Istituzioni di Matematica

Docente: Prof. M.D. Rosini

email: massimilianodaniele.rosini@unife.it

Corso di Laurea in Informatica

Università Degli Studi Di Ferrara

a.a. 2022-2023

Numeri complessi

Indice

Sezione 1 Numeri complessi dati in forma trigonometrica

Dato un numero complesso in forma algebrica

$$z = a + \mathrm{i}b,$$

lo possiamo riscrivere in forma trigonometrica come

$$z = \rho\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$$

dove

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e $\theta \in \mathbb{R}$ è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} a = \rho\cos(\theta) \\ b = \rho\sin(\theta). \end{cases} \tag{$\clubsuit$}$$

Osservazione

Se $\theta \in \mathbb{R}$ è una soluzione di ($\clubsuit$), allora anche $\theta + 2k\pi$ è una soluzione $\forall k \in \mathbb{Z}$.
Si ha che $\theta = \arccos(a/\rho) = \arcsin(b/\rho)$ se e solo se $a, b > 0$.

Definizione

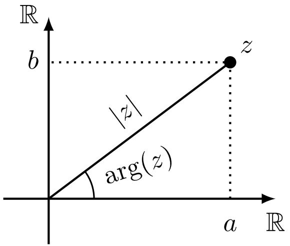
Il modulo di $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ è il numero reale

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Se $\rho \neq 0$, allora l'argomento (principale) di z è l'unico $\theta \in (-\pi, \pi]$ che soddisfa ($\clubsuit$) e viene indicato con $\arg(z)$.

Osservazione

Ricordando la rappresentazione in $\mathbb{R}^2$ di $\mathbb{C}$, il modulo di z è la distanza del punto corrispondente in $\mathbb{R}^2$ dall'origine degli assi.



Proposizione

Se $z, w \in \mathbb{C}$, allora:

- $-|z| \leqslant \Re e(z) \leqslant |z|$
- $-|z| \leqslant \Im m(z) \leqslant |z|$
- $|z| \geqslant 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (**disuguaglianza triangolare**)
- $|z| - |w| \leqslant |z + w|$
- $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$

Dimostrazione.

- Dimostriamo la disuguaglianza triangolare

$$|z+w| \leqslant |z| + |w|.$$

Se $z = \rho\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$ e $w = r\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right)$, allora

$$\begin{aligned}
& z+w = \left(\rho\cos(\theta) + r\cos(\varphi)\right) + \mathrm{i}\left(\rho\sin(\theta) + r\sin(\varphi)\right) \\
\Longrightarrow \quad & |z+w| = \sqrt{\left(\rho\cos(\theta) + r\cos(\varphi)\right)^2 + \left(\rho\sin(\theta) + r\sin(\varphi)\right)^2} \\
& \qquad = \sqrt{\rho^2 + r^2 + 2\rho r\left(\cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi)\right)} \\
& \qquad = \sqrt{\rho^2 + r^2 + 2\rho r\cos(\theta - \varphi)}
\end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned}
& |z+w| \leqslant |z| + |w| \Longleftrightarrow \sqrt{\rho^2 + r^2 + 2\rho r\cos(\theta-\varphi)} \leqslant \rho + r \\
& \Longleftrightarrow \rho^2 + r^2 + 2\rho r\cos(\theta-\varphi) \leqslant (\rho+r)^2 = \rho^2 + r^2 + 2\rho r \\
& \Longleftrightarrow \rho r\cos(\theta-\varphi) \leqslant \rho r.
\end{aligned}$$

Dimostrazione.

- La penultima disuguaglianza

$$|z| - |w| \leqslant |z + w|$$

segue dalla disuguaglianza triangolare, in quanto

$$|z| = |z + w - w| \leqslant |z + w| + |w|$$

da cui si ricava che $|z| - |w| \leqslant |z + w|$.

