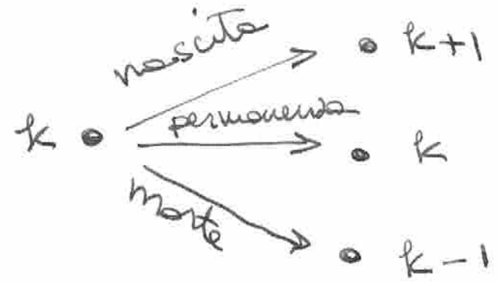
PROCESSI DI NASCITA E MORTE

Consideriamo un sistema a coda omogeneo (in cui lo stato rappresenta ad es. # pkt o # utenti attivi)

- Tasso di nascita $\lambda_k = q_{k,k+1}$ velocità di nascita da stato k
- Tasso di morte $\mu_k = q_{k,k-1}$ velocità di morte da stato k

Condizione di adiacenza: no due nascite o morte contemporanee



$$q_{kj} = \emptyset \quad \forall |k-j| > 1$$

Dal principio di conservazione dell'energia

$$\sum_j q_{kj} = \emptyset \quad \forall k$$

per le condizioni di adiacenza

$$\underbrace{q_{k,k-1}}_{\mu_k} + q_{k,k} + \underbrace{q_{k,k+1}}_{\lambda_k} = \emptyset$$

da cui

$$\boxed{q_{k,k} = -(\lambda_k + \mu_k)}$$

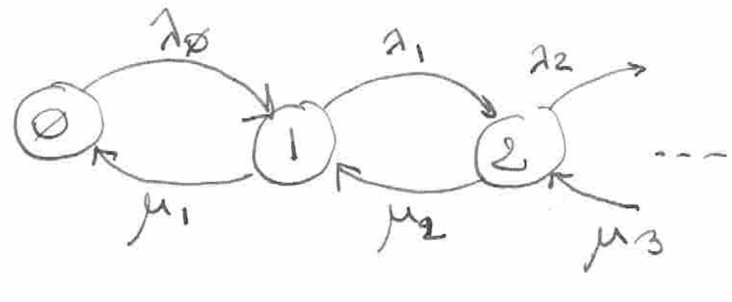
$k = 0, 1, \ldots, N-1$

$\mu_0 = 0, \quad \lambda_{N-1} = 0$

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ N-1 \end{array} \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_{N-2} & -(\lambda_{N-2}+\mu_{N-2}) & \lambda_{N-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \mu_{N-1} & -\mu_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & N-1 \end{array}$$

che può essere rappresentato anche mediante il diagramma delle frequenze



$$\frac{d}{dt}\underline{P}(t) = \underline{P}(t)\,\underline{\underline{Q}} \qquad \underline{P}(t) = [P_0(t), P_1(t), \ldots, P_{N-1}(t)]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} P_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t) & k \geq 1 \\[2ex] \dfrac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \end{cases}$$

Processo di sole nascite (Poisson)

$\lambda_k = \lambda$, $\mu_k = 0$ $\forall k$

$$\Rightarrow P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$ poissoniana

infatti

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_k(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) & ; k \geq 1 \\ \frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t) & ; k \geq 0 \end{cases}$$

con condizione iniziale $P_k(0) = \begin{cases} 1 & ; k = 0 \\ 0 & ; k \neq 0 \end{cases}$

(sist. inizialmente vuoto)

dà come soluzione $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

es. sistema con $\lambda = 2$ pkt/s.
Qual è la prob. che ci siano 8 pkt nel sistema dopo 10 s?

$$P_8(10) = \frac{20^8}{8!} e^{-20}$$

Dalla prob. di stato i momenti statistici del I e II ordine risultano

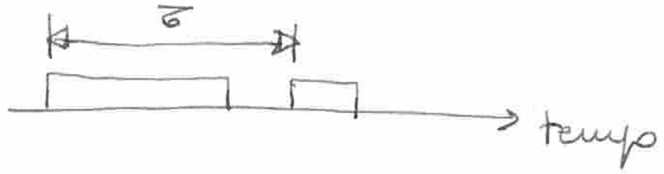
$E\{k\} = \lambda t$ (# medio pkt nel sistema)

$E\{k^2\} = (\lambda t)^2 + \lambda t$

$\sigma_k^2 = E\{k^2\} - E\{k\}^2 = \lambda t$

Il tempo di interarrivo τ segue una distribuzione esponenziale

tempo interarrivo



$$F_\tau(t) = \mathbb{P}\{\tau \le t\} = 1 - \underbrace{\mathbb{P}\{\tau > t\}}_{\emptyset \text{ nascite in } t} = 1 - \underset{k=\emptyset}{\underset{\uparrow}{P_\emptyset}}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f_\tau(t) = \frac{d}{dt} F_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$ PDF tempo interarrivo

a. In quanto tempo si collezionano k arrivi?

