

Uso didattico del colore

Mecanica

Vettori posizione e spostamento		Vettori momento meccanico (τ) e momento angolare (L)	
Vettori velocità (v)		Direzioni del moto lineare o rotazionale	
Vettori componenti della velocità		Molle	
Vettori forza (F)		Carrucole	
Vettori componenti della forza			
Vettori accelerazione (a)			
Vettori componenti dell'accelerazione			

Elettricità e Magnetismo

Capi elettrici		Condensatori	
Capi magnetici		Induttori (spire)	
Cariche positive		Voltmetri	
Cariche negative		Amperometri	
Resistori		Galvanometri	
Fonti di serie e altri alimentatori dc		Generatori ac	
Interruttori		Simbolo di terra	

Luce e Ottica

Fraggi luminosi		Oggetti	
Lenti e prismi		Immagini	
Specchi			

Principi *di Fisica*

SECONDA EDIZIONE

I VOLUME

Raymond A. Serway
James Madison University

con la collaborazione di
John W. Jewett, Jr.
California State Polytechnic University, Pomona

Edizione italiana a cura di
Francesco Madonia
Facoltà di Scienze dell'Università di Palermo

EdiSES

l'titolo originale:

RAYMOND A. SERWAY

PRINCIPLES OF PHYSICS

Copyright © 1998, 1994 II edition, Saunders College Publishing

PRINCIPI DI FISICA – II edizione – I volume

Copyright © 1996, 1999, 2002, EdiSES s.r.l. – Napoli

1 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2007 2006 2005 2004 2003 2002

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

STOP

A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilate o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La casa editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.

L'Editore

otocomposizione: EdiSES s.r.l. – Napoli

otoincisione: Nuovo DMS – Napoli

stampato presso la

Tipolitografia Petrucci Corrado & Co. s.n.c.

Zona Ind. Regnano – Città di Castello (PG) – Tel. 075/8511345

per conto della

EdiSES s.r.l. – Napoli – Via Nuova San Rocco, 62/A – P.co Soleado

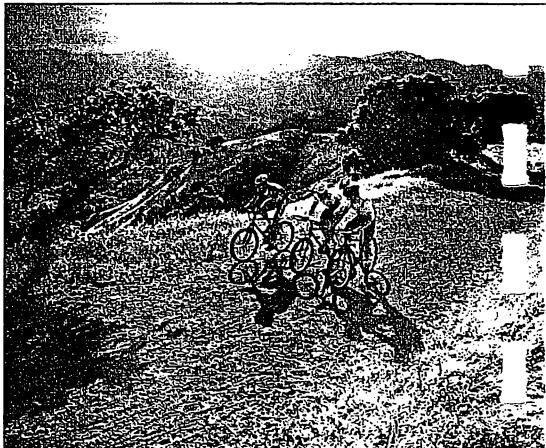
Tel. 081/7441706-07 Fax 081/7441705

SBN 88 7959 237 8

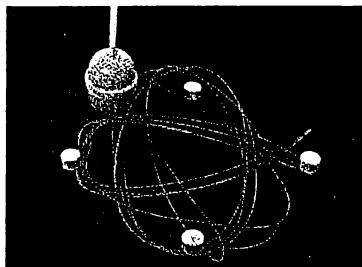
Indice generale

Invito alla Fisica	1
1 Indroduzione e vettori	3
1.1 Campioni di lunghezza, massa, e tempo	4
1.2 Densità e massa atomica	6
1.3 Analisi dimensionale	8
1.4 Conversione delle unità	9
1.5 Calcoli di ordini di grandezza	10
1.6 Cifre significative	11
1.7 Sistemi di coordinate e sistemi di riferimento	12
1.8 Strategia per la risoluzione dei problemi	13
1.9 Vettori e scalari	14
1.10 Alcune proprietà dei vettori	16
1.11 Componenti di un vettore e versori	18
Sommario	23
Domande concettuali	23
Problemi	24
Risposte ai problemi concettuali	28
2 Moto in una dimensione	29
2.1 Velocità media	30
2.2 Velocità istantanea	31
2.3 Accelerazione	36
2.4 Diagrammi del moto	38
2.5 Moto unidimensionale con accelerazione costante	39
2.6 Corpi in caduta libera	43
Sommario	47
Domande concettuali	47
Problemi	49
Risposte ai problemi concettuali	54

3 Moto in due dimensioni	55
3.1 Vettori spostamento, velocità e accelerazione	56
3.2 Moto in due dimensioni con accelerazione costante	58
3.3 Moto del proiettile	61
3.4 Moto circolare uniforme	68
3.5 Accelerazione tangenziale e radiale	70
3.6 Velocità relativa ed accelerazione relativa	73
Sommario	76
Domande concettuali	76
Problemi	77
Risposte ai problemi concettuali	83



David Madison/Tony Stone Images



© Yoav Levy/Photolake

Le leggi del moto 84

- 4.1 Il concetto di forza 85
 - 4.2 La prima legge di Newton e i sistemi inerziali 87
 - 4.3 Massa inerziale 89
 - 4.4 La seconda legge di Newton 90
 - 4.5 La forza gravitazionale e il peso 93
 - 4.6 La terza legge di Newton 94
 - 4.7 Alcune applicazioni delle leggi di Newton 97
- Sommario 104
Domande concettuali 105
Problemi 105
Risposte ai problemi concettuali 111

Altre applicazioni delle leggi di Newton 112

- 5.1 Forze di attrito 112
 - 5.2 Seconda legge di Newton applicata al moto circolare uniforme 119
 - 5.3 Moto circolare non uniforme 124
 - 5.4 Moto in presenza di forze ritardanti dipendenti dalla velocità 126
 - 5.5 Modelli numerici nella dinamica del punto materiale 130
 - 5.6 Le forze fondamentali della natura 133
 - 5.7 Il campo gravitazionale 136
 - 5.8 Moto in sistemi accelerati 137
- Sommario 139
Domande concettuali 140
Problemi 140
Risposte ai problemi concettuali 148

6 Lavoro ed energia 149

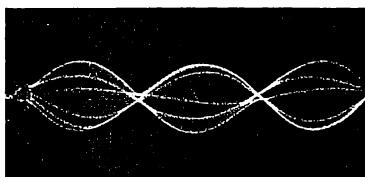
- 6.1 Lavoro svolto da una forza costante 150
 - 6.2 Prodotto scalare di due vettori 153
 - 6.3 Lavoro svolto da una forza variabile 154
 - 6.4 Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica 159
 - 6.5 Potenza 164
- Sommario 166
Domande concettuali 167
Problemi 167
Risposte ai problemi concettuali 171



Martin Dohrn/SPL/Photo Researchers

7 Energia potenziale e conservazione dell'energia 173

- 7.1 Energia potenziale 174
 - 7.2 Forze conservative e non conservative 175
 - 7.3 Forze conservative ed energia potenziale 177
 - 7.4 Conservazione dell'energia meccanica 179
 - 7.5 Lavoro svolto da forze non conservative 183
 - 7.6 Conservazione dell'energia in generale 188
 - 7.7 Energia potenziale gravitazionale rivisitata 189
 - 7.8 Diagrammi di energia e stabilità dell'equilibrio (Facoltativo) 191
- Sommario 193
Domande concettuali 194
Problemi 194
Risposte ai problemi concettuali 201

Richard Megna, *Dundamental Photographs, NYC***8 Quantità di moto e urti 202**

- 8.1 Quantità di moto e sua conservazione 203
- 8.2 Impulso e quantità di moto 207
- 8.3 Urti 209
- 8.4 Urti elastici e anelastici in una dimensione 211
- 8.5 Urti in due dimensioni 214
- 8.6 Il centro di massa 217
- 8.7 Moto di un sistema di particelle 220
- 8.8 Propulsione di un razzo (Facoltativo) 222
- Sommario 225
- Domande concettuali 226
- Problemi 227
- Risposte ai problemi concettuali 234

9 Relatività 235

- 9.1 Il principio della relatività newtoniana 236
- 9.2 L'esperimento di Michelson-Morley 238
- 9.3 Il principio di relatività di Einstein 240
- 9.4 Conseguenze della relatività ristretta 241
- 9.5 Le trasformazioni di Lorentz 251
- 9.6 Quantità di moto relativistica e forma relativistica delle leggi di Newton 255
- 9.7 Energia relativistica 256
- 9.8 La massa come misura dell'energia 260
- 9.9 Relatività generale (Facoltativo) 262
- Sommario 265
- Domande concettuali 266

- Problemi 266
- Risposte ai problemi concettuali 269

10 Moto rotazionale 271

- 10.1 Velocità angolare e accelerazione angolare 272
- 10.2 Cinematica rotazionale 274
- 10.3 Relazioni fra grandezze angolari e lineari 275
- 10.4 Energia cinetica rotazionale 277
- 10.5 Momento delle forze e prodotto vettoriale 279
- 10.6 Equilibrio di un corpo rigido 282
- 10.7 Relazione fra momento delle forze e accelerazione angolare 286
- 10.8 Il momento angolare 287
- 10.9 Conservazione del momento angolare 290
- 10.10 Quantizzazione del momento angolare (Facoltativo) 293
- 10.11 Rotazione dei corpi rigidi (Facoltativo) 294
- Sommario 301
- Domande concettuali 303
- Problemi 303
- Risposte ai problemi concettuali 310



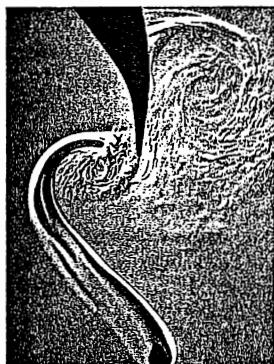
© Ben Rose 1992/The IMAGE Bank

11 I moti orbitali e l'atomo di idrogeno 312

- 11.1 La legge di gravitazione universale di Newton rivisitata 313
- 11.2 Le leggi di Keplero 316

Indice generale

- 11.3 La legge di gravitazione universale
ed il moto dei pianeti 317
11.4 Considerazioni energetiche sul moto
dei pianeti e dei satelliti 322
11.5 Spettri atomici e teoria di Bohr
dell'atomo di idrogeno 328
Sommario 333
Domande concettuali 335
Problemi 335
Risposte ai problemi concettuali 340



*Kim Vandiver and Harold Edgerton,
Palm Press, Inc.*

12 Moto oscillatorio 341

- 12.1 Moto armonico semplice 342
12.2 Moto di una massa collegata
a una molla 345
12.3 Energia di un oscillatore armonico
semplice 350
12.4 Moto del pendolo 353
12.5 Oscillazioni smorzate
(Facoltativo) 357
12.6 Oscillazioni forzate
(Facoltativo) 358
Sommario 360
Domande concettuali 362
Problemi 362
Risposte ai problemi concettuali 368

13 Moto ondulatorio 369

- 13.1 Tre caratteristiche delle onde 370
13.2 Tipi di onde 371
13.3 Propagazione di onde
unidimensionali trasversali 372
13.4 Propagazione di onde
sinusoidali 374
13.5 Sovrapposizione e interferenza
di onde 379
13.6 La velocità delle onde trasversali
nelle corde 381
13.7 Riflessione e trasmissione
di onde 383
13.8 Energia trasmessa da onde
sinusoidali nelle corde 385
13.9 Onde sonore 387
13.10 L'effetto doppler 388
Sommario 391
Domande concettuali 392
Problemi 393
Risposte ai problemi concettuali 397

**14 Sovrapposizione
e onde stazionarie 398**

- 14.1 Sovrapposizione e interferenza
di onde sinusoidali 399
14.2 Onde stazionarie 402
14.3 Frequenze naturali
in una corda tesa 405
14.4 Onde stazionarie in colonne
d'aria 409
14.5 Battimenti: interferenza temporale
(Facoltativo) 413
14.6 Onde complesse (Facoltativo) 415
Sommario 417
Domande concettuali 417
Problemi 418
Risposte ai problemi concettuali 423



Earl Young/FPG

15 Meccanica dei fluidi 424

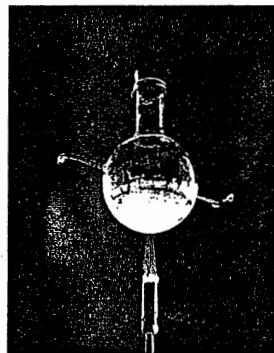
- 15.1 Pressione 425
- 15.2 Variazione della pressione con la profondità 427
- 15.3 Misure di pressione 430
- 15.4 Forze di galleggiamento e principi di Archimede 431
- 15.5 Dinamica dei fluidi 434
- 15.6 Linee di corrente ed equazione di continuità 435
- 15.7 Teorema di Bernoulli 436
- 15.8 Altre applicazioni del teorema di Bernoulli (Facoltativo) 438
- 15.9 Energia eolica (Facoltativo) 440
- 15.10 Viscosità (Facoltativo) 442
- 15.11 Moto turbolento (Facoltativo) 444
- Sommario 445
- Domande concettuali 445
- Problemi 446
- Risposte ai problemi concettuali 452

16 Temperatura e teoria cinetica dei gas 453

- 16.1 Temperatura e principio zero della termodinamica 454
- 16.2 I termometri e le scale di temperatura 455
- 16.3 Dilatazione termica di solidi e liquidi 459
- 16.4 Descrizione macroscopica di un gas perfetto 462
- 16.5 La teoria cinetica dei gas 465
- Sommario 469
- Domande concettuali 470
- Problemi 471
- Risposte ai problemi concettuali 474

17 Il calore e il primo principio della termodinamica 476

- 17.1 Calore, energia termica, ed energia interna 477
- 17.2 Calore specifico 478
- 17.3 Calore latente e cambiamenti di fase 482
- 17.4 Lavoro ed energia termica nelle trasformazioni termodinamiche 486
- 17.5 Il primo principio della termodinamica 489
- 17.6 Alcune applicazioni del primo principio della termodinamica 492
- 17.7 Propagazione del calore (Facoltativo) 494
- Sommario 500
- Domande concettuali 501
- Problemi 501
- Risposte ai problemi concettuali 506



Per gent. conc. del Central Scientific Company

18 Macchine termiche, entropia, e il secondo principio della termodinamica 507

- 18.1 Macchine termiche e il secondo principio della termodinamica 508
- 18.2 Trasformazioni reversibili e irreversibili 510
- 18.3 La macchina di Carnot 511
- 18.4 Pompe di calore e frigoriferi 514

- 18.5 Un enunciato alternativo del secondo principio 516
- 18.6 Entropia 517
- 18.7 Variazioni di entropia nelle trasformazioni irreversibili 519
- 18.8 L'entropia su scala microscopica 523
- 18.9 Entropia e disordine (Facoltativo) 526
- Sommario 528
- Domande concettuali 529
- Problemi 530
- Risposte ai problemi concettuali 534



Tom Mareschel, The IMAGE Bank

Appendice A Tabelle A.1

- Tabella A.1 Fattori di conversione A.1
- Tabella A.2 Simboli, dimensioni ed unità delle grandezze fisiche A.3
- Tabella A.3 Tavola di masse atomiche selezionate A.4

Appendice B Richiami di matematica**Richiami A.11**

- B.1 Notazione scientifica A.11
- B.2 Algebra A.13
- B.3 Geometria A.18
- B.4 Trigonometria A.19
- B.5 Sviluppi in serie A.22
- B.6 Calcolo differenziale A.22
- B.7 Calcolo integrale A.25

Appendice C Tavola periodica degli elementi A.30**Appendice D Unità del sistema internazionale (SI) A.32****Risposte ai problemi con numero dispari A.36****Indice analitico I.1**

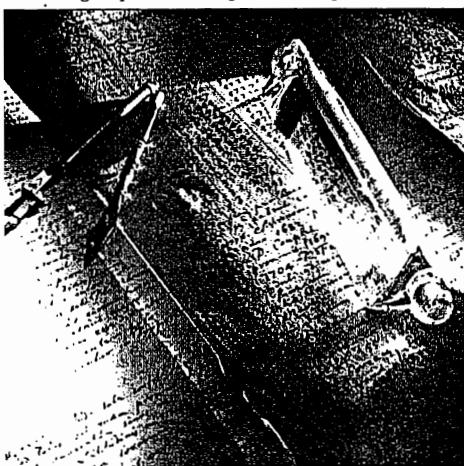
Invito alla fisica

La fisica è una scienza fondamentale che ha per oggetto la comprensione dei fenomeni naturali che accadono nell'Universo. È la base sulla quale altre scienze fisiche – l'astronomia, la chimica e la geologia – poggiano le loro fondamenta. La bellezza della fisica sta nella semplicità delle sue teorie fondamentali e nel modo in cui un numero davvero piccolo di concetti, equazioni e assunti di base possa cambiare ed espandere le conoscenze di cui siamo in possesso sul mondo che ci circonda.

Le miriadi di fenomeni fisici cui si assiste nel mondo rientrano in una o più delle seguenti aree della fisica.

- La meccanica classica, che tratta del movimento degli oggetti che si spostano a velocità basse rispetto a quella della luce.
- La relatività, una teoria che descrive le particelle che si muovono a qualsiasi velocità, comprese quelle la cui velocità si approssima a quella della luce.
- La termodinamica, che tratta del calore, della temperatura e del comportamento di un gran numero di particelle.
- L'elettromagnetismo, che comprende la teoria dell'elettricità, del magnetismo e dei campi elettromagnetici.
- La meccanica quantistica, una teoria che si occupa del comportamento tanto delle particelle submicroscopiche quanto di quelle del mondo macroscopico.

Ogni qualvolta sorgono discrepanze tra teoria ed esperimento, occorre formulare nuove teorie e nuovi esperimenti per rimuovere le discrepanze. Spesso una teoria è soddisfacente entro certe condizioni limitative; una teoria più generale potrebbe essere soddisfacente senza tali



◀ La luce bianca che passa attraverso un prisma di vetro triangolare, crea "fenomeni cromatici" sul manoscritto di Isaac Newton Opticks. © Erich Lessing, Magnum Photos

Prologo

limitazioni. Un classico esempio è fornito dalle leggi del moto di Newton, che descrivono accuratamente il moto dei corpi a basse velocità ma che non possono essere applicate ad oggetti in moto con velocità paragonabili con la velocità della luce. La teoria della relatività ristretta sviluppata da Albert Einstein (1879-1955) predice con successo il moto di oggetti a velocità comparabile con la velocità della luce e, quindi, è una teoria del moto più generale.

La fisica classica, elaborata prima del 1900, comprende le teorie, i concetti, le leggi e gli esperimenti in tre grandi discipline: (1) la meccanica classica, (2) la termodinamica, (3) l'elettromagnetismo. Galileo Galilei (1564-1642) diede contributi significativi alla meccanica classica con il suo lavoro sulle leggi del moto in presenza di una accelerazione costante. Nello stesso periodo, Johannes Kepler (1571-1630) usò le osservazioni astronomiche per elaborare delle leggi empiriche sul moto dei pianeti.

I contributi più importanti alla meccanica classica furono forniti da Isaac Newton (1642-1727), il quale sviluppò la meccanica classica come teoria sistematica e fu uno dei progenitori del calcolo quale strumento matematico. Grandiosi sviluppi nella fisica classica continuaron nel XVIII secolo. Tuttavia, la termodinamica, l'elettricità ed il magnetismo non furono ben compresi fino alla seconda metà del secolo XIX, soprattutto perché le apparecchiature necessarie ad eseguire esperimenti ben controllabili erano o troppo grossolane o non ancora disponibili. Sebbene molti fenomeni elettrici e magnetici fossero stati studiati precedentemente, fu il lavoro di James Clerk Maxwell (1831-1879) a fornire una teoria unificata dell'elettromagnetismo. In questo testo tratteremo le varie discipline della fisica classica in paragrafi separati; comunque, come vedremo, le discipline della meccanica e dell'elettromagnetismo sono basilari a tutte le branche della fisica classica e moderna.

Una grande rivoluzione nella fisica, usualmente indicata come *fisica moderna*, ebbe inizio verso la fine del XIX secolo. La fisica moderna si sviluppò soprattutto dopo la scoperta di molti fenomeni fisici che non potevano essere spiegati dalla fisica classica. I due traguardi più importanti in questa era moderna furono la teoria della relatività e la meccanica quantistica. La teoria della relatività di Einstein rivoluzionò completamente i concetti tradizionali di spazio, tempo ed energia. Fra le altre cose, questa teoria correggeva le leggi del moto di Newton per descrivere il moto di oggetti con velocità paragonabili alla velocità della luce. La teoria della relatività, inoltre, presuppone che la velocità della luce sia il limite superiore della velocità di un oggetto o segnale e mostra l'equivalenza fra massa ed energia. La formulazione della meccanica quantistica ad opera di un certo numero di famosi scienziati fornì una descrizione dei fenomeni fisici a livello atomico.

Gli scienziati lavorano costantemente a migliorare la nostra comprensione delle leggi fondamentali, e nuove scoperte si susseguono quotidianamente. In molte aree di ricerca è presente una notevole sovrapposizione fra fisica, chimica e biologia. Gli ultimi, molteplici sviluppi tecnologici sono il risultato degli sforzi di molti scienziati, ingegneri e tecnici. Fra i recenti sviluppi di grande importanza ricordiamo (1) le missioni spaziali e l'esplorazione lunare ad opera dell'uomo, (2) i microcircuiti ed i calcolatori veloci, (3) la tecnica del trattamento sofisticato delle immagini nella ricerca scientifica ed in medicina. L'impatto di questi sviluppi e scoperte nella nostra società è stato indubbiamente notevole ed è presumibile che le scoperte e gli sviluppi futuri siano eccitanti, stimolanti e di grande beneficio per l'umanità.

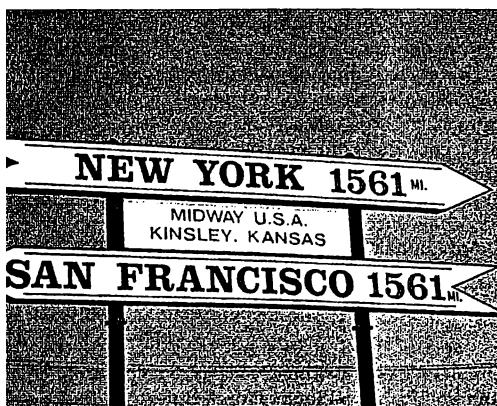
1

Introduzione e vettori

Lo scopo della fisica è di fornire una comprensione quantitativa di certi fenomeni di base che hanno luogo nel nostro universo. La fisica è una scienza basata su osservazioni sperimentali ed analisi matematiche finalizzate a sviluppare teorie che spiegano i fenomeni in corso di studio, collegando tali teorie ad altre teorie comprovate. Per nostra fortuna, è possibile spiegare il comportamento di diversi sistemi fisici utilizzando relativamente poche leggi fondamentali. Le procedure analitiche richiedono l'espressione di queste leggi in un linguaggio matematico, uno strumento che funge da ponte tra la teoria e l'esperimento. In questo capitolo discuteremo di alcuni concetti e tecniche matematiche che si utilizzeranno in tutto il testo.

Poiché nei prossimi capitoli studieremo le leggi fisiche, è necessario fornire una definizione chiara delle grandezze fondamentali coinvolte in queste leggi. Per esempio, grandezze quali forza, velocità, volume e accelerazione possono essere definite in termini di grandezze più fondamentali. Nei capitoli successivi ne incontreremo tre: lunghezza (L), tempo (T), e massa (M). Successivamente nel testo dovremo aggiungere al nostro elenco altre unità per due grandezze standard, una per la temperatura (kelvin), l'altra per la corrente elettrica (ampere). Il nostro studio della meccanica, comunque, utilizzerà soltanto le unità di massa, lunghezza e tempo.

Alcune grandezze fisiche richiedono la misura di più di un attributo. Ad esempio, le grandezze fisiche con proprietà sia numeriche che direzionali — come la forza, la velocità, l'accelerazione — sono rappresentate da vettori. Gran parte di questo capitolo sarà dedicato all'algebra dei vettori e alle proprietà gene-



◀ Questa fotografia fu scattata presso Kinsley nel Kansas, che si trova a metà strada fra le città di New York e San Francisco. (Mike & Carol Werner/Comstock)

MENTI

- 1.1 Campioni di lunghezza, massa e tempo
- 1.2 Densità e massa atomica
- 1.3 Analisi dimensionale
- 1.4 Conversione delle unità
- 1.5 Calcoli di ordini di grandezza
- 1.6 Cifre significative
- 1.7 Sistemi di coordinate e sistemi di riferimento
- 1.8 Strategia per la risoluzione dei problemi
- 1.9 Vettori e scalari
- 1.10 Alcune proprietà dei vettori
- 1.11 Componenti di un vettore e versori

rali di questi. Si discuterà dell'addizione e della sottrazione dei vettori, insieme ad alcune usuali applicazioni a situazioni fisiche. Poiché i vettori si utilizzeranno in tutto il testo, è estremamente importante capire ora le loro proprietà grafiche ed algebriche.

1.1 • CAMPIONI DI LUNGHEZZA, MASSA E TEMPO

Se vogliamo indicare i risultati di una misura a qualcuno che voglia riprodurre la misura stessa bisogna definire un campione. Sarebbe privo di significato se un visitatore di un altro pianeta ci parlasse di una lunghezza di 8 "glitch" se non conosciamo il significato dell'unità "glitch". D'altra parte, se qualcuno familiare con il nostro sistema di misura riporta che un muro ha altezza di 2.0 metri e la nostra unità di lunghezza è definita come 1.0 metro, allora sappiamo che l'altezza del muro vale due volte la nostra unità fondamentale di lunghezza. Analogamente, se ci dicono che una persona ha una massa di 75 chilogrammi e la nostra unità di massa è definita come 1.0 chilogrammo, allora quella persona ha una massa pari a 75 volte la nostra unità di massa. Nel 1960, una commissione internazionale stabilì un insieme di definizioni e di campioni per descrivere le grandezze fisiche fondamentali. Il sistema che fu stabilito è un adattamento del sistema metrico ed è chiamato **Sistema Internazionale (SI)** di unità. L'abbreviazione SI deriva dal nome "Système International". In questo sistema, le unità di massa, lunghezza e tempo sono, rispettivamente, il chilogrammo, il metro ed il secondo.

Lunghezza

Nel 1120 d.c. il re d'Inghilterra con un decreto fissò per quel paese un campione di lunghezza corrispondente alla iarda, vale a dire la distanza corrente tra la punta del suo naso e la fine del braccio steso. Similmente, il campione originale per il piede adottato dai francesi era la lunghezza del piede reale del re Luigi XIV. Questo campione fu usato fino al 1799, quando il campione legale di lunghezza in Francia divenne il metro, definito come 10^{-7} volte la distanza dall'Equatore al Polo Nord.

Questo campione è stato abbandonato per ragioni di praticità. Fino al 1960, il campione di lunghezza, il **metro**, era definito come la distanza fra due tacche su di una particolare barra di platino-iridio mantenuta sotto condizioni controllate. Questo campione è stato pure abbandonato per parecchie ragioni, la principale delle quali è la limitata accuratezza con cui può essere determinata la separazione fra le tacche sulla barra, tale da non soddisfare gli attuali requisiti della scienza e della tecnologia. Fino a poco tempo fa, il metro era definito come 1 650 763.73 lunghezze d'onda della luce rossa-arancione emessa da una lampada al cripton-86. Nell'ottobre del 1983, il **metro fu ridefinito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto durante il tempo di $1/299\,792\,458$ s.** In effetti, quest'ultima definizione stabilisce che la velocità della luce nel vuoto è di 299 792 458 metri al secondo.

Definizione di metro •

Massa

Definizione • di chilogrammo

L'unità SI di massa, il **chilogrammo**, è definita come la massa di un particolare cilindro di lega platino-iridio conservato all'**International Bureau di Pesi e**

TABELLA 1.1 Valori approssimati di alcune lunghezze misurate

	Lunghezza (m)
Distanza dalla Terra alla più lontana quasar nota	1.4×10^{26}
Distanza dalla Terra alla più lontana galassia normale nota	4×10^{25}
Distanza dalla Terra alla più vicina grande galassia (M 31 in Andromeda)	2×10^{22}
Distanza dal Sole alla stella più vicina (Proxima Centauri)	4×10^{16}
Un anno-luce	9.46×10^{15}
Raggio orbitale medio della Terra	1.5×10^{11}
Distanza media Terra-Luna	3.8×10^8
Distanza dall'equatore al polo nord	1×10^7
Raggio medio della Terra	6.4×10^6
Tipica altezza di un satellite terrestre orbitante	2×10^5
Lunghezza di un campo di calcio	9.1×10^1
Lunghezza di una mosca domestica	5×10^{-3}
Dimensione della più piccola particella di polvere	1×10^{-4}
Dimensione delle cellule della maggior parte degli organismi viventi	1×10^{-5}
Diametro di un atomo di idrogeno	1×10^{-10}
Diametro di un nucleo di uranio	1.4×10^{-14}
Diametro di un protone	1×10^{-15}

Misure di Sèvres, Francia. A questo punto, valga un consiglio giudizioso. La maggior parte degli studenti di fisica tende a confondere le grandezze fisiche denominate *peso* e *massa*. Al momento non discuteremo delle differenze fra loro, tra breve l'argomento verrà affrontato; valga per ora l'imperativo di considerarle grandezze fisiche completamente diverse tra loro.

Tempo

Prima del 1960, il campione di tempo era definito in funzione del giorno solare medio in riferimento all'anno 1900. (Un giorno solare è l'intervallo di tempo fra due comparse successive del Sole nel punto più alto che esso raggiunge nel cielo ogni giorno). Così, il secondo solare medio, che rappresenta l'unità base di tempo, era originariamente definito come $(1/60) (1/60) (1/24) = 1/86\,400$ di un giorno solare medio. Nel 1967, il secondo fu ridefinito, avvantaggiandosi dell'alta precisione che poteva essere ottenuta utilizzando un dispositivo noto come orologio atomico, che usa la frequenza caratteristica dell'atomo di cesio-133 come orologio di riferimento. **Il secondo viene quindi definito come 9 192 631 770 volte il periodo di oscillazione della radiazione dell'atomo di cesio.**

Valori approssimati di lunghezza, massa e tempo

Gli ordini di grandezza (valori approssimati) di varie masse, lunghezze ed intervalli di tempo sono presentati nelle Tabelle da 1.1 a 1.3. Si noti il grande intervallo di variabilità di queste grandezze.¹ Voi dovreste studiare queste tabelle e cercare di visualizzare che cosa si intende per un chilogrammo di massa, ad

TABELLA 1.2 Masse
di alcuni corpi (valori
approssimati)

	Massa (kg)
Universo	10^{52}
Via Lattea (galassia)	10^{42}
Sole	2×10^{30}
Terra	6×10^{24}
Luna	7×10^{22}
Squalo	3×10^2
Uomo	7×10^1
Rana	1×10^{-1}
Zanzara	1×10^{-5}
Batterio	1×10^{-15}
Atomo di idrogeno	1.67×10^{-27}
Elettrone	9.11×10^{-31}

¹ Se siete poco familiari con l'uso delle potenze di dieci (notazione scientifica), consultate l'Appendice B.1.

TABELLA 1.3 Valori approssimati di alcuni intervalli di tempo

	Intervallo (s)
Età dell'Universo	5×10^{17}
Età della Terra	1.3×10^{17}
Tempo dalla caduta dell'Impero Romano	5×10^{12}
Età media di uno studente universitario	6.3×10^8
Un anno	3.2×10^7
Un giorno (tempo per una rivoluzione della Terra attorno al suo asse)	8.6×10^4
Tempo fra normali battiti cardiaci consecutivi	8×10^{-1}
Periodo ^a di un'onda sonora nell'udibile	1×10^{-3}
Periodo di una tipica onda radio	1×10^{-6}
Periodo di vibrazione di un atomo in un solido	1×10^{-13}
Periodo di un'onda luminosa nel visibile	2×10^{-15}
Durata di una collisione nucleare	1×10^{-22}
Tempo richiesto dalla luce per attraversare un protone	3.3×10^{-24}

^a Il periodo è definito come l'intervallo di tempo di una vibrazione completa.

TABELLA 1.4 Alcuni prefissi per le potenze di dieci

Potenza	Prefisso	Abbrev.
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^3	chilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E

esempio, o per un intervallo di tempo di 10^{10} secondi. I sistemi di unità comunemente adoperati sono il sistema SI o mks, in cui le unità di massa, lunghezza e tempo sono il chilogrammo (kg), il metro (m) ed il secondo (s), rispettivamente; il sistema cgs o Gaussiano, in cui le unità di lunghezza, massa e tempo sono il centimetro (cm), grammo (g) ed il secondo, rispettivamente; il sistema inglese degli ingegneri (detto anche *sistema convenzionale*) in cui le unità di lunghezza di massa e di tempo sono il piede (ft), la libbra ed il secondo, rispettivamente. Nella maggior parte di questo testo adopereremo le unità SI in quanto quasi universalmente adottate nella scienza e nell'industria. Faremo un uso alquanto limitato delle unità convenzionali nello studio della meccanica classica.

Alcuni dei prefissi più frequentemente adoperati per le varie potenze di dieci e le loro abbreviazioni sono elencati nella Tabella 1.4. Per esempio, 10^{-3} m equivale ad 1 millimetro (mm), e 10^3 m è 1 chilometro (km). Analogamente, 1 kg è 10^3 g ed 1 megavolt (MV) vale 10^6 volts.

1.2 • DENSITÀ E MASSA ATOMICA

Una proprietà fondamentale di una qualsivoglia sostanza è la sua **densità** ρ (lettera greca rho), definita come la *massa per unità di volume* (una tabella delle lettere dell'alfabeto greco è fornita all'interno della copertina posteriore)²:

Densità •

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [1.1]$$

Per esempio, l'alluminio ha una densità di 2.70×10^3 kg/m³ ed il piombo ha una densità di 11.3×10^3 kg/m³. Una lista delle densità di varie sostanze è data nella Tabella 1.5.

Massa atomica • La differenza di densità fra l'alluminio ed il piombo è dovuta, in parte, alle loro diverse *masse atomiche*; la massa atomica del piombo è 207 e quella del-

² Il simbolo \equiv significa "definito come" ed è più forte di = "uguale a" [N.d.T.].

l'alluminio è 27. Però, il rapporto delle masse atomiche, $207/27 = 7.67$ non corrisponde al rapporto delle densità $11.3/2.70 = 4.19$. La discrepanza è dovuta alla differenza nelle distanze fra gli atomi e nella disposizione degli atomi nelle strutture cristalline dei due elementi.

Tutta la materia ordinaria è costituita da atomi e ciascun atomo è costituito da elettroni e da un nucleo. Praticamente tutta la massa di un atomo è contenuta nel nucleo, che consiste di protoni e neutroni. Così, possiamo comprendere perché le masse atomiche dei vari elementi differiscono. La massa di un nucleo è misurata rispetto alla massa di un atomo di carbonio-12 (questo isotopo del carbonio ha sei protoni e sei neutroni).

La massa del ^{12}C è definita esattamente uguale a 12 unità di massa atomica (u), dove $1 \text{ u} = 1.6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}$. In queste unità, il protone ed il neutrone hanno masse di circa 1 u. Più precisamente,

$$\text{massa del protone} = 1.007\,276 \text{ u}$$

$$\text{massa del neutrone} = 1.008\,664 \text{ u}$$

La massa del nucleo di ^{27}Al è approssimativamente 27 u. Infatti, un calcolo più preciso mostra che la massa nucleare è sempre leggermente *inferiore* della massa combinata dei protoni e dei neutroni che costituiscono il nucleo. I processi della fissione nucleare e della fusione nucleare sono basati su questa differenza di massa.

Una mole (mol) di un qualsiasi elemento (o composto) consiste di un numero di Avogadro, N_A , di molecole della sostanza. Il numero di Avogadro è definito in maniera tale che una mole di atomi di carbonio-12 abbia esattamente una massa di 12 g. Il suo valore è $N_A = 6.02 \times 10^{23}$. Per esempio, una mole di alluminio ha una massa di 27 g ed una mole di piombo ha una massa di 207 g. Sebbene abbiano masse differenti, una mole di alluminio contiene lo stesso numero di atomi di una mole di piombo. Poiché ci sono 6.02×10^{23} atomi in una mole di *ciascun* elemento, la massa per atomo, la quale *non* è uguale alla massa atomica, è data da

$$m = \frac{\text{massa atomica}}{N_A} \quad [1.2]$$

Per esempio, la massa di un atomo di alluminio vale

$$m = \frac{27 \text{ g/mole}}{6.02 \times 10^{23} \text{ atomi/mole}} = 4.5 \times 10^{-23} \text{ g/atomio}$$

Si noti che 1 u è uguale ad N_A^{-1} g.

Esempio 1.1 Quanti atomi in un cubo?

Un cubo di alluminio (densità 2.7 g/cm^3) ha un volume di 0.20 cm^3 . Quanti atomi di alluminio sono contenuti nel cubo?

Soluzione Poiché la densità è uguale alla massa per unità di volume, la massa del cubo vale

$$M = \rho V = (2.7 \text{ g/cm}^3)(0.20 \text{ cm}^3) = 0.54 \text{ g}$$

TABELLA 1.5 Densità di varie sostanze

Sostanza	Densità $\rho (\text{kg}/\text{m}^3)$
Platino	21.45×10^3
Oro	19.3×10^3
Uranio	18.7×10^3
Piombo	11.3×10^3
Rame	8.93×10^3
Ferro	7.86×10^3
Alluminio	2.70×10^3
Magnesio	1.75×10^3
Acqua	1.00×10^3
Aria	0.0012×10^3

Per trovare il numero di atomi, N , possiamo stabilire

una proporzione adoperando il fatto che una mole di alluminio (27 g) contiene 6.02×10^{23} atomi:

$$\frac{6.02 \times 10^{23} \text{ atomi}}{27 \text{ g}} = \frac{N}{0.54 \text{ g}}$$

$$N = \frac{(0.54 \text{ g})(6.02 \times 10^{23} \text{ atomi})}{27 \text{ g}} = 1.2 \times 10^{22} \text{ atomi}$$

1.3 • ANALISI DIMENSIONALE

In fisica la parola *dimensione* ha un significato particolare. Essa generalmente denota la natura fisica di una grandezza. Comunque venga misurata una distanza, in unità di piedi o di metri o di furlong, resta pur sempre una distanza. Diciamo che la sua dimensione è la *lunghezza*.

I simboli che verranno adoperati per specificare lunghezza, massa e tempo sono L, M e T rispettivamente. Spesso adopereremo delle parentesi [] per denotare le dimensioni di una grandezza fisica. Per esempio, in questa notazione le dimensioni della velocità v sono scritte $[v] = L/T$ e le dimensioni dell'area A sono $[A] = L^2$. Le dimensioni dell'area, del volume, della velocità e dell'accelerazione sono elencate nella Tabella 1.6, unitamente alle loro unità nei tre sistemi di uso comune. Le dimensioni di altre grandezze quali forza ed energia verranno determinate man mano che verranno introdotte nel testo.

In alcuni casi può accadere di dover derivare o verificare una ben determinata formula. Sebbene i dettagli della derivazione possano essere stati dimenticati, esiste una procedura utile e potente, detta *analisi dimensionale*, che può essere adoperata per aiutarci nella derivazione o nella verifica dell'espressione finale. Questa procedura dovrebbe essere adoperata ogni qualvolta una equazione non è ben compresa e dovrebbe aiutarci a minimizzare le difficoltà dovute alla cattiva memorizzazione delle equazioni. L'analisi dimensionale utilizza il fatto che le **dimensioni possono essere trattate come grandezze algebriche**. Cioè, delle grandezze possono essere sommate o sottratte fra loro solamente se hanno le stesse dimensioni. Inoltre, i termini di ciascun membro di una equazione debbono avere le stesse dimensioni. Seguendo queste semplici regole si può adoperare l'analisi dimensionale come valido ausilio per giudicare sulla correttezza della forma di una espressione, poiché la relazione può essere corretta solamente se le dimensioni in ambo i membri dell'equazione sono le stesse.

Per illustrare il procedimento, supponiamo di volere derivare una formula per la distanza x percorsa da un'automobile in un tempo t se l'automobile parte da ferma e si muove con accelerazione costante a . Troveremo nel Capitolo 2 che l'espressione corretta in questo caso particolare è $x = \frac{1}{2} at^2$. Verifichiamo la validità di questa espressione seguendo il criterio dell'analisi dimensionale.

La grandezza x al primo membro ha le dimensioni di una lunghezza. Affinché l'equazione sia dimensionalmente corretta, anche la grandezza al secondo membro deve avere le dimensioni di una lunghezza. Possiamo effettuare una verifica dimensionale sostituendo le unità fondamentali per l'accelerazione, L/T^2 , e per il tempo, T , nell'equazione. Cioè, la forma dimensionale per l'equazione $x = \frac{1}{2} at^2$ può essere scritta come

$$L = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L$$

Come si vede, le unità di tempo si semplificano, lasciando l'unità di una lunghezza.

TABELLA 1.6 Dimensioni di area, volume, velocità e accelerazione

Sistema	Area (L^2)	Volume (L^3)	Velocità (L/T)	Accelerazione (L/T^2)
SI	m^2	m^3	m/s	m/s^2
cgs	cm^2	cm^3	cm/s	cm/s^2
Sistema Inglese (convenzionale)	ft^2	ft^3	ft/s	ft/s^2

Esempio 1.2 Analisi di una equazione

Dimostrare che l'equazione $v = v_0 + at$ è dimensionalmente corretta, dove v e v_0 rappresentano velocità, a è accelerazione e t è un intervallo di tempo.

Soluzione Poiché

$$[v] = [v_0] = \frac{L}{T}$$

e le dimensioni dell'accelerazione sono L/T^2 , le dimensioni di at sono

$$[at] = \frac{L}{T^2} \cdot T = \frac{L}{T}$$

e l'espressione è dimensionalmente corretta. D'altra parte, se l'espressione fosse scritta come $v = v_0 + a^t$, essa sarebbe dimensionalmente errata. Provare per credere!

1.4 • CONVERSIONE DELLE UNITÀ

A volte è necessario convertire le unità da un sistema ad un altro. I fattori di conversione fra le unità SI e le unità convenzionali di lunghezza sono i seguenti:

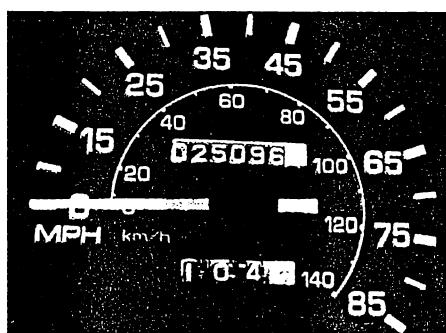
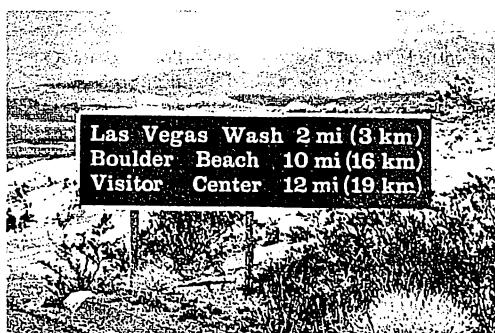
$$1 \text{ miglio} = 1609 \text{ m} = 1.609 \text{ km} \quad 1 \text{ piede} = 0.3048 \text{ m} = 30.48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m} = 39.37 \text{ pollici} = 3.281 \text{ piedi} \quad 1 \text{ pollice} = 0.0254 \text{ m} = 2.54 \text{ cm}$$

Una lista più completa di fattori di conversione può essere reperita nell'Appendice A.

Le unità possono essere trattate come grandezze algebriche che si cancellano l'una con l'altra. Per esempio, supponiamo di volere convertire 15.0 pollici (in.) in centimetri. Poiché 1 pollice = 2.54 cm (esattamente), troviamo che

$$15.0 \text{ in.} = (15.0 \text{ in.}) \left(2.54 \frac{\text{cm}}{\text{in.}} \right) = 38.1 \text{ cm}$$



(Sinistra) Conversione di miglia in chilometri. (Destra) Questo moderno tachimetro segnala la velocità sia in miglia orarie che in chilometri orari. È possibile ottenere una conversione fra le due unità con qualche occhiata al quadrante.
(Paul Silverman, Fundamental Photographs)

Esempio 1.3 La densità di un cubo

La massa di un cubo è 856 g e ciascuno spigolo ha una lunghezza di 5.35 cm. Determinare la densità ρ del cubo in unità SI.

Soluzione Poiché $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ ed $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$, la massa m ed il volume V in unità SI sono dati da

$$\begin{aligned}m &= 856 \text{ g} \times 10^{-3} \text{ kg/g} = 0.856 \text{ kg} \\V &= L^3 = (5.35 \text{ cm} \times 10^{-2} \text{ m/cm})^3 \\&= (5.35)^3 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 1.53 \times 10^{-4} \text{ m}^3\end{aligned}$$

Quindi

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.856 \text{ kg}}{1.53 \times 10^{-4} \text{ m}^3} = 5.59 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

1.5 • CALCOLI DI ORDINI DI GRANDEZZA

È spesso utile valutare la risposta approssimata ad un dato problema fisico anche quando abbiamo a disposizione una scarsa informazione. Si possono poi adoperare tali risultati per decidere se un calcolo più preciso sia necessario o meno. Queste approssimazioni sono basate su certe ipotesi che vanno modificate laddove si richiede una maggiore precisione. Pertanto, talvolta faremo riferimento ad un *ordine di grandezza* di una data quantità espresso come la potenza di dieci del numero che descrive quella grandezza. Generalmente, quando si fa un calcolo di ordine di grandezza, i risultati sono accettabili entro un fattore 10. Se una quantità aumenta di valore di tre ordini di grandezza ciò significa che il suo valore è aumentato di un fattore $10^3 = 1000$.

$$0.0086 \sim 10^{-2} \quad 0.0031 \sim 10^{-3} \quad 700 \sim 10^3$$

Lo spirito del tentativo di effettuare calcoli di ordini di grandezza (spesso definito come *"stima d'azzardo"* o *"in soldoni"*) è ben chiarito dalla seguente citazione: "Fate una stima prima di ogni calcolo, tentate un'argomentazione fisica semplice... prima di ogni derivazione, azzardate la risposta a ciascun rompicapo. Coraggio: nessun altro deve necessariamente sapere qual è l'ipotesi che avete fatto".³

Esempio 1.4 Il numero di atomi in un solido

Stimate il numero di atomi in 1 cm^3 di un solido.

Soluzione Dalla Tabella I.1 notiamo che il diametro di un atomo è circa 10^{-10} m . Pertanto, se nel nostro modello supponiamo che gli atomi del solido siano delle sfere piene con quel diametro, allora il volume di ciascuna sfera è circa 10^{-30} m^3 (più precisamente, volume =

$4\pi r^3/3 = \pi d^3/6$, con $r = d/2$). Quindi, poiché $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$, il numero di atomi nel solido è dell'ordine di $10^{-6}/10^{-30} = 10^{24}$ atomi.

Un calcolo più preciso richiederebbe la conoscenza della densità del solido e la massa di ciascun atomo. Comunque, la nostra stima concorda con il calcolo più preciso entro un fattore 10.

³ E. Taylor e J.A. Wheeler, *Spacetime Physics*, San Francisco, W.H. Freeman, 1966, pag. 60.

Esempio 1.5 Quanta benzina si consuma?

Stimate il quantitativo di litri di benzina consumati annualmente da tutte le automobili negli U.S.A.

Soluzione Poiché negli Stati Uniti la popolazione è di circa 240 milioni di persone, una stima del numero di automobili è di 60 milioni (assumendo un'automobile per famiglia e quattro persone per famiglia). Dobbiamo anche stimare che la distanza media percorsa in un anno è di 16 000 km. Se supponiamo un consumo di

benzina di 9 km/litro, un'automobile utilizza circa 1700 litri/anno. Moltiplicando per il numero totale di automobili otteniamo una stima del consumo totale di 1×10^{11} litri. Ciò corrisponde ad una spesa annua di più di 30 miliardi di dollari! Questa stima è probabilmente inferiore a quella reale in quanto non abbiamo tenuto conto del consumo commerciale o di fattori quali quello di famiglie con due automobili.

1.6 • CIFRE SIGNIFICATIVE

Quando vengono misurate certe grandezze, i valori ottenuti sono conosciuti entro i limiti dell'incertezza sperimentale. Il grado di incertezza può dipendere da vari fattori, come la qualità dell'apparecchiatura utilizzata, la perizia dello sperimentatore ed il numero di misure effettuate.

Supponiamo che in una esperienza di laboratorio si debba misurare l'area di una piastra rettangolare, usando un metro rigido come strumento di misura. Si faccia l'ipotesi che l'accuratezza con cui possiamo misurare una particolare dimensione della piastra sia pari a ± 0.1 cm. Se la misura della lunghezza della piastra è 16.3 cm, noi possiamo solamente affermare che la sua lunghezza è compresa tra 16.2 cm e 16.4 cm. In questo caso, noi diciamo che il valore misurato ha tre cifre significative. Analogamente, se la misura della larghezza è di 4.5 cm, il valore effettivo è compreso tra 4.4 cm e 4.6 cm (questo valore ottenuto dalla misura ha solo due cifre significative). Si noti che le cifre significative comprendono la prima cifra attendibile della misura. Pertanto, noi potremo scrivere i valori ottenuti come 16.3 ± 0.1 cm e 4.5 ± 0.1 cm.

Supponiamo ora di calcolare l'area della piastra moltiplicando il valore delle due grandezze misurate (lunghezza e larghezza). Se affermiamo che l'area è $(16.3 \text{ cm})(4.5 \text{ cm}) = 73.35 \text{ cm}^2$, la nostra risposta non è giustificabile poiché essa contiene quattro cifre significative, un numero maggiore di quello delle cifre significative in ciascuna delle due misure. Una buona regola, anche se piuttosto empirica, da usare per indicare il numero di cifre significative è la seguente:

Quando si moltiplicano diversi numeri, il numero di cifre significative della risposta finale ha lo stesso numero di cifre significative del *meno accurato* dei numeri da moltiplicare, dove per *meno accurato* si intende che ha il più basso numero di cifre significative. La stessa regola vale per la divisione.

Applicando questa regola alla moltiplicazione dell'esempio precedente, osserviamo che il risultato dell'area può avere solo due cifre significative poiché la dimensione di 4.5 cm ne ha due. Pertanto, possiamo solo affermare che l'area è di 73 cm^2 , tenendo presente che il valore è compreso tra $(16.2 \text{ cm})(4.4 \text{ cm}) = 71 \text{ cm}^2$ e $(16.4 \text{ cm})(4.6 \text{ cm}) = 75 \text{ cm}^2$.

Gli zeri possono essere cifre significative oppure no. Quelli che vengono usati per fissare la posizione del punto decimale come nei numeri 0.03 e 0.0075 non sono cifre significative. Quindi, nei precedenti due valori vi sono,

rispettivamente, una e due cifre significative. Quando, tuttavia, la posizione degli zeri si trova dopo altre cifre vi è la possibilità di una interpretazione non univoca. Per esempio, supponiamo che la massa misurata di un oggetto sia 1500 g. Questo valore è ambiguo giacché non sappiamo se gli ultimi due zeri vengono adoperati per collocare il punto decimale o se essi rappresentano cifre significative nella misura. Per rimuovere questa ambiguità, è pratica comune l'uso della notazione scientifica per indicare il numero di cifre significative. In questo caso, esprimeremo la massa come 1.5×10^3 g se ci fossero due cifre significative nel valore misurato e 1.50×10^3 g se ci fossero tre cifre significative. In modo analogo, un numero come 0.000 15 dovrebbe essere espresso, in notazione scientifica, come 1.5×10^{-4} , se esso avesse due cifre significative, o come 1.50×10^{-4} se ne avesse tre. I tre zeri tra il punto decimale e la cifra 1 nel numero 0.000 15 non sono conteggiati come cifre significative, poiché essi sono presenti solo per localizzare il punto decimale. In generale, una cifra significativa è una cifra affidabilmente nota (diversamente dallo zero che si usa per individuare il punto decimale).

Per l'addizione e la sottrazione si deve tener conto del numero di posti decimali quando si determina il numero di cifre significative da riportare.

Quando i numeri vengono sommati (o sottratti) il numero di posti decimali nel risultato è uguale al numero più piccolo di posti decimali di ciascun termine della somma.

Per esempio, se vogliamo calcolare $123 + 5.35$, la risposta è 128 e non 128.35. Come altro esempio, se calcoliamo la somma $1.0001 + 0.0003 = 1.0004$, il risultato ha il numero corretto di posti decimali; conseguentemente, ha cinque cifre significative, anche se uno dei termini nella somma, 0.0003, ha una sola cifra significativa. Analogamente, se eseguiamo la sottrazione $1.002 - 0.998 = 0.004$, il risultato ha tre posti decimali in accordo con la regola, ma una cifra significativa solamente. In questo testo la maggior parte degli esempi numerici e dei problemi di fine capitolo prevedono risposte con due o tre cifre significative.

Esempio 1.6 Installazione di un tappeto

Per l'installazione di un tappeto in una stanza, si sono misurate la lunghezza pari a 12.71 m (quattro cifre significative) e la larghezza pari a 3.46 m (tre cifre significative). Calcolare l'area della stanza.

Soluzione Se si moltiplica 12.71 m per 3.46 m con una calcolatrice, il risultato è di 43.9766 m^2 . Quante cifre dovremmo dichiarare? La nostra regola empirica

per la moltiplicazione stabilisce che il numero di cifre significative da dichiarare è uguale a quello della misura meno accurata. In questo esempio, la misura meno accurata ha solo tre cifre significative, e quindi la risposta finale è 44.0 m^2 . Da notare che nella risposta finale si è usato il seguente criterio generale di arrotondamento: l'ultima cifra mantenuta viene aumentata di 1 se la prima cifra tralasciata è eguale o maggiore di 5.

1.7 • SISTEMI DI COORDINATE E SISTEMI DI RIFERIMENTO

Molti aspetti della fisica in un modo o nell'altro hanno a che fare con la collocazione spaziale. Per esempio, la descrizione matematica del moto di un oggetto richiede un metodo per descrivere la posizione dell'oggetto. Così, è forse meglio discutere inizialmente come sia possibile descrivere la posizione di un punto nello spazio. Ciò si realizza tramite le coordinate. Un punto su una linea può

essere descritto da una coordinata. Un punto in un piano è individuato da due coordinate, e tre coordinate sono necessarie per fissare un punto nello spazio.

Un sistema di coordinate usato per specificare posizioni nello spazio consiste di:

- Un punto di riferimento fisso O , detto *origine*.
- Un insieme di assi o direzioni specificate, ciascuno con scala di misura e nome appropriati.
- Istruzioni che ci dicono come etichettare un punto dello spazio rispetto all'origine e agli assi.

Un sistema conveniente di coordinate che verrà usato frequentemente è il *sistema di coordinate cartesiane*, detto talvolta *sistema di coordinate ortogonali*. Un siffatto sistema in due dimensioni è illustrato in Figura 1.1. Un punto arbitrario in questo sistema è contrassegnato con le coordinate (x, y) . x è positiva nei punti a destra dell'origine ed y è positiva in alto rispetto all'origine. x è negativa a sinistra dell'origine ed y è negativa in basso rispetto all'origine. Per esempio il punto P , che ha coordinate $(5, 3)$ può essere raggiunto prima percorrendo 5 metri a destra dell'origine e poi 3 metri al di sopra dell'origine. Similmente, il punto Q ha coordinate $(-3, 4)$ che corrispondono ad uno spostamento di 3 metri a sinistra dell'origine e di 4 metri al di sopra dell'origine.

Talvolta è più conveniente rappresentare un punto in un piano tramite le sue *coordinate polari piane* (r, θ) , come in Figura 1.2a. In questo sistema di coordinate, r è la distanza dall'origine al punto di coordinate cartesiane (x, y) e θ è l'angolo fra r ed un asse fisso, generalmente misurato in verso antiorario dall'asse x positivo. Dal triangolo rettangolo in Figura 1.2b, troviamo $\sin \theta = y/r$ e $\cos \theta = x/r$. (Un richiamo alle funzioni trigonometriche è dato in Appendice B.4). Pertanto, partendo dalle coordinate polari piane, si ottengono le coordinate cartesiane tramite le equazioni

$$x = r \cos \theta \quad [1.3]$$

$$y = r \sin \theta \quad [1.4]$$

Inoltre, si ha che

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad [1.5]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad [1.6]$$

Andrebbe notato che queste espressioni che correlano le coordinate (x, y) alle coordinate (r, θ) si applicano solamente quando θ è definito come in Figura 1.2a, dove un valore θ positivo è un angolo misurato in verso *antiorario* a partire dall'asse x positivo. Se l'asse di riferimento per l'angolo polare è scelto diversamente dall'asse x positivo o il verso di θ crescente viene scelto in modo diverso, allora le corrispondenti espressioni che correlano i due sistemi di coordinate cambieranno.

1.8 • STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

La maggior parte dei corsi di fisica generale richiede da parte dello studente l'apprendimento di tecniche per la risoluzione dei problemi, tanto che negli esami si possono includere delle prove che valutino le capacità in tal senso. Questo breve paragrafo presenterà alcune idee utili che vi porranno in condi-

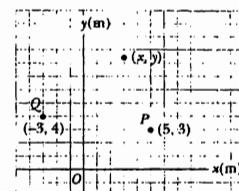
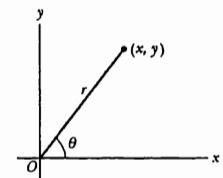
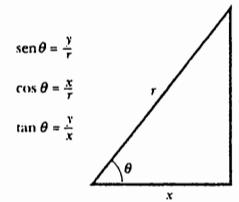


Figura 1.1 Indicazione dei punti in un sistema di coordinate cartesiane. Ogni punto è definito da due coordinate (x, y) .



(a)



(b)

Figura 1.2 (a) Le coordinate polari piane di un punto sono rappresentate dalla distanza r e dall'angolo θ . (b) Il triangolo rettangolo adoperato per correlare (x, y) ad (r, θ) .

**UNA STRATEGIA
PER LA RISOLUZIONE
DEI PROBLEMI**

Leggere il problema



Tracciare il grafico



Identificare i dati



Scegliere l'equazione (i)



Risolvere l'equazione (i)



Valutare e controllare
la risposta

zione di aumentare l'accuratezza nella risoluzione dei problemi, di rafforzare la comprensione di concetti fisici, di eliminare un certo panico iniziale o un'eventuale mancanza di strategia nell'avvicinarsi ad un problema, e di organizzare il vostro lavoro. Un modo per aiutarvi a realizzare questi obiettivi è quello di adottare una strategia per la risoluzione dei problemi. Molti capitoli in questo testo presenteranno una sezione intitolata "Strategia per la risoluzione dei problemi" che dovrebbe aiutarvi nei punti critici.

I seguenti passi vengono comunemente utilizzati per sviluppare tale strategia.

1. Leggere attentamente il problema almeno due volte. Essere sicuri di aver capito la natura del problema prima di procedere oltre.
2. Disegnare un diagramma ad hoc con termini appropriati ed assi coordinati se ve ne fosse bisogno.
3. Immaginarsi un film di ciò che accade nel problema.
4. Esaminando ciò che viene richiesto dal problema, identificare il principio fisico fondamentale o i principi coinvolti, elencando i valori noti e le incognite.
5. Selezionare una relazione fondamentale o derivare un'equazione da poter utilizzare per trovare le incognite, e risolvere simbolicamente l'equazione per l'incognita.
6. Sostituire i valori dati, insieme alle unità appropriate, nell'equazione.
7. Ottenere un valore numerico con le unità per l'incognita. Il problema è verificato se le seguenti domande ricevono una risposta appropriata: le unità coincidono? La risposta è ragionevole? Il segno positivo o negativo è giusto o almeno significativo?

Uno degli scopi di questa strategia è di promuovere l'accuratezza. I diagrammi ben rappresentati possono eliminare molti errori di segno, ma aiutano anche ad isolare i principi fisici del problema. Soluzioni simboliche e valori noti e incognite attentamente identificati eliminano altri errori dovuti a disattenzione. L'uso di soluzioni simboliche dovrebbe aiutare a porsi di fronte al problema da un punto di vista fisico. Un controllo delle unità alla fine del problema potrà indicare un possibile errore algebrico. Il risultato fisico e l'organizzazione del problema renderanno il prodotto finale più comprensibile e facile da seguire. Una volta sviluppato un sistema organizzato per esaminare i problemi ed estrarre informazioni rilevanti, ci si potrà considerare un vero risolutore di problemi.

1.9 • VETTORI E SCALARI

Le grandezze fisiche che incontreremo in questo testo possono essere suddivise in due categorie: scalari e vettori. Uno scalare è una grandezza che è completamente specificata da un numero reale espresso in unità appropriate. Cioè,

Uno **scalare** ha soltanto un valore numerico (modulo) e nessuna direzione. Invece, un **vettore** è una grandezza fisica che deve essere specificata sia in modulo che in una direzione orientata (direzione e verso).

Il numero di mele in un cestino è un esempio di grandezza scalare. Se vi si dice che nel cestino vi sono 38 mele, ciò specifica in maniera completa l'informazione richiesta; non è necessaria la direzione. Altri esempi di grandezze sca-



(Sinistra) Il numero di mele contenute nel cestino rappresenta un esempio di grandezza scalare. Potete citare altri esempi? (Superstock) (Destra) Jennifer, indicando una direzione verso destra, ci dice di superare 5 isolati verso nord per raggiungere il palazzo di giustizia. Un vettore è una grandezza di cui bisogna specificare sia il modulo che la direzione orientata. (Foto di Raymond A. Serway)

lari sono la temperatura, il volume, la massa e gli intervalli di tempo. Per manipolare le grandezze scalari si adoperano le regole dell'aritmetica ordinaria.

La forza costituisce un esempio di grandezza vettoriale. Per descrivere completamente la forza agente su un oggetto, dobbiamo specificare sia direzione e verso della forza applicata sia un numero che indichi il modulo (l'intensità) della forza. Se si descrive il moto di un oggetto dobbiamo specificare sia la rapidità del moto sia la sua direzione e verso.

Altro esempio semplice di grandezza vettoriale è lo spostamento di una particella, definito come *il cambiamento di posizione* della particella. Supponiamo che la particella si muova da un punto O al punto P lungo una retta come in Figura 1.3. Rappresentiamo questo spostamento disegnando una freccia da O a P , in cui la punta della freccia rappresenta il verso dello spostamento e la lunghezza della freccia rappresenta il modulo dello spostamento. Se la particella descrive un qualche altro percorso da O a P , quale quello tratteggiato in Figura 1.3, il suo spostamento è ancora OP . Il vettore spostamento lungo qualsiasi percorso non rettilineo da O a P è definito come equivalente allo spostamento rettilineo da O a P . Il modulo dello spostamento è la distanza più breve tra i punti estremi. Così, lo spostamento di una particella è completamente noto se sono note le sue coordinate iniziali e finali. Il percorso non va necessariamente specificato. In altre parole, lo spostamento è indipendente dal percorso, se gli estremi del percorso sono fissati.

È importante sottolineare che la distanza percorsa da una particella non va confusa con il suo spostamento. La distanza percorsa (che è una grandezza scalare) rappresenta la lunghezza del percorso, che generalmente è maggiore del modulo del vettore spostamento (come si vede nella Fig. 1.3).

Se la particella si muove lungo l'asse x dalla posizione x_i alla posizione x_f , come in Figura 1.4, il suo spostamento è dato da $x_f - x_i$. (Gli indici i ed f si riferiscono ai valori iniziale e finale). Usiamo la lettera greca delta (Δ) per indica-

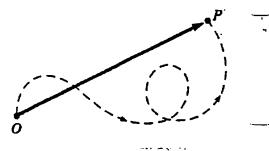


Figura 1.3 Se una particella si sposta da O a P lungo la linea tratteggiata, il suo vettore spostamento è la freccia disegnata da O a P .

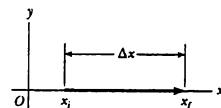


Figura 1.4 Una particella in moto lungo l'asse x da x_i ad x_f compie uno spostamento $\Delta x = x_f - x_i$.

re la *variazione* di una grandezza. Pertanto, scriviamo la variazione di posizione della particella (lo spostamento) come

Definizione di spostamento • lungo una linea

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \quad [1.7]$$

Da questa definizione, vediamo che Δx è positivo se x_f è maggiore di x_i e negativo se x_f è minore di x_i . Per esempio, se una particella muta la sua posizione da $x_i = -3$ unità a $x_f = 5$ unità, il suo spostamento vale 8 unità.

Oltre allo spostamento esistono molte altre grandezze fisiche che sono dei vettori. Queste includono la velocità, l'accelerazione, la forza, la quantità di moto, che verranno tutte definite nei capitoli successivi. In questo testo, useremo lettere in grassetto, ad esempio **A**, per rappresentare un vettore arbitrario. Un altro metodo largamente diffuso per la notazione vettoriale, di cui lo studente deve essere a conoscenza, è di adoperare una freccia sulla lettera: \vec{A} .

Il modulo del vettore **A** viene scritto A o, alternativamente, $|A|$. Il modulo di un vettore ha unità fisiche, come metri per lo spostamento, o metri al secondo per la velocità. I vettori si compongono secondo regole particolari, che verranno discusse nei paragrafi successivi, 1.10 e 1.11.

Fisica ragionata 1

Considera il tuo percorso per andare la mattina al lavoro o a scuola. Qual è maggiore, la lunghezza del percorso o il modulo del vettore spostamento?

Ragionamento Il percorso effettuato, a meno che non utilizzi un percorso fuori dal comune, *dove* essere maggiore del modulo del vettore spostamento. Il percorso include tutti i giri e le svolte che fai nel seguire la strada da casa al lavoro o a scuola. Invece, il modulo del vettore spostamento è la lunghezza della linea retta che congiunge casa tua con il posto di lavoro o la scuola. Ciò è spesso descritto informalmente come "la distanza in linea d'aria". Il solo modo in cui il percorso possa essere lo stesso del modulo del vettore spostamento sarebbe quello di un tuo percorso in linea retta perfetta, cosa altamente improbabile! La lunghezza del percorso non può *mai* essere inferiore al modulo del vettore spostamento, poiché la distanza più breve fra due punti è una linea retta.

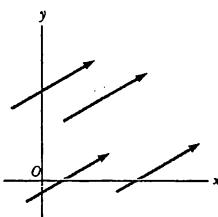


Figura 1.5 Quattro rappresentazioni dello stesso vettore.

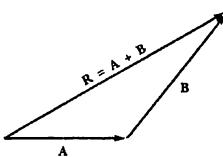


Figura 1.6 Quando un vettore **A** è sommato al vettore **B**, il risultante **R** è il vettore che va dall'inizio di **A** alla punta di **B**.

1.10 • ALCUNE PROPRIETÀ DEI VETTORI

Uguaglianza di due vettori Due vettori **A** e **B** sono per definizione uguali se hanno lo stesso modulo e puntano nella stessa direzione e verso. Cioè, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ solo se $A = B$ e agiscono lungo direzioni parallele e concordi. Per esempio, tutti i vettori in Figura 1.5 sono uguali anche se hanno differenti origini. Questa proprietà permette di traslare un vettore parallelamente a se stesso in un diagramma senza alterarlo. In effetti, per molti scopi, qualsiasi vettore può essere traslato parallelamente a se stesso senza essere alterato.

Addizione Quando due o più vettori vengono sommati, *tutti* i vettori implicati devono avere le stesse unità. Per esempio, sarebbe privo di significato sommare ad un vettore velocità un vettore spostamento in quanto essi sono gran-

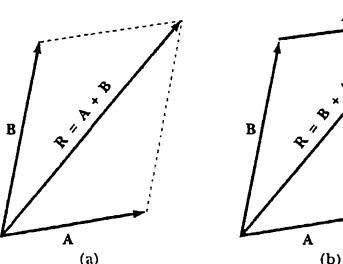


Figura 1.7 (a) In questa costruzione, il vettore risultante R è la diagonale del parallelogramma di lati A e B . (b) La costruzione mostra che $A + B = B + A$.

dezze fisiche diverse. Anche gli scalari obbediscono alla stessa legge. Per esempio, sarebbe privo di significato sommare intervalli di tempo e temperature.

Le regole per le somme vettoriali sono convenientemente descritte da metodi geometrici. Per sommare il vettore B al vettore A , prima si disegna il vettore A , con il suo modulo rappresentato in una scala opportuna, su una carta millimetrata, e poi si disegna il vettore B nella stessa scala, con il suo inizio a partire dalla punta di A , come in Figura 1.6. Il *vettore risultante* $R = A + B$ è il vettore disegnato dall'inizio di A alla punta di B . Questo metodo è conosciuto come *metodo triangolare della somma*. Una procedura grafica alternativa per sommare due vettori, nota come *regola del parallelogramma*, è mostrata in Figura 1.7a. In questa costruzione, gli inizi dei due vettori A e B coincidono ed il vettore risultante R è la diagonale di un parallelogramma i cui lati sono A e B .

Quando due vettori vengono sommati, la somma è indipendente dall'ordine. Ciò può essere visto dalla costruzione geometrica di Figura 1.7b ed è noto come *proprietà commutativa della somma*:

$$A + B = B + A \quad [1.8]$$

Figura 1.8 Costruzioni geometriche per verificare la proprietà associativa della somma.

- *Proprietà commutativa*

Se tre o più vettori vengono sommati, la loro somma è indipendente dal modo in cui i singoli vettori vengono raggruppati. Una prova geometrica di questa proprietà, nel caso di tre vettori, è data in Figura 1.8. Questa viene detta *proprietà associativa della somma*:

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad [1.9]$$

- *Proprietà associativa*

Le costruzioni geometriche possono anche essere adoperate per sommare più di tre vettori. Ciò viene mostrato in Figura 1.9 nel caso di quattro vettori. Il vettore somma risultante $R = A + B + C + D$ è il vettore che completa il poligono. In altre parole, R è il vettore disegnato dall'inizio del primo vettore alla punta dell'ultimo vettore. Ancora una volta ribadiamo che l'ordine con cui si effettua la somma è irrilevante.

Pertanto, concludiamo che un vettore è una grandezza che possiede sia modulo che direzione e verso e che obbedisce alle leggi della somma vettoriale così come descritte dalle Figure 1.6 fino alla 1.9.

Opposto di un vettore L'opposto del vettore A è definito come il vettore che sommato ad A dà zero. Cioè, $A + (-A) = 0$. I vettori A e $-A$ hanno lo stesso modulo ma puntano in versi opposti.

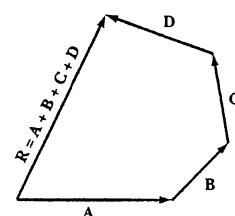


Figura 1.9 Costruzione geometrica per sommare quattro vettori. Il vettore risultante R completa il poligono.

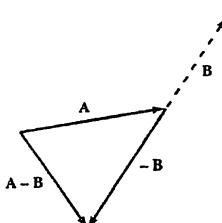


Figura 1.10 Questa costruzione mostra come sottrarre il vettore \mathbf{B} dal vettore \mathbf{A} . Il vettore $-\mathbf{B}$ è uguale in modulo ed opposto al vettore \mathbf{B} .

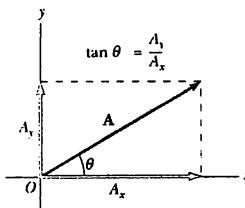


Figura 1.11 Ogni vettore \mathbf{A} che giace nel piano xy può essere rappresentato dai suoi vettori componenti A_x ed A_y .

Sottrazione fra vettori L'operazione di sottrazione vettoriale fa uso della definizione di opposto di un vettore. Definiamo l'operazione $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ come la somma del vettore $-\mathbf{B}$ con il vettore \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad [1.10]$$

La costruzione geometrica per sottrarre due vettori è mostrata in Figura 1.10.

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare Se un vettore \mathbf{A} viene moltiplicato per una grandezza scalare positiva m , il prodotto $m\mathbf{A}$ è un vettore che ha la stessa direzione e verso di \mathbf{A} e modulo mA . Se m è una grandezza scalare negativa, il vettore $m\mathbf{A}$ è diretto in verso opposto ad \mathbf{A} . Per esempio, il vettore $5\mathbf{A}$ è lungo cinque volte \mathbf{A} e punta nello stesso verso di \mathbf{A} . D'altra parte, il vettore $-\frac{1}{3}\mathbf{A}$ è un vettore che ha una lunghezza pari ad un terzo della lunghezza di \mathbf{A} e punta nel verso opposto (a causa del segno negativo).

Moltiplicazione di due vettori Due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} possono essere moltiplicati per produrre sia una grandezza scalare che vettoriale. Il **prodotto scalare** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ è una grandezza scalare uguale ad $AB \cos \theta$, dove θ è l'angolo tra \mathbf{A} e \mathbf{B} . Il **prodotto vettoriale** $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è una grandezza vettoriale il cui modulo è uguale ad $AB \sin \theta$. Discuteremo di questi prodotti più a fondo nei Capitoli 6 e 10, dove si inizierà ad utilizzarli.

In questo testo ciascun capitolo conterrà degli esercizi. Lo scopo di questi esercizi è di saggiare la vostra comprensione della materia appena discussa chiedendovi di effettuare un calcolo o di rispondere a qualche domanda connessa con un esempio svolto. Segue qui il primo esercizio.

ESERCIZIO 1 I moduli di due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} sono $A = 8$ unità e $B = 3$ unità. Trovare i valori possibili massimo e minimo del modulo del vettore risultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Risposta Il valore massimo di \mathbf{R} è 11 unità, corrispondente al caso in cui \mathbf{A} e \mathbf{B} puntano nella stessa direzione orientata. Il valore minimo di \mathbf{R} è 5 unità, corrispondente al caso in cui \mathbf{A} è in verso opposto a \mathbf{B} .

1.11 • COMPONENTI DI UN VETTORE E VERSORI

Il metodo geometrico di somma vettoriale non è una procedura raccomandabile in situazioni in cui si richiede alta precisione, oppure in problemi tridimensionali. In questo paragrafo, descriviamo un metodo per sommare i vettori che fa uso delle *proiezioni* di un vettore secondo gli assi di un sistema di coordinate ortogonali. Queste proiezioni sono dette **vettori componenti**. Un vettore può essere descritto in modo completo dai suoi componenti.

Consideriamo un vettore \mathbf{A} nel piano xy che forma un angolo θ arbitrario con l'asse x posso come in Figura 1.11. Il vettore \mathbf{A} può essere espresso come somma di due altri vettori A_x ed A_y , detti **vettori componenti** di \mathbf{A} . Il vettore componente A_x rappresenta la proiezione di \mathbf{A} lungo l'asse x , mentre A_y rappresenta la proiezione di \mathbf{A} lungo l'asse y . Dalla Figura 1.11 vediamo che $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$. Spesso indicheremo i moduli di A_x ed A_y , e precisamente A_x ed A_y , come le **componenti** di \mathbf{A} . Le componenti di un vettore sono numeri, con unità, che possono essere positivi o negativi. La componente A_x è positiva se \mathbf{A}_x punta lungo l'asse x positivo ed è negativa se \mathbf{A}_x punta lungo l'asse x negativo. Lo stesso vale per la componente A_y .

Dalla Figura 1.11 e dalla definizione di seno e coseno di un angolo, vediamo che $\cos \theta = A_x/A$ e $\sin \theta = A_y/A$. Quindi, le componenti di \mathbf{A} sono date da

Componenti del vettore \mathbf{A}

$$A_x = A \cos \theta \quad \text{e} \quad A_y = A \sin \theta \quad [1.11]$$

Queste componenti formano i due lati di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha modulo A . Così, ne segue che il modulo di A e la sua direzione e verso sono correlati alle sue componenti tramite le espressioni

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad [1.12] \quad \bullet \text{ Modulo di } A$$

e

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \quad [1.13] \quad \bullet \text{ Direzione di } A$$

Risolvendo rispetto a θ , possiamo scrivere $\theta = \tan^{-1}(A_y/A_x)$ che si legge “ θ è uguale all’angolo la cui tangente è il rapporto A_y/A_x ”. Si noti che i segni delle componenti A_x ed A_y dipendono dall’angolo θ . Per esempio, se $\theta = 120^\circ$, A_x è negativa e A_y positiva. D’altra parte, se $\theta = 225^\circ$, sia A_x che A_y sono negative. La Figura 1.12 riassume i segni delle componenti quando A giace nei vari quadranti.

Se si scelgono assi di riferimento o un angolo diversi da quelli indicati in Figura 1.11, bisogna modificare coerentemente le componenti di un vettore. In molte applicazioni è più conveniente esprimere le componenti di un vettore in un sistema di coordinate avente gli assi perpendicolari l’uno all’altro pur non essendo orizzontali e verticali. Supponiamo che un vettore B formi un angolo θ' con l’asse x' definito in Figura 1.13. Le componenti di B lungo questi assi sono date da $B_{x'} = B \cos \theta'$ e $B_{y'} = B \sin \theta'$, come nell’Equazione 1.9. Il modulo e la direzione e verso di B si ottengono dalle espressioni equivalenti alle Equazioni 1.10 e 1.11. Così, le componenti di un vettore possono essere espresse in un *qualsiasi* sistema di coordinate opportunamente scelto a seconda della particolare situazione.

Le componenti di un vettore sono differenti se viste da sistemi di coordinate differenti. Inoltre, le componenti di un vettore possono variare rispetto ad un sistema di coordinate fisso se il vettore cambia in modulo, in orientazione o in entrambi.

Le grandezze vettoriali sono spesso espresse in termini di versori. Un versore è un vettore adimensionale di lunghezza unitaria introdotto per specificare una data direzione orientata. I versori non hanno nessun altro significato fisico. Essi vengono adoperati semplicemente perché convenienti a descrivere una orientazione nello spazio. Useremo i simboli i , j e k per rappresentare i versori che puntano nelle direzioni x , y e z , rispettivamente. Pertanto, i versori i , j e k formano un insieme di vettori mutuamente perpendicolari come mostrato in Figura 1.14a, in cui il modulo dei vettori è uguale a 1 ovvero dove $|i| = |j| = |k| = 1$.

Consideriamo un vettore A che giace nel piano xy come in Figura 1.14b. Il prodotto della componente A_x per il versore i è il vettore A_i parallelo all’asse x di modulo A_x . Analogamente, A_j è un vettore di modulo A_y parallelo all’asse y . Così, nella notazione dei versori il vettore A si scrive

$$A = A_i + A_j \quad [1.14]$$

I vettori A_i e A_j sono i vettori componenti di A . Questi non vanno confusi con A_x ed A_y , che indicheremo sempre come le componenti di A .

Supponiamo ora di volere sommare il vettore B al vettore A , dove B ha componenti B_x e B_y . La procedura per effettuare questa somma consiste sem-

A_x negativa	A_x positiva
A_y positiva	A_y positiva
A_x negativa	A_x positiva
A_y negativa	A_y negativa

Figura 1.12 I segni delle componenti di un vettore A dipendono dal quadrante in cui giace il vettore.

• Versori

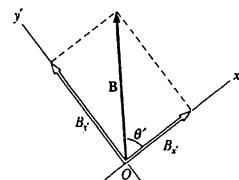


Figura 1.13 I componenti di un vettore B in un sistema di coordinate ruotato.

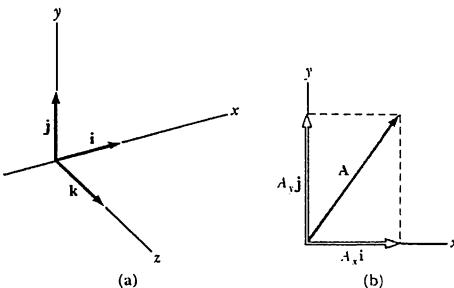


Figura 1.14 (a) I versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} sono diretti lungo gli assi x , y , e z rispettivamente. (b) Un vettore \mathbf{A} che giace nel piano xy ha vettori componenti $A_x\mathbf{i}$ e $A_y\mathbf{j}$, dove A_x ed A_y sono le componenti di \mathbf{A} .

plicemente nel sommare le componenti x ed y separatamente. Il vettore risultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ è pertanto dato da

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} \quad [1.15]$$

Così, le componenti del vettore risultante sono date da

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \end{aligned} \quad [1.16]$$

Il modulo di \mathbf{R} e l'angolo che esso forma con l'asse x possono essere ottenuti dalle sue componenti usando le relazioni

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \quad [1.17]$$

e

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \quad [1.18]$$

La procedura appena descritta per sommare due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , usando il metodo delle componenti, può essere verificata usando una costruzione geometrica, come in Figura 1.15. Ancora una volta, bisogna prendere nota dei *segni* delle componenti nell'adoperare sia il metodo algebrico che quello geometrico.

L'estensione di questi metodi a vettori tridimensionali è immediata. Se \mathbf{A} e \mathbf{B} hanno entrambi componenti x , y e z , li esprimiamo nella forma

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

La somma di \mathbf{A} e \mathbf{B} è data da

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k} \quad [1.19]$$

Così, il vettore risultante ha anche una componente z data da $R_z = A_z + B_z$. La stessa procedura può essere adoperata per sommare tre o più vettori.

Se un vettore \mathbf{R} ha componenti x , y e z , il modulo del vettore è

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

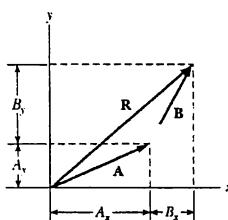


Figura 1.15 Costruzione geometrica che mostra la relazione fra le componenti del vettore risultante \mathbf{R} di due vettori e le componenti dei singoli vettori.

Fisica ragionata 2

Chiedendo la direzione per una qualche destinazione in città puoi aver ottenuto una risposta del tipo "cammina per tre isolati a est e poi per 5 isolati a sud". Se è così, pensi di aver avuto a che fare con i componenti di un vettore?

Ragionamento Sì! Sebbene puoi non aver pensato in termini di componenti vettoriali quando hai seguito queste direzioni, tuttavia è esattamente ciò che esse rappresentano. Le strade perpendicolari della città riflettono il sistema di coordinate $x-y$, potendo noi assegnare l'asse x alle strade da ovest verso est e l'asse y alle strade da sud verso nord. Quindi, l'indicazione della persona che ti ha dato la direzione si può tradurre così: "Percorri un vettore spostamento che ha una componente x di +3 isolati e una componente y di -5 isolati". Arriveresti alla stessa destinazione se percorressi prima la componente y , seguita dalla componente x , la qual cosa dimostra la proprietà commutativa della somma.

Molti paragrafi di questo testo includono problemi concettuali non numerici simili alla Fisica ragionata dell'esempio precedente. Le risposte a tutti i problemi concettuali si trovano alla fine di ciascun capitolo. Di seguito trovate il primo gruppo di problemi concettuali.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Se la componente di un vettore è diversa da zero, può il suo modulo essere zero? Spiegare.

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Se $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$, cosa puoi dire circa le componenti dei due vettori?

PROBLEMA CONCETTUALE 3

La Figura PC1.3 mostra due vettori che giacciono nel piano $x-y$. Determinare il segno (a) della componente x di \mathbf{A} e \mathbf{B} , (b) della componente y di \mathbf{A} e \mathbf{B} , e (c) delle componenti x e y di $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

La componente di un vettore può essere uguale al modulo del vettore stesso?

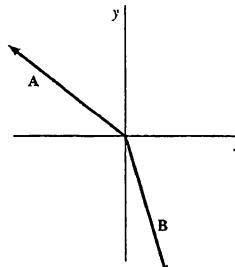


Figura PC1.3

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

- Somma di vettori, uso delle componenti

Quando si vogliono sommare due o più vettori si raccomanda di seguire i passi indicati nella procedura seguente.

1. Scegliere un sistema di coordinate.
2. Disegnare uno schema dei vettori da sommare (o sottrarre), con un indice su ciascun vettore.
3. Trovare le componenti x ed y di tutti i vettori.
4. Trovare le componenti del vettore risultante (la somma algebrica delle componenti) sia nella direzione x che nella direzione y .
5. Usare il teorema di Pitagora per determinare il modulo del vettore risultante.
6. Usare una appropriata funzione trigonometrica per determinare l'angolo che il vettore risultante forma con l'asse x .

Esempio 1.7 Somma di due vettori

Trovare la somma di due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} giacenti nel piano xy e dati da

$$\mathbf{A} = 2.0\mathbf{i} + 2.0\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = 2.0\mathbf{i} - 4.0\mathbf{j}$$

Soluzione Notiamo che $A_x = 2.0$, $A_y = 2.0$, $B_x = 2.0$, e $B_y = -4.0$. Quindi, il vettore risultante \mathbf{R} è dato da:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2.0 + 2.0)\mathbf{i} + (2.0 - 4.0)\mathbf{j} = 4.0\mathbf{i} - 2.0\mathbf{j}$$

ovvero

$$R_x = 4.0, \quad R_y = -2.0$$

Il modulo di \mathbf{R} è dato da

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0)^2 + (-2.0)^2} = \sqrt{20} = 4.5$$

ESERCIZIO 2 Determinare l'angolo θ che il vettore risultante \mathbf{R} forma con l'asse x positivo. Risposta 330° .

Esempio 1.8 Lo spostamento risultante

Una particella effettua tre spostamenti consecutivi dati da $\mathbf{d}_1 = (1.5\mathbf{i} + 3.0\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k})$ cm, $\mathbf{d}_2 = (2.3\mathbf{i} - 1.4\mathbf{j} - 3.6\mathbf{k})$ cm, e $\mathbf{d}_3 = (-1.3\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j})$ cm. Determinare lo spostamento risultante della particella.

Soluzione

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \\ &= (1.5 + 2.3 - 1.3)\mathbf{i} + (3.0 - 1.4 + 1.5)\mathbf{j} \\ &\quad + (-1.2 - 3.6 + 0)\mathbf{k} \\ &= (2.5\mathbf{i} + 3.1\mathbf{j} - 4.8\mathbf{k}) \text{ cm} \end{aligned}$$

Cioè, lo spostamento risultante ha componenti $R_x = 2.5$ cm, $R_y = 3.1$ cm ed $R_z = -4.8$ cm. Il suo modulo vale

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \\ &= \sqrt{(2.5 \text{ cm})^2 + (3.1 \text{ cm})^2 + (-4.8 \text{ cm})^2} = 6.2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Esempio 1.9 Facendo una escursione

Un'escursionista inizia una gita camminando a piedi prima 25.0 km esattamente in direzione sud-est dal suo campo base. Al secondo giorno, cammina per 40.0 km in una direzione a 60.0° nord-est e trova una torre della guardia forestale.

(a) Determinare le componenti degli spostamenti della escursionista il primo e il secondo giorno.

Soluzione Se indichiamo i vettori spostamento nel primo e nel secondo giorno rispettivamente con \mathbf{A} e \mathbf{B} ed assumiamo il campo base come origine delle coordinate, otteniamo i vettori mostrati in Figura 1.16. Lo spostamento \mathbf{A} ha modulo 25.0 km ed è a 45.0° a sud-est. Le sue componenti sono

$$A_x = A \cos(-45.0^\circ) = (25.0 \text{ km})(0.707) = 17.7 \text{ km}$$

$$A_y = A \sin(-45.0^\circ) = -(25.0 \text{ km})(0.707) = -17.7 \text{ km}$$

Il valore negativo di A_y indica che la coordinata y in questo spostamento è diminuita. I segni di A_x ed A_y sono anche evidenti dalla Figura 1.16.

Il secondo spostamento, \mathbf{B} , ha modulo 40.0 km ed è a 60.0° a nord-est. Le sue componenti sono

$$B_x = B \cos(60.0^\circ) = (40.0 \text{ km})(0.500) = 20.0 \text{ km}$$

$$B_y = B \sin(60.0^\circ) = (40.0 \text{ km})(0.866) = 34.6 \text{ km}$$

(b) Determinare le componenti dello spostamento complessivo della escursionista.

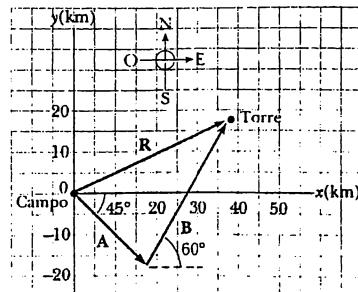


Figura 1.16 Lo spostamento totale della escursionista è il vettore $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Soluzione Lo spostamento risultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ha componenti date da

$$R_x = A_x + B_x = 17.7 \text{ km} + 20.0 \text{ km} = 37.7 \text{ km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7 \text{ km} + 34.6 \text{ km} = 16.9 \text{ km}$$

Nel formalismo dei vettori, possiamo scrivere lo spostamento totale come $\mathbf{R} = (37.7\mathbf{i} + 16.9\mathbf{j}) \text{ km}$.

ESERCIZIO 3 Determinare il modulo e la direzione dello spostamento totale. Risposta 41.3 km, 24.1° a nord-est dal campo base.

SOMMARIO

Le grandezze meccaniche possono essere espresse in termini di tre grandezze fondamentali, *lunghezza*, *massa*, *tempo*, che hanno le unità di *metro* (m), *chilogrammo* (kg), e *secondo* (s), rispettivamente, nel sistema SI. È spesso utile adoperare il *metodo dell'analisi dimensionale* per verificare le equazioni ed aiutarsi nel derivare le espressioni.

La **densità di una sostanza** è definita come la sua massa per unità di volume. Sostanze diverse hanno densità diverse soprattutto a causa delle differenze nelle loro masse atomiche e nelle distribuzioni atomiche.

Il numero di molecole in una mole di un qualsiasi elemento o composto è detto **numero di Avogadro** (N_A), ed ha il valore di 6.02×10^{23} .

I vettori sono delle grandezze che hanno sia modulo che direzione e verso ed obbediscono alla legge della somma vettoriale. Gli **scalar**i sono delle grandezze che hanno solamente modulo.

Due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} possono essere sommati usando o il metodo del triangolo o la regola del parallelogramma. Nel metodo del triangolo (Fig 1.6), il vettore $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ va dall'inizio di \mathbf{A} alla punta di \mathbf{B} . Nel metodo del parallelogramma (Fig. 1.7a), \mathbf{C} è la diagonale di un parallelogramma di lati \mathbf{A} e \mathbf{B} .

La componente x , A_x , del vettore \mathbf{A} è uguale alla sua proiezione lungo l'asse x di un sistema di coordinate come in Figura 1.11, in cui $A_x = A \cos \theta$. Analogamente, la componente y , A_y , di \mathbf{A} è la sua proiezione lungo l'asse y , dove $A_y = A \sin \theta$. Il risultante di due o più vettori può essere trovato scomponendo tutti i vettori nelle loro componenti x ed y , determinando le componenti x ed y della risultante e poi usando il teorema di Pitagora per trovare il modulo del vettore risultante. L'angolo che il vettore risultante forma rispetto all'asse x può essere trovato con l'uso di una opportuna funzione trigonometrica.

Se un vettore \mathbf{A} ha componente x pari ad A_x e componente y pari ad A_y , nel formalismo dei vettori può essere espresso come $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$. Secondo questa notazione, \mathbf{i} è un versore che punta nella direzione x positiva e \mathbf{j} è un versore nella direzione y positiva. Poiché \mathbf{i} e \mathbf{j} sono vettori unitari, $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$.

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] Supponiamo che i tre campioni del sistema metrico siano lunghezza, *densità*, e tempo piuttosto che lunghezza, *massa*, e tempo. Il campione di densità in questo sistema viene definito come quello dell'acqua. Quali considerazioni sarebbe necessario che venissero fatte, intorno all'acqua, per essere sicuri che l'unità campione della densità fosse la più accurata possibile?
- [2] Quali tipi di fenomeni naturali potrebbero servire come campioni di tempo alternativi?
- [3] L'altezza di un cavallo viene spesso data in unità di "palmi". Perché ritenete che questo sia un campione di lunghezza alquanto scadente?
- [4] Esprimete le seguenti grandezze usando i prefissi assegnati in Tabella 1.4: (a) $3 \times 10^{-4} \text{ m}$, (b) $5 \times 10^{-5} \text{ s}$, (c) $72 \times 10^2 \text{ g}$.
- [5] Quando si procede verso numeri atomici più grandi nella tavola periodica, le masse atomiche degli elementi aumentano. Poiché gli atomi diventano sempre più massivi, perché la *densità* dell'elemento mate-

- riale non aumenta nello stesso modo?
6. Supponiamo che due grandezze A e B abbiano dimensioni diverse. Determinare quale delle seguenti operazioni aritmetiche *potrebbe* essere fisicamente significativa: (a) $A + B$, (b) A/B , (c) $B - A$, (d) AB .
 7. Quale accuratezza è implicata in un calcolo di ordine di grandezza?
 8. Applicate un calcolo di ordine di grandezza ad una situazione di vita quotidiana. Per esempio, quanto camminate o guidate in un giorno?
 9. Quali fra forza, temperatura, volume d'acqua in un bidone, indice di gradimento di uno spettacolo televisivo, altezza di un palazzo, velocità di una macchina sportiva, età dell'Universo, sono vettori e quali no?
 10. Un vettore A giace nel piano xy . Per quali orientazioni di A entrambe le sue componenti sono negative? Per quali orientazioni le componenti avranno segni opposti?
 11. Un libro viene mosso una volta sola lungo il perimetro di un tavolo di dimensioni $1.0 \text{ m} \times 2.0 \text{ m}$. Se il libro viene arrestato nella sua posizione iniziale, qual è il suo spostamento? Qual è la distanza percorsa?
 12. Durante il percorso di un'autostrada rettilinea, congiungente due regioni, si osserva che l'indicatore di miglia, sul ciglio dell'autostrada riporta il numero
 260. Se si continua il viaggio fino all'indicatore di 150 miglia e si ritorna indietro fino all'indicatore di 175 miglia, qual è il modulo dello spostamento complessivo, a partire dal segnalatore di 260 miglia?
 13. Se la componente di un vettore A lungo la direzione del vettore B è zero, cosa si può concludere circa i due vettori?
 14. Se $A = B$, cosa si può concludere circa le componenti di A e B ?
 15. È possibile sommare una grandezza vettoriale ad una scalare? Spiegare.
 16. Un vagoncino delle montagne russe viaggia in salita, per 42 m con un angolo di 40.0° rispetto alla direzione orizzontale. Qual è il suo spostamento nelle direzioni orizzontale e verticale?
 17. La scomposizione di vettori in componenti è equivalente a sostituire il vettore originale con la somma di due vettori la cui somma sia uguale al vettore originale. Esistono infinite coppie di vettori che soddisfano questa condizione; noi sceglieremo la coppia con un vettore parallelo all'asse x e l'altro parallelo all'asse y . Quali difficoltà verrebbero introdotte definendo i componenti relativi ad assi che non siano perpendicolari, per esempio, l'asse x e l'asse y orientati a 45° rispetto all'asse x ?

PROBLEMI

Paragrafo 1.2 Densità e massa atomica

1. Calcolate la massa di un atomo di (a) elio, (b) ferro e (c) piombo. Dare le risposte in unità di massa atomica e in grammi. I pesi atomici sono rispettivamente per gli atomi dati di 4.00, 55.9 e 207.
2. Il chilogrammo standard è un cilindro di platino-iridio di 39.0 mm d'altezza e 39.0 mm di diametro. Qual è la densità del materiale?
3. Un metro cubo (1.00 m^3) di alluminio ha una massa di $2.70 \times 10^3 \text{ kg}$, e un metro cubo di ferro ha una massa di $7.86 \times 10^3 \text{ kg}$. Determinare il raggio di una sfera piena fatta di alluminio che equilibri in una bilancia a bracci uguali una sfera piena fatta di ferro di raggio 2.00 cm .
4. Sia ρ_{Al} la densità dell'alluminio e ρ_{Fe} quella del ferro. Determinare il raggio di una sfera piena fatta di alluminio che equilibri una sfera piena fatta di ferro di raggio r_{Fe} in una bilancia a bracci uguali.
5. La massa del pianeta Saturno è $5.64 \times 10^{26} \text{ kg}$, e il suo raggio è $6.00 \times 10^7 \text{ m}$. (a) Calcolate la densità. (b) Se Saturno fosse posto dentro un enorme oceano d'acqua, galleggierebbe? Spiegare.

Paragrafo 1.3 Analisi dimensionale

6. Il raggio r di una circonferenza inscritta in un qualunque triangolo i cui lati siano a , b , e c è dato da $r = [(s-a)(s-b)(s-c)/s]^{1/2}$, dove s indica $(a+b+c)/2$. Controllare la consistenza dimensionale di questa formula.
7. Il consumo di gas naturale da parte di una società soddisfa l'equazione empirica $V = 1.50t + 0.00800t^2$, dove V è il volume, espresso in milioni di piedi al cubo e t il tempo in mesi. Esprimere questa equazione in unità di piedi al cubo e secondi. Introdurre le unità adeguate nei coefficienti. Considerare la durata di un mese pari a 30 giorni.
8. La legge di gravitazione universale di Newton è data da

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

F è la forza di gravità, M e m sono masse e r una lunghezza. Le unità della forza sono $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$. Quali sono le unità nel sistema SI della costante di proporzionalità G ?

9. Il periodo T di un pendolo semplice viene misurato in unità di tempo ed è dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

dove ℓ rappresenta la lunghezza del pendolo e g l'accelerazione di gravità, in unità di una lunghezza divisa per il quadrato del tempo. Dimostrare che questa equazione è dimensionalmente corretta.

Paragrafo 1.4 Conversione delle unità

10. Un auditorium misura $40.0 \text{ m} \times 20.0 \text{ m} \times 12.0 \text{ m}$. La densità dell'aria è 1.20 kg/m^3 . Determinare (a) il volume dell'ambiente in piedi cubici e (b) il peso dell'aria dell'auditorium in libbre.
11. Una unità astronomica (UA) è definita come la distanza media fra la Terra e il Sole. (a) Quante unità astronomiche vi sono in un anno-luce? (b) Determinare la distanza fra la Terra e la galassia di Andromeda in unità astronomiche.
12. Si assuma che siano necessari 7.00 minuti per riempire con 30.0 gal di benzina un serbatoio. (a) Calcolare la velocità con cui viene riempito il serbatoio, espressa in galloni al secondo. (b) Calcolare la velocità con cui viene riempito il serbatoio, espressa in metri cubi al secondo. (c) Determinare il tempo, in ore, necessario per riempire il volume di un metro cubo alla stessa velocità (1 U.S. gal = 231 in^3).
13. Un gallone di vernice (volume = $3.78 \times 10^{-3} \text{ m}^3$) ricopre una area di 25.0 m^2 . Si determini lo spessore della vernice sulla parete.
14. Si può ottenere una stima approssimata delle dimensioni di una molecola eseguendo un semplice esperimento. Lasciare cadere una goccia d'olio su una superficie d'acqua calma. La macchia d'olio che ne risulta sarà spessa quanto una molecola. Se una goccia d'olio di massa pari a $9.00 \times 10^{-7} \text{ kg}$ e di densità 918 kg/m^3 diffonde in un cerchio di raggio 41.8 cm sulla superficie d'acqua, calcolare il diametro di una molecola d'olio.
15. (a) Trovare il fattore di conversione da mi/h (miglia/ora) a km/h (chilometri/ora). (b) Fino a poco tempo fa, la legge federale degli Stati Uniti fissava in 55 mi/h la massima velocità consentita nelle autostrade. Utilizzando il fattore di conversione ricavato al punto (a), determinare la velocità in km/h. (c) In alcuni Stati degli USA la velocità massima consentita in autostrada è stata aumentata a 65 mi/h . Determinare, in km/h, l'aumento del valore della velocità massima consentita.
16. (a) Quanti secondi vi sono in un anno? (b) Se una micrometeorite (una sfera di diametro 10^{-6} m) colpisce ciascun metro quadrato della Luna ogni secondo, determinare il numero di anni necessari perché la Luna venga ricoperta dalle micrometeoriti per uno

spessore pari ad 1.00 metro. (*Suggerimento*: si consideri una scatola cubica, di lato 1.00 metro, posta sulla Luna e si determini il tempo necessario per riempire la scatola con le micrometeoriti).

17. La massa del Sole è circa $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ e la massa dell'atomo dell'idrogeno, maggiore componente del Sole, è $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Determinare il numero di atomi di idrogeno presenti nel Sole.

Paragrafo 1.5 Calcoli di ordini di grandezza

18. Confrontare l'ordine di grandezza della massa (a) di una vasca da bagno piena d'acqua, e (b) di una vasca da bagno piena di monete ordinarie. Nella soluzione elencare le grandezze stimate e il valore stimato di ciascuna di esse.
19. Stimare il numero di suonatori di piano che vivono nella città di New York. Questo problema fu sollevato dal fisico Enrico Fermi, che era ben famoso per i suoi calcoli degli ordini di grandezza.
20. Le bevande non alcoliche sono comunemente vendute in lattine di alluminio. Stimare il numero dei contenitori di questo tipo gettati via ogni anno e/o riciclati dai consumatori degli Stati Uniti. Approssimativamente tale quantità a quante tonnellate di alluminio corrisponde?

Paragrafo 1.6 Cifre significative

21. Eseguite le seguenti operazioni aritmetiche: (a) la somma dei numeri 756 , 37.2 , 0.83 , e 2.5 ; (b) il prodotto 3.2×3.563 ; (c) il prodotto $5.6 \times \pi$.
22. Quante cifre significative vi sono in (a) 78.9 ± 0.2 , (b) 3.788×10^9 , (c) 2.46×10^{-6} , (d) 0.0053 ?
23. Il raggio misurato di un cerchio risulta essere $10.5 \pm 0.2 \text{ m}$. Calcolare (a) l'area e (b) la sua circonferenza indicando l'indeterminazione per ciascun valore.
24. Il raggio di una sfera piena misurato da uno studente risulta $(6.50 \pm 0.20) \text{ cm}$, e la sua massa $(1.85 \pm 0.02) \text{ kg}$. Determinare la densità della sfera, in chilogrammi per metro cubo, e l'indeterminazione nella densità.

Paragrafo 1.7 Sistemi di coordinate e sistemi di riferimento

25. Le coordinate polari di un punto sono $r = 5.50 \text{ m}$ e $\theta = 240.0^\circ$. Quali sono le sue coordinate cartesiane?
26. Un punto nel piano xy ha coordinate cartesiane $(-3.00, 5.00) \text{ m}$. Quali sono le sue coordinate polari?
27. Due punti in un piano hanno coordinate polari $(2.50 \text{ m}, 30.0^\circ)$ e $(3.80 \text{ m}, 120.0^\circ)$. Determinare (a) le coordinate cartesiane dei due punti e (b) la distanza fra loro.
28. Se le coordinate polari del punto (x, y) sono (r, θ) , determinare le coordinate polari per i punti: (a) $(-x, y)$, (b) $(-2x, -2y)$ e (c) $(3x, -3y)$.

Paragrafo 1.9 Vettori e scalari**Paragrafo 1.10 Alcune proprietà dei vettori**

- [29] Una persona cammina lungo un percorso circolare di raggio 5.00 m, per una mezza circonferenza. (a) Trovare il modulo del vettore spostamento. (b) Quanto lontano arriva la persona? (c) Qual è il modulo dello spostamento se si completa la circonferenza?
30. Una fanciulla, facendo "jogging", percorre nel primo tratto 100 m in direzione ovest e cambia direzione nella seconda parte della corsa. Alla fine del percorso, essa si trova a 175 m dal punto di partenza, in una direzione di 15.0° a nord-ovest. Determinare la direzione ed il modulo dello spostamento nella seconda parte del percorso. Utilizzare il metodo grafico.
- [31] Ciascuno dei vettori spostamento \mathbf{A} e \mathbf{B} mostrati in Figura P1.31 ha modulo 3.0 m. Trovare graficamente (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, (c) $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, (d) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

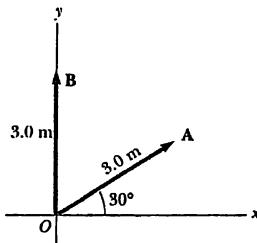


Figura P1.31

32. Indiana Jones rimane intrappolato in un labirinto. Per trovare la via d'uscita, egli cammina per 10.0 m, gira di 90.0° a destra, cammina per altri 5.00 m, gira di nuovo a destra di 90.0° , e cammina per 7.00 m. Qual è il suo spostamento dalla posizione iniziale?

Paragrafo 1.11 Componenti di un vettore e versori

- [33] Un vettore ha componente x di -25.0 unità e componente y di 40.0 unità. Trovare il modulo e la direzione del vettore.
34. Determinare la componente orizzontale e quella verticale del tragitto, di 100 m, percorso da "Nembo-Kid" che vola dalla sommità di un grattacielo seguendo il cammino indicato in Figura P1.34.
35. Le istruzioni per trovare un tesoro sepolto includono quanto segue: fare 75 passi a 240° , girare a 135° e percorrere 125 passi, quindi altri 100 passi a 160° . Determinare lo spostamento risultante rispetto al punto di partenza.
36. Dati i vettori $\mathbf{A} = 2.00\mathbf{i} + 6.00\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 3.00\mathbf{i} - 2.00\mathbf{j}$, (a)
- disegnare il vettore somma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ e il vettore differenza $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. (b) Trovare la soluzione analitica per \mathbf{C} e \mathbf{D} prima utilizzando i versori e poi le coordinate polari, con gli angoli misurati rispetto all'asse x positivo.
- [37] Tre vettori sono orientati come mostrato in Figura P1.37, dove $|\mathbf{A}| = 20.0$, $|\mathbf{B}| = 40.0$ e $|\mathbf{C}| = 30.0$ unità. Trovare (a) le componenti x ed y del vettore risultante e (b) il modulo e la direzione del vettore risultante.

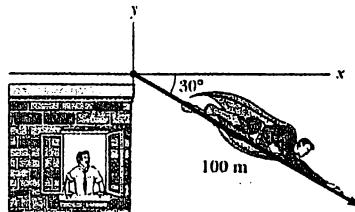


Figura P1.34

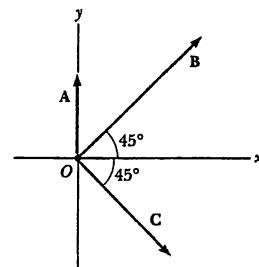


Figura P1.37

38. Un giocatore di golf, alle prime armi, utilizza, sul "green", tre colpi per mettere la pallina in buca. Nei tre colpi, gli spostamenti sono, successivamente, 4.00 m in direzione nord, 2.00 m a nord-est ed 1.00 m a 30.0° a sud-ovest. Partendo dalla stessa posizione, un giocatore esperto riuscirebbe a mettere in buca la pallina con un solo colpo: determinare il vettore spostamento.
39. Una persona che va a fare una passeggiata segue l'itinerario mostrato in Figura P1.39. L'escurzione totale consta di quattro tratti rettilinei. Alla fine della passeggiata, qual è lo spostamento risultante misurato a partire dall'origine?
40. Un vettore è dato da $\mathbf{R} = 2.00\mathbf{i} + 1.00\mathbf{j} + 3.00\mathbf{k}$. Trovare

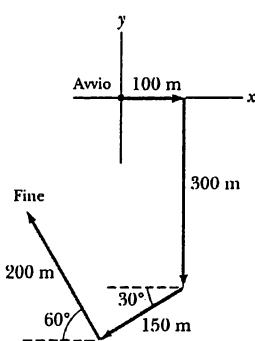


Figura P1.39

(a) i moduli dei componenti x , y , e z , (b) il modulo di R , e (c) gli angoli tra R e gli assi x , y , e z .

41. Una particella è sottoposta a due spostamenti. Il primo ha un modulo di 150 cm e forma un angolo di 120.0° con l'asse x positivo. Lo spostamento risultante ha un modulo di 140 cm ed è diretto con un angolo di 35.0° rispetto all'asse x positivo. Trovare il modulo e la direzione del secondo spostamento.
42. Un aereo si sposta inizialmente a 300 mi/h in direzione est ed entra in una regione dove il vento soffia a 100 mi/h in direzione 30.0° NE. Quali sono la nuova velocità e la direzione dell'aereo?

Problemi generali

- 43.** Un'utile osservazione è che in un anno vi sono circa $\pi \times 10^7$ s. Utilizzare una calcolatrice per valutare l'errore percentuale con questa approssimazione. *Nota:*

$$\text{Errore percentuale} = \frac{\text{val. assunto} - \text{val. vero}}{\text{valore vero}} \times 100\%$$

44. L'occhio di un uragano sorvola l'isola Grand Bahama. Si sposta in direzione 60.0° NO ad una velocità di 41.0 km/h. Tre ore dopo la coda dell'uragano si sposta improvvisamente a N e la velocità rallenta fino ai 25.0 km/h. Quant'è lontano l'uragano dalla Grand Bahama 4.50 ore dopo il passaggio sull'isola?
45. Si supponga che vi siano 50 milioni di auto negli Stati Uniti e che il consumo medio di carburante sia di 20 mi/gal. Se la distanza media percorsa da ciascuna auto è di 10^4 miglia/anno, quale sarebbe il risparmio di benzina all'anno, se il consumo medio arrivasse a 25 mi/gal?
46. La funzione principale del carburatore di un'automobile è quella di atomizzare la benzina e miscellarla con l'aria per favorire una rapida combustione. Per esempio, si assuma che 30.0 cm^3 di benzina siano atomizza-

ti in N gocce sferiche, ognuna di raggio 2.00×10^{-5} m. Qual è la superficie totale di queste N gocce sferiche?

47. Assumendo che il 70% della superficie terrestre sia coperta d'acqua con una profondità media di 1 miglio, stimare la massa d'acqua della Terra espressa in chilogrammi.
48. I dati riportati nella tabella che segue corrispondono alla misura della massa e delle dimensioni di cilindri pieni fatti di alluminio, rame, bronzo, stagno e ferro. Si utilizzino questi dati per calcolare la densità delle varie sostanze. Paragonate i vostri risultati per l'alluminio, rame e ferro con quelli riportati in Tabella 1.5.

Sostanza	Massa (g)	Diametro (cm)	Lunghezza (cm)
Alluminio	51.5	2.52	3.75
Rame	56.3	1.23	5.06
Bronzo	94.4	1.54	5.69
Stagno	69.1	1.75	3.74
Ferro	216.1	1.89	9.77

49. Un controllore del traffico aereo nota due aerei sul suo radar. Il primo è a 800 m di altezza, distanza orizzontale 19.2 km, 25.0° SO. Il secondo aereo è ad un'altitudine di 1100 m, distanza orizzontale 17.6 km, 20.0° SO. Qual è la distanza tra i due aerei? (Posizionare l'asse x ad ovest, l'asse y a sud e l'asse z verticale).
50. Due persone tirano un mulo ostinato come si vede dalla visione aerea mostrata in Figura P1.50. Trovare

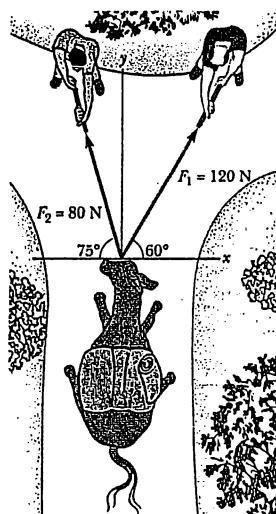


Figura P1.50

- (a) la singola forza che è equivalente alle due forze mostrate e (b) la forza che una terza persona dovrebbe esercitare sul mulo per rendere la forza risultante uguale a zero.
51. La distanza tra il Sole e la stella più vicina è nell'ordine di 10^{17} m. La Via Lattea è un disco con raggio 10^{21} m, di 10^{19} m di spessore. Stimare il numero di stelle nella Via Lattea. Supporre che la distanza tra il Sole e il corpo più vicino sia tipica.
52. Un parallelepipedo rettangolare ha dimensioni a , b e c come in Figura P1.52. (a) Ottenere una espressione vettoriale per il vettore \mathbf{R}_1 diagonale di una faccia. Qual è il modulo di questo vettore? (b) Ottenere un'espressione vettoriale per il vettore \mathbf{R}_2 diagonale del parallelepipedo. Notare che \mathbf{R}_1 , \mathbf{c} , e \mathbf{R}_2 formano un triangolo rettangolo e dimostrare che il modulo di \mathbf{R}_2 è $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

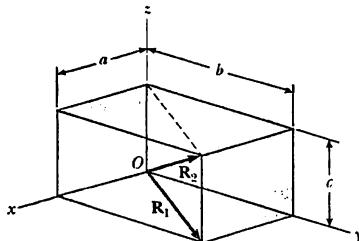


Figura P1.52

Problemi al calcolatore

- S1. I fogli elettronici sono particolarmente utili per esaminare graficamente dei dati. La maggior parte dei fogli elettronici è in grado di adattare la migliore linea retta (regressione lineare) a un insieme di dati. La tabella che segue riporta i risultati sperimentali della misura del periodo T di un pendolo di lunghezza L . Questi dati si accordano con una equazione della forma $T = CL^n$, dove C ed n sono delle costanti ed n non è necessariamente un numero intero.

Lunghezza L (m)	Periodo T (s)
0.25	1.00
0.50	1.40
0.75	1.75
1.00	2.00
1.50	2.50
2.00	2.80

(a) Usare il metodo dei minimi quadrati o la regressione lineare del foglio elettronico per trovare il migliore accordo con i dati. Poiché $T = CL^n$, vediamo che

$$\log T = \log C + n \log L$$

Prima calcolare la colonna di valori di $\log T$ come variabile dipendente e un'altra di $\log L$ come variabile indipendente. Con il metodo dei minimi quadrati trovare la pendenza n e l'intercetta $\log C$. (b) Quali dei punti dati si discostano dal grafico della linea retta di T versus L^n ? (c) I valori sperimentali trovati per n nella domanda (a) sono consistenti con una analisi dimensionale di $T = CL^n$?

- S2. Il periodo T e il raggio R dell'orbita delle quattro lune di Giove sono

	Io	Europa	Ganimede	Callisto
T (giorni)	1.77	3.55	7.16	16.69
R (km)	422 000	671 000	1 070 000	1 880 000

(a) Questi dati possono essere trattati con la formula $T = CR^n$. Seguire la procedura indicata nel problema S1a per trovare C ed n . (b) Un quinto satellite, Amaltea, ha un periodo di 0.50 giorni. Usare $T = CR^n$ per trovare il raggio della sua orbita.

- S3. Usare il Foglio Elettronico 1.1 per trovare lo spostamento totale corrispondente alla somma dei tre vettori spostamento: $\mathbf{A} = 3.0\mathbf{i} + 4.0\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2.3\mathbf{i} - 7.8\mathbf{j}$, e $\mathbf{C} = 5.0\mathbf{i} - 2.0\mathbf{j}$, dove le unità sono espresse in metri. (a) Date la vostra risposta nella forma di componenti. (b) Date la vostra risposta nella forma polare. (c) Trovare un quarto spostamento che faccia ritornare all'origine.

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- No. Il modulo di un vettore \mathbf{A} è uguale a $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$. Quindi, se tutte le componenti non sono nulle, \mathbf{A} non può essere zero.
- $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$, quindi le componenti dei due vettori devono avere valore assoluto uguale e segno opposto.
- (a) A_x è negativa, B_x è positiva; (b) A_x è positiva, B_x è negativa; (c) ambedue le componenti sono negative.
- È possibile avere una situazione nella quale la componente di un vettore è uguale al modulo del vettore, allorquando l'altra componente è zero. Per esempio, un vettore velocità che giace lungo la direzione est ha una componente nella direzione est uguale al modulo del vettore velocità.

2

Moto in una dimensione

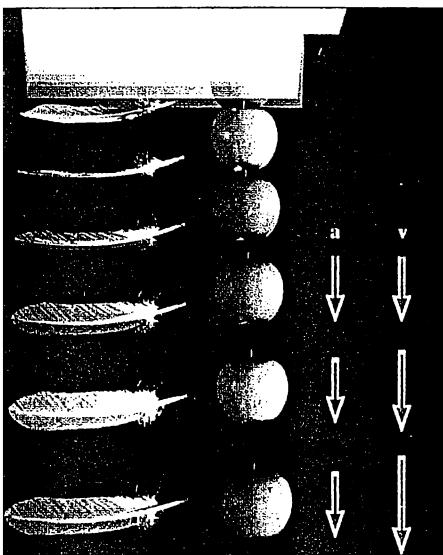
La dinamica riguarda lo studio del moto di un oggetto e la relazione fra questo moto ed alcuni concetti fisici quali quelli di forza e di massa. Prima di iniziare lo studio della dinamica è opportuno descrivere il moto usando i concetti di spazio e tempo, indipendentemente dalle cause del moto. Questa sezione della meccanica è nota sotto il nome di *cinematica*. In questo capitolo considereremo il **moto lungo una linea retta**, cioè il **moto unidimensionale**. Partendo dal concetto di spostamento discusso nel capitolo precedente, definiremo la **velocità** e l'**accelerazione**. Usando questi concetti, passeremo allo studio del **moto** di oggetti con accelerazione costante. Nel Capitolo 3 estenderemo la nostra discussione al **moto bidimensionale**.

Dall'esperienza quotidiana sappiamo che il moto rappresenta il cambiamento continuo della posizione di un oggetto. Il moto di un oggetto attraverso lo spazio può essere accompagnato dalla rotazione e dalla vibrazione dell'oggetto. Moti di questo genere possono essere alquanto complessi. Comunque, a volte, è possibile semplificare le cose trascuran-

do in prima istanza i moti interni degli oggetti in movimento. In molte situazioni

CONTENUTO

- 2.1 Velocità media
- 2.2 Velocità istantanea
- 2.3 Accelerazione
- 2.4 Diagrammi del moto
- 2.5 Moto unidimensionale con accelerazione costante
- 2.6 Corpi in caduta libera



◀ Una mela ed una piuma, rilasciati in quiete in una camera sotto vuoto di 1.2 m, cadono nello stesso modo, indipendentemente dalla loro massa. Trascurando la resistenza dell'aria, tutti gli oggetti cadono sulla terra con la stessa accelerazione di modulo 9.80 m/s^2 come indicato dalle frecce viola in questa fotografia "multiflash". La velocità dei due oggetti aumenta linearmente nel tempo come indicato dalle frecce rosse.

zioni, un oggetto può essere trattato come una *particella*¹ se l'unico moto preso in considerazione è quello di una traslazione nello spazio.

Una particella idealizzata è un punto matematico senza dimensioni. Per esempio, se vogliamo descrivere il moto della Terra attorno al Sole, possiamo trattare la Terra come una particella ed ottenere una accuratezza ragionevole nella previsione dell'orbita terrestre. Questa approssimazione rimane giustificata dal fatto che il raggio dell'orbita terrestre è molto grande rispetto alle dimensioni della Terra e del Sole. D'altra parte, noi non potremmo usare il modello del punto materiale per spiegare la struttura interna della Terra o fenomeni quali le maree, i terremoti e l'attività vulcanica. Su scala molto più piccola, è possibile spiegare la pressione esercitata da un gas sulle pareti di un contenitore, trattando le molecole del gas come particelle. Tuttavia, la descrizione come particelle delle molecole di un gas è generalmente inadeguata per comprendere quelle proprietà del gas che dipendono dai moti molecolari interni (vibrazioni) e dalle rotazioni delle molecole del gas.

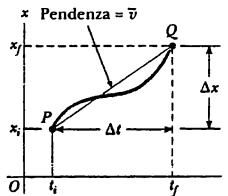


Figura 2.1 Grafico posizione-tempo per una particella in moto lungo l'asse x . La velocità media \bar{v}_x nell'intervallo $\Delta t = t_f - t_i$ è la pendenza della retta congiungente P e Q .

2.1 • VELOCITÀ MEDIA

Il moto di una particella è determinato in maniera completa se la sua posizione è conosciuta istante per istante. Consideriamo una particella che si muova lungo l'asse x da un punto P ad un punto Q . Sia x_i la sua posizione nel punto P ad un certo istante t_i e sia x_f la sua posizione nel punto Q al tempo t_f . In tempi diversi da t_i e t_f la posizione della particella fra i due punti può variare come in Figura 2.1. Un tale diagramma viene comunemente chiamato grafico *posizione-tempo*. Nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$, lo spostamento della particella è $\Delta x = x_f - x_i$. (Ricordiamo che lo spostamento è definito come la variazione della posizione della particella, che è uguale alla differenza fra la sua posizione finale e quella iniziale). Utilizzando i versori, il vettore spostamento può essere espresso come $\Delta \mathbf{x} \equiv (x_f - x_i)\mathbf{i}$.

Il componente x della velocità media della particella, \bar{v}_x , è definito come il rapporto tra il suo vettore spostamento, $\Delta \mathbf{x}$, e l'intervallo di tempo Δt :

**Definizione •
di velocità media**

$$\bar{v}_x \equiv \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{(x_f - x_i)\mathbf{i}}{t_f - t_i} \quad [2.1]$$

Da questa definizione vediamo che la velocità media ha le dimensioni di una lunghezza divisa per un tempo, ovvero m/s nelle unità SI e piedi/s nelle unità convenzionali. La velocità media non dipende dal particolare percorso fra P e Q . Ciò è vero per il fatto che la velocità media è proporzionale allo spostamento Δx , che, a sua volta, dipende solo dalle coordinate iniziali e finali della particella. Ne segue pertanto che, se una particella parte da un certo punto e ritorna allo stesso punto attraverso un percorso arbitrario, la sua velocità media è

¹ Si userà la locuzione "particella" o "punto materiale" con lo stesso significato [N.d.T.].

nulla, poiché il suo spostamento lungo una tale traiettoria è nullo. Lo spostamento non dovrebbe essere confuso con la distanza percorsa, in quanto quest'ultima in un moto arbitrario è certamente non nulla. Pertanto, la velocità media non ci fornisce alcun dettaglio circa il moto fra i punti P e Q . (Come valutare la velocità ad un generico istante lo discuteremo nel prossimo paragrafo). Infine, notiamo che la velocità media in una dimensione può essere sia positiva che negativa a seconda del segno del vettore spostamento. (L'intervallo di tempo, Δt , è sempre positivo). Se la coordinata della particella cresce nel tempo (cioè se $x_f > x_i$), allora Δx è positivo e \bar{v}_x è positiva. Ciò corrisponde ad una velocità media nella direzione delle x positive. D'altra parte, se la coordinata decresce nel tempo ($x_f < x_i$), Δx è negativo e quindi \bar{v}_x è negativa. Ciò corrisponde ad una velocità media diretta secondo le x negative.

La velocità media può anche essere interpretata geometricamente. Il segmento fra i punti P e Q in Figura 2.1 forma l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di altezza Δx e base Δt . La pendenza di questo segmento è il rapporto $\Delta x / \Delta t$. Quindi, si vede che la **velocità media della particella durante l'intervallo di tempo da t_i a t_f** è uguale alla pendenza del tratto di retta che **congiunge i punti iniziale e finale del grafico spazio-tempo**. (La parola *pendenza* verrà spesso adoperata con riferimento ai grafici di dati fisici. Indipendentemente dal tipo di dati riportati, essa esprimerà il rapporto fra la variazione della grandezza rappresentata sull'asse verticale e la variazione della grandezza rappresentata sull'asse orizzontale).

Esempio 2.1 Calcolo della velocità media

Una particella in moto lungo l'asse x è posta ad $x_i = 12$ m a $t_i = 1$ s e ad $x_f = 4$ m a $t_f = 3$ s. Trovare lo spostamento e la velocità media in questo intervallo di tempo.

Soluzione Lo spostamento è dato da

$$\Delta x = (x_f - x_i)\mathbf{i} = (4\text{ m} - 12\text{ m})\mathbf{i} = -8\text{ m}$$

La velocità media è

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_f - x_i)\mathbf{i}}{t_f - t_i} = \frac{(4\text{ m} - 12\text{ m})\mathbf{i}}{3\text{ s} - 1\text{ s}} = -4\text{ m/s}$$

Poiché lo spostamento e la velocità media sono negativi in questo intervallo di tempo, concludiamo che la particella si è spostata verso sinistra, verso valori decrescenti della x .

ESERCIZIO 1 Un'atleta pratica il "jogging" lungo una strada rettilinea, con una velocità media di 5.00 m/s per 4.00 min, e poi con una velocità media di 4.00 m/s per 3.00 min. (a) Qual è il suo spostamento totale? (b) Qual è la sua velocità media durante questo tempo?

Risposta (a) 1920 m (b) $\frac{47}{7}$ m/s

2.2 • VELOCITÀ ISTANTANEA

Noi vorremmo essere in grado di definire la velocità di una particella ad un particolare istante di tempo, piuttosto che in un intervallo temporale finito. La velocità di una particella ad un istante arbitrario di tempo, ovvero in un generico punto del grafico spazio-tempo, è detta **velocità istantanea**. Questo concetto è particolarmente importante quando la velocità media in differenti intervalli di tempo non è costante.

Si consideri il moto di una particella fra i due punti P e Q del grafico spazio-tempo in Figura 2.2. Allorquando il punto Q si avvicina sempre di più al punto P , gli intervalli di tempo ($\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$) divengono progressivamente più piccoli. La velocità media per ciascun intervallo di tempo è la pendenza della corrispondente linea tratteggiata in Figura 2.2. Al tendere di Q a P l'inter-

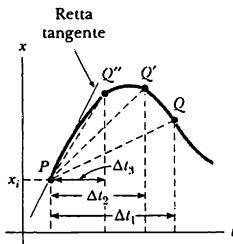


Figura 2.2 Grafico posizione-tempo per una particella in moto lungo l'asse x . Allorquando gli intervalli di tempo considerati a partire da t_i divengono sempre più piccoli, la velocità media per quell'intervallo tende alla pendenza della retta tangente alla curva nel punto P . La velocità istantanea in P è definita come la pendenza della tangente all'istante t_i .

vallo di tempo tende a zero, ma contestualmente la pendenza della linea tratteggiata tende alla pendenza della retta blu tangente alla curva nel punto P . La pendenza della retta tangente alla curva nel punto P dà la velocità istantanea all'istante t_i . In altre parole,

la velocità istantanea, v_x , è uguale al valore limite del rapporto $\Delta x / \Delta t$ quando Δt tende a zero²:

Il vettore velocità istantanea è la derivata del vettore posizione rispetto al tempo

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [2.2]$$

Con la notazione del calcolo, questo limite è chiamato *derivata* di x rispetto a t , e scritto dx/dt :

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad [2.3]$$

La velocità istantanea può essere positiva, negativa o nulla. Quando la pendenza del grafico spazio-tempo è positiva, come nel punto P in Figura 2.3, v è positiva. Nel punto R , v è negativa in quanto la pendenza è negativa. Infine, la velocità istantanea è nulla nel picco Q (punto di inversione), in cui la pendenza è nulla. Da ora in poi, adopereremo generalmente la parola *velocità* per indicare il vettore *velocità istantanea*.

La *rapidità istantanea* di spostamento di una particella è definita come il modulo del vettore velocità istantanea; quindi, per definizione, la *rapidità*³ non può mai essere negativa.

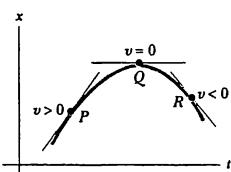


Figura 2.3 Nel grafico posizione-tempo qui mostrato, la velocità è positiva in P , dove la pendenza della tangente è positiva; la velocità è zero in Q dove la pendenza della tangente è zero; la velocità è negativa in R dove la pendenza della tangente è negativa.

² Si noti che il modulo dello spostamento Δx tende a zero quando Δt tende a zero. Tuttavia, quando Δx e Δt diventano sempre più piccoli, il rapporto $\Delta x / \Delta t$ tende ad un valore uguale alla pendenza vera della tangente alla curva x in funzione di t .

³ Col termine "rapidità", in cinematica, intendiamo riferirci al rapporto fra lo spazio percorso da un corpo e il tempo impiegato a percorrerlo. Nel caso del valore istantaneo, o per intervalli Δt piccoli, esso, di fatto, coincide con la definizione data nel testo, ma riteniamo opportuno precisare come il suo valore medio (rapidità media) possa differire significativamente dal modulo della velocità media (o velocità scalare media), basti pensare alla differenza fra la velocità media (scalare o vettoriale) definita su un percorso chiuso di lunghezza finita concluso in un intervallo di tempo Δt e la "rapidità" con la quale è stato effettuato lo stesso percorso. Appare evidente, dalle definizioni date nel testo che, in questo caso, la velocità media sia scalare che vettoriale risulta nulla, mentre la

Coloro che hanno familiarità con il calcolo sapranno che vi sono regole particolari per calcolare le derivate delle funzioni. Queste regole, riportate nell'Appendice B.6, vi consentono di calcolare rapidamente le derivate.

Supponiamo che x sia proporzionale a una certa potenza di t , come per esempio

$$x = At^n$$

dove A ed n sono costanti. (Si tratta di una forma funzionale assai comune). La derivata di x rispetto a t è data da

$$\frac{dx}{dt} = nAt^{n-1}$$

Per esempio, se $x = 5t^3$, vediamo che $dx/dt = 3(5)t^{3-1} = 15t^2$.

Fisica ragionata 1

Consideriamo il seguente moto unidimensionale di un oggetto: (a) una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto, sale fino al punto più alto, e poi ritorna cadendo nella mano del lanciatore. (b) Una macchina da corsa parte da ferma e aumenta la sua velocità fino a 100 m/s. (c) Un navigatore spaziale si muove a velocità costante. Vi sono dei punti nel moto di questi corpi per i quali la velocità media (sull'intero intervallo) e la velocità istantanea (per un istante di tempo all'interno dell'intervallo) sono uguali? Se sì, identificare il(i) punto(i).

Ragionamento (a) La velocità media per la palla è zero – la palla ritorna al punto di partenza alla fine dell'intervallo di tempo. Vi è un punto nel quale la velocità istantanea è zero – alla sommità del moto. (b) La velocità media nel moto della macchina da corsa non può essere calcolata univocamente con l'informazione data, ma deve essere un qualche valore compreso fra 0 e 100 m/s. Infatti, poiché la macchina nei vari istanti dell'intervallo andrà acquistando tutti i valori della velocità istantanea compresi fra 0 e 100 m/s, vi deve essere un qualche istante nel quale la velocità istantanea sia uguale alla velocità media. (c) Poiché la velocità istantanea dell'astronave è costante, la sua velocità istantanea in *ogni* tempo e la sua velocità media per *qualunque* intervallo di tempo sono uguali.

Fisica ragionata 2

Il tachimetro di un'automobile misura il modulo della velocità media o istantanea?

Ragionamento Basandoci sul fatto che le variazioni del modulo della velocità dell'automobile si riflettono nelle variazioni delle indicazioni del tachimetro, potremmo essere tentati di dire che un tachimetro misuri il modulo della velocità istantanea. Tuttavia, sbagliheremmo. La lettura su un tachimetro è correlata alla rotazione delle ruote. Spesso, viene usato come tachimetro un magnete rotante, la

"rapidità" è certamente diversa da zero in quanto fornita dal rapporto fra la lunghezza complessiva del percorso e il tempo impiegato a completarlo. Inoltre, il concetto di rapidità si può attribuire, in generale, alla variazione sia temporale che relativa a qualsiasi altra variabile indipendente, di qualunque grandezza (concentrazione, energia, quantità di una sostanza radioattiva, rendimento di una somma di danaro, ecc.). Nel linguaggio italiano corrente (anche scientifico) si usa prevalentemente il termine "velocità", lasciando al contesto della frase il significato più specifico. Quando si riterrà che il contesto non è sufficiente a evitare equivoci, si farà uso delle locuzioni "velocità", "modulo della velocità" e "rapidità" nel modo qui definito e precisato [N.d.T.].

Fisica ragionata 2 (continua)

cui rotazione dipende da quella delle ruote. Quindi, la lettura è una velocità media su questo intervallo di tempo. Questo intervallo è generalmente molto breve, sicché la velocità media è prossima alla velocità istantanea. Fino a quando le variazioni di velocità sono graduali, questa approssimazione è ottima. Se, tuttavia, l'automobile frena bruscamente, il tachimetro non è capace di registrare la rapida variazione di velocità, e la velocità media misurata nell'intervallo di tempo può risultare molto diversa dalla velocità istantanea alla fine dell'intervallo.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Sotto quale condizione il modulo della velocità media di una particella che si muove in una sola dimensione risulta minore della rapidità media?

Esempio 2.2 Velocità media ed istantanea

Una particella si muove lungo l'asse x . La sua coordinata x varia con il tempo secondo l'espressione $x = -4t + 2t^2$, in cui x è in metri e t in secondi. Il grafico posizione-tempo per questo tipo di moto è mostrato in Figura 2.4. Si noti che la particella inizialmente si muove nella direzione x negativa per il primo secondo, si ferma istantaneamente a $t = 1$ s, e poi ritorna indietro nella direzione x positiva per $t > 1$ s.

(a) Determinare lo spostamento della particella negli intervalli di tempo da $t = 0$ a $t = 1$ s e da $t = 1$ s a $t = 3$ s.

Soluzione Nel primo intervallo di tempo noi possiamo porre $t_i = 0$ e $t_f = 1$ s. Poiché $x = -4t + 2t^2$, otteniamo per il primo spostamento

$$\Delta x_{01} = (x_f - x_i)\mathbf{i} = [-4(1) + 2(1)^2]\mathbf{i} - [-4(0) + 2(0)^2]\mathbf{i} \\ = -2\mathbf{i} \text{ m}$$

Analogamente, nel secondo intervallo di tempo noi possiamo porre $t_i = 1$ s e $t_f = 3$ s. Pertanto, il secondo spostamento in questo intervallo è

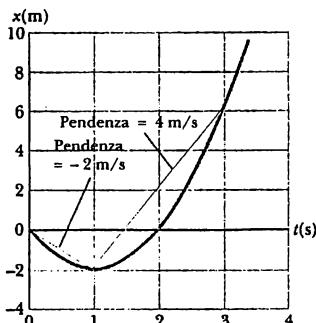


Figura 2.4 (Esempio 2.2) Grafico posizione-tempo per una particella la cui coordinata x varia nel tempo come $x = -4t + 2t^2$.

$$\Delta x_{13} = (x_f - x_i)\mathbf{i} = [-4(3) + 2(3)^2]\mathbf{i} - [-4(1) + 2(1)^2]\mathbf{i} \\ = 8\mathbf{i} \text{ m}$$

Notiamo che questi spostamenti possono essere rilevati direttamente dal grafico posizione-tempo (Fig. 2.4).

(b) Calcolare la velocità media negli intervalli di tempo da $t = 0$ a $t = 1$ s e da $t = 1$ s a $t = 3$ s.

Soluzione Nel primo intervallo di tempo, $\Delta t = t_f - t_i = 1$ s. Pertanto, utilizzando l'Equazione 2.1, e dai risultati in (a) si ottiene

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x_{01}}{\Delta t} = \frac{-2\text{ m}}{1\text{ s}} = -2\text{ m/s}$$

Analogamente, nel secondo intervallo di tempo, $\Delta t = 2$ s; quindi,

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x_{13}}{\Delta t} = \frac{8\text{ m}}{2\text{ s}} = 4\text{ m/s}$$

Questi valori (coefficienti di i) corrispondono alle pendenze delle linee che uniscono questi punti nella Figura 2.4.

(c) Trovare la velocità istantanea della particella a $t = 2.5$ s.

Soluzione Possiamo trovare la velocità istantanea per qualunque istante di tempo t calcolando la derivata prima di x rispetto a t :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 2t^2) = -4 + 4t$$

Quindi, per $t = 2.5$ s, troviamo che $v = -4 + 4(2.5) = 6$ m/s.

Possiamo pure ottenere questo risultato misurando la pendenza del grafico posizione-tempo per $t = 2.5$ s. (Dovresti mostrare che la velocità è -4 i m/s per $t = 0$ e zero per $t = 1$ s). Riesci a vedere una qualche simmetria nel moto? Per esempio, accade mai che il modulo della velocità si ripeta?

Esempio 2.3 Il processo di limite

La posizione di una particella che si muove lungo l'asse x varia nel tempo secondo l'espressione $x = 3t^2$, dove x è in metri, 3 è in metri su secondo al quadrato, e t è in secondi. Trovare la velocità in ogni istante.

Soluzione Il grafico posizione-tempo per questo moto è mostrato in Figura 2.5. Possiamo calcolare la velocità ad un istante arbitrario t usando la definizione di velocità istantanea. Se la coordinata iniziale della particella al tempo t è $x_i = 3t^2$, la coordinata ad un tempo successivo $t + \Delta t$ è

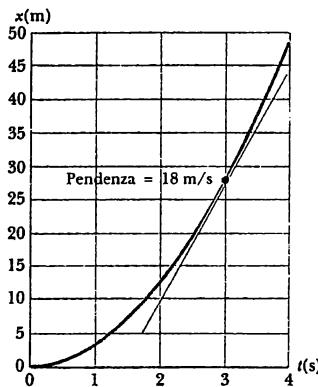


Figura 2.5 (Esempio 2.3) Grafico posizione-tempo per una particella la cui coordinata x varia nel tempo come $x = 3t^2$. Si noti che la velocità istantanea a $t = 3.0$ s è uguale alla pendenza della retta tangente alla curva in questo punto.

$$\begin{aligned}x_f &= 3(t + \Delta t)^2 = 3[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2] \\&= 3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2\end{aligned}$$

Quindi, lo spostamento nell'intervento di tempo Δt è

$$\begin{aligned}\Delta x &= (x_f - x_i)\mathbf{i} = [3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 3t^2]\mathbf{i} \\&= [6t\Delta t + 3(\Delta t)^2]\mathbf{i}\end{aligned}$$

La velocità media in questo intervallo di tempo è

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = (6t + 3\Delta t)\mathbf{i}$$

Per trovare la velocità istantanea, consideriamo il limite di questa espressione quando Δt tende a zero. Nel fare questo, vediamo che il termine $3\Delta t$ tende a zero, per cui

$$\bar{v}_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 6t\mathbf{i} \text{ m/s}$$

Si noti che questa espressione ci fornisce la velocità ad un generico tempo t . Essa ci dice che v_x aumenta linearmente con il tempo. È allora immediato trovare la velocità ad un qualche istante specifico dall'espressione $v_x = 6t\mathbf{i}$. Per esempio, a $t = 3.0$ s, la velocità è $v_x = 6(3)\mathbf{i} = 18\mathbf{i}$ m/s. Ancora una volta ciò può essere verificato dalla pendenza del grafico a $t = 3.0$ s.

Il processo di limite può essere anche esaminato numericamente. Per esempio, possiamo calcolare lo spostamento e la velocità media per vari intervalli di tempo cominciando da $t = 3$ s, adoperando le espressioni per Δx e \bar{v}_x . I risultati di tali calcoli sono dati nella Tabella 2.1. Si noti che quando gli intervalli di tempo diventano progressivamente più piccoli, la velocità media tende sempre più al valore della velocità istantanea a $t = 3$ s, e cioè 18 m/s.

TABELLA 2.1 Spostamento e velocità media per vari intervalli di tempo per la funzione $x = 3t^2$ (gli intervalli cominciano da $t = 3$ s)

Δt (s)	Δx (m)	$\Delta x/\Delta t$ (m/s)
1.00	21.	21
0.50	9.75	19.5
0.25	4.69	18.8
0.10	1.83	18.3
0.05	0.9075	18.15
0.01	0.1803	18.03
0.001	0.018003	18.003

2.3 • ACCELERAZIONE

Quando la velocità di una particella varia nel tempo, si dice che la particella è accelerata. Per esempio, la velocità di un'automobile aumenta quando voi "date gas". L'automobile rallenterà quando si azionano i freni, e cambia direzione quando si gira il volante. Abbiamo però bisogno di una definizione di accelerazione più precisa di questa.

Supponiamo che una particella in moto lungo l'asse x abbia velocità v_x all'istante t_i e velocità v_{xf} all'istante t_f .

L'**accelerazione media** di una particella nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è definita come il rapporto $\Delta v_x / \Delta t$, in cui $\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi}$ è la variazione di velocità nell'intervallo di tempo:

**Definizione •
di accelerazione media**

$$\bar{a}_x \equiv \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad [2.4]$$

L'accelerazione è una grandezza vettoriale avente le dimensioni di una lunghezza divisa per un tempo al quadrato, ovvero L/T^2 . Alcune unità usualmente adoperate per l'accelerazione sono i metri al secondo quadrato (m/s^2) e i piedi al secondo quadrato (ft/s^2).

In alcune situazioni, il valore dell'accelerazione media può essere diverso in diversi intervalli di tempo. È pertanto utile definire l'**accelerazione istantanea** come limite dell'accelerazione media quando Δt tende a zero. Questo concetto è analogo alla definizione di velocità istantanea discusso nel paragrafo precedente. Se consideriamo il limite del rapporto $\Delta v_x / \Delta t$ quando Δt tende a zero, otteniamo l'**accelerazione istantanea**:

L'accelerazione istantanea è la derivata della velocità rispetto al tempo

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad [2.5]$$

Cioè, l'**accelerazione istantanea è uguale alla derivata della velocità rispetto al tempo**, che per definizione è la pendenza del grafico velocità-tempo. Si può interpretare la derivata della velocità rispetto al tempo come la rapidità di variazione nel tempo della velocità. Ancora una volta, andrebbe notato che se a_x è positiva, l'accelerazione è diretta secondo le x positive, mentre una a_x negativa implica una accelerazione nella direzione delle x negative. Da ora in poi useremo il termine **accelerazione** per indicare l'accelerazione istantanea.

Poiché $v_x = dx/dt$, l'accelerazione può anche essere scritta

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad [2.6]$$

Cioè, l'accelerazione è uguale alla derivata seconda della posizione rispetto al tempo.

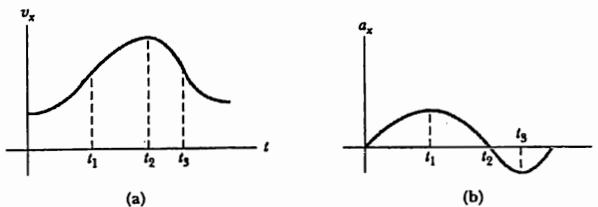


Figura 2.6 L'accelerazione istantanea può essere ottenuta dal grafico (a) velocità-tempo. A ciascun istante, l'accelerazione nel grafico (b) di a_x in funzione di t è uguale alla pendenza della tangente alla curva v in funzione di t .

La Figura 2.6 mostra come la curva accelerazione-tempo possa essere dedotta dalla curva velocità-tempo. In queste rappresentazioni, l'accelerazione ad un generico istante è semplicemente la pendenza del grafico velocità-tempo a quell'istante. Valori positivi dell'accelerazione corrispondono a quei punti in cui la velocità cresce nella direzione delle x positive. L'accelerazione raggiunge un massimo all'istante t_1 , quando la pendenza del grafico velocità-tempo è massima. L'accelerazione si riduce a zero all'istante t_2 quando la velocità è massima (cioè quando la velocità è momentaneamente costante e la pendenza della curva v in funzione di t è nulla). Infine, l'accelerazione è negativa quando la velocità nella direzione delle x positive decresce nel tempo.

Come esempio del calcolo dell'accelerazione, si consideri l'auto raffigurata in Figura 2.7. In questo caso la velocità dell'auto si è modificata da un valore iniziale di 30 i m/s ad un valore finale di 15 i m/s in un intervallo di tempo di 2.0 s. L'accelerazione media durante questo intervallo di tempo è

$$\bar{a}_x = \frac{15 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s}} = -7.5 \text{ m/s}^2$$

Il segno meno in questo esempio indica che il vettore accelerazione è nella direzione x negativa (a sinistra). Nel caso di moto rettilineo, la direzione della velocità di un oggetto e la direzione della sua accelerazione sono correlate come segue. **Quando la velocità dell'oggetto e l'accelerazione sono nello stesso verso, l'oggetto aumenta il modulo della velocità.** D'altro canto, **quando la velocità e l'accelerazione dell'oggetto sono in versi opposti, il modulo della velocità dell'oggetto diminuisce nel tempo.**

- *L'accelerazione può indicare un aumento di velocità, una frenata, oppure un cambiamento di direzione*

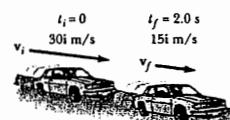


Figura 2.7 La velocità dell'auto diminuisce da 30 i m/s a 15 i m/s in un intervallo di tempo di 2.00 s.

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Se una macchina viaggia verso est, è possibile che la sua accelerazione sia diretta verso ovest? Spiegare.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

È possibile che una particella soggetta a una accelerazione costante si ferma e rimanga ferma?

