ESERCIZI SULLE APPLICAZIONI

① Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente applicazione

$$f(x,y,z) = (x - 2y + z,\ 3x + 2y + 11z,\ x + 3z,\ 2x - y + 5z)$$

a) Verificare che f è lineare

RICORDO Siano W e V spazi vettoriali su un campo K.

$f: V \to W$ è lineare $\iff f(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha f(\vec{v}) + \beta f(\vec{w})\ \forall v,w \in V$

Considero $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\vec{w}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{w}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Verifico se $f(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \alpha f(\vec{w}_1) + \beta f(\vec{w}_2)$

$$f(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2,\ \alpha z_1 + \beta z_2) =$$

$$= (2\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2) - 2\cdot(\alpha y_1 + \beta y_2) + \alpha z_1 + \beta z_2,$$
$$3\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + 11\cdot(\alpha z_1 + \beta z_2),$$
$$\alpha x_1 + \beta x_2 + 3\cdot(\alpha z_1 + \beta z_2),$$
$$2\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) + 5(\alpha z_1 + \beta z_2)) =$$

$f(\vec{e}_1) = (1, 3, 1, 2)$

$$= (2\alpha x_1 + 2\beta x_2 - 2\alpha y_1 - 2\beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2,$$
$$3\alpha x_1 + 3\beta x_2 + 2\alpha y_1 + 2\beta y_2 + 11\alpha z_1 + 11\alpha z_2,$$
$$\alpha x_1 + \beta x_2 + 3\alpha z_1 + 3\alpha z_2,$$
$$2\alpha x_1 + 2\beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + 5\alpha z_1 + 5\beta z_2) =$$

$$= (\alpha(2x_1 - 2y_1 + z_1) + \beta(2x_2 - 2y_2 + z_2),$$
$$\alpha(3x_1 + 2y_1 + 11z_1) + \beta(3x_2 + 2y_2 + 11z_2),$$
$$\alpha(x_1 + 3z_1) + \beta(x_2 + 3z_2),$$
$$\alpha(2x_1 - y_1 + 5z_1) + \beta(2x_2 - y_2 + 5z_2)) =$$

$$= \alpha\overbrace{(2x_1 - 2y_1 + z_1,\ 3x_1 + 2y_1 + 11z_1,\ x_1 + 3z_1,\ 2x_1 - y_1 + 5z_1)}^{f(\vec{w}_1)} +$$
$$\beta\underbrace{(2x_2 - 2y_2 + z_2,\ 3x_2 + 2y_2 + 11z_2,\ x_2 + 3z_2,\ 2x_2 - y_2 + 5z_2)}_{f(\vec{w}_2)} =$$
$$= \alpha\cdot f(\vec{w}_1) + \beta\cdot f(\vec{w}_2)$$

b) Scrivere la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche.

$A = [f(e_1), f(e_2), f(e_3)]$

$f(\vec{e}_1) = f((1,0,0)) = (1, 3, 1, 2)$ $\quad f(\vec{e}_2) = f((0,1,0)) = (-2, 2, 0, -1)$

$f(\vec{e}_3) = f((0,0,1)) = (1, 11, 3, 5)$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 3x + 2y + 11z \\ x + 3z \\ 2x - y + 5z \end{pmatrix}$$

c) Trovare una base per $\mathrm{Imm}(f)$ e la dimensione di $\ker(f)$.

RICORDO $\mathrm{Imm}(f) = \{ f(v) : v \in V \} \subseteq W \qquad f: V \to W$

$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = \vec{0}_W \} \subseteq V$

$$\mathrm{Imm}(f) = \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 3x + 2y + 11z \\ x + 3z \\ 2x - y + 5z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} x + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} y + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} z \right]$$

$\Rightarrow$ questi vettori sono lin. dip. infatti $3 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{ (1,3,1,2), (-2,2,0,1) \}$

$\dim(\mathrm{Imm}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(V)$ ($\to$ Teorema 9 slide)

