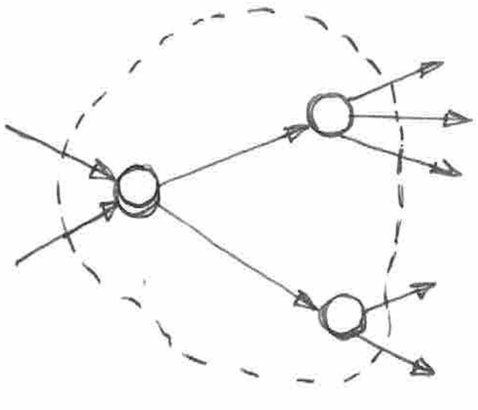
NETWORK - Strato 3

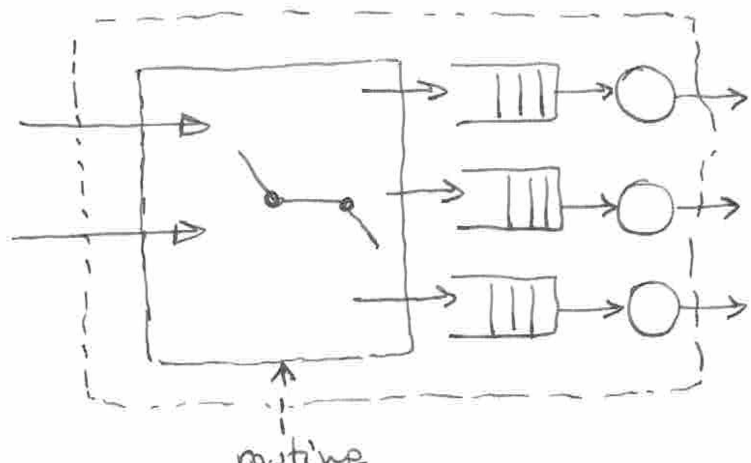
Consegna di pkt attraverso una rete costituita da un insieme di nodi opportunamente connessi (routing)



- rete di code
- algoritmi di instradamento

RETI DI CODE

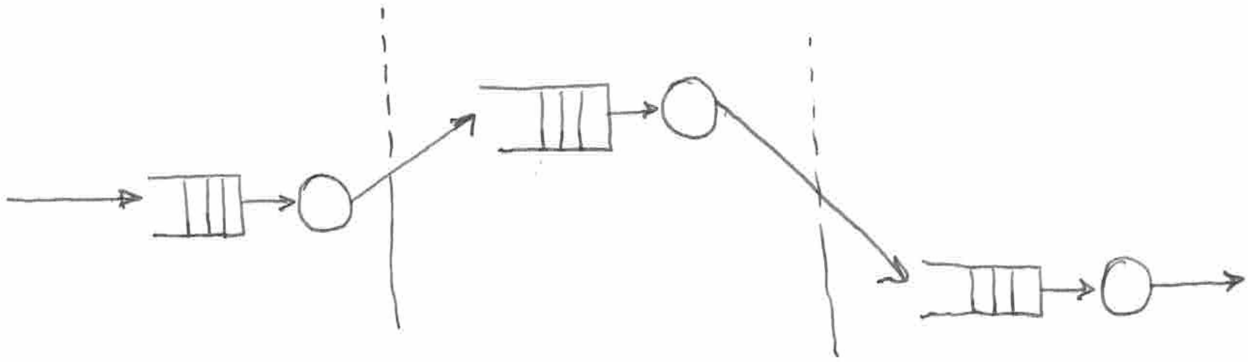
Una rete a commutazione di pacchetto è formata da molteplici store & forward configurati dinamicamente sulla base delle richieste degli utenti: servitore per ogni linea di uscita dal nodo e selezione della coda per ogni linea di entrata



2 in, 3 out

Si fa prima la selezione per evitare l'attesa in code non relativa alla linea di uscita desiderata.

Stiamo quindi trattando cascate di sistemi a coda



N nodi

σ_i uscite dal nodo i

M sistemi coda - servitore $\quad M = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$

Un sistema composto da più sistemi coda-servitore risulta particolarmente complesso a causa della forte correlazione fra tempi di interarrivo e lungh. dei pkt dopo il passaggio per un servitore