Esempio 2.4 Accelerazione media ed istantanea

La velocità di una particella in moto lungo l'asse x varia nel tempo secondo l'espressione $v_x = (40 - 5t^2)\text{i m/s}$, dove t è in s.

(a) Trovare l'accelerazione media nell'intervallo di tempo da $t = 0$ a $t = 2.0$ s.

Soluzione Il grafico velocità-tempo per questa funzione è dato in Figura 2.8. Le velocità a $t_i = 0$ e $t_f = 2.0$ s si determinano sostituendo questi valori di t nella espressione data per la velocità:

$$v_{xi} = (40 - 5t_i^2)\text{i m/s} = [40 - 5(0)^2]\text{i m/s} = 40\text{i m/s}$$

$$v_{xf} = (40 - 5t_f^2)\text{i m/s} = [40 - 5(2)^2]\text{i m/s} = 20\text{i m/s}$$

Pertanto, l'accelerazione media nell'intervallo di tempo, $\Delta t = t_f - t_i = 2$ è data da

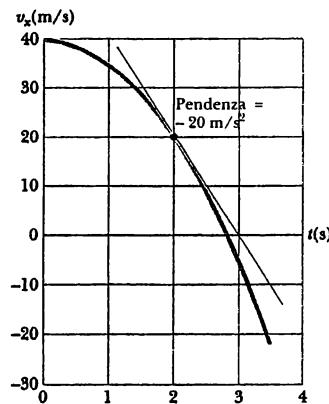


Figura 2.8 (Esempio 2.4) Grafico velocità-tempo per una particella in moto lungo l'asse x secondo la relazione $v_x = (40 - 5t^2)$ m/s. Si noti che l'accelerazione a $t = 2.0$ s è uguale alla pendenza della tangente a quell'istante.

$$\bar{a}_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{(20 - 40)\text{i m/s}}{(2 - 0)\text{s}} = -10\text{i m/s}^2$$

Il segno meno è consistente con il fatto che la pendenza della retta congiungente i punti iniziale e finale sul grafico velocità-tempo è negativa.

(b) Determinare l'accelerazione a $t = 2.0$ s.

Soluzione La velocità al tempo t è data da $v_{xi} = (40 - 5t^2)\text{i m/s}$, e la velocità al tempo $t + \Delta t$ è data da

$$v_{xf} = 40\text{i} - 5(t + \Delta t)^2\text{i} = [40 - 5t^2 - 10t\Delta t - 5(\Delta t)^2]\text{i}$$

Quindi, la variazione di velocità nell'intervallo di tempo Δt è

$$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} = [-10t\Delta t - 5(\Delta t)^2]\text{i m/s}$$

Dividendo questa espressione per Δt e considerando il limite del risultato per Δt che tende a zero, otteniamo l'accelerazione ad un *qualsiasi* istante t :

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-10t - 5\Delta t)\text{i} = -10t\text{i m/s}^2$$

Pertanto, a $t = 2$ s si trova che

$$a_x = (-10)(2)\text{i m/s}^2 = -20\text{i m/s}^2$$

Si può ottenere questo risultato anche misurando la pendenza del grafico velocità-tempo a $t = 2.0$ s. Si noti come in questo esempio l'accelerazione non sia costante. Casi che implicano accelerazioni costanti verranno trattati nel Paragrafo 2.5.

ESERCIZIO 2 Quando una pallina da golf viene colpita dalla mazza acquista una velocità di 31.0 m/s. Se la pallina rimane a contatto della mazza per 1.17 ms, qual è il modulo dell'accelerazione media della pallina? Risposta 26 500 m/s²

2.4 • DIAGRAMMI DEL MOTO

I concetti di velocità e accelerazione vengono confusi spesso tra loro, pur essendo in realtà due grandezze del tutto diverse. È istruttivo utilizzare i diagrammi del moto per descrivere i vettori velocità e accelerazione mentre un oggetto è in movimento. Per non confondere queste due grandezze vettoriali, in Figura 2.9 si utilizza il rosso per i vettori velocità, e il viola per i vettori accelerazione. I vettori sono disegnati a istanti di tempo diversi durante il moto dell'oggetto.

Una fotografia stroboscopica del moto di un oggetto mostra alcune immagine-

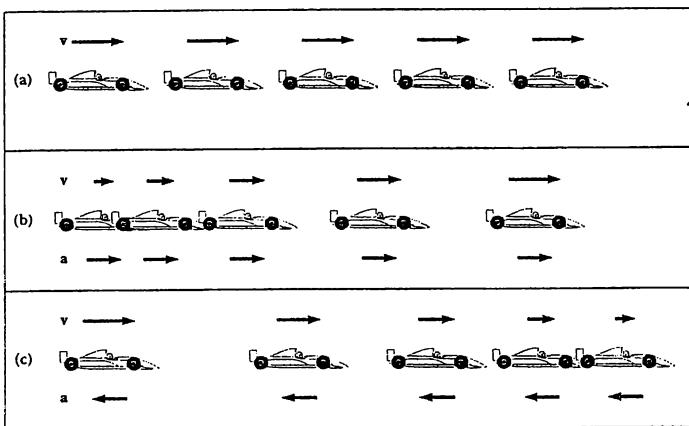


Figura 2.9 (a) Diagramma del moto per una macchina che si muove con velocità costante (accelerazione nulla). (b) Diagramma del moto per una macchina la cui accelerazione costante è nel verso della sua velocità. Il vettore velocità in ciascun istante è indicato da una freccia rossa e il vettore accelerazione costante da una freccia viola. (c) Diagramma del moto per una macchina la cui accelerazione costante è nel verso *opposto* alla velocità in ogni istante.

gini dell'oggetto, ciascuna presa quando si accende il lampo della luce stroboscopica. La Figura 2.9 rappresenta tre insiemi di foto stroboscopiche di una macchina che si muove da sinistra verso destra lungo una strada rettilinea. Gli intervalli di tempo fra i flash dello stroboscopio sono uguali in tutti i diagrammi. Descriviamo il moto della macchina in ciascun diagramma.

Nella Figura 2.9a, le immagini della macchina sono ugualmente spaziate; la macchina copre la stessa distanza in ciascun intervallo di tempo. Quindi, la macchina si muove con una *velocità positiva costante* e ha accelerazione nulla.

Nella Figura 2.9b, le immagini della macchina si distanziano progressivamente al passare del tempo. In questo caso, il vettore velocità cresce nel tempo poiché lo spostamento della macchina fra posizioni adiacenti aumenta col tempo. Quindi, la macchina si muove con una *velocità positiva* e una *accelerazione positiva*.

Nella Figura 2.9c, la macchina rallenta muovendosi verso destra poiché il suo spostamento fra posizioni adiacenti diminuisce al passare del tempo. In questo caso, la macchina si muove inizialmente verso destra con una accelerazione negativa costante. Il vettore velocità diminuisce nel tempo per raggiungere lo zero. (Questo moto lo si osserva in una macchina che s'inchioda a terra dopo aver schiacciato i freni). Da questo diagramma si vede che i vettori accelerazione e velocità *non* sono nello stesso verso.

2.5 • MOTO UNIDIMENSIONALE CON ACCELERAZIONE COSTANTE

Se l'accelerazione di una particella varia nel tempo, il moto può essere complicato e difficile da analizzare. Un tipo molto comune e semplice di moto unidimensionale si ha quando l'accelerazione è costante, ovvero uniforme. In questo caso l'accelerazione media è uguale all'accelerazione istantanea. Conseguentemente, la velocità cresce o decresce con la stessa rapidità durante il moto.

Se sostituiamo \bar{a}_x con a_x nella Equazione 2.4, troviamo che

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

Poiché stiamo trattando un moto unidimensionale, eviteremo la notazione in grassetto per i vettori e useremo un segno meno quando il vettore è nella direzione delle x negative. Per convenienza, sia $t_i = 0$ e t_f sia un istante di tempo arbitrario t . Inoltre, sia $v_{xi} = v_{x0}$ (la velocità iniziale a $t=0$) e $v_{xf} = v_x$ (la velocità ad un tempo arbitrario t). Con questa notazione possiamo esprimere l'accelerazione

$$a_x = \frac{v_x - v_{x0}}{t}$$

oppure

Velocità in funzione del tempo

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad (\text{per } a_x \text{ costante}) \quad [2.7]$$

Questa espressione ci permette di prevedere la velocità ad *ogni* istante t se la velocità iniziale, l'accelerazione ed il tempo trascorso sono noti. Un grafico della posizione in funzione del tempo per questo moto è mostrato in Figura 2.10a. Il grafico velocità-tempo mostrato in Figura 2.10b è una retta la cui pendenza è l'accelerazione, a_x , consistentemente col fatto che $a_x = dv_x/dt$ è una costante. Da questo grafico e dalla Equazione 2.7, vediamo che la velocità ad un istante arbitrario t è la somma della velocità iniziale v_{x0} e della variazione di velocità, $a_x t$. Il grafico dell'accelerazione in funzione del tempo (Fig. 2.10c) è una retta con pendenza nulla, poiché l'accelerazione è costante. Si noti che se l'accelerazione fosse negativa (una particella che rallenta) la pendenza di Figura 2.10b sarebbe negativa.

Poiché la velocità varia linearmente con il tempo secondo l'Equazione 2.7, possiamo esprimere la velocità media in un intervallo di tempo arbitrario come la media aritmetica della velocità iniziale v_{x0} e della velocità finale v_x .

$$\bar{v}_x = \frac{v_{x0} + v_x}{2} \quad (\text{per } a_x \text{ costante}) \quad [2.8]$$

Si noti che questa espressione è valida solamente quando l'accelerazione è costante, cioè quando la velocità varia linearmente con il tempo.

Possiamo ora adoperare questo risultato e le Equazioni 2.1 e 2.8 per ottenere lo spostamento in funzione del tempo. Ancora, scegliamo $t_i = 0$, istante in cui la posizione iniziale è $x_i = x_0$. Questo dà

$$\begin{aligned} \Delta x &= \bar{v}_x \Delta t = \left(\frac{v_{x0} + v_x}{2} \right) t \\ x - x_0 &= \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) t \quad (\text{per } a_x \text{ costante}) \end{aligned} \quad [2.9]$$

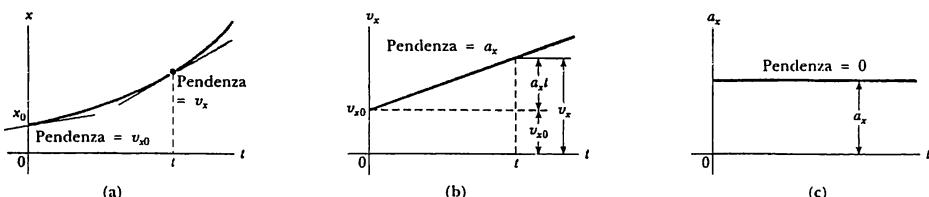


Figura 2.10 Una particella si muove lungo l'asse x con accelerazione costante a_x ; (a) grafico posizione-tempo, (b) grafico velocità-tempo, (c) grafico accelerazione-tempo.

Possiamo ottenere un'altra utile espressione per lo spostamento sostituendo l'Equazione 2.7 nell'Equazione 2.9:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x t) t \\ \Rightarrow x - x_0 &= v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (\text{per } a_x \text{ costante}) \end{aligned} \quad [2.10]$$

La validità di questa espressione può essere verificata differenziandola rispetto al tempo, per ottenere

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2) = v_{x0} + a_x t$$

Infine, possiamo ottenere un'espressione che non contiene il tempo sostituendo il valore di t dall'Equazione 2.7 nell'Equazione 2.9. Ciò dà

$$x - x_0 = \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) \left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x} \right) = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2a_x}$$

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (\text{per } a_x \text{ costante}) \quad [2.11]$$

Un grafico posizione-tempo in condizioni di accelerazione costante, assumendo a_x positiva, è mostrato in Figura 2.10a. Si noti che la curva rappresentante l'Equazione 2.10 è una parabola. La pendenza della tangente a questa curva a $t = 0$ è uguale alla velocità iniziale, v_{x0} , e la pendenza della tangente ad un tempo t arbitrario è uguale alla velocità a quell'istante.

Se il moto avviene con accelerazione nulla, allora si vede che

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_{x0} \\ x - x_0 = v_x t \end{array} \right\} \quad \text{quando } a_x = 0$$

Cioè, quando l'accelerazione è zero, la velocità è costante e la posizione varia linearmente con il tempo.

Le Equazioni da 2.7 a 2.11 possono essere adoperate per risolvere qualsiasi problema di moto in una dimensione con accelerazione costante. Si ricordi che queste relazioni sono state derivate dalla definizione di velocità ed accelerazione, unitamente ad alcune semplici manipolazioni algebriche e sotto la condizione che l'accelerazione sia costante. È spesso conveniente scegliere la posizione iniziale della particella come origine del moto, cosicché $x_0 = 0$ a $t = 0$. In tal caso, lo spostamento è semplicemente x .

Per convenienza, nella Tabella 2.2 sono elencate le quattro equazioni cinematiche di uso più frequente. La scelta di quali equazioni cinematiche adoperare in una data situazione dipende da ciò che è noto all'inizio. A volte è necessario adoperare due di queste equazioni per determinare due incognite come, ad esempio, la posizione e la velocità, ad un certo istante. Per esempio, supponiamo che siano date la velocità iniziale v_{x0} e l'accelerazione a_x . Si può allora determinare (1) la velocità dopo un tempo t usando $v_x = v_{x0} + a_x t$, e (2) lo spostamento dopo un tempo t , usando $x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$. Dovreste ricordare che le grandezze che variano durante il moto sono la velocità, la posizione ed il tempo.

Si acquisterà una notevole pratica nell'uso di queste equazioni risolvendo un certo numero di esercizi e problemi. Spesso scoprirete che per ottenere una soluzione si possono seguire più metodi.

- Spostamento in funzione del tempo

- Velocità in funzione dello spostamento

TABELLA 2.2 Equazioni cinematiche per il moto rettilineo con accelerazione costante

Equazione	Informazione fornita dalla equazione
$v_x = v_{x0} + a_x t$	Velocità in funzione del tempo
$x - x_0 = \frac{1}{2} (v_x + v_{x0}) t$	Spostamento in funzione della velocità e del tempo
$x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	Spostamento in funzione del tempo
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2 a_x (x - x_0)$	Velocità in funzione dello spostamento

Nota: il moto avviene lungo l'asse x . Per $t = 0$, la posizione della particella è x_0 e la sua velocità è v_{x0} .

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

• Il moto accelerato

Si raccomanda la seguente procedura per risolvere problemi di moto accelerato.

1. Assicurarsi che tutte le unità del problema siano coerenti. Vale a dire: se le distanze sono misurate in metri, assicurarsi che le velocità abbiano unità in metri al secondo e le accelerazioni abbiano unità in metri al secondo per secondo.
2. Scegliere un sistema di coordinate.
3. Elencare tutte le grandezze date nel problema e, separatamente, le incognite.
4. Riflettere su ciò che fisicamente ha luogo nel problema, per poi selezionare dall'elenco delle equazioni cinematiche quella o quelle necessarie a determinare le incognite.
5. Costruire un appropriato diagramma del moto e controllare la corrispondenza tra le risposte date e il diagramma.

Esempio 2.5 Attenzione ai limiti di velocità

Un'auto, che viaggia a velocità costante di 30.0 m/s ($\approx 67 \text{ mi/h}$), passa davanti a un'auto della polizia, nasconde dietro un cartello per affissioni. Un secondo dopo che l'auto è passata di fronte al cartello, l'auto della polizia inizia un inseguimento, con una accelerazione di 3.00 m/s^2 . Dopo quanto tempo la polizia raggiunge l'auto?

Ragionamento Per risolvere il problema algebricamente, dobbiamo scrivere le posizioni in funzione del tempo di ciascun veicolo. Utilizziamo come origine la posizione del cartello e poniamo $t = 0$ il tempo a cui inizia a muoversi l'auto della polizia. A quell'istante l'auto ha già percorso un tratto di 30.0 m , considerato che essa viaggia con una velocità di 30.0 m/s , e quindi la sua posizione è $x_0 = 30.0 \text{ m}$.

Soluzione Poiché l'auto si muove a velocità costante, la sua accelerazione è nulla. Utilizzando l'Equazione

2.10 si ha

$$x_A = 30.0 \text{ m} + (30.0 \text{ m/s}) t$$

Si osservi che per $t = 0$, questa espressione fornisce la corretta posizione dell'auto, $x_A = x_0 = 30.0 \text{ m}$.

Analogamente, per l'auto della polizia, che parte dall'origine al tempo $t = 0$, si ha $x_0 = 0$, $v_{x0} = 0$, $a_x = 3.00 \text{ m/s}^2$. La posizione, in funzione del tempo, dell'auto della polizia è data da

$$x_P = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} (3.00 \text{ m/s}^2) t^2$$

La polizia raggiunge l'auto inseguita all'istante corrispondente a $x_P = x_A$, cioè

$$\frac{1}{2} (3.00 \text{ m/s}^2) t^2 = 30.0 \text{ m} + (30.0 \text{ m/s}) t$$

Tale relazione porta all'equazione quadratica:

$$1.50 t^2 - 30.0 t - 30.0 = 0$$

la cui soluzione positiva è $t = 21.0$ s. Si osservi che in questo intervallo di tempo, l'auto della polizia percorre una distanza di circa 660 m.

ESERCIZIO 3 Questo problema può essere risolto anche graficamente. Nello stesso grafico, si riporti la posizione, in funzione del tempo, di *ciascun veicolo*, e dall'intersezione delle due curve si determini il tempo al quale l'auto della polizia raggiunge l'auto che viaggia

ad alta velocità.

ESERCIZIO 4 Un disco da hockey scivola su un lago ghiacciato per fermarsi dopo aver percorso 200 m. Il modulo della sua velocità iniziale era 3.00 m/s. (a) Qual è stata la sua accelerazione se si assume che sia rimasta costante? (b) Quanto è durato il moto? (c) Qual era la sua velocità dopo aver percorso i primi 150 m?
Risposta (a) -2.25×10^{-2} m/s² (b) 133 s (c) 1.50 m/s.

2.6 • CORPI IN CADUTA LIBERA

È un fatto ben noto che tutti gli oggetti, se abbandonati, cadono verso la terra con un'accelerazione pressoché costante. C'è una storia leggendaria che racconta come Galileo Galilei abbia per primo scoperto questo fatto osservando due pesi diversi, abbandonati simultaneamente dalla torre pendente di Pisa, raggiungere il suolo approssimativamente nello stesso tempo. Sebbene vi siano dei dubbi che questo particolare esperimento sia stato realizzato, è un fatto bene assodato che Galileo abbia effettuato molti esperimenti sistematici su oggetti in movimento lungo dei piani inclinati. Per mezzo di misure accurate di distanze e di intervalli di tempo, egli fu in grado di mostrare che lo spostamento di un oggetto che parte dalla quiete è proporzionale al quadrato del tempo durante il quale l'oggetto è in movimento. Questa osservazione è consistente con una delle equazioni cinematiche che abbiamo derivato per il moto con accelerazione costante (Equazione 2.10). I risultati cui Galileo pervenne nella scienza della meccanica spianarono la strada a Newton per il suo sviluppo delle leggi del moto.



Galileo Galilei (1564-1642).



Potreste pensare di voler effettuare il seguente esperimento. Lasciate cadere simultaneamente dalla stessa altezza una moneta ed un foglio di carta dopo averlo appallottolato. In assenza di resistenza dell'aria entrambi seguiranno lo stesso moto e colpiranno il pavimento allo stesso tempo. In un esperimento reale (non ideale), la resistenza dell'aria non può essere trascurata. Nel caso ideale, in cui si trascuri la resistenza dell'aria, un tale moto si indica come *caduta libera*. Se questo stesso esperimento fosse condotto in condizioni di un buon vuoto, in cui l'attrito dell'aria fosse veramente trascurabile, la carta e la moneta dovrebbero cadere con la stessa accelerazione indipendentemente dalla forma e dal peso della carta. Questo fatto è illustrato in modo convincente a pagina 29, nella fotografia della mela e della piuma che cadono nel vuoto. Il 2 agosto 1971 un esperimento del genere fu effettuato sulla Luna dall'astronauta David Scott. Egli lasciò cadere simultaneamente un martello da geologo e una piuma di falco e questi raggiunsero la superficie lunare contemporaneamente. Questa dimostrazione avrebbe certamente fatto gioire Galileo!

Indicheremo l'accelerazione di gravità col simbolo g . Il modulo di g decrese all'aumentare dell'altitudine. Inoltre, si hanno piccole variazioni di g con la latitudine. Il vettore g è diretto verso il basso, verso il centro della Terra. Alla superficie della Terra, il modulo di g vale approssimativamente 9.80 m/s^2 o 980 cm/s^2 o 32 ft/s^2 . A meno che non venga stabilito diversamente, useremo questo valore di g nell'effettuare i calcoli.

Quando usiamo l'espressione *oggetto in caduta libera*, non ci riferiamo necessariamente ad un oggetto abbandonato dallo stato di quiete.

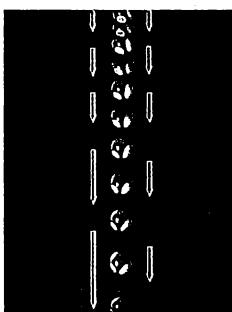


Figura 2.11 Foto "multi-flash" di una palla da biliardo in caduta. Mentre la palla cade, lo spazio tra le immagini successive aumenta, indicando che la palla accelera nel cadere. Il diagramma del moto mostra che la velocità della palla (frecce rosse) aumenta nel tempo mentre la sua accelerazione (frecce viola) rimane costante.

(© Richard Megna 1990, Fundamental Photographs)

Un oggetto in caduta libera è un qualsiasi oggetto che si muove liberamente sotto l'azione della gravità, *indipendentemente* dal suo moto iniziale. Oggetti lanciati verso l'alto o verso il basso o quelli abbandonati dalla quiete sono tutti in caduta libera una volta che siano stati lasciati liberi!

Inoltre, è importante ricordare che qualsiasi oggetto in caduta libera è sottoposto ad un'accelerazione diretta verso il basso. Ciò vale indipendentemente dal moto iniziale dell'oggetto (Fig. 2.11). Un oggetto lanciato verso l'alto (o verso il basso) subirà la stessa accelerazione di un oggetto lasciato cadere da fermo. Una volta che sono in caduta libera, tutti gli oggetti avranno una stessa accelerazione diretta verso il basso, pari all'accelerazione di gravità.

Se trascuriamo la resistenza dell'aria e supponiamo che l'accelerazione di gravità non cambi con l'altitudine, possiamo considerare il moto di un corpo in caduta libera come equivalente ad un moto unidimensionale con accelerazione costante. Pertanto si possono applicare le nostre equazioni cinematiche nel caso di accelerazione costante (Paragrafo 2.5). L'unica modifica che dobbiamo apportare per adattare queste equazioni ai corpi in caduta libera consiste nel notare che il moto è in direzione verticale (direzione y) piuttosto che orizzontale (direzione x), e che l'accelerazione è verso il basso, con un modulo di 9.80 m/s^2 . Quindi, per un corpo in caduta libera assumiamo sempre $a_y = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$, dove il segno meno significa che l'accelerazione del corpo è verso il basso.

Fisica ragionata 3

Un paracadutista salta da un elicottero. Alcuni secondi dopo, un altro paracadutista salta fuori in modo che ambedue cadono lungo la stessa verticale. Trascurando la resistenza dell'aria, i paracadutisti cadono con la stessa accelerazione. La distanza verticale fra di essi rimane la stessa? La differenza fra le loro velocità rimane la stessa? Se essi fossero collegati tramite una lunga corda elastica, la tensione della fune diventerebbe maggiore, minore o resterebbe la stessa?

Ragionamento In ogni istante di tempo, le velocità dei saltatori sono totalmente diverse, poiché uno di essi è in vantaggio. In un intervallo di tempo dopo questo istante, tuttavia, ciascun saltatore aumenta la propria velocità della stessa quantità, poiché essi hanno la stessa accelerazione. Quindi, la differenza di velocità rimane invariata. Il primo saltatore si muoverà sempre con una velocità maggiore di quella del secondo, per cui, in un dato intervallo di tempo, il primo saltatore percorrerà una distanza maggiore del secondo. Così, la distanza di separazione fra i due aumenterà. Per conseguenza, una volta che la distanza fra i paracadutisti raggiunge il valore della lunghezza a riposo della corda elastica, la tensione nella fune aumenterà con l'aumentare della distanza fra i saltatori. Naturalmente, la corda elastica tirerà verso il basso il secondo saltatore e verso l'alto il primo, determinando una forza in più oltre la gravità che influenzerà il loro moto. Se la corda elastica è abbastanza robusta, accadrà che la distanza di separazione fra i paracadutisti diminuisce fintantoché la corda li tira l'un verso l'altro.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Un bambino lancia una palla verso l'alto con una certa velocità iniziale. Un altro bambino lascia cadere un giocattolo nello stesso istante. Confrontare le accelerazioni dei due oggetti mentre si trovano in aria.

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Una palla viene lanciata in alto. Mentre la palla si trova in aria, (a) cosa accade della sua velocità? (b) La sua accelerazione aumenta, diminuisce o rimane costante?

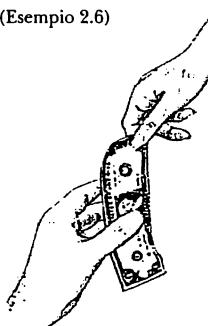
Esempio 2.6 Prova a catturare un dollaro

Emily sfida David a catturare un biglietto da un dollaro nel modo seguente. Essa tiene verticalmente il biglietto, come in Figura 2.12, col centro del biglietto fra il pollice e l'indice di David. David dovrebbe catturare il biglietto, dopo che Emily lo lascia libero, senza muovere la mano verso il basso. Ci vuoi scommettere?

Ragionamento Piazza la tua scommessa su Emily. Esiste un tempo di ritardo fra l'istante in cui Emily abbandona il biglietto da un dollaro e l'istante in cui David reagisce e stringe le sue dita. Il tempo di reazione per la maggior parte delle persone è almeno di circa 0.2 s. Poiché il biglietto è in caduta libera ed è sottoposto a una accelerazione diretta verso il basso di 9.80 m/s^2 , in 0.2 s esso cade di una distanza pari a $\frac{1}{2}gt^2 \approx 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$. Questa distanza è circa il doppio della distanza fra il centro del biglietto da un dollaro e il lato superiore

($\approx 8 \text{ cm}$). Quindi, David non avrà successo. Puoi provare ciò con uno dei tuoi amici.

Figura 2.12 (Esempio 2.6)



Esempio 2.7 Un buon lancio per un principiante!

Una pietra è lanciata dalla cima di un edificio con una velocità iniziale di 20.0 m/s verso l'alto. L'edificio è alto 50.0 m e la pietra sfiora il bordo dell'edificio quando ritorna giù come mostrato dalla Figura 2.13. Determinare (a) il tempo impiegato dalla pietra a raggiungere la sua altezza massima, (b) l'altezza massima, (c) il tempo impiegato dalla pietra per ritornare al livello del lanciatore, (d) la velocità della pietra in questo istante ed (e) la velocità e la posizione della pietra per $t = 5.00$ s.

Soluzione (a) Per trovare il tempo necessario a raggiungere la massima altezza usiamo l'Equazione 2.7, $v_y = v_{y0} + a_y t$, notando che $v_y = 0$ alla massima altezza:

$$20.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{20.0 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 2.04 \text{ s}$$

(b) Questo valore del tempo può essere sostituito nell'Equazione 2.10, $y = v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$, per dare l'altezza massima misurata dalla posizione del lanciatore:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= (20.0 \text{ m/s})(2.04 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(2.04 \text{ s})^2 \\ &= 20.4 \text{ m} \end{aligned}$$

(c) Quando la pietra ritorna all'altezza del lanciatore, la coordinata y è zero. Dall'espressione $y = v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ (Equazione 2.10), con $y = 0$, otteniamo:

$$20.0t - 4.90t^2 = 0$$

Questa è un'espressione quadratica ed ha due soluzioni per t . L'equazione può essere fattorizzata per dare

$$t(20.0 - 4.90t) = 0$$

Una soluzione è $t = 0$, che corrisponde al tempo in cui la pietra inizia il moto. L'altra soluzione è $t = 4.08$ s, che è la soluzione che cerchiamo.

(d) Il valore di t trovato in (c) può essere sostituito in $v_y = v_{y0} + a_y t$ (Eq. 2.7) per fornire

$$v_y = 20.0 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(4.08 \text{ s}) = -20.0 \text{ m/s}$$

Si osservi che la velocità della pietra quando ritorna alla quota di partenza ha lo stesso modulo ma verso opposto alla velocità iniziale. Ciò indica che il moto è simmetrico.

(e) Da $v_y = v_{y0} + a_y t$ (Eq. 2.7), la velocità dopo 5.00 s è

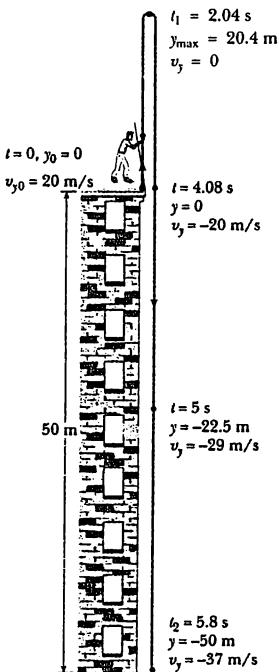


Figura 2.13 (Esempio 2.7) La posizione e la velocità in funzione del tempo per una particella in caduta libera lanciata inizialmente verso l'alto con una velocità $v_{y0} = 20 \text{ m/s}$. (Il disegno non è in scala!)

$$v_y = 20 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s}) = -29 \text{ m/s}$$

Possiamo usare $y = v_{y0}t - \frac{1}{2}a_y t^2$ (Eq. 2.10) per trovare la posizione della particella dopo 5.00 s:

$$\begin{aligned} y &= (20.0 \text{ m/s})(5.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s})^2 \\ &= -22.5 \text{ m} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5 Trovare (a) la velocità della pietra nell'istante in cui tocca terra e (b) il tempo totale durante il quale la pietra sta in aria.

Risposta (a) -37.1 m/s (b) 5.83 s

SOMMARIO

La velocità media di una particella durante un certo intervallo di tempo è uguale al rapporto dello spostamento $\Delta \mathbf{x}$ e l'intervallo di tempo Δt :

$$\bar{v}_x \equiv \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \quad [2.1]$$

La **velocità istantanea** di una particella è definita come il limite del rapporto $\Delta \mathbf{x}/\Delta t$ allorquando Δt tende a zero:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{d \mathbf{x}}{dt} \quad [2.3]$$

La **rapidità istantanea** con cui si muove una particella è uguale al modulo della velocità istantanea (vedi nota 3 a pag. 32).

L'**accelerazione media** di una particella durante un certo intervallo di tempo è definita come il rapporto della variazione della sua velocità Δv_x e l'intervallo di tempo Δt :

$$\bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad [2.4]$$

L'**accelerazione istantanea** è uguale al limite del rapporto $\Delta v_x / \Delta t$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. Per definizione questa è uguale alla derivata di v_x rispetto a t , ovvero la rapidità di variazione temporale della velocità

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad [2.5]$$

La pendenza della tangente alla curva x in funzione di t , ad ogni istante, è uguale alla velocità istantanea della particella. La pendenza della tangente alla curva v_x in funzione di t è uguale all'accelerazione istantanea della particella.

Le **equazioni cinematiche** per una particella in moto lungo l'asse x con accelerazione a uniforme (costante in modulo e direzione) sono

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad [2.7]$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) t \quad [2.9]$$

$$x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad [2.10]$$

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad [2.11]$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_{x0} + a_x t \\ x - x_0 = \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) t \\ x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \end{array} \right\} \text{(per } a_x \text{ costante)} \quad [2.7] \quad [2.9] \quad [2.10] \quad [2.11]$$

Un corpo in caduta libera subisce un'accelerazione diretta verso il centro della Terra. Se si trascura l'attrito dell'aria e se l'altitudine del moto è piccola rispetto al raggio della Terra, si può assumere che l'accelerazione di gravità, g , è costante durante il moto dove g è uguale a 9.80 m/s^2 o 32 ft/s^2 . Assumendo y positiva diretta verso l'alto, l'accelerazione è data da $-g$, e le equazioni cinematiche per un corpo in caduta libera sono le stesse di quelle date precedentemente con le sostituzioni $x \rightarrow y$ e $a_x \rightarrow -g$.

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] Vi sono condizioni per le quali il modulo della velocità media di una particella che si muove di moto unidimensionale è maggiore della rapidità media?

- [2] Il modulo della velocità media per una particella che si muove in una dimensione ha un valore positivo. È possibile per la velocità istantanea della particella

avere valore negativo in qualche istante di tempo nell'intervallo?

3. Se la velocità media di un oggetto è zero in un qualche intervallo di tempo, cosa potete dire dello spostamento dell'oggetto in quell'intervallo?
4. Può la velocità istantanea di un oggetto essere mai in modulo maggiore della velocità media? Può essere minore?
5. Considera le seguenti combinazioni di segni per i valori della velocità e della accelerazione di una particella in moto unidimensionale lungo l'asse x .

Velocità	Accelerazione
a. Positivo	Positivo
b. Positivo	Negativo
c. Positivo	Zero
d. Negativo	Positivo
e. Negativo	Negativo
f. Negativo	Zero
g. Zero	Positivo
h. Zero	Negativo

Descrivi che cosa fa la particella in ciascun caso, riportando un esempio reale relativo a un'automobile che si muove lungo la direzione ovest-est con l'est considerato come verso positivo.

6. Le equazioni cinematiche (da 2.7 a 2.11) possono essere adoperate in situazioni in cui l'accelerazione varia con il tempo? Possono essere adoperate quando l'accelerazione è zero?
7. Uno studente alla sommità di un edificio di altezza h lancia in alto una palla con una velocità iniziale v_0 e poi una seconda palla verso il basso con la stessa velocità iniziale. Come si confrontano le velocità finali delle palle quando raggiungono il suolo?
8. Due auto, che percorrono un'autostrada nello stesso verso, si muovono in corsie parallele. Ad un certo

istante la velocità dell'auto A è superiore a quella dell'auto B. Questo fatto indica che l'accelerazione dell'auto A è maggiore di quella di B? Spiegare.

9. L'auto A viaggia verso sud, da New York a Miami, con una velocità di 25 m/s. L'auto B viaggia verso ovest, da New York a Chicago, anch'essa con una velocità di 25 m/s. Le due velocità sono uguali? Spiegare.
10. Lasci cadere una palla dalla finestra di un piano alto di un palazzo. Essa colpisce il suolo con una velocità v . Ripeti la caduta, ma questa volta c'è un tuo amico sulla strada che a sua volta lancia un'altra palla verso l'alto con velocità v . Il tuo amico lancia la palla esattamente nello stesso istante in cui tu lasci cadere la tua dalla finestra. A un certo punto, le due palle si incrociano. Il punto si trova a metà fra la finestra e il suolo, al di sopra di questo punto, o al di sotto di questo punto?
11. Galileo eseguì degli esperimenti con delle palle rotolanti su piani inclinati per ridurre l'accelerazione lungo il piano e quindi ridurre il ritmo di discesa delle palle. Supponere che l'angolo che il piano inclinato forma con l'orizzontale sia θ . Come ci si aspetterebbe che diminuisca l'accelerazione lungo il piano mentre diminuisce θ ? Quale dipendenza trigonometrica specifica su θ ci si aspetterebbe per l'accelerazione?
12. Una palla rotola su di una linea retta in direzione orizzontale. Utilizzando dei diagrammi di moto (o fotografie multiframe) come in Figura 2.9, descrivere la velocità e l'accelerazione della palla per ognuna delle seguenti situazioni: (a) la palla si sposta a destra ad una velocità costante. (b) La palla si sposta da destra a sinistra rallentando continuamente. (c) La palla si muove da destra a sinistra con accelerazione costante. (d) La palla si muove verso destra prima aumentando la velocità a un tasso costante, e poi diminuendola a un tasso costante.
13. Una pianta a crescita rapida raddoppia ogni settimana la sua altezza. Alla fine del 25° giorno, la pianta

A.C.



Per gent. conc. di John Hart e Field Enterprises Inc.

di John Hart

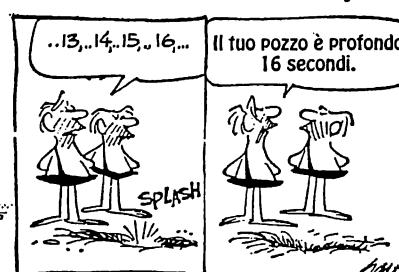


Figura D2.14 Vedi Domanda 14.

raggiunge l'altezza dell'edificio. In quale momento la pianta era ad un quarto dell'altezza dell'edificio?

- [14.] Un sassolino viene fatto cadere in un pozzo, e il tonfo è udito 16 s dopo, come illustrato nel fumetto. Qual è la distanza *approssimativa* dal bordo del pozzo alla superficie dell'acqua?
15. Il movimento della piattaforma terrestre viene descritto da un modello noto come *moto tettonico a zolle*. Le misurazioni indicano che porzioni di costa della California meridionale hanno movimenti tettonici in

direzione nord di 2.5 cm all'anno. Stimare il tempo necessario a tale moto affinché la California meridionale raggiunga l'Alaska.

16. Un oggetto pesante cade da un'altezza h a causa della gravità. Esso viene lasciato libero al tempo $t=0$ e urta il suolo al tempo t . Si trascuri la resistenza dell'aria. (a) Quando l'oggetto si trova ad altezza 0.5 h , il tempo è minore, maggiore, o uguale a 0.5 t ? (b) Quando il tempo è 0.5 t , l'altezza è maggiore, minore, o uguale a 0.5 h ?

PROBLEMI

Paragrafo 2.1 Velocità media

1. La posizione di un'auto, durante una competizione, è stata registrata a vari tempi ed i dati sono riportati nella tabella. Determinare la velocità media dell'auto (a) dopo il primo secondo, (b) dopo tre secondi e (c) dopo l'intervallo completo di osservazione.

x (m)	0	2.3	9.2	20.7	36.8	57.5
t (s)	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

2. Un automobilista guida per 35.0 minuti, ad una velocità di 85.0 km/h, in direzione nord. Si ferma per 15.0 minuti e riprende il viaggio per 2.00 h, sempre in direzione nord, alla velocità di 130 km/h. Determinare (a) la distanza totale percorsa, (b) la velocità media nel percorso.
3. Lo spostamento nel tempo di una certa particella che si muove lungo l'asse x è mostrato in Figura P2.3.

Trovare la velocità media negli intervalli di tempo (a) da 0 a 2 s, (b) da 0 a 4 s, (c) da 2 s a 4 s, (d) da 4 s a 7 s, (e) da 0 a 8 s.

4. Una persona cammina a una velocità costante di 5.00 m/s lungo una linea retta da A a B e poi torna indietro da B ad A alla velocità costante di 3.00 m/s. (a) Qual è la sua rapidità media sull'intero percorso? Qual è la sua velocità media sull'intero percorso?
5. Una persona prima cammina a una velocità costante v_1 lungo una linea retta da A a B e poi torna indietro da B ad A alla velocità costante v_2 . (a) Qual è la rapidità media sull'intero percorso? Qual è la velocità media sull'intero percorso?

Paragrafo 2.2 Velocità istantanea

6. A $t = 1.00$ s, una particella in moto con velocità costante si trova a $x = -3.00$ m, e a $t = 6.00$ s, la particella si trova a $x = 5.00$ m. (a) Con questa informazione fare un grafico della posizione in funzione del tempo. (b) Determinare la velocità della particella dalla pendenza di questo grafico.

- [7.] Il grafico posizione-tempo per una particella che si muove lungo l'asse x è mostrato in Figura P2.7. (a) Trovare la velocità media nell'intervalle di tempo da $t = 1.5$ s a $t = 4.0$ s. (b) Determinare la velocità istantanea a $t = 2.0$ s, misurando la pendenza della retta tangente mostrata nel grafico. (c) Per quale valore di t la velocità è zero?

8. Utilizzando i dati del Problema 1, (a) costruire un grafico continuo della posizione in funzione del tempo; (b) tracciare le tangenti alla curva $x(t)$ e determinare la velocità istantanea dell'auto a diversi istanti di tempo; (c) tracciare il grafico della velocità istantanea-tempo e da questo calcolare l'accelerazione media dell'auto. (d) Qual era la velocità iniziale dell'auto?

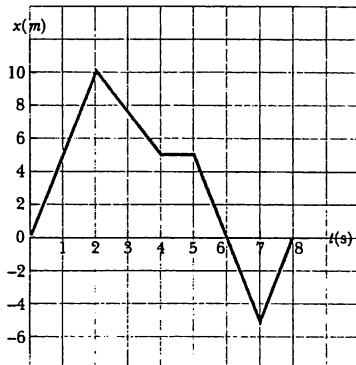


Figura P2.3

I numeri in riquadro indicano i problemi la cui soluzione ragionata viene fornita nella Guida alla soluzione dei problemi. I numeri in blu indicano problemi di livello medio, mentre quelli in magenta indicano problemi di maggior impegno.

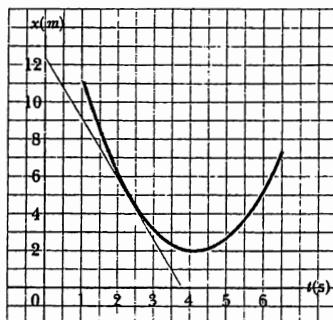


Figura P2.7

9. Trovare la velocità istantanea della particella descritta in Figura P2.3 ai seguenti istanti: (a) $t = 1.0$ s, (b) $t = 3.0$ s, (c) $t = 4.5$ s, e (d) $t = 7.5$ s.

Paragrafo 2.3 Accelerazione

10. Una particella è in moto con velocità $v_0 = 60.0$ m/s al tempo $t = 0$. Nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 15.0$ s, la velocità diminuisce uniformemente fino ad annullarsi. Qual è l'accelerazione media in tale intervallo di tempo? Qual è il significato del segno nella risposta?
11. Una palla di 50 g che percorre 25.0 m/s rimbalza su di un muro di mattoni ricadendo a 22.0 m/s. Una macchina fotografica ad alta velocità registra questo evento. Se la palla resta a contatto con la parete per 3.50 ms, qual è il modulo dell'accelerazione media della palla durante questo intervallo di tempo? (Nota: $1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$).
12. Il grafico velocità-tempo per un oggetto in moto lungo l'asse x è mostrato in Figura P2.12. (a) Disegnare un grafico dell'accelerazione in funzione del tempo. (b) Determinare l'accelerazione media dell'oggetto negli intervalli di tempo da $t = 5$ s a $t = 15$ s e da $t = 0$ a $t = 20$ s.

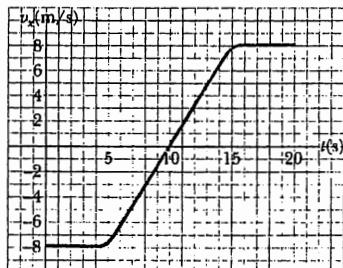


Figura P2.12

13. Una particella si muove lungo l'asse x secondo l'equazione $x = 2.0 + 3.0t - t^2$, dove x è espresso in metri e t in secondi. Al tempo $t = 3.00$ s, trovare (a) la posizione della particella, (b) la sua velocità, (c) la sua accelerazione.

14. Una palla da golf, inizialmente ferma, dopo il colpo di mazza acquista una velocità di 31.0 m/s. Se la palla rimane a contatto con la mazza per un tempo di 1.17 ms, qual è l'accelerazione media della palla?
15. La Figura P2.15 riporta il grafico $v - t$ relativo al moto di un motociclista, che parte da fermo e si muove seguendo un percorso rettilineo. (a) Determinare l'accelerazione media nell'intervallo di tempo $t_0 = 0$ e $t_1 = 6.0$ s. (b) Calcolare l'istante in cui l'accelerazione ha un massimo positivo ed il valore corrispondente. (c) Quando si annulla l'accelerazione? (d) Determinare il massimo valore negativo dell'accelerazione ed il tempo corrispondente.

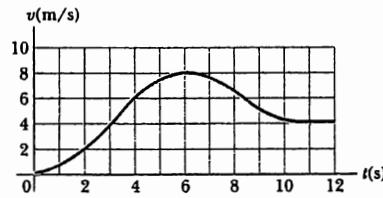


Figura P2.15

Paragrafo 2.4 Diagrammi del moto

Paragrafo 2.5 Moto unidimensionale con accelerazione costante

Paragrafo 2.6 Corpi in caduta libera

16. Un camion percorre 40.0 m in 8.50 s mentre rallenta uniformemente fino a una velocità finale di 2.80 m/s. Trovare (a) la sua velocità iniziale e (b) la sua accelerazione.
17. Un corpo, che si muove con accelerazione uniforme nella direzione x positiva, ha una velocità di 12.0 cm/s quando la sua coordinata x è 3.00 cm. Se la sua coordinata x dopo 2.00 s è -5.00 cm, qual è l'accelerazione del corpo?
18. La nuova BMW M3 può accelerare da 0 a 60.0 mi/h in 5.00 s. (a) Qual è questa accelerazione in m/s^2 ? (b) Quanto tempo ci mette questa macchina per passare da 60.0 mi/h a 130 mi/h?
19. La minima distanza necessaria per fermare un'automobile che si muove a 35.0 mi/h è 40.0 ft. Qual è la minima distanza di frenata per la stessa automobile che si muove a 70.0 mi/h, assumendo la stessa accelerazione?
20. Un pilota, in una competizione, parte da fermo ed accelera uniformemente a 10 m/s^2 per una distanza

- di 400 m. Determinare (a) il tempo impiegato per percorrere tale distanza, (b) la velocità dell'auto alla fine del percorso.
- [21] Un aereo atterra ad una velocità di 100 m/s e, per fermarsi, può accelerare al massimo di -5.00 m/s^2 . (a) Dall'istante in cui esso tocca il suolo, qual è l'intervallo di tempo minimo necessario per fermarsi? (b) Può questo aereo atterrare su una piccola isola tropicale, che possiede un aeroporto con una pista lunga 0.800 km?
- [22] Una locomotiva rallenta da 26.0 m/s al valore zero di velocità in 18.0 s. Quale distanza ha percorso?
- [23] Il conducente di un'automobile schiaccia i freni quando vede un albero che blocca la strada. La macchina rallenta uniformemente con una accelerazione di -5.60 m/s^2 per 4.20 s, lasciando dei segni di slittamento lunghi 62.4 m. Con quale velocità la macchina urterà l'albero?
- [24] *Aiuto! Ci manca un'equazione!* Noi descriviamo il moto uniformemente accelerato con i parametri v_x , v_{x0} , a_x , t , e $x - x_0$. Delle equazioni elencate nella Tabella 2.1, la prima non coinvolge $x - x_0$; la seconda non contiene a_x ; la terza omette v_x , e l'ultima non contiene t . Per completare l'insieme, dovrebbe esserci un'equazione che non contenga v_{x0} . Derivare questa equazione dalle altre e usarla per risolvere il Problema 23 in un solo passo.
- [25] Fino a tempi recenti, il primato mondiale di velocità su terra è stato detenuto dal Colonnello John P. Stapp, USAF. Il 19 marzo 1954, egli ha corso con una slitta con propulsione a razzi che si muoveva giù per una pista a 632 mi/h. Egli e la slitta venivano arrestati in maniera sicura in 1.40 s. Determinare (a) la decelerazione necessaria e (b) la distanza percorsa durante la decelerazione.
- [26] Un elettrone in un tubo a raggi catodici (CRT) accelera da $2.00 \times 10^4 \text{ m/s}$ a $6.00 \times 10^6 \text{ m/s}$ in 1.50 cm. (a) In quanto tempo l'elettrone percorre questi 1.50 cm? (b) Qual è la sua accelerazione?
- [27] Una studentessa lancia un mazzo di chiavi ad una amica, affacciata ad una finestra, situata ad un'altezza di 4.00 m. Le chiavi vengono afferrate dopo 1.50 s. Determinare la velocità del mazzo di chiavi (a) al momento del lancio e (b) all'istante prima di essere afferrato dall'amica.
- [28] Una palla viene lanciata verso il basso, da un'altezza di 30.0 m, con una velocità iniziale (verso il basso) di 8.00 m/s. Determinare dopo quanto tempo la palla colpisce il suolo.
- [29] Durante un incontro di baseball, una palla, colpita dalla mazza del giocatore, viaggia verso l'alto in direzione verticale. Uno spettatore osserva che la palla impiega 3.00 s per raggiungere la massima altezza. Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare (a) la velocità iniziale della palla e (b) la massima altezza raggiunta.
- [30] Una mongolfiera sale in direzione verticale, con una velocità costante di 5.00 m/s. Quando essa si trova ad un'altezza di 21.0 m dal suolo viene lasciato cadere un pacco. (a) Per quanto tempo il pacco viaggia nell'aria? (b) Qual è la velocità del pacco nell'istante immediatamente precedente all'impatto con il suolo? (c) Rispondere ai quesiti (a) e (b), nell'ipotesi che la mongolfiera stia scendendo con una velocità costante di 5.00 m/s.



Figura P2.30 Mongolfiera su Carefree, Arizona. (Russell Schleppman)

- [31] Un'audace donna acrobata seduta sul ramo di un albero, vuole lasciarsi cadere verticalmente sulla groppa di un cavallo che passa al galoppo sotto l'albero. La velocità del cavallo è 10.0 m/s, e la distanza dal ramo alla sella è 3.00 m. (a) A quale distanza, in direzione orizzontale, deve trovarsi la sella dal ramo, nell'istante in cui la donna inizia a muoversi? (b) Per quanto tempo essa rimane in aria?
- [32] Una palla viene lanciata da terra verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di 15.0 m/s. Determinare (a) il tempo impiegato dalla palla per raggiungere la massima altezza; (b) l'altezza massima raggiunta; (c) la velocità e l'accelerazione della palla al tempo $t = 2.00 \text{ s}$.
- [33] Una palla scende lungo un piano inclinato lungo 9.00 m con una accelerazione di 0.500 m/s^2 . Dopo aver

- raggiunto la base, la palla sale lungo un altro piano inclinato, dove, dopo un percorso di 15.0 m, si ferma. (a) Qual è la velocità della palla alla base del primo piano inclinato? (b) Quanto tempo occorre per scendere lungo il primo piano? (c) Qual è l'accelerazione lungo il secondo piano? (d) Qual è la velocità della palla dopo i primi 8.00 m lungo il secondo piano?
34. L'altezza di un elicottero sopra il suolo è data da $h = 3.00t^3$, dove h è espresso in metri e t in secondi. Dopo 2.00 s, l'elicottero lascia cadere un piccolo sacco postale. Dopo quanto tempo il sacco postale raggiunge il suolo?
35. Speedy Sue guidando a 30.0 m/s entra in una galleria che ha una sola corsia. Ella si accorge che un lento furgone, 155 m davanti a lei, viaggia a 5.00 m/s. Sue schiaccia i freni ma può decelerare soltanto di 2.00 m/s^2 poiché la strada è bagnata. Avverrà il tamponamento? Se sì, determinare in quale punto della galleria e dopo quanto tempo avverrà l'urto. Se no, determinare la distanza di minimo avvicinamento tra la macchina di Sue e il furgone.

Problemi generali

36. Un motociclista sta viaggiando alla velocità di 18.0 m/s, quando si accorge che un capriolo è fermo sulla strada ad una distanza di 38.0 m. (a) Se la massima accelerazione negativa della motocicletta è -4.50 m/s^2 , qual è il tempo massimo accettabile di reazione del pilota, affinché il capriolo non venga investito? (b) Se il tempo di reazione è 0.300 s, qual è la velocità del veicolo nel momento dell'impatto con il capriolo?
37. Un altro piano per dare la caccia a roadrunner è fallito e una cassaforte cade da ferma dalla cima di un precipizio alto 25.0 m verso Wile E. Coyote, che si trova sul fondo. Wile si accorge della cassaforte dopo che essa è caduta per 15.0 m. Quanto tempo ha a disposizione per abbandonare la strada?
38. Un razzo parte verticalmente con una velocità iniziale di 80.0 m/s, subisce una accelerazione di 4.00 m/s^2 fino ad una altezza di 1000 m. A questa altezza il motore si rompe ed il razzo prosegue con una accelerazione di -9.80 m/s^2 . Determinare (a) il tempo di volo del razzo; (b) l'altezza massima raggiunta; (c) la velocità nell'istante precedente all'impatto con il suolo. (*Suggerimento:* considerare separatamente i moti durante il funzionamento del motore e dopo la rottura dello stesso).
39. In una gara sui 100 m, due atleti tagliano il traguardo allo stesso istante con un tempo di 10.2 s. Con una accelerazione costante, il primo concorrente impiega 2.00 secondi, mentre il secondo ne impiega 3.00, per raggiungere la massima velocità, mantenendola poi costante per il resto della gara. Determinare per ciascun concorrente: (a) l'accelerazione; (b) la velocità massima raggiunta; (c) quale concorrente si trova in

- testa dopo 6.00 s ed il suo vantaggio.
40. La posizione di una palla, lanciata verso l'alto, è descritta dall'equazione $y = 7.00t - 4.90t^2$, con y espressa in metri e t in secondi. Determinare la velocità iniziale, per $t_0 = 0$; (b) la velocità per $t = 1.26$ s e (c) l'accelerazione della palla.
41. Una palla di gomma dura, lasciata cadere da un contenitore in alto cade sul pavimento e rimbalza approssimativamente alla stessa altezza. Mentre è in contatto col suolo, la parte inferiore della palla è temporaneamente appiattita. Prima che questa ammaccatura sparisca, supponiamo che il suo massimo spessore sia circa di 1 centimetro. Fai una stima dell'ordine di grandezza della massima accelerazione della palla. Stabilisci le tue assunzioni, le grandezze da stimare, e i valori stimati per esse.
42. Un giovane ha una macchina che accelera a 3.00 m/s^2 e decelera a -4.50 m/s^2 . In un percorso fino a un magazzino, egli accelera da fermo fino a 12.0 m/s, guida a velocità costante per 5.00 s, e rallenta per un istantaneo stop a un incrocio. Poi accelera fino a 18.0 m/s, guida a velocità costante per 20.0 s, e decelera per 2.67 s; continua per 4.00 s a questa velocità e poi rallenta fino a fermarsi. (a) Quanto tempo dura il percorso? (b) Quant'è la distanza percorsa? (c) Qual è la velocità media sul percorso? (d) Quanto tempo è necessario per andare al magazzino e tornare se cammina a 1.50 m/s?
43. Uno studente di fisica, indagatore ed alpinista, scala una parete di 50.0 m che si affaccia su di uno specchio d'acqua. Egli scaglia due pietre verticalmente verso il basso ad 1.00 s l'una dall'altra ed osserva che entrambe provocano un unico tonfo. La prima pietra ha una velocità iniziale di 2.00 m/s. (a) Quanto tempo dopo il rilascio della prima pietra le due pietre cadono in acqua? (b) Quale velocità iniziale deve avere la seconda pietra se entrambe devono arrivare simultaneamente? (c) Quale sarà la velocità di ciascuna pietra all'istante in cui toccano l'acqua?
44. La velocità di un treno varia nel tempo nella maniera seguente. Nella prima ora, viaggia con una velocità v , nella successiva mezz'ora ha una velocità $3v$, nei successivi 90.0 minuti viaggia con velocità $v/2$, e nelle 2.00 h finali viaggia con una velocità $v/3$. (a) Riportare il grafico velocità-tempo per questo viaggio. (b) Quale distanza percorre il treno in questo viaggio? (c) Qual è la velocità media del treno nell'intero viaggio?
45. Un masso cade da fermo in un pozzo. (a) Se il suono del contatto con l'acqua è percepito con un ritardo di 2.40 s, determinare la profondità del pozzo. La velocità del suono in aria è 336 m/s. (b) Se si trascura il tempo di propagazione del suono, quale errore percentuale si introduce nel calcolo della profondità?
46. Un auto ed un treno si muovono, alla velocità di 25.0 m/s, lungo percorsi paralleli. Alla comparsa del

segna rosso di un semaforo, la macchina viene sottoposta a una accelerazione uniforme di -2.50 m/s^2 (decelerazione), fino all'arresto. L'auto rimane ferma per 45.0 s e riacquista la velocità di 25.0 m/s , dopo una accelerazione di 2.50 m/s^2 . Qual è la distanza dell'auto dal treno, quando essa raggiunge nuovamente la velocità di 25.0 m/s , se si assume che il treno abbia mantenuto la velocità di 25.0 m/s ?

- [47] Kathy Kool compra una macchina sportiva che può accelerare a 4.90 m/s^2 . Essa decide di provare la macchina gareggiando con un altro velocista, Stan Speedy. Ambedue partono da fermi, ma Stan, che ha più esperienza, lascia la linea di partenza 1.00 s prima di Kathy. Se Stan si muove con una accelerazione costante di 3.50 m/s^2 e Kathy mantiene un'accelerazione di 4.90 m/s^2 , trovare (a) il tempo che impiega Kathy a sorpassare Stan, (b) la distanza che essa percorre prima di raggiungerlo, e (c) la velocità di entrambe le macchine al momento del sorpasso.
48. In un acceleratore lineare di 100 m, un elettrone viene accelerato fino a 1.00% della velocità della luce in 40.0 m prima di viaggiare liberamente per i 60.0 m fino al bersaglio. (a) Qual è l'accelerazione dell'elettrone nei primi 40.0 m? (b) Quanto dura complessivamente il suo volo?
49. Per proteggere il suo cibo dagli orsi affamati, un boy scout solleva il suo pacco viveri, di massa m , con una fune passata attraverso un ramo di albero di altezza h al di sopra delle sue mani. Si allontana dalla corda verticale con la velocità costante v_0 tenendo in mano l'estremità libera della corda (Figura P2.49). (a) Mostrare che la velocità v del pacco è $x(x^2 + h^2)^{-1/2} v_0$ dove x è la distanza di cui si è allontanato dalla verticale. (b) Mostrare che l'accelerazione del pacco è $h^2(x^2 + h^2)^{-3/2} v_0^2$. (c) Quali valori hanno accelerazione e velocità poco dopo che il boy scout si è discostato dalla verticale? (d) A quali valori tendono velocità ed accelerazione quando la distanza x continua ad aumentare?

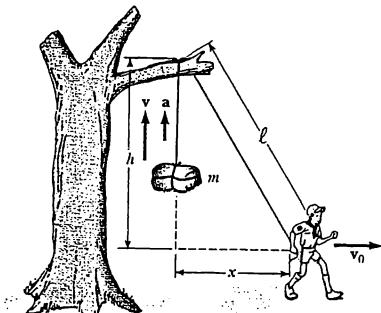


Figura P2.49

50. Nel Problema 49 l'altezza h sia uguale a 6.00 m e la velocità $v_0 = 2.00 \text{ m/s}$. Assumiamo che il pacco parta da fermo. (a) Tabulare e disegnare il grafico velocità-tempo. (b) Tabulare e disegnare il grafico accelerazione-tempo. (Supponiamo che l'intervallo di tempo vada da 0 a 5.00 s con passo di 0.50 s).

- [51] Due oggetti A e B sono collegati ad un'asta rigida che ha una lunghezza L . Gli oggetti slittano lungo la guida perpendicolare, come mostrato nella Figura P2.51. Se A slitta a sinistra con una velocità costante v , trovare la velocità di B quando $\alpha = 60.0^\circ$.

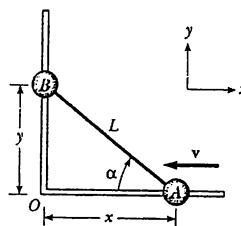


Figura P2.51

Problemi al calcolatore

- S1. Usare il Foglio Elettronico 2.1 per ottenere il grafico della posizione e della velocità in funzione del tempo per un oggetto che viaggia a velocità costante e per un altro che viaggia con accelerazione costante. Scegliere un insieme di valori per le velocità e le accelerazioni, e osservare i grafici. Accertarsi di tener conto dei valori nulli e negativi. *Nota:* vi sono due grafici associati con il Foglio Elettronico 2.1, uno per posizione versus tempo, l'altro per velocità versus tempo.
- S2. Il Foglio Elettronico 2.2 è un modello per lo sport delle corse. Due macchine da corsa hanno diverse accelerazioni $A1$ e $A2$ così come hanno diverse velocità massime $V1$ e $V2$. Ambedue le macchine partono da ferme dalla stessa posizione di partenza. Tuttavia, si può introdurre un tempo di ritardo t' nel tempo di partenza se le macchine sono abbastanza diverse. Introdurre i seguenti dati:

	Accelerazione (ft/s ²)	Velocità massima (ft/s)	Tempo di ritardo t' (s)
Macchina 1	5	300	—
Macchina 2	6	250	0.5

- (a) Quale macchina vince la gara su un quarto di miglio? (b) Se l'accelerazione della Macchina 1 viene aumentata a 5.2 ft/s^2 , quale macchina vince adesso?

- S3. Modificare il Foglio Elettronico 2.1 per risolvere il seguente problema. La polizia ha preparato un controllo di velocità sull'autostrada. Da una macchina della polizia nascosta dietro un cartellone pubblicitario, un agente con un radar misura che la velocità di un motociclista è 35.0 m/s . Tre secondi dopo, avverte il suo partner, che si trova in un'altra macchina 100 m più avanti nella strada. La seconda macchina della

polizia parte da ferma con una accelerazione di 2.00 m/s^2 all'inseguimento del centauro 2.00 s dopo avere ricevuto l'avvertimento. (a) Quanto tempo trascorre prima che il centauro venga raggiunto? (b) Quale sarà la velocità della macchina della polizia quando avrà raggiunto il motociclista? (c) Quale distanza percorrerà la seconda macchina della polizia prima di raggiungerlo?

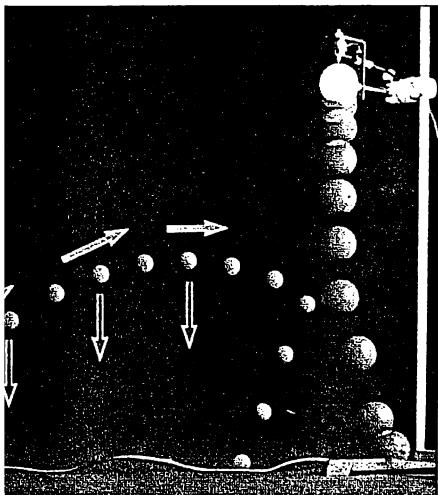
RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Se la particella si muove lungo una linea retta senza cambiare verso, lo spostamento e la distanza in ogni intervallo di tempo saranno gli stessi. Di conseguenza, il modulo della velocità media e la rapidità media saranno uguali. Se la particella cambia verso, tuttavia, allora lo spostamento sarà minore della distanza percorsa e quindi il modulo della velocità media sarà minore della rapidità media.
- Si. Ciò accade quando una macchina rallenta, per cui il verso della sua accelerazione è opposto a quello del moto.
- Affinché una particella accelerata si fermi completamente, la velocità e l'accelerazione devono avere segno opposto, cosicché il modulo della velocità sia decrescente. Dato che questo è il caso, la particella si fermerà. Tuttavia, se l'accelerazione rimane costante, la particella si muoverà ancora nel verso opposto a quello originario. Se la particella arriva a fermarsi e rimane ferma, l'accelerazione si annulla nel momento in cui il moto si ferma. Questo è il caso di una macchina che frena – l'accelerazione è negativa e si annulla appena la macchina si ferma.
- Una volta che gli oggetti abbandonano le mani, ambedue sono in caduta libera, e ambedue subiscono la stessa accelerazione verso il basso pari all'accelerazione di gravità di modulo 9.80 m/s^2 .
- (a) Mentre viaggia verso l'alto, il modulo della sua velocità diminuisce di 9.80 m/s durante ciascun secondo del moto. Quando raggiunge il punto più alto, la sua velocità si annulla. Mentre viaggia verso il basso, il modulo della sua velocità aumenta di 9.80 m/s ogni secondo. (b) L'accelerazione della palla rimane costante mentre essa è in aria. Il modulo della sua accelerazione è pari all'accelerazione di gravità, $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

3

Moto in due dimensioni

Questo capitolo tratta la cinematica di una particella in moto su un piano, ovvero il moto bidimensionale. Esempi comuni di moti piani sono il moto dei proiettili e dei satelliti e, il moto delle particelle cariche sottoposte a campi elettrici uniformi. Cominciamo con il mostrare che velocità e accelerazione sono grandezze vettoriali. Come nel caso del moto unidimensionale deriveremo le equazioni cinema-



◀ Una fotografia multi-flash di una dimostrazione molto popolare nella quale un proiettile viene sparato contro un bersaglio tenuto fermo da un magnete dal dispositivo in alto a destra della fotografia. Le condizioni dell'esperimento prevedono che il cannone miri sul bersaglio e che il proiettile lasci il cannone nello stesso istante in cui il bersaglio viene liberato in quiete. Sotto queste condizioni il proiettile colpirà il bersaglio, indipendentemente dal modulo della sua velocità iniziale. Il motivo è che ambedue subiscono lo stesso accelerazione verso il basso, e quindi le velocità del proiettile e del bersaglio cambiano della stessa quantità nello stesso intervallo di tempo. Si noti che la velocità del proiettile (frecce rosse) varia sia in modulo che in direzione, mentre la sua accelerazione verso il basso (frecce viola) rimane costante. (Central Scientific Company)

- 3.1 Vettori spostamento, velocità e accelerazione
- 3.2 Moto in due dimensioni con accelerazione costante
- 3.3 Moto del proiettile
- 3.4 Moto circolare uniforme
- 3.5 Accelerazione tangenziale e radiale
- 3.6 Velocità relativa e accelerazione relativa

tiche per il moto bidimensionale dalle definizioni fondamentali di spostamento, velocità e accelerazione. Come casi particolari di moto in due dimensioni tratteremo il moto piano con accelerazione costante e il moto circolare uniforme.

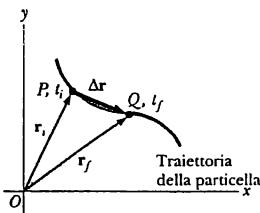


Figura 3.1 Una particella che si muove nel piano xy è localizzata dal vettore posizione \mathbf{r} tracciato dall'origine alla particella. Lo spostamento della particella allorquando essa si muove da P a Q nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è uguale al vettore $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$.

Definizione del vettore spostamento

3.1 • VETTORI SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Nel Capitolo 2 si è visto che il moto di una particella lungo una retta è determinato in maniera completa se è nota la sua posizione in funzione del tempo. Estendiamo ora questa idea al moto di una particella nel piano xy . Cominciamo col descrivere la posizione di una particella con un *vettore posizione* \mathbf{r} , tracciato a partire dall'origine di un qualche sistema di riferimento alla particella posta nel piano xy come in Figura 3.1. All'istante t_i la particella è in P , e ad un qualche istante successivo t_f la particella è in Q . Allorquando la particella si muove da P a Q nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$, il vettore posizione cambia da \mathbf{r}_i ad \mathbf{r}_f . Poiché $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}$, il vettore spostamento della particella è dato da

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i \quad [3.1]$$

La direzione di $\Delta \mathbf{r}$ è indicata in Figura 3.1. Si noti che il *vettore spostamento* è uguale alla differenza fra il *vettore posizione finale* ed il *vettore posizione iniziale*. Come si vede dalla Figura 3.1, il modulo del vettore spostamento è minore della lunghezza percorsa lungo la traiettoria curva. Quando il percorso è rettilineo, comunque, il modulo del vettore spostamento è uguale alla distanza percorsa.

Definiamo la **velocità media** della particella durante l'intervallo di tempo Δt come il rapporto fra lo spostamento e l'intervallo di tempo occorrente a questo spostamento:

Definizione di velocità media

$$\bar{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad [3.2]$$

Poiché lo spostamento è un vettore e l'intervallo di tempo è uno scalare, concludiamo che la velocità media è un *vettore* diretto lungo $\Delta \mathbf{r}$. Si noti che la velocità media fra i punti P e Q è *indipendente dal percorso* fra i due punti. Ciò in quanto la velocità media è proporzionale allo spostamento, che a sua volta dipende solamente dai vettori posizione iniziale e finale. Come nel caso del moto unidimensionale, concludiamo che, se una particella inizia il suo moto in un certo punto e ritorna in questo punto tramite un percorso arbitrario, la sua velocità media è nulla in quanto il suo spostamento è nullo. Consideriamo ancora il moto di una particella fra due punti nel piano xy come in Figura 3.2. Allorquando gli intervalli di tempo diventano sempre più piccoli, gli spostamenti diventano progressivamente più piccoli e la direzione dello spostamento tende a quella della tangente alla traiettoria nel punto P .

La **velocità istantanea**, v , è definita come il limite della velocità media $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ allorquando Δt tende a zero:

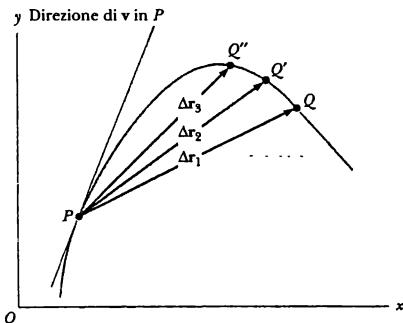


Figura 3.2 Quando una particella si muove fra due punti, la sua velocità media ha la direzione del vettore spostamento Δr . Quando il punto Q si sposta verso il punto P , la direzione di Δr tende a quella della tangente alla curva in P . Per definizione, la velocità istantanea in P ha la direzione della tangente.

$$\mathbf{v}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d \mathbf{r}}{dt}$$

[3.3] • *Definizione di velocità istantanea*

Cioè, la velocità istantanea è uguale alla derivata del vettore posizione rispetto al tempo. La direzione del vettore velocità è quella della retta tangente alla traiettoria della particella ed è nel verso del moto; ciò è illustrato in Figura 3.3. Il modulo del vettore velocità istantanea si chiama rapporto (vedi nota 3 a pag. 32).

Allorquando una particella si muove da P a Q lungo un percorso arbitrario, il suo vettore velocità istantanea cambia da \mathbf{v}_i al tempo t_i a \mathbf{v}_f al tempo t_f (Figura 3.3).

L'accelerazione media della particella nel suo moto da P a Q è definita come il rapporto della variazione del vettore velocità istantanea $\Delta \mathbf{v}$ ed il tempo trascorso Δt .

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

[3.4] • *Definizione di accelerazione media*

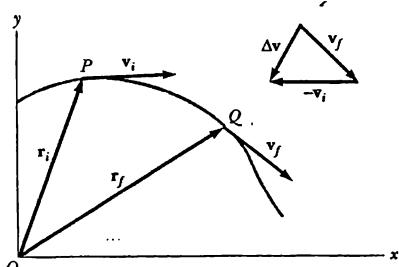


Figura 3.3 Il vettore accelerazione media, $\bar{\mathbf{a}}$, per una particella che si muove da P a Q ha la direzione della variazione di velocità $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$.

Poiché l'accelerazione media è il rapporto di un vettore, Δv , e di uno scalare, Δt , concludiamo che \bar{a} è un vettore, diretto lungo Δv . Come indicato in Figura 3.3, la direzione di Δv si trova aggiungendo il vettore $-v_i$ (l'opposto di v_i) al vettore v_f in quanto per definizione $\Delta v = v_f - v_i$.

L'accelerazione istantanea, a , è definita come il valore limite del rapporto $\Delta v/\Delta t$ allorché Δt tende a zero:

Definizione di accelerazione istantanea

$$a \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad [3.5]$$

In altre parole, l'accelerazione istantanea è uguale alla derivata prima del vettore velocità rispetto al tempo.

È importante tener presente che diverse variazioni possono causare l'accelerazione di una particella. Primo, può variare nel tempo il modulo del vettore velocità come nel moto rettilineo (unidimensionale). Secondo, può variare nel tempo soltanto la direzione del vettore velocità mentre il suo modulo rimane costante, come nel moto lungo una traiettoria curva (bidimensionale). Terzo, può variare sia il modulo che la direzione del vettore velocità.

Fisica ragionata 1

Il pedale del gas in un'automobile è chiamato *acceleratore*. Vi sono altri controlli in un'automobile che possano essere considerati "acceleratori"?

Ragionamento Il pedale del gas è chiamato acceleratore perché l'uso culturale della parola accelerazione si riferisce a un *aumento della rapidità*. La definizione scientifica, tuttavia, considera che vi sia una accelerazione *tutte le volte che la velocità varia* in qualsiasi modo. Quindi, il *pedale del freno* si può considerare un acceleratore in quanto causa un rallentamento della macchina. Il *volante* è pure un acceleratore perché esso fa variare la direzione del vettore velocità.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

- (a) Un oggetto può accelerare se la sua rapidità è costante? (b) Un oggetto può accelerare se la sua velocità è costante?

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Una particella può avere velocità costante e variare la sua rapidità? Una particella può avere una rapidità costante e variare la sua velocità? Dare esempi per le risposte positive e spiegare le risposte negative.

3.2 • MOTO IN DUE DIMENSIONI CON ACCELERAZIONE COSTANTE

Consideriamo il moto in due dimensioni di una particella con accelerazione costante (cioè supponiamo che il modulo, la direzione e il verso dell'accelerazione rimangano costanti durante il moto).

3.2 Moto in due dimensioni con accelerazione costante

Una particella in moto può essere descritta dal suo vettore posizione \mathbf{r} . Il vettore posizione per una particella in moto nel piano xy può essere scritto

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad [3.6]$$

dove x , y ed \mathbf{r} variano nel tempo al muoversi della particella. Se il vettore posizione è noto, la velocità della particella può essere ottenuta dalle Equazioni 3.3 e 3.6 che danno

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \quad [3.7]$$

Poiché a è una costante, le sue componenti a_x ed a_y sono pure costanti. Pertanto possiamo applicare le equazioni della cinematica ad entrambe le componenti x ed y del vettore velocità. Utilizzando l'Equazione 2.7 ($v = v_0 + at$), possiamo sostituire $v_x = v_{x0} + a_x t$ e $v_y = v_{y0} + a_y t$, nell'Equazione 3.7 e ottenerne

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_{x0} + a_x t)\mathbf{i} + (v_{y0} + a_y t)\mathbf{j} \\ &= (v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j}) + (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad [3.8]$$

- Vettore velocità in funzione del tempo

Questo risultato stabilisce che la velocità di una particella ad un certo istante t è uguale alla somma vettoriale della sua velocità iniziale \mathbf{v}_0 e della velocità addizionale $a\mathbf{t}$ acquistata nel tempo t in conseguenza della sua accelerazione costante.

Similmente dall'Equazione 2.9 sappiamo che le coordinate x ed y di una particella in moto con accelerazione costante sono date da

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \text{e} \quad y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Sostituendo queste espressioni nella Equazione (3.6) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\mathbf{i} + (y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\mathbf{j} \\ &= (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}) + (v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j})t + \frac{1}{2}(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad [3.9]$$

- Vettore posizione in funzione del tempo

Questa equazione dice che il vettore spostamento $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ è la somma vettoriale di uno spostamento $\mathbf{v}_0 t$, dovuto alla velocità iniziale della particella, ed uno spostamento $\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$, risultante dall'accelerazione uniforme della particella. La rappresentazione grafica delle Equazioni 3.8 e 3.9 è mostrata in Figura 3.4a e 3.4b. Per semplificare la Figura 3.4b abbiamo preso $\mathbf{r}_0 = 0$. Ossia, assumiamo che la particella si trovi nell'origine per $t = 0$. Si noti nella Figura 3.4b che \mathbf{r} in generale non è lungo la direzione di \mathbf{v}_0 o \mathbf{a} . Infine, se confrontiamo le due figure, vediamo che \mathbf{v} ed \mathbf{r} non sono nella stessa direzione.

Poiché le Equazioni 3.8 e 3.9 sono espressioni vettoriali, possiamo scrivere le loro componenti x e y con $\mathbf{r}_0 = 0$ nella forma

Capitolo 3 *Moto in due dimensioni*

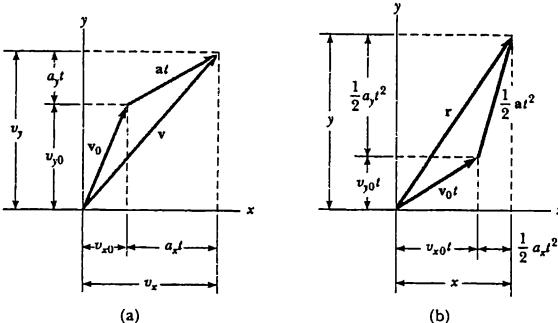


Figura 3.4 Rappresentazione vettoriale e componenti ortogonali (a) della velocità e (b) della posizione di una particella che si muove con una accelerazione costante \mathbf{a} .

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = \mathbf{v}_0 + \underline{\underline{\mathbf{a}}}t$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} + a_x t \\ v_y = v_{y0} + a_y t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$

Queste componenti sono illustrate in Figura 3.4. In altre parole, il moto in due dimensioni con accelerazione costante è equivalente a due moti indipendenti nelle direzioni x e y aventi accelerazioni costanti a_x e a_y .

Esempio 3.1 Moto in un piano

Una particella parte dall'origine $a = 0$ con una velocità iniziale avente una componente x di 20 m/s ed una componente y di -15 m/s . La particella si muove nel piano xy soltanto con la componente x dell'accelerazione costante, data da $a_x = 4.0 \text{ m/s}^2$. (a) Determinare le componenti della velocità in funzione del tempo ed il vettore velocità risultante ad un generico istante.

Soluzione Poiché $v_{x0} = 20 \text{ m/s}$ ed $a_x = 4.0 \text{ m/s}^2$, le equazioni cinematiche danno

$$v_x = v_{x0} + a_x t = (20 + 4.0t) \text{ m/s}$$

Inoltre, poiché $v_{y0} = -15 \text{ m/s}$ ed $a_y = 0$

$$v_0 = v_{x0} = -15 \text{ m/s}$$

Pertanto, usando i risultati precedenti e notando che il vettore velocità \mathbf{v} ha due componenti, otteniamo

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = [(20 + 4.0t) \mathbf{i} - 15 \mathbf{j}] \text{ m/s}$$

Avremmo anche potuto ottenere questo risultato usando direttamente l'Equazione 3.8, notando che $a =$

4.0i m/s² e $v_0 = (20i - 15j)$ m/s. Provate!

(b) Calcolare la velocità della particella a $t = 5.0$ s.

Soluzione Con $t = 5.0$ s, il risultato ottenuto in (a) dà

$$\mathbf{v} = \{[20 + 4(5.0)]\mathbf{i} - 15\mathbf{j}\} \text{ m/s} = (40\mathbf{i} - 15\mathbf{j}) \text{ m/s}$$

Cioè, a $t = 5.0 \text{ s}$, $v_x = 40 \text{ m/s}$ e $v_y = -15 \text{ m/s}$. Conoscendo queste due componenti per questo moto bidimensionale, conosciamo il valore numerico del vettore velocità. L'angolo θ che v forma con l'asse x può essere calcolato usando il fatto che $\tan \theta = v_y/v_x$, ovvero

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-15 \text{ m/s}}{40} \right) = -21^\circ$$

Il modulo di y è dato da

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2} \quad \text{m/s} = 43 \text{ m/s}$$

(Nota: se calcoli v_0 dai componenti x e y di v_0 , puoi trovare che $y > y_0$. Perché?)

ESERCIZIO 1 Determinare le coordinate x ed y ad un generico istante t ed il vettore spostamento a questo istante. Risposta $x = (20t + 2.0t^2)$ m; $y = (-15t)$ m; $\mathbf{r} = [(20t + 2.0t^2)\mathbf{i} - 15t\mathbf{j}]$ m

ESERCIZIO 2 Una particella parte da ferma dall'origine a $t = 0$ e si muove nel piano x - y con una accelerazio-

ne costante $\mathbf{a} = (2.0\mathbf{i} + 4.0\mathbf{j})$ m/s². Dopo che è trascorso un tempo t , determinare (a) le componenti x e y della velocità, (b) le coordinate della particella, e (c) il modulo della velocità della particella.

Risposta: (a) $v_x = 2t$ m/s, $v_y = 4t$ m/s
 (b) $x = t^2$ m, $y = 2t^2$ m (c) $4.47t$ m/s.

3.3 • MOTO DEL PROIETTILE

Chiunque abbia osservato una palla da baseball in movimento (o, per quanto riguarda i nostri attuali fini, il moto di qualsiasi oggetto lanciato in aria) ha osservato il moto di un proiettile. Per una direzione arbitraria della velocità iniziale, la palla si muove lungo un percorso curvo. Questa forma molto comune di moto può essere analizzata in modo sorprendentemente semplice se si fanno le seguenti due ipotesi: (1) l'accelerazione \mathbf{g} , dovuta alla gravità, si mantiene costante per tutto il moto ed è diretta verso il basso¹, (2) l'effetto della resistenza dell'aria si considera trascurabile². Con queste ipotesi troveremo che il percorso di un proiettile, che chiameremo traiettoria, è sempre una parabola. Adopereremo queste ipotesi in tutto questo capitolo.

Se scegliamo il nostro sistema di riferimento in modo tale che la direzione y sia verticale e sia positiva verso l'alto, allora $a_y = -g$ (come nella caduta libera unidimensionale) e $a_x = 0$ (in quanto si trascura l'attrito dell'aria). Inoltre, supponiamo che a $t = 0$ il proiettile abbandoni l'origine ($x_0 = y_0 = 0$) con una velocità v_0 come in Figura 3.5. Se il vettore v_0 forma un angolo θ_0 con l'orizzontale, come in Figura 3.5, allora dalle definizioni delle funzioni coseno e seno abbiamo

$$\cos \theta_0 = \frac{v_{x0}}{v_0} \quad \text{e} \quad \sin \theta_0 = \frac{v_{y0}}{v_0}$$

Pertanto, le componenti iniziali x ed y della velocità sono date da

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{e} \quad v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$$

Sostituendo queste espressioni nelle Equazioni 3.8 e 3.9 con $a_x = 0$ e $a_y = -g$ otteniamo le componenti della velocità e le coordinate del proiettile ad un generico istante t :

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 = \text{costante} \quad [3.10]$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad [3.11]$$

$$x = v_{x0}t = (v_0 \cos \theta_0)t \quad [3.12]$$

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad [3.13]$$

- *Ipotesi sul moto del proiettile*

- *Componente orizzontale della velocità*
- *Componente verticale della velocità*
- *Componente orizzontale della posizione*
- *Componente verticale della posizione*

¹ Questa approssimazione è ragionevole se lo spostamento durante il moto è piccolo rispetto al raggio della Terra (6.4×10^6 m). In effetti, tale approssimazione è equivalente ad assumere la Terra piatta per gli spostamenti del moto considerato.

² Questa approssimazione in genere non è giustificata, specialmente ad alte velocità. Inoltre, la rotazione di un proiettile, quale una palla da baseball, può dare luogo ad alcuni interessanti effetti legati alle forze aerodinamiche (per esempio, l'incurvamento della traiettoria a causa della rotazione impressa alla palla dal lanciatore).

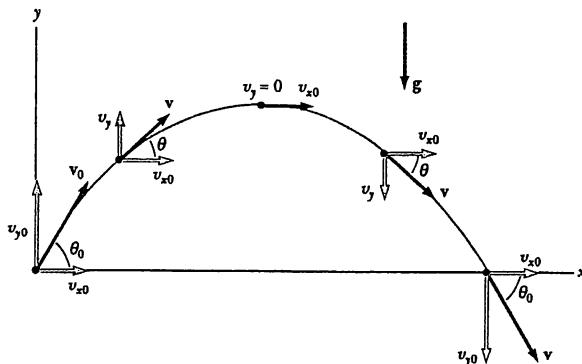


Figura 3.5 La traiettoria parabolica di un proiettile che parte dall'origine con velocità v_0 . Il vettore \mathbf{v} varia nel tempo sia in modulo che in direzione. La variazione del vettore velocità è dovuta all'accelerazione nella direzione y negativa. La componente x della velocità rimane costante nel tempo perché non vi è accelerazione lungo la direzione orizzontale. Inoltre, la componente y della velocità si annulla nel punto più alto della traiettoria.

Dalla Equazione 3.10 vediamo che v_x rimane costante nel tempo ed è pari alla componente x iniziale della velocità, poiché l'accelerazione non ha componente orizzontale. Notiamo anche, per il moto lungo y , che v_y ed y sono identiche alle espressioni per un corpo in caduta libera discusse nel Capitolo 2. Infatti, tutte le equazioni cinematiche sviluppate nel Capitolo 2 sono applicabili al moto dei proiettili.

Se risolviamo l'Equazione 3.12 rispetto a t e sostituiamo l'espressione ottenuta per t nella Equazione 3.13 troviamo che

$$y = (\tan \theta_0) x - \left(\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) x^2 \quad [3.14]$$

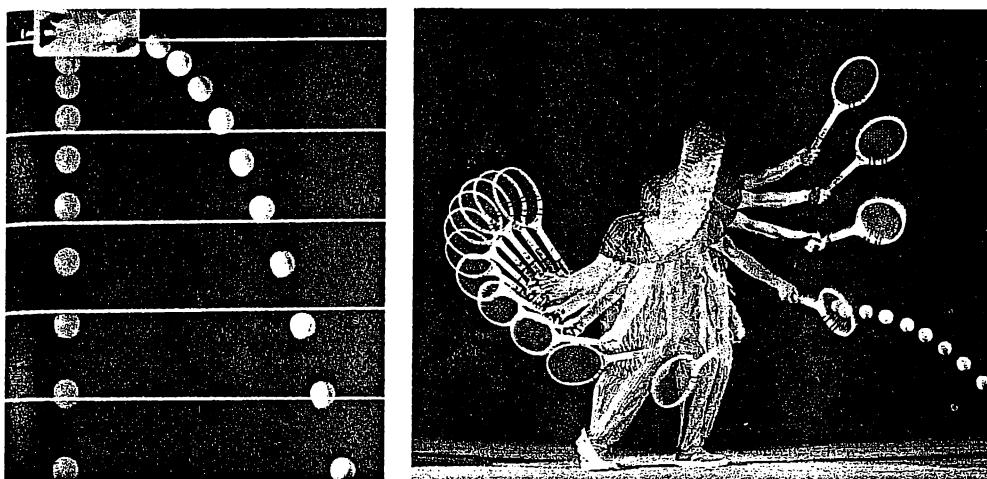
che è valida per tutti gli angoli nell'intervallo $0 < \theta_0 < \pi/2$. Questa espressione ha la forma $y = ax - bx^2$, che è l'equazione di una parabola passante per l'origine. Così abbiamo provato che la traiettoria di un proiettile è una parabola. Si noti che la traiettoria è completamente specificata se v_0 e θ_0 sono noti.

Si può ottenere il modulo della velocità, v , in funzione del tempo notando che le Equazioni 3.10 e 3.11 danno le componenti x ed y della velocità istante per istante. Pertanto,

$$\text{Modulo della velocità} \bullet \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad [3.15]$$

Ancora, poiché il vettore velocità è tangente alla traiettoria in ogni istante, come mostrato in Figura 3.5, l'angolo θ che \mathbf{v} forma con l'orizzontale può essere ottenuto da v_x e v_y tramite l'espressione

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad [3.16]$$



(Sinistra) Questa fotografia multiflash di due palle liberate simultaneamente illustra sia la caduta libera (palla rossa) sia il moto del proiettile (palla gialla). La palla gialla viene lanciata orizzontalmente, mentre la palla rossa viene liberata da ferma. Siete in grado di spiegare perché entrambe raggiungono il suolo contemporaneamente? (© Richard Megna 1990, *Fundamental Photographs*) (Destra) Esposizione multiflash di un giocatore di tennis che esegue un rovescio. Si noti come la palla segua una traiettoria parabolica caratteristica del moto di un proiettile. Queste fotografie si possono usare per studiare la qualità degli attrezzi sportivi e la forma di un atleta. (© Zimmerman, FPG International)

L'espressione vettoriale per il vettore posizione in funzione del tempo, per il proiettile, segue direttamente dalla Equazione 3.9 con $\mathbf{a} = \mathbf{g}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

Questa espressione è equivalente alle Equazioni 3.12 e 3.13 ed è riportata nel grafico di Figura 3.6. Si noti come questa equazione sia consistente con l'Equazione 3.13 in quanto l'espressione per \mathbf{r} è una equazione vettoriale ed $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -\mathbf{gj}$, quando si prende come positiva la direzione verso l'alto.

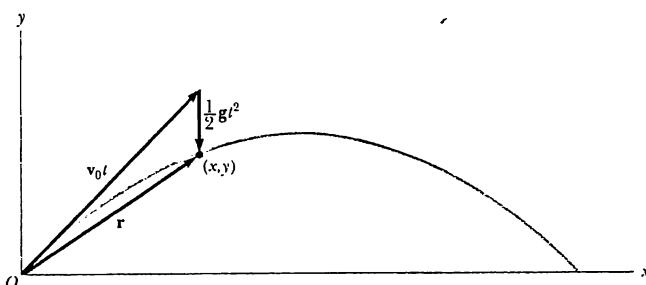


Figura 3.6 Il vettore posizione \mathbf{r} , di un proiettile che all'origine ha la velocità \mathbf{v}_0 . Il vettore $\mathbf{v}_0 t$ sarebbe la posizione del proiettile al tempo t in assenza di gravità. Il vettore $\frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$ è la sua posizione verticale dovuta alla gravità dopo il tempo t .

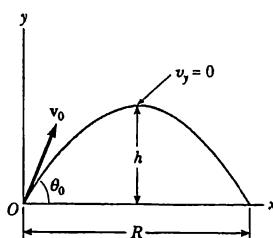


Figura 3.7 Un proiettile lanciato dall'origine con velocità iniziale v_0 al tempo $t = 0$. La massima altezza del proiettile è h e la sua gittata è R . Nel punto più alto della traiettoria, la componente y della sua velocità è nulla e il proiettile ha coordinate $(R/2, h)$.

È interessante notare che il moto può essere considerato come la sovrapposizione del termine $v_0 t$ che è la posizione che si avrebbe in assenza di accelerazione, e del termine $\frac{1}{2}gt^2$, dovuto all'accelerazione di gravità. In altre parole, se non ci fosse l'accelerazione di gravità, la particella continuerebbe a muoversi di moto rettilineo nella direzione di v_0 . Quindi, la distanza verticale $\frac{1}{2}gt^2$, lungo la quale la particella "cade", misurata a partire da tale retta è quella di un corpo in caduta libera. Concludiamo che il moto di un proiettile è la sovrapposizione di due moti: (1) un moto con velocità costante nella direzione iniziale e (2) il moto di un corpo in caduta libera nella direzione verticale con accelerazione costante.

Gittata ed altezza massima di un proiettile Supponiamo che un proiettile venga sparato dall'origine a $t = 0$ con una componente v_y positiva, come in Figura 3.7. Vi sono due punti speciali che sono interessanti da analizzare: il picco di coordinate cartesiane $(R/2, h)$ ed il punto di coordinate $(R, 0)$. La distanza R è detta **gittata del proiettile** ed h è la sua **altezza massima**. Determiniamo h ed R in funzione di v_0 , θ_0 e g .

Possiamo determinare h , notando che nel punto più alto $v_y = 0$. Pertanto, si può adoperare l'Equazione 3.11 per determinare il tempo t_1 che il proiettile impiega per raggiungere il punto più alto:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad \rightarrow \quad t_{\text{picco}} = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$$

Sostituendo questa espressione per t_1 nell'Equazione 3.13 otteniamo h in funzione di v_0 e θ_0

$$h = (v_0 \sin \theta_0) \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \quad \rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta_0}}{2g} \quad [3.17]$$

La gittata, R , è la distanza orizzontale percorsa in un tempo doppio di quello necessario a raggiungere il punto più alto, cioè in un tempo $2t_1$. (Ciò può essere visto ponendo $y = 0$ nella Equazione 3.13 e risolvendo la relativa equazione di secondo grado in t . Una soluzione di questa equazione è $t = 0$, e la seconda è $t = 2t_1$). Usando l'Equazione 3.12 e notando che $x = R$ per $t = 2t_1$, troviamo che

$$R = (v_0 \cos \theta_0) 2t_1 = (v_0 \cos \theta_0) \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

Poiché $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, R può essere scritta nella forma più compatta

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \quad [3.18]$$

Si tenga ben presente che le Equazioni 3.17 e 3.18 sono utili solamente per calcolare h ed R se sono note v_0 e θ_0 e solamente per una traiettoria simmetrica, come mostrato in Figura 3.7 (il che significa che occorre specificare solamente v_0). Le espressioni generali date nelle Equazioni 3.10 e 3.13 sono i risultati più importanti, in quanto forniscono le coordinate e le componenti della velocità del proiettile ad un tempo t arbitrario.

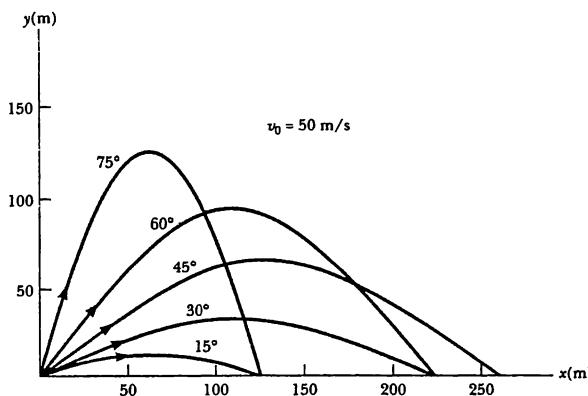


Figura 3.8 Un proiettile lanciato dall'origine con un modulo della velocità iniziale di 50 m/s a vari angoli di lancio. Si noti che per valori complementari di θ_0 si otterrà lo stesso valore di x (gittata del proiettile).

Dovreste notare, dalla Equazione 3.18, che il massimo valore di R è $R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$. Questo risultato segue dal fatto che il massimo valore di $\sin 2\theta_0$ è uno, che si ottiene per $2\theta_0 = 90^\circ$. Quindi, vediamo che R è massima quando $\theta_0 = 45^\circ$ come ci si poteva aspettare dato che si trascura l'attrito dell'aria.

La Figura 3.8 illustra varie traiettorie per un proiettile con un dato modulo della velocità iniziale. Come si può vedere, la gittata è massima per $\theta_0 = 45^\circ$. Inoltre, per ogni θ_0 diverso da 45° , un punto di coordinate (R, O) può essere raggiunto usando ciascuno dei due valori complementari di θ_0 , come 75° e 15° . Naturalmente, la massima altezza e il tempo di volo saranno diversi per i due valori di θ_0 .

Prima di procedere con alcuni esempi numerici relativi al moto di un proiettile, riassumiamo brevemente quanto appreso intorno a questo particolare moto.

- Trascurando la resistenza dell'aria, la componente orizzontale della velocità, v_x , resta costante poiché non c'è alcuna componente orizzontale dell'accelerazione.
- La componente verticale dell'accelerazione è uguale all'accelerazione di gravità, g .
- La componente verticale della velocità, v_y , e lo spostamento lungo la direzione y sono identici a quelli di un corpo in caduta libera.
- Il moto di un proiettile può essere descritto come la sovrapposizione di 2 moti nelle direzioni x ed y .

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

• Moto di un proiettile

Suggeriamo di utilizzare il seguente approccio per la risoluzione dei problemi inerenti il moto di un proiettile.

1. Scegliere un sistema di coordinate.
2. Scomporre il vettore velocità iniziale nelle componenti x e y .
3. Considerare il moto orizzontale ed il moto verticale separatamente.

4. Seguire le tecniche per la risoluzione dei problemi con velocità costante per analizzare il moto orizzontale del proiettile.
5. Seguire le tecniche per la risoluzione dei problemi con accelerazione costante per analizzare il moto verticale del proiettile.

Fisica ragionata 2

Un battitore nel gioco del baseball va a segno. La palla è colpita dalla casa base verso il centro del campo con una lunga traiettoria parabolica. Qual è l'accelerazione della palla (a) mentre sale, (b) nel punto più alto della traiettoria, e (c) mentre scende dopo aver raggiunto il punto più alto? Trascurare la resistenza dell'aria.

Ragionamento Le risposte a tutte e tre le domande sono le stesse – l'accelerazione è quella di gravità, 9.8 m/s^2 , perché la forza di gravità agisce verso il basso sulla palla durante l'intero moto. Durante la fase di salita della traiettoria, l'accelerazione verso il basso determina la diminuzione dei valori positivi della componente verticale della velocità della palla. Durante la fase di discesa della traiettoria, l'accelerazione verso il basso determina l'aumento dei valori negativi della componente verticale della velocità. Molti sbagliano nel considerare il punto più alto, pensando che l'accelerazione della palla in questo punto è zero. Questa interpretazione sorge confondendo la componente nulla della velocità verticale con l'accelerazione zero. Anche pensando la palla momentaneamente ferma nel punto più alto (verticalmente; essa si muove ancora orizzontalmente), essa rimane ancora accelerata, perché la forza di gravità continua ad agire. Se la palla fosse a riposo e subisse una accelerazione nulla, allora la velocità dovrebbe rimanere invariata – la palla dovrebbe rimanere sospesa nel punto più alto! Noi vediamo che ciò non accade, perché l'accelerazione *non è uguale a zero*.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Supponiamo che tu stia correndo a velocità costante, e che voglia lanciare una palla in modo da poterla riprendere quando ritorna verso il basso. Come dovresti lanciare la palla?

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Mentre un proiettile si muove lungo il suo percorso parabolico, vi è un qualche punto lungo la traiettoria nel quale i vettori velocità e accelerazione siano (a) perpendicolari l'uno all'altro? (b) paralleli fra loro?

Esempio 3.2 Un bel lancio

Una pietra viene scagliata verso l'alto dalla sommità di un edificio, con un angolo di 30.0° rispetto all'orizzontale e con una velocità di 20.0 m/s come in Figura 3.9. Se l'altezza dell'edificio è 45.0 m , (a) per quanto tempo la pietra rimane "in volo"?

Soluzione Le componenti x ed y della velocità iniziale sono

$$\begin{aligned}v_{x0} &= v_0 \cos \theta_0 = (20.0 \text{ m/s}) (\cos 30.0^\circ) = 17.3 \text{ m/s} \\v_{y0} &= v_0 \sin \theta_0 = (20.0 \text{ m/s}) (\sin 30.0^\circ) = 10.0 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Per trovare t , possiamo usare $y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$ (Eq. 3.13) con $y = -45.0 \text{ m}$ e $v_{y0} = 10.0 \text{ m/s}$ (abbiamo scelto come origine la sommità dell'edificio, come mostrato in Fig. 3.9):

$$-45.0 \text{ m} = (10.0 \text{ m/s})t - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in t , otteniamo per la radice positiva, $t = 4.22 \text{ s}$. La radice negativa ha un significato fisico? (Siete in grado di trovare

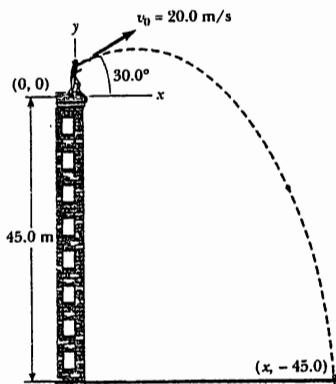


Figura 3.9 (Esempio 3.2)

un'altra via per determinare t dalle informazioni date?)

(b) Qual è la velocità della pietra proprio nell'istante prima di toccare il suolo?

Soluzione La componente y della velocità appena prima che la pietra tocchi il suolo può essere ottenuta usando l'equazione $v_y = v_{y0} - gt$ (Eq. 3.11) con $t = 4.22 \text{ s}$:

$$v_y = 10.0 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.4 \text{ m/s}$$

Poiché $v_x = v_{x0} = 17.3 \text{ m/s}$, la velocità richiesta è data da

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(17.3)^2 + (-31.4)^2} \text{ m/s} = 35.9 \text{ m/s}$$

ESERCIZIO 3 Dove tocca il suolo la pietra?

Risposta 73.0 m dalla base dell'edificio.

Esempio 3.3 Gli esploratori in difficoltà

Un aereo di soccorso lancia un pacco viveri di emergenza ad un gruppo di esploratori in difficoltà (Fig. 3.10). Se l'aereo vola orizzontalmente a 40.0 m/s ad un'altezza di 100 m rispetto al suolo, il pacco dove raggiungerà il suolo rispetto al punto in cui viene lasciato cadere?

Ragionamento e Soluzione Il sistema di riferimento viene scelto come mostrato in Figura 3.10, con direzione x positiva verso destra e direzione y positiva verso l'alto.

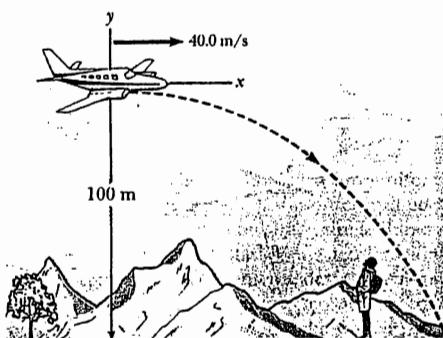


Figura 3.10 (Esempio 3.3) Per un osservatore a terra il pacco lasciato cadere dall'aereo di soccorso compie la traiettoria mostrata. Come apparirà la traiettoria seguita dal pacco a un osservatore sull'aereo (assumendo che si muova a velocità costante)?

Consideriamo dapprima il moto orizzontale del pacco. L'unica equazione disponibile è $x = v_{x0}t$. La componente x iniziale della velocità del pacco è la stessa della velocità dell'aereo al momento del lancio, 40.0 m/s . Abbiamo quindi

$$x = (40.0 \text{ m/s})t$$

Se conoscessimo t , la durata dell'intervallo di tempo in cui il pacco sta in aria, potremmo determinare x , la distanza percorsa dal pacco lungo l'orizzontale. Per determinare t , ricorriamo alle equazioni per il moto verticale del pacco. Sappiamo che all'istante in cui il pacco tocca il suolo, la sua coordinata y è -100 m . Sappiamo anche che la velocità iniziale del pacco nella direzione verticale, v_{y0} è nulla giacché il pacco è stato abbandonato solamente con componente orizzontale di velocità. Dalla Equazione 3.13, abbiamo

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$-100 \text{ m} = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$t^2 = 20.4 \text{ s}^2$$

$$t = 4.51 \text{ s}$$

Questo valore del tempo di volo sostituito nell'equazione per la componente x dà

$$x = (40.0 \text{ m/s})(4.51 \text{ s}) = 180 \text{ m}$$

Il pacco colpirà il suolo non direttamente sotto il punto di lancio ma 180 m alla destra di questo punto.

ESERCIZIO 4 Quali sono le componenti orizzontale e verticale della velocità del pacco appena prima di toccare il suolo? Risposta $v_x = 40.0 \text{ m/s}$; $v_y = -44.1 \text{ m/s}$.

ESERCIZIO 5 Si dice che in gioventù George Wa-

shington abbia lanciato un dollaro d'argento al di là di un fiume. Assumendo che il fiume fosse largo 75 m, (a) quale *modulo minimo* della velocità iniziale sarebbe stato necessario affinché la moneta attraversasse il fiume, e (b) quanto tempo sarebbe rimasta in volo la moneta? Risposta (a) 27.1 m/s (b) 3.91 s

3.4 • MOTO CIRCOLARE UNIFORME

La Figura 3.11a mostra un oggetto in moto su un percorso circolare con la *velocità lineare* v costante in modulo. Spesso lo studente rimane sorpreso dal fatto che anche se l'oggetto si muove con velocità costante in modulo, ha tuttavia una accelerazione. Per vedere come ciò si verifica, consideriamo l'equazione che definisce l'accelerazione media $\bar{a} = \Delta v / \Delta t$ (Eq. 3.4).

Notiamo che l'accelerazione dipende dalla variazione del vettore velocità. Poiché la velocità è un vettore, un'accelerazione può essere prodotta in due modi come già osservato nel Paragrafo 3.1: per mezzo di una variazione nel modulo della velocità e da una variazione nella direzione della velocità. È questa ultima circostanza che si verifica per un oggetto che si muove lungo un percorso circolare con velocità in modulo costante. Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria. Mostriremo inoltre che il vettore accelerazione è perpendicolare al percorso e punta sempre verso il centro della circonferenza. Una accelerazione di questo tipo si dice *accelerazione centripeta* (che punta verso il centro) ed il suo modulo è dato da

Modulo della accelerazione centripeta

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad [3.19]$$

dove r è il raggio della circonferenza.

Per derivare l'Equazione 3.19, si consideri la Figura 3.11b. Qui un oggetto viene visto prima in un punto P con velocità v_i all'istante t_i e poi nel punto Q con velocità v_f in un istante successivo t_f . Supponiamo inoltre che v_i e v_f differiscano

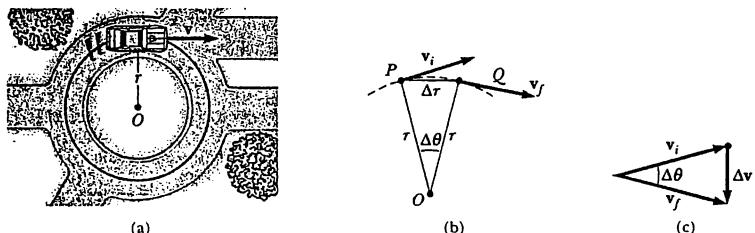


Figura 3.11 (a) Moto circolare di un oggetto che si muove con modulo della velocità costante. (b) Quando la particella si sposta da P a Q la direzione del vettore velocità cambia da v_i a v_f . (c) La costruzione per determinare la direzione della variazione di velocità, Δv , che è verso il centro della circonferenza.

solo in direzione; i loro moduli siano gli stessi (cioè $v_i = v_f = v$). Per calcolare l'accelerazione, partiamo dall'Equazione (3.4) che definisce l'accelerazione media:

$$\bar{a} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Questa equazione indica che dobbiamo sottrarre vettorialmente \mathbf{v}_i da \mathbf{v}_f , dove $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$ è la variazione di velocità. Poiché $\mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f$, il vettore $\Delta \mathbf{v}$ può essere determinato graficamente come mostrato dal triangolo dei vettori in Figura 3.11c. Si noti che, quando Δt è molto piccolo, anche Δr e $\Delta\theta$ sono molto piccoli. In questo caso, $\Delta \mathbf{v}$ sarà quasi parallelo a \mathbf{v}_i ed il vettore $\Delta \mathbf{v}$ sarà approssimativamente perpendicolare ad essi, puntando verso il centro della circonferenza.

Consideriamo ora il triangolo in Figura 3.11b che ha per lati Δr ed r . Questo triangolo e quello con lati Δr e r in Figura 3.11c sono simili. (Due triangoli sono *simili* se hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali). Ciò ci permette di scrivere una relazione fra le lunghezze dei lati:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

Questa equazione può essere risolta rispetto a Δv e l'espressione ottenuta può essere sostituita in $\bar{a} = \Delta v / \Delta t$ (Eq. 3.4) per dare

$$\bar{a} = \frac{v \Delta r}{r \Delta t}$$

Ora immaginiamo che i punti P e Q in Figura 3.11b divengano estremamente prossimi l'uno all'altro. In questo caso, il vettore $\Delta \mathbf{v}$ punterebbe verso il centro del percorso circolare, e poiché l'accelerazione è nella direzione di $\Delta \mathbf{v}$, anch'essa sarebbe diretta verso il centro. Inoltre, allorché i due punti P e Q si avvicinano l'uno all'altro, Δt tende a zero, ed il rapporto $\Delta r / \Delta t$ tende alla velocità v . Quindi, nel limite $\Delta t \rightarrow 0$, l'accelerazione è

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Quindi, concludiamo che nel moto circolare uniforme, l'accelerazione è diretta all'interno verso il centro della circonferenza ed ha un modulo pari a v^2/r . Dovreste essere in grado di dimostrare che le dimensioni di a_r sono L/T^2 , per come richiesto, in quanto trattasi di una accelerazione vera e propria.

In molte situazioni è conveniente descrivere il moto di una particella che si muove a velocità costante su una circonferenza di raggio r , in funzione del periodo, T , definito come il tempo richiesto per una rivoluzione completa. Nel tempo T , la particella si muove su un percorso di $2\pi r$, uguale alla lunghezza della traiettoria circolare. Quindi, poiché il modulo della velocità è uguale alla lunghezza della circonferenza divisa per il periodo, ossia $v = 2\pi r/T$, segue che

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad [3.20]$$

Fisica ragionata 3

Un aereo va da Los Angeles a Sydney, Australia. Per 15 ore, dopo aver raggiunto la quota di crociera, gli strumenti dell'aereo indicano che la velocità rispetto al suolo si è mantenuta ancorata costantemente a 700 km/h e che la prua dell'aereo non è variata. Si può affermare che la velocità dell'aereo è rimasta costante?

Ragionamento La velocità non è rimasta costante, a causa della curvatura terrestre. Anche supponendo che il modulo della velocità non vari e che la prua sia sempre puntata verso Sydney (è ciò realmente possibile?), l'aereo viaggia attorno a una porzione significativa della circonferenza terrestre. Quindi, la direzione del vettore velocità varia. Potremmo estendere questo ragionamento immaginando che l'aereo passi su Sydney e continui (assumendo che abbia carburante sufficiente!) attorno alla Terra fino a quando arrivi di nuovo a Los Angeles. È impossibile per un aereo mantenere una velocità costante (relativa all'Universo, non alla superficie terrestre) e ritornare al suo punto di partenza.

ESERCIZIO 6 Trovare l'accelerazione di una particella che si muove con velocità costante in modulo pari a 8.0 m/s lungo una circonferenza di 2.0 m di raggio. Risposta 32 m/s^2 diretta verso il centro della circonferenza.

3.5 • ACCELERAZIONE TANGENZIALE E RADIALE

Consideriamo il moto di una particella lungo un percorso curvo in cui la velocità varia sia in direzione che in modulo, come descritto in Figura 3.12. In questa situazione la velocità della particella è sempre tangente al percorso, mentre il vettore accelerazione a forma ora un certo angolo con la tangente al percorso.

Quando la particella si muove lungo il percorso curvo di Figura 3.12 vediamo che la direzione del vettore accelerazione totale, \mathbf{a} , varia da punto a punto. Questo vettore può essere scomposto in due vettori componenti: un vettore componente radiale, a_r , ed un vettore componente tangenziale, a_t . Cioè, il vettore accelerazione totale, \mathbf{a} , può essere scritto come la somma vettoriale di questi vettori componenti:

Accelerazione totale

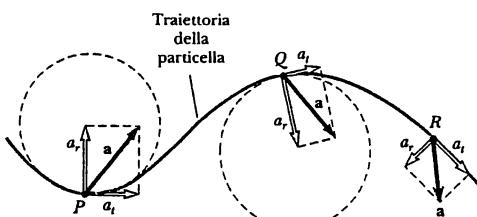
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t \quad [3.21]$$

L'accelerazione tangenziale è dovuta alla variazione del modulo della velocità della particella, ed il suo modulo è dato da

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad [3.22]$$

Accelerazione tangenziale

Figura 3.12 Il moto di una particella lungo una traiettoria curva arbitraria nel piano xy . Se il vettore velocità \mathbf{v} (sempre tangente alla traiettoria) cambia in direzione e modulo, i vettori componenti dell'accelerazione della particella sono un vettore tangente \mathbf{a}_t ed un vettore radiale \mathbf{a}_r .



L'accelerazione radiale è dovuta alla variazione della direzione del vettore velocità ed ha un modulo dato da

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Velocità
direzione

[3.23]

- **Accelerazione radiale o centripeta**

dove r è il raggio di curvatura del percorso nel punto in questione. Poiché a_r ed a sono i vettori componenti (fra loro perpendicolari) di \vec{a} , segue che $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$. Come nel caso del moto circolare uniforme, a_r punta sempre verso il centro di curvatura, come mostrato in Figura 3.12. Inoltre, per una data velocità, a_r è grande quando il raggio di curvatura è piccolo (come nei punti P e Q in Fig. 3.12) ed è piccola per r grande (come nel punto R). La direzione di a_r è la stessa di v (se v è crescente) o è opposta (se v è decrescente).

Notiamo che nel caso del moto circolare uniforme, in cui v è costante, $a_r = 0$ e l'accelerazione è sempre radiale, come descritto nel Paragrafo 3.4. Inoltre, se la direzione di v non muta allora non c'è accelerazione radiale ed il moto è unidimensionale ($a_r = 0$, ma a_t può essere diversa da zero).

Fisica ragionata 4

In un moto circolare uniforme, il vettore accelerazione è sempre perpendicolare al vettore velocità. (a) Supponiamo che una particella si muova con modulo della velocità uniforme attorno a una traiettoria ellittica. Qual è, in questo caso, la relazione fra i vettori accelerazione e velocità? (b) Consideriamo, ora, la traiettoria ellittica della cometa di Halley in orbita attorno al Sole. In questo caso il modulo della velocità *non* è uniforme – la cometa si muove più lentamente quando è lontana dal Sole e più rapidamente quando è vicina. In questo caso, i vettori accelerazione e velocità sono perpendicolari?

Ragionamento (a) Consideriamo prima il caso della particella in moto con modulo della velocità costante attorno a una traiettoria ellittica (Fig. 3.13a). Poiché il modulo della velocità è costante, non vi è componente dell'accelerazione tangente

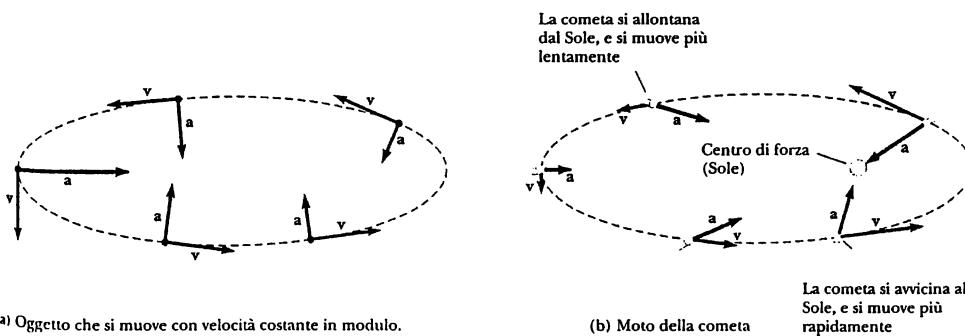


Figura 3.13 (Fisica ragionata 4)

alla traiettoria. Allora, l'accelerazione deve essere perpendicolare alla traiettoria, quindi, sempre perpendicolare al vettore velocità. Il modulo dell'accelerazione non è costante – esso sarà maggiore nei punti estremi dell'asse maggiore dell'ellisse, poiché la velocità in quei punti cambia la sua direzione più rapidamente. La Figura 3.13a mostra i vettori velocità e accelerazione in alcuni punti della traiettoria.

(b) Nel caso della cometa di Halley, o di qualunque altro oggetto in un'orbita ellittica attorno a un centro di forza gravitazionale, la direzione orientata dell'accelerazione è la stessa della direzione orientata della forza gravitazionale agente sull'oggetto, la quale è rivolta verso il *fuoco* dell'ellisse, dove si trova il centro della forza gravitazionale (Fig. 3.13b). Quindi, i vettori velocità e accelerazione non sono perpendicolari, eccetto nei punti estremi dell'asse maggiore dell'ellisse. Quando la cometa si allontana dal Sole, l'accelerazione ha una componente opposta alla velocità. Mentre, invece, quando si avvicina al Sole, l'accelerazione ha una componente concorde con la velocità. Ciò fa sì che essa rallenti quando si allontana dal Sole e diventi più rapida quando si avvicina al Sole. Si noti che in Figura 3.13b i vettori velocità hanno un modulo maggiore quando la cometa è in prossimità del Sole e un modulo minore quando è lontana.

Esempio 3.4 La sfera oscillante

Una sfera vincolata all'estremità di una fune lunga 0.50 m, oscilla su una circonferenza in un piano verticale sotto l'influenza della gravità, come in Figura 3.14. Quando la fune forma un angolo $\theta = 20^\circ$ con la verticale, la palla ha una velocità di 1.5 m/s. (a) Determinare la componente radiale dell'accelerazione a quell'istante.

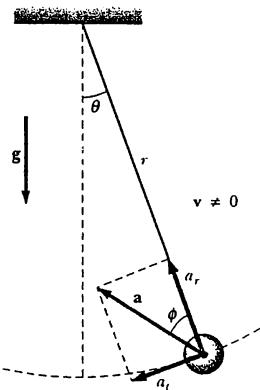


Figura 3.14 (Esempio 3.4) Moto circolare di una sfera legata ad una fune di lunghezza r . La sfera oscilla in un piano verticale e la sua accelerazione a ha un vettore componente radiale a_r ed uno tangenziale a_t .

Soluzione Poiché $v = 1.5 \text{ m/s}$ ed $r = 0.50 \text{ m}$, troviamo che

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(1.5 \text{ m/s})^2}{0.50 \text{ m}} = 4.5 \text{ m/s}^2$$

(b) Quando la sfera è ad un angolo θ rispetto alla verticale, ha un'accelerazione tangenziale di modulo $g \sin \theta$ (la componente di g tangente alla circonferenza). Pertanto, a $\theta = 20^\circ$, troviamo che $a_t = g \sin 20^\circ = 3.4 \text{ m/s}^2$. Trovare il modulo e la direzione dell'accelerazione totale a $\theta = 20^\circ$.

Soluzione Poiché $a = a_r + a_t$, il modulo di a a $\theta = 20^\circ$ è dato da

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(4.5)^2 + (3.4)^2} \text{ m/s}^2 = 5.6 \text{ m/s}^2$$

Se ϕ è l'angolo fra a e la fune, allora

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{a_t}{a_r} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{3.4 \text{ m/s}^2}{4.5 \text{ m/s}^2} \right) = 36^\circ$$

Notiamo che tutti i vettori – a, a_t ed a_r – variano in direzione e in modulo quando la sfera descrive la circonferenza. Quando si trova alla sua minima elevazione ($\theta = 0^\circ$), $a_t = 0$ in quanto non c'è componente tangenziale di g a questo angolo, ed a_r è massima poiché v è massima. Se la sfera ha una velocità sufficiente per raggiungere la posizione più alta ($\theta = 180^\circ$), a_t è di nuovo zero ma a_r è minima, poiché v è minima. Infine, nelle due posizioni orizzontali ($\theta = 90^\circ$ e 270°), $|a_r| = g$ ed a_r ha un valore compreso fra il suo minimo ed il suo massimo.

3.6 • VELOCITÀ RELATIVA E ACCELERAZIONE RELATIVA

Osservatori appartenenti a sistemi di riferimento diversi possono misurare spostamenti, velocità e accelerazioni diverse per una particella in moto. Cioè, due osservatori in moto l'uno rispetto all'altro, in generale, non concorderanno sul risultato di una misura.

Per esempio, considerando due automobili che procedono nella stessa direzione e verso con velocità di 50 km/h e 60 km/h, un passeggero nell'automobile più lenta affermerà che la macchina più veloce rispetto alla più lenta ha una velocità di 10 km/h. Naturalmente, un osservatore in quiete misurerà 60 km/h per la velocità dell'automobile più veloce. Questo esempio semplice dimostra che le misure di velocità sono diverse in sistemi di riferimento diversi.

Un altro esempio semplice è di immaginare un pacco abbandonato da un aeroplano che voli con velocità costante parallelamente al suolo. Un osservatore nell'aereo descriverà il moto del pacco come una retta verso il suolo. D'altra parte un osservatore al suolo vedrà la traiettoria del pacco come una parabola. Rispetto al suolo, il pacco ha una componente verticale di velocità (dovuta all'accelerazione di gravità e pari alla velocità misurata dall'osservatore nell'aereo) e una componente orizzontale di velocità (dovuta al moto dell'aereo). Se l'aereo continua a muoversi orizzontalmente con la stessa velocità, il pacco raggiungerà il suolo direttamente al di sotto dell'aereo (supponendo di trascurare l'attrito dell'aria)!

In una situazione più generale, consideriamo una particella posta nel punto P in Figura 3.15. Immaginiamo che il moto di questa particella venga

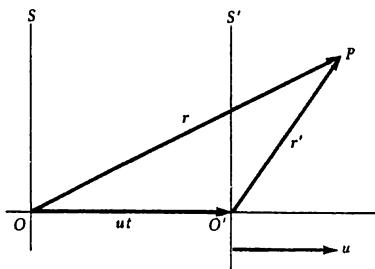


Figura 3.15 Una particella situata nel punto P è descritta da due osservatori uno nel sistema di riferimento S fisso, l'altro nel sistema S' che si muove con velocità costante u verso destra. Il vettore \mathbf{r} è il vettore posizione della particella rispetto ad S , ed \mathbf{r}' il vettore posizione rispetto ad S' .

descritto da due osservatori, uno nel sistema di riferimento S , fisso rispetto alla Terra, l'altro nel sistema di riferimento S' , che si muove verso destra rispetto ad S con una velocità u costante³. (Rispetto a un osservatore in S' , S si muove verso sinistra con velocità $-u$). La collocazione di uno qualsiasi degli osservatori nel proprio sistema di riferimento è irrilevante ai fini della nostra discussione, ma tanto per precisare gli osservatori possono essere posti nell'origine.

³ La velocità relativa fra due sistemi di riferimento verrà indicata con il simbolo u piuttosto che v , il quale indicherà invece la velocità di punti materiali o corpi estesi in un particolare sistema di coordinate [N.d.T.].

Indichiamo a un certo istante t , la posizione della particella rispetto al riferimento S con il vettore posizione \mathbf{r} e la sua posizione rispetto al riferimento S' con il vettore \mathbf{r}' . Se le origini dei due sistemi di riferimento coincidono a $t = 0$, allora i vettori \mathbf{r} ed \mathbf{r}' sono correlati l'uno all'altro tramite l'espressione $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t$, ovvero

Trasformazione galileiana delle coordinate

$$\boxed{\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t} \quad [3.24]$$

Cioè, in un tempo t il riferimento S' si è spostato verso destra di $\mathbf{u}t$.

Derivando l'Equazione 3.24 rispetto al tempo e ricordando che \mathbf{u} è costante, otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u}$$

Trasformazione galileiana delle velocità

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}} \quad [3.25]$$

dove \mathbf{v}' è la velocità della particella osservata nel sistema S' e \mathbf{v} è la velocità osservata nel sistema S . Le Equazioni 3.24 e 3.25 sono note come le *equazioni delle trasformazioni di Galileo*.

Sebbene gli osservatori dei due sistemi di riferimento misureranno velocità diverse per le particelle, essi misureranno la stessa accelerazione quando \mathbf{u} è costante. Ciò risulta dall'Equazione 3.25 derivandola rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Ma $d\mathbf{u}/dt = 0$, dal momento che $\mathbf{u} = \text{costante}$. Perciò concludiamo che $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ essendo $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt$ ed $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. In conclusione, l'accelerazione misurata da un osservatore in un sistema di riferimento solidale con la Terra avrà lo stesso valore di quella misurata da un qualunque altro osservatore che si muova con velocità costante rispetto al primo osservatore.

Esempio 3.5 Una barca attraversa un fiume

Una barca che volge la prua esattamente a nord attraversa un largo fiume con una velocità di 10.0 Km/h rispetto all'acqua. Il fiume ha una velocità di 5.00 km/h esattamente verso est. Determinare la velocità della barca rispetto ad un osservatore fermo a terra.

Soluzione Abbiamo $v_{bf} = 10.0j$ km/h verso nord (velocità della *barca*, b , rispetto al *fiume*, f); $v_f = 5.00i$ km/h verso est (velocità del *fiume*, f , rispetto alla *terra*, t) e vogliamo calcolare v_{bt} , la velocità della *barca* rispetto alla *terra*. La nostra equazione diventa

$$v_{bt} = v_{bf} + v_f$$

I termini dell'equazione devono essere considerati come grandezze vettoriali; i vettori sono mostrati in Figura 3.16. La grandezza v_{bf} è verso nord, mentre v_f è

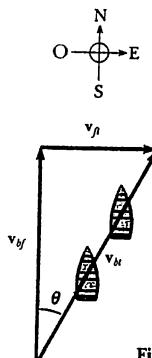


Figura 3.16 (Esempio 3.5)

verso est ed il vettore somma dei due v_{bt} si trova ad un angolo θ come rappresentato in Figura 3.15a. Si può dunque determinare la velocità della barca rispetto a terra con il teorema di Pitagora così:

$$v_{bt} = \sqrt{(v_{bf})^2 + (v_{ft})^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 + (5.00 \text{ km/h})^2}$$

$$= 11.2 \text{ km/h}$$

e la direzione di v_{bt} è

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_{ft}}{v_{bf}} \right) = \tan^{-1} \frac{5}{10} = 26.6^\circ$$

Quindi, la barca procederà ad una velocità di 11.2 km/h nella direzione 63.4° a nord-est rispetto alla terra.

ESERCIZIO 6 Se il fiume è largo 3.00 km, calcolare il tempo necessario affinché la barca lo attraversi.

Risposta 18 min.

Esempio 3.6 In quale direzione dovremmo navigare?

Se la barca dell'Esempio 3.6 viaggia con la stessa velocità di 10.0 km/h rispetto all'acqua e vuole spostarsi esattamente a nord, come in Figura 3.17, verso quale direzione dovrebbe puntare?

dove θ è in direzione nord-ovest.

Soluzione Sappiamo che

v_{bf} = velocità della *barca*, b, rispetto al *fiume*, f; v_{ft} = velocità del *fiume*, f, rispetto alla *terra*, t e dobbiamo calcolare la velocità v_{bt} , cioè la velocità della *barca*, b, rispetto alla *terra*, t. Abbiamo

$$v_{bt} = v_{bf} + v_{ft}$$

La relazione tra queste 3 grandezze, mostrate in Figura 3.17, concorda con la nostra intuizione che ci fa supporre che la barca dovrebbe puntare a monte della corrente per dirigersi direttamente a nord. La velocità v_{bt} può essere calcolata con il teorema di Pitagora, come:

$$v_{bt} = \sqrt{(v_{bf})^2 + (v_{ft})^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 - (5.00 \text{ km/h})^2}$$

$$= 8.66 \text{ km/h}$$

e la direzione di v_{bt} è

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_{ft}}{v_{bf}} = \tan^{-1} \left(\frac{5}{8.66} \right) = 30^\circ$$

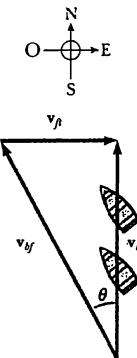


Figura 3.17 (Esempio 3.6)

SOMMARIO

Se una particella si muove con accelerazione costante \mathbf{a} ed ha una velocità \mathbf{v}_0 e posizione \mathbf{r}_0 a $t = 0$, la sua velocità e posizione ad ogni istante successivo sono date da

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad [3.8]$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 \quad [3.9]$$

Per il moto bidimensionale nel piano xy con accelerazione costante, queste espressioni vettoriali sono equivalenti a due espressioni per le componenti, una per il moto lungo x con una accelerazione a_x ed una per il moto lungo y con una accelerazione a_y .

Il moto del proiettile è un moto bidimensionale con accelerazione costante, dove $a_x = 0$ ed $a_y = -g$. In questo caso, se $x_0 = y_0 = 0$, le componenti delle Equazioni 3.8 e 3.9 si riducono a:

$$v_x = v_{x0} = \text{costante} \quad [3.10]$$

$$v_y = v_{y0} - gt \quad [3.11]$$

$$x = v_{x0} t \quad [3.12]$$

$$y = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad [3.13]$$

dove $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$, $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$ sono le componenti della velocità iniziale del proiettile, θ_0 è l'angolo che v_0 forma con l'asse positivo delle x . Si noti che queste espressioni forniscono le componenti della velocità (da cui si ricava il vettore velocità), e le coordinate (da cui si ricava il vettore posizione) per ogni tempo t in cui il proiettile è in moto.

È utile considerare il moto del proiettile come la sovrapposizione di due moti: (1) un moto uniforme in direzione x , dove v_x resta costante e (2) un moto in direzione verticale, soggetto ad una accelerazione costante verso il basso di valore $g = 9,80 \text{ m/s}^2$.

Una particella che si muove su una traiettoria circolare di raggio r con velocità costante v è sottoposta ad una accelerazione centripeta (o radiale), a_r , poiché la direzione di \mathbf{v} varia nel tempo. Il modulo di \mathbf{a} , è dato da:

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad [3.19]$$

e la sua direzione è orientata sempre verso il centro della circonferenza.

Se una particella si muove lungo una traiettoria curva in modo tale che la direzione e il modulo di \mathbf{v} varino nel tempo, la particella ha una accelerazione vettoriale che può essere descritta da due vettori componenti: (1) un vettore componente radiale, a_r , che deriva dal cambiamento di direzione di \mathbf{v} , e (2) un vettore componente tangenziale a_θ , che deriva dalla variazione del modulo di \mathbf{v} . Il modulo di \mathbf{a} , è v^2/r ed il modulo di \mathbf{a}_θ è $d|v|/dt$.

La velocità di una particella, \mathbf{v} , misurata in un sistema di riferimento S è legata alla velocità della stessa particella, \mathbf{v}' , misurata in un sistema S' dalla relazione

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad [3.25]$$

dove \mathbf{u} è la velocità di S' relativa a S .

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] Se conoscete i vettori posizione di una particella in due punti lungo il suo percorso e conoscete anche il tempo che impiega per andare da un punto all'altro, potete determinare la velocità istantanea della particella? La sua velocità media? Spiegare.
 - [2] Spiegare se le seguenti particelle hanno una accelerazione: (a) una particella in moto rettilineo con velocità costante e (b) una particella in moto lungo una curva con velocità costante in modulo.
 - [3] Correggere la seguente affermazione "l'automobile
- oltrepassa la curva con una velocità costante di 90 km all'ora".
- [4] Un'astronave si muove nello spazio con velocità costante. Improvvamente una perdita di gas su un lato dell'astronave causa una accelerazione costante in una direzione perpendicolare alla velocità iniziale dell'astronave. L'orientazione dell'astronave non cambia, cosicché l'accelerazione rimane perpendicolare alla originaria direzione della velocità. Qual è la forma della traiettoria dell'astronave in questa situazione?

I numeri in riquadro indicano le domande le cui risposte si trovano nella Guida alla soluzione dei problemi.

- [5]** Una palla viene lanciata orizzontalmente dalla sommità di un palazzo. Un secondo dopo un'altra palla viene lanciata orizzontalmente dallo stesso punto con la stessa velocità. Per quale punto del moto le palle saranno più vicine l'una all'altra? La prima palla viaggerà sempre più veloce della seconda? Quale sarà l'intervallo di tempo fra gli urti delle palle col suolo? È possibile che la proiezione orizzontale della velocità della seconda palla vari in modo che le due arrivino al suolo contemporaneamente?
6. Alla fine del suo arco, la velocità di un pendolo è zero. La sua accelerazione in quel punto è anche zero?
7. Se una pietra viene abbandonata dall'albero di un battello, colpirà il ponte nello stesso punto a seconda che il battello sia fermo o si muova a velocità costante?
- [8]** Due proiettili vengono lanciati con lo stesso modulo della velocità iniziale, uno a un angolo θ rispetto al suolo e l'altro a un angolo $90^\circ - \theta$. Ambedue i proiettili colpiranno il suolo alla stessa distanza dal punto di lancio. I due proiettili resteranno in aria per lo stesso intervallo di tempo?
- [9]** Un proiettile viene sparato con una certa inclinazione rispetto alla direzione orizzontale e con una velocità iniziale v_0 . Si trascuri la resistenza dell'aria. Il proiettile si muove in caduta libera? Qual è la sua accelerazione lungo la direzione verticale? Qual è l'accelerazione lungo la direzione orizzontale?
10. Un proiettile percorre una traiettoria parabolica. Quali delle seguenti grandezze rimangono costanti? (a) la velocità; (b) l'accelerazione; (c) la componente orizzontale della velocità; (d) la componente verticale della velocità?
11. La massima gittata di un proiettile si ha quando viene sparato con un angolo di 45° rispetto alla direzione orizzontale, se si trascura la resistenza dell'aria. Se la resistenza dell'aria non è trascurabile, l'angolo ottimale per la massima gittata è minore o maggiore di 45° ? Discutere la risposta.
12. Un oggetto si muove lungo un cammino circolare con velocità di modulo v costante. (a) La velocità dell'oggetto è costante? (b) L'accelerazione è costante?
- Discutere le risposte.
13. Un proiettile viene sparato sulla Terra con una certa velocità. Un secondo proiettile viene sparato sulla Luna con la stessa velocità iniziale. Si determini, trascurando la resistenza dell'aria, quale proiettile avrà la gittata maggiore e quale raggiungerà la maggiore altezza massima. (L'accelerazione di gravità sulla Luna è circa 1.6 m/s^2).
- [14]** Ad una moneta su un tavolo viene impressa una velocità iniziale orizzontale tale che essa raggiunga l'estremità del tavolo e cada sul pavimento. Nello stesso istante in cui la moneta cade dall'estremità, una palla viene rilasciata dalla stessa altezza e cade sul pavimento. Spiegare perché i 2 oggetti raggiungono il pavimento simultaneamente, sebbene la moneta abbia una propria velocità iniziale.
- [15]** Descrivere come un guidatore può condurre una macchina a velocità costante in modulo in modo che (a) l'accelerazione sia zero o (b) il modulo dell'accelerazione resti costante.
- [16]** Una pattinatrice sul ghiaccio sta eseguendo la "figura a otto" che consiste in due percorsi circolari uguali e tangentì. Nel corso del primo avvolgimento l'atleta aumenta la sua velocità uniformemente, e durante il secondo avvolgimento si muove a velocità costante in modulo. Rappresentare il suo vettore accelerazione in diversi punti, lungo la traiettoria.
17. Disegnare i diagrammi di moto che rappresentano la velocità e l'accelerazione di un proiettile in diversi punti lungo la sua traiettoria se (a) il proiettile è sparato orizzontalmente e (b) se è sparato ad un angolo θ rispetto all'orizzontale.
18. Una palla da baseball viene lanciata in modo tale che siano note le componenti x e y della velocità. Trascurando la resistenza dell'aria, descrivere come sia possibile calcolare, nell'istante in cui la palla raggiunge il massimo della sua traiettoria, (a) le sue coordinate, (b) la sua velocità, (c) la sua accelerazione. Come cambierebbero questi risultati se fosse presa in considerazione la resistenza dell'aria?

PROBLEMI

Paragrafo 3.1 I vettori spostamento, velocità e accelerazione

- [1]** Un motociclista viaggia verso sud per 3.00 min. con una velocità di 20.0 m/s , successivamente si sposta per 2.00 min. verso ovest con una velocità di 25.0 m/s ed infine viaggia a 30.0 m/s , per 1 min., verso nord-ovest. Per questo viaggio di 6.00 min calcolare (a) il vettore spostamento del motociclista, (b) la rapidità media e (c) il vettore velocità media.
2. Supponiamo che la funzione del vettore posizione per una particella sia dato da $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ con $x(t) = at + b$ e $y(t) = ct^2 + d$, dove $a = 1.00 \text{ m/s}$, $b = 1.00 \text{ m}$, $c = 0.125 \text{ m/s}^2$, e $d = 1.00 \text{ m}$. (a) Calcolare la velocità media nell'intervallo di tempo da $t = 2.00 \text{ s}$ fino a $t = 4.00 \text{ s}$. (b) Calcolare la velocità e la rapidità all'istante $t = 2.00 \text{ s}$.
3. Una pallina da golf posta sul ciglio di un monticello viene colpita dalla mazza. Le coordinate, x e y , della

pallina sono espresse in funzione del tempo dalle relazioni:

$$x = (18.0 \text{ m/s})t \quad y = (4.00 \text{ m/s})t - (4.90 \text{ m/s}^2)t^2$$

- (a) Scrivere l'espressione vettoriale per la posizione \mathbf{r} in funzione del tempo utilizzando i versori \mathbf{i} e \mathbf{j} . Tramite le derivate ricavare (b) il vettore velocità \mathbf{v} e (c) il vettore accelerazione \mathbf{a} , in funzione del tempo. (d) Determinare le coordinate x e y della pallina per $t = 3.00$ s. Usando i versori \mathbf{i} e \mathbf{j} esprimere (e) la velocità \mathbf{v} e (f) l'accelerazione \mathbf{a} , per $t = 3.00$ s.

4. Le coordinate di un oggetto che si muove sul piano xy variano nel tempo secondo l'equazione $x = -(5.00 \text{ m}) \sin(t)$ e $y = (4.00 \text{ m}) - (5.00 \text{ m}) \cos(t)$, dove t è espresso in secondi. (a) Determinare i componenti della velocità e della accelerazione per $t = 0$ s. (b) Scrivere le espressioni per i vettori posizione, velocità, e accelerazione per qualsiasi tempo $t > 0$. (c) Descrivere la traiettoria dell'oggetto in un grafico xy .

Paragrafo 3.2 Moto in due dimensioni con accelerazione costante

5. A $t=0$, una particella in moto nel piano xy con accelerazione costante ha una velocità di $\mathbf{v}_0 = (3.00\mathbf{i} - 2.00\mathbf{j}) \text{ m/s}$ all'origine. A $t=3.00$ s, la sua velocità è $\mathbf{v} = (9.00\mathbf{i} + 7.00\mathbf{j}) \text{ m/s}$. Trovare (a) l'accelerazione della particella e (b) le sue coordinate ad un generico istante t .
6. Il vettore posizione di una particella varia nel tempo secondo l'espressione $\mathbf{r} = (3.00t - 6.00t^2\mathbf{j}) \text{ m}$. (a) Trovare le espressioni per la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo. (b) Determinare la posizione della particella e la velocità a $t = 1.00$ s.
7. Un pesce nuota nell'oceano, in un piano orizzontale, con una velocità $\mathbf{v}_0 = (4.00\mathbf{i} + 1.00\mathbf{j}) \text{ m/s}$ ad una distanza da una roccia, individuata dal vettore: $\mathbf{r}_0 = (10.0\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) \text{ m}$. Dopo avere nuotato per 20.0 s, con accelerazione costante, il pesce ha raggiunto una velocità $\mathbf{v} = (20.0\mathbf{i} - 5.00\mathbf{j}) \text{ m/s}$. Determinare (a) le componenti dell'accelerazione; (b) la direzione della accelerazione rispetto al versore \mathbf{i} ; (c) la posizione del pesce e la sua direzione di spostamento, al tempo $t = 25.0$ s.
8. Una particella inizialmente posta nell'origine ha una accelerazione $\mathbf{a} = 3.00 \text{ j m/s}^2$ ed una velocità iniziale $\mathbf{v}_0 = 5.00\mathbf{i} \text{ m/s}$. Trovare (a) il vettore posizione e la velocità ad un generico istante t e (b) le coordinate e il modulo della velocità della particella a $t = 2.00$ s.

Paragrafo 3.3 Moto dei proiettili

(In tutti i problemi trascurare la resistenza dell'aria. Usare $g = 9.80 \text{ m/s}^2$).

- In un bar, un avventore lancia lungo il banco un bocciale da birra vuoto perché venga riempito nuovamente. Il barista, momentaneamente distratto, non vede il bocciale, che cade al suolo, ad una distanza di 1.40 m dalla

base del banco. Se l'altezza del banco è di 0.860 m, calcolare (a) la velocità del bocciale al momento del distacco dal banco, (b) la direzione della velocità del bocciale nell'istante precedente all'impatto con il suolo.

10. Uno studente vuole misurare la velocità iniziale dei pallini sparati dal suo fucile da caccia. Esso punta il fucile in direzione orizzontale, verso un bersaglio, posto su un muro verticale, ad una distanza x . I pallini colpiscono il bersaglio ad una distanza y , lungo la verticale, più in basso rispetto alla posizione del fucile. (a) Dimostrare che la traiettoria di un pallino, nel percorso verso il bersaglio, è data dall'equazione $y = Ax^2$, dove A è una costante. (b) Esprimere la costante A in funzione della velocità iniziale e dell'accelerazione di gravità. (c) Se $x = 3.00 \text{ m}$ e $y = 0.210 \text{ m}$, qual è la velocità iniziale?

Un giocatore di golf vuole lanciare la pallina ad una distanza di 283 m. Se la pallina inizia a muoversi con un angolo di 15.0° rispetto all'orizzontale, determinare la velocità iniziale, necessaria perché raggiunga la distanza prevista.

12. Una strategia nel lancio delle palle di neve consiste nel lanciare una palla di neve a un alto angolo rispetto al suolo. Mentre il tuo avversario la guarda, tu ne lanci una seconda a un angolo minore cosicché essa arrivi in anticipo o allo stesso istante della prima. Si assuma che le due palle di neve vengano lanciate con la stessa velocità di 25.0 m/s , la prima ad un angolo di 70.0° rispetto all'orizzontale. (a) A quale angolo dovrebbe essere lanciata la seconda palla di neve affinché arrivi nello stesso punto della prima? (b) Quanti secondi dopo la prima deve essere lanciata la seconda perché arrivi contemporaneamente alla prima?

Un giocatore di tennis che si trova a 12.6 m dalla rete colpisce la palla a 3.00° dall'orizzontale. Per superare la rete, la palla deve alzarsi da terra di almeno 0.330 m. Se la palla riesce a superare la rete all'apice della sua traiettoria, quanto velocemente abbandona la racchetta?

14. Una granata viene sparata ad una velocità iniziale di 300 m/s con un'inclinazione di 55.0° sopra l'orizzontale. Espplode contro un lato di una montagna 42.0 s dopo essere stata sparata. Quali sono le coordinate x ed y del proiettile quando esplode, relativamente al punto in cui è stato sparato?

Un astronauta su un pianeta sconosciuto scopre che può saltare con una gittata massima di 15.0 m, se la sua velocità iniziale è di 3.00 m/s . Determinare il valore dell'accelerazione di gravità su tale pianeta.

16. Una palla viene lanciata da una finestra dell'ultimo piano di un edificio. La palla parte con una velocità iniziale di 8.00 m/s e con una inclinazione di 20.0° al disotto dell'orizzontale. La palla arriva al suolo dopo 3.00 s. Determinare (a) la distanza misurata dalla base dell'edificio, in un piano orizzontale, del punto di impatto con il suolo; (b) l'altezza da cui viene lanciata la palla; (c) il tempo impiegato dalla palla per raggiungere un punto

nell'aria, 10.0 m al disotto del livello di lancio.

