Teorema generale di rappresentazione I

Abbiamo visto precedentemente che si può costruire un isomorfismo tra l'insieme delle matrici $m \times n$ e le applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Per stabilire questo isomorfismo ci siamo serviti delle basi canoniche dei due spazi.

Vogliamo ora analizzare come operare nel caso di basi qualsiasi in $\mathbb{R}^n$ e in $\mathbb{R}^m$ e soprattutto generalizzare il risultato al caso di applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita.

Teorema generale di rappresentazione

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}'\{w_1, ..., w_m\}$ una base di W.
Esiste una e una sola matrice $A_f \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, con $n = \dim(V)$ e $m = \dim(W)$ tale che per ogni $v \in V$, se x è il vettore delle coordinate di v $(v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e y è il vettore delle coordinate di $f(v)$ $(f(v) = y_1 w_1 + ... + y_m w_m)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, allora vale che

$$A_f x = y.$$

Si dice che A_f **rappresenta l'applicazione lineare** f **rispetto alle basi** $\mathcal{B}$ **di** V **e** $\mathcal{B}'$ **di** W e si denota anche con $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$.

In altre parole, data $f : V \to W$ lineare e basi $\mathcal{B} \subseteq V$, $\mathcal{B}' \subseteq W$, si vuole far vedere che a essa corrisponde una e una sola matrice $A_f \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ con $n = \dim(V)$ e $m = \dim(W)$.

Dimostrazione.
Siano $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_m\}$ due basi di V e W rispettivamente.
Costruzione della matrice
Si considerino i trasformati tramite f degli elementi di $\mathcal{B}$ e si scrivano come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

Si ponga

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (A^1, A^2, ..., A^n) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix}$$

Si dimostra che f è individuata in modo univoca da A_f.

Teorema generale di rappresentazione III

Sia $v \in V$, ossia $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ è il vettore colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Per ipotesi $f(v) = y_1 w_1 + \ldots + y_m w_m$, con $y = (y_1, \ldots y_m)^T$ vettore colonna delle coordinate di $f(v)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.
Allora per linearità di f si ha che

$$
\begin{aligned}
f(v) &= y_1 w_1 + y_2 w_2 + \ldots + y_m w_m \quad \textbf{ma anche} \\
f(v) &= f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) = \\
&= x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \ldots + x_n f(v_n) = \\
&= x_1(a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \ldots + a_{m1} w_m) + x_2(a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \ldots + a_{m2} w_m) + \\
&\quad + \ldots + x_n(a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \ldots + a_{mn} w_m) = \\
&= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n) w_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n) w_2 + \\
&+ \ldots + (a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n) w_m = \\
&= (A_1 x) w_1 + (A_2 x) w_2 + \ldots + (A_m x) w_m
\end{aligned}
$$

Poichè le coordinate di $f(v)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ devono esere uniche, segue che $y_1 = A_1 x, y_2 = A_2 x, \ldots, y_m = A_m x$, ossia

$$A_f x = y$$

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Si vuole trovare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,0)^T\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1)^T, (0,1)^T\}$.
Si considera

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \tag{1}$$

Occorre scrivere i vettori ottenuti come combinazione lineare dalla base $\mathcal{B}'$. Si determini prima le coordinate di un generico vettore $(y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = a \\ y_2 = a + b \end{array}$$

che fornisce $a = y_1,\ b = y_2 - y_1$. Dunque

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = y_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y_2 - y_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Un primo esempio... II

Pertanto si ha:

$$f\overset{(x_1,x_2,x_3)^T}{\overset{\downarrow}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}} = \overset{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}}{\overset{\downarrow}{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}}}_{\mathcal{C}} = \overset{y_1}{\overset{\downarrow}{0}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \overset{y_2-y_1}{\overset{\downarrow}{(2-0)}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (2-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (2-3)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

Dunque la matrice associata è

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}A^1 & A^2 & A^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Dato il vettore v che rispetto alla base canonica è dato da $v = (2,3,3)^T_{\mathcal{C}}$, si ha che $f(v) = (5,8)^T_{\mathcal{C}}$.
Esso si scrive rispetto alla base $\mathcal{B}$ come

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Dunque si ha

$$f(v) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Un ulteriore esempio...