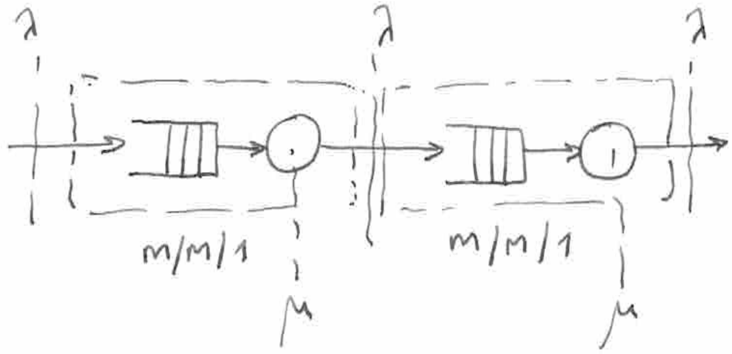
Per un dimensionamento di massima si fa un'assunzione forte

<u>Assunzione di indipendenza di Kleinrock</u>

Se ad un nodo arriva un elevato numero di flussi da altri nodi si considera l'indipendenza fra i tempi di interarrivo e la lunghezza dei pacchetti.

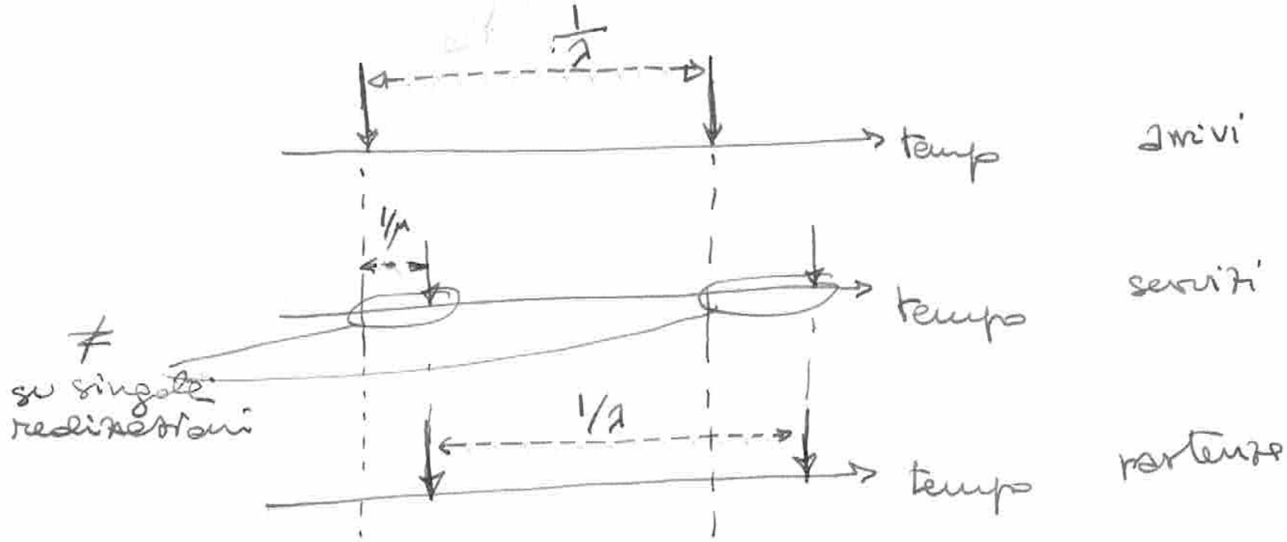
Inoltre, l'elevato numero di flussi in ingresso introduce l'indipendenza e l'assenza di memoria fra arrivi successivi $\Rightarrow$ <u>distrib. tempi interarrivo Poisson.</u>

Il generico nodo i è composto da s_i sistemi a coda di tipo M/M/1.



Teor. di Burke

In un sistema M/M/1 con tasso di arrivo λ il processo di partenza è ancora di Poisson con tasso λ



$1/\lambda$, $\frac{1}{\mu}$ tempi medi

L'assunzione di indipendenza di Kleinrock permette di descrivere lo stato di una rete di sistemi a coda.

n_i # pkt o utenti nell' i-esimo sist. a coda
$i = 1, 2, \ldots, M$

stato della rete di code $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$

Teor. di Jackson

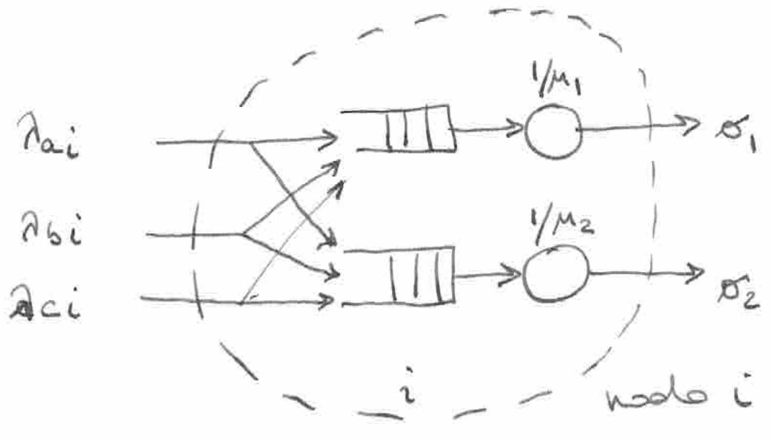
All'equilibrio, la prob. che il sistema (rete di code) sia nello stato $\underline{n}$ è data dal prodotto delle prob. di stato di ogni sistema a coda che lo compone

