1. Verificare che la seguente matrice sia ortogonale

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_4$$

Siccome $A = A^T$, anche $A^T A = I_4$

A è ortogonale.

2. Trovare la matrice di ordine 2 associata alla forma quadratica

$q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se si volesse trovare il segno della matrice, occorre calcolare gli autovalori:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right\} \text{ forma quadratica indefinita}$$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2}$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -x_1 - x_2 = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2}$$

La matrice che diagonalizza A è

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Trovare la forma quadratica associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e il suo segno.

$$q(x, y, z) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + z^2 + xy$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)\left[\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \frac{9}{4} - 3\lambda - \frac{1}{4}\right)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1$ m. a. 2

$\lambda_2 = 2$ m. a. 1

La forma quadratica è definita positiva.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \ ; \ z = 0 \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad AU = U \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

4. Scrivere la matrice che rappresenta la forma quadratica $q(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ e stabilire il segno della forma quadratica. Determinare la base che diagonalizza la forma quadratica.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-1) - 1 =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

$$\lambda_1 = 2+\sqrt{2} \qquad \lambda_2 = 2-\sqrt{2}$$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ forma quadratica definita positiva

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (-1+\sqrt{2})x - y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \right]$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+1+2-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (-1-\sqrt{2})x - y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \right]$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 \\ -(1+\sqrt{2}) \end{matrix} \right\| = \sqrt{1+1+2+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

La matrice che diagonalizza A è

$$N = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ -\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}} & -\dfrac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

5. Sia $q(x,y,z) = 5xy - x^2 - 5y^2 - 4z^2$

Determinare il segno della forma quadratica.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -5/2 & 0 \\ -5/2 & \lambda+5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+4)\left[(\lambda+1)(\lambda+5) - \frac{25}{4}\right] = (\lambda+4)\left[\lambda^2+6\lambda+5-\frac{25}{4}\right]$$

$$= (\lambda+4)\left(\lambda^2+6\lambda-\frac{5}{4}\right) = 0$$

$\lambda_1 = -4$ $\qquad \lambda = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+5}}{2}$

$\lambda_2 = -3 + \dfrac{\sqrt{41}}{2}$

$\lambda_3 = -3 - \dfrac{\sqrt{41}}{2}$ La forma quadratica è indefinita.

6. Sia $q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 4xz + z^2$.

Determinare il segno della forma quadratica e la base che la diagonalizza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-6 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-6)\left[(\lambda-1)^2 - 4\right]$$

$$= (\lambda-6)(\lambda^2+1-2\lambda-4) = (\lambda-6)(\lambda^2-2\lambda-3) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$\lambda_1 = 6$

$\lambda_2 = 3$ $\qquad \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+2}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$\lambda_3 = -1$

forma quadratica indefinita.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 5x - 2z = 0 \ ; \ -2x + 5z = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ 2x - 2z = 0 \ \ -3y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ -2x - 2z = 0 \ ; \ -7y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

La matrice le cui colonne sono la base ortonormale che diagonalizza A è data da

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U^T A U = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

7. Sia $q(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 4xy$.

Determinare il segno della forma quadratica e la base rispetto a cui essa è diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 9 - 6\lambda - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 1$ forma quadratica definita positiva

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \ 2x - 2y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \ -2x - 2y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow U^T A U = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$