# Simulazione II parziale di Matematica Discreta

6 giugno 2023

## Esercizio 1

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $B = \{(1,0,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0)\}$ sia nel dominio che nel codominio.

- Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

## Esercizio 2

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare autospazi di $A$.
- Dire se $A$ è diagonalizzabile.
- Scrivere l'eventuale matrice che rende $A$ diagonale.

## Esercizio 3

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

- Determinare la forma quadratica associata alla matrice.
- Forninre il segno della forma quadratica.
- Determinare una base ortonormale rispetto a cui la forma quadratica è diagonalizzabile.

## Esercizio 4

Sia dato il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v_1 = (2,6,0)$ e $v_2 = (4,2,0)$.

- Costruire una base ortonornomale del sottospazio.
- Completare la base ottenuta in modo da generare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

## Esercizio 5

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da $f(x,y,z) = (x+3y+4z, 2x+y+3z, -x+2y+z)$.

- Trovare la matrice $A$ che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- Calcolare la dimensione dell'immagine di $f$.
- Trovare una base per il nucleo di $f$.
- Per quali valori di $h$ il vettore $(2,3,h) \in Imm(f)$
- Dire se l'applicazione $f$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

# CORREZIONE SIMULAZIONE DEL 06/06/23

5) Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da
$f(x,y,z) = (x+3y+4z,\ 2x+y+3z,\ -x+2y+z)$

a) Trovare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcolare la dimensione dell'Imm(f).

RICORDO $\dim(\mathrm{Imm}(f)) = rg(A)$

Osservo che $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, ma $3^a$ col $= 1^a$ col $+ 2^a$ col $\Rightarrow rg(A) = 2$

c) Trovare una base per Ker(f)

$\mathrm{Ker}(f) = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y+4z=0,\ 2x+y+3z=0,$

ricavo x $\leftrightarrow$ $-x+2y+z=0 \}$
e sostituisco

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = z+2y,\ 5z+5y=0,\ 5z+5y=0 \} =$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = z+2y,\ y=-z \} =$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=-z,\ y=-z \} = [(1,1,-1)]$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{(1,1,-1)\}$

d) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(2,3,h) \in \mathrm{Imm}(f)$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & h \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & h \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= h - 6 - 6h + 8 - 9 + 2 = -5h - 5 = -5(h+1)$$

$\Rightarrow h+1 = 0 \iff h = -1$

- Se $h=-1 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$ infatti $1^a$ rig $-$ $2^a$ rig $=$ $3^a$ rig

$\Rightarrow (2,3,h) \in \mathrm{Imm}(f) \iff h = -1$

e) Dire se l'applicazione f è iniettiva, suriettiva e biiettiva.

RICORDO f è iniettiva $\iff \mathrm{Ker}(f) \{\vec{0}\}$ ($\to$ teo 3 slide)
$\mathrm{Imm}(f) = W \Rightarrow f$ è suriettiva con $f: V \to W$, $V$ e $W$ sottosp. vett.

- $\dim(\mathrm{Imm}(f)) = 2 \Rightarrow \mathrm{Imm}(f) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ non è suriettiva
- Dal punto precedente $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow f$ non è iniettiva

$\Rightarrow f$ non è biiettiva.

## 1) II TECNICA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \quad \mathbb{R}^4 \arrow[r, "A"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{R}^4 \quad \mathcal{B} \arrow[d, leftrightarrow] \\ \mathcal{C} \quad \mathbb{R}^4 \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^4 \quad \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

$$M_C^C(f) = M_C^B(f)\, M_B^B(f)\, M_B^C(f)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = a+b \\ y = c \\ z = c+d \\ t = -a \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = -t \\ b = x-a \\ c = y \\ d = z-c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -t \\ b = x+t \\ c = y \\ d = z-y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -t \\ x+t \\ y \\ z-y \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$\Rightarrow M_B^C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_C^C(f) = M_C^B\, A\, M_B^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## I TECNICA

Come prima, esprimo i vettori della base canonica in termini di $\mathcal{B}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -t \\ x+t \\ y \\ z-y \end{pmatrix}_B$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_R$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}_B$$

$$f\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}_B=-1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}_B=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}_B=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}_B=-1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}_C \Rightarrow M_C^C(f)=\begin{pmatrix}-1&0&1&-2\\0&-1&1&0\\1&-1&2&1\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

2

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-3&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\3&\lambda-3&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-6\right]=(\lambda+1)\left(\lambda^2-3\lambda-2\lambda+\cancel{6}-\cancel{6}\right)=$$
$$=(\lambda+1)\lambda(\lambda-5)$$

$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=5$ 3 AUTOV. DISTINTI $\Rightarrow$ A e' diagonalizzabile.

$$V_{\lambda_1}: \begin{pmatrix}-3&2&0\\3&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-3x+2y=0\\3x-4y=0\end{cases} \iff \begin{cases}3x=2y\\2y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_1}=[(0,0,1)]$$

$$V_{\lambda_2}: \begin{pmatrix}-2&2&0\\3&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-2x+2y=0\\3x-3y=0\\6z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_2}=[(1,1,0)]$$

$$V_{\lambda_3}: \begin{pmatrix}3&2&0\\3&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}3x+2y=0\\z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-\frac{2}{3}y\\z=0\end{cases}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

③ $q(x,y,z) = 10x^2 + 4y^2 + 10z^2 - 12xz$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-10 & 0 & 6 \\ 6 & \lambda-4 & 0 \\ 6 & 0 & \lambda-10 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\left[(\lambda-10)^2-36\right] = (\lambda-4)(\lambda^2-20\lambda+64)$$

$$= (\lambda-4)^2(\lambda-16) \Rightarrow \lambda_1 = 4 \;,\; \lambda_2 = 16 \Rightarrow \text{Def. pos.}$$

$$V_{\lambda_1}: \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 6z = 0 \\ 6x - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = z$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} = [(1,0,1),(0,1,0)]$$

$$V_{\lambda_2}: \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_2} = [(-1,0,1)]$$

$\langle (1,0,1),(0,1,0) \rangle = 0 \Rightarrow$ i due vettori sono ortogonali

$$\Rightarrow v_1'' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad v_2'' = (0,1,0) \quad v_3'' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow B = \{v_1'', v_2'', v_3''\}$$

④ $v_1 = (2,6,0) \quad v_2 = (4,2,0)$

$\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0 \Rightarrow$ GRAHM-SCHMIDT

$$v_1' = v_1$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8+12}{4+36}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1'' = \frac{v_1'}{|v_1'|} = \frac{(2,6,0)}{\sqrt{40}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right)$$

$$v_2'' = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{(3,-1,0)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right) \Rightarrow B = \{v_1'', v_2''\}$$

$$\begin{cases} \langle v_1'', v \rangle = 0 \\ \langle v_2'', v \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} = 0 \\ \frac{3x}{\sqrt{10}} - \frac{y}{\sqrt{10}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow v = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow B' = \{v_1'', v_2'', v\}$$