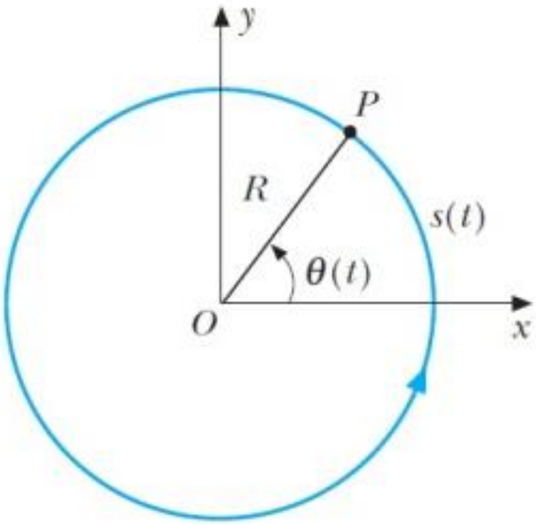
Fisica
per LT Informatica
Università di Ferrara

Lucia Del Bianco

Dip.to di Fisica e Scienze della Terra

Moto circolare



▲ **Figura 1.18** Traiettoria di un moto circolare.

$$\theta(t) = s(t)/R$$

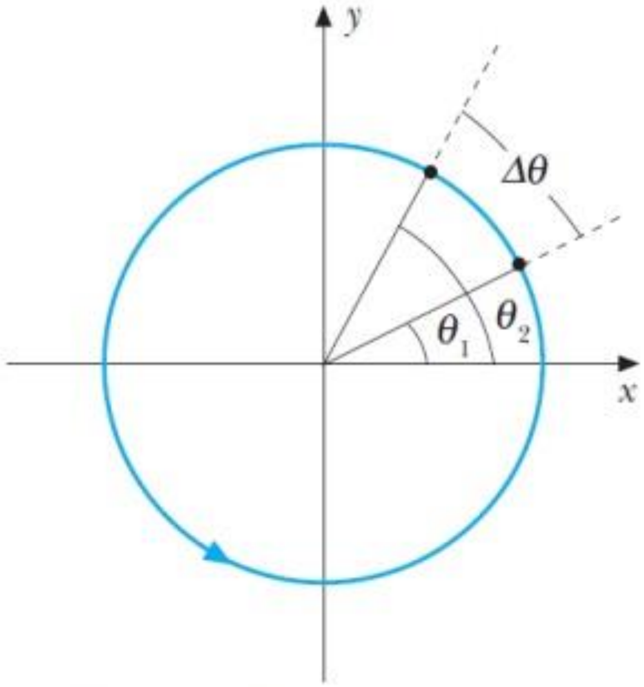
$$r(t) = R \ \ (\text{costante})$$

Coordinate polari

$$x(t) = R\cos\theta(t)$$

$$y(t) = R sen\,\theta(t)$$

Moto circolare



$$t \rightarrow \theta_1$$

$$t + \Delta t \rightarrow \theta_2$$

$$\omega_{media} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

velocità angolare

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

La velocità angolare si misura in rad/s

$$\theta(rad) = \frac{\pi}{180°}\theta(gradi)$$

EdiSES

Moto circolare uniforme

(*v e ω costanti*)

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

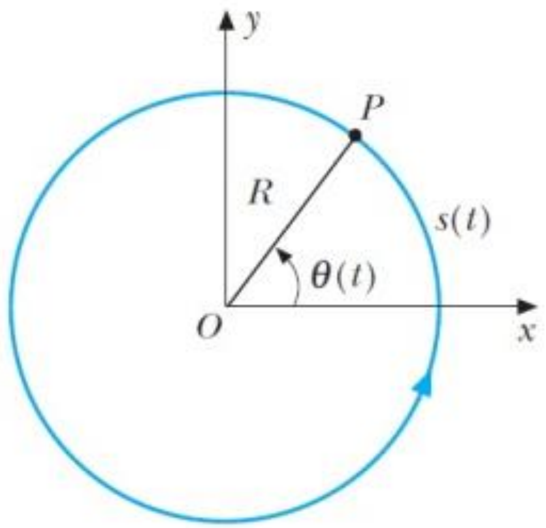
$$\theta = \theta_0$$

$$s = s_0$$

per t = 0

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Accelerazione centripeta (modulo)



▲ **Figura 1.18** Traiettoria di un moto circolare.

Moto circolare non uniforme

$$a_t = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}$$

Accelerazione tangenziale (modulo)

