Variabili Aleatorie Discrete (2/2)

Stefania Bartoletti

21 Marzo 2022

Indice

- Probability mass function e cumulative distribution function
- Alcune distribuzioni note: Bernoulli, binomiale e uniforme
- Operazioni sulle variabili aleatorie discrete

PMF e CDF

- Data una variabile aleatoria discreta x che può assumere n valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- la pmf di x è $f_{\mathsf{x}}(x) = \mathbb{P}\{\mathsf{x} = x\}$
- la cdf di x è $F_{\mathsf{x}}(x) = \mathbb{P}\{\mathsf{x} \leqslant x\} = \sum_{a \leqslant x} f_{\mathsf{x}}(a)$
- Nota: spesso può risultare utile chiamare $\mathcal{S}_{\mathsf{x}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ il supporto di $f_{\mathsf{x}}(x)$, ovvero quei valori per i quali la funzione assume valori non nulli.

Distribuzione di Bernoulli

- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.

Distribuzione di Bernoulli

- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.
- Una variabile aleatoria x è distribuita come Bernoulli con parametro p se

Distribuzione di Bernoulli

- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.
- Una variabile aleatoria x è distribuita come Bernoulli con parametro p se
  - è una variabile binaria, assume solo valori 0 (fallimento) e 1 (successo)

Distribuzione di Bernoulli

- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.
- Una variabile aleatoria x è distribuita come Bernoulli con parametro p se
  - è una variabile binaria, assume solo valori 0 (fallimento) e 1 (successo)
  - $\mathbb{P}\{\mathsf{x}=1\}=p$ e $\mathbb{P}\{\mathsf{x}=0\}=1-p$

Distribuzione di Bernoulli

- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.
- Una variabile aleatoria x è distribuita come Bernoulli con parametro p se
  - è una variabile binaria, assume solo valori 0 (fallimento) e 1 (successo)
  - $\mathbb{P}\{\mathsf{x}=1\}=p$ e $\mathbb{P}\{\mathsf{x}=0\}=1-p$
- Denotiamo $\mathsf{x}\sim\mathrm{Ber}(p)$ il caso in cui x segue una distribuzione di Bernoulli

Distribuzione di Bernoulli

- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.
- Una variabile aleatoria x è distribuita come Bernoulli con parametro p se
  - è una variabile binaria, assume solo valori 0 (fallimento) e 1 (successo)
  - $\mathbb{P}\{\mathsf{x} = 1\} = p$ e $\mathbb{P}\{\mathsf{x} = 0\} = 1 - p$
- Denotiamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$ il caso in cui x segue una distribuzione di Bernoulli
- Esempi:

Distribuzione di Bernoulli

- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.
- Una variabile aleatoria x è distribuita come Bernoulli con parametro p se
  - è una variabile binaria, assume solo valori 0 (fallimento) e 1 (successo)
  - $\mathbb{P}\{\mathsf{x} = 1\} = p$ e $\mathbb{P}\{\mathsf{x} = 0\} = 1 - p$
- Denotiamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$ il caso in cui x segue una distribuzione di Bernoulli
- Esempi:
  - lancio di una moneta con probabilità di avere testa pari a p

Distribuzione di Bernoulli

- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.
- Una variabile aleatoria x è distribuita come Bernoulli con parametro p se
  - è una variabile binaria, assume solo valori 0 (fallimento) e 1 (successo)
  - $\mathbb{P}\{\mathsf{x}=1\}=p$ e $\mathbb{P}\{\mathsf{x}=0\}=1-p$
- Denotiamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$ il caso in cui x segue una distribuzione di Bernoulli
- Esempi:
  - lancio di una moneta con probabilità di avere testa pari a p
  - voto di un singolo elettore in un referendum, quando la proporzione degli elettori a favore è p

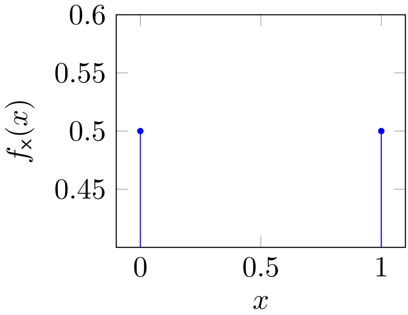
Distribuzione di Bernoulli

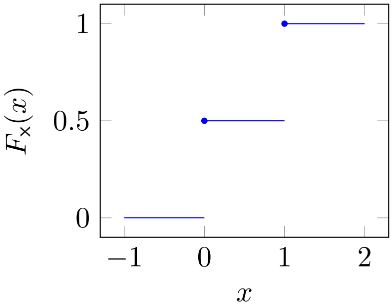
- La distribuzione di Bernoulli, la più semplice ma tra le più importanti, modella una singola realizzazione di un esperimento che ha due possibili risultati: successo o fallimento.
- Una variabile aleatoria x è distribuita come Bernoulli con parametro p se
  - è una variabile binaria, assume solo valori 0 (fallimento) e 1 (successo)
  - $\mathbb{P}\{\mathsf{x}=1\}=p$ e $\mathbb{P}\{\mathsf{x}=0\}=1-p$
- Denotiamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$ il caso in cui x segue una distribuzione di Bernoulli
- Esempi:
  - lancio di una moneta con probabilità di avere testa pari a p
  - voto di un singolo elettore in un referendum, quando la proporzione degli elettori a favore è p
  - stato di salute (malato o sano) di un singolo individuo, quando l'incidenza della malattia nella popolazione è p

Distribuzione di Bernoulli

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(0.5)$

$$
\begin{array}{rll}
x: & 0 & 1 \\
f_{\mathsf{x}}(x): & 0.5 & 0.5 \\
F_{\mathsf{x}}(x): & 0.5 & 1
\end{array}
$$

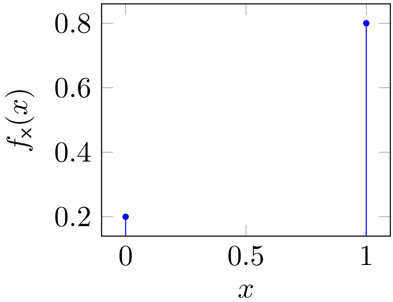


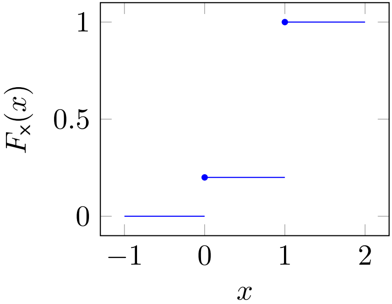


Distribuzione di Bernoulli

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(0.8)$

$$\begin{array}{rll} x: & 0 & 1 \\ f_{\mathsf{x}}(x): & 0.2 & 0.8 \\ F_{\mathsf{x}}(x): & 0.2 & 1 \end{array}$$

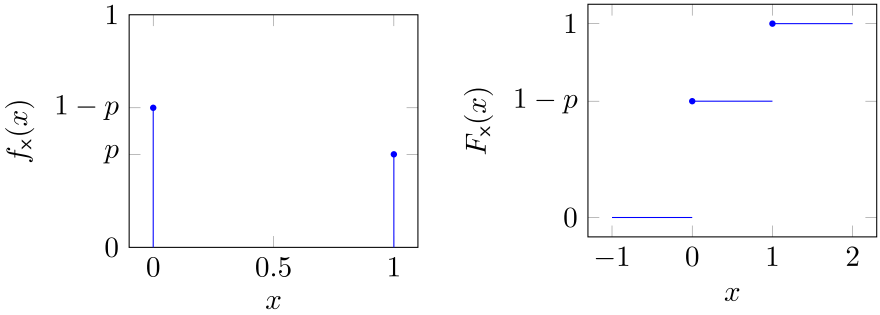




Distribuzione di Bernoulli

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$

$$\begin{array}{rll} x: & 0 & 1 \\ f_{\mathsf{x}}(x): & 1-p & p \\ F_{\mathsf{x}}(x): & 1-p & 1 \end{array}$$



Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale modella il numero di successi in n esperimenti indipendenti che seguono la distribuzione $\mathrm{Ber}(p)$.

Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale modella il numero di successi in n esperimenti indipendenti che seguono la distribuzione $\mathrm{Ber}(p)$.

- Una singola realizzazione di una variabile binomiale consiste in n realizzazioni di una variabile di Bernoulli con parametro p

Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale modella il numero di successi in n esperimenti indipendenti che seguono la distribuzione $\mathrm{Ber}(p)$.

- Una singola realizzazione di una variabile binomiale consiste in n realizzazioni di una variabile di Bernoulli con parametro p
- Una variabile binomiale assume valori $0, 1, 2, \ldots, n$

Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale modella il numero di successi in n esperimenti indipendenti che seguono la distribuzione $\mathrm{Ber}(p)$.

- Una singola realizzazione di una variabile binomiale consiste in n realizzazioni di una variabile di Bernoulli con parametro p
- Una variabile binomiale assume valori $0, 1, 2, \ldots, n$
- Denotiamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ il caso in cui x segue una distribuzione binomiale con parametri n e p

Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale modella il numero di successi in n esperimenti indipendenti che seguono la distribuzione $\mathrm{Ber}(p)$.

- Una singola realizzazione di una variabile binomiale consiste in n realizzazioni di una variabile di Bernoulli con parametro p
- Una variabile binomiale assume valori $0, 1, 2, \ldots, n$
- Denotiamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ il caso in cui x segue una distribuzione binomiale con parametri n e p
- $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ equivale a $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$

Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale modella il numero di successi in n esperimenti indipendenti che seguono la distribuzione $\mathrm{Ber}(p)$.

- Una singola realizzazione di una variabile binomiale consiste in n realizzazioni di una variabile di Bernoulli con parametro p
- Una variabile binomiale assume valori $0, 1, 2, \ldots, n$
- Denotiamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ il caso in cui x segue una distribuzione binomiale con parametri n e p
- $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ equivale a $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$
- Esempio:

Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale modella il numero di successi in n esperimenti indipendenti che seguono la distribuzione $\mathrm{Ber}(p)$.

- Una singola realizzazione di una variabile binomiale consiste in n realizzazioni di una variabile di Bernoulli con parametro p
- Una variabile binomiale assume valori $0, 1, 2, \ldots, n$
- Denotiamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ il caso in cui x segue una distribuzione binomiale con parametri n e p
- $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ equivale a $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$
- Esempio:
  - si contino il numero di esiti H nel lancio di n monete

Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale modella il numero di successi in n esperimenti indipendenti che seguono la distribuzione $\mathrm{Ber}(p)$.

- Una singola realizzazione di una variabile binomiale consiste in n realizzazioni di una variabile di Bernoulli con parametro p
- Una variabile binomiale assume valori $0, 1, 2, \ldots, n$
- Denotiamo $\mathrm{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ il caso in cui x segue una distribuzione binomiale con parametri n e p
- $\mathrm{x} \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ equivale a $\mathrm{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$
- Esempio:
  - si contino il numero di esiti H nel lancio di n monete
  - il numero di voti favorevoli all'interno di un gruppo di n persone

Distribuzione binomiale

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(3, 0.5)$

$$
\begin{aligned}
x &: \\
f_{\mathsf{x}}(x) &: \\
F_{\mathsf{x}}(x) &:
\end{aligned}
$$

Distribuzione binomiale

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(3, 0.5)$

$$\begin{array}{rcccc} x: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f_{\mathsf{x}}(x): & & & & \\ F_{\mathsf{x}}(x): & & & & \end{array}$$

Distribuzione binomiale

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(3, 0.5)$

x :	0	1	2	3
$f_{\mathsf{x}}(x)$:	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$
$F_{\mathsf{x}}(x)$:				

Distribuzione binomiale

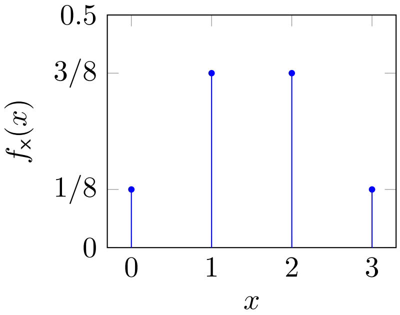
$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(3, 0.5)$

$x:$	0	1	2	3
$f_{\mathsf{x}}(x):$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$
$F_{\mathsf{x}}(x):$	$1/8$	$4/8$	$7/8$	1

Distribuzione binomiale

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(3, 0.5)$

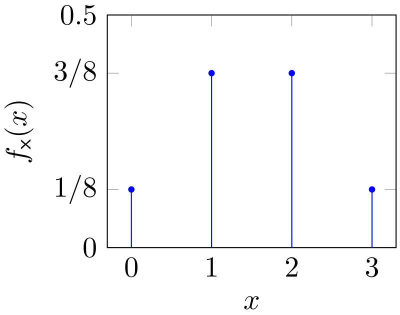
$x:$	0	1	2	3
$f_{\mathsf{x}}(x):$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$
$F_{\mathsf{x}}(x):$	$1/8$	$4/8$	$7/8$	1

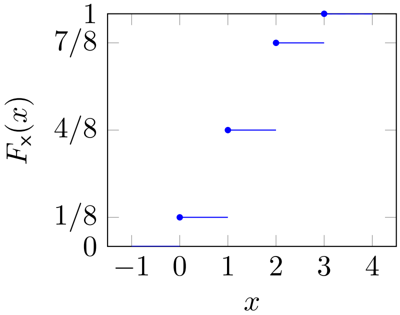


Distribuzione binomiale

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(3, 0.5)$

x :	0	1	2	3
$f_{\mathsf{x}}(x)$:	1/8	3/8	3/8	1/8
$F_{\mathsf{x}}(x)$:	1/8	4/8	7/8	1





Distribuzione binomiale

- Calcolare $f_{\mathsf{x}}(2)$ per il caso $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(5, p)$
- Strada 1:
  - enumero tutti i possibili esiti con 2 teste

$$E = \{HHTTT, HTHTT, HTTHT, HTTTH, THHTT,\\ THTHT, THTTH, TTHHT, TTHTH, TTTHH\}$$

  - ognuno dei sovraelencati 10 esiti ha la stessa probabilità di verificarsi: $p^2(1-p)^3$ (moltiplico le probabilità di 5 eventi indipendenti)
  - sommo le probabilità dei 10 esiti ottenendo $f_{\mathsf{x}}(2) = 10 \cdot p^2(1-p)^3$ (unione di 10 eventi disgiunti)
- Strada 2: generalizzare il calcolo di $f_{\mathsf{x}}(x)$ per qualsiasi n e p

Distribuzione binomiale

- Calcolare $f_{\mathsf{x}}(r)$ per il caso $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
- Strada 2:
  - enumero tutti i possibili esiti di n lanci che contano r teste

Distribuzione binomiale

- Calcolare $f_{\mathsf{x}}(r)$ per il caso $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
- Strada 2:
  - enumero tutti i possibili esiti di n lanci che contano r teste
    - per ogni esito, devo scegliere r monete con esito H su n (vedi slide precedente con $n = 5$)

Distribuzione binomiale

- Calcolare $f_{\mathsf{x}}(r)$ per il caso $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
- Strada 2:
  - enumero tutti i possibili esiti di n lanci che contano r teste
    - per ogni esito, devo scegliere r monete con esito H su n (vedi slide precedente con $n = 5$)
    - sto cercando i possibili gruppi di r oggetti (monete) su n a cui assegno esito H. Quanti sono???

