Istituzioni di Matematica

Docente: Prof. M.D. Rosini

email: massimilianodaniele.rosini@unife.it

Corso di Laurea in Informatica

Università Degli Studi Di Ferrara

a.a. 2022-2023

Limiti e continuità di funzioni

Indice

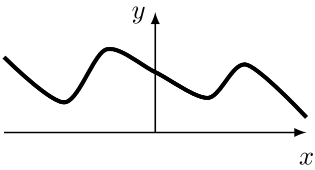
Sezione 1 Limite e continuità puntuali

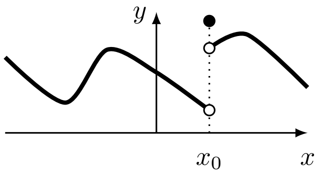
Una delle prime proprietà di una funzione da studiare è la sua continuità.

In maniera non rigorosa, una funzione definita su $\mathbb{R}$ è continua se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

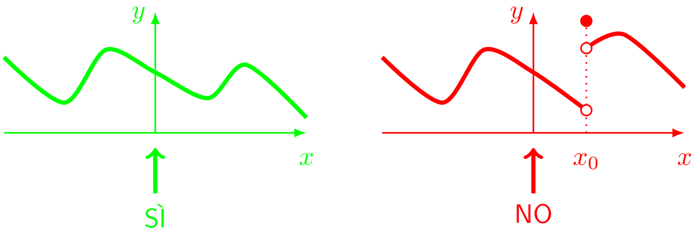
- il grafico è una singola curva ininterrotta (nel disegnarla non si alza mai la penna),
- la funzione non ha istantanei cambiamenti di valore, noti come discontinuità,
- piccoli cambiamenti nell'input della funzione comportano piccoli cambiamenti nel suo output.

Quale dei seguenti grafici corrisponde ad una funzione continua?





Quale dei seguenti grafici corrisponde ad una funzione continua?



È intuitivamente chiaro che il grafico a sinistra corrisponde ad una funzione continua, mentre quello a destra corrisponde ad una funzione discontinua che ha una discontinuità in x_0.

Prima di dare una definizione rigorosa di funzione continua, serve introdurre il concetto di limite di funzione, che a sua volta utilizza la nozione di punto di accumulazione.

punto di accumulazione $\longrightarrow$ limite $\longrightarrow$ continuità

Definizione

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è **punto di accumulazione** per l'insieme A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste (almeno) un elemento x diverso da x_0 ed appartenente ad $A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di A è detto **insieme derivato** di A e si indica con A'.

Osservazione

- Un punto di A' potrebbe non appartenere ad A.
- Un punto di A potrebbe non appartenere ad A'.

Esempio

L'insieme $A = (-1, 1) \cup \{2\}$ ha insieme derivato $A' = [-1, 1]$, quindi -1 ed 1 appartengono ad A' ma non ad A, mentre 2 appartiene ad A ma non ad A'.

Osservazione

- Un insieme potrebbe non avere punti di accumulazione.
  Ad esempio, sia $A = \{0\}$ che $\mathbb{N}$ non hanno punti di accumulazione: $A' = \emptyset$ ed $\mathbb{N}' = \emptyset$.

Esercizio

Verificare che il derivato di $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ è $A' = \{0\}$.

Definizione

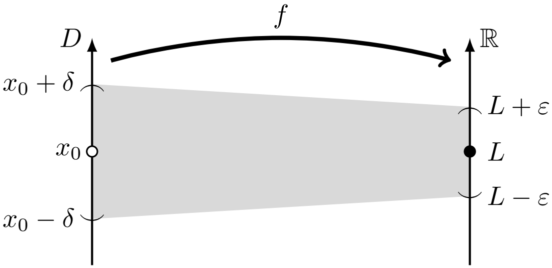
Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ ed $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- Il **limite** per $x \in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $L \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che}$$
$$|f(x) - L| < \varepsilon \; \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta$$

ed in tal caso si dice che f **converge ad L** per x che tende ad x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$



Definizione

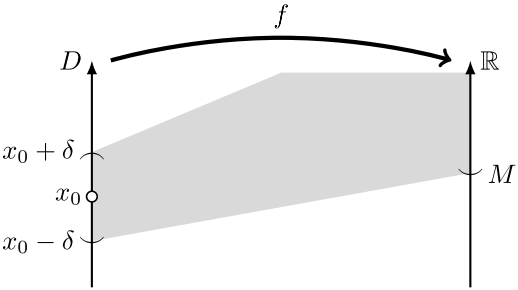
Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ ed $f \colon D \to \mathbb{R}$.

- Il **limite** per $x \in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $+\infty$ se

  $$\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ tale che}$$
  $$f(x) > M \ \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta$$

  ed in tal caso si dice che f **diverge a $+\infty$** per x che tende ad x_0 e si scrive

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$



Definizione

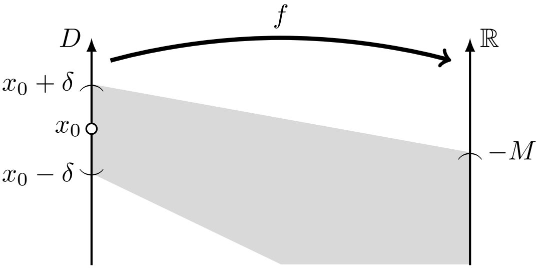
Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ ed $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- Il **limite** per $x \in D$ che tende ad x_0 della funzione f è $-\infty$ se

$$\begin{gathered}\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ tale che} \\ f(x) < -M\ \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta\end{gathered}$$

ed in tal caso si dice che f **diverge a $-\infty$** per x che tende ad x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$



Definizione

Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ ed $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- f è **regolare** in x_0 se il suo limite per x che tende ad x_0 esiste finito o infinito.
- f è **irregolare** in x_0 se non è regolare in x_0. In tal caso si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste.

Osservazione

Dimostrare la convergenza di f ad L, cioè che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, può essere visto come un gioco: il giocatore A assegna un $\varepsilon > 0$ ed il giocatore B deve cercare un $\delta > 0$ che "funziona".

In generale a valori diversi di ε corrispondono valori diversi di δ, ovvero in generale δ dipende da ε, cioé $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Di solito più ε è piccolo, più $\delta = \delta(\varepsilon)$ è piccolo e quindi difficile da trovare. Per questo motivo il giocatore A darà valori di $\varepsilon > 0$ piccoli per mettere in difficoltà il giocatore B.

Dubbio sull'unicità del limite

Può una funzione convergere a due numeri distinti?

Dubbio sull'unicità del limite

Può una funzione convergere a due numeri distinti?

Per sciogliere questo dubbio ragioniamo per assurdo. Assumiamo per assurdo che una funzione f converga sia ad L_1 che L_2, con L_1 ed L_2 distinti, cioè $L_1 \neq L_2$. Per definizione si ha

$$\left.\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_i > 0 \text{ tale che} \\ |f(x) - L_i| < \varepsilon \ \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_i \end{cases}\right\} \quad \text{per } i \in \{1, 2\}.$$

Posto $\varepsilon = |L_1 - L_2|/2$, utilizzando la disuguaglianza triangolare, per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si ha

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leqslant |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = |L_1 - L_2| \end{aligned}$$

e quindi risulta $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$: un assurdo!

