Esercizi sui numeri finiti
Prof. V. Ruggiero

1. Rappresentare in virgola fissa (*fixed point*) con $\beta = 2$ e $t + 1 = 16$, i numeri $(-528)_{10}$, $(-936)_{10}$, $(1824)_{10}$, $(1023)_{10}$, $(-31128)_{10}$.

2. Rappresentare il numero $(-2.725)_{10}$ come numero finito in semplice precisione (4 byte) secondo le convenzioni dello standard ANSI IEEE.

3. Rappresentare il numero $(-13.124)_{10}$ come numero finito in semplice precisione (4 byte) oppure in doppia precisione (8 byte) secondo lo standard ANSI IEEE. Ripetere l'esercizio per i numeri $(385.375)_{10}$, $(3.141592)_{10}$, $(0.33333)_{10}$.

4. Convertire in numero intero il seguente numero di macchina *fixed point* ($\beta = 2$ e $t + 1 = 16$)

   1011101011010110

   Convertire in numero decimale il seguente numero di macchina *floating point*, codificato secondo le convenzioni dello standard ANSI IEEE con precisione semplice:

   11110110000110011000001000000000

5. Convertire in numero intero il seguente numero di macchina *fixed point* ($\beta = 2$, $t + 1 = 16$)

   1001011100011001

   Convertire in numero decimale il seguente numero di macchina *floating point*, codificato secondo le convenzioni dello standard ANSI IEEE con precisione semplice:

   10001101101110011000010000000000

6. Calcolare errore assoluto e relativo commesso nell'approssimare α^* con α nei seguenti casi:

$$\begin{array}{llll} \alpha^* & = \pi & \alpha & = 22/7 \\ \alpha^* & = \pi & \alpha & = 3.1416 \\ \alpha^* & = \sqrt{2} & \alpha & = 1.4142 \end{array}$$

7. Trovare il più piccolo intervallo a cui deve appartenere α per approssimare $\alpha^* = \sqrt{2}$ con un errore relativo al più pari a 10^{-4}.

8. Assegnati i seguenti numeri finiti ($\beta = 10$, $t = 4$, arrotondamento) determinare, operando nell'aritmetica dei numeri finiti, in numeri:

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{fl}(x_1 + x_2) & \mathrm{fl}(x_3 - x_4) \\ \mathrm{fl}(x_3 + x_4) & \mathrm{fl}(x_6 + x_7) \\ \mathrm{fl}(x_3 - x_2) & \mathrm{fl}(x_6 + x_8) \\ \mathrm{fl}(x_1 \cdot x_1) & \mathrm{fl}(x_9 \cdot x_{10}) \\ \mathrm{fl}(x_5 / x_3) & \mathrm{fl}(x_{11} / x_6) \end{array}$$

   con $x_1 = 0.8846 \cdot 10^4$, $x_2 = 0.1250 \cdot 10^{-2}$, $x_3 = 0.4037$, $x_4 = 0.4038$, $x_5 = 0.5000 \cdot 10^2$, $x_6 = 0.1234 \cdot 10^3$, $x_7 = 0.3219 \cdot 10^6$, $x_8 = 0.4567$, $x_9 = 0.1234 \cdot 10$, $x_{10} = 0.2468 \cdot 10^2$, $x_{11} = 0.5678 \cdot 10$.

9. Verificare che nell'aritmetica finita con $t = 2$ e $\beta = 10$ (troncamento) valgono le seguenti relazioni:
   - $\mathrm{fl}\Big(\mathrm{fl}(0.10 \cdot 10 + 0.99 \cdot 10) + 0.10\Big) \neq \mathrm{fl}\Big(0.10 \cdot 10 + \mathrm{fl}(0.99 \cdot 10 + 0.10)\Big)$
   - $\mathrm{fl}\Big(\mathrm{fl}(0.20 \cdot 10 + 0.99 \cdot 10) - 0.2 \cdot 10\Big) \neq 0.99 \cdot 10$
   - $\mathrm{fl}\Big(\mathrm{fl}(0.91 \cdot 10 \times 0.92 \cdot 10) + \mathrm{fl}(0.91 \cdot 10 \times 0.10)\Big) \neq \mathrm{fl}\Big(0.91 \cdot 10 \times \mathrm{fl}(0.92 \cdot 10 + 0.10)\Big)$
   - $\mathrm{fl}(0.20 \cdot 10 \times 0.90 \cdot 10) = \mathrm{fl}(0.20 \cdot 10 \times 0.91 \cdot 10)$, ma $0.90 \cdot 10 \neq 0.91 \cdot 10$
   - $\mathrm{fl}\left(0.10 \cdot 10 + 0.10 \cdot 10^{-1}\right) = \mathrm{fl}\left(0.10 \cdot 10 + 0.90 \cdot 10^{-1}\right)$, ma $0.10 \cdot 10^{-1} < 0.90 \cdot 10^{-1}$
     (ossia in aritmetica finita $x < y \Rightarrow \mathrm{fl}(x + z) \leq \mathrm{fl}(y + z)$)
   - $\mathrm{fl}\left(0.99 + 0.10 \cdot 10^{-1}\right) = \mathrm{fl}\left(0.10 \cdot 10 + 0.20 \cdot 10^{-1}\right)$, ma $0.99 < 0.10 \cdot 10$ e $0.10 \cdot 10^{-1} < 0.20 \cdot 10^{-1}$
     (ossia in aritmetica finita se $x < z$ e $y < w$, allora $\mathrm{fl}(x + y) \leq \mathrm{fl}(z + w)$)

- $\mathrm{fl}(0.20 \cdot 10 \times 0.90 \cdot 10) = \mathrm{fl}(0.20 \cdot 10 \times 0.91 \cdot 10)$, ma $0.90 \cdot 10 < 0.91 \cdot 10$ e $0.20 \cdot 10 > 0$ (ossia in aritmetica finita se $x > 0$ e $y < z$, allora $\mathrm{fl}(xy) \leq \mathrm{fl}(xz)$)

10. Verificare che se $\beta = 10$, $t = 2$ e si usa troncamento,

    a) l'equazione $(0.21 \cdot 10)x = (0.20 \cdot 10)$ ha come soluzioni 0.96, 0.97, 0.98, 0.99;
    b) l'equazione $(0.21 \cdot 10)x = (0.22 \cdot 10)$ non ha soluzione;
    c) l'equazione $(0.21 \cdot 10)x = (0.23 \cdot 10)$ ha un'unica soluzione $x = 0.11 \cdot 10$.

11. Mostrare che se si considera aritmetica in base 10 con $t = 2$ cifre per la rappresentazione della mantissa e rappresentazione per troncamento, per i numeri $x = 0.91 \cdot 10^1$, $y = 0.92 \cdot 10^1$ e $z = 0.10 \cdot 10^0$ non vale la proprietà distributiva, ossia $\mathrm{fl}\big(x \cdot \mathrm{fl}(y+z)\big) \neq \mathrm{fl}\big(\mathrm{fl}(x \cdot y) + \mathrm{fl}(x \cdot z)\big)$.