Distribuzione binomiale

- Calcolare $f_{\mathsf{x}}(r)$ per il caso $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
- Strada 2:
  - enumero tutti i possibili esiti di n lanci che contano r teste
    - per ogni esito, devo scegliere r monete con esito H su n (vedi slide precedente con $n = 5$)
    - sto cercando i possibili gruppi di r oggetti (monete) su n a cui assegno esito H. Quanti sono???
    - Sono $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ i possibili modi di raggruppare r oggetti su n

Distribuzione binomiale

- Calcolare $f_{\mathsf{x}}(r)$ per il caso $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
- Strada 2:
  - enumero tutti i possibili esiti di n lanci che contano r teste
    - per ogni esito, devo scegliere r monete con esito H su n (vedi slide precedente con $n = 5$)
    - sto cercando i possibili gruppi di r oggetti (monete) su n a cui assegno esito H. Quanti sono???
    - Sono $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ i possibili modi di raggruppare r oggetti su n
  - ognuno dei sovraelencati $\binom{n}{r}$ esiti ha la stessa probabilità di verificarsi: $p^r(1-p)^{(n-r)}$ (moltiplico le probabilità di n eventi indipendenti)

Distribuzione binomiale

- Calcolare $f_{\mathsf{x}}(r)$ per il caso $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
- Strada 2:
  - enumero tutti i possibili esiti di n lanci che contano r teste
    - per ogni esito, devo scegliere r monete con esito H su n (vedi slide precedente con $n = 5$)
    - sto cercando i possibili gruppi di r oggetti (monete) su n a cui assegno esito H. Quanti sono???
    - Sono $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ i possibili modi di raggruppare r oggetti su n
  - ognuno dei sovraelencati $\binom{n}{r}$ esiti ha la stessa probabilità di verificarsi: $p^r(1-p)^{(n-r)}$ (moltiplico le probabilità di n eventi indipendenti)
  - sommo le probabilità dei $\binom{n}{r}$ esiti ottenendo $f_{\mathsf{x}}(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r(1-p)^{(n-r)}$ (unione di $\binom{n}{r}$ eventi disgiunti)

Distribuzione binomiale

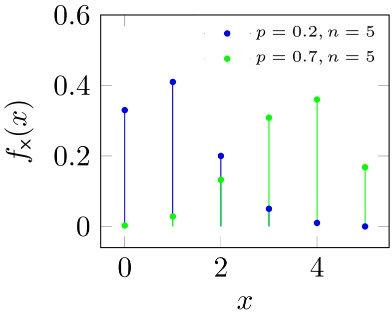
$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

$$f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} \qquad\qquad F_{\mathsf{x}}(x) = \sum_{a \leqslant x} f_{\mathsf{x}}(a)$$

Distribuzione binomiale

$$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

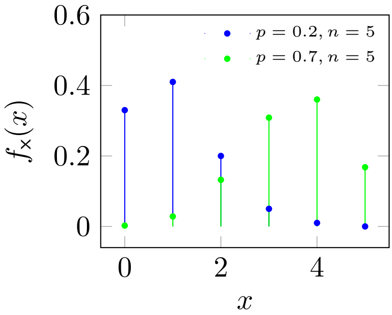
$$f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} \qquad\qquad F_{\mathsf{x}}(x) = \sum_{a \leqslant x} f_{\mathsf{x}}(a)$$

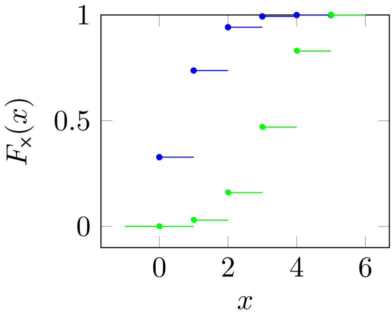


Distribuzione binomiale

$\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

$$f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} \qquad F_{\mathsf{x}}(x) = \sum_{a \leqslant x} f_{\mathsf{x}}(a)$$





Distribuzione uniforme

La distribuzione uniforme modella ogni situazione in cui gli esiti sono tutti equiprobabili

- Si denota con x $\sim \mathrm{U}(n)$
- x assume valori $1, 2, \ldots n$
- $$f_{\mathsf{x}}(x) = \begin{cases} 1/n & \text{if } 1 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Operazioni algebriche

Tra variabili aleatorie si possono effettuare operazioni algebriche come per le altre variabili (somma, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza).

Toy example

- In n lanci di una moneta, definiamo con x_j l'esito del j-simo lancio

Operazioni algebriche

Tra variabili aleatorie si possono effettuare operazioni algebriche come per le altre variabili (somma, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza).

Toy example

- In n lanci di una moneta, definiamo con x_j l'esito del j-simo lancio
- Sappiamo che $\mathsf{x}_j \sim \mathrm{Ber}(0.5)$, che assume valori 1 se l'esito è testa e 0 se l'esito è croce

Operazioni algebriche

Tra variabili aleatorie si possono effettuare operazioni algebriche come per le altre variabili (somma, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza).

Toy example

- In n lanci di una moneta, definiamo con x_j l'esito del j-simo lancio
- Sappiamo che $\mathsf{x}_j \sim \mathrm{Ber}(0.5)$, che assume valori 1 se l'esito è testa e 0 se l'esito è croce
- Sia y il numero degli esiti testa. Sappiamo che $\mathsf{y} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$

Operazioni algebriche

Tra variabili aleatorie si possono effettuare operazioni algebriche come per le altre variabili (somma, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza).

Toy example

- In n lanci di una moneta, definiamo con x_j l'esito del j-simo lancio
- Sappiamo che $\mathsf{x}_j \sim \mathrm{Ber}(0.5)$, che assume valori 1 se l'esito è testa e 0 se l'esito è croce
- Sia y il numero degli esiti testa. Sappiamo che $\mathsf{y} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$
- Possiamo ottenere y tramite operazioni algebriche su $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n$?

Operazioni algebriche

Tra variabili aleatorie si possono effettuare operazioni algebriche come per le altre variabili (somma, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza).

Toy example

- In n lanci di una moneta, definiamo con x_j l'esito del j-simo lancio
- Sappiamo che $\mathsf{x}_j \sim \mathrm{Ber}(0.5)$, che assume valori 1 se l'esito è testa e 0 se l'esito è croce
- Sia y il numero degli esiti testa. Sappiamo che $\mathsf{y} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$
- Possiamo ottenere y tramite operazioni algebriche su $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n$?
- Sì! $\mathsf{y} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{x}_i$

Operazioni algebriche

Tra variabili aleatorie si possono effettuare operazioni algebriche come per le altre variabili (somma, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza).

Toy example

- In n lanci di una moneta, definiamo con x_j l'esito del j-simo lancio
- Sappiamo che $\mathsf{x}_j \sim \mathrm{Ber}(0.5)$, che assume valori 1 se l'esito è testa e 0 se l'esito è croce
- Sia y il numero degli esiti testa. Sappiamo che $\mathsf{y} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$
- Possiamo ottenere y tramite operazioni algebriche su $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n$?
- Sì! $\mathsf{y} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{x}_i$
- Se anche $\mathsf{z} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$, che distribuzione seguirà $\mathsf{w} = \mathsf{y} + \mathsf{z}$?

Operazioni algebriche

Tra variabili aleatorie si possono effettuare operazioni algebriche come per le altre variabili (somma, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza).

