**Matematica discreta - a.a. 2022-23 - 2 maggio 2023 - I parziale**
Ogni esercizio deve essere svolto motivando adeguatamente tutti i passaggi, con richiami alla teoria; in caso di mancata motivazione, l'esercizio non verrà valutato positivamente.

1. Risolvere i seguenti esercizi:
   - (0.5 punti) Dati i punti $A = (5, 4, -2)$ e $B = (6, 5, 0)$, determinare le coordinare del vettore libero $w$ equipollente al vettore applicato ad $A$ e di estremo $B$ e scriverlo in termini dei versori degli assi cartesiani $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
   - (1 punto) Determinare il vettore proiezione $v'$ del vettore $w$ sul piano contenente i vettori $u = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $v = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
   - (0.5 punto) Per quali valori di $h$, i vettori $a = (1, 1, 2)$, $b = (1, -3, h)$, $c = (1, 7, 0)$ sono complanari?

2. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi e, per i sottoinsiemi che sono sottospazi, determinare una base e la dimensione.
   (a) (1 punto) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-3z = 0; 2x-4y+5z+1 = 0\}$
   (b) (1 punto) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x - y + 4z)^2 + (x - z)^2 = 0\}$

3. (3 punti) Dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y = 0\}$ e $W = [(1, 1, 0)]$, determinare il sottospazio somma $U + W$. Mostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, usando la relazione di Grassman.

4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, determinare:
   - (1 punto) se eseguibil, il prodotto $C = AB$, $D = B^T A$, $C + D^T$;
   - (1.5 punti) il rango di $A$ al variare del parametro $k$ e il rango di $B$
   - (1.5 punti) l'inversa di $A$ per $k = 0$, verificando che il risultato sia corretto.

5. (4 punti) Discutere, al variare del parametro reale $k$, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:
$$\begin{cases} kx + y = -1 \\ 2x - 3y = 0 \\ (k+2)x - 2y = -1 \end{cases}$$

6. Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che manda il vettore $(x, y)$ nel vettore $(3x + 2y, x - y, x + y)$.

   - (1 punto) Dimostrare che l'applicazione è lineare
   - (2 punti) Trovare $\dim(\ker(f))$ e $\dim(\mathrm{Imm}(f)$ ed eventualmente una base per ciascun sottospazio.