno area $1 - 0.68 = 0.32$.

Esempio

- A partire dalla regola empirica, riusciamo a stimare $\Phi(1)$?
- Cerchiamo $\Phi(1) = \mathbb{P}\{Z \leqslant 1\}$.
- Dalla figura sappiamo che le due code hanno area $1 - 0.68 = 0.32$.
- Essendo una funzione simmetrica, ogni singola coda ha area 0.16

Esempio

- A partire dalla regola empirica, riusciamo a stimare $\Phi(1)$?
- Cerchiamo $\Phi(1) = \mathbb{P}\{\mathsf{Z} \leqslant 1\}$.
- Dalla figura sappiamo che le due code hanno area $1 - 0.68 = 0.32$.
- Essendo una funzione simmetrica, ogni singola coda ha area 0.16
- Pertanto, $\Phi(1) = \mathbb{P}\{\mathsf{Z} \leqslant 1\} \simeq 0.68 + 0.16 = 0.84$.

Tavola

z	0	0.01	0.00	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Alternativa?

Si veda la funzione pnorm in R...

Esempio 1

- Si supponga che un messaggio binario - costituito da una sequenza di 0 e 1 - debba essere trasmesso wireless da una postazione A a una postazione B.

Esempio 1

- Si supponga che un messaggio binario - costituito da una sequenza di 0 e 1 - debba essere trasmesso wireless da una postazione A a una postazione B.
- Tuttavia, i dati spediti sono soggetti a un disturbo di rumore del canale; così per ridurre la possibilità di errore, si invia il valore 2 quando il messaggio è 1 e il valore -2 quando il messaggio è 0.

Esempio 1

- Si supponga che un messaggio binario - costituito da una sequenza di 0 e 1 - debba essere trasmesso wireless da una postazione A a una postazione B.
- Tuttavia, i dati spediti sono soggetti a un disturbo di rumore del canale; così per ridurre la possibilità di errore, si invia il valore 2 quando il messaggio è 1 e il valore -2 quando il messaggio è 0.
- Se $m = \pm 2$, è il valore spedito in A, allora r, il valore ricevuto in B, è dato da r $= m +$ n, dove n è il rumore del canale. Quando il messaggio è ricevuto in B, il ricevente lo decodifica secondo la regola che segue:

Esempio 1

- Si supponga che un messaggio binario - costituito da una sequenza di 0 e 1 - debba essere trasmesso wireless da una postazione A a una postazione B.
- Tuttavia, i dati spediti sono soggetti a un disturbo di rumore del canale; così per ridurre la possibilità di errore, si invia il valore 2 quando il messaggio è 1 e il valore -2 quando il messaggio è 0.
- Se $m = \pm 2$, è il valore spedito in A, allora r, il valore ricevuto in B, è dato da r $= m +$ n, dove n è il rumore del canale. Quando il messaggio è ricevuto in B, il ricevente lo decodifica secondo la regola che segue:
  - Se r $\geqslant 0.5$ si decodifica 1.

Esempio 1

- Si supponga che un messaggio binario - costituito da una sequenza di 0 e 1 - debba essere trasmesso wireless da una postazione A a una postazione B.
- Tuttavia, i dati spediti sono soggetti a un disturbo di rumore del canale; così per ridurre la possibilità di errore, si invia il valore 2 quando il messaggio è 1 e il valore -2 quando il messaggio è 0.
- Se $m = \pm 2$, è il valore spedito in A, allora r, il valore ricevuto in B, è dato da r $= m +$ n, dove n è il rumore del canale. Quando il messaggio è ricevuto in B, il ricevente lo decodifica secondo la regola che segue:
  - Se r $\geqslant 0.5$ si decodifica 1.
  - Se r < 0.5 si decodifica 0.

Esempio 1

- Si supponga che un messaggio binario - costituito da una sequenza di 0 e 1 - debba essere trasmesso wireless da una postazione A a una postazione B.
- Tuttavia, i dati spediti sono soggetti a un disturbo di rumore del canale; così per ridurre la possibilità di errore, si invia il valore 2 quando il messaggio è 1 e il valore -2 quando il messaggio è 0.
- Se $m = \pm 2$, è il valore spedito in A, allora r, il valore ricevuto in B, è dato da r $= m +$ n, dove n è il rumore del canale. Quando il messaggio è ricevuto in B, il ricevente lo decodifica secondo la regola che segue:
  - Se r $\geqslant 0.5$ si decodifica 1.
  - Se r < 0.5 si decodifica 0.
- Dato che il rumore del canale ha spesso una distribuzione normale, determiniamo la probabilità di un errore nel caso in cui si tratti di una variabile normale standard.