Toy example

- In n lanci di una moneta, definiamo con x_j l'esito del j-simo lancio
- Sappiamo che $\mathsf{x}_j \sim \mathrm{Ber}(0.5)$, che assume valori 1 se l'esito è testa e 0 se l'esito è croce
- Sia y il numero degli esiti testa. Sappiamo che $\mathsf{y} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$
- Possiamo ottenere y tramite operazioni algebriche su $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n$?
- Sì! $\mathsf{y} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{x}_i$
- Se anche $\mathsf{z} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$, che distribuzione seguirà $\mathsf{w} = \mathsf{y} + \mathsf{z}$?

Operazioni algebriche

Tra variabili aleatorie si possono effettuare operazioni algebriche come per le altre variabili (somma, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza).

Toy example

- In n lanci di una moneta, definiamo con x_j l'esito del j-simo lancio
- Sappiamo che $\mathsf{x}_j \sim \mathrm{Ber}(0.5)$, che assume valori 1 se l'esito è testa e 0 se l'esito è croce
- Sia y il numero degli esiti testa. Sappiamo che $\mathsf{y} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$
- Possiamo ottenere y tramite operazioni algebriche su $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n$?
- Sì! $\mathsf{y} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{x}_i$
- Se anche $\mathsf{z} \sim \mathrm{Bin}(n, 0.5)$, che distribuzione seguirà $\mathsf{w} = \mathsf{y} + \mathsf{z}$?

Purtroppo non è sempre così semplice. Più avanti nel corso vedremo come manipolare variabili con operazioni algebriche più complesse.

Valore Atteso

Definizione Sia x una variabile aleatoria discreta che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il valore atteso di x che si indica con $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\}$, è (se esiste)

$$\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{\mathsf{x}}(x_i)$$

Ovvero si calcola la media pesata dei valori possibili di x, usando come pesi le probabilitàà che tali valori vengano assunti da x. Per questo $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\}$ è anche detta media di x oppure aspettazione (expectation).

- L'interpretazione frequentista considera la probabilità di un evento come il limite a cui tende - empiricamente - il rapporto tra il numero di ripetizioni in cui si è realizzato l'evento e il numero totale di ripetizioni.
- Nell'esercizio su R in cui simuliamo il lancio di un dado molte volte, se cerchiamo poi il valor medio degli esiti, all'aumentare delle ripetizioni ci avviciniamo alla risposta esatta: 3.5.

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora
   $\mathbb{E}\{x + y\} = \mathbb{E}\{x\} + \mathbb{E}\{y\}$

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora $\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\right\} = \mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} + \mathbb{E}\left\{\mathsf{y}\right\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\left\{a\mathsf{x}+b\right\} = a\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} + b$

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora $\mathbb{E}\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\} = \mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + \mathbb{E}\{\mathsf{y}\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{a\mathsf{x}+b\} = a\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + b$

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora $\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\right\} = \mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} + \mathbb{E}\left\{\mathsf{y}\right\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\left\{a\mathsf{x}+b\right\} = a\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} + b$

Altre note:

- Il valore atteso si chiama anche media (mean or average) e si denota spesso con μ

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora $\mathbb{E}\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\} = \mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + \mathbb{E}\{\mathsf{y}\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{a\mathsf{x}+b\} = a\mathbb{E}\{\mathsf{x}\}+b$

Altre note:

- Il valore atteso si chiama anche media (mean or average) e si denota spesso con μ
- Non necessariamente è un valore che fa parte del supporto della variabile

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora $\mathbb{E}\{x + y\} = \mathbb{E}\{x\} + \mathbb{E}\{y\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{ax + b\} = a\mathbb{E}\{x\} + b$

Altre note:

- Il valore atteso si chiama anche media (mean or average) e si denota spesso con μ
- Non necessariamente è un valore che fa parte del supporto della variabile
- Si tratta di una statistica che va a riassumere la distribuzione della variabile, fornendone una misura di tendenza centrale

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora
   $\mathbb{E}\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\} = \mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + \mathbb{E}\{\mathsf{y}\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{a\mathsf{x}+b\} = a\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + b$

Altre note:

- Il valore atteso si chiama anche media (mean or average) e si denota spesso con μ
- Non necessariamente è un valore che fa parte del supporto della variabile
- Si tratta di una statistica che va a riassumere la distribuzione della variabile, fornendone una misura di tendenza centrale
- Se tutti i valori del supporto sono egualmente probabili, il valore atteso coincide con il valor medio di tali valori

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile x $\sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile x $\sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$
- $\mathbb{E}\{x\} = \sum_{a=1}^{n} a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{(n-a)}$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$
- $\mathbb{E}\{x\} = \sum_{a=1}^{n} a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{(n-a)}$
- Si tratta di una successione notevole, il cui risultato è $\mathbb{E}\{x\} = np$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile x $\sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$
- $\mathbb{E}\{x\} = \sum_{a=1}^{n} a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{(n-a)}$
- Si tratta di una successione notevole, il cui risultato è $\mathbb{E}\{x\} = np$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$
- $\mathbb{E}\{x\} = \sum_{a=1}^{n} a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{(n-a)}$
- Si tratta di una successione notevole, il cui risultato è $\mathbb{E}\{x\} = np$

Tuttavia, se consideriamo le proprietà algebriche del valore atteso e che $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{z}_i$ con $\mathsf{z}_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ allora

$$\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{\mathsf{z}_i\} = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Esempio

Perchè nella definizione specifichiamo *se esiste*? Per esempio, per variabili aleatorie che assumono un infinito numero di valori, la media non sempre esiste. Consideriamo, ad esempio che x tale che

$$\begin{array}{ccccccc} x: & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^k & \dots \\ f_{\mathsf{x}}(x): & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots & 1/2^k & \dots \end{array}$$

Allora:

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f_{\mathsf{x}}(x_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = \infty$$

Valore Atteso

Definizione Sia x una variabile aleatoria discreta che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il valore atteso di x che si indica con $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\}$, è (se esiste)

$$\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{\mathsf{x}}(x_i)$$

Ovvero si calcola la media pesata dei valori possibili di x, usando come pesi le probabilitàà che tali valori vengano assunti da x. Per questo $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\}$ è anche detta media di x oppure aspettazione (expectation).

- L'interpretazione frequentista considera la probabilità di un evento come il limite a cui tende - empiricamente - il rapporto tra il numero di ripetizioni in cui si è realizzato l'evento e il numero totale di ripetizioni.

- L'interpretazione frequentista considera la probabilità di un evento come il limite a cui tende - empiricamente - il rapporto tra il numero di ripetizioni in cui si è realizzato l'evento e il numero totale di ripetizioni.
- Consideriamo una variabile aleatoria x che assume uno dei valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e che rappresenti il nostro guadagno in un singolo gioco. Con probabilità $f_{\mathsf{x}}(x_1)$ vinceremo x_1, con probabilità $f_{\mathsf{x}}(x_i)$ vinceremo x_i.

- L'interpretazione frequentista considera la probabilità di un evento come il limite a cui tende - empiricamente - il rapporto tra il numero di ripetizioni in cui si è realizzato l'evento e il numero totale di ripetizioni.
- Consideriamo una variabile aleatoria x che assume uno dei valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e che rappresenti il nostro guadagno in un singolo gioco. Con probabilità $f_{\mathsf{x}}(x_1)$ vinceremo x_1, con probabilità $f_{\mathsf{x}}(x_i)$ vinceremo x_i.
- Nell'interpretazione frequentista, le proporzioni di volte che vinceremo x_i sono $f_{\mathsf{x}}(x_i)$

- L'interpretazione frequentista considera la probabilità di un evento come il limite a cui tende - empiricamente - il rapporto tra il numero di ripetizioni in cui si è realizzato l'evento e il numero totale di ripetizioni.
- Consideriamo una variabile aleatoria x che assume uno dei valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e che rappresenti il nostro guadagno in un singolo gioco. Con probabilità $f_{\mathsf{x}}(x_1)$ vinceremo x_1, con probabilità $f_{\mathsf{x}}(x_i)$ vinceremo x_i.
- Nell'interpretazione frequentista, le proporzioni di volte che vinceremo x_i sono $f_{\mathsf{x}}(x_i)$
- Quanto sarà il nostro guadagno medio?