- Infine, l'ultima uguaglianza

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

segue dalla uguaglianza $|z|^2 = z\overline{z}$, in quanto

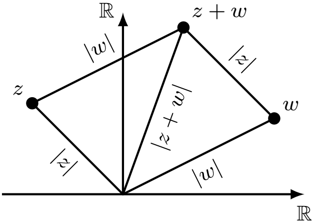
$$\begin{aligned} &|z + w|^2 + |z - w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= 2(z\overline{z} + w\overline{w}) = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right). \end{aligned}$$

Dimostrazione.

La dimostrazione delle altre proprietà è lasciata come esercizio per casa. $\square$

Osservazione

La disuguaglianza triangolare afferma che, in un triangolo, la lunghezza di un lato è minore o uguale della somma delle lunghezze degli altri due.



Proposizione

Siano $z = \rho\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ e $w = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ due numeri complessi dati in forma trigonometrica. Se $z, w \neq 0$ sono tali che

$$|z + w| = |z| + |w|,$$

allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda > 0$, tale che $z = \lambda w$.

Dimostrazione.

Dalla dimostrazione della disuguaglianza triangolare ricaviamo che

$$\begin{aligned} |z + w| = |z| + |w| &\iff \cos(\theta - \varphi) = 1 \\ &\iff \theta - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z} \iff \theta \in \varphi + 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dunque esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\theta = \varphi + 2\pi k$ e quindi

$$\begin{aligned} z &= \rho\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = \rho\,(\cos(\varphi + 2\pi k) + \mathrm{i}\sin(\varphi + 2\pi k)) \\ &= \rho\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) = \frac{\rho}{r}\,w. \end{aligned}$$

Dunque basta prendere $\lambda = \rho/r$. $\square$

Proposizione

Se $z = \rho\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ e $w = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ sono due numeri complessi in forma trigonometrica, allora

$$\bullet\ z \cdot w = \rho r\,(\cos(\theta+\varphi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\varphi))\,,$$

$$w \neq 0 \Longrightarrow\ \bullet\ \frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}(\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{i}\sin(\theta-\varphi)).$$

Dimostrazione.

Dimostriamo la prima uguaglianza

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho r\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \\ &= \rho r\,(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + \mathrm{i}\,(\cos(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\theta))) \\ &= \rho r\,(\cos(\theta+\varphi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\varphi))\,. \end{aligned}$$

La dimostrazione della seconda uguaglianza è lasciata come esercizio per casa. □

Teorema della formula di De Moivre

Dati $n \in \mathbb{N}$ ed un numero complesso in forma trigonometrica

$$z = \rho\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right),$$

si ha

$$z^n = \rho^n\left(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\right).$$

Dimostrazione.

Basta utilizzare la formula del prodotto e procedere per induzione. I dettagli della dimostrazione sono lasciati come esercizio per casa. $\square$

Osservazione

A differenza della radice quadrata di un numero reale positivo, non si può parlare della radice quadrata di un numero complesso. Questo accade non perché la radice quadrata di un numero complesso non esista, anzi al contrario il problema è che ne esistono due! Questo segue dal seguente corollario.

Corollario

Sia $w = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ un numero complesso in forma trigonometrica ed $n \in \mathbb{N}$, allora l'equazione nell'incognita z

$$z^n = w$$

ha per soluzioni

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\,k\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\,k\right)\right), \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Dimostrazione.

Se $z = \rho\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ è una soluzione, allora

$$z^n = w \iff \rho^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)) = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$$
$$\iff \begin{cases} \rho^n = r \\ \cos(n\theta) = \cos(\varphi) \\ \sin(n\theta) = \sin(\varphi) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per concludere osserviamo che le soluzioni corrispondenti a $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ sono distinte e che per la periodicità del seno e del coseno sono le uniche soluzioni. $\square$

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$z^4 + 1 = 0.$$

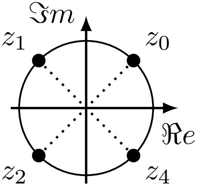
Riscrivendo -1 in forma trigonometrica otteniamo

$$-1 = 1\Big(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\Big)$$

e quindi le soluzioni sono

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right), \qquad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

ovvero



$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i}),$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i}),$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \mathrm{i}),$$

$$z_3 = \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i}).$$

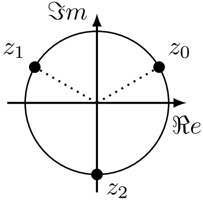
Esempio

Risolviamo l'equazione

$$z^3 = \mathrm{i}.$$

Essendo $\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ abbiamo che le soluzioni sono

