

Esercizi sull'analisi dell'errore
Prof. V. Ruggiero

1. Con il metodo dell'analisi in avanti degli errori, determinare l'errore algoritmico relativo nel caso del calcolo delle espressioni:

$$(x \cdot y) \cdot z \quad \text{e} \quad x \cdot (y \cdot z)$$

2. Si consideri un elaboratore con aritmetica finita caratterizzata da base $\beta = 10$, 4 cifre per la rappresentazione della mantissa ($t = 4$) e aritmetica con arrotondamento. Dati i tre numeri:

$$a = 0.1580 \quad b = 0.626633678429 \cdot 10^2 \quad c = 0.8999 \cdot 10^4$$

sommarli prima in ordine crescente, poi in ordine decrescente, confrontando i risultati ottenuti con il risultato esatto.

3. Assegnati i seguenti numeri finiti ($\beta = 10$, $t = 5$, arrotondamento) determinare, operando nell'aritmetica dei numeri finiti, il numero:

$$\text{fl}(x^2 - y^2)$$

con $x = 0.11240 \cdot 10^2$ e $y = 0.11241 \cdot 10^2$. Calcolare l'errore assoluto e quello relativo.

4. Valutare l'errore inerente e quello algoritmico nel calcolo dell'espressione:

$$f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}} \quad x \geq 1$$

Esistono valori di x per cui il problema è mal condizionato? Esiste una formulazione più stabile?

5. Con la tecnica dell'analisi in avanti, calcolare l'errore algoritmico delle espressioni: $\text{fl}(x \cdot (y + z))$ e $\text{fl}(x \cdot y + x \cdot z)$. Si suppone che i dati appartengano all'insieme dei numeri finiti.

6. Valutare l'errore inerente e algoritmico nel calcolo dell'espressione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)} - \sqrt{x}} \quad x \geq 0$$

Riformulare l'espressione in modo da evitare cancellazione. Valutare quale delle due formulazioni è più stabile per $x = 10^4$ e per $x = 10^{-4}$.

7. Valutare l'errore inerente nel calcolo della seguente espressione e dire se esistono valori di x per cui si ha mal condizionamento:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^4 + 1)} - x^2}$$

Calcolare l'errore algoritmico nel caso in cui l'espressione sia valutata secondo la formulazione con cui è espressa. Riformulare l'espressione in modo da evitare cancellazione.

8. Valutare l'errore inerente nel calcolo dell'espressione:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Calcolare l'errore algoritmico nel caso in cui l'espressione sia valutata secondo la formulazione con cui è espressa. Esiste una formulazione più stabile?

9. Valutare l'errore inerente nel calcolo dell'espressione:

$$f(x) = e^{x/(x-1)}$$

Esistono valori di x per cui il calcolo della funzione è mal condizionato? Calcolare l'errore algoritmico nel caso in cui l'espressione sia valutata secondo la formulazione con cui è espressa. Esistono valori di x per cui l'algoritmo è numericamente stabile? (Provare per $x = 2$ e per $x = -2$).

10. Fare l'analisi dell'errore totale delle seguenti espressioni, dicendo per ciascuna di esse quale è il modo più conveniente di calcolarle:

$$\begin{array}{ll}
 (x+y)+z & x+(y+z) \\
 (xy)z & x(yz) \\
 (a+b)/2 & a+(b-a)/2 \quad (\text{con } a < b) \\
 \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2} & \frac{-2}{p+\sqrt{p^2+4}} \\
 x(y+z) & xy+xz
 \end{array}$$

11. Trovare un modo per riformulare le seguenti espressioni in modo da evitare cancellazione ($|x| \ll 1$):

$$\begin{array}{l}
 (1+2x)^{-1} - (1-x)(1+x)^{-1} \\
 (1+x^2)^{1/2} - (1-x^2)^{1/2}
 \end{array}$$

12. Con il metodo dell'analisi in avanti dell'errore determinare una maggiorazione dell'errore relativo di arrotondamento per le espressioni

$$\begin{array}{l}
 x+y+z \\
 x \cdot y \cdot z \\
 x^2 - y^2 \\
 (x+y) \cdot (x-y)
 \end{array}$$

Si suppone di lavorare in aritmetica finita con base $\beta = 10$ e $t = 8$.

13. Operando con base $\beta = 10$ e $t = 5$ in aritmetica finita, determinare le radici dell'equazione $x^2 - 56x + 1 = 0$ e dell'equazione $x^2 + 111.11x + 1.2121 = 0$.
14. Operando con base $\beta = 10$ e $t = 8$, determinare le radici di

$$x^2 - 10x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + 1000.01x - 2.524531500 = 0$$