$$\alpha_{media} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

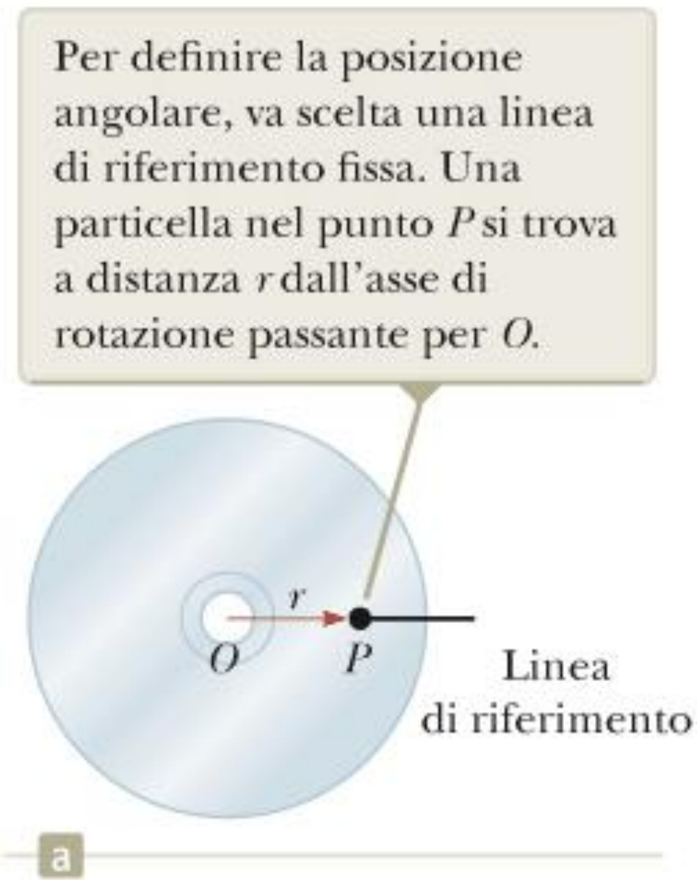
Accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{R}$$

La accelerazione angolare si misura in rad/s^2

Moto rotazionale di corpi rigidi

$$\theta(t) = s(t)\,/\,r$$



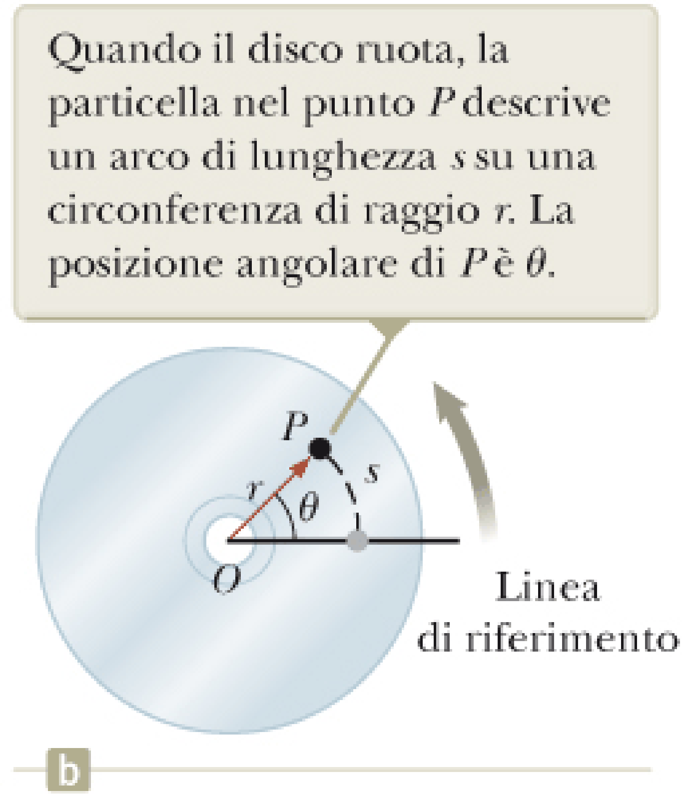


Figura 10.1 Un compact disk in rotazione attorno ad un asse fisso passante per *O* e perpendicolare al piano della figura.

NB: nel trattare problemi di moto rotazionale bisogna sempre specificare l'asse di rotazione

Moto rotazionale di corpi rigidi

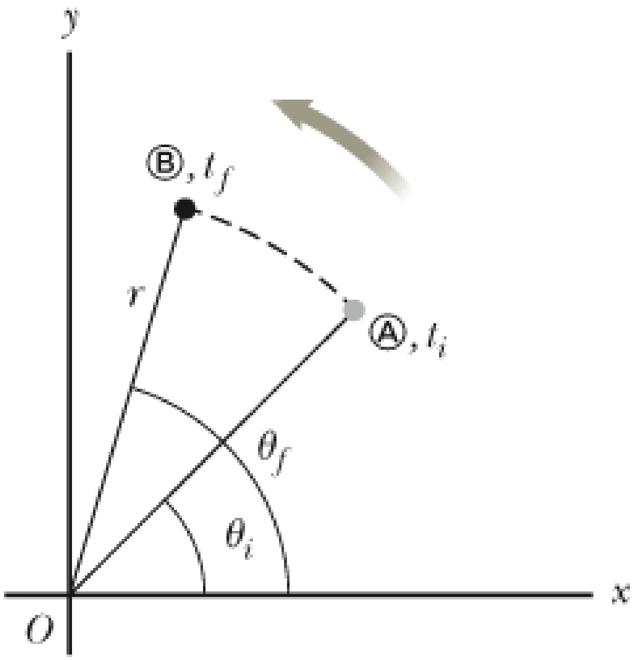


Figura 10.2 Una particella su un corpo rigido in rotazione si muove da Ⓐ a Ⓑ lungo l'arco di una circonferenza. Nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ la linea radiale di lunghezza r spazza un angolo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

Spostamento angolare del corpo rigido

$$\omega_{media} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Velocità angolare

ω è positivo quando θ è crescente (senso antiorario)

