Matematica discreta - a.a. 2022-23 - 21 giugno 2023
Ogni esercizio deve essere svolto motivando adeguatamente tutti i passaggi, con richiami alla teoria; in caso di mancata motivazione, l'esercizio non verrà valutato positivamente.

1. Si considerino i vettori $v_1 = i + j - k$, $v_2 = -i + j - 2k$, $v_3 = 2j + k$.
   - (1 punto) Determinare il volume del parallelepipedo avente per spigoli i vettori assegnati.
   - (0.5 punti) Se si assume come base del parallelepipedo quella i cui lati sono dati dai primi due vettori, ossia $2i + j - k$, $i + j - k$, qual' è l'area di base?
2. Siano $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = 0,\ 2z - t = 0\}$, $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - t = 0,\ y + z = 0\}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$.
   - (1 punto) Verificare che A e B sono sottospazi,
   - (1 punto) Trovare una base per A e per B.
   - (1 punto) Dimostrare che $A + B = \mathbb{R}^4$.
   - (1 punto) Si tratta di una somma diretta?
3. Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   determinare:
   - (1,5 punti) se eseguibili, il prodotto $C = AB$, $D = BA$, $E = A + B^T$, $F = A + B$.
   - (1 punto) il rango di C e quello di E
   - (1 punto) l'inversa di D se esiste.
4. (3 punti) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il rango della matrice:
$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (4 punti) Discutere, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= -1 \\ (k+1)x + y + kz &= 0 \end{aligned}$$

6. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che manda il vettore $(x; y)$ nel vettore $(3x + 2y; x - y; x + y)$.
   - (1 punto) Mostrare che f è lineare
   - (2 punti) Determinare $\ker(f)$, $\mathrm{Imm}(f)$, le basi e le dimensioni dei due sottospazi.
   - (1 punto) Per quali valori del parametro reale k il vettore $(k + 4; 0; 2k)$ appartiene a $\mathrm{Imm}(f)$?

7. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo avente matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   rispetto alle basi $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ nel dominio $B_2 = \{(1, 0, -1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ nel codominio.
   Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche sia nel dominio che nel codominio.

8. (4 punti) Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   stabilire se la matrice è diagonalizzabile e, in tal caso, calcolare la base rispetto a cui si può ottenere la diagonalizzazione e verificare la similitudine tra A e una matrice diagonale.

9. (3 punti) Sia $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Costruire a partire da essa una base ortonormale.

10. (4 punti) Sia data la forma quadratica definita da $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_3^2$. Stabilire il segno della forma quadratica.

1.

$$v_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$
$$v_2 = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$
$$v_3 = 2\vec{j} + k$$

- Volume del parallelepipedo

$$V = \langle v_1 \times v_2 , v_3 \rangle = \left| \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \right| = -2(-3) + 1 \cdot 2 = 8$$

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2+1)\vec{i} - (-2-1)\vec{j} + (1+1)\vec{k}$$

$$= -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

- Area di base è la lunghezza del vettore $v_1 \times v_2$

$$A = |v_1 \times v_2| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

2.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in R^4 : \ y=0,\ 2z-t=0 \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in R^4 \quad x-t=0 \quad y+z=0 \right\}$$

- $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ 2z \end{pmatrix} \in R^4 \right\}$

Dati $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \\ 2z_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \\ 2z_2 \end{pmatrix} \in A$ e $c \in R$

$$c \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \\ 2z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \\ 2z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 - x_2 \\ 0 \\ cz_1 - z_2 \\ 2(cz_1 - z_2) \end{pmatrix} \in A$$

$\Rightarrow$ per la II caratterizzazione

$A \subseteq R^4$

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \\ x \end{pmatrix} \in R^4 \right\}$

Dati $\begin{pmatrix} x_1 \\ -z_1 \\ z_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_2 \\ -z_2 \\ z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in B$ e $c \in R$

$$c \begin{pmatrix} x_1 \\ -z_1 \\ z_1 \\ x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ -z_2 \\ z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 - x_2 \\ -(cz_1 - z_2) \\ cz_1 - z_2 \\ cx_1 - x_2 \end{pmatrix} \in B \Rightarrow B \subseteq R^4$$

Base di A $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\2 \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{pmatrix} \boxed{1\ 0} \\ 0\ 0 \\ \boxed{0\ 1} \\ 0\ 2 \end{pmatrix}$ rango 2

Base di B $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \\ 0\ 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}$ rango 2

$$A+B = \left[\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0 \end{pmatrix} \right] = R^4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \dim(A+B) = 4$$

rango 4

Poichè

$$\dim(A+B) = 4 = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$
$$= 2 + 2 - 0$$

$\dim(A \cap B) = 0$

Si tratta di somma diretta

$A \oplus B = R^4$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -6 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

F non calcolabile

- rango $C = 2$ $\qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\det C = 0$

rango $E = 2$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 13$

- $\det D = 2$ $\qquad D^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

4.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rango $A \leq 3$

rango $A \geq 2$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) - (3k-1) = 2 - 3k + 1$$
$$= -3k + 3$$
$$= 0 \qquad k = 1$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \qquad = 0 \qquad k = 0$$
$$= 2 \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(k-1) = 2k - 2 \Rightarrow 2(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Il rango è 3 per ogni valore di $k \neq 1$

- Se $k = 1 \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ entrambi i minori di ordine 3 hanno due colonne uguali, cioè lin dip.