$$\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$$

$$\mathbb{P}\{\underline{n}\} = P_1(n_1)\, P_2(n_2) \times \ldots \times P_M(n_M)$$

$M = 5$
$\underline{n} = (1, 2, 1, 5, \emptyset)$
$\mathbb{P}\{(1,2,1,5,\emptyset)\} = P_1(1)\, P_2(2)\, P_3(1)\, P_4(5)\, P_5(\emptyset)$

$P_i(n_i)$ prob. che all'equilibrio l'i-esimo sist. a coda abbia n_i pkt o utenti.



nodo i, 3 ingr. e 2 uscite

λ_s ritmo arrivi da esterno rete (sorgente)

μ_d ritmo partenze verso destinazione

I_{ij} matrice di instradamento: prob. che un pkt dal sistema i venga instradato verso il sistema j
$i = s, 1, 2, \ldots, M$ $\quad j = d, 1, 2, \ldots, M$

Traccia dimostrazione

$\underline{1}_i$ vettore di M elementi tutti a $\emptyset$ eccetto l'i-esimo che vale 1

$$(0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & i & M \end{array}$$

$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$

$\underline{n} - \underline{1}_i$: sistema i è nello stato $n_i - 1$

$\underline{n} + \underline{1}_i$: sistema i è nello stato $n_i + 1$

$$\begin{aligned} &(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_M) \\ +&(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ =&(n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i+1, n_{i+1}, \dots, n_M) \end{aligned}$$

- Tasso di ingresso nello stato $\underline{n}$

per ogni i

$$\sum_{i=1}^{M} I_{si} \lambda_s \, \mathbb{P}\{\underline{n} - \underline{1}_i\} \quad (n_i)-1 \rightarrow n_i$$
← ingresso da sorgente

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} I_{ji} \mu_j \, \mathbb{P}\{\underline{n} - \underline{1}_i + \underline{1}_j\}$$
← partenza da j verso i

$$+ \sum_{i=1}^{M} I_{id} \mu_i \, \mathbb{P}\{\underline{n} + \underline{1}_i\}$$
← uscita verso destinaz.

- Tasso di uscita dallo stato $\underline{n}$

$$\mathbb{P}\{\underline{n}\} \left(\lambda_s + \sum_{i=1}^{M} \mu_i\right)$$
← ingr. da sorg. o partenza da qualsiasi nodo

In condizione di stazionarietà i tassi di ingr. e uscita dallo stato $\underline{n}$ sono uguali.

Inoltre
$$\lambda_i = I_{si} \lambda_s + \sum_{j=1}^{M} I_{ji} \lambda_j$$
arrivi da esterno o altro nodo

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{M} I_{id} \lambda_i$$
conservazione flusso tra sorg. e dest.

Quindi, da un sistema connesso la prob. di stato è il prodotto delle singole prob. di stato dei sottosistemi.

PARAMETRI CARATTERISTICI DI UNA RETE DI CODE

Numero medio pkt (o utenti) nella rete di code

$$L_S = \sum_{i=1}^{M} E\{n_i\} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\rho_i}{1-\rho_i} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i}$$

$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$

Tempo medio speso da un pkt (o utente) nella rete (da Little)

$$W_S = \frac{1}{\lambda_S} \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i}$$

In realtà, considerando anche i ritardi di propagazione τ_i nella linea di uscita del sistema i, $\forall i$:

$$W_S = \frac{1}{\lambda_S} \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \left[\frac{1}{\mu_i - \lambda_i} + \tau_i \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda_S} \sum_{i=1}^{M} f_i \left[\frac{1}{C_i - f_i} + \hat{\tau}_i \right]$$

con $C_i = \mu_i E\{F\}$ vel. trasm. linea in uscita bit/s.

$f_i = \lambda_i E\{F\}$ tasso medio arrivi in bit/s.