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\} = \mathcal{B}'$.
Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che:

$$\begin{aligned} f(b_1) &= 3b_1 \\ f(b_2) &= b_1 + 3b_2 \\ f(b_3) &= b_2 + 3b_3 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$A_f = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

E' possibile definire l'applicazione f come

$$f(x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3) = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3$$

con $y = A_f x$, ossia

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + x_2 \\ y_2 &= 3x_2 + x_3 \\ y_3 &= 3x_3 \end{aligned}$$

La corrispondenza si può costruire in altro modo.
Data $f : V \to W$ si costruisce l'unica matrice A_f associata alla applicazione $\mathcal{L}_{A_f}$ che è la **composizione di tre applicazioni lineari** di cui due sono isomorfismi:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\ V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi_V"'] & W\ \mathcal{B}' \arrow[d, "\varphi_W"] \\
\mathcal{C}\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{L}_{A_f}"'] \arrow[u, shift right, "\varphi_V^{-1}"'] & \mathbb{R}^m\ \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{L}_{A_f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è l'applicazione lineare:

$$\mathcal{L}_{A_f} = \varphi_W \circ f \circ \varphi_V^{-1}$$

- L'applicazione $\varphi_V : V \to \mathbb{R}^n$ è l'isomorfismo che fissata la base $\mathcal{B}$ in V associa a v il vettore delle coordinate di v rispetto alla base (in pratica $v_1 \leftrightarrow e_1, \ldots, v_n \leftrightarrow e_n$). Essa è biettiva e quindi invertibile.
- L'applicazione $\varphi_W : W \to \mathbb{R}^m$ è l'isomorfismo che fissata la base $\mathcal{B}'$ in W associa a w il vettore delle coordinate di w rispetto alla base (in pratica $w_1 \leftrightarrow e_1, \ldots, w_m \leftrightarrow e_m$). Essa è biettiva e quindi invertibile.

All'applicazione $\mathcal{L}_{A_f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è associata la matrice data da

$$\begin{aligned} A_f &= [(\varphi_W \circ f \circ \varphi_V^{-1})(e_1), ..., (\varphi_W \circ f \circ \varphi_V^{-1})(e_n)] = \\ &= [\varphi_W(f(\varphi_V^{-1}(e_1))), ..., \varphi_W(f(\varphi_V^{-1}(e_n)))] = \\ &= [\varphi_W(f(v_1)), ..., \varphi_W(f(v_n))] = \\ &= [\varphi_W(a_{11}w_1 + ... + a_{m1}w_m), ..., \varphi_W(a_{1n}w_1 + ... + a_{mn}w_m)] = \\ &= [A^1, ..., A^n] \end{aligned}$$

ossia **la matrice le cui colonne sono le coordinate di** $f(v_1), ..., f(v_n)$ **rispetto alla base** $w_1, ..., w_m$.
Preso $v \in V$, $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$, poichè $\varphi_V(v) = x$, è $v = \varphi_V^{-1}(x)$.
Da $f(v) = y_1w_1 + ... + y_mw_m$, poichè $\varphi_W(f(v)) = y$, $\mathcal{L}_{A_f} = \varphi_W \circ f \circ \varphi_V^{-1}$ deve far corrispondere ad x il vettore y, mediante

$$A_f x = y$$

Per quanto detto sull'isomorfismo tra $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e l'insieme delle matrici $m \times n$, A_f è univocamente determinata.

Viceversa...

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_m\}$ una base di W.

Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, ad essa si può far corrispondere una applicazione $f_A : V \to W$, definita nel seguente modo:

dato $v \in V$, tale che $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$,

$$f_A(v) = (A_1 x)w_1 + ... + (A_m x)w_m = y_1 w_1 + ... + y_m w_m$$

ossia

$$y = Ax = \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_m x \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che f_A è lineare. Infatti essa è composizione di applicazioni lineari:

$$f_A = \varphi_W^{-1} \circ \mathcal{L}_A \circ \varphi_V$$

$$v \to (x_1, ..., x_n)^T \to Ax \to (A_1 x)w_1 + ... + (A_m x)w_m$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\ V \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\varphi_V"'] & W\ \mathcal{B}' \arrow[d, bend left, "\varphi_W"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{L}_{A_f}"'] & \mathbb{R}^m\ \mathcal{C} \arrow[u, "\varphi_W^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Riassumendo...

Abbiamo fatto vedere che, fissata $\mathcal{B}$ una base di V e $\mathcal{B}'$ una base di W,:

- ad ogni $f : V \to W$ lineare corrisponde una matrice $A_f = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$
- ad ogni matrice A corrisponde una applicazione lineare $f_A : V \to W$

Si può far vedere che questo è un isomorfismo.