ω è negativo quando θ è decrescente (verso orario)

Moto rotazionale di corpi rigidi

$$\alpha_{media} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Accelerazione angolare

La accelerazione angolare si misura in rad/s^2

Moto rotazionale di corpi rigidi

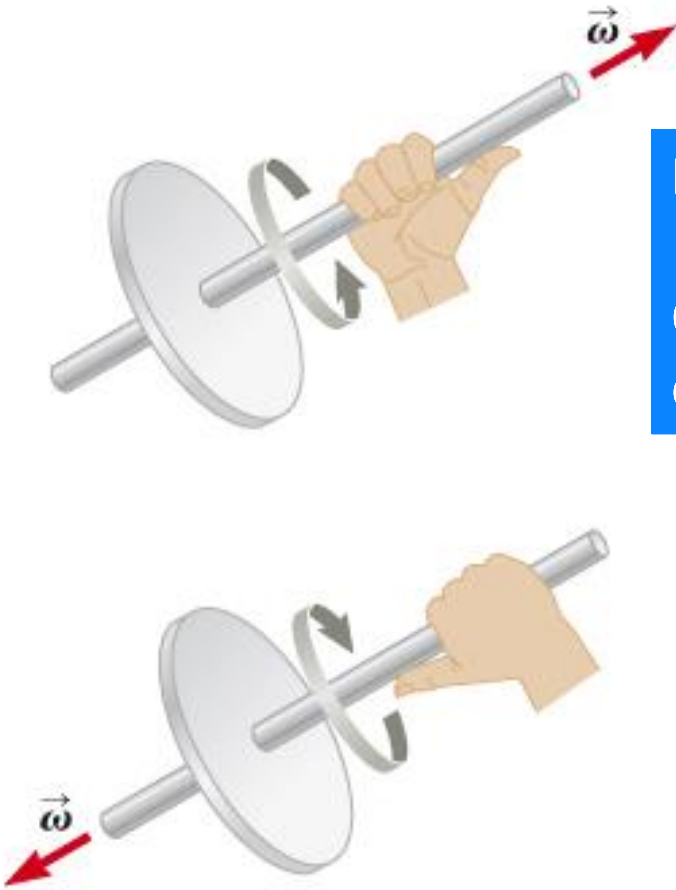


Figura 10.3 La regola della mano destra per determinare la direzione del vettore velocità angolare.

REGOLA DELLA MANO DESTRA:

Quando le quattro dita si avvolgono nel verso della rotazione, il pollice punta nel verso di ω.

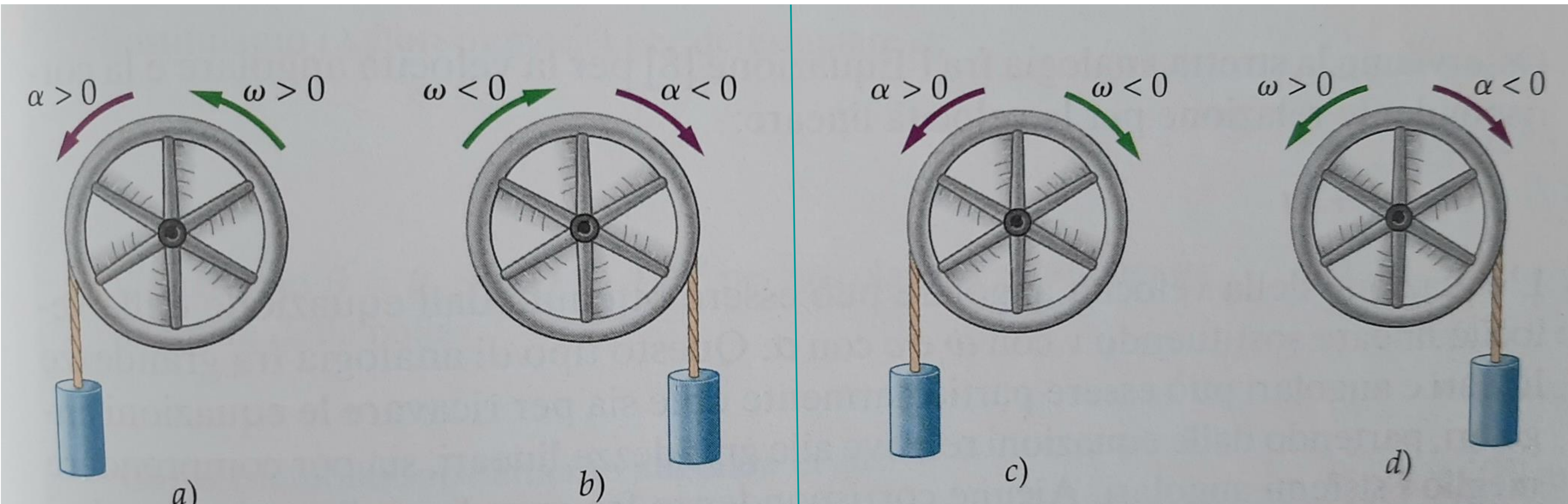
ω è positivo quando θ è crescente (senso antiorario)

ω è negativo quando θ è decrescente (verso orario)