$\Rightarrow rg(A) = 2$

5.

$$2x+y+z=-1$$
$$(k+1)x+y+kz=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

rango $A \leq 2$
rango $A \geq 1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} = 2-k-1 = 1-k \qquad \neq 0 \text{ per } k \neq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k+1 & k \end{vmatrix} = 2k-k-1 = k-1 \qquad \neq 0 \text{ per } k \neq 1$$

Per $k \neq 1$ $\quad r(A)=2$
Per $k=1$ $\quad r(A)=1$

$$(A|b)=\begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 1 & \boxed{-1} \\ k+1 & \boxed{1} & k & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$rg(A|b) \leq \min\{2,4\}=2$

$$\cancel{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ k+1 & 0 \end{vmatrix} = +k+1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$r(A|b)=2$ sempre $\forall k$

$\Rightarrow$ $\quad k \neq 1 \quad r(A)=r(A|b)=2$

esistono $\infty^{3-2}=\infty^{1}$ soluzioni

$$\begin{cases} 2x+y=-z-1 \\ (k+1)x+y=-kz \end{cases}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2-k-1 = 1-k$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z-1 & 1 \\ -kz & 1 \end{vmatrix}}{1-k} = \frac{-z-1+kz}{1-k} = -\frac{1}{1-k} + \frac{k-1}{1-k} z$$

$$= -\frac{1}{\cancel{1}-k} - z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z-1 \\ k+1 & -kz \end{vmatrix}}{1-k} = \frac{-2kz + (z+1)(k+1)}{1-k} =$$

$$= \frac{-2kz + kz + z + k + 1}{1-k} =$$

$$= \frac{k+1}{1-k} + \frac{\cancel{(1-k)} z}{\cancel{1-k}}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{1-k} \\ \frac{k+1}{1-k} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $k = 1$ $\qquad r(A) = 1 \qquad r(A|b) = 2$

sistema impossibile

6. $f : R^2 \to R^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

Siano $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$ $\quad \alpha, \beta \in R$

$$f\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - (\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3x_1 + 2y_1 \\ x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3x_2 + 2y_2 \\ x_2 - y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(3x_1 + 2y_1) + \beta(3x_2 + 2y_2) \\ \alpha(x_1 - y_1) + \beta(x_2 - y_2) \\ \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - (\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$$

f è lineare

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad r(A) = 2$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$

$\mathrm{Im}\, f = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ $\quad \dim \mathrm{Im}\, f = 2$

f è iniettiva ma non suriettiva

$$\begin{pmatrix} k+4 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f \iff \begin{pmatrix} 3 & 2 & k+4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2k \end{pmatrix}$$

ha rango 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & k+4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2k \end{vmatrix} = (k+4)\,2 + 2k\,(-3-2)$$

$$= 2k + 8 - 10k = -8k + 8 = 0$$

$$\boxed{k = 1}$$

$$\begin{array}{ccccc} B_1 & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & B_2 \\ & \updownarrow & & \updownarrow & \\ C & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & C \end{array}$$

7.

$B_1 = \{(1,1,0)\ (1,0,1)\ (0,0,1)\}$

$B_2 = \{(1\ 0\ -1)\ (1,0,1)\ (0,1,0)\}$

$$M^{B_1}_{B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^C_C(f) = M^{B_2}_C(i_{\mathbb{R}^3})\ M^{B_1}_{B_2}(f)\ M^C_{B_1}(i_{\mathbb{R}^3})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \overset{y}{\overset{\parallel}{a}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{x-y}{b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \overset{z-x+y}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = a+b \\ y = a \\ z = b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = y \\ b = x - y \\ c = z - x + y \end{cases} \qquad M^C_{B_1}(i_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^C_C(f) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -3 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

matrice diagonalizzabile

$\lambda = 2$
$\lambda = 1$
$\lambda = -1$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -x + z = 0 \\ 2z = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -3x + z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$\mathcal{B} = \{ (1,0,0) (0,1,0) (1,0,3) \}$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$AN = ND \qquad A = NDN^{-1}$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{N}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \; ND = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

9. $B = \{(1,1,1), (0,0,1), (1,0,1)\}$ with v_1, v_2, v_3 written under the three vectors

$v_1' = v_1 \qquad \langle v_1', v_1' \rangle = 3$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{3} v_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \langle v_2', v_2' \rangle = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' = \qquad \begin{array}{l} \langle v_3, v_1' \rangle = 2 \\ \langle v_3, v_2' \rangle = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \\ 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle v_3', v_3' \rangle = \frac{1}{2}$$

Base ortogonale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Base ortonormale $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$

10. $q(x_1 x_2 x_3) = 4x_1x_2 - x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+4)\left((\lambda+1)(\lambda+5) - 4\right)$$

$$= (\lambda+4)\left(\lambda^2 + 6\lambda + 5 - 4\right)$$

$$= (\lambda+4)\left(\lambda^2 + 6\lambda + 1\right)$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$\lambda_1 = -4$

$$\lambda_2 = \frac{-6 - 5.65}{2} < 0$$

$$\lambda_3 = \frac{-6 + 5.65}{2} < 0$$

$\sqrt{32} = 5.65$

Matrice definita negativa