Esercizio

Si consideri l'insieme delle successioni di numeri reali S_R. Una successione di numeri reali è una applicazione

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $s(n) = a_n$, con $a_n \in R$

Si indica con $\{a_n\}$ tale successione.

Esempio:

$$n \longrightarrow 2^n$$

Nell'insieme S_R si definiscono le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare reale:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

$$c\,\{a_n\} = \{c\,a_n\} \qquad c \in R$$

Es.

$$\{2^n\} + \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{2^n + \frac{1}{n}\right\}$$

$$3 \cdot \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{\frac{3}{n}\right\}$$

Dimostrare che con tali operazioni S_R è uno spazio vettoriale su R.

Si osserva che entrambe le operazioni sono ben definite, ossia forniscono un risultato che appartiene a S_R.
Si dice anche che S_R è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
Per dimostrare che S_R è uno spazio vettoriale su R rispetto a tali operazioni occorre mostrare che valgono gli otto assiomi.

1. $\left(\{a_n\} + \{b_n\}\right) + \{c_n\} \overset{?}{=} \{a_n\} + \left(\{b_n\} + \{c_n\}\right)$

Sia dato

$$\left(\underbrace{\{a_n\} + \{b_n\}}_{=\{a_n+b_n\}}\right) + \{c_n\} = \{a_n + b_n\} + \{c_n\} =$$

$$= \{(a_n + b_n) + c_n\} \overset{\substack{\text{associativa della } + \\ \text{di reali}}}{=} \{a_n + (b_n + c_n)\} =$$

$$= \{a_n\} + \underbrace{\{b_n + c_n\}}_{=\{b_n\}+\{c_n\}} = \{a_n\} + \left(\{b_n\} + \{c_n\}\right)$$

E' verificata la associativa della somma

2. $\exists$ una successione

$$n \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

tale che

$$\{a_n\} + \{0\} = \{a_n + 0\} = \{a_n\}$$

$\{0\}$ è elemento neutro della somma

3. $\forall \{a_n\}$, $\exists$ una successione $\{b_n\}$ tale che $\{a_n\} + \{b_n\} = \{0\}$

Si pone $\quad n \longrightarrow -a_n = b_n$

Allora

$$\{a_n\} + \{-a_n\} = \{a_n - a_n\} = \{0\}$$

Esiste l'opposto rispetto alla somma di ogni successione.

4. $\{a_n\} + \{b_n\} \stackrel{?}{=} \{b_n\} + \{a_n\}$

Sia dato

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \overset{\text{per la commutativa della somma di reali}}{=}$$

$$= \{b_n + a_n\} = \{b_n\} + \{a_n\}$$

Verificata la commutativa della somma.

(5) $(\alpha+\beta)\{a_n\} \overset{?}{=} \{\alpha a_n\} + \{\beta a_n\} \quad , \alpha, \beta \in R$

$= \alpha\{a_n\} + \beta\{a_n\}$

Infatti

$(\alpha+\beta)\{a_n\} = \{(\alpha+\beta)a_n\} \overset{\text{distributiva di + per } R}{=} \{\alpha a_n + \beta a_n\} =$

$= \{\alpha a_n\} + \{\beta a_n\} = \alpha\{a_n\} + \beta\{a_n\}$

(6) $\alpha(\{a_n\} + \{b_n\}) \overset{?}{=} \{\alpha a_n + \alpha b_n\} = \alpha\{a_n\} + \alpha\{b_n\}$

$\alpha(\{a_n\} + \{b_n\}) = \alpha\{a_n + b_n\} = \{\alpha(a_n + b_n)\}$

distributiva di + per R

$= \{\alpha a_n + \alpha b_n\} = \{\alpha a_n\} + \{\alpha b_n\} =$

$= \alpha\{a_n\} + \alpha\{b_n\}$

(7) $(\alpha\beta)\{a_n\} \overset{?}{=} \alpha(\beta\{a_n\}) \qquad \alpha, \beta \in R$

$(\alpha\beta)\{a_n\} = \{(\alpha\beta)a_n\} = \{\alpha(\beta a_n)\} = \alpha\{\beta a_n\}$

$= \alpha(\beta\{a_n\})$

(8) $1 \cdot \{a_n\} \overset{?}{=} \{a_n\}$

$1\{a_n\} = \{1 \cdot a_n\} = \{a_n\}$

Esercizio 1. Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi:

(a) $W = \{(x,y) \in R^2 : 2x - 2y + 1 = 0\}$

non è un sottospazio perché $(0,0) \notin W$

(b) $W = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 - 4x = 0\}$

non è un sottospazio:

se $(x,y) \in W$, ossia $x^2 + y^2 - 4x = 0$

allora $\underline{4x = x^2 + y^2}$.