- L'interpretazione frequentista considera la probabilità di un evento come il limite a cui tende - empiricamente - il rapporto tra il numero di ripetizioni in cui si è realizzato l'evento e il numero totale di ripetizioni.
- Consideriamo una variabile aleatoria x che assume uno dei valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e che rappresenti il nostro guadagno in un singolo gioco. Con probabilità $f_{\mathsf{x}}(x_1)$ vinceremo x_1, con probabilità $f_{\mathsf{x}}(x_i)$ vinceremo x_i.
- Nell'interpretazione frequentista, le proporzioni di volte che vinceremo x_i sono $f_{\mathsf{x}}(x_i)$
- Quanto sarà il nostro guadagno medio?
- $\sum_{i=1}^{n} x_i f_{\mathsf{x}}(x_i)$

Esempio

Consideriamo la variabile aleatoria discreta x descritta come segue:

$x:$	1	3	5
$f_{\mathsf{x}}(x):$	$1/6$	$1/6$	$2/3$

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{6} = 4$$

Esempio

Consideriamo $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$

- La variabile prende valori 1 e 0 con probabilità p e $1-p$, rispettivamente.
- Pertanto $\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$

Esempio

Consideriamo una variabile aleatoria che corrisponde alla somma del lancio di due dadi. Possiamo descrivere il primo lancio come una variabile aleatoria x e il secondo lancio con una seconda variabile aleatoria y.

$$
\begin{array}{r|cccccc}
x, y: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x + y: & 2 & 3 & & \dots & & 12
\end{array}
$$

Esempio

Consideriamo una variabile aleatoria che corrisponde alla somma del lancio di due dadi. Possiamo descrivere il primo lancio come una variabile aleatoria x e il secondo lancio con una seconda variabile aleatoria y.

$$
\begin{array}{l|llllll}
x, y: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x+y: & 2 & 3 & & \dots & & 12
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\} &= \sum_{(x+y)=2}^{12} (x+y) \cdot \mathbb{P}\{\mathsf{x}+\mathsf{y} = (x+y)\} \\
&= \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} (x+y) \mathbb{P}\{\mathsf{x} = x, \mathsf{y} = y\} \\
&= \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} (x+y) f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y)
\end{aligned}
$$

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora
   $\mathbb{E}\{x + y\} = \mathbb{E}\{x\} + \mathbb{E}\{y\}$

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora $\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\right\} = \mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} + \mathbb{E}\left\{\mathsf{y}\right\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\left\{a\mathsf{x}+b\right\} = a\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} + b$

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora
   $\mathbb{E}\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\} = \mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + \mathbb{E}\{\mathsf{y}\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{a\mathsf{x}+b\} = a\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + b$

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora
   $\mathbb{E}\{\mathrm{x} + \mathrm{y}\} = \mathbb{E}\{\mathrm{x}\} + \mathbb{E}\{\mathrm{y}\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{a\mathrm{x} + b\} = a\mathbb{E}\{\mathrm{x}\} + b$

Altre note:

- Il valore atteso si chiama anche media (mean or average) e si denota spesso con μ

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora
   $\mathbb{E}\{\mathsf{x} + \mathsf{y}\} = \mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + \mathbb{E}\{\mathsf{y}\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{a\mathsf{x} + b\} = a\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} + b$

Altre note:

- Il valore atteso si chiama anche media (mean or average) e si denota spesso con μ
- Non necessariamente è un valore che fa parte del supporto della variabile

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora
   $\mathbb{E}\{x + y\} = \mathbb{E}\{x\} + \mathbb{E}\{y\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{a x + b\} = a\mathbb{E}\{x\} + b$

Altre note:

- Il valore atteso si chiama anche media (mean or average) e si denota spesso con μ
- Non necessariamente è un valore che fa parte del supporto della variabile
- Si tratta di una statistica che va a riassumere la distribuzione della variabile, fornendone una misura di tendenza centrale

Proprietà:

Proprietà algebriche:

1. Se x e y sono variabili aleatorie allora
   $\mathbb{E}\{\mathrm{x}+\mathrm{y}\} = \mathbb{E}\{\mathrm{x}\} + \mathbb{E}\{\mathrm{y}\}$
2. Se a e b sono costanti, allora $\mathbb{E}\{a\mathrm{x}+b\} = a\mathbb{E}\{\mathrm{x}\} + b$

Altre note:

- Il valore atteso si chiama anche media (mean or average) e si denota spesso con μ
- Non necessariamente è un valore che fa parte del supporto della variabile
- Si tratta di una statistica che va a riassumere la distribuzione della variabile, fornendone una misura di tendenza centrale
- Se tutti i valori del supporto sono egualmente probabili, il valore atteso coincide con il valor medio di tali valori

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile x $\sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$
- $\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} = \sum_{a=1}^{n} a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{(n-a)}$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$
- $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \sum_{a=1}^{n} a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{(n-a)}$
- Si tratta di una successione notevole, il cui risultato è $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = np$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile x $\sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$
- $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \sum_{a=1}^{n} a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{(n-a)}$
- Si tratta di una successione notevole, il cui risultato è $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = np$

Esempio

Calcoliamo il valore atteso di una variabile $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

- I valori che x assume sono $1, 2, \ldots, n$
- $f_{\mathsf{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$
- $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \sum_{a=1}^{n} a \binom{n}{a} p^a (1-p)^{(n-a)}$
- Si tratta di una successione notevole, il cui risultato è $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = np$

Tuttavia, se consideriamo le proprietà algebriche del valore atteso e che $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{z}_i$ con $\mathsf{z}_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ allora

$$\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{\mathsf{z}_i\} = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Esempio

Perchè nella definizione specifichiamo *se esiste*? Per esempio, per variabili aleatorie che assumono un infinito numero di valori, la media non sempre esiste. Consideriamo, ad esempio che x tale che

$$\begin{array}{cccccccc} x: & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^k & \dots \\ f_{\mathsf{x}}(x): & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots & 1/2^k & \dots \end{array}$$

Allora:

$$\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f_{\mathsf{x}}(x_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = \infty$$

Cambio di variabile

Se x è una variabile aleatoria discreta che assume valori in $\mathcal{S}_{\mathsf{x}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $h(\cdot)$ è una funzione tale che $h(\mathsf{x})$ è una nuova variabile aleatoria, il valore atteso di quest'ultima è

$$\mathbb{E}\{h(\mathsf{x})\} = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) f_{\mathsf{x}}(x_i)$$

Cambio di variabile

Se x è una variabile aleatoria discreta che assume valori in $\mathcal{S}_{\mathsf{x}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $h(\cdot)$ è una funzione tale che $h(\mathsf{x})$ è una nuova variabile aleatoria, il valore atteso di quest'ultima è

$$\mathbb{E}\{h(\mathsf{x})\} = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) f_{\mathsf{x}}(x_i)$$

Domanda: Ma se $\mathsf{y} = h(\mathsf{x})$, $\mathbb{E}\{\mathsf{y}\} = h(\mathbb{E}\{\mathsf{x}\})$?