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}, \\
z_1 &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}, \\
z_2 &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}.
\end{aligned}$$



Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1 + \mathrm{i}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} \Re e(z) = 1 \\ \Im m(z) = 1 \\ |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \sqrt{2}/2 \\ \sin(\theta) = \sqrt{2}/2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

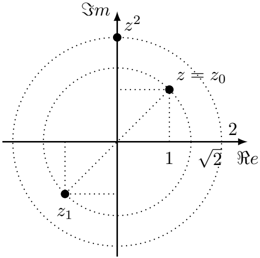
Per la formula di De Moivre la forma trigonometrica di z^2 è

$$z^2 = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\mathrm{i},$$

le cui radici quadrate sono

$$z_0 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = z,$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -1 - \mathrm{i}.$$



Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1 + \mathrm{i}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} \Re e(z) = 1 \\ \Im m(z) = 1 \\ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \sqrt{2}/2 \\ \sin(\theta) = \sqrt{2}/2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Le radici cubiche di z sono (con un abuso di notazioni)

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\left((1+\sqrt{3}) + \mathrm{i}\,(\sqrt{3}-1)\right),$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(-1+\mathrm{i}),$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\left(-(\sqrt{3}-1) - \mathrm{i}\,(\sqrt{3}+1)\right),$$

Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1 + \mathrm{i}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} \Re e(z) = 1 \\ \Im m(z) = 1 \\ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \sqrt{2}/2 \\ \sin(\theta) = \sqrt{2}/2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

---

in quanto

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \end{aligned}$$

Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1 + \mathrm{i}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} \Re e(z) = 1 \\ \Im m(z) = 1 \\ |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \sqrt{2}/2 \\ \sin(\theta) = \sqrt{2}/2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

---

in quanto

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \end{aligned}$$

Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1 + \mathrm{i}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} \Re e(z) = 1 \\ \Im m(z) = 1 \\ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \sqrt{2}/2 \\ \sin(\theta) = \sqrt{2}/2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

---

in quanto

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) &= \cos\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \end{aligned}$$

Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1 + \mathrm{i}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} \Re e(z) = 1 \\ \Im m(z) = 1 \\ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \sqrt{2}/2 \\ \sin(\theta) = \sqrt{2}/2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

---

in quanto

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

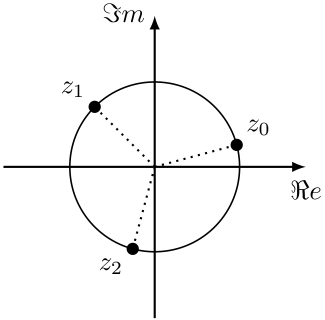
ed inoltre $\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{2} = 2^{1/6}\cdot 2^{1/2} = 2^{(1/6)+(1/2)} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$.

Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1 + \mathrm{i}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l}\Re e(z) = 1\\ \Im m(z) = 1\\ |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = \sqrt{2}/2\\ \sin(\theta) = \sqrt{2}/2\end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.



Esempio

Per il numero complesso in forma algebrica $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} \Re e(z) = 1 \\ \Im m(z) = \sqrt{3} \\ |z| = \sqrt{1+3} = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = 1/2 \\ \sin(\theta) = \sqrt{3}/2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \pi/3.$$

