Matematica discreta
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti)
   - Determinare la proiezione del vettore $v = i - j + k$ su una retta parallela al vettore $w = i + 2j - k$.
   - I vettori $(2; -1; 3)$ e $(1; 1; 0)$ sono reciprocamente paralleli, perpendicolari o nessuna delle due?

2. (4 punti) Sia $A = \{(x, y, z, t), y = 0, 2z + t = 0\}$, $B = \{(x, y, z, t), x - t = 0, y + z = 0\}$.
   - Calcolare le dimensioni di A e B e determinarne una base.
   - Calcolare la dimensione di $A+B$. Si tratta di una somma diretta? Fornire le motivazioni della conclusione.

3. (4 punti) Determinare al variare di k il rango della matrice:
$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k & k \\ 0 & k & 2 & 2k \\ 1 & k & k & k \end{pmatrix}$$
   Assegnare a k il valore 1 e determinare l'inversa della sottomatrice B data dall'intersezione delle prime tre righe e tre colonne.

4. (4 punti) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quante soluzioni possiede il seguente sistema e, se esistono, quali sono:
$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 1 \\ 2x + y &= 7 \\ 8x + 3y &= k^2 \end{aligned}$$

5. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f((x, y, z)^T) = (x+3y+4z, 2x+y+3z, -x+2y+z)^T$. Trovare la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$ e una base, la dimensione di $\ker(f)$ e una base. Per quali valori di h il vettore $(2, 3, h)^T$ appartiene all'immagine di f? L'applicazione è iniettiva e/o suriettiva?

6. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare definita come $f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + 4x_2 - 9x_3, 4x_1 + 5x_2 - 9x_3, -9x_1 - 9x_2 + 9x_3, x_1 +$

$x_2 + x_3)$. Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica in $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ in $\mathbb{R}^3$. Inoltre determinare la matrice di $\mathbb{R}^3$ associata al cambiamento dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

7. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, 3x_2, 3x_1)$. Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica, gli autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

8. (4 punti) Sia $\mathcal{B} = \{(0,1,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,0,1),(0,0,1,0)\}$ una base di $\mathbb{R}^4$. Costruire a partire da essa una base ortogonale. Costruire una base ortonormale.

9. (4 punti) Sia data la forma quadratica definita da $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_3^2$. Stabilire il segno della forma quadratica.

1. Sia $v = i - j + k = (1, -1, 1)$

Determinare la proiezione di v su una retta parallela a

$w = i + 2j - k = (1, 2, -1)$

$$u = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = \frac{(1 - 2 - 1)}{1 + 4 + 1} w =$$

$$= -\frac{1}{3}(i + 2j - k) = -\frac{1}{3} i - \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k$$

Dati $v = (2, -1, 3)$ e $w = (1, 1, 0)$,

si calcola

$\langle v, w \rangle = 2 - 1 + 0 = 1$ non sono ortogonali

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3i + 3j + k(3) \neq 0$$

non sono paralleli

v e w non sono né ortogonali, né paralleli.

2. $A = \{(x, y, z, t) : y = 0,\ 2z + t = 0\}$

$B = \{(x, y, z, t) : x - t = 0\ \ y + z = 0\}$

$A = \{(x, 0, z, -2z)\} = [(1,0,0,0), (0,0,1,-2)]$

dim $A = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ rango $= 2$

$B = \{(x, y, -y, x)\} = [(1,0,0,1), (0,1,-1,0)]$

dim $B = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ rango $= 2$

$A + B = [(1,0,0,0)\ (0,0,1,-2)\ (1,0,0,1)\ (0,1,-1,0)]$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

rango $= 4$

dim $A+B = 4$ si tratta di <u>somma diretta</u>

Infatti $4 = \dim(A+B) = \dim A + \dim B - \underbrace{\dim(A \cap B)}_{=0} =$
$= 2+2$

3. Determinare al variare di K il rango di

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & K & K \\ 0 & K & 2 & 2K \\ 1 & K & K & K \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k & k \\ \boxed{0} & k & \boxed{2} & 2k \\ \boxed{1} & k & \boxed{k} & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \forall k$$

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 2 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k & 2 \\ k & k \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & k \\ 1 & k \end{vmatrix} = k(k^2-2k) - k^2$$

$$= k^3 - 2k^2 - k^2 =$$

$$= k^2(k-3)$$

$k \neq 0 \quad k \neq 3$

~~rango~~ det. è non nullo

$$\begin{vmatrix} k & k & k \\ 0 & 2 & 2k \\ 1 & k & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 2 & 2k \\ k & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & k \\ 2 & 2k \end{vmatrix} = k(2k-2k^2) + 2k^2 - 2k$$

$$= 2k^2 - 2k^3 + 2k^2 - 2k$$

$$= -2k^3 + 4k^2 - 2k =$$

$$= -2k(k^2 - 2k + 1) =$$

$$= -2k(k-1)^2$$

$k \neq 0 \quad k \neq 1$

Per $k \neq 0$, rango $A = 3$.

