Nome, Cognome .... Matricola ....

Compito 59

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{3x^2 - 36x + 105}{2x^2 - 24x + 88},$$

si determinino:

[a] *l'insieme di definizione D di f;*

[b] *la derivata $f'(x)$;*

[c] *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*

[d] *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

[e] *il grafico di f, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.*

Esercizio 2 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{13^n}}\right) \ln\left(\left(\frac{n-5}{n}\right)^{-5}\right)$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)^2 \sin(x-1)}{\sqrt{x}\ln(x)}$$

Esercizio 3 (1 punto) *Calcolare il valore della seguente somma finita.*

$$\sum_{n=1}^{5} 3^n$$

Esercizio 4 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n n^3 \arctan\left(\frac{1}{n^7}\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

[a] *La serie converge.*

[b] *La serie non converge.*

Esercizio 5 (3 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

Esercizio 6 (4 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf, *il* sup, *e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-6x+8}{x^2-25} \leqslant 0\right\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x^2+14x+20} \leqslant \sqrt{5x^2+14x+8}\right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\textbf{a)}\ \int \frac{3x^2-2x}{5-x^2+x^3} \ln\left(5-x^2+x^3\right) \mathrm{d}x$$

$$\textbf{b)}\ \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{c)}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+8x+17}\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x} y(x) + x \\ y(2) = -6 \end{cases}$$

Nome, Cognome .... Matricola ....

Compito 60

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{13+20x}{3+5x},$$

si determinino:

a) *l'insieme di definizione D di f;*

b) *la derivata $f'(x)$;*

c) *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*

d) *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

e) *il grafico di f, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.*

Esercizio 2 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\textbf{a)} \lim_{n\to+\infty} (3n^2+7)^2 \left(1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)\right)$$

$$\textbf{b)} \lim_{x\to-1^+} \frac{x+3-\sqrt{x+5}}{(x+1)^2}$$

Esercizio 3 (1 punto) *Calcolare il valore della serie numerica* $\sum_{n\geqslant 0}(a_n - a_{n+1})$ *con*

$$a_n = \frac{(3n+8)(3n-8)}{-7n^2+9n+5}.$$

Esercizio 4 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{3+9n^{-1}+8n^{-3}+2n+4n^6}{1+7n+3n^5+8n^{-1}+2n^{-2}},$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

a) *La serie converge.*   b) *La serie diverge.*   c) *La serie è irregolare.*

Esercizio 5 (3 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$$

Esercizio 6 (4 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf*, il* sup*, e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-5x+4}{3x^2-12x+12} \leqslant 0\right\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x^2+6x+1} > \sqrt{x^2+6x+5}\right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\textbf{a)} \int x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{c)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y''(x)-4y'(x)+4=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-4 \end{cases}$$

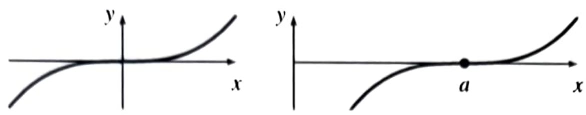
Compito 58

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

Risposta corretta: $+0.5$. **Risposta mancante:** -0.1. **Risposta errata:** -0.2.

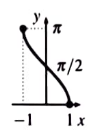
Enunciato 1. *L'insieme dei numeri interi* $\mathbb{Z}$ *è un campo.* F

Enunciato 2. *Se quello riportato a sinistra è il grafico di* $f(x)$, *allora quello a destra è il grafico di* $f(x-a)$. V



Enunciato 3. $\sqrt{p(x)} \geqslant \sqrt{q(x)} \iff \begin{cases} q(x) \geqslant 0 \\ p(x) \geqslant q(x). \end{cases}$ V

Enunciato 4. *Quello riportato di seguito è il grafico di* $f(x) = \arcsin(x)$. F



Enunciato 5. $\sin(x+\pi) = \sin(x)$ F

Enunciato 6. *Se* $z \in \mathbb{C}$, *allora* $\overline{z^n} = -(\overline{z})^n$. F

Enunciato 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ V

Enunciato 8. *Data* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *si ha che* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se* V

$$\forall M > 0\ \exists X = X(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) > M\ \forall x \in D \text{ con } x > X.$$

Enunciato 9. *Se* $a_n = f(n)$ *e* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, *allora* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. V

Enunciato 10. *Se* $a_n, b_n > 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *diverge e* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, *allora anche* $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ *diverge.* V

Enunciato 11. *Se* $f\colon [a,b] \to [a,b]$ *è invertibile, allora* f *è continua in* $[a,b]$. F

Enunciato 12. *Tutte le funzioni derivabili sono integrabili.* V

Enunciato 13. *Se* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è un polinomio di ordine* n *e* $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è il suo polinomio di Taylor di ordine* n *in* $x = 0$, *allora* $P(1) = f(1)$. V

Enunciato 14. $\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) + \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ F

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														

Compito 59

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

Risposta corretta: $+0.5$. **Risposta mancante:** -0.1. **Risposta errata:** -0.2.

