Docente responsabile del corso: Valeria Ruggiero

Organizzazione

- Orario del corso:
  - Lunedì, 9–11
  - Mercoledì, 9–10
  - Giovedì, 9–11
- Aula F9 Chiostro Santa Maria delle Grazie

- Attività integrativa:
  - tutorato: dott. Ambra Catozzi
    ambra.catozzi@unife.it
    Dalla settimana successiva all'inizio del corso: Martedì 14:00-16:00, aula B1 - Manfredini

- Contatti: rgv@unife.it
  (studio: terzo piano del complesso via Machiavelli)

- Pagina web:
  http://www.unife.it/scienze/informatica/insegnamenti/matematica-discreta
- Classroom: eae5kde

Contenuti

- Teoria: algebra lineare, calcolo vettoriale e matriciale, sistemi lineari, applicazioni lineari, autovalori e autovettori, elementi di geometria analitica
- Esercizi: su tutti gli argomenti

- Modalità d'esame: prova scritta (regole nella pagine web)
  Lo scopo della prova d'esame consiste nel verificare il livello di raggiungimento degli obiettivi formativi. L'esame è costituito da una prova scritta, volta a verificare l'acquisizione delle competenze **pratiche e teoriche** nella risoluzione numerica dei principali problemi. Non si possono consultare testi o appunti durante lo scritto. La prova è superata se si consegue una valutazione di almeno 18 su 30.

Note e suggerimenti:

- studio costante
- frequenza al tutorato (fondamentale fare esercizi in autonomia!)
- risorse: libri in bibliografia o analoghi, appunti delle lezioni, tutorato

Testi di riferimento:

- *Appunti di Algebra Lineare e Geometria Analitica* + *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria Analitica*, G. Mazzanti e V. Roselli, Pitagora Editrice, Bologna.
- *Algebra lineare e Geometria*, Enrico Schlesinger, Zanichelli, 2011.

Perchè studiare Algebra lineare?

- Nei traduttori automatici che usano il modello algebrico dell'Information Retrieval, le parole hanno **rappresentazione vettoriale**
- Le immagini digitali sono **matrici**
- Reti neurali: anche se intrinsecamente non lineari, parte del **modello** del layer di una rete neurale ha componenti **lineari**: $y = Wx + b$, W matrice, x e b vettori
- Principal Component Analysis: basata sulla determinazione degli **autovalori** di una matrice
- Grafica computerizzata: basata su geometria analitica: **vettori, trasformazioni lineari**

Definizione di insieme

Un insieme è un aggregato di elementi.
È una nozione intuitiva, come quello di **elemento** e di **appartenenza** di elemento a un insieme.
L'**appartenenza** di elemento a un insieme deve essere basato su un **criterio** oggettivo.

Definizione di insieme

Un insieme è un aggregato di elementi.
È una nozione intuitiva, come quello di **elemento** e di **appartenenza** di elemento a un insieme.
L'**appartenenza** di elemento a un insieme deve essere basato su un **criterio** oggettivo.

Sono insiemi?

- insieme delle lettere del mio cognome:
- insieme delle più belle città d'Italia:
- insieme dei comuni di Italia:

Definizione di insieme

Un insieme è un aggregato di elementi.
È una nozione intuitiva, come quello di **elemento** e di **appartenenza** di elemento a un insieme.
L'**appartenenza** di elemento a un insieme deve essere basato su un **criterio** oggettivo.

Sono insiemi?

- insieme delle lettere del mio cognome: SI
- insieme delle più belle città d'Italia:
- insieme dei comuni di Italia:

Definizione di insieme

Un insieme è un aggregato di elementi.
È una nozione intuitiva, come quello di **elemento** e di **appartenenza** di elemento a un insieme.
L'**appartenenza** di elemento a un insieme deve essere basato su un **criterio** oggettivo.

Sono insiemi?

- insieme delle lettere del mio cognome: SI
- insieme delle più belle città d'Italia: NO
- insieme dei comuni di Italia:

Definizione di insieme

Un insieme è un aggregato di elementi.
È una nozione intuitiva, come quello di **elemento** e di **appartenenza** di elemento a un insieme.
L'**appartenenza** di elemento a un insieme deve essere basato su un **criterio** oggettivo.

Sono insiemi?

- insieme delle lettere del mio cognome: SI
- insieme delle più belle città d'Italia: NO
- insieme dei comuni di Italia: SI

Definizione di insieme

Un insieme è un aggregato di elementi.
È una nozione intuitiva, come quello di **elemento** e di **appartenenza** di elemento a un insieme.
L'**appartenenza** di elemento a un insieme deve essere basato su un **criterio** oggettivo.

Esempi di insiemi numerici

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$: insieme dei numeri interi
$\mathbb{Q}$: insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali
$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi

Definizione di insieme

Un insieme è un aggregato di elementi.
È una nozione intuitiva, come quello di **elemento** e di **appartenenza** di elemento a un insieme.
L'**appartenenza** di elemento a un insieme deve essere basato su un **criterio** oggettivo.

Esempi di insiemi numerici

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$: insieme dei numeri interi
$\mathbb{Q}$: insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali
$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi

Simbolo di appartenenza

$\in$ significa *appartiene, è un elemento di*

Definizione di insieme

Un insieme è un aggregato di elementi.
È una nozione intuitiva, come quello di **elemento** e di **appartenenza** di elemento a un insieme.
L'**appartenenza** di elemento a un insieme deve essere basato su un **criterio** oggettivo.

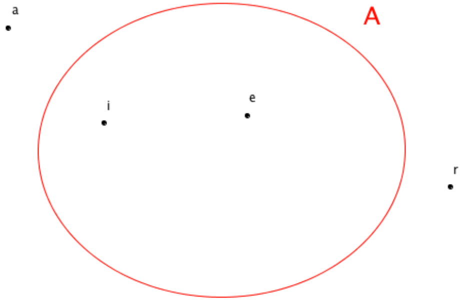
Esempi di insiemi numerici

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$: insieme dei numeri interi
$\mathbb{Q}$: insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali
$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi

Simbolo di appartenenza

$\in$ significa *appartiene, è un elemento di*

$5 \in \mathbb{N}$	5 è un numero naturale
$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$	$\sqrt{2}$ non è un numero naturale



$i, e \in A; \qquad a, r \notin A$

Quantificatori

$\exists$ esiste un, esiste qualche

$\forall$ per ogni, preso comunque un

$:$ tale che

$\Rightarrow$ implica $\qquad \Leftarrow$ è implicato da

$\Leftrightarrow$ è equivalente a

$\exists$ esiste un, esiste qualche
$\forall$ per ogni, preso comunque un
$:$ tale che
$\Rightarrow$ implica $\Leftarrow$ è implicato da
$\Leftrightarrow$ è equivalente a

Esempi

- esiste un numero intero denotato con n maggiore di -5

$$\exists \; n \in \mathbb{Z} : \quad n > -5 \qquad \text{(ad es. -4)}$$

- per ogni numero intero n, esiste un altro intero m maggiore di n

$$\forall \; n \in \mathbb{Z}, \quad \exists \quad m \in \mathbb{Z} : m > n \qquad \text{(ad es. } n+1\text{)}$$

- per ogni coppia di interi n e m, il fatto che n sia maggiore o uguale a m implica che n è strettamente maggiore di $m-1$

$$\forall \; n, m \in \mathbb{Z}, \; n \geq m \Rightarrow n > m-1 \qquad \text{(ad es. per } n=5, m=5\text{)}$$

- per ogni coppia di interi n e m, il fatto che n sia maggiore di m implica che m è minore di n

$$\forall \; n, m \in \mathbb{Z}, \; n > m \Rightarrow m < n \qquad \text{(ad es. } n=5, m=4\text{)}$$

Definizione di insieme vuoto

L'insieme **vuoto** è un insieme privo di elementi. Si denota con $\emptyset$.

Definizione di insieme vuoto

L'insieme **vuoto** è un insieme privo di elementi. Si denota con $\emptyset$.

Esempi:
insieme dei naturali minori di 0;
insieme degli immatricolati a Informatica nati nel 1915;
insieme degli immatricolati a Informatica nati nel 2020;...

Definizione per caratteristica

- insieme dei numeri pari: $P = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N}, 2m = n\}$
- insieme dei numeri dispari: $D = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N}, 2m + 1 = n\}$
- insieme vuoto: $\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : n \in P, n \in D\}$

Questa modalità è utile per insiemi con infiniti elementi (cardinalità infinita).

Definizione per enumerazione

Un insieme finito può essere definito per **enumerazione**, elencando i suoi elementi.

Esempio

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : n < 6\} \text{ per caratteristica} \\ A &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ per enumerazione} \end{aligned}$$

Definizione di sottoinsieme

Dato un insieme A, un **sottoinsieme** B di A è un insieme tale che

$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

Se B è un sottoinsieme di A, si scrive:

- $B \subseteq A$ (B può coincidere con A)
- $B \subset A$ (B è strettamente contenuto in A, sottoinsieme **proprio**); in tal caso

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \text{ e } \exists x \in A : x \notin B$$

(esiste un elemento di A che non appartiene a B)

Esempi

L'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme A.

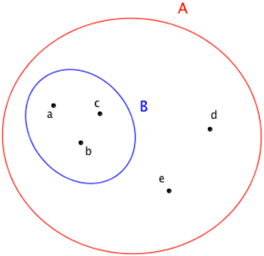
L'insieme dei numeri naturali pari P è un sottoinsieme proprio dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Gli interi positivi sono un sottoinsieme proprio degli interi $\mathbb{Z}$.

I naturali non negativi sono un sottoinsieme non proprio di $\mathbb{N}$.