- 17.** Una palla viene lanciata, in direzione orizzontale, dalla cima di un edificio, alto 35.0 m. La palla colpisce il suolo, ad una distanza di 80.0 m dalla base dell'edificio. Determinare (a) il tempo impiegato dalla palla per toccare il suolo; (b) la sua velocità iniziale; (c) le componenti x , y della velocità un istante prima dell'impatto con il suolo.
- 18.** Un cannone con una velocità iniziale di 1000 m/s viene usato per colpire un bersaglio sulla cima di una montagna. Il bersaglio è posto a 2000 m lungo l'orizzontale e a 800 m rispetto al suolo. A quale angolo, rispetto al suolo, deve sparare il cannone?
- 19.** Un calciatore calcia il pallone ad una distanza di 36.0 m dalla porta. Il pallone deve evitare la traversa, che ha un'altezza di 3.05 m. Il pallone lascia il suolo con un angolo di 53.0° rispetto all'orizzontale e velocità di 20.0 m/s. (a) A che distanza passa sotto o sopra la traversa? (b) Il pallone sfiora la traversa durante la parte ascendente o discendente della traiettoria?
- 20.** Un vigile del fuoco, che si trova ad una distanza di 50.0 m da un edificio in fiamme, dirige il getto d'acqua con un angolo di 30.0° rispetto all'orizzontale. Se la velocità del getto è di 40.0 m/s, determinare l'altezza del getto d'acqua, quando colpisce l'edificio.
- 21.** La velocità di un proiettile quando raggiunge la sua massima altezza è metà della sua velocità quando si trova a metà della sua massima altezza. Qual è l'angolo di lancio del proiettile?
- 22.** Un calciatore calcia una pietra orizzontalmente da un'altezza di 40.0 m mandandola in una pozza di acqua. Se il giocatore ode il rumore dell'impatto 3.00 s dopo il calcio, qual era la velocità iniziale della pietra? Assumere che la velocità del suono in aria sia 343 m/s.
- 23.** Durante le Olimpiadi del 1968, a Città del Messico, Bob Beamon conquistò il record di salto in lungo, con una distanza di 8.90 m. Il suo baricentro si trovava, al momento dell'inizio del salto, a 1.00 m da terra, a 1.90 m al culmine e a 0.150 m all'arrivo al suolo. Usando questi dati, si determini (a) la durata del salto; (b) le componenti orizzontale e verticale della velocità al momento dello stacco e (c) l'angolo di stacco.
- Paragrafo 3.4 Moto circolare uniforme**
- 24.** L'orbita della Luna è approssimativamente circolare, con un raggio medio di 3.84×10^8 m. La Luna impiega 27.3 giorni per completare un giro di rivoluzione attorno alla Terra. Determinare (a) la velocità media orbitale della Luna e (b) l'accelerazione centripeta.
- 25.** Un atleta mette in rotazione un disco di massa 1 kg lungo un percorso circolare di raggio 1.06 m (Figura P3.25). La massima velocità del disco è 20.0 m/s. Determinare il modulo della massima accelerazione radiale del disco.
- 26.** Uno pneumatico di raggio 0.500 m ruota con una velocità angolare costante di 200 giri per minuto.
- 
- Figura P3.25**
- Trovare la velocità e l'accelerazione di un sassolino posto nel battistrada.
- 27.** Il giovane Davide, che uccise Golia, provò varie fionde, prima di affrontare il gigante. Egli trovò che con una fionda di 0.600 m di lunghezza poteva mettere in rotazione la fionda ad una frequenza di 8.00 giri/s. Con una lunghezza di 0.900 m, la frequenza di rotazione era solo di 6.00 giri/s. Determinare (a) quale frequenza di rotazione produce la maggiore velocità lineare; (b) l'accelerazione centripeta per la frequenza di 8.00 giri/s; (c) l'accelerazione centripeta per 6.00 giri/s.
- 28.** Un astronauta sulla Luna spara un cannone in modo tale che il proiettile abbandoni la canna orizzontalmente. (a) Quale deve essere la velocità iniziale del proiettile affinché faccia un giro completo attorno alla Luna e ritorni nel punto iniziale? (b) Quanto tempo sta in volo il proiettile? Assumere che l'accelerazione di gravità sulla Luna sia un sesto di quella sulla Terra.
- 29.** Se la rotazione della Terra aumentasse di modo che l'accelerazione centripeta fosse uguale all'accelerazione gravitazionale all'equatore, (a) quale sarebbe la velocità tangenziale di una persona che si trovasse all'equatore, e (b) quanto durerebbe il giorno?

Paragrafo 3.5 Accelerazione tangenziale e radiale

30. Un'automobile compie un percorso circolare, di raggio $r = 20.0 \text{ m}$, con una velocità che cresce nel tempo di 0.600 m/s^2 . Determinare, quando la velocità istantanea dell'automobile è 4.00 m/s , (a) la componente tangenziale dell'accelerazione; (b) la componente centripeta dell'accelerazione; (c) il modulo e la direzione del vettore accelerazione.
31. Un treno affrontando una curva rallenta da 90.0 km/h a 50.0 km/h nei 15.0 s che impiega a completare la curva. Il raggio della curva è 150 m . Calcolare l'accelerazione nel momento in cui la velocità del treno è 50.0 km/h , assumendo che in questo momento continua a decelerare.
32. Un punto a 20.0 cm dal centro di un piatto rotante di un giradischi accelera dalla quiete fino a una velocità finale di 0.700 m/s in 1.75 s . Per $t = 1.25 \text{ s}$, trovare il modulo e la direzione orientata (a) dell'accelerazione centripeta, (b) dell'accelerazione tangenziale, e (c) dell'accelerazione totale del punto.
33. La Figura P3.33 rappresenta l'accelerazione totale di una particella che si muove in verso orario su una circonferenza di raggio 2.50 m ad un certo istante. A questo istante, trovare (a) l'accelerazione centripeta, (b) la velocità della particella e (c) la sua accelerazione tangenziale.

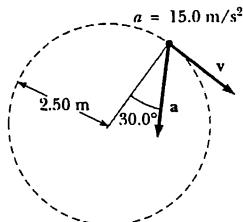


Figura P3.33

34. Una palla oscilla lungo una circonferenza verticale all'estremità di una fune lunga 1.50 m . Quando si trova a 36.9° dal punto più basso in fase di salita, la sua accelerazione è $(-22.5\mathbf{i} + 20.2\mathbf{j}) \text{ m/s}^2$. Per questo istante, (a) disegnare un diagramma vettoriale che mostri i componenti della sua accelerazione, (b) determinare il modulo dell'accelerazione centripeta, e (c) determinare la rapidità e il vettore velocità della palla.

Paragrafo 3.6 Velocità relativa ed accelerazione relativa

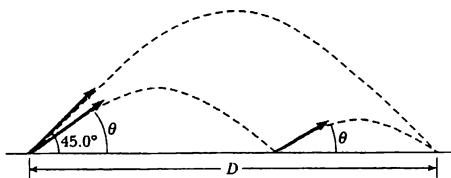
35. Un fiume ha una corrente di 0.50 m/s . Uno studente nuota controcorrente per 1.00 km e ritorna al punto di partenza. Se lo studente può nuotare con una velocità di 1.20 m/s in acque ferme, quanto tempo richiede

dei percorso? Confrontare con il tempo occorrente per un percorso uguale se le acque fossero ferme.

36. Due canoisti, con due canoe identiche, vogano con lo stesso ritmo e potenza in un fiume. Il primo voga controcorrente (e si muove controcorrente), mentre il secondo voga secondo la corrente. Un osservatore sulla riva del fiume osserva che le loro velocità sono 1.20 m/s e 2.90 m/s rispettivamente. Qual è la velocità della corrente del fiume?
37. Un battello attraversa un fiume, largo $w = 160 \text{ m}$, che scorre con una velocità costante di 1.50 m/s . Il pilota mantiene una direzione perpendicolare al fiume e controlla il motore, in modo da mantenere una velocità costante, rispetto all'acqua, di 2.00 m/s . (a) Qual è la velocità del battello rispetto ad un osservatore fermo sulla riva? (b) Quanto dista il battello dalla posizione iniziale, lungo la direzione della corrente, quando raggiunge la riva opposta?
38. Il pilota di un aeroplano nota che la bussola indica una rotta esattamente ad ovest. La velocità dell'aeroplano rispetto all'aria è di 150 km/h . Se tira vento a 30.0 km/h in direzione nord, trovare la velocità dell'aeroplano rispetto al suolo.
39. Un'automobile viaggia verso est con una velocità di 50.0 km/h . La pioggia sta cadendo verticalmente rispetto al suolo. Le tracce della pioggia sui finestrini laterali formano un angolo di 60.0° gradi con la verticale. Trovare la velocità della pioggia (a) rispetto all'automobile e (b) rispetto al suolo.
40. Un ragazzino, in pericolo di annegare in un fiume, viene trascinato dalla corrente, che scorre con una velocità uniforme di 2.50 km/h . Il ragazzo è a 0.600 km dalla riva e a 0.800 km a monte dell'imbarcadero da cui parte un battello di salvataggio. (a) Se il battello procede alla sua massima velocità di 20.0 km/h rispetto all'acqua, quale rotta rispetto alla riva, dovrebbe seguire il pilota? (b) Quale angolo dovrà assumere la velocità v con la direzione della riva? (c) Quanto tempo impiegherà il battello per raggiungere il ragazzo?
41. Uno studente di Fisica sta leggendo in un vagone aperto di un treno che sta viaggiando lungo un binario orizzontale, con una velocità di 10.0 m/s . Lo studente getta una palla in aria con un angolo iniziale di 60.0° rispetto all'orizzontale, nella direzione del binario. Un professore, che è fermo sul marciapiede presso il treno osserva che la palla sale lungo la verticale. Quale altezza massima raggiungerà la palla?

Problemi generali

42. Al tempo $t = 0$ una particella parte dall'origine del sistema di riferimento con una velocità di 6.00 m/s , nella direzione positiva dell'asse y . La sua accelerazione è data da: $\mathbf{a} = (2.00\mathbf{i} - 3.00\mathbf{j}) \text{ m/s}^2$. Quando la particella raggiunge il valore massimo della coordinata y , la

- componente della velocità lungo l'asse y è nulla. Determinare in tale istante (a) la velocità della particella; (b) le coordinate x, y .
43. Una palla all'estremità di una fune ruota lungo una circonferenza orizzontale di raggio 0,300 m. Il piano della circonferenza è a un'altezza di 1,20 m dal suolo. La fune si rompe e la palla atterra a 2,00 (orizzontalmente) dal punto in cui la fune si rompe. Trovare l'accelerazione centripeta della palla durante il suo moto circolare.
44. Una palla viene colpita in modo tale da superare appena una parete alta 21,0 m, posta a 130 m dalla pedana di lancio. La palla è colpita ad un angolo di $35,0^\circ$ con l'orizzontale, e la resistenza dell'aria è trascurabile. Trovare (a) la velocità iniziale della palla, (b) il tempo che essa impiega a raggiungere la parete, (c) le componenti della velocità e il modulo della velocità della palla quando raggiunge la parete. (Supponiamo che la palla venga colpita ad 1,00 m di altezza rispetto al suolo).
45. L'astronauta che orbita attorno alla Terra nella fotografia si appresta ad attraccare con il satellite Westar VII. Il satellite si muove secondo un'orbita circolare a 600 km dalla superficie della Terra, dove l'accelerazione di gravità è $8,21 \text{ m/s}^2$. Il raggio della Terra è 6400 km. Determinare la velocità del satellite ed il tempo richiesto per completare un'orbita attorno alla Terra.
- 
- Figura P3.45 (Per gent. conc. della NASA)**
46. Una particella ha come componenti della velocità:
- $$v_x = +4.00 \text{ m/s} \quad v_y = -(6.00 \text{ m/s}^2)t + 4.00 \text{ m/s}$$
- Calcolare il modulo e la direzione [$\theta = \tan^{-1}(v_y/v_x)$] del vettore velocità al tempo $t = 2.00 \text{ s}$.
47. Durante una partita di baseball, gli esterni al campo
- lanciano la palla all'interno del campo stesso, facendola usualmente rimbalzare una volta, nella convinzione che la palla, in questo modo, arrivi prima. Si supponga che dopo il rimbalzo la palla mantenga lo stesso angolo θ di prima, come in Figura P.3.47 ma che perda metà della sua velocità. (a) Assumendo che la palla sia lanciata sempre con la stessa velocità iniziale, a che angolo θ dovrebbe essere lanciata la palla perché con 1 rimbalzo (traiettoria blu) raggiunga la stessa distanza D che raggiungerebbe se fosse lanciata con un'angolazione di $45,0^\circ$ senza rimbalzo (traiettoria verde)? (b) Determinare il rapporto fra i tempi dei lanci con un rimbalzo e senza rimbalzo.
- 
- Figura P3.47**
48. Una ragazza lancia una palla con una gittata massima di 40,0 m su un campo pianeggiante. A quale altezza essa lancerà la stessa palla verticalmente verso l'alto? Assumere che i muscoli imprimo la stessa velocità nei due casi.
49. Una ragazza lancia una palla con una gittata massima di R su un campo pianeggiante. A quale altezza essa lancerà la stessa palla verticalmente verso l'alto? Assumere che i muscoli imprimo la stessa velocità nei due casi.
50. Un bombardiere vola orizzontalmente con una velocità di 275 m/s rispetto al suolo ed a un'altezza di 3000 m. Si trascurino gli effetti di resistenza dell'aria. (a) A quale distanza rispetto alla verticale al di sotto del punto in cui viene sganciata, una bomba colpirà il suolo? (b) Se l'aereo mantiene la sua direzione e la sua velocità originaria, dove si troverà quando la bomba colpisce il suolo? (c) Per le suddette condizioni, a quale angolo rispetto alla verticale sotto il punto di sganciamento deve essere posto il mirino telescopico della bomba in modo che la bomba colpisca il bersaglio, visto nel mirino all'istante dello sganciamento?
51. Una palla da football è lanciata verso un ricevitore con una velocità iniziale di $20,0 \text{ m/s}$, ad un angolo di $30,0^\circ$ dall'orizzontale. In quell'istante, il ricevitore è a 20,0 m dal quarterback (lanciatore). In quale direzione e a quale velocità costante dovrebbe correre il ricevitore per afferrare la palla al livello al quale è stata lanciata?

- 52.** Uno sparviero vola, a 200 m dal suolo, con un percorso rettilineo ad una velocità di 10.0 m/s. Un topolino, che lo sparviero stava trasportando, si libera dalla presa. Lo sparviero continua il suo volo alla stessa velocità per 2.00 s prima di tentare di ricatturare la preda. Per far ciò, esso scende in linea retta a velocità costante e riesce a prenderlo il topolino a 3.00 m dal suolo. Si trascuri la resistenza dell'aria. Si determini (a) la velocità di discesa dello sparviero; (b) l'angolo della traiettoria, rispetto all'orizzontale, durante la discesa; (c) il tempo di "libertà" del topolino.
- 53.** Un razzo è lanciato ad un angolo di 53.0° con l'orizzontale con una velocità iniziale di 100 m/s. Esso si muove lungo la sua direzione iniziale di moto con un'accelerazione di 30.0 m/s^2 per 3.00 s. A questo punto il motore ha un guasto ed il razzo continua a muoversi in caduta libera. Trovare (a) la massima altezza raggiunta dal razzo, (b) il tempo totale di volo, e (c) la gittata.
- 54.** Un'automobile è parcheggiata su di una costa inclinata che sovrasta l'oceano, ad una inclinazione di 37.0° rispetto all'orizzontale. Il conducente negligente lascia la macchina senza marcia innestata ed il freno a mano è difettoso. La macchina parte dalla quiete giù per la discesa con una accelerazione costante di 4.00 m/s^2 e percorre 50.0 m per raggiungere il bordo dell'altura. Questa è a 30.0 m al di sopra dell'oceano. Trovare (a) la velocità dell'automobile quando raggiunge il bordo dell'altura ed il tempo che impiega ad arrivare lì, (b) la velocità dell'automobile quando arriva al livello dell'oceano, (c) il tempo totale in cui l'automobile è in movimento e (d) la posizione dell'automobile rispetto alla base dell'altura quando l'automobile arriva a livello dell'oceano.
- 55.** Il cocciuto coyote sta ancora una volta cercando di catturare la sua preda che gli sfugge. Il coyote calza un paio di pattini a rotelle Acme a propulsione, che gli forniscono una accelerazione orizzontale costante di 15.0 m/s^2 (Fig. P3.55). Il coyote parte da fermo da un punto a 70.0 m dal bordo di un burrone all'istante in cui la preda scatta in direzione del burrone. (a) Se la preda si muove con velocità costante, determinare la minima velocità che egli deve avere per raggiungere il burrone prima del

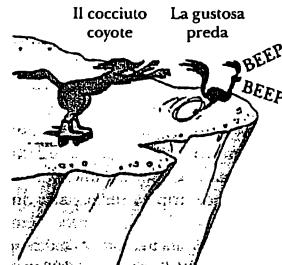


Figura P3.55

coyote. (b) Se il burrone è 100 m al di sopra della base di un canyon, determinare dove il coyote atterra nel canyon (si supponga che i suoi pattini siano ancora in azione quando è in "volo"). (c) Determinare le componenti della velocità del coyote proprio prima che atterri nel canyon. (Come al solito la preda si salva facendo una brusca virata sul ciglio del burrone).

- 56.** Un sciatore lascia la rampa di salto con una velocità di 10.0 m/s, a 15.0° al di sopra dell'orizzontale come in Figura P3.56. La discesa è inclinata a 50.0° , e la resistenza dell'aria è trascurabile. Trovare (a) la distanza alla quale atterra il saltatore sulla discesa e (b) le componenti della velocità proprio prima di atterrare. (Come pensate che i risultati possano essere influenzati se si includesse la resistenza dell'aria? Notare che i saltatori si piegano in avanti con le mani ai fianchi per aumentare la distanza. Perché ciò funziona?).

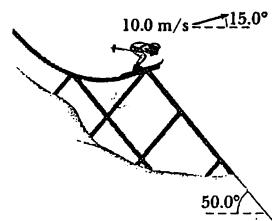


Figura P3.56

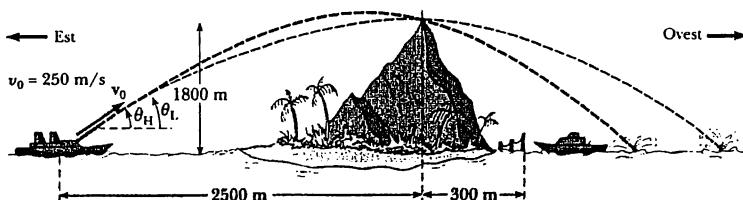


Figura P3.58

57. Dai una descrizione di quanto la tua mano possa essere accelerata senza colpire te stesso o chiunque altro. Calcolare un ordine di grandezza per la stima di questa accelerazione, assegnando le grandezze che misuri o stimi e i loro valori.
58. Una nave nemica è sulla riva est di una isola montagnosa come mostrato in Figura P3.58. La nave nemica può manovrare entro 2500 m dal picco della montagna alta 1800 m e può sparare proiettili con una velocità iniziale di 250 m/s. Se la riva occidentale è a 300 m orizzontalmente dal picco, quali sono le distanze dalla spiaggia ad ovest alle quali una nave può essere al sicuro dal bombardamento della nave nemica?

Problemi al calcolatore

- S1. Il giocatore che rinvia per i St. Louis Rams deve calciare il pallone a 40-45 yd (a 36.6-41.1 m) per raggiungere la squadra avversaria all'interno della linea delle 5 yd. Usare il Foglio Elettronico 3.1 per ottenere una stima dell'angolo al quale egli dovrebbe calciare il pallone. *Nota:* egli deve mantenere il pallone in aria il più a lungo possibile allo scopo di ottenere un tempo lungo per l'attacco. La velocità iniziale del pallone deve rientrare nel campo da 20 m/s a 30 m/s.
- S2. Modificare il Foglio Elettronico 3.1 aggiungendo due

colonne e calcolare la massima altezza raggiunta dal pallone nel Problema S1 e il tempo totale durante il quale rimane in aria.

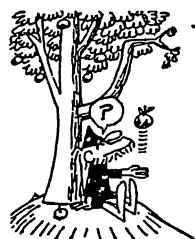
- S3. Le coordinate x e y di un proiettile sono date dalle Equazioni 3.12 e 3.13. Usando queste equazioni, predisporre un foglio elettronico per calcolare le coordinate x e y del proiettile e le componenti della sua velocità v_x e v_y in funzione del tempo. La velocità e l'angolo iniziali fungono da parametri d'ingresso. Usare la funzione grafica del foglio elettronico per ottenere i grafici delle coordinate x e y in funzione del tempo e anche i grafici di v_x e v_y in funzione del tempo. Usare il foglio elettronico per risolvere il seguente problema.

I Giants di New York stanno pareggiando con i Chicago Bears a pochi secondi dalla fine della partita. I Giants hanno il possesso del pallone e chiamano in causa il loro calciatore. Egli dovrebbe calciare il pallone a 52 yd (47.5 m) per fare il goal. Se la traversa della porta è alta 10 ft (3.05 m), a quale angolo e con quale velocità deve calciare il pallone per ottenere il punto vincente? Vi è una soluzione a questo problema? Le soluzioni si possono trovare variando i parametri e studiando i grafici di x in funzione di y .

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- (a) Sì. Sebbene il modulo della sua velocità sia costante, la direzione del moto (cioè, la direzione di v) può variare, causando un'accelerazione. Per esempio, un oggetto che si muove lungo una circonferenza con modulo della velocità costante ha un'accelerazione diretta verso il centro della circonferenza. (b) No. Un oggetto che si muove con il vettore velocità costante ha accelerazione nulla. Velocità costante significa che sia il modulo che la direzione orientata di v rimangono costanti.
- Una velocità costante è interpretata come costante sia in modulo che in direzione orientata. Quindi, una velocità costante implica una rapidità che non varia. D'altra parte, una rapidità costante indica soltanto che il modulo del vettore velocità è costante – la direzione può variare. Quindi, mentre una particella copre lo stesso percorso in intervalli di tempo uguali, la rapidità è costante, la sua direzione può variare con continuità, dando una velocità variabile. Un esempio familiare è la particella che si muove lungo un percorso circolare con modulo della velocità costante, di modo che la velocità varia continuamente in direzione.
- Dovresti semplicemente lanciarla in aria verticalmente verso l'alto. Poiché la palla si muove insieme a te, essa descrive una traiettoria parabolica con una componente orizzontale della velocità che è uguale alla tua.
- (a) Nel punto più alto della traiettoria, v è orizzontale e a è verticale. Questo è il solo punto nel quale la velocità e l'accelerazione sono perpendicolari. (b) Se l'oggetto è lanciato verticalmente verso l'alto o verso il basso, allora i vettori v e a saranno paralleli dall'inizio alla fine del moto. Diversamente, i vettori velocità e accelerazione non saranno mai paralleli.

Il mago di Id



da Parker e Hart



Per gent. conc. di John Hart e Field Enterprise, Inc.

4

Le leggi del moto

ARGOMENTI

- 4.1 Il concetto di forza
- 4.2 La prima legge di Newton e i sistemi inerziali
- 4.3 Massa inerziale
- 4.4 La seconda legge di Newton
- 4.5 La forza gravitazionale e il peso
- 4.6 La terza legge di Newton
- 4.7 Alcune applicazioni delle leggi di Newton

Nei due precedenti capitoli dedicati alla cinematica, abbiamo descritto il moto dei punti materiali (particelle) basandoci sulla definizione di spostamento, velocità ed accelerazione. Tuttavia, vorremmo essere in grado di rispondere a domande specifiche connesse alle cause del moto, come "quale meccanismo causa il moto?" e "perché alcuni oggetti accelerano più rapidamente di altri?". In questo capitolo descriveremo il cambiamento del moto delle particelle usando i concetti di forza e di massa. Discuteremo poi le tre leggi fondamentali del moto, che sono basate su osservazioni sperimentali e furono formulate circa tre secoli fa da Sir Isaac Newton.

La meccanica classica descrive la relazione fra il moto di un corpo e le forze agenti su di esso. La meccanica classica tratta soltanto oggetti grandi rispetto alle dimensioni degli atomi ($\approx 10^{-10}$ m) e che si muovono con velocità molto minori della velocità della luce (3.00×10^8 m/s).

In questo capitolo impareremo come descrivere l'accelerazione di un oggetto in funzione della forza risultante agente su di esso e della sua massa. Questa forza rappresenta l'interazione dell'oggetto con l'ambiente circostante. La massa è una misura della tendenza dell'oggetto a opporsi all'accelerazione quando una forza agisce su di esso.

Discuteremo anche le *leggi della forza* che descrivono come calcolare la forza agente su un oggetto se il suo ambiente circostante è noto. Vedremo che, pur essendo le leggi della

La cattura al lazo di un vitellino, come è mostrato in questa fotografia, presa a Steamboat nel Colorado, è un classico del rodeo. Le forze esterne che agiscono sul cavallo sono la forza d'attrito tra il cavallo e il suolo, la forza di gravità verso il basso, la forza impressa dalla fune legata al vitellino, la forza verso il basso del peso del cowboy sul cavallo, e la forza verso l'alto del suolo.

Saresti in grado di identificare le forze agenti sul vitellino?

(Fourbyfive, Inc.)



forza semplici nella forma, spiegano efficacemente un'ampia varietà di fenomeni ed osservazioni sperimentali. Esse, insieme alle leggi del moto, sono i fondamenti della meccanica classica.

4.1 • IL CONCETTO DI FORZA

Ciascuno di noi ha una comprensione elementare del concetto di forza tratto dall'esperienza quotidiana. Quando voi spingete o trascinate un oggetto, esercitate una forza su di esso. Quando si lancia o si calcia una palla si esercita una forza. In questi esempi, la parola *forza* è associata al risultato dell'attività muscolare e ad un qualche cambiamento nello stato di moto di un oggetto. Però, le forze non sempre causano il movimento di un oggetto. Per esempio, se siete seduti al tavolo leggendo questo libro, la forza di gravità agisce sul vostro corpo e tuttavia voi restate in quiete. Voi potete spingere un blocco di pietra senza riuscire a metterlo in moto.

Quale forza (se pure ce n'è qualcuna) fa sì che una stella distante si muova liberamente nello spazio? Newton rispose a domande del genere asserendo che il cambiamento nella velocità di un oggetto è causato da forze non equilibrate. Pertanto, se un oggetto si muove di moto uniforme (velocità costante), nessuna forza è necessaria per mantenere il moto. Poiché solamente una forza può causare un cambiamento di velocità, possiamo pensare la forza come ciò che fa sì che un corpo acceleri.

Consideriamo, ora, una situazione in cui parecchie forze agiscano simultaneamente su un oggetto. In questo caso, l'oggetto accelererà soltanto se la forza netta agente su di esso è diversa da zero. Ci riferiremo spesso alla forza netta come alla *forza risultante*, ovvero la *forza non equilibrata*. Se la *forza risultante è zero, l'accelerazione è zero e la velocità dell'oggetto rimane costante*. Cioè, se la forza risultante agente sull'oggetto è zero, o l'oggetto sarà in quiete o si muoverà con velocità costante. **Quando la velocità di un corpo è costante oppure il corpo è in quiete, si dice che è in equilibrio.**

In questo capitolo saremo interessati alla relazione fra la forza agente su un oggetto e l'accelerazione di quell'oggetto. Se si tira una molla, come in Figura 4.1a, la molla si allunga. Se la molla è calibrata, la distanza di cui si allunga può essere adoperata per misurare l'intensità della forza. Se si tira un carrello in modo sufficiente a vincere l'attrito, come in Figura 4.1b, esso si muoverà. Infine, quando si calcia un pallone, come in Figura 4.1c, il pallone viene sia deformato che messo in moto. Questi sono tutti esempi di una classe di forze dette *forze di contatto*. Cioè, esse rappresentano il risultato di un contatto fisico fra due oggetti.

Un'altra classe di forze, che non comportano il contatto fisico fra due oggetti ma agiscono attraverso lo spazio vuoto, sono note come *campi di forza*. La forza di attrazione gravitazionale fra due oggetti è un esempio di questa classe di forze, illustrata in Figura 4.1d. Questa forza gravitazionale tiene gli oggetti legati alla Terra ed è l'origine di ciò che comunemente chiamiamo *peso* di un oggetto. I pianeti del nostro sistema solare sono tenuti insieme dall'azione delle forze gravitazionali. Un altro esempio comune di un campo di forza è la forza elettrica che una carica elettrica esercita su di un'altra, come in Figura 4.1e. Queste cariche possono essere un elettrone e un protone che formano un atomo di idrogeno. Un terzo esempio di un campo di forza è la forza esercitata da una barra magnetica su un pezzo di ferro, come mostrato in Figura 4.1f. Le forze che tengono insieme il nucleo atomico sono pure campi di forza ma con un raggio d'azione

- *L'accelerazione di un corpo è dovuta a una forza esterna*

- *Definizione di equilibrio*



Un pallone di football si mette in moto grazie alla forza F dovuta al piede del calciatore. Il pallone si distorce per il breve momento che è a contatto col piede. (Ralph Cowan, Tony Stone Worldwide)

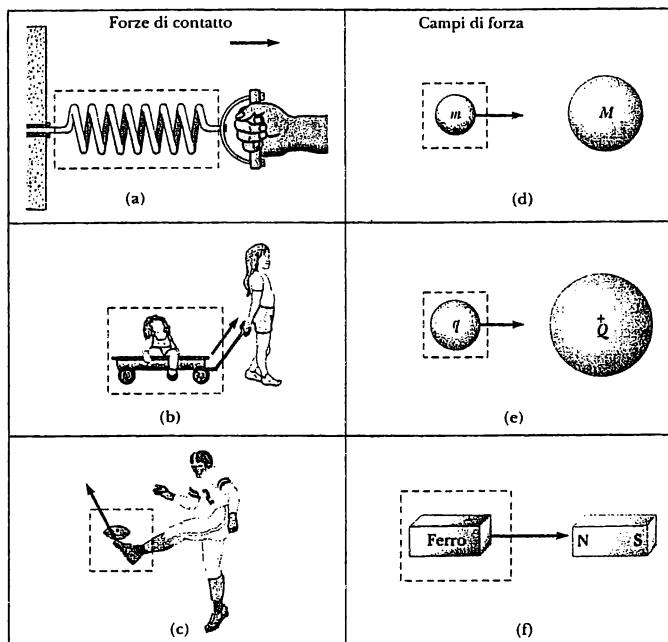


Figura 4.1 Alcuni esempi di forze applicate a vari oggetti. In ciascun caso una forza è esercitata sulla particella o oggetto entro l'area racchiusa dal riquadro tratteggiato. L'ambiente esterno all'area racchiusa dal riquadro tratteggiato fornisce la forza sull'oggetto.

cortissimo. Esse sono le interazioni dominanti per particelle le cui distanze di separazione sono dell'ordine di 10^{-15} m.

I primi scienziati, compreso lo stesso Newton, ebbero delle difficoltà con il concetto di forze agenti fra due corpi non in contatto. Per superare questo problema concettuale, Michael Faraday (1791-1867) introdusse il concetto di *campo*. Secondo questo approccio, quando una massa m_1 è posta in un punto P vicino a una massa m_2 , si può dire che m_1 interagisce con m_2 in virtù del campo gravitazionale che esiste in P . Il campo in P è creato dalla massa m_2 . Analogamente, esiste un campo nella posizione di m_2 creato da m_1 . Di fatto, tutti gli oggetti creano un campo gravitazionale nello spazio attorno ad essi.

La distinzione fra forze di contatto e campi di forze non è così netta come si sarebbe portati a ritenerne dalla precedente discussione. A livello atomico, le cosiddette forze di contatto sono in realtà dovute alle forze elettriche repulsive (campi) del tipo illustrato in Figura 4.1e. Sviluppando i modelli per i fenomeni macroscopici, è conveniente usare ambedue le classificazioni delle forze. Tuttavia, le sole forze fondamentali note in natura sono (1) l'attrazione gravitazionale fra oggetti, (2) le forze elettromagnetiche fra cariche, (3) le forze nucleari forti fra particelle subatomiche, e (4) le forze nucleari deboli (la cosiddetta interazione debole) che nascono in certi processi di decadimento radioattivo. Nella fisica classica saremo interessati soltanto alle forze gravitazionali ed elettromagnetiche.

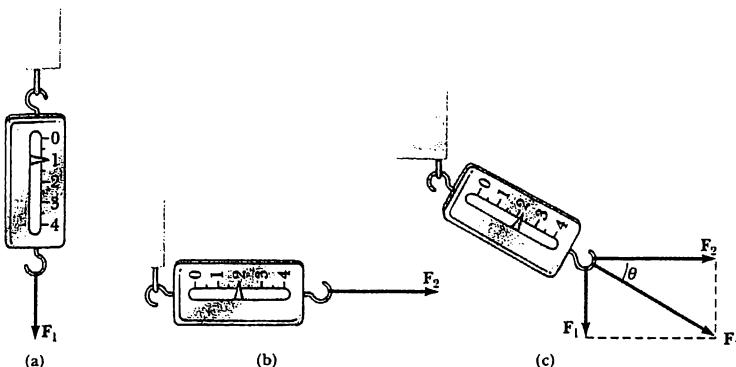


Figura 4.2 La natura vettoriale di una forza viene comprovata con una molla graduata. (a) La forza verticale diretta verso il basso F_1 deforma la molla di 1 unità. (b) La forza orizzontale F_2 deforma la molla di 2 unità. (c) La combinazione di F_1 ed F_2 deforma la molla di $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ unità.

Per misurare una forza è conveniente usare la deformazione di una molla. Supponiamo che una forza sia applicata verticalmente ad una molla con l'estremità superiore fissa, come in Figura 4.2a. Possiamo calibrare la molla definendo l'unità di forza, F_1 , come la forza che produce una elongazione di 1 cm. Se una forza F_2 , applicata orizzontalmente come in Figura 4.2b produce una elongazione di 2.00 cm, il modulo di F_2 è di due unità. Se le due forze F_1 ed F_2 sono applicate simultaneamente, come in Figura 4.2c, la elongazione della molla avrà il valore $\sqrt{5} = 2.24$ cm. La singola forza F che produrrebbe la stessa elongazione è la somma vettoriale di F_1 ed F_2 , come descritto in Figura 4.2c. Cioè, $|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{5}$ unità e la sua direzione è $\theta = \arctan(-0.500) = -26.6^\circ$. Poiché le forze sono vettori, bisogna adoperare le regole della somma vettoriale per ottenere la forza risultante su un corpo.

Le molle che si allungano in proporzione a una forza applicata obbediscono alla legge di Hooke. Tali molle possono essere costruite e calibrate per misurare forze incognite.

4.2 • LA PRIMA LEGGE DI NEWTON E I SISTEMI INERZIALI

Prima del 1600, gli scienziati ritenevano che lo stato naturale della materia fosse lo stato di quiete. Galileo fu il primo ad assumere un atteggiamento alquanto diverso rispetto al moto e allo stato naturale della materia. Egli concepì degli esperimenti concettuali, quali quello di un oggetto in moto su una superficie priva di attrito, e ne concluse che non è nella natura di un oggetto fermarsi una volta che sia posto in moto: piuttosto è nella sua natura opporsi alla decelerazione e all'accelerazione. Con le sue parole, "Una volta comunicata a un corpo una qualsiasi velocità, questa sarà invariabilmente mantenuta fino a quando non ci saranno cause esterne ritardanti".

Questo nuovo approccio al moto fu successivamente formalizzato da Newton in una forma nota come **prima legge del moto di Newton**:

Enunciato della prima legge di Newton

Un oggetto in quiete rimarrà in quiete ed un oggetto in moto perseverà nello stato di moto con velocità costante (cioè moto rettilineo a velocità costante) a meno che non subisca l'azione di una forza esterna risultante.

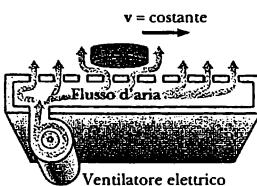


Figura 4.3 Un disco che si muove su uno strato d'aria è un esempio di moto uniforme, cioè un moto in cui l'accelerazione è zero.

Sistema inerziale •

In termini più semplici, possiamo dire che quando la forza risultante su un corpo è zero, la sua accelerazione è zero. Cioè, quando $\sum F = 0$ allora $a = 0$. Dalla prima legge concludiamo che un corpo isolato (un corpo che non interagisce con il suo ambiente circostante) o è in quiete o si muove con velocità costante.

Un esempio di moto uniforme su un piano pressoché privo di attrito è il moto di un disco leggero su uno strato d'aria, come in Figura 4.3. Se al disco viene impressa una velocità iniziale sarà necessaria una grande distanza prima che il disco si arresti. Questa idea viene adoperata nel gioco dell'"hockey" ad aria, in cui il disco compie molte collisioni con le pareti prima di arrestarsi.

Come secondo esempio consideriamo una navicella spaziale che viaggia nello spazio abbastanza lontana da qualsiasi pianeta o altra materia. La navicella richiede un qualche sistema di propulsione per *variare* la sua velocità. Comunque, se il sistema di propulsione viene spento quando la navicella raggiunge una velocità v , la navicella prosegue nello spazio con la stessa velocità e gli astronauti compiono un "viaggio gratuito" (cioè nessun sistema di propulsione è necessario per mantenerli in moto con velocità v).

Sistemi inerziali

La prima legge di Newton, a volte chiamata *legge di inerzia*, definisce uno speciale insieme di sistemi di riferimento, detti *sistemi inerziali*. Un sistema di riferimento inerziale è un sistema in cui è valida la prima legge di Newton. Qualunque sistema di riferimento che si muove con velocità costante rispetto a un riferimento inerziale è esso stesso inerziale. Un sistema di riferimento in moto con velocità costante rispetto alle stelle lontane è la migliore approssimazione di un riferimento inerziale. La Terra non è un riferimento inerziale a causa del suo moto orbitale attorno al Sole e del moto rotazionale attorno al suo asse. Nel suo moto secondo un'orbita approssimativamente circolare attorno al Sole, essa è soggetta a un'accelerazione centripeta di circa $4.4 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ verso il Sole. Inoltre, poiché la Terra ruota attorno al proprio asse una volta ogni 24 h, un punto sull'equatore subisce un'accelerazione centripeta addizionale di $3.37 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ verso il centro della Terra. Comunque, queste accelerazioni sono piccole rispetto a g e spesso possono essere trascurate. Nella maggior parte delle situazioni supponremo che un riferimento vicino o sulla superficie terrestre sia un riferimento inerziale.

Così, se un oggetto è in moto uniforme ($v = \text{costante}$), un osservatore in un riferimento inerziale (per esempio, uno in quiete rispetto all'oggetto) asserirà che l'accelerazione e la forza risultante sull'oggetto sono zero. Un osservatore in *qualsiasi altro riferimento inerziale* troverà anche che per l'oggetto $a = 0$ ed $F = 0$. Secondo la prima legge, un corpo "in quiete" ed uno in moto con velocità costante sono equivalenti. A meno che non venga precisato diversamente, usualmente scriveremo le leggi del moto rispetto ad un osservatore in quiete in un riferimento inerziale.

Fisica ragionata 1

Quando fu proposta la Teoria Copernicana del Sistema Solare, sorse una domanda naturale: "Che cosa fa sì che la Terra e gli altri pianeti si muovano nelle loro orbite attorno al Sole?". Una interessante risposta a questa domanda ci viene da Richard Feynman¹: "In quei giorni, una delle teorie proposte era quella che i pianeti girassero intorno perché accanto ad essi vi erano degli angeli invisibili, che battevano le loro ali e spingevano innanzi i pazienti... Vien fuori che allo scopo di tenere i pianeti nelle loro orbite, gli angeli invisibili avrebbero dovuto volare in una direzione diversa...". Cosa intende dire Feynman con ciò?

Ragionamento Primo, la domanda posta dai contemporanei di Copernico indica che essi non avevano una comprensione adeguata dell'inerzia, così come descritta dalla prima legge di Newton. Nel passato, prima di Galileo e Newton, l'interpretazione era quella secondo la quale il *moto* era causato da una forza. Ciò è diverso dalla nostra attuale comprensione secondo la quale sono le *variazioni del moto* causate da una forza. Perciò, era naturale per i contemporanei di Copernico chiedere quale fosse la forza che spingesse avanti i pianeti nelle loro orbite. Secondo la nostra attuale comprensione, è altrettanto naturale per noi renderci conto che non è necessaria alcuna forza – il moto semplicemente continua per inerzia. Quindi, nel linguaggio figurato di Feynman, non abbiamo bisogno di angeli che spingano i pianeti *da dietro*. Abbiamo, tuttavia, bisogno di angeli che spingano *verso l'interno* per fornire l'accelerazione centripeta necessaria alla variazione della loro direzione lungo la circonferenza. Naturalmente, gli angeli non sono reali, da un punto di vista scientifico – essi sono una metafora della *forza gravitazionale*.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

È possibile avere un moto in assenza di forza?

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Se una sola forza agisce su un oggetto, si verifica un'accelerazione? Se un oggetto subisce un'accelerazione, vi è una forza agente su di esso? Se un oggetto non subisce alcuna accelerazione, non vi è alcuna forza agente?

4.3 • MASSA INERZIALE

Se si tenta di cambiare la velocità di un oggetto, l'oggetto si oppone a questo cambiamento. L'inerzia è esclusivamente una proprietà di un singolo corpo: essa è una misura della risposta di un corpo a una forza esterna. Per esempio, consideriamo due grandi cilindri pieni di uguali dimensioni, uno di legno di balsa e l'altro di acciaio. Se si volessero spingere i cilindri lungo una superficie orizzontale scabra, la forza necessaria per dare al cilindro di acciaio una certa accelerazione dovrebbe essere maggiore della forza necessaria per dare al cilindro di balsa la stessa accelerazione. Pertanto, diciamo che il cilindro di acciaio ha inerzia maggiore di quella del cilindro in legno di balsa.

La massa si usa per misurare l'inerzia, e l'unità SI è il chilogrammo. Maggiore è la massa di un corpo, minore è la sua accelerazione (variazione del suo stato di moto) sotto l'azione di una forza applicata.

Una misura quantitativa di massa si può fare confrontando le accelerazioni

• Inerzia

¹ R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1, Reading, Massachusetts, 1963, Addison-Wesley Publishing Co., p. 7-2.

che una data forza produce su corpi diversi. Supponiamo che una forza che agisca su un corpo di massa m_1 produca un'accelerazione a_1 , e che la stessa forza agente su un corpo di massa m_2 produca un'accelerazione a_2 . Il rapporto delle due masse è definito come il rapporto *inverso* dei moduli delle accelerazioni prodotte dalla stessa forza:

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{a_2}{a_1} \quad [4.1]$$

Se una massa è uno standard (campione) noto, diciamo 1 kg, la massa incognita si può ottenere da misure di accelerazione. Per esempio, se la massa campione di 1 kg è sottoposta all'accelerazione di 3 m/s^2 sotto l'azione di una forza, una massa di 2 kg sarà soggetta a un'accelerazione di 1.5 m/s^2 sotto l'azione della stessa forza.

La massa è una proprietà intrinseca di un corpo ed è indipendente da ciò che lo circonda e dal metodo adoperato per misurarla. È un dato sperimentale che la massa è una grandezza scalare. Infine, la massa è una grandezza che obbedisce alle regole dell'aritmetica ordinaria. Cioè, masse diverse si possono mettere insieme in modo numericamente semplice. Per esempio, se mettiamo insieme una massa di 3 kg con una massa di 5 kg, la loro massa totale è di 8 kg. Ciò si può verificare sperimentalmente confrontando l'accelerazione di ciascun oggetto prodotta da una forza nota con l'accelerazione del sistema complessivo usando la stessa forza.

La massa non deve essere confusa con il peso. **Massa e peso sono due grandezze diverse.** Il peso di un corpo è uguale al modulo della forza esercitata dalla Terra sul corpo e varia con la posizione. Per esempio, una persona che pesa 90 unità di forza sulla Terra pesa soltanto 15 unità di forza sulla Luna. Tuttavia, la massa di un corpo è sempre la stessa ovunque. Un oggetto che ha una massa di 2 kg sulla Terra ha pure una massa di 2 kg sulla Luna.



Isaac Newton (1642-1727)

Fisico e matematico inglese, fu uno dei più brillanti scienziati della storia. Meno che trentenne, formulò i concetti fondamentali e le leggi della meccanica, scopri la legge di gravitazione universale e inventò il metodo matematico del calcolo. A seguito delle sue teorie, Newton fu in grado di spiegare il moto dei pianeti, le maree, e molti aspetti speciali del moto della Luna e della Terra. Interpretò anche molte osservazioni fondamentali riguardo la natura della luce. I suoi contributi alle teorie fisiche dominarono il pensiero scientifico per duecento anni e rimangono importanti a tutt'oggi.

(Giraudon/Art Resource)

4.4 • LA SECONDA LEGGE DI NEWTON

La prima legge di Newton spiega cosa accade a un oggetto quando la risultante di tutte le forze esterne agenti su di esso è zero. In tali circostanze, l'oggetto o rimane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. La seconda legge di Newton risponde alla domanda di cosa accade a un oggetto su cui agisce una forza risultante non nulla.

Si immagini una situazione in cui stiate spingendo un blocco di ghiaccio su una superficie orizzontale liscia. Quando esercitate una qualche forza orizzontale F il blocco si muove con una certa accelerazione a . Se applicate una forza di intensità doppia, l'accelerazione raddoppia. Analogamente, se la forza viene aumentata a $3F$, l'accelerazione è triplicata e così via. Da tali osservazioni possiamo concludere che l'**accelerazione di un oggetto è direttamente proporzionale alla forza risultante agente su di esso**.

L'accelerazione di un oggetto dipende anche dalla sua massa. Questo può essere compreso considerando il seguente insieme di esperimenti. Se applicate una forza F a un blocco di ghiaccio su una superficie priva di attrito, esso sarà sottoposto a una certa accelerazione a . Se la massa del blocco viene raddoppiata, la stessa forza applicata produrrà un'accelerazione $a/2$. Se la massa è triplicata, la stessa forza applicata produrrà un'accelerazione $a/3$ e così via. Sulla base di questa osservazione concludiamo che l'**accelerazione di un oggetto è inversamente proporzionale alla sua massa**.

Queste osservazioni sono riassunte nella **seconda legge di Newton**:

L'accelerazione di un oggetto è direttamente proporzionale alla forza risultante agente su di esso e inversamente proporzionale alla sua massa.

Così possiamo collegare la massa e la forza tramite la seguente enunciazione matematica della seconda legge di Newton:²

$$\sum F = ma$$

[4.2]

Dovreste notare che l'Equazione 4.2 è un'espressione *vettoriale* e quindi è equivalente alle seguenti tre equazioni fra componenti:

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z \quad [4.3]$$

- *Seconda legge di Newton*

- *Seconda legge di Newton applicata alle componenti*

Unità di forza e di massa

L'unità SI di forza è il **newton**, che è definito come la forza che agendo su una massa di 1 kg produce un'accelerazione di 1 m/s². Da questa definizione e dalla seconda legge di Newton, vediamo che il newton può essere espresso in termini delle seguenti unità fondamentali di massa, lunghezza e tempo:

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad [4.4]$$

- *Definizione del newton*

Le unità di forza, massa e accelerazione sono riassunte nella Tabella 4.1. La maggior parte dei calcoli che faremo nel nostro studio di meccanica sarà in unità SI. I fattori di conversione fra i tre sistemi sono dati in Appendice A.

Fisica ragionata 2

Avrai avuto, molto probabilmente, l'esperienza di trovarsi in un ascensore che accelera verso l'alto quando inizia a muoversi verso un piano più alto. In questo caso, ti senti più pesante. Se ti trovi al momento su una bilancia pesa-persone, essa misurerrebbe una forza maggiore del tuo peso. Quindi, tu hai un'evidenza tangibile e misurata che ti conduce a credere che in questa situazione tu sia più pesante. Sei tu più pesante?

Ragionamento No, non lo sei, il tuo peso non è cambiato. Per fornire l'accelerazione verso l'alto, il pavimento o la bilancia pesa-persone deve applicare una forza verso l'alto maggiore della tua forza peso. È proprio questa forza più grande che tu senti, che interpreti come sensazione di maggior peso. Una bilancia pesa-persone legge questa forza verso l'alto, per cui la sua indicazione viene pure incrementata.

TABELLA 4.1 Unità di forza, massa e accelerazione^a

Sistema di unità	Massa	Accelerazione	Forza
SI	kg	m/s ²	N = kg · m/s ²
cgs	g	cm/s ²	dyn = g · cm/s ²
Sistema inglese (convenzionale)	slug	ft/s ²	lb = slug · ft/s ²

^a 1 N = 10⁵ dyn = 0.225 lb.

² L'Equazione 4.2 è valida soltanto quando la velocità della particella è molto minore della velocità della luce. Tratteremo la situazione relativistica nel Capitolo 9.

Fisica ragionata 3

In un treno, le carrozze sono collegate per mezzo di *ganci*. I ganci tra le carrozze sono sottoposti a una tensione quando il treno è tirato dalla locomotiva che si trova in testa. Mentre ti muovi dalla locomotiva verso il vagone di servizio del treno [l'ultimo vagone del treno (*N.d.T.*)], la tensione nei ganci *aumenta, diminuisce, o rimane costante* quando la velocità del treno aumenta? Cosa accade se il macchinista applica i freni, di modo che i ganci sono soggetti a compressione? Quanto varia la forza di compressione, in questo caso, dalla locomotiva verso il vagone di servizio del treno?

Ragionamento La forza di tensione *diminuisce* dalla testa alla coda del treno. Il gancio fra la locomotiva e la prima carrozza deve applicare una forza sufficiente per accelerare tutte le altre carrozze. Muovendoti verso la coda del treno, ciascun gancio accelera una massa minore dietro di esso. L'ultimo gancio accelera soltanto il vagone di servizio, sicché esso è soggetto alla tensione minima. Se vengono applicati i freni, i ganci sono soggetti a compressione. La forza di compressione, anche in questo caso, decresce dalla testa alla coda del treno. Il primo gancio, dietro la locomotiva, deve applicare una forza sufficientemente grande per frenare tutte le carrozze che seguono. L'ultimo gancio deve applicare una forza grande abbastanza da frenare soltanto la massa del vagone di servizio.

Esempio 4.1 Un disco da hockey accelerato

Un disco da hockey di massa 0.30 kg scorre sulla superficie orizzontale priva di attrito di una pista di ghiaccio. Due forze agiscono sul disco, come mostrato in Figura 4.4. La forza F_1 ha modulo 5.0 N e la forza F_2 ha modulo 8.0 N. Determinare l'accelerazione del disco.

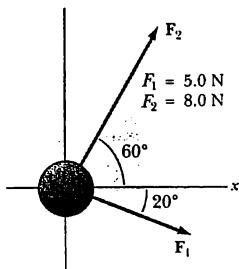


Figura 4.4 (Esempio 4.1) Un oggetto in moto su una superficie priva di attrito accelererà nella direzione della forza risultante, $F_1 + F_2$.

Soluzione La forza risultante nella direzione x è

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ \\ &= (5.0 \text{ N})(0.940) + (8.0 \text{ N})(0.500) = 8.7 \text{ N}\end{aligned}$$

La forza risultante nella direzione y è

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_{1y} + F_{2y} = -F_1 \sin 20^\circ + F_2 \sin 60^\circ \\ &= -(5.0 \text{ N})(0.342) + (8.0 \text{ N})(0.866) = 5.2 \text{ N}\end{aligned}$$

Possiamo ora adoperare la seconda legge di Newton, sotto forma di equazione fra le componenti x ed y dell'accelerazione:

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{8.7 \text{ N}}{0.30 \text{ kg}} = 29 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{5.2 \text{ N}}{0.30 \text{ kg}} = 17 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione ha modulo

$$a = \sqrt{(29)^2 + (17)^2} \text{ m/s}^2 = 34 \text{ m/s}^2$$

e la sua direzione è data da

$$\theta = \tan^{-1}(a_y/a_x) = \tan^{-1}(17/29) = 31^\circ$$

rispetto all'asse delle x positive.

ESERCIZIO 1 Determinare le componenti di una terza forza che, se applicata al disco, lo manterrà in equilibrio. Risposta $F_x = -8.7 \text{ N}$, $F_y = -5.2 \text{ N}$.

ESERCIZIO 2 Un oggetto di 6.0 kg è sottoposto a un'accelerazione di 2.0 m/s^2 . (a) Qual è il modulo della forza risultante agente sull'oggetto? (b) Se questa stessa forza viene applicata a un oggetto di 4.0 kg, quale accelerazione produce? Risposta (a) 12 N (b) 3.0 m/s^2 .

ESERCIZIO 3 Un'automobile di 1800 kg viaggia su una strada rettilinea a 25.0 m/s. Qual è il modulo della forza orizzontale costante necessaria per portare la macchina a fermarsi su una distanza di 80.0 m? Risposta 7030 N

4.5 • LA FORZA GRAVITAZIONALE E IL PESO

Siamo tutti consapevoli del fatto che i corpi vengono attratti dalla Terra. La forza esercitata dalla Terra su un oggetto è la forza gravitazionale F_g (Fig. 4.5). Questa forza è diretta verso il centro della Terra³. Il modulo della forza gravitazionale si chiama **peso dell'oggetto**, w .

Abbiamo visto che un corpo in caduta libera subisce un'accelerazione g diretta verso il centro della Terra. Applicando la seconda legge di Newton a un corpo in caduta libera di massa m , abbiamo $F = ma$. Poiché $F_g = mg$, segue che $a = g$ e

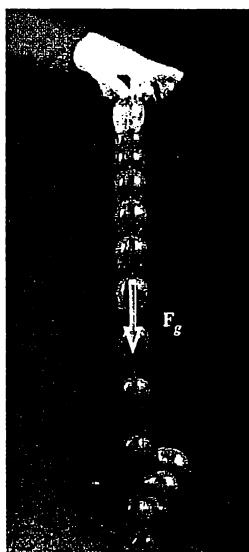
$$w = mg \quad [4.5]$$

Poiché dipende da g , il peso varia con la posizione geografica. (Non dovresti confondere il simbolo in corsivo g che usiamo per l'accelerazione di gravità con il simbolo g usato per i grammi). I corpi pesano di meno a grandi altezze che al livello del mare poiché g decresce con l'aumentare della distanza dal centro della Terra. Quindi, il peso, diversamente dalla massa, non è una proprietà intrinseca di un corpo. Per esempio, se un corpo ha una massa di 70 kg, allora il suo peso in un posto dove $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ è $mg = 686 \text{ N}$. In cima a una montagna dove $g = 9.76 \text{ m/s}^2$, il peso del corpo sarebbe 683 N. Quindi, se vuoi perdere peso senza fare una dieta,



L'astronauta Edwin Aldrin, Jr., cammina sulla Luna dopo che Apollo 11 ha toccato il suolo lunare. Il peso dell'astronauta sulla Luna è minore di quello sulla Terra ma la sua massa è la stessa. (Per gent. conc. della NASA).

Figura 4.5 L'unica forza che agisce su un corpo in caduta libera è la forza gravitazionale F_g . Il modulo di questa forza è il peso dell'oggetto, mg .



³ Questo enunciato è una semplificazione che ignora il fatto che la distribuzione della massa della Terra non è perfettamente sferica.

scala una montagna oppure pesati a 9000 m durante un volo in aereo.

Poiché $w = mg$, possiamo confrontare le masse di due corpi misurando i loro pesi con una molla tarata, ossia una bilancia. In un dato posto il rapporto dei pesi di due corpi è uguale al rapporto delle loro masse.

Fisica ragionata 4

In assenza dell'attrito dell'aria, è noto che tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione. Un oggetto pesante è attratto dalla Terra con una forza maggiore di un oggetto leggero. Perché l'oggetto pesante non cade più rapidamente?

Ragionamento È infatti vero che l'oggetto più pesante è attratto con una forza maggiore. L'intensità della forza è determinata dalla massa gravitazionale dell'oggetto. Ma la resistenza alla forza è, perciò, alla variazione dello stato di moto dell'oggetto, è rappresentata dalla massa inerziale dell'oggetto. Nella meccanica newtoniana la massa inerziale e la massa gravitazionale sono uguali. Quindi, se un oggetto ha una massa doppia di quella di un altro, esso è attratto dalla Terra con una forza doppia, ma esprime pure una resistenza doppia al cambiamento del suo stato di moto. Questi due contributi si annullano, cosicché la variazione dello stato di moto, l'accelerazione, è la stessa per tutti i corpi, indipendentemente dalla loro massa.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Supponiamo che tu stia parlando per mezzo di un telefono interplanetario con un amico che vive sulla Luna. Egli ti dice che in un concorso ha appena vinto un newton d'oro. Gli rispondi che anche tu hai partecipato alla versione terrestre dello stesso concorso e hai vinto pure un newton d'oro! Chi è più ricco?

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Una palla da baseball di massa m viene lanciata verso l'alto con una certa velocità iniziale. Se si trascura la resistenza dell'aria, qual è la forza agente sulla palla (a) quando raggiunge la metà dell'altezza massima e (b) quando raggiunge l'altezza massima?

4.6 • LA TERZA LEGGE DI NEWTON

Enunciato della terza legge di Newton

La terza legge di Newton afferma che se due corpi interagiscono, la forza esercitata sul corpo 1 dal corpo 2 è uguale in modulo ma di verso opposto alla forza esercitata sul corpo 2 dal corpo 1.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

[4.6]

Questa legge, che è illustrata in Figura 4.6a, è equivalente a stabilire che le forze si presentano sempre in coppia, ossia che non esiste una singola forza isolata. La forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2 è a volte chiamata *forza di azione*, mentre la forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1 è chiamata *forza di reazione*. In effetti, sia l'una che l'altra forza può essere indicata come azione o reazione. La forza di azione è uguale in modulo alla forza di reazione e di verso opposto. In tutti i casi, le forze di azione e reazione agiscono su oggetti diversi e devono essere dello stesso tipo. Per esempio, la forza agente su un proiettile in caduta libera è la forza della Terra sul proiettile, \mathbf{F}_g , e il modulo di questa forza è mg . La reazio-

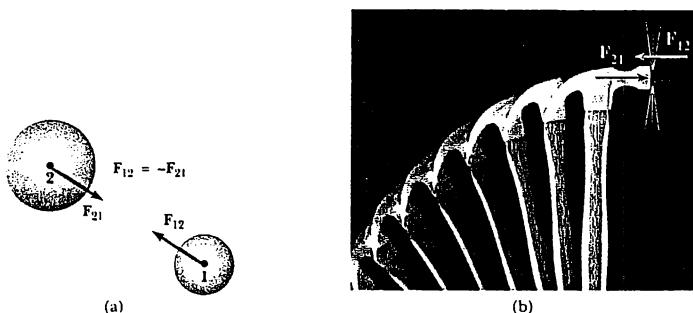


Figura 4.6 La terza legge di Newton. (a) La forza esercitata dal corpo 1 sul corpo 2 ha lo stesso modulo ma verso opposto alla forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1. (b) La forza esercitata dal martello sul chiodo è uguale in modulo ma di verso opposto alla forza esercitata dal chiodo sul martello. (John Gillmoure, The Stock Market)

ne a questa forza è la forza del proiettile sulla Terra, $\mathbf{F}'_g = -\mathbf{F}_g$. La forza di reazione \mathbf{F}'_g dovrebbe accelerare la Terra verso il proiettile proprio come la forza di azione, \mathbf{F}_g , accelera il proiettile verso la Terra. Tuttavia, poiché la Terra ha una massa molto grande, la sua accelerazione dovuta alla forza di reazione è trascurabilmente piccola.

Un altro esempio che chiama in causa la terza legge di Newton è mostrato in Figura 4.6b. La forza esercitata dal martello sul chiodo (l'azione) è uguale e in verso opposto a quella esercitata dal chiodo sul martello (la reazione). Puoi sperimentare direttamente la legge se batti un pugno contro un muro oppure calci un pallone da football col piede nudo. Sarai perfettamente in grado, in questo caso, di identificare le forze di azione e di reazione.

Come abbiamo ricordato precedentemente, la Terra esercita una forza \mathbf{F}_g su tutti gli oggetti. Se l'oggetto è un televisore fermo su un tavolo, come in Figura 4.7a, la forza di reazione a \mathbf{F}_g è la forza che il televisore esercita sulla Terra, \mathbf{F}'_g . L'apparecchio televisivo non accelera, perché esso è sostenuto dal tavolo. Il tavolo, quindi, esercita sul televisore una forza verso l'alto, \mathbf{n} , chiamata

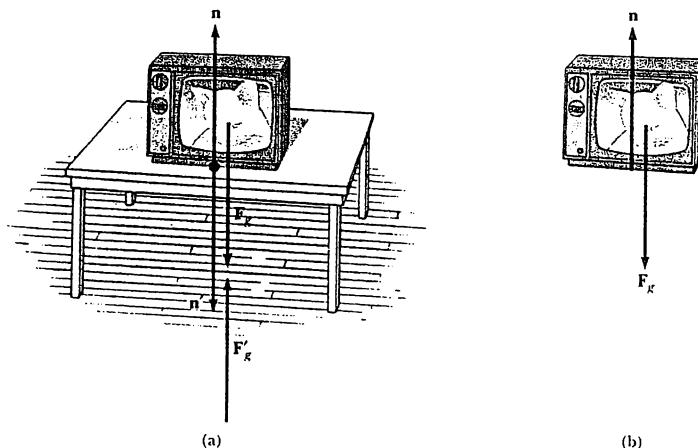


Figura 4.7 (a) Quando un televisore è appoggiato su un tavolo le forze che agiscono sull'apparecchio sono la forza normale, \mathbf{n} , e la forza di gravità, \mathbf{F}_g . La reazione a \mathbf{n} è la forza dell'apparecchio sul tavolo, \mathbf{n}' . La reazione a \mathbf{F}_g è la reazione del televisore sulla Terra, \mathbf{F}'_g . (b) Diagramma di corpo libero per l'apparecchio TV.

Forza normale • **forza normale**⁴. Questa è la forza che impedisce al televisore di cadere attraverso il tavolo, e che può assumere qualunque valore sia necessario fino al punto di rottura del tavolo. La forza normale bilancia il peso e determina l'equilibrio. La reazione a \mathbf{n} è la forza del televisore sul tavolo, \mathbf{n}' . Pertanto, concludiamo che

$$\mathbf{F}_g = -\mathbf{F}'_g \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = -\mathbf{n}'$$

Le forze \mathbf{n} ed \mathbf{n}' hanno lo stesso modulo, che è uguale a F_g a meno che il tavolo si rompa. Si noti che le forze agenti sul tavolo sono \mathbf{F}_g ed \mathbf{n} , come mostrato in Figura 4.7b. Le due forze di reazione, \mathbf{F}'_g ed \mathbf{n}' , sono esercitate su oggetti diversi dal televisore. Si ricordi che le due forze in una coppia azione-reazione agiscono sempre su due oggetti diversi.

Dalla seconda legge di Newton, vediamo che, poiché il televisore è in equilibrio ($\mathbf{a} = 0$), segue che $F_g = n = mg$.

Fisica ragionata 5

Un cavallo tira una slitta con una forza orizzontale, procurandole un'accelerazione come in Figura 4.8a. La terza legge di Newton dice che la slitta esercita una forza uguale e opposta sul cavallo. Stando così le cose, come può la slitta essere accelerata? Sotto quali condizioni il sistema (cavallo più slitta) si muove con velocità costante?

Ragionamento Quando applichiamo la terza legge di Newton, è importante ricordare che le forze coinvolte agiscono su oggetti diversi. Quando determini il moto di un oggetto, dovresti sommare soltanto le forze agenti sull'oggetto. La forza che accelera il sistema (cavallo + slitta) è la forza esercitata dal suolo sugli zoccoli del cavallo. La terza legge di Newton ci dice che il cavallo esercita una forza uguale e opposta sul suolo. Le forze orizzontali agenti sulla slitta sono la forza verso destra applicata dal cavallo e la forza in verso contrario dovuta all'attrito tra la slitta e la superficie del suolo (Fig. 4.8b). Quando la forza applicata dal cavallo sulla slitta (verso destra) supera la forza in verso opposto (la forza d'attrito), la slitta accelera verso destra. Le forze orizzontali agenti sul cavallo sono la forza verso destra del suolo e la forza in verso opposto della slitta (Fig. 4.8c). La risultante di queste due forze è la causa dell'accelerazione del cavallo. Quando la forza verso destra del suolo sul cavallo bilancia la forza d'attrito fra la slitta e il suolo, il sistema si muove con velocità costante.

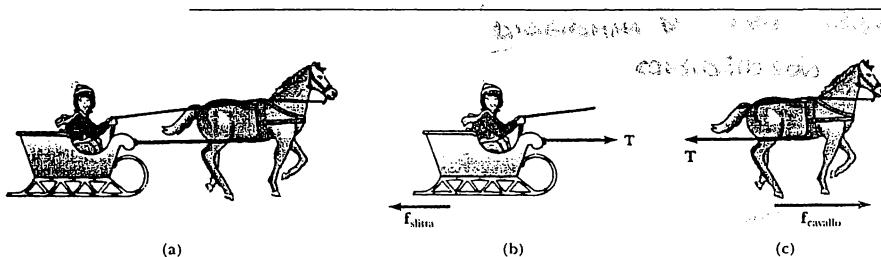


Figura 4.8 (Fisica ragionata 5)

⁴ Il termine *normale* si usa in quanto in assenza di attrito la direzione di \mathbf{n} è sempre *perpendicolare* alla superficie di contatto.

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Se una piccola macchina sportiva urta con un grosso camion, quale dei due veicoli subisce la forza d'urto maggiore? Quale dei due veicoli subisce l'accelerazione maggiore?

PROBLEMA CONCETTUALE 6

Due forze, F_1 ed F_2 , vengono impresse a un oggetto di massa m . F_1 è diretta verso destra, mentre F_2 è diretta verso sinistra. Sotto quale condizione l'oggetto accelera verso destra? Verso sinistra? Può mai la sua accelerazione essere nulla?

PROBLEMA CONCETTUALE 7

Quali forze causano il moto di un'automobile? Di un aereo a elica? Di un razzo? Di una barca a remi?

PROBLEMA CONCETTUALE 8

Un omaccione e un ragazzino stanno di fronte su una superficie di ghiaccio priva d'attrito. Essi stendono le loro braccia insieme e si spingono reciprocamente in modo da allontanarsi. Chi dei due esercita la forza maggiore? Chi subisce la maggiore accelerazione? Chi si allontana con la maggiore velocità? Chi si muove per una distanza maggiore mentre le braccia sono in contatto?

4.7 • ALCUNE APPLICAZIONI DELLE LEGGI DI NEWTON

In questo paragrafo presentiamo alcune semplici applicazioni delle leggi di Newton a corpi che si trovano in equilibrio ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$) o che si muovono lungo una retta sotto l'azione di forze esterne costanti. Come nostro modello, assumeremo che i corpi si comportino come punti materiali (particelle) cosicché non dobbiamo preoccuparci dei moti rotazionali. In questo paragrafo, per quei problemi che implicano il movimento, trascureremo anche gli effetti dell'attrito. Ciò è equivalente ad asserire che le superfici sono *lisce*. Infine, trascureremo, di norma, la massa di qualsiasi fune implicata in un qualche problema. In questa approssimazione il modulo della forza esercitata in un qualsiasi punto della fune è lo stesso in tutti i punti della fune.

Negli enunciati dei problemi il termine *leggero* e la locuzione *di massa trascurabile* sono stati usati per indicare che la massa si può trascurare nello svolgimento del problema. Essi sono sinonimi in questo contesto.

Quando applichiamo le leggi di Newton a un corpo, saremo interessati solamente a quelle forze esterne che agiscono *sul corpo*. Per esempio, in Figura 4.7, le uniche forze esterne agenti sul televisore sono \mathbf{n} ed \mathbf{F}_g . Le reazioni a queste forze, \mathbf{n}' ed \mathbf{F}'_g , agiscono sul tavolo e sulla Terra, rispettivamente, e non figurano nella seconda legge di Newton applicata al televisore.

Quando un oggetto quale un blocco è tirato da una fune legata ad esso, la fune esercita una forza sull'oggetto. In generale, la tensione è uno scalare ed è definita come il modulo della forza che la fune esercita su ciò che è collegato ad essa.

- **Tensione**

Consideriamo una cassa tirata verso destra sulla superficie orizzontale liscia di un tavolo, come in Figura 4.9a. Supponete che vi venga richiesto di determinare l'accelerazione della cassa e la forza del tavolo su di essa. Dapprima si noti che la forza orizzontale applicata alla cassa agisce attraverso la fune. La forza che la fune esercita sulla cassa è indicata con il simbolo \mathbf{T} . Il modulo di \mathbf{T} è uguale alla tensione della fune. Una circonferenza tratteggiata è disegnata attorno alla cassa in Figura 4.9a per ricordarvi di isolare la cassa da ciò che la circonda.

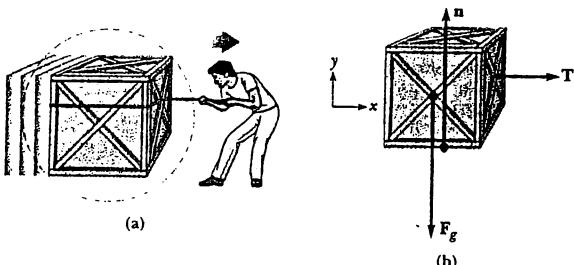


Figura 4.9 (a) Una cassa tirata verso destra su una superficie priva di attrito. (b) Il dia-gramma di corpo libero che rappresenta le forze esterne sulla cassa.

I diagrammi di corpo • libero sono importanti quando si applicano le leggi di Newton

Poiché siamo interessati soltanto al moto della cassa, dobbiamo essere in grado di identificare tutte le forze esterne agenti su di essa. Queste sono illustrate in Figura 4.9b. Oltre alla forza T , il diagramma delle forze per la cassa include la forza di gravità F_g , e la forza normale n esercitata dal pavimento sulla cassa. Un tale diagramma di forze si chiama **diagramma di corpo libero**. La costruzione di un tale diagramma è un passo importante per applicare le leggi di Newton. Le *reazioni* alle forze che abbiamo elencato e, precisamente, la forza della fune sulla mano, la forza della cassa sulla Terra e la forza della cassa sul pavimento non sono incluse nel diagramma di corpo libero in quanto esse agiscono su *altri corpi* e non sulla cassa.

Applichiamo ora la seconda legge di Newton alla cassa. Per prima cosa dobbiamo scegliere un appropriato sistema di coordinate. In questo caso è conveniente utilizzare il sistema di coordinate mostrato in Figura 4.9b con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale. Possiamo applicare la seconda legge di Newton lungo x , lungo y o entrambi, secondo ciò che siamo chiamati a trovare nel problema. Inoltre, saremo in grado di utilizzare le equazioni del moto con l'accelerazione costante trovate nel Capitolo 2. Tuttavia, tali equazioni andranno usate solo quando l'accelerazione è costante. Ad esempio, se la forza T in Figura 4.9 è costante, conseguono che anche l'accelerazione nella direzione x è costante, perché $a_x = T/m$. Perciò, se abbiamo bisogno di trovare lo spostamento o la velocità della cassa a un dato istante, possiamo utilizzare le equazioni del moto con accelerazione costante.

Corpi in equilibrio e prima legge di Newton

I corpi che sono in quiete o che si muovono con velocità costante vengono definiti in **equilibrio**, e la prima legge di Newton è un'affermazione di una condizione che deve essere vera affinché si verifichino le condizioni di equilibrio. In forma di equazione, questa condizione di equilibrio può essere espressa come

Prima condizione • di equilibrio

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad [4.7]$$

Tale affermazione significa che la somma *vettoriale* di tutte le forze (la forza risultante) che agiscono su un corpo in equilibrio è zero⁵.

⁵ Questa è soltanto una condizione di equilibrio. Una seconda condizione di equilibrio riguarda l'equilibrio rotazionale. Questa condizione sarà discussa nel Capitolo 10.

Di solito, i problemi che incontriamo nel nostro studio dell'equilibrio saranno più facilmente risolti se lavoriamo con l'Equazione 4.7 per i componenti delle forze esterne che agiscono su un corpo. Con ciò si intende che, in un problema bidimensionale, la somma di tutte le forze esterne nelle direzioni x e y devono separatamente essere uguali a zero; cioè,

$$\sum F_x = 0 \quad \text{e} \quad \sum F_y = 0 \quad [4.8]$$

Questo sistema di equazioni è spesso definito **prima condizione per l'equilibrio**. Non considereremo problemi tridimensionali in questo testo, ma l'estensione dell'Equazione 4.8 a una situazione tridimensionale può effettuarsi aggiungendo una terza equazione $\sum F_z = 0$.

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

• Corpi in equilibrio

Si raccomanda la seguente procedura per i problemi che riguardano i corpi in equilibrio.

1. Tracciare uno schizzo del corpo in considerazione.
2. Disegnare un diagramma di corpo libero per il corpo *isolato*, e identificare tutte le forze esterne agenti sul corpo. Assumere una direzione orientata per ciascuna forza. Se si sceglie una direzione orientata che porta, nella soluzione, a un segno negativo per una forza, non allarmarsi; ciò significa solo che il verso della forza è opposto a quello assunto.
3. Scomporre tutte le forze nelle componenti x e y , scegliendo un conveniente sistema di coordinate.
4. Usare le equazioni $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$. Ricordarsi di annotare i segni delle varie componenti della forza.
5. L'applicazione del punto 4 porta a un sistema di equazioni con varie incognite. Risolvere il sistema in funzione delle grandezze note.

Esempio 4.2 Un semaforo sospeso

Un semaforo di peso 125 N pende da un cavo legato a due altri cavi trattenuti da un supporto come in Figura 4.10a. I cavi superiori formano due angoli di 37.0° e 53.0° con l'orizzontale. Determinare la tensione dei tre cavi.

Ragionamento Dobbiamo costruire due diagrammi di corpo libero per affrontare questo problema. Il primo di questi si riferisce al semaforo, mostrato in Figura 4.10b; il secondo è relativo al nodo che tiene i tre cavi insieme, come in Figura 4.10c. Conviene scegliere il punto di questo nodo poiché tutte le forze che ci interessano agiscono in questo punto. Poiché l'accelerazione del sistema è zero, possiamo usare la condizione che la forza risultante sul semaforo è nulla, e che la forza risultante sul nodo è nulla.

Soluzione Per prima cosa costruiamo un diagramma di corpo libero per il semaforo, come in Figura 4.10b. La forza esercitata dal cavo verticale, T_3 , sostiene il semaforo per cui $T_3 = w = 125$ N. Successivamente, sceglieremo gli assi coordinati come è mostrato in Figura 4.10c e scom-

poniamo le forze nelle loro componenti x ed y :

Forza	Componente x	Componente y
T_1	$-T_1 \cos 37.0^\circ$	$T_1 \sin 37.0^\circ$
T_2	$T_2 \cos 53.0^\circ$	$T_2 \sin 53.0^\circ$
T_3	0	-125 N

La prima condizione per l'equilibrio ci dà le equazioni

- (1) $\sum F_x = T_2 \cos 53.0^\circ - T_1 \cos 37.0^\circ = 0$
- (2) $\sum F_y = T_1 \sin 37.0^\circ + T_2 \sin 53.0^\circ - 125 \text{ N} = 0$

Dalla (1) vediamo che le componenti orizzontali di T_1 e T_2 debbono essere uguali in modulo, e dalla (2) vediamo che la somma delle componenti verticali di T_1 e T_2 deve equilibrare il peso del semaforo. Possiamo risolvere la (1) per T_2 in funzione di T_1 ottenendo

$$T_2 = T_1 \left(\frac{\cos 37.0^\circ}{\cos 53.0^\circ} \right) = 1.33 T_1$$

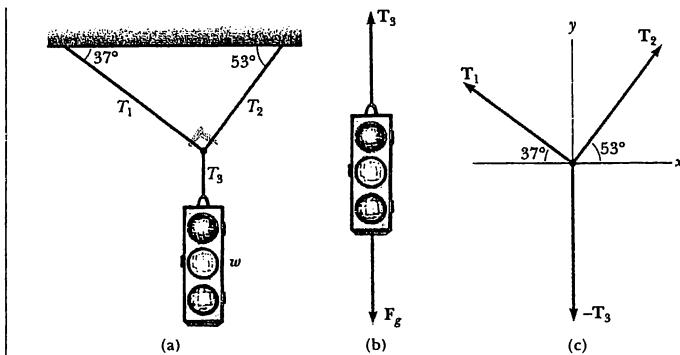


Figura 4.10 (Esempio 4.2) (a) Un semaforo sospeso a dei cavi. (b) Diagramma di corpo libero per il semaforo. (c) Diagramma di corpo libero per il nodo.

Questo valore di T_2 può essere sostituito nella (2) ottenendo

$$T_1 \sin 37.0^\circ + (1.33 T_1) (\sin 53.0^\circ) - 125 \text{ N} = 0$$

$$T_1 = 75.1 \text{ N}$$

$$T_2 = 1.33 T_1 = 99.9 \text{ N}$$

ESERCIZIO 4 In quale situazione sarà $T_1 = T_2$?
 Risposta Quando i cavi di supporto formano angoli uguali con il supporto orizzontale.

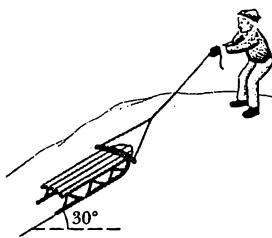


Figura 4.11 (Esercizio 5)
Un bambino trattiene una slitta su una collina priva di attrito.

ESERCIZIO 5 Un bambino mantiene ferma una slitta che pesa 77.0 N su un pendio liscio coperto di neve come in Figura 4.11. Calcolare (a) il modulo della forza che il bambino deve esercitare sulla fune, e (b) il modulo della forza che il pendio esercita sulla slitta. (c) Cosa accade alla forza normale se l'angolo del pendio aumenta? (d) Sotto quali condizioni la forza normale sarebbe uguale al peso della slitta?

Risposta (a) 38.5 N (b) 66.7 N (c) Diminuisce. (d) Se la slitta si trovasse su una superficie orizzontale e la forza applicata fosse o nulla o diretta lungo l'orizzontale.

Corpi accelerati e seconda legge di Newton

In una situazione nella quale una forza risultante agisce su un corpo, il corpo risulta accelerato, e dobbiamo usare la seconda legge di Newton per determinare le caratteristiche del moto. I problemi e i suggerimenti che seguono dovrebbero aiutarvi a risolvere problemi di questo tipo.

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

• La seconda legge di Newton

Si raccomanda la seguente procedura nel risolvere i problemi che riguardano l'applicazione della seconda legge di Newton.

- Tracciare un disegno del sistema.
 - Isolare il corpo il cui moto deve essere analizzato. Disegnare un diagramma di corpo libero per il corpo, mostrando *tutte le forze esterne agenti su di esso*. Per sistemi comprendenti più di un corpo, disegnare un diagramma *separato* per ciascun corpo.

3. Stabilire un sistema di coordinate opportuno per ciascun corpo e determinare le componenti delle forze lungo questi assi. Applicare la seconda legge di Newton, $\sum F = ma$, nelle direzioni x e y per ciascun corpo.
4. Risolvere le equazioni per le componenti rispetto alle incognite. Ricordarsi che, per ottenere una soluzione completa, si debbono avere tante equazioni indipendenti quante sono le incognite.
5. Se necessario, usare le equazioni della cinematica (moto con accelerazione costante) del Capitolo 2 per trovare tutte le incognite.

Esempio 4.3 Una cassa su un piano inclinato liscio

Una cassa di massa m è posta su un piano liscio inclinato di un angolo θ come in Figura 4.12a. (a) Determinare l'accelerazione della cassa dopo che essa viene abbandonata.

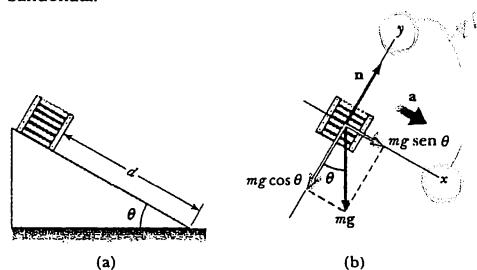


Figura 4.12 (Esempio 4.3) (a) Una cassa scivola giù per un piano inclinato liscio. (b) Diagramma di corpo libero per la cassa. Si noti che la sua accelerazione lungo il piano inclinato è $g \sin \theta$.

Ragionamento Poiché le forze agenti sulla cassa sono note, si può usare la seconda legge di Newton per calcolare la sua accelerazione. Innanzitutto costruiamo il diagramma di corpo libero per la cassa come in Figura 4.12b. Le sole forze agenti sulla cassa sono la forza normale n che agisce perpendicolarmente al piano e la forza di gravità F_g che agisce verticalmente verso il basso. Per i problemi di questo tipo che coinvolgono i piani inclinati, è conveniente scegliere gli assi coordinati con l'asse x lungo il piano inclinato e l'asse y perpendicolare ad esso. Poi, sostituiamo F_g con un componente di modulo $mg \sin \theta$ lungo l'asse x positivo e uno di modulo $mg \cos \theta$ nel verso negativo dell'asse y .

Soluzione Applicando la seconda legge di Newton per le componenti e notando che $a_y = 0$, otteniamo

$$(1) \quad \sum F_x = mg \sin \theta = ma_x$$

$$(2) \quad \sum F_y = n - mg \cos \theta = 0$$

Dalla (1) vediamo che l'accelerazione lungo il piano inclinato è fornita dalla componente del peso secondo il piano:

$$(3) \quad a_x = g \sin \theta$$

Dalla (2) concludiamo che la componente della forza di gravità perpendicolare al piano è *equilibrata* dalla forza normale, ovvero $n = mg \cos \theta$. Si noti che l'accelerazione data dalla (3) è *indipendente* dalla massa della cassa; essa dipende solamente dall'angolo di inclinazione e da g .

Casi particolari Vediamo che per $\theta = 90^\circ$, $a = g$ ed $n = 0$. Ciò corrisponde alla cassa in caduta libera. Inoltre, per $\theta = 0$, $a_x = 0$ ed $n = mg$ (il suo valore massimo).

(b) Supponiamo che la cassa venga abbandonata da ferma alla sommità e la distanza dalla cassa al fondo sia d . Quanto impiega la cassa a raggiungere il fondo e con quale velocità vi arriva?

Soluzione Poiché $a_x = \text{costante}$, possiamo applicare alla cassa l'equazione della cinematica $x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$. Poiché lo spostamento $x - x_0 = d$ e $v_{x0} = 0$, otteniamo $d = \frac{1}{2} a_x t^2$, ossia

$$(4) \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a_x}} = \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}}$$

Inoltre, giacché $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$ (Eq. 2.11) e $v_{x0} = 0$, troviamo che $v_x^2 = 2a_x d$, o

$$(5) \quad v_x = \sqrt{2a_x d} = \sqrt{2gd \sin \theta}$$

Ancora una volta, t e v_x sono *indipendenti* dalla massa della cassa. Ciò suggerisce un semplice metodo per misurare g usando una guida inclinata ad aria o qualche altra superficie liscia inclinata. Semplicemente si misuri l'angolo di inclinazione, la distanza percorsa dalla cassa ed il tempo che essa impiega per raggiungere il fondo. Il valore di g può essere allora calcolato dalla (4).

Esempio 4.4 La macchina di Atwood

Quando due masse diverse sono sospese verticalmente tramite una puleggia leggera e priva di attrito come in Figura 4.13a, il dispositivo viene chiamato *macchina di Atwood*. Essa viene a volte adoperata in laboratorio per misurare l'accelerazione di gravità. Calcolare il modulo dell'accelerazione delle due masse e la tensione della fune.

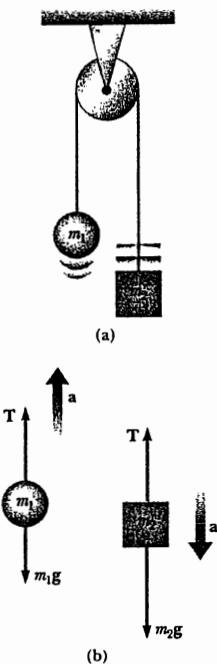


Figura 4.13 (Esempio 4.4) la macchina di Atwood. (a) Due masse collegate da un filo leggero attraverso una puleggia priva di attrito. (b) Diagrammi di corpo libero per m_1 ed m_2 .

Esempio 4.5 Un blocco ne spinge un altro

Due blocchi di massa m_1 ed m_2 sono posti a contatto tra loro su un piano liscio e orizzontale, come riportato in Figura 4.14a. Una forza costante orizzontale F viene applicata a m_1 , come indicato. (a) Determinare l'accelerazione del sistema.

Ragionamento e Soluzione I due blocchi devono avere la stessa accelerazione, poiché sono a contatto tra loro. Poiché F è la sola forza orizzontale agente sul sistema (i due blocchi), si ha

Ragionamento I diagrammi di corpo libero per le due masse sono mostrati in Figura 4.13b. Due forze agiscono su ciascun blocco: la forza verso l'alto esercitata dalla fune, T , e la forza di gravità verso il basso. Quindi, il modulo della forza risultante agente su m_1 è $T - m_1 g$, mentre il modulo della forza risultante agente su m_2 è $T - m_2 g$. Poiché i blocchi sono collegati con una fune, le loro accelerazioni devono avere lo stesso modulo. Se assumiamo che $m_2 > m_1$, allora m_1 deve accelerare verso l'alto, mentre m_2 accelera verso il basso.

Soluzione Quando applichiamo la seconda legge di Newton a m_1 , con a diretta verso l'alto per questa massa (poiché $m_2 > m_1$), troviamo (prendendo il verso positivo dell'asse y verso l'alto)

$$(1) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a$$

Analogamente per m_2 troviamo

$$(2) \quad \sum F_y = T - m_2 g = -m_2 a$$

Il segno meno al secondo membro della (2) indica che m_2 accelera verso il basso, nella direzione y negativa.

Sottraendo la (2) dalla (1), T si elimina ed ottieniamo

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$(3) \quad a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

Se sostituiamo la (3) nella (1) ottieniamo

$$(4) \quad T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

Casi particolari Notiamo che quando $m_1 = m_2$, $a = 0$ e $T = m_1 g = m_2 g$, come ci saremmo potuto aspettare per il caso di equilibrio. Inoltre, se $m_2 \gg m_1$, $a \approx g$ (corpo in caduta libera) e $T = 2m_1 g$.

ESERCIZIO 6 Si trovi l'accelerazione e la tensione di una macchina di Atwood in cui $m_1 = 2.00 \text{ kg}$ ed $m_2 = 4.00 \text{ kg}$. Risposta $a = 3.27 \text{ m/s}^2$, $T = 26.1 \text{ N}$.

$$\sum F_x (\text{sistema}) = F = (m_1 + m_2) a$$

$$(1) \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

(b) Determinare il modulo della forza di contatto tra i blocchi.

Ragionamento e Soluzione Per risolvere questa seconda parte del problema, è necessario costruire i diagram-

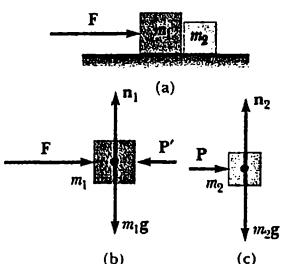


Figura 4.14 (Esempio 4.5)

mi di corpo libero per ciascun blocco, riportati nelle Figure 4.14b e 4.14c, dove la forza di contatto è indicata da P . Dalla Figura 4.14c, si vede che l'unica forza orizzontale agente su m_2 è la forza di contatto P (la forza prodotta da m_1 su m_2), verso destra. Applicando la seconda legge di Newton a m_2 si ottiene

$$(2) \quad \sum F_x = P = m_2 a$$

Sostituendo il valore dell'accelerazione a dalla (1) nella (2) si ottiene

$$(3) \quad P = m_2 a = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) F$$

Esempio 4.6 Pesando un pesce in un ascensore

Una persona pesa un pesce con un dinamometro collegato al soffitto di un ascensore, come mostrato in Figura 4.15. Si mostri che se l'ascensore accelera o decelera, l'indice del dinamometro legge un valore diverso dal peso del pesce.

Ragionamento Le forze esterne agenti sul pesce sono la forza di gravità mg diretta verso il basso e la forza diretta verso l'alto T esercitata su di esso dal dinamometro. Dalla terza legge di Newton, la tensione T è uguale alla lettura del dinamometro. Se l'ascensore è fermo oppure si muove con velocità costante, allora il pesce non è accelerato e $T = mg$. Invece, se l'ascensore è accelerato in qualunque dei due versi, la tensione non è più uguale al peso del pesce.

Soluzione Se l'ascensore accelera con una accelerazione a relativa all'osservatore esterno all'ascensore posto in un riferimento inerziale, allora la seconda legge applicata al pesce dà la forza risultante sul pesce:

$$\sum F = T - mg = ma_y$$

la quale conduce a

Analizzando questo risultato si osserva che la forza di contatto P è minore della forza applicata F . Ciò è in accordo con il fatto che la forza richiesta per accelerare solamente m_2 deve essere minore di quella necessaria per produrre la stessa accelerazione del sistema dei due blocchi.

È istruttivo verificare questa espressione per P , considerando le forze agenti su m_1 , come indicato in Figura 4.14b. In questo caso, le forze orizzontali agenti su m_1 sono la forza applicata F , verso destra, e la forza di contatto P' , verso sinistra (la forza di m_2 su m_1). Dalla terza legge di Newton, P' è la reazione a P , cosicché $|P'| = |P|$. Applicando la seconda legge di Newton a m_1 , si ha

$$(4) \quad \sum F_x = F - P' = F - P = m_1 a$$

Sostituendo il valore di a , dalla (2) nella (4)

$$P = F - m_1 a = F - \frac{m_1 F}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) F$$

Il risultato è in accordo con la (3), come deve.

ESERCIZIO 7 Se $m_1 = 4.00 \text{ kg}$, $m_2 = 3.00 \text{ kg}$ e $F = 9.00 \text{ N}$, calcolare l'accelerazione del sistema ed il modulo della forza di contatto. Risposta $a = 1.29 \text{ m/s}^2$, $P = 3.86 \text{ N}$.

$$(1) \quad T = mg + ma_y$$

Concludiamo, allora, dalla (1) che la lettura del dinamometro, T , è maggiore del peso, mg , se a è diretta verso l'alto, come nella Figura 5.15a. Inoltre, vediamo che T risulta minore di mg se a è diretta verso il basso, come in Figura 5.15b.

Per esempio, se il peso del pesce è 40.0 N , ed $a_y = 2.00 \text{ m/s}^2$ verso l'alto, allora la lettura del dinamometro è

$$\begin{aligned} T &= mg + ma_y = mg \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right) \\ &= mg \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right) = (40.0 \text{ N}) \left(\frac{2.00 \text{ m/s}^2}{9.80 \text{ m/s}^2} + 1 \right) \\ &= 48.2 \text{ N} \end{aligned}$$

Se $a_y = 2.00 \text{ m/s}^2$ verso il basso, allora

$$T = mg - ma_y = mg \left(1 - \frac{a_y}{g} \right) = 31.8 \text{ N}$$

Quindi, se comprate un pesce in un ascensore, assicuratevi che il pesce venga pesato quando l'ascensore è

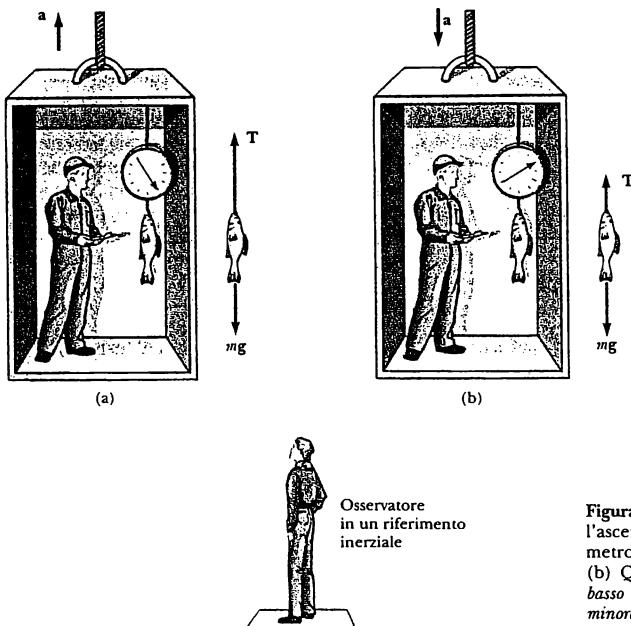


Figura 4.15 (Esempio 4.6) (a) Quando l'ascensore accelera verso l'alto il dinamometro segna un valore maggiore del peso. (b) Quando l'ascensore accelera verso il basso il dinamometro segna un valore minore del peso.

in quiete o accelera verso il basso! Inoltre, si noti che dall'informazione data qui non si può determinare il verso del moto dell'ascensore.

Casi particolari Se il cavo dell'ascensore si spezza, allocca l'ascensore cade liberamente e $a_y = -g$, e vediamo dalla

(1) che la tensione T , cioè il pesce appare privo di peso. Se l'ascensore accelera verso il basso con un'accelerazione maggiore di g , il pesce (assieme alla persona nell'ascensore)uterà alla fine contro il soffitto giacché la sua accelerazione sarà ancora quella di un corpo in caduta libera rispetto all'osservatore esterno.

SOMMARIO

La prima legge di Newton afferma che un corpo in quiete rimarrà in quiete, e un corpo in moto rettilineo uniforme manterrà tale moto, a meno che una forza esterna risultante agisca sul corpo.

La seconda legge di Newton afferma che l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza risultante agente sul corpo e inversamente proporzionale alla massa del corpo. Se la massa del corpo è costante, la forza risultante è uguale al prodotto della massa per la sua accelerazione, ovvero $\sum F = ma$.

La prima e la seconda legge di Newton sono valide in un sistema di riferimento inerziale. Un riferimento inerziale è un riferimento nel quale vale la prima legge di Newton.

La massa è una grandezza scalare.

Il peso di un corpo è la forza esercitata sul corpo dalla Terra. Essa è uguale al prodotto della massa del corpo per l'accelerazione di gravità, $w = mg$.

La terza legge di Newton afferma che se due corpi interagiscono, la forza esercitata sul corpo 1 dal corpo 2 è uguale in modulo ma di verso opposto alla forza esercitata sul corpo 2 dal corpo 1. Quindi, una forza isolata non può esistere in natura.

DOMANDE CONCETTUALI

1. Disegnare un diagramma di corpo libero per ognuno dei seguenti oggetti: (a) un proiettile in movimento in presenza di resistenza dell'aria; (b) un razzo che lascia la sua rampa a motori accesi; (c) un atleta che corre su un percorso orizzontale.
2. Nel film *Accadde una notte* (Columbia Picture, 1934), Clark Gable sta in piedi all'interno di un autobus fermo di fronte a Claudette Colbert, che è seduta. Improvvamente l'autobus parte e Clark cade sulle ginocchia di Claudette. Perché accade ciò?
3. Quando stai seduto su una sedia, la sedia ti spinge in alto con una forza normale. Questa forza è uguale al tuo peso e nel verso opposto. È questa la forza di reazione al tuo peso della terza legge di Newton?
4. L'osservatore nell'ascensore dell'Esempio 4.6, potrebbe sostenere che il "peso" del pesce sia T , la lettura sulla scala. Ciò è ovviamente sbagliato. Perché questa osservazione differisce da quella di una persona al di fuori dell'ascensore ed in quiete rispetto ad esso?
5. Identificate le coppie azione-reazione nelle seguenti situazioni: un uomo sale un gradino; una palla di neve colpisce da dietro una ragazza; un giocatore di baseball prende una palla; una folata di vento colpisce una finestra.
6. Quando un pallone da calcio è in volo, quale forza agisce su di esso? Quali sono le coppie azione-reazione quando la palla viene calciata e quando è in volo?
7. Una palla di gomma viene lasciata cadere sul pavimento. Quale forza fa sì che la palla rimbalzi?
8. Cosa è sbagliato nell'asserto: "giacché la macchina è ferma, non ci sono forze agenti su di essa"? Come correggereste questa frase?
9. Un sollevatore di pesi si trova su una bilancia pesa-persone. Egli porta su e giù un bilanciere. Cosa accade all'indice della bilancia durante questo movimento? Supponiamo che egli sia sufficientemente forte da lanciare addirittura il bilanciere verso l'alto. Di quanto varierà adesso la lettura della bilancia?
10. Il sindaco di una città decide di licenziare alcuni impiegati comunali perché non rimuovono gli avallamenti dei cavi che sostengono i semafori della città. Se foste un avvocato, che difesa proporreste per gli impiegati? Chi vincerebbe un'eventuale causa?
11. Nel tiro alla fune, due atleti tirano la corda con una forza di 200 N. Qual è la tensione della corda? Se la corda non si sposta, quale forza sta esercitando ogni atleta contro il suolo?
12. Supporre che un camion carico di sabbia acceleri a 0.5 m/s^2 su un'autostrada. Se la forza di trazione del camion resta costante, cosa succede alla sua accelerazione se il carico si perde in quantità costante per un buco sul fondo?

PROBLEMI

Paragrafi da 4.1 a 4.6

1. Una forza F , applicata a un oggetto di massa m_1 produce un'accelerazione di 3.00 m/s^2 . La stessa forza applicata a un oggetto di massa m_2 produce un'accelerazione di 1.00 m/s^2 . (a) Qual è il valore del rapporto m_1/m_2 ? (b) Se m_1 ed m_2 vengono collegate, trovare la loro accelerazione sotto l'azione della forza F .
2. Una forza di 10.0 N agisce su un corpo di massa 2.00 kg . Qual è (a) l'accelerazione del corpo, (b) il suo peso in newton e (c) la sua accelerazione se la forza viene raddoppiata?
3. Una massa di 3.00 kg subisce un'accelerazione data da: $a = (2.00i + 5.0j) \text{ m/s}^2$. Determinare la forza risultante, \mathbf{F} , ed il suo modulo.
4. Un pesante treno carico ha una massa di $15\,000$ tonnellate. Se la locomotiva può esercitare una capacità di traino di $750\,000 \text{ N}$, quanto ci vorrà per aumentare la velocità da 0 a 80.0 km/h ?
5. In un incontro di baseball, un giocatore lancia una palla del peso di 1.40 N ad una velocità di $(32.0i) \text{ m/s}$, con un movimento del braccio con accelerazione costante per 0.0900 s . Se la palla parte da ferma, determinare (a) la lunghezza del tratto in cui la palla è sot-

- toposta all'accelerazione prima di essere lasciata libera, (b) il valore della forza media impartita alla palla per produrre tale accelerazione.
6. Un giocatore lancia una palla da baseball di peso w con velocità v_i con un movimento del braccio uniformemente accelerato per un tempo t . Se la palla parte da ferma, (a) quanto è lungo il tratto in cui la palla è sottoposta all'accelerazione prima di essere lasciata libera? (b) Quale vettore forza si applica su di essa.
7. Un oggetto di 4.00 kg di massa, a un certo istante, ha una velocità di $3.00i \text{ m/s}$. Otto secondi dopo, la sua velocità è $(8.00i + 10.0j) \text{ m/s}$. Nell'ipotesi che l'oggetto si muova sotto l'azione di una forza costante, determinare (a) le componenti della forza, (b) il suo modulo.
8. La velocità media di una molecola d'azoto nell'aria è $\sim 6.70 \times 10^2 \text{ m/s}$, e la sua massa è circa $4.68 \times 10^{-26} \text{ kg}$. (a) Se a una molecola di azoto sono necessari $3.00 \times 10^{-13} \text{ s}$ per urtare una parete e rimbalzare indietro con la stessa velocità, qual è l'accelerazione media della molecola durante questo intervallo di tempo? (b) Qual è la forza media che la molecola esercita sulla parete?
9. Un elettrone di massa $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ha una velocità iniziale di $3.00 \times 10^5 \text{ m/s}$. Esso viaggia in linea retta e

la sua velocità aumenta a 7.00×10^5 m/s in una distanza di 5.00 cm. Assumendo che la sua accelerazione sia costante, (a) determinare la forza sull'elettrone e (b) confrontare questa forza con il peso dell'elettrone, che avevamo trascurato.

10. (a) Un'auto con una massa di 850 kg si muove verso destra a una velocità costante di 1.44 m/s. Qual è la forza sulla macchina? (b) Qual è la forza sulla macchina se si sposta verso sinistra?
11. Una donna pesa 120 lb. Determinare (a) il peso in newton e (b) la sua massa in chilogrammi.
12. Se un uomo pesa sulla Terra 900 N, quale sarebbe il suo peso su Giove, dove l'accelerazione di gravità vale 25.9 m/s^2 ?
13. Due forze F_1 ed F_2 agiscono su una massa di 5.00 kg. Se $F_1 = 20.0 \text{ N}$ ed $F_2 = 15.0 \text{ N}$, si trovi l'accelerazione nei casi (a) e (b) di Figura P4.13.

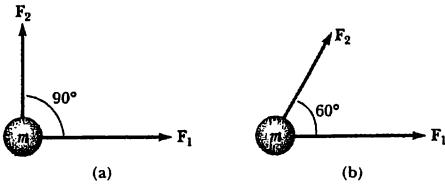


Figura P4.13

14. Oltre al suo peso, un oggetto di 2.80 kg è soggetto a una altra forza costante. L'oggetto parte da fermo e in 1.20 s compie uno spostamento di $(4.20 \text{ m})\hat{i} - (3.30 \text{ m})\hat{j}$, dove la direzione orientata di \hat{j} è lungo la verticale verso l'alto. Determinare l'altra forza.
15. Stai in piedi su uno sgabello e poi salti giù. (a) Relativamente al tempo di volo verso il pavimento, fai una stima dell'accelerazione della Terra che scarta in su verso di te. (b) Fai una stima della distanza di cui la Terra si muove mentre tu cadi sul pavimento. Considera la Terra come una sfera perfettamente piena e omogenea.
16. Le seguenti forze agiscono simultaneamente su una massa di 4.00 kg: 10.0 N in direzione nord, 20.0 N in direzione est e 15.0 N in direzione sud. Si determini l'accelerazione della massa.
17. Una barca di 1000 kg si muove in acqua sotto l'azione di due forze. Una è la spinta di 2000 N del motore, l'altra è una forza di resistenza di 1800 N dell'acqua. (a) Qual è l'accelerazione della barca? (b) Se parte da fermo, quanto s'allontanerà in 10s? (c) Qual sarà la sua velocità alla fine di questo tempo?
18. Tre forze, $\mathbf{F}_1 = (-2.00\hat{i} + 2.00\hat{j}) \text{ N}$, $\mathbf{F}_2 = (5.00\hat{i} - 3.00\hat{j}) \text{ N}$, e $\mathbf{F}_3 = (-45.0\hat{i}) \text{ N}$, agiscono su un corpo imprimentendo-

gli un'accelerazione di 3.75 m/s^2 . (a) Qual è la direzione e il verso dell'accelerazione? (b) Qual è la massa del corpo? (c) Se il corpo è inizialmente fermo, qual è la velocità dopo 10.0 s? (d) Quali sono i componenti della velocità dopo 10.0 s?

19. Un blocco di 15.0 lb è fermo sul pavimento. (a) Quale forza esercita il pavimento sul blocco? (b) Se al blocco viene collegata una fune che, passando attraverso una puleggia, tiene sospeso liberamente un altro blocco di 10.0 lb, qual è la forza del pavimento sul blocco da 15.0 lb? (c) Se sostituiamo il blocco da 10.0 lb della domanda (b) con uno del peso di 20.0 lb, qual è la forza del pavimento sul blocco da 15.0 lb?

Paragrafo 4.7 Alcune applicazioni delle leggi di Newton

20. Una massa di 3.00 kg si muove su un piano. La dipendenza dal tempo delle coordinate x e y è data da $x = 5t^2 - 1$, $y = 3t^2 + 2$, con x e y espresse in metri e t in secondi. Determinare il modulo della forza risultante agente sulla massa per $t = 2.00 \text{ s}$.
21. Trovare la tensione di ogni corda dei sistemi descritti nella Figura P4.21. (Trascurare le masse delle corde).

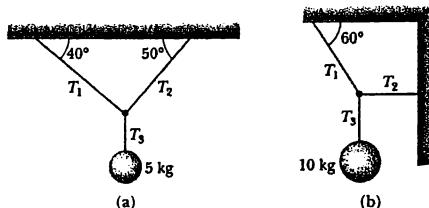


Figura P4.21

22. La distanza tra due pali del telefono è di 50.0 m. Quando un uccello di 1.00 kg di massa si ferma sul punto di mezzo del cavo tra i due pali, il cavo si abbassa di 0.200 m. Determinare la tensione del cavo, prodotta dall'uccello. Si trascuri il peso del cavo.
 23. Un sacco di cemento è sostenuto da tre funi come è mostrato in Figura P4.23. Due funi formano gli angoli θ_1 e θ_2 con l'orizzontale. Se il sistema è in equilibrio, (a) dimostrare che
- $$T_1 = \frac{w \cos \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)}$$
- (b) assumendo che $w = 325 \text{ N}$, $\theta_1 = 10.0^\circ$ e $\theta_2 = 25.0^\circ$, determinare le tensioni T_1 , T_2 e T_3 nelle funi.
 24. I sistemi mostrati in Figura P4.24 sono in equilibrio. Se

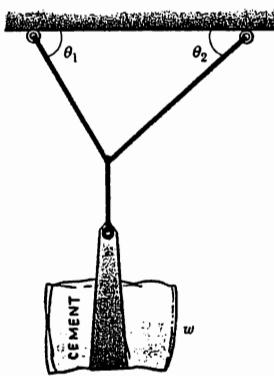


Figura P4.23

alla verticale. (a) Assumendo che la massa della funicella sia trascurabile rispetto a m , derivare un'espressione per l'accelerazione del carrello in funzione di θ , e mostrare che essa è indipendente sia dalla massa m che dalla lunghezza L . (b) Determinare l'accelerazione del carrello quando $\theta = 23.0^\circ$.

- [27] Una massa di 1.00 kg si muove con una accelerazione di 10.0 m/s^2 in direzione 30° nord-est (Fig. P4.27). Una delle due forze agenti sulla massa ha un modulo di 5.00 N e direzione nord. Determinare il modulo e la direzione della seconda forza agente sulla massa.

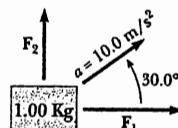


Figura P4.27

- le scale delle molle sono calibrate in newton, cosa si legge in ciascun caso? (Si trascurino le masse delle pulegge e delle corde e si assuma il piano inclinato liscio).
25. Un elicottero anticendio trasporta un recipiente per l'acqua di 620 kg all'estremità di un cavo lungo 20.0 m. Tornando indietro da un incendio alla velocità costante di 40.0 m/s , il cavo forma un angolo di 40.0° rispetto alla verticale. (a) Determinare la forza di resistenza dell'aria sul recipiente. (b) Dopo aver riempito il recipiente con acqua di mare, l'elicottero ritorna sull'incendio alla stessa velocità con il recipiente che adesso forma un angolo di 7.00° con la verticale. Qual è la massa d'acqua nel recipiente?
26. Si può ottenere un semplice accelerometro sospensione una massa m con una funicella di lunghezza L in cima a un carrello. Quando il carrello accelera il sistema massa-funicella forma un angolo θ rispetto

28. Tracciare il diagramma di corpo libero per un blocco che scivola lungo un piano inclinato, senza attrito, che forma un angolo $\theta = 15.0^\circ$ (Fig. P4.28). Se il blocco parte da fermo dalla sommità e la lunghezza del piano inclinato è 2.00 m, trovare (a) l'accelerazione del blocco e (b) la velocità che raggiunge in fondo al piano inclinato.

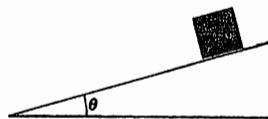


Figura P4.28

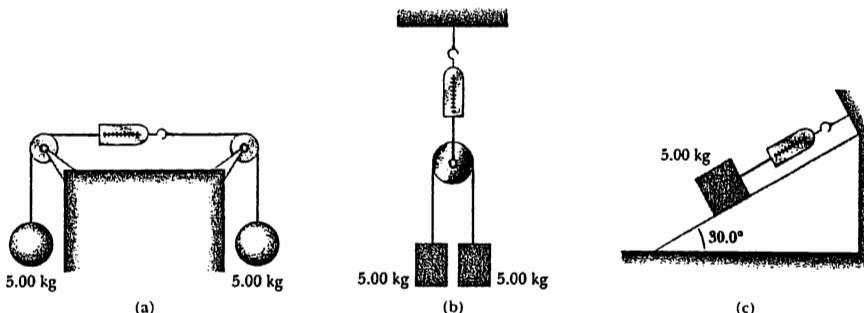


Figura P4.24

- [29] Un blocco su un piano inclinato liscio con inclinazione di 20.0° possiede una velocità iniziale di 5.00 m/s (Fig. P4.28). Di quanto scivola il blocco lungo il piano in salita prima di arrestarsi?
30. Due masse sono collegate da una funicella leggera che passa attraverso una puleggia senza attrito, come in Figura P4.30. Il piano inclinato è liscio, $m_1 = 2.00 \text{ kg}$, $m_2 = 6.00 \text{ kg}$ e, $\theta = 55.0^\circ$. (a) Tracciare i diagrammi di corpo libero per le due masse. Trovare (b) le accelerazioni delle masse, (c) la tensione nella fune, e (d) la velocità di ciascuna massa 2.00 s dopo la loro partenza da ferme.

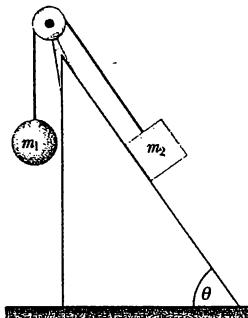


Figura P4.30

31. Due masse, m_1 ed m_2 , poste su una superficie priva di attrito sono collegate da una fune leggera. Una forza, F , viene esercitata da destra su una delle masse (Fig. P4.31). Determinare l'accelerazione del sistema e la tensione T della fune.



Figura P4.31

32. Due masse di 3.00 kg e 5.00 kg sono collegate da una fune leggera che passa attraverso una puleggia senza attrito, come in Figura 4.13a (pag. 98). Determinare (a) la tensione nella fune, (b) l'accelerazione di ciascuna massa, e (c) la distanza di cui si muoverà ciascuna massa nel primo secondo se esse partono da ferme.
33. Una massa m_1 posta su un piano liscio orizzontale è collegata a una massa m_2 attraverso una puleggia mobile di massa trascurabile P_1 e una puleggia fissa P_2 , anch'essa di massa trascurabile, come riportato in Figura P4.33. (a) Se a_1 e a_2 sono le accelerazioni delle masse m_1 e m_2 , rispettivamente, determinare la relazione tra le due accelerazioni. Eprimere (b) le tensioni

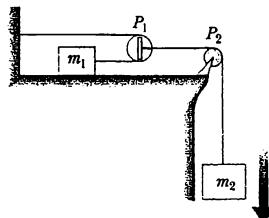


Figura P4.33

- delle funi e (c) le accelerazioni a_1 e a_2 in funzione delle masse m_1 e m_2 e di g .
34. Una massa di 5.00 kg , posta su un tavolo orizzontale privo di attrito, è collegata a un cavo che passa attraverso una puleggia per poi essere legata a una massa pendente di 10.0 kg , come in Figura P4.34. Trovare l'accelerazione dei due oggetti e la tensione del cavo.

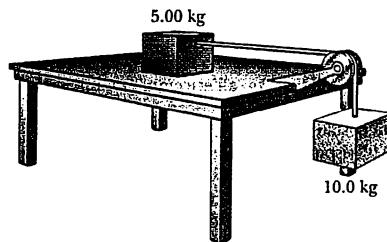


Figura P4.34

35. Un uomo di 72.0 kg si trova in un ascensore su un dinamometro a molla. Partendo da fermo, l'ascensore sale, raggiungendo la sua massima velocità di 1.20 m/s in 0.800 s e continuando a questa velocità costante per i successivi 5.00 s . L'ascensore, poi, con una accelerazione uniforme per 1.50 s , lungo la direzione negativa dell'asse y , si ferma. Cosa registrerà il dinamometro (a) prima che l'ascensore si metta in moto? (b) durante i primi 0.800 s ? (c) mentre l'ascensore procede a velocità costante? (d) durante il tempo in cui decelera?
36. Due persone tirano per quanto possono due funi collegate a una barca di 200 kg . Se tirano nello stesso verso, la barca ha una accelerazione di 1.52 m/s^2 verso destra. Se tirano in versi opposti, la barca ha una accelerazione di 0.518 m/s^2 verso sinistra. Qual è la forza esercitata da ciascuna persona sulla barca? (Si trascuri ogni altra forza sulla barca).

Problemi generali

37. Una forza dipendente dal tempo, $F = (8.00i - 4.00j)$ N (dove t è espresso in secondi) è applicata a un oggetto di 2.00 kg inizialmente fermo. (a) A quale istante l'oggetto si muoverà con una velocità in modulo di 15.0 m/s? (b) Qual è la posizione dell'oggetto in questo istante? (c) Qual è la distanza dell'oggetto dalla sua posizione iniziale quando il modulo della sua velocità è 15.0 m/s?
38. Un ascensore accelera verso l'alto a 1.50 m/s². Se l'ascensore ha una massa di 200 kg, trovare la tensione nel cavo di traino.
39. Il cannone dell'artiglieria antiaerea di maggior calibro utilizzato dalla Luftwaffe nella seconda guerra mondiale era il Flak 40 di 12.8 cm. Quest'arma sparava un proiettile di 25.8 kg con una velocità iniziale di 880 m/s. Quale forza di propulsione era necessaria per far raggiungere tale velocità al proiettile all'uscita della canna del cannone, lunga 6.0 m? Si assuma costante l'accelerazione e si trascuri l'influenza dell'accelerazione gravitazionale.
40. Uno dei pericoli maggiori per gli scalatori di montagne sono le *valanghe*, nelle quali una massa di neve e ghiaccio si libera per "correre" giù dalla montagna praticamente senza attrito su un cuscinetto d'aria compressa. Se fosse su una pendenza di 30° in montagna e una valanga si stacca a 400 m d'altezza dalla pendenza, quanto tempo avreste per mettervi in salvo?
41. Un ragazzo ingegnoso di nome Pat vuole raggiungere una mela su di un albero senza arrampicarvisi. Seduto su di un sedile collegato ad una fune che passa su una puleggia senza attrito (Fig. P4.41), Pat tira l'estremità

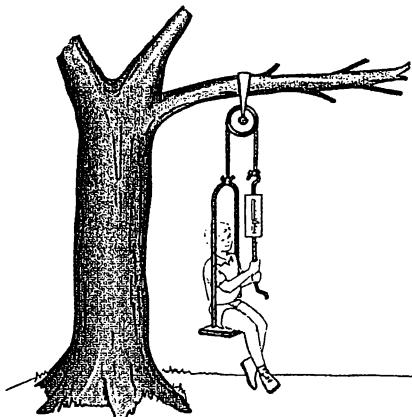


Figura P4.41

pendente della fune con una forza tale che l'indicazione del dinamometro è 250 N. Il peso vero di Pat è 320 N e il sedile pesa 160 N. (a) Disegnare i diagrammi di corpo libero per Pat e per il sedile considerati come sistemi separati, ed un altro diagramma per Pat ed il sedile considerati come un unico sistema. (b) Mostrare che l'accelerazione del sistema è diretta verso l'alto e trovare il modulo. (c) Trovare la forza che Pat esercita sul sedile.

42. Tre blocchi sono in contatto l'uno con l'altro su una superficie orizzontale senza attrito come in Figura 4.42. Una forza orizzontale F è applicata a m_1 . Se $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 3.00$ kg, $m_3 = 4.00$ kg ed $F = 18.0$ N, trovare (a) l'accelerazione dei blocchi, (b) la forza risultante su ciascun blocco e (c) il modulo delle forze di contatto fra i blocchi.

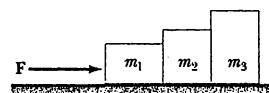


Figura P4.42

43. Se un tuffatore di 70.0 kg di massa si tuffa da un'altezza di 10.0 m e il suo movimento verso il basso si arresta 2.00 s dopo l'entrata in acqua, quale forza media verso l'alto ha esercitato l'acqua sul tuffatore?
44. Due forze $F_1 = (-6i - 4j)$ N e $F_2 = (-3i + 7j)$ N agiscono su una particella di 2.00 kg di massa, inizialmente ferma nel punto di coordinate (-2.00 m, +4.00 m). Determinare, al tempo $t = 10.0$ s: (a) le componenti della velocità, (b) la direzione del moto, (c) lo spostamento e (d) le coordinate della particella.
45. Una massa M è tenuta in equilibrio da una forza F applicata a un sistema di pulegge come è mostrato in Figura P4.45. Le pulegge si considerano di massa trascurabile e senza attrito. Trovare (a) la tensione in ciascuna sezione della fune, T_1 , T_2 , T_3 , T_4 e T_5 e (b) il modulo di F .
46. Si richiede ad uno studente di misurare l'accelerazione di un blocco su un piano inclinato liscio, come viene riportato in Figura 4.12, utilizzando una guida ad aria, un cronometro ed un metro rigido. L'altezza misurata del piano inclinato è 1.774 cm e la lunghezza totale $d = 127.1$ cm. L'angolo di inclinazione θ è pertanto dato dalla relazione $\sin \theta = 1.774/127.1$. Il blocco, inizialmente fermo, viene lasciato scendere dalla sommità del piano ed il suo spostamento lungo il piano, x , viene misurato in funzione del tempo, con $x = 0$ la posizione iniziale del blocco. Per i valori di x pari a 10.0 cm, 20.0 cm, 35.0 cm, 50.0 cm, 75.0 cm e 100 cm, i tempi impiegati per percorrere tali distanze, ottenuti come media su cinque misure sono 1.02 s,

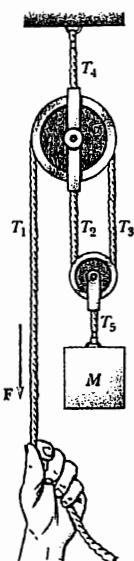


Figura P4.45

48. Un'auto di 2000 kg rallenta uniformemente da una velocità di 20.0 m/s a una di 5.00 m/s in un tempo di 4.00 s. Quale forza applica la strada sull'auto durante questo tempo, e qual è la distanza coperta dall'auto durante la decelerazione?

49. Un furgone accelera lungo una discesa (Fig. P4.49) impiegando, con partenza da fermo, 6.00 s per raggiungere la velocità di 30.0 m/s. Durante l'accelerazione, un giocattolo ($m = 0.100 \text{ kg}$) è appeso tramite una cordicella al soffitto del furgone. L'accelerazione è tale che la cordicella mantiene una direzione perpendicolare al soffitto. Determinare (a) l'angolo θ e (b) la tensione della cordicella.

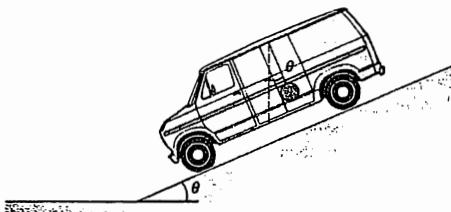


Figura P4.49

1.53 s, 2.01 s, 2.64 s, 3.30 s e 3.75 s, rispettivamente. Costruire un grafico riportando x in funzione di t^2 e approssimare, tramite il metodo dei minimi quadrati, i dati riportati. Determinare l'accelerazione del blocco dalla pendenza del grafico e paragonare il valore ottenuto con quello calcolato tramite $a' = g \sin \theta$, con $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

17. Qual forza orizzontale deve essere applicata al carrello della Figura P4.47 affinché i blocchi rimangano fermi relativamente al carrello? Si assuma che tutte le superfici, ruote e pulegge siano prive di attrito. (Suggerimento: si noti che la forza esercitata dalla fune accelerata m_1 e che m_2 è in contatto col carrello).

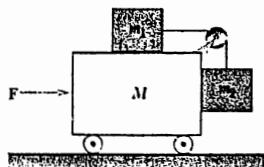


Figura P4.47

50. Un'auto è ferma in cima a una strada secondaria che ha una pendenza di 20.0°. Se il freno dell'auto è rilasciato con il cambio a folle, trovare (a) l'accelerazione dell'auto in discesa e (b) il tempo necessario all'auto per raggiungere la strada principale distante 10 m.

Problemi al calcolatore

- S1. Una massa di 8.4 kg scivola giù lungo un piano inclinato liscio. Progettare e realizzare un foglio elettronico per determinare la forza normale esercitata sulla massa e la sua accelerazione per una serie di angoli di inclinazione (misurati rispetto all'orizzontale) da 0° a 90° con incrementi di 5°. Usare le capacità grafiche del foglio elettronico per riportare in grafico la forza normale e l'accelerazione in funzione dell'angolo di inclinazione. Nei casi limite di 0° e 90°, i risultati sono compatibili con il noto comportamento?

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

1. Per il moto non è necessaria una forza. La prima legge di Newton dice che un oggetto in moto continua a muoversi autonomamente in assenza di forze esterne.
2. Se una singola forza agisce su un oggetto, esso accelera. (Dalla seconda legge di Newton, $a = F/m$.) Se un oggetto accelera, almeno una forza agisce su di esso. Tuttavia, se un oggetto non ha accelerazione, non possiamo concludere che nessuna forza agisce su di esso. In questo caso, possiamo *soltanto* dire che la forza *risultante* sull'oggetto è zero.
3. Poiché il campo gravitazionale g_L è minore sulla Luna che sulla Terra, è necessaria una massa maggiore di oro per determinare 1 newton di peso. Quindi, il tuo amico sulla Luna è più ricco di un fattore 6!
4. La sola forza agente sulla palla durante il moto è la forza di gravità verso il basso. Il modulo di questa forza è mg .
5. La macchina e il camion subiscono forze uguali in modulo ma di verso opposto. Un dinamometro posto tra i veicoli che urtano legge sempre la stessa cosa su qualunque lato venga posto. Poiché la macchina ha una massa minore, essa subisce un'accelerazione maggiore.
6. La forza *risultante* sull'oggetto è $F_1 + F_2$, per cui dalla seconda legge di Newton, la sua accelerazione è $(F_1 + F_2)/m$. L'oggetto accelera verso destra quando $|F_1| > |F_2|$, e verso sinistra quando $|F_2| > |F_1|$. L'accelerazione dell'oggetto è zero quando le due forze hanno lo stesso modulo, cioè, quando $|F_1| = |F_2|$.
7. La forza che causa il movimento di un'automobile è la forza di attrito fra le ruote e la strada quando l'automobile tenta di spingere la strada indietro. Si noti che le forze dovute al motore non sono quelle che direttamente accelerano l'automobile. La forza che spinge avanti un aereo a elica è la forza dell'aria sull'elica quando l'elica girando spinge indietro l'aria. La forza che fa avanzare un razzo è la forza dei gas espulsi dagli ugelli posteriori sul razzo, mentre il razzo spinge indietro i gas. In una barca a remi, i remi spingono indietro l'acqua con le pale. Di conseguenza, l'acqua spinge avanti la barca, e la forza è applicata sugli scalmi. Si noti che tutte queste situazioni coinvolgono la propulsione di un oggetto per mezzo della terza legge di Newton.
8. Secondo la terza legge di Newton, la forza dell'uomo sul ragazzo e la forza del ragazzo sull'uomo sono forze di reazione della terza legge, cosicché esse devono essere uguali in modulo. Ambedue gli individui subiscono la stessa forza, per cui il ragazzo, con una massa minore, subisce un'accelerazione maggiore. Ambedue subiscono un'accelerazione durante lo stesso intervallo di tempo. L'accelerazione maggiore del ragazzo causerà un allontanamento più veloce dal punto d'interazione. Inoltre, a causa dell'accelerazione maggiore, il ragazzo si muoverà di un tratto maggiore durante l'intervallo in cui le braccia sono in contatto.

B.C.



Per gent. conc. di John Hart e Field Enterprises, Inc.

5

Altre applicazioni delle leggi di Newton

ARGOMENTI

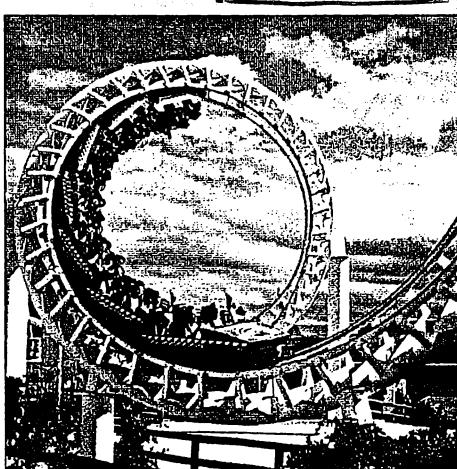
- 5.1 Forze di attrito
- 5.2 Seconda legge di Newton applicata al moto circolare uniforme
- 5.3 Moto circolare non uniforme
- 5.4 Moto in presenza di forze ritardanti dipendenti dalla velocità
- 5.5 Modelli numerici nella dinamica del punto materiale
- 5.6 Le forze fondamentali della natura
- 5.7 Il campo gravitazionale
- 5.8 Moto in sistemi accelerati

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto le leggi del moto di Newton e le abbiamo applicate a casi che riguardavano moti lineari in cui era possibile trascurare le forze di attrito. In questo capitolo estenderemo la nostra indagine ai sistemi che si muovono in presenza di forze di attrito. Questi sistemi includono oggetti che si muovono su superfici scabre e oggetti che si muovono in mezzi viscosi, come i liquidi e l'aria. In un paragrafo discuteremo di come si possano usare metodi numerici per risolvere tali problemi del mondo di ogni giorno, come il moto in cui la forza ritardante è dipendente dalla velocità. Applicheremo anche le leggi di Newton alla dinamica del moto circolare. Faremo pure una breve discussione su un oggetto che si muove in un riferimento che è accelerato rispetto all'osservatore, in altre parole in un sistema di riferimento non inerziale. Infine, concluderemo questo capitolo con una discussione sulle forze fondamentali della natura.

5.1 • FORZE DI ATTRITO

Quando un corpo è in movimento su una superficie scabra, o attraverso un mezzo viscoso quale l'aria o l'acqua, c'è una resistenza al moto dovuta all'interazione del corpo con ciò che lo circonda. Chiameremo una tale resistenza **forza di attrito**. Le forze di attrito sono molto im-

I passeggeri di queste montagne russe a spirale provano il brivido di varie forze mentre percorrono le curve. Le forze su ognuno dei carrelli includono le forze esterne impresse dai binari, la forza di gravità, e la forza di resistenza dell'aria.
(Robin Smith/Tony Stone Images)



portanti nella nostra vita quotidiana. Esse ci permettono di camminare e di correre e sono necessarie per il moto dei veicoli a ruote.

Si consideri un blocco su un tavolo orizzontale, come in Figura 5.1a. Se applichiamo al blocco una forza orizzontale esterna F , agente verso destra, il blocco rimarrà fermo se F non è sufficientemente grande. La forza che impedisce al blocco di muoversi agisce verso sinistra ed è detta forza di attrito statico, f_s . Fino a quando il blocco non si muove, $f_s = F$. Se F aumenta, anche f_s aumenta. Allo stesso modo se F diminuisce anche f_s diminuisce. Gli esperimenti mostrano che questa forza proviene dalla scabrosità delle due superfici, cosicché il contatto avviene solamente in pochi punti, come mostrato nell'immagine "ingrandita" della superficie in Figura 5.1a. In realtà, la forza di attrito è molto più complessa di quanto qui non si dica poiché essa coinvolge le forze elettrostatiche fra gli atomi o le molecole nelle zone in cui le superfici vengono a contatto.

Se aumentiamo il modulo di F , come in Figura 5.1b, il blocco alla fine comincerà a muoversi. Quando il blocco è sul punto di muoversi, f_s è massimo. Quando F supera $f_{s,\max}$, il blocco si muove e accelera verso destra. Quando il blocco è in

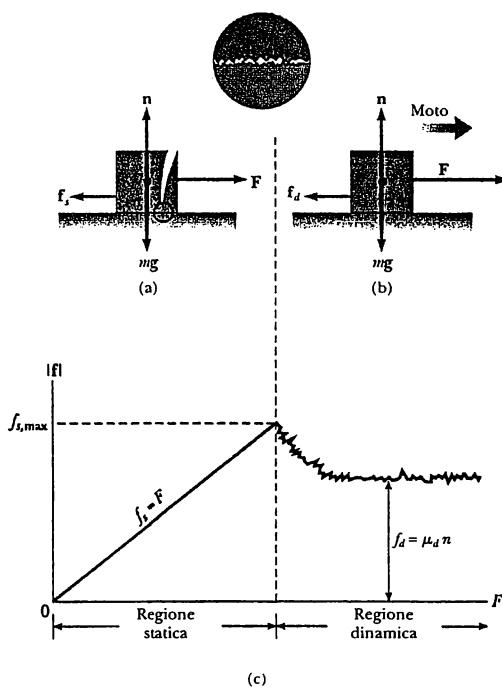


Figura 5.1 La forza di attrito, f , tra il blocco e la superficie scabra è opposta alla forza applicata, F . (a) La forza di attrito statico è uguale alla forza applicata. (b) Quando la forza applicata supera la forza di attrito dinamico, il blocco accelera verso destra. (c) Un grafico del modulo della forza di attrito in funzione della forza applicata. Da notare che $f_{s,\max} > f_d$.

moto, la forza di attrito ritardante diventa minore di $f_{s, \max}$ (Fig. 5.1c). Quando il blocco è in moto, chiamiamo la forza ritardante **forza di attrito dinamico**, f_d . La forza non equilibrata nella direzione x , $F - f_d$, produce un'accelerazione verso destra. Se $F = f_d$ il blocco si muove verso destra con velocità costante. Se la forza applicata viene rimossa, allora la forza di attrito agente verso sinistra decelera il blocco e alla fine lo riporta alla quiete.

Sperimentalmente si trova che, con buona approssimazione, tanto $f_{s, \max}$ quanto f_d sono proporzionali alla forza normale agente sul blocco. Le osservazioni sperimentali possono essere riassunte come segue:

- La forza di attrito statico fra due qualsiasi superfici a contatto è opposta alla forza applicata e può assumere valori dati da

Forza di attrito statico •

$$f_s \leq \mu_s n \quad [5.1]$$

dove la costante adimensionale μ_s detta **coefficiente di attrito statico** ed il **modulo della forza normale**. L'egualanza nella Equazione 5.1 sussiste quando il blocco è *sul punto* di iniziare a scivolare, cioè quando $f_s = f_{s, \max} = \mu_s n$. La disegualanza vale quando la forza applicata è minore di questo valore.

- Il modulo della forza di attrito dinamico agente su di un oggetto è

Forza di attrito dinamico •

$$f_d = \mu_d n \quad [5.2]$$

dove μ_d il coefficiente di attrito dinamico.

- I valori di μ_d e μ_s dipendono dalla natura delle superfici, ma μ_d generalmente minore di μ_s . Valori tipici di μ vanno da circa 0.05 a 1.5. La Tabella 5.1 elenca alcuni valori.
- I coefficienti di attrito sono quasi indipendenti dall'area di contatto fra le superfici.

Infine, sebbene il coefficiente di attrito dinamico vari con la velocità, trascureremo tali variazioni. La natura approssimata delle equazioni è facilmente

TABELLA 5.1 Coefficienti di attrito^a

	μ_s	μ_d
Acciaio su acciaio	0.74	0.57
Alluminio su acciaio	0.61	0.47
Rame su acciaio	0.53	0.36
Gomma su cemento	1.0	0.8
Legno su legno	0.25-0.5	0.2
Vetro su vetro	0.94	0.4
Legno grasso su neve bagnata	0.14	0.1
Legno grasso su neve secca	—	0.04
Metallo su metallo (lubrificato)	0.15	0.06
Ghiaccio su ghiaccio	0.1	0.03
Teflon su teflon	0.04	0.04
Articolazioni negli uomini	0.01	0.003

^a Tutti i valori sono approssimati.

dimostrata tentando di far scivolare un blocco lungo un piano inclinato con velocità costante. Specialmente a basse velocità, il moto è caratterizzato da una successione di *scatti*.

Fisica ragionata 1

Nel film *L'abisso* (Twentieth Century Fox, 1990), una piattaforma di trivellazione sottomarina in esplorazione è posata a grande profondità sul fondo. Essa è collegata a una nave sulla superficie dell'oceano tramite un "cordone ombelicale", come è suggerito dalla Figura 5.2a. Sulla nave, il cordone ombelicale è collegato a un sistema di aggancio. Durante una tempesta, la struttura del sistema di aggancio si rompe abbandonando la nave, cade in acqua e affonda superando l'orlo di un profondo abisso. Di conseguenza, la piattaforma viene trascinata dal cordone ombelicale lungo il fondo dell'oceano, come è rappresentato in Figura 5.2b. Quando la piattaforma si avvicina al margine dell'abisso, tuttavia, essa non viene ulteriormente trascinata oltre il bordo ma si ferma a poca distanza da esso, come è mostrato in Figura 5.2c. Questa è soltanto una scena cinematografica da ultimo istante, o vi è una ragione fisica per la quale la piattaforma non può andare oltre l'orlo?

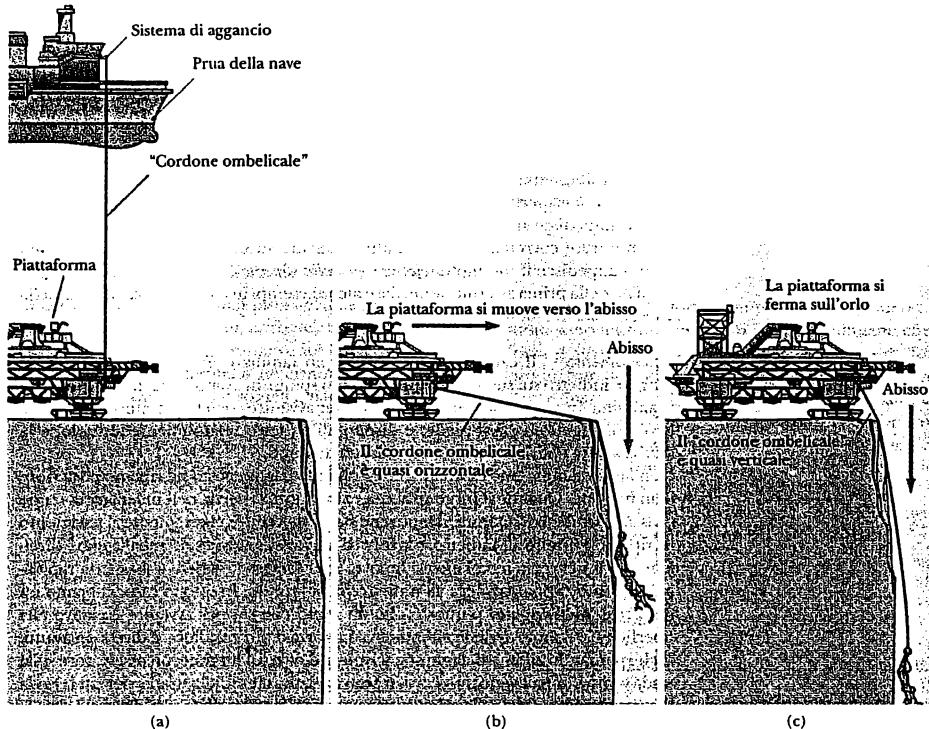


Figura 5.2 (Fisica ragionata 1)

Ragionamento Vi è una ragione fisica per questo fenomeno. Mentre la piattaforma viene trascinata attraverso il fondo dell'oceano, essa è tirata dalla parte del cordone ombelicale che è quasi orizzontale, pressoché parallelo al fondo dell'oceano. Quindi, la piattaforma è soggetta a due forze orizzontali: la tensione del cordone ombelicale che la tira in avanti e la forza d'attrito con il fondo dell'oceano che la tira indietro. Assumiamo che le due forze siano uguali, sicché la piattaforma si muova con velocità costante. Quando la piattaforma si avvicina all'orlo dell'abisso, l'angolo formato dal cordone ombelicale con l'orizzontale aumenta. Il risultato è che la componente di forza parallela al fondo dell'oceano diminuisce e la componente verticale verso il basso aumenta. Come conseguenza dell'aumento della forza verticale, la piattaforma viene tirata in basso più intensamente, ciò fa aumentare la forza normale su di essa e, in sostanza, aumenta la forza d'attrito fra la piattaforma e il fondo dell'oceano. Quindi, con una forza minore che tira in avanti (dovuta al cordone ombelicale) e una forza più grande che tira indietro (dovuta all'attrito), la piattaforma rallenta. Nell'istante in cui la piattaforma raggiunge il bordo dell'abisso, la forza dovuta al cordone ombelicale è quasi *verticale verso il basso*, fornendo soltanto una piccolissima forza in avanti. Questa forza verso il basso tira in giù fortemente la piattaforma sul fondo dell'oceano, cosicché la forza d'attrito diventa molto grande, e la piattaforma si ferma.

Non è detto che ciò accada in qualsiasi situazione. Le caratteristiche della piattaforma hanno giocato in qualche modo la sua sorte. Per esempio, se il cordone ombelicale fosse stato fissato nel punto più basso della piattaforma o se il coefficiente d'attrito fra i piedi della piattaforma e il fondo dell'oceano fosse stato più piccolo, allora la velocità di avanzamento della piattaforma avrebbe potuto essere grande abbastanza da non consentire alla forza d'attrito di fermarla ed essa sarebbe stata trascinata oltre l'orlo.

Fisica ragionata 2

Qualche volta, si usa un'affermazione sbagliata riguardante la forza d'attrito fra un oggetto e una superficie – “la forza d'attrito agente su un oggetto è opposta al suo moto o impedisce il suo moto (il moto che sta per avvenire)” – piuttosto che la seguente frase corretta, “la forza d'attrito agente su un oggetto è opposta al suo moto o impedisce il suo moto *relativamente alla superficie*”. Per enfatizzare la natura sbagliata della prima affermazione, dare alcuni esempi in cui la forza d'attrito è nella stessa direzione del moto.

Ragionamento Il camminare è un esempio familiare. Per camminare, si deve spingere indietro sul suolo, e la forza d'attrito spinge in avanti, nella direzione in cui si cammina. In questo caso, il moto che sta per avvenire (poiché si tratta di attrito statico) dell'oggetto, cioè il piede, è diretto all'indietro relativamente al suolo, e la forza d'attrito che agisce sul piede è diretta in avanti.

Un altro esempio può essere quello di un imballaggio posto sul ripiano posteriore di un furgone. Quando il furgone accelera in avanti, l'inerzia dell'imballaggio tende a “lasciarlo indietro”. Quindi, il moto che sta per avvenire relativamente al pavimento del ripiano è diretto all'indietro, e la forza d'attrito che agisce sull'imballaggio è diretta in avanti nel verso in cui esso si muove. Se il furgone accelera abbastanza rapidamente, il suo carico scivolerà all'indietro fin sul fondo. In questo caso, abbiamo un moto reale dell'oggetto piuttosto che un moto che sta per avvenire (relativo alla superficie), e il moto avviene all'indietro. La forza d'attrito, allora, è diretta in avanti. Anche pensando all'imballaggio che scivola indietro sul furgone, un osservatore sulla strada vedrà l'imballaggio muoversi in avanti relativamente alla strada, per cui la forza d'attrito agente sull'imballaggio risulta ancora nella stessa direzione del moto.

Come esempio finale, consideriamo il popolare trucco dei piatti sulla tovaglia, nel quale chi conduce il gioco tira via rapidamente la tovaglia da sotto i piatti. Sembra che

i piatti non si muovano. Misure accurate, tuttavia, dimostrerebbero che i piatti si trovano più vicini al bordo del tavolo dopo l'esecuzione del gioco che non prima. Quando la tovaglia viene tirata, il moto dei piatti relativo alla tovaglia è di allontanamento da colui che tira. Quindi, la forza d'attrito sui piatti è verso colui che tira. Questa forza fa sì che i piatti si muovano verso chi tira. Quando la tovaglia è stata estraetta completamente da sotto i piatti, la nuova superficie è costituita dal piano del tavolo. Il moto dei piatti relativo al piano del tavolo è diretto verso colui che tira. Quindi, la forza d'attrito sui piatti è ora nel verso opposto rispetto a colui che tira e opposta alla direzione di moto dei piatti, causando il loro arresto. Il successo del gioco dipende dalla forza d'attrito relativamente piccola fra piatti e tovaglia, per cui i piatti non riescono ad acquisire una velocità elevata verso colui che tira, e una forza d'attrito relativamente grande fra i piatti e la superficie del tavolo, cosicché si possano fermare rapidamente.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Stai giocando con tua figlia sulla neve. Ella siede su uno slittino e ti chiede di farla scivolare lungo un campo orizzontale. Tu puoi scegliere se spingerla da dietro applicando una forza a 30° con l'orizzontale, oppure legare anteriormente allo slittino una fune e tirare con una forza di 30° sull'orizzontale. Cosa ti risulterebbe più facile e perché?

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Un libro viene spinto dal fondo di un piano inclinato liscio in modo da scivolare in su fino a un certo punto e poi scivolare indietro fino al punto di partenza. Il libro impiega lo stesso tempo per andare su e giù?

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Il conducente di un camion scarico che procede velocemente schiaccia i freni e slitta fino a fermarsi dopo una distanza d . (a) Se il camion trasportasse un carico pesante tale da raddoppiare la sua massa, quale sarebbe la distanza di slittamento? (b) Se la velocità iniziale del camion fosse la metà, quale sarebbe la sua distanza di slittamento?

Esempio 5.1 Un disco da hockey che scivola

Un disco da hockey su una pista gelata è dotato di una velocità iniziale di 20.0 m/s, come in Figura 5.3. Se il disco rimane sempre a contatto del ghiaccio e scivola per 115 m prima di fermarsi, determinare il coefficiente di attrito dinamico fra il disco e il ghiaccio.

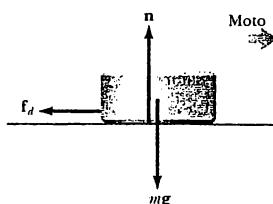


Figura 5.3 (Esempio 5.1) Dopo che al disco è stata impressa una velocità iniziale, le forze esterne che agiscono su di esso sono il peso, mg , la forza normale n , e la forza di attrito dinamico f_d .

Ragionamento Le forze agenti sul disco quando è in moto sono mostrate in Figura 5.3. Se assumiamo che la forza d'attrito, f_d , rimane costante, allora questa forza produce un'accelerazione uniforme e negativa del disco. Per prima cosa, troviamo l'accelerazione usando la seconda legge di Newton. Conoscendo l'accelerazione del disco e la distanza percorsa, possiamo far uso della cinematica per trovare il coefficiente d'attrito dinamico.

Soluzione Applicando la seconda legge di Newton nella forma delle componenti sul disco, abbiamo

$$(1) \quad \sum F_x = -f_d = ma$$

$$(2) \quad \sum F_y = n - mg = 0 \quad (a_y = 0)$$

Ma $f_d = \mu_d n$, e dalla (2) vediamo che $n = mg$. Quindi, la (1) diventa

$$-\mu_d mg = -\mu_d mg = ma$$

$$a = -\mu_d g$$

Il segno negativo significa che l'accelerazione è diretta verso sinistra, corrispondendo a un'accelerazione negativa del disco. L'accelerazione è indipendente dalla massa del disco ed è costante, perché abbiamo assunto che μ_d fosse costante.

Poiché l'accelerazione è costante possiamo usare l'Equazione 2.12, $v^2 = v_0^2 + 2ax$, con velocità finale $v = 0$:

$$v_0^2 + 2ax = v_0^2 - 2\mu_d g x = 0$$

$$\mu_d = \frac{v_0^2}{2gx}$$

$$\mu_d = \frac{(20.0 \text{ m/s}^2)}{2(9.80 \text{ m/s}^2)(115 \text{ m})} = 0.177$$

Si noti che μ_d non ha dimensioni.

Esempio 5.2 Oggetti collegati

Una palla ed un cubo sono collegati da una fune leggera attraverso una puleggia priva di attrito, come in Figura 5.4a. Il coefficiente di attrito dinamico tra il cubo e la superficie è 0.30. Determinare l'accelerazione dei due oggetti e la tensione della fune.

modulo della forza d'attrito dinamico agente sul blocco è proporzionale alla forza normale secondo la relazione $f_d = \mu_d n$. Infine, ricaviamo l'accelerazione in funzione dei parametri dati.

Soluzione La seconda legge di Newton applicata al cubo nella forma di componenti, con la direzione positiva dell'asse x verso destra, dà

$$\sum F_x = T - f_d = (4.0 \text{ kg}) a$$

$$\sum F_y = n - (4.0 \text{ kg}) g = 0$$

Poiché $f_d = \mu_d n$ e $n = mg = (4.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 39.2 \text{ N}$, abbiamo $f_d = \mu_d n = (0.30)(39.2 \text{ N}) = 11.8 \text{ N}$. Quindi,

$$(1) \quad T = f_d + (4.0 \text{ kg}) a = 11.8 \text{ N} + (4.0 \text{ kg}) a$$

Adesso applichiamo la seconda legge di Newton alla palla che si sposta in direzione verticale, dove la direzione verso il basso è individuata come positiva:

$$\sum F_y = (7.0 \text{ kg}) g - T = (7.0 \text{ kg}) a$$

ossia

$$(2) \quad T = 68.6 \text{ N} - (7.0 \text{ kg}) a$$

Sottraendo la (1) dalla (2), si elimina T :

$$56.8 \text{ N} - (11 \text{ kg}) a = 0$$

$$a = 5.2 \text{ m/s}^2$$

Quando questo valore per l'accelerazione è sostituito nella (1), si ha

$$T = 33 \text{ N}$$

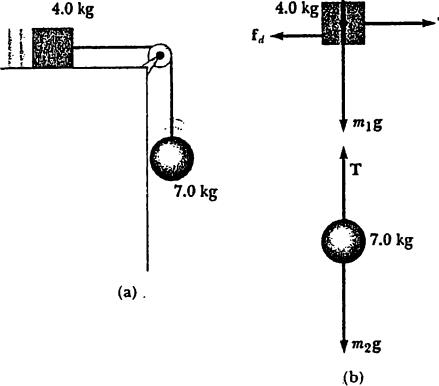


Figura 5.4 (Esempio 5.2) (a) Due oggetti collegati da una fune sottile che passa attraverso una puleggia priva di attrito. (b) Diagrammi di corpo libero per gli oggetti.