Enunciato 1. *L'insieme dei numeri razionali* $\mathbb{Q}$ *è totalmente ordinato.* *V*

Enunciato 2. $f(x) = x^2$ *è monotona nel suo dominio di definizione.* *F*

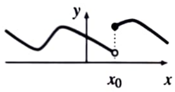
Enunciato 3. *L'estremo superiore di un insieme è il più piccolo dei maggioranti.* *V*

Enunciato 4. $\cos(x - y) = \cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y)$ *F*

Enunciato 5. $\tan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ *F*

Enunciato 6. *Se* $z \in \mathbb{C}$ *ed* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $\overline{n \cdot z} = n/\overline{z}$. *F*

Enunciato 7. *Se quello riportato di seguito è il grafico della funzione* f *allora* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. *V*



Enunciato 8. *Data* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *si ha che* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ *se* *V*

$$\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) > M\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Enunciato 9. *Se* $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$ *allora* $a_n \downarrow 0$. *V*

Enunciato 10. *Se* $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n a_n$ *converge, allora anche* $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ *converge.* *F*

Enunciato 11. *Se* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *è continua,* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$, *allora* $f(x) \geqslant 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$. *F*

Enunciato 12. *Le funzioni pari sono derivabili in* $x = 0$. *F*

Enunciato 13. *Se* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è derivabile* n *volte in* x_0 *e* $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è il suo polinomio di Taylor di ordine* n *in* x_0, *allora* $P(x_0) = f(x_0)$. *V*

Enunciato 14. *Se* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *è limitata, allora è integrabile secondo Riemann.* *F*

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														

Compito 60

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

Risposta corretta: $+0.5$. **Risposta mancante:** -0.1. **Risposta errata:** -0.2.

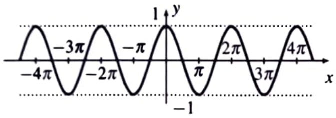
Enunciato 1. *Per il principio di induzione si ha che* F

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ P(1)\ \text{è vera}\\ \bullet\ \text{se } P(n) \text{ e } P(n+1) \text{ sono vere, allora anche } P(n+2) \text{ è vera}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{allora } P(n) \text{ è vera per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

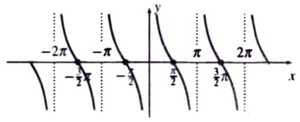
Enunciato 2. *Se $n \in \mathbb{N}$ è pari allora $f(x) = x^n$ è una funzione pari nel suo dominio di definizione.* V

Enunciato 3. $\{x \in \mathbb{R} : |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ V

Enunciato 4. *Quello riportato di seguito è il grafico di $f(x) = \cos(x)$.* V



Enunciato 5. *Quello riportato di seguito è il grafico di $f(x) = \cot(x)$.* V



Enunciato 6. *Se $z \in \mathbb{C}$, allora* $\overline{z^n} = -(\overline{z})^n$. F

Enunciato 7. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ se* F

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \exists x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ t.c. } |f(x) - L| > \varepsilon.$$

Enunciato 8. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ se* F

$$\exists M > 0 \text{ t.c. } \forall \delta = \delta(M) > 0\ \exists x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ t.c. } f(x) < M.$$

Enunciato 9. *Se per ogni $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0 si ha che $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$, allora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.* V

Enunciato 10. *Se $a_n, b_n > 0$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} b_n$ diverge e $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora anche $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ diverge.* V

Enunciato 11. *Se $f : (a,b) \to [a,b]$ è continua ed invertibile, allora anche $f^{-1} : [a,b] \to (a,b)$ è continua.* V

Enunciato 12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ F

Enunciato 13. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile ed ha in $x_0 \in (a,b)$ un punto di massimo, allora $f'(x_0) = 0$.* V

Enunciato 14. $\int f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = f(x)\, g(x) + \int f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ F

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														

Compito 57

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

Risposta corretta: $+0.5$. Risposta mancante: -0.1. Risposta errata: -0.2.

