Esercizi svolti su probabilità condizionata e teorema di Bayes

Esercizio 1

Si stima che il 30% degli adulti negli Stati Uniti siano obesi, che il 3% siano diabetici e che il 2% siano sia obesi che diabetici. Determina la probabilità che un individuo scelto casualmente

1. sia diabetico se è obeso;
2. sia obeso se è diabetico.

Soluzione

Indichiamo con O e D i seguenti eventi:

O="un individuo scelto casualmente sia obeso";

D="un individuo scelto casualmente sia di diabetico".

Il testo ci dice che $P(O) = 0.30$, $P(D) = 0.03$ e $P(O \cap D) = 0.02$.

1. Il quesito chiede la probabilità che il soggetto sia diabetico *dato* che è obeso, ossia $P(D|O)$; applicando la regola della probabilità condizionata si ha
$$P(D|O) = \frac{P(D \cap O)}{P(O)} = \frac{0.02}{0.3} = 0.067$$
2. Il quesito chiede la probabilità che il soggetto sia obeso *dato* che è diabetico, ossia $P(O|D)$; applicando la regola della probabilità condizionata si ha
$$P(O|D) = \frac{P(D \cap O)}{P(D)} = \frac{0.02}{0.03} = 0.667$$

Esercizio 2

A un esame universitario si presentano sia studenti che hanno seguito il corso sia studenti che non l'hanno seguito. Il docente ritiene che il 65% degli studenti abbiano seguito il corso. La probabilità che uno studente superi l'esame dato che ha seguito il corso è 0.75, mentre la probabilità che uno studente superi l'esame dato che non ha seguito il corso è 0.40.

- Qual è la probabilità che uno studente superi l'esame?
- Qual è la probabilità che uno studente abbia seguito il corso dato che ha superato l'esame?

Soluzione

Indichiamo con A e B gli eventi:

A="lo studente supera l'esame";

B="lo studente ha seguito il corso"

1. Dall'informazione fornita dal docente "il 65% degli studenti hanno seguito il corso", approssimando la probabilità con la frequenza relativa, si ha P(B) = 0.65 e applicando il primo teorema del calcolo delle probabilità si ottiene:

   $$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

   e inoltre $P(A|B) = 0.75$ e $P(A|\bar{B}) = 0.40$. L'evento A può essere rappresentato come l'unione di due eventi incompatibili $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$; pertanto

   $$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

   dove

   - $P(A \cap B) = P(A|B) * P(B) = 0.75 * 0.65 = 0.4875$
   - $P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B}) * P(\bar{B}) = 0.40 * 0.35 = 0.1400$

   Pertanto $P(A) = 0.4875 + 0.1400 = 0.6275$

2. La probabilità richiesta è

   $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4875}{0.6275} = 0.7769$$

Esercizio 3

Ad una certa conferenza, partecipano 30 psichiatri e 24 psicologi. Due di queste 54 persone vengono scelte casualmente per fare parte di una commissione. Qual è la probabilità che venga scelto almeno uno psicologo?

Soluzione
Siano A e B gli eventi

A="il soggetto scelto è uno psicologo"

B="il soggetto scelto è uno psichiatra"

Vogliamo calcolare la probabilità che su 2 soggetti estratti almeno uno sia uno psicologo. Possiamo adottare 2 possibili strategie.

Strategia 1: l'evento "estraggo almeno 1 psicologo" è complementare all'evento "non estraggo alcun psicologo". Pertanto Pr("almeno 1 sia uno psicologo")=1-Pr("nessuno psicologo")=1-Pr("2 psichiatra"). Sia B_1 l'evento "seleziono uno psichiatra alla prima selezione" e B_2 l'evento "seleziono uno psichiatra alla seconda selezione". La probabilità richiesta è pertanto pari a :

$$1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - P(B_1)P(B_2|B_1) = 1 - \frac{30}{54}\frac{29}{53} = 0.6960$$

Strategia 2: equivalentemente questa probabilità poteva essere calcolata come probabilità dell'unione dei seguenti eventi:

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)$$

ossia

$$P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)) = P((A_1 \cap A_2)) + P((A_1 \cap B_2)) + P((B_1 \cap A_2)) = 0.6960$$

poichè

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{24}{54}\frac{23}{53} = 0.1929$
- $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{24}{54}\frac{30}{53} = 0.2516$
- $P(B_1 \cap A_2) = P(B_1)P(A_2|B_1) = \frac{30}{54}\frac{24}{53} = 0.2516$

Esercizio 4

Su un tavolo ci sono 2 monete. Qaudno vengono lanciate, una moneta da' testa con probabilità 0.5 mentre l'altra da' testa con probabilità 0.6. Una moneta viene scelta a caso e lanciata.