Teorema

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ di dimensione finita n e m rispettivamente. Allora l'insieme delle applicazioni lineari da V a W è isomorfo all'insieme delle matrici $m \times n$:

$$\mathrm{Hom}(V, W) \sim \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

Di conseguenza $\dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = mn$.

Dimostrazione.
Sia $\mathcal{B}$ una base di V e $\mathcal{B}'$ una base di W.
Si è visto che data una applicazione lineare $f : V \to W$, ad essa si può associare la matrice $A_f = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$.
Si definisce allora:

$$F : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

tale che $F(f) = A_f$.
F è ben definita per il teorema di rappresentazione.

Si può far vedere che F è lineare e biettiva.

Isomorfismo tra $\mathrm{Hom}(V, W)$ e $M_{mn}(\mathbb{R})$ II

- **Linearità.** Occorre mostrare che $\forall f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, vale che

$$F(c_1 f + c_2 g) = c_1 F(f) + c_2 F(g)$$

Date $f : V \to W$ e $g : V \to W$, se $F(f) = A_f = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ e $F(g) = B_g = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g)$, si ha che la matrice associata a $c_1 f + c_2 g$, ossia $F(c_1 f + c_2 g)$, è uguale a una matrice D le cui colonne sono definite nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
(c_1 f + c_2 g)(v_j) &= d_{1j} w_1 + \dots + d_{mj} w_m \quad j = 1, \dots, n \\
& \text{Vale anche che:} \\
(c_1 f + c_2 g)(v_j) &= c_1 f(v_j) + c_2 g(v_j) = \quad \text{definizione di operazioni tra applicazioni} \\
&= c_1 (a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m) + c_2 (b_{1j} w_1 + \dots + b_{mj} w_m) = \\
&= (c_1 a_{1j} + c_2 b_{1j}) w_1 + \dots + (c_1 a_{mj} + c_2 b_{mj}) w_m
\end{aligned}$$

Allora, si ha

$$F(c_1 f + c_2 g) = D = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(c_1 f + c_2 g) = c_1 A_f + c_2 B_g = c_1 F(f) + c_2 F(g)$$

- **Biettività di F.**

  F è iniettiva.

  Occorre mostrare che ad applicazioni lineare diverse, corrispondono matrici diverse: se $f \neq g$, allora esiste un j per cui $f(v_j) \neq g(v_j)$. Pertanto la j-esima colonna di A_f è diversa dalla j-esima colonna di B_g, cioè $A_f \neq B_g$.

  F è suriettiva.

  Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, esiste una applicazione $f_A : V \to W$ associata ad A tale che

  $$f_A(v) = (A_1 x)w_1 + ... + (A_m x)w_m$$

  Occorre mostrare che la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f_A)$ associata ad f_A coincide con A, ossia $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f_A) = F(f_A) = A$.

  Poichè v_1 ha coordinate $(1, 0, .., 0)^T$ rispetto a $\mathcal{B}$, si ha che per la definizione dell'applicazione

  $$\begin{aligned} f_A(v_1) &= (A_1 e_1)w_1 + ... + (A_m e_1)w_m \\ &= a_{11} w_1 + ... + a_{m1} w_m \end{aligned}$$

  Allora la prima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f_A)$ coincide con la prima colonna di A. Ripetendo lo stesso ragionamento per le successive colonne, si ha che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f_A) = A$.

Esempi I

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definita da $f((t_1, t_2)^T) = (t_1 + 2t_2, 3t_2, t_1)^T$.
  Siano $\mathcal{B} = \{(1,1)^T, (2,1)^T\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,1,0)^T, (1,0,0)^T, (1,2,1)^T\}$.
  Calcoliamo la matrice $A_f = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$.
  In primo luogo occorre calcolare le immagini degli elementi della base $\mathcal{B}$:

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \qquad f(v_2) = f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

  Si esprimono ora i vettori immagine rispetto alla base $\mathcal{B}'$.
  Si può generalizzare il calcolo, esprimendo ogni vettore che ha coordinate $(x, y, z)_{\mathcal{C}}$ in base canonica nella base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

  Da cui $x = \alpha + \beta + \gamma; y = \alpha + 2\gamma; z = \gamma$.
  Si ricava $\alpha = y - 2z; \beta = x - y + z; \gamma = z$.