Definizione

Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ed $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- Si dice che f è **continua in x_0** se $x_0 \in D \setminus D'$, oppure $x_0 \in D'$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Si dice che f è **continua** se è continua in ogni punto di D.

Osservazione

Per definizione, $f\colon D \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in D \cap D'$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero

$$\begin{array}{l}\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } \forall x \in D \text{ con} \\ |x - x_0| < \delta \text{ risulta } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.\end{array}$$

Si noti che, a differenza di quanto richiesto nella definizione di limite puntuale, nella condizione appena data per la continuità si ha:

- $x_0 \in D$;
- la x può assumere il valore x_0 in quanto non si richiede che $0 < |x - x_0|$.

Definizione

Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ed $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- Si dice che f è **continua in x_0** se $x_0 \in D \setminus D'$, oppure $x_0 \in D'$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Si dice che f è **continua** se è continua in ogni punto di D.

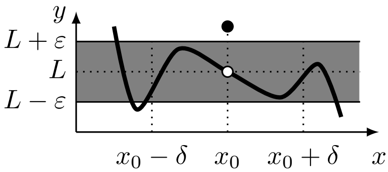
Osservazione

- $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon,$
- $0 < |x - x_0| < \delta \quad \iff x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$

Osservazione

Lo studio del limite puntuale è utile nello studio del grafico di una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$, specie (ma non solo!) nei punti x_0 di accumulazione di D che non appartengono a D, cioè $x_0 \in D' \setminus D$.

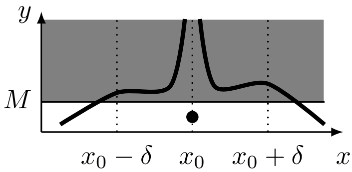
- Se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
allora $f(x)$ è tanto più vicino ad L quanto più $x \neq x_0$ è vicino ad x_0. Infatti per definizione per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che i punti del grafico $(x, f(x))$ appartengono alla striscia $\mathbb{R} \times (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$.



Osservazione

Lo studio del limite puntuale è utile nello studio del grafico di una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$, specie (ma non solo!) nei punti x_0 di accumulazione di D che non appartengono a D, cioè $x_0 \in D' \setminus D$.

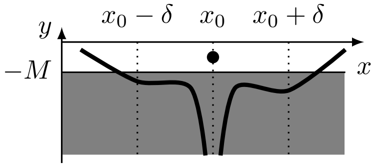
- Se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$
allora $f(x)$ è tanto più grande quanto più $x \neq x_0$ è vicino ad x_0. Infatti per definizione per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che i punti del grafico $(x, f(x))$ appartengono al semipiano $\mathbb{R} \times (M, +\infty)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.



Osservazione

Lo studio del limite puntuale è utile nello studio del grafico di una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$, specie (ma non solo!) nei punti x_0 di accumulazione di D che non appartengono a D, cioè $x_0 \in D' \setminus D$.

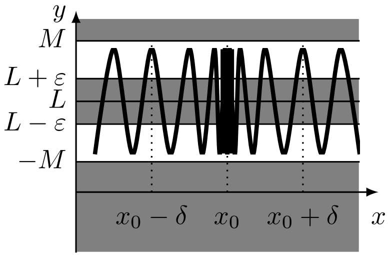
- Se
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$
allora $f(x)$ è tanto più piccolo quanto più $x \neq x_0$ è vicino ad x_0. Infatti per definizione per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che i punti del grafico $(x, f(x))$ appartengono al semipiano $\mathbb{R} \times (-\infty, -M)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.



Osservazione

Lo studio del limite puntuale è utile nello studio del grafico di una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$, specie (ma non solo!) nei punti x_0 di accumulazione di D che non appartengono a D, cioè $x_0 \in D' \setminus D$.

- Se f è irregolare in x_0, allora per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$, esiste un $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ tale che $|f(x_1) - L| > \varepsilon$, ed inoltre esiste $M > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$, esistono $x_2, x_3 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ tali che $f(x_2) < M$ ed $f(x_3) > -M$.



Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Esempio

Verificichiamo che

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, la condizione richiesta dalla definizione di limite puntuale è soddisfatta prendendo $\delta = \varepsilon$ perché con tale scelta si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - 0| < \delta$ risulta $||x| - 0| = |x| < \varepsilon$.

Esempio

Verifichiamo che $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Esempio

Verifichiamo che $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

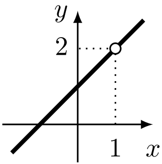
Osserviamo che f non è definita in $x_0 = 1$, che il suo dominio di definizione è $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e che $1 \in D' = \mathbb{R}$. Per ogni $x \in D$ si ha che

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$, la condizione richiesta dalla definizione di limite puntuale è soddisfatta con $\delta = \varepsilon > 0$ perché con tale scelta si ha che per ogni $x \in D$ con $0 < |x-1| < \delta$ risulta

$$|f(x) - L| = |(x+1) - 2| = |x-1| < \delta = \varepsilon.$$

Questo trova riscontro nel grafico di f.



Esempio

Verifichiamo che $$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2} = +\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2} = +\infty$.

Osserviamo che f non è definita in $x_0 = 0$, che il suo dominio di definizione è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e che $0 \in D' = \mathbb{R}$. Fissato $M > 0$, risulta

$$f(x) > M \iff f(x) - M = \frac{x+1}{x^2} - M = \frac{-M\,x^2 + x + 1}{x^2} > 0$$

$$\iff M\,x^2 - x - 1 < 0 \iff \frac{1-\sqrt{1+4M}}{2M} < x < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M}.$$

Osserviamo che

$$\frac{1-\sqrt{1+4M}}{2M} < 0 < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M}$$

e che

$$\min\left\{-\frac{1-\sqrt{1+4M}}{2M}, \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M}\right\} = \frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M}.$$

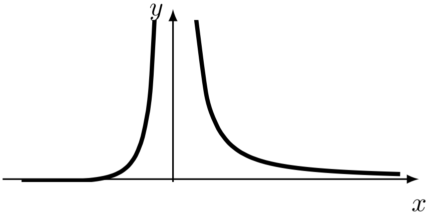
Esempio

Verifichiamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2} = +\infty$.

Pertanto la condizione richiesta dalla definizione di limite puntuale è soddisfatta con $\delta = \frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M} > 0$ perché

$$0 < |x| < \delta \Longrightarrow -\frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M} < x < \frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M}$$
$$\Longrightarrow \frac{1-\sqrt{1+4M}}{2M} < x < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M} \Longleftrightarrow f(x) > M.$$

Questo trova riscontro nel grafico di f.



Sezione 2 Proprietà di limiti e funzioni continue

Calcolare i limiti o verificare che una funzione è continua utilizzando solo le definizioni può essere abbastanza laborioso. Le proprietà dei limiti e delle funzioni continue ci possono però dare una mano.
Iniziamo mostrando che il limite puntuale commuta con le operazioni algebriche. Per semplicità consideriamo separatamente il caso in cui tutte le funzioni coinvolte convergono dal caso in cui almeno una di esse diverge.