Cambio di variabile

Se x è una variabile aleatoria discreta che assume valori in $\mathcal{S}_{\mathsf{x}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $h(\cdot)$ è una funzione tale che $h(\mathsf{x})$ è una nuova variabile aleatoria, il valore atteso di quest'ultima è

$$\mathbb{E}\left\{h(\mathsf{x})\right\} = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) f_{\mathsf{x}}(x_i)$$

Domanda: Ma se $\mathsf{y} = h(\mathsf{x})$, $\mathbb{E}\left\{\mathsf{y}\right\} = h(\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\})$?

Risposta: NO!

Cambio di variabile

Se x è una variabile aleatoria discreta che assume valori in $\mathcal{S}_{\mathsf{x}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $h(\cdot)$ è una funzione tale che $h(\mathsf{x})$ è una nuova variabile aleatoria, il valore atteso di quest'ultima è

$$\mathbb{E}\left\{h(\mathsf{x})\right\} = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) f_{\mathsf{x}}(x_i)$$

Domanda: Ma se $\mathsf{y} = h(\mathsf{x})$, $\mathbb{E}\left\{\mathsf{y}\right\} = h(\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\})$?

Risposta: NO!

O almeno non in generale

Esempio

Sia x il valore del lancio di un dado e $y = x^2$. Quanto vale $\mathbb{E}\{y\}$?

x :	1	2	3	4	5	6
y :	1	4	9	16	25	36
$f_x(x)$:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

La probabilità per ogni y è la stessa del corrispondente valore x

$$\mathbb{E}\{y\} = \mathbb{E}\left\{x^2\right\} = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6}$$

Valore Atteso

- Il valore atteso di una variabile aleatoria è una misura della tendenza centrale.
- Se fosse necessario descrivere una variabile aleatoria con un solo numero, il valore atteso sarebbe la scelta migliore.
- Tuttavia, il valore atteso da solo, come abbiamo visto nella statistica descrittiva, tralascia una buona parte di informazione.

Valore Atteso

Consideriamo due variabili aleatorie x e y che presentano le seguenti pmf

$$\begin{array}{r|ccccc} x: & -10 & -5 & 0 & 5 & 10 \\ f_{\mathsf{x}}(x): & 1/10 & 2/10 & 4/10 & 2/10 & 1/10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cc} y: & -1 & 1 \\ f_{\mathsf{y}}(y): & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Entrambe le variabili hanno la stessa media, ma il supporto è molto diverso!

Coppie e vettori di variabili aleatorie

- In altri casi, più che ricondurci ad una singola variabile, siamo interessati ad osservarne più di una insieme, per scoprire, ad esempio, l'effetto congiunto su un dato fenomeno (ad esempio, potremmo voler indagare il rapporto tra diverse cause di una patologia)

Coppie e vettori di variabili aleatorie

- In altri casi, più che ricondurci ad una singola variabile, siamo interessati ad osservarne più di una insieme, per scoprire, ad esempio, l'effetto congiunto su un dato fenomeno (ad esempio, potremmo voler indagare il rapporto tra diverse cause di una patologia)
- Per specificare la relazione tra due variabili aleatorie x e y, il punto di partenza è estendere il concetto di cdf (funzione di ripartizione)

Coppie e vettori di variabili aleatorie

- In altri casi, più che ricondurci ad una singola variabile, siamo interessati ad osservarne più di una insieme, per scoprire, ad esempio, l'effetto congiunto su un dato fenomeno (ad esempio, potremmo voler indagare il rapporto tra diverse cause di una patologia)
- Per specificare la relazione tra due variabili aleatorie x e y, il punto di partenza è estendere il concetto di cdf (funzione di ripartizione)
- Definizione: La funzione di ripartizione congiunta per due variabili aleatorie x e y si definisce come

$$F_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y) = \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \leqslant x\} \cap \{\mathsf{y} \leqslant y\}\right\}$$

Coppie e vettori di variabili aleatorie

- In altri casi, più che ricondurci ad una singola variabile, siamo interessati ad osservarne più di una insieme, per scoprire, ad esempio, l'effetto congiunto su un dato fenomeno (ad esempio, potremmo voler indagare il rapporto tra diverse cause di una patologia)
- Per specificare la relazione tra due variabili aleatorie x e y, il punto di partenza è estendere il concetto di cdf (funzione di ripartizione)
- Definizione: La funzione di ripartizione congiunta per due variabili aleatorie x e y si definisce come

$$F_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y) = \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \leqslant x\} \cap \{\mathsf{y} \leqslant y\}\right\}$$

- A partire dalla funzione di ripartizione congiunta, siamo in grado di calcolare anche le funzioni di ripartizioni individuali $F_{\mathsf{x}}(x) = F_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, +\infty) = \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \leqslant x\} \cap \{\mathsf{y} < +\infty\}\right\}$

Coppie e vettori di variabili aleatorie

- Analogamente, per coppie e vettori di variabili aleatorie discrete, possiamo definire la funzione di massa di probabilità congiunta.
- Definizione: La funzione di massa di probabilità congiunta per due variabili aleatore x e y si definisce come

$$f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y) = \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y\}\right\}$$

Esempio

Immaginiamo di lanciare due dadi, uno rosso e uno blu, chiamando gli esiti x e y, rispettivamente

1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esempio

Immaginiamo di lanciare due dadi, uno rosso e uno blu, chiamando gli esiti x e y, rispettivamente

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Esempio

Immaginiamo di lanciare due dadi, uno rosso e uno blu, chiamando gli esiti x e y, rispettivamente

$f_{\mathsf{x,y}}(x,y)$	1	2	3	4	5	6
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

Coppie e vettori di variabili aleatorie

A partire dalla funzione di massa congiunta, siamo in grado di calcolare anche le funzioni di massa individuali (marginali)

- Essendo una variabile discreta, y può assumere un numero finito di valori inclusi in $\mathcal{S}_{\mathrm{y}} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

Coppie e vettori di variabili aleatorie

A partire dalla funzione di massa congiunta, siamo in grado di calcolare anche le funzioni di massa individuali (marginali)

- Essendo una variabile discreta, y può assumere un numero finito di valori inclusi in $\mathcal{S}_{\mathrm{y}} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$
- Notiamo che gli eventi $\{\mathrm{x} = x\} \cap \{\mathrm{y} = y_1\}$, $\{\mathrm{x} = x\} \cap \{\mathrm{y} = y_2\}$, ..., $\{\mathrm{x} = x\} \cap \{\mathrm{y} = y_n\}$ sono tutti disgiunti (mutualmente esclusivi)

Coppie e vettori di variabili aleatorie

A partire dalla funzione di massa congiunta, siamo in grado di calcolare anche le funzioni di massa individuali (marginali)

- Essendo una variabile discreta, y può assumere un numero finito di valori inclusi in $\mathcal{S}_{\mathsf{y}} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$
- Notiamo che gli eventi $\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_1\}$, $\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_2\}$, ..., $\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_n\}$ sono tutti disgiunti (mutualmente esclusivi)
- Possiamo quindi scrivere $\{\mathsf{x} = x\} = \bigcup_{i=1}^{n} (\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_i\})$

Coppie e vettori di variabili aleatorie

A partire dalla funzione di massa congiunta, siamo in grado di calcolare anche le funzioni di massa individuali (marginali)

- Essendo una variabile discreta, y può assumere un numero finito di valori inclusi in $\mathcal{S}_{\mathsf{y}} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$
- Notiamo che gli eventi $\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_1\}$, $\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_2\}$, ..., $\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_n\}$ sono tutti disgiunti (mutualmente esclusivi)
- Possiamo quindi scrivere $\{\mathsf{x} = x\} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_i\}\right)$
- Segue che

$$\begin{aligned} f_{\mathsf{x}}(x) &= \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} = x\}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} = x\} \cap \{\mathsf{y} = y_i\}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y_i) \end{aligned}$$

Esempio

Immaginiamo di lanciare due dadi, uno rosso e uno blu, chiamando gli esiti x e y, rispettivamente

$f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x,y)$	1	2	3	4	5	6	$f_{\mathsf{x}}(x)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$

Esempio

Immaginiamo di lanciare due dadi, uno rosso e uno blu, chiamando gli esiti x e y, rispettivamente

$f_{x,y}(x, y)$	1	2	3	4	5	6	$f_x(x)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
$f_y(y)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

Non vale il viceversa!