Pertanto, si ha

$$\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = a_{11}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = a_{12}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Da cui si ha:

$$A_f = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$$

Pertanto, ad ogni elemento $v \in \mathbb{R}^2$ scritto come

$$v = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \text{con } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

corrisponde un vettore $f(v)$ le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}'$ sono:

$$y = A_f x_{\mathcal{B}} = A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [w]_{\mathcal{B}'} = [f(v)]_{\mathcal{B}'} &= y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 \\ &= (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1 + 3x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Questa è l'espressione di f rispetto alle basi scelte.

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

si consideri $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ad essa associata rispetto alle basi:
$\mathcal{B} = \{(1,1)^T, (0,1)^T\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,2,3)^T, (0,1,2)^T, (2,-1,0)^T\}$.
Si vuole determinare l'applicazione lineare rispetto alle **basi canoniche nel dominio e codominio**.
Dato un vettore $(x,y)^T$ in $\mathbb{R}^2$, espresso in termini della base canonica, esso si esprime rispetto alla base $\mathcal{B}$ come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = a \\ y = a + b \end{array}$$

Per cui $a = x$, $b = y - x$, ossia $\begin{pmatrix} x \\ y - x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
Ora si costruisce l'applicazione lineare come

$$A \begin{pmatrix} x \\ y - x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -3x \\ 6x - 2y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Pertanto l'applicazione lineare è

$$f_A((x,y)_{\mathfrak{C}}) = (-x+2y)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (6x-2y)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11x-2y \\ -11x+6y \\ -9x+6y \end{pmatrix}_{\mathfrak{C}}$$

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definita da
  $f((x_1, x_2, x_3)^T) = (5x_1 + 4x_2 - 9x_3, 4x_1 + 5x_2 - 9x_3, -9x_1 - 9x_2 + 9x_3, x_1 + x_2 + x_3)^T$.
  Rispetto alle basi canoniche, la matrice associata è :

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = A_f = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vuole ora calcolare la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ associata rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0)^T, (1, 0, -1)^T, (0, 1, -1)^T\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$.

Occorre prima di tutto calcolare le immagini degli elementi della base $\mathcal{B}$. Si può usare la matrice calcolata rispetto alla base canonica:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4 & -9\\4 & 5 & -9\\-9 & -9 & 9\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\9\\-18\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4 & -9\\4 & 5 & -9\\-9 & -9 & 9\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\13\\-18\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4 & -9\\4 & 5 & -9\\-9 & -9 & 9\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\14\\-18\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Pertanto la matrice associata è :

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}9 & 14 & 13\\9 & 13 & 14\\-18 & -18 & -18\\2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ con matrice associata:

$$A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0)^T, (1,0,0,0)^T, (2,0,0,1)^T, (0,0,1,0)^T\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{B}' = \{(1,1)^T, (1,0)^T\} \subset \mathbb{R}^2$$

Si vuole determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche in $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$.
Per prima cosa si esprimono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Questo si può fare esprimendo le componenti di un vettore $(x, y, z, t)_{\mathcal{C}}^T$ in termini della base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} x &= a+b+2c \\ y &= a \\ z &= d \\ t &= c \end{aligned}$$

e, risolvendo,

$$a = y \quad b = x - y - 2t \quad c = t \quad d = z$$

Pertanto, gli elementi della base canonica diventano:

$$\begin{aligned} (1,0,0,0)^T &= (0,1,0,0)^T_{\mathcal{B}} \\ (0,1,0,0)^T &= (1,-1,0,0)^T_{\mathcal{B}} \\ (0,0,1,0)^T &= (0,0,0,1)^T_{\mathcal{B}} \\ (0,0,0,1)^T &= (0,-2,1,0)^T_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Si calcolano le immagini dei vettori e_i, $i = 1, ..., 4$ rispetto a f:

$$
\begin{aligned}
f((0,1,0,0)^T_{\mathcal{B}}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
f((1,-1,0,0)^T_{\mathcal{B}}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
f((0,0,0,1)^T_{\mathcal{B}}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
f((0,-2,1,0)^T_{\mathcal{B}}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}
\end{aligned}
$$

Ora occorre esprimere i vettori ottenuti secondo la base canonica di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} &= 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} &= 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} &= 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} &= 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

La matrice associata rispetto alle basi canoniche è :

$$A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $f((x, y, z, t)^T) = (x - y, y + z)^T$.

- Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e sia

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,-1)^T, (1,0,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,1,0)^T\}$$

una base di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$\begin{aligned} f((1,0,0,-1)^T) &= (2,0,0,-1)^T_{\mathcal{C}} \\ f((1,0,0,0)^T) &= (-1,0,1,0)^T_{\mathcal{C}} \\ f((0,1,1,0)^T) &= (1,0,1,-1)^T_{\mathcal{C}} \\ f((0,0,1,0)^T) &= (1,1,2,0)^T_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

La matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ nel codominio è

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vuole la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ anche nel codominio. Basta esprimere le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ stessa. Questo si può fare esprimendo le componenti di un vettore $(x, y, z, t)^T_{\mathcal{C}}$ in termini della base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} x &= a + b \\ y &= c \\ z &= c + d \\ t &= -a \end{aligned}$$

e, risolvendo,

$$a = -t \quad b = x + t \quad c = y \quad d = z - y$$

$$a = -t \quad b = x + t \quad c = y \quad d = z - y$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned}
(2,0,0,-1)^T_{\mathcal{C}} &= (1,1,0,0)^T_{\mathcal{B}} \\
(-1,0,1,0)^T_{\mathcal{C}} &= (0,-1,0,1)^T_{\mathcal{B}} \\
(1,0,1,-1)^T_{\mathcal{C}} &= (1,0,0,1)^T_{\mathcal{B}} \\
(1,1,2,0)^T_{\mathcal{C}} &= (0,1,1,1)^T_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

La matrice associata è

$$A' = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e sia

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,-1)^T, (1,0,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,1,0)^T\}$$

una base di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$\begin{aligned} f((1,0,0,-1)^T) &= (2,0,0,-1)^T_{\mathcal{C}} \\ f((1,0,0,0)^T) &= (-1,0,1,0)^T_{\mathcal{C}} \\ f((0,1,1,0)^T) &= (1,0,1,-1)^T_{\mathcal{C}} \\ f((0,0,1,0)^T) &= (1,1,2,0)^T_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

La matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ nel codominio è

$$A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vuole determinare la matrice relativa alla base canonica $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio.

Si determinano le coordinate dei vettori della base canonica rispetto a $\mathcal{B}$. Questo si può fare esprimendo le componenti di un vettore $(x, y, z, t)_{\mathcal{C}}^{T}$ in termini della base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} x &= a + b \\ y &= c \\ z &= c + d \\ t &= -a \end{aligned}$$

e, risolvendo,

$$a = -t \quad b = x + t \quad c = y \quad d = z - y$$

$$
\begin{array}{rcl}
(1,0,0,0)^T_{\mathcal{C}} & = & (0,1,0,0)^T_{\mathcal{B}} \\
(0,1,0,0)^T_{\mathcal{C}} & = & (0,0,1,-1)^T_{\mathcal{B}} \\
(0,0,1,0)^T_{\mathcal{C}} & = & (0,0,0,1)^T_{\mathcal{B}} \\
(0,0,0,1)^T_{\mathcal{C}} & = & (-1,1,0,0)^T_{\mathcal{B}}
\end{array}
$$

Si calcolano le immagini di tali vettori usando la matrice $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$:

$$
\begin{array}{rcl}
f((0,1,0,0)^T_{\mathcal{B}}) & = & A(0,1,0,0)^T_{\mathcal{B}} = (-1,0,1,0)^T_{\mathcal{C}} \\
f((0,0,1,-1)^T_{\mathcal{B}}) & = & A(0,0,1,-1)^T_{\mathcal{B}} = (0,-1,-1,-1)^T_{\mathcal{C}} \\
f((0,0,0,1)^T_{\mathcal{B}}) & = & A(0,0,0,1)^T_{\mathcal{B}} = (1,1,2,0)^T_{\mathcal{C}} \\
f((-1,1,0,0)^T_{\mathcal{B}}) & = & A(-1,1,0,0)^T_{\mathcal{B}} = (-3,0,1,1)^T_{\mathcal{C}}
\end{array}
$$

I risultati sono già espressi secondo la base canonica. Pertanto la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e codominio vale:

$$
A'' = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Allora $f(x,y,z,t)^T = (-x+z-3t, -y+z, x-y+2z+t, -y+t)^T$.

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0)^T, (1,0,1)^T, (0,0,1)^T\}$$
$$\mathcal{B}' = \{(1,0,-1)^T, (1,0,1)^T, (0,1,0)^T\}$$

Determiniamo una base per l'immagine.