$\hat{\tau}_i = \tau_i / E\{F\}$

In condizioni di stazionarietà (flussi di ingresso e uscita dallo stato $\underline{n}$ uguali) si ha

$$\mathbb{P}\{\underline{n}\}\left(\lambda_s + \sum_{i=1}^{M} \mu_i\right) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_s I_{si}\, \mathbb{P}\{\underline{n} - \underline{1}_i\} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} I_{ji}\mu_j \times \mathbb{P}\{\underline{n} - \underline{1}_i + \underline{1}_j\} + \sum_{i=1}^{M} I_{id}\, \mu_i\, \mathbb{P}\{\underline{n} + \underline{1}_i\}$$

Per Burke $\lambda_s = \sum_{i=1}^{M} I_{id}\lambda_i$, $\lambda_i = \sum_{j} I_{ji}\lambda_j = I_{si}\lambda_s + \sum_{j=1}^{M} I_{ji}\lambda_j$

da cui $I_{si}\lambda_s = \lambda_i - \sum_{j=1}^{M} I_{ji}\lambda_j$

$$\overbrace{\mathbb{P}\{\underline{n}\}\sum_{i=1}^{M} I_{id}\lambda_i}^{1} + \overbrace{\mathbb{P}\{\underline{n}\}\sum_{i=1}^{M}\mu_i}^{2} = \overbrace{\sum_{i=1}^{M}\lambda_i\, \mathbb{P}\{\underline{n} - \underline{1}_i\}}^{5}$$

$$\overbrace{-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} I_{ji}\lambda_j\, \mathbb{P}\{\underline{n} - \underline{1}_i\}}^{3}$$

$$\underbrace{+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} I_{ji}\mu_j\, \mathbb{P}\{\underline{n} - \underline{1}_i + \underline{1}_j\}}_{6}$$

$$+\underbrace{\sum_{i=1}^{M} I_{id}\,\mu_i\, \mathbb{P}\{\underline{n} + \underline{1}_i\}}_{4}$$

① + ② + ③ = ④ + ⑤ + ⑥

⇒ Simili alle equazioni di evoluzione dello stato

La soluzione all'equilibrio richiede

1 = 4 e 3 = 6

da cui

$$\mathbb{P}\{\underline{n}\} \sum_{i=1}^{M} \mu_i = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \, \mathbb{P}\{\underline{n}-\underline{1}_i\}$$

e uguagliando ogni elemento

$$\lambda_i \, \mathbb{P}\{\underline{n}-\underline{1}_i\} = \mu_i \, \mathbb{P}\{\underline{n}\}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\{\underline{n}\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mathbb{P}\{\underline{n}-\underline{1}_i\}$$

$$= \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mathbb{P}\{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_M\}$$

iterando n_i volte

$$\mathbb{P}\{\underline{n}\} = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \mathbb{P}\{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, \emptyset, n_{i+1}, \dots, n_M\}$$

9

Ripetendo su tutti i sistemi a code si ottiene

$$\mathbb{P}\{\underline{n}\} = \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \mathbb{P}\{\underline{\varnothing}\}$$

stato iniziale nullo su tutti i sistemi a code

La condizione di normalizzazione risulta in

$$\sum_{\underline{n}} \mathbb{P}\{\underline{n}\} = 1 \qquad \text{evento certo}$$

da cui

$$\mathbb{P}\{\varnothing\} \sum_{\underline{n}} \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{\underline{n}} \prod_{i=1}^{M} \alpha_i^{n_i} &= \sum_{\underline{n}} \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \cdots \alpha_M^{n_M} \\ &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_M} \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \cdots \alpha_M^{n_M} \\ &= \sum_{n_1} \alpha_1^{n_1} \sum_{n_2} \alpha_2^{n_2} \cdots \sum_{n_M} \alpha_M^{n_M} \\ &= \prod_{i=1}^{M} \sum_{n_i} \alpha_i^{n_i} \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\{\underline{\varnothing}\} = \left[\sum_{\underline{n}} \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \right]^{-1}$$

Il sistema ha soluzione se la produttoria è finita per cui

$$\mathbb{P}\{\varnothing\} = \left[\prod_{i=1}^{M} \sum_{n_i=\varnothing}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \right]^{-1} = \left[\prod_{i=1}^{M} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \right]^{-1}$$

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\{\underline{n}\} = \frac{\prod_{i=1}^{M} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i}}{\prod_{i=1}^{M} \frac{1}{1-\frac{\lambda_i}{\mu_i}}} = \prod_{i=1}^{M} \rho_i^{\,n_i}(1-\rho_i)$$

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{M} P_{n_i}(\rho_i) \qquad \checkmark$$

Dato un sistema connesso la prob. di stato è il prodotto delle singole probabilità di stato dei singoli sistemi (indip. di Kleinrock).