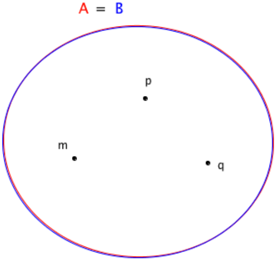
Esempio

Sottoinsieme proprio



$$\begin{array}{l} a, b, c \in B; \\ a, b, c, d, e \in A; \qquad \Rightarrow \quad B \subset A \\ d, e \notin B. \end{array}$$

Sottoinsieme



$$B = A \quad \Rightarrow \quad B \subseteq A$$

Definizione di unione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**unione** di A e B è l'insieme

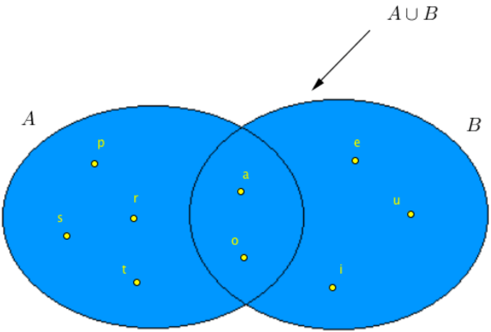
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

Definizione di unione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**unione** di A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

$A = \{$insieme delle lettere di passaporto$\}$, $B = \{$insieme delle vocali$\}$
$A \cup B = \{p, a, s, o, r, t, e, i, u\}$



Definizione di unione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**unione** di A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

Se $B \subseteq A$, qual'è l'unione?

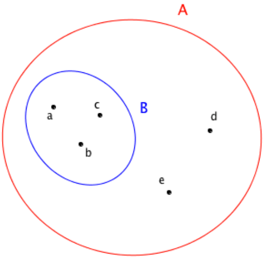
Definizione di unione di due insiemi

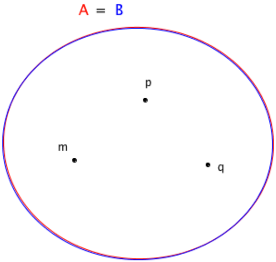
Se A e B sono insiemi, allora l'**unione** di A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

Se $B \subseteq A$, qual'è l'unione?

$$A \cup B = A$$





$a, b, c \in B;$

Unione di uno o più insiemi

Definizione di unione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**unione** di A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

Proprietà dell'unione:

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) && \text{associativa} \\
A \cup B &= B \cup A && \text{commutativa} \\
A \cup \emptyset &= A && \\
A \cup A &= A && \text{idempotenza}
\end{aligned}$$

Definizione di unione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**unione** di A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

Proprietà dell'unione:

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) &\qquad \text{associativa} \\
A \cup B = B \cup A &\qquad \text{commutativa} \\
A \cup \emptyset = A & \\
A \cup A = A &\qquad \text{idempotenza}
\end{aligned}$$

Come esempio di tecnica di dimostrazione, si mostra che vale l'associativa:

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= \{x : x \in A \cup B \text{ oppure } x \in C\} \\
&= \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B \text{ oppure } x \in C\} \\
&= \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B \text{ oppure } x \in C\} \\
&= \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B \cup C\} \\
&= A \cup (B \cup C)
\end{aligned}$$

Unione di uno o più insiemi

Definizione di unione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**unione** di A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

Proprietà dell'unione:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) && \text{associativa} \\ A \cup B &= B \cup A && \text{commutativa} \\ A \cup \emptyset &= A && \\ A \cup A &= A && \text{idempotenza} \end{aligned}$$

Unione di più insiemi

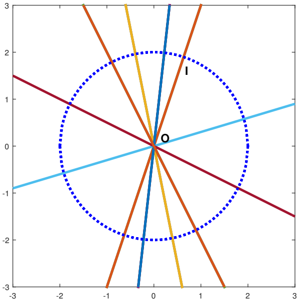
Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di insiemi, con I una famiglia (insieme) di indici. Si dice **unione della famiglia di insiemi** l'insieme definito come

$$\cup (A_i)_{i \in I} = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}$$

Esempio

Considero le rette del piano concorrenti in un punto O. Questa è una famiglia di insiemi, in cui ogni retta è un insieme di punti. Per denotare la famiglia si può prendere una circonferenza I con centro O e denotare con P un punto della circonferenza e con r_P la retta passante per O e per P, in modo che la famiglia sia $(r_P)_{P\in I}$. Allora l'unione delle rette è l'intero piano

$$\cup(r_P)_{P\in I} = \{x : \exists P \in I, x \in r_P\} = \pi$$



Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

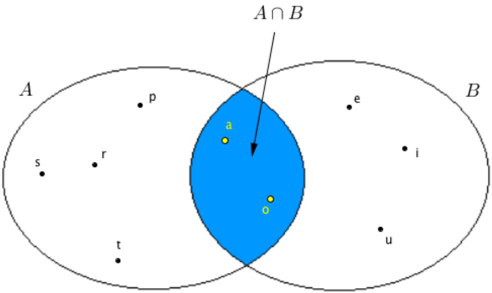
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$A = \{$insieme delle lettere di passaporto$\}$, $B = \{$insieme delle vocali$\}$
$A \cap B = \{a, o\}$



Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Se $B \subseteq A$, qual'è l'intersezione?

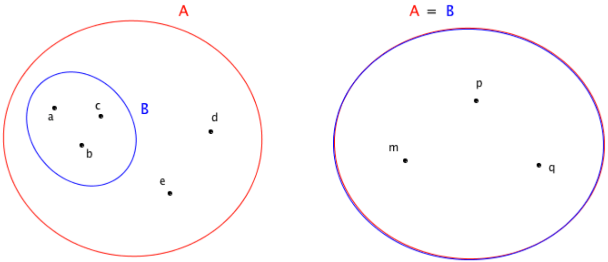
Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Se $B \subseteq A$, qual'è l'intersezione?

$$A \cap B = B$$



Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Proprietà dell'intersezione:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) && \text{associativa} \\ A \cap B &= B \cap A && \text{commutativa} \\ A \cap \emptyset &= \emptyset && \\ A \cap A &= A && \text{idempotenza} \end{aligned}$$

Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Proprietà dell'intersezione:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) && \text{associativa} \\
A \cap B &= B \cap A && \text{commutativa} \\
A \cap \emptyset &= \emptyset && \\
A \cap A &= A && \text{idempotenza}
\end{aligned}$$

Per esempio si mostra che vale la commutativa:

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \\
&= \{x : x \in B \text{ e } x \in A\} \\
&= B \cap A
\end{aligned}$$

Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Osservazioni

- $A \cap B$ può essere vuoto
  Esempio: A: naturali pari; B naturali dispari
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \cap B \subseteq B$

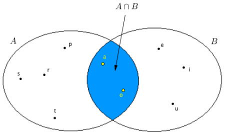
Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Osservazioni

- $A \cap B$ può essere vuoto
  Esempio: A: naturali pari; B naturali dispari
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \cap B \subseteq B$



Definizione di intersezione di due insiemi

Se A e B sono insiemi, allora l'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Intersezione di più insiemi

Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di insiemi, con I una famiglia di indici. Si dice **intersezione della famiglia di insiemi** l'insieme definito come

$$\cap(A_i)_{i \in I} = \{x : \forall\ i \in I, x \in A_i\}$$

Esempio

Considero la famiglia di insiemi dati dalle rette del piano concorrenti in un punto O. Allora l'intersezione delle rette è il punto O

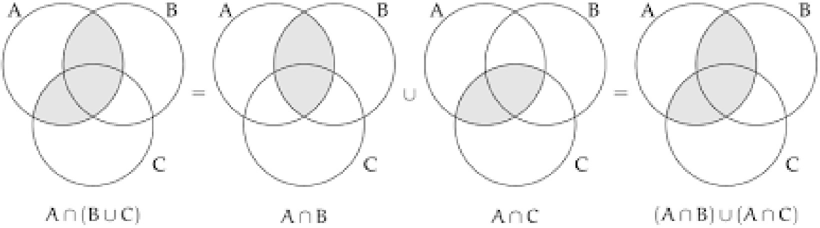
$$\cap(r_P)_{P \in I} = \{x : \forall P \in I, x \in r_P\} = O$$

Proprietà di unione e intersezione

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributiva dell'unione rispetto all'intersezione
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributiva dell'intersezione rispetto all'unione
$A \cup (A \cap B) = A$	assorbimento
$A \cap (A \cup B) = A$	assorbimento

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributiva dell'unione rispetto all'intersezione
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributiva dell'intersezione rispetto all'unione
$A \cup (A \cap B) = A$	assorbimento
$A \cap (A \cup B) = A$	assorbimento

Un esempio di dimostrazione grafica: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Come esempio di dimostrazione rigorosa delle proprietà appena enunciate, dimostriamo la prima.
Dimostrare l'uguaglianza tra due insiemi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

significa far vedere che

1. $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

Come esempio di dimostrazione rigorosa delle proprietà appena enunciate, dimostriamo la prima.
Dimostrare l'uguaglianza tra due insiemi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

significa far vedere che

1. $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

Dimostriamo la prima:

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \text{ oppure } x \in (B \cap C) \\
&\Rightarrow \quad x \in A \text{ oppure } (x \in B \text{ e } x \in C) \\
&\Rightarrow \quad (x \in A \text{ oppure } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ oppure } x \in C) \\
&\Rightarrow \quad x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C) \\
&\Rightarrow \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

Come esempio di dimostrazione rigorosa delle proprietà appena enunciate, dimostriamo la prima.
Dimostrare l'uguaglianza tra due insiemi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

significa far vedere che

1. $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

Dimostriamo la seconda:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)) \quad & \Rightarrow \quad x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C) \\
& \Rightarrow \quad (x \in A \text{ oppure } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ oppure } x \in C) \\
& \Rightarrow \quad x \in A \text{ oppure } (x \in B \text{ e } x \in C) \\
& \Rightarrow \quad x \in A \text{ oppure } x \in (B \cap C) \\
& \Rightarrow \quad x \in A \cup (B \cap C)
\end{aligned}$$

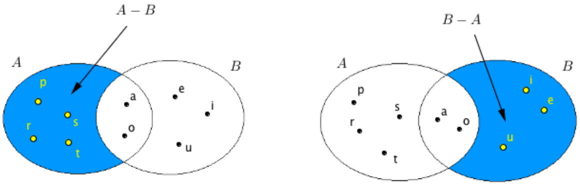
Definizione di differenza di insiemi

Se A e B sono insiemi, allora la **differenza** tra A e B è l'insieme

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

In generale, si nota che $A - B$ è diverso da $B - A$.