Enunciato 1. *L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è totalmente ordinato.* *F*

Enunciato 2. *Non tutte le funzioni inverse sono invertibili.* *F*

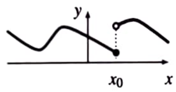
Enunciato 3. $\sqrt{p(x)} \geqslant \sqrt{q(x)} \iff \begin{cases} p(x) \geqslant 0 \\ q(x) \geqslant 0. \end{cases}$ *F*

Enunciato 4. $\cos(-x) = \cos(x)$ *V*

Enunciato 5. $\cot(-x) = -\cot(x)$ *V*

Enunciato 6. *Se $z \in \mathbb{R}$, allora $z \notin \mathbb{C}$.* *F*

Enunciato 7. *Se quello riportato di seguito è il grafico della funzione f allora $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.* *V*



Enunciato 8. *Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ se* *V*

$$\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M\ \forall x \in (x_0, x_0+\delta).$$

Enunciato 9. *Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$ allora $a_n \downarrow 0$.* *F*

Enunciato 10. *Se $a_n, b_n > 0$, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora anche $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.* *V*

Enunciato 11. *Se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$, allora $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in (a,b)$.* *F*

Enunciato 12. $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ *V*

Enunciato 13. *Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile ed ha in $x_0 \in [a,b]$ un punto di massimo, allora $f'(x_0) = 0$.* *F*

Enunciato 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$ *V*

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														

Nome, Cognome .... Matricola ....

Compito 59

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{3x^2 - 36x + 105}{2x^2 - 24x + 88},$$

si determinino:

$\boxed{a}$ *l'insieme di definizione D di f;*

$\boxed{b}$ *la derivata $f'(x)$;*

$\boxed{c}$ *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*

$\boxed{d}$ *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

$\boxed{e}$ *il grafico di f, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.*

Esercizio 2 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{13^n}}\right) \ln\left(\left(\frac{n-5}{n}\right)^{-5}\right)$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)^2 \sin(x-1)}{\sqrt{x}\ln(x)}$$

Esercizio 3 (1 punto) *Calcolare il valore della seguente somma finita.*

$$\sum_{n=1}^{5} 3^n$$

Esercizio 4 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n n^3 \arctan\left(\frac{1}{n^7}\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

$\boxed{a}$ *La serie converge.*

$\boxed{b}$ *La serie non converge.*

Esercizio 5 (3 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

Esercizio 6 (4 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf*, il* sup*, e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-6x+8}{x^2-25} \leqslant 0\right\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x^2+14x+20} \leqslant \sqrt{5x^2+14x+8}\right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\textbf{a)}\ \int \frac{3x^2-2x}{5-x^2+x^3} \ln\left(5-x^2+x^3\right) \mathrm{d}x$$

$$\textbf{b)}\ \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1} \mathrm{d}x$$

$$\textbf{c)}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+8x+17} \mathrm{d}x$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x} y(x) + x \\ y(2) = -6 \end{cases}$$

Nome, Cognome.. Matricola ....

Compito 13

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{5x^2+20x-225}{9x^2+36x+117},$$

si determinino:

$\boxed{a}$ *l'insieme di definizione D di f;*

$\boxed{b}$ *la derivata $f'(x)$;*

$\boxed{c}$ *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*

$\boxed{d}$ *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

$\boxed{e}$ *il grafico di f, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.*

Esercizio 2 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{18}e^{18n}}{n^{18n+9}}$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to+\infty} \left(x\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)+x\ln(x)+1\right)$$

Esercizio 3 (1 punto) *Calcolare il valore della seguente somma finita.*

$$\sum_{n=1}^{32} n$$

Esercizio 4 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n\geqslant 1} n^9\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^8}\right)\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

$\boxed{a}$ *La serie converge.* $\boxed{b}$ *La serie diverge.* $\boxed{c}$ *La serie è irregolare.*

Esercizio 5 (3 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = 4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$$

Esercizio 6 (4 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf*, il* sup*, e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x^2-x-20}{2x^2-6x-20} \geqslant 0\right\}$$

$$C = \left\{x\in\mathbb{R} : \sqrt{4x^2+2x-41} > \sqrt{x^2-4x+4}\right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\textbf{a)}\ \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{b)}\ \int_0^2 x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{c)}\ \int_0^1 x^{\frac{2}{3}}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y''(x)+6y'(x)+8=0 \\ y(0)=4 \\ y'(0)=4 \end{cases}$$

Nome, Cognome .... Matricola ....