Moto rotazionale di corpi rigidi

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Accelerazione angolare



Quando la velocità angolare e la accelerazione angolare hanno lo **stesso segno, il modulo della velocità angolare aumenta**

Quando la velocità angolare e la accelerazione angolare hanno **segno opposto, il modulo della velocità angolare diminuisce**

Grandezze rotazionali e traslazionali

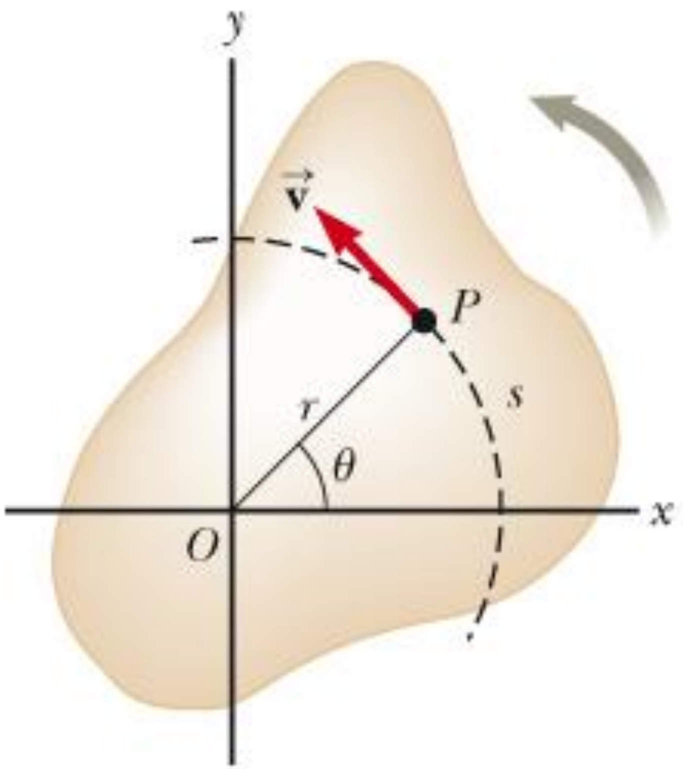


Figura 10.4 Siccome un corpo rigido ruota attorno all'asse fisso passate per O, il punto P ha una velocità $\vec{\mathbf{v}}$ che è sempre tangente alla circonferenza di raggio r.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

modulo velocità traslazionale (o tangenziale)

$$s = r\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$v = r\omega$$

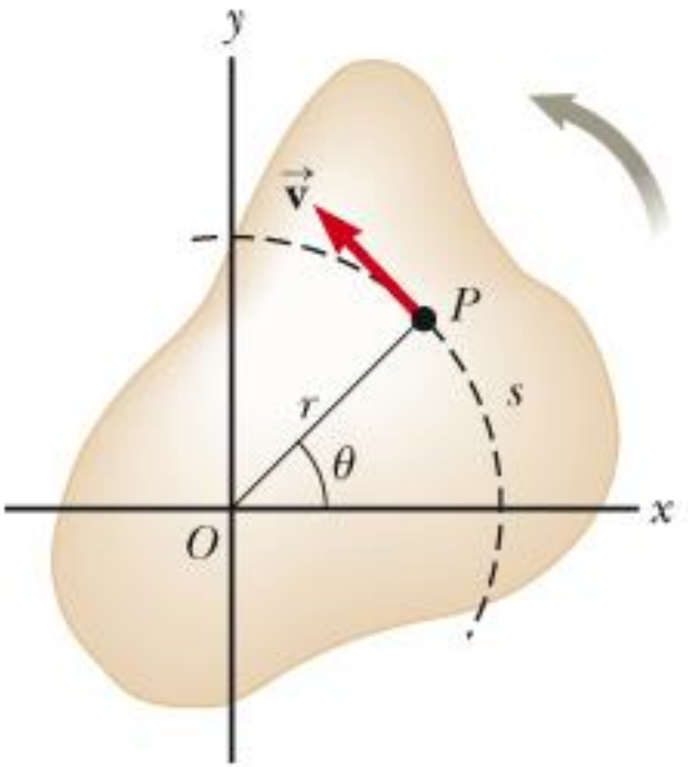
$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

modulo accelerazione tangenziale

$$a_t = r\alpha$$

EdiSES

Grandezze rotazionali e traslazionali



$$v = r\omega$$

Sebbene ciascun punto del corpo rigido ha la stessa ω, non tutti hanno la stessa v.

La v cresce quando ci si allontana dal cento di rotazione.