Ragionamento Prima, tracciamo il diagramma di corpo libero per i due oggetti come in Figura 5.4b. Poi, applichiamo la seconda legge di Newton nella forma di componenti a ciascun oggetto e usiamo il fatto che il

ESERCIZIO 1 Un blocco si muove in su lungo un piano inclinato di 45° con una velocità costante sotto l'azione di una forza di 15 N applicata parallelamente al piano inclinato. Se il coefficiente di attrito dinamico è 0.30, determinare (a) il peso del blocco e (b) la minima forza necessaria affinché esso possa scendere con velocità costante.

Risposta (a) 16.3 N (b) 8.07 N verso la sommità del piano inclinato.

ESERCIZIO 2 Un blocco è posto su un piano che è inclinato di 60° rispetto all'orizzontale. Se il blocco scivola giù lungo il piano con un'accelerazione di $g/2$, determinare il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco e il piano. Risposta 0.732

5.2 • SECONDA LEGGE DI NEWTON APPLICATA AL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

La risoluzione dei problemi riguardanti l'attrito è solo una delle applicazioni della seconda legge di Newton. Applichiamo la legge ad un'altra situazione molto comune: il moto circolare uniforme. Nel Paragrafo 3.4, Capitolo 3, si è trovato che se una particella si muove con velocità di modulo costante v su una circonferenza di raggio r , essa ha un'accelerazione di modulo

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

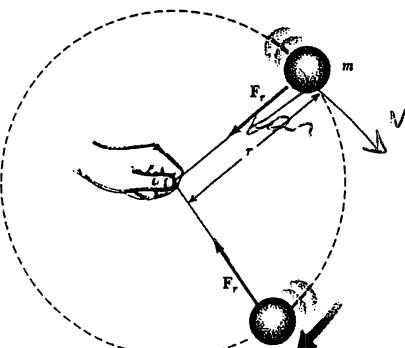
A causa del cambiamento continuo della direzione del vettore velocità, v , durante il moto, il vettore accelerazione, a_r , è diretto verso il centro della circonferenza ed è chiamato, perciò, accelerazione centripeta. Inoltre, a_r è sempre perpendicolare al vettore velocità, v .

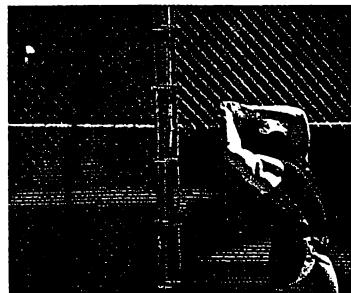
• Accelerazione centripeta

Si consideri una palla di massa m legata ad un filo di lunghezza r che è fatta girare rapidamente lungo una circonferenza orizzontale su un tavolo, come in Figura 5.5. Si assuma che la palla si muova con velocità costante in modulo. L'inerzia della palla tenderebbe a mantenere il moto lungo un percorso in linea retta; però il filo impedisce questo moto, esercitando una forza sulla palla tale da mantenerla sulla sua traiettoria circolare. Questa forza è diretta verso il centro della circonferenza, lungo la direzione del filo, come mostrato in Figura 5.5 e può essere una qualsiasi di quelle forze familiari che giocano il ruolo di mantenere un oggetto lungo una traiettoria circolare. Se applichiamo la seconda legge di Newton lungo la direzione radiale, troviamo che il modulo della forza che causa l'accelerazione centripeta si può calcolare:

$$F_r = ma_r = m \frac{v^2}{r} \quad [5.3]$$

Figura 5.5 Visione dall'alto di una palla che si muove lungo una traiettoria circolare orizzontale. Una forza F_r , diretta verso il centro della circonferenza consente alla palla di muoversi sulla circonferenza con una velocità costante in modulo.





Un atleta nell'atto di lanciare il martello. La forza esercitata dalla catena sul martello fornisce l'accelerazione centripeta. Solo quando l'atleta abbandona il martello, esso si muoverà lungo una linea retta tangente alla circonferenza. (*Focus on Sports*)

Una forza che causa un'accelerazione centripeta agisce verso il centro della traiettoria circolare e produce una variazione nella direzione del vettore velocità. Nel caso di una palla legata all'estremità di una fune che ruota, la forza esercitata dalla fune sulla palla causa l'accelerazione centripeta della palla. Per un satellite in un'orbita circolare attorno alla Terra, la forza di gravità causa l'accelerazione centripeta del satellite. La forza agente su un'automobile in curva lungo una strada piana che causa l'accelerazione centripeta dell'automobile è la forza di attrito statico fra gli pneumatici e il suolo, e così via. In generale, un corpo si può muovere lungo una traiettoria circolare sotto l'azione di vari tipi di forze o una combinazione di forze.

Indipendentemente dal tipo di forza che causa l'accelerazione centripeta, se la forza centripeta agente sull'oggetto divenisse nulla, l'oggetto non si muoverebbe più sulla sua traiettoria circolare; invece esso si muoverebbe lungo una linea retta tangente alla circonferenza. Questo concetto è illustrato in Figura 5.6 nel caso di una palla che ruoti su una circonferenza all'estremità di un filo. Se, ad un certo istante, il filo si rompesse, la palla si muoverebbe lungo una linea retta tangente alla circonferenza nel punto dove il filo si è spezzato.

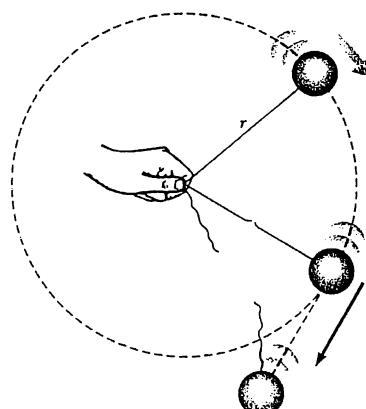


Figura 5.6 Quando il filo si spezza la palla si muove in una direzione tangente alla circonferenza.

Fisica ragionata 3

L'INSIDIA DELL'ACCELERAZIONE

La forza che causa l'accelerazione centripeta è spesso chiamata *forza centripeta*. Ci sono familiari una varietà di forze in natura: la forza d'attrito, la gravità, le forze normali, le forze elettriche, la tensione e così via. Dovremmo aggiungere la *forza centripeta* a questa lista?

Ragionamento La forza centripeta *non* deve essere aggiunta a questa lista. Essa rappresenta un'insidia per molti studenti. Dare un nome alla forza che causa un moto circolare, forza centripeta, induce molti studenti a considerarla una nuova *specie* di forza piuttosto che un nuovo *ruolo* della forza. Un errore comune nei diagrammi di forza è quello di tracciare tutte le solite forze e poi di aggiungere un altro vettore per la forza centripeta. Ma essa non è una forza a parte, essa è soltanto una delle nostre forze familiari che *esplica il ruolo di causare un moto circolare*. Consideriamo alcuni esempi. In relazione al moto della Terra attorno al Sole, la forza centripeta è la *gravità*. Per un oggetto posto sul piatto di un giradischi che ruota, la forza centripeta è l'*attrito*. Per una pietra che ruota, legata all'estremità di una fune, la forza centripeta è la *tensione* della fune. Per un frequentatore di "rotor" in un parco di divertimenti, pressato contro la parete interna della stanza circolare che ruota rapidamente, la forza centripeta è la *forza normale* applicata dalla parete. Inoltre, la forza centripeta può essere la risultante di due o più forze. Per esempio, mentre il passeggero di una ruota gigante (ruota di Ferris) passa dal punto più basso della corsa, la forza centripeta sul passeggero è la differenza fra la forza normale dovuta al sedile e la forza di gravità.

Fisica ragionata 4

L'INSIDIA DELLA SOTTRAZIONE

Le strade per alta velocità hanno le curve *sopraelevate*, cioè la carreggiata è rivolta verso l'interno delle curve strette. Perché?

Ragionamento Se un'automobile sta affrontando una curva, è necessario che vi sia una forza che fornisca l'accelerazione centripeta. Normalmente, questa è la forza d'attrito fra gli pneumatici e l'asfalto, parallela alla superficie della strada e perpendicolare alla direzione della macchina. Questa è la sola forza orizzontale, poiché il peso e la normale sono ambedue verticali. Se la curva è stretta o la velocità è alta, la forza d'attrito necessaria potrebbe essere maggiore della massima possibile. In questo caso, subentra la prima legge di Newton e la macchina slitta lungo una linea retta che la porta all'esterno della curva. Questa situazione diventa molto più probabile se la strada è ghiacciata, a causa della diminuzione del coefficiente d'attrito. Inclinando la strada, la forza normale viene spostata dalla verticale acquistando così una componente orizzontale rivolta verso il centro della traiettoria circolare. Quindi, la forza normale e l'attrito contribuiscono insieme a fornire l'accelerazione centripeta necessaria. Maggiore è l'accelerazione, maggiore è la sopraelevazione, allo scopo di fornire una componente maggiore della forza normale nella direzione orizzontale.



Quando questi ciclisti in gara nel Tour de France affrontano la curva su una strada piana, la forza centripeta viene fornita dalla forza di attrito statico tra i tubolari e la superficie della strada. (Michel Gouverneur, Photo News, Gamma Sport)

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Un oggetto compie un moto circolare con una velocità costante in modulo quando una forza risultante di modulo costante agisce perpendicolarmente alla velocità. Cosa accade al modulo della velocità se la forza non è perpendicolare alla velocità?

Esempio 5.3 A quale velocità può ruotare?

Una palla di massa $m = 0.500 \text{ kg}$ è collegata all'estremità di una fune la cui lunghezza è 1.50 m . La palla gira rapidamente su una circonferenza orizzontale come in Figura 5.6. Se la fune può sopportare una tensione massima di 50.0 N , qual è la massima velocità che la palla può avere prima che la fune si spezzi?

Soluzione Poiché in questo caso, la forza che fornisce l'accelerazione centripeta è la forza T esercitata dalla fune sulla palla, l'Equazione 5.3 dà

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

Ricavando v , si ha

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

La massima velocità che la palla può avere corrisponderà al valore massimo della tensione. Quindi, si trova

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max} r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0 \text{ N})(1.50 \text{ m})}{0.500 \text{ kg}}} = 12.2 \text{ m/s}$$

ESERCIZIO 3 Calcolare la tensione della fune se la velocità della palla è 5.00 m/s . Risposta 8.33 N .

Esempio 5.4 Il pendolo conico

Un piccolo corpo di massa m è sospeso a un filo di lunghezza L . Il corpo ruota su una circonferenza orizzontale di raggio r con velocità costante in modulo, v , come in Figura 5.7. Poiché il filo descrive la superficie di un cono, il sistema è noto come *pendolo conico*. Trovare la velocità del corpo e il periodo di rotazione, T_P , definito come il tempo necessario a completare una rivoluzione.

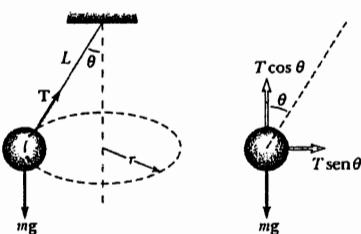


Figura 5.7 (Esempio 5.4) Il pendolo conico e il suo diagramma di corpo libero.

Soluzione In Figura 5.7 è mostrato il diagramma di corpo libero relativo alla massa m . In esso la tensione T è stata scomposta nella componente verticale, $T \cos \theta$, e nella componente $T \sin \theta$ che agisce verso il centro di rotazione. Poiché il corpo non ha accelerazione nella direzione verticale, la componente verticale della tensione deve equilibrare il peso. Quindi,

$$(1) \quad T \cos \theta = mg$$

Poiché la forza che fornisce l'accelerazione centripeta, in questo esempio, è la componente $T \sin \theta$, dalla seconda legge di Newton si ottiene

$$(2) \quad T \sin \theta = ma_r = \frac{mv^2}{r}$$

Dividendo la (2) per la (1), si elimina T e si trova

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

Ricordiamo la relazione geometrica, $r = L \sin \theta$; quindi,

$$v = \sqrt{rg \tan \theta} = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$$

Il periodo di rotazione, T_P (da non confondersi con la tensione T), è dato da:

$$(3) \quad T_P = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{rg \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$

I passaggi algebrici per ottenere la (3) sono lasciati al lettore. È da notare che T_P è indipendente da m . Se si assumono i valori $L = 1.00 \text{ m}$ e $\theta = 20.0^\circ$, servendosi della (3) si trova

$$T_P = 2\pi \sqrt{\frac{(1.00 \text{ m}) (\cos 20.0^\circ)}{9.80 \text{ m/s}^2}} = 1.95 \text{ s}$$

È fisicamente possibile un pendolo conico con un angolo $\theta = 90^\circ$?

Esempio 5.5 Qual è la velocità massima dell'auto?

Un'auto di 1500 kg, che si muove su una strada orizzontale piana, affronta una curva di 35.0 m di raggio, come in Figura 5.8. Se il coefficiente di attrito statico tra gli pneumatici ed il terreno asciutto è 0,500, trovare la velocità massima che l'auto può mantenere per affrontare, con successo, la curva.

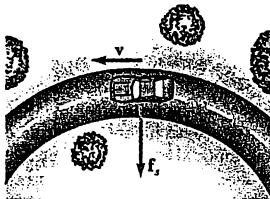


Figura 5.8 (Esempio 5.5) La forza di attrito statico diretta verso il centro della circonferenza mantiene l'auto in moto lungo la circonferenza.

Soluzione In questo caso, la forza che fornisce l'accelerazione centripeta e fa sì che l'auto rimanga sulla sua traiettoria circolare è la forza di attrito statico. Quindi, dall'Equazione 5.3 si ha

$$(1) \quad f_s = m \frac{v^2}{r}$$

La velocità massima che l'auto può avere affrontando la curva corrisponde a quella velocità per la quale l'auto è sul punto di sbandare verso l'esterno. In questo punto, la forza d'attrito ha il suo valore massimo dato da:

$$f_{s, \max} = \mu_s n$$

Poiché la forza normale, in questo caso, è uguale al peso, si trova

$$f_{s, \max} = \mu_s mg = (0.500)(1500 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 7350 \text{ N}$$

Sostituendo questo valore nella (1), si trova che la massima velocità è

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{f_{s, \max} r}{m}} = \sqrt{\frac{(7350 \text{ N})(35.0 \text{ m})}{1500 \text{ kg}}} = 13.1 \text{ m/s}$$

ESERCIZIO 4 In un giorno piovoso, l'auto descritta in questo esempio, comincia a sbandare nella curva quando la sua velocità raggiunge 8.00 m/s. In questo caso, qual è il coefficiente di attrito statico?

Risposta 0.187.

Esempio 5.6 Il giro della morte

Un pilota, di massa m , esegue, a bordo di un jet, il "giro della morte", come rappresentato in Figura 5.9a. In questa acrobazia, l'aereo percorre una circonferenza verticale di raggio 2.70 km, alla velocità, di *modulo costante*, pari a 225 m/s. Determinare la forza del sedile sul pilota (a) nel punto più basso della circonferenza, (b) nel punto più alto. Esprimere la risposta in funzione del peso del pilota, mg .

Soluzione (a) Il diagramma di corpo libero per il pilota nel punto più basso della circonferenza è riportato in Figura 5.9b. Le uniche forze agenti sul pilota sono la forza di gravità verso il basso, mg , e la forza, diretta verso l'alto, n_{basso} , esercitata dal sedile sul pilota. Poiché la forza risultante verso l'alto, che determina l'accelerazione centripeta, è $n_{\text{basso}} - mg$, la seconda legge di Newton dà per la direzione radiale

$$n_{\text{basso}} - mg = m \frac{v^2}{r}$$

$$n_{\text{basso}} = mg + m \frac{v^2}{r} = mg \left[1 + \frac{v^2}{rg} \right]$$

Sostituendo i valori della velocità e del raggio

$$n_{\text{basso}} = mg \left[1 + \frac{(225 \text{ m/s})^2}{(2.70 \times 10^3 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)} \right] = 2.91 mg$$

La forza esercitata dal sedile sul pilota è maggiore del peso del pilota, mg , di un fattore 2.91. Il pilota subisce un peso apparente maggiore del suo peso di un fattore 2.91. Ciò è discusso ulteriormente nel Paragrafo 5.3.

(b) Il diagramma di corpo libero per il pilota alla sommità della circonferenza è riportato in Figura 5.9c. In questa posizione ambedue le forze, la forza di gravità e la forza esercitata dal sedile sul pilota, n_{alto} , sono dirette verso il basso. La forza risultante, che determina l'accelerazione centripeta, ha modulo $n_{\text{alto}} + mg$. Applicando la seconda legge di Newton si ottiene

$$n_{\text{alto}} + mg = m \frac{v^2}{r}$$

$$n_{\text{alto}} = m \frac{v^2}{r} - mg = mg \left[\frac{v^2}{rg} - 1 \right]$$

$$n_{\text{alto}} = mg \left[\frac{(225 \text{ m/s})^2}{(2.70 \times 10^3 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)} - 1 \right] = 0.911 mg$$

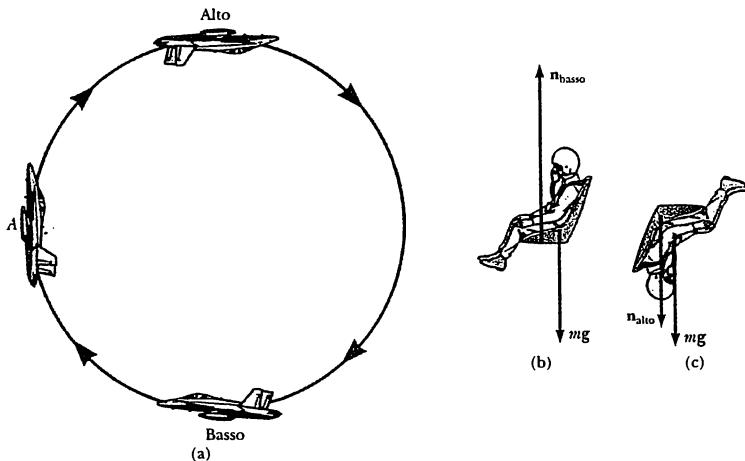


Figura 5.9 (Esempio 5.6)

In questo caso, la forza del sedile sul pilota è *minore* del peso del pilota di un fattore 0.911. Il pilota si sentirà più leggero alla sommità del giro.

ESERCIZIO 5 Calcolare la forza sul pilota che causa l'accelerazione centripeta quando l'aereo si trova nel punto A in Figura 5.9a, nella posizione di mezzo del giro. Risposta 1.911 mg , diretta verso destra.

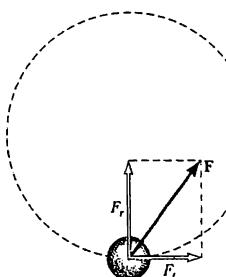


Figura 5.10 Se la forza che agisce su una particella ha una componente tangenziale F_t , il modulo della velocità varia. La forza totale che agisce sulla particella è, in questo caso, il vettore somma della forza tangenziale e della forza centripeta. Cioè, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_r$.

ESERCIZIO 6 Un'automobile si muove con velocità costante in modulo sulla cresta di una collinetta. Il conducente si muove lungo una circonferenza verticale di raggio 18.0 m. Sulla sommità della collina, il conducente nota che rimane appena in contatto con il sedile. Calcolare la velocità del veicolo. Risposta 13.3 m/s

ESERCIZIO 7 Una macchina di 1500 kg affronta una curva non sopraelevata di raggio 52 m a una velocità di 12 m/s. Quale deve essere il coefficiente di attrito minimo fra gli pneumatici e il suolo affinché la macchina non slitti? Risposta 0.283

5.3 • MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

Nel Capitolo 3 si è trovato che, se una particella si muove lungo una traiettoria circolare con modulo della velocità variabile, esiste, oltre ad una componente centripeta dell'accelerazione, una componente tangenziale di modulo dv/dt . Quindi, la forza che agisce sulla particella deve anche avere una componente tangenziale oltre che radiale come mostrato in Figura 5.10. Cioè, essendo l'accelerazione totale data da $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r$, la forza totale è data da $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_t$. Il vettore componente, \mathbf{F}_r , è diretto verso il centro della circonferenza ed è responsabile dell'accelerazione centripeta. Il vettore componente, \mathbf{F}_t , tangente alla circonferenza è responsabile dell'accelerazione tangenziale, che causa la variazione del modulo della velocità della particella rispetto al tempo. Il seguente esempio illustra questo tipo di moto.

Fisica ragionata 5

Supponiamo che tu sia il solo passeggero di una ruota gigante. Il meccanismo di comando si rompe dopo la partenza della corsa, cosicché tu continui a girare liberamente senza attrito. Quando passi dal punto più basso (chiamiamo questo punto "a ore sei"), tu hai la sensazione di essere più pesante, cioè il sedile ti spingerà verso l'alto con la massima forza. Quando passi dal punto più alto (a ore dodici), hai la sensazione di essere più leggero. Nei punti "a ore tre" e "a ore nove", avrai la sensazione del tuo peso "normale"? Se no, dove risentirai del tuo peso normale?

Regionamento Se la ruota gigante ruotasse a velocità costante, la risposta alla domanda sarebbe sì. Se tu sei il solo passeggero, tuttavia, la ruota è *sbilanciata* e non può ruotare a velocità costante. Quando tu ti muovi verso il basso dal punto più alto, la tua velocità aumenta. Dopo il passaggio dal punto più basso, la tua velocità diminuisce e tu ritorni indietro verso la sommità. Quindi, subirai sia un'accelerazione tangenziale sia un'accelerazione centripeta. Nella posizione "a ore tre", nella quale ti stai muovendo verso il basso, hai un'accelerazione tangenziale verso il basso. Quindi, proprio come in un ascensore accelerato che scende, ti sentirai più leggero. Nella posizione "a ore nove", quando ti stai muovendo verso l'alto, sei accelerato tangenzialmente verso il basso. Ancora una volta, ti sentirai più leggero. Per poter annullare le posizioni, hai bisogno di una certa componente *verso l'alto* dell'accelerazione centripeta. Ciò si verificherà quando ti troverai *al di sotto* di "ore tre" o "ore nove", cosicché l'accelerazione centripeta abbia una componente *verso l'alto*. L'esatta posizione dipenderà dalla tua massa e dai dettagli della ruota gigante.

Esempio 5.7 Palla che ruota

Una piccola sfera di massa m , legata all'estremità di un filo di lunghezza R , ruota, su una circonferenza *verticale*, intorno a un punto fisso O , come in Figura 5.11a. Si determini

la tensione del filo quando esso forma un angolo θ con la verticale e il modulo della velocità della sfera è v .

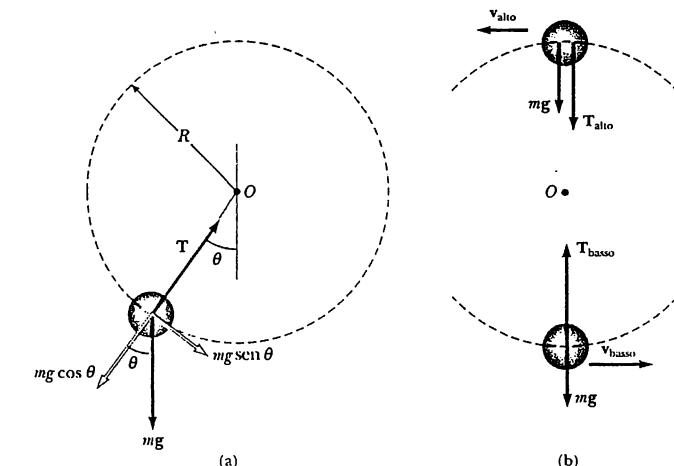


Figura 5.11 (Esempio 5.7)
 (a) Le forze agenti su una massa m legata all'estremità di un filo di lunghezza R che ruota su una circonferenza verticale di centro O . (b) Le forze che agiscono su m quando si trova nel punto più alto e nel punto più basso della traiettoria circolare. Si noti che la tensione è massima nel punto più basso e minima nel punto più alto.

Soluzione Per prima cosa si osservi che la velocità *non è* costante in modulo in quanto esiste una componente tangenziale dell'accelerazione che deriva dal peso della sfera. Dal diagramma di corpo libero in Figura 5.11a, si vede che le sole forze che agiscono sulla sfera sono la forza di gravità mg e la forza esercitata dal filo (o tensione), T . Adesso, scomponiamo la forza peso, mg , in una componente tangenziale, $mg \sin \theta$, ed in una componente radiale, $mg \cos \theta$. L'applicazione della seconda legge di Newton alle forze che agiscono in direzione tangenziale porta a

$$\begin{aligned}\sum F_t &= mg \sin \theta = ma_t \\ a_t &= g \sin \theta\end{aligned}$$

Questa componente causa la variazione del modulo di v rispetto al tempo, poiché $a_t = dv/dt$.

Applicando la seconda legge di Newton alle forze che agiscono nella direzione radiale, ed osservando che T ed a_r sono dirette verso O , si ottiene

$$\sum F_r = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = m \left(\frac{v^2}{R} + g \cos \theta \right)$$

Casi limite Nel punto più alto della traiettoria, $\theta = 180^\circ$, si ha $\cos 180^\circ = -1$, e la tensione diventa

$$T_{\text{alto}} = m \left(\frac{v_{\text{alto}}^2}{R} - g \right)$$

Questo è il valore *minimo* di T . In questo punto $a_t = 0$ e quindi l'accelerazione è tutta radiale diretta verso il basso, come in Figura 5.11b.

Nel punto più basso della traiettoria, $\theta = 0$, essendo $\cos 0 = 1$, si ricava

$$T_{\text{basso}} = m \left(\frac{v_{\text{basso}}^2}{R} + g \right)$$

Questo è il valore *massimo* di T . Di nuovo, in questo punto $a_t = 0$, e l'accelerazione è tutta radiale diretta verso l'alto.

ESERCIZIO 8 Se aumenta la velocità media qual è l'orientazione del sistema in cui, più facilmente, il filo può spezzarsi? Risposta Nel punto più basso della traiettoria, dove T ha il suo valore massimo.

ESERCIZIO 9 Un oggetto di 0.40 kg legato a una fune di 0.50 m di lunghezza, ruota su una traiettoria circolare verticale. Se viene mantenuta una velocità costante di 4.0 m/s, qual è la tensione nella fune quando l'oggetto si trova nel punto più alto della circonferenza? Risposta 8.8 N

ESERCIZIO 10 Una macchina che percorre una strada rettilinea a 9.00 m/s incontra un dosso. Il dosso può essere considerato come un arco di circonferenza di raggio 11.0 m. Qual è la velocità della macchina sul dosso se un passeggero di 600 N prova un'assenza di peso? Risposta 10.4 m/s.

5.4 • MOTO IN PRESENZA DI FORZE RITARDANTI DIPENDENTI DALLA VELOCITÀ

All'inizio del capitolo abbiamo descritto l'interazione tra un corpo in moto e la superficie sulla quale esso si muove. Abbiamo trascurato totalmente qualunque interazione tra il corpo e il mezzo nel quale esso si muove. Consideriamo, adesso, l'effetto di un mezzo come un liquido o un gas. Il mezzo esercita una **forza ritardante**, R , sul corpo che si muove attraverso di esso. Il modulo di questa forza dipende da fattori quali la velocità del corpo, e il verso di R è sempre opposto a quello del moto del corpo relativo al mezzo. In generale, il modulo della forza ritardante aumenta con l'aumentare della velocità. Alcuni esempi sono la **resistenza dell'aria** associata al moto dei veicoli e le forze visce che agiscono sui corpi che si muovono in un liquido.

La forza ritardante può avere una dipendenza complessa dalla velocità. Nella discussione seguente, considereremo due casi. Nel primo, assumeremo che la forza ritardante sia proporzionale al modulo della velocità; questo è il caso di oggetti che cadono in un fluido a bassa velocità e per oggetti piccolissimi, come le particelle di polvere, che si muovono in aria. Nel secondo caso, trat-

teremo situazioni in cui la forza ritardante sia proporzionale al quadrato della velocità del corpo; oggetti estesi che si muovono in aria in caduta libera saranno sottoposti a una tale forza.

Forza ritardante proporzionale alla velocità

Se assumiamo che la forza ritardante agente su un corpo che si muove in un mezzo viscoso sia proporzionale alla velocità del corpo, allora la forza ritardante si può esprimere come

$$\mathbf{R} = -b\mathbf{v} \quad [5.4]$$

con \mathbf{v} velocità dell'oggetto e b una costante che dipende dalle proprietà del mezzo, dalla forma e dalle dimensioni dell'oggetto. Se l'oggetto è una sfera di raggio r , allora b è proporzionale ad r .

Si consideri una sfera di massa m lasciata cadere, dalla quiete, in un fluido, come in Figura 5.12a. Descriviamo il suo moto assumendo che le uniche forze che agiscono sulla sfera siano la forza ritardante $-bv$ e la forza gravitazionale mg^1 .

Applicando la seconda legge di Newton al moto verticale, scegliendo come positiva la direzione rivolta verso il basso e notando che $\sum F_y = mg - bv$, si ottiene

$$mg - bv = ma = m \frac{dv}{dt}$$

con l'accelerazione diretta verso il basso. Semplificando la precedente espressione si ha

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v \quad [5.5]$$

L'Equazione 5.5 si chiama *equazione differenziale* e i metodi per risolvere una tale equazione possono non essere ancora familiari al lettore. Comunque, si osservi che inizialmente, quando $v = 0$, la forza ritardante è nulla e l'accelerazione, dv/dt , è semplicemente g . Al crescere di t , la forza ritardante aumenta e l'accelerazione diminuisce. Alla fine, l'accelerazione diventa nulla quando la forza ritardante diventa uguale al peso. Da questo istante in poi, il corpo si muoverà con accelerazione nulla avendo raggiunto la sua **velocità limite**, v_l . La velocità limite può ricavarsi dall'Equazione 5.5, ponendo $a = dv/dt = 0$. Il risultato è

$$mg - bv_l = 0 \quad \text{ossia} \quad v_l = mg/b$$

La funzione v che soddisfa l'Equazione 5.5 con $v = 0$ nell'istante $t = 0$ è

$$v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}) = v_l (1 - e^{-t/\tau}) \quad [5.6]$$

Questa funzione è riportata in Figura 5.12b. L'intervallo di tempo $\tau = m/b$ è quello che l'oggetto impiega per raggiungere il 63% della sua velocità limite. Si può verificare che l'Equazione (5.6) è una soluzione dell'Equazione 5.5, derivandola direttamente:

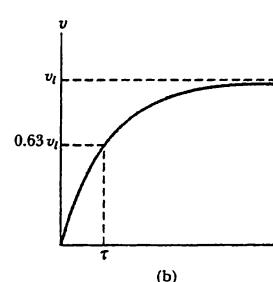
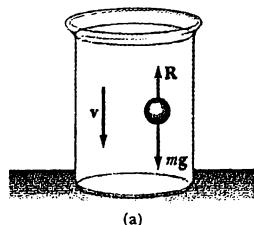


Figura 5.12 (a) Una sferetta cade in un fluido viscoso. (b) Il grafico della velocità in funzione del tempo per un oggetto che cade attraverso un mezzo viscoso. L'oggetto raggiunge la velocità massima, o limite, v_l . τ è l'intervallo di tempo che il corpo impiega per raggiungere un valore pari a 0.63 v_l .

- **Velocità limite**

¹ C'è anche una forza *di galleggiamento*, che è costante e uguale al peso del liquido spostato, come sarà discusso nel Capitolo 15. Questa forza cambierà il peso effettivo della sfera solo per un fattore costante, e perciò la ignoriamo in questa sede.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mg}{b} - \frac{mg}{b} e^{-bt/m} \right) = -\frac{mg}{b} \frac{d}{dt} e^{-bt/m} = ge^{-bt/m}$$

Sostituendo questa espressione e l'Equazione (5.6) nell'Equazione (5.5) si verifica che la soluzione soddisfa l'equazione differenziale.

Esempio 5.8 Sfera che cade nell'olio

Una sferetta di massa 2.00 g è lasciata cadere, dalla quiete, in un lungo cilindro riempito di olio. La sfera raggiunge una velocità limite di 5.00 cm/s. Determinare la costante r ed il tempo impiegato dalla sfera per raggiungere il 90% della velocità limite.

Soluzione Poiché la velocità limite è data da $v_l = mg/b$, la costante b è data da:

$$b = \frac{mg}{v_l} = \frac{(2.00 \text{ g})(980 \text{ cm/s}^2)}{5.00 \text{ cm/s}} = 392 \text{ g/s}$$

Quindi, l'intervallo di tempo τ è dato da

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{2.00 \text{ g}}{392 \text{ g/s}} = 5.10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

La velocità in funzione del tempo può essere determinata usando l'Equazione 5.6, $v = v_l(1 - e^{-t/\tau})$. Per determinare il tempo t impiegato dalla sfera per raggiungere la velocità di 0.900 v_l , sostituiamo $v = 0.900 v_l$ nell'espressione e risolviamo per t :

$$\begin{aligned} 0.900 v_l &= v_l(1 - e^{-t/\tau}) \\ 1 - e^{-t/\tau} &= 0.900 \\ e^{-t/\tau} &= 0.100 \\ -\frac{t}{\tau} &= -2.30 \\ t &= 2.30 \tau = 2.30(5.10 \times 10^{-3} \text{ s}) \\ &= 11.7 \times 10^{-3} \text{ s} = 11.7 \text{ ms} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 11 Qual è la velocità della sfera attraverso l'olio al tempo $t = 11.7$ ms? Confrontare questo valore con la velocità che avrebbe avuto la sfera se fosse caduta liberamente nel vuoto sotto l'azione della gravità. Risposta 4.50 cm/s nell'olio contro 11.5 cm/s in caduta libera.

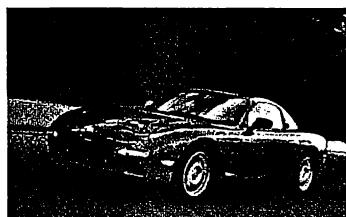


Resistenza dell'aria ad alte velocità

Per oggetti di grandi dimensioni, che si muovono attraverso l'aria, con velocità elevate come gli aerei, i paracadutisti in caduta libera e le palle da baseball, la forza di resistenza è approssimativamente proporzionale al quadrato della velocità. In questi casi, il modulo della forza di resistenza può essere espresso come

$$R = \frac{1}{2} D \rho A v^2 \quad [5.7]$$

dove ρ è la densità dell'aria, A è l'area della sezione dell'oggetto che cade, misurata in un piano perpendicolare al suo moto e D è una grandezza adimensionale determinata empiricamente, nota come *coefficiente di resistenza*. Il coefficiente di resistenza ha un valore di circa 0.5 per oggetti di forma sferica ma può assumere valori prossimi a 2.0 per oggetti aventi forme irregolari.



Auto aerodinamica. Le fasce laterali sono utilizzate nelle auto sportive per ridurre la resistenza dell'aria e aumentare l'efficienza del carburante. (©1992 Dick Kelley)

Consideriamo un aeroplano in volo che sia sottoposto a una tale forza di resistenza. L'Equazione 5.7 mostra che la forza di resistenza è proporzionale alla densità dell'aria e quindi diminuisce al diminuire della densità. Poiché aumentando l'altezza diminuisce la densità dell'aria, la forza di resistenza, che agisce su un aereo a reazione che vola a una data velocità, deve anche diminuire aumentando l'altezza. Inoltre, se si raddoppia la velocità dell'aereo, la forza di resistenza aumenta di un fattore 4. Per mantenere tale velocità, la forza propulsiva deve aumentare di un fattore 4.

Analizziamo, adesso, il moto di una massa, in caduta libera, su cui agisce una forza di resistenza, dovuta all'aria, diretta verso l'alto e di modulo $R = \frac{1}{2} D \rho A v^2$. Supponiamo che la massa m sia lasciata cadere dalla quiete da una quota $y = 0$, come in Figura 5.13. Sulla massa agiscono due forze esterne: la forza di gravità, mg , rivolta verso il basso e la forza di resistenza, R , rivolta verso l'alto. (Vi è anche una forza di galleggiamento che trascureremo). Quindi, il modulo della forza risultante è dato da

$$F_{\text{ris}} = mg - \frac{1}{2} D \rho A v^2 \quad [5.8]$$

Sostituendo $F_{\text{ris}} = ma$, nell'Equazione 5.8, si trova che la massa possiede un'accelerazione, rivolta verso il basso, di modulo

$$a = g - \left(\frac{D \rho A}{2m} \right) v^2 \quad [5.9]$$

Inoltre, si può calcolare la velocità limite, v_l , considerando che quando la forza di gravità è equilibrata dalla forza di resistenza, la forza risultante è nulla e quindi l'accelerazione vale zero. Ponendo $a = 0$ nell'Equazione 5.9

$$g - \left(\frac{D \rho A}{2m} \right) v_l^2 = 0$$

$$v_l = \sqrt{\frac{2mg}{D \rho A}} \quad [5.10]$$

Da questa espressione, si può determinare la dipendenza della velocità limite dalle dimensioni dell'oggetto. Supponiamo che l'oggetto sia una sfera di raggio r . In tal caso, $A \propto r^2$ ed $m \propto r^3$ (poiché la massa è proporzionale al volume). Quindi, $v_l \propto \sqrt{r}$. Ciò, aumentando il valore di r , la velocità limite aumenta con la radice quadrata del raggio.

La Tabella 5.2 riporta le velocità limite per alcuni oggetti che cadono attraverso l'aria.

TABELLA 5.2 Velocità limite per vari oggetti che cadono attraverso l'aria

Oggetto	Massa (kg)	Area (m^2)	$v_l (\text{m/s})^2$
Paracadutista	75.0	0.70	60
Palla da baseball (raggio 3.7 cm)	0.145	4.2×10^{-3}	33
Palla da golf (raggio 2.1 cm)	0.046	1.4×10^{-3}	32
Chicco di grancipolla (raggio 0.50 cm)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Goccia di pioggia (raggio 0.20 cm)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9

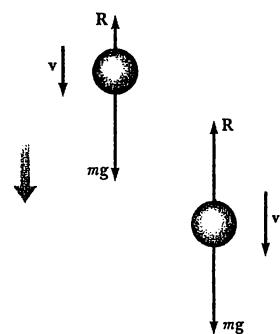


Figura 5.13 Un oggetto che cade attraverso l'aria è soggetto alla forza di resistenza, R , e alla forza di gravità, mg . L'oggetto raggiunge la velocità limite quando la forza risultante che agisce su di esso è nulla; cioè quando $R = -mg$, o $R = mg$. Prima che ciò avvenga, l'accelerazione varia con la velocità secondo l'Equazione 5.9.

¹ Il coefficiente di resistenza, D , è posto uguale a 0.5.

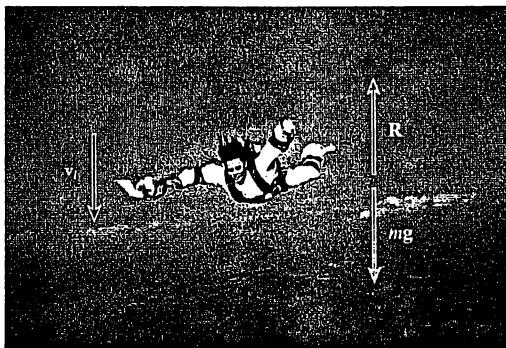


Figura 5.14 (Problema concettuale 5) Allargando le braccia e le gambe e disponendo il piano del loro corpo parallelo al suolo, i paracadutisti sono soggetti al massimo della resistenza dell'aria con una velocità limite minima. (Guy Sauvage, Photo Researchers, Inc.)

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Consideriamo un paracadutista che cade attraverso l'aria prima che raggiunga la sua velocità limite, come in Figura 5.14. Mentre la velocità del paracadutista aumenta, che cosa accade della sua accelerazione? Qual è la sua accelerazione una volta raggiunta la sua velocità limite?

5.5 • MODELLI NUMERICI NELLA DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE²

Come abbiamo visto in questo e nei capitoli precedenti, lo studio della dinamica di un punto materiale (particella) è focalizzato sulla descrizione della posizione, della velocità, e dell'accelerazione in funzione del tempo. Esiste un rapporto causa-effetto fra queste grandezze: la velocità determina una variazione di posizione, l'accelerazione determina una variazione di velocità, e l'accelerazione stessa è una diretta conseguenza di forze applicate. Quindi, lo studio del moto inizia generalmente con il calcolo della forza risultante sulla particella.

In questo paragrafo limiteremo la nostra discussione al moto unidimensionale cosicché non si utilizzerà la notazione in grassetto per le grandezze vettoriali. Se una particella di massa m si muove sotto l'azione di una forza risultante F , per la seconda legge di Newton diciamo che l'accelerazione della particella è data da $a = F/m$. In generale, si può ottenere la soluzione di un problema di dinamica con la seguente procedura:

1. Sommare tutte le forze agenti sulla particella per ottenere la forza risultante F .
2. Con questa forza determinare l'accelerazione usando $a = F/m$.
3. Con questa accelerazione determinare la velocità dalla relazione $dv/dt = a$.
4. Con questa velocità determinare la posizione dalla relazione $dx/dt = v$.

² L'autore è grato al Colonnello James Head della U.S.A. Air Force Academy per aver curato la redazione di questo paragrafo.

Esempio 5.9 Un oggetto che cade nel vuoto

Possiamo illustrare la procedura appena descritta considerando una particella nel vuoto sotto l'azione della forza di gravità, come nella Figura 5.15.

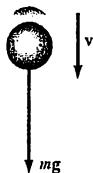


Figura 5.15 (Esempio 5.9) Un oggetto cade nel vuoto sotto l'azione della gravità.

alla massa della particella per la sua accelerazione (considerando positiva la direzione verso l'alto):

$$F = ma = -mg$$

Così, $a = -g$, è una costante. Poiché $a = dv/dt$, l'equazione differenziale risultante per la velocità è $dv/dt = -g$ che può essere integrata per dare

$$v(t) = v_0 - gt$$

Inoltre, poiché $v = dx/dt$, la posizione della particella può essere calcolata da un'altra integrazione, che porta al ben noto risultato

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

Ragionamento e Soluzione Applicando la seconda legge di Newton, fissiamo la somma delle forze esterne uguale

In tale espressione, x_0 e v_0 sono rispettivamente la posizione e la velocità della particella al tempo $t = 0$.

La procedura appena descritta è semplice per alcune situazioni fisiche, come quella descritta nell'Esempio 5.9. Nel "mondo reale", comunque, spesso sorgono complicazioni che rendono difficile trovare soluzioni analitiche per molte situazioni pratiche e che, probabilmente, vanno oltre le conoscenze di matematica richieste a studenti di un corso introduttivo di fisica. Per esempio, la forza può dipendere dalla posizione della particella, come nei casi in cui debba essere presa in considerazione la variazione della forza di gravità con l'altezza. La forza può anche variare con la velocità, come abbiamo visto nei casi di forze ritardanti causate dal moto in un liquido o in un gas. La forza può dipendere sia dalla posizione che dalla velocità, come nel caso di un corpo che cade nell'aria dove la forza di resistenza dipende dalla velocità e dall'altezza (densità dell'aria). Nel moto di un razzo la massa varia con il tempo, e così mentre la forza resta costante, l'accelerazione varia.

Un'altra complicazione sorge perché le equazioni che mettono in relazione l'accelerazione, la velocità, la posizione e il tempo sono equazioni differenziali e non equazioni algebriche. Le equazioni differenziali sono comunemente risolvibili con il calcolo di integrali ed altre tecniche speciali di cui gli studenti di un corso introduttivo non sono a conoscenza.

Allora, come bisogna procedere per risolvere i problemi del mondo reale senza il ricorso alla matematica avanzata? La risposta è quella di risolvere tali problemi su personal computer con metodi numerici elementari. Il più semplice di questi è il metodo di Eulero, cosiddetto dal matematico svizzero Leonardo Eulero (1707-1783).

Il metodo di Eulero

Nel metodo di Eulero per la risoluzione di equazioni differenziali, le derivate sono approssimate a differenze finite. Considerando un piccolo incremento di tempo, Δt , la relazione tra accelerazione e velocità può essere approssimata come

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Quindi, la velocità di una particella alla fine del periodo Δt è approssimativamente uguale alla velocità all'inizio del periodo, più l'accelerazione durante l'intervallo moltiplicata per Δt :

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t \quad [5.11]$$

Poiché l'accelerazione è funzione del tempo, questa stima di $v(t + \Delta t)$ sarà accurata solo se l'intervallo di tempo Δt è corto abbastanza affinché la variazione di accelerazione durante tale intervallo sia molto piccola (se ne discuterà in seguito).

La posizione può essere trovata allo stesso modo:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ x(t + \Delta t) &= x(t) + v(t)\Delta t \end{aligned} \quad [5.12]$$

Si potrebbe provare ad aggiungere al risultato il termine $\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ per renderlo simile all'equazione della cinematica, ma questo termine non è incluso nel metodo di Eulero di integrazione perché si assume Δt così piccolo che $(\Delta t)^2$ è prossimo a zero.

Se è nota l'accelerazione a ogni istante t , la velocità della particella e la posizione a $(t + \Delta t)$ possono essere calcolate dalle Equazioni 5.11 e 5.12. Il calcolo può poi procedere in una serie finita di passaggi per determinare la velocità e la posizione a ogni istante successivo. L'accelerazione è determinata dalla forza risultante agente sull'oggetto,

$$a(x, v, t) = \frac{F(x, v, t)}{m} \quad [5.13]$$

che può dipendere esplicitamente dalla posizione, dalla velocità e dal tempo.

È conveniente giungere a una soluzione numerica di questo tipo di problemi, numerando i passaggi e scrivendo in una tabella i calcoli. La Tabella 5.3 illustra come procedere con ordine. Le equazioni fornite nella tabella possono essere introdotte in uno "spreadsheet" (foglio elettronico) e il calcolo può essere fatto riga per riga per ottenere la velocità, la posizione e l'accelerazione in funzione del tempo. Il calcolo può anche essere fatto con un programma scritto in BASIC, PASCAL, o FORTRAN, o con programmi di matematica per personal computer che si trovano in commercio. Si possono prendere molti piccoli incrementi ottenendo risultati abbastanza accurati con l'aiuto di un computer. Si possono disegnare grafici della velocità e della posizione in funzione del tempo come aiuto alla visualizzazione del moto.

TABELLA 5.3 Metodo di Eulero per la risoluzione dei problemi di dinamica

Passaggio	Tempo	Posizione	Velocità	Accelerazione
0	t_0	x_0	v_0	$a_0 = F(x_0, v_0, t_0) / m$
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$	$a_1 = F(x_1, v_1, t_1) / m$
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$a_2 = F(x_2, v_2, t_2) / m$
3	$t_3 = t_2 + \Delta t$	$x_3 = x_2 + v_2 \Delta t$	$v_3 = v_2 + a_2 \Delta t$	$a_3 = F(x_3, v_3, t_3) / m$
.
.
.
n	t_n	x_n	v_n	a_n

Il metodo di Eulero ha il vantaggio di non mettere in ombra la dinamica, in quanto le relazioni fondamentali tra accelerazione e forza, tra velocità e accelerazione, e tra posizione e velocità sono chiaramente evidenti. Infatti, queste relazioni sono il cuore dei calcoli. Non è necessaria una matematica avanzata, e la fisica di base governa la dinamica.

Il metodo di Eulero è totalmente affidabile per incrementi di tempo infinitesimi, ma per motivi pratici si deve scegliere un valore finito dell'incremento. Affinché l'approssimazione alle differenze finite dell'Equazione 5.11 sia valida, l'incremento temporale deve essere piccolo abbastanza perché, nel frattempo, l'accelerazione non cambi apprezzabilmente. Possiamo determinare un appropriato valore per l'incremento temporale ragionando intorno al particolare problema in studio. Il criterio per la scelta del valore dell'incremento temporale potrebbe cambiare durante il moto. In pratica, tuttavia, si sceglierà usualmente un incremento temporale appropriato alle condizioni iniziali del problema e si userà lo stesso valore per tutti i calcoli.

Il valore dell'incremento temporale influenza l'accuratezza del risultato, ma sfortunatamente non è facile determinarlo con il metodo di Eulero senza la conoscenza della esatta soluzione analitica. Un metodo per determinare l'accuratezza della soluzione numerica è di ripetere il calcolo con incrementi più piccoli e confrontare i risultati. Se i due calcoli concordano per un certo numero di cifre significative, si può assumere che i risultati siano corretti entro tale precisione.

5.6 • LE FORZE FONDAMENTALI DELLA NATURA

Abbiamo descritto una varietà di forze di cui abbiamo esperienza tutti i giorni nelle nostre attività, come la forza di gravità che agisce su tutti i corpi che si trovano sulla superficie terrestre o vicino ad essa e la forza d'attrito quando una superficie scivola su un'altra. Altre forze agiscono pure nel mondo atomico e subatomico. Per esempio, le forze atomiche all'interno dell'atomo sono responsabili dei legami che tengono insieme i suoi costituenti, e le forze nucleari agiscono su parti diverse del nucleo per evitare che i suoi componenti si separino.

Fino a tempi recenti, i fisici hanno creduto che vi fossero quattro forze fondamentali in natura: la forza gravitazionale, la forza elettromagnetica, la forza nucleare forte, e la forza nucleare debole.

La forza gravitazionale

La forza gravitazionale è la forza di attrazione reciproca fra due corpi qualsiasi nell'Universo. È interessante e piuttosto curioso che, sebbene la forza gravitazionale possa essere estremamente intensa fra corpi macroscopici, essa è la più debole di tutte le forze fondamentali. Per esempio, la forza gravitazionale fra l'elettrone e il protone nell'atomo di idrogeno è soltanto circa 10^{-47} N, mentre la forza elettromagnetica fra queste due stesse particelle è circa 10^{-7} N.

La legge di gravitazione universale di Newton afferma che ogni particella nell'Universo attira ogni altra particella con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Se le particelle hanno masse m_1 ed m_2 e sono distanti r , come in Figura 5.16, il modulo della forza gravitazionale è

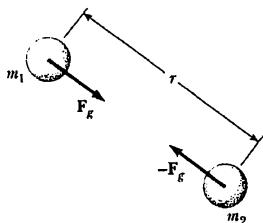


Figura 5.16 Due particelle di massa m_1 e m_2 si attraggono reciprocamente con una forza di modulo $Gm_1 m_2 / r^2$.

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

[5.14]

dove $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ è la costante di gravitazione universale.

La forza elettromagnetica

La forza elettromagnetica è la forza che lega atomi e molecole in composti che formano la materia ordinaria. Essa è molto più intensa della forza gravitazionale, come vedremo tra poco. La forza che permette a un pettine di gomma di attrarre pezzetti di carta e la forza che un magnete esercita su un chiodo di ferro sono forze elettromagnetiche. In effetti tutte le forze che agiscono nel nostro mondo macroscopico (a parte la forza di gravità) sono manifestazioni della forza elettromagnetica. Per esempio, le forze di attrito, le forze di contatto, le forze di tensione, e le forze nelle molle allungate sono una conseguenza delle forze elettromagnetiche tra particelle cariche vicine.

La forza elettromagnetica include due tipi di particelle: quelle con carica positiva e quelle con carica negativa. Diversamente dalla forza gravitazionale, la quale è *sempre* un'interazione di tipo attrattivo, la forza elettromagnetica può essere sia attrattiva che repulsiva, secondo il tipo di carica delle particelle. In generale, la forza elettromagnetica agisce tra due particelle cariche in moto relativo.

Quando le particelle cariche sono ferme l'una rispetto all'altra, la forza elettromagnetica agente tra esse viene definita forza *elettrostatica*. La legge di Coulomb esprime il modulo della forza elettrostatica F_e tra due particelle cariche poste a una distanza r :

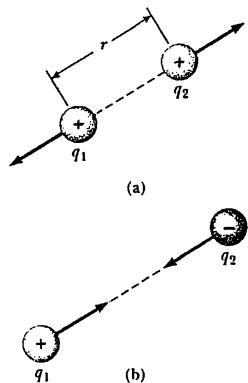


Figura 5.17 Due cariche poste a una distanza r esercitano una forza elettrostatica l'una sull'altra che è data dalla legge di Coulomb. (a) Quando le cariche sono dello stesso segno, la forza è repulsiva. (b) Quando sono di segno opposto la forza è attrattiva.

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

[5.15]

dove q_1 e q_2 sono le cariche di ciascuna particella, misurate in coulomb (C), e $k_e = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ è la costante di Coulomb (nel vuoto)³. Si noti che la forza elettrostatica ha la stessa forma matematica della legge di gravitazione universale di Newton (Eq. 5.14); tuttavia, la carica sostituisce la massa e le costanti sono diverse. La forza elettrostatica è *attrattiva* se le due cariche sono di segno opposto, è *repulsiva* se le due cariche sono dello stesso segno, come indicato in Figura 5.17. In altre parole, *cariche opposte si attraggono, cariche simili si respingono*.

La quantità più piccola di carica *isolata* trovata in natura (fino ad ora) è la carica di un elettrone o di un protone. Questa fondamentale unità di carica ha il valore $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$. Teorie sviluppate negli anni '70 e '80 propongono che protoni e neutroni siano composti da particelle più piccole denominate *quark*, con cariche sia di $2e/3$ che di $-e/3$ (discusse nel Cap. 31). Sebbene si abbia evidenza sperimentale di tali particelle nella materia nucleare, quark *liberi* non sono mai stati individuati.

³ La costante k_e (come sarà meglio chiarito nello studio dell'elettrostatica) dipende dal mezzo nel quale sono immerse le cariche e precisamente dalla *costante dielettrica del mezzo* ϵ , secondo la relazione (in unità SI) $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}$. La *costante dielettrica del vuoto* è $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$, da cui si trae il valore di k_e (nel vuoto) riportato nel testo [N.d.T.].

Le proprietà più importanti delle cariche elettriche possono essere riassunte come segue.

- Le cariche sono grandezze scalari, quindi i loro valori si sommano aritmeticamente.
- I due tipi di cariche esistenti in natura sono definiti *positivo* e *negativo*. Cariche di segno uguale si respingono, cariche di segno opposto si attraggono.
- La carica netta su ogni oggetto ha valori discreti, in altre parole, la carica si dice *quantizzata*. Ogni particella elementare carica isolata ha una carica di $\pm e$. Per esempio, gli elettroni hanno una carica $-e$ e i protoni hanno una carica $+e$. (I neutroni non hanno carica.) Poiché e è l'unità fondamentale di carica, la carica netta di un oggetto è Ne , dove N è un numero intero. Per gli oggetti macroscopici, N è molto grande e la quantizzazione della carica non viene notata.
- La carica elettrica si conserva sempre. Ciò significa che in qualsiasi tipo di processo – come una collisione, una reazione chimica, un decadimento nucleare – la carica totale di un sistema isolato resta costante.

• Proprietà delle cariche elettriche

La forza forte

Un atomo, come noi ordinariamente lo comprendiamo, consiste di un nucleo carico positivamente estremamente denso circondato da una nuvola di elettroni carichi negativamente, con gli elettroni attratti dal nucleo dalla forza di Coulomb. Poiché tutti i nuclei, tranne quelli di idrogeno, sono combinazioni di protoni carichi positivamente e neutroni neutri (chiamati collettivamente nucleoni), perché la forza elettrostatica di repulsione tra i protoni non causa la scissione dei nuclei? È ovvio che ci dovrà essere una forza d'attrazione che supera l'intensa forza elettrostatica di repulsione e che sia responsabile della stabilità del nucleo. Questa grande forza che lega i nucleoni per formare un nucleo è chiamata *forza forte*. Va notato che gli elettroni e certe altre particelle non sono soggetti alla forza forte. Diversamente dalle forze elettromagnetiche e gravitazionali, che dipendono dall'inverso del quadrato della distanza, la forza forte ha un'azione estremamente corta; la sua intensità diminuisce molto rapidamente fuori dal nucleo ed è trascurabile per distanze maggiori di 10^{-14} m. Per distanze di 10^{-15} m (una tipica dimensione nucleare), la forza forte è di circa due ordini di grandezza più intensa della forza elettromagnetica.

La forza debole

La *forza debole* è una forza ad azione breve che tende a produrre instabilità in certi nuclei. Essa fu inizialmente osservata in sostanze radioattive naturali e si è poi scoperto che gioca un ruolo chiave nella maggior parte delle reazioni di decadimento radioattivo. La forza debole è circa 10^{25} volte più intensa della forza gravitazionale e circa 10^{12} volte più debole della forza elettromagnetica.

Aspetto attuale delle forze fondamentali

Per anni i fisici hanno cercato una semplificazione che riducesse il numero delle forze fondamentali in natura. Nel 1967 i fisici predissero che la forza elettromagnetica e la forza debole, originariamente pensate come indipendenti tra loro e fondamentali, fossero in effetti manifestazioni di una sola forza, ora denominata *forza elettrodebole*. La predizione fu confermata sperimentalmente nel 1984. Adesso noi sappiamo pure che i protoni e i neutroni non sono particelle semplici ma sono composti da particelle ancora più semplici chiamate

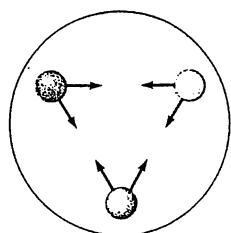


Figura 5.18 Un protone è composto da tre quark che sono legati insieme da una forza estremamente intensa chiamata forza di colore.

quark. Per esempio, il protone è formato da tre quark come è mostrato in Figura 5.18. I quark sono legati insieme da una forza estremamente intensa chiamata **forza di colore**.

Gli scienziati credono che le forze fondamentali della natura siano strettamente legate all'origine dell'Universo. La teoria del Big Bang afferma che l'Universo ha avuto inizio con una esplosione cataclismica 15 o 20 miliardi di anni fa. Secondo questa teoria, nei primi momenti successivi al Big Bang si assisterà a tali estremi di energia che tutte le forze fondamentali sarebbero state unificate in una sola. I fisici continuano a cercare le connessioni tra le forze fondamentali note – connessioni che potrebbero provare come le forze non siano in realtà che diversi aspetti di una singola *superforza*. Il recente successo che lega le forze nucleari deboli ed elettromagnetiche ha condotto a sforzi enormi per uno schema di unificazione (ancora da provare) denominato Teoria della Grande Unificazione (GUT). Quest'argomento affascinante costituisce oggi l'avanguardia della fisica.

5.7 • IL CAMPO GRAVITAZIONALE

Quando Newton pubblicò per la prima volta la sua teoria della gravità, i suoi contemporanei stentavano ad accettare il concetto che un corpo potesse esercitare una forza su un altro senza che vi fosse nulla nello spazio fra di essi. Essi si chiesero come fosse possibile per due masse interagire senza pensare che vi fosse un contatto fra loro. Sebbene Newton stesso non potesse rispondere a questa domanda, la sua teoria fu considerata un successo perché spiegava in modo molto soddisfacente il moto dei pianeti.

Un approccio alternativo è quello di pensare all'interazione gravitazionale come un processo a due stadi. Prima, un corpo crea un campo gravitazionale \mathbf{g} in tutto lo spazio attorno ad esso. Poi, un secondo corpo di massa m subisce una forza $\mathbf{F}_g = mg$. In altre parole, il campo \mathbf{g} esercita una forza sulla particella. Quindi, il campo gravitazionale è definito da

*Definizione •
di campo gravitazionale*

$$\mathbf{g} \equiv \frac{\mathbf{F}_g}{m} \quad [5.16]$$

Cioè, il campo gravitazionale in un punto dello spazio è uguale alla forza gravitazionale che una massa di prova subisce in quel punto diviso la massa stessa. Di conseguenza, se \mathbf{g} è noto in qualche punto dello spazio, una massa m di prova subisce una forza gravitazionale mg quando è posta in quel punto.

Ad esempio, si consideri un oggetto di massa m vicino alla superficie della Terra. La forza gravitazionale sull'oggetto è diretta verso il centro della Terra e ha un modulo mg . Dunque si vede che il campo gravitazionale a cui è sottoposto l'oggetto in un certo punto ha un modulo uguale all'accelerazione di gravità in quel punto. Poiché la forza gravitazionale sull'oggetto ha un modulo $GM_T m/r^2$ (dove M_T è la massa della Terra), il campo \mathbf{g} alla distanza r dal centro della Terra è dato da

*Campo gravitazionale •
della Terra*

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = \frac{GM_T}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad [5.17]$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è un versore che punta radialmente all'esterno della Terra, e il segno meno indica che il campo è diretto verso il centro della Terra, come mostrato

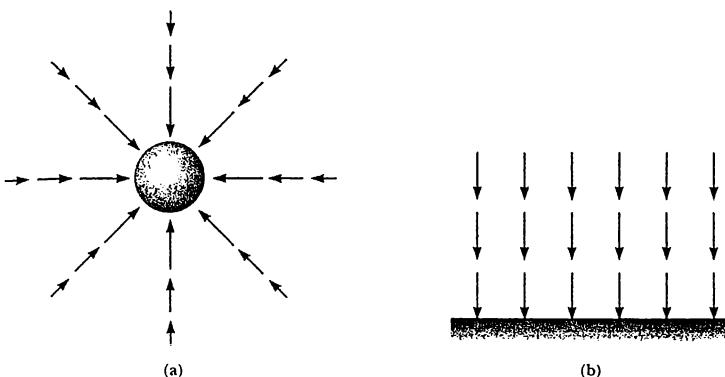


Figura 5.19 (a) I vettori del campo gravitazionale in prossimità di una massa sferica uniforme come la Terra variano sia in direzione che in modulo. (b) I vettori del campo gravitazionale in una piccola regione vicino alla superficie della Terra sono uniformi; cioè uguali sia in modulo che in direzione.

in Figura 5.19a. Si noti che i vettori del campo in punti diversi attorno alla massa sferica variano sia in direzione che in modulo. In una piccola regione vicino alla superficie della Terra, \mathbf{g} è approssimativamente costante e il campo diretto in basso è uniforme, come indicato in Figura 5.19b. Quest'espressione è valida in tutti i punti *fuori* della superficie terrestre, assumendo che la Terra sia sferica e che la rotazione possa essere trascurata. Presso la superficie della Terra, dove $r = R_T$, \mathbf{g} ha un modulo di 9.80 m/s^2 .

Il concetto di campo è utilizzato in molte altre aree della fisica. Esso fu introdotto da Michael Faraday (1791-1867) nei suoi studi sull'elettromagnetismo. Nonostante la sua natura astratta, il concetto di campo è particolarmente utile per descrivere sia le interazioni magnetiche che elettriche.

I campi magnetici, elettrici e gravitazionali sono *campi vettoriali* in quanto a ogni punto dello spazio è associato un vettore. Allo stesso modo, un *campo scalare* è un campo in cui una grandezza scalare è utilizzata per descrivere ogni punto dello spazio. Ad esempio, la variazione della temperatura su una data regione può essere descritta da un campo scalare della temperatura.

5.8 • MOTO IN SISTEMI ACCELERATI

Quando abbiamo introdotto le leggi del moto di Newton, nel Capitolo 4, abbiamo messo in evidenza che tali leggi sono valide se le osservazioni vengono eseguite in un sistema di riferimento *inerziale*. Generalmente il moto viene analizzato in sistemi di riferimento inerziali, ma ci sono casi in cui un sistema accelerato è più conveniente. In questo paragrafo, analizzeremo come un osservatore, che si trova in un riferimento non inerziale (cioè in un riferimento accelerato), tenterà di applicare la seconda legge di Newton.

Se una particella si muove con accelerazione \mathbf{a} rispetto ad un osservatore che si trova in un riferimento inerziale, allora l'osservatore inerziale può usare la seconda legge di Newton ed affermare, correttamente, che $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Se un

Forze fittizie •

osservatore che si trova in un sistema di riferimento accelerato (osservatore non inerziale) tenta di applicare, al moto della particella, la seconda legge di Newton, egli deve introdurre **forze fittizie** per rendere valida in quel riferimento la seconda legge di Newton. Tali forze, "inventate" dall'osservatore non inerziale, nel sistema di riferimento accelerato *sembrano* essere forze reali. Sottolineiamo, però, che queste forze fittizie *non* esistono se il moto è osservato in un sistema di riferimento inerziale. Le forze fittizie sono usate solo in sistemi accelerati e *non* rappresentano forze "reali" che agiscono sul corpo. (Per forze "reali" intendiamo interazioni del corpo con il suo ambiente circostante). Se le forze fittizie sono correttamente definite nel sistema accelerato, in tal caso la descrizione del moto, in tale riferimento, sarà equivalente alla descrizione fatta da un osservatore inerziale che considera soltanto forze reali.

Per comprendere meglio il moto di un sistema che ruota, consideriamo un'auto che viaggia, ad alta velocità, su un'autostrada e si avvicina a una corsia di uscita, in curva, come in Figura 5.20. Non appena l'auto inizia a girare a sinistra, immettendosi nella corsia, una persona che siede accanto al guidatore scivola verso destra sul sedile e urta lo sportello. A questo punto, la forza esercitata dallo sportello impedisce che egli sia sbalzato fuori dall'auto. Perché il passeggero si muove verso lo sportello? Una spiegazione popolare, ma *impropria*, è quella di attribuire a una forza misteriosa questa spinta verso l'esterno. (Questa forza è spesso chiamata forza "centrifuga", ma noi non useremo questo termine che, spesso, genera confusione). Il passeggero inventa questa forza fittizia per spiegare il suo moto nel sistema di riferimento accelerato.

Il fenomeno può spiegarsi correttamente nel modo seguente. Prima che l'auto entri nella corsia d'uscita, il passeggero si muove lungo una traiettoria rettilinea. Quando l'auto entra nella corsia e percorre una traiettoria curva, il passeggero, a causa dell'inerzia, tende a muoversi secondo l'originaria traiettoria rettilinea. Ciò è in accordo con la prima legge di Newton: la tendenza naturale di un corpo è quella di continuare a muoversi in linea retta. Però, se sul passeggero agisce una forza centripeta sufficientemente intensa (rivolta verso il centro di curvatura), egli si muoverà su una traiettoria curva assieme all'auto. La causa di questa forza centripeta è proprio la forza di attrito esistente tra il passeggero e il sedile dell'auto. Se questa forza di attrito non è sufficientemente intensa, il passeggero scivolerà da una parte all'altra del sedile quando l'auto gira sotto di lui. Alla fine, il passeggero incontra lo sportello, che fornisce una forza centripeta sufficientemente intensa da fargli seguire la medesima traiettoria curva dell'auto. Il passeggero scivola verso lo sportello non a causa di qualche forza misteriosa ma perché *non vi è una forza centripeta sufficientemente intensa da costringerlo a muoversi lungo la medesima traiettoria circolare seguita dall'auto*.

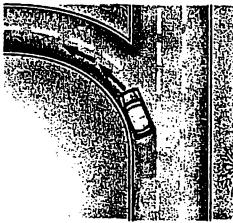


Figura 5.20 Un'auto che si avvicina a una corsia d'uscita in curva.

Esempio 5.10 Forze fittizie in un sistema rotante

Un osservatore situato in un sistema rotante è un altro esempio di osservatore non inerziale. Si assuma che un blocco di massa m , che si trova su una piattaforma rotante, orizzontale e senza attrito, sia legato a una fune, come in Figura 5.21. Secondo l'osservatore inerziale, se il blocco ruota con velocità costante in modulo, esso subisce un'accelerazione centripeta v^2/r , dove v è il modulo della sua velocità tangenziale. L'osservatore inerziale conclude che questa accelerazione centripeta è fornita dalla forza di tensione della fune, T , e scrive la

seconda legge di Newton $T = mv^2/r$.

Secondo l'osservatore non inerziale, situato sulla piattaforma rotante, il blocco è in quiete. Quindi, volendo applicare la seconda legge di Newton, questo osservatore deve introdurre una forza fittizia, diretta *verso l'esterno*, di modulo mv^2/r , chiamata *forza centrifuga*. Secondo l'osservatore non inerziale, questa forza "centrifuga" equilibra la forza di tensione e quindi

$$T - mv^2/r = 0$$

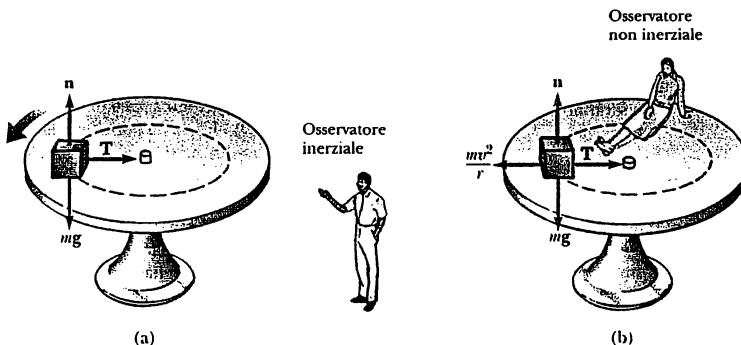


Figura 5.21 (Esempio 5.10) Un blocco di massa m è legato ad una fune fissata al centro di rotazione di una piattaforma girevole. (a) L'osservatore inerziale afferma che la forza centripeta è fornita dalla forza di tensione, T . (b) L'osservatore non inerziale afferma che il blocco non è soggetto ad accelerazione e quindi introduce una forza centrifuga fittizia mv^2/r , che è orientata verso l'esterno ed equilibra la tensione.

Occorre prestare molta attenzione quando si usano forze fittizie per descrivere fenomeni fisici. Occorre tener presente che le forze fittizie, come la forza centrifuga, sono usate soltanto in sistemi di riferimento non

inerziali, ossia accelerati. Quando si risolvono problemi di dinamica, generalmente è preferibile usare sistemi di riferimento inerziali.

SOMMARIO

La massima forza di attrito statico, $f_{s,\max}$, tra un corpo e una superficie è proporzionale alla forza normale che agisce sul corpo. Questa forza massima si manifesta quando il corpo si trova sul punto di scivolare. In generale, $f_s \leq \mu_s n$, dove μ_s è il coefficiente di attrito statico ed n è la forza normale. Quando un corpo scivola su una superficie scabra, la forza di attrito dinamico f_d è opposta al moto ed è anche proporzionale alla forza normale. Il modulo di questa forza è dato da $f_d = \mu_d n$, dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico. Generalmente, $\mu_d < \mu_s$.

La seconda legge di Newton, applicata a una particella che si muove di **moto circolare uniforme**, stabilisce che la forza totale che agisce nella direzione radiale deve essere uguale al prodotto della massa per l'accelerazione centripeta:

$$F_r = ma_r = \frac{mv^2}{r} \quad [5.3]$$

Una particella che si muove di moto circolare non uniforme ha sia un'accelerazione centripeta che una componente tangenziale dell'accelerazione. Nel caso di una particella che ruota lungo una circonferenza verticale, la forza di gravità causa l'accelerazione tangenziale e parte o tutta l'accelerazione centripeta.

Un corpo che si muove attraverso un liquido o un gas subisce una **forza ritardante** che dipende dalla velocità. Questa forza di resistenza, che si oppone al moto, in generale, aumenta con la velocità. La forza dipende dalla forma del corpo e dalle proprietà del mezzo attraverso cui il corpo si muove. Per un corpo che cade esiste un caso limite, quando la forza di resistenza è uguale al peso ($a = 0$); in tal caso, il corpo raggiunge la sua **velocità limite**.

Vi sono quattro forze fondamentali in natura: la forza nucleare forte, la forza elettromagnetica, la forza gravitazionale, e la forza nucleare debole.

Un osservatore in un sistema di riferimento non inerziale (accelerato) deve intro-

durre **forze fittizie** se vuole applicare, in tale riferimento, la seconda legge di Newton. Se queste forze fittizie sono definite in maniera appropriata, la descrizione del moto, nel sistema non inerziale, sarà equivalente a quella fatta da un osservatore in un sistema di riferimento inerziale. Tuttavia, gli osservatori nei due diversi sistemi di riferimento non saranno d'accordo sulle cause che provocano il moto.

DOMANDE CONCETTUALI

1. Se si spinge una cassa pesante che è in quiete, c'è bisogno di una forza F perché essa si metta in movimento. Comunque, una volta che la cassa inizierà a scivolare, è richiesta una forza *minore* per mantenere il suo moto. Perché?
2. Si supponga che ci si trovi alla guida di una macchina lungo un'autostrada ad alta velocità. Perché bisognerebbe evitare di schiacciare troppo i freni se ci si vuole fermare alla minore distanza possibile? Cioè, perché si dovrebbero mantenere in rotazione le ruote mentre si frena?
3. Venti persone giocano al tiro alla fune con dieci persone per squadra. Le squadre sono talmente equilibrate che nessuna di esse vince. Dopo la loro gara, notano che una macchina di uno di loro è finita nel fango. Essi legano la fune che hanno usato in gara alla macchina e tutti e venti cercano di tirarla fuori dal fango. La forza d'attrito fra la macchina e il fango è enorme, la macchina non si muove, e la fune si rompe. Perché in questo caso la fune si rompe, mentre non si è rotta quando venti persone la tiravano nel gioco del tiro alla fune?
4. Cosa consente all'irrigatore di acqua di ruotare?
5. È stato suggerito di collocare nello spazio un cilindro ruotante di circa 16 km di lunghezza e 8 km di diametro e di usarlo come colonia. Lo scopo della rotazione è quello di simulare la gravità per coloro che vi abitano. Spiegare come ciò possa avvenire.
6. Consideriamo una stazione spaziale rotante, la cui rotazione abbia proprio una velocità tale che l'accelerazione centripeta sulla superficie interna sia g . Quindi, gli astronauti stando sulla superficie interna avranno la sensazione di essere attratti dalla superficie allo stesso modo di come sarebbero attratti da un pavi-
- mento a causa della forza gravitazionale terrestre. Supponiamo che un astronauta in questa stazione tenga una palla al di sopra della propria testa e "la lasci cadere" sul pavimento. La palla cadrà esattamente nello stesso modo in cui sarebbe caduta sulla Terra?
7. Un secchio d'acqua può essere ruotato in un piano verticale senza che l'acqua cada. Perché l'acqua non cade, anche se il secchio si trova sopra la testa?
8. Come si potrebbe spiegare la forza che spinge un guidatore verso l'esterno dell'auto quando gira bruscamente a un incrocio?
9. Perché un pilota perde momentaneamente coscienza quando esce fuori da una picchiata ripida?
10. Supponiamo che sulla Luna venga svolta una gara di velocità su pista. Per una data velocità di una macchina sul tracciato, la pista dovrebbe avere una sopraelevazione con un angolo maggiore o minore rispetto alla stessa pista sulla Terra?
11. Un paracadutista, in caduta libera, raggiunge la velocità limite. Dopo che il paracadute è stato aperto, quali parametri cambiano per diminuire tale velocità limite?
12. Si considerino due gocce di pioggia, una piccola e una grande, che cadono nell'atmosfera. Si paragonino le loro velocità limite. Quali sono le loro accelerazioni quando raggiungono la velocità limite?
13. Per lunghi viaggi, gli aeroplani generalmente volano ad altitudini di circa 9000 m. Qual è il principale vantaggio del volo a queste altitudini da un punto di vista economico?
14. Se qualcuno vi dicesse che gli astronauti in orbita sono privi di peso perché si trovano fuori dall'attrazione gravitazionale, accettereste questa affermazione? Spiegare.

PROBLEMI

Paragrafo 5.1 Forze di attrito

1. Un blocco di 25.0 kg è inizialmente in quiete su una superficie orizzontale scabra. Una forza orizzontale di 75.0 N è necessaria per mettere in moto il blocco. Una volta in movimento, si richiede una forza orizzontale di 60.0 N per mantenere il blocco in moto con velocità costante. Da questa informazione determinare i coefficienti di attrito statico e dinamico.

2. Una macchina da corsa accelera uniformemente da 0 a 130 km/h in 8 s. La forza esterna che accelera la macchina è la forza di attrito fra gli pneumatici e la strada. Se le ruote non slittano, determinare il *minimo* coefficiente di attrito fra gli pneumatici e il suolo.
3. Un'automobile viaggia a 80 km/h su un'autostrada orizzontale. (a) Se il coefficiente di attrito fra la strada e gli pneumatici in un giorno di pioggia è 0.1 qual è la

- minima* distanza in cui la macchina si fermerà? (b) Qual è la distanza di frenata quando la superficie è asciutta e $\mu = 0.6$?
4. Una passeggera, all'aeroporto, trasporta la sua valigia del peso di 20.0 kg, a velocità costante, agendo su una cinghia che forma un angolo θ con l'orizzontale (Fig. P5.4). La donna esercita sulla cinghia una forza di 35.0 N, mentre la forza di attrito sulla valigia è di 20.0 N. (a) Che angolo forma la cinghia con l'orizzontale? (b) Che tipo di forza perpendicolare il suolo esercita sulla valigia?

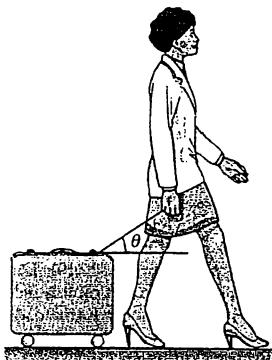


Figura P5.4

5. Un blocco di 3.00 kg parte da fermo dalla sommità di un piano inclinato di 30.0° e scorre per una distanza di 2.00 m giù per il piano in 1.50 s. Trovare (a) l'accelerazione del blocco, (b) il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco ed il piano, (c) la forza di attrito agente sul blocco e (d) la velocità del blocco dopo che esso è scivolato di 2.00 m.
6. Per determinare i coefficienti di attrito fra la gomma e diverse superfici, uno studente adopera una gomma da cancellare e un piano inclinato. In un esperimento la gomma da cancellare scivola quando l'angolo di inclinazione è di 36.0° e poi si muove giù lungo il piano inclinato con velocità costante quando l'angolo si riduce a 30.0° . Da questi dati, determinare i coefficienti di attrito statico e dinamico per questo esperimento.
7. Un ragazzo trascina, a velocità costante, la sua slitta del peso di 60.0 N su una salita con pendenza di 15.0° . Esso esercita una forza di 25.0 N su una corda legata alla slitta. Se la corda è inclinata di 35.0° rispetto alla orizzontale, determinare (a) il coefficiente di attrito dinamico tra la slitta e la neve. In cima alla salita il ragazzo salta sulla slitta e scivola lungo il pendio. Calcolare (b) l'accelerazione nella discesa.

8. Determinare lo spazio di frenata per uno sciatore con una velocità di 20.0 m/s (Fig. P5.8). Si assuma $\mu_d = 0.180$ e $\theta = 5.00^\circ$.

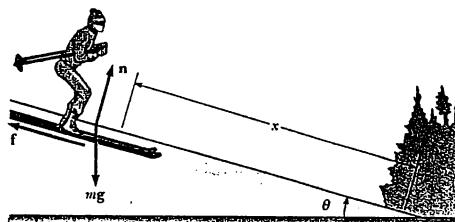


Figura P5.8

9. Un blocco di massa 9.00 kg è collegato tramite una fune, che scorre su una puleggia, a un blocco di massa 5.00 kg, posto su un piano orizzontale (Fig. P5.9). Il coefficiente di attrito dinamico è 0.200. Determinare la tensione della fune.

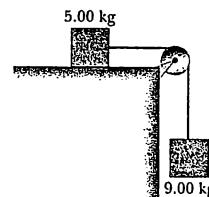


Figura P5.9

10. Tre masse su un tavolo sono collegate come in Figura P5.10. Il tavolo è scabro e ha un coefficiente di attrito di 0.350. Le tre masse sono $m_1 = 4.00 \text{ kg}$, $m_2 = 1.00 \text{ kg}$, e $m_3 = 2.00 \text{ kg}$, rispettivamente, e le pulegge sono senza attrito. (a) Tracciare il diagramma di corpo libero di ciascuna massa. (b) Determinare l'accelerazione di ciascun blocco, la direzione e il verso. (c) Determinare la tensione delle due funi.

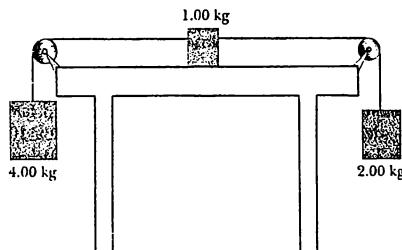


Figura P5.10

11. Una massa $M = 2.20 \text{ kg}$ viene accelerata su una superficie scabra per mezzo di una fune e una puleggia, come è mostrato nella Figura P5.11. La tensione della fune è 10.0 N e la puleggia si trova a 10.0 cm al di sopra della parte superiore del blocco. Il coefficiente di attrito dinamico è 0.400 . (a) Calcolare l'accelerazione del blocco quando $x = 40.0 \text{ cm}$. (b) Trovare il valore di x per il quale l'accelerazione è nulla.

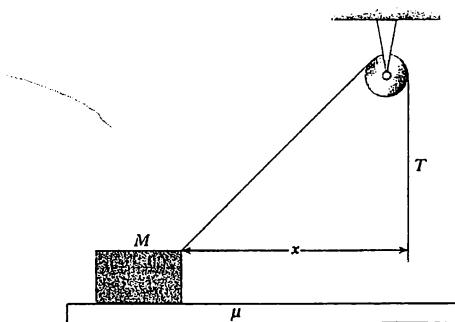


Figura P5.11

- Paragrafo 5.2 La seconda legge di Newton applicata al moto circolare uniforme**
12. Un'automobilina giocattolo completa il giro di un percorso circolare, di lunghezza 200 m , in 25.0 s . (a) Qual è la velocità media? (b) Se la massa dell'automobilina è di 1.50 kg , qual è il modulo della forza centripeta che la mantiene sul percorso circolare?
13. Una massa di 3.00 kg legata a una corda priva di massa ruota lungo una circonferenza su un tavolo orizzontale privo di attrito. Il raggio della circonferenza è 0.800 m e la corda può sopportare una massa di 25.0 kg prima di spezzarsi. Qual è l'intervallo di velocità che la massa può avere prima che la corda si spezzi?
14. Una pattinatrice sul ghiaccio di 55.0 kg si muove a 4.00 m/s quando essa si afferra all'estremità libera di una fune l'altro estremo della quale è collegato a un palo. Essa si muove lungo una circonferenza di raggio 0.800 m attorno al palo. (a) Determinare la forza esercitata dalla fune sulle sue braccia. (b) Confrontare questa forza col suo peso.

15. Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, la velocità dell'elettrone è approssimativamente $2.20 \times 10^6 \text{ m/s}$. Trovare (a) l'accelerazione centripeta dell'elettrone e (b) la forza agente sull'elettrone quando esso ruota su un'orbita circolare di raggio $0.530 \times 10^{-10} \text{ m}$.
16. Una scatola contenente delle uova è poggiata sul fondo di un furgone che, lungo il tragitto, deve affrontare una curva la quale può essere considerata come

un arco di circonferenza di 35.0 m di raggio. Se il coefficiente d'attrito statico tra la scatola ed il pavimento è 0.600 , determinare la massima velocità del furgone, affinché la scatola non inizi a scivolare.

17. Una moneta è situata a 30.0 cm dal centro di rotazione di una piattaforma girevole orizzontale. Si osserva che la moneta scivola quando la sua velocità è di 50.0 cm/s . (a) Da cosa è fornita la forza centripeta quando la moneta è ferma rispetto alla piattaforma girevole? (b) Quanto vale il coefficiente di attrito statico tra la moneta e la piattaforma?

18. Una piccola tartaruga, propriamente chiamata "Vertigine", è posta su una piattaforma girevole orizzontale a una distanza di 20.0 cm dal suo centro. La massa di Vertigine è 50.0 g e il coefficiente di attrito statico tra le sue zampe e la piattaforma è 0.300 . Trovare (a) il massimo numero di giri al secondo che può avere la piattaforma affinché Vertigine rimanga ferma rispetto alla piattaforma e (b) la velocità e l'accelerazione radiale di Vertigine quando è sul punto di scivolare.
19. Un pendolo conico è costituito da un corpo, appeso ad un lungo filo, che descrive una circonferenza in un piano orizzontale (Fig. P5.19). L'angolo formato dal filo con la verticale non cambia nel tempo. Si consideri un pendolo conico formato da un corpo di massa 80.0 kg , appeso a un filo di 10.0 m di lunghezza, che forma un angolo di 5.00° con la verticale. Determinare (a) la tensione e le componenti orizzontale e verticale del filo, (b) l'accelerazione radiale del corpo.

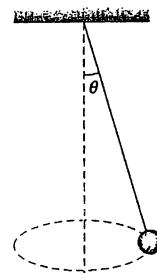


Figura P5.19

Paragrafo 5.3 Moto circolare non uniforme

20. Un bambino del peso di 40.0 kg si siede su un'altalena tradizionale lunga 3.00 m , sorretta da due catene. Se la tensione di ciascuna catena nel punto più basso è di 350 N , trovare (a) la velocità del bambino nel punto più basso e (b) la forza esercitata dal sedile sul bambino, nel punto più basso. (Si trascuri la massa del sedile).

- [21] Tarzan ($m = 85.0 \text{ kg}$) nel tentativo di raggiungere la riva opposta di un fiume, si appende a una liana e si lascia andare. La liana è lunga 10.0 m e la velocità di Tarzan, nel punto più basso dell'oscillazione, quando sfiora l'acqua, è di 8.00 m/s . Egli non sa che la liana si rompe per una tensione di 1000 N . Riuscirà Tarzan ad attraversare il fiume?
22. Nel parco dei divertimenti di Gurnee nell'Illinois vi è un ottovolante, che è dotato di alcune delle più moderne tecnologie e sfrutta concetti di base della fisica. Le piste verticali invece di essere circolari hanno la forma di una goccia (Fig. P5.22). I vagoncini, sulla parte interna della pista, salgono fino alla sommità con velocità sufficientemente elevate da rimanere sui binari. La pista più grande è alta 40.0 m e la velocità massima alla base è di 31.0 m/s (dal *New York Times* del 2 agosto 1988). Nell'ipotesi che la velocità alla sommità sia di 13.0 m/s e la corrispondente accelerazione centripeta 20.0 g , (a) qual è il raggio di curvatura dell'arco della sommità della pista? (b) Se la massa totale dei vagoncini alla sommità della pista è M , qual è la forza esercitata dalla rotaia su di essi? (c) Si supponga ora che l'ottovolante abbia un anello circolare di 20 m di raggio. Se i vagoni hanno, alla sommità, la stessa velocità di 13.0 m/s , determinare l'accelerazione centripeta in tale posizione. (d) Si commenti la forza normale alla sommità in questa seconda situazione.



Figura P5.22

23. Una macchina di 1800 kg passa sopra un dosso che

forma un arco di circonferenza di raggio 42.0 m , come in Figura P5.23. (a) Quale forza esercita la strada sulla macchina quando la macchina passa nel punto più alto del dosso se la macchina va a 16.0 m/s ? (b) Qual è la massima velocità che la macchina può avere mentre passa nel punto più alto del dosso senza perdere contatto con la strada?

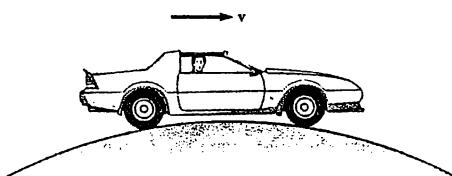


Figura P5.23

24. Una macchina di massa m passa sopra un dosso che segue un arco di circonferenza di raggio R , come in Figura P5.23. (a) Quale forza esercita la strada sulla macchina quando la macchina passa nel punto più alto del dosso se la macchina ha una velocità v ? (b) Qual è la massima velocità che la macchina può avere mentre passa nel punto del dosso senza perdere contatto con la strada?
- [25] Un secchio d'acqua è ruotato in un piano verticale di raggio 1.00 m . Qual è la minima velocità del secchio, nel punto più alto della circonferenza, per evitare che l'acqua cada giù?

Paragrafo 5.4 Moto in presenza di forze ritardanti dipendenti dalla velocità

26. Un paracadutista di massa 80.0 kg si lancia, in caduta libera, da un aereo che si muove lentamente e raggiunge una velocità limite di 50.0 m/s . (a) Qual è l'accelerazione del paracadutista quando la sua velocità è 40.0 m/s ? Quanto vale la forza di resistenza dell'aria su di esso quando la sua velocità è (b) 50.0 m/s e (c) 30.0 m/s ?
27. Del materiale di imballaggio viene fatto cadere da un'altezza di 2.00 m dal suolo. Fino a quando raggiunge la velocità limite, il modulo dell'accelerazione è dato da $a = g - cv$. Quando il materiale è caduto di 0.500 m , esso raggiunge la velocità limite e impiega altri 5.00 s per raggiungere il suolo. (a) Qual è il valore della costante c ? (b) Qual è l'accelerazione per $t = 0$? (c) Qual è l'accelerazione quando la velocità è 0.150 m/s ?
28. (a) Valutare la velocità limite di una sfera di legno, di 8.00 cm di raggio e densità 0.830 g/cm^3 , che cade in aria. (b) Da quale altezza, in caduta libera, la sfera rag-

giungerà la stessa velocità, se si trascura la resistenza dell'aria?

- [29] Il motore di un motoscafo viene spento quando la velocità è di 10.0 m/s. Il motoscafo procede in folle fino a fermarsi. L'equazione che governa il moto del motoscafo durante questo intervallo di tempo (dall'istante in cui è stato spento il motore a quando il motoscafo si ferma) è $v = v_0 e^{-ct}$, con v la velocità al tempo t , v_0 la velocità iniziale e c una costante. Al tempo $t = 20.0$ s la velocità è di 5.00 m/s. (a) Determinare la costante c . (b) Qual è la velocità al tempo $t = 40.0$ s? (c) Derivare la funzione $v(t)$ e dimostrare che l'accelerazione del motoscafo è in ogni istante proporzionale alla velocità.
30. Assumiamo che la forza ritardante su un pattinatore velocista sia $f = -kmv^2$ dove k è una costante ed m è la massa del pattinatore. Il pattinatore attraversa il traguardo di una gara su un percorso rettilineo alla velocità v_f e poi rallenta senza pattinare ulteriormente. Mostrare che la velocità del pattinatore in funzione del tempo dopo aver attraversato il traguardo è $v(t) = v_f / (1 + ktv_f)$.

Paragrafo 5.5 Modelli numerici nella dinamica del punto materiale

- [31] Un chicco di grandine di massa 4.80×10^{-4} kg subisce cadendo dall'alto una forza totale di

$$F = -mg + Dv^2$$

dove $D = 2.50 \times 10^{-5}$ kg/m. (a) Calcolare la velocità limite del chicco di grandine. (b) Adoperare il metodo di Eulero per l'analisi numerica per trovare la velocità e la posizione del chicco di grandine a intervalli di 0.2 s, assumendo che la velocità iniziale sia zero. Continuare il calcolo fino a quando il chicco di grandine raggiunge il 99% della sua velocità limite.

32. Una foglia di 3.00 g cade al suolo da un'altezza di 2.00 m. Si assume che la forza totale verso il basso sia $F = mg - bv$, dove il fattore di resistenza sia $b = 0.0300$ kg/s. (a) Calcolare la velocità limite della foglia. (b) Utilizzare il metodo di Eulero per l'analisi numerica per calcolare la velocità e la posizione della foglia in funzione del tempo, dall'istante in cui essa è rilasciata fino a quando non sia stato raggiunto il 99% della velocità limite. (Suggerimento: provare $\Delta t = 0.005$ s).

33. Una paracadutista di 50.0 kg si lancia da un aeroplano e cade al suolo con una forza ritardante proporzionale al quadrato della velocità $R = Dv^2$. Si assume $D = 0.200$ kg/m (con il paracadute chiuso) e $D = 20.0$ kg/m (con il paracadute aperto). (a) Determinare la velocità limite della paracadutista in entrambe le configurazioni, prima e dopo l'apertura del paracadute. (b) Effettuare l'analisi numerica del moto e calcolare la velocità e la posizione in funzione del

tempo, assumendo che la paracadutista inizi la sua discesa a 1000 m dal suolo e si trovi in caduta libera per 10.0 s prima dell'apertura del paracadute. (Suggerimento: quando il paracadute si apre, si verifica una grande accelerazione; per questa fase è necessario un piccolo intervallo di tempo).

34. Si consideri un proiettile di 10.0 kg sparato ad una velocità iniziale di 10.0 m/s, con un angolo di elevazione di 35.0°. La forza ritardante è $R = -bv$, dove $b = 10.0$ kg/s. (a) Adoperare il metodo numerico per determinare le posizioni orizzontale e verticale del proiettile in funzione del tempo. (b) Qual è la gittata del proiettile? (c) Determinare l'angolo di elevazione che dà la gittata massima al proiettile. (Suggerimento: adattare l'angolo di elevazione per tentativi e correggere fino a quando non si trovi la gittata massima).

Paragrafo 5.6 Le forze fondamentali della natura

35. Due particelle isolate, ciascuna di massa 2.00 kg, distano 30.0 cm. Qual è il modulo della forza gravitazionale di una particella sull'altra?
36. In una nube temporalesca vi possono essere cariche elettriche di +40.0 C vicino alla sommità della nube e -40.0 C vicino alla parte inferiore della nube. Queste cariche distano 2.00 km. Qual è la forza elettrica sulla carica che si trova sulla sommità?

Paragrafo 5.7 Il campo gravitazionale

37. Quando una meteora si trova a una distanza dalla superficie terrestre di 3.00 volte il raggio della Terra, qual è l'accelerazione di caduta libera dovuta alla forza di gravità agente su di essa?

Paragrafo 5.8 Moto in sistemi accelerati

38. Una palla è collegata con un filo di 25.0 cm di lunghezza al tetto di un'auto in moto. Un osservatore, situato nell'auto, nota che la palla è deflessa di 6.00 cm dalla verticale verso la parte posteriore dell'auto. Qual è l'accelerazione dell'auto?
39. Una massa di 3.00 kg appesa a una estremità di una corda è vincolata al supporto di un vagone ferroviario. Quando il vagone accelera verso destra, la corda forma un angolo di 4.00° con la verticale, come mostrato in Figura P5.39. Calcolare l'accelerazione del vagone.

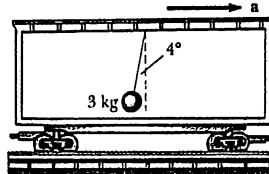


Figura P5.39

M&G Dina 4 = M&G Q 1063 M&G

40. Una massa di 5.00 kg, posta su una superficie orizzontale liscia, è vincolata a una bilancia a molla (Fig. P5.40). La bilancia, bloccata alla parete anteriore, segna 18.0 N quando il vagone è in moto. (a) Se la bilancia segna zero quando il vagone è fermo, determinare l'accelerazione del vagone. (b) Quale sarà il valore segnato se il vagone si muove con velocità costante? (c) Descrivere le forze che agiscono sulla massa come osservata da una persona situata nel vagone, e da un'altra che si trova al di fuori di esso.

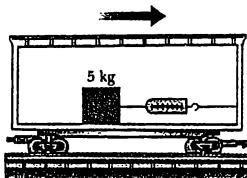


Figura P5.40

41. Una giostra fa un giro completo ogni 12.0 s. Se un bambino di 45.0 kg di massa è seduto sul pavimento orizzontale della giostra a 3.00 m dal centro della stessa, determinare (a) l'accelerazione del bambino, (b) la componente orizzontale della forza d'attrito che agisce sul bambino, (c) il minimo valore del coefficiente d'attrito statico, affinché il bambino non inizi a scivolare.
 42. Un filo a piombo non è diretto esattamente verso il centro di rotazione della Terra. Quanto devia il filo da una linea radiale alla latitudine di 35° nord?

Problemi generali

43. Una cesta di peso w è spinta da una forza F su un pavimento orizzontale. (a) Se il coefficiente di attrito statico è μ_s e F è diretta con un angolo ϕ al di sotto dell'asse orizzontale, mostrare che il valore minimo di F che sposterà la cesta è dato da

$$F = \frac{\mu_s w \sec \phi}{1 - \mu_s \tan \phi}$$

- (b) Trovare il valore minimo di F che determina il movimento quando $\mu_s = 0.400$, $w = 100$ N e $\phi = 0^\circ$, 15° , 30° , 45° , 60° .
 44. Un tostapane di 1.30 kg non è collegato. Il coefficiente di attrito statico fra il tostapane e il supporto orizzontale è 0.350. Per far muovere il tostapane, tirate delicatamente il filo elettrico di collegamento. (a) Per rendere la tensione nel filo la minima possibile, a quale angolo sopra l'orizzontale bisognerà tirare? (b) In questo caso quale sarà il valore della tensione?
 45. Una studentessa costruisce e calibra un accelerometro, che vuole usare per misurare la velocità della sua auto in curva in autostrada. L'accelerometro è costituito da un pendolo semplice, munito di goniometro, che viene appeso al tettuccio dell'auto. Un amico osserva che il

pendolo forma un angolo di 15.0° con la verticale, quando l'auto ha una velocità di 23.0 m/s. (a) Qual è l'accelerazione centripeta dell'auto in curva? (b) Qual è il raggio della curva? (c) Quale sarebbe la velocità dell'auto se la deflessione del pendolo fosse di 9.00° , nel percorrere la stessa curva?

46. Una stazione spaziale, della forma di una grande ruota di 120 m di diametro, ruota per fornire una gravità artificiale di 3.00 m/s^2 alle persone che abitano il bordo più esterno. Trovare la frequenza della ruota (in giri al minuto) che produrrà questo effetto.
 47. Una giostra, in un parco dei divertimenti, consiste in una piattaforma circolare ruotante del diametro di 8.00 m, alla quale sono sospesi, tramite catene lunghe 2.50 m, dei sedili (Fig. P5.47). Quando la giostra è in rotazione, le catene formano un angolo $\theta = 28.0^\circ$ con la verticale. (a) Determinare la velocità del sedile. (b) Se un ragazzo di massa 40.0 kg è seduto su un sedile di 10.0 kg di massa, qual è la tensione sulla catena?

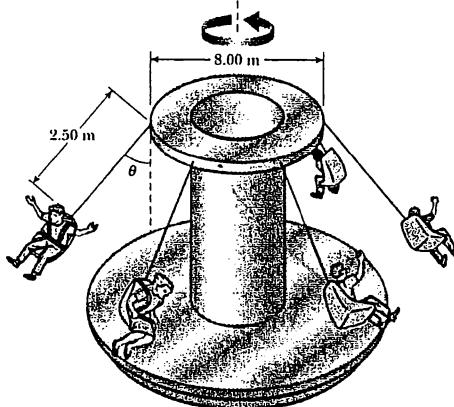


Figura P5.47

48. A causa della rotazione della Terra attorno al suo asse, un punto all'equatore è soggetto a un'accelerazione centripeta di 0.0337 m/s^2 , mentre un punto ai poli non è soggetto all'accelerazione centripeta. (a) Mostrare che all'equatore la forza gravitazionale che agisce su un oggetto (il peso vero) deve superare il peso apparente dell'oggetto. (b) Qual è il peso apparente, all'equatore e ai poli, di una persona che ha una massa di 75.0 kg? (Si consideri la Terra perfettamente sferica e si assuma $g = 9.800 \text{ N/kg}$).
 49. La Terra ruota attorno al suo asse in 24.0 h. Immaginiamo di poter aumentare la velocità di rotazione. Se un oggetto all'equatore dovesse avere un peso apparente nullo, (a) quale sarebbe il nuovo periodo? (b) Di quale fattore aumenterebbe la velocità

dell'oggetto se il pianeta ruotasse ad alta velocità? (Suggerimento: vedi Problema 48 e nota che il peso apparente dell'oggetto diventa nullo quando la forza normale che si esercita su di esso è zero. Inoltre, la lunghezza del percorso durante un periodo è $2\pi R$, dove R è il raggio della Terra).

50. Un ingegnere vorrebbe progettare una rampa sopraelevata per una strada, tale che le macchine non debbano fare affidamento sull'attrito per affrontare la curva senza slittare. Si supponga che, in genere, un'automobile percorra la curva a una velocità di 48 km/h (13.4 m/s) e che il raggio della curva sia 50.0 m. Con quale angolazione dovrebbe essere sopraelevata la curva? (Vedere Fig. P5.50).

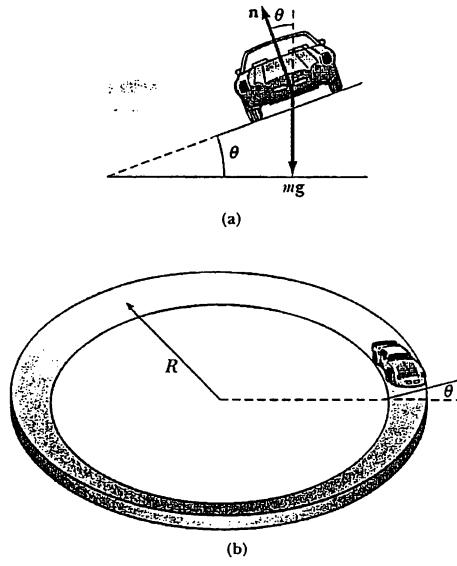


Figura P5.50

51. Un'auto percorre una curva sopraelevata come in Figura P5.50. Il raggio di curvatura della strada è R , l'angolo di cui è sopraelevata è θ , e il coefficiente di attrito statico è μ . (a) Determinare l'intervallo di velocità che l'auto può avere senza che slitti verso l'alto o il basso della strada. (b) Trovare il minimo valore di μ tale che la velocità minima sia zero. (c) Qual è l'intervallo di velocità possibile se $R = 100$ m, $\theta = 10.0^\circ$ e $\mu = 0.100$ (condizioni sdrucciolevoli)?
52. Un divertimento da luna-park consiste in un grande cilindro verticale che ruota attorno al suo asse, tanto velocemente che una persona, al suo interno, è bloccata contro la parete quando il pavimento viene aperto

(Fig. P5.52). Il coefficiente di attrito statico tra la persona e la parete è μ_s , e il raggio del cilindro è R . (a) Mostrare che il massimo periodo di rotazione necessario per evitare che la persona cada è $T = (4\pi^2 R \mu_s / g)^{1/2}$. (b) Ottenere un valore numerico per T se $R = 4.00$ m e $\mu_s = 0.400$. Quanti giri al minuto deve compiere il cilindro?

53. L'espressione $F = arv + bv^2$ indica il modulo della

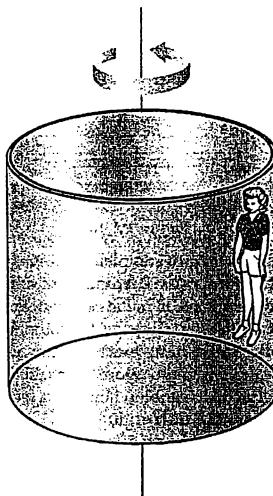


Figura P5.52

forza di resistenza (in Newton) esercitata da una corrente d'aria con velocità v (in metri al secondo) su una sfera di raggio r (in metri). a e b sono delle costanti con appropriate unità nel sistema SI.

I valori numerici sono $a = 3.10 \times 10^{-4}$ e $b = 0.870$. Utilizzando questa formula, determinare la velocità limite di gocce d'acqua, che cadono nell'aria per effetto del proprio peso, con i seguenti valori del raggio (a) 10 μm , (b) 100 μm e (c) 1 mm. Si osservi che per le domande (a) e (c) si può ottenere una risposta accurata, senza dover risolvere un'equazione quadratica, considerando quale dei due contributi alla resistenza dell'aria è dominante e quale trascurabile.

54. Un modello d'aereo di 0.750 kg di massa vola lungo una circonferenza orizzontale, collegato all'estremità di un cavo di controllo, lungo 60.0 m, con una velocità di 35.0 m/s. Calcolare la tensione del cavo se esso forma un angolo di 20.0° con l'orizzontale. L'aereo è controllato dalla tensione del cavo di controllo, dal suo peso e dalla spinta aerodinamica, che agisce a 20.0° rispetto alla verticale, verso l'alto, come rappre-

sentato in Figura P5.54.

55. Un oggetto di 9.00 kg parte da fermo e si muove attra-

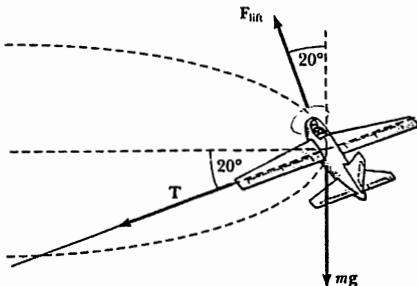


Figura P5.54

verso un mezzo viscoso subendo una forza ritardante $R = -bv$, dove v è la velocità dell'oggetto. Se la velocità dell'oggetto raggiunge la metà della sua velocità limite in 5.54 s, (a) determinare la velocità limite. (b) In quale istante la velocità dell'oggetto sarà i tre quarti della velocità limite? (c) Quale distanza percorrerà l'oggetto nei primi 5.54 s del moto?

56. Il sistema binario di Plaskett consiste di due stelle che ruotano su un'orbita circolare intorno a un centro di massa a metà strada fra esse. Ciò significa che le masse delle due stelle sono uguali (Fig. P5.56). Se la velocità orbitale di ciascuna stella è 220 km/s e il periodo orbitale di ciascuna stella è 14.4 giorni, trovare la massa M di ciascuna stella. (Per confronto, la massa del nostro Sole è 1.99×10^{30} kg).

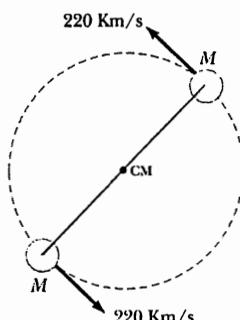


Figura P5.56

57. Un blocco di massa 5.00 kg è posto sopra un secondo blocco rettangolare di massa 15.0 kg, il quale inoltre si trova su un tavolo orizzontale. I coefficienti di attrito fra i due blocchi sono $\mu_s = 0.300$ e $\mu_d = 0.100$. I coeffi-

cienti di attrito fra il blocco più basso e il tavolo scabro sono $\mu_s = 0.500$ e $\mu_d = 0.400$. Si applichi una forza costante orizzontale al blocco in basso grande abbastanza per far scivolare questo blocco fra il blocco superiore e il tavolo. (a) Tracciare il diagramma di corpo libero per ciascun blocco, facendo i nomi delle forze su ciascuno. (b) Determinare il modulo di ciascuna forza su ciascun blocco nell'istante iniziale in cui si inizia a tirare ma ancora non si verifica il moto. In particolare, quale forza si deve applicare? (c) Determinare l'accelerazione che si misura per ciascun blocco.

58. Determinare l'ordine di grandezza della forza gravitazionale che si esercita fra te e un'altra persona a due metri di distanza. Nel tuo risultato definisci le grandezze che devi stimare e i valori che hai stimato per esse.

Problemi al calcolatore

- S1. Una palla da baseball di 0.142 kg, ha una velocità limite di 42.5 m/s. (a) Se una palla da baseball subisce una forza ritardante di modulo $R = Dv^2$, qual è il valore di D ? (b) Qual è il modulo della forza ritardante quando la velocità della palla è 36 m/s? (c) Predisporre un foglio elettronico per determinare il moto della palla lanciata verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di 36 m/s. Quale altezza massima raggiunge la palla? Quanto tempo rimane in aria? Qual è la sua velocità poco prima che tocchi il suolo?
- S2. Un proiettile di 10.0 kg viene lanciato con una velocità iniziale di 150 m/s con un angolo di elevazione rispetto all'orizzontale di 35.0°. La forza ritardante agente sul proiettile è $R = -bv$, dove $b = 15$ kg/s. (a) Predisporre un foglio elettronico per determinare la posizione orizzontale e verticale del proiettile in funzione del tempo. (b) Trovare la gittata di questo proiettile. (c) Determinare l'angolo di elevazione che dà la massima gittata per questo proiettile. (*Suggerimento:* variare l'angolo di elevazione per tentativi ed errori per trovare la gittata massima).
- S3. Un giocatore di golf professionista esegue un colpo col ferro-5 a 155 m. Una pallina da golf di 46 g subisce una forza ritardante di modulo $R = Dv^2$ e ha una velocità limite di 44 m/s. (a) Calcolare il coefficiente di resistenza D per la pallina da golf. (b) Predisporre un foglio elettronico per calcolare la traiettoria di questo colpo. Se la velocità iniziale della pallina forma un angolo di 31° con l'orizzontale, quale modulo della velocità iniziale deve avere la pallina per raggiungere i 155 m di distanza? (c) Se lo stesso giocatore esegue un colpo con ferro-9 (angolo di lancio 47°) a 199 m, qual è il modulo della velocità iniziale della pallina in questo caso? Discutere la differenza delle traiettorie per i due colpi.

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

1. È più facile legare la fune e tirare. In questo caso, vi è una componente verso l'alto della forza che tu applichi. Questa riduce la forza normale fra lo slittino e la neve. Inoltre, ciò riduce la forza d'attrito tra slittino e neve e rende più facile il moto. Se tu spingi da dietro, con una forza che ha una componente verso il basso, la forza normale diventa maggiore, così pure la forza d'attrito, e lo slittino si muove con maggiore difficoltà.
2. Andando in su lungo il piano inclinato, la forza d'attrito e la componente della forza gravitazionale sul libro sono orientate nel verso della discesa. Quando il libro ritorna indietro verso la base del piano inclinato, la componente della forza gravitazionale è ancora orientata nel verso della discesa, ma la forza d'attrito è orientata nel verso della salita. Quindi, la forza risultante è minore quando il libro scivola in giù e, in accordo con la seconda legge di Newton, esso ha pure un'accelerazione di modulo minore. Con un'accelerazione minore, la velocità del libro in ogni punto del piano inclinato è minore quando esso scende rispetto a quando sale. Di conseguenza, esso impiega più tempo per andare in giù che per salire. Il caso estremo si verificherebbe se l'angolo del piano inclinato fosse tale che una volta fermo il libro nel punto più alto del suo moto, la forza d'attrito statico massima fosse maggiore della componente della forza gravitazionale, bloccando il libro sul piano inclinato. In questo caso, esso ci metterà *una vita* per tornare giù!
3. (a) Raddoppiando la massa del camion verrebbe raddoppiata la forza normale che la strada esercita e rad-
- doppierebbe la forza d'attrito dinamico nel verso opposto al moto. Con il doppio della forza d'attrito agente sulla massa, la sua accelerazione rimarrebbe la stessa e così tutti gli altri parametri del moto, inclusa la distanza. (b) Con la stessa accelerazione ma metà della velocità iniziale, il tempo necessario per fermarsi verrebbe dimezzato, e muovendosi a una velocità media dimezzata per un tempo metà, il camion percorrerebbe un quarto della distanza.
4. Un oggetto si può muovere lungo una circonferenza anche quando la forza risultante su di esso non sia perpendicolare alla sua velocità, ma in questo caso il modulo della sua velocità varia. Si scomponga la forza risultante nella componente radiale e in quella tangenziale. Se la forza tangenziale è nel verso del moto, l'oggetto aumenterà il modulo della sua velocità, e se la forza tangenziale agisce in verso opposto, esso rallenterà.
5. Le forze che agiscono sul paracadutista sono la forza di gravità verso il basso, mg , e la forza ritardante dell'aria, R , verso l'alto il cui modulo è minore del suo peso prima di raggiungere la velocità limite. Quando la sua velocità verso il basso aumenta, la forza ritardante dell'aria aumenta pure. Il vettore somma della forza di gravità e della forza ritardante dell'aria dà una forza risultante che diminuisce nel tempo, per cui la sua accelerazione diminuisce. Una volta raggiunta la velocità limite, le due forze si equilibrano, la forza risultante è nulla, e l'accelerazione è zero.

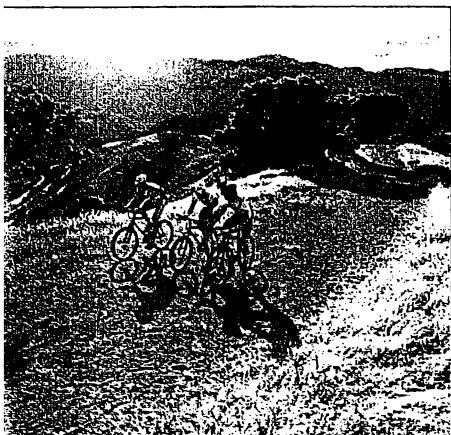
6

Lavoro ed energia

L’ energia è presente nell’universo in varie forme, comprendenti l’energia meccanica, l’energia elettromagnetica, l’energia chimica, l’energia termica e l’energia nucleare. Quando l’energia si trasforma da una forma a un’altra, la quantità totale di energia rimane la stessa. Cioè, se un sistema isolato perde energia in una certa forma, allora la legge di conservazione dell’energia afferma che il sistema guadagnerà una uguale quantità di energia in altre forme.

In questo capitolo, tratteremo soltanto della forma meccanica di energia. Vedremo che i concetti di lavoro e di energia possono applicarsi alla dinamica di un sistema meccanico senza far ricorso alle leggi di Newton. (Tuttavia, è importante notare che i concetti di lavoro ed energia si basano sulle leggi di Newton e quindi non implicano alcun nuovo principio fisico). Questo “metodo energetico” per descrivere il moto è utile, in special modo, quando la forza che agisce su una particella non è costante. In questo caso, l’accelerazione non è costante, e non si possono applicare le semplici equazioni cinematiche sviluppate nel Capitolo 2. Spesso, in natura, una particella è soggetta a una forza che varia in funzione della posizione della particella. Tali sono la forza gravitazionale e la forza esercitata su un corpo vincolato da una molla. Descriveremo tecniche per la trattazione di tali sistemi con l’aiuto di un teorema estremamente importante chiamato *teorema dell’energia cinetica*, che costituisce l’argomento centrale di questo capitolo.

Iniziamo definendo il lavoro, un concetto che fornisce un legame tra i concetti di forza e di energia.



◀ Questi ciclisti stanno lavorando duramente mentre pedalano in salita presso Marin County, California.
(David Madison, Tony Stone Images)

CONTENUTO

- 6.1 Lavoro svolto da una forza costante
- 6.2 Prodotto scalare di due vettori
- 6.3 Lavoro svolto da una forza variabile
- 6.4 Energia cinetica e teorema dell’energia cinetica
- 6.5 Potenza

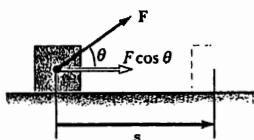


Figura 6.1 Se un oggetto compie uno spostamento s , il lavoro svolto dalla forza F è $(F \cos \theta)s$.

6.1 • LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA COSTANTE

Quasi tutti i termini utilizzati finora – *velocità, accelerazione, forza e così via* – mantengono in fisica lo stesso significato che hanno nella vita quotidiana. Ora, tuttavia, incontriamo una parola, il cui significato fisico è nettamente diverso da quello quotidiano. Questo termine nuovo è **lavoro**. Partiamo quindi dalla Figura 6.1, dove consideriamo un oggetto che compie uno spostamento s lungo una linea retta, sotto l'azione di una forza costante F , che forma un angolo θ con s .

Il lavoro, W , svolto da una forza costante è definito come il prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento del punto di applicazione della forza per il modulo dello spostamento.

$$W = Fs \cos \theta \quad [6.1]$$

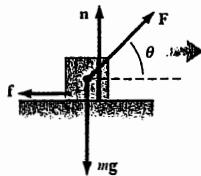


Figura 6.2 Quando un oggetto è spostato orizzontalmente, la forza normale n e la forza di gravità mg non compiono lavoro.

Da questa definizione, si vede che una forza non compie lavoro su una particella se essa non si muove: se $s = 0$, dall'Equazione 6.1 si ha $W = 0$. Si noti inoltre che dall'Equazione 6.1 il lavoro compiuto da una forza è zero quando la forza è perpendicolare allo spostamento. Cioè se $\theta = 90^\circ$, allora $W = 0$ perché $\cos 90^\circ = 0$. Per esempio, in Figura 6.2, il lavoro svolto dalla forza normale e quello svolto dalla forza di gravità durante lo spostamento orizzontale sono nulli proprio per questa ragione. In generale, la particella si può spostare con una velocità costante o variabile sotto l'azione di forze diverse. In questo caso, poiché il lavoro è una grandezza scalare, il lavoro totale svolto quando la particella effettua uno spostamento è la somma algebrica del lavoro svolto da ognuna delle forze.

Il segno del lavoro dipende dalla direzione di F rispetto a s . Il lavoro svolto dalla forza applicata è positivo se il vettore associato alla componente $F \cos \theta$ è *nello stesso verso* dello spostamento. Per esempio, se un oggetto è portato verso l'alto, il lavoro compiuto dalla forza applicata è positivo poiché la forza è diretta verso l'alto, ossia, *nello stesso verso* dello spostamento.

Se il vettore associato alla componente $F \cos \theta$ è nel verso *opposto* allo spostamento, W è negativo. Nel caso dell'oggetto sollevato, per esempio, il lavoro svolto dalla forza gravitazionale è negativo. È importante notare che il lavoro è un trasferimento di energia; se l'energia è trasferita *al sistema* (oggetto), W è positivo; se l'energia è trasferita *dal sistema*, W è negativo.

Se una forza applicata F agisce lungo la direzione e verso dello spostamento, allora $\theta = 0^\circ$ e $\cos 0^\circ = 1$. In questo caso, l'Equazione 6.1 dà

$$W = Fs \quad [6.2]$$

Il lavoro è una grandezza scalare e le sue dimensioni sono quelle di una forza per una lunghezza. Quindi, nel sistema SI l'unità di misura del lavoro è il newton · metro ($N \cdot m$). Il newton · metro, quando è riferito al lavoro o all'energia, si chiama joule (J). L'unità di lavoro nel sistema cgs è dyn · cm, che si chiama erg; l'unità nel sistema Britannico degli ingegneri è ft · lb. Queste unità di misura sono riportate nella Tabella 6.1. Si noti che $1 J = 10^7$ erg.

TABELLA 6.1 Unità di misura del lavoro nei tre comuni sistemi di misura

Sistema	Unità di misura del lavoro	Nome dell'unità combinata
SI	newton · metro (N · m)	joule (J)
cgs	dina · centimetro (dyn · cm)	erg
Britannico degli ingegneri (convenzionale)	libbra · piede (lb · ft)	piede · libbra (ft · lb)

Fisica ragionata 1

Una persona solleva un blocco di cemento di massa m a un'altezza h e poi cammina orizzontalmente per una distanza d mentre tiene il blocco, come in Figura 6.3. Calcolare il lavoro compiuto dalla persona e dalla forza di gravità in questo processo.

Ragionamento Assumendo che la persona sollevi il blocco con una forza di modulo uguale al peso del blocco, mg , il lavoro compiuto dalla persona durante lo spostamento verticale è mgh , perché la forza, in questo caso, è nel verso dello spostamento. Il lavoro compiuto dalla persona mentre sposta il blocco orizzontalmente è zero, perché la forza applicata in questo processo è perpendicolare allo spostamento. Quindi, il lavoro totale compiuto dalla persona è mgh . Il lavoro svolto dalla forza di gravità durante lo spostamento verticale del blocco è $-mgh$, perché questa forza è orientata nel verso opposto rispetto allo spostamento. Il lavoro svolto dalla forza di gravità durante lo spostamento orizzontale è zero perché la forza è perpendicolare allo spostamento. Quindi, il lavoro totale svolto dalla forza di gravità è $-mgh$. Il lavoro totale compiuto sul blocco è zero ($+mgh - mgh = 0$).

Fisica ragionata 2

Un pianeta si muove in un'orbita perfettamente circolare attorno al Sole. Che cosa si può dire intorno al lavoro svolto dalla forza gravitazionale agente sul pianeta? Supponiamo che l'orbita sia ellittica; che cosa si può dire intorno al lavoro svolto dalla forza gravitazionale?

Ragionamento Nel caso dell'orbita circolare, la forza gravitazionale risulta sempre perpendicolare allo spostamento del pianeta mentre esso si muove lungo l'orbita. Quindi, non vi è lavoro relativamente a qualsiasi porzione dell'orbita, e perciò nessun lavoro in un'orbita completa. Nel caso dell'orbita ellittica, il Sole si trova in un fuoco dell'ellisse. Quindi, il vettore forza non è, in generale, perpendicolare allo spostamento. Mentre il pianeta si muove allontanandosi dal Sole per raggiungere la sua massima distanza, chiamata afelio, il vettore forza ha un componente nel verso opposto allo spostamento. Quindi, viene svolto lavoro negativo sul pianeta ed esso rallenta. Quando il pianeta oltrepassa l'afelio e ritorna indietro verso la sua minima distanza dal Sole, chiamata perielio, vi è un componente della forza gravitazionale nel verso dello spostamento. Sul pianeta, allora, viene svolto un lavoro positivo e il pianeta aumenta la sua velocità. Il lavoro totale negativo svolto lungo il viaggio di allontanamento si elide con il lavoro positivo svolto nel viaggio di ritorno. Quindi, in un'orbita ellittica, vi è lavoro svolto su ogni singola porzione dell'orbita (eccetto per quelle porzioni che sono simmetriche intorno all'afelio e al perielio), ma non vi è lavoro svolto su un'orbita completa.

Figura 6.3 (Fisica ragionata 1)

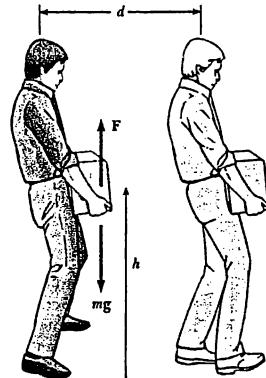


Figura 6.3 (Fisica ragionata 1)

1) Una persona solleva un blocco di cemento di massa m a un'altezza h e poi cammina orizzontalmente per una distanza d .

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Consideriamo un tiro alla fune, in cui due squadre che tirano una corda sono pari, per cui non si verifica alcun movimento. Vi è lavoro svolto sulla fune? Su coloro che tirano? Sul suolo? Vi è lavoro svolto su qualsiasi altra cosa?

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Una squadra di trasportatori vuole caricare un camion usando una rampa dal suolo fino al portellone posteriore del camion. Uno dei trasportatori reclama che si farebbe meno lavoro per caricare il camion se la lunghezza della rampa venisse aumentata, poiché ciò ridurrebbe l'angolo formato dalla rampa rispetto all'orizzontale. È accettabile il suo reclamo? Spiegare.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Le strade di montagna sono costruite con i *tornanti*, per cui le strade vanno avanti e indietro lungo la superficie in pendenza, in modo tale che si verifichi una salita più moderata in ogni porzione della strada. Ciò implica un minor lavoro svolto da un'automobile che sale sulla montagna, in confronto a quello svolto seguendo una strada che sale diritta lungo la pendenza? Perché si usano i tornanti?

Esempio 6.1 Mr. Clean

Un uomo preso dalle pulizie del suo appartamento tira un aspirapolvere con una forza di modulo $F = 50 \text{ N}$ a un angolo di 30° , come mostrato in Figura 6.4. L'aspirapolvere viene tirato per una distanza di 3.0 m . Calcolare il lavoro svolto dalla forza di 50 N .



Figura 6.4 (Esempio 6.1) Un aspirapolvere tirato a un angolo di 30° con l'orizzontale.

Soluzione Possiamo usare la definizione di lavoro (Eq. 6.1), per avere

$$\begin{aligned} W_F &= (F \cos \theta)s = 50 \text{ N} (\cos 30^\circ) (3.0 \text{ m}) \\ &= 130 \text{ N} \cdot \text{m} = 130 \text{ J} \end{aligned}$$

Si noti che la forza normale, n , il peso mg e la componente verso l'alto della forza applicata, (50 N) $\sin 30^\circ$, non svolgono *alcun* lavoro perché sono perpendicolari allo spostamento.

ESERCIZIO 1 Trovare il lavoro svolto dall'uomo sull'aspirapolvere se lo tira per una distanza di 3.0 m orizzontalmente con una forza $F = 32 \text{ N}$.

Risposta 96 J.

ESERCIZIO 2 Se una persona solleva un secchio di 20.0 kg da un pozzo e compie 6.00 kJ di lavoro, quanto è profondo il pozzo? Si assuma che la velocità del secchio rimanga costante mentre viene sollevato. Risposta 30.6 m

ESERCIZIO 3 Una donna di 65 kg sale una scala di 20 gradini, ciascuno di 23 cm di altezza. Quanto lavoro viene compiuto in questo processo contro la forza di gravità? Risposta 2.93 kJ

6.2 • PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI

Abbiamo definito il lavoro come una grandezza *scalare* data dal prodotto del modulo dello spostamento per la componente della forza nella direzione dello spostamento. È conveniente esprimere l'Equazione 6.1 in termini di **prodotto scalare** dei due vettori \mathbf{F} ed \mathbf{s} . Questo prodotto scalare si scrive $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$. Così si può esprimere l'Equazione 6.1 come un prodotto scalare:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \theta \quad [6.3]$$

In altre parole, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ (si legga "F scalare s") è una notazione abbreviata di $F s \cos \theta$.

In generale, il prodotto scalare di due vettori qualsiasi \mathbf{A} e \mathbf{B} è definito come una grandezza scalare uguale al prodotto dei moduli dei due vettori e del coseno dell'angolo θ formato dalle direzioni di \mathbf{A} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad [6.4]$$

dove θ è l'angolo più piccolo compreso tra \mathbf{A} e \mathbf{B} , come in Figura 6.5. Si noti che \mathbf{A} e \mathbf{B} non è necessario che abbiano le stesse dimensioni fisiche.

Dalla Figura 6.5 si può osservare che $B \cos \theta$ è la proiezione di \mathbf{B} su \mathbf{A} . Quindi, la definizione di $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ data dalla Equazione 6.4 si può considerare come il prodotto del modulo di \mathbf{A} per la proiezione di \mathbf{B} su \mathbf{A} ¹.

Dall'Equazione 6.4 segue che il prodotto scalare gode della *proprietà commutativa della moltiplicazione*. Cioè,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad [6.5]$$

Infine, il prodotto scalare ubbidisce alla *proprietà distributiva della moltiplicazione*, così che

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad [6.6]$$

Il prodotto scalare è semplice da calcolare, dall'Equazione 6.4, nei casi in cui \mathbf{A} sia perpendicolare o parallelo a \mathbf{B} . Se \mathbf{A} è perpendicolare a \mathbf{B} ($\theta = 90^\circ$), allora $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. (Il prodotto scalare, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, è ancora uguale a zero nel caso più banale in cui o \mathbf{A} o \mathbf{B} siano uguali a zero). Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono due vettori paralleli e concordi ($\theta = 0^\circ$) allora $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$. Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono paralleli ma hanno verso opposto, ($\theta = 180^\circ$), allora $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -AB$. Si osservi che il prodotto scalare è negativo quando $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

I versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , che sono stati definiti nel Capitolo 1, giacciono, rispettivamente, lungo le direzioni positive degli assi x , y e z , di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Quindi, dalla definizione di $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ segue che il prodotto scalare di questi versori è dato da

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad [6.7]$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad [6.8]$$

I due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} possono essere espressi mediante i loro componenti cartesiani ortogonali:

¹ Ciò è equivalente a dire che $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ è uguale al prodotto del modulo di \mathbf{B} per la proiezione di \mathbf{A} su \mathbf{B} .

- *Lavoro espresso come prodotto scalare*

- *Prodotto scalare di due vettori A e B*

- *L'ordine dei fattori del prodotto scalare può essere cambiato*

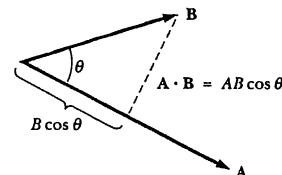


Figura 6.5 Il prodotto scalare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ è uguale al modulo di \mathbf{A} moltiplicato per la proiezione di \mathbf{B} su \mathbf{A} .

- *Prodotto scalare di versori*

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

Quindi, dalle Equazioni 6.7 e 6.8, il prodotto scalare di \mathbf{A} e \mathbf{B} si riduce a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad [6.9]$$

Nel caso particolare che $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si ha

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \mathbf{A}^2$$

Esempio 6.2 Prodotto scalare

I vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} siano espressi da $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
(a) Determinare il prodotto scalare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \\ &= -2\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + 2\mathbf{i} \cdot 2\mathbf{j} - 3\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \cdot 2\mathbf{j} \\ &= -2 + 6 = 4\end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$. Si ottiene lo stesso risultato, usando l'Equazione 6.9 direttamente, dove $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ e $B_y = 2$.

(b) Trovare l'angolo θ compreso tra \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Soluzione I moduli di \mathbf{A} e \mathbf{B} sono dati da

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13} \\ B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

Utilizzando l'Equazione 6.4 e il risultato ottenuto in (a), si ottiene

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13} \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{4}{8.06} = 60.2^\circ$$

ESERCIZIO 4 Per $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, trovare (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e (b) l'angolo tra \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Risposta (a) 5.00 (b) 71.6°

ESERCIZIO 5 Una particella si muove dalla sua origine a $(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ m, sotto l'azione di una forza data da $(4\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$ N. Calcolare il lavoro svolto da questa forza quando la particella compie lo spostamento dato. Risposta 32 J

6.3 • LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA VARIABILE

Consideriamo un oggetto che si sposta lungo l'asse delle x sotto l'azione di una forza variabile, come in Figura 6.6. L'oggetto si sposta nella direzione delle x , crescenti da $x = x_i$ a $x = x_f$. In una tale situazione, per calcolare il lavoro svolto dalla forza, non si può usare la relazione $W = (F \cos \theta)s$, poiché essa si può applicare soltanto nel caso in cui la forza F è costante in modulo e direzione. Tuttavia, se si immagina che l'oggetto compia uno spostamento Δx , molto piccolo, come descritto in Figura 6.6a, allora la componente della forza lungo l'asse x , F_x , può essere considerata approssimativamente costante in questo intervallo e si può esprimere il lavoro svolto dalla forza per questo piccolo spostamento come

$$W = F_x \Delta x \quad [6.10]$$

Questa espressione è proprio l'area ombreggiata del rettangolo nella Figura 6.6a. Ora, se si immagina di dividere in un gran numero di tali intervalli la curva

F_x in funzione di x , allora il lavoro totale svolto, nello spostamento che va da x_i a x_f , è uguale, approssimativamente, alla somma di un numero elevato di tali termini:

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Se gli spostamenti Δx tendono a zero, allora il numero dei termini della sommatoria cresce senza limite, ma il valore della sommatoria tende a un valore finito che è uguale all'area delimitata dalla curva F_x e dall'asse delle x , come in Figura 6.6. Come probabilmente si è appreso dall'analisi matematica, questo limite della sommatoria è chiamato integrale ed è rappresentato da

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

I limiti nell'integrale, $x = x_i$ e $x = x_f$, definiscono quello che è chiamato **integrale definito**. (Un **integrale indefinito** rappresenta il limite di una sommatoria su un intervallo non specificato. Nell'Appendice B.7 è riportata una breve descrizione dei metodi di integrazione). Questo integrale definito è numericamente uguale all'area compresa sotto la curva F_x in funzione di x nell'intervallo da x_i a x_f . Quindi, si può esprimere il lavoro svolto da F_x durante lo spostamento dell'oggetto da x_i a x_f come

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad [6.11]$$

Questa equazione si riduce all'Equazione 6.1 quando $F_x = F \cos \theta$ è costante.

Se più di una forza agisce sull'oggetto, il lavoro totale è proprio il lavoro svolto dalla forza risultante. Se si esprime la forza risultante nella direzione dell'asse x come $\sum F_x$, allora il lavoro totale compiuto sull'oggetto mentre si muove da x_i a x_f è

$$W_{\text{tot}} = \int_{x_i}^{x_f} (\sum F_x) dx \quad [6.12]$$

Fisica ragionata 3

Consideriamo un oggetto che segua una traiettoria sottoposto a una singola forza. Se la forza è costante, sotto quale condizione il lavoro svolto sull'intero percorso è nullo? Se la forza è variabile, sotto quale condizione il lavoro svolto sull'intero percorso è nullo?

Ragionamento Nel caso della forza costante, vi sono diverse possibilità che possono dare un risultato di lavoro nullo. Una possibilità è quella di un valore nullo della forza, e in questo caso abbiamo il risultato banale di nessuna spinta. La seconda possibilità per un lavoro nullo è che la forza non nulla agisca sull'oggetto, ma non riesca a far muovere l'oggetto, sebbene questa circostanza non si adatti alla domanda poiché si è affermato che l'oggetto *si muove* lungo una traiettoria. La terza possibilità è che la forza sia sempre perpendicolare allo spostamento, come nel caso di un pianeta che si muova lungo un'orbita circolare attorno a un centro di forza gravitazionale.

Per una forza variabile, soltanto una delle precedenti possibilità risulta consistente con la domanda. La possibilità di una forza nulla non è disponibile in quanto una forza il cui valore è *sempre* zero non è una forza *variabile*. La seconda possibilità, quella di uno spostamento nullo, come nel caso precedente, non corrisponde all'affir-

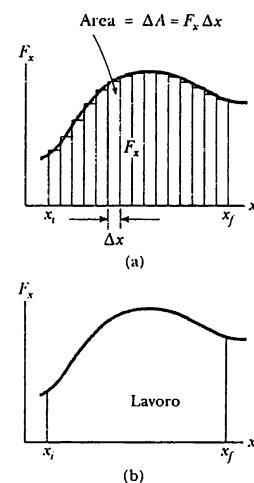
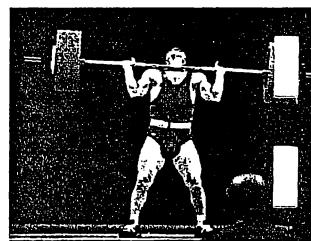


Figura 6.6 (a) Il lavoro svolto dalla forza F_x per il piccolo spostamento Δx è $F_x \Delta x$, che è uguale all'area del rettangolo ombreggiato. Il lavoro totale svolto per lo spostamento da x_i a x_f è, all'incirca, uguale alla somma delle aree di tutti i rettangoli. (b) Il lavoro svolto dalla forza variabile F_x mentre la particella si muove da x_i a x_f è esattamente uguale all'area sotto questa curva.



Il sollevatore di pesi compie lavoro quando tiene il peso sulle sue spalle? Compie lavoro quando solleva il peso?

mazione che l'oggetto si muove lungo una traiettoria. La terza possibilità, nella quale la forza è perpendicolare allo spostamento, darà un lavoro nullo anche nel caso di una forza variabile.

Abbiamo ulteriori possibilità, nel caso di una forza variabile, non comprese nel caso di forza costante. Una possibilità è quella di una forza variabile (o una forza costante applicata in verso opposto alla velocità) che faccia muovere l'oggetto lungo un percorso in modo tale che l'oggetto finisce per tornare indietro al punto di partenza. In questo caso il lavoro totale è nullo, perché non vi è spostamento. Questo è il caso di una cometa in orbita ellittica attorno al Sole: non viene svolto alcun lavoro totale dalla forza gravitazionale in un'orbita completa. Un'altra possibilità si verifica quando il verso dello spostamento e della forza si invertono lungo la traiettoria in modo tale che l'area sopra l'asse del grafico forza-spostamento sia uguale all'area sotto l'asse. Questo è il caso di un'automobile che prima accelera fino a raggiungere una certa velocità e poi frena fino a fermarsi. Il lavoro positivo svolto mentre l'automobile aumenta la sua velocità è uguale al lavoro negativo compiuto mentre l'automobile rallenta e si ferma (l'uguaglianza del lavoro positivo e negativo è probabilmente non ovvia a questo punto, ma lo sarà dopo il Paragrafo 6.4).

Esempio 6.3 Calcolo del lavoro totale da un grafico

Una forza, funzione di x come mostrato in Figura 6.7, agisce su un oggetto. Si calcoli il lavoro svolto dalla forza mentre l'oggetto si sposta da $x = 0$ a $x = 6.0$ m.

Soluzione Il lavoro svolto dalla forza è uguale all'area totale sotto la curva nell'intervallo da $x = 0$ a $x = 6.0$ m. Quest'area è uguale all'area della sezione rettangolare da $x = 0$ a $x = 4.0$ m, più l'area della sezione triangolare da $x = 4$ m a $x = 6.0$ m. L'area del rettangolo è $(4.0)(5.0)$ N · m = 20 J e l'area del triangolo è uguale a $\frac{1}{2}(2)(5.0)$ N · m = 5.0 J. Quindi, il lavoro totale svolto è 25 J.

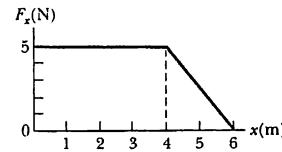


Figura 6.7 (Esempio 6.3) La forza agente sulla particella è costante per i primi 4 m di moto e poi diminuisce linearmente con x , da $x = 4.0$ m a $x = 6.0$ m. Il lavoro totale svolto dalla forza è l'area sotto la curva.

Lavoro svolto da una molla

Un sistema fisico abituale in cui la forza varia con la posizione è indicato in Figura 6.8. Un blocco, su una superficie orizzontale liscia, è collegato a una molla. Se la molla è estesa o compressa in un piccolo tratto dalla sua posizione di equilibrio, essa eserciterà una forza sul corpo data da

Forza di una molla •

$$F_m = -kx \quad [6.13]$$

dove x è lo spostamento del corpo dalla sua posizione di equilibrio ($x = 0$) e k è una costante positiva detta *costante elastica* della molla. Come si è appreso nel Capitolo 4, Paragrafo 4.1, questa legge è nota come legge di Hooke. Per molti materiali, la legge di Hooke può risultare molto accurata, posto che lo spostamento non sia troppo grande. Il valore di k è una misura della rigidità della molla. Molle rigide hanno alti valori di k mentre quelle morbide hanno valori di k più bassi.

Il segno negativo nell'Equazione 6.13 significa che la forza esercitata dalla molla è sempre diretta in verso *opposto* a quello dello spostamento. Per esempio, se $x > 0$, come in Figura 6.8a, la forza della molla è rivolta a sinistra, cioè è negativa. Se $x < 0$ come in Figura 6.8c, la forza della molla è rivolta a

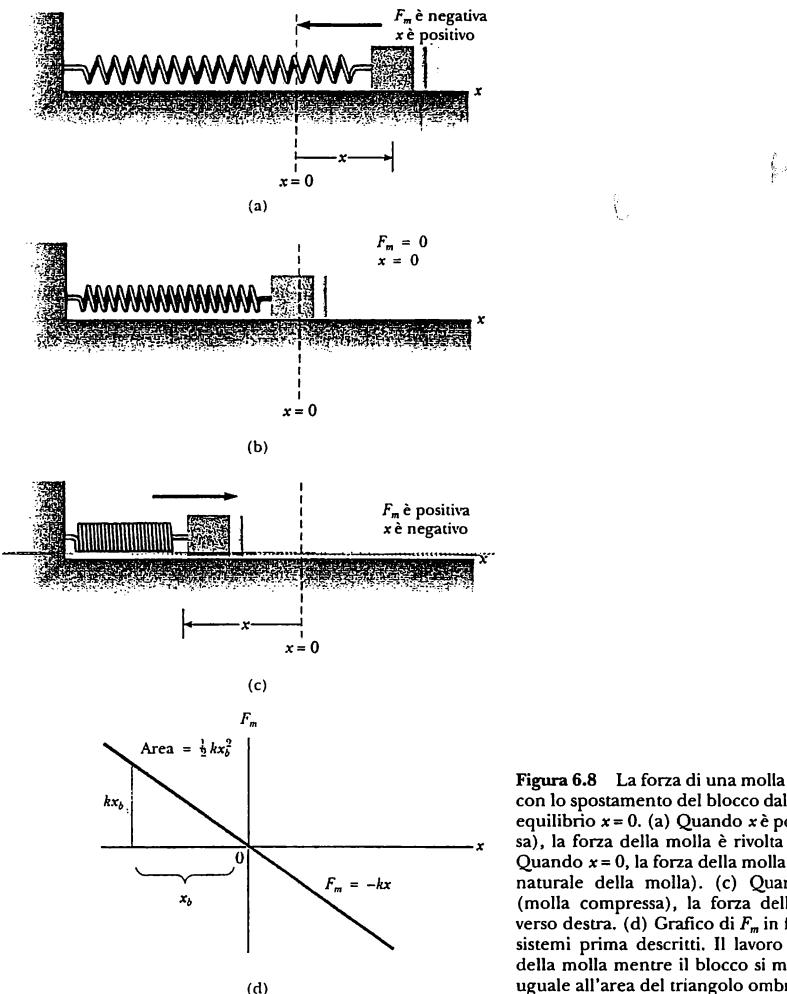


Figura 6.8 La forza di una molla su un blocco varia con lo spostamento del blocco dalla sua posizione di equilibrio $x = 0$. (a) Quando x è positivo (molla estesa), la forza della molla è rivolta verso sinistra. (b) Quando $x = 0$, la forza della molla è zero (lunghezza naturale della molla). (c) Quando x è negativo (molla compressa), la forza della molla è rivolta verso destra. (d) Grafico di F_m in funzione di x per i sistemi prima descritti. Il lavoro svolto dalla forza della molla mentre il blocco si muove da $-x_b$ a 0 è uguale all'area del triangolo ombreggiato, $\frac{1}{2} kx_b^2$.

destra, cioè è positiva. Ovviamente, quando $x = 0$, come in Figura 6.8b, la molla non è deformata ed $F_m = 0$. Essendo la forza della molla sempre diretta verso la posizione di equilibrio, essa è talvolta indicata col nome di *forza di richiamo*. Una volta che il blocco è spostato di una certa distanza x_b dalla posizione di equilibrio e quindi lasciato libero, esso si muoverà da $-x_b$ a $+x_b$, passando attraverso lo zero. Dettagli sul moto oscillatorio risultante saranno dati nel Capitolo 12.

Supponiamo che il blocco sia spinto verso sinistra a una distanza x_b dalla posizione di equilibrio, come in Figura 6.8c, e quindi lasciato libero. Calcoliamo

il lavoro svolto dalla forza della molla quando il corpo si muove da $x_i = -x_b$ ad $x_f = 0$. Applicando l'Equazione 6.11 e assumendo che il blocco sia considerato come un punto materiale, si ottiene

Lavoro svolto •
da una molla

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} F_m dx = \int_{-x_b}^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_b^2 \quad [6.14]$$

dove abbiamo utilizzato l'integrale indefinito $\int x dx = x^2/2$. Cioè, il lavoro svolto dalla forza elastica è positivo poiché la forza della molla ha il medesimo verso dello spostamento (entrambi sono rivolti verso destra). Però, se si considera il lavoro svolto dalla forza della molla quando il corpo si muove da $x_i = 0$ a $x_f = x_b$, si trova che $W_m = -\frac{1}{2} kx_b^2$, poiché in questo caso lo spostamento è rivolto verso destra e la forza della molla è diretta verso sinistra. Pertanto, il lavoro *totale* svolto dalla forza della molla mentre il corpo si muove da $x_i = -x_b$ a $x_f = x_b$ è zero.

Se si riporta in grafico la funzione F_m in funzione di x come in Figura 6.8d, si perviene al medesimo risultato. Si noti che il lavoro calcolato servendosi dell'Equazione 6.14, è equivalente all'area del triangolo ombreggiato nella Figura 6.8d, avente base x_b e altezza kx_b . L'area di questo triangolo è $\frac{1}{2} kx_b^2$.

Se la massa compie uno spostamento *arbitrario* da $x = x_i$ a $x = x_f$, il lavoro svolto dalla forza della molla è dato da

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 \quad [6.15]$$

Dalla precedente equazione, si vede che il lavoro compiuto è zero per qualsiasi moto i cui punti estremi coincidono ($x_i = x_f$). Si farà uso di questo importante risultato nel prossimo capitolo quando si discuterà, in maniera più dettagliata, il moto di questo sistema.

Le Equazioni 6.14 e 6.15 descrivono il lavoro svolto da una molla sul blocco. Consideriamo, adesso, il lavoro compiuto da un agente esterno che tira *molto lentamente* una molla da $x_i = 0$ a $x_f = x_b$, come mostrato in Figura 6.9. Si può calcolare facilmente questo lavoro considerando che la forza applicata, F_{app} , è uguale ed opposta alla forza della molla, F_m , per qualsiasi valore dello spostamento, così che $F_{app} = -(-kx) = kx$. Dunque, il lavoro svolto da questa forza applicata (l'agente esterno) è uguale a

$$W_{F_{app}} = \int_0^{x_b} F_{app} dx = \int_0^{x_b} kx dx = \frac{1}{2} kx_b^2$$

È da notare che questo lavoro è uguale ma di segno contrario al lavoro svolto dalla forza della molla nel medesimo spostamento.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Una molla viene estesa per una lunghezza x_b , con un lavoro W compiuto da un agente esterno. La molla viene poi riportata all'equilibrio, tagliata a metà, e una volta dimezzata estesa della stessa quantità. Quanto lavoro viene compiuto in questo caso?