Per $k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rango } A = 2$$

Assegnare a k il valore 1 e trovare l'inverso di B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det B = -2$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix} -1 & +2 & -1 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Determinare al variare di K quante soluzioni possiede il seguente sistema e, se esistono, quali sono:

$$
\begin{cases}
5x - 3y = 1 \\
2x + y = 7 \\
8x + 3y = k^2
\end{cases}
$$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ rango $A = 2$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11 \neq 0$

$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & k^2 \end{pmatrix}$

$\det(A \mid b) = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & k^2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & k^2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 8 & k^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$

$= 5(k^2 - 21) + 3(2k^2 - 56) + 6 - 8 =$

$= 5k^2 - 105 + 6k^2 - 168 - 2 =$

$= 11k^2 - 275 = 11(k^2 - 25)$

Per $K = \pm 5$, $\det(A \mid b) = 0$ rango $A = \underset{2}{\text{rango}(A \mid b)}$

Per $K \neq \pm 5$, rango $A \neq$ rango$(A \mid b)$ sistema impossibile.

Nel caso di $K = \pm 5$, occorre risolvere

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{1+21}{11} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{11} = \frac{35-2}{11} = 3$$

Soluzione unica $(2,3)$

5. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+3y+4z \\ 2x+y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-6) - 3(2+3) + 4 \cdot (4+1)$$

$$= -5 - 15 + 20 = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(A) = 2$

$\dim \mathrm{Im} f = 2 \qquad$ Base $\mathrm{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$

base di $\mathrm{Ker} f$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x+3y+4z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} x=-z \\ y=-z \end{matrix} \right\}$

base $\mathrm{Ker} f = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'applicazione non è iniettiva ($\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$) e non è suriettiva ($\dim \mathrm{Im} f \neq 3$).

Per quali valori di h, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f$?

Occorre $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & h \end{pmatrix} = 0 \quad$ ossia $h = -1$

6.e $\quad f: R^3 \longrightarrow R^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5x_1 + 4x_2 - 9x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 9x_3 \\ -9x_1 - 9x_2 + 9x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & +9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vuole $M_C^B(f)$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_C^B(f) = M_C^C(f)\, M_C^B(i_{R^3}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_C^B(i_{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 14 & 13 \\ 9 & 13 & 14 \\ -18 & -18 & -18 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. $f: R^3 \longrightarrow R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 3x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda (\lambda - 3)^2$$

$\lambda = 0 \quad m.a = 1$

$\lambda = 3 \quad m.a = 2$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} -3x_1 - x_2 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ -3x_1 = 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad m.g = 1$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\} = \{ x_2 = 0 , x_1 = x_3 \} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$m.g = 1$

La matrice non è diagonalizzabile

8. $B = \{(0,1,0,1), (2,1,0,1), (-1,0,0,1), (0,0,1,0)\}$

$$v_1' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \langle v_1', v_1'\rangle = 2$$

$$v_2' = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \langle v_2', v_2'\rangle = 4$$

$$v_3' = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{-\cancel{2}\,1}{\cancel{4}\,2}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+1\\0-\frac{1}{2}\\0\\1-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\langle v_3', v_3'\rangle = \frac{1}{2}$$

$$v_4' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{0}{4}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$B' = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$B'' = \left\{\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

9. $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+4) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+5 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+4) \left[\lambda^2 + 5 + 6\lambda - 4 \right] =$$

$$= (\lambda+4)(\lambda^2 + 6\lambda + 1) =$$

$$= (\lambda+4)$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$= -3 \pm 2\sqrt{2}$$

$\lambda = -4$

$\lambda = -3 - 2\sqrt{2}$

$\lambda = -3 + 2\sqrt{2}$

forma quadratica definita negativa