Grandezze rotazionali e traslazionali

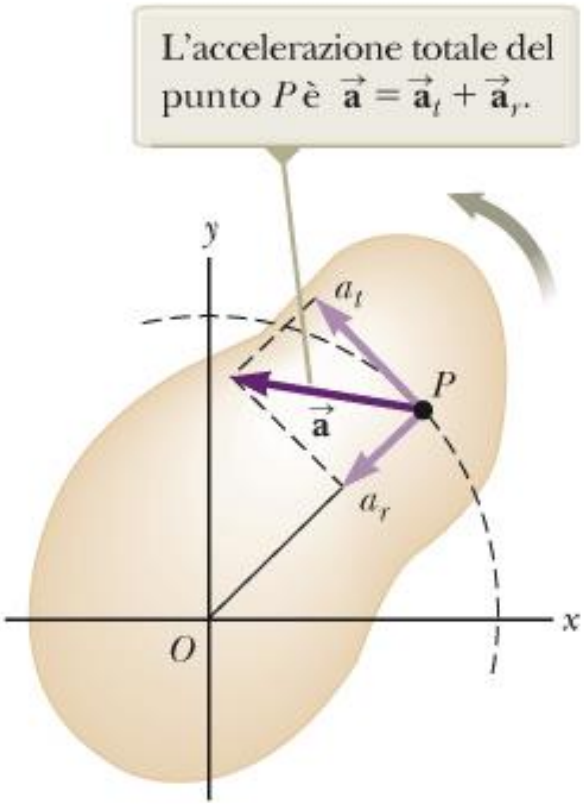


Figura 10.5 Quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso passante per O, il punto P ha una componente tangenziale a_t e radiale a_r dell'accelerazione traslazionale.

$$v = r\omega$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Modulo accelerazione centripeta

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{r_2\alpha_2 + r_2\omega_4} = r\sqrt{\alpha_2 + \omega_4}$$

Moto rotazionale di corpi rigidi

TABELLA 10.1 | Equazioni cinematiche per il moto rotazionale e traslazionale

Corpo rigido soggetto ad accelerazione angolare costante	Punto materiale soggetto ad accelerazione costante
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f{}^2 = \omega_i{}^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f{}^2 = v_i{}^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \; t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

ESERCIZIO

Una ruota è in rotazione con accelerazione angolare costante di 3.5 rad/s^2.

(A) Se la velocità angolare della ruota al tempo t = 0 è 2.00 rad/s, quale spostamento angolare compie la ruota in 2.00 s?

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Sostituiamo i valori noti per trovare lo spostamento angolare al tempo t = 2.00 s:

$$\Delta\theta = (2.00 \text{ rad/s})(2.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s})^2$$
$$= \boxed{11.0 \text{ rad}} = (11.0 \text{ rad})(180°/\pi \text{ rad}) = \boxed{630°}$$

(B) Durante questo intervallo di tempo quante rivoluzioni ha compiuto la ruota?

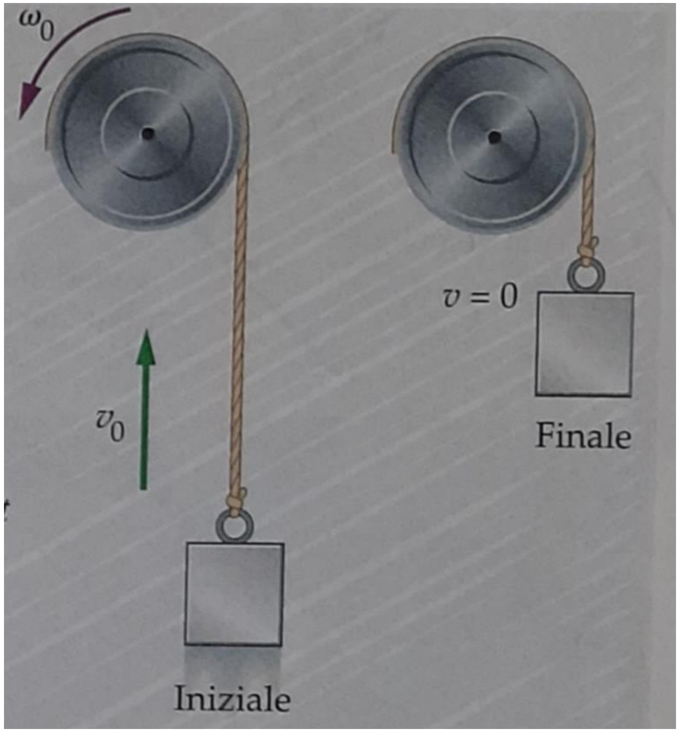
$$\Delta\theta = 630°\left(\frac{1\ \text{rev}}{360°}\right) = \boxed{1.75\ \text{rev}}$$

(C) Qual è la velocità angolare della ruota al tempo t = 2.00 s?

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t = 2.00\ \text{rad/s} + (3.50\ \text{rad/s}^2)(2.00\ \text{s})$$
$$= \boxed{9.00\ \text{rad/s}}$$

EdiSES

ESERCIZIO



A una carrucola che ruota in senso antiorario è collegata una massa sospesa mediante una fune. La massa determina una riduzione della velocità angolare della carrucola con una accelerazione angolare costante α = -2.10 rad/s^2.

Se la velocità iniziale della carrucola è ω_0 = 5.40 rad/s, dopo quanto tempo la carrucola si ferma?
Di quale angolo ruota la carrucola durante questo tempo?

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

$$t = 2{,}57 \text{ s}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 6{,}94 \text{ rad}$$

Osservazioni

Dopo che la carrucola si è fermata, inizia immediatamente a ruotare in senso orario man mano che la massa appesa cade. L'accelerazione angolare della carrucola è costante (ha sempre lo stesso valore sia prima che la carrucola si fermi, sia quando si ferma, sia quando ruota in senso opposto). La situazione è analoga a quella di un proiettile lanciato diritto verso l'alto, per il quale la velocità lineare è dapprima positiva, poi diventa zero e poi cambia segno, mentre l'accelerazione lineare rimane costante.

