10. Dimostrare che le seguenti matrici sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si considera la combinazione lineare delle matrici e la si uguaglia alla matrice nulla di dimensioni 2×3

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \\ a + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -b + b + 2c = 0 & \longrightarrow c = 0 \\ -b + b - 2c = 0 \\ -b + c = 0 & \longrightarrow b = 0 \\ -2b - b + c = 0 \\ a = -b & \longrightarrow a = 0 \end{cases}$$

Sono linearmente indipendenti.

11. Sia $A \in M_n(R)$.
La traccia di A è la somma degli elementi diagonali di A.
Dimostrare che il sottoinsieme di $M_n(R)$ costituito dalle matrici a traccia nulla è un sottospazio vettoriale e calcolarne la dimensione.

Siano A, B matrici di ordine n (ossia $n \times n$) con traccia nulla

$a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}=0$

$b_{11}+b_{22}+\dots+b_{nn}=0$

Si consideri lo scalare $c \in R$ e si verifichi se $cA-B$ è ancora una matrice a traccia nulla.
In tal caso per la II forma, il sottoinsieme è un sottospazio.
Infatti $cA-B$ ha come elementi diagonali

$ca_{11}-b_{11}+ca_{22}-b_{22}+ \qquad +ca_{nn}-b_{nn}$

$=c(a_{11}+\dots+a_{nn})-(b_{11}+\dots+b_{nn})=c.0-0$

$=0$.

Poiché gli elementi diagonali sono

vincolati a dover rispettare l'uguaglianza

$$a_{11}+a_{22}+ \quad +a_{nn}=0 \quad \forall A$$

segue che la dimensione del sottospazio è n^2-1.

20. Trovare una base per le matrici quadrate simmetriche di ordine 2.

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono matrici linearmente indipendenti che generano A

$$A=aE_{11}+bE_{22}+cE_{12} \Rightarrow \dim =3$$

Se A fosse una matrice simmetrica di ordine 3,

$$A=\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

si avrebbe che per lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 3 simmetriche i generatori lin. indipendenti sono

E_{11} E_{12} E_{13} E_{22} E_{23} E_{33}

$\Rightarrow$ dimensione $= 6$

In generale per matrici simmetriche di ordine n, la dimensione dello spazio vettoriale da esse formato è

$$n + n-1 + n-2 \qquad + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

23. Trovare una base per le matrici quadrate antisimmetriche di ordine 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Una base è costituita dagli elementi:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(sono matrici lin. indipendenti e sono generatori

$A = a E_{12} + b E_{13} + c E_{23}$ $\Rightarrow$ dimensione $= 3$

In generale l'insieme delle matrici antisimmetriche di ordine n forma uno spazio vettoriale di dimensione

$$n-1+n-2+\quad+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

(gli elementi diagonali sono nulli).

6. Esprimi le seguenti matrici come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{A - A^T}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

—o—

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{2}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{A - A^T}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{2}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + \sqrt{2}\,9 + 12\cdot\frac{3}{2} \\ -2 + 5\sqrt{2} - 4\cdot\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 + 9\sqrt{2} \\ -8 + 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2. Calcolare la diade (prodotto di un vettore colonna per un vettore riga)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Dimostrare che se $A \in M_n(R)$ allora A^TA è simmetrica.

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

~~[illegible]~~ /

5. Sia $A \in M_{m,n}(R)$.
Dimostrare che AA^T e A^TA sono simmetriche.

$$(\underbrace{\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times m}{A^T}}_{m\times m})^T = (A^T)^T A^T = \underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times m}{A^T}$$

$$(\underbrace{\underset{n\times m}{A^T}\ \underset{m\times n}{A}}_{n\times n})^T = A^T(A^T)^T = \underbrace{\underset{n\times m}{A^T}\ \underset{m\times n}{A}}_{n\times n}$$

Data una matrice A $\quad m \times n$

$$A \overset{\in \mathbb{R}^n}{\downarrow}{e_i} = A^i \quad \text{i-esima colonna}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\in \mathbb{R}^m}{\downarrow}{e_i^T} A = A_i \quad \text{i-esima riga}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Il prodotto di matrici diagonali è una matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 b_1 & & & 0 \\ & d_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n b_n \end{pmatrix}$$

17. Se A è invertibile, si mostri che vale che

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$
$$BA = CA \Rightarrow B = C$$

Infatti da $AB = AC$

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) =$$
$$= A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = IC = C$$

Da $BA = CA$

$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} =$$
$$= C(AA^{-1}) = CI = C$$

18. Sia A invertibile.

A^{-k} è definito come $(A^{-1})^k$ per ogni $k \geq 1$.

Mostrare che l'inversa di A^k è A^{-k}.

Infatti

$$(A^{-1})^k A^k = A^{-1} \dots A^{-1} A \dots A = I$$

$$A^k (A^{-1})^k = A \dots A A^{-1} \quad A^{-1} = I$$

25. Se A è non singolare, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Infatti

$$(A^{-1})^T A^T = \cancel{(A^{-1})^T A} (A A^{-1})^T = I$$

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I$$

26. Sia A simmetrica, $A = A^T$.

Allora A^{-1} è simmetrica

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

(19) Se A è diagonale, A è invertibile se e solo se tutti gli elementi diagonali sono non nulli e in tal caso l'inversa è una matrice diagonale con elementi diagonali uguali ai reciproci degli elementi

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$