Le funzioni di massa marginali si possono ricavare dalla funzione congiunta. Tuttavia, il viceversa è falso. Conoscere $f_{\mathsf{x}}(x)$ e $f_{\mathsf{y}}(y)$ non è sufficiente per conoscere $f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y)$.

Variabili aleatorie indipendenti

Analogamente a ciò che abbiamo definito per gli eventi, considerando le realizzazioni di ogni variabile aleatoria come la realizzazione di un esperimento, due variabili aleatorie x e ysi dicono indipendenti se

- per ogni coppia di insiemi valori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ $(\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_{\mathsf{x}}, \mathcal{B} \subset \mathcal{S}_{\mathsf{y}})$, $\mathbb{P}\{\{\mathsf{x} \in \mathcal{A}\} \cap \{\mathsf{y} \in \mathcal{B}\}\} = \mathbb{P}\{\{\mathsf{x} \in \mathcal{A}\}\}\,\mathbb{P}\{\{\mathsf{y} \in \mathcal{B}\}\}$

Variabili aleatorie indipendenti

Analogamente a ciò che abbiamo definito per gli eventi, considerando le realizzazioni di ogni variabile aleatoria come la realizzazione di un esperimento, due variabili aleatorie x e $\mathsf{y}$si dicono indipendenti se

- per ogni coppia di insiemi valori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ $(\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_{\mathsf{x}}, \mathcal{B} \subset \mathcal{S}_{\mathsf{y}})$, $\mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \in \mathcal{A}\} \cap \{\mathsf{y} \in \mathcal{B}\}\right\} = \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \in \mathcal{A}\}\right\} \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{y} \in \mathcal{B}\}\right\}$
- segue che per due numeri reali a e b, $\mathbb{P}\left\{\mathsf{x} \leqslant a, \mathsf{y} \leqslant b\right\} = \mathbb{P}\left\{\mathsf{x} \leqslant a\right\} \mathbb{P}\left\{\mathsf{y} \leqslant b\right\}$

Variabili aleatorie indipendenti

Analogamente a ciò che abbiamo definito per gli eventi, considerando le realizzazioni di ogni variabile aleatoria come la realizzazione di un esperimento, due variabili aleatorie x e $\mathsf{y}$si dicono indipendenti se

- per ogni coppia di insiemi valori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_{\mathsf{x}}, \mathcal{B} \subset \mathcal{S}_{\mathsf{y}}$), $\mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \in \mathcal{A}\} \cap \{\mathsf{y} \in \mathcal{B}\}\right\} = \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \in \mathcal{A}\}\right\} \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{y} \in \mathcal{B}\}\right\}$
- segue che per due numeri reali a e b, $\mathbb{P}\left\{\mathsf{x} \leqslant a, \mathsf{y} \leqslant b\right\} = \mathbb{P}\left\{\mathsf{x} \leqslant a\right\} \mathbb{P}\left\{\mathsf{y} \leqslant b\right\}$
- quindi la funzione di ripartizione congiunta può essere descritta come il prodotto delle funzioni marginali $F_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y) = F_{\mathsf{x}}(x) F_{\mathsf{y}}(y)$

Variabili aleatorie indipendenti

Analogamente a ciò che abbiamo definito per gli eventi, considerando le realizzazioni di ogni variabile aleatoria come la realizzazione di un esperimento, due variabili aleatorie x e ysi dicono indipendenti se

- per ogni coppia di insiemi valori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_{\mathsf{x}}, \mathcal{B} \subset \mathcal{S}_{\mathsf{y}}$), $\mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \in \mathcal{A}\} \cap \{\mathsf{y} \in \mathcal{B}\}\right\} = \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{x} \in \mathcal{A}\}\right\} \mathbb{P}\left\{\{\mathsf{y} \in \mathcal{B}\}\right\}$
- segue che per due numeri reali a e b, $\mathbb{P}\left\{\mathsf{x} \leqslant a, \mathsf{y} \leqslant b\right\} = \mathbb{P}\left\{\mathsf{x} \leqslant a\right\} \mathbb{P}\left\{\mathsf{y} \leqslant b\right\}$
- quindi la funzione di ripartizione congiunta può essere descritta come il prodotto delle funzioni marginali $F_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y) = F_{\mathsf{x}}(x) F_{\mathsf{y}}(y)$
- per le variabili discrete, la funzione di massa congiunta può essere descritta come il prodotto delle funzioni marginali $f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x, y) = f_{\mathsf{x}}(x) f_{\mathsf{y}}(y)$

Esempio

Consideriamo invece un esempio in cui le due probabilità marginali vengono date

$x:$	1	2	3	4	
$f_{\mathsf{x}}(x):$	$1/10$	$2/10$	$3/10$	$4/10$	
$y:$	1	2	3	4	5
$f_{\mathsf{y}}(y):$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$

Esempio

$f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x,y)$	1	2	3	4	5	$f_{\mathsf{x}}(x)$
1	$1/150$	$2/150$	$3/150$	$4/150$	$5/150$	$1/10$
2	$2/150$	$4/150$	$6/150$	$8/150$	$10/150$	$2/10$
3	$3/150$	$6/150$	$9/150$	$12/150$	$15/150$	$3/10$
4	$4/150$	$8/150$	$12/150$	$16/150$	$20/150$	$4/10$
$f_{\mathsf{y}}(y)$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$	1

Funzioni di probabilità condizionata

Le relazioni esistenti tra due variabili aleatorie possono essere chiarite dallo studio della distribuzione condizionale di una delle due, dato il valore dell'altra.

Definiamo il concetto di funzione di probabilità condizionata tra due variabili aleatorie a partire dal concetto di probabilità condizionata tra due eventi. Si ricorda, infatti, che presi comunque due eventi E e F con $\mathbb{P}\{F\} > 0$ la probabilità di E condizionata a F è data da

$$\mathbb{P}\{E|F\} = \frac{\mathbb{P}\{E \cap F\}}{\mathbb{P}\{F\}}$$

Funzioni di probabilità condizionata

Possiamo applicare questo schema anche alle variabili aleatorie discrete.

Definizione: Siano x e y due variabili aleatorie discrete con funziooe di massa congiunta $f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x,y)$. Si dice funzione di massa di probabilità condizionata di x dato y e si indica $f_{\mathsf{x}|\mathsf{y}}(x|y)$, la funzione di due variabili cosl definita:

$$f_{\mathsf{x}|\mathsf{y}}(x|y) = \frac{f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x,y)}{f_{\mathsf{y}}(y)} \qquad \forall y : f_{\mathsf{y}}(y) > 0$$

Generalizzazione a n variabili

Tutte le definizioni viste si possono generalizzare al caso di n variabili aleatorie. Ad esempio, la funzione di ripartizione congiunta per n variabili aleatorie $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n$ è

$$F_{\mathsf{x}_1,\mathsf{x}_2,\ldots,\mathsf{x}_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbb{P}\left\{\mathsf{x}_1 \leqslant a_1, \mathsf{x}_2 \leqslant a_2, \ldots, \mathsf{x}_n \leqslant a_n\right\}$$

e la funzione di massa congiunta è

$$f_{\mathsf{x}_1,\mathsf{x}_2,\ldots,\mathsf{x}_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbb{P}\left\{\mathsf{x}_1 = a_1, \mathsf{x}_2 = a_2, \ldots, \mathsf{x}_n = a_n\right\} .$$

Esempio

Consideriamo x una variabile che corrisponde alla somma del lancio di due dadi.