L'immagine di f è generata dalle colonne di A. La matrice ha rango 2 (infatti $A^3 = A^1 + A^2$); dunque una base di $\mathrm{Imm}(f)$ è data da $(1,2,3)^T, (1,1,1)^T$ che sono in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Per averle in base canonica si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathcal{B}' = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Allora $\mathrm{Imm}(f) = [(3,3,1)^T_{\mathcal{C}}, (2,1,0)^T_{\mathcal{C}}]$.

Matrice associata a composizione

Siano V, W, U spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.
Sia $f : V \to W$ lineare, $g : W \to U$ lineare.
E' noto che l'applicazione $g \circ f : V \to U$ è lineare.
Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ basi associate a V, W, U rispettivamente e siano

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \qquad B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g)$$

Allora

$$C = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = BA$$

Infatti, siano x il vettore delle coordinate di $v \in V$ rispetto a $\mathcal{B}$ e y il vettore delle coordinate di $f(v) \in W$ rispetto a $\mathcal{B}'$, per i quali vale

$$y = Ax$$

Sia z il vettore delle coordinate di $(g \circ f)(v) \in U$ rispetto a $\mathcal{B}''$, ossia

$$z = Cx$$

Ora $(g \circ f)(v) = g(f(v))$ e dunque le coordinate z sono esprimibili come il risultato dell'applicazione g:

$$z = By = B(Ax) = (BA)x$$

Pertanto $C = BA$.

Si può estendere il risultato alla composizione di più applicazioni lineari.

Teorema

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$.
Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ basi associate a V e W rispettivamente.
Allora **la matrice $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ è quadrata invertibile se e solo se f è un isomorfismo.**

$\Rightarrow$ Sia A quadrata invertibile.
Se A è quadrata, i due sottospazi V e W hanno la stessa **dimensione**; essendo A invertibile si può considerare l'inversa A^{-1} che è associata a una applicazione lineare $f_{A^{-1}} : W \to V$, tale che $A^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f_{A^{-1}})$. **Si può mostrare che $f_{A^{-1}}$ è l'inversa di f, ossia che $f \circ f_{A^{-1}} = i_W$ e $f_{A^{-1}} \circ f = i_V$.**
Infatti preso $w \in W$ con coordinate y rispetto alla base $\mathcal{B}'$, allora $f_{A^{-1}}(w)$ ha coordinate $A^{-1}y$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
L'applicazione $f \circ f_{A^{-1}}$ ha come corrispondente il vettore con coordinate

$$AA^{-1}y = y$$

rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Dunque $f \circ f_{A^{-1}} = i_W$.
Nello stesso modo si dimostra che $f_{A^{-1}} \circ f = i_V$. **Dunque $f_{A^{-1}}$ è l'applicazione inversa di f, che è biettiva. Dunque f è un isomorfismo.**

$\Leftarrow$ Sia f un isomorfismo.
Poichè f è una applicazione lineare biettiva, allora esiste una applicazione lineare $f^{-1} : W \to V$ tale che

$$f \circ f^{-1} = i_W \qquad f^{-1} \circ f = i_V$$

Poichè la matrice associata all'identità su un spazio vettoriale rispetto alla stessa base è l'identità segue che:

$$I = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(i_V) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f^{-1})M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f^{-1})A$$

$$I = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(i_W) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f^{-1}) = AM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f^{-1})$$

Pertanto $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f^{-1})$ è l'inversa di A.

L'insieme delle matrici di ordine n invertibili si denota con $GL_n(\mathbb{R})$.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ basi di V.
Consideriamo la matrice $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V)$ associata all'applicazione $i_V : V \to V$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ che manda un vettore v in se stesso.
Se x sono le coordinate di $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e y rispetto a $\mathcal{B}'$, si ha che

$$y = Ax$$

dove $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V)$ è la **matrice del cambiamento di base** da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ in V.
Poichè i_V è una applicazione lineare **biettiva**, per il teorema precedente, **la matrice A associata ad i_V è non singolare**.
L'inversa $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_V)$ è associata al cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ in V:

$$\begin{aligned} I = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(i_V) &= M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_V) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V) \\ I = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(i_V) &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_V) \end{aligned}$$

