Matematica discreta
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti) Siano $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ vettori dello spazio. Determinare le componenti del vettore proiezione ortogonale di v_2 sul piano contenente v_1 e v_3.

2. (4 punti) Sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y+z-t = 0; z+t = 0; y+2z = 0\}$.

   - Scrivere una base per U.
   - Sia $W = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$. Stabilire se $U + W = \mathbb{R}^4$ e, in tal caso, dire se si tratta di una somma diretta, fornendo le motivazioni della conclusione.

3. (4 punti) Determinare se esistono i valori del parametro k se esistono per cui la matrice A seguente ha rango 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$$

   Trovare l'inversa della matrice ottenuta sostituendo a k il valore 0.

4. (4 punti) Discutere, al variare del parametro reale λ la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda^2 x + y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

5. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x, y, z, w) = (x-y+kw, 2x+4y+kz+6w, -3x+ky-9w)$, $k \in \mathbb{R}$. Si determinino, al variare di k, le dimensioni dell'insieme immagine e del nucleo di f . Si determini, al variare di k, una base dell'insieme immagine di f.

6. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$\mathcal{M}_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Trovare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$ del dominio e del codominio.

7. (4 punti) Data la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 0), (2, 1, 0), (0, 4, -1)$, costruire una base ortonormale. Trovare le coordinate del generico elemento (x, y, z) rispetto alla base ortonormale determinata (coefficienti di Fourier).

8. (4 punti) Dato l'operatore lineare $f(x, y, z) = (5x + y, -3y, x + 5z)$, determinare autovalori, autovettori di f; verificare se l'operatore è diagonalizzabile.

9. (3 punti) Scrivere la forma quadratica di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare il segno della forma quadratica.

Soluzioni compito

1. Esercizio 1
   - $w = (0, 1, 0)$.
2. Esercizio 2
   - Una base di U è data da $\{(1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, -1)\}$.
   - $U + W = \{(1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ fornisce $\mathbb{R}^4$ ma non è somma diretta poichè $U \cap W \neq \{0\}$.
3. Esercizio 3
   - Non esistono valori di k tali che la matrice A abbia rango 2
   - L'inversa della matrice ottenuta da A per $k = 0$ è:
   $$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   .
4. Esercizio 4
   - Per $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1$ il sistema ammette unica soluzione $\left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$.
   - Per $\lambda = 0$, il sistema è incompatibile.
   - Per $\lambda = 1$, il sistema ammette ∞^2 soluzioni: $(-y - z + 1, y, z)$.
5. Esercizio 5
   - Per $k \neq 3$, dim Imf$= 3$, $\dim \ker f = 1$ e Imf $= \{(1, 2, -3), (-1, 4, k), (k, 6, -9)\}$.
   - Per $k = 3$, dim Imf$= 2$, $\dim \ker f = 2$ e Imf $= \{(1, 2, -3), (-1, 4, 3)\}$.
6. Esercizio 6
   - $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Esercizio 7
   - Base ortonormale $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$.
   - Coefficienti di Fourier del generico elemento (x, y, z): $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = -z$.

8. Esercizio 8

   - La matrice associata all'applicazione lineare f ammette autovalori $\lambda_1 = 5$ con $\lambda_2 = -3$; l'autovalore λ_2 ha molteplicità algebrica e geometrica coincidenti mentre l'autovalore λ_1 ha molteciplità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, pertanto la matrice (e dunque l'applicazione lineare) non è diagonalizzabile.

9. Esercizio 9

   - $q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 + 6xz$.
   - La forma quadratica è indefinita.

(1) Dati $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$ si determina il vettore proiezione ortogonale di v_2 sul piano individuato da v_1 e v_3.

$$u = \left< v_2 , \frac{v_1 \times v_3}{\| v_1 \times v_3 \|} \right> \frac{v_1 \times v_3}{\| v_1 \times v_3 \|}$$

$$v_1 \times v_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + k$$

$$u = \left< v_2 , \frac{k-i}{\sqrt{2}} \right> \frac{k-i}{\sqrt{2}}$$

$$= \left< (0,1,0) , (-1 \ 0 \ 1) \right> \frac{k-i}{2} = (0,0,0)$$

$$w = v_2 - u$$

$$= (0,1,0)$$

(2) Sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad y + z - t = 0, \quad z + t = 0,$
$y + 2z = 0\}$

1) Scrivere una base per U.