Energia cinetica rotazionale

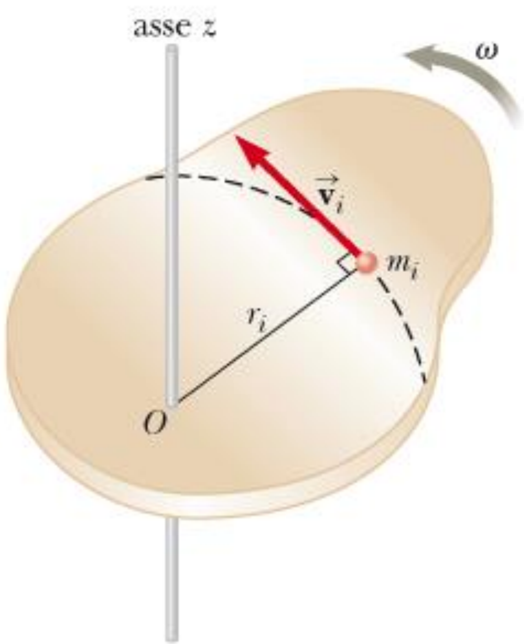


Figura 10.6 Un corpo rigido che ruota intorno all'asse z con velocità angolare ω. L'energia cinetica della particella di massa m_i è $\frac{1}{2}m_i v_i^2$. L'energia cinetica totale del corpo rigido è chiamata energia cinetica rotazionale.

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$K_r = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

Energia cinetica totale di rotazione

$$K_r = \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2) \omega^2$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Momento di inerzia del corpo rigido

[kg m^2]

$$K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Momento d'inerzia

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$$

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

$$K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Energia cinetica rotazionale

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Energia cinetica traslazionale

Il **momento di inerzia I** è una misura della opposizione del corpo alla variazione della sua velocità angolare.

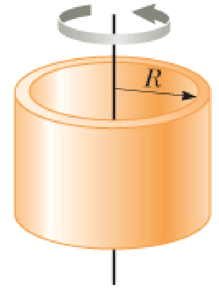
Esso ha un ruolo analogo a quello della massa inerziale nei sistemi traslazionali.

TABELLA 10.2

Momenti di inerzia di corpi rigidi omogenei con differenti geometrie

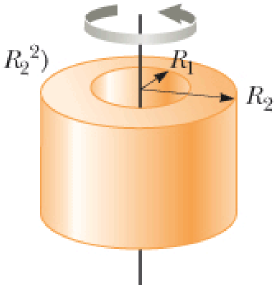
Anello o guscio cilindrico sottile

$I_{CM} = MR^2$



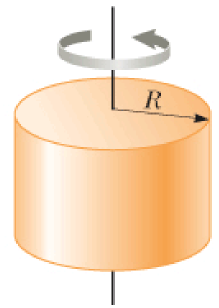
Cilindro cavo

$I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$



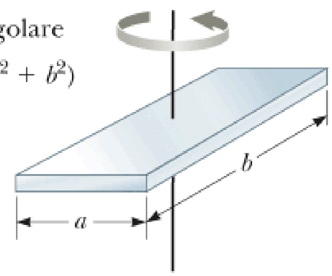
Cilindro pieno o disco

$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$



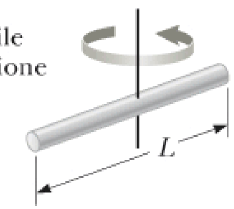
Lastra rettangolare

$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$



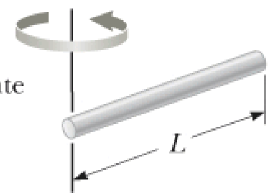
Asta lunga e sottile con asse di rotazione centrale

$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$



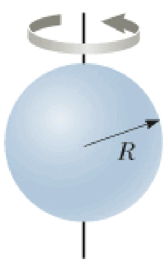
Asta lunga e sottile con asse di rotazione passante per una estremità

$I = \frac{1}{3} ML^2$



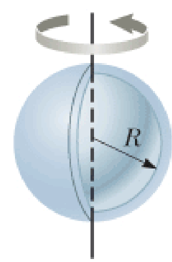
Sfera piena

$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$



Guscio sferico sottile

$I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$



M = massa totale del corpo

Non c'è un unico momento di inerzia, perché esso dipende dalla scelta dell'asse di rotazione (quello di valore minimo si riferisce ad un asse passante per il centro di massa).

Momento di una forza (*o momento torcente*)