$A = \{$insieme delle lettere di passaporto$\}$, $B = \{$insieme delle vocali$\}$



Definizione di differenza di insiemi

Se A e B sono insiemi, allora la **differenza** tra A e B è l'insieme

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

In generale, si nota che $A - B$ è diverso da $B - A$.

Definizione di complemento di A rispetto a U

Sia U un insieme e A un sottoinsieme: $A \subseteq U$. Allora la **differenza** tra U e A si dice complemento di A rispetto a U

$$C_U^A = \{x : x \in U \text{ e } x \notin A\} = U - A$$

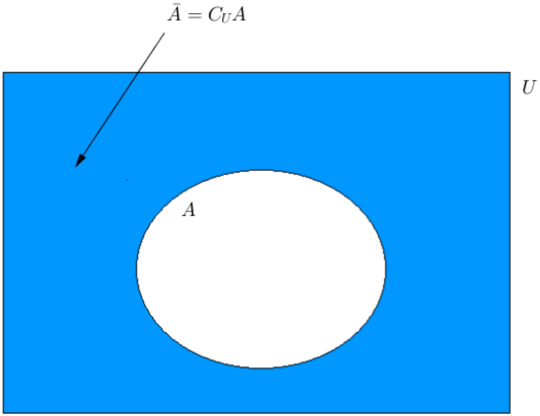
Si denota C_U^A anche come $\overline{A}$.

Esempi

Dato $\mathbb{N}$ e l'insieme dei pari P, il complemento di P rispetto a $\mathbb{N}$ è l'insieme dei dispari.

Qual è il complemento a U dell'insieme vuoto?

$U = \{\text{lettere dell'alfabeto}\}$, $A = \{\text{insieme delle lettere di passaporto}\}$
Il complemento di A in U sono le lettere dell'alfabeto che non stanno in *passaporto*.



Proprietà

Siano A e B sottoinsiemi dell'insieme U: $A \subseteq U$, $B \subseteq U$.

$$
\begin{aligned}
A \cup C_U^A &= U \\
A \cap C_U^A &= \emptyset \\
C_U^{C_U^A} &= A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_U^{A \cap B} &= C_U^A \cup C_U^B \quad \text{Legge di De Morgan} \\
C_U^{A \cup B} &= C_U^A \cap C_U^B \quad \text{Legge di De Morgan}
\end{aligned}
$$

https://www.youmath.it/formulari/formulari-insiemistica/1593-prima-e-seconda-legge-di-de-morgan.html

NB: Stretta analogia con la logica proposizionale!!!

$\cup$ equivalente a OR

$\cap$ equivalente a AND

C_U equivalente a NOT

Se A e B sono due proposizioni, allora:

- A OR B risulta vero se A oppure B è vero: $A \cup B$
- A AND B risulta vero se sia A che B sono vere: $A \cap B$
- NOT A: risulta vero se A è falso: C_U^A

Le leggi di De Morgan valgono anche nella logica proposizionale:

- NOT(A AND B)= NOT(A) OR NOT(B)
- NOT(A OR B)= NOT(A) AND NOT(B)

Definizione di prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B l'insieme delle coppie **ordinate** costituite da un elemento di A e un elemento di B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Definizione di prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B l'insieme delle coppie **ordinate** costituite da un elemento di A e un elemento di B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Esempio

$$A = \{a, b, c\} \quad B = \{m, n, p, q\}$$

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a, m), (a, n), (a, p), (a, q), \\ &(b, m), (b, n), (b, p), (b, q), \\ &(c, m), (c, n), (c, p), (c, q)\} \end{aligned}$$

L'insieme prodotto cartesiano ha $3 \times 4 = 12$ elementi.
La cardinalità (numero di elementi) dell'insieme prodotto cartesiano vale $\text{card}(A) \times \text{card}(B)$.

Definizione di prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B l'insieme delle coppie **ordinate** costituite da un elemento di A e un elemento di B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

ATTENZIONE!

Se $a \in A$ e $b \in B$,

$$(b, a) \notin A \times B, \text{ infatti } (b, a) \in B \times A$$

Se $A = B = X$,

$$A \times B = X \times X = \{(r, s) : r, s \in X\}$$

$(r, s) \in X \times X$ e $(s, r) \in X \times X$.
Però se $r \neq s$, allora $(r, s) \neq (s, r)$.

Definizione di prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B l'insieme delle coppie **ordinate** costituite da un elemento di A e un elemento di B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Esempio importante

Sia $A = B = \mathbb{R}$.

Allora

$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(r, s) : r, s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

Definizione di prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B l'insieme delle coppie **ordinate** costituite da un elemento di A e un elemento di B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Proprietà

$$A \times B \neq B \times A \qquad \text{quando } A \neq B$$

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \qquad \text{distributiva rispetto all'unione}$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \qquad \text{distributiva rispetto all'intersezione}$$

Definizione di prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B l'insieme delle coppie **ordinate** costituite da un elemento di A e un elemento di B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

DIMOSTRAZIONE PER $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Occorre far vedere che

1. $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

Definizione di prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B l'insieme delle coppie **ordinate** costituite da un elemento di A e un elemento di B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

DIMOSTRAZIONE PER $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Occorre far vedere che

1. $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

Dimostriamo $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

$$\begin{aligned}
(a, x) \in A \times (B \cap C) \quad & \Rightarrow \quad a \in A, x \in B \cap C \\
& \Rightarrow \quad a \in A, x \in B \text{ e } x \in C \\
& \Rightarrow \quad (a, x) \in A \times B \text{ e } (a, x) \in A \times C \\
& \Rightarrow \quad (a, x) \in (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}$$

Definizione di prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B l'insieme delle coppie **ordinate** costituite da un elemento di A e un elemento di B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

DIMOSTRAZIONE PER $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Occorre far vedere che

1. $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

Dimostriamo $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

$$\begin{aligned}
(a, x) \in (A \times B) \cap (A \times C) \quad &\Rightarrow \quad (a, x) \in A \times B \text{ e } (a, x) \in A \times C \\
&\Rightarrow \quad a \in A, x \in B \text{ e } a \in A, x \in C \\
&\Rightarrow \quad a \in A, x \in B \text{ e } x \in C \\
&\Rightarrow \quad a \in A, x \in B \cap C \\
&\Rightarrow \quad (a, x) \in A \times (B \cap C)
\end{aligned}$$

Prodotto cartesiano di più insiemi

Siano $A_1, ..., A_n$ insiemi. Allora si può definire il **prodotto cartesiano** degli n insiemi:

$$A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1, ..., n\}$$

Prodotto cartesiano di più insiemi

Siano $A_1, \ldots, A_n$ insiemi. Allora si può definire il **prodotto cartesiano** degli n insiemi:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$$

Osservazione

Uguaglianza tra n-uple: $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$ se e solo se $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Prodotto cartesiano di più insiemi

Siano $A_1, ..., A_n$ insiemi. Allora si può definire il **prodotto cartesiano** degli n insiemi:

$$A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1, ..., n\}$$

Osservazione

Uguaglianza tra n-uple: $(a_1, ..., a_n) = (b_1, ..., b_n)$ se e solo se $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, ..., n$.

Se $A_1 = A_2 = ... = A_n = X$, si può scrivere X^n invece di $X \times X \times ... \times X$.

Prodotto cartesiano di più insiemi

Siano $A_1, ..., A_n$ insiemi. Allora si può definire il **prodotto cartesiano** degli n insiemi:

$$A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1, ..., n\}$$

Osservazione

Uguaglianza tra n-uple: $(a_1, ..., a_n) = (b_1, ..., b_n)$ se e solo se $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, ..., n$.

Se $A_1 = A_2 = ... = A_n = X$, si può scrivere X^n invece di $X \times X \times ... \times X$.
Per esempio per $A_1 = ... = A_n = \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali.

Prodotto cartesiano di più insiemi

Siano $A_1, ..., A_n$ insiemi. Allora si può definire il **prodotto cartesiano** degli n insiemi:

$$A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1, ..., n\}$$

Osservazione

Uguaglianza tra *n*-uple: $(a_1, ..., a_n) = (b_1, ..., b_n)$ se e solo se $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, ..., n$.

Se $A_1 = A_2 = ... = A_n = X$, si può scrivere X^n invece di $X \times X \times ... \times X$.
Per esempio per $A_1 = ... = A_n = \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali.

$(1, 2, 0)$ è un elemento di $\mathbb{R}^3$.
$(0, 1, 2)$ è anche un elemento di $\mathbb{R}^3$, diverso dal precedente.

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Esempio

$$X = \{a, b\}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$2^2 = 4$ elementi.

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Esempio

$$X = \{a, b, c\}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$2^3 = 8$ elementi.

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

In pratica, per un insieme X con un numero finito n di elementi, per formare $\mathcal{P}(X)$, occorre considerare:

- X e $\emptyset$;
- tutti i *singleton* formati da un solo elemento
- tutti i sottoinsiemi formati dalle combinazioni di due elementi
- ...
- tutti i sottoinsiemi formati dalle combinazioni di $n-1$ elementi.

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Quali sono partizioni di $A = \{a, b, c\}$?

Insieme delle parti e partizione

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Quali sono partizioni di $A = \{a, b, c\}$?
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$: è una partizione di A.

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Quali sono partizioni di $A = \{a, b, c\}$?
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{c\}$: è una partizione di A.

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Quali sono partizioni di $A = \{a, b, c\}$?
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{b, c\}$: non è una partizione di A

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Quali sono partizioni di $A = \{a, b, c\}$?
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{b, c\}$: non è una partizione di A (non vale la proprietà 2).
$\{a\}, \{b, c\}$: è una partizione di A.

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Quali sono partizioni di $A = \{a, b, c\}$?
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{b, c\}$: non è una partizione di A (non vale la proprietà 2).
$\{a\}, \{b, c\}$: è una partizione di A.
$\{a\}, \{c\}$: non è una partizione di A

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Quali sono partizioni di $A = \{a, b, c\}$?
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{b, c\}$: non è una partizione di A (non vale la proprietà 2).
$\{a\}, \{b, c\}$: è una partizione di A.
$\{a\}, \{c\}$: non è una partizione di A (non vale la proprietà 3).
$\emptyset, \{a, b, c\}$: non è una partizione di A

Definizione di insieme delle parti

Sia X un insieme. L'insieme dei sottoinsiemi di X si dice insieme delle parti di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.
Se n è la cardinalità di X, l'insieme delle parti ha 2^n elementi, tra cui X e $\emptyset$.

