Matematica discreta - a.a. 2021-22 - I parziale
Ogni risposta deve essere giustificata.
Any answer must be justified.

1. (3 punti) Determinare il vettore proiezione del vettore $w = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ sul piano contenente i vettori $u = \vec{i} - \vec{j}$ e $v = \vec{j} + \vec{k}$. Determinare il volume del parallelepipedo di spigoli u, v e w.

   Let determine the projection vector of the vector $w = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ on the plane containing the vectors $u = \vec{i} - \vec{j}$ and $v = \vec{j} + \vec{k}$. Determine the volume of the parallelepiped of edges u, v and w.

2. (4 punti) Dati il sottoinsieme $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + y = 0\}$ e il sottospazio $W = [(0, 1, 0)]$, mostrare che
   - U è sottospazio di $\mathbb{R}^3$
   - determinare $U + W$
   - mostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ (usando la relazione di Grassmann)

   Given the subset $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + y = 0\}$ and the subspace $W = [(0, 1, 0)]$, let prove that
   - U is a subspace of $\mathbb{R}^3$
   - determine $U + W$
   - prove that $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ (using Grassmann's formula)

3. (4 punti) Mostrare che non esiste alcun valore di k per cui la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & k+4 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2. Calcolare l'inversa se possibile nel caso di $k = 0$.
   Let prove that there is no value of k for which the matrix $A = \begin{pmatrix} k & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & k+4 & 3 \end{pmatrix}$ has rank 2. Compute the inverse of A (if there exists) when $k = 0$.

4. (4 punti) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quante e quali soluzioni possiede il seguente sistema:

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -1 \\ x + (2k-1)y + kz &= 0 \end{aligned}$$

Let determine for any value of $k \in \mathbb{R}$ if the following system admits solutions and, in this case, compute the solutions:

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -1 \\ x + (2k-1)y + kz &= 0 \end{aligned}$$

5. (4 punti) Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ che manda il vettore (x, y, z) nel vettore $(2x - 3y + z, y - z)$. Trovare $\dim(\ker(f))$ e $\dim(\mathrm{Imm}(f)$ e una base per ciascun sottospazio; dire se la funzione è iniettiva e/o suriettiva.
   Per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k+2, k)$ appartiene a $\mathrm{Imm}(f)$?

   Let consider the linear transformation $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ such that $(x, y, z) \to (2x - 3y + z, y - z)$. Let find $\dim(\ker(f))$ and $\dim(\mathrm{Imm}(f)$ and a basis for each subspace; let determine if the function is injective and/or surjective.
   Let determine the values of the real parameter k (if there exist) such that the vector $v = (k + 2, k)$ belongs to $\mathrm{Imm}(f)$?

1. Determinare la proiezione di $w = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ sul piano contenente i vettori $u = \vec{i} - \vec{j}$ e $v = \vec{j} + \vec{k}$

La proiezione di w è il vettore w' ottenuto come

$$w' = w - \langle w, u \times v \rangle \frac{u \times v}{|u \times v|^2}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$|u \times v|^2 = 3$$

$$\langle w, -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \rangle = -2 + 1 - 1 = -2$$

$$w' = w - \left(\frac{-2}{3}\right)(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) =$$

$$= 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} - \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$= \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$$

Volume del parallelepipedo

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = 1 . 0 + 1(-2) = |-2| = 2$$

2. $U = \{(x, y, z) \in R^3 : 5x + y = 0\}$

Mostriamo che U è sottospazio di R^3 usando la I caratterizzazione

- Siano $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U$

Allora $5x_1 + y_1 = 0$, $5x_2 + y_2 = 0$, ossia

$y_1 = -5x_1$, $y_2 = -5x_2$.

Segue che

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) =$$
$$= (x_1 + x_2, -5x_1 - 5x_2, z_1 + z_2) =$$
$$= (x_1 + x_2, -5(x_1 + x_2), z_1 + z_2) \in U$$

Poichè $y_1 + y_2 = -5(x_1 + x_2) \Rightarrow$ U è chiuso rispetto alla somma.