Proposizione

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = G$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = F + G,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{se } g \neq 0 \text{ e } G \neq 0,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = F^G \quad \text{se } f^g \text{ e } F^G \text{ sono ben definiti,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \neq 0 = G \\ \bullet\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x)/g(x) > 0 \\ \quad \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \neq 0 = G \\ \bullet\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x)/g(x) < 0 \\ \quad \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Osservazione

Dal solo fatto che f converge ad $F \neq 0$ e g converge a zero per x che tende ad x_0, non i può dedurre che f/g diverge a $-\infty$ o a $+\infty$. Per poter asserire ciò, serve che f/g abbia un segno per x sufficientemente vicino ad x_0 ma distinto da x_0.

Infatti, come controesempio basta considerare $x_0 = 0$, $f(x) = 1$, $g(x) = x$ ed osservare che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.

Dimostrazione.

Dimostriamo la seconda uguaglianza, le altre sono lasciate come esercizio per casa. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono $\delta_f, \delta_g > 0$ tali che

$$|f(x) - F| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_f,$$
$$|g(x) - G| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_g.$$

Osserviamo che dalla disuguaglianza triangolare e la prima condizione segue che per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta_f$ risulta

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - F| + |F| < \varepsilon + |F|.$$

Posto $\delta = \max\{\delta_f, \delta_g\}$, per la disuguaglianza triangolare per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta

$$|f(x) \cdot g(x) - F \cdot G| = |(f(x) \cdot (g(x) - G)) + ((f(x) - F) \cdot G)|$$
$$\leqslant |f(x)| \cdot |g(x) - G| + |f(x) - F| \cdot |G| < (|F| + \varepsilon) \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot |G|.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. $\square$

Consideriamo ora il caso in cui almeno una delle funzioni coinvolte diverge.

Proposizione

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = F$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = +\infty$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = F \pm (+\infty) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(g(x) + h(x)\big) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(-g(x) - h(x)\big) = -(+\infty) - (+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = F \cdot (+\infty) \begin{cases} +\infty \text{ se } F > 0, \\ -\infty \text{ se } F < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(g(x) \cdot h(x)\big) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{+\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = F^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } F > 1, \\ 0 & \text{se } |F| < 1, \\ \nexists & \text{se } F \leqslant -1, \end{cases} \qquad \text{se } f^g \text{ è ben definita.}$$

Osservazione

Visto che g ed h divergono per x che tende ad x_0, si ha che esse non sono ben definite in x_0 e quindi $x_0 \in D' \setminus D$.

Dimostrazione.

Dimostriamo la penultima uguaglianza, mentre le altre sono lasciate come esercizio per casa. Sia $\varepsilon > 0$ e poniamo $M = 1/\varepsilon$. Per ipotesi esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha

$$|f(x) - F| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |g(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pertanto per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{|f(x) - F| + |F|}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon + |F|}{1/\varepsilon} = (|F| + \varepsilon)\,\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. □

Dimostriamo che il limite preserva l'ordinamento.

Teorema della permanenza del segno

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ convergente ad L per x che tende ad $x_0 \in D'$.

(1) Se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $L \geqslant 0$.

(2) Se $L > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$.

Osservazione

Si noti che in **(1)** la disuguaglianza non può essere "stretta". Infatti, ad esempio, si ha che $f(x) = x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e converge ad $L = 0$ per x che tende a $x_0 = 0$. Dunque, in parole povere

$$f > 0 \qquad \not\Rightarrow \qquad L > 0.$$

Dimostrazione.

(1) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Allora per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_\varepsilon, \delta\}$ si ha

$$0 \leqslant f(x) < L + \varepsilon \Longrightarrow L + \varepsilon > 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha che $F \geqslant 0$.

(2) Per ipotesi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$. Prendendo $\varepsilon = L > 0$ si ha che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta

$$|f(x) - L| < L \Longleftrightarrow -L < f(x) - L < L \Longrightarrow 0 < f(x). \qquad \square$$

Teorema del confronto

Siano $f, g, h \colon D \to \mathbb{R}$ convergenti rispettivamente ad F, G, H per x che tende ad $x_0 \in D'$.

(1) Se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $F \leqslant G \leqslant H$.

(2) Se $F < G < H$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) < g(x) < h(x)$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$.

Dimostrazione.

Segue dal teorema della permanenza del segno applicato alle funzioni $h - g, g - f \colon D \to \mathbb{R}$ e dal fatto che $\lim_{x \to x_0} (h - g)(x) = H - G$ e $\lim_{x \to x_0} (g - f)(x) = G - F$.

I dettagli sono lasciati come esercizio per casa. □

Teorema dei carabinieri o del sandwich

Date $f, g, h\colon D \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in D'$, si ha che

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\ \quad \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

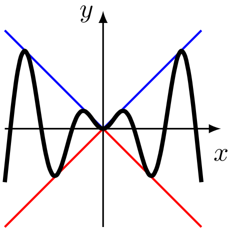
Dimostrazione.

Segue dal teorema del confronto. I dettagli sono lasciati come esercizio per casa. $\square$

Esempio

Dal teorema dei carabinieri segue che

$$\lim_{x \to 0} x \sin(x) = 0$$



in quanto

$$-|x| \leqslant x \sin(x) \leqslant |x|$$

ed inoltre per quanto già visto si ha che

$$\lim_{x \to 0} (-|x|) = 0 = \lim_{x \to 0} |x|.$$

Esempio

Per verificare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

basta osservare che

$$[x] \leqslant x < [x] + 1 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leqslant 1$$

ed applicare il teorema dei carabinieri.

Teorema del limite delle funzioni composte

Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ tali che $f(A) \subset B$. Se si ha che

(1) $x_0 \in A'$ ed esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$,

(2) esiste $\delta_{x_0} > 0$ tale che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$,

(3) $y_0 \in B'$ ed esiste finito $\lim_{y \to y_0} g(y) = L \in \mathbb{R}$,

allora

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = L.$$

Il risultato vale anche nei casi in cui $y_0 = \pm\infty$ e/o $L = \pm\infty$.

Dimostrazione.

Consideriamo il caso $y_0, L \in \mathbb{R}$; gli altri casi sono lasciati come esercizio per casa. Per (3), $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_g = \delta_g(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall y \in B$ con $0 < |y - y_0| < \delta_g$ risulta $|g(y) - L| < \varepsilon$. D'altra parte per (1), $\exists \delta_f = \delta_f(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta_f$ si ha $|f(x) - y_0| < \delta_g$. Infine per (2), posto $\delta = \min\{\delta_f, \delta_{x_0}\}$, risulta che se $0 < |x - x_0| < \delta$ allora $0 < |f(x) - y_0| < \delta_g$ e quindi $\big|g\big(f(x)\big) - L\big| < \varepsilon$. $\square$

Teorema del limite delle funzioni inverse

Sia $f\colon A \to B$ una funzione invertibile. Se si ha che

(1) $x_0 \in A'$ ed esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R},$$

(2) $y_0 \in B'$ ed esiste finito

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = L \in A,$$

allora $L = x_0$ e

$$\lim_{x \to x_0} (f^{-1} \circ f)(x) = x_0.$$

Il risultato vale anche nei casi in cui $y_0 = \pm\infty$ e/o $L = \pm\infty$.

Dimostrazione.