Definizione di partizione di un insieme

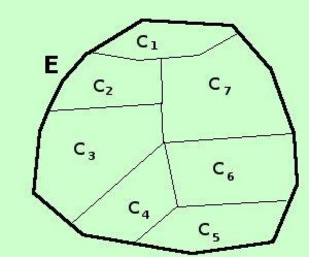
Sia X un insieme. Una partizione T di X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ tale che:

1. ogni elemento di T è un sottoinsieme non vuoto di X
2. gli elementi di T sono disgiunti a due a due: $A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in T$
3. l'unione degli elementi di T è uguale ad X

Quali sono partizioni di $A = \{a, b, c\}$?
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{c\}$: è una partizione di A.
$\{a, b\}, \{b, c\}$: non è una partizione di A (non vale la proprietà 2).
$\{a\}, \{b, c\}$: è una partizione di A.
$\{a\}, \{c\}$: non è una partizione di A (non vale la proprietà 3).
$\emptyset, \{a, b, c\}$: non è una partizione di A (non vale la proprietà 1).

Esempio: partizione di E

- $C_i \neq \emptyset$, per ogni $i = 1, ..., 7$
- $C_i \cap C_j = \emptyset$, se $i \neq j$
- $\bigcup_{i=1,\dots,7} C_i = E$



Definizione di relazione

Sia X un insieme. Una **relazione** R in X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$: $R \subseteq X \times X$.

In pratica, dati $x_1, x_2 \in X$, tra x_1 e x_2 intercorre la relazione R se e solo se la coppia ordinata (x_1, x_2) appartiene a R:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in R$$

Definizione di relazione

Sia X un insieme. Una **relazione** R in X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$: $R \subseteq X \times X$.

In pratica, dati $x_1, x_2 \in X$, tra x_1 e x_2 intercorre la relazione R se e solo se la coppia ordinata (x_1, x_2) appartiene a R:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in R$$

Esempi

- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di parallelismo}\}$
- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di perpendicolarità}\}$

Definizione di relazione

Sia X un insieme. Una **relazione** R in X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$: $R \subseteq X \times X$.

In pratica, dati $x_1, x_2 \in X$, tra x_1 e x_2 intercorre la relazione R se e solo se la coppia ordinata (x_1, x_2) appartiene a R:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in R$$

Esempi

- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di parallelismo}\}$
- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di perpendicolarità}\}$
- X insieme; l'uguaglianza $R = \{(x, x), x \in X\} \in X \times X$ è una relazione

Definizione di relazione

Sia X un insieme. Una **relazione** R in X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$: $R \subseteq X \times X$.

In pratica, dati $x_1, x_2 \in X$, tra x_1 e x_2 intercorre la relazione R se e solo se la coppia ordinata (x_1, x_2) appartiene a R:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in R$$

Esempi

- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di parallelismo}\}$
- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di perpendicolarità}\}$
- X insieme; l'uguaglianza $R = \{(x, x), x \in X\} \in X \times X$ è una relazione
- per $X = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) : x \leq y\}$ è una relazione: $xRy \Leftrightarrow x \leq y$

Definizione di relazione

Sia X un insieme. Una **relazione** R in X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$: $R \subseteq X \times X$.

In pratica, dati $x_1, x_2 \in X$, tra x_1 e x_2 intercorre la relazione R se e solo se la coppia ordinata (x_1, x_2) appartiene a R:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in R$$

Esempi

- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di parallelismo}\}$
- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di perpendicolarità}\}$
- X insieme; l'uguaglianza $R = \{(x, x), x \in X\} \in X \times X$ è una relazione
- per $X = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) : x \leq y\}$ è una relazione: $xRy \Leftrightarrow x \leq y$
- $X = \{\text{tutti i giorni di tutti gli anni}\}$; $R \subseteq X \times X$ dato dalle coppie (x, y) ove x e y sono lo stesso giorno della settimana.
  Dunque il 14 ottobre 2017 e il 21 ottobre 2017 sono in relazione perchè sono entrambi sabato.

Definizione di relazione

Sia X un insieme. Una **relazione** R in X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$: $R \subseteq X \times X$.

In pratica, dati $x_1, x_2 \in X$, tra x_1 e x_2 intercorre la relazione R se e solo se la coppia ordinata (x_1, x_2) appartiene a R:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in R$$

Esempi

- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di parallelismo}\}$
- $X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di perpendicolarità}\}$
- X insieme; l'uguaglianza $R = \{(x, x), x \in X\} \in X \times X$ è una relazione
- per $X = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) : x \leq y\}$ è una relazione: $xRy \Leftrightarrow x \leq y$
- $X = \{\text{tutti i giorni di tutti gli anni}\}$; $R \subseteq X \times X$ dato dalle coppie (x, y) ove x e y sono lo stesso giorno della settimana.
  Dunque il 14 ottobre 2017 e il 21 ottobre 2017 sono in relazione perchè sono entrambi sabato.
- $X = \{\text{città capoluogo italiane}\}$; $R \subseteq X \times X$ dato dalle coppie (x, y) ove x e y appartengono alla stessa regione.
  Dunque Ferrara e Forlì sono in relazione perchè stanno in Emilia Romagna.

Una relazione R in X si dice

- **riflessiva** se $(x, x) \in R, \forall x \in X$ $(xRx, x \in X)$
- **simmetrica** se $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ $(xRy \Rightarrow yRx)$
- **transitiva** se $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ $(xRy, yRz \Rightarrow xRz)$
- **antisimmetrica** se $(x, y) \in R, (y, x) \in R \Rightarrow x = y$ $(xRy, yRx \Rightarrow x = y)$

Una relazione R in X si dice di **equivalenza** se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
Una relazione R in X si dice **di ordine** se gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Classe

Sia R una relazione in X. Dato $x \in X$, si definisce **classe** di x un sottoinsieme di X dato da tutti gli elementi di X in relazione con x:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

x **può appartenere o meno a** $cl(x)$.
Se vale la proprietà riflessiva, allora $x \in cl(x)$.

Se R è una relazione di equivalenza, $cl(x)$ si dice **classe di equivalenza**; in tal caso $x \in cl(x)$ (vale la proprietà riflessiva) e x è detto rappresentante della classe.

Classe

Sia R una relazione in X. Dato $x \in X$, si definisce **classe** di x un sottoinsieme di X dato da tutti gli elementi di X in relazione con x:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

x **può appartenere o meno a** $cl(x)$.
Se vale la proprietà riflessiva, allora $x \in cl(x)$.

Se R è una relazione di equivalenza, $cl(x)$ si dice **classe di equivalenza**; in tal caso $x \in cl(x)$ (vale la proprietà riflessiva) e x è detto rappresentante della classe.

Esempi

$X = \{$rette del piano$\}$, $R = \{$relazione di parallelismo$\}$.
E' una **relazione di equivalenza**.
$cl(x) = \{y \in X : x||y\}$; in questo caso $x \in cl(x)$. Ogni retta può essere rappresentativa di tutte le rette ad essa parallele.

Classe

Sia R una relazione in X. Dato $x \in X$, si definisce **classe** di x un sottoinsieme di X dato da tutti gli elementi di X in relazione con x:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

x **può appartenere o meno a** $cl(x)$.
Se vale la proprietà riflessiva, allora $x \in cl(x)$.

Se R è una relazione di equivalenza, $cl(x)$ si dice **classe di equivalenza**; in tal caso $x \in cl(x)$ (vale la proprietà riflessiva) e x è detto rappresentante della classe.

Esempi

$X = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{\text{relazione di perpendicolarità}\}$: è solo simmetrica; $cl(x) = \{y \in X : x \perp y\}$; in questo caso $x \notin cl(x)$.

Classe

Sia R una relazione in X. Dato $x \in X$, si definisce **classe** di x un sottoinsieme di X dato da tutti gli elementi di X in relazione con x:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

x **può appartenere o meno a** $cl(x)$.
Se vale la proprietà riflessiva, allora $x \in cl(x)$.

Se R è una relazione di equivalenza, $cl(x)$ si dice **classe di equivalenza**; in tal caso $x \in cl(x)$ (vale la proprietà riflessiva) e x è detto rappresentante della classe.

Esempi

X insieme; l'uguaglianza $R = \{(x, x), x \in X\} \in X \times X$ è una relazione; inoltre essa è una **relazione di equivalenza**.
$cl(x)$ è l'insieme di tutti gli elementi di X uguali a x.

Classe

Sia R una relazione in X. Dato $x \in X$, si definisce **classe** di x un sottoinsieme di X dato da tutti gli elementi di X in relazione con x:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

x **può appartenere o meno a** $cl(x)$.
Se vale la proprietà riflessiva, allora $x \in cl(x)$.

Se R è una relazione di equivalenza, $cl(x)$ si dice **classe di equivalenza**; in tal caso $x \in cl(x)$ (vale la proprietà riflessiva) e x è detto rappresentante della classe.

Esempi

Per $X = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) : x \leq y\}$ è una relazione, in particolare una **relazione d'ordine**; $x \in cl(x)$.

Classe

Sia R una relazione in X. Dato $x \in X$, si definisce **classe** di x un sottoinsieme di X dato da tutti gli elementi di X in relazione con x:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

x **può appartenere o meno a** $cl(x)$.
Se vale la proprietà riflessiva, allora $x \in cl(x)$.

Se R è una relazione di equivalenza, $cl(x)$ si dice **classe di equivalenza**; in tal caso $x \in cl(x)$ (vale la proprietà riflessiva) e x è detto rappresentante della classe.

Esempi

$X = \{\text{tutti i giorni di tutti gli anni}\}$; $R \subseteq X \times X$ dato dalle coppie (x, y) ove x e y sono lo stesso giorno della settimana; è una **relazione di equivalenza**.
Dato un giorno, per esempio il 5 ottobre 2015, la sua classe di equivalenza è quella di tutti i giorni che sono lunedì. Il 5 ottobre 2015 può essere considerato come un rappresentante della classe lunedì.