- Siano $= \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,1)^T, (2,-1)^T\}$ basi di $\mathbb{R}^2$.
  Si determina la matrice di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$, ossia $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'}(i_V)$.
  Tale matrice ha come colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{C}$ rispetto $\mathcal{B}'$:

$$\begin{array}{rcll} (1,0)^T & = & a_{11}(1,1)^T + a_{21}(2,-1)^T & \quad 1 = a_{11} + 2a_{21}; 0 = a_{11} - a_{21} \\ (0,1)^T & = & a_{12}(1,1)^T + a_{22}(2,-1)^T & \quad 0 = a_{12} + 2a_{22}; 1 = a_{12} - a_{22} \end{array}$$

Facendo i conti, si ha $a_{11} = a_{21} = 1/3$, $a_{12} = -2a_{22}$; $a_{22} = -1/3$; $a_{12} = -2/3$; dunque

$$A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'}(i_V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Le coordinate di un generico vettore $v = (x,y)^T_{\mathcal{C}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ sono ottenute nel seguente modo:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{x+2y}{3} \\ \frac{x-y}{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo (applicazione lineare di V su se stesso).
Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, supponiamo di conoscere la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e di voler calcolare $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$.
Si può considerare la composizione di applicazioni

$$(V, \mathcal{B}') \xrightarrow{i} (V, \mathcal{B}) \xrightarrow{f} (V, \mathcal{B}) \xrightarrow{i} (V, \mathcal{B}')$$

Dal teorema di composizione di applicazioni e dai risultati sul cambiamento di base si ha che:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(i_V \circ f \circ i_V) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(i_V) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i_V)$$

Poichè $f = i_V \circ f \circ i_V$, si ha

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = N^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) N$$

ove $N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i_V)$ è non singolare.
Si è provato il seguente risultato.

Teorema

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V e f sia un endomorfismo di V. Allora esiste una matrice invertibile N tale che

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = N^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) N$$

con $N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i_V)$.

Osservazione. Se $\mathcal{B}'$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ è la base canonica, allora le colonne di N sono gli elementi di $\mathcal{B}'$.

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f((x,y)^T) = (x+y, y-x)^T$. Si consideri $\mathcal{B}$ come la base canonica e $\mathcal{B}' = \{(1,1)^T, (2,-1)^T\}$. Allora la matrice associata ad f rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$ è data da:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = N^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} N$$

ove $N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i_V) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dunque si ha

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) &= M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(i_V) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i_V) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{(1,1,0)^T, (0,0,1)^T, (1,0,1)^T\}$$

ossia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.
Si vuole trovare la matrice associata alla stessa applicazione lineare rispetto alla base:

$$\mathcal{B}' \quad = \quad \{(0,1,0)^T, (0,1,1)^T, (1,0,0)^T\}$$

Si trova la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, ossia $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i_{\mathbb{R}^3})$.
Si può considerare un generico elemento $(x,y,z)^T_{\mathcal{B}'}$ in base $\mathcal{B}'$ ed esprimerlo in base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = a + c \\ y = a \\ z = b + c \end{array}$$

per cui $(x,y,z)^T_{\mathcal{B}'} = (y, -x+y+z, x-y)^T_{\mathcal{B}}$.

$$(x, y, z)^T_{\mathcal{B}'} = (y, -x + y + z, x - y)^T_{\mathcal{B}}$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}(0, 1, 0)^T_{\mathcal{B}'} &= (1, 1, -1)^T_{\mathcal{B}} \\ (0, 1, 1)^T_{\mathcal{B}'} &= (1, 2, -1)^T_{\mathcal{B}} \\ (1, 0, 0)^T_{\mathcal{B}'} &= (0, -1, 1)^T_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

Da cui

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_{\mathbb{R}^3})$ è l'inversa di questa:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_{\mathbb{R}^3}) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_{\mathbb{R}^3})$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione di applicazione diagonalizzabile

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo (applicazione lineare di V su se stesso).
Si dice che f è **diagonalizzabile** se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.

In quali casi esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata è diagonale?
Nel caso ciò sia possibile, la forma diagonale della matrice associata ad f è rappresentativa di ogni altra matrice associata ad f rispetto a qualunque altra base.
In altre parole si dice che una **matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile** se è diagonalizzabile l'applicazione lineare $\mathcal{L}_A$ ad essa associata rispetto alla base canonica.
Se esiste una base $\mathcal{B}$ tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ risulta diagonale, si dice che $\mathcal{B}$ diagonalizza f o A.