CORREZIONE I PARZIALE DEL 02/05/23

1. Risolvere i seguenti esercizi:

   - (0.5 punti) Dati i punti $A = (5, 4, -2)$ e $B = (6, 5, 0)$, determinare le coordinare del vettore libero w equipollente al vettore applicato ad A e di estremo B e scriverlo in termini dei versori degli assi cartesiani $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
   - (1 punto) Determinare il vettore proiezione v' del vettore w sul piano contenente i vettori $u = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $v = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
   - (0.5 punto) Per quali valori di h, i vettori $a = (1, 1, 2)$, $b = (1, -3, h)$, $c = (1, 7, 0)$ sono complanari?

1) $A = (5, 4, -2)$ $\quad B = (6, 5, 0)$

a) $\vec{w} = (6-5, 5-4, 0-(-2)) = (1, 1, 2) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

b) $u = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$v' = w - w'$

$w' = \left\langle w, \dfrac{u \times v}{|u \times v|} \right\rangle \dfrac{u \times v}{|u \times v|} = \langle w, u \times v \rangle \dfrac{u \times v}{|u \times v|^2}$

$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{k} \Rightarrow |u \times v| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$|u \times v|^2 = 8$

$w' = \langle (1,1,2), (2,0,-2) \rangle \dfrac{(2,0,-2)}{8} =$

$\overset{!}{=} (\overset{-2}{2-4}) . \dfrac{(2,0,-2)}{8} = -\dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{k}$

$v' = w - w' = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} - \left(-\dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{k}\right) =$

$= \dfrac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} + \dfrac{3}{2}\vec{k}$

c) $\langle a, b \times c \rangle = 0 \iff$ a, b, c sono complanari

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & h \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -6h + 20 \Rightarrow -6h + 20 = 0$

$\Updownarrow$

$h = \dfrac{10}{3}$

2. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi e, per i sottoinsiemi che sono sottospazi, determinare una base e la dimensione.

   (a) (1 punto) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0; 2x - 4y + 5z + 1 = 0\}$

   (b) (1 punto) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x - y + 4z)^2 + (x - z)^2 = 0\}$

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0,\ 2x + 4y + 5z + 1 = 0\}$

termine noto

- $(0,0,0) \notin W \Rightarrow W$ NON E' SOTTOSPAZ.

b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x - y + 4z)^2 + (x-z)^2 = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 4z = 0,\ x - z = 0\} =$ $\boxed{x = z}$

SOSTITUENDO $\overset{!}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = 6z\} =$

$= \{(z, 6z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} =$

$= [(1,6,1)] \Rightarrow \dim W = 1$

Per verificare che e' sottospazio di $\mathbb{R}^3$ si usa la II^a caratterizzazione.

SIANO $w_1, w_2 \in W$ cioe' $w_1 = (z_1, 6z_1, z_1)$ E SIA $c \in \mathbb{R}$

$w_2 = (z_2, 6z_2, z_2)$

(II) $cw_1 - w_2 = c(z_1, 6z_1, z_1) - (z_2, 6z_2, z_2) =$

$\overset{!}{=} (cz_1 - z_2,\ c6z_1 - 6z_2,\ cz_1 - z_2) =$

$= (cz_1 - z_2,\ 6(cz_1 - z_2),\ cz_1 - z_2)$

tale vettore e' del tipo $(z, 6z, z)$

$\Rightarrow cw_1 - w_2 \in W$

3. (3 punti) Dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y = 0\}$ e $W = [(1,1,0)]$, determinare il sottospazio somma $U + W$. Mostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, usando la relazione di Grassman.

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y = 0\} =$

$\overset{!}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y\} =$

$= \{(3y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(3y, y, 0) + (0,0,z) : y, z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{y(3,1,0) + z(0,0,1) : y,z \in \mathbb{R}\} =$

$\overset{!}{=} [(3,1,0), (0,0,1)]$

$W = [(1,1,0)]$

$\Downarrow$

$\dim W = 1$

Poiche' $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 $\Rightarrow$ le colonne sono

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

lin. indipendenti $\Rightarrow \dim U = 2$

$U + W = [(3,1,0), (0,0,1), (1,1,0)]$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3-1) = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ i vettori di $U+W$ sono lin. indip. $\Rightarrow \dim(U+W) = 3$

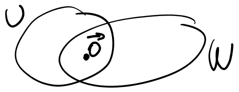
$U + W = \mathbb{R}^3$

Per la relazione di Grassmann

$$\underbrace{\dim(U+W)}_{3} = \underbrace{\dim U}_{2} + \underbrace{\dim W}_{1} - \dim(U \cap W)$$

$\Leftrightarrow 3 = 2 + 1 - \dim(U \cap W) \Leftrightarrow \dim(U \cap W) = 0$

$\Rightarrow U \cap W = \{\vec{0}\}$



$\Rightarrow U \oplus W = \mathbb{R}^3$

4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, determinare:

- (1 punto) se eseguibil, il prodotto $C = AB$, $D = B^T A$, $C + D^T$;
- (1.5 punti) il rango di A al variare del parametro k e il rango di B
- (1.5 punti) l'inversa di A per $k = 0$, verificando che il risultato sia corretto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

a)

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + \overbrace{(2\cdot(-1))}^{-2} + (0\cdot 0) & 1+0+0 \\ k-2 & k \\ -2 & -3+5k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ k-2 & k \\ -2 & -3+5k \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad (2\times 3)\,(3\times 3) \rightsquigarrow 2\times 3$$

$$\Rightarrow D = B^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 11 & 22 & 5k-5 \end{pmatrix}$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 1-k & 11 \\ 0 & 22 \\ 0 & 5k-5 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$C + D^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ k-2 & k \\ -2 & -3+5k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-k & 11 \\ 0 & 22 \\ 0 & 5k-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 12 \\ k-2 & 22+k \\ -2 & 10k-8 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1^{\neq 0} & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

$r(A) \leq \min\{\text{num. righe, num. col.}\}$
$r(A) \leq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2k = 2(1-k) \Rightarrow \text{se } 1-k \neq 0 \iff \boxed{k \neq 1}$$
$$\Rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 2 \end{vmatrix} = (k-1)\cdot 2 \cdot (1-k) =$$
$$= (k-1)\cdot(-2)(k-1) =$$
$$= -2(k-1)^2$$

Se $-2\cdot(k-1)^2 \neq 0$, cioe' $\boxed{k \neq 1}$, $r(A) = 3$

Se $k \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3$

Se $k = 1 \Rightarrow r(A) = 1$

2^a col $= 2 \cdot 1^a$ col.

$$A_{k=1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(B) \leq \min\{2, 3\} \Rightarrow rg(B) \leq 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1^{\neq 0} & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 2$$

c) CALCOLO DI A^{-1} PER $k=0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Downarrow$
posso calcolare A^{-1}

sottomatrici

$$(\text{Coff}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

$$\text{coff}(A)_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{coff}(A)_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \Rightarrow \text{Coff}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{Coff}(A))^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (4 punti) Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:

$$\begin{cases} kx + y = -1 \\ 2x - 3y = 0 \\ (k+2)x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + y = -1 \\ 2x - 3y = 0 \\ (k+2)x - 2y = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} k & 1^{\neq 0} \\ 2 & -3 \\ k+2 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$r(A) \leq 2 = \min\{\text{num. righe}, \text{num. col.}\}$

$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3k - 2 \Rightarrow$ se $-3k-2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

cioè se $k \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow rg(A) = 2$

$\begin{vmatrix} k & 1 \\ k+2 & -2 \end{vmatrix} = -2k - (k+2) = -2k - k - 2 = -3k - 2$

se $-3k - 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

se $k \neq -2/3 \Rightarrow rg(A) = 2$

- Se $k = -2/3 \Rightarrow r(A) = 1$

$r(A|b)$?

$$A|b = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ k+2 & -2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$\Rightarrow r(A|b) \leq 3$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ k+2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 + 3k + 6) - (-3k - 2) =$$
$$= -2 - 3k + 3k + 2 = 0 \Rightarrow r(A|b) < 3$$

$\Rightarrow r(A|b) \leq 2$

Se considero $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow r(A|b) = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

1. $k \neq -2/3$ $\quad r(A) = 2 = r(A|b) \Rightarrow \exists!$ soluzione

TEO. ROUCHÉ - CAPELLI

TEO. ROUCHÉ - CAPELLI

il sistema è compatibile

$$\begin{cases} kx + y = -1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det(\bar{A}) = -3k - 2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{-3k-2} = \frac{-3}{3k+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{-3k-2} = \frac{-2}{3k+2}$$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{3k+2} \\ \frac{-2}{3k+2} \end{pmatrix}$ soluzione per $k \neq -2/3$

② $k = -2/3 \Rightarrow \underbrace{r(A|b) = 2 \quad e \quad r(A) = 1}_{\neq} \Rightarrow$ incomp. $\Downarrow$ nessuna sol.

6. Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che manda il vettore (x, y) nel vettore $(3x + 2y, x - y, x + y)$.

- (1 punto) Dimostrare che l'applicazione è lineare
- (2 punti) Trovare $\dim(\ker(f))$ e $\dim(\mathrm{Imm}(f)$ ed eventualmente una base per ciascun sottospazio.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$f\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(3x_1 + 2y_1) + \beta(3x_2 + 2y_2) \\ \alpha(x_1 - y_1) + \beta(x_2 - y_2) \\ \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 3x_1 + 2y_1 \\ x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3x_2 + 2y_2 \\ x_2 - y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \alpha f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Imm}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{3x} + 2y \\ \boxed{x} - y \\ \boxed{x} + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3x \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ -y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\dim(\mathrm{Imm}(f)) = 2 \quad \text{perchè} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 3x+2y=0 \\ x-y=0 \\ \cancel{x+y=0} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 3x+2y=0 \\ x=y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$