Sia X un insieme.

Si può far vedere che:

A. ogni partizione T di X permette di definire una relazione di equivalenza R le cui classi sono gli elementi della partizione;

B. ogni relazione di equivalenza R induce su X una partizione T data dalle classi di equivalenza.

Ogni partizione T di X permette di definire una relazione di equivalenza R le cui classi sono gli elementi della partizione.

Sia X un insieme, T una partizione di X in sottoinsiemi $A_1, ..., A_n$.
Si definisce la relazione $R = \{(x_1, x_2) \in X \times X : \exists A_i \in T, x_1, x_2 \in A_i\}$, ossia due elementi di X sono in relazione se appartengono allo stesso sottoinsieme A_i della partizione T:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in A_i \text{ per } i \text{ fissato}$$

$R \subseteq X \times X$. Si verifica che R è una relazione di equivalenza.

Ogni partizione T di X permette di definire una relazione di equivalenza R le cui classi sono gli elementi della partizione.

Sia X un insieme, T una partizione di X in sottoinsiemi $A_1, ..., A_n$.
Si definisce la relazione $R = \{(x_1, x_2) \in X \times X : \exists A_i \in T, x_1, x_2 \in A_i\}$, ossia due elementi di X sono in relazione se appartengono allo stesso sottoinsieme A_i della partizione T:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in A_i \text{ per } i \text{ fissato}$$

$R \subseteq X \times X$. Si verifica che R è una relazione di equivalenza.

- R riflessiva: infatti xRx, perchè ogni $x \in X$ appartiene ad almeno un elemento A_i della partizione (proprietà 3 di T)

Ogni partizione T di X permette di definire una relazione di equivalenza R le cui classi sono gli elementi della partizione.

Sia X un insieme, T una partizione di X in sottoinsiemi $A_1, ..., A_n$.
Si definisce la relazione $R = \{(x_1, x_2) \in X \times X : \exists A_i \in T, x_1, x_2 \in A_i\}$, ossia due elementi di X sono in relazione se appartengono allo stesso sottoinsieme A_i della partizione T:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in A_i \text{ per } i \text{ fissato}$$

$R \subseteq X \times X$. Si verifica che R è una relazione di equivalenza.

- R riflessiva: infatti xRx, perchè ogni $x \in X$ appartiene ad almeno un elemento A_i della partizione (proprietà 3 di T)
- R simmetrica: se xRy, ossia se x e y appartengono ad A_i per i fissato, anche y e x gli appartengono e si può dire yRx

Ogni partizione T di X permette di definire una relazione di equivalenza R le cui classi sono gli elementi della partizione.

Sia X un insieme, T una partizione di X in sottoinsiemi $A_1, ..., A_n$.
Si definisce la relazione $R = \{(x_1, x_2) \in X \times X : \exists A_i \in T, x_1, x_2 \in A_i\}$, ossia due elementi di X sono in relazione se appartengono allo stesso sottoinsieme A_i della partizione T:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in A_i \text{ per } i \text{ fissato}$$

$R \subseteq X \times X$. Si verifica che R è una relazione di equivalenza.

- R riflessiva: infatti xRx, perchè ogni $x \in X$ appartiene ad almeno un elemento A_i della partizione (proprietà 3 di T)
- R simmetrica: se xRy, ossia se x e y appartengono ad A_i per i fissato, anche y e x gli appartengono e si può dire yRx
- R transitiva: se xRy e yRz, allora $x, y \in A_i$ e $y, z \in A_j$; allora $y \in A_i \cap A_j$; se $A_i \neq A_j$, vorrebbe dire che la partizione T ha insiemi non disgiunti a due a due (non vale proprietà 2 di T); siccome questo non è possibile per definizione di partizione, allora $A_i = A_j$.
  Di conseguenza, $x, z \in A_i$, ossia xRz.

Ogni partizione T di X permette di definire una relazione di equivalenza R le cui classi sono gli elementi della partizione.

Sia X un insieme, T una partizione di X in sottoinsiemi $A_1, ..., A_n$.
Si definisce la relazione $R = \{(x_1, x_2) \in X \times X : \exists A_i \in T, x_1, x_2 \in A_i\}$, ossia due elementi di X sono in relazione se appartengono allo stesso sottoinsieme A_i della partizione T:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in A_i \text{ per } i \text{ fissato}$$

$R \subseteq X \times X$. Si verifica che R è una relazione di equivalenza.

- R riflessiva: infatti xRx, perchè ogni $x \in X$ appartiene ad almeno un elemento A_i della partizione (proprietà 3 di T)
- R simmetrica: se xRy, ossia se x e y appartengono ad A_i per i fissato, anche y e x gli appartengono e si può dire yRx
- R transitiva: se xRy e yRz, allora $x, y \in A_i$ e $y, z \in A_j$; allora $y \in A_i \cap A_j$; se $A_i \neq A_j$, vorrebbe dire che la partizione T ha insiemi non disgiunti a due a due (non vale proprietà 2 di T); siccome questo non è possibile per definizione di partizione, allora $A_i = A_j$.
  Di conseguenza, $x, z \in A_i$, ossia xRz.

Osservazione. Le classi di equivalenza coincidono con gli elementi di T.

Ogni relazione di equivalenza R induce su X una partizione T data dalle classi di equivalenza.

Sia X un insieme e R una **relazione di equivalenza** nell'insieme X. Consideriamo le classi di equivalenza:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\} \quad x \in X$$

La relazione di equivalenza **induce** una **partizione** di X in sottoinsiemi costituiti dalle classi di equivalenza.

Ogni relazione di equivalenza R induce su X una partizione T data dalle classi di equivalenza.

Sia X un insieme e R una **relazione di equivalenza** nell'insieme X.
Consideriamo le classi di equivalenza:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\} \quad x \in X$$

La relazione di equivalenza **induce** una **partizione** di X in sottoinsiemi costituiti dalle classi di equivalenza.
Infatti le classi di equivalenza inducono una suddivisione di X in sottoinsiemi tali che

Ogni relazione di equivalenza R induce su X una partizione T data dalle classi di equivalenza.

Sia X un insieme e R una **relazione di equivalenza** nell'insieme X.
Consideriamo le classi di equivalenza:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\} \quad x \in X$$

La relazione di equivalenza **induce** una **partizione** di X in sottoinsiemi costituiti dalle classi di equivalenza.
Infatti le classi di equivalenza inducono una suddivisione di X in sottoinsiemi tali che

1. ogni classe è non vuota (per la riflessiva ogni elemento è equivalente a se stesso): $xRx \Leftrightarrow cl(x) \neq \emptyset$

Ogni relazione di equivalenza R induce su X una partizione T data dalle classi di equivalenza.

Sia X un insieme e R una **relazione di equivalenza** nell'insieme X.
Consideriamo le classi di equivalenza:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\} \quad x \in X$$

La relazione di equivalenza **induce** una **partizione** di X in sottoinsiemi costituiti dalle classi di equivalenza.
Infatti le classi di equivalenza inducono una suddivisione di X in sottoinsiemi tali che

1. ogni classe è non vuota (per la riflessiva ogni elemento è equivalente a se stesso): $xRx \Leftrightarrow cl(x) \neq \emptyset$
2. $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$, ossia le classi sono disgiunte a due a due (un elemento non può appartenere a classi diverse):
   infatti se per assurdo fosse $z \in cl(x) \cap cl(y)$, allora sarebbe xRz e yRz; per cui per la simmetrica $yRz \Rightarrow zRy$; da xRz e zRy per la transitiva si ha xRy, pertanto sarebbe $cl(x) = cl(y)$;

Ogni relazione di equivalenza R induce su X una partizione T data dalle classi di equivalenza.

Sia X un insieme e R una **relazione di equivalenza** nell'insieme X.
Consideriamo le classi di equivalenza:

$$cl(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\} \quad x \in X$$

La relazione di equivalenza **induce** una **partizione** di X in sottoinsiemi costituiti dalle classi di equivalenza.
Infatti le classi di equivalenza inducono una suddivisione di X in sottoinsiemi tali che

1. ogni classe è non vuota (per la riflessiva ogni elemento è equivalente a se stesso): $xRx \Leftrightarrow cl(x) \neq \emptyset$
2. $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$, ossia le classi sono disgiunte a due a due (un elemento non può appartenere a classi diverse):
   infatti se per assurdo fosse $z \in cl(x) \cap cl(y)$, allora sarebbe xRz e yRz; per cui per la simmetrica $yRz \Rightarrow zRy$; da xRz e zRy per la transitiva si ha xRy, pertanto sarebbe $cl(x) = cl(y)$;
3. $\bigcup cl(x) = X$, ossia l'unione delle classi di equivalenza è X; vale $\bigcup cl(x) \subseteq X$, ma non è possibile che ci sia un $y \in X$ che non appartiene a una classe, ossia che $\bigcup cl(x) \subset X$; infatti per la riflessiva, ogni $y \in X$ appartiene a una classe.

Definizione di insieme quoziente

L'insieme delle classi di equivalenza di X rispetto a R viene chiamato **insieme quoziente** di X rispetto a R e viene indicato con X/R.
Ogni elemento dell'insieme quoziente è una classe di equivalenza $cl(x)$ e tale elemento può essere rappresentata da x, in rappresentanza della classe di equivalenza.

Definizione di insieme quoziente

L'insieme delle classi di equivalenza di X rispetto a R viene chiamato **insieme quoziente** di X rispetto a R e viene indicato con X/R.
Ogni elemento dell'insieme quoziente è una classe di equivalenza $cl(x)$ e tale elemento può essere rappresentata da x, in rappresentanza della classe di equivalenza.

Esempio
$X = \{\text{tutti i giorni di tutti gli anni}\}$.
La relazione di equivalenza $R \subseteq X \times X$ data dalle coppie (x, y) ove x e y sono lo stesso giorno della settimana, permette di individuare sette classi di equivalenza che partizionano X.
In questo caso si può pensare all'insieme quoziente X/R come l'insieme dei 7 giorni della settimana.