Esempio 6.4 Lavoro necessario per estendere una molla

Un capo di una molla orizzontale che segue la legge di Hooke ($k = 80 \text{ N/m}$) è tenuto fisso mentre una forza esterna viene applicata all'estremità libera, estendendo-

la da $x = 0$ a $x_1 = 4.0 \text{ cm}$. (a) Trovare il lavoro svolto dalla forza esterna.

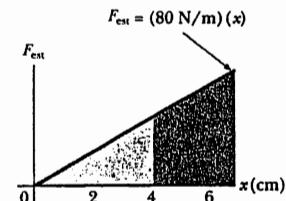


Figura 6.10 (Esempio 6.4) Grafico della forza esterna necessaria per estendere una molla che obbedisce alla legge di Hooke in funzione dell'allungamento della molla.

Soluzione Poniamo il riferimento zero dell'asse all'estremo libero della molla non estesa (Fig. 6.10). La forza esterna è $F_{\text{ext}} = (80 \text{ N/m}) (x)$. Il lavoro svolto da F_{ext} è l'area del triangolo da 0 a 4.0 cm:

$$W = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} (80 \text{ N/m}) (0.040 \text{ m})^2 = 64 \text{ mJ}$$

(b) Trovare il lavoro addizionale svolto nell'estendere la molla da $x_1 = 4.0 \text{ cm}$ a $x_2 = 7.0 \text{ cm}$.

Soluzione Il lavoro svolto nell'estendere la molla di una quantità addizionale, da $x_1 = 0.040 \text{ m}$ a $x_2 = 0.070 \text{ m}$, è l'area ombreggiata tra questi limiti. Geometricamente, abbiamo

$$W = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} (80 \text{ N/m}) [(0.070 \text{ m})^2 - (0.040 \text{ m})^2] = 130 \text{ mJ}$$

Utilizzando il calcolo troviamo che

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{ext}} dx = \int_{0.04 \text{ m}}^{0.07 \text{ m}} (80 \text{ N/m}) x dx \\ &= \frac{1}{2} (80 \text{ N/m}) (x^2) \Big|_{0.04 \text{ m}}^{0.07 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{2} (80 \text{ N/m}) [(0.070 \text{ m})^2 - (0.040 \text{ m})^2] = 130 \text{ mJ}$$

ESERCIZIO 6 Se una forza applicata varia con la posizione secondo la relazione $F_x = 3x^2 - 5$, dove x è espresso in metri, quanto lavoro deve essere svolto da questa forza su un oggetto che si muove da $x = 4 \text{ m}$ a $x = 7 \text{ m}$? Risposta 264 J

6.4 • ENERGIA CINETICA E TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Le soluzioni che utilizzano la seconda legge di Newton possono essere difficili se le forze che intervengono nel problema sono complesse. Un approccio alternativo per capire e risolvere problemi di moto è di collegare la velocità dell'oggetto al suo spostamento sotto l'azione di una qualche forza risultante. Come si vedrà in questo paragrafo, se il lavoro svolto dalla forza risultante su un oggetto può essere calcolato per uno spostamento dato, risulterà facile calcolare la variazione del modulo della velocità dell'oggetto.

La Figura 6.11 mostra un oggetto di massa m in moto verso destra sotto l'azione di una forza risultante costante F . Poiché la forza è costante, sappiamo dalla seconda legge di Newton che l'oggetto si sposterà con un'accelerazione costante a . Se l'oggetto si sposta di una distanza s , il lavoro svolto dalla forza F_{ris} è

$$W_{\text{tot}} = Fs = (ma)s \quad [6.16]$$

Inoltre, si è trovato nel Capitolo 2 (Eqq. 2.4 e 2.9) che se una particella si muove con accelerazione costante valgono le seguenti relazioni:

$$s = \frac{1}{2} (v_i + v_f) t \quad a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

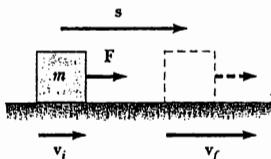


Figura 6.11 Una particella si sposta e cambia di velocità sotto l'azione di una forza risultante costante F .

dove v_i è la velocità a $t = 0$ e v_f è la velocità al tempo t . Sostituendo queste espressioni nell'Equazione 6.16 si ottiene

$$W_{\text{tot}} = m \left(\frac{v_f - v_i}{t} \right) \frac{1}{2} (v_i + v_f) t$$

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \quad [6.17]$$

La grandezza $\frac{1}{2} m v^2$ rappresenta l'energia associata al moto di una particella. Essa è così importante da meritare una denominazione specifica: **energia cinetica**. L'energia cinetica, K , di una particella di massa, m , e velocità, v , è definita come

*L'energia cinetica è
l'energia associata
al moto di un corpo*

*Il teorema dell'energia •
cinetica stabilisce che il
lavoro svolto su una
particella è uguale alla
variazione della sua
energia cinetica*



Figura 6.12 Il martello in movimento ha energia cinetica ed è quindi in grado di compiere lavoro sul chiodo, conficcandolo nel muro.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad [6.18]$$

L'energia cinetica è una grandezza scalare e ha le stesse unità di misura del lavoro. Per esempio, una massa di 4.0 kg che si muove con una velocità di 4.0 m/s ha una energia cinetica di 32 J. È spesso conveniente scrivere l'Equazione 6.17 nella forma

$$W_{\text{tot}} = K_f - K_i = \Delta K \quad [6.19]$$

Cioè,

il lavoro svolto da una forza costante F_{ris} nello spostare una particella è uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella.

L'Equazione 6.19 è un risultato importante noto come **teorema dell'energia cinetica**. Per semplicità esso è stato ricavato con l'assunzione che la forza risultante agente sulla particella fosse costante. Un modo più generale di derivarla mostrerebbe che questa equazione risulta valida anche per una forza variabile.

Il teorema dell'energia cinetica afferma inoltre che la velocità della particella aumenta se il lavoro totale compiuto su di essa è positivo, in quanto l'energia cinetica finale sarà maggiore di quella iniziale. La velocità decrescerà se il lavoro totale è negativo, in quanto l'energia cinetica finale risulterà minore di quella iniziale. Si noti che la velocità e l'energia cinetica di una particella variano solo se una qualche forza esterna compie lavoro sulla particella.

Si consideri la relazione tra il lavoro compiuto su una particella e la variazione della sua energia cinetica come espressa dall'Equazione 6.19. A causa di questa relazione, si può anche interpretare l'energia cinetica come il lavoro che il corpo può fornire nel fermarsi. Per esempio, si consideri un martello in procinto di colpire un chiodo, come in Figura 6.12. Il martello in moto possiede energia cinetica e può compiere lavoro sul chiodo. Il lavoro fatto sul chiodo appare come il prodotto Fs , dove F è la forza media esercitata sul chiodo dal martello ed s è la distanza che il chiodo percorre nel muro. Tuttavia, martello e chiodo non sono punti materiali, per cui parte dell'energia cinetica del martello serve per riscaldare il martello e il chiodo, e tutto il lavoro compiuto sul chiodo serve per riscaldare il chiodo e la parete, e per deformare localmente la parete.

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Stai lavorando in una biblioteca, sistemandone i libri negli scaffali. Sollevi un libro da uno scaffale basso a uno in alto. L'energia cinetica del libro nello scaffale basso era zero, e l'energia cinetica del libro nello scaffale in alto è pure zero, cosicché non c'è stata alcuna variazione di energia cinetica. Tu hai compiuto un certo lavoro per sollevare il libro. È stato violato il teorema dell'energia cinetica?

Situazioni che prevedono attrito dinamico

Quando si ha a che fare con una forza agente su un oggetto esteso, bisognerà prestare attenzione nel calcolare il lavoro compiuto da questa forza in quanto lo spostamento dell'oggetto, in genere, non è uguale allo spostamento del punto di applicazione della forza stessa. Supponiamo che a un oggetto di massa m che scivola su una superficie orizzontale venga applicata una forza costante orizzontale F verso destra e una forza di attrito dinamico f verso sinistra, in modo che $F > f$. In questo caso, la forza risultante è verso destra, come in Figura 6.11, mentre il lavoro totale svolto sull'oggetto nel percorrere una distanza s verso destra è

$$W_{\text{tot}} = (F - f) \cdot s = Fs - fs \quad [6.20]$$

*W = Fondo Orizzonte
per spostamento
meno forza di
attrito per spostarsi*

La grandezza Fs è il lavoro compiuto sull'oggetto dalla forza costante F . La grandezza $-fs$ è negativa perché la forza di attrito dinamico è opposta allo spostamento. Il lavoro svolto dall'attrito dinamico dipende sia dallo spostamento dell'oggetto, sia dalle modalità particolari del moto tra la posizione iniziale e finale. Di fatto, il lavoro svolto dall'attrito dinamico su un oggetto esteso non può essere valutato esplicitamente in quanto le forze di attrito e i loro singoli spostamenti sono molto complessi.

Si supponga ora che un blocco in moto su una superficie orizzontale, a una data velocità orizzontale v_i , percorra una distanza s prima di raggiungere una velocità finale v_f , come in Figura 6.13. La forza esterna che causa l'accelerazione nella direzione x negativa è la forza di attrito dinamico, f , che agisce verso sinistra, in direzione contraria al moto. L'energia cinetica iniziale del blocco è $\frac{1}{2}mv_i^2$, e la sua energia cinetica finale è $\frac{1}{2}mv_f^2$. La variazione dell'energia cinetica del blocco è pari a $a - fs$. Ciò è dimostrabile mediante l'applicazione della seconda legge di Newton al blocco. (La seconda legge di Newton fornisce l'accelerazione del centro di massa di qualsiasi oggetto indipendentemente da come o dove la forza agisce). Poiché la forza risultante sul blocco nella direzione x è la forza di attrito, la seconda legge di Newton dà $-f = ma$. Moltiplicando entrambi i membri di questa espressione per s , e utilizzando l'espressione $v_f^2 - v_i^2 = 2as$ per il moto con accelerazione costante si ha $-fs = (ma)s = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$, ossia

$$\Delta K = -fs \quad [6.21]$$

Tale risultato dice che la perdita di energia cinetica del blocco è uguale $a - fs$, che corrisponde all'energia dissipata dalla forza di attrito dinamico. Parte di quest'energia è trasferita all'energia interna del blocco, parte è trasferita dal blocco alla superficie². In effetti, la perdita di energia cinetica del blocco risulta in un aumento dell'energia interna sia del blocco che della superficie. Ad esempio, se la perdita di energia cinetica del blocco è 300 J, e 100 J risultano in un aumento dell'energia interna del blocco, allora i rimanenti 200 J devono essere stati trasferiti dal blocco alla superficie.

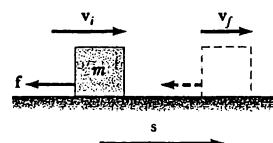


Figura 6.13 Un blocco che scivola verso destra su una superficie orizzontale rallenta per la presenza di una forza d'attrito dinamico che agisce verso sinistra. La velocità iniziale del blocco è v_i , quella finale v_f . La forza normale e quella dovuta alla gravità non sono incluse nel disegno in quanto esse sono perpendicolari al moto e non influenzano le variazioni di velocità del blocco.

Fisica ragionata 4

Un'automobile che viaggia a velocità v slitta per una distanza d dopo che vengono azionati i freni. Si faccia una stima di quanto slitterà se i freni vengono azionati quando la sua velocità iniziale è $2v$. Cosa accade dell'energia cinetica della macchina dopo che si è fermata?

² Per ulteriori dettagli sul trasferimento di energia dovuto a forze d'attrito dinamico, vedi B.A. Sherwood e W.H. Bernard, *American Journal of Physics*, 52:1001, 1984, e R.P. Bauman, *The Physics Teacher*, 30:264, 1992.

Ragionamento Assumiamo che la forza d'attrito dinamico fra l'automobile e la superficie della strada sia costante e la stessa nei due casi. La forza risultante moltiplicata per lo spostamento della macchina è uguale all'energia cinetica iniziale. Se la velocità dell'automobile viene raddoppiata come nell'esempio, l'energia cinetica dell'automobile viene quadruplicata. Per una data forza applicata (in questo caso, la forza d'attrito), la distanza percorsa è quattro volte maggiore quando la velocità iniziale viene raddoppiata, per cui la distanza stimata è $4d$. L'energia cinetica della macchina viene trasformata in energia interna associata agli pneumatici, alle pastiglie dei freni, e alla strada quando essi aumentano la temperatura.

Fisica ragionata 5

In molte situazioni incontrate in questo capitolo, le forze d'attrito tendono a ridurre l'energia cinetica dell'oggetto. Tuttavia, le forze d'attrito qualche volta aumentano l'energia cinetica di un oggetto. Descrivere qualche circostanza nella quale l'attrito produce un aumento dell'energia cinetica.

Ragionamento Se una cassa si trova sul pianale di un camion e il camion accelera verso est, la forza d'attrito statico che il camion applica sulla cassa agisce verso est per comunicare alla cassa la stessa accelerazione del camion (assumendo che la cassa non scivoli). Un altro esempio è dato dalla macchina che accelera a causa della forza d'attrito che si esercita fra gli pneumatici e la strada. Queste forze agiscono nella direzione di moto della macchina, e la somma di queste forze causa un aumento dell'energia cinetica della macchina.

PROBLEMA CONCETTUALE 6

È noto il fatto che si spende più energia per scendere le scale che per camminare orizzontalmente alla stessa velocità. Perché credi che sia così?

Esempio 6.5 Blocco tirato su una superficie liscia

Un blocco di 6.0 kg, inizialmente fermo, è tirato, da una forza costante di 12 N diretta lungo l'asse delle x , su una superficie orizzontale liscia, come mostrato in Figura 6.14. Trovare la velocità del blocco dopo che si è spostato di 3.0 m.

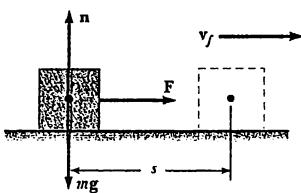


Figura 6.14 (Esempio 6.5)

Soluzione Il peso è equilibrato dalla forza normale, e nessuna di queste forze svolge lavoro poiché lo spostamento è orizzontale. Non essendovi attrito, la forza esterna risultante è semplicemente la forza di 12 N. Il

lavoro svolto da questa forza è

$$W = F_s = (12 \text{ N})(3.0 \text{ m}) = 36 \text{ N} \cdot \text{m} = 36 \text{ J}$$

Servendosi del teorema dell'energia cinetica ed osservando che l'energia cinetica iniziale è nulla, si ottiene

$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f^2 = \frac{2W}{m} = \frac{2(36 \text{ J})}{6.0 \text{ kg}} = 12 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = 3.5 \text{ m/s}$$

ESERCIZIO 7 Trovare l'accelerazione del blocco e determinare la sua velocità finale, usando l'equazione cinematica: $v_f^2 = v_i^2 + 2as$.

Risposta $a = 2.0 \text{ m/s}^2$

Esempio 6.6 Blocco tirato su una superficie scabra

Si trovi la velocità finale del blocco dell'Esempio 6.5 se la superficie è scabra e il coefficiente di attrito dinamico è 0.15.

Ragionamento In questo caso, dovremo utilizzare l'Equazione 6.21 per calcolare la variazione di energia cinetica, ΔK . La forza risultante agente sul blocco è la somma della forza di 12 N applicata e della forza d'attrito, come è mostrato in Figura 6.15. Poiché la forza d'attrito è in verso opposto allo spostamento, verrà sottratta.

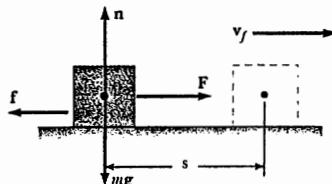


Figura 6.15 (Esempio 6.6)

Soluzione Il modulo della forza d'attrito è dato da $f = \mu_d n = \mu_d mg$. Quindi, la forza risultante agente sul blocco è

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= F - \mu_d mg = 12 \text{ N} - (0.15)(6.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \\ &= 12 \text{ N} - 8.82 \text{ N} = 3.18 \text{ N} \end{aligned}$$

Moltiplicando tale forza costante per lo spostamento si ha

$$\Delta K = F_{\text{tot}} s = (3.18 \text{ N}) (3.0 \text{ m}) = 9.54 \text{ J} = \frac{1}{2} mv_f^2$$

utilizzando l'informazione che $v_i = 0$. Perciò,

$$v_f^2 = \frac{2(9.54 \text{ J})}{6.0 \text{ kg}} = 3.18 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = 1.8 \text{ m/s}$$

ESERCIZIO 8 Applicando la seconda legge di Newton, trovare l'accelerazione del corpo.
Risposta $a = 0.53 \text{ m/s}^2$

Esempio 6.7 Sistema massa-molla

Un blocco di massa 1.6 kg è collegato a una molla di costante elastica $1.0 \times 10^3 \text{ N/m}$, come in Figura 6.16. La molla è compressa di 2.0 cm e il blocco è lasciato libero dalla quiete. (a) Calcolare la velocità del blocco quando passa dalla sua posizione di equilibrio $x = 0$, se la superficie è priva di attrito.

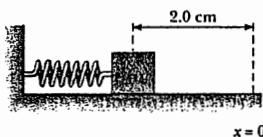


Figura 6.16 (Esempio 6.7)

Soluzione Utilizzando l'Equazione 6.14, il lavoro svolto dalla molla con $x_b = -2.0 \text{ cm} = -2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ è:

$$W_m = \frac{1}{2} kx_b^2 = \frac{1}{2} (1.0 \times 10^3 \text{ N/m}) (-2.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 0.20 \text{ J}$$

Utilizzando il teorema dell'energia cinetica con $v_i = 0$ si ottiene:

$$W_m = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

$$0.20 \text{ J} = \frac{1}{2} (1.6 \text{ kg}) v_f^2 - 0$$

$$v_f^2 = \frac{0.40 \text{ J}}{1.6 \text{ kg}} = 0.25 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = 0.50 \text{ m/s}$$

(b) Calcolare la velocità del blocco quando passa per la posizione di equilibrio se una forza di attrito costante di 4.0 N ritarda il suo moto.

Soluzione Utilizziamo l'Equazione 6.21 per calcolare l'energia cinetica perduta a causa dell'attrito e sommiamo (algebricamente) all'energia cinetica calcolata in assenza di attrito. Considerando soltanto la forza d'attrito, l'energia cinetica perduta a causa dell'attrito è

$$-fs = -(4.0 \text{ N})(2.0 \times 10^{-2} \text{ m}) = -0.08 \text{ J}$$

L'energia cinetica finale, senza questa perdita, è stata trovata in (a) pari a 0.20 J. Quindi, l'energia cinetica finale in presenza di attrito è

$$K_f = 0.20 \text{ J} - 0.08 \text{ J} = 0.12 \text{ J} = \frac{1}{2} mv_f^2$$

$$\frac{1}{2} (1.6 \text{ kg}) v_f^2 = 0.12 \text{ J}$$

$$v_f^2 = \frac{0.24 \text{ J}}{1.6 \text{ kg}} = 0.15 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = 0.39 \text{ m/s}$$

È da notare che questo valore di v_f è minore di quello ottenuto nel caso di assenza di attrito. Tale risultato vi sorprende?

ESERCIZIO 9 Una slitta di 100 kg viene trainata a velocità costante da una muta di cani per una distanza di 2.00 km lungo una superficie orizzontale. Se il coefficiente d'attrito fra slitta e neve è 0.150, trovare (a) il lavoro svolto dalla muta di cani e (b) l'energia perduta per attrito. Risposta (a) 2.94×10^5 J (b) Tutta questa energia viene dissipata a causa dell'attrito.

ESERCIZIO 10 Un blocco di 15 kg viene trascinato su una superficie orizzontale da una forza costante di 70 N che agisce a un angolo di 20° sopra l'orizzontale. Il blocco viene spostato di 5.0 m, e il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco e la superficie è 0.30. Calcolare il lavoro svolto (a) dalla forza di 70 N, (b) dalla forza normale, e (c) dalla forza di gravità. (d) Calcolare l'energia perduta a causa dell'attrito.

Risposta (a) 330 J (b) 0 (c) 0 (d) -185 J

6.5 • POTENZA

Da un punto di vista pratico, è interessante conoscere non solo il lavoro svolto su un oggetto, ma anche la rapidità con cui il lavoro è svolto. Si definisce potenza la rapidità con cui viene svolto lavoro.

Se una forza esterna è applicata su un oggetto (che si assume agisca come un punto materiale) e se il lavoro svolto, in un intervallo di tempo Δt , è W , allora la potenza media in tale intervallo è definita come il rapporto tra il lavoro svolto e l'intervallo di tempo:

Potenza media •

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \quad [6.22]$$

Il lavoro compiuto su un oggetto contribuisce ad aumentarne l'energia. Una definizione più generale di potenza è la rapidità con cui l'energia viene trasferita. La potenza istantanea, P , è il valore limite della potenza media quando Δt tende a zero:

Potenza istantanea •

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad [6.23]$$

dove si è rappresentato il valore infinitesimale del lavoro svolto con dW (anche se non è una variazione e quindi non è un differenziale). Dalla Equazione 6.3, si può esprimere il lavoro svolto da una forza F in uno spostamento ds come $dW = F \cdot ds$. La potenza istantanea può essere scritta quindi:

Il watt •

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} = F \cdot v \quad [6.24]$$

dove si è utilizzato il fatto che $v = ds/dt$.

L'unità SI della potenza è J/s , che è anche chiamata watt (W) (da James Watt):

$$1 W = 1 J/s = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$$

Il simbolo W per watt non deve essere confuso con il simbolo in corsivo W del lavoro.

Nel sistema Britannico degli Ingegneri, l'unità di potenza è il cavallo vapore (hp):

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}$$

Si può, adesso, definire una nuova unità di energia (o di lavoro) in termini di unità di potenza. Un kilowattora (kWh) è l'energia convertita o consumata in 1 h a un tasso costante di 1 kW = 1000 J/s. Il valore numerico di 1 kWh è

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W}) (3600 \text{ s}) = 3.60 \times 10^6 \text{ J}$$

È importante notare che il kWh è una unità di energia, non di potenza. Quando si paga la bolletta elettrica, si paga l'energia e la quantità di elettricità consumata è, in genere, espressa in kWh. Per esempio, una lampadina elettrica di 100 W "consumerà" $3.60 \times 10^5 \text{ J}$ di energia in 1 h.

Fisica ragionata 6

Una lampadina viene descritta da alcuni come una "lampada che ha 60 watt". Che cosa c'è di sbagliato in questa frase?

Ragionamento Il numero dato rappresenta la potenza della lampadina, che è il tasso al quale l'energia passa attraverso di essa, entrando sotto forma di energia elettrica fornita dall'alimentatore. Essa, tuttavia, non è un valore che la lampadina "possiede". Essa è soltanto la potenza fornita dalla lampadina quando è collegata a una presa domestica di elettricità a 220 volt. Se la lampada fosse collegata a una sorgente a 12 volt, l'energia entrerebbe nella lampada a un tasso diverso da 60 watt. Quindi, i 60 watt non rappresentano una proprietà intrinseca della lampada, come la densità per un dato materiale solido.

PROBLEMA CONCETTUALE 7

Un vecchio modello di macchina accelera da 0 alla velocità v in 10 secondi. Un modello più recente di macchina sportiva, più potente, accelera da 0 a $2v$ nello stesso tempo. Qual è il rapporto di potenza erogata dalle due macchine? Si consideri l'energia del motore che appare soltanto come energia cinetica della macchina.

Esempio 6.8 Potenza erogata da un motore di ascensore

Un ascensore di massa 1000 kg ha una portata massima di 800 kg. Una forza d'attrito costante $f = 4000 \text{ N}$ ritarda il suo moto verso l'alto, come in Figura 6.17. (a) Quale deve essere la minima potenza erogata dal motore per far salire l'ascensore con una velocità costante di 3.00 m/s ?

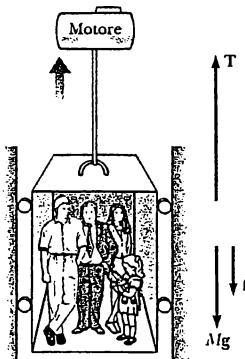


Figura 6.17 (Esempio 6.8) Il motore fornisce a un ascensore una forza T rivolta verso l'alto. Una forza di attrito f e la forza di gravità Mg agiscono verso il basso.

Soluzione Il motore deve fornire la forza T che tira l'ascensore verso l'alto. Dalla seconda legge di Newton e dal fatto che $a = 0$ poiché v è costante, si ottiene

$$T - f - Mg = 0$$

dove M è la massa totale (ascensore più carico) uguale a 1800 kg. Quindi,

$$\begin{aligned} T &= f + Mg \\ &= 4.00 \times 10^3 \text{ N} + (1.80 \times 10^3 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \\ &= 2.16 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

Utilizzando l'Equazione 6.24 e considerando che T e v hanno la stessa direzione

$$\begin{aligned} P &= T \cdot v = Tv \\ &= (2.16 \times 10^4 \text{ N})(3.00 \text{ m/s}) = 6.48 \times 10^4 \text{ W} \\ &= 64.8 \text{ kW} \end{aligned}$$

(b) Quale potenza deve erogare il motore in ogni istante se è stato progettato per fornire un'accelerazione verso l'alto di 1.00 m/s^2 ?

Soluzione Applicando la seconda legge di Newton all'ascensore si ottiene

$$\begin{aligned} T - f - Mg &= Ma \\ T &= M(a + g) + f \\ &= (1.80 \times 10^3 \text{ kg})(1.00 + 9.80) \text{ m/s}^2 \\ &\quad + 4.00 \times 10^3 \text{ N} \\ &= 2.34 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

Quindi, utilizzando l'Equazione 6.24, si ottiene la potenza richiesta

$$P = Tv = (2.34 \times 10^4 v) \text{ W}$$

dove v è la velocità istantanea dell'ascensore espressa in m/s. La potenza richiesta aumenta, dunque, con l'aumentare della velocità.

ESERCIZIO 11 Un atleta di 65 kg corre per una distanza di 600 m lungo una strada di montagna inclinata di 20° rispetto all'orizzontale. Egli compie il percorso in 80 s. Assumendo che la resistenza dell'aria sia trascurabile, (a) quanto lavoro viene compiuto contro la gravità, e (b) qual è la potenza media erogata durante la corsa.
Risposta (a) $1.3 \times 10^5 \text{ J}$ (b) 1.6 kW

SOMMARIO

Il **lavoro** svolto da una forza *costante* \mathbf{F} che agisce su una particella è definito come il prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento del punto di applicazione della forza per il modulo dello spostamento. Se la forza forma un angolo θ rispetto allo spostamento s , il lavoro svolto da \mathbf{F} è:

$$W = Fs \cos \theta \quad [6.1]$$

Il **prodotto scalare** di due vettori qualsiasi \mathbf{A} e \mathbf{B} è definito dalla relazione:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad [6.5]$$

dove il risultato è una grandezza scalare e θ è l'angolo compreso tra le direzioni dei due vettori. Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa e distributiva.

Il **lavoro** svolto da una forza *variabile* che agisce su una particella che si muove lungo l'asse x , da x_i a x_f è dato da:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad [6.11]$$

dove F_x è la componente della forza lungo l'asse x . Se diverse forze agiscono sulla particella, il lavoro totale svolto da tutte le forze è uguale alla somma dei lavori parziali svolti da ciascuna forza.

L'**energia cinetica** di una particella di massa m che si muove con velocità v (con v piccola rispetto alla velocità della luce) è definita come

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \quad [6.18]$$

Il **teorema dell'energia cinetica** stabilisce che il lavoro totale svolto dalle forze esterne che agiscono su una particella è uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella:

$$W_{\text{tot}} = K_f - K_i = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2 \quad [6.19]$$

La **potenza media** è la rapidità nel compiere lavoro

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \quad [6.22]$$

Se un agente applica una forza \mathbf{F} a un oggetto che si muove con velocità v , la **potenza istantanea** erogata da questo agente è data da

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad [6.24]$$

DOMANDE CONCETTUALI

1. Spiegare perché il lavoro svolto dalla forza di attrito radente è negativo quando un oggetto compie uno spostamento lungo una superficie scabra.
- 2.** Quando una particella ruota lungo una circonferenza, una forza agisce su di essa diretta verso il centro di rotazione. Perché questa forza non compie lavoro sulla particella?
3. Quando un giocatore di football calcia un pallone, compie lavoro sul pallone mentre il suo piede è a contatto con esso? Compie lavoro sul pallone dopo che questo non è più a contatto con il suo piede? Vi sono forze che compiono lavoro sul pallone mentre è in volo?
4. Citare due esempi in cui una forza agisce su un oggetto, senza compiere lavoro.
- 5.** Nel movimento di un pendolo semplice, le forze che agiscono sulla massa sospesa sono la forza peso, la tensione della fune di sostegno e la resistenza dell'aria. (a) Quali di queste forze, eventualmente, non compie lavoro sul pendolo? (b) Quale di queste forze compie un lavoro negativo per tutta la durata del moto? (c) Descrivere il lavoro fatto dalla forza di gravità, mentre il pendolo oscilla.
6. Se il prodotto scalare di due vettori è positivo ciò implica che i vettori abbiano componenti positive?
- 7.** Un giocatore di hockey colpisce il disco sul ghiaccio privo di attrito col suo bastone. Se il disco parte da fermo e alla fine si muove con velocità v , ha compiuto lavoro il
- giocatore di hockey nel suo sistema di riferimento? Una formica si trova sul disco e vi si attacca fortemente mentre il disco accelera. Nel sistema di riferimento della formica, si è svolto lavoro? Il teorema dell'energia cinetica è soddisfatto per ciascun osservatore?
- 8.** L'energia cinetica di un oggetto può avere un valore negativo?
- 9.** Un proiettile ha una massa doppia di un altro. Se entrambi sono sparati con la medesima velocità quale dei due possiede energia cinetica maggiore? Quanto vale il rapporto delle energie cinetiche dei due proiettili?
- 10.** Se si raddoppia la velocità di una particella, di quanto varia la sua energia cinetica?
- 11.** Cosa può dirsi della velocità di un oggetto se il lavoro totale svolto su di esso è zero?
12. La potenza media può mai essere uguale a quella istantanea? Spiegare.
13. Nell'Esempio 6.8, la potenza richiesta aumenta o diminuisce se si riduce la forza di attrito?
- 14.** Qualche volta espressioni di fisica vengono usate nella letteratura popolare in modo interessante. Per esempio, consideriamo la descrizione di un masso che cade giù dalla sommità di un pendio come "una forza che aumenta mentre esso cade verso la sottostante spiaggia". Che cosa vuol dire la frase "una forza che aumenta" e, si può correggere questa frase?

PROBLEMI

Paragrafo 6.1 Lavoro svolto da una forza costante

1. Un rimorchiatore, in moto a velocità costante nel porto, esercita una forza costante di 5000 N su una nave. Determinare il lavoro compiuto dal rimorchiatore sulla nave dopo un tragitto di 3.00 km.
2. Un cliente di un supermercato spinge il carrello con una forza di 35.0 N diretta a un angolo di 25.0° verso il basso rispetto all'orizzontale. Trovare il lavoro compiuto dal cliente nel percorrere un corridoio di 50.0 m di lunghezza.
3. Una goccia di pioggia ($m = 3.35 \times 10^{-5}$ kg) cade verticalmente a velocità costante sotto l'azione della gravità e della resistenza dell'aria. Dopo una caduta di 100 m, qual è il lavoro compito (a) dalla forza di gravità e (b) dalla resistenza dell'aria?
4. Un blocco di massa 2.50 kg viene spinto per 2.20 m lungo un tavolo orizzontale liscio da una forza costante di 16.0 N diretta a 25.0° al di sotto dell'orizzontale. Determinare il lavoro svolto (a) dalla forza applicata, (b) dalla forza normale esercitata dal tavolo, (c) dalla forza di gravità, e (d) dalla forza risultante sul blocco.
- 5.** Batman, la cui massa è 80.0 kg, è assicurato all'estremità libera di una fune, lunga 12.0 m, fissata all'altro estremo ad un grosso ramo d'albero. Egli, superdota-

to, è in grado di imprimere un'oscillazione alla fune, in modo da raggiungere il davanzale di una finestra, quando la fune forma un angolo di 60.0° con la verticale. Determinare il lavoro compiuto da Batman contro la forza di gravità durante questa impresa.

Paragrafo 6.2 Prodotto scalare di due vettori

6. Un vettore **A** ha un modulo di 5.00 unità e un vettore **B** ha un modulo di 9.00 unità. I due vettori formano un angolo di 50.0°. Trovare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.
7. Un vettore **A** si estende dall'origine a un punto di coordinate polari (7,70°), e un vettore **B** va dall'origine a un punto di coordinate polari (4, 130°). Calcolare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.
8. Dati due vettori arbitrari **A** e **B**, mostrare che $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. (Suggerimento: scrivere **A** e **B** per mezzo di versori e usare le Equazioni 6.7 e 6.8).
- 9.** Una forza $\mathbf{F} = (6\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$ N agisce su una particella che compie uno spostamento $\mathbf{s} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j})$ m. Trovare (a) il lavoro svolto dalla forza sulla particella e (b) l'angolo tra \mathbf{F} e \mathbf{s} .
10. Per i tre vettori $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, determinare $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.
11. Dalla definizione di prodotto scalare, trovare gli angoli

li formati dalle seguenti coppie di vettori: (a) $\mathbf{A} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. (b) $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. (c) $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Paragrafo 6.3 Lavoro svolto da una forza variabile

12. La forza che agisce su una particella varia come in Figura P6.12. Trovare il lavoro svolto dalla forza quando la particella si sposta (a) da $x = 0$ a $x = 8.00$ m, (b) da $x = 8.00$ m a $x = 10.0$ m e (c) da $x = 0$ a $x = 10.0$ m.

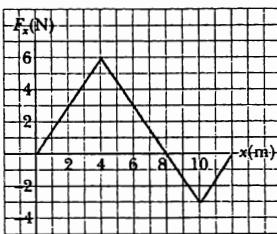


Figura P6.12

13. Un corpo è soggetto a una forza F_x che varia con la posizione come in Figura P6.13. Trovare il lavoro svolto dalla forza sul corpo quando si muove (a) da $x = 0$ a $x = 5.00$ m, (b) da $x = 5.00$ m a $x = 10.0$ m e (c) da $x = 10.0$ m a $x = 15.0$ m. (d) Qual è il lavoro totale svolto dalla forza lungo lo spostamento da $x = 0$ a $x = 15.0$ m?

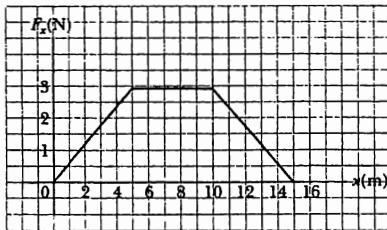


Figura P6.13

14. La forza che agisce su una particella è data da: $F_x = (8x - 16)$ N, con x espresso in m. (a) Tracciare un grafico di questa forza in funzione di x nell'intervallo da $x = 0$ a $x = 3.00$ m. (b) Dal grafico trovare il lavoro totale svolto da questa forza quando la particella si muove da $x = 0$ a $x = 3.00$.
 15. Una forza $F = (4.0xi + 3.0yj)$ N agisce su un oggetto mentre l'oggetto si muove lungo la direzione x dall'origine a $x = 5.00$ m. Calcolare il lavoro svolto dalla forza sull'oggetto.
 16. Quando una massa di 4.00 kg è appesa verticalmente a una molla di massa trascurabile che obbedisce alla

legge di Hooke, la molla si allunga di 2.50 cm. Se si toglie la massa di 4.00 kg, (a) di quanto si allungherà la molla se si sospende ad essa una massa di 1.50 kg e (b) quanto lavoro deve compiere un agente esterno per allungare la stessa molla di 4.00 cm dalla sua posizione di equilibrio?

17. Un arciere tende la corda del suo arco di 0.400 m all'indietro, esercitando una forza che cresce uniformemente da zero a 230 N. Determinare (a) l'equivalente costante elastica dell'arco, assimilato a una molla; (b) il lavoro compiuto sull'arco.
 18. Un proiettile di 100 g è sparato da un fucile con una canna lunga 0.600 m. Assumendo che l'origine sia posta dove il proiettile inizia a muoversi, la forza (in newton) esercitata sul proiettile dai gas che si espandono è $15000 + 10000x - 25000x^2$, dove x è espresso in metri. (a) Determinare il lavoro compiuto dal gas sul proiettile mentre il proiettile attraversa la lunghezza della canna. (b) Se la canna è lunga 1.00 m, quanto lavoro viene svolto e come si confronta con il lavoro calcolato in (a)?
 19. Si viene compiuto un lavoro di 4.00 J per allungare una molla di 10.0 cm, dalla posizione di equilibrio, determinare il lavoro supplementare per estenderla di ulteriori 10.0 cm.
 20. Se si spende un lavoro W per allungare una molla che segue la legge di Hooke di una distanza d dalla posizione di riposo, determinare il lavoro supplementare per estenderla di un'ulteriore distanza d .

Paragrafo 6.4 Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica

21. Una particella di 0.600 kg ha una velocità di 2.00 m/s nel punto A e un'energia cinetica di 7.50 J nel punto B. Qual è (a) la sua energia cinetica nel punto A e (b) la sua velocità nel punto B? (c) Qual è il lavoro totale svolto sulla particella quando essa si sposta da A a B?
 22. Una palla di 0.300 kg ha una velocità di 15.0 m/s. (a) Qual è la sua energia cinetica? (b) Se si raddoppia la sua velocità quanto vale la sua energia cinetica?
 23. Una massa di 3.00 kg ha una velocità iniziale $v_0 = (6.00i - 2.00j)$ m/s. (a) Quanto vale la sua energia cinetica in questo istante? (b) Calcolare il lavoro totale compiuto sull'oggetto se la sua velocità varia assumendo il valore $(8.00i + 4.00j)$ m/s. (Suggerimento: si ricordi che $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$).
 24. Si può ritenere il teorema dell'energia cinetica come una seconda teoria del moto, parallela alle leggi di Newton nel descrivere come le interazioni esterne influenzino il moto di un oggetto. In questo problema risolvere le domande (a) e (b) separatamente dalle domande (c) e (d) per confrontare le previsioni delle due teorie. Nella canna di un fucile, un proiettile di 15.0 g accelera dalla quiete fino a una velocità di 780 m/s. (a) Determinare il lavoro fatto su di esso.

- (b) Se il fucile ha una canna lunga 72.0 cm, trovare il modulo della forza media risultante che agisce su di esso, dalla $F = W/(d \cos \theta)$. (c) Determinare l'accelerazione costante del proiettile che parte dalla quiete e raggiunge la velocità di 780 m/s su una distanza di 72.0 cm. (d) Se il proiettile ha una massa di 15.0 g, determinare la forza risultante che agisce su di esso dalla $\Sigma F = ma$.
- 25.** Un carrello carico di mattoni ha una massa totale di 18.0 kg ed è trainato a una velocità costante da una fune. La fune è inclinata di 20.0° sull'orizzontale e il carrello si muove a una distanza di 20.0 m sulla superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra carrello e superficie è 0.500. (a) Qual è la tensione della fune? (b) Quanto lavoro compie la fune sul carrello? (c) Qual è l'energia dissipata per attrito?
- 26.** Una cassa di 40.0 kg inizialmente ferma viene spinta per 5.00 m lungo un pavimento orizzontale scabro con una forza costante orizzontale di 130 N. Se il coefficiente di attrito fra cassa e pavimento è 0.300, determinare (a) il lavoro compiuto dalla forza applicata, (b) l'energia dissipata per attrito, (c) la variazione di energia cinetica della cassa, e (d) la velocità finale della cassa.
- 27.** Una slitta di massa m , che si trova in un lago gelato, riceve una spinta che le comunica una velocità iniziale $v_0 = 2.00 \text{ m/s}$. Il coefficiente di attrito dinamico tra la slitta e il ghiaccio è $\mu_d = 0.100$. (a) Servendosi del teorema dell'energia cinetica trovare la distanza percorsa dalla slitta prima di fermarsi.
- 28.** Un blocco di 12.0 kg partendo da fermo scivola giù lungo un piano inclinato liscio di 35.0° e viene fermato da una molla robusta di costante elastica $k = 3.00 \times 10^4 \text{ N/m}$. Il blocco scivola di 3.00 m dal punto in cui viene liberato fino al punto in cui si ferma contro la molla. Quando il blocco si ferma, di quanto si comprime la molla?
- 29.** Una cassa di massa 10.0 kg viene tirata in salita lungo un piano inclinato scabro con una velocità iniziale di 1.50 m/s . La forza esercitata è di 100 N, parallelamente al piano, inclinato di 20.0° rispetto all'orizzontale. Il coefficiente d'attrito dinamico è 0.400, e la cassa viene tirata per 5.00 m. (a) Quanto lavoro viene compiuto dalla forza di gravità? (b) Quanta energia si dissipà per attrito? (c) Quanto lavoro viene svolto dalla forza di 100 N? (d) Di quanto varia l'energia cinetica della cassa? (e) Qual è la velocità della cassa dopo essere stata tirata per 5.00 m?
- 30.** Un tubo a raggi catodici di un certo televisore è lungo 36.0 cm. La forza elettrica accelera nel tubo un elettrone da fermo a 1.00% della velocità della luce lungo questa distanza. Determinare (a) l'energia cinetica dell'elettrone quando urta lo schermo all'estremità del tubo, (b) il modulo della forza elettrica media agente sull'elettrone su questa distanza, (c) il modulo dell'accelerazione media dell'elettrone per questa distanza, e (d) il tempo di volo.
- 31.** Una forza risultante variabile col tempo agente su un oggetto di 4.00 kg provoca uno spostamento dell'oggetto dato da $x = 2.0t - 3.0t^2 + 1.0t^3$, dove x è espresso in metri e t in secondi. Determinare il lavoro compiuto sull'oggetto nei primi 3.00 s del moto.
- 32.** Una palla di acciaio di 5.00 kg cade su una placca di rame da un'altezza di 10.0 m. Se la palla lascia un incavo di 0.320 cm, qual è la forza media esercitata sulla palla dalla placca durante l'urto?
- Paragrafo 6.5 Potenza**
- 33.** Un soldato del peso di 700 N si arrampica, in allenamento, lungo una fune verticale per un tratto di 10.0 m, in 8.00 s. Determinare la potenza necessaria.
- 34.** Fai una stima dell'ordine di grandezza della potenza erogata dal motore della tua macchina per aumentare la velocità fino al valore consentito in autostrada. Nella soluzione enuncia le grandezze fisiche che assumi come note e i valori misurati o stimati per esse. La massa del veicolo si può desumere dal manuale di manutenzione. Se non possiedi una macchina, considera un bus o un camion di tuo gradimento.
- 35.** Se un certo cavallo può mantenere 1.00 hp di potenza per 2.00 h, quanti carichi da 70.0 kg di tegole può sollevare il cavallo (per mezzo di un sistema a puleggia) fino al tetto di una casa alta 8.00 m, assumendo una efficienza del 70.0%?
- 36.** Un motore di automobile eroga una potenza di 30.0 hp ($2.24 \times 10^4 \text{ W}$) alle sue ruote quando essa si muove a una velocità costante di 27.0 m/s ($\approx 97 \text{ km/h}$). Quanto vale la forza di resistenza che agisce sull'automobile a questa velocità?
- 37.** Uno sciatore di massa 70.0 kg viene fatto risalire da una fune tramite una funivia a motore. (a) Quanto lavoro è richiesto per tirarlo per una distanza di 60.0 m con una pendenza di 30.0° (poniamo senza attrito) e a una velocità costante di 2.00 m/s ? (b) Quanta potenza espressa in cavalli vapore è richiesta per realizzare questo compito?
- 38.** Un ascensore di 650 kg parte da fermo. Esso si muove verso l'alto per 3.00 s con accelerazione costante finché raggiunge la sua velocità di crociera di 1.75 m/s . (a) Qual è la potenza media del motore dell'ascensore durante questo tempo? (b) Come si confronta questa potenza con quella sviluppata quando si muove a velocità di crociera?
- Problemi generali**
- 39.** Un battitore fuori campo lancia una palla di 0.150 kg alla velocità di 40.0 m/s e a un angolo iniziale di 30.0° . Qual è l'energia cinetica della palla nel punto più alto della traiettoria?
- 40.** Mentre corre, una persona dissipà circa 0.600 J di

energia meccanica per passo per kg di massa corporea. Se un corridore di 60.0 kg dissipà un'energia di 70.0 W durante una competizione, a che velocità corre l'atleta? Assumere che il passo di corsa sia lungo 1.50 m.

41. Una particella di massa m si muove con accelerazione costante a . Se i vettori posizione e velocità della particella sono \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 , rispettivamente, mostrare che la sua velocità v ad ogni istante soddisfa l'equazione

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione della particella allo stesso tempo.

42. La direzione di un vettore arbitrario \mathbf{A} può essere completamente specificata con gli angoli α , β e γ che il vettore forma, rispettivamente, con gli assi x , y e z . Se $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, (a) trovare le espressioni per $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (questi sono noti come *coseni direttori*) e (b) mostrare che questi angoli soddisfano la relazione $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ (*Suggerimento:* si consideri il prodotto scalare di \mathbf{A} con \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} separatamente).

43. Una particella di 4.00 kg si muove lungo l'asse delle x . La sua posizione varia col tempo secondo la legge $x = t + 2.0 t^3$, dove x è in m e t in s. Trovare (a) l'energia cinetica in ogni istante t , (b) l'accelerazione della particella e la forza che agisce su di essa al tempo t , (c) la potenza che è fornita alla particella al tempo t e (d) il lavoro svolto sulla particella nell'intervallo di tempo da $t = 0$ a $t = 2.00$.
44. Quando una molla è estesa oltre il suo limite elastico, la forza di richiamo soddisfa l'equazione $F = -kx + \beta x^3$. Se $k = 10.0 \text{ N/m}$ e $\beta = 100 \text{ N/m}^3$, calcolare il lavoro compiuto da questa forza quando la molla viene estesa di 0.100 m.

45. Un battipalo di massa 2100 kg viene usato per conficcicare nel terreno un palo d'acciaio. La massa del battipalo viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 5.00 m rispetto alla sommità del palo di acciaio e lo conficca per 12.0 cm nel terreno, prima di fermarsi. Usando il teorema dell'energia cinetica, si determini la forza media esercitata dal palo sulla massa, fino a quando essa si ferma.
46. Una ciclista e la sua bicicletta hanno una massa totale di 75.0 kg. Essa scende senza pedalare lungo una strada inclinata di 2.00° con l'orizzontale a 4.00 m/s e lungo una strada inclinata di 4.00° a 8.00 m/s . Essa poi mantiene il moto senza forzare lungo una strada pianeggiante. Quanta potenza spende per mantenere la sua velocità di 3.00 m/s ? Si assuma che la resistenza dell'aria sia proporzionale alla velocità e che tutte le altre forze d'attrito rimangano costanti.

47. Un blocco di 200 g è premuto contro una molla di costante elastica 1.40 kN finché il blocco comprime la molla di 10.0 cm. La molla è fissata all'estremità inferiore di una rampa inclinata di 60.0° sull'orizzontale. Determinare quanto è lo spostamento del blocco

verso l'alto prima di giungere momentaneamente in quiete, (a) se non c'è attrito tra blocco e rampa e (b) se il coefficiente di attrito dinamico è 0.400.

48. Una particella di 0.400 kg scivola su una pista orizzontale circolare di raggio 1.50 m. Essa ha una velocità iniziale di 8.00 m/s . Dopo un giro, la sua velocità si riduce a 6.00 m/s a causa dell'attrito. (a) Calcolare l'energia perduta in un giro per attrito. (b) Determinare il coefficiente d'attrito dinamico. (c) Qual è il numero totale di giri che fa la particella prima di fermarsi?

49. Il sistema per lanciare la pallina in un flipper è costituito da una molla di costante elastica 1.20 N/cm (Fig. P6.49). La superficie sulla quale si muove la pallina è inclinata di 10.0° rispetto all'orizzontale. Se la molla è inizialmente compressa di 5.00 cm, determinare la velocità con cui viene lanciata la pallina, di massa 100 g, quando abbandona il pistoncino. L'attrito e la massa del pistoncino sono trascurabili.

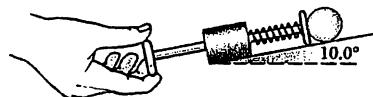


Figura P6.49

50. In una molecola biatomica, gli atomi che la costituiscono esercitano forze attrattive l'uno sull'altro a grandi distanze e forze repulsive a brevi distanze. Per molte molecole, la legge di Lennard-Jones fornisce una buona approssimazione per il modulo di queste forze:

$$F = F_0 \left[2 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^7 \right]$$

dove r è la distanza da centro a centro fra gli atomi nella molecola, σ è un parametro di lunghezza, ed F_0 è la forza quando $r = \sigma$. Per una molecola di ossigeno, i valori di F_0 e σ sono $F_0 = 9.60 \times 10^{-11} \text{ N}$ e $\sigma = 3.50 \times 10^{-10} \text{ m}$. Determinare il lavoro compiuto da questa forza da $r = 4.00 \times 10^{-10} \text{ m}$ a $r = 9.00 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Si supponga che un'auto possa essere simulata da un cilindro che si muove con una velocità v , come in Figura P6.51. In un intervallo di tempo Δt , una colon-

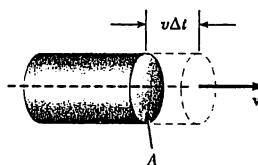


Figura P6.51

$$\Delta m = V \cdot e \quad \text{Av = } \frac{1}{2} \rho A v^2 \cdot t \quad \text{F.s} \Rightarrow \frac{1}{2} \rho A v^2 \cdot t \cdot \frac{1}{2} \rho A v^2 \cdot t$$

na di aria di massa Δm deve essere spostata di un tratto $v\Delta t$ e quindi le deve essere comunicata una energia cinetica $\frac{1}{2}(\Delta m)v^2$. Seguendo questo modello, mostrare che la potenza dissipata a causa della resistenza dell'aria è $\frac{1}{2}\rho Av^3$ e che la forza di resistenza è $\frac{1}{2}\rho Av^2$, con ρ densità dell'aria.

Problemi al calcolatore

- S1. Quando a una molla vengono sospesi pesi diversi, l'allungamento della molla è diverso come viene mostrato nella tabella che segue. (a) Si usi il foglio elettronico per fare un grafico della lunghezza della molla in funzione della forza applicata. Usare il programma di analisi dei minimi quadrati (contenuto nel foglio elettronico) per determinare la migliore retta (*best fit*) che interpoli tutti i dati. (Puoi anche non usare tutti i punti dati). (b) Dalla pendenza della retta ottenuta con i minimi quadrati, trovare la costante elastica della molla k . (c) Se la molla è estesa di 105 mm, quale forza esercita sul peso ad essa collegato?

Risposte ai problemi concettuali

171

$F(N)$	$L(mm)$	$F(N)$	$L(mm)$
2.0	15	14	112
4.0	32	16	126
6.0	49	18	149
8.0	64	20	175
10	79	22	190
12	98		

- S2. Una particella di 0.178 kg si muove lungo l'asse x da $x = 12.8$ m a $x = 23.7$ m sotto l'azione di una forza

$$F = \frac{375}{x^2 + 3.75x}$$

dove F è espressa in newton e x in metri. Utilizzare un metodo di integrazione numerica e adattare il foglio elettronico per determinare il lavoro totale svolto da questa forza durante questo spostamento. I calcoli dovrebbero avere la precisione di almeno il 2%.

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Poiché non vi è moto, la fune non subisce alcuno spostamento. Quindi, nessun lavoro viene svolto su di essa. Per la stessa ragione, nessun lavoro viene compiuto su coloro che tirano o sul suolo. Un lavoro viene svolto soltanto dentro i corpi dei giocatori. Per esempio, il cuore di ciascun giocatore applica una forza sul sangue per farlo scorrere attraverso il corpo.
- Con una rampa più lunga sarà necessaria una forza minore ma essa dovrà agire per una distanza maggiore svolgendo complessivamente lo stesso lavoro. Supponiamo che un frigorifero venga spinto sui rulli su per la rampa a velocità costante. La forza normale non compie lavoro poiché agisce a 90° rispetto alla direzione del moto. Il lavoro dovuto alla gravità è proprio il peso del frigorifero moltiplicato per l'altezza di cui si sposta moltiplicato ($\cos 180^\circ$), ossia $W_g = -mgh$. Quindi, i trasportatori devono compiere un lavoro sul frigorifero pari a mgh , qualsiasi lunghezza abbia la rampa.
- Se trascuriamo gli effetti dell'attrito volvente sugli pneumatici della macchina, allora viene compiuto lo stesso lavoro sia percorrendo i tornanti sia andando su direttamente, poiché, nei due casi, il peso della macchina viene spostato in alto contro la gravità della stessa distanza verticale. Se includiamo l'attrito, allora si compirebbe maggior lavoro lungo la strada con i tornanti, poiché la distanza lungo la quale agirebbe la forza d'attrito sarebbe maggiore. Perché, allora, usiamo i tornanti? La risposta viene fuori tenendo conto della forza necessaria non del lavoro. La forza applicata dal motore, necessaria per seguire una salita più moderata, è molto minore di quella necessaria per salire direttamente. Le strade che andassero direttamente su per le montagne richiederebbero una riprogettazione dei motori affinché fossero capaci di applicare forze molto maggiori. Ciò è simile alla facilità con cui gli oggetti pesanti vengono spostati sui rulli lungo una rampa fino al camion in confronto al sollevarli direttamente dal suolo.
- Se la molla è tagliata a metà ed estesa della stessa quantità, ciascuna coppia di spire adiacenti dovrà, ora, allontanarsi del doppio rispetto alla estensione originale. Quindi, la forza applicata dalla molla aumenta del doppio per una data estensione. Ciò conduce a un aumento di un fattore 2 della costante elastica della molla. Pertanto, se la molla tagliata viene estesa dello stesso ammontare, è necessario un lavoro due volte maggiore.
- Focalizziamo il nostro sistema sul libro. Tu compi sicuramente un certo lavoro applicando una forza verso l'alto per sollevare il libro. Ma vi è un'altra forza che agisce sul libro: la gravità. Il lavoro svolto dalla gravità è negativo, poiché la forza di gravità è orientata nel verso opposto allo spostamento. Assumendo che tu abbia sollevato il libro molto lentamente, la forza che tu hai applicato è approssimativamente uguale in modulo al peso del libro. Quindi, il lavoro positivo compiuto da te e quello negativo svolto dalla gravità si elidono. Pertanto, non c'è un lavoro totale svolto, e non c'è variazione di energia cinetica: il teorema dell'energia cinetica è soddisfatto. Se condieriamo come sistema sia il libro che la Terra, allora vi è un lavoro netto compiuto da te sul sistema. Questo lavoro si manifesta nel

sistema come energia potenziale, la quale sarà trattata nel Capitolo 7.

6. Quando una persona scende le scale deve fermare il moto dell'intero corpo ogni gradino. Ciò richiede un lavoro compiuto dai muscoli. Il lavoro svolto dai muscoli è negativo, poiché le forze applicate sono opposte agli spostamenti che determinano il moto del corpo. Un lavoro negativo significa un trasferimento di energia fuori dai muscoli (dalla riserva di energia tratta dal cibo consumato dalla persona che cammina). Quando si cammina orizzontalmente, il corpo può essere considerato in moto approssimativamente

con velocità costante, solo i piedi e le ginocchia partono e si fermano. Quindi, viene trasferita maggiore energia quando si porta a riposo l'intero corpo scendendo le scale piuttosto che camminando.

7. Poiché i periodi di tempo sono gli stessi per ambedue le macchine, dobbiamo soltanto confrontare il lavoro svolto. Poiché la macchina sportiva, alla fine dell'intervallo di tempo, si muove con velocità doppia rispetto al vecchio modello, essa ha un'energia cinetica quattro volte maggiore. Quindi, secondo il teorema dell'energia cinetica, viene svolto un lavoro quattro volte maggiore, e il motore deve fornire una potenza quadrupla.

7

Energia potenziale e conservazione dell'energia

Nel Capitolo 6 abbiamo introdotto il concetto di energia cinetica, la quale è associata al moto di un oggetto. In questo capitolo introduciamo un'altra forma di energia meccanica, chiamata *energia potenziale*, la quale è associata alla posizione o configurazione di un sistema. L'energia potenziale di un sistema si può immaginare come energia immagazzinata che può essere convertita in energia cinetica o altre forme di energia.

Il concetto di energia potenziale può essere adoperato solo quando si considera una particolare classe di forze chiamate *forze conservative*. Solo quando forze conservative interne, come forze gravitazionali o elastiche, agiscono su un sistema, l'energia cinetica guadagnata (o perduta) dal sistema

ma quando i suoi componenti variano la loro posizione relativa è compensata da un'uguale perdita (o guadagno) di energia potenziale.



◀ Le Twin Falls nell'isola di Kauai, Hawaii. L'energia potenziale gravitazionale del sistema acqua-Terra quando l'acqua si trova sulla sommità delle cascate viene convertita in energia cinetica dell'acqua in basso. In molti posti, questa energia meccanica viene utilizzata per produrre energia elettrica. (Bruce Byers, FPG)

- 7.1 Energia potenziale
- 7.2 Forze conservative e non conservative
- 7.3 Forze conservative ed energia potenziale
- 7.4 Conservazione dell'energia meccanica
- 7.5 Lavoro svolto da forze non conservative
- 7.6 Conservazione dell'energia in generale
- 7.7 Energia potenziale gravitazionale rivisitata
- 7.8 Diagrammi di energia e stabilità dell'equilibrio (Facoltativo)

7.1 • ENERGIA POTENZIALE

Nel Capitolo 6 abbiamo visto che un oggetto dotato di energia cinetica può compiere un lavoro su un altro oggetto come viene illustrato dal caso del martello che batte su un chiodo nel muro. Adesso vedremo che un oggetto può compiere un lavoro grazie all'energia che gli deriva dalla sua posizione nello spazio.

Quando un oggetto cade in un campo gravitazionale, il campo esercita su di esso una forza nella direzione del suo moto, compiendo un lavoro e, quindi, aumentandone l'energia cinetica. Considerate un mattone lasciato cadere dalla posizione di riposo direttamente sopra un chiodo appuntato in un'asse che giace orizzontalmente sul terreno. Quando il mattone viene lasciato, cade verso il suolo guadagnando velocità e quindi energia cinetica. L'energia potenziale del sistema mattone-Terra viene convertita in energia cinetica quando il mattone cade. Quando il mattone raggiunge il suolo, esso compie lavoro sul chiodo conficcandolo nell'asse. L'energia potenziale di un sistema costituito da qualsiasi oggetto e la Terra si chiama **energia potenziale gravitazionale**.

Deriviamo adesso un'espressione per l'energia potenziale gravitazionale associata a un oggetto localizzato in un dato punto dello spazio. Per fare ciò, consideriamo un blocco di massa m ad un'altezza iniziale y_i dal suolo, come in Figura 7.1. Trascurando la resistenza dell'aria, quando il blocco cade, la sola forza che compie un lavoro su di esso è la forza gravitazionale mg . Il lavoro svolto dalla forza gravitazionale quando il blocco subisce uno spostamento s è dato dal prodotto della forza diretta verso il basso mg per lo spostamento, ossia

$$W_g = (mg) \cdot s = (-mgj) \cdot [(y_f - y_i)j] = mg(y_i - mg)y_f$$

Rappresentiamo ora la grandezza $mg(y_i - mg)y_f$ come l'**energia potenziale gravitazionale**, U_g :

$$U_g = mg(y_i - mg)y_f \quad [7.1]$$

In questa rappresentazione, l'energia potenziale gravitazionale associata ad un oggetto in qualsiasi punto dello spazio è il prodotto del peso dell'oggetto per la sua coordinata verticale. L'origine del suo sistema di coordinate può essere individuata sulla superficie della Terra o in qualsiasi altro punto conveniente.

Se si sostituisce U a $mg(y_i - mg)y_f$ nell'espressione per W_g avremo

$$W_g = U_i - U_f \quad [7.2]$$

Da questo risultato, vediamo che il lavoro compiuto su qualsiasi oggetto dalla forza di gravità – cioè l'energia trasferita all'oggetto dal campo gravitazionale – è uguale al valore iniziale dell'energia potenziale meno il valore finale dell'energia potenziale.

Le unità di energia potenziale gravitazionale sono le stesse di quelle del lavoro. Cioè, l'energia potenziale può essere espressa in joule o erg. L'energia potenziale, come il lavoro e l'energia cinetica, è una grandezza scalare.

Da notare che l'energia potenziale gravitazionale associata ad un oggetto dipende solo dall'altezza verticale dell'oggetto sulla superficie della Terra. Da questo risultato, vediamo che la stessa quantità di lavoro viene fatta su un oggetto sia che questo cada verticalmente al suolo, sia che esso parta dallo stesso punto e scivoli giù al suolo lungo un piano inclinato privo di attrito. Da notare

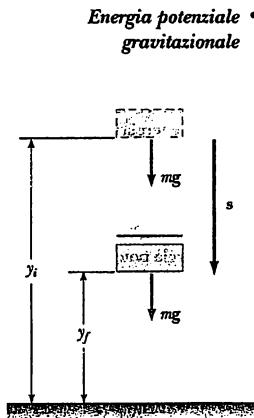


Figura 7.1 Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale quando il blocco cade da y_i a y_f è uguale a $mg(y_i - mg)y_f$.

anche che l'Equazione 7.1 è valida solo per oggetti vicini alla superficie della Terra dove g è approssimativamente costante.

Nei problemi che riguardano l'energia potenziale gravitazionale, è sempre necessario scegliere un punto in cui porre l'energia potenziale gravitazionale uguale a zero. La scelta dello zero è completamente arbitraria, perché la grandezza importante è la *differenza* di energia potenziale e questa differenza è indipendente dalla scelta del livello zero.

È spesso conveniente scegliere la superficie della Terra come posizione di riferimento per l'energia potenziale zero, ma non è essenziale. Spesso, lo svolgimento del problema suggerisce di utilizzare un livello conveniente.

Fisica ragionata 1

Gli ascensori che vengono sollevati tramite un cavo hanno un contrappeso, come viene mostrato in Figura 7.2. L'ascensore e il contrappeso sono collegati dal cavo che passa attraverso una carrucola. Qual è la funzione del contrappeso?

Ragionamento Senza contrappeso, il motore dell'ascensore dovrebbe poter sollevare il peso dell'ascensore e degli occupanti. Ciò rappresenterebbe un grande aumento dell'energia potenziale gravitazionale, che significherebbe una grande spesa di energia da parte del motore. Con il contrappeso, quando l'ascensore sale il contrappeso scende, quindi, il centro di massa del sistema, composto dall'ascensore e dal contrappeso, si muove soltanto di una breve distanza intorno alla zona centrale della colonna verticale. In questo modo, si ha una minore variazione dell'energia potenziale del sistema rispetto a quello senza contrappeso. Nel caso particolare di un ascensore e degli occupanti che abbiano la stessa massa del contrappeso, il centro di massa si trova a metà strada fra essi e non si muove affatto quando l'ascensore varia la sua altezza. In questo caso, una volta che l'ascensore si è messo in moto, il motore non è più necessario: il sistema continuerà a muoversi come stabilito dalla prima legge di Newton (finché si trascura l'attrito). Il motore è di nuovo necessario per fermare l'ascensore al piano desiderato. Quindi, la presenza del contrappeso riduce l'energia richiesta al motore: invece di dover tirare l'ascensore per tutto il percorso, il motore è necessario soltanto per farlo partire e per fermarlo, per vincere gli attriti, e per tener conto di ogni differenza di massa fra il contrappeso e l'ascensore associata al numero di passeggeri sull'ascensore.

ESERCIZIO 1 Qual è l'energia potenziale gravitazionale, relativa al suolo, di una palla da baseball di 0.15 kg alla sommità di una costruzione alta 100 m? Risposta 147 J.

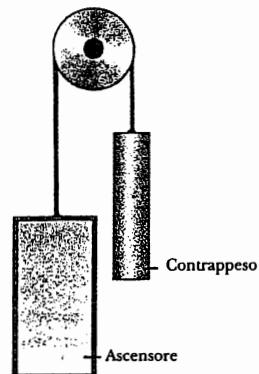


Figura 7.2 (Fisica ragionata 1)



7.2 • FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

Le forze in natura si possono dividere in due categorie: conservative e non conservative. Descriveremo separatamente in questo paragrafo le proprietà di entrambe.

Forze conservative

Una forza è conservativa se il lavoro svolto da questa forza su una particella che si muove tra due punti qualunque è indipendente dalla traiettoria seguita dalla particella tra i punti. Il lavoro svolto su una particella da una forza conservativa dipende solo dalle coordinate iniziali e finali della particella. Una forza conservativa può anche essere definita in un secondo modo. Una forza è conservativa se il lavoro che compie su un oggetto che si muove in un percorso chiuso è zero.

- Definizione di forza conservativa

La forza di gravità è conservativa. Come abbiamo visto nel precedente paragrafo il lavoro fatto dalla forza di gravità su un oggetto che si sposta tra due punti vicini alla superficie della Terra è

$$W_g = mg y_f - mg y_i$$

Da ciò, vediamo che W_g dipende solo dalle coordinate iniziali e finali dell'oggetto ed è quindi indipendente dal percorso. Inoltre, W_g è zero quando l'oggetto si muove in un percorso chiuso (dove $y_i = y_f$).

Possiamo associare una funzione di energia potenziale a una forza conservativa. Nel paragrafo precedente, la funzione energia potenziale associata alla forza di gravità era

$$U_g = mg y$$

Le funzioni di energia potenziale possono essere definite solo per forze conservative. In generale, il lavoro, W_c , svolto su un oggetto da una forza conservativa è dato dal valore iniziale dell'energia potenziale associata all'oggetto meno il valore finale:

$$W_c = U_i - U_f \quad [7.3]$$

Un altro esempio di forza conservativa è la forza di una molla che agisce su un blocco collegato ad essa, dove la forza di richiamo è data da $F_m = -kx$. Nel capitolo precedente (Eq. 6.15), abbiamo trovato che il lavoro svolto dalla molla è

$$W_m = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

dove la coordinata iniziale e finale del blocco è misurata dalla posizione di equilibrio del blocco, $x = 0$. Vediamo che W_m dipende solo dalla coordinata x iniziale e finale dell'oggetto ed è zero per qualunque percorso chiuso. Quindi, la forza della molla è conservativa. L'**energia potenziale elastica** associata alla forza della molla è definita da

$$U_m = \frac{1}{2} kx^2 \quad [7.4]$$

Energia potenziale immagazzinata in una molla

dove x è misurato dalla posizione di riposo della molla. L'energia potenziale elastica si può pensare come l'energia immagazzinata nella molla deformata (che sia compressa o allungata dalla sua posizione di equilibrio). Per visualizzare ciò, bisogna considerare la Figura 7.3a, che mostra una molla non deformata su una superficie orizzontale priva di attrito. Quando il blocco viene spinto verso la molla (Fig. 7.3b), comprimendola di una distanza x , l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla è $kx^2/2$. Quando il blocco viene rilasciato, la molla scatta verso la sua lunghezza originale e l'energia potenziale elastica viene trasformata in energia cinetica del blocco (Fig. 7.3c). L'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla è nulla ogni qualvolta la molla è indeformata ($x = 0$). L'energia è immagazzinata nella molla solo quando la molla viene allungata o compressa. Inoltre, l'energia potenziale elastica è massima quando la molla raggiunge la sua massima estensione o compressione (cioè, quando $|x|$ è un massimo). Infine, dal momento che l'energia potenziale elastica è proporzionale a x^2 , vediamo che in una molla deformata U_m è sempre positiva. Se la molla e l'oggetto vengono considerati insieme come un sistema, nessun lavoro viene compiuto quando la molla varia la sua lunghezza perché le forze sono interne.

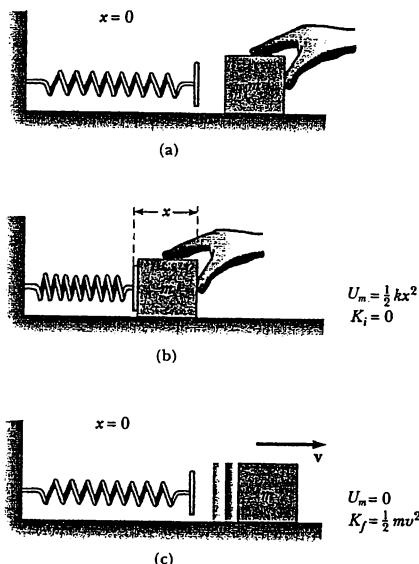


Figura 7.3 Un blocco di massa m su una superficie orizzontale priva di attrito viene spinto contro una molla e successivamente rilasciato. Se x è la compressione della molla come in (b), l'energia potenziale elastica della molla è $\frac{1}{2}kx^2$. Questa energia viene trasferita al blocco sotto forma di energia cinetica come in (c).

- **Definizione di forza non conservativa**

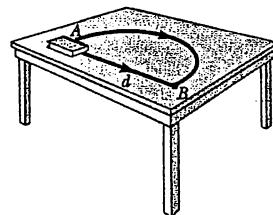


Figura 7.4 La perdita di energia meccanica dovuta all'attrito dipende dal percorso seguito quando il libro si sposta da A a B , e quindi l'attrito è una forza non conservativa. La perdita di energia meccanica è maggiore lungo il percorso in rosso rispetto a quello in blu.

7.3 • FORZE CONSERVATIVE ED ENERGIA POTENZIALE

Nel precedente paragrafo abbiamo trovato che il lavoro svolto da una forza conservativa non dipende dalla traiettoria seguita dalla particella ed è indipendente dalla velocità della particella. Il lavoro svolto è una funzione solo delle coordina-

te iniziali e finali della particella. Per questi motivi, possiamo definire una funzione **energia potenziale** tale che il lavoro svolto sia uguale alla diminuzione dell'energia potenziale. Cioè, il lavoro svolto da una forza conservativa \mathbf{F} quando la particella si muove lungo l'asse delle x è¹

Lavoro compiuto da una forza conservativa

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U = U_i - U_f \quad [7.5]$$

Cioè, il lavoro compiuto da una forza conservativa è uguale alla variazione, cambiata di segno, di energia potenziale associata a quella forza, dove la variazione di energia potenziale è definita come $\Delta U = U_f - U_i$. Per esempio, il lavoro W_c , svolto dal campo gravitazionale su un oggetto, quando questo cade nel campo, è $U_i - U_f$, positivo, mostrando che è stata trasferita energia dal campo gravitazionale all'oggetto. Tale energia può apparire come energia cinetica di caduta dell'oggetto o può essere trasferita a qualcos'altro. Si può anche esprimere l'Equazione 7.5 come

Variazione di energia potenziale

$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad [7.6]$$

dove F_x è la componente di \mathbf{F} nella direzione dello spostamento: \mathbf{F} è la forza esercitata dal campo sull'oggetto. Quindi ΔU è negativo quando F_x e dx sono nello stesso verso, come quando un oggetto viene abbassato in un campo gravitazionale o quando una molla spinge un corpo verso la posizione di equilibrio. Il termine **energia potenziale** implica che un oggetto abbia virtualmente la possibilità, ossia la capacità, di guadagnare energia cinetica o di compiere lavoro quando viene rilasciato in una qualche posizione sotto l'azione della gravità.

È spesso conveniente stabilire una particolare posizione, x_i , come punto di riferimento e quindi misurare tutte le differenze di energia potenziale rispetto a questo punto. Con tale convenzione, possiamo definire la funzione **energia potenziale** come

$$U_f = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i \quad [7.7]$$

Inoltre, come discusso in precedenza, il valore di U_i è spesso posto uguale a zero in corrispondenza del punto di riferimento scelto arbitrariamente. In realtà non è importante il valore che si assegna a U_i , in quanto esso cambia la U_f solo di una costante, ed è soltanto la *variazione* di energia potenziale che ha significato fisico. Se la forza conservativa è nota come funzione della posizione, si può usare l'Equazione 7.7 per calcolare la variazione di energia potenziale di un corpo che si muove da x_i a x_f . È interessante notare che nel caso unidimensionale, una forza è *sempre* conservativa se è funzione solo della posizione. In generale ciò non è vero per moti che implicano spostamenti a due o tre dimensioni.

La quantità di energia meccanica dissipata da una forza non conservativa dipende dalla traiettoria quando una particella si muove da una posizione ad un'altra e potrebbe anche dipendere dalla velocità della particella o da altre grandezze. Quindi, poiché il lavoro svolto da una forza non conservativa non è semplicemente una funzione delle coordinate iniziali e finali, concludiamo che non vi è una *funzione energia potenziale* associata a una forza non conservativa.

¹ Per un generico spostamento, il lavoro svolto in due o tre dimensioni è ancora uguale a $U_i - U_f$, dove $U = U(x, y, z)$. Ciò si scrive formalmente come $W = \int_I \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U_i - U_f$.

7.4 • CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Un oggetto posto ad un'altezza h dal pavimento non ha energia cinetica, ma, come abbiamo appreso in precedenza, ha associata una energia potenziale gravitazionale uguale a mgh , relativa al pavimento, se il campo gravitazionale è parte del sistema. Se l'oggetto viene abbandonato, esso cade sul pavimento; mentre esso cade, la sua velocità, e quindi la sua energia cinetica, aumentano mentre diminuisce l'energia potenziale. Se vengono ignorati fattori come la resistenza dell'aria, tutta l'energia potenziale che l'oggetto perde quando si sposta verso il basso si trasforma in energia cinetica. In altri termini, la somma dell'energia cinetica e potenziale, detta *energia meccanica E*, resta costante nel tempo. Questo è un esempio del principio di conservazione dell'energia meccanica. Nel caso di oggetti in caduta libera, questo principio ci dice che qualsiasi aumento (o diminuzione) dell'energia potenziale è accompagnato da una uguale diminuzione (o aumento) dell'energia cinetica.

Poiché l'energia meccanica totale E è definita come la somma dell'energia cinetica e potenziale, possiamo scrivere

$$E = K + U \quad [7.8]$$

- *Energia meccanica totale*

Quindi, possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica nella forma $E_i = E_f$ oppure

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad [7.9]$$

- *Conservazione dell'energia meccanica*

Più formalmente, la conservazione dell'energia richiede che l'energia meccanica totale di un sistema resti costante in qualsiasi sistema isolato di oggetti che interagiscano solo mediante forze conservative. È importante notare che l'Equazione 7.9 è valida a condizione che nessuna forma di energia sia aggiunta o rimossa dal sistema. Quindi, non devono esserci forze non conservative all'interno del sistema.

Poiché l'energia meccanica E resta costante nel tempo, $dE/dt = 0$. Calcolando la derivata dell'Equazione 7.8 rispetto al tempo,

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad [7.10]$$

Poiché $K = \frac{1}{2}mv^2$, allora

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2}mv^2) = mv \frac{dv}{dt} = mva = F_x v$$

- *Un enunciato formale della conservazione dell'energia*

Applicando la regola delle funzioni composte (vedi App. B.6) a dU/dt , abbiamo

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dU}{dx} \right) v$$

- *Relazione tra forza conservativa ed energia potenziale*

Sostituendo tali espressioni per dK/dt e dU/dt nell'Equazione 7.10 abbiamo

$$F_x v + \left(\frac{dU}{dx} \right) v = 0$$

$$F_x = - \frac{dU}{dx} \quad [7.11]$$

Cioè, la forza conservativa interna che agisce fra parti del sistema è uguale alla derivata cambiata di segno dell'energia potenziale associata al sistema.

Possiamo facilmente controllare tale relazione per le due espressioni già discusse. Nel caso della molla deformata, $U_m = \frac{1}{2} kx^2$ e, quindi,

$$F_m = -\frac{dU_m}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) = -kx$$

che corrisponde alla forza di richiamo esercitata dalla molla. Nel caso di un oggetto posto a distanza y al di sopra di un punto di riferimento, la funzione energia potenziale gravitazionale è data da $U_g = mgy$, e segue dalla Equazione 7.11 che $F_g = -mg$.

Vediamo ora che U è una funzione importante; da essa si può derivare la forza conservativa agente in ogni sistema. Inoltre, l'Equazione 7.11 può chiarire il fatto che non è importante aggiungere una costante all'energia potenziale, poiché la localizzazione del punto di riferimento è arbitraria.

L'Equazione 7.11 può anche essere scritta nella forma $dU = -F dx$; la quale quando viene integrata tra i valori della posizione iniziale e finale, conduce a

$$U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F dx \quad [7.12]$$

Tale risultato, identico all'Equazione 7.6, ci dice che se la forza conservativa F che agisce su un oggetto all'interno del sistema è nota come funzione di x , possiamo calcolare la differenza di energia potenziale associata all'oggetto tra le posizioni iniziale e finale.

Se più forze conservative agiscono sull'oggetto, allora a ciascuna forza è associata una funzione energia potenziale. In tal caso, applichiamo la legge di conservazione dell'energia per il sistema nella forma

$$K_i + \sum U_i = K_f + \sum U_f \quad [7.13]$$

dove il numero dei termini delle due somme è uguale al numero delle forze conservative presenti. Per esempio, se una massa collegata ad una molla oscilla verticalmente, agiscono su di essa due forze conservative: la forza della molla e la forza di gravità. (Discuteremo in un esempio questa situazione).

Se la forza di gravità è la sola forza che agisce sul corpo, allora l'energia meccanica totale del corpo è costante. Quindi, la legge di conservazione dell'energia per un corpo in caduta libera si può scrivere

$$\frac{1}{2} mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2} mv_f^2 + mgy_f \quad [7.14]$$

- Conservazione della energia meccanica**
- Conservazione della energia meccanica per un corpo in caduta libera**

Fisica ragionata 2

Dopo la laurea, per vivere, stai facendo un progetto di montagne russe. Progettisti una montagna russa nella quale un vagoncino viene tirato in cima a un pendio di altezza h e poi, partendo quasi da fermo, rotola giù liberamente dal pendio per risalire in cima al successivo pendio che si trova ad altezza $1.1h$. Farai carriera in questo lavoro?

Ragionamento La tua carriera non sarà probabilmente molto lunga, poiché queste montagne russe non funzioneranno! In cima al primo pendio, il trenino delle montagne russe, non ha energia cinetica, e ha un'energia potenziale gravitazionale associata alla quota h . Se raggiungesse la sommità del successivo pendio, esso avrebbe

be un'energia potenziale maggiore, quella associata alla quota $1.1h$. Ciò costituirebbe una violazione del principio di conservazione dell'energia meccanica. Se queste montagne russe venissero realmente costruite, il vagoncino, salendo per il secondo pendio, raggiungerebbe soltanto una quota h (trascurando gli effetti dell'attrito), si fermerebbe prima della sommità, e poi tornerebbe indietro rimanendo intrappolato fra i due picchi.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Discutere le trasformazioni di energia che avvengono durante il salto con l'asta rappresentato nella fotografia multiluce della Figura 7.5. Trascurare il moto rotazionale.



Figura 7.5 (Problema concettuale 1)
Fotografia multiluce di un salto con l'asta. Quante forme di energia si possono identificare in questa foto?
(© Harold E. Edgerton, per gent. conc. della Palm Press, Inc.)

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Tre palle identiche sono lanciate dalla sommità di un fabbricato, tutte con lo stesso modulo della velocità iniziale. La prima palla viene lanciata orizzontalmente, la seconda a un certo angolo al di sopra dell'orizzontale, e la terza a un certo angolo al di sotto dell'orizzontale come in Figura 7.6. Trascurando la resistenza dell'aria, descrivere il loro moto e confrontare il modulo delle loro velocità quando esse raggiungono il suolo.

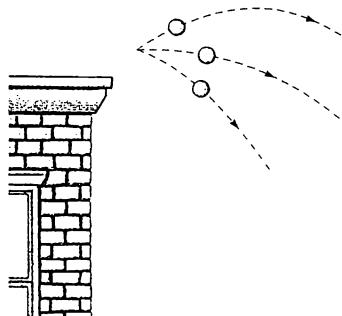


Figura 7.6 (Problema concettuale 2)
Tre palle identiche sono lanciate con lo stesso modulo della velocità iniziale dalla sommità di un fabbricato.

Esempio 7.1 Palla in caduta libera

Una palla di massa m cade da un'altezza h rispetto al suolo, come in Figura 7.7. (a) Trascurando la resistenza dell'aria, determinare la velocità della palla quando si trova a quota y rispetto al suolo.

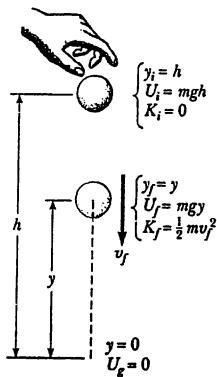


Figura 7.7 (Esempio 7.1) Una palla cade da un'altezza h rispetto al suolo. Inizialmente, l'energia totale è energia potenziale gravitazionale uguale a mgh relativa al suolo. A quota y l'energia totale è la somma dell'energia cinetica e potenziale.

Ragionamento Poiché la palla è in caduta libera, la sola forza agente è la forza gravitazionale. Quindi, possiamo usare il principio di conservazione dell'energia meccanica. Inizialmente, la palla ha energia potenziale e non ha energia cinetica. Mentre cade, la sua energia

totale (la somma dell'energia cinetica e potenziale) si conserva ed è uguale alla sua energia potenziale iniziale.

Soluzione Quando la palla viene lasciata da ferma a un'altezza h sopra il suolo, la sua energia cinetica è $K_i = 0$ e la sua energia potenziale è $U_i = mgh$, dove la coordinata y è misurata rispetto al suolo. Quando la palla si trova a una quota y rispetto al suolo, la sua energia cinetica è $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ e la sua energia potenziale relativa al suolo è $U_f = mgy$. Applicando l'Equazione 7.9, otteniamo

$$\begin{aligned} K_i + U_i &= K_f + U_f \\ 0 + mgh &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh \\ v_f^2 &= 2g(h-y) \\ v_f &= \sqrt{2g(h-y)} \end{aligned}$$

(b) Determinare la velocità della palla in y se essa possiede una velocità iniziale v_i alla quota iniziale h .

Soluzione In questo caso, l'energia iniziale comprende l'energia cinetica pari a $\frac{1}{2}mv_i^2$ e l'Equazione 7.14 dà

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy \\ v_f^2 &= v_i^2 + 2g(h-y) \\ v_f &= \sqrt{v_i^2 + 2g(h-y)} \end{aligned}$$

Si noti che questo risultato è consistente con un'espressione ricavata dalla cinematica $v_f^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$, dove $y_0 = h$. Inoltre, questo risultato è ancora valido nel caso in cui la velocità iniziale formi un angolo con l'orizzontale (situazione del proiettile).

Esempio 7.2 Un modo di sollevare un oggetto

Due blocchi sono collegati per mezzo di una fune di massa trascurabile che passa attraverso una carrucola senza attrito e un piolo liscio, come in Figura 7.8. Un estremo della fune è collegato alla massa $m_1 = 3.00 \text{ kg}$ che si trova alla distanza $R = 1.20 \text{ m}$ dal piolo. L'altro estremo della fune è collegato al blocco di massa $m_2 = 6.00 \text{ kg}$ fermo sul tavolo. Da quale angolo θ (misurato rispetto alla verticale) dovrebbe essere rilasciata la massa di 3.00 kg per poter iniziare a sollevare appena dal tavolo il blocco di 6.00 kg ?

Ragionamento È necessario usare diversi concetti per risolvere questo problema. Primo, usiamo la conservazione dell'energia per trovare la velocità della massa di 3.00 kg nel punto più basso della sua traiettoria circolare in funzione di θ e del raggio della traiettoria. Poi, applichiamo la seconda legge di Newton alla massa di 3.00 kg

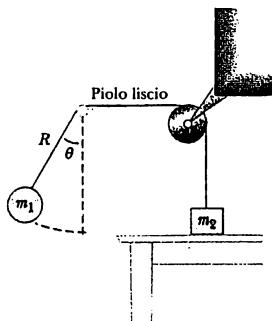


Figura 7.8 (Esempio 7.2)

che si trova nella parte più bassa della sua traiettoria per trovare la tensione in funzione dei parametri dati. Infine, notiamo che il blocco di 6.00 kg viene sollevato dal tavolo quando la forza verso l'alto esercitata su di esso dalla fune supera la forza di gravità agente sul blocco. Questo procedimento ci consente di trovare l'angolo richiesto.

Soluzione Applicando la conservazione dell'energia alla massa di 3.00 kg si ottiene

$$(1) \quad K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + m_1 g y_i = \frac{1}{2} m_1 v^2 + 0$$

dove v è la velocità della massa di 3.00 kg nel punto più basso della sua traiettoria. (Si noti che $K_i = 0$, poiché la massa di 3.00 kg parte da ferma e $U_i = 0$, poiché il punto più basso della circonferenza è il livello zero dell'energia potenziale). Dalla geometria della Figura 7.8, vediamo che $y_i = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$. Usando questa relazione nella (1) si ottiene

$$(2) \quad v^2 = 2gR(1 - \cos \theta)$$

Applichiamo, ora, la seconda legge di Newton alla massa di 3.00 kg quando si trova nel punto più basso del cammino circolare:

$$T - m_1 g = m_1 \frac{v^2}{R}$$

$$(3) \quad T = m_1 g + m_1 \frac{v^2}{R}$$

Questa stessa forza viene trasmessa al blocco di 6.00 kg, e se esso deve essere appena sollevato dal tavolo, la forza normale su di esso diventa zero, e noi poniamo $T = m_2 g$. Usando questa condizione, insieme alla (2) e alla (3), otteniamo

$$m_2 g = m_1 g + m_1 \frac{2gR(1 - \cos \theta)}{R}$$

Risolvendo rispetto a θ , e sostituendo i valori dei parametri dati, abbiamo

$$\cos \theta = \frac{3m_1 - m_2}{2m_1} = \frac{3(3.00 \text{ kg}) - 6.00 \text{ kg}}{2(3.00 \text{ kg})} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

ESERCIZIO 2 Se l'angolo iniziale è $\theta = 40.0^\circ$, calcolare la velocità della massa di 3.00 kg e la tensione della fune quando la massa di 3.00 kg si trova nel punto più basso della sua traiettoria circolare. Risposta 2.35 m/s; 43.2 N

ESERCIZIO 3 Una particella di 4.0 kg si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una sola forza conservativa. Se il lavoro compiuto sulla particella quando essa si muove dal punto $x = 2.0 \text{ m}$ a $x = 5.0 \text{ m}$ è 80.0 J, calcolare (a) la variazione della sua energia cinetica, (b) la variazione della sua energia potenziale, e (c) la sua velocità nel punto $x = 5.0 \text{ m}$ se parte da ferma in $x = 2.0 \text{ m}$. Risposta (a) 80.0 J (b) -80.0 J (c) 6.32 m/s

ESERCIZIO 4 Un razzo viene lanciato a un angolo di 53° sull'orizzontale da una quota h con una velocità v_0 . Usare il metodo energetico per trovare la sua velocità quando la sua quota è $h/2$. Risposta $v = \sqrt{v_0^2 + gh}$

7.5 • LAVORO SVOLTO DA FORZE NON CONSERVATIVE

Come abbiamo visto, se le forze che agiscono su un sistema sono conservative, l'energia meccanica del sistema si conserva. Per contro, se qualcuna delle forze agenti sul sistema non è conservativa, l'energia meccanica del sistema non si conserva. Esaminiamo due tipi di forze non conservative: una forza applicata e la forza d'attrito dinamico.

Lavoro svolto da una forza applicata

Quando si solleva un libro di una certa altezza applicando su di esso una forza, la forza che si applica compie un lavoro W_{app} sul libro, e la forza di gravità compie un lavoro W_g sul libro. Se consideriamo il libro come una particella, allora il lavoro totale compiuto sul libro è correlato alla variazione della sua energia cinetica per mezzo del teorema dell'energia cinetica dato dall'Equazione 6.19:

$$W_{app} + W_g = \Delta K$$

[7.15]

Poiché la forza di gravità è conservativa, possiamo usare l'Equazione 7.2 per esprimere il lavoro compiuto dalla forza di gravità in funzione della variazione dell'energia potenziale gravitazionale, ossia $W_g = -\Delta U$. Sostituendo questa nell'Equazione 7.15, abbiamo

$$W_{app} = \Delta K + \Delta U \quad [7.16]$$

Si noti che il secondo membro di questa equazione esprime la variazione dell'energia meccanica del sistema libro-Terra. Questo risultato afferma che la forza applicata trasferisce energia al sistema sotto forma di energia cinetica del libro ed energia potenziale gravitazionale del sistema libro-Terra. Quindi, concludiamo che se un oggetto è parte di un sistema, allora una forza applicata può trasferire energia entro o fuori il sistema.

Situazioni che coinvolgono l'attrito dinamico

L'attrito dinamico è un esempio di una forza non conservativa. Se un libro è dotato di una certa velocità iniziale su una superficie orizzontale con attrito, come in Figura 7.9, la forza d'attrito dinamico che agisce sul libro si oppone al suo moto e compie un lavoro negativo. Il libro rallenta e si ferma dopo uno spostamento s . La forza d'attrito fa diminuire l'energia cinetica del libro trasformando l'energia in energia termica (interna) del libro e di una parte della superficie orizzontale. Si noti che soltanto una parte dell'energia cinetica del libro viene trasformata in energia termica del libro. Il resto si trasferisce sotto forma di energia termica dal libro alla superficie.

Mentre il libro in Figura 7.9 si muove lungo il percorso s , la sola forza che compie lavoro è la forza d'attrito dinamico. In questa situazione, possiamo applicare l'Equazione 7.16, dove $\Delta U = 0$ e notiamo che la forza d'attrito dinamico è nel verso opposto allo spostamento. Quindi, vediamo che l'ammontare di cui la forza d'attrito fa diminuire l'energia cinetica è $-f_d s$, ossia

$$\Delta K = -f_d s \quad [7.17]$$

Se il libro si muove lungo un piano inclinato con attrito, allora si verifica pure una variazione di energia potenziale gravitazionale, e $-f_d s$ rappresenta l'ammontare di cui la forza d'attrito dinamico riduce l'energia meccanica del sistema $E = K + U$. In questi casi,

$$\Delta K + \Delta U = -f_d s \quad [7.18]$$

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Una pietra viene lanciata in aria verticalmente. Trascurando l'attrito, essa impiega lo stesso tempo sia per salire che per scendere. Ciò sarà ancora vero in presenza di attrito dell'aria?

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Un conducente vuole fermare una macchina. Se blocca i freni, in modo che la macchina slitti, dove si trova l'energia e sotto quale forma, dopo che la macchina si ferma? Rispondere alle stesse domande nel caso in cui i freni non siano bloccati e le ruote continuino a girare.

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

• Conservazione dell'energia

Molti problemi in fisica si possono risolvere usando il principio di conservazione dell'energia. Si dovrebbe usare la seguente procedura ogni volta che si applica questo principio.

1. Definire il sistema, che può comprendere più di un oggetto e può includere o no campi, molle, o altre sorgenti di energia potenziale. Scegliere gli istanti per indicare il punto iniziale e finale.
2. Scegliere una posizione di riferimento per il punto zero dell'energia potenziale (sia gravitazionale che elastica), ed usarla per tutto lo svolgimento. Se sono presenti più forze conservative, scrivere un'espressione per l'energia potenziale associata a ciascuna forza.
3. Riconoscere eventuali forze non conservative presenti. Ricordare che se agiscono l'attrito o la resistenza dell'aria, l'energia meccanica *non si conserva*.
4. Se si conserva l'energia meccanica, si può scrivere l'energia totale iniziale E_i , in una determinata posizione, come la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale in tale posizione. Si scrive successivamente l'espressione per l'energia totale finale, $E_f = K_f + U_f$, nella posizione finale interessata. Poiché si conserva l'energia meccanica, le due energie totali si possono uguagliare per ricavare la grandezza incognita.
5. Se sono presenti forze non conservative (cosicché l'energia meccanica *non si conserva*), scrivere prima le espressioni per l'energia totale iniziale e per quella finale. In questo caso, la differenza fra l'energia meccanica totale finale e l'energia meccanica totale iniziale è uguale all'energia trasferita nel o dal sistema dalle forze non conservative. È utile pensare al teorema dell'energia cinetica come una combinazione delle Equazioni 7.16 e 7.18, scritte come

$$K_i + U_i + W_{\text{app}} - f_d s = K_f + U_f$$

Esempio 7.3 Cassa che scivola lungo una rampa

Una cassa di 3.00 kg scivola giù lungo una rampa di carico. La rampa è lunga 1 m, e inclinata di un angolo di 30° , come mostrato in Figura 7.10. La cassa parte da ferma dalla sommità, subisce una forza di attrito costante di 5.00 N, e continua a muoversi per un breve tratto in piano sul pavimento. Usare il metodo energetico per determinare la velocità della cassa proprio mentre raggiunge la base della rampa.

Soluzione Poiché $v_i = 0$, l'energia cinetica iniziale è zero. Se la coordinata y è misurata dal fondo della rampa, allora $y_i = 0.50 \text{ m}$. Quindi, l'energia meccanica totale della cassa alla sommità è tutta quanta energia potenziale, data da

$$U_i = mg y_i = (3.00 \text{ kg}) (9.80 \text{ m/s}^2) (0.500 \text{ m}) = 14.7 \text{ J}$$

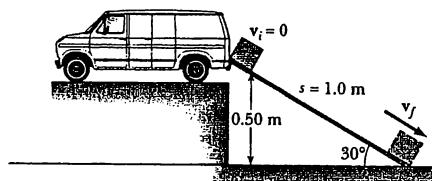


Figura 7.10 (Esempio 7.3) Una cassa scivola giù lungo un piano inclinato sotto l'azione della gravità. La sua energia potenziale diminuisce mentre la sua energia cinetica aumenta.

Quando la cassa raggiunge la base, l'energia potenziale gravitazionale del sistema è zero poiché la sua

quota è $y_f = 0$. Quindi, l'energia meccanica totale alla base è tutta quanta energia cinetica:

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Tuttavia, non possiamo dire, in questo caso, che $U_i = K_f$ poiché agisce una forza esterna non conservativa che sottrae energia meccanica al sistema: la forza d'attrito dinamico. In questo caso, $\Delta E = -f_d s$, dove s è lo spostamento lungo la rampa. (Si ricordi che le forze normali alla rampa non compiono lavoro sulla cassa poiché esse sono perpendicolari allo spostamento). Con $f_d = 5.00 \text{ N}$ ed $s = 1.00 \text{ m}$, abbiamo

$$\Delta E = -f_d s = (-5.00 \text{ N}) (1.00 \text{ m}) = -5.00 \text{ J}$$

Ciò indica che la diminuzione dell'energia meccanica è dovuta alla presenza della forza d'attrito dinamico che si oppone al moto. Poiché in questa situazione, $\Delta E = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i$, l'Equazione 7.18 dà

$$-f_d s = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = 14.7 \text{ J} - 5.00 \text{ J} = 9.70 \text{ J}$$

$$v_f^2 = \frac{19.4 \text{ J}}{3.00 \text{ kg}} = 6.47 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = 2.54 \text{ m/s}$$

ESERCIZIO 5 Usare la seconda legge di Newton per calcolare l'accelerazione della cassa sulla rampa, e le equazioni della cinematica per determinare la velocità finale della cassa. Risposta 3.23 m/s^2 ; 2.54 m/s .

ESERCIZIO 6 Se si considera la rampa priva di attrito, trovare la velocità finale della cassa e la sua accelerazione sulla rampa. Risposta 3.13 m/s ; 4.90 m/s^2 .

Esempio 7.4 Moto su una pista curva

Un bambino di massa m scende lungo uno scivolo irregolarmente curvo di altezza $h = 6.00 \text{ m}$, come in Figura 7.11. Il bambino parte da fermo dalla sommità. (a) Determinare la velocità del bambino nel punto più basso, assumendo che non vi sia attrito.

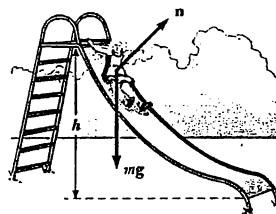


Figura 7.11 (Esempio 7.4) Se lo scivolo è senza attrito, la velocità del bambino alla fine di esso dipende solo dall'altezza dello scivolo.

Ragionamento Per prima cosa, si noti che la forza normale n non compie lavoro sul bambino poiché questa forza è sempre ortogonale ad ogni elemento dello spostamento. Inoltre, poiché non vi è attrito, l'energia meccanica è costante; $K + U = \text{costante}$.

Soluzione Se si misura la coordinata y dal punto più basso dello scivolo, allora $y_i = h$, $y_f = 0$, e si ottiene

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Si noti che questo risultato è lo stesso di quello che si sarebbe trovato se il bambino fosse caduto verticalmente da un'altezza h ! Per esempio, se $h = 6.00 \text{ m}$, allora

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \left(9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) 6.00 \text{ m}} = 10.8 \text{ m/s}$$

(b) Se una forza di attrito agisse sul bambino, quanta energia meccanica verrebbe dissipata da questa forza? Si assuma che $v_f = 8.00 \text{ m/s}$ ed $m = 20.0 \text{ kg}$.

Soluzione In tal caso, $\Delta E \neq 0$ e non si conserva l'energia meccanica. Si può adoperare l'Equazione 7.18 per trovare la perdita di energia cinetica dovuta all'attrito, assumendo che sia nota la velocità finale nel punto più basso:

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(20.0 \text{ kg})(8.00 \text{ m/s})^2 +$$

$$- (20.0 \text{ kg}) \left(9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (6.00 \text{ m})$$

$$= -536 \text{ J}$$

Di nuovo, ΔE è negativo poiché l'attrito fa perdere energia cinetica al sistema. Si noti, però, che essendo lo scivolo curvo, la forza normale varia sia in modulo che in direzione durante il moto. Quindi, la forza di attrito, che è proporzionale a n , varia, a sua volta, durante il moto. Ritieni che sia possibile determinare μ da questi dati?

Esempio 7.5 Urto massa-molla

Una massa di 0.80 kg ha una velocità iniziale $v_i = 1.2 \text{ m/s}$ verso destra e urta contro una molla leggera di costante elastica $k = 50 \text{ N/m}$, come in Figura 7.12. (a) Se la superficie è senza attrito, calcolare la massima compressione della molla dopo l'urto.

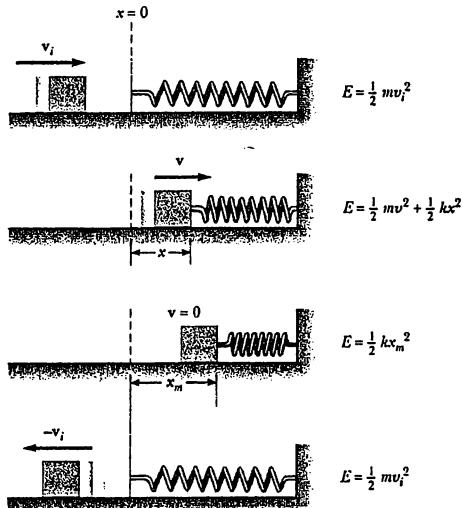


Figura 7.12 (Esempio 7.12) Un blocco che scivola lungo una superficie orizzontale liscia, urta contro una molla leggera. (a) Inizialmente l'energia meccanica è tutta energia cinetica. (b) L'energia meccanica è la somma dell'energia cinetica del blocco e dell'energia potenziale elastica della molla. (c) L'energia è interamente energia potenziale. (d) L'energia ritorna sotto forma di energia cinetica del blocco. L'energia totale si conserva durante tutto il moto.

Ragionamento Prima dell'urto, la massa ha energia cinetica e la molla non è compressa, cosicché l'energia immagazzinata nella molla è zero. Allora, l'energia totale del sistema (massa più molla) prima dell'urto è $\frac{1}{2}mv_i^2$. Dopo l'urto, e quando la molla è totalmente compressa, la massa è momentaneamente ferma e ha energia cinetica nulla, e l'energia immagazzinata nella molla ha il valore massimo, $\frac{1}{2}kx_f^2$. L'energia meccanica totale del sistema si conserva poiché non agiscono forze non conservative sul sistema.

Soluzione Poiché l'energia meccanica si conserva, l'energia cinetica della massa prima dell'urto deve essere uguale all'energia massima immagazzinata nella molla quando essa è totalmente compressa, ossia

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}kx_f^2$$

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{k}} v_i = \sqrt{\frac{0.80 \text{ kg}}{50 \text{ N/m}}} (1.2 \text{ m/s}) = 0.15 \text{ m}$$

(b) Se agisce una forza d'attrito dinamico costante fra il blocco e la superficie con $\mu_d = 0.50$ e se la velocità del blocco proprio quando inizia l'urto con la molla è $v_i = 1.2 \text{ m/s}$, qual è la massima compressione della molla?

Soluzione In questo caso, l'energia meccanica *non* si conserva a causa dell'attrito. Il modulo della forza d'attrito è

$$f_d = \mu_d n = \mu_d mg = 0.50 (0.80 \text{ kg}) \left(9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 3.9 \text{ N}$$

Quindi, la diminuzione dell'energia cinetica dovuta all'attrito mentre il blocco si sposta da $x_i = 0$ a $x_f = x$ è

$$\Delta K = -f_d x = (-3.92x) \text{ J}$$

Sostituendo nell'Equazione 7.16 si ottiene

$$\Delta K = (0 + \frac{1}{2}kx^2) - (\frac{1}{2}mv_i^2 + 0)$$

$$-3.92x = \frac{50}{2}x^2 - \frac{1}{2}(0.80)(1.2)^2$$

$$25x^2 + 3.92x - 0.576 = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in x otteniamo $x = 0.092 \text{ m}$ e $x = -0.25 \text{ m}$. La radice che ha significato fisico è $x = 0.092 \text{ m} = 9.2 \text{ cm}$. La radice negativa non ha senso in quanto il blocco deve trovarsi sulla destra dell'origine quando inizia a fermarsi. Si noti che 9.2 cm è minore della distanza ottenuta nel caso di assenza di attrito (a). Questo risultato è quello che ci aspettiamo poiché l'attrito rallenta il moto del sistema.

ESERCIZIO 7 Un blocco di 3.0 kg parte da un'altezza $h = 60 \text{ cm}$ lungo un piano che ha un angolo di inclinazione di 30° . Raggiunta la base, il blocco scivola lungo una superficie orizzontale. Se il coefficiente d'attrito fra le superfici è $\mu_d = 0.20$, per quanto scivola il blocco sulla superficie prima di fermarsi? Risposta 1.96 m

ESERCIZIO 8 Una bambina si trova ferma in cima a uno scivolo di altezza 4.0 m. (a) Qual è la sua velocità in fondo se lo scivolo è senza attrito? (b) Se essa raggiunge la base con una velocità di 6.0 m/s, quale percentuale della sua energia totale in cima allo scivolo risulta perduta a causa dell'attrito? Risposta (a) 8.85 m/s (b) 54.1%

7.6 • CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA IN GENERALE

Abbiamo visto che l'energia meccanica totale di un sistema si conserva quando sul sistema agiscono soltanto forze interne conservative. Inoltre, abbiamo associato una funzione energia potenziale ad ogni forza conservativa. Tuttavia, l'energia meccanica non si conserva quando sono presenti forze non conservative, quali l'attrito. Ogni volta che l'energia meccanica di un sistema diminuisce, l'energia non scompare.

Al contrario, l'energia meccanica si trasforma in altre forme di energia. Nello studio della termodinamica troveremo che l'energia meccanica si può trasformare in energia interna del sistema. Per esempio, quando un blocco scivola su una superficie, parte dell'energia meccanica si trasforma in energia interna immagazzinata nel blocco e nella superficie, così come viene evidenziato da un incremento misurabile della temperatura del blocco. Vedremo che, nella scala submicroscopica, questa energia interna è associata alle vibrazioni degli atomi attorno alle loro posizioni di equilibrio. L'energia acquistata dagli atomi è distribuita in modo discontinuo e casuale fra gli atomi. Questa forma di energia interna disordinata è spesso chiamata **energia termica**. Questo moto interno degli atomi ha energia cinetica e potenziale, e così si può dire che le forze d'attrito sorgono fondamentalmente da forze atomiche conservative. Quindi, se includiamo questo incremento di energia interna del sistema nella nostra espressione dell'energia, l'energia totale si conserva.

Questo è solo un esempio di come si può analizzare un sistema e trovare sempre che l'energia totale di un sistema isolato non varia se tutte le forme di energia sono tenute in considerazione. Cioè, l'energia non può essere né creata né distrutta. L'energia si può trasformare da una forma ad un'altra, ma l'energia totale di un sistema isolato è sempre costante. Da un punto di vista generale si può asserire che l'**energia totale dell'Universo è costante**. Quindi, se una parte dell'Universo guadagna energia sotto una certa forma, si deve avere una uguale perdita di energia da un'altra parte. Non è stata mai trovata alcuna violazione di tale principio.

Altri esempi di trasformazione di energia sono l'energia trasportata dalle onde sonore originate dalla collisione tra due oggetti, l'energia irradiata da una carica accelerata sotto forma di onde elettromagnetiche (un'antenna radio), e la complicata sequenza di conversioni di energia in una reazione termonucleare.

Nei capitoli seguenti, si vedrà che il concetto di energia e, in special modo, le trasformazioni di energia in varie forme, collegano le varie branche della fisica. In altre parole, non si possono realmente separare gli argomenti di meccanica, termodinamica ed elettromagnetismo. Infine, da un punto di vista pratico, tutti i dispositivi meccanici ed elettronici si basano su trasformazioni di energia.

*L'energia totale
si conserva sempre*

Fisica ragionata 3

Un'automobile con energia cinetica ed energia potenziale dovuta alla benzina trasportata urta contro un albero e si ferma. L'energia meccanica totale nel sistema (la macchina) è ora meno di prima. Quanta energia abbandona il sistema, e sotto quale forma rimane energia nel sistema?

Ragionamento Vi sono parecchi modi per mezzo dei quali l'energia si può trasferire fuori dal sistema. Descriveremo soltanto i meccanismi principali. L'automobile ha compiuto un certo *lavoro* sull'albero durante l'urto, facendo sì che l'albero si riscaldi e si deformi. Vi è stato un grande "crash" durante la collisione che rappresenta un trasferimento di energia in *suo*. Se il serbatoio perde benzina dopo l'urto, l'automobile perde energia per mezzo di un *trasferimento di massa*. Dopo che la macchina si ferma, essa non ha più energia cinetica. Le rimane una certa *energia potenziale* dovuta a quel pò di benzina eventualmente rimasta nel serbatoio. Vi è anche un aumento dell'*energia interna* nell'automobile, poiché la sua temperatura è verosimilmente aumentata dopo l'urto rispetto a prima.

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Un tostapane viene acceso. Discutere le forme di energia e il trasferimento di energia che avviene nelle spire del tostapane.

PROBLEMA CONCETTUALE 6

L'acciaio dolce si può riscaldare fino al colore rosso continuando a martellare su di esso. La stessa cosa non funziona con l'acciaio duro. Perché vi è questa differenza?

7.7 • ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE RIVISITATA

Precedentemente in questo capitolo si è introdotto il concetto di energia potenziale gravitazionale, cioè, l'energia associata alla posizione di una particella. Si sottolinea il fatto che la funzione energia potenziale gravitazionale $U = mgy$, è valida solo quando la particella è prossima alla superficie terrestre. Poiché la forza gravitazionale fra due particelle varia come $1/r^2$, segue che la funzione corretta per l'energia potenziale del sistema dipende dalla distanza tra le particelle.

Si consideri una particella di massa m che si muove tra due punti P e Q al di sopra della superficie terrestre, come in Figura 7.13. La forza gravitazionale agente su m è

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GM_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad [7.19]$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è un versore diretto dalla Terra alla particella, e il segno negativo indica che la forza è attrattiva. Questa espressione mostra che la forza gravitazionale dipende solo dalla coordinata polare r . Inoltre, la forza gravitazionale è conservativa. Poiché la variazione di energia potenziale associata a un dato spostamento della particella è definita come il lavoro cambiato di segno svolto dalla forza gravitazionale conservativa durante questo spostamento, l'Equazione 7.12 dà

$$U_f - U_i = - \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr = GM_m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = GM_m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f}$$

ossia

$$U_f - U_i = - GM_m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad [7.20]$$

Come sempre, la scelta del punto di riferimento per l'energia potenziale è totalmente arbitraria. Per convenzione si fissa il punto di riferimento dove la forza è uguale a zero. Ponendo $U_i = 0$ a $r_i = \infty$, si ottiene l'importante risultato

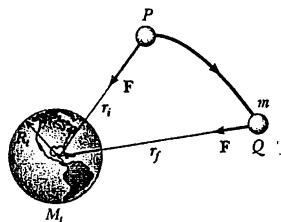


Figura 7.13 Quando una particella di massa m si sposta da P a Q al di sopra della superficie della Terra, l'energia potenziale varia secondo l'Equazione 7.20.

Energia potenziale • gravitazionale $r > R_t$

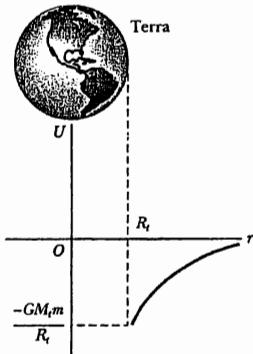


Figura 7.14 Grafico dell'energia potenziale gravitazionale, U_g , in funzione di r per una particella che si trovi sulla superficie della Terra. Per $r \rightarrow \infty$ l'energia potenziale tende a zero.

$$U(r) = -\frac{GM_t m}{r} \quad [7.21]$$

Questa equazione vale per il sistema Terra-particella separati da una distanza r , purché $r > R_t$. Il risultato non è valido per particelle che si muovono all'interno della Terra, dove $r < R_t$. A causa della scelta di U_i , la funzione $U(r)$ è sempre negativa (Fig. 7.14).

Sebbene l'Equazione 7.21 sia stata dedotta per il sistema particella-Terra, essa si può applicare a due particelle qualunque. Così, l'energia potenziale gravitazionale associata a una *qualunque coppia* di masse m_1 ed m_2 poste a distanza r è data da

$$U_g = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \quad [7.22]$$

Questa espressione si applica pure a oggetti estesi *se essi sono sfericamente simmetrici*, come per primo dimostrò Newton con l'uso del calcolo integrale. L'Equazione 7.22 mostra che l'energia potenziale gravitazionale per qualunque coppia di particelle varia come $1/r$ (mentre la forza tra esse varia come $1/r^2$). Inoltre, l'energia potenziale è *negativa* poiché la forza è attrattiva e si è fissata a zero l'energia potenziale quando la distanza tra le particelle è infinita. Poiché la forza tra le particelle è attrattiva, sappiamo che un agente esterno deve compiere un lavoro positivo per aumentare la separazione tra le due particelle. Il lavoro compiuto da un agente esterno produce un aumento dell'energia potenziale quando le due particelle vengono allontanate. Ossia, U_g diventa meno negativa quando r aumenta. (Si noti che parte del lavoro svolto può anche produrre una variazione di energia cinetica del sistema. Cioè, se il lavoro compiuto per allontanare le particelle è maggiore dell'aumento dell'energia potenziale, l'energia in eccesso è utilizzata per aumentare l'energia cinetica del sistema). Quando le due particelle sono separate da una distanza r , un agente esterno, per poterle allontanare a distanza infinita, dovrebbe fornire una energia almeno uguale a $+Gm_1 m_2/r$.

È conveniente considerare il valore assoluto dell'energia potenziale gravitazionale come *energia di legame* del sistema. Se un agente esterno fornisce una energia *maggior*e dell'energia di legame, $Gm_1 m_2/r$, l'energia in più del sistema è sotto forma di energia cinetica quando le particelle sono infinitamente distanti.

Si può estendere questo concetto a tre o più particelle. In questo caso, l'energia potenziale totale del sistema è la somma estesa a tutte le *coppie* di particelle². Ciascuna coppia contribuisce con un termine della forma data dall'Equazione 7.22. Per esempio, se il sistema contiene tre particelle come in Figura 7.15, si trova che

$$U_{\text{totale}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad [7.23]$$

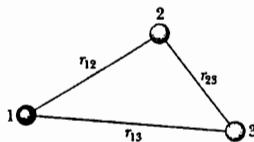


Figura 7.15 Diagramma di 3 particelle interagenti fra loro.

Il valore assoluto di U_{totale} rappresenta il lavoro necessario per allontanare le particelle a una distanza infinita. Se il sistema consiste di quattro particelle, vi sono sei termini nella somma, corrispondenti alle sei distinte coppie di forze di interazione. L'energia meccanica totale del sistema di quattro particelle include dieci termini: quattro termini di energia cinetica (uno per ciascuna particella) e sei termini di energia potenziale.

² Il fatto che si possano sommare i termini di energia potenziale per tutte le coppie di particelle deriva dal fatto sperimentale che le forze gravitazionali obbediscono al principio di sovrapposizione. Cioè, se $\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} + \dots$ allora esiste un termine di energia potenziale per ciascuna interazione \mathbf{F}_{ij} .

Fisica ragionata 4

Perché il Sole è caldo?

Ragionamento Il Sole si è formato quando una nube di gas e polvere si aggregò, per attrazione gravitazionale, in un oggetto astronomicamente massiccio. Prima che ciò avvenisse, le particelle erano largamente diffuse, configurando una grande quantità di energia potenziale gravitazionale. Quando le particelle si aggregarono tutte insieme per formare il Sole, l'energia potenziale gravitazionale diminuì. Per il principio di conservazione dell'energia, questa energia potenziale si è dovuta trasformare in un'altra forma. La forma nella quale si trasformò fu l'energia interna, che spiega l'aumento della temperatura. Se un numero sufficiente di particelle si aggregano insieme, la temperatura può aumentare fino al punto di far avvenire la fusione nucleare, e l'oggetto diventa una stella. Se non vi sono sufficienti particelle, la temperatura aumenta, ma non al punto per il quale avviene la fusione. L'oggetto è un pianeta se esso orbita attorno a una stella. Giove è un esempio di un grande pianeta che avrebbe potuto essere una stella se fossero state disponibili altre particelle da mettere insieme.

Esempio 7.6 La variazione di energia potenziale

Una particella di massa m è spostata di una piccola distanza verticale Δy in prossimità della superficie terrestre. Mostrare che l'espressione generale per la variazione dell'energia potenziale gravitazionale data dall'Equazione 7.20 si riduce alla relazione familiare $\Delta U_g = mg\Delta y$.

Soluzione Possiamo esprimere l'Equazione 7.20 nella forma

$$\Delta U_g = -GM_t m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) = GM_t m \left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f} \right)$$

Se le posizioni iniziale e finale della particella sono ambedue vicine alla superficie terrestre, allora $r_f - r_i = \Delta y$ ed $r_f \approx R_t^2$. (Si ricordi che r è misurato dal centro della Terra). Allora, la variazione di energia potenziale diventa

$$\Delta U_g = \frac{GM_t m}{R_t^2} \Delta y = mg \Delta y$$

dove è stato usato il fatto che $g = GM_t / R_t^2$. Si tenga in mente che il punto di riferimento è arbitrario, poiché è la variazione di energia potenziale che ha significato.

ESERCIZIO 9 Un satellite della Terra ha una massa di 100 kg e la sua altezza è 2.0×10^6 m. (a) Qual è l'energia potenziale gravitazionale del sistema satellite-Terra? (b) Qual è il modulo della forza agente sul satellite? Risposta (a) -4.8×10^9 J (b) 570 N.

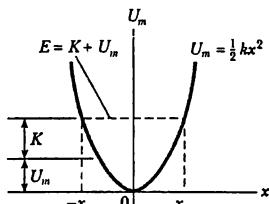
7.8 • DIAGRAMMI DI ENERGIA E STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

FACOLTATIVO

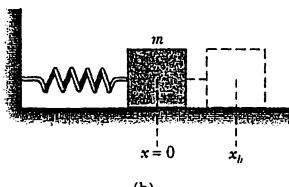
Il moto di un sistema spesso può essere qualitativamente compreso dall'analisi del grafico della sua energia potenziale. Consideriamo la funzione energia potenziale del sistema blocco-molla, espressa da $U_m = \frac{1}{2} kx^2$. Questa funzione è riportata in funzione di x in Figura 7.16a. La relazione tra la forza ed U è espressa dall'Equazione 7.11:

$$F_m = -\frac{dU_m}{dx} = -kx$$

Cioè, la forza è uguale alla pendenza cambiata di segno, della curva U in funzione di x . Quando il blocco è fermo nella posizione di equilibrio ($x = 0$), dove $F = 0$, non si muoverà a meno che qualche forza esterna agisca su di esso. Se la molla è allungata, rispetto alla posizione di equilibrio, x è positiva e la pendenza dU/dx è anche positiva; quindi, F_m è negativa e il blocco è accelerato



(a)



(b)

Figura 7.16 (a) L'energia potenziale in funzione di x per il sistema blocco-molla descritto in (b). La molla oscilla tra i punti di inversione di coordinate $x = \pm x_b$. Si noti che la forza di richiamo della molla agisce sempre nel verso di $x = 0$, posizione di equilibrio stabile.

all'indietro verso $x = 0$. Se la molla è compressa, x è negativa e la pendenza è negativa; quindi F_m è positiva e il blocco accelera di nuovo verso $x = 0$.

Da questa analisi, concludiamo che la posizione $x = 0$ è una posizione di **equilibrio stabile**. Ossia, qualsiasi spostamento da questa posizione produce una forza rivolta all'indietro verso $x = 0$. In generale, **posizioni di equilibrio stabile corrispondono a quei punti in cui $U(x)$ ha il valore di un minimo relativo**.

Dalla Figura 7.16 si vede che se il blocco è spostato di un tratto x_b ed è lasciato libero di muoversi dalla quiete, la sua energia totale iniziale è l'energia potenziale immagazzinata nella molla, data da $\frac{1}{2} kx_b^2$. Non appena comincia il moto, il sistema acquista energia cinetica a spese dell'energia potenziale, di cui perde una uguale quantità. Poiché l'energia totale deve rimanere costante, il blocco oscilla tra i due punti $x = \pm x_b$, chiamati *punti di inversione*. Infatti, non essendovi perdita di energia (attrito nullo), il blocco oscillatorà per sempre tra $-x_b$ e $+x_b$. (Discuteremo queste oscillazioni in seguito nel Cap. 12). Da un punto di vista energetico, l'energia del sistema non può superare $\frac{1}{2} kx_b^2$; quindi, il blocco deve fermarsi in questi punti e, a causa della forza elastica, accelerare verso $x = 0$.

Un altro semplice sistema meccanico che ha una posizione di equilibrio stabile è quello costituito da una palla che rotola attorno al punto più basso di una cavità sferica. Se la palla è allontanata dalla posizione più bassa, essa tenderà sempre a ritornare in quella posizione quando è libera di muoversi.

Consideriamo ora un esempio in cui la curva U in funzione di x abbia un andamento simile a quello mostrato in Figura 7.17. In tal caso, $F_x = 0$ a $x = 0$, così che in questo punto la particella è in equilibrio. Ma questa è una posizione di **equilibrio instabile** per il seguente motivo. Si supponga di spostare la particella verso *destra* ($x > 0$). Essendo la pendenza negativa per $x > 0$, $F_x = -dU/dx$ è positiva e quindi la particella accelererà allontanandosi da $x = 0$. Si supponga adesso che la particella sia spostata verso sinistra ($x < 0$). In questo caso, essendo la pendenza positiva per $x < 0$, la forza è *negativa*. Quindi, la particella accelererà nuovamente allontanandosi dalla posizione di equilibrio. Perciò, la posi-

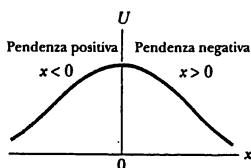


Figura 7.17 Un grafico di U in funzione di x per una particella che ha una posizione di equilibrio instabile, situata in $x = 0$. In questo caso la forza che agisce sulla particella per spostamenti finiti è diretta sempre in modo tale da allontanare la particella da $x = 0$.

Equilibrio instabile •

Consideriamo ora un esempio in cui la curva U in funzione di x abbia un andamento simile a quello mostrato in Figura 7.17. In tal caso, $F_x = 0$ a $x = 0$, così che in questo punto la particella è in equilibrio. Ma questa è una posizione di **equilibrio instabile** per il seguente motivo. Si supponga di spostare la particella verso *destra* ($x > 0$). Essendo la pendenza negativa per $x > 0$, $F_x = -dU/dx$ è positiva e quindi la particella accelererà allontanandosi da $x = 0$. Si supponga adesso che la particella sia spostata verso sinistra ($x < 0$). In questo caso, essendo la pendenza positiva per $x < 0$, la forza è *negativa*. Quindi, la particella accelererà nuovamente allontanandosi dalla posizione di equilibrio. Perciò, la posi-

zione $x = 0$, in questo caso, è chiamata posizione di *equilibrio instabile*, perché per qualsiasi spostamento da questo punto, la forza spinge la particella ad allontanarsi sempre più dall'equilibrio. In effetti, la forza spinge la particella verso una posizione di minore energia potenziale. Una palla posta sul punto più alto di una cavità sferica capovolta è ovviamente in una posizione di equilibrio instabile. Cioè, se la palla viene leggermente spostata dal punto più alto e lasciata libera, essa sicuramente rotolerà via dalla cima. In generale, **posizioni di equilibrio instabile corrispondono a quei punti per i quali $U(x)$ ha il valore di un massimo relativo.**³

Infine, si può avere una situazione in cui U è costante in una certa zona e quindi $F = 0$. Questa posizione è detta di **equilibrio indifferente**. Piccoli spostamenti da questa posizione non generano né forze di richiamo né forze di allontanamento. Una palla che sta su una superficie orizzontale piana costituisce un esempio di un oggetto in equilibrio indifferente.

- **Equilibrio indifferente**

SOMMARIO

L'energia potenziale gravitazionale di una particella di massa m che è sollevata ad una altezza y vicino alla superficie della Terra è data da

$$U_g = mgy \quad [7.1]$$

L'energia potenziale elastica immagazzinata in una molla di costante elastica k è

$$U_m = \frac{1}{2} kx^2 \quad [7.4]$$

Una forza è **conservativa** se il lavoro compiuto dalla forza su una particella è indipendente dalla traiettoria da essa seguita tra due punti dati. Ovvero, una forza è conservativa se il lavoro compiuto dalla forza è nullo quando la particella percorre un'arbitraria traiettoria chiusa che la riconduce nella posizione iniziale. Una forza che non soddisfa tali criteri è detta **non conservativa**.

Una funzione **energia potenziale** può essere associata soltanto ad una forza conservativa. Se una forza conservativa F agisce su una particella che si muove lungo l'asse x tra x_i e x_f , la variazione di energia potenziale è uguale al lavoro, cambiato di segno, svolto da quella forza:

$$U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad [7.6]$$

L'energia meccanica totale di un sistema è definita come la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E = K + U \quad [7.8]$$

Il principio di conservazione dell'energia meccanica afferma che se su un sistema non vi sono forze esterne che compiono lavoro, e non agiscono forze non conservative, si conserva l'energia meccanica totale

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad [7.9]$$

Se sul sistema agiscono forze non conservative, l'energia meccanica del sistema non si conserva. Se un oggetto è parte di un sistema, il lavoro svolto da una forza applicata è uguale alla variazione dell'energia meccanica del sistema:

$$W_{app} = \Delta K + \Delta U \quad [7.16]$$

La forza gravitazionale è conservativa, e perciò si può definire una funzione energia potenziale. L'**energia potenziale gravitazionale** associata a due particelle distanti r è

³ Matematicamente si può verificare che un estremo di U corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile o instabile esaminando il segno di d^2U/dx^2 . Un segno positivo dà un equilibrio stabile mentre un segno negativo dà un equilibrio instabile.

$$U_g = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \quad [7.22]$$

dove U_g è posta uguale a zero per $r = \infty$. L'energia potenziale gravitazionale totale per un sistema di particelle è la somma delle energie di tutte le coppie di particelle, con ciascuna coppia rappresentata da un termine della forma data dall'Equazione 7.22.

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] Una palla è lasciata cadere da una persona che si trova nel punto più alto di un palazzo, mentre un'altra persona, nel punto più basso di esso, osserverà il moto della palla. Si troveranno d'accordo i due sul valore dell'energia potenziale della palla? Sulla variazione di energia potenziale della palla? Sull'energia cinetica della palla?
2. Si discuta la produzione e la dissipazione di energia nei seguenti casi: (a) sollevare un peso, (b) tenere in alto un peso, (c) abbassare un peso lentamente. Includere l'azione dei muscoli nella discussione.
- [3] Uno sciatore si appresta a scendere giù lungo una collina coperta di neve. È corretto affermare che la gravità fornisce l'energia per scendere lungo la collina?
4. Stai salendo comodamente in cima a delle rampe di scale. Successivamente scendi in basso e risali velocemente per quanto ti è possibile le stesse rampe. Compi un lavoro diverso in questi due casi?
5. Molte strade di montagna sono costruite in modo tale da seguire una spirale piuttosto che andare direttamente lungo la pendenza. Si discuta ciò dal punto di vista dell'energia e della potenza.
- [6] Durante un terremoto, viene "liberata" una grande quantità di energia, che si sparge all'esterno, causando potenzialmente gravi danni. Sotto quale forma si trova questa energia prima del terremoto, e per mezzo di quale meccanismo di trasferimento l'energia viaggia dall'ipocentro?
7. Fai un giro in bicicletta. In che senso la tua bicicletta è ad energia solare?
8. L'energia potenziale gravitazionale può mai avere un valore negativo? Spiegare.
- [9] Una palla da bowling è sospesa al soffitto di una sala di lettura tramite una corda robusta. La palla è allontanata dalla posizione di equilibrio e lasciata libera dalla quiete, da una posizione prossima alla punta del naso della dimostratrice. Se questa rimane immobile, spiegare perché non sarà colpita dalla palla nella oscillazione di ritorno. La dimostratrice sarebbe al sicuro se la palla fosse spinta dalla sua posizione?
10. Una macchina per conficcare degli oggetti nel terreno funziona sollevando e lasciando cadere ripetutamente su di essi un grosso peso. Quanto deve essere aumentata l'energia di una tale macchina quando il peso che lascia cadere viene raddoppiato? (Si assuma che il peso cada ogni volta dalla stessa altezza).
11. I muscoli del nostro corpo esercitano forze quando ci solleviamo, spingiamo, corriamo, saltiamo, etc. Queste forze sono conservative?
- [12] Se su un sistema agisce una forza non conservativa, l'energia meccanica totale resta costante?
- [13] Un blocco è collegato ad una molla che è sospesa al soffitto. Se il blocco è messo in moto e viene trascurata la resistenza dell'aria, quante forme di energia potenziale vi sono in questa situazione?
14. Quale sarebbe la curva di U in funzione di x se una particella fosse in una regione di equilibrio indifferente?
15. Una palla rotola su una superficie orizzontale. La palla si trova in condizioni di equilibrio stabile, instabile o indifferente?
16. Discutere tutte le trasformazioni di energia che avvengono durante il funzionamento di un'automobile.
17. Una palla è lanciata verticalmente verso l'alto in presenza dell'aria. In quale punto la sua energia cinetica ha un massimo? In quale punto la sua energia potenziale gravitazionale ha un massimo?

PROBLEMI

Paragrafo 7.1 Energia potenziale

Paragrafo 7.2 Forze conservative e non conservative

- [1] Un trenino di un ottovolante di 1000 kg si trova inizialmente alla sommità di una salita, nel punto A. Esso si muove di 40 m, ad un angolo di 40.0° sotto l'orizzontale, in un punto più basso B. (a) Scegliere il punto B come livello zero per l'energia potenziale gravitazionale, e calcolare l'energia potenziale del trenino nei punti A e B, e la differenza di energia potenzia-

- le, $U_A - U_B$, tra questi punti. (b) Ripetere la parte (a), ponendo il livello zero di riferimento nel punto A.
2. Una palla di 2.00 kg è collegata all'estremità inferiore di una fune lunga 1.00 m legata al soffitto di una stanza. L'altezza della stanza è 3.00 m. Qual è l'energia potenziale gravitazionale relativa (a) al soffitto, (b) al pavimento, (c) a un punto alla stessa quota della palla?
3. Un bambino di 40.0 N si trova su un'altalena tenuta da funi lunghe 2.00 m. Calcolare l'energia potenziale

gravitazionale del bambino relativa alla sua posizione più bassa quando (a) le funi sono orizzontali, (b) le funi formano un angolo di 30.0° con la verticale, (c) il bambino si trova in fondo alla traiettoria circolare.

4. Una particella di 4.00 kg si muove dall'origine ad un punto di coordinate $x = 5.00 \text{ m}$ e $y = 5.00 \text{ m}$ in presenza della forza di gravità agente nel verso negativo dell'asse y (Fig. P7.4). Servendosi dell'Equazione 6.3 calcolare il lavoro fatto dalla gravità quando la particella si sposta da O a C seguendo i seguenti percorsi: (a) OAC , (b) OCB , (c) OC . I risultati saranno tutti uguali. Perché?

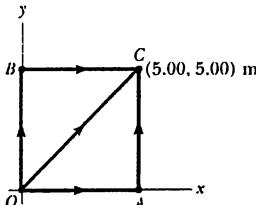


Figura P7.4

Paragrafo 7.3 Forze conservative ed energia potenziale

Paragrafo 7.4 Conservazione dell'energia meccanica

5. Una forza conservativa $F_x = (2.0x + 4.0)$ N agisce su una particella di 5.00 kg , essendo x espresso in m. Quando la particella si muove lungo l'asse x da $x = 1.00 \text{ m}$ a $x = 5.00 \text{ m}$, calcolare (a) il lavoro svolto da questa forza, (b) la variazione di energia potenziale della particella e (c) la sua energia cinetica nel punto $x = 5.00 \text{ m}$, se la sua velocità è pari a 3.00 m/s nel punto $x = 1.00 \text{ m}$.
6. Una forza costante $F = (3.0i + 5.0j)$ N agisce su una particella di 4.00 kg . (a) Calcolare il lavoro svolto da questa forza se la particella si sposta dall'origine al punto il cui vettore posizione è $\mathbf{r} = (2.0i - 3.0j)$ m. Questo risultato dipende dal percorso? Spiegare. (b) Qual è la velocità della particella in \mathbf{r} se la sua velocità nell'origine è 4.00 m/s ? (c) Quanto vale la variazione di energia potenziale della particella?
7. All'istante di tempo t_i , l'energia cinetica di una particella è 30.0 J e la sua energia potenziale 10.0 J . In un istante successivo t_f , la sua energia cinetica è 18.0 J . (a) Se solo forze conservative agiscono sulla particella, quanto vale al tempo t_f la sua energia potenziale? Quanto la sua energia totale? (b) Se l'energia potenziale all'istante t_f è 5.00 J , esistono forze non conservative che agiscono sulla particella? Spiegare.
8. Una particella di massa 0.500 kg viene lanciata dalla posizione P , come indicato in Figura P7.8, con una velocità iniziale v_0 . La componente orizzontale della velocità è di 30.0 m/s . La particella raggiunge una

altezza massima di 20.0 m rispetto a P . Usando la conservazione dell'energia, si determini (a) la componente verticale di v_0 , (b) il lavoro compiuto dalla forza di gravità sulla particella durante il suo moto da P a B e (c) le componenti orizzontale e verticale del vettore velocità quando la particella raggiunge la posizione B .

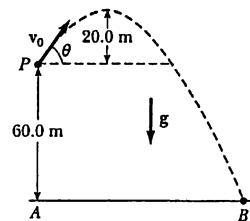


Figura P7.8

9. Una sferetta scivola senza attrito lungo la guida, mostrata nella Figura P7.9. Se la sferetta viene lasciata andare da un'altezza $h = 3.50R$, qual è la sua velocità nella posizione A ? Quanto vale la forza normale agente sulla sferetta, se ha una massa di 5.00 kg ?

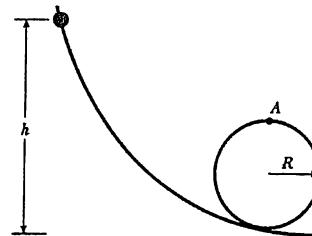


Figura P7.9

10. Un pendolo semplice di lunghezza 2.00 m è abbandonato da fermo quando la fune di collegamento forma un angolo di 25.0° con la verticale. Qual è la velocità della massa sospesa nel punto più basso dell'oscillazione?
11. Due masse sono collegate da una fune, di massa trascurabile, che scorre su una carrucola, pure di massa trascurabile e priva di attrito, come è indicato nella Figura P7.11. La massa di 5.00 kg viene lasciata andare, da ferma. Usando la conservazione dell'energia, si determini (a) la velocità della massa di 3.00 kg , nell'istante in cui la massa di 5.00 kg tocca il suolo, (b) la massima altezza a cui salirà la massa di 3.00 kg .
12. Due masse sono collegate da una fune, di massa trascurabile, che passa su una carrucola priva di attrito come in Figura P7.11. La massa m_1 viene abbandonata da ferma ad altezza h . Usando il principio di conserva-

zione dell'energia, (a) determinare la velocità di m_2 proprio quando m_1 raggiunge il suolo. (b) Trovare la massima altezza alla quale m_2 arriva.

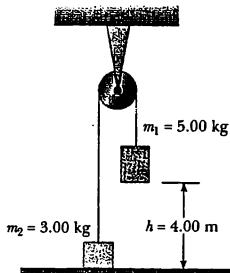


Figura P7.11

13. Dave Johnson, medaglia di bronzo di decathlon alle Olimpiadi di Barcellona nel 1992, lasciò il suolo nel salto in alto con una velocità verticale di 6.00 m/s . Di quanto si è innalzato il suo centro di gravità nel salto?
14. Una palla di 0.400 kg è lanciata in aria e raggiunge una altezza massima di 20.0 m . Assumendo la sua posizione iniziale come punto di zero dell'energia potenziale e utilizzando il metodo energetico, trovare (a) la sua velocità iniziale, (b) la sua energia meccanica totale e (c) il rapporto della sua energia cinetica e potenziale quando la sua altezza è 10.0 m .
15. Una palla da cannone viene sparata da un cannone con una velocità di uscita di 1000 m/s a un angolo di 37.0° rispetto all'orizzontale. Una seconda palla viene sparata a un angolo di 90° . Usare la conservazione dell'energia meccanica per trovare (a) la massima altezza raggiunta da ciascuna palla e (b) l'energia meccanica totale alla massima altezza per ciascuna palla.
16. Una palla di 2.00 kg è legata a una lenza da 10 lb (44.5 N). La palla è rilasciata da ferma da una posizione orizzontale ($\theta = 90^\circ$). Per quale angolo θ (misurato rispetto alla verticale), la lenza si spezzerà?
17. Un bambino scende lungo uno scivolo privo di attrito, come indicato in Figura P7.17. In termini di R e H , a quale altezza h il bambino perderà il contatto con il tratto di raggio R dello scivolo?

Paragrafo 7.5 Lavoro svolto da forze non conservative

18. Un tuffatore di 70.0 kg si tuffa da una piattaforma di 10.0 m ed entra in acqua verticalmente. Se egli si ferma 5.00 m sotto la superficie dell'acqua, determinare la forza di resistenza media esercitata dall'acqua sul tuffatore.
19. Una forza F_x , che agisce su una particella di 5.00 kg , dipende dalla distanza, come viene riportato in Figura



Figura P7.17

- P7.19. Se la particella parte da ferma nella posizione $x = 0$, determinare la sua velocità per $x = 2.00, 4.00$ e 6.00 m .

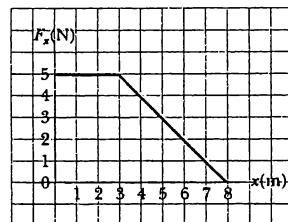


Figura P7.19

20. Un lanciatore di "softball" scaglia una palla di 0.250 kg facendola ruotare, prima di abbandonarla, lungo una traiettoria circolare verticale di 60.0 cm di raggio. Il lanciatore mantiene lungo tutta la traiettoria una componente di forza costante, nella direzione del moto della palla, di modulo 30.0 N . La velocità della palla alla sommità della circonferenza è 15.0 m/s . Se la palla è lasciata nel punto più basso della circonferenza, qual è la sua velocità al momento del rilascio?
21. Il coefficiente d'attrito tra un oggetto di 3.00 kg e la superficie, mostrato in Figura P7.21, è 0.400 . Se le masse partono da ferme, determinare la velocità della massa di 5.00 kg , quando è scesa di un tratto di 1.50 m ?

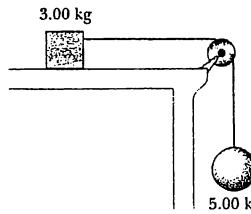


Figura P7.21

22. Una macchina di 2000 kg parte da ferma dalla sommità di un passo carribile lungo 5.00 m e inclinato di un angolo di 20.0° con l'orizzontale. Se una forza di attrito media di 4000 N si oppone al moto della macchina, trovare la velocità della macchina alla fine del passo carribile.

23. Un blocco di 5.00 kg viene fatto salire lungo un piano inclinato con una velocità iniziale di 8.00 m/s (Fig. P7.23). Il blocco si ferma dopo aver percorso 3.00 m lungo il piano, come indicato nella figura. Il piano è inclinato di 30.0° rispetto all'orizzontale. Determinare (a) la variazione di energia cinetica, (b) la variazione di energia potenziale, (c) la forza d'attrito sul blocco, considerata costante, (d) il valore del coefficiente d'attrito dinamico.

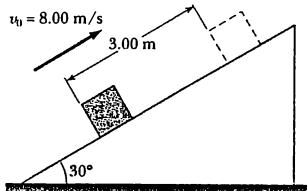


Figura P7.23

24. Una paracadutista di 50.0 kg si lancia da un aeroplano da una altezza di 1000 m. Il paracadute si apre ed essa raggiunge il suolo con una velocità di 5.00 m/s. Determinare l'energia dissipata per attrito con l'aria durante la discesa.
25. Un paracadutista di 80.0 kg salta da un aeroplano ad una altezza di 1000 m e apre il paracadute a una altezza di 200.0 m. (a) Assumendo che la forza totale ritardante sul paracadutista rimanga costante al valore di 50.0 N col paracadute chiuso e costante a 3600 N col paracadute aperto, qual è la velocità del paracadutista quando atterra al suolo? (b) Pensi che il paracadutista potrebbe farsi del male? Spiegare. (c) A quale altezza dovrebbe aprirsi il paracadute affinché la velocità finale di atterraggio del paracadutista sia di 5.00 m/s? (d) Quanto è realistica l'assunzione che la forza ritardante totale sia costante? Spiegare.
26. Un fucile giocattolo utilizza una molla di costante elastica 80.0 N/m per sparare una sferetta di gomma soffice di 5.30 g di massa. La canna del fucile è lunga 15.0 cm e tra canna e proiettile agisce una forza di attrito costante di 0.032 N. Determinare la velocità di uscita del proiettile dalla canna del fucile se la molla viene compressa di 5.00 cm.
27. Un blocco scivola giù lungo una traiettoria curva priva di attrito e risale lungo un piano inclinato, come in Figura P7.27. Il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco e il piano inclinato è μ_d . Usare il metodo energetico per mostrare che la massima altezza raggiunta

dal blocco è

$$y_{\max} = \frac{h}{1 + \mu_d \cot \theta}$$

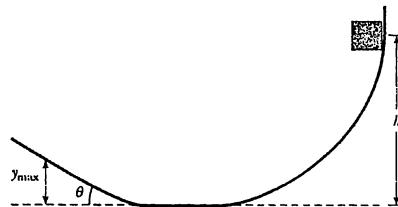


Figura P7.27

28. Una massa di 1.50 kg è tenuta a 1.20 m al di sopra di una molla in configurazione rilassata di massa trascurabile e di costante elastica 320 N/m. La massa cade sulla molla. (a) Di quanto si comprime la molla? (b) Di quanto si comprimerebbe la molla se l'esperimento venisse realizzato sulla Luna dove $g = 1.63 \text{ m/s}^2$? (c) Ripetere la domanda (a), ma questa volta si assuma che una forza costante di resistenza dell'aria di 0.700 N agisca sulla massa durante il suo moto.
29. Uno sciatore parte da fermo dalla cima di una collina inclinata di un angolo di 10.5° rispetto all'orizzontale. La collina è lunga 200 m, e il coefficiente di attrito tra la neve e gli sci è 0.0750. In fondo alla collina la pista innevata è orizzontale e il coefficiente di attrito resta immutato. Quanto distante arriverà lo sciatore sulla parte orizzontale prima di fermarsi?

Paragrafo 7.7 Energia potenziale gravitazionale rivisitata

Assumere $U = 0$ a $r = \infty$.

30. Quanta energia è necessaria per allontanare una massa di 1000 kg dalla superficie terrestre ad un'altezza doppia del raggio della Terra?
31. Dopo che il nostro Sole avrà esaurito il suo combustibile nucleare, è possibile che il suo destino sia quello di colllassare in una *nana bianca* la quale avrà approssimativamente la massa del Sole ma il raggio della Terra. Calcolare (a) la densità media della nana bianca, (b) l'accelerazione di gravità alla sua superficie, (c) l'energia potenziale gravitazionale di un oggetto di 1.00 kg sulla sua superficie. (Si ponga $U_k = 0$ all'infinito).
32. Un proiettile è lanciato verticalmente dalla superficie terrestre con una velocità di 10.0 km/s. A quale altezza arriverà? Si trascuri la resistenza dell'aria.
33. Un sistema consiste di tre particelle, ciascuna di massa 5.00 g, poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato 30.0 cm. (a) Calcolare l'energia potenziale del sistema. (b) Se le particelle sono lasciate libere simultaneamente, dove collideranno?

Paragrafo 7.8 Diagrammi di energia e stabilità dell'equilibrio (Facoltativo)

34. Un cono retto circolare può essere mantenuto in posizione di equilibrio su un piano orizzontale in tre modi diversi. Si disegnino le tre configurazioni di equilibrio e si individui quella corrispondente all'equilibrio stabile, instabile e indifferente.
35. Consideriamo la curva dell'energia potenziale $U(x)$ in funzione di x riportata in Figura P7.35. (a) Determinare se la forza F_x è positiva, negativa o nulla nei vari punti indicati. (b) Indicare i punti di equilibrio stabile, instabile o indifferente. (c) In riferimento alla curva dell'energia potenziale fare uno schizzo grossolano della curva F_x in funzione di x da $x = 0$ a $x = 8$ m.

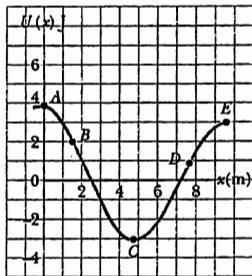


Figura P7.35

36. Un tubo ha attaccati sulla sua superficie interna uno o due pesetti, come indicato in Figura P7.36. Spiegare perché una configurazione è di equilibrio instabile, una di equilibrio indifferente ed una di equilibrio stabile. In ciascun diagramma, O è il centro della curvatura e CM il centro di massa.

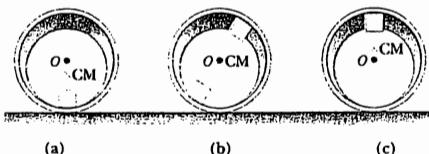


Figura P7.36

37. L'energia potenziale di un sistema di due particelle che distano r è data da $U(r) = A/r$, dove A è una costante. Trovare la forza radiale \mathbf{F}_r .

Problemi generali

38. Una particella di 200 g è lasciata libera dalla quiete in un punto A che si trova sul diametro interno di una cavità semisferica liscia di raggio $R = 30.0$ cm (Fig. P7.38). Calcolare (a) la sua energia potenziale gravitazionale nel punto A rispetto al punto B, (b) la sua

energia cinetica nel punto B, (c) la sua velocità in B e (d) la sua energia cinetica e potenziale nel punto C.

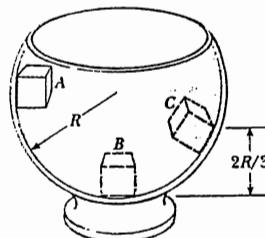


Figura P7.38

39. La particella descritta nel Problema 38 (Fig. P7.38) è lasciata libera dalla quiete dal punto A; la superficie della cavità è scabra. La velocità della particella nel punto B è 1.50 m/s. (a) Qual è la sua energia cinetica in B? (b) Quanta energia si dissipa a causa dell'attrito quando la particella va da A a B? (c) È possibile determinare μ da questi risultati in maniera semplice? Spiegare.