- Sia $\alpha \in R$ e $(x, y, z) \in U$, ossia $y = -5x$

$$\alpha(x, y, z) = \alpha(x, -5x, z) = (\alpha x, -5\alpha x, \alpha z) \in U$$

Infatti $\alpha y = -5\alpha x = \alpha(-5x)$

- $(0, 0, 0) \in U$

$U = \{(x, -5x, z)\} = [(1, -5, 0), (0, 0, 1)]$

I due generatori sono linearmente

lin. indipendenti $\Rightarrow \dim U = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

$W = [(0,1,0)]$ $\qquad$ $\dim W = 1$

$U + W = [(1,-5,0)\ (0,0,1)\ (0,1,0)]$

I tre vettori sono generatori e sono lin. indipendenti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Dunque $U+W$ ha dimensione 3

Pertanto $U + W = R^3$

Inoltre dalla relazione di Grassman si ha

$$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$
$$3 = 2 + 1 - 0$$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow U \oplus W = R^3$

è somma diretta

$$A = \begin{pmatrix} k & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & k+4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = k\left(6-k-4\right) - \left(12-2k-8\right) + 3\left(4-4\right)$$
$$= 2k - k^2 - 4 + 2k =$$
$$= -\left(k^2+4-4k\right) = -\left(k-2\right)^2$$

Per $k=2$ la matrice è singolare.

Tuttavia per $k=2$, la matrice è

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$ che ha rango 1.

Dunque per nessun valore di k la matrice ha rango 2.
Considerare il caso $k=0$, per cui la matrice è non singolare

$\det A = -4$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ -2 & 12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{cases} 3x - y + z = -1 \\ x + (2k-1)y + kz = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2k-1 & k \end{pmatrix} \qquad r(A) \geq 1 \quad r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2k-1 \end{vmatrix} = 6k - 3 + 1 = 6k - 2 = 2(3k-1)$$

$$k \neq \frac{1}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 3k - 1 \qquad k \neq \frac{1}{3}$$

per $k \neq \frac{1}{3}$, $r(A) = 2$ e $r(A|b) = 2$

$$r(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & (2k-1) & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = -1 - z \\ x + (2k-1)y = -kz \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & -1 \\ -kz & 2k-1 \end{vmatrix}}{2(3k-1)} = \frac{(2k-1)(-1-z) - kz}{2(3k-1)} = \frac{-2k+1}{2(3k-1)} - \frac{1}{2}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1-z \\ 1 & -kz \end{vmatrix}}{2(3k-1)} = \frac{-3kz+1+z}{2(3k-1)} = \frac{1}{2(3k-1)} - \frac{1}{2}z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2k+1}{2(3k-1)} \\ \frac{1}{2(3k-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

∞^1 soluzioni

per $k = \frac{1}{3}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad r A = 1$$

$$(A\,b) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad r(A|b) = 2$$

$r(A) \neq r(A|b)$ sistema incompatibile

In sintesi

per $k \neq \frac{1}{3}$, ∞^1 soluzioni

per $k = \frac{1}{3}$, sistema incompatibile

5. $f: R^3 \longrightarrow R^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ y - z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$\mathrm{Imm}\, f = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ $\qquad$ dim Imm $f = 2$

dim Ker $f = 3 - 2 = 1$

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} +z+ \\ z \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{array}{l} 2x - 3y = -z \\ y = z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = (-z + 3z)/2 \\ y = z \end{array}$$

La funzione non è iniettiva ma è suriettiva.

$v = \begin{pmatrix} k+2 \\ k \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \operatorname{Im} f$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & k+2 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ ha rango 2 per ogni valore di k

Pertanto $v \in \operatorname{Im} f$ per ogni valore di k.