Definizione di insieme quoziente

L'insieme delle classi di equivalenza di X rispetto a R viene chiamato **insieme quoziente** di X rispetto a R e viene indicato con X/R.
Ogni elemento dell'insieme quoziente è una classe di equivalenza $cl(x)$ e tale elemento può essere rappresentata da x, in rappresentanza della classe di equivalenza.

Esempio

Sia $X = \{$insieme di tutte le città italiane che sono capoluogo di provincia$\}$; due città sono in relazione R se appartengono alla stessa regione.
Questa è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza è costituita da tutti i capoluoghi di provincia nella stessa regione.
L'insieme quoziente X/R è costituito dalle classi di equivalenza, ciascuna rappresentante una regione. Ogni elemento dell'insieme quoziente può essere rappresentato dalla città capoluogo di regione.

Definizione di insieme quoziente

L'insieme delle classi di equivalenza di X rispetto a R viene chiamato **insieme quoziente** di X rispetto a R e viene indicato con X/R.
Ogni elemento dell'insieme quoziente è una classe di equivalenza $cl(x)$ e tale elemento può essere rappresentata da x, in rappresentanza della classe di equivalenza.

Esempio
Sia $X = \{$studenti in corso del corso di studi di Informatica$\}$; due studenti sono in relazione R se sono iscritti allo stesso anno.
Questa è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza è costituita da tutti gli studenti in corso iscritti allo stesso anno.
L'insieme quoziente X/R è costituito da: studenti del I anno, del II anno, del III anno. Ogni elemento dell'insieme quoziente può essere rappresentato da uno studente del relativo anno.

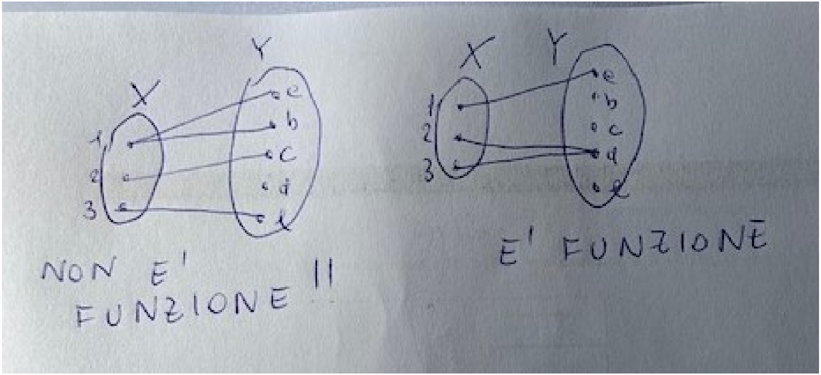
La relazione di parallelismo delle rette del piano è una relazione di equivalenza.

$cl(x)$ è l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad x.
La classe di equivalenza è un elemento dell'insieme quoziente, caratterizzato dal fatto che tuttte le rette che appartengono alla classe hanno la stessa direzione.
L'insieme quoziente è allora l'insieme di tutte le direzioni del piano.
Gli elementi rappresentativi delle varie direzioni possono essere le rette passanti per l'origine.
In questo modo il concetto di direzione non dipende dalla singola retta.

Tramite lo strumento matematico della definizione di un insieme di equivalenza in un insieme è possibile estrarre una informazione caratterizzante dell'insieme, inducendo una partizione nell'insieme che mette in evidenza questa caratteristica, astraendola e sintetizzandola nell'insieme quoziente.

Definizione di funzione o applicazione

Siano X e Y due insiemi.
Una **funzione o applicazione** f da X in Y è una **legge** che associa ad **ogni** elemento $x \in X$ **uno e un solo elemento** $y \in Y$ e si scrive $f(x) = y \in Y$.
Si scrive $f : X \to Y$ e $f : x \to y$.



Una funzione f da X a Y può essere vista come una terna data da X, Y e $\Gamma \subseteq X \times Y$ tale che per ogni $x \in X$ esiste uno e un solo $f(x) \in Y$ tale che $(x, f(x)) \in \Gamma$:

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

X si dice **dominio** di f
Y si dice **codominio** di f
Γ si dice **grafico** di f

$f : X \to Y$

dominio: X, codominio: Y
grafico $\Gamma = \{(1, a), (2, c), (3, d)\} \subseteq X \times Y$

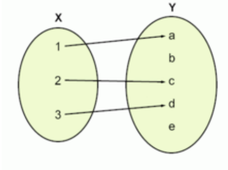


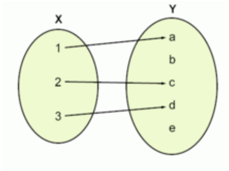
Immagine diretta e inversa

Sia $f : X \to Y$.
Dato $x \in X$, $f(x) = y \in Y$ si dice il corrispondente o **immagine** di x in Y tramite f. $f(x)$ non è mai vuoto.
Sia $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$, allora $f(S)$ si dice **immagine** di S in Y tramite f.
$f(S) \subseteq Y$ non è mai vuoto.
Dato $y \in Y$, allora il sottoinsieme di X dato da $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ si dice **immagine inversa** di y in X tramite f. $f^{-1}(y)$ può essere vuoto.
Dato $T \subseteq Y$, allora il sottoinsieme di X dato da $f^{-1}(T) = \{x \in X : f(x) \in T\}$ si dice **immagine inversa** di T in X tramite f. $f^{-1}(T) \subseteq X$ può essere vuoto.

Esempio

$f(1) = \{a\}$, $f(X) = \{a, c, d\}$

$f^{-1}(d) = \{3\}$, $f^{-1}(b) = \emptyset$, $f^{-1}(\{a, c, d\}) = X$, $f^{-1}(\{b, e\}) = \emptyset$



Esempi

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tale che $f(n) = n$;
  $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $g(n) = n$;

  Si tratta di funzioni **diverse** perchè il codominio è diverso.
  Una funzione è data non solo dalla legge ma anche dalla coppia di insiemi
  $f^{-1}(\sqrt{2}) = \emptyset$; $g^{-1}(2) = 2$.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tale che $f(n) = n$;
  $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $g(n) = n$;

  Si tratta di funzioni **diverse** perchè il codominio è diverso.
  Una funzione è data non solo dalla legge ma anche dalla coppia di insiemi
  $f^{-1}(\sqrt{2}) = \emptyset$; $g^{-1}(2) = 2$.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tale che $n \to |n|$ si dice valore assoluto.

  Per esempio, $-7 \to |-7| = 7$, ossia 7 è l'immagine di -7 in $\mathbb{N}$ tramite il valore assoluto.
  Se $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq -3\}$, allora $f(S) = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 3\}$.
  Se $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$, allora $f(S) = \mathbb{N}$.
  Sia $T = \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$, $f^{-1}(T) = \{0, -1, 1, -2, 2\}$.

Funzione iniettiva

Sia $f : X \to Y$ una funzione. f si dice **iniettiva** se per ogni $a_1, a_2 \in X$, $a_1 \neq a_2$, si ha che $f(a_1) \neq f(a_2)$, ossia *se a elementi distinti di X corrispondono elementi distinti di Y.*

Equivalentemente, se per ogni $a_1, a_2 \in X$ con $f(a_1) = f(a_2)$ allora $a_1 = a_2$.

Funzione suriettiva

Sia $f : X \to Y$ una funzione. f si dice **suriettiva** se per ogni $b \in Y$ esiste $a \in X$ tale che $f(a) = b$,

$$f^{-1}(b) \neq \emptyset \qquad \forall b \in Y$$

Equivalentemente, f è suriettiva se l'immagine di X in Y tramite f vale Y, ossia $f(X) = Y$.

Funzione biettiva

Sia $f : X \to Y$ una funzione. f si dice **biettiva (o biunivoca)** se è iniettiva e suriettiva.

Si parla anche di corrispondenza biunivoca tra X e Y.

Esempi.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tale che $f(n) = n$: iniettiva, non suriettiva
  $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $g(n) = n$: iniettiva e suriettiva (biettiva)
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tale che $n \to |n|$: non iniettiva ma suriettiva

Quando $f : X \to Y$ è una **funzione biettiva**, allora ogni elemento di Y deriva da un elemento e uno solo di X.
Si può allora definire una funzione da Y ad X associando ad ogni elemento $b \in Y$ l'unico elemento $a \in X$ tale che $f(a) = b$.
Tale funzione è detta **inversa di** f e viene indicata con f^{-1}:

$$f^{-1} : Y \to X, \qquad f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

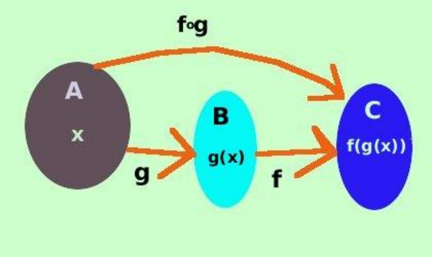
Anche f^{-1} è biettiva.

$f : X \to Y$ *è biettiva* $\Rightarrow X$ **e** Y **hanno lo stesso numero di elementi (la stessa cardinalità)**

Esempio.
$f : \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}^+$, tale che $f(x) = \sqrt{x}$ è biettiva.
La funzione inversa è data da $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che $f^{-1}(y) = y^2$.
Infatti posto $x = y^2$, $f(x) = f(y^2) = y = \sqrt{x}$.

Siano $g : A \to B$ e $f : B \to C$.
La funzione $f \circ g : A \to C$ definita come $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ è detta **funzione composta** di f ed g.
Deve valere che $g(A) \subseteq B$, con B dominio di f.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{f} & C \\ & x \to & g(x) & \to f(g(x)) & \end{array}$$



Siano $g : A \to B$ e $f : B \to C$.
La funzione $f \circ g : A \to C$ definita come $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ è detta **funzione composta** di f ed g.
Deve valere che $g(A) \subseteq B$, con B dominio di f.

$$\begin{array}{ccccc} & g & & f & \\ A & \to & B & \to & C \\ & x \to & g(x) & \to f(g(x)) & \end{array}$$

Se f e g sono iniettive, allora $f \circ g$ è iniettiva.
Se f e g sono suriettive, allora $f \circ g$ è suriettiva.
Se f e g sono biettive, allora $f \circ g$ è biettiva.