40. Fai una stima dell'ordine di grandezza della potenza che sei in grado di erogare. Il lavoro sia quello che compi nel salire le scale. Nella tua soluzione stabilisci le grandezze che consideri date e i valori che tu stimi o misuri per esse. Consideri la tua potenza di picco o quella che è possibile mantenere costantemente?

41. Un blocco di 10.0 kg è lasciato libero in un punto A di una pista ABCD, mostrata in Figura P7.41. La guida è priva di attrito, fatta eccezione per il tratto BC, lungo 6.00 m. Il blocco scende lungo la guida, colpisce una molla di costante elastica $k = 2250$ N/m, determinandone una compressione di 0.300 m, rispetto alla lunghezza di equilibrio, prima del momentaneo arresto. Determinare il coefficiente d'attrito dinamico nel tratto BC tra guida e blocco.

42. Un trampolo a molla ($k = 2.5 \times 10^4$ N/m) per bambini (Fig. P7.42) è un accumulatore d'energia. Nella posizione A ($x_1 = -0.100$ m) la compressione della molla è massima e il bambino è momentaneamente fermo. Nella posizione B ($x = 0$) la molla non è in tensione e il bambino sta spostandosi verso l'alto. Nella posizione C il bambino si trova momentaneamente fermo alla massima altezza del salto. La somma delle masse del trampolo e del bambino è di 25.0 kg. Si determini (a) l'energia totale del sistema, se ambedue le energie potenziali sono nulle per $x = 0$, (b) il valore di x_2 , (c) la velocità del bambino per $x = 0$, (d) il valore di x per il quale l'energia cinetica del sistema è massima, (e) la velocità massima del bambino verso l'alto.

43. Un blocco di 2.00 kg situato su un piano inclinato scabro è connesso ad una molla di massa trascurabile avente una costante elastica di 100 N/m (Fig. P7.43). Il blocco è lasciato libero dalla quiete quando la

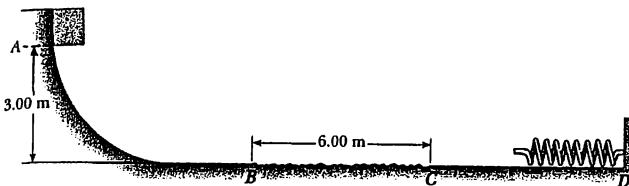


Figura P7.41

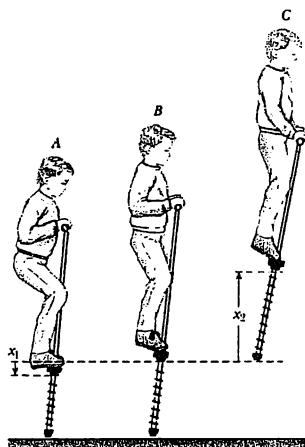


Figura P7.42

molla non è in tensione e la puleggia è priva di attrito. Il blocco scende di 20.0 cm lungo il piano inclinato prima di fermarsi. Trovare il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e il piano inclinato.

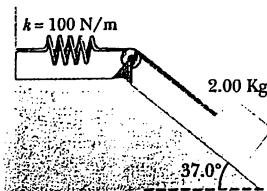


Figura P7.43

11. Si supponga che il piano inclinato sia *liscio* per il sistema descritto nel Problema 43 (Fig. P7.43). Il blocco è lasciato libero dalla quiete con la molla inizialmente non in tensione. (a) Fino a dove scende il blocco lungo il piano inclinato prima di arrestarsi? (b) Qual è la sua accelerazione quando raggiunge il punto più basso? L'accelerazione è costante? (c) Descrivere le trasformazioni di energia che si verificano durante la discesa del blocco.

15. Un blocco di 20.0 kg è connesso ad un altro blocco di 30.0 kg da una corda di massa trascurabile che passa attorno ad una puleggia priva di attrito. Il blocco di 30.0 kg è collegato ad una molla, di massa trascurabile, di costante elastica 250 N/m, come mostrato in Figura P7.45. La molla non è in tensione quando il sistema si trova nelle condizioni indicate in figura, e il piano inclinato è liscio. Il blocco di 20.0 kg è tirato in giù, lungo il piano inclinato, di 20.0 cm (sicché il blocco di 30.0 kg è 40.0 cm al di sopra del pavimento) ed è lasciato libero da fermo. Trovare la velocità di ciascun blocco quando quello di 30.0 kg si trova a 20.0 cm dal pavimento (cioè quando la molla non è in tensione).

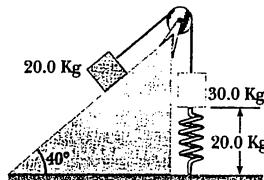


Figura P7.45

16. Una funzione energia potenziale di un sistema è espressa da $U(x) = 3x + 2x^2 - x^3$. (a) Determinare la forza F_x in funzione di x . (b) Per quali valori di x la forza è uguale a zero? (c) Fare un grafico $U(x)$ e $F(x)$ in funzione di x e indicare i punti di equilibrio stabile ed instabile.
17. Un blocco di massa 0.500 kg viene premuto contro una molla orizzontale, di massa trascurabile, provocandone una compressione Δx , come viene mostrato nella Figura P7.47. La costante elastica della molla è di 450 N/m. Il blocco, lasciato libero, si muove lungo un piano orizzontale, privo d'attrito fino al punto B , al fondo di una guida circolare verticale scabra di raggio $R = 1$ m e continua a muoversi in su lungo la guida. La velocità del blocco nel punto B è $v_B = 12.0$ m/s. Il blocco è sottoposto ad una forza media d'attrito di 7.00 N lungo il percorso circolare della guida. Determinare (a) la compressione iniziale della molla, (b) la velocità del blocco alla sommità della guida circolare, posizione T . (c) Il blocco riuscirà a raggiungere la sommità della pista o cadrà prima?
18. Una massa di 1.00 kg scivola verso destra su una

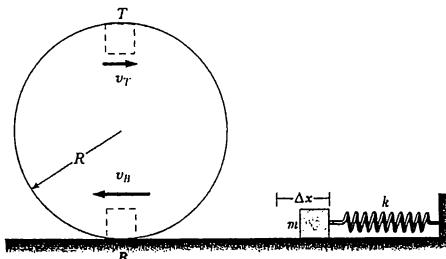


Figura P7.47

superficie con coefficiente d'attrito $\mu = 0.250$ (Fig. P7.48). Quando viene in contatto con una molla di costante elastica $k = 50.0 \text{ N/m}$, la sua velocità è $v_i = 3.00 \text{ m/s}$. La massa si ferma quando la molla è stata compressa di un tratto d . La massa è quindi spinta verso sinistra dalla molla e continua a muoversi al di là della posizione di equilibrio della molla. Infine, la massa si ferma ad una distanza D a sinistra della posizione di equilibrio della molla. Trovare: (a) il tratto d di cui è stata compressa la molla, (b) la velocità v nella posizione di equilibrio della molla, (c) la distanza D , dove la massa si ferma, a sinistra della posizione di equilibrio della molla.

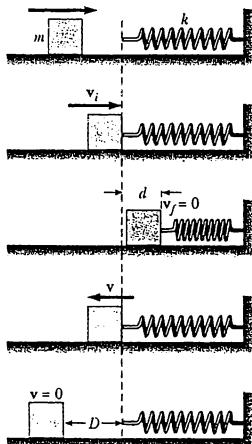
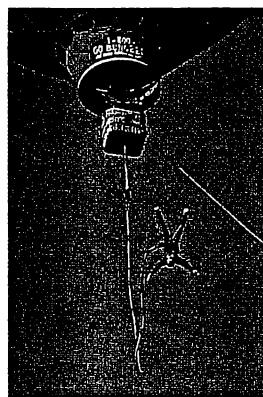


Figura P7.48

49. Nello "sport" pericoloso di gettarsi nel vuoto, un audace studente salta da un aerostato con una corda elastica appositamente progettata fissata alle caviglie, come mostrato nella fotografia. La lunghezza della corda a riposo è 25.0 m, il peso dello studente 700 N, e l'aerostato si trova a 36.0 m sopra la superficie di un fiume.

Calcolare la costante elastica della corda se lo studente viene fermato in tutta sicurezza 4.00 m sopra il fiume.

Salto nel vuoto (Problema 49). (*Gamma*)

50. Una catena uniforme di lunghezza 8.00 m inizialmente giace, stirata per la sua lunghezza, su un tavolo orizzontale. (a) Se il coefficiente di attrito statico fra la catena e il tavolo è 0.600, mostrare che la catena inizierà a scivolare fuori dal tavolo se almeno 3.00 m di essa pendono oltre il bordo del tavolo. (b) Determinare la velocità della catena quando abbandona completamente il tavolo, se il coefficiente di attrito dinamico fra catena e tavolo è 0.400.
51. Un oggetto di massa m è sospeso al tetto di una macchina per mezzo di una fune di lunghezza L come in Figura P7.51a. La macchina e l'oggetto sono inizialmente in moto verso destra a velocità costante v_0 . La macchina si ferma urtando ed attaccandosi a un parabordo come in Figura P7.51b, e con l'oggetto sospeso che oscilla d'un angolo θ . (a) Mostrare che $v_0 = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)}$. (b) Se $L = 1.20 \text{ m}$ e $\theta = 35.0^\circ$, trovare la velocità iniziale della macchina. (*Suggerimento:* la forza esercitata dalla fune sull'oggetto non compie lavoro sull'oggetto).

Problemi al calcolatore

- S1. La funzione energia potenziale di una particella è

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + bx^3 + c$$

dove $k = 300 \text{ N/m}$, $b = -12.0 \text{ N/m}^2$, e $c = -1000 \text{ J}$. Usare il Foglio Elettronico 7.1 per riportare in grafico la funzione da $x = -5.00 \text{ m}$ a $x = +15.0 \text{ m}$. Descrivere il moto generale della particella sotto l'azione di questa funzione energia potenziale. Come cambia il moto quando viene aumentata l'energia iniziale dell'oggetto?

- S2. La funzione energia potenziale associata alla forza fra due atomi è nel modello di potenziale di Lennard-Jones

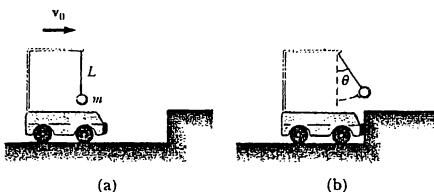


Figura P7.51

$$U(x) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

1. Mentre un atleta corre, l'energia chimica nel corpo viene trasformata in gran parte in energia termica ma anche in energia cinetica. L'energia cinetica dell'atleta poco prima che inizia a salire diventa energia potenziale elastica immagazzinata nell'asta piegata, poi in energia potenziale gravitazionale del corpo sollevato del saltatore, e infine in energia cinetica quando ricade. Quando il saltatore atterra sull'imbottitura, questa energia viene ulteriormente trasformata in energia termica, in gran parte dell'imbottitura.
2. La prima e la terza palla acquistano velocità subito dopo che vengono lanciate, mentre la seconda palla prima rallenta e poi aumenta la sua velocità dopo avere raggiunto la massima altezza. I percorsi di tutte e tre sono porzioni di parabole. Le tre ci mettono tempi diversi per raggiungere il suolo. Comunque, tutte hanno lo stesso modulo per la velocità di impatto poiché tutte sono partite con la stessa energia cinetica e sono sottoposte alla stessa variazione di energia potenziale gravitazionale. In altre parole, $E_{\text{totale}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ è la stessa per tutte e tre le palle.
3. L'attrito dell'aria è una forza non conservativa, per cui si avrà una trasformazione di energia meccanica in energia termica. Durante la salita, la pietra rallenta dalla sua velocità di lancio v fino a zero. Nella discesa, la sua velocità aumenta fino a v_f . A causa dell'attrito dell'aria, l'energia meccanica del sistema quando la pietra arriva al suolo deve essere minore di quella che aveva quando la pietra è stata lanciata. L'energia potenziale del sistema pietra-Terra è la stessa nei punti iniziale e finale, poiché i due punti si trovano alla stessa quota. Quindi, l'energia cinetica finale deve essere minore dell'energia cinetica iniziale. Infine, la velocità finale, v_f , deve essere minore della velocità iniziale, v . In conclusione, poiché il viaggio di ritorno verso il basso va da velocità zero a una velocità più bassa di v , la velocità media sul percorso di ritorno è minore di quella sul percorso di andata verso l'alto, e conseguentemente la pietra impiegherà più tempo a venire giù che a salire.
4. Se si bloccano i freni, allora la macchina slitta sulla strada. La forza d'attrito fra la strada e gli pneumatici porta la macchina a fermarsi. In questo caso, l'energia si trasforma in energia interna degli pneumatici e anche in energia interna trasferita al percorso lungo il quale avviene lo slittamento. Se i freni non vengono bloccati, allora la forza d'attrito maggiore si sviluppa fra le pastiglie dei freni e i dischi (o fra i pattini e i tamburi), sicché l'energia appare come energia interna dentro la struttura dei freni della macchina.
5. Le spire variano la loro *energia interna*, poiché esse aumentano la loro temperatura. Il meccanismo di trasferimento di energia che va nelle spire è la *trasmissione elettrica*, attraverso i fili posti all'interno. L'energia viene trasferita fuori dalle spire per mezzo della *radiazione elettromagnetica*, poiché le spire sono calde e incandescenti. Vi è anche un certo trasferimento di energia termica dalle superfici calde delle spire all'aria. Dopo un breve periodo di riscaldamento, le spire si stabilizzano in temperatura, e l'energia interna non varia ulteriormente. In questa situazione, l'energia che entra e quella che esce sono in equilibrio.
6. L'aumento di temperatura dell'acciaio dolce è un esempio di trasferimento di energia all'interno di un sistema per mezzo del lavoro che appare come un aumento dell'energia interna del sistema. Ciò funziona bene per l'acciaio dolce perché esso è *tenero*. Questa malleabilità consente la deformazione dell'acciaio sotto i colpi del martello. In questo modo, si procura uno spostamento del punto di applicazione della forza da parte del martello, e viene compiuto lavoro. Con l'acciaio duro, si verifica una deformazione molto minore. Quindi, si verifica uno spostamento minore del punto di applicazione della forza, e viene compiuto un lavoro minore. L'acciaio dolce è quindi più efficiente nell'assorbire energia dal martello attraverso il lavoro, e la sua temperatura cresce più rapidamente.

8

Quantità di moto e urti

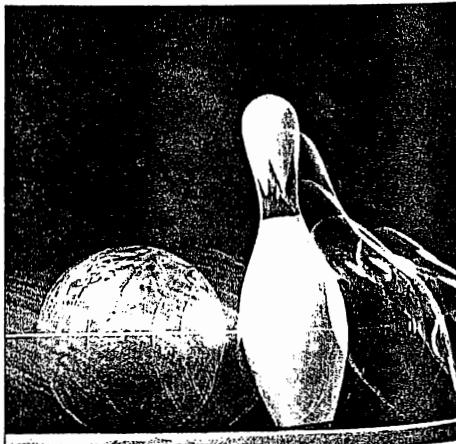
- 8.1 Quantità di moto e sua conservazione
- 8.2 Impulso e quantità di moto
- 8.3 Urto
- 8.4 Urti elasticci e anelasticci in una dimensione
- 8.5 Urti in due dimensioni
- 8.6 Il centro di massa
- 8.7 Moto di un sistema di particelle
- 8.8 Propulsione di un razzo (Facoltativo)

Si consideri ciò che accade quando una palla da golf è colpita dal bastone. La palla è dotata di una velocità iniziale elevatissima in seguito all'urto; conseguentemente, essa può percorrere oltre un centinaio di metri in aria. La palla subisce una grande variazione di velocità in un tempo brevissimo e quindi una grande accelerazione. Per questo motivo, la forza media su di essa durante l'urto è grandissima. Per la terza legge di Newton, il bastone subisce una forza di reazione che è uguale e opposta alla forza sulla palla. Questa forza di reazione causa una variazione di velocità del bastone. Tuttavia, poiché il bastone è più massiccio della palla la variazione di velocità del bastone è molto minore di quella della palla.

Uno dei principali obiettivi di questo capitolo è di consentire una comprensione e una analisi di tali eventi. Prima verrà introdotto il concetto di *quantità di moto*, un termine che sarà spesso usato per descrivere oggetti in movimento. Per esempio, di un giocatore di football molto massiccio si dice spesso che abbia un grande ammontare di quantità di moto quando avanza veloce per il campo. Un giocatore meno massiccio, come un "half-back", può avere una quantità di moto uguale o maggiore se la sua velocità è più grande di quella del giocatore più massiccio. Ciò segue dal fatto che la quantità di moto è definita come il prodotto della massa per la velocità.

Il concetto di quantità di moto conduce a una seconda legge di conservazione, quella della conservazione della quantità di moto. Questa

In seguito all'urto fra la palla da bowling e il birillo, parte della quantità di moto della palla viene trasferita al birillo. Di conseguenza, il birillo acquista quantità di moto ed energia cinetica, e la palla perde quantità di moto ed energia cinetica. Tuttavia, la quantità di moto totale del sistema (palla più birillo) si conserva. (Ben Rose/The Image Bank)



legge è utile principalmente quando si trattano problemi che coinvolgono urti tra oggetti.

8.1 • QUANTITÀ DI MOTO E SUA CONSERVAZIONE

La quantità di moto di una particella di massa m che si muove con velocità v è definita dal prodotto della massa per la velocità¹:

$$\mathbf{p} = mv \quad [8.1]$$

- Definizione di quantità di moto di una particella

La quantità di moto è una grandezza vettoriale, essendo il prodotto di uno scalare, la massa m , e di un vettore, la velocità v . La sua direzione è quella di v , ed ha dimensioni ML/T . Nel sistema SI l'unità di misura della quantità di moto è il $\text{kg} \cdot \text{m/s}$.

Se una particella si muove in una direzione qualsiasi, \mathbf{p} avrà tre componenti, e l'Equazione 8.1 è equivalente alle tre equazioni

$$p_x = mv_x \quad p_y = mv_y \quad p_z = mv_z \quad [8.2]$$

Come si può vedere dalla sua definizione, il concetto di quantità di moto fornisce una distinzione quantitativa tra particelle pesanti e leggere che si muovono con la stessa velocità. Per esempio, la quantità di moto di una palla da bowling che si muove alla velocità di 10 m/s è molto maggiore di quella di una palla da tennis che si muove alla stessa velocità. Newton chiamò il prodotto mv *quantità di moto*.

Si può mettere in relazione la quantità di moto di un punto materiale con la forza risultante agente sulla particella usando la seconda legge del moto di Newton. Nel Capitolo 4 si è appreso che la seconda legge di Newton si può scrivere come $\sum F = ma$. Tuttavia, questa forma si applica solo quando la massa del sistema rimane costante. Nei casi in cui la massa varia col tempo, si dovrebbe usare una forma alternativa della seconda legge di Newton: la variazione nell'unità di tempo della quantità di moto di una particella è uguale alla forza risultante sulla particella.

$$\sum F = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad [8.3]$$

- Seconda legge di Newton per una particella

Dall'Equazione 8.3 si vede che se la forza risultante è zero, la derivata rispetto al tempo della quantità di moto è zero, e perciò la quantità di moto di qualunque oggetto deve essere costante. In altri termini, la quantità di moto di un oggetto è costante quando $\sum F = 0$. Naturalmente, se la particella è isolata (cioè, se non interagisce con il suo ambiente circostante), allora necessariamente $\sum F = 0$ e \mathbf{p} resta invariata.

In un certo senso, la conservazione della quantità di moto è proprio un altro modo di enunciare la prima legge di Newton. Se un oggetto è in movimento, la sua quantità di moto e, conseguentemente, la sua velocità non varia a meno che una forza esterna agisca sul sistema. Un buon esempio è quello di un razzo, a motori spenti, che procede nello spazio lontano da qualsiasi sorgente gravitazionale.

¹ Questa espressione è non relativistica, quindi valida solo quando è $v \ll c$, dove c è la velocità della luce.

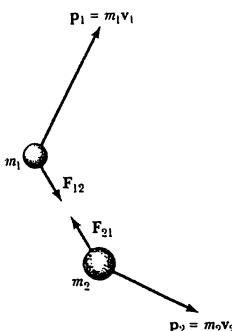


Figura 8.1 Ad un certo istante, la quantità di moto di m_1 è $\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$ e la quantità di moto di m_2 è $\mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2$. Si noti che $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Conservazione della quantità di moto per un sistema a due particelle

Per vedere come si applica il principio della *conservazione della quantità di moto*, si consideri un sistema di due particelle che interagiscono reciprocamente ma restano isolate dal loro ambiente circostante (Fig. 8.1). Cioè, le particelle esercitano una forza l'una sull'altra, ma non sono presenti forze *esterne*. È importante notare il ruolo della terza legge di Newton in questa analisi. Ricordiamo dal Capitolo 4 che la terza legge di Newton stabilisce che le forze su queste due particelle hanno sempre lo stesso modulo e verso opposto; cioè *le forze si manifestano sempre a coppia*. Così, se una forza *interna* (diciamo una forza gravitazionale) agisce sulla particella 1, allora vi dovrà essere una seconda forza *interna*, di modulo uguale e di verso opposto, che agisce sulla particella 2.

Si supponga che a un certo istante, la quantità di moto della particella 1 sia \mathbf{p}_1 e quella della particella 2 sia \mathbf{p}_2 . Applicando la seconda legge di Newton a ciascuna particella, si può scrivere

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

dove \mathbf{F}_{12} è la forza agente sulla particella 1 dovuta alla particella 2 ed \mathbf{F}_{21} è la forza agente sulla particella 2 dovuta alla particella 1. (Queste forze potrebbero essere forze gravitazionali o avere qualche altra origine. La sorgente delle forze non è importante per la presente discussione). La terza legge di Newton dice che \mathbf{F}_{12} ed \mathbf{F}_{21} hanno lo stesso modulo e verso opposto. Ossia, esse formano una coppia azione-reazione, ed $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Si può anche esprimere questa condizione come

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \quad \text{o come} \quad \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0.$$

Poiché la derivata rispetto al tempo della quantità di moto, $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, è zero, si conclude che la quantità di moto *totale*, \mathbf{p}_{tot} , resta costante; cioè

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{costante} \quad [8.4]$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \quad [8.5]$$

dove \mathbf{p}_{1i} e \mathbf{p}_{2i} sono i valori iniziali e \mathbf{p}_{1f} e \mathbf{p}_{2f} sono i valori finali della quantità di moto durante l'intervallo di tempo, dt , durante il quale la coppia di reazione interagisce. L'Equazione 8.5 nella forma dei suoi componenti dice che le quantità di moto totali nelle direzioni x , y e z si *conservano tutte indipendentemente*; cioè

$$p_{ix} = p_{fx} \quad p_{iy} = p_{fy} \quad p_{iz} = p_{ fz} \quad [8.6]$$

Questo risultato è noto come il principio di *conservazione della quantità di moto*. Esso è considerato come una delle più importanti leggi della meccanica. Lo si può enunciare come segue:

Conservazione della quantità di moto

Tutte le volte che due particelle isolate interagiscono tra di loro, la loro quantità di moto totale si conserva.

Cioè, la quantità di moto totale di un sistema isolato è uguale in ogni istante alla sua quantità di moto totale iniziale.

Si può anche descrivere la conservazione della quantità di moto in un altro modo. Poiché si richiede che il sistema sia isolato, non sono presenti forze esterne, e la quantità di moto totale del sistema si conserva. Allora, la conservazione della quantità di moto è un enunciato alternativo e più generale della terza legge di Newton.

Si noti che non si è stabilito nulla circa la natura delle forze agenti sul sistema. Ciò che si richiede è soltanto che le forze siano *interne* al sistema. Così, la quantità di moto di un sistema a due particelle è costante *indipendentemente* dalla natura delle forze interne. Si può usare un argomento simile ed equivalente per mostrare che la legge di conservazione della quantità di moto si applica pure a un sistema di molte particelle.

Fisica ragionata 1

Una palla da baseball è lanciata in aria a un certo angolo verso l'alto rispetto al suolo. Mentre essa si muove lungo la sua traiettoria, la sua velocità e, quindi, la sua quantità di moto variano continuamente. Questa è una violazione della conservazione della quantità di moto?

Ragionamento Il principio di conservazione della quantità di moto afferma che la quantità di moto di una particella o di un sistema si conserva *in assenza di forze esterne*. Una palla lanciata in aria è soggetta alla forza esterna di gravità, cosicché non ci possiamo aspettare che la sua quantità di moto si conservi. Se consideriamo ciò un po' più dettagliatamente, la forza gravitazionale è nella direzione verticale, per cui in effetti è soltanto la componente verticale della quantità di moto che varia a causa di questa forza. Nella direzione orizzontale, non vi è forza (trascurando l'attrito dell'aria), per cui la componente orizzontale della quantità di moto si conserva. Nel Capitolo 3 abbiamo usato la stessa idea per affermare che la componente orizzontale della *velocità* di un proiettile rimane costante.

Se noi consideriamo la palla da baseball e la Terra come un sistema di particelle, allora la forza di gravità è una forza interna per questo sistema. La quantità di moto del sistema palla-Terra rimane invariata. L'impulso verso il basso impresso dai piedi del lanciatore trasmette alla Terra un moto iniziale. Mentre la palla sale e ricade, la Terra inizialmente si abbassa e poi risale (sebbene impercettibilmente) a causa della forza gravitazionale diretta verso l'alto della palla, cosicché la quantità di moto totale del sistema rimane invariata.

Esempio 8.1 Il rinculo di una macchina lanciatrice

Un giocatore di baseball usa una macchina lanciatrice per allenarsi a battere. Egli piazza la macchina di 50 kg su uno stagno ghiacciato come in Figura 8.2. La macchina lancia una palla da baseball di 0.15 kg orizzontalmente con una velocità di 36 m/s. Qual è la velocità di rinculo della macchina?

Ragionamento Prendiamo il sistema costituito dalla palla e dalla macchina lanciatrice. A causa della forza di gravità e della forza normale, il sistema non è realmente isolato. Tuttavia, entrambe queste forze sono dirette perpendicolarmente al moto del sistema. Quindi, la

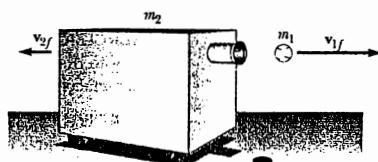


Figura 8.2 (Esempio 8.1) Quando la palla da baseball viene lanciata orizzontalmente verso destra, la macchina lanciatrice rincula verso sinistra. La quantità di moto totale del sistema prima e dopo il lancio è zero.

quantità di moto è costante lungo la direzione x poiché non agiscono forze esterne in questa direzione (assumendo trascurabile l'attrito della superficie ghiacciata).

Soluzione La quantità di moto totale del sistema prima del lancio è zero ($m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = 0$). Allora, la quantità di moto totale dopo il lancio sarà zero; cioè,

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = 0$$

Con $m_1 = 0.15 \text{ kg}$, $v_{1i} = 36i \text{ m/s}$, ed $m_2 = 50 \text{ kg}$, risolvendo rispetto a v_{2f} , troviamo che la velocità di rinculo della macchina lanciatrice è

$$v_{2f} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1f} = -\left(\frac{0.15 \text{ kg}}{50 \text{ kg}}\right) (36i \text{ m/s}) = -0.11i \text{ m/s}$$

Il segno negativo di v_{2f} indica che la macchina lanciatrice si muoverà verso sinistra dopo il lancio, nel verso opposto alla palla da baseball. In termini della terza legge di Newton, per ogni forza (verso sinistra) sulla macchina lanciatrice, vi è una forza uguale e opposta (verso destra) sulla palla. Poiché la macchina lanciatrice è molto più massiva della palla, la sua accelerazione e la conseguente velocità sarà molto minore dell'accelerazione e della velocità della palla.

Esempio 8.2 Decadimento di un kaone in quiete

Un mesone è una particella nucleare di massa maggiore di quella di un elettrone ma minore di quella di un protone o di un neutrone. Un tipo di mesone, chiamato kaone neutro (K^0), decade in una coppia di pioni (π^+ e π^-) con carica opposta ma di massa uguale, come in Figura 8.3. Un pione è una particella associata alla forza nucleare forte che lega insieme protoni e neutroni nel nucleo. Assumendo che il kaone sia inizialmente fermo, si dimostrò che dopo il decadimento, i due pioni avranno quantità di moto uguali in modulo ma di verso opposto.

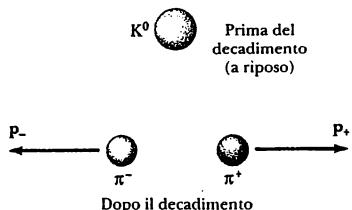


Figura 8.3 (Esempio 8.2) Un kaone in quiete decade spontaneamente in una coppia di pioni di carica opposta. I pioni si allontanano con quantità di moto uguali in modulo ma di verso opposto.

Soluzione Il decadimento del kaone, rappresentato in Figura 8.3, si può scrivere

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Se si pone con p_i la quantità di moto del pione positivo e con p_{-i} quella del pione negativo dopo il decadimento, allora la quantità di moto finale del sistema si può scrivere

$$p_f = p_i + p_{-i}$$

Poiché il kaone è fermo prima del decadimento, si sa che $p_i = 0$. Inoltre, poiché la quantità di moto si conserva, $p_f = p_i = 0$, così che

$$\begin{aligned} & p_i + p_{-i} = 0 \\ & \text{oossia} \\ & p_+ = -p_- \end{aligned}$$

Così, si conclude che i due vettori quantità di moto dei pioni sono uguali in modulo ma di verso opposto. Tuttavia, poiché i pioni hanno massa uguale, essi avranno uguali velocità ma in verso opposto.

ESERCIZIO 1 La quantità di moto di una macchina di 1250 kg è uguale alla quantità di moto di un camion di 5000 kg che viaggia alla velocità di 10 m/s. Qual è la velocità della macchina? Risposta 400 m/s

ESERCIZIO 2 Una macchina di 1500 kg che si muove alla velocità di 15 m/s urta contro un palo della luce e si ferma in 0.3 s. Trovare la forza media che si esercita sulla macchina durante l'urto. Risposta $7.5 \times 10^4 \text{ N}$

ESERCIZIO 3 Un ragazzo di 60 kg e una ragazza di 40 kg, entrambi su dei pattini, sono fermi l'uno di fronte all'altra. La ragazza spinge il ragazzo, fornendogli una velocità diretta verso est di 4 m/s. Descrivere il conseguente moto della ragazza. (Si trascuri l'attrito.) Risposta La ragazza si muove verso ovest a 6 m/s

8.2 • IMPULSO E QUANTITÀ DI MOTO

Come abbiamo visto, la quantità di moto di una particella varia se una forza risultante agisce sulla particella. Si assuma che una singola forza F agisca sulla particella e che questa forza possa variare nel tempo. Per la seconda legge di Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, ossia

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt \quad [8.7]$$

Integrando questa espressione, si ottiene la variazione di quantità di moto della particella. Se la quantità di moto è \mathbf{p}_i all'istante t_i e \mathbf{p}_f all'istante t_f , l'integrazione dell'Equazione 8.7 dà

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad [8.8]$$

L'integrale della forza rispetto al tempo durante il quale essa agisce si chiama **impulso** della forza. L'impulso della forza F durante l'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è un vettore definito dalla relazione

$$I \equiv \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p} \quad [8.9]$$

- **Impulso di una forza**

- **Teorema dell'impulso**

Cioè, l'**impulso** della forza F è uguale alla variazione della quantità di moto della particella². Questa affermazione, nota come **teorema dell'impulso**, è equivalente alla seconda legge di Newton. Da questa definizione si vede che l'impulso è un vettore il cui modulo è uguale all'area sottesa dalla curva forza-tempo (Fig. 8.4). In questa figura, si assume che la forza vari nel tempo in modo completamente generale e che sia diversa da zero nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$. La direzione dell'impulso è la stessa della variazione della quantità di moto, e, inoltre, l'impulso ha le dimensioni di una quantità di moto, cioè ML/T . Si noti che l'impulso *non* è una proprietà della particella, ma è una grandezza che misura l'entità della variazione della quantità di moto per effetto di una forza esterna. Quindi, quando si imprime un impulso ad una particella, ciò significa che una certa quantità di moto viene trasferita da un agente esterno alla particella.

Poiché la forza generalmente varia nel tempo come è mostrato in Figura 8.4a, è conveniente definire una forza media (media temporale) \bar{F} , data da

$$\bar{F} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad [8.10]$$

dove $\Delta t = t_f - t_i$. L'Equazione 8.9 può essere quindi riscritta nel modo seguente:

$$I = \Delta\mathbf{p} = \bar{F} \Delta t \quad [8.11]$$

Questa forza media, indicata nella Figura 8.4b, può essere immaginata come la forza costante che, nell'intervallo di tempo Δt , imprimerebbe alla particella lo stesso impulso impresso dalla forza variabile.

² In generale, se sulla particella agiscono forze diverse, l'impulso totale impresso alla particella dalle forze agenti su di essa costituisce la variazione della quantità di moto della particella.

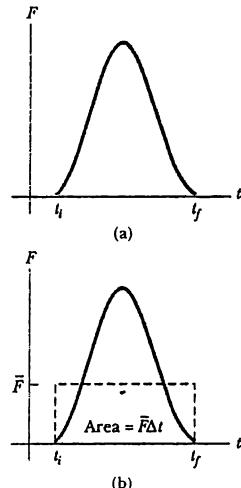


Figura 8.4 (a) La forza agente su una particella può variare col tempo. L'impulso è dato dall'area sotto la curva forza-tempo. (b) La forza media (linea orizzontale) dovrebbe imprimere alla particella lo stesso impulso nel tempo Δt della forza descritta in (a).

In linea di principio, se la forza \mathbf{F} è nota in funzione del tempo, è possibile calcolare l'impulso usando l'Equazione 8.9. Il calcolo è particolarmente semplice se la forza che agisce sulla particella è costante. In questo caso, $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$ e l'Equazione 8.11 diventa

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t \quad [8.12]$$

In molte situazioni reali, useremo la cosiddetta **approssimazione impulsiva**: in questa approssimazione, si assume che una delle forze agenti sulla particella agisca per un breve intervallo di tempo, ma sia molto più intensa di tutte le altre forze agenti. Questa approssimazione è particolarmente utile nello studio degli urti, cioè quando la durata dell'interazione è molto breve e, in questo caso, la forza è detta *forza impulsiva*. Per esempio, quando una palla da baseball viene colpita dalla mazza, la durata dell'urto è circa 0.01 s, e la forza media esercitata dalla mazza sulla palla durante questo intervallo di tempo è tipicamente di parecchie migliaia di newton. Essa è molto maggiore della forza di gravità e l'approssimazione impulsiva è giustificata. Usando questa approssimazione, è importante ricordare che p_i e p_f sono le quantità di moto immediatamente prima e dopo l'urto. Quindi, nell'approssimazione impulsiva, la particella si muove pochissimo durante l'urto.

Fisica ragionata 2

Una macchina da competizione corre lungo una pista circolare a velocità costante. Per una data porzione della pista, qual è la direzione orientata del vettore impulso? Una volta che la macchina sia ritornata al punto di partenza, non vi è variazione risultante della quantità di moto. Quindi, secondo il teorema dell'impulso, non vi dovrebbe essere alcun impulso. Tuttavia, una forza non nulla agisce durante tutto l'intervallo di tempo relativo a un giro di pista. Come è possibile che l'impulso sia zero?

Ragionamento Per il moto attorno a una piccola porzione della pista, l'orientazione del vettore impulso è la stessa di quella della variazione della quantità di moto. La direzione orientata del vettore che rappresenta la variazione della quantità di moto è la stessa di quella del vettore che rappresenta la variazione della velocità. Dalla nostra discussione sul moto circolare, sappiamo che la direzione orientata del vettore che rappresenta la variazione di velocità è quella del vettore accelerazione, la quale è diretta verso il centro della circonferenza, poiché si tratta di un moto circolare uniforme. Quindi, il vettore impulso è diretto verso il centro della traiettoria circolare.

Se la macchina compie un giro completo di pista, non vi è una variazione risultante della quantità di moto, sicché l'impulso risultante deve essere zero. Tenendo in mente che la forza che causa il moto circolare è l'attrito fra gli pneumatici e la strada, e che questa forza è sempre diretta verso il centro della circonferenza, possiamo dedurre il valore nullo dell'impulso totale. Per ogni posizione della macchina lungo il percorso, vi è un altro punto del suo moto sulla circonferenza diametralmente opposto, nel quale il vettore forza sarà diretto nel verso opposto. Così, quando sommiamo i vettori impulso $\mathbf{F} dt$ lungo tutta la circonferenza, essi si elidono a coppie per dare un impulso risultante nullo.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Negli incontri di boxe del XIX secolo, si usavano i pugni nudi. Nella boxe moderna, i pugili combattono con guanti imbottiti. In che modo ciò protegge meglio dai danni il cervello dei pugili? I pugili spesso "assecondano il colpo". In che modo questa manovra protegge la loro incolumità?

Esempio 8.3 I paraurti sono resistenti?

In un test di urto, un'auto di massa 1500 kg urta contro un muro come indicato in Figura 8.5. Le velocità iniziale e finale dell'auto sono $v_i = -15.0 \text{ m/s}$ e $v_f = 2.6 \text{ m/s}$, rispettivamente. Se la durata dell'urto è di 0.150 s, si determini l'impulso dovuto all'urto e la forza media esercitata sull'automobile.

Soluzione Le quantità di moto iniziale e finale dell'auto sono date da

$$p_i = mv_i = (1500 \text{ kg}) (-15.0 \text{ m/s}) = -2.25 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p_f = mv_f = (1500 \text{ kg}) (2.6 \text{ m/s}) = 0.39 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

L'impulso, che è uguale alla variazione della quantità di moto, è

$$\begin{aligned} I &= \Delta p = p_f - p_i \\ &= 0.39 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} - (-2.25 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) \end{aligned}$$

$$I = 2.64 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

La forza media esercitata sull'auto è

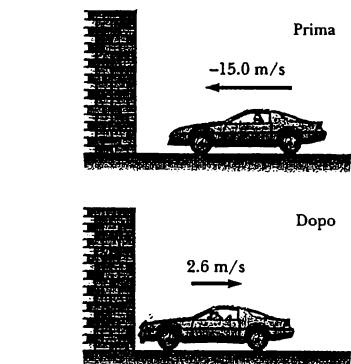


Figura 8.5 (Esempio 8.3)

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0.150 \text{ s}} = 1.76 \times 10^5 \text{ N}$$

ESERCIZIO 4 Un ragazzo fa rimbalzare un pallone sul pavimento. L'impulso impresso dal pavimento al pallone è 2.00 N · s durante il contatto di 1/800 s. Qual è l'intensità della forza media esercitata dal pavimento sul pallone? Risposta 1.60 kN verso l'alto

ESERCIZIO 5 Una palla da baseball di 0.15 kg viene lanciata con una velocità di 40 m/s. Essa è colpita direttamente all'indietro verso il lanciatore con una velocità di 50 m/s. (a) Qual è l'impulso ricevuto dalla palla? (b) Trovare la forza media esercitata dal battitore sulla palla se il contatto dura 2.0×10^{-3} s.

Risposta (a) 13.5 kg · m/s (b) 6.75 kN

8.3 • URTI

In questo paragrafo, la legge di conservazione della quantità di moto sarà applicata allo studio di ciò che avviene quando due particelle si urtano. Assumeremo che la forza impulsiva dovuta all'urto sia molto più intensa di tutte le forze esterne.

L'urto può essere il risultato di un contatto fisico fra due oggetti, come descritto nella Figura 8.6a: questa situazione è osservabile quando si urtano due oggetti macroscopici, per esempio due palle da biliardo o una palla da baseball e la mazza. Il significato di *urto* deve però essere esteso, poiché "contatto" è maldefinito e, persino senza senso, su scala submicroscopica. Con più precisione, si può dire che le forze impulsive, che si manifestano nell'urto, hanno origine nell'interazione elettrostatica degli elettroni degli atomi alla superficie dei due corpi.

Per capire questa distinzione tra urti microscopici e macroscopici, si consideri l'urto di un protone con una particella alfa (il nucleo di un atomo di elio), così come è rappresentato in Figura 8.6b. Poiché le due particelle sono caricate positivamente, esse si respingono.

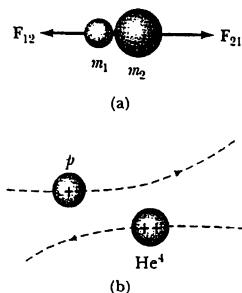


Figura 8.6 (a) Urto fra due corpi che vengono a contatto l'uno con l'altro. (b) "Urto" fra due particelle caricate.

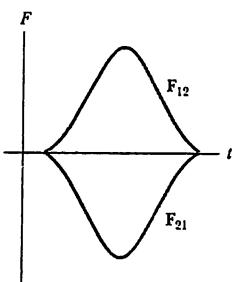


Figura 8.7 La forza in funzione del tempo per due particelle che si urtano rappresentate in Figura 8.6a. Si noti che $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Quando due particelle di massa m_1 ed m_2 si urtano, le forze impulsive possono variare nel tempo nel modo complicato descritto in Figura 8.7. Se \mathbf{F}_{12} è la forza agente su m_1 , dovuta ad m_2 , allora la variazione della quantità di moto di m_1 , causata dall'urto, è data dall'Equazione 8.8:

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{12} dt$$

Similmente, se \mathbf{F}_{21} è la forza che agisce su m_2 dovuta ad m_1 , la variazione della quantità di moto di m_2 è

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{21} dt$$

La terza legge di Newton, però, impone che le due forze siano uguali ed opposte, cioè $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. (Questa uguaglianza è indicata graficamente nella Fig. 8.7). Si può concludere, quindi, che

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{p}_1 &= -\Delta \mathbf{p}_2 \\ \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 &= 0\end{aligned}$$

Essendo la quantità di moto totale del sistema $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, si conclude che la variazione della quantità di moto del sistema, dovuta all'urto, è nulla, cioè

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{costante}$$

Questo è esattamente il risultato che ci si doveva attendere se le forze esterne agenti sul sistema fossero state nulle (Paragrafo 8.2) oppure se si assume che le forze esterne agiscano per un tempo troppo breve per apportare una variazione significativa alla quantità di moto. Comunque, il risultato è ancora valido se si considera il moto appena dopo l'urto. Poiché le forze impulsive sono interne al sistema, esse non influenzano la quantità di moto totale del sistema. Perciò, per ogni tipo di urto, la quantità di moto totale del sistema appena prima dell'urto è uguale alla quantità di moto totale del sistema appena dopo l'urto.

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Stai guardando un film su superman e noti che superman sta sospeso in aria e scaglia un pianoforte su qualche individuo cattivo rimanendo fermo in aria. Cosa c'è di sbagliato in questa scena?

Esempio 8.4 L'utilitaria tampona la Cadillac

Una grossa macchina di lusso, di massa 1800 kg, ferma ad un semaforo, viene tamponata da un'utilitaria di massa 900 kg. Le due auto rimangono incastrate. Se l'utilitaria viaggiava a 20 m/s prima dell'urto, qual è la velocità delle due auto incastrate dopo l'urto?

Ragionamento La quantità di moto totale del sistema (le due macchine) prima dell'urto è uguale alla quantità di moto totale del sistema dopo l'urto perché la quantità di moto si conserva.

Soluzione Il modulo della quantità di moto totale del sistema prima dell'urto è uguale a quello dell'utilitaria poiché la macchina più grande è inizialmente ferma:

$$p_i = m_i v_i = (900 \text{ kg}) (20 \text{ m/s}) = (1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s})$$

Dopo l'urto, la massa in movimento è uguale alla somma delle masse delle due auto, e la relativa quantità di moto è

$$p_f = (m_1 + m_2) v_f = (2700 \text{ kg}) v_f$$

Uguagliando la quantità di moto prima dell'urto a quella dopo l'urto, e ricavando la velocità finale v_f , si ha

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{(1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s})}{2700 \text{ kg}} = (6.67 \text{ m/s})$$

8.4 • URTI ELASTICI E ANELASTICI IN UNA DIMENSIONE

Come si è visto, la quantità di moto si conserva per ogni tipo di urto. L'energia cinetica, invece, in generale non si conserva in un urto perché parte di essa viene convertita in energia termica, energia potenziale elastica quando i corpi si deformano, ed energia rotazionale.

Si definisce urto anelastico l'urto in cui l'energia cinetica totale non si conserva (anche se la quantità di moto si conserva). L'urto di una palla di gomma contro una superficie rigida è anelastico, poiché parte dell'energia cinetica della palla va perduta quando questa si deforma durante il contatto con la superficie. Quando due oggetti si urtano e rimangono uniti l'uno all'altro, parte dell'energia cinetica viene perduta, e l'urto è detto perfettamente anelastico. Per esempio, se due automobili si urtano e restano attaccate, come nell'Esempio 8.4, dopo l'urto si muoveranno con la stessa velocità; quando un meteorite cade sulla Terra, vi rimane sepolto, e l'urto si può considerare perfettamente anelastico.

Un urto elastico è definito un urto in cui l'energia cinetica totale si conserva (così come la quantità di moto). L'urto fra due palle da biliardo, o fra le molecole dell'aria e le pareti del recipiente, a temperatura ambiente, è praticamente elastico. In realtà, gli urti nel mondo macroscopico, quali quelli fra palle da biliardo, sono solo approssimativamente elastici, poiché in tali urti vi è sempre una certa deformazione degli oggetti, e quindi una certa dissipazione di energia cinetica; a livello atomico e subatomico, invece, si possono avere delle vere collisioni elastiche. Si noti, comunque, che gli urti elastici e perfettamente anelastici sono casi limite, e nella maggior parte delle situazioni reali ci si trova in condizioni intermedie.

In questo paragrafo saranno trattati gli urti in una dimensione, considerando i due casi estremi: (1) urti perfettamente anelastici e (2) urti elastici. La differenza essenziale fra questi due tipi di urto è che la quantità di moto si conserva in entrambi i casi, mentre l'energia cinetica si conserva solo nel caso dell'urto elastico.

Urto perfettamente anelastici

Consideriamo due particelle di massa m_1 ed m_2 che si muovono con velocità iniziali v_{1i} e v_{2i} lungo una retta, come mostrato in Figura 8.8. Se le due particelle urtano centralmente, rimangono unite e si muovono, dopo l'urto, con la velocità comune v_f , l'urto è perfettamente anelastico. Possiamo dire perciò che la quantità di moto totale del sistema prima dell'urto è uguale alla quantità di moto totale della particella composta dalle due particelle dopo l'urto, cioè

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \quad [8.13]$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad [8.14]$$

Urti elastici

Consideriamo ora due particelle che subiscono un urto centrale elastico (Fig. 8.9). In questo caso, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica e, quindi, possiamo scrivere

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad [8.15]$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad [8.16]$$

• Urto anelastico

• Urto elastico

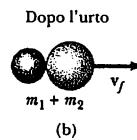
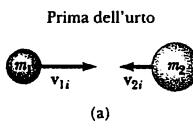


Figura 8.8 Urto centrale perfettamente anelastico tra 2 particelle.

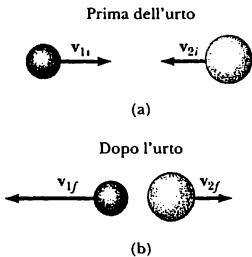


Figura 8.9 Urto centrale elastico tra due particelle.

dove v è positiva quando la particella si muove verso destra e negativa quando si muove verso sinistra.

In un tipico caso di urto elastico, vi sono due quantità incognite e le Equazioni 8.15 e 8.16 possono essere risolte simultaneamente per calcolarle. Un approccio alternativo, che richiede una piccola elaborazione matematica dell'Equazione 8.16, spesso semplifica la soluzione. Per vederlo, cancelliamo il fattore $\frac{1}{2}$ dall'Equazione 8.16 e riscriviamola

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

I termini contenenti m_1 sono stati raccolti nel membro a sinistra dell'equazione, e quelli contenenti m_2 nel membro a destra. Scomponendo in fattori entrambi i membri dell'equazione, si ha

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) (v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) (v_{2f} + v_{2i}) \quad [8.17]$$

Separiamo ora i termini che contengono m_1 ed m_2 nell'equazione della conservazione della quantità di moto (Eq. 8.15)

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \quad [8.18]$$

Il risultato finale si ottiene dividendo l'Equazione 8.17 per l'Equazione 8.18

$$\begin{aligned} v_{1i} + v_{1f} &= v_{2f} + v_{2i} \\ v_{1i} - v_{2i} &= -(v_{1f} - v_{2f}) \end{aligned} \quad [8.19]$$

Questa equazione, combinata con l'equazione della conservazione della quantità di moto, sarà usata per risolvere problemi di urti perfettamente elastici. Si noti che l'Equazione 8.19 dice che la velocità relativa dei due oggetti prima dell'urto, $v_{1i} - v_{2i}$, è uguale, e di segno opposto, alla velocità relativa dei due oggetti dopo l'urto, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Si supponga che le masse e le velocità iniziali delle due particelle siano note. Le Equazioni 8.15 e 8.16 possono essere risolte per calcolare le velocità finali, in funzione delle velocità iniziali, poiché si hanno due equazioni e due incognite.

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad [8.20]$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad [8.21]$$

È importante ricordare che i segni di v_{1i} e v_{2i} devono essere inclusi nelle Equazioni 8.20 e 8.21, poiché si tratta di vettori. Per esempio, se m_2 inizialmente si muove verso sinistra, v_{2i} è negativa.

Consideriamo ora alcuni casi particolari. Se $m_1 = m_2$, si vede che $v_{1f} = v_{2i}$ e $v_{2f} = v_{1i}$, cioè due particelle con masse uguali in un urto elastico si scambiano le velocità. Ciò è quanto si osserva nell'urto fra due palle da biliardo.

Se inizialmente m_2 è in quiete, $v_{2i} = 0$, e le Equazioni 8.20 e 8.21 diventano

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad [8.22]$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad [8.23]$$

Se è $m_1 \gg m_2$, si vede dalle Equazioni 8.22 e 8.23 che $v_{1f} \approx v_{1i}$ e $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Cioè, quando una particella pesante urta una particella molto più leggera inizialmente in quiete, la particella pesante continua il suo moto praticamente

indisturbata, mentre la particella leggera rimbalza con una velocità circa doppia della velocità iniziale della particella pesante. Una collisione di questo tipo si ha quando un atomo pesante in movimento, per esempio un atomo di uranio, urta contro un atomo leggero, come l'idrogeno.

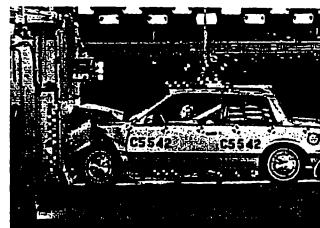
Se è invece $m_2 \gg m_1$, ed m_2 è inizialmente in quiete, dalle Equazioni 8.22 e 8.23 si ha $v_{1f} \approx -v_{1i}$ e $v_{2f} \approx 0$, cioè, quando una particella leggera urta una particella pesante, inizialmente in quiete, la particella leggera inverte la propria velocità, mentre quella pesante rimane approssimativamente in quiete. Questo è ciò che accade quando una pallina di vetro viene lanciata contro una palla da bowling ferma.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

La riparazione delle automobili dopo gli urti muove un grande giro d'affari. Sembra che di poter risparmiare molti soldi se le macchine fossero costruite con gomma dura, di modo che esse possano urtare approssimativamente in modo elastico e rimbalzare l'una contro l'altra senza ammaccature. Perché le macchine non sono costruite con gomma dura?

PROBLEMA CONCETTUALE 4

In un urto perfettamente anelastico fra due oggetti, sotto quali condizioni tutta l'energia cinetica iniziale si trasforma in altre forme di energia?



La fotografia di un test di urto per una macchina (urto anelastico) illustra che la maggior parte dell'energia cinetica iniziale della macchina è trasformata in energia di deformazione del veicolo. Perché le cinture di sicurezza e gli airbag prevedono ferite serie in tali urti?

Esempio 8.5 Moderazione dei neutroni

In un reattore nucleare, quando un atomo di $^{235}_{92}\text{U}$ si disintegra, in un processo chiamato fissione, si producono neutroni. Questi neutroni si muovono a circa 10^7 m/s e devono essere rallentati fino a circa 10^3 m/s prima che essi prendano parte a un successivo evento di fissione. Essi vengono rallentati facendoli passare attraverso un materiale solido o liquido chiamato *moderatore*. Il processo di rallentamento coinvolge urti elastici. Dimostrare che un neutrone perde la maggior parte della sua energia se urta elasticamente con un moderatore contenente nuclei leggeri, come il deuterio (in "acqua pesante", D_2O) o il carbonio (nella grafite).

Ragionamento Poiché si conserva sia la quantità di moto che l'energia, si possono applicare le Equazioni 8.22 e 8.23 sull'urto centrale di un neutrone con un nucleo del moderatore.

Soluzione Assumiamo che il nucleo moderatore, di massa m_m , sia inizialmente in quiete, e che il neutrone, di massa m_n , abbia velocità iniziale v_{ni} e urti con esso. L'energia cinetica iniziale del neutrone è

$$K_{ni} = \frac{1}{2} m_n v_{ni}^2$$

Dopo l'urto, il neutrone ha un'energia cinetica data da $\frac{1}{2} m_n v_{nf}^2$, dove v_{nf} è data dall'Equazione 8.22. Questa energia può essere scritta

$$K_{nf} = \frac{1}{2} m_n v_{nf}^2 = \frac{m_n}{2} \left(\frac{m_n - m_m}{m_n + m_m} \right)^2 v_{ni}^2$$

La "frazione" dell'energia cinetica totale posseduta dal neutrone dopo l'urto è quindi

$$(1) \quad f_n = \frac{K_{nf}}{K_{ni}} = \left(\frac{m_n - m_m}{m_n + m_m} \right)^2$$

Da questo risultato si vede che l'energia finale del neutrone è piccola quando m_m è circa uguale ad m_n ed è nulla quando $m_n = m_m$.

Possiamo calcolare l'energia del nucleo del moderatore, dopo l'urto, usando l'Equazione 8.23

$$K_{mf} = \frac{1}{2} m_m v_{mf}^2 = \frac{2 m_n^2 m_m}{(m_n + m_m)^2} v_{ni}^2$$

Quindi, la frazione dell'energia cinetica totale trasferita al nucleo del moderatore è

$$(2) \quad f_m = \frac{K_{mf}}{K_{ni}} = \frac{4 m_n m_m}{(m_n + m_m)^2}$$

Si noti che, poiché l'energia totale si conserva, l'Equazione (2) può essere ottenuta dalla (1) usando la condizione $f_n + f_m = 1$, cioè $f_m = 1 - f_n$.

Supponiamo di usare acqua pesante come moderatore. L'urto di neutroni con nuclei di deuterio nel D_2O ($m_m = 2 m_n$) dà $f_n = 1/9$ ed $f_m = 8/9$, cioè l'89% dell'energia cinetica dei neutroni viene trasferita ai nuclei di deuterio. In pratica, l'efficienza del moderatore è inferiore, perché le collisioni centrali sono poco probabili.

Quale sarebbe il risultato se si usasse grafite come moderatore?

Esempio 8.6 Urto tra due corpi, in presenza di una molla

Un blocco di massa $m_1 = 1.60 \text{ kg}$ si muove su un piano liscio orizzontale, verso destra, ad una velocità di 4.00 m/s ed urta una molla, solidale con un secondo blocco di massa $m_2 = 2.10 \text{ kg}$, in moto verso sinistra ad una velocità di 2.50 m/s (Fig. 8.10a). La costante elastica della molla è 600 N/m . (a) Nell'istante in cui m_1 si muove verso destra con velocità di 3.00 m/s , come in Figura 8.10b, determinare la velocità di m_2 .

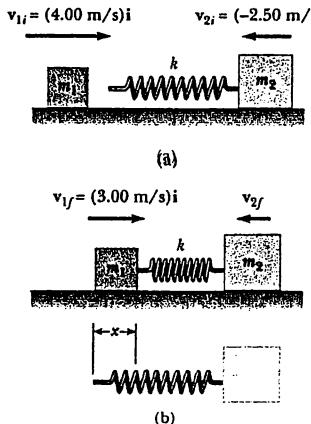


Figura 8.10 (Esempio 8.6)

Soluzione Si osservi che la velocità iniziale di m_2 è $(-2.50 \text{ m/s})\mathbf{i}$, poiché il suo moto avviene verso sinistra. Dalla conservazione della quantità di moto del sistema si ha:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ (1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg})(-2.50 \text{ m/s}) &= (1.60 \text{ kg})(3.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg})v_{2f} \\ v_{2f} &= -1.74 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Il valore negativo di v_{2f} significa che m_2 si sta muovendo ancora verso sinistra all'istante considerato.

(b) Determinare di quanto si comprime la molla in questo istante.

Soluzione Per determinare il valore della compressione della molla, x , riportata in Figura 8.10b, si può utilizzare la conservazione dell'energia, poiché non agiscono forze d'attrito sul sistema. Si ha pertanto:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Sostituendo nell'espressione i valori forniti ed il risultato ricavato in (a) si ottiene

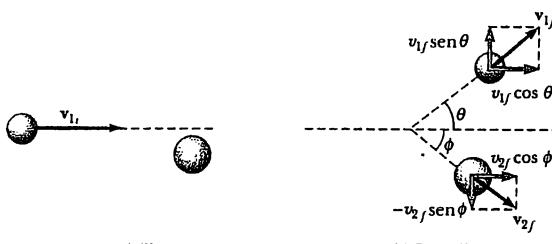
$$x = 0.173 \text{ m}$$

ESERCIZIO 6 Determinare la velocità di m_1 e la compressione della molla nell'istante in cui m_2 si arresta.
Risposta 0.719 m/s sulla destra; 0.251 m.

ESERCIZIO 7 Una massa di 2.5 kg , che si muove inizialmente a 10 m/s , subisce un urto centrale perfettamente anelastico con una massa di 5.0 kg inizialmente ferma. (a) Trovare la velocità finale della particella composta. (b) Quanta energia cinetica si è dissipata nell'urto? Risposta (a) 3.33 m/s (b) 83.4 J .

8.5 • URTI IN DUE DIMENSIONI

Nel Paragrafo 8.1 abbiamo visto che la quantità di moto totale di un sistema costituito da due particelle si conserva quando il sistema è isolato (cioè quando nessuna forza esterna agisce sul sistema). Nel caso generale dell'urto di due particelle, nello spazio tridimensionale, la legge di conservazione della quantità di moto implica che la quantità di moto totale in ciascuna direzione resti costante. Comunque, in un piano avviene un importante sottoinsieme di urti. Il gioco del biliardo è un esempio familiare che coinvolge urti multipli tra oggetti che si spostano su una superficie bidimensionale. Per urti in due dimensioni, otteniamo due equazioni per la conservazione della quantità di moto:



(a) Prima dell'urto

(b) Dopo l'urto

Figura 8.11 Urto radente elastico fra due particelle.

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

Consideriamo ora un problema in due dimensioni, nel quale una particella di massa m_1 urta elasticamente un'altra particella, di massa m_2 , inizialmente in quiete (Fig. 8.11). Dopo l'urto, m_1 ed m_2 si muovono in direzioni che formano angoli θ e ϕ con la direzione orizzontale. Questa è detta *collisione radente*. Applicando la legge di conservazione della quantità di moto alle componenti e notando che la componente totale y del moto è zero, abbiamo

$$\text{per la componente } x: \quad m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi \quad [8.24]$$

$$\text{per la componente } y: \quad 0 + 0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi \quad [8.25]$$

- Conservazione della quantità di moto

Assumendo che l'urto sia elastico, è possibile scrivere una terza equazione per l'energia cinetica, nella forma

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad [8.26]$$

- Conservazione dell'energia

Se sono note le masse delle due particelle e la velocità iniziale v_{1i} , abbiamo quattro incognite e, poiché vi sono solo tre equazioni, una delle quattro grandezze (v_{1f} , v_{2f} , θ o ϕ) deve essere fissata per definire il moto del sistema dopo l'urto, facendo uso solo dei principi di conservazione.

È importante osservare che se l'urto è anelastico, *non si conserva l'energia cinetica e non si può applicare l'Equazione 8.26*.

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

• Urto

Nella risoluzione di problemi, che trattano l'urto tra due oggetti, si suggerisce la seguente procedura.

1. Si scelga un sistema di coordinate e si definiscano le velocità con riferimento al sistema prescelto. È conveniente assumere l'asse x coincidente con la direzione di una delle velocità iniziali.
2. Nel sistema di riferimento, si disegnino i vettori velocità con le indicazioni relative e si includano tutte le informazioni fornite. Si scri-

vano le espressioni delle componenti x , y della quantità di moto di ciascun oggetto prima e dopo l'urto. Si ricordi di riportare il segno corretto per le componenti dei vettori velocità. Se un oggetto, ad esempio, si muove lungo la direzione negativa dell'asse x , la componente x della velocità deve essere assunta negativa. È importante porre particolare attenzione nella definizione del segno.

3. Si scrivano le espressioni della quantità di moto *totale* lungo la direzione x *prima* e *dopo* l'urto e si uguaglino le due espressioni. Si ripeta questa procedura per la quantità di moto totale lungo l'asse y . Poiché la quantità di moto totale del *sistema* si conserva nell'urto, si conservano di conseguenza le componenti lungo qualsiasi direzione. È importante sottolineare che si conserva la quantità di moto del *sistema*, costituito dai due oggetti che si urtano, e non la quantità di moto di ciascun oggetto.
4. Se l'urto è anelastico, l'energia cinetica *non* si conserva e probabilmente sono necessarie ulteriori informazioni. Se l'urto è totalmente anelastico, le velocità finali dei due oggetti sono uguali. Le grandezze, incognite, si possono calcolare attraverso la soluzione delle equazioni della quantità di moto.
5. Se l'urto è elastico, l'energia cinetica si conserva e si può uguagliare l'energia cinetica totale prima dell'urto a quella dopo l'urto. Si ottiene quindi una ulteriore relazione tra le velocità.

Esempio 8.7 Urto protone-protone

Un protone urta elasticamente un altro protone, inizialmente in quiete. Il protone incidente ha una velocità iniziale di 3.5×10^5 m/s e subisce un urto radente con il secondo protone come indicato in Figura 8.11 (i protoni si respingono elettrostaticamente). Dopo l'urto, uno dei protoni si muove in una direzione che forma un angolo di 37° con la direzione di incidenza, mentre il secondo viene deflesso di un angolo ϕ rispetto alla predetta direzione. Calcolare le velocità finali dei due protoni e l'angolo ϕ .

Soluzione Sia la quantità di moto che l'energia cinetica sono costanti in questo urto elastico radente. Poiché $m_1 = m_2$, $\theta = 37^\circ$ e $v_{1i} = 3.5 \times 10^5$ m/s, le Equazioni 8.24, 8.25 e 8.26 diventano

$$v_{1f} \cos 37^\circ + v_{2f} \cos \phi = 3.5 \times 10^5$$

$$v_{1f} \sin 37^\circ - v_{2f} \sin \phi = 0$$

$$v_{1f}^2 + v_{2f}^2 = (3.5 \times 10^5)^2$$

Risolvendo queste tre equazioni in tre incognite si ha

$$v_{1f} = 2.80 \times 10^5 \text{ m/s} \quad v_{2f} = 2.11 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$\phi = 53.0^\circ$$

È interessante notare che $\theta + \phi = 90^\circ$. Questo risultato *non* è casuale. Ogni volta che due particelle di massa uguale si urtano elasticamente in modo radente, ed una delle particelle è inizialmente in quiete, le velocità finali delle particelle formano sempre un angolo retto.

Esempio 8.8 Urto ad un incrocio

Un'automobile di 1500 kg viaggia verso est a una velocità di 25.0 m/s ed urta a un incrocio con un furgone di 2500 kg che viaggia verso nord a 20.0 m/s (Fig. 8.12). Calcolare la direzione e il modulo della velocità dei rottami dopo l'urto, assumendo che questo sia perfettamente anelastico.

Soluzione Scegliamo l'asse x diretto verso est e l'asse y

verso nord, come indicato in Figura 8.12. Prima dell'urto, il solo oggetto che ha quantità di moto nella direzione x è l'auto. Quindi, la quantità di moto totale del sistema auto-furgone nella direzione x è

$$\sum p_{xi} = (1500 \text{ kg}) (25.0 \text{ m/s}) = (3.75 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s})$$

Assumiamo che i rottami si muovano, dopo l'urto, con velocità v_f e formando un angolo θ con l'asse x (Fig.

8.12). La quantità di moto totale nella direzione x dopo l'urto è

$$\sum p_{xi} = (4000 \text{ kg}) v \cos \theta$$

Poiché la quantità di moto lungo la direzione x si conserva, eguagliando queste due equazioni si ha

$$(1) \quad (3.75 \times 10^4) \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (4000 \text{ kg}) v \cos \theta$$

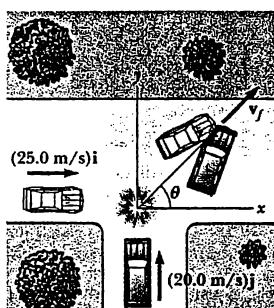


Figura 8.12 (Esempio 8.8) Vista dall'alto di un'automobile che urta con un furgone.

Allo stesso modo, la quantità di moto totale del sistema nella direzione y è solo quella del furgone, ed ha il valore (2500 kg) (20.0 m/s). Applicando la conservazione della quantità di moto lungo la direzione y si ha

$$\sum p_{yi} = \sum p_{yf}$$

$$(2500 \text{ kg}) (20.0 \text{ m/s}) = (4000 \text{ kg}) v \sin \theta$$

$$(2) \quad 5.00 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (4000 \text{ kg}) v \sin \theta$$

Dividendo la (2) per la (1) si ottiene

$$\tan \theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33$$

$$\theta = 53.1^\circ$$

Sostituendo questo valore di θ nella (2), o anche nella (1), il valore di v è

$$v = \frac{5.00 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{(4000 \text{ kg}) \sin 53^\circ} = 15.6 \text{ m/s}$$

ESERCIZIO 8 Una massa di 3.00 kg con una velocità iniziale di 5.00i m/s urta e rimane attaccata con una massa di 2.00 kg che ha una velocità di -3.00j m/s. Trovare la velocità finale dell'insieme delle due masse. Risposta (3.00i - 1.20j) m/s

ESERCIZIO 9 Un uccello e un'ape si avvicinano reciprocamente lungo due direzioni ad angolo retto. L'uccello ha una massa di 0.125 kg e una velocità di 0.600 m/s, e l'ape ha una massa di 5.00×10^{-3} kg e una velocità di 15.0 m/s. Se l'uccello cattura l'ape, qual è la nuova velocità dell'uccello? Risposta 0.816 m/s

8.6 • IL CENTRO DI MASSA

In questo paragrafo descriveremo il moto complessivo di un sistema meccanico, facendo uso di un particolare punto, detto **centro di massa** del sistema. Il sistema meccanico può essere sia un insieme di particelle, sia un corpo continuo. Vedremo che il sistema meccanico si muove come se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa. Se la risultante delle forze esterne è F e la massa totale del sistema è M , il centro di massa si muove con una accelerazione data da $a = F/M$. In altre parole, il centro di massa si muove come se la risultante delle forze esterne fosse applicata ad una singola particella di massa M , posta nel centro di massa. Questo risultato è stato usato implicitamente nei capitoli precedenti, poiché quasi tutti gli esempi si riferivano ad oggetti non puntiformi.

Si consideri un sistema meccanico composto da una coppia di particelle collegate da una sbarretta rigida e di massa trascurabile (Fig. 8.13). Il centro di massa del sistema si trova in qualche punto del segmento che congiunge le due particelle, ed è più vicino alla massa più grande. Se si applica una forza in un punto della sbarretta più vicino alla massa più piccola, il sistema ruota in senso orario (Fig. 8.13a). Se invece la forza è applicata in un punto più vicino alla massa maggiore, il sistema ruota in senso antiorario (Fig. 8.13b). Se, infine, la

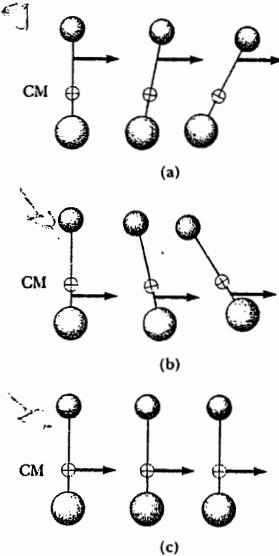
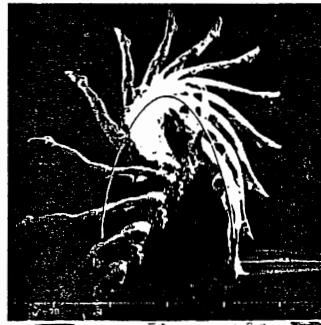


Figura 8.13 Due masse diverse sono collegate da una sbarretta rigida e di massa trascurabile. (a) Il sistema ruota in senso orario quando si applica una forza tra la massa più piccola e il centro di massa. (b) Il sistema ruota in senso antiorario quando la forza è applicata tra la massa più grande e il centro di massa. (c) Il sistema si muove nella direzione della forza applicata senza ruotare, quando la forza è applicata nel centro di massa.



Questa fotografia multiflash mostra che mentre il tuffatore esegue un salto mortale all'indietro, il suo centro di massa segue una traiettoria parabolica, la stessa traiettoria che seguirebbe una particella. (© the Harold E. Edgerton 1992 Trust. Per gent. conc. Di Palm Press, Inc.)

forza è applicata nel centro di massa, il sistema si muove nella direzione di **F** senza ruotare (Fig. 8.13c). In questo modo è facile individuare la posizione del centro di massa.

Si può descrivere la posizione del centro di massa di un sistema come la *posizione media* della massa del sistema. Per esempio, il centro di massa della coppia di particelle descritta in Figura 8.14 è posto sull'asse **x** e si trova fra le due particelle. La sua coordinata **x** è definita dalla relazione

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad [8.27]$$

Per esempio, se $x_1 = 0$, $x_2 = d$ e $m_2 = 2 m_1$, si trova $x_{CM} = 2/3 d$, cioè il centro di massa è più vicino alla particella più massiva. Se le due masse sono uguali, il centro di massa si trova esattamente a metà strada fra le due particelle.

È possibile estendere il concetto di centro di massa a un sistema costituito da molte particelle in tre dimensioni. La coordinata **x** del centro di massa del sistema di n particelle è definita dalla relazione

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad [8.28]$$

dove x_i è la coordinata **x** della i -esima particella e $\sum m_i$ la massa totale del sistema. Nel seguito, la massa totale del sistema sarà indicata con $M = \sum m_i$, dove la somma è estesa a tutte le n particelle. Le coordinate **y** e **z** del centro di massa sono definite, in modo del tutto analogo, dalle relazioni

$$y_{CM} \equiv \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad \text{e} \quad z_{CM} \equiv \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad [8.29]$$

Il centro di massa può essere individuato dal suo vettore di posizione \mathbf{r}_{CM} . Le coordinate cartesiane di questo vettore sono x_{CM} , y_{CM} , e z_{CM} , definite dalle Equazioni 8.28 e 8.29. Si ha, quindi,

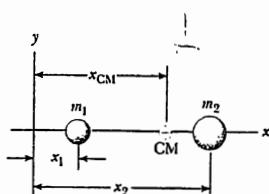


Figura 8.14 Il centro di massa di due particelle poste sull'asse **x** si trova in x_{CM} , un punto posto fra le due particelle e più vicino alla massa maggiore.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{CM} &= x_{CM} \mathbf{i} + y_{CM} \mathbf{j} + z_{CM} \mathbf{k} = \frac{\sum m_i x_i \mathbf{i} + \sum m_i y_i \mathbf{j} + \sum m_i z_i \mathbf{k}}{M} \\ \mathbf{r}_{CM} &\equiv \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \end{aligned} \quad [8.30]$$

dove \mathbf{r}_i è il vettore posizione della i -esima particella definito da

$$\mathbf{r}_i \equiv x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$$

Il centro di massa di un corpo omogeneo e simmetrico si deve trovare su un asse di simmetria. Per esempio, il centro di massa di una sbarretta omogenea deve trovarsi sulla sbarretta, nel punto medio fra i suoi estremi. Il centro di massa di una sfera omogenea o di un cubo omogeneo deve trovarsi nel rispettivo centro geometrico. È possibile determinare la posizione del centro di massa di un corpo piano di forma irregolare sperimentalmente, sospensione il corpo per due punti diversi (Fig. 8.15). Il corpo viene prima sospeso per il punto A , e si traccia una retta verticale AB quando il corpo è in equilibrio. Successivamente, il corpo viene sospeso per il punto C e si traccia una seconda retta verticale CD . Il centro di massa del corpo si trova allora nell'intersezione di queste due rette, poiché se un corpo rigido viene sospeso per un punto, la retta verticale per quel punto deve passare per il centro di massa.

Poiché un corpo rigido è costituito da una distribuzione continua di massa, ciascuna parte di esso subisce l'azione della forza di gravità. L'effetto di tutte queste forze è equivalente a quello di una singola forza, Mg , applicata in un particolare punto del corpo, detto **centro di gravità**. Se g è costante nella zona di spazio occupata dal corpo rigido, il centro di gravità coincide con il centro di massa. Se un corpo rigido viene sospeso per il suo centro di gravità, sarà in equilibrio qualunque sia la sua posizione.

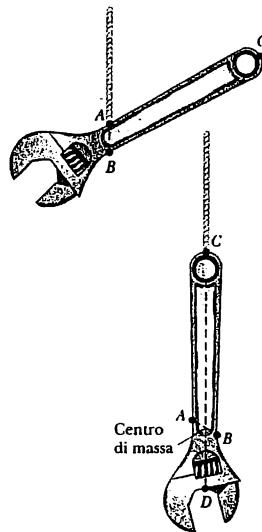


Figura 8.15 Tecnica sperimentale per la determinazione del centro di massa di una chiave inglese. La chiave inglese viene sospesa liberamente da due diversi punti. L'intersezione delle due rette verticali AB e CD individua il centro di massa.

Esempio 8.9 Il centro di massa di tre particelle

Un sistema è formato da tre particelle poste ai vertici di un triangolo rettangolo come in Figura 8.16. Trovare il centro di massa del sistema.

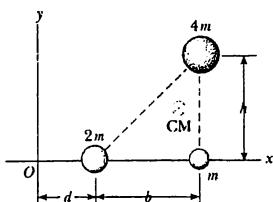


Figura 8.16 (Esempio 8.9) Individuazione del centro di massa per un sistema di tre particelle.

Soluzione Usando le equazioni che definiscono le coordinate del centro di massa, e notando che $z_{CM} = 0$, otteniamo

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{2md + m(d+b) + 4m(d+b)}{7m} = d + \frac{5}{7}b$$

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{2m(0) + m(0) + 4mh}{7m} = \frac{4}{7}h$$

Quindi, possiamo esprimere il vettore posizione del centro di massa misurato dall'origine come

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM} \mathbf{i} + y_{CM} \mathbf{j} + z_{CM} \mathbf{k} = (d + \frac{5}{7}b) \mathbf{i} + \frac{4}{7}h \mathbf{j}$$

8.7 • MOTO DI UN SISTEMA DI PARTICELLE

È possibile cominciare a capire il significato fisico e ad apprezzare l'utilità del concetto di centro di massa calcolando la derivata rispetto al tempo del suo vettore posizione \mathbf{r}_{CM} , dato dall'Equazione 8.30. Assumendo che M sia costante, cioè che il numero di particelle del sistema non vari, si ha la seguente espressione per la velocità del centro di massa:

Velocità del centro di massa

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{M} \quad [8.31]$$

dove \mathbf{v}_i è la velocità dell' i -esima particella. L'Equazione 8.31 può essere riscritta

Quantità di moto totale di un sistema di particelle

$$M\mathbf{v}_{CM} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{tot} \quad [8.32]$$

Questo risultato ci dice che la quantità di moto totale del sistema è uguale alla massa totale moltiplicata per la velocità del centro di massa; in altre parole, è uguale a quella di una singola particella di massa M che si muove con la velocità \mathbf{v}_{CM} del centro di massa.

Se si deriva ancora l'Equazione 8.32, si ottiene l'accelerazione del centro di massa:

Accelerazione del centro di massa per un sistema di particelle

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{a}_i \quad [8.33]$$

Questa espressione può essere riscritta, usando anche la seconda legge di Newton,

$$M\mathbf{a}_{CM} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{F}_i \quad [8.34]$$

dove \mathbf{F}_i è la forza che agisce sulla particella i -esima.

Le forze \mathbf{F}_i includono sia le forze esterne (azioni dall'esterno del sistema) che le forze interne (interazioni fra le particelle del sistema), ma, in base alla terza legge di Newton, la forza esercitata dalla particella 1 sulla particella 2, per esempio, è esattamente uguale e contraria a quella esercitata dalla particella 2 sulla 1. Quindi, quando si esegue la somma delle forze nell'Equazione 8.34, le forze interne si elidono a coppie, e la risultante è dovuta soltanto alle forze esterne. L'Equazione 8.34 può essere quindi riscritta nella forma

Seconda legge di Newton per un sistema di particelle

$$\sum \mathbf{F}_{est} = M\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{p}_{tot}}{dt} \quad [8.35]$$

Cioè, la risultante delle forze esterne agenti sul sistema di particelle è uguale alla massa totale del sistema, moltiplicata per l'accelerazione del centro di massa. Se confrontiamo questa equazione con la seconda legge di Newton per una singola particella, si vede che il centro di massa del sistema si muove come una immaginaria particella di massa M , su cui agisce la risultante delle forze esterne. In assenza di forze esterne, il centro di massa si muove con velocità uniforme come nel caso della chiave inglese rotante mostrata in Figura 8.17. Se la forza risultante agisce lungo una linea attraverso il centro di massa di un corpo esteso come la chiave inglese, il corpo verrà accelerato senza rotazione, e la sua energia cinetica sarà associata interamente al suo moto di traslazione. Se la forza risultante non agisce attraverso il centro di massa, il corpo subirà un'accelerazione angolare, e acquisterà un'energia cinetica rotazionale oltre all'energia cinetica del suo moto traslazionale. L'accelerazione lineare del centro di massa è la stessa in entrambi i casi, come si ottiene dall'Equazione 8.35.

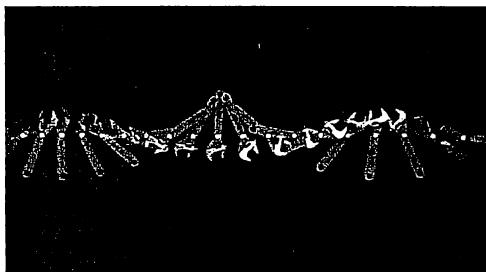


Figura 8.17 Fotografia multiflash di una chiave inglese che si muove su una superficie orizzontale. Il centro di massa della chiave si muove secondo un percorso rettilineo mentre la chiave ruota attorno ad esso così come è indicato dal punto bianco. (Richard Megna, *Fundamental Photographs*)

Si vede, infine, che se la risultante delle forze esterne è nulla, l'Equazione 8.35 diventa

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{CM}} = 0$$

e, quindi,

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = M\mathbf{v}_{\text{CM}} = \text{costante} \quad (\text{quando } \sum \mathbf{F}_{\text{est}} = 0) \quad [8.36]$$

Cioè, la quantità di moto totale del sistema si conserva, se non vi sono forze esterne agenti su di esso. Segue quindi che, per un sistema *isolato*, sono costanti nel tempo sia la quantità di moto totale che la velocità del centro di massa. Questo fatto costituisce la generalizzazione, per un sistema costituito da molte particelle, della legge di conservazione ricavata nel Paragrafo 8.1 per un sistema di due particelle.

Si supponga, ora, che un sistema isolato costituito da due o più parti sia in quiete. Il centro di massa di questo sistema rimane in quiete, fin quando il sistema non è sottoposto all'azione di forze esterne. Per esempio, si consideri un sistema costituito da un nuotatore ed una zattera, inizialmente in quiete. Quando il nuotatore si tuffa nell'acqua, il centro di massa del sistema rimane in quiete, se si trascura l'attrito fra l'acqua e la zattera, e la quantità di moto del nuotatore sarà uguale in modulo, e di verso opposto, a quello della zattera.

Come altro esempio, supponiamo un atomo instabile inizialmente fermo che decade in due frammenti di masse M_1 ed M_2 con velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , rispettivamente. Poiché la quantità di moto totale del sistema prima del decadimento è zero, la quantità di moto totale del sistema dopo il decadimento sarà ancora zero. Quindi, vediamo che $M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = 0$. Se la velocità di uno dei frammenti dopo il decadimento è nota, si può calcolare la velocità dell'altro frammento.

Fisica ragionata 3

Un ragazzo si trova all'estremità di una canoa che è ferma rispetto alla costa (Fig. 8.18). Egli, poi, si muove verso l'estremità opposta della canoa, allontanandosi dalla costa. La canoa si muoverà?

Ragionamento Si, la canoa si muoverà verso la costa. Trascurando l'attrito fra la canoa e l'acqua, non vi sono forze orizzontali che agiscono sul sistema costituito dal ragazzo e dalla canoa. Quindi, il centro di massa del sistema rimane fermo relativamente alla costa (o a qualsiasi punto fisso). Quando il ragazzo si muove allontanandosi

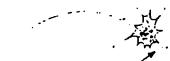


Figura 8.18 (Fisica ragionata 3)

dosi dalla costa, la canoa deve muoversi verso la costa in modo tale che il centro di massa del sistema rimanga costante. Una spiegazione alternativa consiste nel considerare che la quantità di moto del sistema resta costante se si trascura l'attrito. Mentre il ragazzo acquista una quantità di moto allontanandosi dalla costa, la canoa deve acquistare una quantità di moto uguale verso la costa tale da rendere nulla la quantità di moto totale del sistema.

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Supponiamo che tu narcotizzi un orso polare su un ghiacciaio per un lavoro di ricerca. Come potresti fare una stima del peso dell'orso polare usando un metro flessibile, una corda, e conoscendo il tuo peso?



Moto del centro di massa

Figura 8.19 (Problema concettuale 6)

PROBLEMA CONCETTUALE 6

Un proiettile viene sparato in aria e successivamente esplode in alcuni frammenti (Fig. 8.19). Cosa si può dire intorno al moto del centro di massa dei frammenti dopo l'esplosione?

ESERCIZIO 10 Una particella di 5.0 kg si muove lungo l'asse x con una velocità di 3.0 m/s. Una particella di 2.0 kg si muove lungo l'asse x con una velocità di -2.5 m/s. Trovare (a) la velocità del centro di massa e (b) la quantità di moto totale del sistema. Risposta (a) 1.4 m/s verso destra (b) 10 kg · m/s verso destra.

ESERCIZIO 11 Una particella di 2.0 kg ha una velocità $(2.0\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j})$ m/s, e una particella di 3.0 kg ha una velocità $(1.0\mathbf{i} + 6.0\mathbf{j})$ m/s. Trovare (a) la velocità del centro di massa e (b) la quantità di moto totale del sistema. Risposta (a) $(1.4\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j})$ m/s (b) $(7.0\mathbf{i} + 12\mathbf{j})$ kg · m/s.

FACOLTATIVO

8.8 • PROPULSIONE DI UN RAZZO

Quando i veicoli ordinari, automobili e locomotive si muovono, la forza che li spinge è dovuta all'attrito. Nel caso di un'automobile, la forza che la spinge è la forza esercitata dalla strada; una locomotiva "spinge" le rotaie, e queste reagiscono spingendo la locomotiva. Nel caso di un razzo che si muove nello spazio vuoto, non vi sono né strada, né binari su cui "spingere", e quindi l'origine della forza di propulsione di un razzo deve essere diversa. Il funzionamento di un

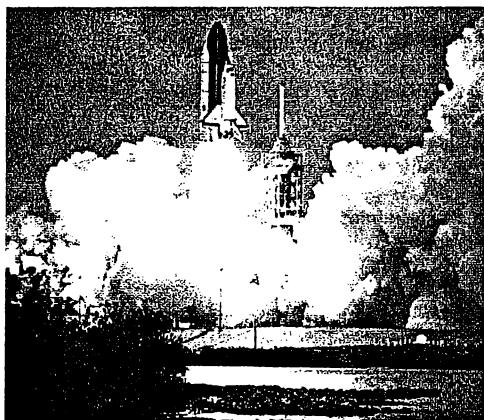


Figura 8.20 Decollo dello shuttle *Columbia*. Una enorme spinta viene prodotta dai motori a propellente liquido della navetta, aiutata dai due motori di supporto a propellente solido. Nei processi di decollo sono sfruttati molti principi fisici, nei settori della meccanica, della termodinamica, dell'elettricità e del magnetismo. (NASA, per gent. conc.)

razzo dipende dalla conservazione della quantità di moto, applicata ad un sistema di particelle costituito dal razzo e dal propellente espulso.

La propulsione di un razzo (Fig. 8.20) può essere capita considerando il sistema meccanico costituito da una mitragliatrice, montata su un carrello con ruote. Quando la mitragliatrice spara, ciascun proiettile riceve una quantità di moto mv , misurata rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la Terra. Per ogni proiettile sparato, la mitragliatrice ed il carrello devono ricevere una quantità di moto compensatrice, in verso opposto a quello del moto del proiettile, e cioè la forza di reazione dei proiettili accelera la mitragliatrice ed il carrello. Se la mitragliatrice spara n proiettili al secondo, la forza media esercitata su di essa (e sul carrello) è $F_{\text{media}} = nmv$.

Similmente, quando un razzo si muove nel vuoto, la sua quantità di moto varia quando una parte della sua massa viene espulsa sotto forma di gas. Poiché i gas espulsi acquistano quantità di moto, il razzo acquista una quantità di moto compensatrice, nel verso opposto. Il razzo, quindi, viene accelerato dalla spinta dei gas di scarico. Nello spazio libero, il centro di massa del sistema complessivo si muove di moto uniforme, indipendentemente dal processo di propulsione. È interessante notare che il razzo e la mitragliatrice rappresentano casi del processo *inverso* dell'urto anelastico, cioè, la quantità di moto si conserva, ma l'energia cinetica del sistema *aumenta* (a spese dell'energia potenziale trasportata nel carburante).

Supponiamo che, a un certo istante t , la quantità di moto del razzo e del propellente sia $(M + \Delta m)v$ (Fig. 8.21a). Durante un breve intervallo di tempo Δt il razzo espelle una certa massa Δm e, di conseguenza, la velocità del razzo aumenta al valore $v + \Delta v$ (Fig. 8.21b). Se il propellente viene espulso con una velocità v_r relativa al razzo, la velocità del propellente rispetto a un sistema di riferimento fisso è $v - v_r$. Uguagliando la quantità di moto iniziale del sistema a quella finale si ha

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_r)$$

da cui

$$M\Delta v = \Delta m(v_r)$$

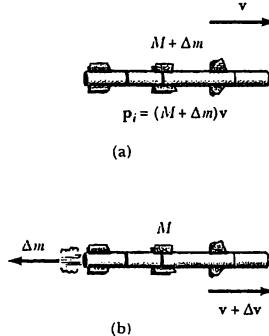


Figura 8.21 Propulsione di un razzo. (a) La massa iniziale del razzo è, al tempo t , $M + \Delta m$, e la sua velocità è v . (b) Al tempo $t + \Delta t$, la massa del razzo si è ridotta ad M , ed è stata espulsa una quantità Δm di propellente. La velocità del razzo aumenta di Δv .

Si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato considerando il sistema in un sistema di riferimento solidale con il centro di massa, cioè un sistema di riferimento inerziale in movimento, rispetto al sistema di riferimento fisso, con la velocità del centro di massa. In questo sistema di riferimento, la quantità di moto totale è nulla, e perciò se il razzo acquista una quantità di moto $M\Delta v$, espellendo parte del propellente, i gas di scarico acquistano una quantità di moto $v_e \Delta m$ nel verso opposto, e quindi $M\Delta v - v_e \Delta m = 0$. Passando al limite per Δt tendente a zero, si ha $\Delta v \rightarrow dv$ e $\Delta m \rightarrow dm$, ed inoltre, l'incremento della massa dei gas di scarico, dm , è uguale alla diminuzione della massa del razzo, dM , cioè $dm = -dM$, con $dM < 0$ perché rappresenta una diminuzione di massa. Si ha, quindi,

$$M dv = -v_e dm \quad [8.37]$$

Integrando questa equazione e prendendo M_i come massa iniziale del razzo (includendo la massa del propellente) ed M_f come massa finale del razzo più il propellente residuo, si ha

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right) \quad [8.38]$$

Relazione fondamentale della propulsione di un razzo

Questa è la relazione fondamentale della propulsione di un razzo. Essa dice che l'incremento di velocità del razzo è proporzionale alla velocità di scarico dei gas, che deve quindi essere molto elevata. Inoltre, esso è proporzionale al logaritmo del rapporto M_i/M_f , che deve quindi essere il più grande possibile, cioè il razzo deve trasportare quanto più propellente è possibile.

La **spinta** di un razzo è la forza che viene esercitata dai gas di scarico sul razzo. È possibile ricavare un'espressione per la spinta dall'Equazione 8.37:

$$\text{Spinta} = M \frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| \quad [8.39]$$

Anche da questa relazione si vede che la spinta cresce con la velocità di scarico dei gas e con la rapidità di variazione della massa del razzo dM/dt .

Fisica ragionata 4

Quando Robert Goddard propose la possibilità di veicoli con propulsione a razzo, il *New York Times* fu d'accordo che tali veicoli si sarebbero potuti usare e con successo entro l'atmosfera terrestre ("Topics of the Times," *New York Times*, 13 Gennaio, 1920, pag. 12). Ma il *Times* scoraggiò l'idea di usare un razzo nello spazio vuoto, facendo notare che, "... il suo volo non sarebbe stato né accelerato né mantenuto per mezzo dell'esplosione di cariche che si sarebbero potute verificare. Basterebbe la pretesa di negare una legge fondamentale della dinamica... Che il Professor Goddard, con la sua "poltrona" nel Clark College e l'incoraggiamento della Smithsonian Institution, non conosce la legge di azione e reazione, e la necessità di avere qualcosa di meglio che il vuoto contro cui reagire, per dire che sarebbe assurdo."

Che cosa lo scrittore di queste pagine non ha considerato?

Ragionamento Lo scrittore compie un errore assai comune credendo che un razzo funzioni espellendo un gas che eserciti una *spinta* su qualcosa, per proiettare in avanti il razzo. Con questa convinzione, è impossibile vedere come l'accensione di un razzo possa *funzionare* nello spazio vuoto.

I gas non hanno bisogno di esercitare una spinta su alcunché, è l'azione dell'espulsione stessa dei gas che spinge il razzo in avanti. Ciò può essere dedotto dalla terza legge di Newton: il razzo spinge i gas all'indietro, col risultato che i gas spingono il razzo in avanti. Ciò si può anche dedurre dalla conservazione della quantità di moto: quando i gas acquistano quantità di moto in una direzione, il razzo deve acquistare quantità di moto nel verso opposto affinché si conservi la quantità di moto iniziale del sistema razzo-gas.

Il *New York Times* pubblicò una ritrattazione 49 anni dopo ("A Correction," *New York Times*, 17 Luglio 1969, pag. 43), al tempo stesso in cui gli astronauti dell'Apollo erano in viaggio per la Luna. Essa apparve su una pagina insieme a due altri articoli, uno intitolato, "Fondamenti del Viaggio Spaziale", e l'altro, "Astronave, Come una Seppia, Manovra per Mezzo di 'Schizzetti'". I seguenti passaggi facevano parte di questi articoli: "... un articolista del *New York Times* negò la nozione che un razzo potesse funzionare nel vuoto e criticò le idee di Robert H. Goddard... Ulteriori ricerche ed esperimenti hanno confermato le scoperte di Newton nel XVII secolo, ed è ora definitivamente accertato che un razzo possa funzionare tanto nel vuoto come nell'atmosfera. Il *Times* si scusa per l'errore".

Esempio 8.10 Un razzo nello spazio

Un razzo si muove nello spazio con velocità di 3.0×10^3 m/s rispetto alla Terra. A un certo istante i motori vengono accesi, e il propellente è espulso in verso opposto al moto del razzo con una velocità rispetto al razzo di 5.0×10^3 m/s. (a) Qual è la velocità del razzo rispetto alla Terra quando la sua massa si è dimezzata?

Soluzione Usando l'Equazione 8.38 si ha:

$$v_f = v_i + v_e \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right) = 3.0 \times 10^3 + 5.0 \times 10^3 \ln \left(\frac{M_i}{0.5 M_i} \right)$$

$$= 6.5 \times 10^3 \text{ m/s}$$

(b) Qual è la spinta se il razzo brucia 50 kg/s di propellente?

Soluzione

$$\text{Spinta} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = \left(5.0 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \left(50 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right)$$

$$= 2.5 \times 10^5 \text{ N}$$

ESERCIZIO 12 Un motore di un razzo consuma 80 kg di carburante al secondo. Se la velocità di espulsione dei gas è 2.5×10^3 m/s, calcolare la spinta sul razzo.

Risposta 200 kN

SOMMARIO

La quantità di moto di una particella di massa m che si muove con velocità v è definita dalla relazione

$$p \equiv m v \quad [8.1]$$

La legge di conservazione della quantità di moto per due particelle che interagiscono stabilisce che, se le due particelle costituiscono un sistema isolato, la quantità di moto totale si conserva, qualunque sia la natura della forza tra esse, ad ogni istante, ed è uguale alla quantità di moto totale iniziale, cioè

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \quad [8.5]$$

L'impulso di una forza F su una particella è uguale alla variazione della quantità di moto della particella ed è dato da

$$I = \int_{t_i}^{t_f} F dt = \Delta p = p_f - p_i \quad [8.9]$$

Questo si chiama teorema dell'impulso.

Le forze impulsive sono forze molto più intense delle altre forze che agiscono sul sistema. Esse usualmente agiscono per brevi intervalli di tempo, come nel caso degli urti.

Quando due particelle si urtano, la quantità di moto totale del sistema appena prima dell'urto è sempre uguale alla quantità di moto totale appena dopo l'urto, qualunque sia il tipo di urto. Un urto **anelastico** è un urto in cui l'energia cinetica non si conserva. Si ha un urto perfettamente anelastico quando i corpi che si urtano rimangono uniti dopo l'urto. Si ha un urto **elastico** quando si conserva, nell'urto, l'energia cinetica.

In un urto in due o tre dimensioni le tre componenti della quantità di moto si conservano indipendentemente l'una dall'altra.

Il vettore posizione del centro di massa di un sistema di particelle è definito dall'espressione

$$\mathbf{r}_{CM} \equiv \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad [8.30]$$

dove $M = \sum m_i$ è la massa totale del sistema ed \mathbf{r}_i è il vettore posizione dell' i -esima particella.

La velocità del centro di massa di un sistema di particelle è data da

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{M} \quad [8.31]$$

La quantità di moto totale di un sistema di particelle è uguale alla massa totale del sistema moltiplicata per la velocità del centro di massa, cioè $\mathbf{p}_{tot} = M\mathbf{v}_{CM}$.

La seconda legge di Newton applicata ad un sistema di particelle è

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M \mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{p}_{tot}}{dt} \quad [8.35]$$

dove \mathbf{a}_{CM} è l'accelerazione del centro di massa e la somma è estesa a tutte le forze esterne che agiscono sul sistema. Il centro di massa, quindi, si muove come una ipotetica particella di massa M su cui agisce la risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema. Segue dall'Equazione 8.35 che la quantità di moto totale del sistema si conserva quando su di esso non agiscono forze esterne.

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] Una forza molto intensa imprime sempre a un dato corpo un impulso più grande di una forza debole? Spiegare.
- [2] Se due oggetti si urtano, ed uno è inizialmente fermo, è possibile che siano entrambi fermi dopo l'urto? È possibile che uno solo sia fermo dopo l'urto? Spiegare.
- [3] Spiegare perché la quantità di moto si conserva quando una palla rimbalza sul pavimento.
4. Si consideri un urto completamente anelastico fra un'automobile ed un grosso camion. Quale veicolo perde più energia cinetica dopo l'urto?
- [5] Il tuo docente di fisica, che di fisica se ne intende, ti lancia una palla da tennis a una certa velocità, e tu la acchiappi. Ti viene adesso offerta la seguente scelta: il professore ti lancia un pallone per ginnastica, il quale è molto più massivo di una palla da tennis, con la stessa velocità della palla da tennis, la stessa quantità di moto, o la stessa energia cinetica. Quale scelta farai allo scopo di rendere la presa più facile, e perché?
6. Il centro di massa di un corpo si può trovare al di fuori di esso? Se sì, fare degli esempi.
- [7] Il centro di massa di una montagna è più alto o più basso del centro di gravità?
- [8] Nel gioco del golf, ai principianti si suggerisce di "tener dietro" al loro colpo. Perché ciò rende più lungo il percorso della palla? Cosa accade in un colpo breve? Si verifica un piccolissimo "tener dietro" in questo caso; perché?
- [9] Un tiratore scelto spara in posizione eretta, tenendo il

calcio del fucile premuto contro la propria spalla. Se la quantità di moto del proiettile è la stessa della quantità di moto di rinculo del fucile, perché non è tanto rischioso essere colpiti dal fucile quanto dal proiettile?

- 10.** Un saltatore con l'asta cade da un'altezza di 4.5 m su un materasso di gommapiuma. È possibile calcolare la velocità del saltatore prima che cada sul materasso? È possibile calcolare la forza che il saltatore subisce a causa dell'urto? Spiegare.
- 11.** Il centro di massa di un razzo nello spazio ha accelerazione? Spiegare. È possibile che la velocità di un razzo sia maggiore della velocità dei gas di scarico? Spiegare.
- 12.** Un airbag si gonfia quando avviene un urto per proteggere il passeggero (in questo caso un manichino) da ferite gravi. Perché l'airbag attutisce il colpo? Si discuta la fisica coinvolta in questa drammatica fotografia.
- 13.** Due studenti tengono sollevato per i margini un largo foglio di carta, in modo da formare una specie di

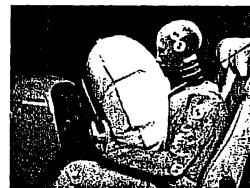


Figura D8.12 (Per gent. conc. della Saab)

"rete" verticale per trattenere un oggetto. A un terzo studente, esperto lanciatore di baseball, si richiede di lanciare un uovo fresco nel foglio. Spiegare perché l'uovo non si rompe nell'urto, indipendentemente dalla velocità iniziale. (Se volete fare questo esperimento, state certi di colpire vicino al centro del bersaglio e di riprendere l'uovo dopo il rimbalzo).

PROBLEMI

Paragrafo 8.1 Quantità di moto e sua conservazione

X Una particella di 3.00 kg ha una velocità di $(3.00i - 4.00j)$ m/s. Calcolare le componenti x e y della quantità di moto e il modulo della quantità di moto totale della particella.

2. Una palla di 0.100 kg è lanciata in alto verticalmente con una velocità iniziale di 15.0 m/s. Calcolare la quantità di moto della palla (a) alla sua massima altezza e (b) a metà della sua massima altezza.

X Un ragazzo di 40.0 kg che si trova su uno stagno ghiacciato, lancia un sasso di 0.500 kg ad est con una velocità di 5.00 m/s. Trascurando l'attrito fra il ghiaccio e il ragazzo, calcolare la velocità di rinculo del ragazzo.

4. Un lanciatore afferma che può lanciare una palla da baseball con una quantità di moto maggiore di quella di un proiettile di 3.00 g che si muova alla velocità di 1500 m/s. Una palla da baseball ha una massa di 0.145 kg. Quanto dovrebbe essere la velocità se l'affermazione del lanciatore fosse vera?

X Due blocchi di masse M e $3M$ si trovano su un piano orizzontale senza attrito. Una molla di massa trascurabile è fissata a uno di essi, e i due blocchi vengono spinti l'uno contro l'altro, con la molla in mezzo (Fig. P8.5). La fune che li tiene uniti viene bruciata, e il blocco di massa $3M$ si muove verso destra con una velocità di 2.00 m/s. Qual è la velocità del blocco di massa M ? (Assumere che i due blocchi siano inizialmente fermi).

Paragrafo 8.2 Quantità di moto e impulso

6. Un'auto è ferma a un semaforo. Quando il segnale diventa verde, l'auto accelera, aumentando la sua velocità da zero a 5.20 m/s in un intervallo di tempo di 0.832 s. Determinare l'impulso e la forza media che

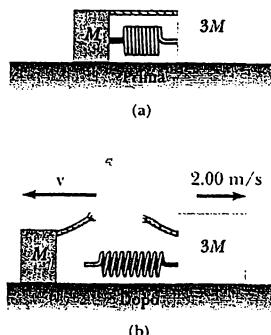


Figura P8.5

subisce un passeggero di 70.0 kg di massa. L'andamento della forza che agisce su una palla da baseball quando è colpita dalla mazza è mostrato in Figura P8.7. Da questo grafico, calcolare (a) l'impulso

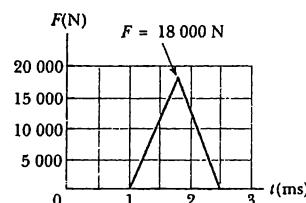


Figura P8.7

impresso alla palla, (b) la forza media esercitata sulla palla e (c) la forza massima esercitata sulla palla.

8. Un giocatore di tennis riceve un colpo con la palla (di massa 0.0600 kg) che viaggia orizzontalmente a 50.0 m/s ; egli restituisce il colpo e la palla torna indietro in verso opposto con 40.0 m/s . Qual è l'impulso comunicato dalla racchetta alla palla?

 Una palla d'acciaio di 3.00 kg colpisce un muro spesso con una velocità di 10.0 m/s che forma un angolo di 60.0° rispetto alla superficie. La palla rimbalza con la stessa velocità e con lo stesso angolo (Fig. P8.9). Se la palla rimane a contatto con la parete per 0.200 s , qual è la forza media esercitata sulla palla dalla parete?

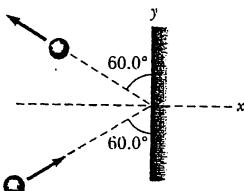


Figura P8.9

10. Nel gioco del softball, una palla da 0.200 kg attraversa la rete a 15 m/s a un angolo di 45.0° al di sotto dell'orizzontale. La palla viene colpita a 40.0 m/s a 30.0° al di sopra dell'orizzontale. (a) Determinare l'impulso applicato alla palla. (b) Se la forza sulla palla aumenta linearmente per 4.00 ms , rimane costante per 20.0 ms , e quindi decresce fino a zero linearmente in altri 4.00 ms , trovare la massima forza sulla palla.

 Una mitragliatrice spara proiettili di 35.0 g alla velocità di 750.0 m/s . Se la mitragliatrice spara 200 proiettili/min, qual è la forza media che il tiratore deve esercitare per evitare che la mitragliatrice si muova?

Paragrafo 8.3 Urти

Paragrafo 8.4 Urти elasticci ed anelastici in una dimensione

12. Una successione di fotogrammi ad elevata velocità mostra che la parte terminale di un bastone da golf, di 200 g , si sta muovendo ad una velocità di 55.0 m/s nell'istante immediatamente precedente al colpo inflitto alla pallina di 46.0 g , ferma sul "tee". Dopo l'urto, il bastone si muove (nello stesso verso) a 40.0 m/s . Determinare la velocità della pallina immediatamente dopo l'urto.

 Un proiettile di 10.0 g si ferma in un blocco di legno ($m = 500 \text{ kg}$). La velocità del sistema proiettile-legno nell'istante successivo all'urto è di 0.600 m/s . Qual era la velocità iniziale del proiettile?

14. Un pattinatore di 75.0 kg in movimento ad una velo-

cità di 10.0 m/s , va ad urtare un pattinatore fermo di uguale massa. Dopo l'urto, i due pattinatori si muovono uniti alla velocità di 5.00 m/s . La forza media che un pattinatore può subire senza rischio di frattura è di 4500 N . Se l'urto dura 0.100 s , può verificarsi una frattura?

15. Un proiettile di massa m e velocità v attraversa completamente un pendolo di massa M ed emerge con una velocità $v/2$, come viene illustrato in Figura P8.15. Il peso è assicurato ad una fune rigida di lunghezza ℓ e di massa trascurabile. Determinare il minimo valore di v affinché il peso possa oscillare quel tanto da descrivere un cerchio completo in un piano verticale.

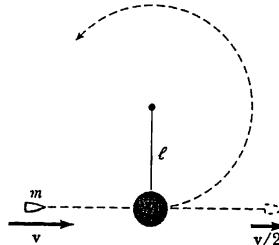


Figura P8.15

16. Gayle corre a una velocità di 4.00 m/s e salta su una slitta, inizialmente ferma sulla cima di una collina innevata con attrito trascurabile. Dopo che essa è scesa per un dislivello di 5.00 m , suo fratello, che inizialmente è fermo, salta dietro di lei e insieme continuano a scendere per la collina. Qual è la loro velocità in fondo alla collina se il dislivello totale è 15 m ? La massa di Gayle è 50.0 kg , la massa della slitta è 5.00 kg , e la massa del fratello è 30.0 kg .

 Un'automobile di 1200 kg che viaggia inizialmente a 25.0 m/s verso est tampona un camion di 9000 kg che si muove nello stesso verso a 20.0 m/s (Figura P8.17). La velocità dell'automobile subito dopo l'urto è 18.0 m/s verso est. (a) Qual è la velocità del camion dopo l'urto? (b) Quanta energia meccanica si dissipò nell'urto? Che fine fa questa energia?

18. Un vagone ferroviario di massa $2.50 \times 10^4 \text{ kg}$ che si muove a 4.00 m/s urta e si aggancia ad altri tre vagoni, ciascuno avendo la stessa massa del primo, che si muovono agganciati fra di loro nello stesso verso a una velocità di 2.00 m/s . (a) Qual è la velocità dei quattro vagoni dopo l'urto? (b) Quanta energia cinetica si dissipò nell'urto?

19. Un neutrone in un reattore nucleare urta elasticamente e centralmente un nucleo di carbonio, inizialmente in quiete. (a) Qual è la frazione dell'energia cinetica del neutrone che viene trasferita al nucleo di carbonio? (b) Se l'energia cinetica iniziale del neutrone

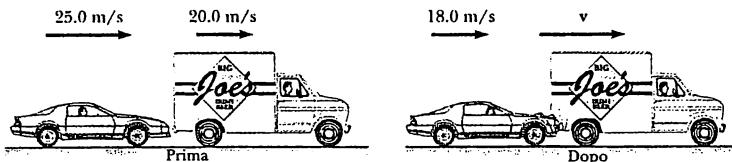


Figura P8.17

ne è $1 \text{ MeV} = 1.60 \times 10^{-13} \text{ J}$, calcolare le energie cinetiche finali del neutrone e del nucleo di carbonio (la massa del nucleo di carbonio è circa 12.0 volte la massa del neutrone).

20. Una palla da bowling di 7.00 kg urta centralmente con un birillo di 2.00 kg . Il birillo vola via in avanti con una velocità di 3.00 m/s . Se la palla continua ad avanzare con una velocità di 1.80 m/s , qual era la velocità iniziale della palla? Si trascuri la rotazione della palla.

21. Un proiettile di 12.0 g viene sparato su un blocco di legno di 100 g , fermo su una superficie orizzontale. Dopo l'urto, il blocco scivola per un tratto di 7.50 m prima di arrestarsi. Se il coefficiente d'attrito tra il blocco e la superficie è 0.650 , qual è la velocità del proiettile nell'istante precedente all'urto?
22. Un proiettile di massa m_1 è sparato in un blocco di legno di massa m_2 inizialmente fermo su una superficie orizzontale. Dopo l'urto, il blocco scivola per un tratto d prima di fermarsi. Se il coefficiente di attrito fra il blocco e la superficie è μ , quale sarà la velocità del proiettile subito prima dell'urto?

23. Si consideri la guida, priva d'attrito, ABC, rappresentata in Figura P8.23. Un blocco di massa $m_1 = 5.00 \text{ kg}$ viene lasciato andare dalla posizione A. Esso urta elasticamente e centralmente un blocco di massa $m_2 = 10.0 \text{ kg}$, fermo nella posizione B. Determinare la massima altezza raggiunta da m_1 dopo l'urto.

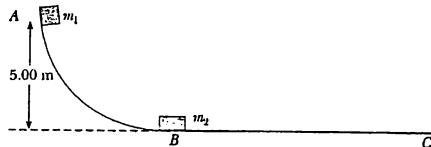


Figura P8.23

24. Un proiettile di 7.00 g quando viene sparato da un'arma in un blocco di legno di 1.00 kg tenuto fermo da una morsa, penetra nel blocco per una profondità di 8.00 cm . Questo blocco di legno viene posto su una superficie orizzontale priva di attrito, e il proiettile di 7.00 g viene sparato dall'arma nel blocco. In questo caso, il proiettile di quanto penetrerà nel blocco?

Paragrafo 8.5 Urto in due dimensioni

25. Un giocatore del peso di 90.0 kg , che si muove verso est con una velocità di 5.00 m/s , è affrontato da un avversario di 95.0 kg che corre verso nord con una velocità di 3.00 m/s . Se l'urto è totalmente anelastico, calcolare (a) la velocità dei giocatori immediatamente dopo lo scontro e (b) l'energia dissipata nell'urto. Si può rendere conto dell'energia dissipata?
26. La massa del disco blu in Figura P8.26 è il 20% più grande della massa di quello verde. Prima dell'urto, i dischi di avvicinano l'un l'altro con una quantità di moto uguale in modulo ma di verso opposto, e il disco verde ha velocità iniziale di 10.0 m/s . Calcolare la velocità dei dischi dopo l'urto se durante l'urto si dissipà metà dell'energia cinetica.

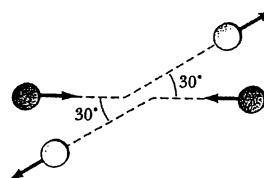


Figura P8.26

27. Una palla di biliardo che si muove alla velocità di 5.00 m/s , colpisce un'altra palla, ferma, di uguale massa. Dopo l'urto, la palla proiettile si muove a 4.33 m/s , lungo una traiettoria che forma un angolo di 30.0° rispetto a quella originale. Determinare modulo e direzione della velocità della palla bersaglio, considerando l'urto elastico e trascurando moti di rotazione e forze d'attrito.
28. Un protone che si muove con una velocità v_0 urta elasticamente un altro protone inizialmente fermo. Dopo l'urto, entrambi i protoni hanno la stessa velocità. Calcolare (a) la velocità di ciascun protone dopo l'urto in funzione di v_0 e (b) la direzione dei vettori velocità dopo l'urto.
29. Un disco di hockey di 0.300 kg , inizialmente in quiete su una superficie senza attrito, è urtato da un altro disco, di massa 0.200 kg che si muove inizialmente lungo l'asse x con una velocità di 2.00 m/s . Dopo

- l'urto il disco di 0.200 kg ha una velocità di 2.00 m/s in una direzione che forma un angolo $\theta = 53.0^\circ$ con la direzione positiva dell'asse x (vedi Fig. 8.11). (a) Calcolare la velocità del disco di 0.300 kg dopo l'urto e (b) la frazione di energia cinetica dissipata nell'urto.
30. Durante la battaglia di Gettysburg, il fuoco fu così intenso che molti proiettili si urtarono in aria fondono-
disi insieme. Si assuma che il proiettile di un moschetto dell'Unione di 5.00 g si muovesse verso destra con una velocità di 250 m/s, 20° al di sopra dell'orizzontale, e che un proiettile dei Confederati di 3.00 g si muo-
vesse verso sinistra con una velocità di 280 m/s, 15° al
di sopra dell'orizzonte. Subito dopo essersi fusi insieme,
qual era la loro velocità?
31. Un nucleo instabile di massa 17.0×10^{-27} kg si disintegra in tre particelle. Una delle particelle, di massa 5.00×10^{-27} kg, si muove lungo l'asse y con una velo-
cità di 6.00×10^6 m/s. Un'altra particella, di massa 8.40×10^{-27} kg si muove lungo l'asse x con velocità 4.00×10^6 m/s. Calcolare (a) la velocità della terza
particella e (b) l'energia totale liberata nella disinte-
grazione.
32. A un incrocio, una macchina di 1500 kg, che viaggia
verso est con una velocità di 20.0 m/s, urta con un fur-
gone di 25000 kg che viaggia verso sud a una velocità
di 15.0 m/s. I veicoli subiscono un urto totalmente
anelastico, e i rottami scivolano per 6.00 m prima di
fermarsi. Calcolare il modulo e la direzione della forza
costante che li decelera.

Paragrafo 8.6 Il centro di massa

33. Quattro oggetti sono posti lungo l'asse y come segue:
uno di 2.00 kg si trova a + 3.00 m, uno di 3.00 kg si
trova a + 2.50 m, uno di 2.50 kg si trova nell'origine, e
uno di 4.00 kg è a - 0.50 m. Dove si trova il centro di
massa di questi oggetti?
34. Una squadretta omogenea da carpentiere ha la forma di L, come in Figura P8.34. Determinare la posizione del
centro di massa relativo all'origine posta all'angolo sinistro
in basso. (*Suggerimento:* si noti che la massa di ciascu-
na parte rettangolare è proporzionale alla sua area).

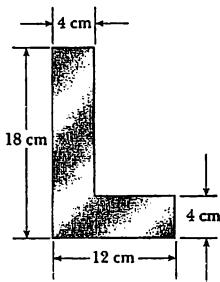


Figura P8.34

35. Un pezzo d'acciaio ricavato da una lamina uniforme
ha la forma indicata in Figura P8.35. Calcolare le coor-
dinate x , y del centro di massa.

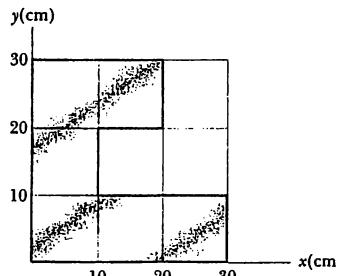


Figura P8.35

36. La massa della Terra è 5.98×10^{24} kg, e la massa della
Luna è 7.36×10^{22} kg. La distanza di separazione,
misurata fra i loro centri, è di 3.84×10^8 m. Localizzare
il centro di massa del sistema Terra-Luna misurato dal
centro della Terra.
37. Una molecola d'acqua è fatta di un atomo di ossigeno e due atomi di idrogeno legati ad esso (Fig. P8.37).
L'angolo fra i due legami è 106° . Se i legami hanno una lunghezza di 0.100 nm, dove si trova il centro di
massa della molecola?

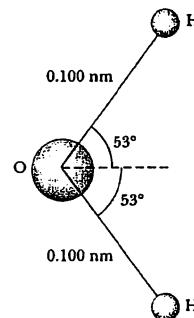


Figura P8.37

Paragrafo 8.7 Moto di un sistema di particelle

38. Consideriamo un sistema di due particelle nel piano
 xy : $m_1 = 2.00$ kg si trova in $r_1 = (1.00i + 2.00j)$ m e ha
velocità $(3.00i + 0.500j)$ m/s; $m_2 = 3.00$ kg si trova in $r_2 =$
 $(-4.00i - 3.00j)$ m e ha velocità $(3.00i - 2.00j)$ m/s.
(a) Rappresentare queste particelle su una carta millimetrata. Tracciare i loro vettori posizione e mostrare le
loro velocità. (b) Trovare la posizione del centro di
massa del sistema e segnarlo sulla carta millimetrata.

- (c) Determinare la velocità del centro di massa e mostrarla nel diagramma. (d) Qual è la quantità di moto totale del sistema?
- 39.** Romeo, a poppa della sua barca, intrattiene Giulietta suonando la chitarra; la barca è ferma sull'acqua calma a una certa distanza dalla riva. (a) Dopo la serenata, Giulietta si sposta con molta attenzione verso poppa per dare un bacio a Romeo. Se la barca ha una massa di 80.0 kg e la prua puntata verso riva e Giulietta, di 55.0 kg di massa, avanza di 2.70 m verso Romeo, di 77.0 kg di massa, determinare lo spostamento della barca verso la riva.
- 40.** Una palla di massa 0.200 kg ha una velocità di $1.50i$ m/s. Una palla di massa 0.300 kg ha una velocità di $-0.400i$ m/s. Esse si urtano centralmente ed elasticamente. (a) Trovare le loro velocità dopo l'urto. (b) Trovare la velocità del loro centro di massa prima e dopo l'urto.

Paragrafo 8.8 Propulsione a razzo (Facoltativo)

- 41.** Il primo stadio di un vettore Saturno V consuma 1.50×10^4 kg/s di propellente, con una velocità di scarico di 2.60×10^3 m/s. (Questi numeri sono solo approssimati). (a) Calcolare la spinta fornita dai motori. (b) Se la massa iniziale del vettore è 3.00×10^6 kg, calcolare l'accelerazione al momento del lancio (tener conto della forza di gravità).
- 42.** Un grande razzo, con una velocità di scarico dei gas $v_e = 3000$ m/s, sviluppa una spinta di 24 milioni di newton. (a) Qual è la massa di gas espulsa dal razzo per secondo? (b) Qual è la massima velocità raggiunta dal razzo che parte da fermo, in uno spazio privo di gravità, con una velocità $v_e = 3.00$ km/s e una massa iniziale costituita per il 90% dal carburante?
- 43.** Un razzo per applicazioni nello spazio deve avere la capacità di sollevare una piattaforma di 3.00 tonnellate, fino al raggiungimento di una velocità di 10 000 m/s, con propulsore e carburante progettati per una velocità di scarico di 2000 m/s. (a) Determinare la quantità necessaria di carburante e di ossidante per raggiungere tale scopo. (b) Se vengono utilizzati altri tipi di propulsore e carburante, per ottenere una velocità di scarico di 5000 m/s, quale sarebbe la quantità di carburante e di ossidante necessaria per il conseguimento dello stesso risultato? Discutere le conclusioni.

Problemi generali

- 44.** Una pallina da golf ($m = 46.0$ g) viene colpita con un angolo di 45.0° rispetto all'orizzontale. La pallina cade a 200 m di distanza. Se il tempo di contatto tra il bastone da golf e la pallina, durante il colpo, è di 7.00 ms, determinare la forza media esercitata sulla pallina. Si trascuri la resistenza dell'aria.
- X** Una pallottola di 8.00 g viene sparata contro un bloc-

co di 2.50 kg, inizialmente in quiete sul bordo di un tavolo alto 1.00 m (Fig. P8.45). Il proiettile si conficca nel blocco e, dopo l'urto, il blocco cade a 2.00 m dallo spigolo del tavolo. Calcolare la velocità iniziale del proiettile.

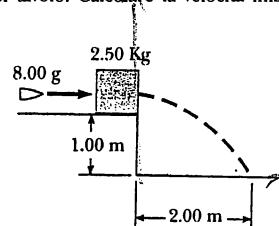


Figura P8.45

- 46.** Un veicolo spaziale è in quiete nello spazio vuoto quando il suo motore viene acceso per 100 s. I gas caldi sono espulsi al ritmo costante di 150 kg/s e con una velocità, rispetto al veicolo, di 3000 m/s. La massa iniziale del veicolo (compreso il carburante e l'ossidante) è di $25\ 000$ kg. Determinare la spinta del motore e l'accelerazione iniziale in unità di g. Qual è la velocità finale del veicolo?

X Un blocchetto di massa $m_1 = 0.500$ kg viene lasciato libero da fermo sulla cima di un cuneo a superficie curva di massa $m_2 = 3.00$ kg, il quale è poggiato su una superficie orizzontale priva di attrito come in Figura P8.47a. Quando il blocchetto abbandona il cuneo, viene misurata una velocità di 4.00 m/s verso destra, come in Figura P8.47b. (a) Qual è la velocità del cuneo dopo che il blocchetto raggiunge la superficie orizzontale? (b) Qual è l'altezza, h , del cuneo?

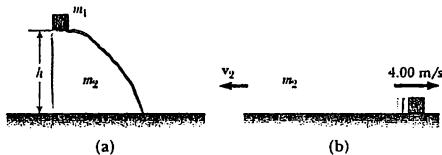


Figura P8.47

- 48.** Tarzan, la cui massa è 80.0 kg, oscilla con una liana lunga 3.00 m la quale è orizzontale quando egli parte. Nel punto più basso della sua traiettoria, egli prende Jane che pesa 60.0 kg con un urto anelastico. Qual è l'altezza del ramo d'albero più alto che può raggiungere nella sua oscillazione verso l'alto?

X Un astronauta di 80.0 kg sta effettuando dei lavori sui motori della navetta spaziale in moto nello spazio a velocità costante. Per avere una migliore visione dell'Universo, esercita una spinta sulla navetta, venendosi poi a trovare oltre la navetta di 30.0 m. Senza una spinta, all'astronauta rimane un solo modo per poter

- ritornare sulla navetta, quello di lanciare la chiave inglese di 0.500 kg di massa, in suo possesso, lontano dalla navetta. Se la chiave viene lanciata con una velocità di 20.0 m/s, quanto tempo impiega l'astronauta per raggiungere la navetta?
50. Un bambino di 40.0 kg si trova ad una estremità di una barca di 70.0 kg e di 4.00 m di lunghezza (Fig. P8.50). Inizialmente la barca si trova a 3.00 m dalla banchina, e il bambino vede una tartaruga sopra uno scoglio vicino all'altra estremità della barca. Il bambino si sposta nella barca per cercare di prendere la tartaruga. Trascurando l'attrito fra la barca e l'acqua, (a) descrivere il moto del sistema barca-bambino. (b) Dove si troverà il bambino, rispetto alla banchina, quando sarà arrivato all'altra estremità della barca? (c) Riuscirà il bambino a prendere la tartaruga? (Si assume che il bambino possa sporgersi 1 m fuori dalla barca).

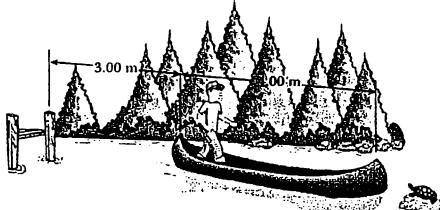


Figura P8.50

- Una pallottola di 5.00 g, con velocità iniziale di 400 m/s, attraversa il blocco di 1.00 kg, come mostrato in Figura P8.51. Il blocco, inizialmente in quiete su una piattaforma orizzontale liscia, è connesso ad una molla di costante elastica 900 N/m. Se il blocco si muove di un tratto di 5.00 cm a destra dopo l'impatto, calcolare (a) la velocità con la quale il proiettile esce dal blocco e (b) l'energia dissipata nell'urto.

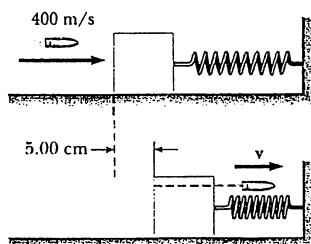
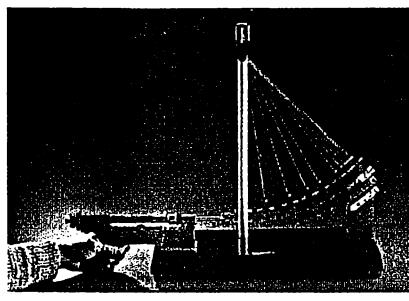


Figura P8.51

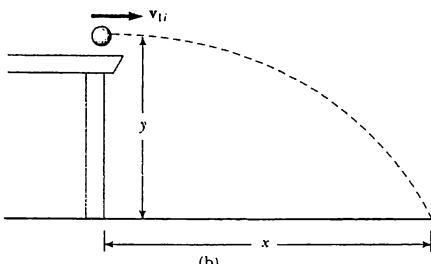
52. Una studentessa fa un esperimento su un pendolo balistico, utilizzando una apparecchiatura simile a quella rappresentata in Figura P8.52a. Essa ottiene i seguenti dati (calcolati come la media di una serie di cinque misure): $h = 8.68 \text{ cm}$, $m_1 = 68.8 \text{ g}$ e $m_2 = 263 \text{ g}$.
- Determinare la velocità iniziale v_{1i} del proiettile.
 - La seconda parte dell'esperimento consiste nella determinazione del valore v_{1f} , sparando lo stesso proiettile in direzione orizzontale (dopo aver rimosso il pendolo dalla traiettoria del proiettile) e misurando gli spostamenti orizzontale x e verticale y , prima che esso si conficchi al suolo (Fig. P8.52b). Dimostrare che la velocità iniziale del proiettile è legata a x e y tramite la relazione:

$$v_{1i} = \frac{x}{\sqrt{2y/g}}$$

Quale valore numerico si ottiene per v_{1i} , se le misure effettuate forniscono i valori $x = 257 \text{ cm}$ e $y = 85.3 \text{ cm}$? Quali sono i fattori responsabili della differenza tra questo valore e quello ricavato nella domanda (a)?



(a)



(b)

Figura P8.52 (a) e (b) (Per gent. conc. di CENCO)

- Due particelle di massa m e $3m$ si muovono l'una contro l'altra lungo l'asse x con la stessa velocità iniziale v_0 . La massa m viaggia verso sinistra, e la massa $3m$ verso destra. Esse subiscono un urto centrale elastico.

Trovare le velocità finali delle particelle.

54. Due particelle di massa m e $3m$ si muovono l'una contro l'altra lungo l'asse x con la stessa velocità iniziale v_0 . La massa m viaggia verso sinistra, e la massa $3m$ verso destra. Esse subiscono un urto radente elastico tale che la massa m dopo la collisione si muove ad angolo retto rispetto alla sua direzione iniziale. (a) Trovare le velocità finali delle due masse. (b) Qual è l'angolo θ del quale viene deviata la massa $3m$?
55. Quanto rapidamente puoi far muovere la Terra? In particolare, quando salti verticalmente al massimo delle tue possibilità, tu comunichi alla Terra una velocità massima di rinculo di quale ordine di grandezza? Visualizza la Terra come un oggetto perfettamente rigido. Nella tua soluzione stabilisci le grandezze fisiche che consideri come dati e i valori che tu misuri o stimi per esse.
56. Vi sono (possiamo dire) tre teorie equivalenti per il moto: la seconda legge di Newton, la quale afferma che la forza risultante su un oggetto causa la sua accelerazione; il teorema dell'energia cinetica, il quale afferma che il lavoro totale su un oggetto causa la variazione della sua energia cinetica; e il teorema dell'impulso, il quale afferma che l'impulso totale su un oggetto causa la variazione della sua quantità di moto. Nel seguente problema confronta le previsioni delle tre teorie in un caso particolare. Un oggetto di 3.00 kg ha una velocità di 7.00 m/s. Successivamente una forza di 12.0 N agisce sull'oggetto per 5.00 s. (a) Calcolare la sua velocità finale dal teorema dell'impulso. (b) Calcolare la sua accelerazione da $a = (v_f - v_0)/t$. (c) Calcolare la sua accelerazione da $a = \Sigma F/m$. (d) Trovare il vettore spostamento dell'oggetto da $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. (e) Trovare il lavoro compiuto sull'oggetto da $W = F \cdot s$. (f) Trovare l'energia cinetica finale da $\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + W$. (g) Trovare l'energia cinetica finale da $\frac{1}{2} m v_f^2 + W$.

Problemi al calcolatore

- S1. Un razzo ha una massa iniziale di 20 000 kg, dei quali il 20% è il carico utile. Il razzo brucia carburante a un tasso di 200 kg/s ed espelle il gas a una velocità relativa di 2.00 km/s. La sua accelerazione dv/dt viene determinata dall'equazione del moto

$$M \frac{dv}{dt} = v_e \left| \frac{dM}{dt} \right| + F_{\text{est}}$$

Assumere che non vi siano forze esterne e che la velocità iniziale del razzo sia nulla. Quando $F_{\text{est}} = 0$, la velocità del razzo è $v(t) = v_e \ln(M_i/M)$, dove M_i è la massa iniziale del razzo. Il Foglio Elettronico 8.1 calcola l'accelerazione e la velocità in funzione del tempo. (a) Usando i parametri dati, trovare la massima accelerazione e velocità. (b) In quale istante la velocità è uguale a metà del suo valore massimo? Perché questo tempo non corrisponde a metà del tempo di accensione?

- S2. Modificare il Foglio Elettronico 8.1 per calcolare la distanza percorsa dal razzo del Problema S1. Aggiungere una colonna al foglio elettronico per trovare la nuova posizione x_{i+1} . Stimare la nuova posizione dalla

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2} (v_{i+1} + v_i) \Delta t$$

dove x_i è la posizione precedente, v_i è la velocità precedente, e v_{i+1} è la nuova velocità.

- S3. Se il razzo del problema precedente brucia il suo carburante a un tasso doppio (400 kg/s) mentre mantiene la stessa velocità di espulsione dei gas, quanto percorrerà prima di esaurire il suo carburante? La velocità raggiunta dal razzo è la stessa in ambedue i casi; cioè

$$v_f - v_i = v_e \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right)$$

Vi è un vantaggio nel bruciare il carburante più rapidamente? Vi è uno svantaggio? (Suggerimento: sarebbe utile visualizzare un grafico delle accelerazioni, delle velocità, e delle posizioni per lo stesso intervallo di tempo in ambedue i casi. In quale caso il razzo viaggia più lontano? In quale caso il razzo subisce una maggiore accelerazione? Di quanto?).

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Il cervello è immerso in un fluido ammortizzatore all'interno del cranio. Se la testa viene colpita improvvisamente da un pugno nudo, si verifica una rapida accelerazione del cranio. Il cervello si adatta a questa accelerazione soltanto a causa della grande forza impulsiva impressa dal cranio. Questa forza intensa e improvvisa può seriamente compromettere il cervello. I guanti imbottiti aumentano il tempo durante il quale la forza viene applicata alla testa. Quindi, per un dato impulso, i guanti forniscono un intervallo di tempo più lungo rispetto al pugno nudo, diminuendo la forza media. Poiché la forza media si riduce, l'accelerazione del cranio diminuisce riducendo (ma non eliminando) la probabilità di offesa al cervello. Lo stesso discorso si può fare per la manovra di "ruotare sul colpo". Se la testa rimane ferma mentre riceve il colpo, l'intervallo di tempo durante il quale viene applicata la forza è relativamente breve e la forza media risulta grande. Se, invece, la testa si muove nella stessa verso del pugno, l'intervallo di tempo si allunga e la forza media si riduce.
- La scena descritta viola il principio della conservazione della quantità di moto. Se Superman, inizialmente fermo, scaglia il pianoforte in una certa direzione, egli dovrebbe retrocedere nel verso opposto per mantenere nulla la quantità di moto totale del sistema.
- Costruire macchine con gomma dura farebbe risparmiare soldi, ma il risultato per conducenti e passeggeri sarebbe disastroso. Immaginiamo due macchine identiche che viaggiano l'una contro l'altra alla stessa velocità si scontrino frontalmente. Nell'approssimazione dell'urto elastico, le macchine, in seguito all'urto, rimbalzerebbero lontano l'una dall'altra con le loro velocità in verso opposto. Quindi, i passeggeri delle macchine subirebbero una grande variazione della loro quantità di moto in un breve intervallo di tempo. La conseguenza sarebbe una forza agente sui passeggeri che diverrebbe grandissima, causando significative lesioni corporali. Per macchine reali nella precedente situazione, le macchine rallenterebbero durante l'urto fino a fermarsi, nel tempo in cui la parte frontale si schiaccerebbe. Quindi, la variazione della quantità di moto sarebbe soltanto la metà di quella del caso elastico, e la variazione avverrebbe in un intervallo di tempo più lungo a causa della deformazione delle macchine. Risultando per ciò una forza minore sui passeggeri si avrebbero un minor numero di lesioni.
- Se tutta l'energia cinetica si trasforma in altre forme, allora dopo l'urto nessuno dei due oggetti è in movimento. Se il moto è zero, è nulla la quantità di moto. Quindi, se la quantità di moto finale del sistema è zero, allora deve essere zero la quantità di moto iniziale del sistema. La condizione richiesta, allora, è che i due oggetti si avvicinino l'uno all'altro subendo un urto centrale, con quantità di moto uguali in modulo ma di verso opposto.
- Lega un'estremità della corda attorno all'orsa. Stendi il metro flessibile sul ghiaccio tra la posizione iniziale dell'orsa e la tua, mentre tieni l'altra estremità della corda. Dopo aver tolto le tue scarpe chiodate tira la corda. Sia tu che l'orsa scivolerete sul ghiaccio finché non vi incontrerete. Osserva sul metro il tuo slittamento, x_t , e quello dell'orsa, x_0 . Il punto dove incontri l'orsa è la posizione costante del centro di massa del sistema (orsa più te), cosicché puoi determinare la massa dell'orsa da $m_0x_0 = m_t x_t$. (Sfortunatamente, se l'orsa ora si sveglia non puoi più tornare indietro alle tue scarpe chiodate).
- Trascurando la resistenza dell'aria, la sola forza esterna agente sul proiettile è la forza di gravità. Quindi, il proiettile segue una traiettoria parabolica. Se il proiettile non esplosesse, esso continuerebbe a muoversi lungo la traiettoria parabolica indicata dalla linea tratteggiata in Figura 8.19. Poiché le forze dovute all'esplosione sono interne, esse non influenzano il moto del centro di massa. Perciò, dopo l'esplosione, e fino a quando il primo frammento tocca il suolo, il centro di massa dei frammenti segue la traiettoria parabolica che avrebbe seguito il proiettile se non fosse esploso.

9

Relatività

Gran parte delle nostre esperienze e osservazioni quotidiane ha a che fare con oggetti che si muovono con velocità molto minori di quella della luce. La meccanica newtoniana e le prime idee sullo spazio e sul tempo furono formulate per la descrizione del moto di tali oggetti. Questo formalismo funziona bene nella descrizione di una vasta classe di fenomeni che avvengono a basse velocità. Esso fallisce, tuttavia, quando viene applicato a particelle la cui velocità si approssima a quella della luce. Sperimentalmente si possono controllare le previsioni della teoria newtoniana ad alte velocità accelerando elettroni o altre particelle cariche. Per esempio, è possibile accelerare un elettrone a una velocità di $0.99c$ (dove c è la velocità della luce) per mezzo di un acceleratore di particelle. Secondo la meccanica newtoniana, se l'energia trasferita all'elettrone viene aumentata di un fattore 4, la velocità dell'elettrone dovrebbe balzare a $1.98c$. Gli esperimenti mostrano invece che la velocità dell'elettrone, così come la velocità di

tutte le altre particelle dell'Universo, rimane sempre inferiore a quella della luce, indipendentemente dall'energia della particella. La meccanica newtoniana, non ponendo

VOCABOLARIO TECNICO

- 9.1 Il principio della relatività newtoniana
- 9.2 L'esperimento di Michelson-Morley
- 9.3 Il principio di relatività di Einstein
- 9.4 Conseguenze della relatività ristretta
- 9.5 Le trasformazioni di Lorentz
- 9.6 Quantità di moto relativistica e forma relativistica delle leggi di Newton
- 9.7 Energia relativistica
- 9.8 La massa come misura dell'energia
- 9.9 Relatività generale (Facoltativo)



Albert Einstein (1879-1955), uno dei più grandi fisici di tutti i tempi, è noto soprattutto per aver sviluppato la teoria della relatività. Qui lo si vede allegramente in sella alla sua bicicletta. La foto fu scattata nel 1933 a Santa Barbara, in California. (Dagli archivi del California Institute of Technology)

"L'immaginazione è più importante della conoscenza".
Albert Einstein

un limite superiore alla velocità, è in contrasto con i moderni risultati sperimentali ed è chiaramente una teoria di validità limitata.

Nel 1905, a soli 26 anni, Einstein pubblicò la sua teoria della relatività ristretta di cui scrisse:

La teoria della relatività sorse dalla necessità di sanare serie e profonde contraddizioni nella vecchia teoria da cui sembrava non ci fosse via d'uscita. La forza della nuova teoria sta nella consistenza interna e nella semplicità con cui risolve tutte queste difficoltà, usando solo alcune ipotesi molto convincenti...¹

Sebbene Einstein abbia dato molti altri importanti contributi alla scienza, la sua teoria della relatività rappresenta da sola una delle più grandi conquiste intellettuali del XX secolo. Con questa teoria si possono prevedere correttamente le osservazioni sperimentali nell'intervallo da $v = 0$ a velocità vicine a quella della luce. La meccanica newtoniana, che era stata accettata per più di 200 anni, è in effetti un'approssimazione della teoria di Einstein. Questo capitolo introduce la teoria della relatività ristretta, sottolineandone alcune delle conseguenze.

La relatività ristretta spiega fenomeni come il rallentamento degli orologi e la contrazione delle lunghezze nei sistemi di riferimento in moto misurati da un osservatore fermo. Discuteremo, inoltre, le espressioni relativistiche della quantità di moto e dell'energia, e alcune conseguenze della famosa formula di equivalenza massa-energia, $E = mc^2$.

Oltre al ruolo ben noto ed essenziale in fisica teorica, la relatività ristretta ha anche applicazioni pratiche che includono il progetto di acceleratori e altri dispositivi che usano particelle ad alta velocità. Questi dispositivi non funzionerebbero se venissero progettati secondo i principi non relativistici. Avremo occasione di utilizzare la relatività in alcuni capitoli successivi di questo testo, spesso presentando solo il risultato degli effetti relativistici.

9.1 • IL PRINCIPIO DELLA RELATIVITÀ NEWTONIANA

Per descrivere un evento fisico si deve innanzitutto scegliere un sistema di riferimento, ad esempio un riferimento fisso nel laboratorio. Quando, nel Capitolo 4, abbiamo introdotto le leggi del moto di Newton, abbiamo sottolineato che queste leggi sono valide in *tutti* i sistemi di riferimento inerziali. Poiché si definisce come inerziale un sistema di riferimento in cui è valida la prima legge di Newton, si può dire che un sistema di riferimento inerziale è un riferimento in cui un corpo libero non subisce alcuna accelerazione. Inoltre, un qualunque sistema di riferimento che si muova con velocità costante rispetto a un sistema di riferimento inerziale è anch'esso inerziale.

Non vi è un sistema di riferimento privilegiato. Ciò significa che i risultati di un esperimento condotto su un veicolo in moto con velocità costante saranno identici a quelli del medesimo esperimento compiuto su un veicolo in quiete. L'enunciato formale di questo risultato si chiama principio di relatività newtoniana:

Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Sistema di riferimento inerziale

¹ A. Einstein e L. Infeld, *The Evolution of Physics*, New York, Simon and Schuster, 1961, trad. it.: L'evoluzione della fisica, Boringhieri.

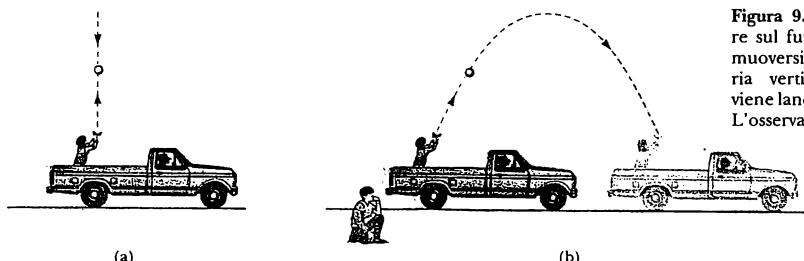


Figura 9.1 (a) L'osservatore sul furgone vede la palla muoversi lungo una traiettoria verticale quando essa viene lanciata verso l'alto. (b) L'osservatore fisso al suolo vede che la traiettoria della palla è una parabola.

Consideriamo un'osservazione che illustra l'equivalenza delle leggi della meccanica in sistemi di riferimento inerziali diversi. Consideriamo un furgone che si muove con velocità costante, come in Figura 9.1a. Se un passeggero sul furgone lancia una palla in linea retta verso l'alto, il passeggero osserva che la palla si muove lungo una traiettoria verticale. Il moto della palla appare lo stesso come se la palla fosse stata lanciata da una persona fissa sulla Terra. La legge di gravità e le equazioni della cinematica vengono soddisfatte sia quando il furgone sta fermo che quando si muove uniformemente. Consideriamo, ora, lo stesso esperimento visto da un osservatore fermo rispetto alla Terra. Questo osservatore stazionario vede che la traiettoria della palla è una parabola, come in Figura 9.1b. Inoltre, secondo questo osservatore, la palla ha una componente orizzontale della velocità uguale alla velocità del furgone. Sebbene i due osservatori vedano velocità e tassi di variazione di energia diversi, essi vedono le stesse forze e concordano sulla validità delle leggi di Newton così come sul principio di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Tutte le differenze fra i due punti di vista riguardano il moto relativo di un riferimento rispetto all'altro. Cioè, il concetto di moto assoluto attraverso lo spazio non gioca alcun ruolo in ciò che viene visto.

Supponiamo che in un sistema inerziale, cioè non accelerato, avvenga un qualche fenomeno fisico, che chiameremo *evento*. La posizione e l'istante di tempo in cui l'evento ha luogo saranno specificati dalle coordinate (x, y, z, t) . Ci piacerebbe saper trasformare le coordinate spaziali e temporali dell'evento da un riferimento inerziale ad un altro in moto rispetto al primo con velocità costante. Ciò si può fare usando le cosiddette *trasformazioni galileiane*.

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, S ed S' , (Fig. 9.2). Il sistema S' si muove con velocità u lungo gli assi comuni xx' , rispetto al sistema S . Supponiamo che un evento accada nel punto P e che le origini di S ed S' coincidano per $t = 0$. L'evento potrebbe essere un battito cardiaco o il lampo di un flash. Un osservatore nel sistema S descriverebbe l'evento con le coordinate spazio-temporali (x, y, z, t) , mentre un osservatore nel sistema S' userebbe le coordinate (x', y', z', t') per descrivere lo stesso evento. Come si può vedere dalla Figura 9.2, queste coordinate sono correlate dalle equazioni

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad [9.1]$$

Queste equazioni costituiscono quelle che sono chiamate *trasformazioni galileiane delle coordinate*. Si noti che si assume che la quarta coordinata, il tempo, sia la stessa in entrambi i sistemi inerziali. Cioè, nell'ambito della meccanica classica, tutti gli orologi marcano con lo stesso ritmo, indipendentemente dalla

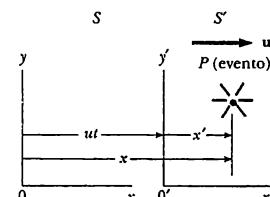


Figura 9.2 Un evento accade nel punto P . L'evento è osservato da due osservatori nei riferimenti inerziali S ed S' con S' che si muove con velocità u rispetto a S .

- *Trasformazione galileiana delle coordinate*

loro velocità, di modo che il tempo che caratterizza un evento per un osservatore in S è uguale a quello che viene associato allo stesso evento in S' . Di conseguenza, gli intervalli temporali fra due eventi successivi saranno gli stessi per entrambi gli osservatori. Benché questa ipotesi possa sembrare ovvia, essa risulta *non essere corretta* quando si ha a che fare con situazioni in cui u è confrontabile con la velocità della luce. In effetti questo punto rappresenta una delle più profonde differenze fra i concetti newtoniani e le idee contenute nella teoria di Einstein, della relatività ristretta.

Supponiamo ora che nel sistema di riferimento S due eventi siano separati da una distanza dx e da un intervallo di tempo dt . Dalla Equazione 9.1 discende che il corrispondente spostamento dx' misurato da un osservatore in S' è dato da $dx' = u dt$, ove dx' è lo spostamento misurato da un osservatore in S . Dato che $dt' = dt$ si ha

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - u$$

ossia

$$v'_x = v_x - u \quad [9.2]$$

dove v'_x è la velocità istantanea del punto P rispetto a S' e v_x è la sua velocità istantanea rispetto a S^2 . Questo risultato, che va sotto il nome di **trasformazione galileiana della velocità**, è usato quotidianamente nelle osservazioni ed è consistente con le nostre nozioni intuitive di spazio e tempo. Tuttavia, come vedremo subito, questi risultati portano a serie contraddizioni quando si applicano alle onde elettromagnetiche.