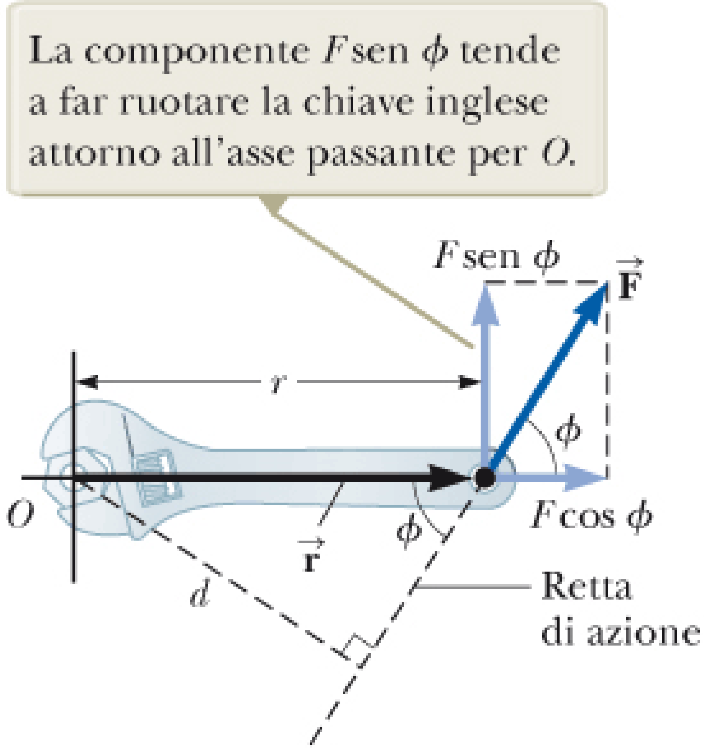


Figura 10.10 Una forza $\vec{F}$ è applicata ad una chiave inglese nel tentativo di svitare un bullone. La forza tende a far ruotare più facilmente la chiave se il modulo F cresce e se il braccio d della forza aumenta.

$$\tau = rF sen\,\phi$$ [N m]

r è il vettore posizione che individua il punto di applicazione della forza **F**

F forma un angolo ϕ rispetto alla direzione del vettore **r**

Il momento è definito solo quando è specificato un asse di riferimento rispetto al quale è definita la distanza r

EdiSES

Momento di una forza

La componente $F\,\mathrm{sen}\,\phi$ tende a far ruotare la chiave inglese attorno all'asse passante per O.

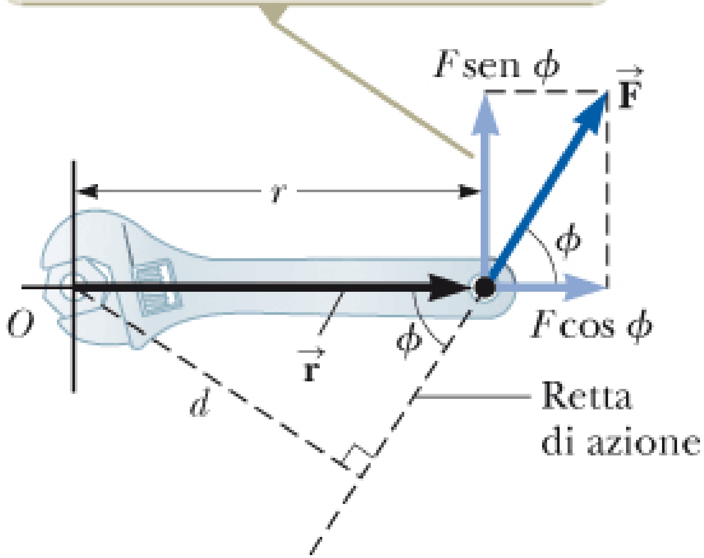


Figura 10.10 Una forza $\vec{F}$ è applicata ad una chiave inglese nel tentativo di svitare un bullone. La forza tende a far ruotare più facilmente la chiave se il modulo F cresce e se il braccio d della forza aumenta.

$$\tau = rF\mathrm{sen}\phi$$ [N m]

$$\tau = r(F\mathrm{sen}\phi)$$

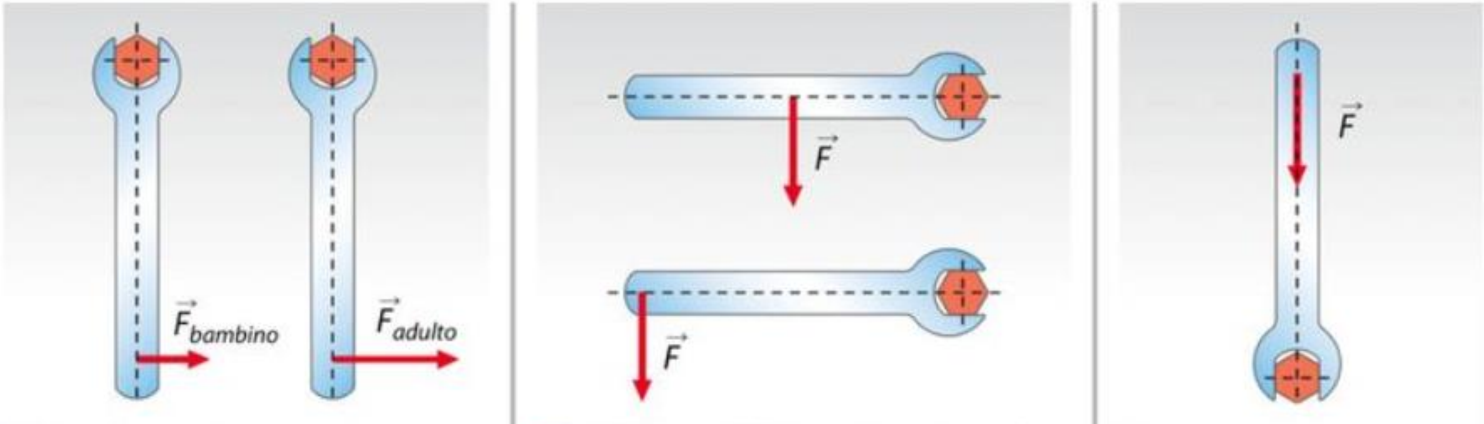
Componente della forza che mette in rotazione il corpo

$$\tau = F(r\mathrm{sen}\phi) = Fd$$

d = braccio della forza (distanza fra l'asse di rotazione e la retta di azione della forza)