Compito 14

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{-2-2x}{3+2x},$$

si determinino:

$\boxed{a}$ *l'insieme di definizione D di f;*

$\boxed{b}$ *la derivata $f'(x)$;*

$\boxed{c}$ *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*

$\boxed{d}$ *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

$\boxed{e}$ *il grafico di f, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi ed eventuali asintoti.*

Esercizio 2 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(-8n+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3x^2+5x}\right)$$

Esercizio 3 (1 punto) *Calcolare il valore della seguente somma finita.*

$$\sum_{n=1}^{5} 3^n$$

Esercizio 4 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^6}\right)\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

$\boxed{a}$ *La serie converge.*

$\boxed{b}$ *La serie non converge.*

Esercizio 5 (3 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = -32\sqrt{2}-32\sqrt{2}\mathrm{i}$$

Esercizio 6 (4 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf, *il* sup, *e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{x\in\mathbb{R} : \frac{2x^2+14x+24}{3x^2+30x+75} \leqslant 0\right\}$$

$$C = \left\{x\in\mathbb{R} : \sqrt{x^2-2x-8} < \sqrt{4x^2-17x+4}\right\}$$

Esercizio 7 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\textbf{a)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$$

$$\textbf{b)}\ \int_0^1 \left(\ln(1+x^2)-\arctan(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$\textbf{c)}\ \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y'(x) = (-7x-8)\,y(x)+e^{-\frac{7}{2}x^2+x} \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

Compito 13

Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

Risposta corretta: $+0.5$. Risposta mancante: -0.1. Risposta errata: -0.2.

Enunciato 1. *Per il principio di induzione si ha che* F

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ P(1) \text{ è vera}\\ \bullet \text{ se } P(n) \text{ e } P(n+1) \text{ sono vere, allora anche } P(n+2) \text{ è vera}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{allora } P(n) \text{ è vera per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Enunciato 2. *L'immagine di $Y \subseteq B$ tramite una funzione $f : A \to B$ è dato da* F

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : \exists y \in Y \text{ t.c. } y = f(x)\} = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

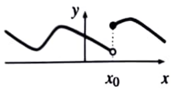
Enunciato 3. $\{x \in \mathbb{R} : |x| < a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ F

Enunciato 4. $\cos(-x) = \cos(x)$ V

Enunciato 5. $\sin(0) = 0$ V

Enunciato 6. *La moltiplicazione tra numeri complessi è un'operazione binaria commutativa.* V

Enunciato 7. *Se quello riportato di seguito è il grafico della funzione f allora $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.* F



Enunciato 8. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ V

Enunciato 9. *Se $a_n = f(n)$ e $\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$, allora $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$.* F

Enunciato 10. *Se $a_n > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, allora $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge.* V

Enunciato 11. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è crescente, allora $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.* V

Enunciato 12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ V

Enunciato 13. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.* V

Enunciato 14. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua ed F è una sua primitiva, allora $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.* V

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														

Compito 14

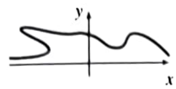
Indicare nella griglia finale quali enunciati sono veri e quali falsi.

Risposta corretta: $+0.5$. Risposta mancante: -0.1. Risposta errata: -0.2.

Enunciato 1. *Per il principio di induzione si ha che* V

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ P(1) \text{ e } P(2) \text{ sono vere}\\ \bullet\ \text{se } P(n) \text{ e } P(n+1) \text{ sono vere, allora anche } P(n+2) \text{ è vera}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{allora } P(n) \text{ è vera per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Enunciato 2. *Quello riportato di seguito è il grafico di una funzione.* F



Enunciato 3. *Siano $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, allora* F

$$\{x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c > 0\} = (x_1, x_2),$$

dove $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *e* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Enunciato 4. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ V

Enunciato 5. $\tan(-x) = -\tan(x)$ V

Enunciato 6. *Sia $w = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ un numero complesso in forma trigonometrica ed $n \in \mathbb{N}$, allora l'equazione nell'incognita z* V

$$z^n = w$$

ha per soluzioni

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n}k\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n}k\right)\right), \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Enunciato 7. *La funzione tangente è continua nel suo dominio di definizione.* V

Enunciato 8. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se* V

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(x) - L| < \varepsilon\ \forall x \in D \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Enunciato 9. *Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$ allora $a_n \downarrow 0$.* F

Enunciato 10. *Se $a_n > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, allora $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ diverge.* F

Enunciato 11. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, allora l'immagine di un intervallo aperto è un intervallo aperto.* F

Enunciato 12. $f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}$ V

Enunciato 13. *Se $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale.* V

Enunciato 14. $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c$ V

Enunciato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V														
F														