Albert A. Michelson
(1852-1931)

Michelson, un fisico tedesco-americano, ha inventato l'interferometro e ha dedicato una gran parte della sua vita nell'eseguire misure accurate della velocità della luce. Nel 1907 egli fu il primo americano insignito del premio Nobel per il suo lavoro nel campo dell'ottica. Il suo esperimento più famoso, eseguito in collaborazione con Edward Morley nel 1887, implicò l'impossibilità della misura assoluta della velocità della Terra rispetto al mezzo chiamato etere.

[AIP Emilio Segré Visual Archives, Michelson Collection]

9.2 • L'ESPERIMENTO DI MICHELSON-MORLEY

Molti esperimenti simili a quello descritto nel paragrafo precedente mostrano come le leggi della meccanica siano le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Quando indagini simili vengono svolte sulle leggi di altre branche della fisica, i risultati sono contraddittori. In particolare, le leggi dell'elettricità e del magnetismo sembrano dipendere dal sistema di riferimento utilizzato. Si potrà obiettare che sono queste leggi ad essere sbagliate, ma ciò sarebbe difficile in quanto tali leggi sono in perfetta sintonia con tutti i risultati sperimentali conosciuti. L'esperimento di Michelson-Morley fu un tentativo di spiegare questo dilemma.

L'esperimento prendeva spunto da un equivoco che i primi fisici avevano riguardo al modo di propagarsi della luce. Le proprietà delle onde meccaniche, come l'acqua e le onde sonore, erano note e tutte queste onde richiedono un mezzo per sostenere le perturbazioni. Nel XIX secolo i fisici ritenevano che anche le onde elettromagnetiche richiedessero un mezzo tramite il quale propagarsi. Essi arrivarono a teorizzare l'esistenza di questo mezzo, chiamandolo **etere luminifero**. Se ne assumeva la presenza dappertutto, anche nel vuoto, ritenendo che avesse la insolita proprietà di essere privo di massa ma rigido (tutto sommato una strana idea!). Inoltre, si scoprì che le difficili leggi dell'elettricità e del magnetismo assumevano le loro forme più semplici in un sistema di riferimento a riposo rispetto all'etere luminifero. Si chiamò questo sistema **sistema assoluto**. In qualsiasi sistema di riferimento in moto rispetto ad

² In conformità alla nota del Capitolo 3, il simbolo u indicherà la velocità relativa fra due particelle e/o corpi estesi (muoni, astronavi, vagoni, regoli, Terra, ecc.) quando e in quanto considerati sistemi di riferimento, mentre il simbolo v indicherà la velocità di particelle o di corpi estesi in un particolare sistema di coordinate [N.d.T.].

esso, le leggi dell'elettricità e del magnetismo, pur rimanendo valide, avrebbero dovuto essere modificate.

Come risultato dell'importanza affidata a questo sistema assoluto, la prova sperimentale della sua esistenza divenne di interesse notevole in fisica. Tuttavia, tutti i tentativi di rilevare la presenza dell'etere (e quindi del sistema assoluto) si dimostrarono vani. Il più famoso esperimento volto a dimostrare la presenza dell'etere fu compiuto nel 1887 da A.A. Michelson (1852-1931) e E.W. Morley (1838-1923). L'esperimento aveva lo scopo di determinare la velocità della Terra rispetto all'etere e il dispositivo sperimentale usato fu l'interferometro mostrato in Figura 9.3.

Supponiamo che uno dei bracci dell'interferometro (M_0M_2 in Fig. 9.3) sia allineato nel verso del moto della Terra nello spazio. Il moto della Terra attraverso l'etere è equivalente al fluire dell'etere rispetto alla Terra nel verso opposto. Questo «vento d'etere» che soffia nella direzione opposta a quella del moto della Terra dovrebbe far sì che la velocità della luce misurata nel sistema di riferimento della Terra sia $c - u$ quando la luce si dirige verso lo specchio M_2 nella Figura 9.3 e $c + u$ dopo la riflessione. La velocità u è la velocità della Terra nello spazio e, quindi, la velocità del vento d'etere, mentre c è la velocità della luce nel sistema di riferimento dell'etere. I fasci di luce incidente e riflesso si ricombinerebbero e si formerebbe una figura di interferenza.

Durante l'esperimento si osservava il comportamento della figura d'interferenza quando l'interferometro veniva ruotato di 90° . L'idea era che questa rotazione avrebbe cambiato la velocità del vento d'etere lungo la direzione dei bracci dell'interferometro e, di conseguenza, si sarebbe dovuto avere un leggero ma misurabile spostamento della figura d'interferenza. Le misure non riuscirono a mostrare alcuna variazione nella figura d'interferenza! L'esperimento di Michelson-Morley fu ripetuto da altri ricercatori in varie condizioni e in diverse posizioni, ma i risultati furono sempre gli stessi: *nessuno spostamento di frange dell'entità richiesta fu mai osservato*.³

I risultati negativi dell'esperimento di Michelson-Morley dimostrarono che era impossibile misurare la velocità (orbitale) assoluta della Terra rispetto al riferimento dell'etere. Però, come vedremo nel prossimo paragrafo, Einstein avanzò per la sua teoria della relatività un postulato che fornisce un'interpretazione completamente diversa di questi risultati. Negli anni successivi, quando si seppe di più sulla luce, l'idea di un etere che permeava tutto lo spazio fu relegata nel mucchio dei concetti in disuso. La luce viene ora considerata come un'onda elettromagnetica che non richiede alcun mezzo per la sua propagazione. Quindi l'idea che esista un etere in cui queste onde possano viaggiare è diventata un costrutto non necessario.

Versioni moderne dell'esperimento di Michelson-Morley hanno messo a confronto le frequenze di risonanza di cavità a laser di lunghezza identica, orientate ad angolo retto tra loro. Più recentemente, esperimenti Doppler utilizzanti raggi gamma emessi da un campione radioattivo di ^{57}Fe hanno posto un limite superiore di circa 5 cm/s sulla velocità del vento d'etere. Tali risultati hanno mostrato in modo abbastanza definitivo che il moto della Terra non ha effetto sulla velocità della luce.

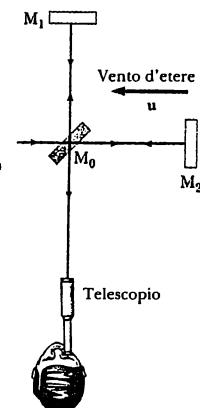


Figura 9.3 Secondo la teoria del vento d'etere, la velocità della luce dovrebbe essere $c - u$ quando il fascio si dirige verso lo specchio M_2 , e $c + u$ dopo la riflessione.

³ Dal punto di vista di un osservatore terrestre, le variazioni del modulo della velocità e della direzione del moto della Terra nel corso di un anno vengono viste come un vento d'etere. Anche se la velocità della Terra rispetto all'etere fosse zero a un certo tempo, 6 mesi dopo la velocità della Terra sarebbe di 60 km/s rispetto all'etere e si dovrebbe trovare un chiaro spostamento della frangia. Tuttavia, non è mai stato osservato nulla.

9.3 • IL PRINCIPIO DI RELATIVITÀ DI EINSTEIN

Nel paragrafo precedente abbiamo notato l'impossibilità di misurare la velocità dell'etere rispetto alla Terra e il fallimento della legge di Galileo di composizione delle velocità nel caso della luce. Albert Einstein propose una teoria che rimuoveva totalmente queste difficoltà e nello stesso tempo alterava completamente la nostra nozione di spazio e di tempo⁴. Einstein basò la relatività ristretta su due postulati:

I postulati della relatività ristretta

1. **Il Princípio di Relatività:** tutte le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. **La Costanza della Velocità della Luce:** la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dalla velocità dell'osservatore o dalla velocità della sorgente che emette la luce.

Il primo postulato afferma che *tutte* le leggi della fisica, che riguardano la meccanica, l'elettricità e il magnetismo, l'ottica, la termodinamica, e così via, sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento che si muovono con velocità costante relativamente a ciascun altro. Questo postulato è una assoluta generalizzazione del principio di relatività di Newton che si riferisce soltanto alle leggi della meccanica. Da un punto di vista sperimentale, il principio di relatività di Einstein significa che qualunque tipo di esperimento (misura della velocità della luce, per esempio), eseguito in un laboratorio fermo deve dare lo stesso risultato quando viene eseguito in un laboratorio che si muove a velocità costante rispetto al primo. Quindi, non esistono sistemi di riferimento preferenziali ed è impossibile rivelare il moto assoluto.

Si noti che il postulato 2, il principio della costanza della velocità della luce, è richiesto dal postulato 1: se la velocità della luce non fosse la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, sarebbe possibile distinguere tra i sistemi di riferimento inerziali e potrebbe essere identificato un sistema assoluto, preferenziale, in contraddizione col postulato 1. Il postulato 2 elimina anche il problema di misurare la velocità dell'etere negando l'esistenza dell'etere e affermando esplicitamente che la luce si muove sempre con velocità c rispetto a tutti gli osservatori inerziali.

Sebbene l'esperimento di Michelson-Morley sia stato effettuato prima che Einstein pubblicasse il suo lavoro sulla relatività, non è chiaro se Einstein fosse a conoscenza dei dettagli dell'esperimento. D'altra parte, il risultato dell'esperimento può essere prontamente compreso nella cornice della teoria di Einstein. In accordo col suo principio della relatività, le premesse dell'esperimento di Michelson-Morley erano sbagliate. Nel cercare di spiegare i risultati attesi, abbiamo stabilito che quando la luce viaggia contro il vento d'etere, la sua velocità è $c - u$, in accordo con la legge galileiana di composizione delle velocità. Tuttavia, se lo stato di moto dell'osservatore o della sorgente non ha influenza sul valore trovato per la velocità della luce, si misurerà sempre lo stesso valore c . Analogamente, quando la luce dopo la riflessione nello specchio torna indietro, avrà la velocità c e non la velocità $c + u$. Quindi, il moto della Terra non dovrebbe influenzare la figura d'interferenza (frange) osservata nell'esperimento di Michelson-Morley, per cui ci si dovrebbe attendere un risultato nullo.

⁴ A. Einstein, "Sulla elettrodinamica dei corpi in moto", *Ann. Physik* 17:891 (1905). H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, e H. Weyl, *Il principio della relatività*, New York, Dover, 1958.

Se accettiamo la teoria della relatività di Einstein, dobbiamo concludere che il moto relativo non è importante quando si misura la velocità della luce. Allo stesso tempo, dobbiamo modificare il nostro senso comune sulla nozione di spazio e tempo ed essere preparati per alcune conseguenze piuttosto bizzarre.

Fisica ragionata 1

Immaginiamo un faro estremamente potente con una sorgente di luce ruotante. Immaginiamo pure di tracciare una circonferenza orizzontale attorno al faro, con il faro al centro. Lungo la circonferenza, il fascio di luce ne illumina una porzione e la porzione illuminata si muove lungo la circonferenza con una certa velocità tangenziale. Se adesso immaginiamo una circonferenza di raggio doppio, la velocità tangenziale della porzione illuminata è più veloce, poiché essa percorre una circonferenza più grande nel tempo di una rotazione della sorgente di luce. Immaginiamo di continuare a fare delle circonferenze sempre più grandi, eventualmente spostandoci fuori nello spazio. La velocità tangenziale della porzione illuminata andrà crescendo. È possibile che la velocità tangenziale possa diventare maggiore della velocità della luce? Ciò violerebbe il principio della relatività ristretta?

Ragionamento Per una circonferenza sufficientemente grande, è possibile che la velocità tangenziale della porzione illuminata della circonferenza possa essere maggiore della velocità della luce. Tuttavia, ciò non viola il principio della relatività ristretta, poiché non vi è alcuna materia o informazione che viaggi a una velocità maggiore di quella della luce.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Ti trovi su una imbarcazione veloce su un lago. Vedi di fronte a te un fronte d'onda, causato dal precedente passaggio di un'altra imbarcazione che si allontana da te. Tu acceleri, raggiungi l'onda e la oltrepassi. Questo scenario è possibile se tu ti trovi su un razzo e rivelvi un fronte d'onda di *luce* davanti a te?

9.4 • CONSEGUENZE DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Prima di discutere le conseguenze della relatività ristretta, dobbiamo capire come un osservatore in un sistema di riferimento inerziale descrive un evento. Come accennato in precedenza, un evento è un avvenimento che è descritto da tre coordinate spaziali e una coordinata temporale. Diversi osservatori in diversi sistemi inerziali descriveranno in generale lo stesso evento con diverse coordinate spazio-temporali.

Il sistema di riferimento usato per descrivere un evento consiste di una griglia di coordinate e di una serie di orologi fissati nelle intersezioni degli elementi che costituiscono la griglia, come mostrato in Figura 9.4 in una rappresentazione bidimensionale. È necessario che il sistema di orologi sia sincronizzato e ciò può essere ottenuto in vari modi con l'ausilio di segnali luminosi. Per esempio, supponiamo che l'osservatore posto nell'origine del sistema di coordinate con il suo orologio principale lanci un impulso all'istante $t=0$. L'impulso di luce impiega il tempo r/c per raggiungere un secondo orologio posto a distanza r dall'origine. Per cui, il secondo orologio sarà sincronizzato con l'orologio posto nell'origine se esso legge il tempo r/c al momento in cui l'impulso lo raggiunge. Questo procedimento di sincronizzazione assume che la velocità della luce sia la stessa in tutte le direzioni e in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Inoltre, il procedimento riguarda un evento registrato da un osservatore in uno specifico sistema di riferimento



Albert Einstein (1879-1955)

Uno dei più grandi fisici di tutti i tempi, Einstein nacque a Ulm in Germania. Nel 1905, all'età di 26 anni, pubblicò quattro lavori scientifici, che rivoluzionarono la fisica. Due di queste pubblicazioni riguardavano ciò che ora viene considerato il più importante contributo fra tutti, la teoria della relatività ristretta. Nel 1916, Einstein pubblicò il suo lavoro sulla teoria della relatività generale. La previsione più drammatica di questa teoria è il grado col quale la luce viene deflessa da un campo gravitazionale. Misure eseguite dagli astronomi su stelle molto luminose in prossimità del Sole eclissato nel 1919 confermarono la previsione di Einstein, il quale divenne subito una celebrità mondiale. Einstein fu profondamente turbato dallo sviluppo della meccanica quantistica negli anni venti a dispetto del suo proprio ruolo come scienziato rivoluzionario. In particolare, egli non accettò mai il punto di vista probabilistico degli eventi in natura che costituisce una caratteristica centrale della teoria quantistica. Negli ultimi decenni della sua vita si dedicò senza successo alla ricerca di una teoria unificata che avrebbe dovuto contenere in un'unica descrizione la gravitazione e l'elettromagnetismo.

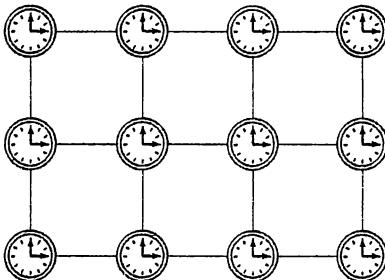


Figura 9.4 In relatività, usiamo un sistema di riferimento che consiste di una griglia di coordinate e una serie di orologi sincronizzati.

inerziale. Un osservatore in un altro sistema inerziale assegnerà diverse coordinate spazio-temporali ad eventi che osserva usando la propria griglia di coordinate e il proprio sistema di orologi.

Chiunque abbia una conoscenza scientifica anche superficiale è al corrente delle stupefacenti previsioni che derivano dalla teoria di Einstein sul moto relativo. Nei tre paragrafi seguenti, esaminando alcune conseguenze della relatività, troveremo che esse contrastano con le nostre nozioni base di spazio e di tempo. Limiteremo la nostra discussione ai concetti di lunghezza, tempo e simultaneità, che, nella meccanica relativistica, sono del tutto diversi rispetto alla meccanica newtoniana. Per esempio, la distanza fra due punti e l'intervallo di tempo fra due eventi dipendono dal sistema di riferimento in cui avviene la loro misura. Cioè, in relatività non esiste nulla che sia una lunghezza assoluta o un tempo assoluto. Inoltre, eventi in punti diversi che accadono simultaneamente in un sistema di riferimento non sono simultanei in un altro riferimento che si muove uniformemente rispetto al primo.

Simultaneità e relatività del tempo

Un presupposto fondamentale della meccanica newtoniana è l'esistenza di una scala universale dei tempi, che è la stessa per tutti gli osservatori. Infatti, Newton scrisse «il tempo assoluto, vero e matematico, di per se stesso e per sua natura fluisce uniformemente senza relazione con alcuna cosa esterna». Pertanto, Newton e i suoi seguaci non misero mai in discussione la simultaneità. Nella sua teoria della relatività ristretta, Einstein abbandonò tale ipotesi. Secondo Einstein, le misure degli intervalli di tempo dipendono dal sistema di riferimento in cui vengono eseguite.

Einstein inventò il seguente esperimento concettuale per illustrare questo punto. Un vagone si muove con velocità uniforme e due fulmini ne colpiscono gli estremi, come nella Figura 9.5a, lasciando delle tracce sul vagone e sul terreno. Le tracce lasciate sul vagone sono indicate con A' e B' e quelle sul terreno con A e B . Un osservatore posto in O' che si muove assieme al vagone si trova a metà strada fra A' e B' , e un osservatore posto sul terreno in O è a metà strada fra A e B . Gli eventi visti dagli osservatori sono i segnali luminosi corrispondenti ai fulmini.

Assumiamo che i due segnali luminosi raggiungano l'osservatore in O allo stesso istante, come mostrato in Figura 9.5b. Questo osservatore considera che i due segnali luminosi hanno viaggiato alla stessa velocità su distanze di uguale lunghezza, e così conclude giustamente che gli eventi A e B sono avvenuti simultaneamente. Consideriamo gli stessi eventi come vengono visti dall'osservatore in

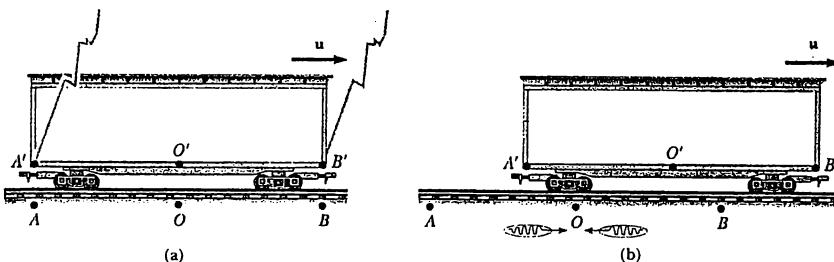


Figura 9.5 Due fulmini colpiscono le estremità di un vagone in movimento. (a) Gli eventi appaiono simultanei per l'osservatore fisso in O , che si trova a metà strada fra A e B . (b) Gli eventi non appaiono simultanei per l'osservatore in O' , per il quale la testa del vagone viene colpita prima della coda.

O' sul vagone. I fulmini cadono mentre A' passa da A , O' passa da O , e B' passa da B . Nel tempo in cui la luce ha raggiunto l'osservatore in O , l'osservatore in O' si è mosso, come indicato in Figura 9.5b. Pertanto, il segnale di luce proveniente da B' raggiunge O' prima del segnale proveniente da A' . Secondo Einstein, l'osservatore in O' deve trovare che la luce viaggia con la stessa velocità misurata dall'osservatore in O . Quindi, l'osservatore in O' conclude che la testa del vagone è stata colpita dal fulmine prima della coda. Questo esperimento concettuale dimostra chiaramente che due eventi, che appaiono simultanei all'osservatore in O , non appaiono simultanei all'osservatore in O' . In altre parole,

Due eventi che sono simultanei in un sistema di riferimento non sono in generale simultanei in un secondo sistema in moto rispetto al primo. Ossia, la simultaneità non è un concetto assoluto ma dipende dallo stato di moto dell'osservatore.

A questo punto, potremmo chiederci quale osservatore ha ragione riguardo ai due eventi. La risposta è *entrambi hanno ragione*, perché il principio di relatività stabilisce che non c'è un sistema di riferimento privilegiato. Benché i due osservatori raggiungano conclusioni diverse, entrambi ragionano correttamente nel proprio sistema di riferimento, perché il concetto di simultaneità non è assoluto. È questo, infatti, il punto cardine della relatività: qualsiasi sistema di riferimento in moto uniforme può essere usato per descrivere eventi e fare fisica. Tuttavia, osservatori in sistemi di riferimento diversi misureranno sempre intervalli di tempo diversi con i loro orologi e distanze diverse con i loro metri. Nonostante, tutti concorderanno sulle leggi della fisica nei loro rispettivi sistemi di riferimento, poiché esse devono essere le stesse per tutti gli osservatori in moto uniforme. È questa alterazione del tempo e dello spazio che permette alle leggi della fisica (incluso le equazioni di Maxwell) di essere le stesse in qualsiasi sistema inerziale.

Dilatazione del tempo

Come abbiamo visto, osservatori in sistemi di riferimento diversi misureranno sempre intervalli di tempo diversi tra una coppia di eventi. Ciò può essere illustrato considerando un veicolo in moto verso destra con velocità u , come in

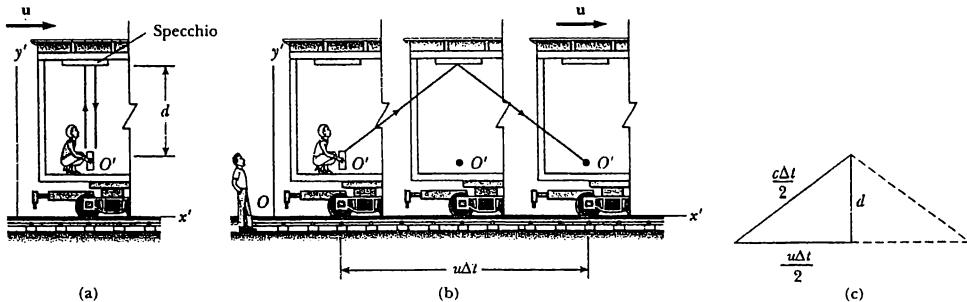


Figura 9.6 (a) Uno specchio è fissato ad un veicolo in moto e un segnale luminoso parte da una sorgente O' in quiete nel veicolo. (b) Rispetto ad un osservatore fisso sulla Terra, lo specchio ed O' si muovono con velocità u . Si noti che la distanza percorsa dal segnale è maggiore di quella, $2d$, misurata dall'osservatore fisso. (c) Il triangolo rettangolo per calcolare la relazione tra Δt e Δt_p .

Figura 9.6a. Uno specchio è piazzato sul soffitto del veicolo e un osservatore di nome Lisa in O' , in quiete in questo sistema, tiene in mano un laser a distanza d dallo specchio. Ad un certo istante il laser emette un impulso di luce direttamente verso lo specchio (evento 1) e a un certo istante successivo, dopo la riflessione sullo specchio, l'impulso torna indietro al laser (evento 2). Poiché l'impulso di luce ha velocità c , il tempo impiegato per andare da Lisa allo specchio e tornare da Lisa può essere ricavato dalla definizione di velocità:

$$\Delta t_p = \frac{\text{distanza percorsa}}{\text{velocità}} = \frac{2d}{c} \quad [9.3]$$

L'intervallo di tempo Δt_p misurato da Lisa, che è in quiete sul veicolo in moto, richiede solo un *singolo orologio* C' situato nello stesso posto in questo sistema.

Consideriamo la stessa successione di eventi dal punto di vista di un osservatore chiamato Marco posto in O in un sistema di riferimento fisso (Fig. 9.6b). Secondo Marco, lo specchio ed il laser si muovono verso destra con velocità u . Nel tempo impiegato dalla luce inviata dal laser per arrivare sullo specchio, lo specchio si sposta di $u\Delta t/2$, ove Δt è il tempo che l'impulso luminoso impiega per andare da O' allo specchio e tornare indietro in O' così come è misurato da Marco. In altri termini, Marco conclude che, a causa del moto del sistema, la luce, per colpire lo specchio deve muoversi ad un certo angolo rispetto alla verticale. Confrontando le Figure 9.6a e 9.6b vediamo che la luce compie un tragitto più lungo per Marco che per Lisa.

Ora, per il secondo postulato di Einstein la velocità della luce deve essere c per entrambi gli osservatori. Quindi, poiché la luce compie per Marco un cammino più lungo, l'intervallo di tempo Δt , misurato da Marco nel riferimento fisso, è più *lungo* dell'intervallo di tempo Δt_p , misurato da Lisa nel riferimento in moto. Per ottenere una relazione fra Δt e Δt_p , è conveniente usare il triangolo rettangolo mostrato in Figura 9.6c. Il teorema di Pitagora applicato a questo triangolo dà

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

Risolvendo per Δt si ha

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2d}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad [9.4]$$

Ma essendo $\Delta t_p = 2d/c$ si può scrivere l'Equazione 9.4 come

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_p \quad [9.5] \quad \bullet \text{ Dilatazione del tempo}$$

dove $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$. Questo risultato dice che l'intervento di tempo Δt misurato da un osservatore in moto rispetto all'orologio è maggiore dell'intervento di tempo Δt_p misurato da un osservatore fermo rispetto all'orologio perché γ è sempre maggiore di uno. Cioè, $\Delta t > \Delta t_p$. Questo effetto si chiama dilatazione del tempo.

L'intervento di tempo Δt_p nell'Equazione 9.5 si chiama **tempo proprio**. In generale, il tempo proprio viene definito come l'intervento di tempo tra due eventi misurato da un osservatore che vede gli eventi avvenire nello stesso punto dello spazio. Nel nostro caso, l'osservatore O' misura il tempo proprio. Cioè, il tempo proprio è sempre l'intervento di tempo misurato con un solo orologio fermo nel sistema di riferimento nel quale gli eventi avvengono nella stessa posizione.

Poiché si osserva che il tempo fra i battiti di un orologio in moto, $\gamma(2d/c)$, è più lungo del tempo fra i battiti di un identico orologio fermo, $2d/c$, si dice spesso, "un orologio in moto va più lentamente di un orologio fermo di un fattore γ ". Ciò risulta vero tanto per gli orologi meccanici ordinari quanto per l'orologio a luce appena descritto. Infatti, possiamo generalizzare questo risultato affermando che tutti i processi fisici, inclusi quelli chimici e biologici, rallentano rispetto a un orologio stazionario quando questi processi avvengono in un sistema di riferimento in moto. Per esempio, i battiti del cuore di un astronauta che si muove attraverso lo spazio dovrebbero essere misurati con un orologio che si trovi all'interno dell'astronave. Sia l'orologio dell'astronauta che i suoi battiti cardiaci saranno rallentati rispetto a un orologio stazionario. L'astronauta non avrà alcuna sensazione del rallentamento della vita nell'astronave. Per l'astronauta, è l'orologio sulla Terra e i compagni della Missione di Controllo che si muovono e quindi subiscono un rallentamento del tempo.

La dilatazione del tempo è un fenomeno verificabile. Per esempio, i muoni sono particelle elementari instabili che hanno una carica uguale a quella di un elettrone e una massa di 207 volte quella di un elettrone. I muoni si possono produrre per mezzo di urti della radiazione cosmica con gli atomi nell'alta atmosfera. I muoni che si muovono lentamente in laboratorio hanno una vita media di solo $2.2 \mu s$. Se noi assumiamo $2.2 \mu s$ come il tempo di vita media di un muone e assumiamo che la sua velocità sia prossima alla velocità della luce, troviamo che queste particelle possono attraversare una distanza intorno ai 600 m prima di decadere (Fig. 9.7a). Quindi, essi non possono raggiungere la superficie terrestre dall'alta atmosfera dove sono stati prodotti. Tuttavia, gli esperimenti mostrano che un grande numero di muoni raggiungono la superficie terrestre. Il fenomeno della dilatazione del tempo spiega questo effetto. Relativamente a un osservatore sulla Terra, i muoni hanno un tempo di vita uguale a $\gamma\tau$, dove $\tau = 2.2 \mu s$ è il tempo di vita in un sistema di riferimento che viaggia insieme ai muoni. Per esempio, per $v = 0.99c$, $\gamma \approx 7.1$ e $\gamma\tau \approx 16 \mu s$. Quindi, la distanza media attraversata così come viene misurata da un osservatore sulla Terra è $\gamma v\tau \approx 4800$ m,

- *Tempo proprio*

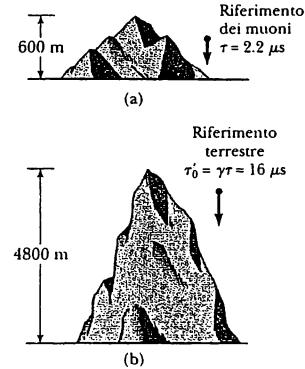


Figura 9.7 (a) Muoni che percorrono solo 600 m secondo le misure fatte nel loro riferimento proprio, ove la loro vita media è di circa $2.2 \mu s$. A causa della dilatazione dei tempi, la vita media dei muoni misurata dall'osservatore sulla Terra risulta più lunga. (b) I muoni che vanno alla velocità di $0.99c$ percorrono circa 4800 m per un osservatore posto sulla Terra.

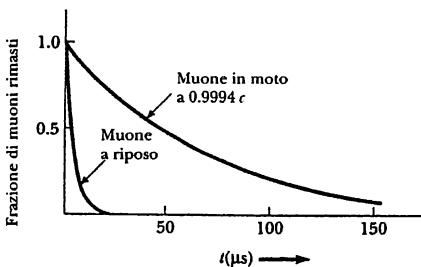


Figura 9.8 Curve di decadimento per muoni che viaggiano ad una velocità di $0.9994c$ e per muoni a riposo.

come è indicato nella Figura 9.7b. Nel 1976, presso il laboratorio del Centro Europeo Ricerche Nucleari (CERN) di Ginevra, furono iniettati dei muoni nel grande anello di accumulazione che raggiunsero la velocità approssimativa di $0.9994c$. Gli elettroni prodotti dal decadimento dei muoni furono rivelati dai contatori sistemati attorno all'anello, permettendo agli scienziati di misurare il tasso di decadimento e quindi la vita media dei muoni. Il tempo di vita dei muoni in moto risultò dalle misure circa 30 volte superiore a quello dei muoni stazionari (Fig. 9.8), in accordo con la previsione della relatività entro 2 parti su 1000.

I risultati di un esperimento riportati da Hafele e Keating forniscono una evidenza diretta della dilatazione del tempo⁵. L'esperimento ha coinvolto l'uso di orologi atomici al cesio estremamente stabili. Gli intervalli di tempo misurati con quattro di tali orologi in volo su un jet, furono confrontati con gli intervalli di tempo misurati da orologi di riferimento posti all'Osservatorio Navale degli Stati Uniti. Per confrontare questi risultati con la teoria, fu necessario prendere in considerazione molti fattori, incluso il periodo di accelerazione e decelerazione relativo al suolo, le variazioni nella direzione del viaggio, e il campo gravitazionale meno intenso subito dagli orologi in volo rispetto a quello degli orologi al suolo. I loro risultati si accordarono bene con le previsioni della relatività ristretta e si possono spiegare in termini del moto relativo fra la rotazione della Terra e del jet. Nel loro articolo, Hafele e Keating scrivono quanto segue: "Rispetto alla scala degli orologi atomici dell'Osservatorio Navale degli Stati Uniti, gli orologi in volo hanno perso 59 ± 10 ns durante il viaggio verso est e guadagnato 273 ± 7 ns nel viaggio verso ovest. . . Questi risultati forniscono una risposta sperimentale non ambigua al famoso paradosso degli orologi, con orologi macroscopici".

Fisica ragionata 2

Supponiamo che uno studente spieghi la dilatazione del tempo con il seguente argomento: se tu inizi a correre a $0.99c$ allontanandoti da un orologio alle 12:00, tu non potrai vedere la variazione di tempo, poiché la luce proveniente dall'orologio che rappresenta le 12:01 non ti raggiungerà mai. Qual è il difetto di questo argomento?

Ragionamento L'inferenza in questo argomento è che la velocità della luce rispetto al corridore è approssimativamente zero - "la luce. . . non ti raggiungerà mai." Questo è un punto di vista galileiano, nel quale la velocità relativa è la semplice sottrazio-

⁵ J.C. Hafele e R.E. Keating, "Around the World Atomic Clocks: Relativistic Time Gains Observed", *Science*, July 14, 1972, p.168.

ne della velocità del corridore dalla velocità della luce. Dal punto di vista della relatività ristretta, uno dei postulati fondamentali afferma che la velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori, *inclusi quelli che corrono allontanandosi da una sorgente luminosa alla velocità della luce*. Quindi, la luce delle 12:01 si muoverà verso il corridore alla velocità della luce.

Esempio 9.1 Qual è il periodo del pendolo?

Il valore misurato del periodo di un pendolo è 3.0 s in un sistema di riferimento nel quale la sospensione del pendolo è ferma. Qual è il periodo quando viene misurato da un osservatore che si muove alla velocità di $0.95c$ relativamente al pendolo?

Ragionamento Invece dell'osservatore che si muove a $0.95c$, possiamo prendere l'equivalente punto di vista dell'osservatore fermo e del pendolo che si muove a $0.95c$ rispetto all'osservatore stazionario. Allora il pendolo è un esempio di orologio in moto.

Soluzione Il tempo proprio è 3.0 s. Poiché un orologio in moto batte il tempo più lentamente rispetto a uno stazionario di un fattore γ , l'Equazione 9.5 dà

$$T = \gamma T_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0.95c)^2}{c^2}}} T_p = (3.2)(3.0\text{ s}) = 9.6\text{ s}$$

Cioè, un pendolo in moto va più lentamente, ossia impiega più tempo per completare un periodo rispetto a uno fermo.

ESERCIZIO 1 Dei muoni si muovono su orbite circolari alla velocità di $0.9994c$ in un anello di accumulazione di raggio 500 m. Se un muone stazionario decade in altre particelle dopo $2.2\text{ }\mu\text{s}$ (tempo proprio), quanti giri attorno all'anello dobbiamo aspettare affinché i muoni decadano? Risposta 6.1 rivoluzioni

Contrazione della lunghezza

Anche la misura della distanza fra due punti dipende dal sistema di riferimento. La lunghezza propria di un oggetto è definita come la lunghezza dell'oggetto misurata da chi è fermo rispetto all'oggetto. La lunghezza di un oggetto misurata da chi si trova in un sistema di riferimento in moto rispetto all'oggetto è sempre minore della lunghezza propria dell'oggetto. Questo effetto è noto come **contrazione della lunghezza**.

Consideriamo un'astronave che viaggi a una velocità u da una stella a un'altra. Vi sono due osservatori, uno sulla Terra e un altro sull'astronave. L'osservatore fermo sulla Terra (che si assume pure fermo rispetto alle due stelle) misura che la distanza fra le due stelle è L_p , la lunghezza propria. Secondo questo osservatore, il tempo necessario all'astronave per completare il viaggio è $\Delta t = L_p/u$. Quale distanza fra le stelle misurerà l'osservatore in moto sull'astronave? A causa della dilatazione del tempo, il viaggiatore spaziale misura un tempo di viaggio minore: $\Delta t_p = \Delta t/\gamma$. Il viaggiatore spaziale afferma di essere stazionario e di vedere la stella di destinazione muoversi verso l'astronave con velocità u . Poiché il viaggiatore spaziale raggiunge la stella in un tempo Δt_p , conclude che la distanza L , fra le stelle è più corta di L_p . Questa distanza, misurata dal viaggiatore spaziale è

$$L = u \Delta t_p = u \frac{\Delta t}{\gamma}$$

Poiché $L_p = u \Delta t$, si vede che $L = L_p/\gamma$ ossia

$$L = L_p \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad [9.6] \quad \bullet \text{ Contrazione della lunghezza}$$

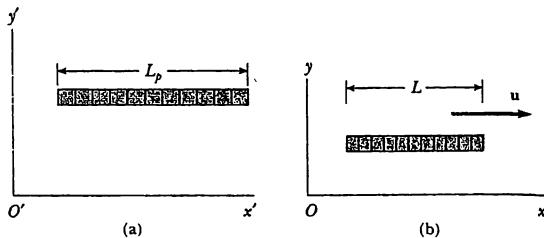


Figura 9.9 (a) Un righello visto da un osservatore solidale con l'asta graduata (cioè entrambi hanno la stessa velocità). (b) L'asta graduata vista da un osservatore in un sistema in cui l'asta graduata ha velocità u rispetto al sistema di riferimento. La lunghezza dell'asta in moto è più corta di un fattore $(1 - u^2/c^2)^{1/2}$.

dove $(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ è un fattore minore di uno. Questo risultato si può interpretare come segue:

Un osservatore in moto trova che la misura della lunghezza L di un oggetto (lungo la direzione del moto) risulta minore della lunghezza L_p misurata da un osservatore stazionario rispetto all'oggetto (lunghezza propria).

Si noti che la **contrazione della lunghezza avviene soltanto lungo la direzione del moto**. Per esempio, supponiamo che un'asta graduata si muova rispetto a un osservatore terrestre con una velocità u come in Figura 9.9. La lunghezza dell'asta graduata misurata da un osservatore in un sistema di riferimento solidale con l'asta è la lunghezza propria, L_p , come in Figura 9.9a. La lunghezza dell'asta, L , misurata dall'osservatore terrestre risulta più corta di L_p per un fattore $(1 - u^2/c^2)^{1/2}$. Tuttavia, la contrazione della lunghezza è un effetto simmetrico: se l'asta graduata è stazionaria rispetto alla Terra, un osservatore in un sistema di riferimento in moto misurerà una lunghezza più corta dello stesso fattore $(1 - u^2/c^2)^{1/2}$.

È importante sottolineare che la lunghezza propria e il tempo proprio sono misurati in sistemi di riferimento diversi. Come esempio di questo fatto, ritorniamo al decadimento dei muoni che si muovono a velocità prossime a quella della luce. Un osservatore nel sistema di riferimento dei muoni misurerà un tempo di vita proprio, mentre un osservatore terrestre misurerà l'altezza propria della montagna in Figura 9.7. Nel sistema di riferimento dei muoni, non si verifica la dilatazione del tempo, ma si osserva che la distanza percorsa è più corta quando venga misurata in questo sistema di riferimento. Analogamente, nel sistema di riferimento terrestre, si verifica la dilatazione del tempo, ma la distanza percorsa è l'altezza propria della montagna. Quindi, quando i calcoli sui muoni vengono eseguiti in ambedue i sistemi di riferimento, i risultati dell'esperimento in un sistema di riferimento sono gli stessi di quelli ottenuti nell'altro sistema di riferimento!

Esempio 9.2 Un viaggio verso Sirio

Un astronauta intraprende un viaggio verso Sirio, posto a una distanza di 8 anni-luce dalla Terra. L'astronauta misura che il tempo del viaggio di andata è di sei anni. Se l'astronave si muove a velocità costante di $0.8c$, come può conciliarsi la distanza di 8 anni-luce con la durata misurata dall'astronauta?

Ragionamento Gli 8 anni-luce (a.l.) rappresentano la lunghezza propria (distanza) della Terra da Sirio misu-

rata da un osservatore che vede entrambi praticamente fermi. L'astronauta vede Sirio avvicinarsi a lui a $0.8c$ ma vede anche la distanza contrarsi di

$$\frac{8 \text{ a.l.}}{\gamma} = (8 \text{ a.l.}) \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (8 \text{ a.l.}) \sqrt{1 - \frac{(0.8c)^2}{c^2}} = 5 \text{ a.l.}$$

Quindi, il tempo di viaggio misurato dall'orologio dell'astronauta è

$$\Delta t = \frac{d}{u} = \frac{5 \text{ a.l.}}{0.8c} = 6 \text{ anni}$$

Esempio 9.3 L'astronave triangolare

Un'astronave a forma di triangolo vola rispetto a un osservatore con una velocità di $0.95c$ lungo la direzione x . Quando l'astronave è ferma rispetto all'osservatore (Fig. 9.10a), le lunghezze x e y sono rispettivamente 52 m e 25 m. Qual è la forma dell'astronave vista da un osservatore stazionario quando l'astronave si muove lungo la direzione mostrata in Figura 9.10b?

Soluzione L'osservatore vede la lunghezza orizzontale dell'astronave contrarsi alla lunghezza

$$L = L_p \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (52 \text{ m}) \sqrt{1 - \frac{(0.95c)^2}{c^2}} = 16 \text{ m}$$

La lunghezza verticale di 25 m rimane invariata poiché è perpendicolare alla direzione del moto relativo fra

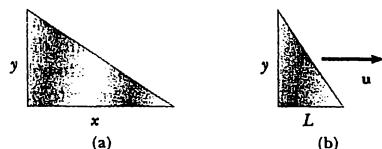


Figura 9.10 (Esempio 9.3) (a) Quando l'astronave è ferma, la sua forma è quella illustrata. (b) L'astronave appare di questa forma a un osservatore fermo, quando si muove verso destra con velocità u . Si noti che solo la sua dimensione x risulta contratta in questo caso.

osservatore e astronave. La Figura 9.10b rappresenta la forma dell'astronave vista dall'osservatore stazionario.

ESERCIZIO 2 Un'astronave si muove a $0.9c$. Se la sua lunghezza è L_0 quando viene misurata dall'interno dell'astronave, qual è la lunghezza misurata da un osservatore al suolo? Risposta $0.436L_0$

ESERCIZIO 3 Un'astronave misura 120 m mentre è ferma rispetto a un osservatore. Se l'astronave adesso vola a $0.99c$ rispetto all'osservatore, quale lunghezza misurerà l'osservatore? Risposta 17 m

Il paradosso dei gemelli

Un'affascinante conseguenza della dilatazione del tempo è il cosiddetto paradosso dei gemelli. Consideriamo un esperimento che coinvolga due gemelli di nome Pieveloce e Tartarugo che hanno, diciamo, 20 anni. I gemelli posseggono orologi identici che sono stati sincronizzati (Fig. 9.11). Pieveloce, il più avventuroso dei due, decide di fare un viaggio memorabile sul pianeta X, lontano 10 anni-luce dalla Terra. Inoltre, la sua astronave è capace di raggiungere una velocità di $0.500c$ relativamente a un sistema di riferimento inerziale del suo gemello sulla Terra. Dopo aver raggiunto il pianeta X, Pieveloce ha nostalgia di casa e immediatamente ritorna sulla Terra alla stessa velocità che ha

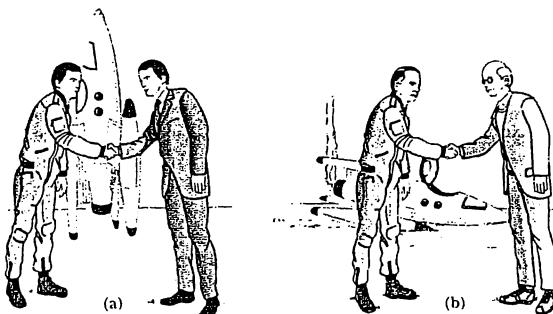
FACOLTATIVO

Figura 9.11 (a) Alla partenza i due gemelli hanno la stessa età. (b) Quando Pieveloce ritorna dal suo viaggio sul pianeta X, egli è più giovane del suo gemello Tartarugo rimasto sulla Terra.

tenuto nel viaggio di andata. Al suo ritorno, Pieveloce rimane sbalordito nello scoprire che molte cose sono cambiate durante la sua assenza. Per Pieveloce, la variazione più significativa che sia avvenuta è che il suo gemello Tartarugo è invecchiato di 40 anni e ora ha un'età di 60 anni. Pieveloce, d'altra parte, è invecchiato soltanto di 34.6 anni.

A questo punto, è interessante sollevare la seguente domanda: quale dei due gemelli è il viaggiatore e quale dei due è più giovane in conseguenza di questo esperimento? Nel sistema di riferimento di Tartarugo, egli rimaneva fermo mentre suo fratello viaggiava ad alta velocità. Dal punto di vista di Pieveloce, egli era fermo mentre era invece Tartarugo a viaggiare ad alta velocità. Secondo Pieveloce, è Tartarugo e la Terra che si sono allontanati per un viaggio di 17.3 anni e poi sono ritornati indietro per altri 17.3 anni. Ciò induce a un'apparente contraddizione. Quale dei due gemelli porta segni di maggior invecchiamento?

Per risolvere questo apparente paradosso, ricordiamo che in ogni sistema di riferimento scelto (come quello del gemello che rimane a casa), gli orologi in un sistema di riferimento in moto risultano più lenti. Tuttavia, la situazione del viaggio non è simmetrica. Pieveloce, il viaggiatore spaziale, subisce, durante il suo viaggio, una serie di accelerazioni. Di conseguenza, la sua velocità non è sempre uniforme e quindi Pieveloce non si trova su un unico sistema di riferimento inerziale. Egli non può essere considerato sempre stazionario e Tartarugo in moto uniforme poiché egli varia il suo stato di moto almeno una volta. Quindi, non vi è paradosso.

La conclusione che Pieveloce si trova in un sistema di riferimento non inerziale è ineccepibile. Il tempo necessario per accelerare e decelerare l'astronave di Pieveloce può essere reso molto piccolo usando dei grandi razzi, cosicché Pieveloce possa affermare di spendere la maggior parte del suo tempo per viaggiare verso il pianeta X a $0.500c$ in un sistema di riferimento inerziale. Inoltre, Pieveloce deve anche rallentare, invertire il moto, e ritornare sulla Terra in un diverso sistema di riferimento inerziale. Nel migliore dei casi, Pieveloce si trova in due diversi sistemi di riferimento inerziali durante il suo viaggio. Soltanto Tartarugo, che si trova in un solo sistema di riferimento inerziale, può applicare la semplice formula della dilatazione del tempo al viaggio di Pieveloce. Quindi, Tartarugo trova che invece di invecchiare di 40 anni, Pieveloce invecchia soltanto $(1 - u^2/c^2)^{1/2}(40 \text{ anni}) = 34.6 \text{ anni}$. Inoltre, Pieveloce impiega 17.3 anni per andare al pianeta X e 17.3 anni per ritornare, con un tempo totale del viaggio di 34.6 anni, in accordo con la nostra precedente affermazione.

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Stai preparando i bagagli per un viaggio verso un'altra stella, verso la quale viaggerai a 0.99c. Dovrai comprarti vestiti di taglia più piccola, per il fatto che diventerai più magro durante il viaggio? Dovrai dormire in una cabina più piccola della solita, dato che diventerai più corto quando ti metterai a dormire?

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Supponiamo che gli astronauti siano pagati a seconda del tempo impiegato nei viaggi spaziali. Dopo un lungo viaggio ad una velocità vicina a quella della luce, un equipaggio di astronauti ritorna sulla Terra e apre le buste paga. Quale sarà la loro reazione?

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Stai osservando un razzo che si allontana da te. Noti che esso risulta più corto di quanto sta fermo al suolo vicino a te, e, attraverso una finestra del razzo, puoi scorgere un

orologio. Osservi che il tempo di questo orologio scorre più lentamente di quello dell'orologio che hai al polso. Che cosa osserveresti se il razzo invertisse il moto e ritornasse verso di te? Esso apparirebbe più *lungo* e l'orologio solidale con esso più *rapido*?

9.5 • LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Abbiamo visto che le trasformazioni di Galileo non sono valide quando u si avvicina alla velocità della luce. In questo paragrafo, stabiliremo le equazioni di trasformazione corrette che si applicano a tutte le velocità nel campo $0 \leq u < c$.

Supponiamo che un evento che accade in un certo punto P venga registrato da due osservatori, uno in quiete nel sistema S e uno in un sistema S' in moto verso destra con velocità u , come in Figura 9.12. L'osservatore in S registra l'evento con le coordinate spazio-temporali (x, y, z, t) , mentre l'osservatore in S' registra lo stesso evento usando le coordinate (x', y', z', t') . Vogliamo trovare una relazione tra queste coordinate che sia valida, per tutte le velocità. Nel Paragrafo 9.1, abbiamo trovato che le trasformazioni galileiane, date dalle Equazioni 9.1, non vanno d'accordo con i dati sperimentali a velocità confrontabili con la velocità della luce.

Le equazioni corrette, valide per velocità che vanno da $u=0$ a $u=c$ e che permettono di passare da S a S' , sono date dalle **equazioni delle trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Trasformazione di} \\ \text{Lorentz da } S \rightarrow S' \end{array} \quad [9.7]$$

Le equazioni di Lorentz furono ricavate originariamente da H.A. Lorentz (1853-1928) nel 1890. Tuttavia, fu Einstein che riconobbe il loro significato fisico e le interpretò nell'ambito della teoria della relatività ristretta.

Vediamo che il valore t' assegnato ad un evento da un osservatore in S' dipende sia dal tempo t che dalla coordinata x misurata dall'osservatore in S . Ciò è consistente con la nozione che un evento è caratterizzato da quattro coordinate spazio-temporali (x, y, z, t) . In altre parole, in relatività, spazio e tempo non sono concetti separati, ma strettamente interconnessi. Ciò è diverso dal caso della trasformazione galileiana in cui $t = t'$.

Se vogliamo passare dal sistema di riferimento S' al sistema S , dobbiamo semplicemente sostituire u con $-u$ e scambiare i simboli con l'apice con quelli senza apice nelle Equazioni 9.7. Si ottengono le seguenti trasformazioni:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{u}{c^2} x' \right) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Trasformazione di} \\ \text{Lorentz inverse da } S' \rightarrow S \end{array} \quad [9.8]$$

Quando $u \ll c$, le trasformazioni di Lorentz dovrebbero ridursi alle trasformazioni galileiane. Per verificare ciò, si noti che per $u \rightarrow 0$, $u/c^2 \ll 1$ e $u^2/c^2 \ll 1$,

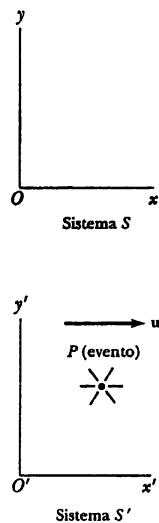


Figura 9.12 Rappresentazione di un evento che accade in un punto, P osservato da un osservatore in quiete nel sistema S e da un altro nel sistema S' , che si muove verso destra con velocità u .

per cui $\gamma = 1$ e le Equazioni 9.7 si riducono al limite alle equazioni delle trasformazioni galileiane, date da

$$x' = x - ut \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

In molte situazioni, sarebbe utile conoscere la *differenza* nelle coordinate tra due eventi o l'*intervallo* di tempo tra due eventi visti dall'osservatore O e dall'osservatore O' . Ciò può essere ottenuto scrivendo le equazioni di Lorentz in una forma opportuna per descrivere coppie di eventi. Dalle Equazioni 9.7 e 9.8 possiamo esprimere le differenze tra le quattro variabili x , x' e t' nella forma:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma (\Delta x - u \Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma \left(\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x \right) \quad S \rightarrow S' \\ \Delta x &= \gamma (\Delta x' + u \Delta t') \\ \Delta t &= \gamma \left(\Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta x' \right) \quad S' \rightarrow S \end{aligned} \quad [9.9] \quad [9.10]$$

dove $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ e $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ sono le differenze misurate dall'osservatore O' , mentre $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$ sono le differenze misurate dall'osservatore O . Non abbiamo incluso le espressioni che legano le coordinate y e z , perché esse non sono influenzate dal moto lungo l'asse x .⁶

Esempio 9.4 Simultaneità e dilatazione del tempo rivisitate

Si usino le equazioni delle trasformazioni di Lorentz nella forma per le differenze per mostrare che (a) la simultaneità non è un concetto assoluto e (b) orologi in moto ritardano rispetto a orologi fermi.

Soluzione (a) Si supponga che due eventi siano **simultanei** secondo un osservatore O' in moto, ossia $\Delta t' = 0$. Dalla Equazione 9.10 vediamo che in questo caso $\Delta t = \gamma u \Delta x' / c^2$. Ossia, l'intervallo di tempo per gli stessi due eventi misurati dall'osservatore O non è zero, cosicché non appariranno ad O simultanei.

(b) **Dilatazione del tempo:** si supponga che l'osservatore O' trovi che due eventi avvengano nello stesso posto ($\Delta x' = 0$), ma in istanti diversi ($\Delta t' \neq 0$). In questa situazione dall'Equazione 9.10 abbiamo $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Questa è l'equazione trovata in precedenza per la dilatazione del tempo, Equazione 9.5, dove $\Delta t'$ è il tempo proprio misurato da un singolo orologio in O' .

ESERCIZIO 4 Si usino le trasformazioni di Lorentz nella forma per le differenze per dimostrare che $L = L_p / \gamma$.

Le trasformazioni di Lorentz per le velocità

Ricaviamo adesso la trasformazione di Lorentz per la velocità, che è l'analogia relativistica della trasformazione di Galileo per la velocità. Ancora una volta S è il nostro sistema di riferimento stazionario ed S' è il nostro sistema di riferimento che si muove con velocità u relativa ad S . Supponiamo che un oggetto sia osservato nel sistema di riferimento S' con una velocità istantanea v'_x misurata in S' data da

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad [9.11]$$

⁶ Sebbene il moto lungo x non faccia variare le coordinate y e z , esso fa variare le componenti della velocità lungo y e z .

Usando l'Equazione 9.7 si ha

$$dx' = \gamma (dx - u dt) \quad \text{e} \quad dt' = \gamma \left(dt - \frac{u}{c^2} dx \right)$$

Sostituendo nell'Equazione 9.11 si ottiene

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - u dt}{dt - \frac{u}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

Ma dx/dt è proprio la velocità v_x dell'oggetto misurata in S , e quindi la precedente espressione diventa

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \quad [9.12]$$

- *Trasformazione di Lorentz della velocità da $S \rightarrow S'$*

Allo stesso modo, se l'oggetto ha componenti della velocità lungo gli assi y e z , le corrispondenti componenti in S' sono date da

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x u}{c^2} \right)} \quad \text{e} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_x u}{c^2} \right)} \quad [9.13]$$

Quando sia v_x che u sono molto piccole rispetto a c (caso non relativistico) il denominatore dell'Equazione 9.12 si avvicina ad uno e così $v'_x \approx v_x - u$. Ciò corrisponde alla trasformazione galileiana della velocità. Nel caso opposto in cui $v_x = c$, l'Equazione 9.12 diventa

$$v'_x = \frac{c - u}{1 - \frac{cu}{c^2}} = \frac{c \left(1 - \frac{u}{c} \right)}{1 - \frac{u}{c}} = c$$



La velocità della luce è la velocità limite dell'Universo.

Da questo risultato si vede che un oggetto che si muove alla velocità c rispetto a un osservatore in S ha una velocità c anche relativamente a un osservatore in S' , *indipendentemente* dal moto relativo di S ed S' . Va notato che questa conclusione è coerente con il secondo postulato di Einstein, cioè con l'ipotesi che la velocità della luce sia c in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Inoltre, la velocità di un oggetto non può mai superare c . Cioè, la velocità della luce è la velocità «limite». Torneremo su questo punto più avanti quando considereremo l'energia di una particella.

Per ottenere v_x in funzione di v'_x , sostituiamo u con $-u$ nell'Equazione 9.12 e scambiamo i ruoli di v_x e v'_x . Si ha così

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} \quad [9.14]$$

- *Trasformazione di Lorentz inversa della velocità da $S' \rightarrow S$*

Esempio 9.5 Velocità relativa di astronavi

Due astronavi A e B si muovono in versi opposti, come nella Figura 9.13. Un osservatore sulla Terra misura per A la velocità $0.75c$ e per B $0.85c$. Trovare la velocità di B rispetto ad A.

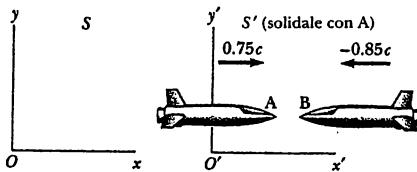


Figura 9.13 (Esempio 9.5) Due astronavi A e B si muovono in versi opposti. La velocità di B rispetto ad A è inferiore a c e si ottiene usando la trasformazione relativistica della velocità.

Soluzione Questo problema può essere risolto considerando il riferimento S' solidale con l'astronave A, in

modo che sia $u = 0.75c$ rispetto ad un osservatore sulla Terra (riferimento S). L'astronave B può essere considerata come un oggetto che si muove verso sinistra con una velocità $v_x = -0.85c$ rispetto ad un osservatore sulla Terra. Quindi, la velocità di B rispetto ad A può essere ottenuta usando l'Equazione 9.12:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{-0.85c - 0.75c}{1 - \frac{(-0.85c)(0.75c)}{c^2}} = -0.98c$$

Il segno negativo per v'_x indica che l'astronave B si muove nel verso negativo dell'asse x , così come è osservata da A. Si noti che il risultato è minore di c . Cioè, un corpo la cui velocità è minore di c in un sistema di riferimento, deve avere una velocità inferiore a c in un *qualsiasi altro* sistema di riferimento. In questo esempio, se si fossero usate le trasformazioni galileiane avremmo trovato $v'_x = v_x - u = -0.85c - 0.75c = -1.6c$, che è maggiore di c . La trasformazione galileiana non funziona nei casi relativistici.

Esempio 9.6 Motociclisti relativistici

Due motociclisti di nome David ed Emily corrono a velocità relativistiche lungo cammini perpendicolari, come in Figura 9.14. Quanto velocemente Emily si allontana alla destra di David così come viene vista da David?

Soluzione La Figura 9.14 rappresenta la situazione così come viene vista da un poliziotto fermo nel sistema di riferimento S , il quale osserva quanto segue:

$$\text{David: } v_x = 0.750$$

$$v_y = 0$$

$$\text{Emily: } v_x = 0$$

$$v_y = -0.900c$$

Per ottenere la velocità di allontanamento di Emily così

come viene vista da David, prendiamo S' in moto insieme a David e calcoliamo v'_x e v'_y per Emily facendo uso delle Equazioni 9.12 e 9.13:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{0 - 0.75c}{1 - \frac{(0)(0.75c)}{c^2}} = -0.75c$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x u}{c^2} \right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{(0.75c)^2}{c^2}} (-0.90c)}{\left(1 - \frac{(0)(0.75c)}{c^2} \right)} = -0.60c$$

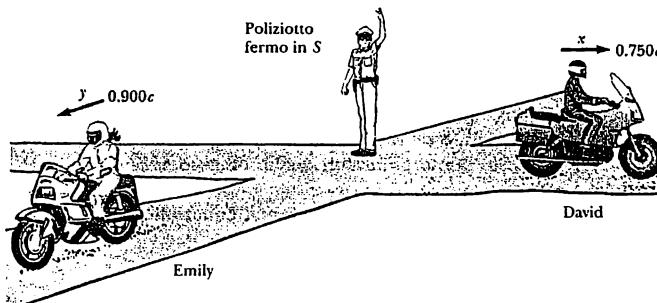


Figura 9.14 (Esempio 9.6) David si muove verso est alla velocità di $0.750c$ relativa al poliziotto, mentre Emily viaggia verso sud alla velocità di $0.900c$.

Quindi, la velocità di Emily osservata da David è

$$v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} = \sqrt{(-0.75c)^2 + (-0.60c)^2} = 0.96c$$

Si noti che questa velocità è minore di c così come viene richiesto dalla relatività ristretta.

ESERCIZIO 5 Calcolare la velocità di allontanamento classica per Emily così come viene osservata da David usando la trasformazione di Galileo. Risposta $1.2c$

ESERCIZIO 6 Un'astronave Klingon si allontana dalla Terra alla velocità di $0.80c$. L'astronave *Enterprise* l'insegue a una velocità di $0.90c$ relativa alla Terra. Gli osservatori sulla Terra vedono che l'*Enterprise* raggiunge l'astronave Klingon a una velocità relativa di $0.10c$. Con quale velocità l'*Enterprise* raggiunge l'astronave Klingon così come viene visto dall'equipaggio dell'*Enterprise*? Risposta $0.36c$

9.6 • QUANTITÀ DI MOTO RELATIVISTICA E FORMA RELATIVISTICA DELLE LEGGI DI NEWTON

Abbiamo visto che allo scopo di descrivere appropriatamente il moto di particelle entro il riferimento della relatività ristretta, la trasformazione di Galileo deve essere sostituita dalla trasformazione di Lorentz. Poiché le leggi fisiche, sottoposte a una trasformazione di Lorentz, devono restare le stesse, dobbiamo generalizzare le leggi di Newton e le definizioni di quantità di moto ed energia per adattarle alla trasformazione di Lorentz e al principio di relatività. Queste definizioni generalizzate devono ridursi alle definizioni classiche (non relativistiche) per $v \ll c$.

In primo luogo, ricordiamo che la legge della conservazione della quantità di moto afferma che quando due corpi si urtano, la quantità di moto totale rimane costante, assumendo che i corpi siano isolati. Supponiamo che l'urto venga descritto in un sistema di riferimento S nel quale la quantità di moto si conserva. Se le velocità in un secondo sistema di riferimento S' sono calcolate usando la trasformazione di Lorentz e la definizione classica di quantità di moto, $p = mv$, si trova che la quantità di moto non si conserva nel secondo sistema di riferimento. Inoltre, poiché le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, la quantità di moto si deve conservare in tutti i sistemi. Tenendo conto di questa condizione e assumendo che la trasformazione di Lorentz sia corretta, dobbiamo modificare la definizione della quantità di moto affinché soddisfi le seguenti condizioni:

- p si deve conservare in tutti gli urti;
- p deve avvicinarsi al valore classico mv quando $v \rightarrow 0$.

La corretta equazione relativistica per la quantità di moto che soddisfa queste condizioni è data dall'espressione

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [9.15] \quad \bullet \text{Definizione di quantità di moto relativistica}$$

dove v è la velocità della particella. Quando v è molto minore di c , il denominatore dell'Equazione 9.15 si approssima all'unità, sicché p si approssima a mv . Quindi, l'equazione relativistica per p si riduce all'espressione classica quando v è piccolo confrontato con c . Per la sua semplicità, l'Equazione 9.15 viene spesso scritta nella forma

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad [9.16]$$

dove $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Si noti che γ ha la stessa forma funzionale del γ nella trasformazione di Lorentz. La trasformazione è quella dal sistema della particella al sistema dell'osservatore che si muove alla velocità v relativa alla particella.

La forza relativistica \mathbf{F} agente su una particella la cui quantità di moto è \mathbf{p} è definita come

$$\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad [9.17]$$

dove \mathbf{p} è dato dall'Equazione 9.15. Questa espressione è ragionevole perché conserva la meccanica classica nel limite di basse velocità e richiede la conservazione della quantità di moto per un sistema isolato ($\mathbf{F} = 0$) sia relativisticamente che classicamente.

Viene lasciato come problema di fine capitolo (Problema 47) di dimostrare che l'accelerazione a di una particella diminuisce sotto l'azione di una forza costante, nel qual caso $a \propto (1 - v^2/c^2)^{3/2}$. Da questa formula si nota che quando la velocità della particella si approssima a c , l'accelerazione provocata da una forza finita si approssima a zero. Quindi, è impossibile accelerare una particella da uno stato stazionario a una velocità $v \geq c$.

Esempio 9.7 Quantità di moto di un elettrone

Un elettrone, che ha una massa di 9.11×10^{-31} kg, si muove con una velocità di $0.75c$. Trovare la sua quantità di moto relativistica e confrontarla con quella calcolata secondo l'espressione classica.

Soluzione Usando l'Equazione 9.15, con $v = 0.75c$, si ha

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}) (0.750 \times 3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{\sqrt{1 - \frac{(0.750c)^2}{c^2}}} \\ = 3.10 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

L'espressione classica non corretta darebbe invece

$$\text{Quantità di moto} = m_e v = 2.05 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Il risultato relativistico corretto è quindi più grande del 50% di quello classico!

9.7 • ENERGIA RELATIVISTICA

Abbiamo visto che la definizione di quantità di moto e le leggi del moto devono essere generalizzate per renderle compatibili con il principio di relatività. Ciò implica che deve essere modificata anche la definizione di energia cinetica.

Per derivare la forma relativistica della relazione fra lavoro ed energia (Eq. 6.19, Cap. 6), partiamo dalla definizione di lavoro svolto da una forza \mathbf{F} e usiamo la definizione relativistica di forza, Equazione 9.17. Cioè,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx \quad [9.18]$$

dove abbiamo supposto che la forza e il moto della particella siano diretti lungo l'asse x . Per eseguire questa integrazione, e trovare il lavoro compiuto su una particella, ossia l'energia cinetica relativistica in funzione di v , calcoliamo prima dp/dt :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m(dv/dt)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Sostituendo questa espressione per dp/dt e $dx = vdt$ nell'Equazione 9.18 si ottiene

$$W = \int_0^t \frac{m(dv/dt) v dt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m \int_0^v \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv$$

dove abbiamo assunto che la particella viene accelerata dalla quiete a una certa velocità finale v . Calcolando l'integrale, troviamo che

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \quad [9.19]$$

D'altra parte, come si ricorderà dal Capitolo 6 e dall'Equazione 6.19, il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro svolto da una forza agente su una particella è uguale alla variazione di energia cinetica della particella. Dato che l'energia cinetica iniziale è zero possiamo concludere che il lavoro W è equivalente all'energia cinetica relativistica K , cioè

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 \quad [9.20] \quad \bullet \text{Energia cinetica relativistica}$$

Questa equazione è stata confermata da esperimenti con acceleratori di particelle ad alte energie.

Per velocità basse, tali che $v/c \ll 1$, l'Equazione 9.20 si deve ridurre all'espressione classica $K = \frac{1}{2} mv^2$. Possiamo verificare ciò usando lo sviluppo binomiale $(1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots$ per $x \ll 1$ e trascurando nello sviluppo i termini d'ordine superiore al primo. Nel nostro caso è $x = v/c$, così che

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Sostituendo nell'Equazione 9.20 si ha

$$K \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) - mc^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

in accordo con il risultato classico. La Figura 9.15 mostra un confronto delle relazioni velocità - energia per una particella usando per K l'espressione non relativistica (curva blu) e l'espressione relativistica (curva marrone). Le curve sono in buon accordo a basse velocità ma deviano ad alte velocità. L'espressione non relativistica indica una violazione di una legge fisica poiché essa suggerisce che aggiungendo sufficiente energia si può accelerare la particella a velocità maggiori di c . Nel caso relativistico, la velocità della particella non supera mai c , indipendentemente dall'energia cinetica. Quando la velocità di un oggetto è minore di un decimo della velocità della luce, l'equazione dell'energia cinetica

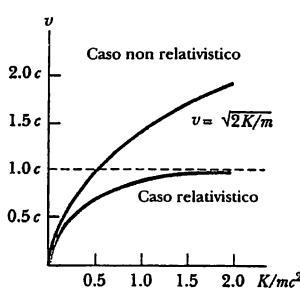


Figura 9.15 Confronto tra l'energia cinetica relativistica e non relativistica. Le energie sono riportate in funzione della velocità. Nel caso relativistico v è sempre minore di c .

classica differisce per meno dell'1% dall'equazione relativistica (che risulta sperimentalmente verificata per tutte le velocità). Perciò, per i calcoli ordinari è sufficiente usare l'equazione classica quando la velocità dell'oggetto risulti inferiore a $0.1c$.

Il termine costante mc^2 nell'Equazione 9.20, che risulta indipendente dalla velocità, si chiama **energia a riposo**, E_R , della particella libera.

Energia a riposo

$$E_R = mc^2 \quad [9.21]$$

Il termine γmc^2 nell'Equazione 9.20 dipende dalla velocità della particella ed è la somma dell'energia cinetica e dell'energia a riposo. Definiamo γmc^2 come l'**energia totale** E . Cioè, energia totale = energia cinetica + energia a riposo, ossia

$$E = \gamma mc^2 = K + mc^2 \quad [9.22]$$

o, quando γ viene sostituito dalla sua espressione equivalente,

Definizione di energia totale

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [9.23]$$

Questa, naturalmente, è la famosa equazione di Einstein dell'equivalenza massa-energia. La relazione $E = \gamma mc^2 = \gamma E_R$ mostra che la **massa è una manifestazione possibile di energia**. Inoltre, questo risultato mostra che una piccola quantità di massa corrisponde a un enorme ammontare di energia. Questo *concetto* è fondamentale per l'intero campo della fisica nucleare.

In molte situazioni, viene misurata la quantità di moto o l'energia di una particella invece della sua velocità. È perciò utile avere un'espressione che metta in relazione l'energia totale E e la quantità di moto relativistica p . Ciò può essere ottenuto usando le espressioni $E = \gamma mc^2$ e $p = \gamma mv$. Quadrando queste equazioni e sottraendo, possiamo eliminare v (Problema 35). Il risultato, dopo qualche passaggio algebrico, è

Relazione fra energia e quantità di moto

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2 \quad [9.24]$$

Quando la particella è ferma, $p = 0$, e quindi $E = E_R = mc^2$. Cioè, l'energia totale è uguale all'energia a riposo. Nel caso di particelle che hanno in massa zero, come i

fotoni (particelle di luce prive di massa e di carica), poniamo $m = 0$ nell'Equazione 9.24, e vediamo che

$$E = pc$$

[9.25] • *Energia di un fotone*

Questa equazione è un'espressione esatta che mette in relazione l'energia e la quantità di moto per i fotoni, i quali viaggiano sempre alla velocità della luce.

Infine, notiamo che poiché la massa m di una particella è indipendente dal suo moto, m deve avere lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Per questa ragione, m viene spesso chiamata *massa invariante*. D'altra parte, l'energia totale e la quantità di moto di una particella dipendono dal sistema di riferimento nel quale vengono misurate, poiché entrambe dipendono dalla velocità. Siccome m è una costante, allora secondo l'Equazione 9.24 la grandezza $E^2 - p^2 c^2$ deve avere lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Cioè, $E^2 - p^2 c^2$ è invariante (il suo valore rimane costante) per una trasformazione di Lorentz. Queste equazioni non forniscono alcunché per l'energia potenziale.

Quando si tratta con particelle subatomiche, è conveniente esprimere le loro energie in elettronvolt (eV), perché esse acquistano energia negli acceleratori di particelle. Il fattore di conversione è

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Per esempio, la massa di un elettrone è 9.11×10^{-31} kg. Poiché, l'energia a riposo dell'elettrone è

$$m_e c^2 = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}) (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8.20 \times 10^{-14} \text{ J}$$

Convertendo in eV, abbiamo

$$m_e c^2 = (8.20 \times 10^{-14} \text{ J}) (1 \text{ eV}/1.60 \times 10^{-19} \text{ J}) = 0.511 \text{ MeV}$$



Fisica ragionata 3

Un noto principio appreso in chimica è la conservazione della massa. In pratica, se la massa dei reagenti viene misurata prima di una reazione e la massa dei prodotti viene misurata dopo, il risultato sarà lo stesso. Alla luce della relatività ristretta, dovremmo fermare l'insegnamento del principio di conservazione della massa nell'insegnamento della chimica?

Ragionamento Consideriamo una reazione che non richieda apporto di energia dall'esterno. Questo tipo di reazione avviene perché i prodotti rappresentano una energia complessiva a riposo minore di quella dei reagenti, la differenza nell'energia a riposo viene portata via sotto forma di energia cinetica di particelle espulse oppure di radiazione. Poiché l'energia a riposo dei prodotti è minore, secondo la relatività la massa dei prodotti dovrebbe essere minore di quella dei reagenti. Così verrebbe violata la legge di conservazione della massa. La massa varia talmente poco, tuttavia, che, in pratica, la legge di conservazione della massa è ancora utile.

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Un fotone ha massa a riposo nulla. Se un fotone viene riflesso da una superficie, esercita una forza sulla superficie?

Esempio 9.8 L'energia di un protone veloce

L'energia totale di un protone sia tre volte la sua energia a riposo. (a) Trovare l'energia a riposo del protone in eV.

Soluzione

$$\begin{aligned} E_R &= m_p c^2 = (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}) (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \\ &= (1.50 \times 10^{-10} \text{ J}) (1.00 \text{ eV}/1.60 \times 10^{-19} \text{ J}) \\ &= 938 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(b) Con quale velocità si muove il protone?

Soluzione Dato che l'energia totale E è tre volte l'energia a riposo, dall'Equazione 9.23 si ha

$$\begin{aligned} E &= 3m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ 3 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Risolvendo per v si ottiene

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{9} \quad \text{o} \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{8}{9}$$

$$v = \frac{\sqrt{8}}{3} c = 2.83 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(c) Determinare l'energia cinetica del protone in eV.

Soluzione

$$K = E - m_p c^2 = 3m_p c^2 - m_p c^2 = 2m_p c^2$$

$$\text{Poiché } m_p c^2 = 938 \text{ MeV}, K = 1876 \text{ MeV}$$

(d) Qual è la quantità di moto del protone?

Soluzione Possiamo usare l'Equazione 9.24 per calcolare la quantità di moto ponendo $E = 3m_p c^2$:

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + (m_p c^2)^2 = (3m_p c^2)^2 \\ p^2 c^2 &= 9(m_p c^2)^2 - (m_p c^2)^2 = 8(m_p c^2)^2 \\ p &= \sqrt{8} \frac{m_p c^2}{c} = \sqrt{8} \frac{(938 \text{ MeV})}{c} = 2650 \frac{\text{MeV}}{c} \end{aligned}$$

Si noti che si è usato per convenienza l'unità MeV/c per la quantità di moto.

ESERCIZIO 7 Trovare la velocità alla quale l'energia cinetica relativistica è il doppio del valore non relativistico. Risposta $0.786c$

ESERCIZIO 8 Trovare la velocità di una particella la cui energia totale è il doppio della sua energia a riposo. Risposta $0.866c$

ESERCIZIO 9 Un elettrone si muove con una velocità $v = 0.850c$. Trovare (a) la sua energia totale e (b) la sua energia cinetica in elettronvolt. Risposta (a) 0.970 MeV (b) 0.459 MeV

9.8 • LA MASSA COME MISURA DELL'ENERGIA

Per capire l'equivalenza di massa ed energia, consideriamo il seguente esperimento ideale proposto da Einstein. Immaginiamo una scatola di massa M e lunghezza L inizialmente ferma, come in Figura 9.16a. Supponiamo che un impulso di luce venga emesso dall'estremità sinistra della scatola, come in Figura 9.16b. Dall'Equazione 9.25, sappiamo che la luce di energia E trasporta una quantità di moto $p = E/c$. Quindi, la scatola deve retrocedere verso sinistra con una velocità v affinché si conservi la quantità di moto. Assumendo che la scatola sia molto massiva, la velocità di retrocessione è piccola confrontata con la velocità della luce. La conservazione della quantità di moto dà $Mv = E/c$, ossia

$$v = \frac{E}{Mc}$$

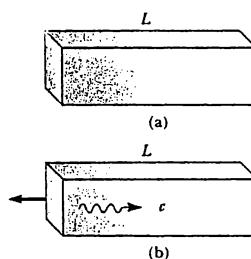


Figura 9.16 (a) Una scatola di lunghezza a riposo L . (b) Quando un impulso di luce viene emesso dall'estremità sinistra della scatola, la scatola indietreggia verso sinistra finché l'impulso urta l'estremo destro.

Il tempo necessario alla luce per muoversi della lunghezza della scatola è approssimativamente $\Delta t = L/c$ (dove ancora, assumiamo che $v \ll c$). In questo intervallo di tempo, la scatola si muove di una piccola distanza Δx verso sinistra, dove

$$\Delta x = v \Delta t = \frac{EL}{Mc^2}$$

La luce allora urta l'estremo destro della scatola, trasferisce la sua quantità di moto alla scatola, causando il suo arresto. Con la scatola nella sua nuova posizione, è come se il suo centro di massa si fosse mosso verso sinistra. Tuttavia, il suo centro di massa non si può muovere poiché la scatola è un sistema isolato. Einstein ha risolto questa imbarazzante situazione assumendo che oltre all'energia e alla quantità di moto, l'energia luminosa abbia pure massa cinetica. Se m_d è la massa cinetica trasportata dall'impulso di luce, e il centro di massa della scatola rimane fisso, allora

$$m_d L = M \Delta x$$

Risolvendo per m_d , e facendo uso delle precedenti espressioni per Δx , otteniamo

$$m_d = \frac{M \Delta x}{L} = \frac{M}{L} \frac{EL}{Mc^2} = \frac{E}{c^2}$$

ossia

$$E = m_d c^2$$

Quindi, Einstein giunse alla profonda conclusione, "Se un corpo emette energia sotto forma di radiazione, la sua massa diminuisce di E/c^2 . . . La massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia."

Sebbene abbiamo derivato la relazione $E = mc^2$ per l'energia luminosa, l'equivalenza di massa ed energia è universale. L'Equazione 9.22, $E = \gamma m_0 c^2$, che rappresenta l'energia totale di qualsiasi particella, suggerisce che anche quando una particella è ferma ($\gamma = 1$) essa possiede ancora un'enorme quantità di energia tramite la sua massa. La prova sperimentale più chiara dell'equivalenza di massa ed energia avviene nelle interazioni nucleari e delle particelle elementari in cui avviene sia la conversione di massa in energia che la conversione di energia in massa. A causa di ciò, non possiamo accettare oltre le leggi classiche di conservazione della massa e di conservazione dell'energia; dobbiamo invece parlare di una legge unificata di **conservazione massa-energia**. Semplicemente questa legge richiede che la somma di massa-energia di un sistema di particelle prima dell'interazione deve essere uguale alla somma di massa-energia del sistema dopo l'interazione, dove la massa-energia dell' i -esima particella è definita come

$$E_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \quad [9.26]$$

- **Conservazione di massa-energia**

Il rilascio di enormi quantità di energia, accompagnato dalla variazione di massa delle particelle dopo che esse hanno perduto l'eccesso di energia quando vengono portate a riposo, è la base delle bombe atomiche e all'idrogeno. In un reattore nucleare convenzionale, il nucleo di uranio è sottoposto a fissione, una reazione che produce parecchi frammenti più leggeri che hanno notevole energia cinetica. Nel caso di ^{235}U (il nucleo progenitore), che venga sottoposto a fissione, i frammenti sono due nuclei più leggeri e due neutroni. La massa totale

dei frammenti è minore di quella del nucleo progenitore di una quantità Δm . La corrispondente energia Δmc^2 associata a questa differenza di massa è esattamente uguale all'energia cinetica totale dei frammenti. Questa energia cinetica viene usata per produrre acqua calda e vapore per generare energia elettrica.

Poi, consideriamo la fondamentale reazione di fusione nella quale due atomi di deuterio si combinano per formare un atomo di elio. Questa reazione è attualmente della massima importanza nella ricerca e nello sviluppo di reattori a fusione controllata. La diminuzione di massa che risulta dalla creazione di un atomo di elio da due atomi di deuterio è $\Delta m = 4.25 \times 10^{-29}$ kg. Quindi, la corrispondente energia che si ottiene da una reazione di fusione è $\Delta mc^2 = 3.83 \times 10^{-12}$ J = 23.9 MeV. Per poter apprezzare l'entità di questo risultato basta considerare che se 1 g di deuterio venisse convertito in elio, l'energia liberata sarebbe di circa 10^{12} J! Al costo dell'energia elettrica del 1997, ciò corrisponderebbe a circa \$65 000.

Esempio 9.9 Energia di legame del deutone

La massa del deutone, che è un nucleo di "idrogeno pesante", non è uguale alla somma delle masse dei suoi costituenti, che sono un protone e un neutrone. Calcolare questa differenza di massa e determinare la sua energia equivalente.

Soluzione Usando l'unità di massa atomica (u), abbiamo

$$m_p = \text{massa del protone} = 1.007\,276 \text{ u}$$

$$m_n = \text{massa del neutrone} = 1.008\,665 \text{ u}$$

$$m_p + m_n = 2.015\,941 \text{ u}$$

Poiché la massa del deutone è 2.013 553 u (Appendice

A), vediamo che la differenza di massa $\Delta m = 0.002\,388 \text{ u}$. Per definizione, 1 u = 1.66×10^{-27} kg, e quindi

$$\Delta m = 0.002\,388 \text{ u} = 3.96 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

Usando $E = \Delta mc^2$, troviamo che

$$E = \Delta mc^2 = (3.96 \times 10^{-30} \text{ kg}) (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$

$$= 3.56 \times 10^{-13} \text{ J} = 2.23 \text{ MeV}$$

Quindi, l'energia minima necessaria per separare il protone dal neutrone del nucleo di deuterio (l'energia di legame) è 2.23 MeV.

FACOLTATIVO

9.9 • RELATIVITÀ GENERALE

Fino a questo punto, abbiamo tralasciato un curioso rompicapo. La massa ha apparentemente due diverse proprietà: l'*attrazione gravitazionale* per le altre masse e la proprietà di *inerzia* che si oppone all'accelerazione. Per definire questi due attributi, useremo i pedici *g* e *i* e scriveremo

$$\begin{array}{ll} \text{proprietà gravitazionale} & W = m_g g \\ \text{proprietà inerziale} & F = m_i a \end{array}$$

Il valore numerico per la costante di gravitazione universale *G* è stato scelto in modo da rendere uguali numericamente le grandezze di m_g ed m_i . Inoltre, indipendentemente dalla scelta di *G*, è stata accertata sperimentalmente la stretta proporzionalità di m_g ed m_i con un alto grado di precisione: alcune parti su 10^{12} . Così, appare certo che la massa gravitazionale e la massa inerziale siano esattamente proporzionali.

Ma perché? Sembra che esse coinvolgano due attributi totalmente diversi: una forza di mutua attrazione gravitazionale tra le masse e l'opposizione di una singola massa ad essere accelerata, indipendentemente da quale tipo di forza produce l'accelerazione. A questa domanda, che ha sconcertato Newton e molti altri fisici negli anni successivi, ha risposto Einstein con la pubblicazione nel 1916 della sua teoria della gravitazione, conosciuta come *relatività generale*. Questa è una teo-

ria matematicamente complessa; si darà, perciò, soltanto un cenno della sua eleganza e profondità.

Dal punto di vista di Einstein, la rimarchevole coincidenza che m_i ed m_g sembrano essere perfettamente proporzionali era un'evidenza di una connessione molto stretta e fondamentale tra i due concetti. Egli puntualizzò che nessun esperimento meccanico (come lasciar cadere una massa) potrebbe consentire una distinzione tra le due situazioni tratteggiate nelle Figure 9.17a e 9.17b. In ciascun caso, una massa abbandonata dalle mani di un osservatore sarebbe soggetta a una accelerazione g verso il basso relativa al pavimento.

Einstein spinse ulteriormente avanti questa idea per proporre, come uno dei postulati fondamentali della sua teoria della relatività generale, che *nessun* esperimento, meccanico o di altro genere, può consentire di distinguere tra i due casi. Questa estensione che include tutti i fenomeni (non soltanto quelli meccanici) ha interessanti conseguenze. Per esempio, supponiamo che un impulso luminoso sia spedito orizzontalmente attraverso la cabina in Figura 9.17c. L'impulso luminoso dovrebbe avere una traiettoria incurvata in basso verso il pavimento quando la cabina accelera verso l'alto. Perciò, ha proposto Einstein, nel caso (a) un fascio di luce dovrebbe essere incurvato verso il basso dal campo gravitazionale. (Una tale curvatura non è prevista nella teoria della gravitazione di Newton).

I due postulati della relatività generale di Einstein sono i seguenti:

- Tutte le leggi della natura possono essere stabilite in modo tale che abbiano la stessa forma per osservatori in qualunque sistema di riferimento spazio-temporale, accelerato o no.
- Nelle vicinanze di ogni punto dato, un campo gravitazionale è equivalente in tutto a un sistema di riferimento accelerato in assenza di effetti gravitazionali. (Questo è il *principio di equivalenza*).

Il secondo postulato implica che la massa gravitazionale e la massa inerziale siano completamente *equivalenti*, e non solo proporzionali. Ciò che si pensava considerare in due diversi tipi di masse è in realtà, fondamentalmente, la stessa cosa.

Un effetto interessante previsto dalla relatività generale è che la scala dei tempi viene alterata dalla gravità. Un orologio in presenza della gravità marcia più lenta-

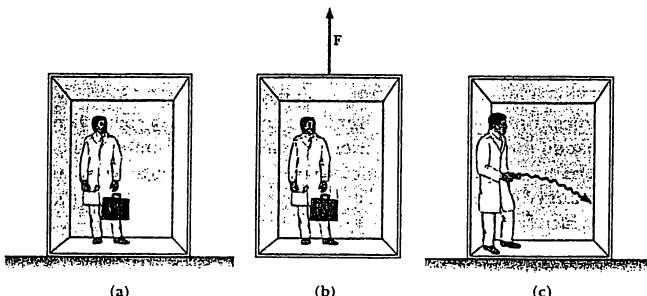


Figura 9.17 (a) L'osservatore è fermo in un campo gravitazionale g . (b) L'osservatore si trova in una regione dove la gravità è trascurabile, ma il sistema di riferimento è accelerato da una forza esterna F che produce una accelerazione g . Secondo Einstein, i sistemi di riferimento in (a) e (b) sono equivalenti in tutto. Nessun esperimento sul posto può distinguere alcuna differenza fra i due sistemi di riferimento. (c) Se (a) e (b) sono veramente equivalenti, come Einstein ha proposto, allora un raggio di luce dovrebbe essere curvato in un campo gravitazionale.

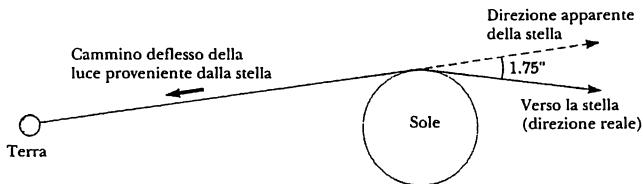


Figura 9.18 Deflessione della luce stellare che passa in prossimità del Sole. A causa di questo effetto, il Sole e gli altri oggetti lontani possono agire da *lenti gravitazionali*. Nella teoria della relatività generale, Einstein calcolò che la luce stellare che avesse sfiorato la superficie del Sole sarebbe stata deflessa di un angolo di 1.75° .

mente di uno posto dove la gravità è trascurabile. Conseguentemente, le linee spettrali emesse dagli atomi in presenza di un forte campo gravitazionale sono *spostate verso il rosso* a frequenze più basse confrontate con la stessa emissione spettrale in un campo debole. Questo *red shift* (spostamento verso il rosso) gravitazionale è stato rivelato nelle linee spettrali emesse dagli atomi di stelle massicce. Ciò è stato verificato anche sulla Terra confrontando le frequenze di raggi gamma (un tipo di radiazione elettromagnetica) emesse da nuclei a una differenza di quota di 20 m.

Il secondo postulato suggerisce che un campo gravitazionale può essere "eliminato" in ogni punto se si sceglie un sistema di riferimento opportunamente accelerato, come quello in caduta libera. Einstein sviluppò un metodo ingegnoso per descrivere l'esatto valore di accelerazione necessario per far "sparire" il campo gravitazionale. Egli ha definito una certa grandezza, la *curvatura dello spazio-tempo*, la quale descrive in ogni punto l'effetto gravitazionale. Infatti, la curvatura dello spazio-tempo sostituisce totalmente la teoria della gravitazione universale di Newton. Secondo Einstein, non vi è nulla che sia una forza gravitazionale. Piuttosto, la presenza di una massa causa una curvatura dello spazio-tempo in prossimità della massa, e questa curvatura determina il cammino nello spazio-tempo che tutti i corpi che si muovono liberamente seguono. Come disse un fisico: "La massa dice allo spazio-tempo come curvarsi; lo spazio-tempo curvato dice alla massa come muoversi". Una prova importante della relatività generale è la previsione che un raggio di luce che passi vicino al Sole dovrebbe essere deflesso di un certo angolo. Questa previsione fu confermata dagli astronomi quando si poté misurare la curvatura della luce stellare durante una eclissi totale di Sole subito dopo la prima guerra mondiale (Fig. 9.18).

Se la concentrazione di massa diventa molto grande, così come si crede che avvenga quando una grande stella, avendo esaurito il suo combustibile nucleare, collassa in un volume piccolissimo, si può formare un **buco nero**. In questo caso la curvatura è così estrema che, entro una certa distanza dal centro, tutta la materia e la luce restano intrappolate.

Fisica ragionata 4

Gli orologi atomici sono molto accurati: infatti, è tipico un errore di 1 secondo in 3 milioni di anni. Questo errore si può descrivere come circa 1 parte su 10^{14} . Tuttavia, l'orologio atomico di Boulder, Colorado, spesso è in anticipo di 15 ns rispetto a quello di Washington dopo solo un giorno. Questo è un errore di circa 1 parte su 6×10^{12} , che è circa 17 volte maggiore dell'errore precedentemente espresso. Se gli orologi atomici sono così accurati, perché un orologio a Boulder non rimane sincrono con uno a Washington? (Suggerimento: Denver, vicino a Boulder, è nota come la città alta un miglio).

Ragionamento Secondo la teoria della relatività generale, la rapidità con cui trascorre il tempo dipende dalla gravità: il tempo scorre più lentamente in un forte campo gravitazionale. Washington si trova a una quota molto vicina al livello del mare, mentre Boulder è circa 1 miglio più elevata. Ciò corrisponde a un campo gravitazionale minore a Boulder rispetto a Washington. Di conseguenza, il tempo scorre più rapidamente a Boulder che a Washington.

SOMMARIO

I due postulati fondamentali della teoria della relatività ristretta sono:

- Tutte le leggi della fisica devono essere le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, per tutti gli osservatori inerziali, indipendentemente dal loro moto e dal moto della sorgente di luce.

Tre delle conseguenze della teoria della relatività ristretta sono:

- Eventi che sono simultanei per un osservatore non sono simultanei per un altro osservatore in moto rispetto al primo.
- Gli orologi in moto rispetto ad un osservatore appaiono rallentati di un fattore γ . Questo fatto va sotto il nome di dilatazione del tempo.
- Le lunghezze degli oggetti in moto risultano contratte nella direzione del moto.

Per soddisfare questi postulati le trasformazioni galileiane devono essere sostituite dalle **trasformazioni di Lorentz**

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - ut) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} x \right)\end{aligned}\quad [9.7]$$

dove $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$.

La forma relativistica della trasformazione della velocità è

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \quad [9.12]$$

dove v_x è la velocità di un oggetto misurata nel riferimento S e v'_x è quella misurata nel riferimento S' .

L'espressione relativistica della quantità di moto di una particella di velocità v è

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv \quad [9.15]$$

L'espressione relativistica per l'energia cinetica di una particella è

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \quad [9.20]$$

dove mc^2 è detta **energia a riposo** della particella.

L'energia totale E di una particella è collegata alla **massa** dalla famosa relazione di equivalenza **massa-energia** di Einstein

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [9.23]$$

La quantità di moto relativistica è legata all'energia totale dall'equazione

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2 \quad [9.24]$$

DOMANDE CONCETTUALI

1. Su quali due velocità saranno *sempre* d'accordo due osservatori in moto relativo?
2. La velocità della luce nell'acqua è 2.3×10^8 m/s. Supponiamo che un elettrone si muova attraverso l'acqua a 2.5×10^8 m/s. Ciò viola il principio di relatività?
3. Due orologi identici sono sincronizzati. Uno viene posto in orbita attorno alla Terra, mentre l'altro rimane sulla Terra. Quale orologio va più lento? Quando l'orologio viaggiante torna sulla Terra, i due orologi sono ancora sincronizzati?
4. Un treno ti si avvicina mentre stai in vicinanza delle rotaie. Proprio come un osservatore sul treno che passa, ambedue cominciate a riprodurre sul lettore di compact disk portatile la stessa sinfonia di Beethoven. (a) Secondo te, quale dei due lettori finisce per primo la sinfonia? (b) Secondo l'osservatore sul treno, quale dei due lettori finisce per primo la sinfonia? (c) Quale lettore finisce *realmente* per primo la sinfonia?
5. Una nave spaziale di forma sferica passa a velocità $0.5c$ davanti ad un osservatore posto sulla Terra. Quale forma avrà l'astronave per l'osservatore?
6. Spiegare perché, quando si definisce la lunghezza, è necessario specificare che la posizione degli estremi del regolo è stata determinata simultaneamente.
7. Quando si dice che un orologio in moto va più lento di uno fisso, si intende che ci sia qualcosa di fisica-
- mente insolito nel comportamento dell'orologio in moto?
8. Dare un argomento fisico per mostrare che è impossibile accelerare un oggetto di massa m alla velocità della luce, anche con una forza costante agente su di esso.
9. Fai un elenco di come varierebbero alcune nostre abitudini giornaliere se la velocità della luce fosse soltanto 50 m/s.
10. Si dice che Einstein, nella sua giovinezza, si sia chiesto, «cosa vedrei in uno specchio se lo tenessi nelle mie mani e corressi alla velocità della luce?». Come rispondereste alla domanda?
11. Alcune stelle distanti, chiamate quasar, si allontanano da noi a velocità metà della velocità della luce (o più grande). Qual è la velocità della luce che riceviamo dalle quasar?
12. Come è possibile che i fotoni di luce con massa zero abbiano quantità di moto?
13. Le grandezze relativistiche dovrebbero avere una transizione graduale alle loro controparti newtoniane quando la velocità del sistema diviene piccola rispetto alla velocità della luce. Spiegare.
14. Se la velocità di una particella viene raddoppiata, qual è l'effetto sulla sua quantità di moto? (Si assuma che la velocità iniziale sia minore di $c/2$).

PROBLEMI

Paragrafo 9.1 Il principio della relatività newtoniana

1. Un'automobile di 2000 kg in moto con una velocità di 20.0 m/s urta e resta incrinata in un'auto di 1500 kg ferma a un segnale di stop. Dimostrare che la quantità di moto si conserva in un sistema di riferimento che si muove con una velocità costante di 10 m/s nella direzione dell'auto in movimento.
2. Una palla è lanciata a 20.0 m/s dentro un vagone che si muove lungo i binari a 40.0 m/s. Qual è la velocità della palla rispetto a terra se è lanciata (a) in avanti, (b) all'indietro, (c) fuori dalla porta?
3. Nel sistema di riferimento del laboratorio, un osservatore trova che la seconda legge di Newton è valida. Dimostrare che essa è valida anche per un osservatore che si muove con velocità uniforme rispetto al sistema del laboratorio.

4. Dimostrare che la seconda legge di Newton non è valida in un sistema di riferimento che si muove con accelerazione costante rispetto al sistema del laboratorio considerato nel Problema 3.

Paragrafo 9.4 Conseguenze della relatività ristretta

5. Quale velocità deve avere un'asta di un metro perché la sua lunghezza si accorci a 0.500 m?
6. Con quale velocità deve muoversi un orologio per andare ad un ritmo uguale alla metà di quello di un orologio fisso?
7. Un astronauta viaggia nello spazio su un veicolo spaziale che ha una velocità $0.500c$ relativa alla Terra. L'astronauta misura il suo polso ottenendo 75.0 battiti/m. I segnali generati dal battito cardiaco sono radiotrasmessi alla Terra quando il veicolo si muove

- perpendicolarmente alla linea che unisce il veicolo con un osservatore sulla Terra. Quale battito cardiaco misura l'osservatore sulla Terra? Quale sarebbe il battito cardiaco se il veicolo viaggiasse ad una velocità $0.990c$?
8. La lunghezza propria di una astronave è tre volte quella di un'altra. Le due astronavi viaggiano nella stessa direzione e, mentre si sorpassano, un osservatore sulla Terra misura le due astronavi ottenendo la stessa lunghezza. Se l'astronave più lenta si muove con una velocità di $0.350c$, determinare la velocità dell'astronave più veloce.
9. Un orologio atomico si muove a 1000 km/h per un'ora misurata da un orologio identico sulla Terra. Di quanti nanosecondi ritarderà l'orologio in movimento alla fine dell'intervallo di un'ora?
10. Se gli astronauti potessero viaggiare a $v = 0.950c$ impiegherebbero $(4.20/0.950) = 4.42$ anni per raggiungere l'Alfa Centauri, distante 4.2 anni-luce. Gli astronauti non sono d'accordo. (a) Quanto tempo passa sugli orologi degli astronauti? (b) Qual è la distanza dell'Alfa Centauri misurata dagli astronauti?
11. Un'astronave di lunghezza propria 300 m impiega $0.750 \mu\text{s}$ per superare un osservatore terrestre. Determinare la velocità dell'astronave misurata dall'osservatore terrestre.
12. Un'astronave di lunghezza propria L_p impiega un tempo t per superare un osservatore terrestre. Determinare la velocità dell'astronave misurata dall'osservatore terrestre.
13. Un muone prodotto nell'alta atmosfera terrestre viaggia a velocità $v = 0.990c$ per 4.60 km prima di decadere in un elettrone, un neutrino e un antineutrino ($\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$). (a) Quanto vive il muone nel suo sistema di riferimento? (b) Quanto cammino compie il muone, misurato nel suo sistema di riferimento?
- Paragrafo 9.5 Le equazioni di trasformazione di Lorentz**
14. Per quale valore di v , $\gamma = 1.01$? Si osservi che per velocità minori di questo valore, l'effetto della dilatazione del tempo e della contrazione della lunghezza risulta meno dell'uno per cento.
15. Un'astronave viaggia a $0.750c$ relativamente alla Terra. Se l'astronave spara un piccolo razzo nella direzione del suo moto, con quale velocità (rispetto all'astronave) deve essere sparato il razzo affinché viaggi a $0.950c$ relativamente alla Terra?
16. Un certo quasar si allontana dalla Terra con velocità $v = 0.870c$. Un getto di materiale è lanciato dal quasar verso la Terra con una velocità $0.55c$ rispetto al quasar. Trovare la velocità del materiale rispetto alla Terra.
17. Due getti di materiale si allontanano dal centro di una radiogalassia, in versi opposti. Ciascun getto si muove a velocità $0.750c$ rispetto alla galassia. Determinare la velocità di un getto rispetto all'altro.
18. Un amico viaggia nei vostri pressi ad alta velocità in un'astronave. Egli vi dice che la sua astronave è lunga 20.0 m e che l'astronave identica nella quale vi trovate è lunga 19.0 m . Secondo le vostre osservazioni, (a) quanto è lunga la vostra astronave, (b) quanto è lunga l'astronave dell'amico, e (c) qual è la velocità dell'astronave dell'amico?
19. Un osservatore *A* misura la lunghezza di due aste, una stazionaria, l'altra in moto con una velocità di $0.955c$. Egli trova che le aste hanno la stessa lunghezza. Un secondo osservatore, *B*, viaggia accanto all'asta in moto. Qual è il rapporto della lunghezza dell'asta di *A* rispetto all'asta di *B*, secondo l'osservatore *B*?
20. Un'asta in moto è lunga 2.00 m , e la direzione della sua lunghezza è orientata a un angolo di 30.0° rispetto alla direzione del moto. L'asta ha una velocità di $0.995c$. (a) Qual è la lunghezza propria dell'asta? (b) Qual è l'angolo di orientazione nel riferimento proprio?
- Paragrafo 9.6 Quantità di moto relativistica e forma relativistica delle leggi di Newton**
21. Calcolare la quantità di moto relativistica di un protone che si muove con velocità (a) $0.0100c$ (b) $0.500c$, (c) $0.900c$.
22. L'espressione *non relativistica* per la quantità di moto di una particella, $p = mv$, può essere usata se $v \ll c$. Per quale velocità l'uso di questa formula dà un errore nella quantità di moto di (a) 1.00% e (b) 10.0% ?
23. Un elettrone ha una quantità di moto che è il 90.0% più grande della quantità di moto classica. (a) Trovare la velocità dell'elettrone. (b) Di quanto varierebbe il tuo risultato se la particella fosse un protone?
24. Una pallina da golf viaggia con una velocità di 90.0 m/s . Di quale frazione la sua quantità di moto relativistica p differisce dal valore classico mv^2 ? Ossia, trovare il rapporto $(p - mv)/mv$.
25. Una particella instabile ferma si disintegra in due frammenti di massa diversa. La massa a riposo del frammento più leggero è $2.50 \times 10^{-28} \text{ kg}$, e quella del frammento più pesante è $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Se il frammento più leggero dopo la disintegrazione ha una velocità di $0.893c$, qual è la velocità del frammento più pesante?
26. Dimostrare che la velocità di un oggetto che ha quantità di moto p e massa m è
- $$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc/p)^2}}$$
- Paragrafo 9.7 Energia relativistica**
27. Un protone si muove con la velocità di $0.950c$. Calcolare la sua (a) energia a riposo, (b) energia totale e (c) la sua energia cinetica (in eV).
28. Dimostrare che, per un oggetto che si muove a meno

- di un decimo della velocità della luce, l'energia cinetica relativistica si accorda con il risultato dell'equazione classica $K = \frac{1}{2}mv^2$ entro l'1%. Quindi, in molti casi, l'equazione classica è sufficientemente attendibile per descrivere questi oggetti, il cui moto diciamo *non relativistico*.
29. Determinare l'energia necessaria per accelerare un elettrone da (a) $0.500c$ a $0.900c$ e (b) da $0.900c$ a $0.990c$.
 30. Un'astronave di massa 10^6 kg deve essere accelerata fino ad una velocità $0.600c$. (a) Quanta energia è richiesta? (b) Quanti chilogrammi di materia saranno necessari per fornire questa energia?
 31. Fare una stima dell'ordine di grandezza del rapporto dell'incremento di massa rispetto alla massa a riposo di una bandiera quando la fai sventolare sull'asta. Nella soluzione specifica le grandezze che consideri note e i valori che misuri o stimi per esse.
 32. Quando 1.00 g di idrogeno si combina con 8.00 g di ossigeno, si formano 9.00 g di acqua. Durante questa reazione chimica, viene liberata un'energia di $2.86 \times 10^5\text{ J}$. Quanta massa è stata perduta dai costituenti di questa reazione? Sarebbe probabile rivelare la massa perduta?
 33. Un cubo di acciaio ha un volume di 1.00 cm^3 e una massa di 8.00 g quando è fermo sulla Terra. Se ora questo cubo ha una velocità $v = 0.900c$, qual è la densità misurata da un osservatore stazionario? Si noti che la densità relativistica è $m/V = E/c^2V$.
 34. Un elettrone ha un'energia cinetica cinque volte maggiore della sua energia a riposo. Trovare (a) la sua energia totale e (b) la sua velocità.
 35. Dimostrare che la relazione fra energia e quantità di moto data da $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ può essere derivata dalle espressioni $E = \gamma mc^2$ e $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$.
 36. Una particella instabile di massa $3.34 \times 10^{-27}\text{ kg}$ si trova inizialmente a riposo. La particella decade in due frammenti che volano via con velocità di $0.987c$ e $-0.868c$. Trovare le masse a riposo dei frammenti. (*Suggerimento:* si conserva sia la massa-energia che la quantità di moto).

Problemi generali

37. Una elementare reazione nucleare dentro il Sole è $4p \rightarrow He^4 + \Delta E$. Se la massa a riposo di ciascun protone è 938.2 MeV e la massa a riposo del He^4 è 3727 MeV , calcolare la percentuale della massa di partenza convertita in energia.
38. Un elettrone ha una velocità $0.750c$. Trovare la velocità di un protone che ha (a) la stessa energia cinetica dell'elettrone e (b) la stessa quantità di moto dell'elettrone.
39. I raggi cosmici di più alta energia sono protoni che hanno energie cinetiche dell'ordine di 10^{13} MeV . (a) Quanto tempo impiegherà un protone con questa energia ad attraversare la nostra galassia Via Lattea, del diametro di 10^5 anni-luce, misurato nel sistema di

- riferimento del protone? (b) Dal punto di vista del protone, per quanti chilometri attraversa la galassia?
40. Un'astronave si allontana dalla Terra a $0.500c$ e spara una navetta nella direzione del moto a $0.500c$ relativamente all'astronave. Il pilota della navetta lancia una sonda in direzione del moto a $0.500c$ relativamente alla navetta. Determinare (a) la velocità della navetta rispetto alla Terra e (b) la velocità della sonda rispetto alla Terra.
 41. La vita media del pione nel proprio sistema di riferimento è $2.60 \times 10^{-8}\text{ s}$. Se il pione si muove con velocità di $0.950c$, qual è (a) la sua vita media misurata da un osservatore sulla Terra e (b) la distanza media percorsa prima di decadere, misurata da un osservatore sulla Terra?
 42. Un astronauta desidera visitare la galassia Andromeda (lontana 2.00 milioni di anni-luce) in un viaggio di andata che durerà 30.0 anni nel sistema di riferimento della nave spaziale. Assumendo che la velocità durante il viaggio rimanga costante, quale velocità rispetto alla Terra deve avere l'astronave durante il viaggio?
 43. Una professoressa di fisica sulla Terra fa un esame ai suoi studenti che si trovano su un'astronave che viaggia a velocità v rispetto alla Terra. Nell'istante in cui l'astronave supera la professoressa, essa segnala l'inizio dell'esame. Se essa vuole che i suoi studenti abbiano un tempo T_0 (tempo dell'astronave) per completare l'esame, dimostrare che essa dovrebbe aspettare un tempo (tempo della Terra) di
- $$T = T_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$
- prima di spedire il segnale che indica la fine della prova. (*Suggerimento:* ricordare che è necessario un certo tempo al secondo segnale per viaggiare dalla professoressa agli studenti).
44. L'astronave I, la quale trasporta studenti che fanno un esame, si avvicina alla Terra con una velocità $0.600c$ (relativa alla Terra), e l'astronave II, che trasporta il professore incaricato di sorvegliare gli esami, si muove a velocità $0.280c$ (relativa alla Terra) direttamente verso gli studenti. Se il professore ferma l'esame dopo 50.0 min trascorsi sul suo orologio, quanto dura l'esame misurato (a) dagli studenti? (b) da un osservatore sulla Terra?
 45. Un *superreno* (lunghezza a riposo = 100 m) viaggia a una velocità di $0.950c$ e attraversa una galleria (lunghezza a riposo = 50 m). Un osservatore lungo le rotaie vede mai il treno completamente all'interno della galleria? Se è così, di quanto?
 46. Energia proveniente dal Sole raggiunge l'alta atmosfera terrestre al tasso di $1.79 \times 10^{17}\text{ W}$. Se tutta questa energia fosse assorbita dalla Terra senza essere rimessa, di quanto aumenterebbe la massa della Terra in un anno?

47. Una particella carica si muove lungo una retta in un campo elettrico uniforme E con velocità v . Se il moto e il campo elettrico sono entrambi nella direzione x , (a) mostrare che l'accelerazione della carica q nella direzione x è data da

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

(b) Discutere il significato della dipendenza dell'accelerazione dalla velocità. (c) Se la particella parte da ferma a $x = 0$ per $t = 0$, come procedereste per calcolare la velocità della particella e la sua posizione dopo un tempo t ?

48. Immaginate che l'intero Sole collassi in una sfera di raggio R_g tale che il lavoro richiesto per rimuovere una piccola massa m dalla superficie dovrebbe essere uguale alla sua energia a riposo mc^2 . Questo raggio è chiamato *raggio gravitazionale* del Sole. Calcolare R_g . (Occorre ricordare che il destino ultimo di molte stelle è collassare fino ai loro raggi gravitazionali o a dimensioni più piccole).

Problemi al calcolatore

- S1. Gli astronomi usano l'effetto Doppler nella serie di Balmer dello spettro dell'atomo di idrogeno per determinare la velocità radiale di una galassia. La variazione frazionale della lunghezza d'onda di una linea spettrale specifica è data da

$$Z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1$$

Una volta che questa grandezza viene misurata per l'allontanamento di una particolare galassia, la velocità di allontanamento si può trovare in funzione di Z risolvendo per v/c . Il Foglio Elettronico 9.1 calcola i valori Z per le velocità. (a) Qual è la velocità per galassie che hanno $Z = 0.2, 0.5, 1.0$, e 2.0 ? (b) I più grandi valori di Z sono stati misurati per alcune quasar (radiosorgente quasistellare). Quanto veloci queste quasar

- si allontanano da noi?
- S2. Astronauti in una nave stellare che viaggiano a velocità v relativa a una base stellare ricevono istruzioni dalla missione di controllo di chiamare dopo 1 h come misurata dagli orologi della nave stellare. Il Foglio Elettronico 9.2 calcola quanto tempo deve aspettare la Missione di Controllo per la chiamata, per diverse velocità della nave stellare. Quanto dovrà aspettare la Missione di Controllo se la nave stellare viaggia a $v = 0.1c, 0.4c, 0.6c, 0.8c, 0.9c, 0.995c, 0.9995c$?
- S3. La maggior parte degli astronomi crede che l'Universo abbia avuto inizio in un certo istante con una esplosione chiamata Big Bang e che l'allontanamento osservato delle galassie sia una diretta conseguenza di questa esplosione. Se le galassie si allontanano l'una dall'altra a un tasso costante, allora ci aspettiamo che le galassie che si muovono più veloci sono adesso le più lontane dalla Terra. Questo risultato, noto come legge di Hubble da Edwin Hubble, si può scrivere $v = Hr$, dove H può essere determinata dalle osservazioni, v è la velocità di allontanamento della galassia, ed r è la distanza dalla Terra. Attualmente, una stima di H è entro il campo da 15 a 30 km/s/Ma-l, dove Ma-l (mega anni-luce) è la distanza attraversata dalla luce in un milione di anni, e una stima prudente è $H = 20$ km/s/Ma-l. Usando il Foglio Elettronico 9.1 calcolare la distanza dalla Terra per ciascuna galassia del Problema S1.
- S4. Progettare un foglio elettronico per calcolare e riportare in grafico l'energia cinetica relativistica (Eq. 9.20) e l'energia cinetica classica ($\frac{1}{2}mv^2$) di un oggetto macroscopico. Fare un grafico dell'energia relativistica e classica versus velocità sullo stesso diagramma. (a) Per un oggetto di massa $m = 3$ kg, a quale velocità l'energia cinetica classica sottostima il valore relativistico per l'1%, 5%, 50%? Qual è l'energia cinetica relativistica a queste velocità? Ripetere la parte (a) per (b) un elettrone e (c) un protone.

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

1. Questo scenario non è possibile con la luce. Le onde dell'acqua si muovono attraverso un mezzo – la superficie dell'acqua – e quindi hanno una velocità assoluta relativa al sistema di riferimento nel quale questo mezzo è fermo. Quindi, la velocità relativa delle onde e della tua imbarcazione viene determinata dalla relatività galileiana. Ciò ti dà la possibilità di muoverti più velocemente delle onde dell'acqua. Le onde luminose, che non richiedono un mezzo, vengono descritte dai principi della relatività ristretta. Quando tu rivelvi l'onda luminosa davanti a te e che si muove allontanandosi da te (la qual cosa sarebbe un grazioso espe-

diente – pensaci sù!), la sua velocità relativa a te sarebbe c . Non potresti ulteriormente accelerare in quella direzione, tentando di catturarla, la sua velocità relativa a te sarebbe sempre c . Quindi, non potresti mai catturare un'onda luminosa.

2. La risposta ad ambedue le domande è *no*. Sia il vestiario che la cabina in cui dormirai rimarranno stazionarie nel tuo sistema di riferimento, quindi, manterranno le loro dimensioni proprie. Non vi saranno variazioni nelle dimensioni che si misureranno degli oggetti all'interno dell'astronave. Un altro osservatore, su un'astronave che viaggi ad alta velocità rispetto alla

- tua, ti misurerà più sottile (se il tuo corpo è orientato perpendicolarmente al vettore velocità relativo all'altro osservatore) oppure dirà che sei capace di adattarti a dormire in una cabina più corta (se il tuo corpo è orientato parallelamente al tuo vettore velocità relativo all'osservatore).
3. Assunendo che il loro tempo di lavoro sia stato misurato sulla Terra, essi saranno piacevolmente sorpresi di trovare un sostanzioso assegno. Per gli astronauti è passato minor tempo nel loro sistema di riferimento che non per il loro datore di lavoro sulla Terra.
 4. Il razzo che ritorna indietro non avrà una lunghezza maggiore e un orologio più rapido. La contrazione della lunghezza e la dilatazione del tempo dipendono soltanto dal modulo della velocità relativa, non dal verso.
 5. Un fotone riflesso esercita una forza su una superficie. Sebbene un fotone abbia massa a riposo nulla, un

fotone trasporta quantità di moto. Quando esso viene riflesso da una superficie, vi è una variazione della sua quantità di moto, proprio come la variazione della quantità di moto di una palla che rimbalza sul pavimento. Secondo l'interpretazione della quantità di moto nella seconda legge di Newton, una variazione della quantità di moto deve risultare in una forza sulla superficie. Questo concetto viene usato negli studi teorici sulla *navigazione spaziale*. Questi studi propongono la costruzione di astronavi senza motori che utilizzino vele riflettenti orientate perpendicolarmente ai raggi solari. Il grande numero di fotoni provenienti dal Sole che si rifletterebbero sulla superficie delle vele eserciterebbe una forza la quale, anche se piccola, fornirebbe un'accelerazione continua. Ciò potrebbe permettere all'astronave di viaggiare verso altri pianeti senza carburante.

10

Moto rotazionale

In questo capitolo verrà trattata la dinamica di particelle che si muovono lungo traiettorie circolari attorno a un asse fisso. Si incontreranno termini come spostamento angolare, velocità angolare, accelerazione angolare, momento di una forza, e momento angolare, e si mostrerà come queste grandezze siano molto utili per la descrizione dei moti rotatori. Successivamente, verrà definito il prodotto vettoriale, il quale è un opportuno strumento matematico per esprimere grandezze fisiche come il momento di una forza e il momento angolare.

Uno dei punti centrali di questo capitolo è lo sviluppo del concetto di momento angolare di un sistema di particelle. In analogia con la conservazione della quantità di moto (Cap. 8), si troverà che il momento angolare di qualunque sistema isolato è sempre costante. I risultati che saranno ottenuti renderanno possibile la comprensione dei moti rotazionali di una larga classe di oggetti nel loro ambiente, da un elettrone ruotante attorno al nucleo a gruppi di galassie orbitanti attorno a un centro comune.

Sebbene il punto focale di questo capitolo sia il moto circolare di punti materiali, l'estensione

◀ **Derek Swinson**, professore di fisica presso l'Università del New Mexico, mentre dimostra la tecnica del "giro-sci". Lo sciatore comincia a girare sollevando l'asse della ruota di bicicletta in rotazione. Il verso della girata è determinato dall'uso della mano sinistra o destra per sollevare l'asse rispetto all'orizzontale. Trascurando la gravità e l'attrito, il momento angolare del sistema (lo sciatore più la ruota di bicicletta) rimane costante. (Per gent. conc. di Derek Swinson)



CONTENUTI

- 10.1 Velocità angolare e accelerazione angolare
- 10.2 Cinematica rotazionale
- 10.3 Relazioni fra grandezze angolari e lineari
- 10.4 Energia cinetica rotazionale
- 10.5 Momento delle forze e prodotto vettoriale
- 10.6 Equilibrio di un corpo rigido
- 10.7 Relazione fra momento delle forze e accelerazione angolare
- 10.8 Il momento angolare
- 10.9 Conservazione del momento angolare
- 10.10 Quantizzazione del momento angolare (Facoltativo)
- 10.11 Rotazione di corpi rigidi (Facoltativo)

di questa trattazione ai corpi rigidi sarà ragionevolmente semplice e verrà trattata in un paragrafo facoltativo.

10.1 • VELOCITÀ ANGOLARE E ACCELERAZIONE ANGOLARE

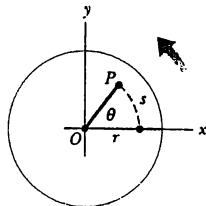


Figura 10.1 Rotazione di un disco intorno ad un asse fisso passante per O e perpendicolare al piano della figura (asse z). Si noti che una particella posta in P ruota lungo una circonferenza di raggio r e centro O .

Lo studio del moto rettilineo è iniziato con la definizione di *spostamento*, *velocità*, e *accelerazione*. Si userà lo stesso criterio fondamentale per l'accostamento allo studio del moto rotazionale. Si consideri un disco circolare che ruoti attorno a un asse fisso perpendicolare al disco e passante per il punto O (Fig. 10.1). Un punto P sul disco si trova a una distanza fissata r dall'origine e ruota attorno a O su una circonferenza di raggio r . In realtà, ogni punto sul disco è sottoposto a un moto circolare attorno a O .

È conveniente rappresentare la posizione del punto P con le sue coordinate polari: (r, θ) . L'origine delle coordinate polari viene scelta in modo da coincidere con il centro della circonferenza. In questa rappresentazione, la sola coordinata che varia nel tempo è l'angolo θ ; r rimane costante. Quando il punto sul disco si muove lungo la circonferenza di raggio r dall'asse x positivo ($\theta = 0$) al punto P , esso si muove lungo un arco di lunghezza s , il quale è corrisposto alla posizione angolare θ attraverso la relazione $s = r\theta$, ossia

$$\theta = \frac{s}{r} \quad [10.1]$$

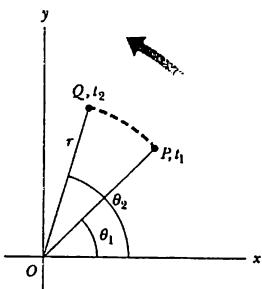


Figura 10.2 Una particella di un corpo rigido che ruota si muove da P a Q lungo un arco di circonferenza. Nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, il raggio vettore spazza un angolo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

È importante fare un breve commento sulle unità di misura di θ . L'angolo θ (Eq. 10.1) è il rapporto fra la lunghezza di un arco e il raggio di una circonferenza, e quindi è un numero puro. Ciononostante, l'unità di misura di θ è chiamata radiante (rad), e quindi un rad è l'angolo sotteso da un arco di circonferenza la cui lunghezza è uguale al raggio della stessa circonferenza. Poiché la lunghezza di una circonferenza è $2\pi r$, segue che 360° corrispondono a un angolo di $2\pi r/r$ rad, cioè 2π rad (un giro completo), e quindi $1 \text{ rad} = 360^\circ/2\pi \approx 57.3^\circ$. Per convertire un angolo espresso in gradi in radianti si può usare il fatto che $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, e quindi

$$\theta \text{ (rad)} = \frac{2\pi}{360^\circ} \theta \text{ (gradi)} = \frac{\pi}{180^\circ} \theta \text{ (gradi)}$$

Per esempio, 60° equivalgono a $\pi/3$ rad, e 45° equivalgono a $\pi/4$ rad.

Quando una particella si muove da P a Q nella Figura 10.2 in un intervallo di tempo Δt , il raggio vettore si sposta di un angolo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, che definisce lo spostamento angolare. Definiremo velocità angolare media, $\bar{\omega}$ (omega media), il rapporto fra lo spostamento angolare $\Delta\theta$ e l'intervallo di tempo Δt :

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad [10.2]$$

Analogamente alla velocità lineare, la velocità angolare istantanea, ω , è definita dal limite, per Δt tendente a zero, del rapporto dell'Equazione 10.2:

Velocità angolare • istantanea

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad [10.3]$$

La velocità angolare si misura in rad/s, oppure in s^{-1} , essendo il radiante una grandezza adimensionale. Adotteremo la convenzione che l'asse fisso di rotazione coincida con l'asse z, come in Figura 10.1, e considereremo ω positiva quando θ cresce (cioè quando la rotazione avviene in senso antiorario) e negativa quando θ decresce (rotazione in senso orario).

Se la velocità angolare istantanea di un corpo varia dal valore ω_1 al valore ω_2 nell'intervallo di tempo Δt , il corpo ha un'accelerazione angolare. L'accelerazione angolare media $\bar{\alpha}$ (alfa media) di un corpo rotante è definita dal rapporto fra la variazione di velocità angolare e l'intervallo di tempo, Δt :

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad [10.4]$$

- Accelerazione angolare media

Analogamente all'accelerazione lineare, l'accelerazione angolare istantanea è definita dal limite, per Δt tendente a zero, del rapporto $\Delta\omega/\Delta t$:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad [10.5]$$

- Accelerazione angolare istantanea

L'accelerazione angolare si misura in rad/s², oppure s⁻².

Generalizziamo, ora, il nostro argomento dal disco circolare a un qualunque corpo rigido. Un corpo rigido è un qualsiasi oggetto i cui elementi restano fissati l'uno rispetto all'altro. Nel caso della rotazione intorno a un asse fisso, tutte le particelle di un corpo rigido hanno la stessa velocità angolare e la stessa accelerazione angolare, cioè le grandezze vettoriali ω ed α caratterizzano il moto rotatorio di tutto il corpo rigido. Facendo uso di queste grandezze, è possibile semplificare notevolmente lo studio del moto rotatorio di un corpo rigido.

Si noti che la posizione angolare (θ), la velocità angolare (ω), e l'accelerazione angolare (α), corrispondono rispettivamente alla posizione lineare (x), la velocità lineare (v), e l'accelerazione lineare (a) del moto unidimensionale discusso nel Capitolo 2. Le variabili θ , ω e α differiscono dimensionalmente dalle variabili x, v e a solo per un fattore di lunghezza.

Abbiamo già definito in qual modo vengono determinati i segni di ω e di α , ma non abbiamo ancora associato a queste grandezze vettoriali una direzione e un verso nello spazio¹. Nel caso di rotazioni intorno a un asse fisso, l'unica direzione nello spazio che specifica univocamente il moto rotatorio è la direzione dell'asse di rotazione. È necessario, inoltre, definire il verso dei vettori, cioè se questi sono entranti o uscenti, rispetto al piano di Figura 10.1.

Come già detto, la direzione di ω si assume coincidente con quella dell'asse di rotazione, che coincide con l'asse z in Figura 10.1. Per convenzione, ω si assume uscente dal piano della figura quando la rotazione è antioraria, ed entrante nel piano della figura quando la rotazione è oraria. Per ricordare meglio questa convenzione, è utile usare la regola della mano destra, mostrata in Figura 10.3a; quando le quattro dita della mano destra avvolgono l'asse nella direzione di rotazione, il pollice esteso indica il verso di ω . La Figura

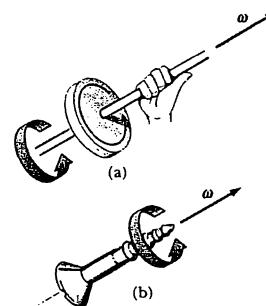


Figura 10.3 (a) Regola della mano destra per determinare la direzione del vettore velocità angolare. (b) La direzione di ω è anche individuata da quella di avanzamento di una vite destrorsa.

¹ Anche se qui non è dimostrato, la velocità angolare e l'accelerazione angolare istantanee sono grandezze vettoriali, mentre le corrispondenti grandezze medie non lo sono. Questo è dovuto al fatto che lo spostamento angolare non è una grandezza vettoriale nel caso di una rotazione finita.

10.3b fa vedere che il verso di ω coincide con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruota come il corpo.

Il verso di α , infine, è conseguenza della sua definizione, $d\omega/dt$; α è concorde con ω quando la velocità angolare scalare (cioè il modulo di ω) cresce nel tempo, ed è opposto a quello di ω quando la velocità angolare scalare decresce.

10.2 • CINEMATICA ROTAZIONALE

Abbiamo visto, durante lo studio del moto unidimensionale, che il moto accelerato più semplice si ha quando l'accelerazione è costante (Cap. 2). Analogamente, nel caso del moto rotatorio intorno ad un asse fisso, il moto accelerato più semplice si ha quando l'accelerazione angolare è costante. Ricaveremo ora in dettaglio le relazioni cinematiche che si applicano a tale moto.

Se scriviamo l'Equazione 10.5 nella forma $d\omega = \alpha dt$, e poniamo $\omega = \omega_0$ all'istante $t_0 = 0$, è possibile integrare questa espressione direttamente:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (\alpha = \text{costante}) \quad [10.6]$$

In modo completamente analogo, sostituendo l'Equazione 10.6 nell'Equazione 10.3, ed integrando (con $\theta = \theta_0$ a $t_0 = 0$), si ha

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad [10.7]$$

Eliminando il tempo t fra le Equazioni 10.6 e 10.7 si ha anche

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad [10.8]$$

Se eliminiamo α , otteniamo

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t \quad [10.9]$$

Si noti che queste relazioni cinematiche per il moto rotatorio con accelerazione angolare costante hanno la stessa forma di quelle valide per il moto unidimensionale, con le sostituzioni $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$, $a \rightarrow \alpha$ (Tab. 10.1). Queste espressioni, inoltre, sono valide sia per la rotazione di un corpo rigido che per il moto rotatorio di una singola particella intorno ad un asse fisso.

TABELLA 10.1 Confronto fra le relazioni cinematiche del moto rotatorio e del moto rettilineo con accelerazione costante

Moto rotatorio intorno ad un asse fisso con $\alpha = \text{costante}$	Moto rettilineo con $a = \text{costante}$
Variabili: θ e ω	Variabili: x e v
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t$	$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v) t$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Esempio 10.1 Una ruota in movimento

Una ruota gira con accelerazione angolare costante di 3.50 rad/s^2 . (a) Se la velocità angolare della ruota è 2.00 rad/s all'istante $t_0 = 0$, di quale angolo gira la ruota in 2.00 s ?

Soluzione

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \left(2.00 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) (2.00 \text{ s})$$

$$+ \frac{1}{2} \left(3.50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) (2.00 \text{ s})^2$$

$$= 11.0 \text{ rad} = 630^\circ = 1.75 \text{ giri}$$

(b) Qual è la velocità angolare della ruota all'istante $t = 2.00 \text{ s}$?

Soluzione

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 2.00 \text{ rad/s} + \left(3.50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) (2.00 \text{ s}) \\ = 9.00 \text{ rad/s}$$

È possibile ottenere quest'ultimo risultato usando l'Equazione 10.8 e il risultato del punto (a). Provate!

ESERCIZIO 1 Calcolare l'angolo di cui gira la ruota nell'intervallo di tempo fra $t = 2.00 \text{ s}$ e $t = 3.00 \text{ s}$.

Risposta 10.8 rad.

ESERCIZIO 2 Una ruota parte da ferma e gira con accelerazione angolare costante tale da raggiungere una velocità angolare di 12.0 rad/s in 3.00 s . Trovare (a) il modulo dell'accelerazione angolare della ruota e (b) l'angolo in radianti di cui ruota in questo tempo. Risposta (a) 4.00 rad/s^2 (b) 18.0 rad

10.3 • RELAZIONI FRA GRANDEZZE ANGOLARI E LINEARI

In questo paragrafo deriveremo alcune relazioni fra la velocità e l'accelerazione angolare di un punto che ruota e la sua velocità e accelerazione lineare. Per far ciò, bisogna tenere presente che, quando un corpo rigido ruota intorno a un asse, ogni punto del corpo percorre una circonferenza avente il centro sull'asse di rotazione. Consideriamo una particella che ruota su una circonferenza di raggio r attorno a un asse fisso z , come in Figura 10.4.

Poiché P si muove lungo una circonferenza, il vettore velocità lineare è sempre tangente alla circonferenza e ciò giustifica il nome di *velocità tangenziale*. Il modulo della velocità tangenziale del punto P è, per definizione, ds/dt , dove s è lo spazio percorso dal punto P lungo la circonferenza. Ricordando che $s = r\theta$ e notando che r è costante, si ha

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \\ \therefore v = r\omega \quad [10.10]$$

Cioè, il modulo della velocità tangenziale della particella è uguale al prodotto della distanza della particella dall'asse di rotazione per la velocità angolare della particella.

Possiamo mettere in relazione l'accelerazione angolare della particella con la sua accelerazione tangenziale, a_t (la quale è la componente della sua accelerazione tangente alla traiettoria del moto), calcolando la derivata rispetto al tempo di v :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

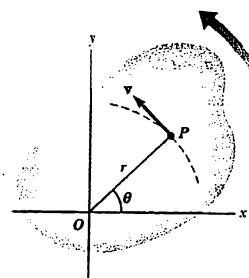


Figura 10.4 Quando un corpo rigido ruota intorno a un asse fisso passante per O , il punto P ha velocità lineare v , tangente alla circonferenza di raggio r e centro O .

- **Relazione tra velocità lineare ed angolare**

**Relazione tra
accelerazione tangenziale
ed angolare**

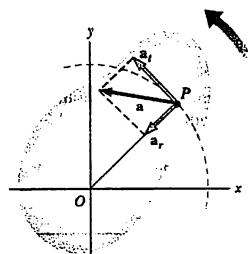


Figura 10.5 Quando un corpo rigido ruota intorno a un asse fisso passante per O , il punto P ha una componente tangenziale dell'accelerazione a_t e una componente centripeta a_r . L'accelerazione risultante del punto è $a = a_t + a_r$.

$$a_t = r\alpha$$

[10.11]

Cioè, la componente tangenziale dell'accelerazione lineare della particella sottoposta al moto circolare è uguale al prodotto della distanza della particella dall'asse di rotazione per l'accelerazione angolare.

Nel Capitolo 3 abbiamo trovato che una particella che si muove lungo una traiettoria circolare è sottoposta a una accelerazione centripeta, o radiale, di modulo v^2/r diretta verso il centro di rotazione (Fig. 10.5). Poiché $v = rw$, possiamo esprimere l'accelerazione centripeta della particella come

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad [10.12]$$

L'accelerazione lineare totale della particella è $a = a_t + a_r$. Quindi, il modulo dell'accelerazione lineare totale della particella è

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad [10.13]$$

Fisica ragionata 1

Un giradischi per LP (*long-playing*) ruota a velocità *angolare* costante. Un compact disk (CD) ruota in modo che la sua superficie venga esplorata dal laser a velocità *tangenziale* costante. Consideriamo due "solchi" circolari di informazione su un LP, uno vicino al bordo esterno e uno vicino al bordo interno. Supponiamo che il solco esterno "contenga" 1.8 s di musica. Il solco interno, conterrà pure 1.8 s di musica? Per quanto riguarda il CD, il solco interno ed esterno conterrà lo stesso intervallo temporale di musica?

Ragionamento Per un LP, il solco interno ed esterno devono ruotare entrambi nello stesso periodo di tempo. Quindi, ciascun solco, indipendentemente da dove si trovi sul disco, contiene lo stesso intervallo temporale di informazione. Naturalmente, nei solchi interni, questa informazione sarà compresa su una circonferenza minore. Su un CD, la velocità tangenziale costante, consente che non vi sia compressione, le tracce digitali che rappresentano l'informazione sono spaziate uniformemente lungo tutta la superficie. Quindi, si avrà una informazione maggiore su un solco esterno, dovuta a una circonferenza maggiore, e, per conseguenza, un maggiore intervallo temporale di musica rispetto ai solchi interni.

Fisica ragionata 2

La zona di lancio per l'Agenzia Spaziale Europea non è in Europa, essa è nella Guiana Francese, vicino all'equatore in Sud America. Perché?

Ragionamento Per porre un satellite in orbita terrestre è necessario fornire al satellite una grande velocità tangenziale. Ciò si ottiene con la propulsione a razzo. Qualunque cosa che serva a ridurre il fabbisogno del sistema a razzo è un contributo ben accetto. La superficie della Terra viaggia già verso est ad alta velocità, a causa della rotazione terrestre. Quindi, se i razzi venissero lanciati verso est, la rotazione della Terra fornirebbe una certa velocità tangenziale iniziale, riducendo di una certa quantità il fabbisogno del razzo. Se i razzi fossero lanciati dall'Europa, che si trova a una latitudine relativamente alta, il contributo della rotazione terrestre sarebbe relativamente piccolo, poiché la distanza fra l'Europa e l'asse di rota-

zione terrestre è relativamente piccola. Il posto ideale per il lancio è l'equatore, che è il posto sulla superficie terrestre più lontano dall'asse di rotazione della Terra. Ciò consente la maggiore velocità tangenziale possibile dovuta alla rotazione della Terra. L'Agenzia Spaziale Europea sfrutta questo vantaggio lanciando dalla Guiana Francese, che si trova a pochi gradi nord dall'equatore.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Quando un'alta ciminiera cade, essa spesso si rompe in qualche punto della sua lunghezza prima di urtare al suolo. Perché accade ciò?

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Quando una ruota di raggio R ruota attorno a un asse fisso come in Figura 10.6, tutti i punti sulla ruota hanno la stessa velocità angolare? Hanno la stessa velocità lineare? Se la velocità angolare è costante e uguale a ω , descrivere la velocità lineare e l'accelerazione lineare del punto posto a $r = 0$, $r = R/2$, ed $r = R$, dove i punti sono misurati dal centro della ruota.

ESERCIZIO 3 Una macchina da corsa percorre una pista circolare di raggio 250 m. Se la macchina si muove con una velocità lineare costante di 45.0 m/s, trovare (a) la sua velocità angolare e (b) il modulo e la direzione orientata della sua accelerazione. Risposta (a) 0.180 rad/s (b) 8.10 m/s² verso il centro della pista.

ESERCIZIO 4 Un'automobile accelera da zero a 30 m/s in 6.0 s. Le ruote hanno un diametro di 0.40 m. Qual è l'accelerazione angolare di ciascuna ruota? Risposta 25 rad/s²

10.4 • ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE

Consideriamo il corpo rigido come un insieme di particelle, ed assumiamo che il corpo ruoti intorno a un asse fisso z con velocità angolare ω (Fig. 10.7). Ciascuna particella del corpo rigido ha un'energia cinetica determinata dalla sua massa e dalla sua velocità. Indicando con m_i la massa dell' i -esima particella, e con v_i la sua velocità, l'energia cinetica della particella è data da

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Per procedere oltre, ricordiamo che sebbene tutte le particelle che costituiscono il corpo rigido abbiano la stessa velocità angolare, ω , le singole velocità lineari dipendono dalla distanza r_i dall'asse di rotazione, $v_i = r_i \omega$ (Eq. 10.10). L'energia cinetica totale del corpo rigido non è altro che la somma delle energie cinetiche delle singole particelle che lo costituiscono:

$$K_R = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

dove il fattore ω^2 è stato posto in evidenza perché è lo stesso per tutte le particelle. La quantità in parentesi definisce il **momento di inerzia**, I :

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad [10.14]$$

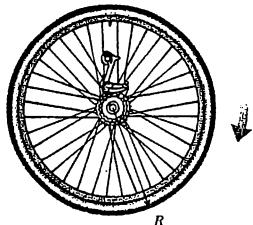


Figura 10.6 (Problema concettuale 2) Una ruota di raggio R .

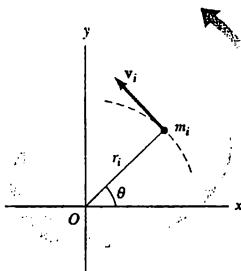


Figura 10.7 Un corpo rigido ruota intorno all'asse z con velocità angolare ω . L'energia cinetica della particella di massa m_i è $\frac{1}{2} m_i v_i^2$. L'energia cinetica totale del corpo è $\frac{1}{2} I \omega^2$.

- **Momento di inerzia per un sistema di particelle**

Quindi, l'energia cinetica del corpo rigido che ruota si può scrivere

Energia cinetica di un corpo rigido ruotante

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad [10.15]$$

Dalla definizione del momento d'inerzia si vede che questa grandezza ha dimensioni ML^2 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$ nel Sistema Internazionale). Il momento di inerzia è una misura dell'opposizione del sistema alla variazione della sua velocità angolare. Esso gioca il ruolo della massa in tutte le equazioni relative ai moti rotatori. Tuttavia, il momento di inerzia dipende dalla posizione e dalla orientazione dell'asse, e non è una proprietà intrinseca di un corpo come è la sua massa. Si noti che, sebbene la grandezza $\frac{1}{2} I \omega^2$ sarà indicata come **energia cinetica di rotazione**, essa non è una nuova forma di energia, ma è la normale energia cinetica già introdotta, essendo stata ricavata dalla somma delle energie cinetiche delle singole particelle che costituiscono il corpo rigido. L'Equazione 10.15 è comunque molto utile quando si studiano i moti rotatori, purché si sappia calcolare I . È importante riconoscere l'analogia esistente fra energia cinetica associata ad un moto lineare, $\frac{1}{2} mv^2$, ed energia cinetica associata ad un moto rotatorio, $\frac{1}{2} I \omega^2$. Le grandezze I ed ω sono analoghe rispettivamente ad m e v del moto lineare.

Fisica ragionata 3

La temperatura di un gas dipende dall'energia cinetica media *traslazionale* delle molecole del gas. Se aggiungiamo energia al gas, l'energia cinetica media traslazionale aumenterà e, quindi, aumenterà la temperatura. Supponiamo di aggiungere la stessa quantità di energia a un gas monoatomico, come l'elio, e a un gas biatomico, come l'ossigeno (O_2). La temperatura del gas monoatomico aumenterà di più di quella del gas biatomico. Perché?

Ragionamento In un gas monoatomico, il solo tipo possibile di energia cinetica è l'energia cinetica traslazionale. Quindi, tutta l'energia aggiunta al gas apparirà come energia cinetica traslazionale, con un corrispondente aumento di temperatura. Nel gas biatomico, una parte dell'energia aggiunta potrà apparire come energia cinetica rotazionale della molecola. Perciò, soltanto una parte dell'energia aggiunta apparirà come energia cinetica traslazionale, e la temperatura aumenterà di meno di quella del gas monoatomico.

Esempio 10.2 La molecola di ossigeno

Si consideri la molecola biatomica O_2 , che ruota nel piano xy intorno all'asse z , passante per il centro della molecola e perpendicolare alla sua lunghezza. La massa di un atomo di ossigeno è 2.66×10^{-26} kg e, a temperatura ambiente, la distanza media d fra i due atomi di ossigeno è 1.21×10^{-10} m (gli atomi vengono considerati masse puntiformi). (a) Calcolare il momento d'inerzia della molecola rispetto all'asse z .

Soluzione Poiché la distanza di ciascun atomo dall'asse z è $d/2$, si ha

$$I = \sum m_i r_i^2 = m \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{md^2}{2}$$

$$= \left(\frac{2.66 \times 10^{-26}}{2} \text{ kg} \right) (1.21 \times 10^{-10} \text{ m})^2$$

$$= 1.95 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(b) Se la velocità angolare di rotazione intorno all'asse z è 4.60×10^{12} rad/s, quant'è l'energia cinetica di rotazione della molecola?

Soluzione

$$\begin{aligned} K_R &= \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} (1.95 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \left(4.60 \times 10^{12} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \\ &= 2.06 \times 10^{-21} \text{ J} \end{aligned}$$

Questa energia cinetica è circa uguale all'energia cinetica media associata al moto di traslazione della molecola a temperatura ambiente, che vale 6.2×10^{-21} J.

Esempio 10.3 Quattro particelle in rotazione

Quattro masse puntiformi sono fissate ad un telaio di massa trascurabile, che si trova nel piano xy (Fig. 10.8).

(a) Se il sistema ruota intorno all'asse y con velocità angolare ω , calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y e l'energia cinetica rotazionale.

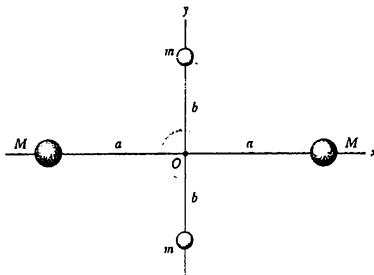


Figura 10.8 (Esempio 10.3) Tutte le particelle sono fisse nelle posizioni indicate. Il momento d'inerzia dipende dall'asse rispetto al quale è calcolato.

Soluzione Si noti, prima di tutto, che le particelle di massa m che si trovano sull'asse y non contribuiscono al momento d'inerzia I_y (perché $r_i = 0$ per queste particelle). Usando l'Equazione 10.14 si ha allora

$$I_y = \sum m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

e l'energia cinetica di rotazione intorno all'asse y è,

quindi,

$$K_R = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2) \omega^2 = Ma^2 \omega^2$$

Il fatto che le masse m non entrino in questo calcolo è significativo, poiché queste particelle non compiono alcun movimento, quando la rotazione avviene intorno all'asse y , e quindi non hanno energia cinetica.

(b) Si supponga ora che il sistema ruoti nel piano xy , intorno all'asse z passante per O . Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z e l'energia cinetica di rotazione.

Soluzione Poiché r_i nell'Equazione 10.14 è la distanza *perpendicolare* delle particelle dall'asse di rotazione, si ha

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2 + 2mb^2) \omega^2 = (Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

Paragonando i due risultati (a) e (b) si conclude che il momento d'inerzia, e quindi, anche l'energia cinetica di rotazione associata a una prefissata velocità angolare, dipendono dall'asse di rotazione. In (b) ci si aspetta che tutte le particelle contribuiscano al risultato, poiché tutte le particelle sono in movimento quando la rotazione avviene nel piano xy . Il fatto che l'energia cinetica sia minore nel caso (a) che nel caso (b) indica che è necessario uno sforzo minore (lavoro) per porre il sistema in rotazione intorno all'asse y piuttosto che intorno all'asse z .

10.5 • MOMENTO DELLE FORZE E PRODOTTO VETTORIALE

Quando si applica una forza a un corpo rigido che può ruotare intorno a un asse fisso, questo tende a porsi in rotazione. L'efficacia di una forza nel porre in rotazione un corpo è misurata da una grandezza vettoriale chiamata **momento della forza** (τ). Si consideri la Figura 10.9, in cui una chiave inglese può ruotare intorno a un asse (perpendicolare al piano della figura) passante per O . La forza applicata F agisce generalmente formando un angolo ϕ con la chiave. Definiremo il modulo del momento della forza F , τ (lettera greca tau), con la relazione

$$\tau = r F \sin \phi = Fd \quad [10.16]$$

È estremamente importante convincersi che il momento della forza è definito riferendosi ad un particolare asse. La grandezza $d = r \sin \phi$, chiamata **braccio della forza** F , rappresenta la distanza fra l'asse di rotazione e la retta di azione di F . Si noti che l'unica componente di F che tende a produrre una rotazione è $F \sin \phi$, la componente perpendicolare ad r . La componente radiale, $F \cos \phi$, passa per O e non ha alcuna tendenza a produrre una rotazione.

Se vi sono due o più forze che agiscono sul corpo rigido, come nella Figura 10.10, ciascuna di esse tende a produrre una rotazione intorno all'asse per O . Per esempio, F_2 tende a far ruotare il corpo in verso orario, mentre F_1 tende a farlo ruotare in verso antiorario. Useremo la convenzione che il momento

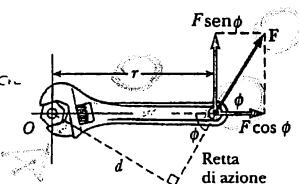


Figura 10.9 La forza F è più efficace nel produrre rotazioni intorno ad O quando F aumenta e quando cresce il braccio d . È la componente $F \sin \phi$ che tende a far ruotare il sistema intorno ad O .

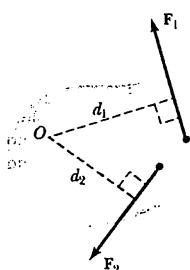


Figura 10.10 La forza F_1 tende a far ruotare il corpo in senso antiorario intorno ad O , mentre la forza F_2 tende a farlo ruotare in senso orario.

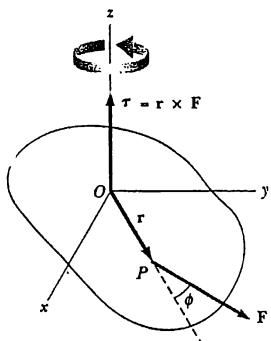


Figura 10.11 Il vettore momento della forza τ è perpendicolare al piano formato dalla forza F e dal vettore posizione r del suo punto di applicazione.

della forza è positivo quando la forza tende a produrre una rotazione antioraria, ed è negativo quando la rotazione favorita è quella oraria. Per esempio, nella Figura 10.10, il momento dovuto ad F_1 , che ha il braccio d_1 , è positivo, ed è uguale a $+F_1d_1$, mentre quello dovuto ad F_2 è negativo e vale $-F_2d_2$. Il momento risultante che agisce sul corpo è, quindi,

$$\tau_{\text{ris}} = \tau_1 + \tau_2 = F_1d_1 - F_2d_2$$

Dalla definizione di momento di una forza, si vede che la tendenza a porre in rotazione un corpo cresce al crescere di F ed al crescere di d . Per esempio, è più facile chiudere una porta spingendo sulla maniglia, piuttosto che in un punto vicino ai cardini. Il momento di una forza non deve essere confuso con la forza. Il momento ha le dimensioni di una forza per una lunghezza, cioè $N \cdot m$ nel Sistema Internazionale.