Momento di una forza

Gli effetti di una **forza applicata a un corpo rigido** dipendono dalla sua **intensità**, dal **punto di applicazione** e dalla **direzione** della forza



a Una forza più intensa permette di svitare più facilmente il bullone.

b L'effetto della forza dipende anche dalla distanza a cui è applicata rispetto al punto di rotazione.

c Il bullone può anche non ruotare sotto l'azione di una forza.

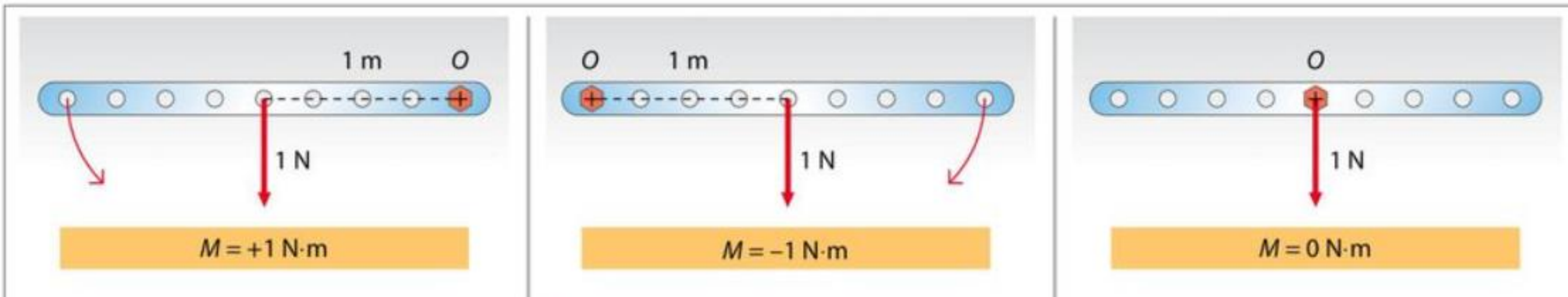
$$\tau = rF sen\phi$$

Momento di una forza

Momento positivo: la forza produce **rotazione antioraria**

Momento negativo: la forza produce **rotazione oraria**

Momento nullo: la forza **non produce rotazione**



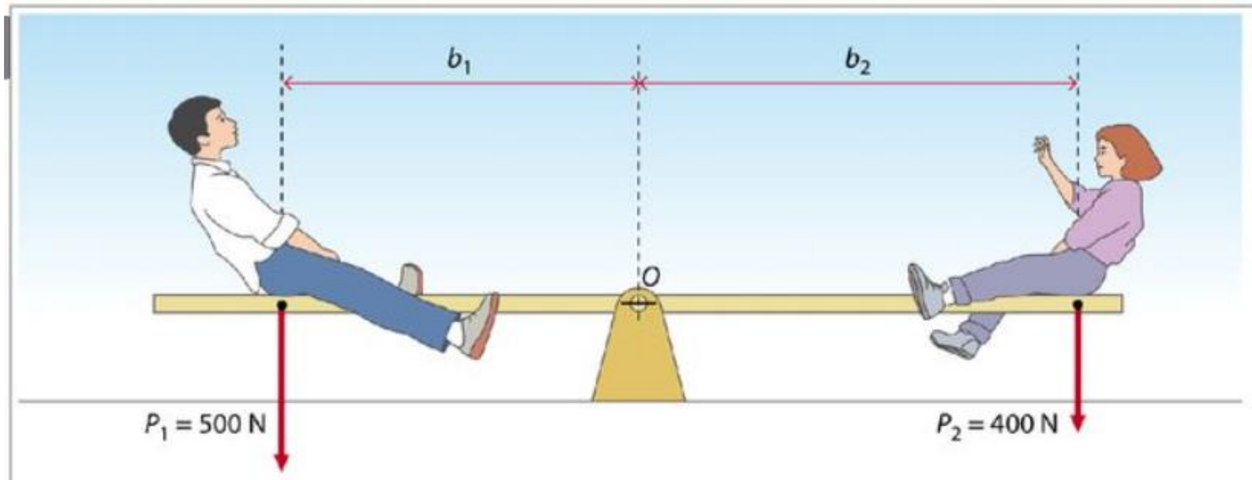
a La forza fa ruotare il righello in senso antiorario; il momento è positivo.

b La forza produce rotazione in senso orario; il momento è negativo.

c La forza non produce rotazione; il momento è zero.

Momento di una forza

Quando un oggetto è in **equilibrio** la **somma algebrica dei momenti di tutte le forze applicate**, calcolati rispetto allo stesso punto, **è uguale a zero**.



L'asta è in equilibrio se i momenti sono uguali e opposti. La bambina ha un peso minore, quindi deve sedere più lontano dal vincolo.

$$P_1 \cdot b_1 = P_2 \cdot b_2$$