$2 + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$

d) Discutere l'appartenenza del vettore $(\alpha+1, \alpha, \alpha, \alpha)$ all'$\mathrm{Imm}(f)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \le rg(A) \le 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\alpha - 3\alpha) - 2(\cancel{\alpha} + 1 - \cancel{\alpha}) =$$

$$= 4\alpha - 2 = 2(2\alpha - 1) \Rightarrow 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (\alpha+1) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+1)(-3-4) - (-\alpha - 2\alpha) - 2(2\alpha - 3\alpha) =$$

$$= -7(\alpha+1) + 3\alpha + 2\alpha = -2\alpha - 7 \Rightarrow -2\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{7}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } \alpha = -\frac{7}{2} \Rightarrow \text{il } 1^\circ \text{ minore } 3\times 3 \text{ è } \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \\ \text{Se } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{il } 2^\circ \text{ "} \Rightarrow rg(A) = 3 \\ \text{Se } \alpha \neq \frac{1}{2} \wedge \alpha \neq -\frac{7}{2} \Rightarrow rg(A) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow rg(A) = 3 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow (\alpha+1, \alpha, \alpha, \alpha) \notin \mathrm{Imm}(f), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

② Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$f(x,y,z) = (x+3y+4z,\ 2x+y+3z,\ -x+2y+z)$

a) Trovare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcolare la dimensione dell' Imm(f).

RICORDO $\dim(\text{Imm}(f)) = rg(A)$

Osservo che $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, ma 3^a col $= 1^a$ col $+ 2^a$ col $\Rightarrow rg(A) = 2$

c) Trovare una base per Ker(f)

$Ker(f) = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y+4z=0,\ 2x+y+3z=0,$

ricavo x $\Leftrightarrow$ e sostituisco $-x+2y+z=0 \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = z+2y,\ 5z+5y=0,\ 5z+5y=0 \} =$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = z+2y,\ y=-z \} =$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -z,\ y=-z \} = [(1,1,-1)]$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{ (1,1,-1) \}$

d) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(2,3,h) \in \text{Imm}(f)$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & h \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & h \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= h - 6 - 6h + 8 - 9 + 2 = -5h - 5 = -5(h+1)$$

$\Rightarrow h+1 = 0 \Leftrightarrow h = -1$

- Se $h = -1 \Rightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$ infatti 1^o rig $- 2^o$ rig $= 3^o$ rig

$\Rightarrow (2,3,h) \in \text{Imm}(f) \Leftrightarrow h = -1$

e) Dire se l'applicazione f e' iniettiva, suriettiva e biiettiva.

RICORDO f è iniettiva $\Leftrightarrow Ker(f) \{\vec{0}\}$ ($\hookrightarrow$ teo 3 slide)

$\text{Imm}(f) = W \Rightarrow$ f è suriettiva con $f: V \to W$, V e W sottosp. vett.

. $\dim(\text{Imm}(f)) = 2 \Rightarrow \text{Imm}(f) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ f non è suriettiva

. Dal punto precedente $Ker(f) \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow$ f non e' iniettiva

$\Rightarrow$ f non è biiettiva.

③ Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Si determinino le equazioni dell' applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente A quale matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$$f(x,y,z) = (x+2y+3z, \ -y-z, \ 2x+y+3z)$$

b) Si determinino una base per $Ker(f)$ e la dimensione di $Imm(f)$

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -y-z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-y \\ x+2y-3y=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-y \\ x=y \end{cases} \Rightarrow (y,y,-y) \quad y(1,1,-1)$$

$$\Rightarrow Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z=0, \ -y-z=0, \ 2x+y+3z=0\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=-y, \ x=y\} = \{[1,1,-1]\} = \mathcal{B} \to \text{base}$$

$$\dim(Imm(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Ker(f)) = 3-1 = 2$$

c) Si verifichi se posti $\vec{v} = (2,0,4)$ e $\vec{w} = (-3,1,3)$ valga $Imm(f) = [\vec{v}, \vec{w}]$

$$\dim(Imm(f)) = 2 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Dalla matrice A considero le prime due colonne

$$Imm(f) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\right] = \left[2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, (-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}\right] = [\vec{v}, \vec{w}]$$

d) Si determini $\dim(Imm(f) \cap Ker(f))$

$$\dim(Imm(f) \cap Ker(f)) = \dim(Imm(f)) + \dim(Ker(f)) - \dim(\mathbb{R}^3) =$$
$$= 2+1-3 = 0$$

4) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri l' applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\begin{pmatrix} k+1 & -3 & k \\ 1 & -k & 2 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$

$$f(x,y,z) = ((k+1)x - 3y + kz, \ x - ky + 2z, \ -ky + z)$$

a) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l' applicazione f non è iniettiva

$$Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (k+1)x - 3y + kz = 0, \ x - ky + 2z = 0, \ -ky + z = 0\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (k+1)x - 3y + kz = 0, \ x + ky = 0, \ z = +ky\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (k+1)\cdot(-ky) - 3y + k^2y = 0, \ x = -ky, \ z = ky\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\cancel{k^2y} - ky - 3y + \cancel{k^2y} = 0, \ x = -ky, \ z = ky\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (k+3)y = 0, \ x = -ky, \ z = ky\}$$

Affinché f sia iniettiva occorre che $Ker(f) = \{(0,0,0)\}$, ma qui si vuole il contrario $\Rightarrow$

- Se $k = -3 \Rightarrow 0y = 0, \ x = -3y, \ z = +3y \Rightarrow$ prendo un valore di y qualsiasi
  $Ker(f) = \{[-3, 1, 3]\} \Rightarrow f$ non e' iniettiva
- Se $k \neq -3 \Rightarrow y = 0, \ x = 0, \ z = 0 \Rightarrow Ker(f) = \{\vec{0}\}$
  $\Rightarrow f$ e' iniettiva

b) Per valori di k trovati al punto a), si determini una base per $Ker(f)$ e una per $Imm(f)$.

• Se $K=-3 \Rightarrow \mathcal{B}_1 = \{[-3,1,3]\}$ per $Ker(f)$

$$K=-3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad rg(A) \leq 3 \quad e \quad \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2(3-6)-(-3+9) = 6-6=0$$

$$\Rightarrow rg(A) = dim(Imm(f)) = 2 \Rightarrow \mathcal{B}_2 = \{(-2,-1,0),(-3,3,3)\}$$

c) Si dimostri che $\mathbb{R}^3 = Imm(f) \oplus Ker(f)$

$dim(Ker(f)) = 1$, $dim(Imm(f)) = 2$

I vettori di $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono lin. indip., infatti:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad rg(B) \leq 3 \quad e \quad rg(B) \geq 2$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-9)-(\cancel{-9+9}) = -12 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(B) = 3$.

$\Rightarrow dim(Imm(f) + Ker(f)) = 3$
$dim(\mathbb{R}^3) = 3$
$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = Imm(f) + Ker(f)$

Da Grassmann $dim(Imm(f) \cap Ker(f)) = 0 \Rightarrow Imm(f) \oplus Ker(f)$

5) Discutere e risolvere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, riducendo la matrice a gradini:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ x + 2z = \lambda \end{cases} \qquad [A,b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & \lambda \end{array}\right) = R_2 = R_2 - 2R_1$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & \lambda \end{array}\right) \overset{R_3 = R_3 - R_1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-2 \end{array}\right) \overset{R_3 = R_3 - R_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+3)$$

$\Rightarrow$ • Se $\lambda + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -3 \Rightarrow rg([A,b]) = 3$
$\Rightarrow rg(A) \neq rg([A,b]) \Rightarrow$ il sistema e' impossibile

• Se $\lambda = -3 \Rightarrow rg([A,b]) = 2$
$\Rightarrow rg(A) = rg([A,b]) \Rightarrow$ il sistema e' compatibile e ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

6) Sia $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare definita da
$f(x,y,z,t) = (x+z, y, 2x+2z-y, -3y+x+z)$

a) Si determinino base e dim(Ker(f)).

$$\operatorname{Ker}(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z=0,\ y=0,\ 2x+2z-y=0,\ -3y+x+z=0\}$$
$$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=-z,\ y=0,\ \cancel{-2z+2z=0},\ \cancel{x=-z}\} =$$
$$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=-z,\ y=0\} = \{(-z,0,z,t) : z,t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow \mathcal{B} = \{(-1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$
$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$$

b) Si determinino base e dim(Imm(f)):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \leq 3$$
$$\operatorname{rg}(A) \geq 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2 = \operatorname{Imm}(f)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Imm}(f) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right] \Rightarrow \mathcal{B} = \{(1,0,2,1),(0,1,-1,-3)\}$$