Basta applicare il teorema del limite delle funzioni composte osservando che la condizione condizione $(\mathbf{2})$ segue dalla iniettività di f. $\square$

Dalle proprietà appena dimostrate per i limiti seguono le seguenti proprietà per la continuità.

Proposizione

Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon D \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in D \cap D'$ allora lo sono anche

$$\begin{aligned} f+g\colon D &\to \mathbb{R}, \\ f-g\colon D &\to \mathbb{R}, \\ f\cdot g\colon D &\to \mathbb{R}, \\ \frac{f}{g}\colon D &\to \mathbb{R} \qquad \text{se } g(x) \neq 0 \ \forall x \in D, \\ f^g\colon D &\to \mathbb{R} \qquad \text{se } f(x)^{g(x)} \text{ è ben definita } \ \forall x \in D. \end{aligned}$$

Proposizione

Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in D \cap D'$.

(1) Se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $f(x_0) \geqslant 0$.

(2) Se $f(x_0) > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$ con $|x - x_0| < \delta$.

Dimostrazione.

(1) Per ipotesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$. Dal teorema della permanenza del segno segue allora che $f(x_0) \geqslant 0$.

(2) Per ipotesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$. Dal teorema della permanenza del segno segue che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$. Visto che $f(x_0) > 0$, si ha che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$ con $|x - x_0| < \delta$. $\square$

Proposizione

Siano $f, g, h\colon D \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in D \cap D'$.

(1) Se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $f(x_0) \leqslant g(x_0) \leqslant h(x_0)$.

(2) Se $f(x_0) < g(x_0) < h(x_0)$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) < g(x) < h(x)$ per ogni $x \in D$ con $|x - x_0| < \delta$.

Proposizione

Siano $f, g, h\colon D \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in D \cap D'$. Se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, allora

$$f(x_0) = h(x_0) \Longrightarrow g(x_0) = f(x_0) = h(x_0).$$

Proposizione

Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ tali che $f(A) \subset B$. Se si ha che

(1) $x_0 \in A' \cap A$ ed f è continua in x_0,

(2) $y_0 \in B' \cap B$ e g è continua in y_0,

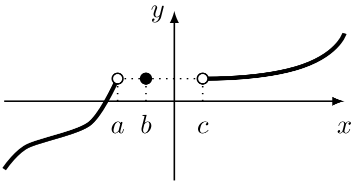
allora anche $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Proposizione

Se $f\colon A \to B$ è una funzione invertibile e continua in $x_0 \in A \cap A'$, allora la sua funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$ è continua in $y_0 = f(x_0)$.

Esercizio

Sia $f\colon D \to f(D)$ la funzione avente il grafico riportato in figura, dove $D = (-\infty, a) \cup \{b\} \cup (c, +\infty)$.



Dopo essersi convinti che f è invertibile e continua in D, disegnare il grafico di f^{-1} ed osservare che f^{-1} non è continua in $f(D)$. Perché questo non contraddice quanto asserito nella proposizione precedente?

Sezione 3 Alcune funzioni continue elementari

Proposizione

La funzione modulo è una funzione continua in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $x_0 > 0$, allora $\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = |x_0|$. Se invece $x_0 < 0$, allora $\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} (-x) = -x_0 = |x_0|$. Infine, se $x_0 = 0$ allora basta ricordare che abbiamo già dimostrato che $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$. $\square$

Proposizione

I polinomi sono funzioni continue in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Basta osservare che le funzioni costanti sono continue, la funzione $x \mapsto x$ è continua e che sia la somma che il prodotto di funzioni continue sono funzioni continue. $\square$

Proposizione

Fissato $a > 0$ si ha che $f(x) = a^x$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, vogliamo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Consideriamo il caso $a > 1$. Fissato $\varepsilon \in (0, a^{x_0})$, poniamo

$$\delta = \min \left\{ \log_a(1 + \varepsilon a^{-x_0}), -\log_a \left(1 - \varepsilon a^{-x_0}\right) \right\} > 0.$$

Se $0 < |x - x_0| < \delta$ allora

$$\log_a(1 - \varepsilon a^{-x_0}) \leqslant -\delta < x - x_0 < \delta \leqslant \log_a(1 + \varepsilon a^{-x_0})$$

e quindi

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0} \left(a^{x - x_0} - 1\right) < a^{x_0} \left(a^{\log_a(1+\varepsilon a^{-x_0})} - 1\right) = \varepsilon,$$

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0} \left(a^{x - x_0} - 1\right) > a^{x_0} \left(a^{\log_a\left(1-\varepsilon a^{-x_0}\right)} - 1\right) = -\varepsilon,$$

ovvero $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$. $\square$

Proposizione

Fissato $0 < a \neq 1$ si ha che $f(x) = \log_a(x)$ è continua in $(0, +\infty)$.

Dimostrazione.

Visto che f è la funzione inversa di $x \mapsto a^x$, che abbiamo già dimostrato essere continua, e visto che ogni punto di $(0, +\infty)$ è un suo punto di accumulazione, si ha che anche f è continua. $\square$

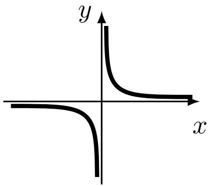
Proposizione

Le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente sono continue nel loro dominio di definizione.

Sezione 4 Limiti destro e sinistro

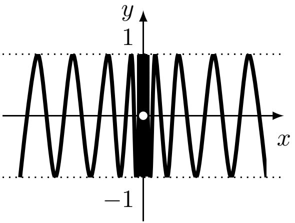
Esempio

La funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$ non è regolare in $x_0 = 0 \in D' \setminus D$. Per capirlo basta disegnare il suo grafico, che è l'iperbole equilatera.



Esempio

La funzione $g\colon D \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \sin(1/x)$ non è regolare in $x_0 = 0 \in D' \setminus D$. Per capirlo basta disegnare il suo grafico.



Sia la funzione $f(x) = 1/x$ che $g(x) = \sin(1/x)$ sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non sono regolari in $x_0 = 0$. Eppure c'è una bella differenza tra le oscillazioni di g ed il comportamento di f vicino a 0. Infatti f è regolare in 0 se la restringiamo a $(-\infty, 0)$ o a $(0, +\infty)$ mentre g non lo è. Questo motiva l'introduzione della seguente definizione.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$ non sono vuoti ed x_0 è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+ (e quindi anche per D).

- f ha **limite sinistro** $L \in \mathbb{R}$ per x che tende ad x_0 da sinistra se

  $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(x) - L| < \varepsilon \; \forall x \in D^- \text{ con } -\delta < x - x_0 < 0,$$

  ed in tal caso si scrive
  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Sia la funzione $f(x) = 1/x$ che $g(x) = \sin(1/x)$ sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non sono regolari in $x_0 = 0$. Eppure c'è una bella differenza tra le oscillazioni di g ed il comportamento di f vicino a 0. Infatti f è regolare in 0 se la restringiamo a $(-\infty, 0)$ o a $(0, +\infty)$ mentre g non lo è. Questo motiva l'introduzione della seguente definizione.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$ non sono vuoti ed x_0 è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+ (e quindi anche per D).