1. Qual è la probabilità che esca testa?
2. Se esce croce, qual è la probabilità che fosse la moneta equilibrata?

Soluzione
Siano

M_1=la moneta scelta è la moneta 1

M_2=la moneta scelta è la moneta 2

Il testo afferma che $P(T|M_1) = 0.5$ e $P(T|M_2) = 0.6$.

1. $P(T) = P(T|M_1)P(M_1) + P(T|M_2)P(M_2) = 0.5*0.5+0.5*0.6 = 0.55$
2. Si vuole calcolare la probabilità che essendo uscita croce sia stata estratta la moneta 1; applicando il teorema di Bayes

$$P(M_1|C) = \frac{P(C|M_1)P(M_1)}{P(C|M_1)P(M_1) + P(C|M_2) * P(M_2)} = \frac{0.5 * 0.5}{(0.5 * 0.5) + (0.5 * 0.4)} = 0.55$$

Esercizio 5

Tra i partecipanti ad un concorso per giovani compositori il 50% suona il pianoforte, il 30% suona il violino e il 20% la chitarra. Partecipano ad un concorso per la prima volta il 10% dei pianisti, il 33% dei violinisti e il 10% dei chitarristi. Applicando i concetti di probabilita' condizionata e il teorema di Bayes, rispondere alle seguenti domande.

1. Qual è la percentuale di aspiranti compositori alla prima esperienza?
2. Sapendo che ad esibirsi per primo sarà un compositore alla prima esperienza, qual è la probabilità che sia un chitarrista?

Soluzione
Siano:

A = Aspiranti compositori alla prima esperianza

B = Pianisti

C = Violinisti

D = Chitarristi

abbiamo

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap S) = P(A \cap (B \cup C \cup D)) \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) \\
&= P(A|B) + P(B) + P(A|C)P(C) + P(A|D)P(D) \\
&= 0.1 \cdot 0.5 + 0.33 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.17
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda il secondo quesito abbiamo:

$$
\begin{aligned}
P(D|A) &= \frac{P(D \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|D)P(D)}{P(A)} = \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.17} = 0.12
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

Un esame del sangue riconosce una certa malattia nel 99% dei casi quando essa è in atto. Tuttavia, l'esame fornisce un *falso positivo* (esito positivo quando la malattia non è in atto) nel 2% dei pazienti. Supponiamo che 0.5% della popolazione abbia la malattia. Quale è la probabilità che una persona scelta a caso abbia effettivamente la malattia se il test è positivo?

Soluzione
Indichiamo rispettivamente con D ed E gli eventi

D = *un soggetto estratto casualmente ha la malattia*

E= *il test è positivo*

Il testo ci dice che il test è affidabile al 99%, ossia fornisce un esito positivo quando il soggetto è effettivamente malato. Ciò significa che

$$P(E|D) = 0.99$$

Tuttavia, l'esame fornisce un *falso postivo* nel 2% dei casi, ossia

$$P(E|D^c) = 0.02$$

Sapendo che P(D)=0.005, per determinare $P(D|E)$ possiamo utilizzare il Teorema di Bayes come segue:

$$P(D|E) = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995} = 0.199$$

Risulta quindi che una persona scelta a caso che ottiene risultato positivo al test ha una probabilità del 20% di avere effettivamente la malattia.

I calcoli precedentemente svolti ci dicono anche che la probabilità che il test dia un risultato positivo è $P(E) = P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c) = 0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995 = 0.02485$ e quindi la probabilità che il test dia un risutato negativo è $P(E^c) = 1 - 0.02485 = 0.97515$.

La probabilità che una persona scelta a caso che ottiene un risultato negativo al test sia di fatto malata è

$$P(D|E^c) = \frac{P(E^c|D)P(D)}{P(E^c|D)P(D) + P(E^c|D^c)P(D^c)} = \frac{(1 - 0.99) \cdot 0.005}{0.97515} = \frac{1}{19503}$$

che è un numero confortante.

Valutare che cosa succede delle due probabilità scritte precedentemente quando $P(E|D) < 0.99$ o la prevalenza della malattia nella popolazione $(P(D))$è superiore allo 0.5 %.