(I) $t = y + z$. $\qquad t = -z$

II $\qquad z + y + z = 0 \Rightarrow \quad y = -2z$

III $\qquad -2z + 2z = 0$

$$U = \{(x, -2z, z, -z)\} = \mathcal{L}[(1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, -1)]$$

I due vettori sono lin. indip. $\Rightarrow$ è una base

2) Sia $W = \mathcal{L}[(1, 0, 0, 0)\ (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$

Stabilire se $U + W = \mathbb{R}^4$ e se si tratta di somma diretta.

$$U + W = \mathcal{L}[(1, 0, 0, 0)\ (0, -2, 1, -1)\ (0, 1, 0, 0)\ (0, 0, 1, 0)]$$

$$U \cap W = [(1, 0, 0, 0)]$$

Siccome $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

$$= 2 + 3 - 1 = 4$$

si tratta di una somma che fornisce $\mathbb{R}^4$ ma non di somma diretta perché $U \cap W \neq \{0\}$

③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$

Per avere rango 2, occorre che $\det A = 0$ -
Poi occorre controllare se esiste un minore non nullo di ordine 2.

$\det A = (k-1)(2-2k) = -2(k-1)^2$

Per $k=1$ la matrice non ha rango 3 -
Tuttavia in tal caso non esiste un minore di ordine 2 ~~a determ~~ che sia non nullo.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Dunque non esiste alcun valore di k per cui la matrice ha rango 2.

Inverso di

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = -2 \quad$ $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{adj} A^T}{\det A}$$

4

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda^2 x + y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

Si calcola det A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda^2 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = \lambda(\lambda-1)^2$$

Per $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1$ il sistema è di Cramer.
La soluzione esiste ed è unica

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)^2} = \frac{1}{\lambda} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)^2} = -\frac{1}{\lambda}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

<u>Caso $\lambda = 0$.</u>

Rango$(A) = 2$.
Si verifica il rango di $(A|b)$.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

rango$(A) \neq$ rango$(A|b)$
Il sistema è impossibile.

Caso $\lambda = 1$.

Rango A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rango $A = 1$ rango$(A|b) = 1$

Il sistema ha ∞^{3-1} soluzioni

$$x = -y - z + 1$$

$\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni è dato da

$$(-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z + (1, 0, 0)$$

5. Sia $f: R^4 \to R^3$ tale che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - y + kw \\ 2x + 4y + kz + 6w \\ -3x + ky - 9w \end{pmatrix} \quad , k \in R$$

La matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k \\ 2 & 4 & k & 6 \\ -3 & k & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

dim Imf = rango A

$\exists$ un minore $\neq 0$ di ordine 2 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4+2=6$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & k \\ -3 & k & 0 \end{vmatrix} = -k(k-3)$$

Il minore è non nullo per $k \neq 0$ e $k \neq 3$

Si verifica se per $k=0$ esiste un minore di ordine 3 non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$$

anche per $k=0$ il rango è 3

Si verifica se per $k=3$ esiste un minore di ordine 3 non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque per $k=3$ rango $A=2$

Per $k \neq 3$ $\quad \dim \operatorname{Im} f = 3$

$\dim \operatorname{Ker}(f) = 4 - 3 = 1$

La base di $\operatorname{Im} f$ è

$(1 \; 2 \; -3), \; (-1, 4, k), \; (k, 6, -9)$

Per $k = 3$ $\quad \dim \operatorname{Im} f = 2$ $\quad \dim \operatorname{Ker} f = 4-2 = 2$

La base di $\operatorname{Im} f$ è

$(1 \; 2 \; -3) \quad (-1 \; 4 \; 3)$

6.

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$M^C_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0,1,0)(1\ -1\ 0)(1\ 0\ 1)\}$.

I metodo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^C_{\mathcal{B}}(i) \cdot M^C_C(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_C(i)$$

$$M^{\mathcal{B}}_C(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^C_{\mathcal{B}}(i) = \left(M^{\mathcal{B}}_C(i)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II metodo

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_C\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}_C$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_C\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_C$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_C\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}_C$$

Si calcolano le componenti di un vettore espresso in base canonica rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_C=\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-z\\x-z\\z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases}x=\beta+\gamma\\y=\alpha-\beta\\z=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x+y-z\\\beta=x-z\\\gamma=z\end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_C\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\quad f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_C\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_C\right)=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

7. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$

$$v_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' = \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} - \frac{0}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{4}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

v_1' v_2' v_3' è base ortonormale

Sia dato il vettore (x, y, z). Le sue coordinate di Fourier sono

$\alpha = x$

$\beta = y$

$\gamma = -z$

8. $f(x,y,z) = (5x+y,\ -3y,\ x+5z)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-5)\left[(\lambda-5)(\lambda+3)\right]$$

$\lambda = 5 \qquad m.a = 2$

$\lambda = -3 \qquad m.a = 1$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} -y = 0 \\ 8y = 0 \\ -x = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad m.g = 1$$

$$V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -8x - y = 0 \\ -x - 8z = 0 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -8 \\ 64 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad m.g = 1$$

La matrice (e dunque l'applicazione lineare) non è diagonalizzabile.

9. Scrivere la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Verificare il segno della forma quadratica.

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 + 6xz$$

$$I\lambda - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)\left[(\lambda - 2)(\lambda - 4) - 9\right]$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda - 1)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{40}}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{6 - \sqrt{40}}{2}$$

La forma quadratica è indefinita.