- f ha **limite sinistro** $+\infty$ per x che tende ad x_0 da sinistra se

  $$\forall M > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } f(x) > M \; \forall x \in D^- \text{ con } -\delta < x - x_0 < 0,$$

  ed in tal caso si scrive
  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Sia la funzione $f(x) = 1/x$ che $g(x) = \sin(1/x)$ sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non sono regolari in $x_0 = 0$. Eppure c'è una bella differenza tra le oscillazioni di g ed il comportamento di f vicino a 0. Infatti f è regolare in 0 se la restringiamo a $(-\infty, 0)$ o a $(0, +\infty)$ mentre g non lo è. Questo motiva l'introduzione della seguente definizione.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$ non sono vuoti ed x_0 è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+ (e quindi anche per D).

- f ha **limite sinistro** $-\infty$ per x che tende ad x_0 da sinistra se

  $$\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M \ \forall x \in D^- \text{ con } -\delta < x - x_0 < 0,$$

  ed in tal caso si scrive
  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Sia la funzione $f(x) = 1/x$ che $g(x) = \sin(1/x)$ sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non sono regolari in $x_0 = 0$. Eppure c'è una bella differenza tra le oscillazioni di g ed il comportamento di f vicino a 0. Infatti f è regolare in 0 se la restringiamo a $(-\infty, 0)$ o a $(0, +\infty)$ mentre g non lo è. Questo motiva l'introduzione della seguente definizione.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$ non sono vuoti ed x_0 è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+ (e quindi anche per D).

- f ha **limite destro** $L \in \mathbb{R}$ per x che tende ad x_0 da destra se

  $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(x) - L| < \varepsilon \; \forall x \in D^+ \text{ con } 0 < x - x_0 < \delta,$$

  ed in tal caso si scrive
  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Sia la funzione $f(x) = 1/x$ che $g(x) = \sin(1/x)$ sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non sono regolari in $x_0 = 0$. Eppure c'è una bella differenza tra le oscillazioni di g ed il comportamento di f vicino a 0. Infatti f è regolare in 0 se la restringiamo a $(-\infty, 0)$ o a $(0, +\infty)$ mentre g non lo è. Questo motiva l'introduzione della seguente definizione.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$ non sono vuoti ed x_0 è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+ (e quindi anche per D).

- f ha **limite destro** $+\infty$ per x che tende ad x_0 da destra se

  $$\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) > M \ \forall x \in D^+ \text{ con } 0 < x - x_0 < \delta,$$

  ed in tal caso si scrive

  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty.$$

Sia la funzione $f(x) = 1/x$ che $g(x) = \sin(1/x)$ sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non sono regolari in $x_0 = 0$. Eppure c'è una bella differenza tra le oscillazioni di g ed il comportamento di f vicino a 0. Infatti f è regolare in 0 se la restringiamo a $(-\infty, 0)$ o a $(0, +\infty)$ mentre g non lo è. Questo motiva l'introduzione della seguente definizione.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$ non sono vuoti ed x_0 è un punto di accumulazione sia per D^- che per D^+ (e quindi anche per D).

- f ha **limite destro** $-\infty$ per x che tende ad x_0 da destra se

  $$\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M \ \forall x \in D^+ \text{ con } 0 < x - x_0 < \delta,$$

  ed in tal caso si scrive
  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Osservazione

Se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x), \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b} f(x).$$

Proposizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D, $D^- = D \cap (-\infty, x_0)$ e $D^+ = D \cap (x_0, +\infty)$. Si ha allora che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Esempio

Disegnando il grafico si vede subito che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists, \qquad \lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists,$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists, \qquad \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists.$$

Esempio

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{-1/x} = \lim\limits_{y\to +\infty} \frac{e^{-y}}{y} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = \lim\limits_{y\to -\infty} \frac{e^{-y}}{y} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0} xe^{-1/x}.$$

Sezione 5 Limite all'infinito

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente ed $f \colon D \to I$.

- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $L \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists X = X(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(x) - L| < \varepsilon \ \forall x \in D \text{ con } x > X$$

  ed in tal caso si dice che f **converge ad L** per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

I limiti per $x \to -\infty$ si definiscono in maniera analoga.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente ed $f\colon D \to I$.

- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $+\infty$ se

$$\forall M > 0\ \exists X = X(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) > M\ \forall x \in D \text{ con } x > X$$

  ed in tal caso si dice che f **diverge a** $+\infty$ per $x \in D$ che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Il **limite** per $x \in D$ che tende a $+\infty$ della funzione f è $-\infty$ se

$$\forall M > 0\ \exists X = X(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M\ \forall x \in D \text{ con } x > X$$

  ed in tal caso si dice che f **diverge a** $-\infty$ per $x \in D$ che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

I limiti per $x \to -\infty$ si definiscono in maniera analoga.

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente ed $f\colon D \to I$.

- f è **regolare** a $+\infty$ se il suo limite per x che tende a $+\infty$ esiste finito o infinito.
- f è **irregolare** a $+\infty$ se non è regolare a $+\infty$. In tal caso si dice che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste.

I limiti per $x \to -\infty$ si definiscono in maniera analoga.

Osservazione

Assumiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$; considerazioni analoghe valgono per gli altri limiti. Dimostrare la convergenza di f ad L, cioè che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, può essere visto come un gioco: il giocatore A assegna un $\varepsilon > 0$ ed il giocatore B dove cercare un $X > 0$ che "funziona". Di solito più ε è piccolo, più $X = X(\varepsilon)$ è grande. Quindi il giocatore A darà valori di $\varepsilon > 0$ piccoli per mettere in difficoltà il giocatore B.

Ricordiamo anche la seguente terminologia: dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $f(x)$ *definitivamente* (cioè da un certo X in poi, senza specificare la X) appartiene all'intervallo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Esempio

$\lim_{x \to +\infty} x\big(2+\sin(x)\big) = +\infty$ in quanto $x\big(2+\sin(x)\big) \geqslant x$ e pertanto per ogni $M > 0$ basta prendere $X = M$.

Esempio

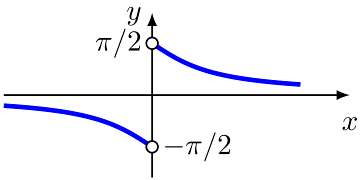
Osserviamo che

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \nexists,$$

ed inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Infine, data la monotonia di $x \mapsto \frac{1}{x}$ e di $x \mapsto \arctan(x)$, $f(x) = \arctan(1/x)$ è decrescente sia in $(-\infty, 0)$ ed in $(0, +\infty)$, per cui il suo grafico è quello riportato in figura.



Sezione 6 Forme indeterminate

Se durante il calcolo dei limiti giungiamo ad uno dei seguenti casi

$$(\pm\infty) + (\mp\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty},\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 0^0$$

allora abbiamo una **forma indeterminata**.

Vediamo come provare a "sciogliere" una forma indeterminata.

Se durante il calcolo dei limiti giungiamo ad uno dei seguenti casi

$$(\pm\infty) + (\mp\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 0^0$$

allora abbiamo una **forma indeterminata**.

Vediamo come provare a "sciogliere" una forma indeterminata.

- Se si ha la forma indeterminata

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{+\infty}{+\infty},$$

allora si raccoglie al numeratore il termine che va a $+\infty$ più velocemente e lo stesso si fa con il denominatore. Se f e g coinvolgono solo termini della forma x^a, allora il termine più veloce è quello con esponente maggiore. Se f e g hanno forme più generali, allora si può utilizzare la scala di crescita fornita più avanti.