$x, y:$	1	2	3	4	5	6
$x+y:$	2	3		$\dots$		12

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\mathsf{x}+\mathsf{y}\right\} &= \sum_{x=1}^{6} x \sum_{y=1}^{6} f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x,y) + \sum_{y=1}^{6} y \sum_{x=1}^{6} f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x,y) \\
&= \sum_{x=1}^{6} x \sum_{y=1}^{6} f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x,y) + \sum_{y=1}^{6} y \sum_{x=1}^{6} f_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(x,y) \\
&= \sum_{x=1}^{6} x f_{\mathsf{x}}(x) + \sum_{y=1}^{6} y f_{\mathsf{y}}(y) = \mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\} + \mathbb{E}\left\{\mathsf{y}\right\}
\end{aligned}
$$

Varianza

Se la media è il centro della distribuzione della probabilità di una variabile aleatoria, la varianza misura quanto ci allontaniamo da tale centro.

Varianza

Se la media è il centro della distribuzione della probabilità di una variabile aleatoria, la varianza misura quanto ci allontaniamo da tale centro.

Definizione: Se x è una variabile aleatoria discreta con valore atteso $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \mu$, allora la varianza di x si definisce come:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(\mathsf{x}) = \mathbb{E}\left\{(\mathsf{x} - \mu)^2\right\}$$

Varianza

Se la media è il centro della distribuzione della probabilità di una variabile aleatoria, la varianza misura quanto ci allontaniamo da tale centro.

Definizione: Se x è una variabile aleatoria discreta con valore atteso $\mathbb{E}\{\mathsf{x}\} = \mu$, allora la varianza di x si definisce come:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(\mathsf{x}) = \mathbb{E}\left\{(\mathsf{x} - \mu)^2\right\}$$

La deviazione standard di x si definisce come

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(\mathsf{x})} = \sqrt{\mathbb{E}\left\{(\mathsf{x} - \mu)^2\right\}}$$

Varianza

Nota bene, anzi benissimo:

- La deviazione standard σ ha la stessa unità di misura di x : se x è in metri, σ è in metri
- La varianza σ^2 ha la stessa unità di misura del quadrato di x : se x è in metri, σ^2 è in metri quadri.

Varianza

Consideriamo due variabili aleatorie x e y che presentano le seguenti pmf

$x:$	-10	-5	0	5	10		$y:$	-1	1
$f_{\mathsf{x}}(x):$	$1/10$	$2/10$	$4/10$	$2/10$	$1/10$		$f_{\mathsf{y}}(y):$	$1/2$	$1/2$

Entrambe le variabili hanno la stessa media $\mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}} = 0$. Qual è la loro deviazione standard?

$$\sigma_{\mathsf{x}}^2 = \mathbb{E}\left\{(\mathsf{x}-\mu_{\mathsf{x}})^2\right\} = \sum_x (x-\mu_{\mathsf{x}})^2 f_{\mathsf{x}}(x) =$$

$$= 100\frac{1}{10} + 25\frac{2}{10} + 0\frac{4}{10} + 25\frac{2}{10} + 100\frac{1}{10} = 25$$

$$\sigma_{\mathsf{y}}^2 = \mathbb{E}\left\{(\mathsf{y}-\mu_{\mathsf{y}})^2\right\} = \sum_y (y-\mu_{\mathsf{y}})^2 f_{\mathsf{y}}(y) =$$

$$= 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 1$$

Varianza

Consideriamo due variabili aleatorie x e y che presentano le seguenti pmf

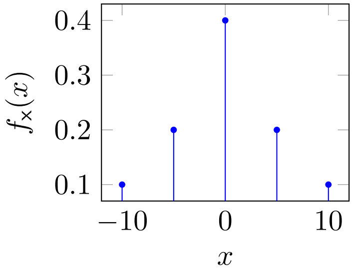
x :	-10	-5	0	5	10
$f_{\mathsf{x}}(x)$:	$1/10$	$2/10$	$4/10$	$2/10$	$1/10$

Varianza

Consideriamo due variabili aleatorie x e y che presentano le seguenti pmf

$x:$	-10	-5	0	5	10
$f_{\mathsf{x}}(x):$	$1/10$	$2/10$	$4/10$	$2/10$	$1/10$

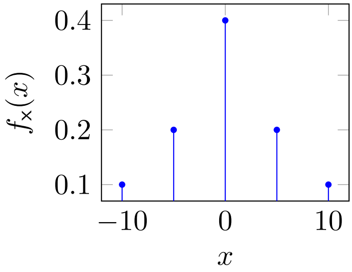
$y:$	-1	1
$f_{\mathsf{y}}(y):$	$1/2$	$1/2$

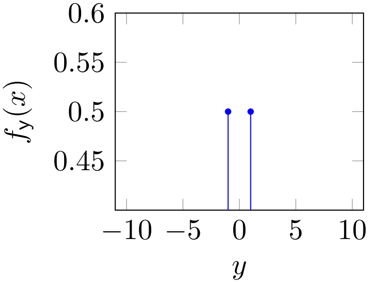


Varianza

Consideriamo due variabili aleatorie x e y che presentano le seguenti pmf

$$\begin{array}{r|ccccc} x: & -10 & -5 & 0 & 5 & 10 \\ f_{\mathsf{x}}(x): & 1/10 & 2/10 & 4/10 & 2/10 & 1/10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cc} y: & -1 & 1 \\ f_{\mathsf{y}}(y): & 1/2 & 1/2 \end{array}$$





Varianza di una variabile di Bernoulli

. Se $\mathsf{x} \sim \mathrm{Ber}(p)$, sappiamo che $\mu_{\mathsf{x}} = p$. Quanto vale σ^2_{x}?

$$\begin{array}{r|cc} x: & 0 & 1 \\ x-\mu_{\mathsf{x}}: & -p & 1-p \\ f_{\mathsf{x}}(x): & 1-p & p \end{array}$$

$$\sigma^2_{\mathsf{x}} = (1-p)p^2 + p(1-p)^2 = (1-p)p(1-p+p) = (1-p)p$$

Per quale valore di p si ottiene la varianza più alta?

Varianza

Proprietà

1. Se x e y sono indipendenti, allora $\mathrm{Var}(\mathsf{x}+\mathsf{y}) = \mathrm{Var}(\mathsf{x}) + \mathrm{Var}(\mathsf{y})$
2. Prese due costanti a e b, $\mathrm{Var}(a\mathsf{x}+b) = a^2\mathrm{Var}(\mathsf{x})$
3. $\mathrm{Var}(\mathsf{x}) = \mathbb{E}\left\{\mathsf{x}^2\right\} - \mathbb{E}\left\{\mathsf{x}\right\}^2$

Esempi

Siano x e y indipendenti con $\sigma_{\mathsf{x}}^2 = 3$ e $\sigma_{\mathsf{y}}^2 = 5$

- $\mathrm{Var}(\mathsf{x}+\mathsf{y})$
- $\mathrm{Var}(3\mathsf{x}+4)$
- $\mathrm{Var}(\mathsf{x}+\mathsf{x})$
- $\mathrm{Var}(\mathsf{x}+3\mathsf{y})$

Varianza di una binomiale

Quanto vale la varianza di x $\sim \mathrm{Bin}(n, p)$?

Varianza di una binomiale

Quanto vale la varianza di $\mathsf{x} \sim \mathrm{Bin}(n, p)$?
Essendo la somma di n variabili di Bernoulli, indipendenti, che hanno ciascuna varianza $p(1-p)$, allora $\sigma_{\mathsf{x}}^2 = np(1-p)$