Siano $g : A \to B$ e $f : B \to C$.
La funzione $f \circ g : A \to C$ definita come $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ è detta **funzione composta** di f ed g.
Deve valere che $g(A) \subseteq B$, con B dominio di f.

$$\begin{array}{ccccc} & g & & f & \\ A & \to & B & \to & C \\ & x \to & g(x) & \to f(g(x)) & \end{array}$$

Osservazioni

- Se $f : A \to B$ è biettiva, allora è possibile definire $f^{-1} : B \to A$.
  La funzione $f^{-1} \circ f : A \to A$ è tale che $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.
  Tale funzione si indica con 1_A e si dice **identità** in A.
  Analogamente $f \circ f^{-1} : B \to B$ si dice **identità** in B (1_B).
- Sia $f : A \to A$ una funzione. Ha senso considerare $f \circ f$, $f \circ f \circ f$,....che si possono denotare con f^2, f^3,...

Definizione di funzione restrizione

Sia $f : A \to B$, e sia $A_1 \subseteq A$.
Si può considerare la funzione $f_{|A_1} : A_1 \to B$ definita da $f_{|A_1}(x) = f(x)$, per ogni $x \in A_1$.
Tale funzione è detta **restrizione** di f ad A_1.

Esempi riassuntivi

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita come $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$; f non è iniettiva nè suriettiva. Infatti $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, ...\}$.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita come $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$; f non è iniettiva nè suriettiva. Infatti $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, ...\}$.
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $g(x) = 2x$; g è iniettiva, ma non suriettiva. Infatti $g(\mathbb{Z})$ è l'insieme dei pari.

Esempi riassuntivi

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita come $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$; f non è iniettiva nè suriettiva. Infatti $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, ...\}$.
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $g(x) = 2x$; g è iniettiva, ma non suriettiva. Infatti $g(\mathbb{Z})$ è l'insieme dei pari.
- $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita da $h(x) = |x|$; h non è iniettiva ma è suriettiva, $h(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita come $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$; f non è iniettiva nè suriettiva. Infatti $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, ...\}$.
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $g(x) = 2x$; g è iniettiva, ma non suriettiva. Infatti $g(\mathbb{Z})$ è l'insieme dei pari.
- $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita da $h(x) = |x|$; h non è iniettiva ma è suriettiva, $h(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$.
- $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $k(x) = x + 1$; k è iniettiva e suriettiva e dunque è biettiva.
  In questo caso $k^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è la funzione definita come $k^{-1}(y) = y - 1$.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita come $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$; f non è iniettiva nè suriettiva. Infatti $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $g(x) = 2x$; g è iniettiva, ma non suriettiva. Infatti $g(\mathbb{Z})$ è l'insieme dei pari.
- $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita da $h(x) = |x|$; h non è iniettiva ma è suriettiva, $h(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$.
- $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $k(x) = x + 1$; k è iniettiva e suriettiva e dunque è biettiva.
  In questo caso $k^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è la funzione definita come $k^{-1}(y) = y - 1$.
- $g, k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definite come $g(x) = 2x$ e $k(x) = x + 1$; allora
  $(g \circ k)(x) = g(k(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$.
  Invece $(k \circ g)(x) = k(g(x)) = k(2x) = 2x + 1$.
  Dunque $g \circ k \neq k \circ g$

- $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, definita come $f(x)=x^2$ per ogni $x\in\mathbb{Z}$; f non è iniettiva nè suriettiva. Infatti $f(\mathbb{Z})=\{0,1,4,9,\dots\}$.
- $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, definita come $g(x)=2x$; g è iniettiva, ma non suriettiva. Infatti $g(\mathbb{Z})$ è l'insieme dei pari.
- $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, definita da $h(x)=|x|$; h non è iniettiva ma è suriettiva, $h(\mathbb{Z})=\mathbb{N}$.
- $k:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, definita come $k(x)=x+1$; k è iniettiva e suriettiva e dunque è biettiva.
  In questo caso $k^{-1}:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ è la funzione definita come $k^{-1}(y)=y-1$.
- $g,k:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, definite come $g(x)=2x$ e $k(x)=x+1$; allora
  $(g\circ k)(x)=g(k(x))=g(x+1)=2(x+1)=2x+2$.
  Invece $(k\circ g)(x)=k(g(x))=k(2x)=2x+1$.
  Dunque $g\circ k\neq k\circ g$
- $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, definita come $g(x)=2x$; $g^2(x)=g(g(x))=g(2x)=4x$; $g^3(x)=g(g^2(x))=g(4x)=8x$.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita come $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$; f non è iniettiva nè suriettiva. Infatti $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$.
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $g(x) = 2x$; g è iniettiva, ma non suriettiva. Infatti $g(\mathbb{Z})$ è l'insieme dei pari.
- $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita da $h(x) = |x|$; h non è iniettiva ma è suriettiva, $h(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$.
- $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $k(x) = x + 1$; k è iniettiva e suriettiva e dunque è biettiva.
  In questo caso $k^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è la funzione definita come $k^{-1}(y) = y - 1$.
- $g, k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definite come $g(x) = 2x$ e $k(x) = x + 1$; allora
  $(g \circ k)(x) = g(k(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$.
  Invece $(k \circ g)(x) = k(g(x)) = k(2x) = 2x + 1$.
  Dunque $g \circ k \neq k \circ g$
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita come $g(x) = 2x$; $g^2(x) = g(g(x)) = g(2x) = 4x$; $g^3(x) = g(g^2(x)) = g(4x) = 8x$.
- $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definita da $h(x) = |x|$; $h_{|\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è l'identità su $\mathbb{N}$

Definizione di operazione binaria o legge di composizione interna

Sia A un insieme non vuoto. Si dice **operazione binaria o legge di composizione interna** in A una funzione

$$\begin{aligned} \circ : A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow z \end{aligned}$$

Se $x, y \in A$, l'operazione binaria tra x e y si denota $z = x \circ y \in A$.

Esempio. L'addizione e la moltiplicazione usuali in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono operazioni binarie, che si denotano con $+$ e $\cdot$.

Definizione di legge di composizione esterna

Sia A e B insiemi non vuoti. Si dice **legge di composizione esterna** in A con elementi in B una funzione

$$\begin{aligned} \star : B \times A &\rightarrow A \\ (b, x) &\rightarrow z \end{aligned}$$

Se $b \in B$ e $x \in A$, si scrive $z = b \star x \in A$.

Supponiamo che in un insieme A siano definite due leggi di composizione interne, denotate con $+$ e $\cdot$.
Vediamo le proprietà di cui possono godere tali operazioni.

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a, b \in A$, $a+b = b+a$ (proprietà commutativa di $+$)

Proprietà delle operazioni binarie $+$ e $\cdot$ come leggi di composizione interne

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a, b \in A,\ a+b = b+a$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $\cdot$)

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a, b \in A,\ a + b = b + a$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $\cdot$)
6. $\exists\ 1 \in A$ tale che $a\ 1 = 1\ a = a$, $\forall a \in A$ (1 è elemento neutro per $\cdot$)

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a, b \in A,\ a+b = b+a$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $\cdot$)
6. $\exists\ 1 \in A$ tale che $a\ 1 = 1\ a = a$, $\forall a \in A$ (1 è elemento neutro per $\cdot$)
7. $a.(b+c) = a.b + a.c$ e $(a+b).c = a.c + b.c$, $\forall a, b, c \in A$ (distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$)

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a, b \in A,\ a+b = b+a$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $\cdot$)
6. $\exists\ 1 \in A$ tale che $a\ 1 = 1\ a = a$, $\forall a \in A$ (1 è elemento neutro per $\cdot$)
7. $a.(b+c) = a.b + a.c$ e $(a+b).c = a.c + b.c$, $\forall a, b, c \in A$ (distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$)
8. $a.b = b.a$, $\forall a, b \in A$ (proprietà commutativa di $\cdot$)

Proprietà delle operazioni binarie $+$ e $\cdot$ come leggi di composizione interne

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists (-a) \in A$ tale che $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a, b \in A,\ a+b = b+a$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $\cdot$)
6. $\exists\ 1 \in A$ tale che $a\ 1 = 1\ a = a$, $\forall a \in A$ (1 è elemento neutro per $\cdot$)
7. $a.(b+c) = a.b + a.c$ e $(a+b).c = a.c + b.c$, $\forall a, b, c \in A$ (distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$)
8. $a.b = b.a$, $\forall a, b \in A$ (proprietà commutativa di $\cdot$)
9. $\forall a \in A - \{0\}$, $\exists a^{-1} \in A$ tale che $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (esistenza dell'inverso per $\cdot$)

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a,b,c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a,b \in A$, $a+b = b+a$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a,b,c \in A$ (proprietà associativa di $\cdot$)
6. $\exists\ 1 \in A$ tale che $a\ 1 = 1\ a = a$, $\forall a \in A$ (1 è elemento neutro per $\cdot$)
7. $a.(b+c) = a.b + a.c$ e $(a+b).c = a.c + b.c$, $\forall a,b,c \in A$ (distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$)
8. $a.b = b.a$, $\forall a,b \in A$ (proprietà commutativa di $\cdot$)
9. $\forall a \in A - \{0\}$, $\exists a^{-1} \in A$ tale che $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (esistenza dell'inverso per $\cdot$)

Se A è un insieme in cui è definita un'operazione binaria che gode delle proprietà 1, 2, 3, allora $(A,+)$ si dice **gruppo** (gruppo commutativo se vale la 4)).

Proprietà delle operazioni binarie $+$ e $\cdot$ come leggi di composizione interne

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a, b \in A$, $a+b = b+a$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a, b, c \in A$ (proprietà associativa di $\cdot$)
6. $\exists\ 1 \in A$ tale che $a\ 1 = 1\ a = a$, $\forall a \in A$ (1 è elemento neutro per $\cdot$)
7. $a.(b+c) = a.b + a.c$ e $(a+b).c = a.c + b.c$, $\forall a, b, c \in A$ (distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$)
8. $a.b = b.a$, $\forall a, b \in A$ (proprietà commutativa di $\cdot$)
9. $\forall a \in A - \{0\}$, $\exists a^{-1} \in A$ tale che $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (esistenza dell'inverso per $\cdot$)

Se A è un insieme in cui sono definite due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ che godono delle proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 allora $(A, +, \cdot)$ si dice **anello (anello commutativo** se vale la 8)).