Se durante il calcolo dei limiti giungiamo ad uno dei seguenti casi

$$(\pm\infty)+(\mp\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 0^0$$

allora abbiamo una **forma indeterminata**.

Vediamo come provare a “sciogliere” una forma indeterminata.

- Se si ha la forma indeterminata

  $$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty)-(+\infty),$$

  allora si utilizza il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ come segue

  $$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}.$$

  Il passo successivo consiste nel semplificare l'espressione del numeratore $f(x)-g(x)$ in modo da sciogliere la forma indeterminata.

Se durante il calcolo dei limiti giungiamo ad uno dei seguenti casi

$$(\pm\infty)+(\mp\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 0^0$$

allora abbiamo una **forma indeterminata**.

Vediamo come provare a “sciogliere” una forma indeterminata.

- Se si ha la forma indeterminata

$$\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty)-(+\infty),$$

allora si utilizza il prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ come segue

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)} &= \left(\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}\right)\frac{\sqrt[3]{f(x)^2}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g(x)^2}}{\sqrt[3]{f(x)^2}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g(x)^2}}\\ &= \frac{f(x)-g(x)}{\sqrt[3]{f(x)^2}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g(x)^2}}.\end{aligned}$$

Il passo successivo consiste nel semplificare l'espressione del numeratore $f(x)-g(x)$ in modo da sciogliere la forma indeterminata.

Se durante il calcolo dei limiti giungiamo ad uno dei seguenti casi

$$(\pm\infty) + (\mp\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty},\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 0^0$$

allora abbiamo una **forma indeterminata**.

Vediamo come provare a “sciogliere” una forma indeterminata.

- Per le altre forme indeterminate basta aguzzare l’ingegno. ;-)

Esempio

Verifichiamo che

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^2+x+e} = +\infty,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^{5/2}+x^2+x+e} = 1,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^3+x+e} = 0.$

Abbiamo delle forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{+\infty}$. Per scioglierle basta mettere in evidenza a numeratore e denominatore il termine che cresce più velocemente:

Esempio

Verifichiamo che

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^2+x+e} = +\infty,$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^{5/2}+x^2+x+e} = 1,$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^3+x+e} = 0.$$

Abbiamo delle forme indeterminate $\frac{+\infty}{+\infty}$. Per scioglierle basta mettere in evidenza a numeratore e denominatore il termine che cresce più velocemente:

$$\bullet \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^2+x+e} = \underbrace{\frac{x^{5/2}}{x^2}}_{=x^{1/2}} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\pi}{x^{5/2}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{e}{x^2}}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty)\cdot \frac{1+\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}+\frac{\pi}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{e}{+\infty}} = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$$

Esempio

Verifichiamo che

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^2+x+e} = +\infty,$
- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^{5/2}+x^2+x+e} = 1,$
- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^3+x+e} = 0.$

Abbiamo delle forme indeterminate $\frac{+\infty}{+\infty}$. Per scioglierle basta mettere in evidenza a numeratore e denominatore il termine che cresce più velocemente:

- $$\frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^{5/2}+x^2+x+e} = \underbrace{\frac{x^{5/2}}{x^{5/2}}}_{=1} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\pi}{x^{5/2}}}{1+\frac{1}{x^{1/2}}+\frac{1}{x^{3/2}}+\frac{e}{x^{5/2}}}$$
  $$\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1\cdot \frac{1+\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}+\frac{\pi}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}+\frac{e}{+\infty}} = 1\cdot 1 = 1$$

Esempio

Verifichiamo che

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^2+x+e} = +\infty,$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^{5/2}+x^2+x+e} = 1,$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^3+x+e} = 0.$

Abbiamo delle forme indeterminate $\frac{+\infty}{+\infty}$. Per scioglierle basta mettere in evidenza a numeratore e denominatore il termine che cresce più velocemente:

- $$\frac{x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}+\pi}{x^3+x+e} = \underbrace{\frac{x^{5/2}}{x^3}}_{=x^{-1/2}} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\pi}{x^{5/2}}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{e}{x^3}}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\cdot\frac{1+\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}+\frac{\pi}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{e}{+\infty}} = 0\cdot 1 = 0$$

Esempio

Per verificare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^4 - (x-1)^4}{x^3 + x^2} = 8$$

si può utilizzare la formula del binomio di Newton $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Esempio

Per verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{x^3+x^2} = 8$$

si può utilizzare la formula del binomio di Newton $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ visto che

$$(x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1,$$
$$(x-1)^4 = x^4-4x^3+6x^2-4x+1,$$

e quindi

$$\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{x^3+x^2} = \frac{8x^3+8x}{x^3+x^2} = \frac{x^3\left(8+\frac{8}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{8+0}{1+0} = 8.$$

Esempio

Per verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{x^3+x^2} = 8$$

in alternativa, si può utilizzare il prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Esempio

Per verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{x^3+x^2} = 8$$

in alternativa, si può utilizzare il prodotto notevole $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ed osservare che

$$\begin{aligned}
&(x+1)^4-(x-1)^4 = \\
&\left((x+1)^2+(x+1)^2\right)\cdot\left((x+1)^2-(x+1)^2\right) = \\
&2(x^2+1)\cdot 4x = 8x(x^2+1)
\end{aligned}$$

e pertanto

$$\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{x^3+x^2} = \frac{8x(x^2+1)}{x^3+x^2} = \frac{8x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 8\frac{1+0}{1+0} = 8.$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^9-(x-1)^9}{(x+1)^8+(x-1)^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18x^8+\sum\limits_{n=2}^{9}\binom{9}{n}\big(1-(-1)^n\big)x^{9-n}}{(x+1)^8+(x-1)^8}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{18+\sum\limits_{n=2}^{9}\binom{9}{n}\big(1-(-1)^n\big)x^{1-n}}{\left(1+\frac{1}{x^8}\right)^8+\left(1-\frac{1}{x^8}\right)^8}=\frac{18}{2}=9$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = 0.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=0.$$

Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ visto che

$$\sqrt{x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty,\qquad\qquad \sqrt{x-1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=0.$$

Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, in quanto

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{2}{(+\infty)+(+\infty)}=\frac{2}{+\infty}=0.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 - x + 10} - x \right) = +\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+10}-x\right)=+\infty.$$

Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ visto che

$$\sqrt{2x^2-x+10}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty, \qquad x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+10}-x\right)=+\infty.$$

Per scioglierla si può procedere come segue

$$\sqrt{2x^2-x+10}-x = x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}-1\right)$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\cdot(\underbrace{\sqrt{2}-1}_{>0})=+\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) = \frac{1}{2}.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\frac{1}{2}.$$

Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ visto che

$$\sqrt{x^2+x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty, \qquad\qquad x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\frac{1}{2}.$$
Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, in quanto

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{1+\frac{1}{+\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}+1}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)=1.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right) = 1.$$

Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)\cdot 0$ visto che

$$x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad \sqrt{1+\frac{2}{x}}-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x\Big(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\Big)=1.$$

Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, in quanto

$$x\Big(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\Big)=x\Big(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\Big)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=x\,\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{+\infty}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x \right) = 0.$$

Esempio

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-x\right)=0.$$
Abbiamo la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ visto che
$$\sqrt[3]{x^3+x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty,\qquad\qquad x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-x\right)=0.$$

Per scioglierla si può utilizzare il prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, in quanto

$$\sqrt[3]{x^3+x+1}-x=\big(\sqrt[3]{x^3+x+1}-x\big)\frac{\big(\sqrt[3]{x^3+x+1}\big)^2+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}{\big(\sqrt[3]{x^3+x+1}\big)^2+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}$$

$$=\frac{(x^3+x+1)-x^3}{\big(\sqrt[3]{x^3+x+1}\big)^2+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}=\frac{x+1}{\big(\sqrt[3]{x^3+x+1}\big)^2+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}$$

$$=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\cdot\frac{1+0}{\left(\sqrt[3]{1+0+0}\right)^2+\sqrt[3]{1+0+0}+1}=0.$$

Esercizio

Studiare i limiti per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni.