T_n tempo di arrivo dell'n-esimo pkt/utente dopo l'$n-1$

$$Y = \sum_{n=1}^{k} T_n$$ la cui PDF è la convoluzione delle PDF dei T_n

PDF di Y $$f_Y(y) = \frac{\lambda^k y^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda y}$$ (Erlang)

STEADY STATE

Le equazioni C-K consentono di studiare i transitori, ma può essere complicato risolverle.

Se $P_k(t)$ tende a stabilizzarsi all'aumentare di t allora si individuano le soluzioni in equilibrio in regime asintotico $(t \to +\infty)$

$$P_k = \lim_{t \to +\infty} P_k(t)$$ osservazione lunga

se il limite esiste allora $\frac{d}{dt} P_k(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \emptyset$

da cui, in regime asintotico, le eq. C-K diventano

$$\begin{cases} \emptyset = -(\lambda_k + \mu_k) P_k + \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} & ; k \geq 1 \\ \emptyset = -\lambda_\emptyset P_\emptyset + \mu_1 P_1 & ; k = \emptyset \end{cases}$$

$\Downarrow$

Th. All'equilibrio i processi di nascita e morte Markoviani soddisfano la conservazione del flusso.

$$\boxed{\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k} \qquad k \geq 1$$

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_{k-1} \qquad k \geq 1$$

$$= \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_1 \lambda_\phi}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_2 \mu_1} P_\phi$$

$$\Downarrow$$

$$P_k = P_\phi \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \qquad k \geq 1$$

Si può determinare P_ϕ ricordando che

$$\sum_{k=\phi}^{+\infty} P_k = 1 \qquad \text{da cui}$$

$$\Downarrow$$

$$P_\phi + \sum_{k=1}^{+\infty} P_k = 1$$

$$\Downarrow$$

$$P_\phi + \sum_{k=1}^{+\infty} P_\phi \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$P_\phi \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right] = 1$$

e quindi

$$\boxed{P_\phi = \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right]^{-1}}$$

$$\boxed{P_k = P_\phi \prod_{i=\phi}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \qquad k \geq 1}$$

RELAZIONE DI LITTLE

Th. All'equilibrio, qualunque sia la disciplina di coda

$$\mathbb{E}\{k\} = \mathbb{E}\{\lambda\}\ \mathbb{E}\{T\}$$

$$L \qquad \bar{\lambda} \qquad W$$

medie stat.
|| proc. ergodici
medie temp.

L # medio pkt/ut nel sistema

$\bar{\lambda}$ tasso medio arrivi

W tempo medio di permanenza (attesa) nel sistema

dim

$\alpha(t)$ # arrivi in $[\phi, t)$, tasso medio $\bar{\lambda}(t) = \frac{\alpha(t)}{t}$

$\beta(t)$ # partenze in $[\phi, t)$

$N(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ pkt/ut. nel sistema in $[\phi, t)$

mediamente $L(t) = \frac{\gamma(t)}{t}$

$\gamma(t) = \int_\phi^t N(\tau)\, d\tau$ tempo totale speso dai pkt/utenti nel sistema (tutti)

Tempo medio permanenza per pkt/ut.

$$W(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$L(t) = \frac{\gamma(t)}{t} = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \frac{\alpha(t)}{t} = W(t)\, \bar{\lambda}(t)$$

All'equilibrio, cioè asintoticamente per $t \to +\infty$

$$\boxed{L = \bar{\lambda} W}$$

dove $L = \lim_{t\to+\infty} L(t)$, $\bar{\lambda} = \lim_{t\to+\infty} \bar{\lambda}(t)$ e $W = \lim_{t\to+\infty} W(t)$

Processi ergodici: $L = \mathbb{E}\{k\}$, $\bar{\lambda} = \mathbb{E}\{\lambda\}$, $W = \mathbb{E}\{T\}$ ✓

NOTAZIONE DI KENDALL

- denota le principali caratteristiche dei sistemi a coda

$$A/B/C\ (/Y/N/Z)$$

A distribuzione tempi di interarrivo

B disciplina di servizio

C numero di servitori

Y capacità di sistema (# max di utenti)

N cardinalità potenziale della popolazione

Z disciplina della coda

A, B : distrib. esponenziale ⇒ M Markoviani

Si specifica PDF ⇒ G generale

non aleatoria ⇒ D deterministico

es. M/M/1 → Markoviano/Markoviano/1 serv.

Se non specificati

$Y \to +\infty$

$N \to +\infty$

Z FIFO