Dunque la forma trigonometrica di z è

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Esempio

Per la formula di De Moivre la forma trigonometrica di z^2 è

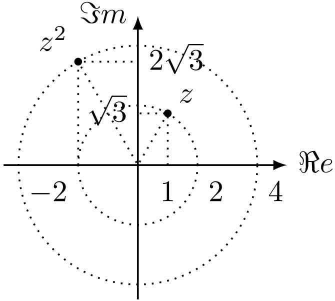
$$z^2 = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Abbiamo quindi che

$$|z^2| = 4,$$

$$\Re e(z^2) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2,$$

$$\Im m(z^2) = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3},$$



e pertanto la forma algebrica di z^2 è

$$z^2 = -2 + \mathrm{i}\,2\sqrt{3}.$$

Esempio

Le quattro radici quarte di z sono

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),\\
z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right),\\
z_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right),\\
z_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right).
\end{aligned}$$

Esempio

Abbiamo quindi che $|z_0| = |z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt[4]{2}$ e

$$\Re e(z_0) = \sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(\sqrt{3}+1)}{4}, \qquad \Im m(z_0) = \sqrt[3]{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(\sqrt{3}-1)}{4},$$

$$\Re e(z_1) = \sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(1-\sqrt{3})}{4}, \qquad \Im m(z_1) = \sqrt[3]{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(1+\sqrt{3})}{4},$$

$$\Re e(z_2) = \sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt[4]{8}(1+\sqrt{3})}{4}, \qquad \Im m(z_2) = \sqrt[3]{2}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(1-\sqrt{3})}{4},$$

$$\Re e(z_3) = \sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}(\sqrt{3}-1)}{4}, \qquad \Im m(z_3) = \sqrt[3]{2}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt[4]{8}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Sezione 2 Numeri complessi in forma esponenziale

Teorema della formula di Eulero per i numeri complessi

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha che

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).$$

La formula di Eulero dà origine ad un'identità considerata tra le più affascinanti della matematica, nota come identità di Eulero

$$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0,$$

che mette in relazione tra loro cinque simboli e, i, π, 1 e 0 che sono alla base dell'analisi matematica.

Grazie alla formula di Eulero un numero complesso dato in forma trigonometrica $z = \rho\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ può essere espresso anche in forma esponenziale come

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}.$$

Con la seguente definizione generalizziamo la definizione di elevamento a potenza al caso in cui l'esponente sia un numero complesso.

Definizione

Per ogni numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ si pone

$$e^z = e^a \cdot e^{\mathrm{i}b} = e^a \cdot (\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)) \, .$$

Proposizione

Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha che

- $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$,
- $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$.

Dimostrazione.

Siano $z = a + ib$ e $w = c + \mathrm{i}d$ due numeri complessi con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
&e^z \cdot e^w = e^{a+\mathrm{i}b} \cdot e^{c+\mathrm{i}d} = \left(e^a \cdot e^{\mathrm{i}b}\right) \cdot \left(e^c \cdot e^{\mathrm{i}d}\right) \\
&= e^{a+c} \left(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\right) \cdot \left(\cos(d) + \mathrm{i}\sin(d)\right) \\
\Longrightarrow &\begin{cases} \Re e\left(e^z \cdot e^w\right) = e^{a+c} \cdot \left(\cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d)\right), \\ \Im m\left(e^z \cdot e^w\right) = e^{a+c} \cdot \left(\cos(b)\sin(d) + \sin(b)\cos(d)\right). \end{cases}
\end{aligned}
$$

D'altro canto si ha che

$$
\begin{aligned}
&e^{z+w} = e^{(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)} = e^{(a+c)+\mathrm{i}(b+d)} \\
&= e^{a+c} \cdot \left(\cos(b+d) + \mathrm{i}\sin(b+d)\right) \\
\Longrightarrow &\begin{cases} \Re e\left(e^{z+w}\right) = e^{a+c}\cos(b+d), \\ \Im m\left(e^{z+w}\right) = e^{a+c} \cdot \sin(b+d). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.