1) $\dfrac{x - x^2}{1 + x}$

2) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2(2x+1)^3}\ \sqrt[3]{(x+3)(2x+e)^2}}{\left(\sqrt[5]{x^2(2x+1)^3} + \sqrt[3]{(x+3)(2x+e)^2}\right)^2}$

3) $\dfrac{x + 2\sqrt{x}}{2x + 3}$

4) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$

5) $\left(\sqrt{x^4+1} - x^2\right) x^2$

6) $\sqrt{2x^2 - x + 10} - x$

7) $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x}$

8) $\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-1}$

9) $\dfrac{(x+1)^5 - (x-1)^5}{x^4}$

10) $x\dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

11) $x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} - 1\right)$

12) $\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-1}$

13) $\sqrt{x^2+4x+6} - x$

14) $x \cdot \dfrac{\sqrt{x+6} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x}}$

1) $-\infty$	2) $\dfrac{\sqrt[15]{2}}{(1+\sqrt[15]{2})^2}$	3) $1/2$	4) $+\infty$	5) $1/2$	6) $+\infty$	7) $+\infty$
8) 1	9) 10	10) $1/4$	11) $1/2$	12) 1	13) 2	14) $3/2$

Se si ha la forma indeterminata $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ e si vuole determinare i termini al numeratore ed al denominatore che crescono più velocemente può essere utile utilizzare la seguente scala di crescita.

Proposizione

Se $a > 1$, allora la **"scala" di crescita** per $x \to +\infty$ è

$$\ln(x) \quad \lll \quad x \quad \lll \quad a^x \quad \lll \quad x^x.$$

Questo significa che, ad esempio, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0.$$

Tale ordinamento di infiniti vale anche nel caso in cui ciascun elemento della catena sia elevato alla stessa potenza positiva (ad esempio $\ln(x)^3$ è un infinito di ordine inferiore a x^3). L'ordinamento degli infiniti continua a valere anche se ogni elemento della catena viene elevato ad una potenza positiva differente (ad esempio x^{150} è un infinito di ordine inferiore a $e^{x/100}$).

Esempio

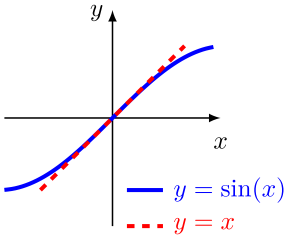
- $\dfrac{3^x+2x^3+\ln(x^4)+1}{3^{x-1}+3} = \underbrace{\boxed{\dfrac{3^x}{3^{x-1}}}}_{=3} \cdot \dfrac{1+\overbrace{\boxed{\dfrac{2x^3}{3^x}}}^{\to 0}+\overbrace{\boxed{\dfrac{4\ln(x)}{3^x}}}^{\to 0}+\overbrace{\boxed{\dfrac{1}{3^x}}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\boxed{\dfrac{9}{3^x}}}_{\to 0}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3\cdot\dfrac{1+0+0+0}{1+0}=3$
- $\dfrac{x^2+2^x}{x^3+3^x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \dfrac{\frac{x^2}{2^x}+1}{\frac{x^3}{3^x}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\cdot\dfrac{0+1}{0+1}=0$
- $\dfrac{x+2^x}{x^2+3^x} = \dfrac{2^x\left(\frac{x}{2^x}+1\right)}{3^x\left(\frac{x^2}{3^x}+1\right)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \dfrac{\frac{x}{2^x}+1}{\frac{x^2}{3^x}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\cdot\dfrac{0+1}{0+1}=0$
- $\sqrt[x]{2^x+x^2+1} = 2\cdot\sqrt[x]{1+\dfrac{x^2}{2^x}+\dfrac{1}{2^x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$
- $\dfrac{x+2\sqrt{x}}{2x+3} = \dfrac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{2+\frac{3}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1+0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$

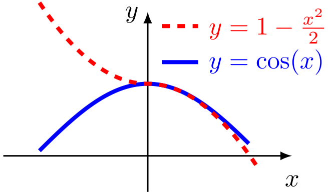
Limiti notevoli

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e) \qquad \forall a > 0,\ a \neq 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \qquad \forall a > 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[a]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{a} \qquad \forall a > 0$

Osservazione

I limiti notevoli suggeriscono come approssimare il grafico di una funzione nelle vicinanze di $x = 0$. Ad esempio, il fatto che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ significa che il grafico del seno può essere approssimato con la retta $y = x$ nelle vicinanze di $x = 0$. Analogamente, il fatto che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ significa che il grafico del coseno può essere approssimato con $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ nelle vicinanze di $x = 0$. Questo trova riscontro nei grafici riportati a fianco.





Proposizione

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} x^a \log_b(x) = 0 \ \forall a, b > 0, \ b \neq 1$
- $\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{a^x + b^x} = \max\{a, b\} \ \forall a, b > 0$
- $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a \in [0, 1) \end{cases}$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \begin{cases} e^a & \text{se } a \neq 0, \\ 1 & \text{se } a = 0, \end{cases}$

dove $e \approx 2,71828$ è il **numero di Eulero** o di **Nepero**.

Esempio

Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

osserviamo che

$$\frac{\sin(ax)}{x} = a \frac{\sin(ax)}{ax}$$

e la funzione

$$\frac{\sin(ax)}{ax}$$

è la funzione composta delle funzioni $f(x) = ax$ e $g(y) = \frac{\sin(y)}{y}$ e per questo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = a.$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\cos(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

in quanto

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\cos(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

in quanto

$$\frac{\sqrt{1+x}-\cos(x)}{x} = \underbrace{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}}_{\to 1/2} + \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

In alternativa si può procedere come segue

$$\frac{\sqrt{1+x}-\cos(x)}{x} = \frac{1+x-\cos(x)^2}{x\big(\sqrt{1+x}+\cos(x)\big)}$$

$$= \Big(1+\big(\frac{\sin(x)}{x}\big)^2 x\Big)\frac{1}{\sqrt{1+x}+\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} (1+0)\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Esempio