Esempio 1

Possono accadere due tipi di errore:

- il messaggio 1 è erroneamente interpretato come 0, che si realizza se il messaggio è 1, ma l'errore è tale che $2 + \mathsf{n} < 0.5$
- il messaggio 0 è erroneamente interpretato come 1, che si realizza se il messaggio è 0, ma l'errore è tale che $-2 + \mathsf{n} \geqslant 0.5$

Esempio 1

Possono accadere due tipi di errore:

- il messaggio 1 è erroneamente interpretato come 0, che si realizza se il messaggio è 1, ma l'errore è tale che $2 + \mathsf{n} < 0.5$
- il messaggio 0 è erroneamente interpretato come 1, che si realizza se il messaggio è 0, ma l'errore è tale che $-2 + \mathsf{n} \geqslant 0.5$

$$\mathbb{P}\{\text{errore} | \text{ il messaggio è } 1\} = \mathbb{P}\{\mathsf{n} < -1.5\} = 1 - \Phi(1.5) \simeq 0.0668$$
$$\mathbb{P}\{\text{errore} | \text{ il messaggio è } 0\} = \mathbb{P}\{\mathsf{n} \geqslant 2.5\} = 1 - \Phi(2.5) \simeq 0.0062$$

Variabili aleatorie esponenziali

Una variabile aleatoria si dice esponenziale (o distribuita esponenzialmente) se la sua densità è data, per qualche $\lambda > 0$ da

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \begin{cases} \lambda \exp\left(-\lambda x\right) & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Variabili aleatorie esponenziali

Una variabile aleatoria si dice esponenziale (o distribuita esponenzialmente) se la sua densità è data, per qualche $\lambda > 0$ da

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione di distribuzione $F_{\mathsf{X}}(a)$ di una variabile aleatoria esponenziale è data da

$$F_{\mathsf{X}}(a) = \mathbb{P}\{\mathsf{X} \leqslant a\} = \int_0^a \lambda \exp(-\lambda x) = 1 - \exp(-\lambda a)$$

Variabili aleatorie esponenziali

Una variabile aleatoria si dice esponenziale (o distribuita esponenzialmente) se la sua densità è data, per qualche $\lambda > 0$ da

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione di distribuzione $F_{\mathsf{X}}(a)$ di una variabile aleatoria esponenziale è data da

$$F_{\mathsf{X}}(a) = \mathbb{P}\{\mathsf{X} \leqslant a\} = \int_0^a \lambda \exp(-\lambda x) = 1 - \exp(-\lambda a)$$

La distribuzione esponenziale è spesso, nella pratica, usata per descrivere l'intervallo di tempo che intercorre tra due eventi specifici, quindi un tempo di attesa. Esistono diverse distribuzioni che modellano i tempi di attesa, ma la distribuzione esponenziale ha la proprietà aggiuntiva di essere senza memoria.

Variabili aleatorie esponenziali

- Ad esempio, la probabilità che arrivi un taxi entro 5 minuti è p. Se aspetto 5 minuti e non arriva alcun taxi, la probabilità che il taxi arrivi nei prossimi 5 minuti resta sempre p .
- Nel caso invece il processo sia con memoria, ad esempio aspetto un autobus che ha determinati minuti di arrivi e partenze, si preferisce usare una uniforme.

Variabili aleatorie esponenziali

- Ad esempio, la probabilità che arrivi un taxi entro 5 minuti è p. Se aspetto 5 minuti e non arriva alcun taxi, la probabilità che il taxi arrivi nei prossimi 5 minuti resta sempre p .
- Nel caso invece il processo sia con memoria, ad esempio aspetto un autobus che ha determinati minuti di arrivi e partenze, si preferisce usare una uniforme.

Valore atteso e varianza

- Le statistiche descrittive di valore atteso e varianza hanno un equivalente nel mondo delle variabili aleatorie continue.
- Il valore atteso misura la tendenza centrale
- La deviazione standard, invece, misura la dispersione. La varianza si ottiene come il quadrato della deviazione standard
- Come prevedibile, per passare dal mondo delle variabili aleatorie discrete a quello delle variabili aleatorie continue, ci saranno un po' di integrali che sostituiranno delle somme.

Valore atteso

Sia X una variabile aleatoria continua nel range $[a, b]$ e funzione di densità di probabilità $f_{\mathsf{X}}(x)$. Il valore atteso di X è definito come

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{X}\right\} = \int_a^b x f_{\mathsf{X}}(x) dx$$

Come per le variabili discrete, il valore atteso è anche detto media.

Esempio 1

Sia $\mathsf{X} \sim \mathcal{U}([0,1])$ e quindi $f_{\mathsf{X}}(x) = 1$

$$\mathbb{E}\{\mathsf{X}\} = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Come potevamo aspettarci nel caso di distribuzione uniforme, la media è il valor medio dell'intervallo.

