2. Determinare la proiezione del vettore $v = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ su una retta parallela al vettore $w = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$$v' = \left\langle v, \frac{w}{|w|} \right\rangle \frac{w}{|w|} = \langle v, w \rangle \frac{w}{|w|^2}$$

$$|w|^2 = \langle w, w \rangle = 1 + 4 + 1 = 6$$

$$\Rightarrow \quad v' = \langle v, w \rangle \frac{1}{6} (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$= \frac{(1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1)}{6} (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$= -\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,3}} (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = -\frac{\vec{i}}{3} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

1. Siano $u=(1,1,0)$ e $v=(2,1,1)$ due vettori dello spazio euclideo. Determinare i loro moduli, il loro prodotto scalare, il coseno dell'angolo da essi formato e i loro coseni direttori.

$$u=(1,1,0) \qquad v=(2,1,1)$$

$$|u| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\langle u,v\rangle = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 3$$

$$\cos\varphi = \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} = \frac{3}{\sqrt{2}\,\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

coseni direttori di u

$$\cos\varphi_x = \frac{\langle u,\vec{i}\rangle}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\varphi_y = \frac{\langle u,\vec{j}\rangle}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\varphi_z = \frac{\langle u,\vec{k}\rangle}{|u|} = 0$$

coseni direttori di v

$$\cos\psi_x = \frac{\langle v,\vec{i}\rangle}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \qquad \cos\psi_y = \frac{\langle v,\vec{j}\rangle}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\psi_z = \frac{\langle v,\vec{k}\rangle}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

3. Determinare la componente e il vettore proiezione di $v = (3, 0, 1)$ sulla retta contenente il vettore $(1, 2, -2)$.

Il versore della retta è $w = \dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}}$

$$= \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

La componente del vettore proiezione di v su w vale

$$\langle v, w \rangle = 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Il vettore proiezione è

$$v' = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right]$$

$$= \langle v, w \rangle\, w$$