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} = ?$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} =?$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} = \begin{pmatrix} y = x-1 \\ y \to 0 \end{pmatrix} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{y} = -\frac{\pi}{2}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =?$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\big(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\big) =?$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\big(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\big) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\Big(\Big(\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\Big)^{1/2}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x\ln\big(\frac{1+2x+x^2}{1+x^2}\big) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x\ln\big(1+\frac{2x}{1+x^2}\big)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\big(1+\frac{2x}{1+x^2}\big)}{\frac{2x}{1+x^2}}\frac{2x}{1+x^2}x = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$$

Esempio

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = ?$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = ?$$

posto $y = 1/x$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to +\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e,$$

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to -\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Esempio

Possiamo ora dimostrare uno dei limiti notevoli lasciati come esercizio per casa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a\left((1+x)^{1/x}\right) = \log_a(e).$$

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln(e) = 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \begin{pmatrix} y = 1/x \\ y \to 0^+ \end{pmatrix} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=+\infty$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-2}\right)^{x^2} = \begin{pmatrix} y = x^2-2 \\ y\to+\infty \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y}\cdot\left(1+\frac{2}{y}\right)^{2} = e^2\cdot 1 = e^2$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2x+3}{2x+6}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{3}{2x+6}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{3}{2x+6}\right)}{-\frac{3}{2x+6}}\cdot\frac{-3}{2x+6}\cdot x = 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(\pi x)}{x-3} = \begin{pmatrix} y = x-3 \\ y = 0 \end{pmatrix} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi(y+3))}{y} = -\lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi y)}{y} = -\pi$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-3)(x+1)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)(x+1)-x^2}{\sqrt{(x-3)(x+1)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-3}{\sqrt{(x-3)(x+1)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}=-1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x}\left(1+e^{-x}\right)\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{x})+\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\right)=1+0=1$$

Esempio

$$\lim_{x\to0^+}x\ln(x)=\begin{pmatrix}x=e^{-y}\\ y\to+\infty\end{pmatrix}=\lim_{y\to+\infty}-\left(\frac{y}{e^{y}}\right)=0$$

Esempio

$$\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{x}=\left(1-\frac{2}{2x+5}\right)^{x}=\left(\left(1-\frac{2}{2x+5}\right)^{2x+5}\right)^{\frac{x}{2x+5}}$$
$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}\left(e^{-2}\right)^{1/2}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2}\ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right) = 2$$

in quanto

$$\sqrt{1+x^2}\ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right) = \sqrt{1+x^2}\ln\left(1+\frac{2x}{x^2-x}\right)$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{2x}{x^2-x}\right)}{\frac{2x}{x^2-x}}\frac{2x}{x^2-x}\sqrt{1+x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1\cdot 2 = 2$$

Esempio

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2)\ln\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}\right)=3$$

in quanto

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}=\frac{x^2-x+3+3x-2}{x^2-x+3}=1+\frac{3x-2}{x^2-x+3}$$

e quindi

$$f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{3x-2}{x^2-x+3}\right)}{\frac{3x-2}{x^2-x+3}}\frac{3x-2}{x^2-x+3}(x+2)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1\cdot 3=3.$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+4}{x+5}\right) = \begin{pmatrix} y = \frac{1}{x+4} \\ y \to 0^+ \end{pmatrix} = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{1}{y} - 4\right)\ln\left(\frac{1}{1+y}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \left(-\frac{\ln(1+y)}{y} + 4\ln(1+y)\right) = -1 + 0 = -1$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{0}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esempio

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^2-1} =?$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^2-1} = ?$$

Si tratta della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ in quanto

$$x^3+x^2+x-3 \xrightarrow[x\to 1]{} 0, \qquad x^2-1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0.$$

Visto che sia il numeratore che il denominatore sono dei polinomi, il fatto che entrambe si annullino per $x=1$ significa che entrambe sono divisibili per $x-1$:

$$x^3+x^2+x-3 = \left(x^2+2x+3\right)(x-1), \quad x^2-1=(x+1)(x-1).$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Pertanto si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+3}{x+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

Esempio

$$\frac{e^{x+x^2}-e^{-2x}}{\sin(3x)} = e^{-2x}\,\frac{e^{3x+x^2}-1}{\sin(3x)} = e^{-2x}\left(\frac{e^{3x+x^2}-1}{3x+x^2}\right)\frac{3x+x^2}{\sin(3x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x\tan(x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}}\,\frac{2x^2}{\tan(x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}}\,\frac{x}{\tan(x)}\,\frac{x}{\ln(1+x)}=1$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = ?$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = ?$$

Osserviamo che

$$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1} = \frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{(x^2+2)-(2x+1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}$$

e quindi

$$\left(1+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = \left(1+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$= \left(1+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}\right)^{\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = ?$$

dove

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}\right)^{\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}{(x-1)^2}} = \left(\begin{array}{c} y=\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}}{(x-1)^2} \\ y \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty \end{array}\right)$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e,$$

e

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

pertanto

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+1}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = e^{\sqrt{3}/6}.$$

Esempio

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\, x\right)\right)}{x^3 - 1} = ?$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right)}{x^3-1} =?$$

Osserviamo che

$$\frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right)}{x^3-1} = \frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}$$

e che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)} = \begin{pmatrix} y = \cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right) \\ y \xrightarrow[x\to 1]{} 0 \end{pmatrix} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)}{x-1} = \begin{pmatrix} y = x-1 \\ y \xrightarrow[x\to 1]{} 0 \end{pmatrix} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,(y+1)\right)}{y}$$

$$= -\lim_{y\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\,y\right)}{y} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}.$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right)}{x^3-1} =?$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right)}{x^3-1} = 1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

Esempio

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-10x+21}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-7)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-7)=-4$$

Esempio

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1)-9}{(x-2)-2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$=\lim_{x\to 4}2\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(x)) - \ln(x)}{(x+1)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \cdot \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{(1/y+1)^y}$$

$$= \ln(1) \cdot \left(\lim_{y\to\pm\infty}\left(\frac{1}{y}+1\right)^y\right)^{-1} = 0 \cdot e^{-1} = 0$$

Esempio

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$ per il test del confronto visto che

$$0 \xleftarrow[x \to +\infty]{} -\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Esempio

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{x(x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \frac{7}{x+3} = 1 \cdot 7 = 7$$

Esempio

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)=\begin{pmatrix} y=x-\frac{\pi}{2} \\ y\to 0 \end{pmatrix}=\lim_{y\to 0} y\tan\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\frac{y}{-\sin(y)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-1)=-1$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1} = \frac{1}{3}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{1/x} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x+1}} \frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x(x+1)}} \frac{x^2}{x(x+1)} = e^0 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(5^{1/x} - 2^{1/x}\big) = \lim_{x\to+\infty} x\big(e^{\frac{1}{x}\,\ln(5)} - e^{\frac{1}{x}\,\ln(2)}\big)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\,\ln(2)}\,\frac{e^{\frac{1}{x}\big(\,\ln(5)-\ln(2)\big)}-1}{\frac{1}{x}\big(\,\ln(5)-\ln(2)\big)}\,(\ln(5)-\ln(2))$$

$$= e^0 \cdot 1 \cdot \big(\,\ln(5) - \ln(2)\big) = \ln\Big(\frac{5}{2}\Big)$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos(3x)} &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(3x)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}\cdot\frac{1}{9} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})(1-\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^2}{1-\cos(x)} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1/2} = 2$$