Dunque per concludere la dimostrazione del primo punto basta applicare le seguenti identità trigonometriche

$$\cos(b+d) = \cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d),$$
$$\sin(b+d) = \cos(b)\sin(d) + \sin(b)\cos(d).$$

- Per il primo punto si ha che

$$\left.\begin{array}{l} \frac{e^z}{e^w}\cdot e^w = e^z \\ e^{z-w}\cdot e^w = e^{(z-w)+w} = e^z \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 = \left(\frac{e^z}{e^w}\cdot e^w\right) - \left(e^{z-w}\cdot e^w\right)$$
$$= \left(\frac{e^z}{e^w} - e^{z-w}\right)\cdot e^w \Longrightarrow \frac{e^z}{e^w} - e^{z-w} = 0. \qquad \square$$

Corollario

Per ogni $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}, w = re^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C}$ si ha che

$$z \cdot w = (\rho r) \cdot e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}.$$

Se inoltre $w \neq 0$, ovvero $r \neq 0$, allora

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r} \cdot e^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}.$$

Dimostrazione.

Per la proposizione precedente si ha che:

$$z \cdot w = (\rho e^{\mathrm{i}\theta}) \cdot (re^{\mathrm{i}\varphi}) = (\rho r) \cdot (e^{\mathrm{i}\theta} e^{\mathrm{i}\varphi}) = (\rho r) \cdot (e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)})$$
$$z/w = (\rho e^{\mathrm{i}\theta})/(re^{\mathrm{i}\varphi}) = (\rho/r) \cdot (e^{\mathrm{i}\theta}/e^{\mathrm{i}\varphi}) = (\rho/r) \cdot e^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}.$$

□

Esercizio

Trovare quale delle seguenti uguaglianze è falsa:

$$\mathrm{i} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}^{(4/4)} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{1/4} = 1^{1/4} = \sqrt[4]{1} = 1.$$

Esercizio

Trovare quale delle seguenti uguaglianze è falsa:

$$\mathrm{i} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}^{(4/4)} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{1/4} = 1^{1/4} = \sqrt[4]{1} = 1.$$

Sappiamo benissimo che $\mathrm{i} \neq 1$ e quindi siamo sicuri che almeno una delle uguaglianze deve essere falsa. Possiamo dire immediatamente che in effetti l'ultima uguaglianza non è vera in quanto quella che si sta calcolando è la radice quarta nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e non in quello dei numeri reali $\mathbb{R}$. Dunque, in realtà, a $\sqrt[4]{1}$ corrispondono quattro numeri complessi e sono

$$1, \qquad \mathrm{i} \qquad -1, \qquad -\mathrm{i}.$$

Per questo motivo, con un leggero abuso di notazioni, si ha piuttosto che

$$\mathrm{i} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}^{(4/4)} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{1/4} = 1^{1/4} \in \sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}.$$

Proviamo ora a sistemare l'equazione di partenza utilizzando lo stesso leggero abuso di notazioni appena introdotto:

$$\mathrm{i} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}^{(4/4)} = (\mathrm{i}^{1/4})^4 = \left\{(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^4, (e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}})^4, (e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{2}})^4, (e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{2}})^4\right\} = \{\mathrm{i}\} = \mathrm{i}.$$

Il precedente esercizio mostra che in generale la formula

$$(z^m)^{1/n} = (z^{1/n})^m$$

non è vera. In realtà si dimostra che tale formula è vera se m ed n sono primi tra loro.

Esempio

Verifichiamo che $(\mathrm{i}^3)^{1/4} = (\mathrm{i}^{1/4})^3$. Osserviamo che

$$(\mathrm{i}^3)^{1/4} = (-\mathrm{i})^{1/4} = \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}} \right\}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}^{1/4})^3 &= \left\{ (e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}})^3, (e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}})^3, (e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{8}})^3, (e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{8}})^3 \right\} \\ &= \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{27\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{39\pi}{8}} \right\} = \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}, e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}} \right\}\end{aligned}$$

e pertanto l'uguaglianza è vera. In effetti, $m = 3$ ed $n = 4$ sono primi tra loro.

In conclusione, se si vuole calcolare $z^{m/n}$ allora conviene prima ridurre ai minimi termini la frazione m/n e poi calcolare la potenza risultante. In alternativa, se non si vuole ridurre ai minimi termini la frazione m/n, allora la formula da applicare è

$$z^{m/n} = (z^{1/n})^m.$$