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a,b,c \in A$ (proprietà associativa di $+$)
2. $\exists\ 0 \in A$ tale che $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in A$ (0 è elemento neutro per $+$)
3. $\forall a \in A, \exists(-a) \in A$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza dell'opposto per $+$)
4. $\forall a,b \in A$, $a+b = b+a$ (proprietà commutativa di $+$)
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a,b,c \in A$ (proprietà associativa di $\cdot$)
6. $\exists\ 1 \in A$ tale che $a\ 1 = 1\ a = a$, $\forall a \in A$ (1 è elemento neutro per $\cdot$)
7. $a.(b+c) = a.b + a.c$ e $(a+b).c = a.c + b.c$, $\forall a,b,c \in A$ (distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$)
8. $a.b = b.a$, $\forall a,b \in A$ (proprietà commutativa di $\cdot$)
9. $\forall a \in A - \{0\}$, $\exists a^{-1} \in A$ tale che $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (esistenza dell'inverso per $\cdot$)

Se A è un insieme in cui sono definite due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ che godono delle proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 allora $(A,+,\cdot)$ si dice **anello (anello commutativo** se vale la 8)).

Se A è un insieme in cui sono definite due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ che godono delle proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, allora $(A,+,\cdot)$ è un **campo**.

- $\mathbb{N}$ non è un gruppo rispetto a $+$ (non vale la 3) e a $\cdot$ (non vale la 3)!
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sono gruppi commutativi rispetto alla somma
- $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ sono gruppi commutativi rispetto al prodotto (elemento neutro 1); si elimina 0 perchè non ha opposto;
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sono campi.

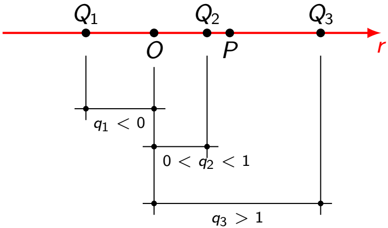
Introduciamo alcuni importanti concetti geometrici:

- sistema di riferimento su una retta
- sistema di riferimento su un piano
- sistema di riferimento nello spazio

Data una retta r, un **sistema di riferimento sulla retta (o sistema di coordinate)** è individuato da una *coppia ordinata di punti distinti* (O, P)*, detti rispettivamente* **punto origine** *e* **punto unità***.*

Data una retta r, un **sistema di riferimento sulla retta (o sistema di coordinate)** è individuato da una *coppia ordinata di punti distinti* (O, P), *detti rispettivamente* **punto origine** *e* **punto unità***.*
Il verso (o orientazione della retta) (concetto intuitivo) è quello secondo cui P segue O. Pertanto viene individuata una relazione d'ordine sulla retta, secondo cui $P > O$. Quindi r è una retta orientata da O verso P.
La lunghezza di OP è presa come unità di misura.

Data una retta r, un **sistema di riferimento sulla retta (o sistema di coordinate)** è individuato da una *coppia ordinata di punti distinti* (O, P)*, detti rispettivamente* **punto origine** *e* **punto unità***.*
Il verso (o orientazione della retta) (concetto intuitivo) è quello secondo cui P segue O. Pertanto viene individuata una relazione d'ordine sulla retta, secondo cui $P > O$. Quindi r è una retta orientata da O verso P.
La lunghezza di OP è presa come unità di misura.



Ad ogni punto Q della retta corrisponde la **misura** di OQ rispetto a OP, misura che è un numero reale, positivo se Q segue O, negativo se Q precede O.

In sintesi, dati O e P, si costruisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta r e i numeri reali

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{r}$$

che associa ad ogni punto Q il numero x tale che:

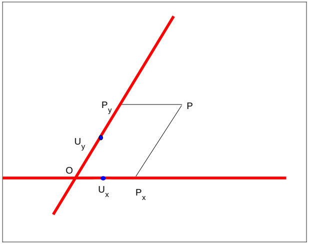
$$x = \begin{cases} 0 & Q = O \\ +\text{misura di } OQ \text{ rispetto } OP & Q > O \\ -\text{misura di } OQ \text{ rispetto } OP & Q < O \end{cases}$$

x è detta **ascissa** di Q nel sistema di riferimento cartesiano determinato da O e P e si scrive $Q = x$ oppure $Q(x)$.
Grazie a questa corrispondenza biunivoca, punti di una retta e numeri reali possono essere **identificati**, ossia si può trattare i punti come numeri reali e viceversa.

Osservazione. L'ascissa di O è 0, l'ascissa di P è 1.

Date due rette distinte x e y del piano π incidenti in un punto O, detto **origine**, si considerano due **punti unità** U_x, U_y sulle rette, diversi da O e appartenenti rispettivamente a x e y. OU_x e OU_y definiscono i versi delle due rette e le lunghezze unitarie.

Sia P un punto del piano. Siano P_x e P_y le intersezioni delle rette parallele a y e x passanti per P. Ad ogni punto P si associa la **coppia ordinata di numeri reali** (p_x, p_y), che sono rispettivamente l'ascissa di P_x e di P_y nel sistema di riferimento sulle rette x e y determinato da OU_x e OU_y rispettivamente.



(p_x, p_y) viene detta **coppia di coordinate** di P. p_x è detta **ascissa** di P, p_y **ordinata** di P nel sistema di riferimento considerato.

In sintesi, dati tre punti distinti non allineati O, U_x, U_y, si costruisce una **corrispondenza biunivoca**

$$\pi \to \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^2 \to \pi$$

che associa ad ogni punto P del piano la coppia ordinata (p_x, p_y) delle sue **coordinate**.
Grazie a questa corrispondenza biunivoca, punti di un piano e coppie ordinate di numeri reali possono essere **identificati**.

Il sistema di riferimento o sistema di coordinate del piano è individuato dalla **terna ordinata di punti distinti non allineati** O**,** U_x**,** U_y.
Infatti considerando le due rette che congiungono O ai due punti si ottengono le rette incidenti in O .
Non si ha una unità di misura assoluta, ma una diversa per ogni direzione. Il sistema non dipende da una metrica.
Le due rette OU_x e OU_y si dicono **asse delle ascisse e asse delle ordinate.**
O ha coordinate $(0, 0)$.
U_x ha coordinate $(1, 0)$.
U_y ha coordinate $(0, 1)$.

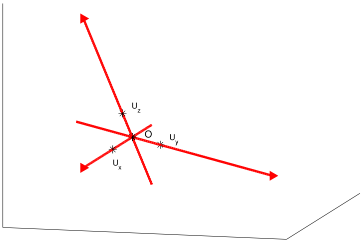
Sistema di riferimento ortogonale-ortonormale

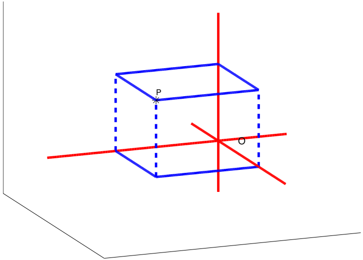
Se le rette OU_x e OU_y sono ortogonali, allora il sistema di riferimento si dice ortogonale.
Se la lunghezza di OU_x è uguale alla lunghezza di OU_y allora il sistema di riferimento si dice ortonormale.

Nel seguito si considereranno sistemi di riferimento ortonormali, indicandoli come **sistemi di coordinate cartesiane ortogonali**.

Date tre rette distinte x, y e z non complanari incidenti in un punto O, detto **origine,** si considerano tre **punti unità** U_x, U_y, U_z sulle rette diversi da O e appartenenti rispettivamente a x, y e z. OU_x, OU_y, OU_z definiscono i **versi** delle tre rette e le **lunghezze unitarie**.

Sia P un punto dello spazio. Siano P_x, P_y e P_z le intersezioni dei piani passanti per P e paralleli al piano che contiene y e z, al piano che contiene x e z, al piano che contiene x e y rispettivamente.
Ad ogni punto P si associa la **terna ordinata di numeri reali** (p_x, p_y, p_z), che sono rispettivamente l'ascissa di P_x, di P_y e di P_z nel sistema di riferimento sulle rette x, y e z determinato da OU_x, OU_y e OU_z rispettivamente.





(p_x, p_y, p_z) viene detta **terna di coordinate** di P. p_x è detta **ascissa** di P, p_y **ordinata** di P, p_z è detta **quota** di P nel sistema di riferimento considerato.
In sintesi, dati 4 punti distinti non complanari, si costruisce una **corrispondenza biunivoca**

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{S}$$

che associa ad ogni punto P del piano la terna ordinata (p_x, p_y, p_z) delle sue **coordinate**.
Grazie a questa corrispondenza biunivoca, punti dello spazio e terne ordinate di numeri reali possono essere **identificati**.

Il sistema di riferimento o sistema di coordinate dello spazio è individuato daila **quadrupla ordinata di punti distinti non complanari** O, U_x, U_y, U_z. Infatti considerando le rette che congiungono O ai tre punti si ottengono le rette non complanari incidenti in O .
Non si ha una unità di misura assoluta, ma una diversa per ogni direzione. Il sistema non dipende da una metrica.
Le tre rette OU_x, OU_y e OU_z si dicono **assi coordinati.** e i piani che le contengono a due a due si dicono **piani coordinati**.
O ha coordinate $(0, 0, 0)$.
U_x ha coordinate $(1, 0, 0)$.
U_y ha coordinate $(0, 1, 0)$.
U_z ha coordinate $(0, 0, 1)$.

Sistema di riferimento ortogonale-ortonormale

Se le rette OU_x, OU_y e OU_z sono ortogonali a due a due, allora il sistema di riferimento si dice ortogonale.
Se la lunghezza di OU_x è uguale alla lunghezza di OU_y e di OU_z allora il sistema di riferimento si dice ortonormale.

Nel seguito si considereranno sistemi di riferimento ortonormali, indicandoli come **sistemi di coordinate cartesiane ortogonali**.