Tuttavia $c(x,y) \notin W$ per $c \in R$ qualsiasi

$$(cx)^2 + (cy)^2 - 4cx = c\left[cx^2 + cy^2 - 4x\right]$$
$$= c\left[cx^2 + cy^2 - x^2 - y^2\right] \neq 0$$

per $c \neq 1$

Non vale che W è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

(c) $W = \{(x,y) \in R^2 : 2x - 7y = 0\}$

$W \sqsubseteq R^2$

Infatti $W = \{(x,y) \in R^2 : 2x = 7y\}$;

• $(0,0) \in W$ perche $2 \cdot 0 = 7 \cdot 0$

• $(x_1, y_1) \in W$, $(x_2, y_2) \in W$, ossia $2x_1 = 7y_1$ e $2x_2 = 7y_2$

$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

è tale che $2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 = 7y_1 + 7y_2 = 7(y_1 + y_2)$

$\Rightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2) \in W$

Infine per $c \in R$, $(x_1, y_1) \in W$, $2x_1 = 7y_1$

allora

$$c(x_1, y_1) = (cx_1, cy_1)$$

è tale che

$$2cx_1 = c(2x_1) = c(7y_1) = 7(cy_1)$$

$\Rightarrow (cx_1, cy_1) \in W$

W è un sottospazio.

(d) $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x - y + 3z = 0\}$ è un sottospazio (esercizio)

(e) $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - 3z = 0, 2x - 4y + 5z + 1 = 0\}$

non è un sottospazio

$(0,0,0) \notin W$

(f) $W = \{(x, y, z) \in R^3 : 2x - y + 4z = 0, x + 2y - z = 0\}$

$= \{(x, y, z) \in R^3 : y = 2x + 4z, 0 = x + 4x + \cancel{8z - z}$
$0 = 5x + 7z$

$= \{(x, y, z) \in R^3 : x = -\frac{7}{5}z, y = \frac{6}{5}z\}$

$= \{(x, y, z) \in R^3 : x = -\frac{7}{5}z, y = \frac{6}{5}z\} =$

$$W = \left\{ \left(-\frac{7}{5}z, \frac{6}{5}z, z\right) \in R^3 \right\}$$

$(0,0,0) \in W$

Dati $\left(-\frac{7}{5}z_1, \frac{6}{5}z_1, z_1\right), \left(-\frac{7}{5}z_2, \frac{6}{5}z_2, z_2\right) \in W$

$$\left(-\frac{7}{5}z_1, \frac{6}{5}z_1, z_1\right) + \left(-\frac{7}{5}z_2, \frac{6}{5}z_2, z_2\right) =$$

$$= \left(-\frac{7}{5}z_1 - \frac{7}{5}z_2, \frac{6}{5}z_1 + \frac{6}{5}z_2, z_1 + z_2\right)$$

$$= \left(-\frac{7}{5}(z_1+z_2), \frac{6}{5}(z_1+z_2), z_1+z_2\right) \in W$$

Dato $c \in R$ ~~si~~ ha che

$$c\left(-\frac{7}{5}z_1, \frac{6}{5}z_1, z_1\right) = \left(-\frac{7}{5}(cz_1), \frac{6}{5}(cz_1), cz_1\right) \in W$$

W è un sottospazio.

(9) $W = \left\{ (x,y,z) \in R^3 : (2x-y+4z)^2 + (x+2y-z)^2 = 0 \right\}$

$= \left\{ (x,y,z) \in R^3 : 2x-y+4z=0 \; ; \; (x+2y-z)=0 \right\}$

$= \left\{ (x,y,z) \in R^3 : x = -\frac{7}{5}z \; , \; y = \frac{6}{5}z \right\}$

W è un sottospazio (caso (f))

Esercizio. 40.

Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di R^3 sono sottospazi vettoriali:

(a) $\{(0,0,0)\}$: è un sottospazio

(b) $\{(t,t,t) : 0 < t < 1\}$ non è un sottospazio

$(0,0,0) \notin$ al sottoinsieme

(c) $\{(x,0,0),\ x \neq 0\}$ non è un sottospazio

$(0,0,0) \notin$ al sottoinsieme

(d) $\{(t,t,t) : 0 \leq t \leq 1\}$ non è un sottospazio perché non è chiuso rispetto alle operazioni

$(1,1,1) + (1,1,1) = (2,2,2) \notin$ al sottoinsieme

(e) $R^3 - \{(0,0,1)\alpha\}$, $\alpha \neq 0$

non è un sottospazio

$(2,3,1)+(-2,-3,1)=(0,0,2)$ non appartiene all'insieme!

(f) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$ non è un sottospazio perché $(0,0,0)$ non appartiene all'insieme

(g) $\{(t,1,t) : t \in R\}$ non è un sottospazio perché $(0,0,0)$ non appartiene all'insieme

(c) $\{(x,y,z) : x+y-5z=0 \,,\, 2(x+y)=0\}$

$= \{(x,y,z) : x=-y \,;\, z=0\}$

$= \{(-y,y,0)\}$

E' un sottospazio.

Infatti presi $(-y_1,y_1,0)$, $(-y_2,y_2,0)$ e $c \in R$

$c(-y_1,y_1,0) - (-y_2,y_2,0)$

$= (-cy_1+y_2, cy_1-y_2, 0)$

$= (-(cy_1-y_2), cy_1-y_2, 0)$

e questa terna appartiene all'insieme.

Per la II caratterizzazione il sottoinsieme è un sottospazio di R^3

37. Sia $W \subseteq S_R$ t.c. una successione $\{a_n\} \in W$ se e solo se $\{a_n\} \leq L \quad \forall n \in N$ per uno scalare L. ($\{a_n\}$ è una successione limitat[a])

Si può dimostrare che W è un sottospazi[o]

I forma

① $\{0\} \in W$; infatti 0 è limitato

② Siano $\{a_n\}, \{b_n\} \in W$, allora esistono L_a e L_b t.c.

$a_n \leq L_a$ e $b_n \leq L_b \quad \forall n$

$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

è t.c. $a_n + b_n \leq L_a + L_b$

$\Rightarrow \{a_n + b_n\} \in W$

③ $\alpha \{a_n\}$ con $\{a_n\} \in W$ t.c. $a_n \leq L_a \ \forall n$

$\Rightarrow \alpha a_n \leq \alpha L_a \quad \forall n$

$\Rightarrow \{\alpha a_n\} \in W \qquad \Rightarrow W \sqsubseteq S_R$

21. Sia $U = \{(x, y, 0) \in R^3, x, y \in R\}$

$V = \{(x, 0, x) \in R^3, x \in R\}$

Dimostrare che sono sottospazi, trovare l'intersezione e stabilire che è un sottospazio

Siano $u_1 = (x_1, y_1, 0)$, $u_2 = (x_2, y_2, 0) \in U$

$\Rightarrow \quad cu_1 - u_2 = c(x_1, y_1, 0) - (x_2, y_2, 0)$

$= (cx_1 - x_2, cy_1 - y_2, 0) \in U$

Siano $v_1 = (x_1, 0, x_1)$ e $v_2 = (x_2, 0, x_2) \in V$

$\Rightarrow \quad cv_1 - v_2 = c(x_1, 0, x_1) - (x_2, 0, x_2)$

$= (cx_1 - x_2, 0, cx_1 - x_2) \in V$

$U \cap V = \{(x, y, z) \in R^3 : \; z = 0, \; x = z, \; y = 0\}$

$= \{(0, 0, 0)\}$

Se $W = \{(x, 0, z) \in R^3 : x, z \in R\}$

$U \cap W = \{(x, y, z) \in R^3 : \; z = 0, \; y = 0\}$

$= \{(x, 0, 0)\}$

22. Sia $U = \{(x, y, 0) \in R^3 : x, y \in R\}$

$W = \{(x, x, x) \in R^3 : x \in R\}$

W è sottospazio:

presi $w_1 = (x_1, x_1, x_1)$ e $w_2 = (x_2, x_2, x_2) \in W$

$$c w_1 - w_2 = c(x_1\ x_1\ x_1) - (x_2\ x_2\ x_2) =$$
$$= (cx_1 - x_2,\ cx_1 - x_2,\ cx_1 - x_2) \in W$$

$$U \cap W = \{(x, y, z) \in R^3 : x = y = z,\ z = 0\}$$
$$= \{(0, 0, 0)\}$$

13. Dire se le seguenti affermazioni sono vere.

(a) $\mathbb{R}^2 \sqsubseteq \mathbb{R}^3$

Non è vero: gli elementi di $\mathbb{R}^2$ sono (x, y) coppie mentre gli elementi di $\mathbb{R}^3$ sono terne (x, y, z).

(b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

Non è vero.

Non è un insieme chiuso rispetto alle operazioni.

$(-3, -2) \in W$, $(4, 0) \in W$

ma $(-3, -2) + (4, 0) = (1, -2) \notin W$

$1 \cdot (-2) < 0$

(c) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

Non è vero.

W non è chiuso rispetto al prodotto.

$(3, 2) \in W$, ma $c(3, 2)$ con $c < 0$ non appartiene a W.

(d) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 0\} \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

Vero.

$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y = 0\} = \{(0, 0)\}$

W è il sottospazio banale di $\mathbb{R}^2$ costituito dal solo vettore nullo

(e) =

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y+3z)^2 + (2x-y+z)^2 = 0\}$

$\subseteq \mathbb{R}^3$

Vero:

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+3z = 0 \,;\, 2x-y+z=0\}$

è un sottospazio (si veda esercizio precedente)

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3z \,,\, y = 5z\}$

$= \{(2z, 5z, z)\}$

$(0,0,0) \in W$

$(2z_1, 5z_1, z_1)$ e $(2z_2, 5z_2, z_2) \in W \quad c \in \mathbb{R}$

$c\,(2z_1, 5z_1, z_1) - (2z_2, 5z_2, z_2)$

$= (2(cz_1 - z_2), 5(cz_1 - z_2), cz_1 - z_2) \in W$

(f) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Non è vero.

W non è chiuso rispetto al prodotto.

$-2\,(1, 2, 3) = (-2, -4, -6) \notin W$

(g) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Non è vero.

W non è chiuso rispetto alle operazioni.

Se $(x,y) \in W$, ossia $x^2+y^2-4x=0$

$c(x,y) = (cx, cy)$ non soddisfa

$(cx)^2 + (cy)^2 - 4cx = 0$

Infatti $c^2x^2 + c^2y^2 - 4cx$

$= c^2\left(x^2+y^2-4\frac{x}{c}\right) \neq 0$ se $c \neq 1$

(h) $W = \{(x,y) \in R^2 : (x+y)(x-y) = 0\} \subseteq R^2$

Non è vero.

Infatti, presi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$, ossia

$x_1^2 = y_1^2$, $x_2^2 = y_2^2$, allora

$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ è un

vettore tale che

$$(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 \underline{+ 2x_1x_2}$$
$$\neq (y_1+y_2)^2 \quad \text{se} \quad \begin{matrix} x_1 = -y_1 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}$$

Infatti $(y_1+y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2$

$$= y_1^2 + y_2^2 \underline{- 2x_1x_2}$$

25. $U = \{(x,0,z),\ x, z \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)(0,0,1)]$

$W = \{(y,0,y)\ \ y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1)]$

Il sottospazio $U+W$ è dato da

$U+W = \{(x,0,z)+(y,0,y) = (x+y,\ 0,\ z+y)\}$

$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y=0,\ x=z\}$

$= \{(x,0,x)\} \equiv W$

$U+W$ <u>non</u> è somma diretta.–
Si può pensare come generato da
$(1,0,0), (1,0,1), (0,0,1)$

Il sottospazio $U \cap W$ è generato da $(1,0,1)$