Esempio 2

Sia X $\sim \exp(\lambda)$, il suo valore atteso è

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{X}\right\} = \int_0^{+\infty} x\lambda \exp\left(-\lambda x\right) dx = \frac{1}{\lambda}$$

Esempio 3

Sia Z $\sim \mathcal{N}(0,1)$, il suo valore atteso è

$$\mathbb{E}\{\mathsf{Z}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-z^2/2\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Proprietà del valore atteso

Le proprietà di $\mathbb{E}\{\mathsf{X}\}$ per variabili aleatorie continue sono le stesse di quelle per le variabili aleatorie discrete:

- Se la X e Y sono variabili aleatorie su un insieme degli eventi, allora

$$\mathbb{E}\{\mathsf{X}+\mathsf{Y}\} = \mathbb{E}\{\mathsf{X}\} + \mathbb{E}\{\mathsf{Y}\}$$

- Date due costanti a e b

$$\mathbb{E}\{a\mathsf{X}+b\} = a\mathbb{E}\{\mathsf{X}\} + b$$

Esempio

- Data una variabile aleatoria normale standard $z \sim \mathcal{N}(0,1)$, sappiamo che $\mathbb{E}\left\{\mathsf{X}\right\} = 0$
- Per calcolare il valore atteso di una variabile aleatoria normale $x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dovremmo ricalcolare l'integrale
- Risulta decisamente più comodo considerare che $\mathsf{Z} = \frac{(\mathsf{X}-\mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- Pertanto, $\mathsf{X} = \sigma\mathsf{Z} + \mu$ e quindi $\mathbb{E}\left\{\mathsf{X}\right\} = \mu$

Valore atteso di una funzione di variabile aleatoria

Analogamente a quanto accade per le variabili aleatorie discrete, se $h(\cdot)$ è unna funzione, allora $\mathsf{Y} = h(\mathsf{X})$ è una variabile aleatoria e

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{Y}\right\} = \mathbb{E}\left\{h(\mathsf{X})\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mathsf{X}) f_{\mathsf{X}}(x) dx$$

Valore atteso di una funzione di variabile aleatoria

Analogamente a quanto accade per le variabili aleatorie discrete, se $h(\cdot)$ è unna funzione, allora $\mathsf{Y} = h(\mathsf{X})$ è una variabile aleatoria e

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{Y}\right\} = \mathbb{E}\left\{h(\mathsf{X})\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mathsf{X}) f_{\mathsf{X}}(x) dx$$

Esempio Sia $\mathsf{X} \sim \exp(\lambda)$. Quanto vale $\mathbb{E}\left\{\mathsf{X}^2\right\}$?

Valore atteso di una funzione di variabile aleatoria

Analogamente a quanto accade per le variabili aleatorie discrete, se $h(\cdot)$ è unna funzione, allora $\mathsf{Y} = h(\mathsf{X})$ è una variabile aleatoria e

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{Y}\right\} = \mathbb{E}\left\{h(\mathsf{X})\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mathsf{X}) f_{\mathsf{X}}(x) dx$$

Esempio Sia $\mathsf{X} \sim \exp(\lambda)$. Quanto vale $\mathbb{E}\left\{\mathsf{X}^2\right\}$? Risposta: $\frac{2}{\lambda^2}$

Varianza

La definizione di varianza è identica a quella data per le variabili aleatorie discrete.

Sia X una variabile aleatoria continua con media μ. La varianza di X è definita come

$$\mathbb{V}\{\mathsf{X}\} = \mathbb{E}\left\{(\mathsf{X}-\mu)^2\right\}$$

Proprietà

Si tratta delle stesse proprietà definite nel caso discreto.

Proprietà

Si tratta delle stesse proprietà definite nel caso discreto.

- Siano X e Y due variabili aleatorie **indipendenti**, allora

$$\mathbb{V}\{\mathsf{X}+\mathsf{Y}\} = \mathbb{V}\{\mathsf{X}\} + \mathbb{V}\{\mathsf{Y}\}$$

- Date due costanti a e b,

$$\mathbb{V}\{a\mathsf{X}+b\} = a^2\mathbb{V}\{\mathsf{X}\}$$

- Teorema: $\mathbb{V}\{\mathsf{X}\} = \mathbb{E}\left\{\mathsf{X}^2\right\} - \mathbb{E}\left\{\mathsf{X}\right\}^2 = \mathbb{E}\left\{\mathsf{X}^2\right\} - \mu^2$

Esempio 1

Sia $\mathsf{X} \sim \mathcal{U}([0,1])$ e quindi $f_{\mathsf{X}}(x) = 1$

$$\mathbb{V}\{\mathsf{X}\} = \int_0^1 (x-\mu)^2 dx = \int_0^1 (x-1/2)^2 dx = \frac{1}{12}$$

Esempio 2

Sia $\mathsf{X} \sim \exp(\lambda)$, il suo valore atteso è

- Calcolo del valore atteso

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{X}\right\} = \int_0^{+\infty} x\lambda \exp\left(-\lambda x\right) dx = \frac{1}{\lambda}$$

- Abbiamo già visto il valore atteso del suo quadrato

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{X}^2\right\} = \int_0^{+\infty} x^2\lambda \exp\left(-\lambda x\right) dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

- Pertanto la varianza risulta essere

$$\mathbb{V}\{\mathsf{X}\} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Esempio 3

Calcolare la varianza per Z $\sim \mathcal{N}(0,1)$ e X $\sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$