Consideriamo una forza F che agisce su un corpo rigido in un punto avente vettore posizione r (Fig. 10.11); il sistema di riferimento con origine in O sia inerziale, così da esser valida la seconda legge di Newton. Il modulo del momento di questa forza rispetto all'origine è, per definizione, $rf \sin \phi$, ove ϕ è l'angolo tra r ed F . L'asse intorno al quale la forza F tenderebbe a produrre una rotazione è perpendicolare al piano individuato da r ed F . Se la forza giace sul piano xy , come è il caso della Figura 10.11, allora il momento τ è rappresentato da un vettore parallelo all'asse z . La forza in Figura 10.11 tende a far ruotare il corpo nel senso antiorario per chi guarda dalla direzione positiva dell'asse z , cosicché il vettore τ è nel verso delle z crescenti. Se si inverte il verso di F , rispetto a quello di Figura 10.11, anche τ si inverte risultando ora diretto nel verso di z negativo. Il momento della forza è determinato dai due vettori, r ed F , ed è definito come il prodotto vettoriale di r ed F :

$$\tau = r \times F \quad [10.17]$$

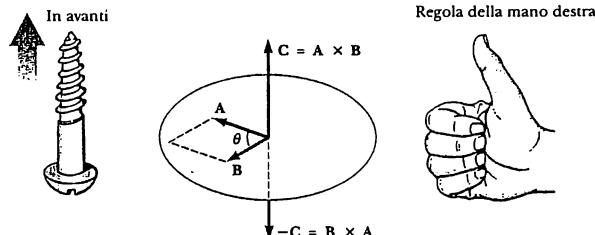
Dobbiamo ora dare una definizione formale del prodotto vettoriale: dati due vettori A e B il prodotto vettoriale $A \times B$ è un terzo vettore C , avente modulo $AB \sin \theta$, ove θ è l'angolo compreso tra A e B :

$$C = A \times B \quad [10.18]$$

$$C \equiv |C| = |AB \sin \theta| \quad [10.19]$$

Si noti che la grandezza $AB \sin \theta$ è uguale all'area del parallelogramma formato da A e B , come si vede in Figura 10.12. La direzione di $A \times B$ è perpendicolare al piano individuato da A e B (vedi Fig. 10.12) e il suo verso è quello in cui avanza una vite destrorsa quando ruota da A verso B . Per individuare il verso di $A \times B$ è spesso conveniente usare l'equivalente regola della mano destra illustrata in Figura 10.12: quattro dita della mano destra sono disposte lungo A e

Figura 10.12 Il prodotto vettoriale $A \times B$ è un terzo vettore C che ha modulo $AB \sin \theta$, pari all'area del parallelogramma indicato. C è perpendicolare al piano formato da A e B , e il suo verso è determinato dalla regola della mano destra.



poi "avvolte" verso **B** attraverso l'angolo θ . La direzione del pollice esteso è la direzione di $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Dalla definizione di prodotto vettoriale seguono queste sue proprietà.

- Al contrario del prodotto scalare, nel prodotto vettoriale è importante l'ordine in cui si succedono i due vettori,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad [10.20]$$

Cioè, invertendo l'ordine dei due fattori del prodotto il risultato cambia di segno; ciò è facilmente verificabile con la regola della mano destra (Fig. 10.12).

- Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono paralleli ($\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$), allora $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 0$; ne segue che $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$.
- Se \mathbf{A} è perpendicolare a \mathbf{B} , $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB$.

Usando le Equazioni 10.18 e 10.19 e la definizione di versore, si trova che i prodotti vettoriali, di una terna ortogonale levogira $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ obbediscono alle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{aligned} \quad [10.21] \quad \bullet \text{ Prodotto vettoriale} \\ &\quad \text{di versori}$$

Notare che i segni sono intercambiabili. Per esempio, $\mathbf{i} \times (-\mathbf{j}) = (-\mathbf{i}) \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Sia il momento di una forza che il lavoro sono il prodotto di una forza per una distanza. Come mai sono diversi? Hanno le stesse unità?



Il momento esercitato dal martello sul chiodo aumenta quando aumenta il braccio.
© Richard Megna, 1991,
Fundamental Photographs

Esempio 10.4 Momento risultante su un cilindro

Un cilindro è sagomato come in Figura 10.13, con un nucleo sporgente da un tamburo più largo. Il cilindro è libero di ruotare attorno all'asse centrale mostrato nel disegno. Una fune arrotolata attorno al tamburo, di raggio R_1 , esercita una forza \mathbf{F}_1 sulla destra del cilindro. Un'altra fune arrotolata attorno al nucleo, di raggio R_2 , esercita una forza \mathbf{F}_2 verso il basso. (a) Qual è il momento risultante delle forze agenti sul cilindro rispetto all'asse di rotazione (che è l'asse z in Fig. 10.13)?

Soluzione Il momento dovuto ad \mathbf{F}_1 è $-R_1 F_1$, ed è negativo perché tende a produrre una rotazione oraria. Il momento dovuto ad \mathbf{F}_2 è $+R_2 F_2$, ed è positivo. Il momento risultante è quindi

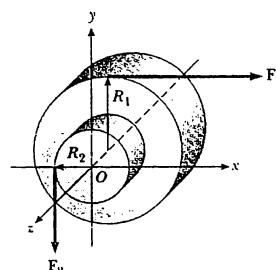


Figura 10.13 (Esempio 10.4) Un cilindro pieno che può ruotare intorno all'asse z passante per O . Il braccio di \mathbf{F}_1 è R_1 , mentre quello di \mathbf{F}_2 è R_2 .

$$\tau_{\text{ris}} = \tau_1 + \tau_2 = R_2 F_2 - R_1 F_1$$

(b) Si supponga che sia $F_1 = 5.0 \text{ N}$, $R_1 = 1.0 \text{ m}$, $F_2 = 6.0 \text{ N}$, e $R_2 = 0.50 \text{ m}$. Qual è il momento risultante, e in che verso ruota il cilindro?

Soluzione

$$\tau_{\text{ris}} = (6.0 \text{ N}) (0.50 \text{ m}) - (5.0 \text{ N}) (1.0 \text{ m}) = -2.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Poiché il momento risultante è negativo, il cilindro ruota in senso orario.

Esempio 10.5 Il prodotto vettoriale

Dati due vettori $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ che giacciono nel piano xy , si trovi il prodotto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e si verifichi esplicitamente che $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Soluzione Usando le Equazioni 10.21 per i prodotti vettoriali tra versori si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \\ &= 2\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} + 3\mathbf{j} \times (-\mathbf{i}) = 4\mathbf{k} + 3\mathbf{k} = 7\mathbf{k}, \end{aligned}$$

(i termini $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j}$ sono nulli).

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= -\mathbf{i} \times 3\mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times 2\mathbf{i} = -3\mathbf{k} - 4\mathbf{k} = -7\mathbf{k}$$

e, quindi, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

ESERCIZIO 5 Si usi il risultato di quest'esempio e l'Equazione 10.19 per calcolare l'angolo tra \mathbf{A} e \mathbf{B} . Risposta 60.3° .

ESERCIZIO 6 Una particella è localizzata con un vettore posizione $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ m}$, e la forza agente su di essa è $\mathbf{F} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ N}$. Qual è il momento della forza attorno (a) all'origine e (b) al punto di coordinate $(0, 6) \text{ m}$? Risposte (a) $(-7\mathbf{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$ (b) $(11\mathbf{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$

ESERCIZIO 7 Se $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, qual è l'angolo tra \mathbf{A} e \mathbf{B} ? Risposta 45.0°

10.6 • EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

Consideriamo una singola forza \mathbf{F} agente su un corpo rigido come in Figura 10.14. L'effetto della forza dipende dal suo punto di applicazione, P . Se \mathbf{r} è il vettore posizione di questo punto relativo a O , il momento associato alla forza \mathbf{F} rispetto a O è dato da $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Come si può vedere dalla Figura 10.14 la tendenza di \mathbf{F} a far ruotare il corpo attorno all'asse O dipende tanto dal braccio d quanto dal modulo di \mathbf{F} . Per definizione, il modulo di τ è Fd .

Supponiamo, ora, che una di due forze, \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 , agisca sul corpo rigido. Le due forze avranno sul corpo lo stesso effetto soltanto se esse avranno lo stesso modulo, la stessa direzione orientata, e la stessa retta d'azione. In altre parole, due forze \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 hanno un effetto equivalente su un corpo rigido se e solo se $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ e hanno lo stesso momento rispetto a qualsiasi punto dato.

Due forze uguali e opposte che non si equivalgono sono mostrate in Figura 10.15. La forza diretta verso destra tende a far ruotare il corpo in senso orario attorno all'asse perpendicolare al diagramma passante per O , mentre la forza diretta verso sinistra tende a farlo ruotare in senso antiorario attorno allo stesso asse.

Nel caso in cui un corpo potesse ruotare attorno a un asse passante per il suo centro di massa, sarebbe soggetto a una accelerazione angolare attorno a questo asse se vi fosse un momento delle forze non nullo. Per esempio, supponiamo che un corpo ruoti attorno a un asse passante dal suo centro di massa come in Figura 10.16. Due forze uguali e opposte agiscono nelle direzioni indicate, in modo tale che le loro rette d'azione non passano dal centro di massa. L'insieme di due forze che agiscono in questo modo si chiama **coppia**. (Le due forze mostrate in Figura 10.15 formano una coppia). Poiché ciascuna forza

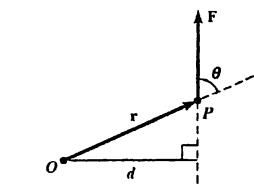


Figura 10.14 Una singola forza \mathbf{F} agisce su un corpo rigido nel punto P . Il braccio della forza \mathbf{F} relativo a O è la distanza perpendicolare d da O alla retta d'azione di \mathbf{F} .

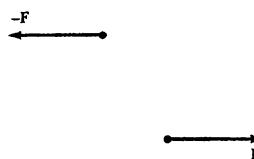


Figura 10.15 Le due forze agenti sul corpo sono uguali in modulo ma di verso opposto, ciononostante il corpo non è in equilibrio.

produce lo stesso momento, Fd , il momento risultante ha un modulo $2Fd$. Chiaramente, l'oggetto ruota in senso orario ed è sottoposto a una accelerazione angolare attorno all'asse. Questa è una situazione di non equilibrio anche se viene coinvolto soltanto il moto rotatorio.

In generale, un corpo è in equilibrio rotazionale soltanto se la sua accelerazione angolare $\alpha = 0$. Poiché il momento delle forze causa una accelerazione angolare, una condizione necessaria di equilibrio è che il momento risultante delle forze rispetto a qualsiasi origine deve essere zero. Abbiamo, adesso, due condizioni necessarie per l'equilibrio di un corpo, che possono essere fissate come segue:

$$\text{La risultante delle forze esterne deve essere uguale a zero. } \sum F = 0 \quad [10.22]$$

$$\text{La risultante dei momenti delle forze esterne deve essere uguale a zero rispetto a qualsiasi origine. } \sum \tau = 0 \quad [10.23]$$

La prima condizione stabilisce l'equilibrio traslazionale; essa dice che l'accelerazione lineare del centro di massa del corpo deve essere zero quando è misurata in un sistema di riferimento inerziale. La seconda condizione stabilisce l'equilibrio rotazionale e dice che l'accelerazione angolare attorno a qualsiasi asse deve essere zero. Nel caso particolare di **equilibrio statico**, il corpo è fermo sicché esso non ha velocità né lineare né angolare (cioè, $v_{CM} = 0$ e $\omega = 0$). Si noti che se la risultante delle forze esterne è zero, e la risultante dei momenti delle forze esterne è zero rispetto a una certa origine, allora la risultante dei momenti delle forze esterne è zero rispetto a qualsiasi altra origine.

Le due espressioni vettoriali date dalle Equazioni 10.22 e 10.23 sono equivalenti, in generale, a sei equazioni scalari, tre dalla prima condizione di equilibrio e tre dalla seconda (corrispondenti alle componenti x , y , e z). Quindi, in un sistema complesso dove diverse forze agiscono in varie direzioni, ci troveremo a dover risolvere un insieme di equazioni con diverse incognite. Qui, limiteremo la nostra discussione alla situazione nella quale tutte le forze giacciono sul piano xy . (Quando un insieme di forze giace sullo stesso piano, si dice che sono *complanari*.) Con questa limitazione, avremo a che fare soltanto con tre equazioni scalari. Due di queste risultano dall'uguaglianza delle forze nelle direzioni x e y . La terza proviene dall'equazione del momento delle forze, cioè dall'imporre che il momento risultante rispetto a qualsiasi punto sul piano xy deve essere uguale a zero. Quindi, le due condizioni di equilibrio forniscono le equazioni

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum \tau_z = 0 \quad [10.24]$$

dove l'asse rispetto al quale viene calcolato il momento delle forze è arbitrario, come mostreremo più avanti. Nella soluzione di problemi sull'equilibrio statico, è importante riconoscere le forze esterne agenti sull'oggetto. Non fare ciò implica un'analisi sbagliata. Si raccomanda il seguente procedimento quando si analizza l'equilibrio di un oggetto sotto l'azione di diverse forze esterne.

- *Le due condizioni di equilibrio per un corpo*

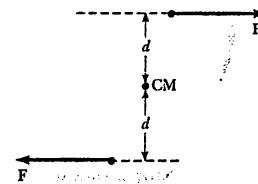


Figura 10.16 Due forze uguali e di verso opposto agenti su un corpo formano una coppia. In questo caso, il corpo ruota in verso orario. Il modulo del momento risultante delle forze rispetto al centro di massa è $2Fd$.

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

• Corpi in equilibrio

1. Tracciare un disegno del corpo in considerazione.
2. Disegnare un diagramma delle forze e specificare tutte le forze esterne agenti sul corpo. Tentare di riprodurre l'esatta direzione di ciascuna forza. Se si sceglie una direzione che conduce a un segno negativo nella soluzione per una forza, non allarmarsi; ciò significa

semplicemente che la direzione della forza è opposta a quella che è stata prefissata.

3. Scomporre tutte le forze in componenti ortogonali, scegliendo un opportuno sistema di coordinate. Quindi applicare la prima condizione di equilibrio. Ricordarsi di prendere nota dei segni delle varie componenti delle forze.
4. Scegliere un asse conveniente per calcolare il momento risultante delle forze agente sul corpo. Ricordare che la scelta dell'asse per l'equazione del momento è arbitraria; quindi, scegliere un'asse che semplifichi i calcoli il più possibile. Generalmente, l'asse più conveniente per calcolare i momenti è quello lungo il quale agiscono il maggior numero di forze.
5. La prima e la seconda condizione di equilibrio forniscono un sistema di equazioni lineari in diverse incognite. Risolvere il sistema in funzione delle grandezze note.

Esempio 10.6 Stazionare su una trave orizzontale

Una trave orizzontale uniforme di lunghezza 8.00 m e peso 200 N è collegata tramite uno snodo a una parete. L'altro suo estremo è fermato da un cavo che forma un angolo di 53.0° con l'orizzontale (Fig. 10.17a). Se una persona di 600 N sta sulla trave a 2,00 m dalla parete, trovare la tensione del cavo e la forza esercitata dalla parete sulla trave.

Soluzione Per prima cosa dobbiamo identificare le forze esterne agenti sulla trave. Queste sono la forza gravitazionale, la forza T esercitata dal cavo, la forza R esercitata dalla parete sullo snodo (la direzione di questa forza non è nota), e la forza esercitata dalla persona sulla trave. Tutte queste sono indicate nel diagramma di corpo libero della trave (Fig. 10.17b). Se scomponiamo T ed R nelle componenti orizzontali e verticali e applichiamo la prima condizione di equilibrio, otteniamo

$$(1) \sum F_x = R \cos \theta - T \cos 53.0^\circ = 0$$

$$(2) \sum F_y = R \sin \theta + T \sin 53.0^\circ - 600 \text{ N} - 200 \text{ N} = 0$$

Poiché R , T e θ sono tutte incognite, non possiamo ottenere una soluzione soltanto da queste espressioni. (Il numero delle equazioni di un sistema deve essere uguale al numero delle incognite affinché ammetta soluzioni).

Adesso scriviamo la condizione per l'equilibrio rotazionale. Un asse conveniente da scegliere per la nostra equazione dei momenti è l'asse passante per lo snodo in O . La caratteristica che rende questo punto così conveniente è che la forza R e la componente orizzontale di T hanno entrambe un braccio nullo, e quindi un momento nullo, rispetto a questo snodo. Ricordando la nostra convenzione sui segni del momento di una forza rispetto a

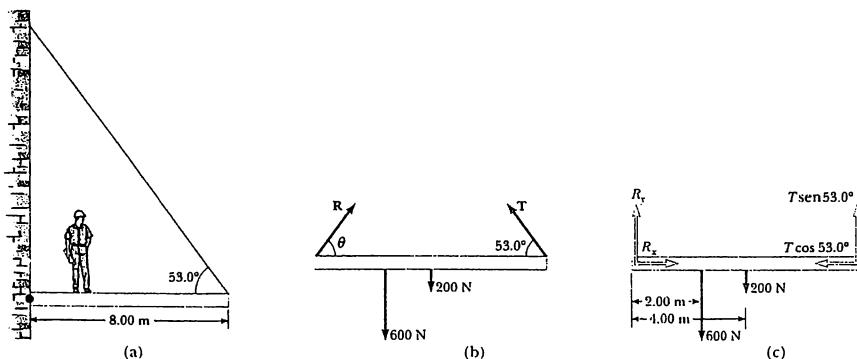


Figura 10.17 (Esempio 10.6) Una trave uniforme sostenuta da un cavo. (b) e (c) I diagrammi di corpo libero relativi alla trave.

un asse e notando che i bracci di leva delle forze di 600 N, 200 N, e $T \sin 53^\circ$ sono di 2.00 m, 4.00 m, e 8.00 m, rispettivamente, otteniamo

$$\sum \tau_O = (T \sin 53.0^\circ) (8.00 \text{ m}) - (600 \text{ N}) (2.00 \text{ m}) - (200 \text{ N}) (4.00 \text{ m}) = 0$$

$$T = 313 \text{ N}$$

Quindi, l'equazione del momento delle forze rispetto a questo asse ci dà direttamente una delle nostre incognite! Questo valore, sostituito in (1) e (2) ci dà

$$R \cos \theta = 188 \text{ N}$$

$$R \sin \theta = 550 \text{ N}$$

Dividendo queste due equazioni otteniamo l'identità trigonometrica $\sin \theta / \cos \theta = \tan \theta$, cioè

$$\tan \theta = \frac{550 \text{ N}}{188 \text{ N}} = 2.93$$

$$\theta = 71.1^\circ$$

Infine,

$$R = \frac{188 \text{ N}}{\cos \theta} = \frac{188 \text{ N}}{\cos 71.1^\circ} = 581 \text{ N}$$

Se avessimo scelto qualche altro asse per l'equazione del momento, la soluzione sarebbe stata la stessa. Per esempio, se avessimo scelto di far passare l'asse per il centro di gravità della trave, l'equazione del momento avrebbe coinvolto sia T che R , e comunque, questa equazione, accoppiata con (1) e (2), avrebbe risolto le incognite. Proval!

Quando in un problema vengono coinvolte molte forze di questa natura, è conveniente preparare una tabella delle forze, dei bracci di leva e dei momenti delle forze. Per esempio, nell'esempio appena svolto, potremmo costruire la seguente tabella. Porre la somma dei termini dell'ultima colonna uguale a zero rappresenta la condizione di equilibrio rotazionale.

Componente della forza	Braccio di leva rispetto a O (m)	Momento della forza rispetto a O (N · m)
$T \sin 53.0^\circ$	8.00	$(8.00) T \sin 53^\circ$
$T \cos 53.0^\circ$	0	0
200 N	4.00	$-(4.00)(200)$
600 N	2.00	$-(2.00)(600)$
$R \sin \theta$	0	0
$R \cos \theta$	0	0

Esempio 10.7 La scala inclinata

Una scala uniforme di lunghezza l e peso $w = 50 \text{ N}$ è appoggiata contro una parete verticale liscia (Fig. 10.18a). Se il coefficiente di attrito statico fra la scala e il suolo è $\mu_s = 0.40$, trovare l'angolo minimo θ_{\min} per il quale la scala non scivola.

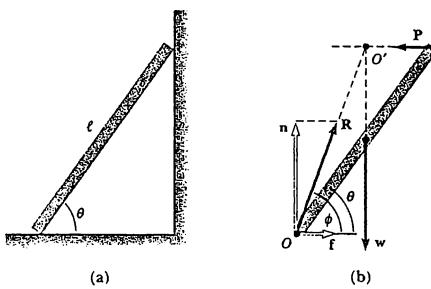


Figura 10.18 (Esempio 10.7) (a) Una scala uniforme ferma, inclinata contro una parete senza attrito. (b) Il diagramma di corpo libero della scala. Si noti che le forze R , w e P passano da un punto comune O' .

Soluzione Il diagramma di corpo libero che mostra tutte le forze agenti sulla scala è illustrato in Figura

10.18b. La reazione R esercitata dal pavimento sulla scala è il vettore somma della forza normale, n , e della forza d'attrito, f . La forza di reazione P esercitata dalla parete sulla scala è orizzontale poiché la parete è liscia. Dalla prima condizione di equilibrio applicata alla scala, abbiamo

$$\begin{aligned}\sum F_x &= f - P = 0 \\ \sum f_y &= n - w = 0\end{aligned}$$

Poiché $w = 50 \text{ N}$, dalla seconda equazione osserviamo che $n = w = 50 \text{ N}$. Inoltre, quando la scala è sul punto di scivolare, la forza d'attrito deve essere massima, data da $f_{\max} = \mu_s n = 0.40(50 \text{ N}) = 20 \text{ N}$. (Richiamiamo l'Eq. 5.1: $f_s \leq \mu_s n$.) Quindi, per questo angolo, $P = 20 \text{ N}$.

Per trovare θ , dobbiamo usare la seconda condizione di equilibrio. Quando i momenti delle forze sono calcolati rispetto all'origine O all'estremità della scala, abbiamo

$$\sum \tau_O = Pl \sin \theta - w \frac{l}{2} \cos \theta = 0$$

Ma $P = 20 \text{ N}$ quando la scala è sul punto di scivolare e $w = 50 \text{ N}$, cosicché questa espressione dà

$$\tan \theta_{\min} = \frac{w}{2P} = \frac{50 \text{ N}}{40 \text{ N}} = 1.25$$

$$\theta_{\min} = 51^\circ$$

È interessante notare che il risultato non dipende da ℓ o w . La risposta dipende soltanto da μ_s .

Un metodo alternativo per analizzare questo problema è quello di considerare l'intersezione O' delle rette d'azione delle forze w e P . Poiché il momento delle forze rispetto a qualsiasi punto deve essere zero, il momento rispetto a O' deve essere uguale a zero. Ciò implica che la retta d'azione di R (la risultante di n ed f) passi da O' .

Cioè, poiché tre forze agiscono su questo oggetto stazionario, le forze devono essere concorrenti. Con questa condizione, si può allora ottenere l'angolo ϕ che R forma con l'orizzontale (dove ϕ è maggiore di θ), assumendo nota la lunghezza della scala.

ESERCIZIO 8 Per gli angoli indicati in Figura 10.18b, mostrare che $\tan \phi = 2 \tan \theta$.

ESERCIZIO 9 Due ragazzini che pesano 500 N e 350 N si trovano su una tavola che pesa 40 N fissata in modo da poter ruotare attorno al suo centro (un'altalena). Se il ragazzino di 500 N si trova a 1.50 m dal centro, determinare (a) la forza verso l'alto esercitata dalla tavola per sostenerlo e (b) dove deve sedersi il ragazzino di 350 N per bilanciare il sistema. Risposta (a) 890 N (b) 2.14 m dal centro.

10.7 • RELAZIONE FRA MOMENTO DELLE FORZE E ACCELERAZIONE ANGOLARE

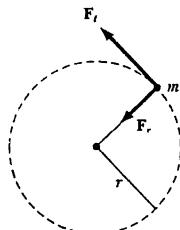


Figura 10.19 Una particella di massa m che ruota lungo una circonferenza sotto l'azione di una forza tangenziale F_t . Deve essere anche presente una forza centripeta F_r per produrre il moto circolare.

In questo paragrafo dimostreremo che l'accelerazione angolare di una particella che ruota attorno a un asse fisso è proporzionale al momento risultante delle forze rispetto a questo asse. I concetti coinvolti in questo caso possono essere facilmente estesi al caso di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso.

Si consideri una particella di massa m che si muove lungo una circonferenza di raggio r sotto l'azione sia di una forza tangenziale F_t , sia di una forza centripeta F_r , come schematizzato in Figura 10.19. (La forza centripeta, la cui natura non è ancora specificata, deve essere presente per mantenere la particella sull'orbita circolare). In accordo con la seconda legge di Newton, $F_t = ma_t$ e $F_r = ma_r$, dove a_t è l'accelerazione tangenziale della particella e a_r è la sua accelerazione centripeta. Il momento rispetto all'origine dovuto alla forza centripeta è nullo poiché F_r è antiparallelo a r ; quindi, $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_r = 0$. Il momento rispetto all'origine dovuto alla forza tangenziale è dato da $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_t$, ma poiché r è perpendicolare a F_t , il modulo del momento è semplicemente $F_t r$. Allora, il modulo del momento risultante sulla particella è

$$\sum \tau = F_t r = (ma_t) r$$

Poiché l'accelerazione tangenziale è correlata all'accelerazione angolare tramite l'Equazione 10.11, $a_t = r\alpha$, il momento può essere espresso come

$$\sum \tau = (mr\alpha) r = (mr^2) \alpha$$

Ricordando, dall'Equazione 10.14, che la grandezza mr^2 è il momento d'inerzia della massa ruotante attorno all'asse z passante per l'origine, si ottiene

Relazione fra momento risultante delle forze e accelerazione angolare

$$\sum \tau = I\alpha \quad [10.25]$$

Cioè, il momento risultante delle forze agenti su un punto materiale è proporzionale alla sua accelerazione angolare, e la costante di proporzionalità è il momento d'inerzia. È importante notare che $\sum \tau = I\alpha$ è l'analogo rotazionale della seconda legge del moto di Newton, $\sum F = ma$.

Fisica ragionata 4

Quando un automobilista schiaccia l'acceleratore, il muso della macchina si alza. Quando frena, invece, il muso si abbassa. Perché avvengono questi effetti?

Ragionamento Quando l'automobilista schiaccia l'acceleratore, si provoca un aumento della forza sugli pneumatici da parte della strada. Questa forza è parallela alla strada e diretta verso la parte anteriore della macchina, come viene suggerito in Figura FR10.4a. Questa forza fornisce un momento rispetto al centro di massa che tende a far ruotare l'automobile in senso antiorario nel diagramma. L'effetto di questa rotazione è il "muso in su" della macchina. Quando il conducente schiaccia i freni, si verifica un incremento della forza sugli pneumatici da parte della strada, diretta verso la parte posteriore dell'automobile, come è suggerito nella Figura FR10.4b. Questa forza causa una rotazione in senso orario e il conseguente "muso in giù" dell'automobile.

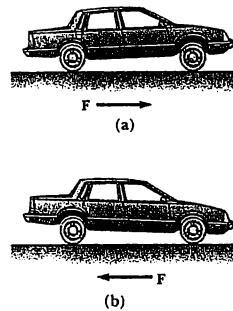


Figura FR10.4
(Fisica ragionata 4)

10.8 • IL MOMENTO ANGOLARE

Consideriamo ancora una particella di massa m , posta nella posizione \mathbf{r} e che si muova con una quantità di moto \mathbf{p} , come è mostrato in Figura 10.20. Il **momento angolare istantaneo**, \mathbf{L} , della particella rispetto all'origine O è definito come il prodotto vettoriale del vettore posizione istantanea e del vettore quantità di moto istantanea, \mathbf{p} :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad [10.26]$$

L'unità di misura SI del momento angolare è $\text{kg} \cdot \text{m}^2\text{s}^{-1}$. È importante notare che sia il modulo che la direzione di \mathbf{L} dipendono dalla scelta dell'origine. La direzione di \mathbf{L} è perpendicolare al piano individuato da \mathbf{r} e \mathbf{p} , il suo verso è determinato dalla regola della mano destra. Nell'esempio di Figura 10.20 \mathbf{r} e \mathbf{p} giacciono nel piano xy cosicché \mathbf{L} ha la direzione di z . Il modulo di \mathbf{L} è dato da

$$L = mvr \sin \phi \quad [10.27]$$

ove ϕ è l'angolo tra \mathbf{r} e \mathbf{p} ; ne segue che \mathbf{L} è zero se \mathbf{r} è parallelo a \mathbf{p} ($\phi = 0^\circ$ o $\phi = 180^\circ$). Se una particella si muove lungo una retta passante per un punto essa ha momento angolare nullo rispetto a questo punto usato come origine, il che equivale a dire che essa non tende a ruotare rispetto all'origine. Invece, se \mathbf{p} è perpendicolare a \mathbf{r} ($\phi = 90^\circ$), allora \mathbf{L} è massimo e pari a mvr ; in questo caso, la particella ha la massima tendenza a ruotare rispetto all'origine. Essa, in tale istante, si muove proprio come se fosse sul bordo di una ruota che gira, nel piano definito da \mathbf{p} ed \mathbf{r} , intorno all'origine. Il momento angolare di una particella rispetto a un punto è diverso da zero se il vettore posizione della particella, misurato rispetto a quel punto, ruota attorno al punto.

Per il moto lineare, la forza risultante su una particella è uguale alla derivata temporale della quantità di moto della particella (Eq. 8.3). Vogliamo ora mostrare che la seconda legge di Newton implica anche che il momento risultante delle forze agenti su una particella è pari alla rapidità di variazione del momento angolare di questa, quanto entrambi i momenti sono riferiti alla stessa origine. Riscriviamo per prima cosa il momento della forza agente sulla particella nella forma:

- *Momento angolare di una particella*

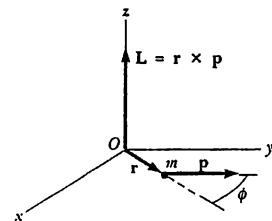


Figura 10.20 Una particella di massa m , quantità di moto \mathbf{p} e posizione \mathbf{r} ha momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. \mathbf{L} , il cui valore dipende dalla scelta dell'origine, è un vettore perpendicolare sia a \mathbf{r} che a \mathbf{p} .

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad [10.28]$$

dove $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Deriviamo poi rispetto al tempo l'Equazione (10.26), seguendo la regola della derivata del prodotto.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}$$

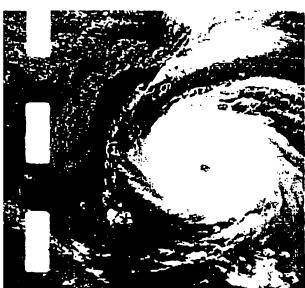
Poiché $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, è importante non invertire i fattori.

Questa equazione, poiché l'ultimo termine a destra è nullo ($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ è parallelo a \mathbf{p}), diventa

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad ([10.29])$$

Dal confronto delle Equazioni 10.28 e 10.29, si ha

Il momento della forza è uguale alla derivata temporale del momento angolare



Vista aerea dell'Uragano Fran. La massa d'aria a forma di spirale è sottoposta a rotazione e possiede momento angolare. (Per gent. conc. della NASA)

che è l'analogo rotazionale della seconda legge di Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Questo risultato dice che il momento della forza agente su una particella è pari alla derivata temporale del momento angolare. È importante notare che l'Equazione 10.30 è valida solo se τ ed \mathbf{L} sono calcolati rispetto alla "stessa" origine. L'Equazione (10.30) è valida quando più forze agiscono sulla particella, in questo caso τ è il momento risultante. Infine, la relazione è valida per ogni polo o punto origine fisso rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, ed ovviamente lo stesso punto origine deve essere usato per calcolare sia il momento risultante delle forze sia il momento angolare.

Sistemi di particelle

Si definisce momento angolare totale, \mathbf{L} , di un sistema di n particelle rispetto a un punto la somma vettoriale dei momenti angolari \mathbf{L}_i delle n particelle individuali calcolati rispetto allo stesso punto

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{L}_n = \sum \mathbf{L}_i$$

Così come i momenti angolari delle singole particelle, anche il momento angolare totale può variare nel tempo; infatti, dalle Equazioni (10.28 e 10.29) scritte per tutte le particelle, si trova che la rapidità di variazione del momento angolare totale è pari alla somma vettoriale dei momenti di *tutte* le forze applicate al sistema, sia quelli dovuti a forze interne scambiate tra particelle del sistema, che quelli associati a forze esterne. Tuttavia, il risultante dei momenti delle forze interne è nullo, come conseguenza della terza legge di Newton: le forze interne sono in coppie di pari modulo e verso opposto giacenti sulla linea congiungente le due particelle interessate, per cui il momento di ogni coppia di forze di azione-reazione è zero, e sommando ne segue che il *risultante dei momenti delle forze interne è nullo*. Infine, si può concludere che il momento angolare totale di un sistema può variare nel tempo solo se vi è un momento delle forze esterne che agisce sul sistema

$$\sum \tau_{\text{est}} = \sum \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{L}_i = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad [10.31]$$

Cioè, la derivata temporale del momento angolare totale di un sistema è uguale al momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema; tutti i momenti debbono essere calcolati rispetto allo stesso punto solidale con un sistema di riferimento *inerziale*. Si noti che l'Equazione 10.31 è l'analogo rotazionale di $\mathbf{F}_{\text{est}} = d\mathbf{p}/dt$ (Eq. 8.35) per un sistema di particelle.

Fisica ragionata 5

Una particella che si muove in linea retta può avere un momento angolare non nullo?

Ragionamento Una particella ha un momento angolare rispetto a un'origine quando si muove in linea retta se la direzione del moto non passa dall'origine. Il suo momento angolare è nullo soltanto se la linea lungo cui avviene il moto passa dall'origine, nel quale caso \mathbf{r} è parallelo a \mathbf{v} , ed $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = 0$.

Esempio 10.8 Moto circolare

Una particella si muove con velocità v lungo una circonferenza di raggio r giacente sul piano xy (vedi Fig. 10.21). (a) Si trovi il suo momento angolare relativo al centro O , in modulo e direzione quando la velocità è \mathbf{v} .

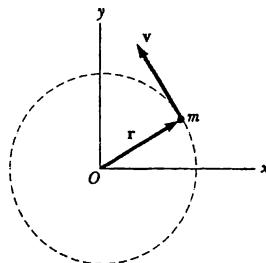


Figura 10.21 (Esempio 10.8). Una particella che percorre una circonferenza di raggio r ha un momento angolare di modulo mvr relativo al centro. Il vettore $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ è rivolto verso l'esterno del grafico (non disegnato).

Soluzione Poiché \mathbf{r} è perpendicolare a \mathbf{v} ($\phi = 90^\circ$) il modulo di \mathbf{L} è

$$L = mvr \text{ sen } 90^\circ = mvr \quad (\text{per } \mathbf{r} \text{ perpendicolare a } \mathbf{v})$$

La direzione di \mathbf{L} è perpendicolare al piano della circonferenza, il suo verso dipende da \mathbf{v} ; se la particella, come in Figura 10.21, ruota in senso antiorario la regola della mano destra ci dice che $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ è *uscente* dal foglio, e, quindi $\mathbf{L} = (mvr) \mathbf{k}$; invece, per una particella ruotante in verso orario \mathbf{L} sarebbe entrante nel foglio.

(b) Trovare l'espressione di L in funzione della velocità angolare ω .

Soluzione Poiché, per una particella che si muove su una circonferenza, $v = r\omega$, si può esprimere L , come

$$L = mvr = m(r\omega)r = mr^2\omega = I\omega$$

ove I è il momento di inerzia della particella rispetto all'asse z passante per O . La direzione del momento angolare \mathbf{L} è la stessa del vettore velocità angolare ω (vedi Paragrafo 10.1): $\mathbf{L} = I\omega$, e, per questo verso di rotazione, $\mathbf{L} = I\omega \mathbf{k}$.

Esempio 10.9 Due masse collegate

Due masse m_1 e m_2 , sono collegate da una fune leggera che passa attraverso una puleggia di raggio R e momento di inerzia I rispetto al suo asse, come in Figura 10.22. La massa m_2 scivola su una superficie orizzontale priva di attrito. Determinare l'accelerazione delle due masse, usando il concetto di momento angolare e di momento delle forze.

Ragionamento e Soluzione Calcoliamo, inizialmente, il momento angolare del sistema, il quale è formato

dalle due masse e dalla puleggia. Calcoliamo, poi, il momento delle forze rispetto all'asse della puleggia passante per O . Nell'istante in cui m_1 ed m_2 hanno una velocità v , il momento angolare di m_1 è $m_1 v R$, e quello di m_2 è $m_2 v R$. Nello stesso istante, il momento angolare totale del sistema è

$$(1) \quad L = m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R}$$

Calcoliamo, ora, il momento risultante delle forze ester-

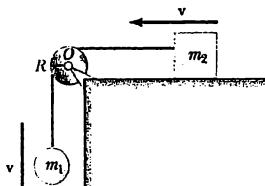


Figura 10.22 (Esempio 10.9)

ne agente sul sistema rispetto all'asse. Poiché la forza esercitata dall'asse sulla puleggia e dal peso della puleggia hanno il braccio nullo, esse non contribuiscono al momento. Inoltre, la forza normale agente su m_2 è equilibrata dalla forza di gravità, $m_2 g$, cosicché queste forze non contribuiscono al momento. La forza esterna $m_1 g$ produce un momento rispetto all'asse con un modulo uguale a $m_1 g R$, dove R è il braccio del momento della forza rispetto all'asse. Questo risulta essere il momento totale delle forze esterne rispetto a O , cioè, $\tau_{\text{est}} = m_1 g R$.

Usando questo risultato, insieme con la (1) e l'Equazione 10.30, si ha

$$\begin{aligned}\tau_{\text{est}} &= \frac{dL}{dt} \\ m_1 g R &= \frac{d}{dt} \left[(m_1 + m_2) R v + I \frac{v}{R} \right] \\ (2) \quad m_1 g R &= (m_1 + m_2) R \frac{dv}{dt} + I \frac{dv}{R} \end{aligned}$$

Poiché $dv/dt = a$, possiamo da questa estrarre a ed ottenere

$$a = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2) + I/R^2}$$

Potremmo chiederci perché non abbiamo incluso le forze che la fune esercita sugli oggetti per calcolare il momento risultante rispetto all'asse. La ragione di ciò è che queste forze sono interne al sistema in considerazione. Soltanto le forze esterne contribuiscono alla variazione del momento angolare.

ESERCIZIO 10 Una macchina di massa 1500 kg si muove su una pista circolare di raggio 50 m con una velocità di 40 m/s. Qual è il modulo del suo momento angolare rispetto al centro della traiettoria? Risposta $3.0 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

10.9 • CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Nel Capitolo 8 si è visto che la quantità di moto totale di un sistema rimane costante quando la risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nulla. Nel moto rotazionale abbiamo un'analogia legge di conservazione che afferma: il momento angolare totale di un sistema resta costante se il momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nullo.

Poiché il momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema è uguale alla derivata temporale del momento angolare del sistema, si vede che se ...

$$\sum \tau_{\text{est}} = \frac{dL}{dt} = 0 \quad [10.32]$$

allora

$$L = \text{costante} \quad [10.33]$$

Per un sistema di particelle, questa legge di conservazione si scrive $\sum L_i = \text{costante}$, dove L_i è il momento angolare della i -esima particella del sistema, data da $L_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$. Quindi, possiamo esprimere la conservazione del momento angolare di un sistema di particelle come

$$\sum \mathbf{L}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \text{costante} \quad [10.34]$$

Dall'Equazione 10.34 ricaviamo una terza legge di conservazione da aggiungere alla nostra lista di grandezze che si conservano. Possiamo adesso affermare che l'energia totale, la quantità di moto e il momento angolare di un sistema isolato rimangono costanti.

Se il sistema di "particelle" in considerazione è un corpo rigido ruotante attorno a un asse fisso, allora il momento angolare del corpo rispetto all'asse ha un modulo dato da $L = I\omega$, dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse. In questo caso, se il momento risultante delle forze esterne è nullo, possiamo esprimere la conservazione del momento angolare come $I\omega = \text{costante}$.

Anche se non ne daremo qui la dimostrazione, un importante teorema riguarda il momento angolare di un sistema di particelle relativo al centro di massa del sistema. Esso può essere espresso come segue:

Il momento risultante delle forze esterne agente su un sistema di punti materiali rispetto al centro di massa è uguale alla derivata temporale del momento angolare, indipendentemente dal moto del centro di massa.

Questo teorema si applica anche se il centro di massa è accelerato, purché sia τ che L siano calcolati rispetto al centro di massa.

Si possono usare molti esempi per dimostrare la conservazione del momento angolare; alcuni di essi dovrebbero esservi familiari. Avrete osservato una



Figura 10.23 Nancy Kerrigan. In questa rotazione, la sua velocità angolare aumenta quando essa avvicina le braccia al suo corpo, dimostrando che il momento angolare si conserva.
(Reuters/Corbis-Bettmann)



Figura 10.24 La nebulosa del Granchio, nella costellazione del Toro. Questa nebulosa è il residuo dell'esplosione di una supernova, che è stata vista sulla Terra nell'anno 1054. Essa si trova a una distanza di 6300 anni-luce, ha un diametro di 6 anni-luce, e si espande ancora verso l'esterno. (David Malin, Anglo-Australian Observatory)

pattinatrice ruotare su se stessa. La velocità angolare della pattinatrice aumenta quando essa porta mani e piedi vicinissimi al tronco, come in Figura 10.23. Trascurando l'attrito tra i pattini e il ghiaccio, si vede che non vi è momento esterno sulla pattinatrice. Il momento d'inerzia del suo corpo diminuisce quando mani e piedi vengono avvicinati. La risultante variazione della velocità angolare segue dal fatto che, dovendosi conservare il momento angolare, il prodotto $I\omega$ rimane costante, e una diminuzione di I causa un corrispondente aumento di ω .

Un interessante esempio astrofisico di conservazione del momento angolare avviene quando, alla fine della sua vita, una stella di grande massa esaurisce tutto il suo combustibile e collappa sotto la spinta delle forze gravitazionali, producendo una gigantesca esplosione di energia chiamata esplosione di supernova. L'esempio più studiato di un residuo di esplosione di supernova è la nebulosa del Granchio, una massa di gas caotica che si espande (Fig. 10.24). Una parte della massa della stella è liberata nello spazio, dove essa finalmente si condensa in nuove stelle e pianeti. La gran parte della massa rimane all'interno creando una stella di neutroni, una sfera estremamente densa di materia con un diametro di circa 10 km contro un diametro di 10^6 km della stella originale. Poiché il momento d'inerzia del sistema diminuisce, la velocità angolare della stella aumenta. Sono state identificate più di 300 stelle di neutroni in rapida rotazione, con periodi di rotazione che vanno da 1.6 ms a 4 s. La stella di neutroni è un sistema molto spettacolare - un oggetto con una massa più grande di quella del Sole che ruota parecchie volte in un secondo!

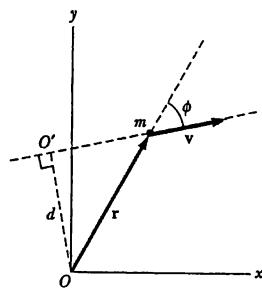


Figura E10.11 (Esercizio 11)

ESERCIZIO 11 Una particella di massa m si muove sul piano xy con una velocità v lungo una linea retta, come in Figura E10.11. Qual è il modulo, la direzione e il verso del suo momento angolare (a) rispetto all'origine O e (b) rispetto all'origine O' ?

Risposta (a) mvd verso l'interno della figura (b) zero

Esempio 10.10 Una pallina che ruota su una superficie orizzontale priva di attrito

Una pallina di massa m che si trova su un tavolo orizzontale privo di attrito è collegata a una fune che passa attraverso un piccolo foro nel tavolo. A un certo istante la pallina viene messa in rotazione su una traiettoria circolare di raggio R con velocità, in modulo, v_0 (Fig. 10.25). Se la fune viene tirata dal basso in modo che il

raggio della circonferenza diminuisca fino a r , quale sarà la velocità finale v della pallina?

Soluzione Si consideri il momento delle forze rispetto al centro di rotazione, O . Si noti che la forza di gravità agente sulla pallina è equilibrata dalla forza normale verso l'alto, per cui queste forze si elidono. La forza, F , della fune sulla pallina (la forza centripeta) agisce verso il centro di rotazione, mentre il vettore posizione r è diretto in verso opposto. Si vede allora che $\tau = r \times F = 0$. Ancora, poiché $\tau = dL/dt = 0$, L è una costante del moto. Cioè, $mv_0R = mv_r$, ossia

$$v = \frac{v_0 R}{r}$$

Da questo risultato si vede che se r diminuisce, la velocità v aumenta.

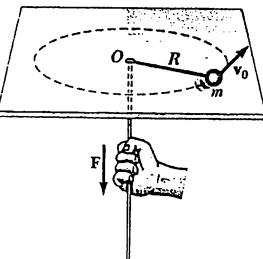


Figura 10.25 (Esempio 10.10)

10.10 • QUANTIZZAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

FACOLTATIVO

Si è visto come il concetto di momento angolare risulti molto utile per descrivere il moto di sistemi macroscopici. Anche nella scala submicroscopica l'uso di questo concetto è stato ampiamente usato per lo sviluppo delle moderne teorie di fisica nucleare, atomica e molecolare. In questi sviluppi si è visto che il momento angolare è una grandezza *fondamentale*, e la parola *fondamentale*, in questo contesto, significa che il momento angolare è una proprietà intrinseca di atomi, molecole e dei loro costituenti.

Per spiegare i risultati di una varietà di esperimenti su sistemi atomici e molecolari è necessario attribuire ai loro momento angolare valori discreti, in termini moderni: **quantizzare**; questi valori discreti sono multipli di una unità elementare di momento angolare pari ad $\hbar = h/2\pi$, ove h è la **costante di Planck**.

$$\text{Unità elementare di momento angolare} = \frac{\hbar}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Esempio 10.11 Una valutazione della frequenza di rotazione della molecola di ossigeno

Si valuti la frequenza di rotazione della molecola di ossigeno, sapendo che la massa di un atomo di ossigeno è 2.66×10^{-26} kg e che la distanza "media" tra i due atomi di ossigeno è 1.21×10^{-10} m.

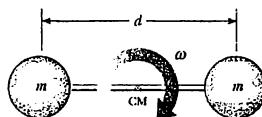


Figura 10.26 (Esempio 10.11) Modello a manubrio ruotante di una molecola biatomica. La rotazione avviene attorno al centro di massa nel piano del disegno.

Soluzione Si consideri la molecola O_2 come un manubrio ruotante - cioè, i due atomi di ossigeno sono fissati a una distanza d e ruotano attorno al loro centro di massa (Fig. 10.26). Per trovare la frequenza di rotazione, prima si deve calcolare il momento angolare della molecola rispetto a un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il centro di massa.

$$L = L_1 + L_2 = mvr + mvr = 2mvr$$

In questo esempio, $r = d/2 = 0.605 \times 10^{-10}$ m. Inoltre, usando la relazione $v = r\omega$ (Eq. 10.10), si ottiene

$$\begin{aligned} L &= 2mvr = 2m r^2 \omega \\ &= 2(2.66 \times 10^{-26} \text{ kg}) (0.605 \times 10^{-10} \text{ m})^2 \omega \\ &= (1.95 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \omega \end{aligned}$$

Possiamo ora valutare la frequenza più bassa di rotazione della molecola uguagliando il momento angolare con l'unità fondamentale di momento angolare, $h/2\pi$.

$$\begin{aligned} L &= (1.95 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \omega = \frac{h}{2\pi} \\ &= 1.054 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Quindi,

$$\omega = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{1.95 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 5.41 \times 10^{11} \text{ rad/s}$$

Questo risultato è in ottimo accordo con le frequenze di rotazione misurate. Le frequenze di rotazione sono molto più basse delle frequenze vibrazionali della molecola, che sono tipicamente dell'ordine di 10^{13} rad/s.

Questo esempio mostra come concetti classici e modelli meccanici macroscopici possano servire per descrivere alcuni aspetti di sistemi atomici e molecolari. Tuttavia, una grande varietà di fenomeni su scala submicroscopica può essere spiegata solo se si assume che il momento angolare associato ai particolari tipi di moto possa avere valori discreti.

Fu il fisico danese Niels Bohr (1885-1962) che per primo suggerì questa idea radicalmente nuova nel suo modello dell'atomo di idrogeno. I modelli classici erano infatti incapaci di descrivere molte proprietà dell'atomo di idrogeno, quali il fatto che esso assorbe ed emette radiazione elettromagnetica a frequenze discrete; Bohr postulò che gli elettroni potevano porsi solo su orbite circolari intorno al protone aventi momento angolare orbitale pari a $nh/2\pi$, dove n è un intero, o numero quantico. Cioè, Bohr avanzò l'ipotesi ardita che il momento angolare orbitale fosse quantizzato. Con questo semplice modello egli stimò le frequenze di rotazione degli elettroni per le varie orbite.

Sebbene la teoria di Bohr fornisca alcuni approfondimenti sul funzionamento della materia a livello atomico, essa è fondamentalmente non corretta; i susseguenti sviluppi della meccanica quantistica, hanno, negli anni 1924-1930, dato vita a modelli ed interpretazioni che sono tuttora validi.

I successivi sviluppi nella fisica atomica indicano che l'elettrone possiede un altro tipo di momento angolare, detto **spin**, che è una proprietà intrinseca dell'elettrone; anche il momento angolare di spin può assumere solo valori discreti. Più oltre nel testo si tornerà su questa importante proprietà e si discuterà la sua rilevanza per lo sviluppo delle fisica moderna.

FACOLTATIVO

10.11 • ROTAZIONE DI CORPI RIGIDI

In questo paragrafo ci occuperemo del moto rotazionale di corpi rigidi, facendo uso di gran parte di ciò che abbiamo appreso sul moto circolare di punti materiali. Prima discuteremo la dinamica di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso. Successivamente, mostreremo come determinare l'energia cinetica rotazionale di un corpo rigido e la sua variazione in relazione al lavoro svolto dalle forze esterne. Infine, si farà uso del principio di conservazione dell'energia per descrivere oggetti che rotolano su una superficie senza strisciare.

Dinamica rotazionale

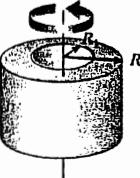
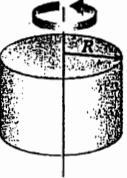
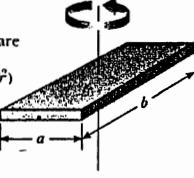
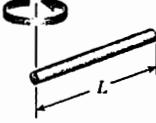
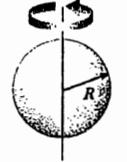
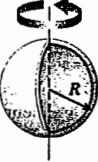
Nel Paragrafo 10.7 abbiamo appreso che il modulo del momento risultante agente su un punto materiale è dato dall'Equazione 10.25:

$$\tau_{\text{ris}} = I\alpha$$

dove I è il momento d'inerzia e α l'accelerazione angolare. È rilevante che questo risultato si applichi pure a un corpo rigido di forma arbitraria ruotante attorno a un asse fisso, poiché il corpo può essere considerato come un numero infinito di masse elementari di dimensioni infinitesimali, ciascuna ruotante su una circonferenza attorno all'asse di rotazione. L'importante e sorprendentemente semplice risultato dato da $\tau_{\text{ris}} = I\alpha$ è in totale accordo con le osservazioni sperimentali. La sua semplicità è il risultato di come è descritto il moto.

Sebbene i punti di un corpo rigido che ruoti attorno a un asse possano non essere soggetti alla stessa forza, accelerazione lineare, e velocità lineare, tuttavia ogni punto del corpo ha in un certo istante la stessa accelerazione angolare e velocità angolare. Quindi, a un certo istante un corpo rigido come una ruota è caratterizzato da valori specifici per l'accelerazione angolare, il momento risultante delle forze, e la velocità angolare.

TABELLA 10.2 Momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi

Anello o guscio cilindrico $I_{CM} = MR^2$		Cilindro cavo $I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$	
Cilindro pieno o disco $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$		Piastra rettangolare $I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$	
Sbarretta sottile (asse centrale) $I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$		Sbarretta sottile (asse a un estremo) $I_{CM} = \frac{1}{3} ML^2$	
Sfera piena $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$		Guscio sferico sottile $I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$	

La specifica forma di I dipende dall'asse di rotazione e dalla forma e dimensione del corpo. I momenti d'inerzia dei corpi rigidi possono essere calcolati con i metodi del calcolo integrale. La Tabella 10.2 riporta i momenti d'inerzia di un certo numero di corpi attorno a particolari assi. In tutti i casi si può notare che I è proporzionale alla massa dell'oggetto e al quadrato di un termine geometrico.

Esempio 10.12 Accelerazione angolare di una carrucola

Una carrucola, di raggio R , massa M e momento d'inerzia I , è montata su un asse orizzontale senza attrito, come in Figura 10.27. Tramite una fune, di peso trascurabile, avvolta intorno alla carrucola, è sospeso un corpo di massa m . Calcolare l'accelerazione lineare del corpo sospeso, l'accelerazione angolare della carrucola e la tensione della fune.

Ragionamento e Soluzione Il momento della forza che agisce sulla carrucola rispetto all'asse di rotazione è $\tau = TR$, dove T è la tensione della fune. Il peso della carrucola e la reazione dovuta all'asse hanno rette di azione passanti per l'asse, e quindi hanno momento nullo. Essendo $\tau = I\alpha$ si ha

$$\tau = I\alpha = TR$$

$$(1) \quad \alpha = \frac{TR}{I}$$

d'inerzia $I = 0.0900 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La massa sospesa è $m = 0.500 \text{ kg}$. Calcolare la tensione della fune e l'accelerazione angolare della carrucola. Risposta 3.27 N; 10.9 rad/s^2

Applichiamo ora la seconda legge di Newton alla massa m , facendo uso del diagramma delle forze (Fig. 10.27):

$$\sum F_y = T - mg = -ma$$

$$(2) \quad a = \frac{mg - T}{m}$$

L'accelerazione lineare della massa sospesa è uguale a quella di un punto che si trova sul bordo della carrucola, e quindi l'accelerazione angolare della carrucola è $\alpha = Ra$. Facendo uso di questo fatto, e delle (1) e (2) si ha

$$(3) \quad a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

$$(4) \quad T = \frac{mg}{1 + mR^2/I}$$

Analogamente, ricavando a e α si ha

$$\alpha = \frac{g}{1 + I/mR^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + I/mR}$$

ESERCIZIO 12 La carrucola di Figura 10.27 è un disco di massa $M = 2.00 \text{ kg}$, raggio $R = 30.0 \text{ cm}$ e momento

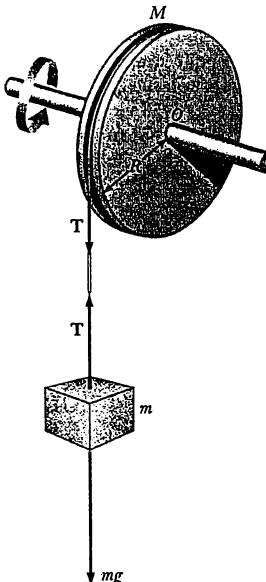


Figura 10.27 (Esempio 10.12) La fune a cui è sospesa m è avvolta intorno alla carrucola, e genera una coppia rispetto all'asse passante per O .

Esempio 10.13 La sbarretta che ruota (rivisitazione)

Si consideri una sbarretta di lunghezza L e massa M , libera di ruotare intorno ad un piolo senza attrito (Fig. 10.28). La sbarretta viene lasciata libera, nella posizione orizzontale. (a) Qual è la velocità angolare della sbarretta nella posizione più bassa?

Ragionamento e Soluzione Il problema può essere risolto facilmente considerando l'energia meccanica del sistema. Quando la sbarretta è nella posizione orizzontale, non ha energia cinetica. La sua energia potenziale, misurata relativamente alla posizione più bassa del centro di massa (O') è $MgL/2$. Quando la sbarretta raggiunge la posizione più bassa, l'unica energia è l'energia cinetica rotazionale, $\frac{1}{2}I\omega^2$, dove I è il momento d'inerzia relativo al piolo. Essendo $I = \frac{1}{3}ML^2$ (Tab. 10.2), e poiché l'energia meccanica si conserva, si ha

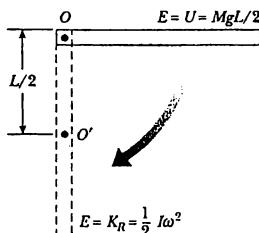


Figura 10.28 (Esempio 10.13) Una sbarretta rigida omogenea impennata in O ruota nel piano verticale sotto l'azione della forza di gravità.

$$\frac{1}{2} MgL = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2\right) \omega^2$$

Soluzione

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v_{CM} = r\omega = \frac{L}{2} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{3gL}$$

- (b) Determinare la velocità lineare del centro di massa e dell'estremo della sbarretta nella posizione più bassa.

L'estremità della sbarretta ha velocità uguale a $2v_{CM} = \sqrt{3gL}$.

Lavoro ed energia nel moto rotatorio

Consideriamo un corpo rigido che possa ruotare intorno a un asse passante per il punto O (Fig. 10.29), e supponiamo che una sola forza esterna F sia applicata nel punto P . Il lavoro compiuto da F , quando il corpo ruota di un angolo $d\theta$ intorno all'asse (ed il punto P si sposta di un tratto $ds = r d\theta$) è dato da

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F \sin \phi) r d\theta$$

dove $F \sin \phi$ è la componente tangenziale di F , cioè la componente di F nella direzione dello spostamento ds . Si noti, dalla Figura 10.29, che la componente radiale di F non compie lavoro, poiché è sempre perpendicolare allo spostamento.

Poiché il modulo del momento di F rispetto all'origine è stato definito dall'espressione $rF \sin \phi$, il lavoro dW relativo a una rotazione infinitesima $d\theta$, può essere espresso come

$$dW = \tau d\theta \quad [10.35]$$

Il lavoro compiuto nell'unità di tempo si ottiene dall'Equazione 10.35 dividendo entrambi i membri per dt :

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \quad [10.36]$$

La grandezza dW/dt non è altro che la potenza istantanea P , ed essendo $d\theta/dt = \omega$, l'Equazione 10.36 si riduce a

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega \quad [10.37]$$

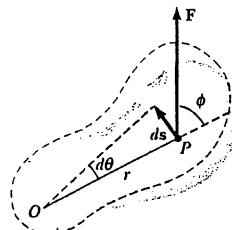


Figura 10.29 Un corpo rigido ruota intorno a un asse passante per O sotto l'azione di una forza esterna F applicata in P .

- Potenza fornita a un corpo rigido

Questa espressione è analoga a $P = Fv$, valida nel caso del moto rettilineo, e l'espressione $dW = \tau d\theta$ è analoga a $dW = F_x dx$.

Abbiamo visto, nel moto lineare, che il concetto di energia, ed in particolare il teorema dell'energia cinetica, è estremamente utile per descrivere il moto di un sistema. Il concetto di energia è anche molto utile nell'analisi del moto rotatorio. Da quello che abbiamo visto nel caso del moto lineare, c'è da aspettarsi che per il moto rotatorio di un oggetto simmetrico (quale per esempio una ruota) intorno a un asse fisso, il lavoro svolto dalle forze esterne sia uguale alla variazione di energia cinetica rotazionale. Per verificare ciò, partiamo dall'equazione $\tau = I\alpha$. Questa può essere scritta

$$\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

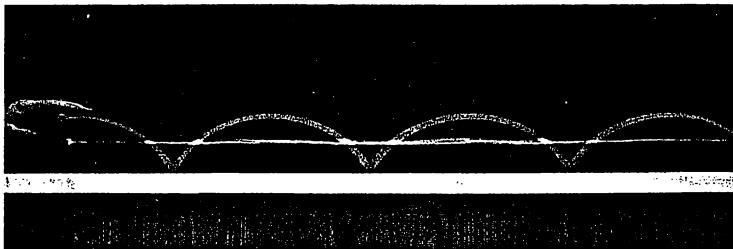


Figura 10.30 Due lampade, una al centro e l'altra al bordo del cilindro che rotola, visualizzano le diverse traiettorie dei due punti: il centro si muove in linea retta, come indica la linea verde mentre il punto sul bordo percorre una cicloide, come indica la curva rossa (Henry Leap e Jim Lehman, per gent. conc.)

e moltiplicando per $d\theta$

$$\tau d\theta = dW = I\omega d\omega$$

Integrando questa espressione, con I costante, si ha per il lavoro totale

Teorema dell'energia cinetica per il moto rotazionale

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2 \quad [10.38]$$

Moto di rotolamento di un corpo rigido

Si consideri un cilindro che rotola lungo un percorso rettilineo (Fig. 10.30). Il centro di massa si sposta lungo una linea retta, mentre un punto sul bordo percorre una traiettoria più complessa, che corrisponde ad una cicloide. Si assume, inoltre, che il cilindro di raggio R sia uniforme e rotoli su una superficie con attrito. Mentre il cilindro ruota di un angolo θ , il suo centro di massa si sposta di un tratto $s = R\theta$, per cui la velocità e l'accelerazione del centro di massa per un moto di puro rotolamento sono

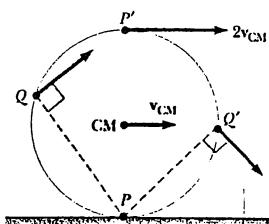


Figura 10.31 Istante per istante tutti i punti di un corpo che rotola si muovono in direzione perpendicolare al segmento che li congiunge al punto di contatto P . Se la velocità del centro è v_{CM} quella del punto P' è $2 v_{CM}$.

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad [10.39]$$

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha \quad [10.40]$$

I vettori velocità per vari punti del cilindro rotolante sono mostrati in Figura 10.31. Si noti che in ogni punto la velocità è perpendicolare alla linea che unisce il punto al punto di contatto P . In ciascun istante, il punto P è fermo rispetto alla superficie, poiché non si verifica slittamento.

Un punto generico sulla superficie del cilindro, come ad esempio il punto Q , ha una componente sia orizzontale che verticale della velocità. Inoltre, i punti P e P' ed il punto corrispondente al centro di massa sono singolari e vanno trattati con un interesse particolare. Rispetto alla superficie su cui il cilindro si muove, il centro di massa si sposta con la velocità $v_{CM} = R\omega$, mentre il punto di contatto P ha velocità nulla. Il punto P' ha una velocità uguale a $2 v_{CM} = 2 R\omega$ poiché tutti i punti del cilindro hanno la stessa velocità angolare.

L'energia totale del cilindro può essere scritta come

$$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad [10.41]$$

dove I_p è il momento di inerzia rispetto all'asse passante per P .

Un utile teorema noto come **teorema degli assi paralleli**, ci permette di calcolare il momento di inerzia I_p , rispetto a qualsiasi asse parallelo all'asse passante per il centro di massa del corpo. Il teorema **afferma che**

$$I_p = I_{CM} + MR^2 \quad [10.42]$$

dove R è la distanza dal centro di massa all'asse parallelo, ed M è la massa totale del corpo. Sostituendo questa espressione nell'Equazione 10.41 abbiamo

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

$$\longrightarrow K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad [10.43]$$

dove si è usato $v_{CM} = R\omega$.

L'Equazione 10.43 può essere letta nel seguente modo: il primo termine, $\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$, rappresenta l'energia cinetica rotazionale rispetto al centro di massa, il secondo, $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$, rappresenta l'energia che il cilindro avrebbe se traslassasse senza ruotare. Possiamo così concludere che **l'energia cinetica di un oggetto in moto di puro rotolamento è la somma dell'energia cinetica rotazionale rispetto al centro di massa e dell'energia cinetica traslazionale del centro di massa**.

La conservazione dell'energia può essere usata per trattare vari problemi relativi al rotolamento di un corpo rigido su un piano inclinato scabro. Assumiamo che il corpo rigido di Figura 10.32 sia lasciato partire da fermo dalla sommità del piano inclinato, e che non slitti. Il moto di rotolamento è possibile solo se la forza d'attrito tra il piano ed il corpo può produrre un adeguato momento rispetto al centro di massa; anche se vi è attrito non vi è perdita di energia meccanica, poiché il punto di contatto del corpo è ad ogni istante fermo rispetto al piano; al contrario se il corpo slittasse l'attrito provocherebbe una continua perdita di energia meccanica.

- **Energia cinetica totale di un corpo che rotola**

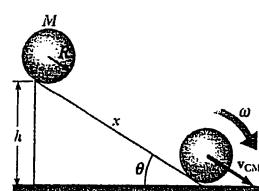


Figura 10.32 L'energia meccanica di un oggetto sferico che rotola lungo un piano inclinato si conserva se l'oggetto non slitta.

Fisica ragionata 6

Una dimostrazione molto comune in aula è quella di iniziare a ruotare su uno sgabello girevole tenendo nelle mani, con le braccia allargate, dei pesi e avvicinandoli successivamente al corpo. Il risultato è quello di un aumento della velocità angolare, secondo il principio della conservazione del momento angolare (vedi Fig. 10.33). Immaginiamo di eseguire questa dimostrazione, e di muovere i pesi verso l'interno dimezzando il momento di inerzia, e, quindi, raddoppiando la velocità angolare. Se consideriamo l'energia cinetica rotazionale, vediamo che in questo caso l'energia è *raddoppiata*. Quindi, il momento angolare si conserva, ma non l'energia cinetica. Da dove proviene questa energia supplementare?

Ragionamento Mentre ruoti con i pesi nelle mani, vi è una forza di tensione nelle tue braccia che permette ai pesi di ruotare su una traiettoria circolare. Quando avvicini i pesi, questa forza delle tue braccia svolge un lavoro sui pesi, poiché essi si muovono con uno spostamento radiale. Quando la velocità angolare aumenta in risposta ai pesi che vanno verso l'interno, tu devi applicare una forza che va sempre più aumentando al muoversi dei pesi su traiettorie circolari di raggio sempre più piccolo. Quindi, il lavoro che tu compi nell'avvicinare i pesi aumenta con l'avvicinamento.

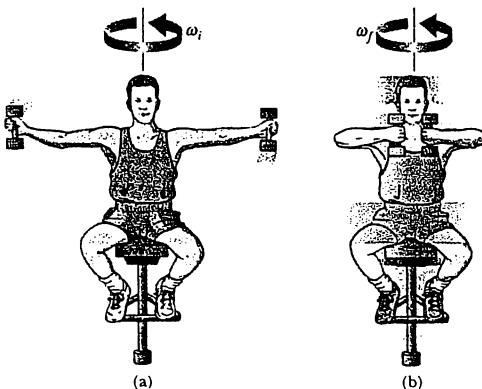


Figura 10.33 (Fisica Ragionata 6) (a) Lo studente possiede una velocità angolare iniziale mentre tiene nel modo mostrato due masse. (b) Quando le masse vengono avvicinate al corpo, la velocità angolare del sistema aumenta.

narsi di essi. È questo lavoro che tu compi con le tue braccia che fa aumentare l'energia cinetica rotazionale del sistema. Tu puoi produrre questo lavoro traendo lo dall'energia potenziale immagazzinata nel tuo corpo nei precedenti pasti, cosicché trasformi energia potenziale immagazzinata nel tuo corpo in energia cinetica rotazionale.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Supponiamo che una matita sia equilibrata perfettamente su un tavolo privo di attrito. Se essa cade, qual è la traiettoria seguita dal centro di massa della matita?

PROBLEMA CONCETTUALE 5

In alcune gare motociclistiche, i piloti guidano su piccole collinette, e le moto saltano in aria per un breve tempo. Se il motociclista lascia l'acceleratore aperto mentre abbandona la collinetta e vola per aria, la moto tende a tenere il muso in su. Perché accade ciò?

PROBLEMA CONCETTUALE 6

Supponiamo che tu stia progettando una macchina per una gara a ruota libera, le macchine in questa gara non hanno motori, esse semplicemente vengono giù a ruota libera da una collina. Vorrai delle ruote grandi o piccole? Vorrai delle ruote piene come dei dischi oppure con dei cerchioni? Le ruote dovranno essere pesanti oppure leggere?



(Problema concettuale 5)
(Tom Raymond/Tony Stone Images)

Esempio 10.14 Una sfera rotola in fondo a un piano inclinato

Se l'oggetto di Figura 10.32 è una sfera piena, calcolare la velocità del suo centro di massa quando arriva in basso e determinare il modulo dell'accelerazione lineare del centro di massa.

Soluzione Per una sfera piena uniforme, $J_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$, e quindi, la conservazione dell'energia meccanica dà

$$v_{CM} = \left(\frac{\frac{2gh}{1 + \frac{\frac{2}{5}MR^2}{MR^2}}}{\frac{2}{5}MR^2} \right)^{1/2} = (\frac{10}{7}gh)^{1/2}$$

Lo spostamento verticale è in relazione allo spostamento x lungo il piano inclinato attraverso l'espressione $h = x \sin \theta$.

Quindi, dopo aver quadrato ambedue i membri, possiamo esprimere l'equazione precedente come

$$v_{CM}^2 = \frac{10}{7} g x \sin \theta$$

Confrontandola con l'espressione familiare della cinematica, $v_{CM}^2 = 2a_{CM}x$, vediamo che l'accelerazione del centro di massa è

$$a_{CM} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

Questi risultati sono piuttosto interessanti in quanto sia la velocità che l'accelerazione del centro di massa

risultano *indipendenti* sia dalla massa che dal raggio della sfera! Cioè, tutte le sfere piene omogenee subiscono lungo un piano inclinato la stessa velocità e accelerazione.

Se ripetiamo i calcoli per una sfera cava, un cilindro pieno, o un cerchio, otterremo risultati simili. Il fattore costante che appare nell'espressione per v_{CM} e a_{CM} dipende soltanto dal momento d'inerzia rispetto al centro di massa del particolare corpo. In tutti i casi, l'accelerazione del centro di massa risulta *minore* di $g \sin \theta$, il valore che si sarebbe ottenuto se il piano fosse stato privo di attrito e non fosse avvenuta la rotazione.

ESERCIZIO 13 Il centro di massa di una palla da baseball (raggio = 3.8 cm) si muove a 38 m/s. La palla ruota attorno a un suo asse passante per il suo centro di massa con una velocità angolare di 125 rad/s. Calcolare il rapporto fra l'energia rotazionale e l'energia traslazionale. Trattare la palla come una sfera uniforme. Risposta 1/160

ESERCIZIO 14 Una ruota di automobile, considerata come un disco pieno, ha un raggio di 25 cm e una massa di 6.0 kg. Trovare la sua energia cinetica rotazionale quando ruota attorno a un asse passante per il suo centro di massa con una velocità angolare di 2 giri/s. Risposta 15 J

SOMMARIO

La velocità angolare istantanea di una particella che percorre una circonferenza o di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso è

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad [10.3]$$

dove ω è misurata in rad/s, oppure in s⁻¹.

L'accelerazione angolare istantanea di un corpo che ruota è data da

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad [10.5]$$

ed è misurata in rad/s², oppure in s⁻².

Quando un corpo rigido ruota intorno a un asse fisso, ogni parte del corpo ha la stessa velocità angolare e la stessa accelerazione angolare. Differenti parti del corpo, invece, hanno diverse velocità ed accelerazioni lineari.

Se una particella od un corpo ruota intorno a un asse fisso con accelerazione angolare costante, si applicano equazioni cinematiche analoghe a quelle del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad [10.6]$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad [10.7]$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad [10.8]$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t \quad [10.9]$$

Quando un corpo rigido ruota intorno a un asse fisso, la velocità angolare e l'accelerazione angolare sono legate alla velocità lineare ed alla accelerazione tangenziale dalle relazioni

$$v = r\omega \quad [10.10]$$

$$a_t = r\alpha \quad [10.11]$$

Il momento d'inerzia di un sistema di particelle è dato da

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad [10.14]$$

Se un corpo rigido ruota intorno a un asse fisso con velocità angolare ω la sua energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad [10.15]$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione.

Il momento, τ , di una forza F rispetto a una origine in un sistema di riferimento inerziale è definito

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad [10.17]$$

Dati due vettori A e B , il loro prodotto vettoriale, $A \times B$, è un vettore C di modulo

$$C = |AB| \sin \theta \quad [10.19]$$

dove θ è l'angolo tra A e B . La direzione di C è perpendicolare al piano formato da A e B , e il verso è definito dalla regola della mano destra. Alcune proprietà del prodotto vettoriale implicano $A \times B = -B \times A$ e $A \times A = 0$.

Il momento risultante delle forze esterne agente su un punto materiale è proporzionale all'accelerazione angolare del punto materiale, e la costante di proporzionalità è il momento d'inerzia, I :

$$\sum \tau = I\alpha \quad [10.22]$$

Il momento angolare, L , di un punto materiale con quantità di moto $p = mv$ è

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad [10.23]$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione del punto materiale relativo a un'origine in un riferimento inerziale. Se ϕ è l'angolo tra \mathbf{r} e \mathbf{p} , il modulo di \mathbf{L} è

$$L = mvr \sin \phi = I\omega \quad [10.24]$$

Il momento risultante delle forze agente su un punto materiale è uguale alla derivata temporale del suo momento angolare:

$$\sum \tau_{\text{est}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad / \quad [10.27]$$

La legge di conservazione del momento angolare afferma che il momento angolare totale di un sistema si conserva se il momento risultante delle forze esterne agente sul sistema è nullo:

$$\sum \tau_{\text{est}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \text{ quindi} \quad [10.29]$$

$$\mathbf{L} = \text{costante} \quad [10.30]$$

Il momento angolare è una proprietà intrinseca di atomi, molecole, e dei loro costituenti. Tali sistemi hanno valori discreti (quantizzati) del momento angolare che sono multipli interi di $\hbar/2\pi$, dove \hbar è la costante di Planck.

L'energia cinetica totale di un corpo rigido, come un cilindro, che rotola su una superficie senza strisciare è uguale all'energia cinetica rotazionale relativa al centro di massa del corpo, $\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$, più l'energia cinetica traslazionale del centro di massa $\frac{1}{2} Mv_{CM}^2$.

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 \quad [10.43]$$

In questa espressione, v_{CM} è la velocità del centro di massa e l'uguaglianza $v_{CM} = R\omega$ vale per un moto di puro rotolamento.

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] In un registratore magnetico, il nastro viene tirato a velocità costante, dopo le testine di lettura e scrittura, dal meccanismo di trascinamento. Consideriamo la bobina dalla quale proviene il nastro (quando il nastro viene tirato, il raggio dell'avvolgimento restante diminuisce). Come varia il momento agente sulla bobina in funzione del tempo? Come varia la velocità angolare della bobina in funzione del tempo? Se il meccanismo di trascinamento viene improvvisamente invertito imprimendo così al nastro una grande forza, il nastro risulta più vicino a rompersi quando la bobina è quasi piena o quando è quasi vuota?
2. Se le ruote di una macchina vengono sostituite con ruote di grande diametro, varierà la lettura del tachimetro? Spiegare.
3. Qual è il modulo della velocità angolare, ω , della lancetta dei minuti in un orologio? Qual è la sua accelerazione angolare, $a\ddot{\theta}$?
4. Se un oggetto è in rotazione, deve necessariamente agire su di esso una coppia?
5. Per rendere stabile un elicottero in volo, ci devono essere due propulsori. Perché?
6. Il momento di inerzia di un oggetto dipende dalla scelta dell'asse di rotazione, così come viene suggerito dal teorema degli assi paralleli. Dimostrare che uno degli assi passanti per il centro di massa di un oggetto deve essere l'asse con il minimo momento di inerzia.
7. Supponiamo di prendere due uova dal frigorifero, uno sodo e l'altro fresco. Si vuol determinare quale dei due è sodo senza romperli. Ciò si può ottenere facendo ruotare le due uova su un piano e confrontando il loro moto rotatorio. Quale uovo ruoterà più velocemente? Quale ruoterà più uniformemente? Spiegare.
8. Una scala è appoggiata contro una parete. Provereste a salire in sicurezza la scala se vi si dicesse che il pavimento è senza attrito ma la parete è scabra, o se la parete è senza attrito e il pavimento è scabro?
9. Se una tuffatrice dal trampolino vuole compiere una rapida rotazione in volo, essa stringe le sue gambe al petto. Perché questa azione la fa ruotare più velocemente? Cosa deve fare per interrompere questa rotazione rapida?
10. Se la forza risultante agente su un sistema è nulla, è necessariamente vero che anche il momento risultante è nullo?
11. Perché un equilibrista sulla fune porta una lunga asta per aiutarsi a stare in equilibrio mentre cammina sulla fune?
12. Due sfere piene rotolano lungo un pendio, una grande e massiccia, l'altra piccola e leggera. Quale delle due raggiunge prima la base del pendio? Successivamente, facciamo rotolare una sfera grande di bassa densità e una sfera piccola di alta densità, avendo le due sfere la stessa massa. Quale delle due arriva prima in questo caso?
13. Consideriamo un oggetto a forma di cerchio che giace sul piano xy con la sua massa tutta concentrata sul suo bordo. In due esperimenti diversi, il cerchio viene messo in rotazione da un agente esterno con velocità angolare ω . In un esperimento, la rotazione avviene attorno all'asse z passante per il centro di massa. In un altro esperimento, la rotazione avviene attorno a un asse parallelo all'asse z passante per il punto P posto sul bordo del cerchio. Quale delle due rotazioni richiede maggior lavoro?
14. Il vettore \mathbf{A} è diretto nel verso negativo di y mentre il vettore \mathbf{B} è diretto nel verso negativo di x . Quali saranno le direzioni e i versi di (a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e di (b) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$?
15. Se il riscaldamento del globo terrestre continua oltre il prossimo secolo, è probabile che le calotte polari fondano e l'acqua si distribuisca in prossimità dell'equatore. Quanto ciò farebbe variare il momento d'inerzia della Terra? La lunghezza del giorno (una rivoluzione) aumenterebbe o diminuirebbe?

PROBLEMI

Paragrafo 10.2 Cinematica rotazionale

- ✓ 1. Qual è la velocità angolare in rad/s (a) della Terra nella sua orbita intorno al Sole (b) della Luna nella sua orbita intorno alla Terra?
- ✓ 2. Un aereo di linea arriva nella piazzola di parcheggio e spegne i motori. Il rotore di uno dei motori ha una velocità angolare iniziale in senso orario di 2000 rad/s. La rotazione del motore diminuisce con una accelerazione angolare di 80.0 rad/s². (a) Determinare la velocità angolare dopo 10.0 s. (b) Quanto tempo impiegherà il rotore per fermarsi?
- ✗  Un motore elettrico, che mantiene in rotazione una molla alla velocità di 100 giri/min, viene spento. Supponendo che la decelerazione di 2.00 rad/s² sia costante determinare: (a) il tempo impiegato dalla molla a fermarsi e (b) l'angolo, in radianti, percorso prima di arrestarsi.
- ✓ 4. Una centrifuga di laboratorio ruota alla frequenza di 3600 giri/min. Quando viene spenta, essa ruota 50 volte prima di fermarsi. Trovare l'accelerazione angolare costante della centrifuga.
- ✗  Un trapano da dentista parte da fermo con accelerazione angolare costante. Dopo 3.20 s esso gira alla frequenza di 2.51×10^4 giri/min. (a) Calcolare l'accelerazione angolare del trapano. (b) Determinare l'angolo (in radianti) di cui ruota il trapano durante questo tempo.
- ✓ La coordinata angolare di un punto sul bordo di una

ruota è data dalla relazione $\theta = 5.00 + 10.0t + 2.00t^2$, dove θ è in radianti e t in secondi. Si determinino la coordinata angolare, la velocità e l'accelerazione del punto per $t = 0$ e $t = 3$ s.

- ✓ 8. Il cestello di una lavatrice parte per il ciclo di centrifuga da fermo e raggiunge una frequenza di 5.00 giri/s in 8.00 s. A questo punto la persona addetta apre il coperchio e per sicurezza spegne la lavatrice. Il cestello rallenta e si ferma in 12.0 s. Quanti giri compie il cestello? Si assuma costante l'accelerazione mentre la macchina parte e si ferma.
9. Una ruota girando impiega 3.00 s per compiere 37.0 giri. La sua velocità angolare alla fine dell'intervallo di 3.00 s è 98.0 rad/s. Qual è l'accelerazione angolare costante della ruota?

Paragrafo 10.3 Relazioni fra grandezze angolari e lineari

- ✓ 10. Un lanciatore di disco accelera un disco da fermo ad una velocità di 25.0 m/s, imprimendo una rotazione di 1.25 giri. Se il disco percorre un arco di circonferenza di 1.00 m di raggio, determinare: (a) la velocità angolare finale del disco, (b) la sua accelerazione angolare, considerata costante, (c) il tempo di accelerazione.
11. Una macchina accelera uniformemente dalla quiete e raggiunge una velocità di 22.0 m/s in 9.00 s. Se il diametro delle ruote è 58.0 cm, trovare (a) il numero di giri che la ruota compie durante questo moto, assumendo che non slitti. (b) Qual è la velocità di rotazione finale di una ruota in giri al secondo?
12. Un disco, di 8.00 cm di raggio, ruota intorno al suo asse, facendo 1200 giri/minuto. Calcolare (a) la velocità angolare del disco, (b) la velocità lineare di un punto che si trova a 3.00 cm dall'asse, (c) l'accelerazione radiale di un punto che si trova sul bordo del disco e (d) lo spazio percorso, in 2.00 s, da tale punto.
13. Un blocco di 6.00 kg viene lasciato libero dalla posizione A lungo una profilo privo di attrito, mostrato in Figura P10.12. Determinare le componenti radiale e tangenziale dell'accelerazione del blocco nella posizione P.

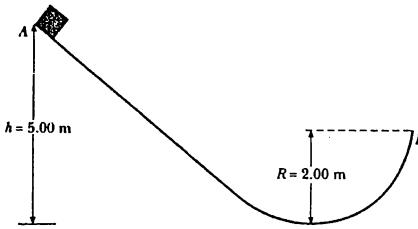
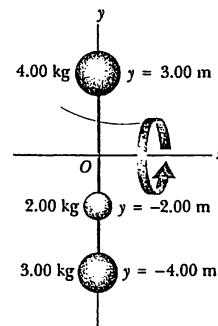


Figura P10.12

14. Una macchina su una pista circolare (non inclinata) accelera uniformemente dalla quiete con una accelerazione tangenziale di 1.70 m/s². La macchina compie un quarto di giro prima di uscire di strada. Determinare, con questi dati, il coefficiente di attrito statico fra la macchina e la pista.

Paragrafo 10.4 Energia cinetica rotazionale

15. Tre particelle sono collegate da sbarrette rigide, di massa trascurabile, poste lungo l'asse y (Figura P10.14). Se il sistema ruota intorno all'asse x con una velocità di 2.00 rad/s, calcolare (a) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione e l'energia cinetica totale, usando l'espressione $\frac{1}{2}I\omega^2$ e (b) la velocità lineare di ciascuna particella e l'energia cinetica totale, usando ora l'espressione $\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$.



16. Le quattro particelle di Figura P10.15 sono unite da sbarrette rigide di massa trascurabile. Se il sistema ruota nel piano xy intorno all'asse z con una velocità angolare di 6.00 rad/s, calcolare (a) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse z e (b) l'energia cinetica del sistema. Il centro del rettangolo coincide con l'origine delle coordinate.

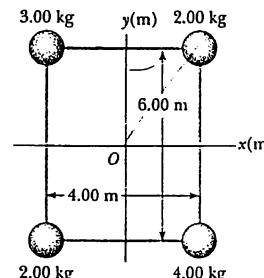


Figura P10.15

Paragrafo 10.5 Momento delle forze e prodotto vettoriale

16. La canna da pesca mostrata in Figura P10.16 è inclinata sull'orizzontale di un angolo di 20.0° . Qual è il momento esercitato dal pesce rispetto a un asse perpendicolare alla pagina e passante attraverso la mano del pescatore?

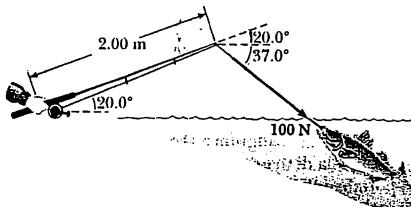


Figura P10.16

17. Trovare il momento risultante sulla ruota in Figura P10.17, rispetto all'asse passante per O , se $a = 10.0\text{ cm}$ e $b = 25.0\text{ cm}$.

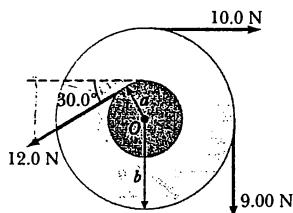


Figura P10.17

18. Dati i due vettori $M = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $N = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, si determini il prodotto vettoriale $M \times N$.

19. Dati i due vettori $A = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $B = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ si trovi (a) $A \times B$ e (b) l'angolo tra A e B .

20. Una forza $F = 2.00\mathbf{i} + 3.00\mathbf{j}$ (in newton) viene applicata a un oggetto che può ruotare attorno a un asse fisso, coincidente con l'asse z del sistema di riferimento. Se la forza viene applicata al punto $\mathbf{r} = (4.00\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j} + 0\mathbf{k})\text{m}$, si determini: (a) il modulo e (b) la direzione del vettore momento della forza calcolato rispetto all'asse z .

21. Uno studente afferma di aver trovato un vettore A tale che $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times A = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$. Credi a questa affermazione? Spiegare.

Paragrafo 10.6 Equilibrio di un corpo rigido

22. Una scala che pesa 400 N ed è lunga 10.0 m è appoggiata contro una parete verticale liscia. Una persona che pesa 800 N sta sulla scala a una distanza di 2.00 m dall'estremità inferiore. Il piede della scala è a 8.00 m

dall'estremità inferiore della parete. Tracciare un diagramma di corpo libero della scala. Calcolare la forza applicata dalla parete e la forza normale esercitata dal pavimento sulla scala.

23. Un'automobile di 1500 kg ha un passo (distanza fra gli assi delle ruote) di 3.00 m . Il centro di massa della macchina si trova sulla linea centrale in un punto a 1.20 m dietro l'asse anteriore. Trovare la forza esercitata dal suolo su ciascuna ruota.

24. Una tavola uniforme di lunghezza 6.00 m e massa 30.0 kg è posta orizzontalmente su un ponteggi, con 1.50 m della tavola che sporge oltre un estremo del ponteggi. Tracciare un diagramma di corpo libero della tavola. Quanto può inoltrarsi sulla parte sporgente un imbianchino di massa 70.0 kg prima di ribaltarsi?

25. Un palo uniforme di 1200 N è tenuto da un cavo come in Figura P10.25. Il palo può ruotare attorno a un asse passante per il suo estremo in basso, e tiene sospeso un oggetto di 2000 N . Trovare la tensione del cavo e la componente della forza di reazione sul palo dovuta al suolo.

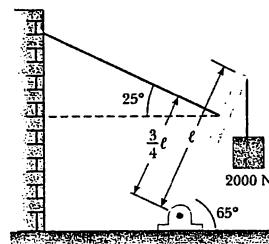


Figura P10.25

26. Una gru di 3000 kg sostiene un carico di $10\ 000\text{ kg}$ come in Figura P10.26. La gru è girevole attorno all'asse A privo di attrito e viene tenuta ferma dal supporto liscio B . Trovare le forze di reazione in A e in B .

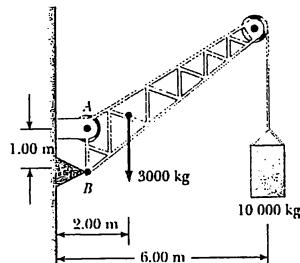


Figura P10.26

Paragrafo 10.7 Relazione fra momento delle forze e accelerazione angolare



- Un modellino d'aereo di 0.750 kg è trattenuto da un filo che gli consente di volare descrivendo una circonferenza di 30.0 m di raggio. Il motore dell'aereo fornisce una spinta di 0.800 N perpendicolarmente al filo. Determinare: (a) il momento della forza rispetto al centro della circonferenza, determinato dalla spinta del motore, (b) l'accelerazione angolare dell'aereo quando vola su un piano orizzontale, (c) l'accelerazione lineare dell'aereo tangente al suo percorso di volo.
28. L'effetto risultante di una forza esterna e dell'attrito è un momento di $36.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ applicato ad una ruota che gira intorno al suo asse. La forza esterna agisce per 6.00 s e, in questo intervallo di tempo, la velocità angolare della ruota passa da 0 a 10.0 rad/s . A questo istante, la forza esterna viene eliminata, e la ruota si ferma in 60.0 s. Calcolare (a) il momento d'inerzia della ruota, (b) il momento dovuto all'attrito e (c) il numero di giri fatti dalla ruota.

Paragrafo 10.8 Momento angolare

29. Un'asta rigida leggera lunga 1.00 m ruota nel piano xy (Fig. P10.29) intorno a un perno posto al suo centro, avendo due particelle di massa 4.00 kg e 3.00 kg attaccate ai suoi estremi; si determini il momento angolare del sistema rispetto all'origine se la velocità delle particelle è 5.00 m/s .

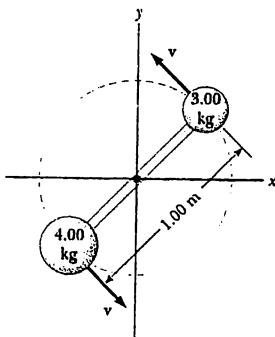


Figura P10.29

30. Una particella di 1.50 kg si muove sul piano xy con velocità $\mathbf{v} = (4.20\mathbf{i} - 3.60\mathbf{j}) \text{ m/s}$. Si determini il corrispondente momento angolare per un vettore posizione $\mathbf{r} = (1.50\mathbf{i} + 2.20\mathbf{j}) \text{ m}$.

31. La posizione di una particella di 2.00 kg di massa, in funzione del tempo, è individuata dal vettore $\mathbf{r} = (6.00\mathbf{i} + 5.00t\mathbf{j}) \text{ m}$. Si determini, in funzione del

tempo, il momento angolare della particella.

32. Un aereo di massa $m = 12\,000 \text{ kg}$ vola ad un'altezza di 10.0 km con una velocità, rispetto al suolo, parallela al terreno e costante di 175 m/s : (a) quanto vale il suo momento angolare rispetto a un osservatore posto sul terreno esattamente sotto l'aereo? (b) Questo valore cambia finché l'aereo continua il suo moto rettilineo uniforme?

Paragrafo 10.9 Conservazione del momento angolare

Paragrafo 10.10 Quantizzazione del momento angolare (Facoltativo)

33. Una palla di massa m è fissata all'estremità di un'asta portabandiera la quale è connessa alla parete di una grande costruzione nel punto P mostrato in Figura P10.33. La lunghezza dell'asta è l ed essa forma un angolo θ con l'orizzontale. Se la palla si stacca e inizia a cadere, determinare il momento angolare (in funzione del tempo) della palla rispetto al punto P . Si trascuri la resistenza dell'aria.

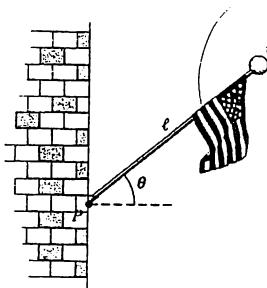


Figura P10.33

34. Una studentessa siede su uno sgabello ruotante tenendo due pesi, ciascuno di 3.00 kg. Quando le sue braccia sono estese orizzontalmente, i pesi si trovano a 1.00 m dall'asse di rotazione ed essa ruota con una velocità angolare di 0.750 rad/s . Il momento d'inerzia della studentessa più lo sgabello è $3.00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e si assume costante. La studentessa avvicina i pesi orizzontalmente a 0.300 m dall'asse di rotazione. (a) Trovare la nuova velocità angolare della studentessa. (b) Trovare l'energia cinetica della studentessa prima e dopo lo spostamento dei pesi.

35. Una donna, la cui massa è 60.0 kg , sta sul bordo di una piattaforma rotante orizzontale di momento d'inerzia $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e raggio 2 m. Il sistema è inizialmente fermo e la piattaforma può ruotare senza attrito intorno ad un asse fisso verticale passante per il suo centro.

La donna si sposta successivamente lungo il bordo in senso orario ad una velocità costante rispetto al suolo di 1.50 m/s. (a) In quale verso e con quale velocità angolare ruoterà la piattaforma? (b) Quanto lavoro ha dovuto fare la donna per mettere in moto il sistema?

36. La pallina di Figura 10.25 ha una massa di 0.120 kg. La distanza della pallina dal centro di rotazione è inizialmente 40.0 cm, e la pallina si muove con una velocità di 80.0 cm/s. La fune viene tirata dal basso, attraverso il foro nel tavolo senza attrito, di 15 cm. Determinare il lavoro fatto sulla pallina. (Suggerimento: si consideri la variazione di energia cinetica).
37. Un dischetto di massa 80.0 g e raggio 4.00 cm scivola su un tavolo ad aria compressa alla velocità di 1.50 m/s come mostrato in Figura P10.37a. Esso subisce un urto radente con un secondo dischetto di raggio 6.00 cm e massa 120 g (inizialmente fermo) in modo tale che i loro bordi si toccano appena. I dischetti dopo l'urto rimangono attaccati l'uno all'altro e cominciano a ruotare (Fig. P10.37b). (a) Qual è il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa? (b) Qual è la velocità angolare intorno al centro di massa?

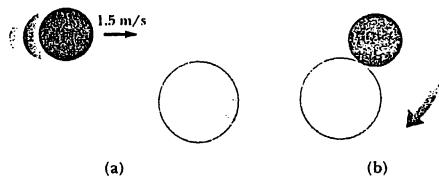


Figura P10.37

38. Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, l'elettrone si muove attorno al protone su un'orbita circolare di raggio 0.529×10^{-10} m; assumendo il suo momento angolare pari ad $h/2\pi$, si calcoli (a) la velocità dell'elettrone, (b) la sua energia cinetica e (c) la sua velocità angolare.

Paragrafo 10.11 Rotazione di corpi rigidi (Facoltativo)

39. Attenzione! Dietro front! Calcolare l'ordine di grandezza del momento di inerzia del tuo corpo quando stai in piedi e giri attorno a un asse passante dalla cima della tua testa e dal punto centrale fra i tuoi fianchi. Nella soluzione indica le grandezze misurate o stimate e il loro valore.
40. Una giostra orizzontale di 800 N e di raggio 1.50 m viene messa in moto da ferma da una forza costante orizzontale di 50.0 N applicata tangenzialmente al cilindro. Trovare l'energia cinetica del cilindro pieno dopo 3.00 s.

 Un cilindro con una massa di 10.0 kg rotola senza strisciare. A un certo istante il suo centro di massa ha una velocità di 10.0 m/s, determinare (a) l'energia cinetica traslazionale del suo centro di massa, (b) l'energia cinetica rotazionale rispetto al suo centro di massa, e (c) la sua energia cinetica totale.

42. Si considerino due masse collegate da una fune che passa attraverso una carrucola di momento d'inerzia I rispetto al suo asse di rotazione, come in Figura P10.42. La fune non slitta sulla carrucola, e il sistema è lasciato libero da fermo. Si usi il principio di conservazione dell'energia per trovare la velocità delle masse dopo che m_2 è scesa di h , e la velocità angolare della carrucola nello stesso istante.

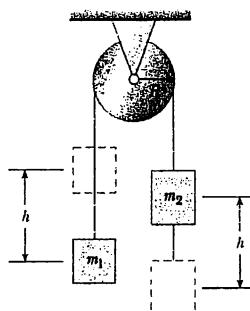


Figura P10.42

 Una sbarretta uniforme di lunghezza L e massa M è libera di ruotare attorno a un perno senza attrito posto a un suo estremo, come in Figura P10.43. La sbarretta viene abbandonata da ferma in posizione orizzontale. Quali sono l'accelerazione angolare *iniziale* e l'accelerazione lineare *iniziale* dell'estremità destra della sbarretta?

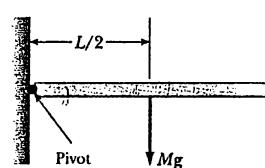


Figura P10.43

44. Una ruota di bicicletta ha un diametro di 64.0 cm e una massa di 1.80 kg. La bicicletta è posta, tramite un supporto stazionario, su dei rulli e una forza di resistenza è posta al bordo della ruota. (Si assuma che la

ruota sia un cerchio con tutta la massa concentrata sul bordo.) Quale forza si dovrebbe applicare alla catena che passa su una ruota dentata di 9.00 cm di diametro per trasmettere alla ruota una accelerazione di 4.50 rad/sec²? Quale, se si passa a una ruota dentata di 5.60 cm di diametro?

- X** 47. (a) Un disco pieno omogeneo di raggio R e massa M è libero di ruotare, senza attrito, intorno ad un perno passante per il bordo del disco (Fig. P10.45). Se il disco è inizialmente in quiete nella posizione indicata a tratto continuo, qual è la velocità del suo centro di massa quando raggiunge la posizione indicata a tratteggio? (b) Qual è la velocità del punto più in basso del disco, nella posizione indicata con la linea tratteggiata? (c) Ripetere la parte (a) del problema usando come oggetto un anello omogeneo, invece del disco.

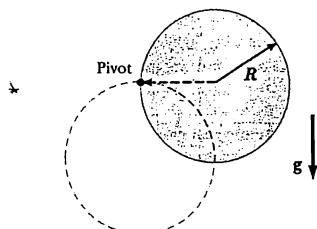


Figura P10.45

46. Un blocco di massa $m_1 = 2.00 \text{ kg}$ e un blocco di massa $m_2 = 6.00 \text{ kg}$ sono collegati da una fune leggera tramite una puleggia a forma di disco avente raggio $R = 0.25 \text{ m}$ e massa $M = 10.0 \text{ kg}$. Inoltre, esse possono muoversi su un blocco a forma di cuneo con un angolo $\theta = 30.0^\circ$ come in Figura P10.46. Il coefficiente di attrito dinamico è 0.360 per ambedue i blocchi. Tracciare i diagrammi di corpo libero per ambedue i blocchi e per la puleggia. Determinare (a) l'accelerazione dei due blocchi, e (b) la tensione della fune su ambedue i lati della puleggia.

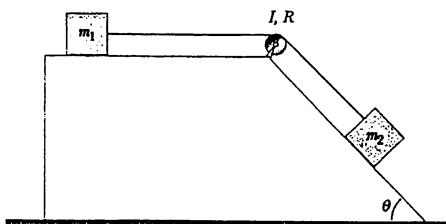


Figura P10.46

- A** 48. Un barattolo contenente un condensato di funghi ha una massa di 215 g, altezza 10.8 cm, e diametro esterno 6.38 cm. Esso è posto fermo in cima a un piano inclinato lungo 3.00 m, che forma un angolo di 25.0° con l'orizzontale. Assumendo la conservazione dell'energia, calcolare il momento di inerzia del barattolo se esso impiega 1.50 s per raggiungere la base del piano inclinato.

Problemi generali

48. Un motore elettrico è in grado di accelerare una ruota gigante (ruota di Ferris) con un momento d'inerzia $I = 20\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, da ferma ad una velocità di 10.0 giri/min in 12.0 s. Quando il motore viene spento, la ruota rallenta lentamente da 10 a 8.00 giri/min in 10.0 s, per effetto delle forze d'attrito. Si determinino: (a) la coppia esercitata dal motore per portare la ruota ad una velocità di 10.0 giri/min, (b) la potenza necessaria per mantenere la velocità di rotazione al valore di 10 rad/min.

- X** 49. Due blocchi (Fig. P10.49) sono collegati da una fune, di massa trascurabile, che passa su una carrucola di 0.250 m di raggio e momento d'inerzia I . Il blocco, posto sul piano inclinato, si muove in su con un'accelerazione costante di 2.00 m/s^2 . Si determinino (a) le tensioni T_1 e T_2 nei due tratti della fune, (b) il momento d'inerzia della carrucola.

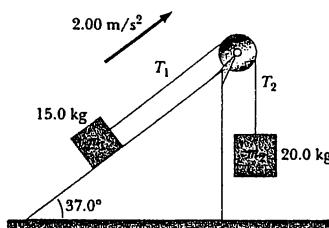


Figura P10.49

50. Per effetto dell'attrito, la velocità angolare di una ruota varia in funzione del tempo secondo la relazione

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-\sigma t}$$

con ω_0 e σ costanti. La velocità angolare varia da 3.50 rad/s per $t = 0$ a 2.00 rad/s per $t = 9.30 \text{ s}$. Utilizzando questi dati, si ricavino le costanti ω_0 e σ . Si determinino: (a) l'accelerazione angolare per $t = 3.00 \text{ s}$, (b) il numero di giri compiuti dalla ruota nei primi 2.50 s e (c) quelli prima di arrestarsi.

51. La puleggia di Figura P10.51 ha raggio R e momento d'inerzia I . Ad un lato della massa m è fissata una molla, di costante elastica k , e sull'altro lato è fissata una fune avvolta sulla puleggia. L'asse della puleggia ed il piano inclinato sono senza attrito. Se la puleggia viene fatta ruotare in verso antiorario, in modo da allungare la molla di un tratto d , e quindi lasciata libera, partendo dalla quiete, calcolare (a) la velocità angolare della puleggia quando la molla è di nuovo nella posizione di riposo e (b) i valori numerici della velocità angolare se $I = 1.00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $R = 0.30 \text{ m}$, $k = 50 \text{ N/m}$, $m = 0.50 \text{ kg}$, $d = 0.20 \text{ m}$ e $\theta = 37.0^\circ$.

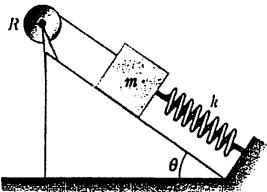


Figura P10.51

52. Una piccola sfera omogenea di massa m e raggio r rotola senza strisciare lungo la pista mostrata in Figura 10.52. Se essa parte da ferma, (a) qual è il minimo valore di h (in termini del raggio del percorso circolare R) perché la sfera completi un tale percorso? Quali sono le forze agenti sulla sfera nel punto P se $h = 3R$?

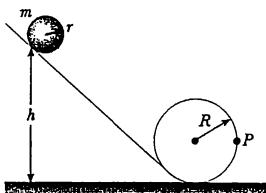


Figura P10.52

53. Due astronauti (Fig. P10.53), ciascuno di massa 75.0 kg , sono collegati da una fune di 10.0 m di massa trascurabile. Essi sono isolati nello spazio, orbitanti attorno al loro centro di massa con velocità v . Calcolare (a) il modulo del momento angolare del sistema considerando gli astronauti come punti materiali e (b) l'energia rotazionale del sistema. Tirando la fune, gli astronauti possono accorciare la loro distanza a 5.00 m . (c) Qual è il

nuovo momento angolare del sistema? (d) Quali sono le nuove velocità degli astronauti? (e) Qual è la nuova energia cinetica del sistema? (f) Quanto lavoro compiono gli astronauti per accorciare la fune?

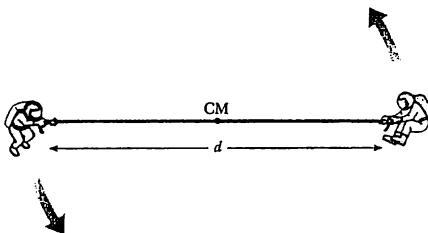


Figura P10.53

54. Due astronauti (Fig. P10.53), ciascuno di massa M , sono collegati da una fune di lunghezza d di massa trascurabile. Essi sono isolati nello spazio, orbitanti attorno al loro centro di massa con velocità v . Calcolare (a) il modulo del momento angolare del sistema considerando gli astronauti come punti materiali e (b) l'energia rotazionale del sistema. Tirando la fune, gli astronauti possono accorciare la loro distanza al valore $d/2$. (c) Qual è il nuovo momento angolare del sistema? (d) Quali sono le nuove velocità? (e) Qual è la nuova energia rotazionale del sistema? (f) Quanto lavoro compiono gli astronauti per accorciare la fune?

55. La Figura P10.55 mostra una forza verticale applicata tangenzialmente a un cilindro uniforme di peso w . Il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e tutte e due le superfici è 0.500. Trovare, in funzione di w , la forza massima F che può essere applicata senza causare la rotazione del cilindro. (Suggerimento: quando il cilindro è sul punto di slittare, ambedue le forze d'attrito raggiungono il loro valore massimo. Perché?).

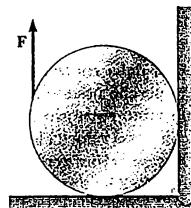


Figura P10.55

56. Una comune dimostrazione fisica (Fig. P10.56) utilizza una palla ferma all'estremità di una tavoletta di

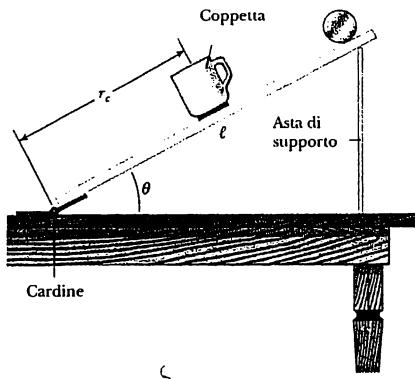


Figura P10.56

lunghezza l inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Una coppetta leggera è incollata sulla tavola a distanza r_c in modo tale che essa catturi la palla quando venga tolta rapidamente l'asta di supporto.

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Quando la ciminiera ruota attorno alla sua base, ciascuna porzione della ciminiera che si trova più in alto cade aumentando l'accelerazione tangenziale. L'accelerazione tangenziale per un dato punto della ciminiera è proporzionale alla distanza di questa porzione dalla base. Mentre l'accelerazione aumenta, le porzioni più in alto della ciminiera finiscono per subire un'accelerazione più alta di quella dovuta alla sola gravità. Ciò può accadere soltanto se queste porzioni vengono tirate giù da un'ulteriore forza oltre quella di gravità. Questa è una forza di taglio fra le porzioni più basse della ciminiera. Alla fine, la forza di taglio che fornisce questa accelerazione diventa maggiore di quella che tiene insieme la ciminiera, ed essa si rompe.
 - Sì, tutti i punti della ruota hanno la stessa velocità angolare. Ciò perché usiamo grandezze angolari per descrivere un moto rotatorio. Non tutti i punti sulla ruota hanno la stessa velocità lineare. Il punto in $r=0$ ha velocità lineare zero e zero accelerazione lineare; un punto in $r=R/2$ ha una velocità lineare $v=R\omega/2$ e un'accelerazione lineare uguale all'accelerazione centripeta $v^2/(R/2)=R\omega^2/2$ (l'accelerazione tangenziale è zero perché per tutti i punti ω è costante). Un punto sul bordo in $r=R$ ha una velocità lineare $v=R\omega$ e una accelerazione lineare $R\omega^2$.
 - Vi sono due differenze importanti fra momento della forza e lavoro. La prima differenza è che lo sposta-
- (a) Dimostrare che la palla cadrà all'indietro rispetto alla tavola che cade quando θ è minore di 35.3° , e (b) che la palla cadrà dentro la coppetta quando la tavola viene sostegnata a questo angolo limite e la coppetta venga posta in
- $$r_c = \frac{2l}{3 \cos \theta}$$
- (c) Se la palla si trova all'estremità di una tavola di 1.00 m a questo angolo critico, mostrare che la coppetta deve trovarsi a 18.4 cm dall'estremo che si muove.
- Problemi al calcolatore**
- S1. Un disco che ha un momento di inerzia di $100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ è libero di ruotare attorno a un asse fisso passante dal suo centro come in Figura 10.1. Una forza tangenziale il cui modulo è compreso nel campo da $F = 0$ a $F = 50.0 \text{ N}$ può essere applicata a qualsiasi distanza compresa fra $R = 0$ ed $R = 3.00 \text{ m}$, misurata rispetto all'asse di rotazione. Usando il Foglio Elettronico 10.1, trovare i valori di F ed R che consentono al disco di compiere due rotazioni complete in 10.0 s. Vi è un solo valore per F ed R ?
- mento nell'espressione del lavoro è diretto *lungo* la direzione della forza, mentre la distanza importante nell'espressione del momento della forza è *perpendicolare* alla direzione della forza. La seconda differenza riguarda se vi è o no moto: nel caso del lavoro, vi è lavoro svolto soltanto se la forza sposta il suo punto di applicazione. D'altra parte, una forza applicata perpendicolarmente a una certa distanza da un asse di rotazione produce un momento sia che si verifichi o no il moto.
4. Su un tavolo privo di attrito, le sole forze agenti sulla matita sono la forza gravitazionale, sul centro di massa, e la forza normale, dovuta al tavolo, su un estremo. Queste forze producono una coppia sulla matita, causando la sua rotazione. Ambedue queste forze, tuttavia, sono verticali e quindi non vi sono forze orizzontali agenti sulla matita. Di conseguenza, il centro di massa della matita deve cadere verticalmente. Mentre la matita cade, l'estremo scivola di lato, in modo tale che il centro di massa della matita segua una linea retta verticale verso il tavolo.
5. Mentre la moto abbandona il suolo, l'attrito fra gli pneumatici e il terreno scompare all'improvviso. Se il motociclista tiene aperto il gas mentre abbandona il suolo, la ruota motrice aumenterà la sua velocità angolare, poiché non subisce più la forza d'attrito col terreno. La moto in aria è, ora, un sistema isolato, e il suo momento angolare si deve conservare. L'aumen-

- to della velocità angolare della ruota (diretta alla sinistra della moto) deve essere compensata da un aumento del momento angolare dell'intera moto (verso destra). Questa rotazione causa l'alzarsi del muso della moto e l'abbassamento della coda.
6. In generale, tu vorrai che l'energia cinetica rotazionale del sistema sia la frazione più piccola possibile dell'energia totale, tu vuoi una traslazione non una rotazione! Tu vuoi che le ruote abbiano un momento di inerzia piccolo per quanto possibile, cosicché esso

rappresenti la minima resistenza alle variazioni di moto rotazionale. Ruote tipo dischi avranno un momento di inerzia minore di quelle con dei cerchioni, per cui i dischi sono preferibili. Minore sarà la massa delle ruote e minore sarà il momento di inerzia, per cui sono preferibili ruote leggere. Minore sarà il raggio delle ruote e minore sarà pure il momento di inerzia, cosicché le ruote devono essere grandi appena per poter superare agevolmente piccole irregolarità della strada.

11

I moti orbitali e l'atomo di idrogeno

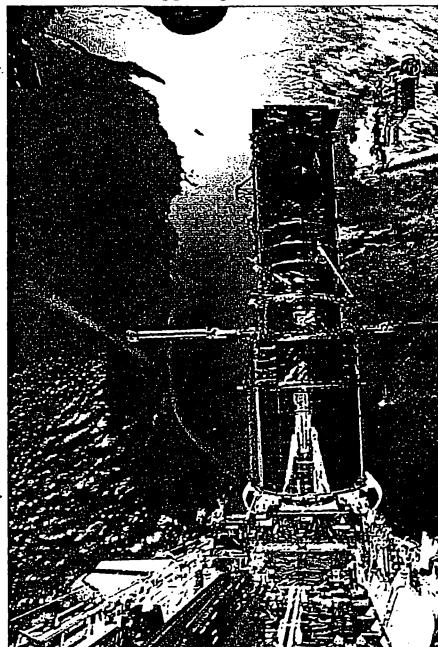
CONTENUTO

- 11.1 La legge di gravitazione universale di Newton rivisitata
- 11.2 Le leggi di Keplero
- 11.3 La legge di gravitazione universale e il moto dei pianeti
- 11.4 Considerazioni energetiche sul moto dei pianeti e dei satelliti
- 11.5 Spettri atomici e teoria di Bohr dell'atomo di idrogeno

Abbiamo iniziato lo studio della meccanica con il moto traslazionale e le forze che ne sono la causa. Se conosciamo le forze agenti su un sistema e le condizioni iniziali, siamo in grado di prevedere il suo comportamento futuro. Tuttavia, una tale descrizione del moto risulta spesso noiosa e lenta. Fortunatamente, possiamo spesso seguire un metodo più semplice usando i principi di conservazione. Abbiamo risolto facilmente molti interessanti problemi riguardanti il moto considerando la conservazione di certe grandezze fondamentali, come l'energia e la quantità di moto.

In questo capitolo ritorneremo sulla legge di gravitazione universale di Newton, una delle fondamentali leggi sulla forza in natura, e mostreremo come essa, insieme alle leggi del moto di Newton, ci permetterà di capire una varietà di familiari moti orbitali, come il moto dei pianeti e dei satelliti della Terra. La teoria della gravitazione di Newton si è sviluppata attraverso i suoi studi sui moti della Luna e dei pianeti.

**Gli astronauti F. Story Musgrave e Jeffrey A. Hoffman completano l'ultima passeggiata spaziale necessaria per riparare il Telescopio Spaziale Hubble nel Dicembre 1993
(Per gent. conc. della NASA)**



neti, per i quali si è servito dei lavori fondamentali di Copernico, Brahe, Keplero e altri astronomi. Esaminando questo sviluppo, useremo, ancora una volta, la conservazione dell'energia e del momento angolare.

Concluderemo questo capitolo con una discussione del famoso modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, che rappresenta un'interessante miscela di fisica classica (le leggi di Newton del moto e le forze elettromagnetiche) e di fisica quantistica (quantizzazione del momento angolare). Sebbene la teoria di Bohr contenga idee che sono contrarie alla fisica classica, il suo modello predice con successo le linee spettrali osservate per l'idrogeno.

11.1 • LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE DI NEWTON RIVISITATA

Prima del 1686, era stata raccolta una grande quantità di dati sul moto della Luna e dei pianeti, ma non era disponibile una chiara comprensione delle forze che causavano quel particolare movimento dei corpi celesti. In quell'anno, tuttavia, Isaac Newton fornì la chiave che aprì i segreti del cielo. Egli sapeva, dalla prima legge, che una forza risultante doveva agire sulla Luna. Altrimenti essa si sarebbe mossa lungo una traiettoria rettilinea piuttosto che in un'orbita quasi circolare. Newton pensò che questa forza fosse il risultato di un'attrazione gravitazionale che la Terra esercitava sulla Luna. Egli concluse, inoltre, che non potesse esserci nulla di particolare, per il sistema Terra-Luna o per quello del Sole e i suoi pianeti, tale da produrre forze gravitazionali che agissero da sole su questi. Scrisse,

Ho dedotto che le forze che mantengono i pianeti nelle loro orbite debbono dipendere universalmente dal quadrato delle loro distanze dal centro attorno al quale ruotano; ho poi confrontata la forza richiesta per mantenere la Luna nella sua orbita con la forza di gravità alla superficie della Terra; ho scoperto che sono in accordo.

Come ricorderete dal Capitolo 5, ogni particella nell'Universo attrae ogni altra particella con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Se le particelle hanno masse m_1 e m_2 e sono separate da una distanza r , il modulo della forza gravitazionale fra esse è:

$$\nabla F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad [11.1]$$

dove G è la costante di gravitazione universale il cui valore nelle unità SI è

$$\nabla G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \quad [11.2]$$

La legge della forza data dall'Equazione 11.1 è spesso indicata come legge dell'inverso del quadrato, poiché il valore della forza varia con l'inverso del quadrato della distanza tra le particelle. Possiamo esprimere questa forza in forma vettoriale definendo un versore \hat{r} , diretto da m_1 a m_2 , come mostrato in Figura 11.1. La forza su m_1 dovuta a m_2 è data da

$$\nabla \mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad [11.3]$$

- *Legge di gravitazione universale*

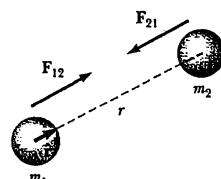


Figura 11.1 la forza gravitazionale tra due particelle è attrattiva. Il versore \hat{r} è diretto da m_1 a m_2 . Si noti che $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

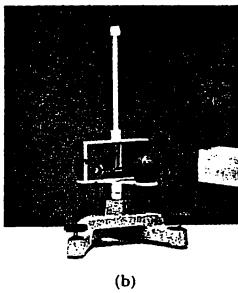
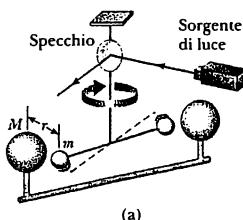


Figura 11.2 (a) Schema dell'apparato di Cavendish per la misura di G . Le sfere più piccole di massa m vengono attratte dalle sfere più grandi di massa M e la sbarra ruota di un piccolo angolo. Un fascio di luce riflesso da uno specchio sull'apparato in rotazione fornisce una misura dell'angolo descritto. (b) Fotografia di un apparato di Cavendish per laboratorio didattico. (PASCO Scientific, per gent. conc.)

In maniera analoga per la terza legge di Newton, la forza su m_2 dovuta a m_1 , indicata con \mathbf{F}_{21} , è eguale in modulo a \mathbf{F}_{12} ed opposta in verso. Ossia queste forze formano una coppia azione-reazione ed $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

La forza gravitazionale esercitata da una distribuzione di massa, di dimensione finita, a simmetria sferica, su una particella all'esterno della sfera è la stessa del caso in cui tutta la massa della sfera fosse concentrata nel suo centro. Per esempio, la forza su una particella di massa m sulla superficie della Terra ha il valore

$$F_g = G \frac{M_i m}{R_i^2}$$

dove M_i e R_i sono rispettivamente la massa e il raggio della Terra. La forza è diretta verso il centro della Terra.

Misura della costante gravitazionale

La costante gravitazionale G fu misurata per la prima volta in un importante esperimento da Sir Henry Cavendish nel 1798. L'apparato di Cavendish consiste di due piccole sfere ognuna di massa m , fissate agli estremi di una sbarra orizzontale leggera, sospesa tramite un sottile filo metallico, come in Figura 11.2. Due grandi sfere, ognuna di massa M , vengono poi avvicinate alle sfere più piccole. La forza attrattiva tra le sfere piccole e quelle più grandi provoca una rotazione della sbarra ed una torsione del filo che la sostiene. Se il sistema è orientato come in Figura 11.2, la sbarra ruota in senso orario, se osservata dall'alto. L'angolo descritto dalla rotazione della sbarra è misurato dalla deflessione di un fascio di luce, riflesso da uno specchio fissato al filo verticale. La macchia di luce deflessa è un modo per amplificare il moto. L'esperimento viene ripetuto attentamente con masse diverse e a distanze diverse. Oltre a fornire un valore per G , il risultato mostra che la forza è attrattiva, proporzionale al prodotto mm ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza r .

Fisica ragionata 1

Uno studente lascia cadere una palla e considera la caduta della palla verso il suolo come opposta alla situazione nella quale la palla resta ferma e la Terra si muove verso di essa. Lo studente comincia con la seguente spiegazione: "La Terra è molto più massiva della palla, per cui la Terra attira la palla molto di più di quanto la palla non attiri la Terra. Quindi, la palla cade mentre la Terra resta ferma." Che cosa pensi di questa spiegazione?

Ragionamento Secondo la legge di gravitazione universale di Newton, la forza fra la palla e la Terra dipende dal prodotto delle loro masse, così ambedue le forze, quella della palla sulla Terra e quella della Terra sulla palla, hanno lo stesso modulo. Ciò segue pure, naturalmente, dalla terza legge di Newton. La palla si muove di più in confronto con la Terra poiché, per la seconda legge di Newton, la forza di uguale modulo produce un'accelerazione maggiore sulla piccola massa della palla.

Esempio 11.1 La massa della Terra

Usare la legge di gravitazione per trovare un valore approssimato della massa della Terra.

Soluzione La Figura 11.3, ovviamente non in scala, mostra una palla da baseball che cade sulla Terra in un posto dove l'accelerazione di gravità è g . Sappiamo dal Capitolo 5 che la forza gravitazionale che si esercita sulla palla da parte della Terra è la stessa del peso della palla, $w = m_p g$. Cioè

$$m_p g = G \frac{M_t m_p}{R_t^2}$$

Possiamo dividere i due membri di questa equazione per m_p e ricaviamo la massa della Terra, M_t :

$$M_t = \frac{g R_t^2}{G}$$

La palla che cade è sufficientemente vicina alla Terra perché la distanza di separazione tra il centro

della palla e il centro della Terra si possa considerare uguale al raggio terrestre, 6.38×10^6 m. Allora, la massa della Terra è

$$M_t = \frac{(9.80 \text{ m/s}^2) (6.38 \times 10^6 \text{ m})^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

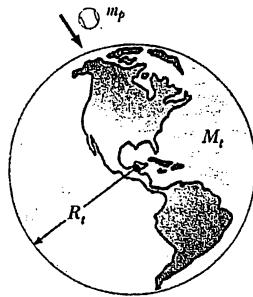


Figura 11.3 (Esempio 11.1) Una palla da baseball che cade verso la Terra (il disegno non è in scala).

Esempio 11.2 Gravità e altitudine

Ricavare un'espressione che mostri, per ogni punto al di sopra della superficie terrestre, come l'accelerazione di gravità vari con la distanza dal centro della Terra.

Soluzione La palla che cade dell'Esempio 11.1 può essere usata anche qui. Ora, tuttavia, assumiamo che la palla si trovi a una certa distanza arbitraria, $r > R_t$, dal centro della Terra. La prima equazione nell'Esempio 11.1, con r che sostituisce R_t e con la semplificazione di m_p , diventa

$$g = G \frac{M_t}{r^2}$$

Ciò indica che l'accelerazione di gravità in un punto al di sopra della superficie terrestre diminuisce con l'inverso del quadrato della distanza tra il punto e il centro della Terra. La nostra assunzione, nel Capitolo 2, che gli oggetti cadano con una accelerazione costante è ovviamente non corretta alla luce di questo esempio. Per brevi cadute, tuttavia, la variazione di g è così piccola che trascurandola non si introduce un errore significativo nei risultati.

Poiché il peso di un oggetto è mg , una variazione del valore di g produce una variazione del peso. Per esempio, se voi pesate 800 N sulla superficie della Terra, pesereste soltanto 200 N a un'altezza sopra la Terra

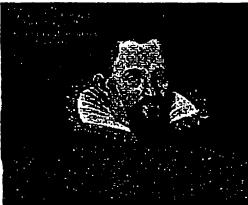
uguale al raggio terrestre. Inoltre, se la distanza di un oggetto dalla Terra diventa infinitamente grande, il peso tende a zero. Valori di g a varie altitudini sono dati in Tabella 11.1.

TABELLA 11.1 Accelerazione di gravità, g , a varie altitudini sopra la superficie terrestre

Altitudine h (km)	g (m/s ²)
1000	7.33
2000	5.68
3000	4.53
4000	3.70
5000	3.08
6000	2.60
7000	2.23
8000	1.93
9000	1.69
10000	1.49
50000	0.13
∞	0

ESERCIZIO 1 Se un oggetto pesa 270 N sulla superficie terrestre, quale sarà il suo peso a una altezza uguale a due volte il raggio della Terra? Risposta 30 N

ESERCIZIO 2 Determinare il modulo dell'accelerazione di gravità a una altezza di 500 km. A questa altezza di quale percentuale si riduce il peso di un corpo? Risposta 8.43 m/s^2 ; 14%



Giovanni Keplero
(1571-1630)

Astronomo tedesco, Keplero è meglio conosciuto per avere sviluppato le leggi del moto planetario basate su accurate osservazioni di Tycho Brahe. Dopo aver speso diversi anni tentando di ricavare per i pianeti una "teoria dei solidi regolari", concluse che la visione copernicana dei moti circolari per i pianeti doveva essere abbandonata. Invece egli trovò che le orbite dei pianeti sono ellissi con il Sole sempre in uno dei fuochi. (Art Resource)

Leggi di Keplero •

11.2 • LE LEGGI DI KEPLERO

I moti dei pianeti, delle stelle e di altri corpi celesti sono stati osservati dalle persone per migliaia di anni. Nella storia antica gli scienziati consideravano la Terra come il centro dell'Universo. Questo cosiddetto modello geocentrico fu proposto dall'astronomo greco Claudio Tolomeo nel II secolo d.C. e fu accettato per i successivi 1400 anni. Nel 1543 l'astronomo polacco Niccolò Copernico (1473-1543) suggerì che la Terra e gli altri pianeti percorrono orbite circolari attorno al Sole (ipotesi eliocentrica).

L'astronomo danese Tycho Brahe (1546-1601) fece accurate misure astronomiche in un periodo di 20 anni e fornì le basi per il modello del sistema solare oggi accettato. È interessante notare che queste osservazioni precise, fatte sui pianeti e 777 stelle, visibili a occhio nudo, furono eseguite utilizzando un grande sextante e un compasso, dato che il telescopio non era stato ancora inventato.

L'astronomo tedesco Giovanni Keplero, studente di Brahe, considerò i dati astronomici di Brahe, e passò circa 16 anni cercando di dedurre un modello matematico per il moto dei pianeti. Dopo molti calcoli laboriosi, trovò che i dati precisi di Brahe sulla rivoluzione di Marte attorno al Sole fornivano la risposta. L'analisi di Keplero mostrò per la prima volta che il concetto di orbita circolare attorno al Sole doveva essere abbandonato. Scoprì che l'orbita di Marte poteva essere descritta accuratamente da un'ellisse con il Sole in uno dei fuochi. Generalizzò allora l'analisi per includere il moto di tutti i pianeti. L'analisi completa è riassunta in tre punti, noti come leggi di Keplero:

1. Tutti i pianeti si muovono lungo orbite ellittiche, con il Sole in uno dei fuochi.
2. Il raggio vettore, che unisce il Sole ad uno qualsiasi dei pianeti, descrive aree uguali in uguali intervalli di tempo.
3. Il quadrato del periodo orbitale di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita ellittica.

Newton dimostrò che queste leggi erano la conseguenza di una semplice forza che si esercita tra due masse qualsiasi. La legge della gravitazione universale di Newton, insieme allo sviluppo delle equazioni del moto, fornisce la base per una soluzione matematica completa del moto dei pianeti e dei satelliti. Di maggiore importanza è il fatto che la legge di gravitazione universale di Newton descrive correttamente la forza gravitazionale di attrazione tra due *qualsiasi* masse.

11.3 • LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE ED IL MOTO DEI PIANETI

Nel formulare la sua legge di gravitazione universale, Newton usò la seguente osservazione, che suggerisce come la forza gravitazionale sia proporzionale all'inverso del quadrato della distanza di separazione. Confrontiamo l'accelerazione della Luna nella sua orbita con l'accelerazione di un oggetto che cada vicino alla superficie terrestre (Fig. 11.4). Assumiamo che le due accelerazioni abbiano la stessa causa, vale a dire, l'attrazione gravitazionale della Terra. Dalla legge dell'inverso del quadrato, Newton scoprì che l'accelerazione della Luna verso la Terra (accelerazione centripeta) doveva essere proporzionale a $1/r_\ell^2$ dove r_ℓ è la distanza Terra-Luna. Inoltre l'accelerazione della mela verso la Terra doveva dipendere da $1/R_t^2$ dove R_t è il raggio della Terra. Usando i valori $r_\ell = 3.84 \times 10^8$ m e $R_t = 6.37 \times 10^6$ m, il rapporto dell'accelerazione della Luna, a_ℓ , e dell'accelerazione della mela, g , è previsto essere

$$\frac{a_\ell}{g} = \frac{(1/r_\ell)^2}{(1/R_t)^2} = \left(\frac{R_t}{r_\ell}\right)^2 = \left(\frac{6.37 \times 10^6 \text{ m}}{3.84 \times 10^8 \text{ m}}\right)^2 = 2.75 \times 10^{-4}$$

Quindi l'accelerazione della Luna

$$a_\ell = (2.75 \times 10^{-4}) (9.80 \text{ m/s}^2) = 2.70 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione centripeta della Luna può essere calcolata anche cinematicamente, conoscendo il suo periodo orbitale T , dove $T = 27.32$ giorni = 2.36×10^6 s e la sua distanza media dalla Terra, r_ℓ . In un tempo T la Luna percorre una distanza $2\pi r_\ell$ uguale, considerando un'orbita circolare, alla circonferenza della sua orbita. Perciò, la sua velocità orbitale è $2\pi r_\ell/T$ e la sua accelerazione centripeta è:

$$a_\ell = \frac{v^2}{r_\ell} = \frac{(2\pi r_\ell/T)^2}{r_\ell} = \frac{4\pi^2 r_\ell}{T^2} = \frac{4\pi^2 (3.84 \times 10^8 \text{ m})}{(2.36 \times 10^6 \text{ s})^2} = 2.72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Questo accordo fornisce una concreta prova che la legge dell'inverso del quadrato è corretta.

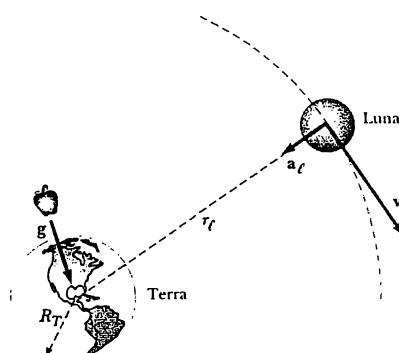


Figura 11.4 Nel suo moto di rivoluzione attorno alla Terra, la Luna è soggetta a un'accelerazione centripeta a_ℓ diretta verso la Terra. Un corpo vicino alla superficie della Terra è soggetto a un'accelerazione eguale a g . (Le dimensioni non sono in scala).

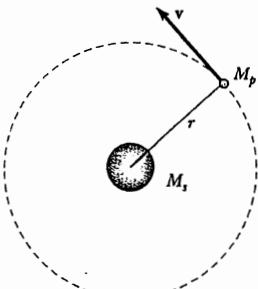


Figura 11.5 Un pianeta di massa M_p in moto lungo un'orbita circolare attorno al Sole. Le orbite di tutti i pianeti eccetto Marte, Mercurio e Plutone sono quasi circolari.

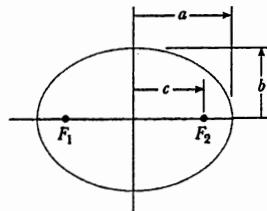


Figura 11.6 Disegno di un'ellisse. Il semiasse maggiore è lungo a ed il semiasse minore è lungo b . I fuochi si trovano a una distanza c dal centro dove $c^2 = b^2 + c^2$ e l'eccentricità è definita da $e = c/a$.

La terza legge di Keplero

La terza legge di Keplero può essere prevista dalla legge dell'inverso del quadrato per orbite circolari¹. Consideriamo un pianeta di massa M_p , e supponiamo che si muova di moto circolare attorno al Sole, di massa M_s , come in Figura 11.5. Poiché la forza gravitazionale agente sul pianeta è eguale alla forza centripeta necessaria per mantenerlo in un'orbita circolare, possiamo utilizzare l'Equazione 5.3 e scrivere

$$\frac{GM_s M_p}{r^2} = \frac{M_p v^2}{r}$$

La velocità orbitale del pianeta è semplicemente $2\pi r/T$, dove T è il suo periodo; l'espressione precedente diventa

$$\frac{GM_s}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

Terza legge di Keplero • \longrightarrow $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s} \right) r^3$ [11.4]

dove K_s è una costante data da

$$K_s = \frac{4\pi^2}{GM_s} = 2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

L'Equazione 11.4 fornisce la terza legge di Keplero. La legge è valida anche per orbite ellittiche, se sostituiamo ad r la lunghezza del semiasse maggiore a (Figura 11.6). Notiamo che la costante di proporzionalità, K_s , è indipendente dalla massa del pianeta. Perciò l'Equazione 11.4 è valida per tutti i pianeti. Se avessimo dovuto considerare l'orbita di un satellite attorno alla Terra, come la Luna,

¹ Le orbite di tutti i pianeti escluso Marte, Mercurio e Plutone sono con buona approssimazione circolari. Per esempio, il rapporto del semiasse minore al semiasse maggiore per la Terra è $b/a = 0.99986$. La vicinanza del rapporto b/a a 1 indica che la differenza tra il perielio e l'afelio è piccola, come è da attendersi.

TABELLA 11.2 Dati planetari utili

Corpo	Massa (kg)	Raggio medio (m)	Periodo (s)	Distanza dal Sole (m)	$\frac{T^2}{r^3} \left(\frac{s^2}{m^3} \right)$
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
Venere	4.88×10^{24}	6.06×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Terra	5.98×10^{24}	6.37×10^6	3.156×10^7	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Giove	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^7	9.35×10^8	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^7	2.64×10^9	2.87×10^{12}	2.95×10^{-19}
Nettuno	1.03×10^{26}	2.21×10^7	5.22×10^9	4.50×10^{12}	2.99×10^{-19}
Plutone	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^6$	7.82×10^9	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^6	—	—	—
Sole	1.991×10^{30}	6.96×10^8	—	—	—

allora la costante avrebbe avuto un valore diverso, con la massa della Terra al posto della massa del Sole. In questo caso la costante di proporzionalità è eguale a $4\pi^2/GM_t$.

In Tabella 11.2 è riportato un elenco di dati utili sui pianeti. L'ultima colonna di questa tabella conferma che T^2/r^3 è una costante.

Esempio 11.3 Un satellite della Terra

Un satellite di massa m si muove in un'orbita circolare attorno alla Terra con velocità costante v , a una altezza $h = 1000$ km al di sopra della superficie terrestre, come in Figura 11.7. (Per chiarezza, questa figura non è in scala). Trovare la velocità orbitale del satellite. Il raggio della Terra è 6.37×10^6 m, e la sua massa è 5.98×10^{24} kg.

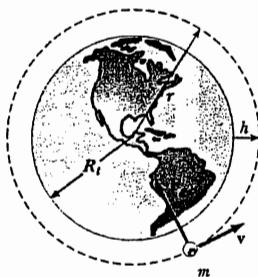


Figura 11.7 (Esempio 11.3). Un satellite di massa m si muove attorno alla Terra in un'orbita circolare di raggio r con velocità costante v . La forza centripeta è fornita dalla forza gravitazionale F_g agente sul satellite. (Il disegno non è in scala).

Soluzione La sola forza esterna sul satellite è la forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra. Questa forza è diretta verso il centro dell'orbita circolare del satellite ed è la forza centripeta agente sul satellite. Poiché la forza di gravità è $GM_t m/r^2$, troviamo che

$$F_g = G \frac{M_t m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{GM_t}{r}$$

In questa espressione, la distanza r è il raggio terrestre più l'altezza del satellite, cioè, $r = R_t + h = 7.37 \times 10^6$ m, per cui

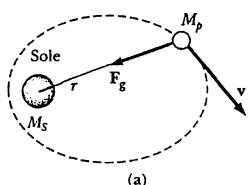
$$v^2 = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) (5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{7.37 \times 10^6 \text{ m}} \\ = 5.41 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Quindi,

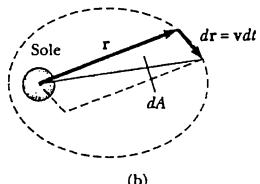
$$v = 7.36 \times 10^3 \text{ m/s} \approx 26500 \text{ km/h}$$

Si noti che v è indipendente dalla massa del satellite!

ESERCIZIO 3 Calcolare il periodo di rivoluzione, T , del satellite. Risposta 105 min



(a)



(b)

Figura 11.8 (a) La forza agente su un pianeta è diretta verso il Sole, lungo il raggio vettore. (b) Quando un pianeta è in orbita attorno al Sole, l'area spazzata dal raggio vettore in un tempo dt è uguale alla metà dell'area del parallelogramma formato dai vettori r e $dr = v dt$.

La seconda legge di Keplero e la conservazione del momento angolare

Consideriamo un pianeta di massa m , che si muove attorno al Sole in un'orbita ellittica (Fig. 11.8). La forza gravitazionale che agisce sul pianeta è sempre diretta lungo il raggio vettore, verso il Sole. Il momento della forza centrale agente sul pianeta è chiaramente nullo poiché F è parallelo a r . Ossia

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F(\tau) \hat{\mathbf{r}} = 0$$

Ricordiamo però che il momento di una forza è eguale alla derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto: $\tau = d\mathbf{L}/dt$. Perciò,

poiché $\tau = 0$, il momento della quantità di moto del pianeta è una costante del moto:

$$\underline{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mr \times \mathbf{v} = \text{costante}}$$

Poiché \mathbf{L} è una costante del moto, notiamo che il moto del pianeta in ogni istante è limitato al piano formato da \mathbf{r} e \mathbf{v} .

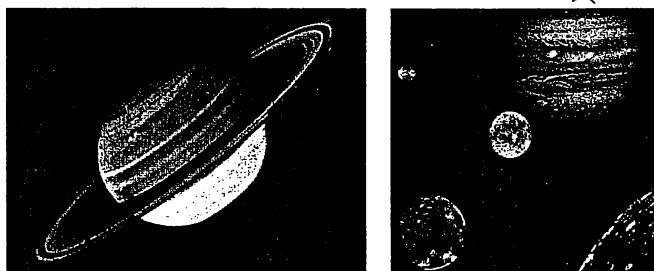
Possiamo mettere in relazione questo risultato con la seguente considerazione geometrica. Il raggio vettore r nella Figura 11.8b descrive un'area dA in un tempo dt . Quest'area corrisponde a metà dell'area $|r \times dr|$ del parallelogramma formato dai vettori r e dr . Poiché lo spostamento del pianeta in un tempo dt è dato da $dr = v dt$, otteniamo

$$dA = \frac{1}{2} |r \times dr| = \frac{1}{2} |r \times v dt| = \frac{L}{2m} dt$$

Seconda legge di Keplero

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{costante} \quad [11.5]$$

Y



(A sinistra) Questa immagine di Saturno, scattata dalla navicella spaziale *Voyager 1* il 18 Ottobre 1980, ha i colori intensificati per aumentare la visibilità delle grandi configurazioni luminose nella zona temperata nord di Saturno. La netta differenza di colore tra la zona equatoriale nord e le altre zone può essere dovuta a spessi strati di nebbia che coprono la zona nord. (A destra) Giove e le sue quattro lune furono fotografati da *Voyager 1* e riuniti in questo collage. Le lune non sono in scala, ma si trovano nelle loro posizioni relative. Nove altre piccole lune circondano Giove. Non è visibile il debole anello di particelle di Giove visto per la prima volta da *Voyager 1*. (NASA photos)

dove L ed m sono costanti del moto. Concludiamo allora che

il raggio vettore che unisce il Sole a uno qualsiasi dei pianeti descrive aree uguali in tempi uguali.

È importante riconoscere che questo risultato è una conseguenza del fatto che la forza di gravità è una forza centrale. Ciò implica la conservazione del momento della quantità di moto. La legge si applica in ogni situazione in cui sia presente una forza centrale, anche se essa non sia dipendente dall'inverso del quadrato della distanza.

La dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza della forza di gravità non è mostrata dalla seconda legge di Keplero. Sebbene non lo proviamo qui, la prima legge di Keplero è una conseguenza diretta del fatto che la forza gravitazionale varia come $1/r^2$. In presenza cioè di una forza che dipende dall'inverso del quadrato della distanza, si può dimostrare che le orbite dei pianeti sono delle ellissi, con il Sole in uno dei fuochi.

Fisica ragionata 2

La Terra è più vicina al Sole quando è inverno nell'emisfero nord che quando è estate. Luglio e Gennaio hanno entrambi 31 giorni. In quale mese dei due la Terra percorre un cammino più lungo nella sua orbita?

Ragionamento La Terra è in un'orbita leggermente ellittica attorno al Sole. Perché si conservi il momento angolare, la Terra deve muoversi più rapidamente quando si avvicina al Sole e più lentamente quando se ne allontana. Quindi, poiché si trova più vicino al Sole in Gennaio, essa si muove più rapidamente, e copre un percorso più lungo nella sua orbita di quello percorso in Luglio.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

La prima legge di Keplero afferma che i pianeti compiono orbite ellittiche. Ciò è strettamente legato al fatto che la forza gravitazionale varia con il quadrato della distanza di separazione fra il Sole e il pianeta. Supponiamo che la forza vari con l'inverso del cubo, invece dell'inverso del quadrato. Ciò aprirebbe la porta ad alcuni nuovi tipi di orbite. Cosa accadrebbe della seconda e terza legge? Esse cambierebbero se la forza dipendesse dall'inverso del cubo della distanza di separazione?

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Un satellite in orbita non attraversa veramente il vuoto, esso si muove attraverso un'aria estremamente rarefatta. L'attrito risultante dell'aria causa un rallentamento del satellite?

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Come spieghi il fatto che Saturno e Giove hanno periodi molto maggiori di un anno?

ESERCIZIO 4 Il pianeta Mercurio, quando è all'afelio, dista dal Sole 6.99×10^{10} m, e al perielio dista invece 4.60×10^{10} m. Se la sua velocità orbitale è 3.88×10^4 m/s all'afelio, quale sarà la sua velocità orbitale al perielio? Risposta 5.90×10^4 m/s

11.4 • CONSIDERAZIONI ENERGETICHE SUL MOTO DEI PIANETI E DEI SATELLITI

Consideriamo un corpo di massa m in moto con velocità v nelle vicinanze di un corpo di massa M , con $M \gg m$. Il sistema può essere un pianeta che si muove attorno al Sole o un satellite in orbita attorno alla Terra. Se assumiamo che M sia a riposo, in un sistema di riferimento inerziale², allora l'energia totale E del sistema di due corpi, quando questi ultimi sono separati da una distanza r , è la somma dell'energia cinetica della massa m e dell'energia potenziale del sistema:

$$E = K + U$$

Ricordiamo dal Capitolo 7, Equazione 7.22, che l'energia potenziale gravitazionale U_g associata a qualsiasi coppia di particelle di massa m_1 ed m_2 separate da una distanza r è

$$U_g = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

Quindi nel nostro caso

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad [11.6]$$

L'energia totale è inoltre costante, se assumiamo che il sistema sia isolato. Quindi, se la massa m si muove da P a Q in Figura 11.9, l'energia totale resta costante e l'Equazione 11.6 dà

$$E = \frac{1}{2} mv_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{GMm}{r_f} \quad [11.7]$$

Questo risultato mostra che E può essere positivo, negativo o nullo, a seconda del valore di v . Tuttavia, per un sistema legato, come la Terra e il Sole, E è necessariamente *negativa* se si usa la convenzione arbitraria $U \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Si può facilmente stabilire che $E < 0$ per un sistema composto da una massa m che orbita circolarmente attorno a un corpo di massa M . La seconda legge di Newton applicata al corpo di massa m dà

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Moltiplicando entrambi i membri per r e dividendo per 2 otteniamo

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{GMm}{2r} \quad [11.8]$$

² Per mostrare che ciò è lecito, consideriamo un oggetto di massa m che cade sulla Terra. Poiché il centro di massa del sistema Terra-oggetto è fisso, segue che $mv = Mv$. La Terra acquista così un'energia cinetica

$$\frac{1}{2} M_l v_l^2 = \frac{1}{2} \frac{M_l^2}{M_l} v^2 = \frac{m}{M_l} K,$$

dove K è l'energia cinetica dell'oggetto. Poiché $M_l \gg m$, l'energia cinetica della Terra è trascurabile.

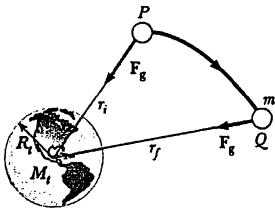


Figura 11.9 Mentre una particella di massa m si muove da P a Q al di sopra della superficie terrestre, l'energia totale del sistema rimane costante.

Sostituendo nell'Equazione 11.6 otteniamo

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad [11.9]$$

- *Energia meccanica totale per orbite circolari*

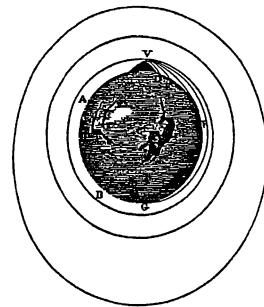
Ciò mostra chiaramente che l'**energia meccanica totale deve essere negativa nel caso di orbite circolari**. Notiamo che l'**energia cinetica è positiva ed uguale a metà del valore dell'energia potenziale** (quando si sceglie l'energia potenziale uguale a zero all'infinito). Il valore assoluto di E è uguale anche all'energia di legame del sistema.

L'energia meccanica totale è negativa anche nel caso di orbite ellittiche. L'espressione di E per orbite ellittiche è la stessa dell'Equazione 11.9, con il semiasse maggiore a al posto di r . Sia l'energia totale che il momento angolare totale di un sistema Sole-pianeta sono costanti del moto.

Fisica ragionata 3

Icebound (Trappola di ghiaccio), di Dean Koonz (Ballantine Books, New York, 1995), è una storia di un gruppo di scienziati intrappolati su un iceberg alla deriva vicino al Polo Nord. Uno degli strumenti in loro possesso era un trasmettitore con il quale essi potevano fissare la loro posizione con "l'aiuto di un satellite polare geosincrono." Può un satellite in orbita *polare* essere *geosincrono*?

Ragionamento Un satellite geosincrono sta sempre sopra un punto della superficie terrestre. Quindi, un'antenna che riceve segnali dal satellite, come una parabola televisiva, può rimanere puntata in una direzione fissata verso il cielo. Il satellite deve trovarsi in orbita con un raggio tale che il suo periodo orbitale sia identico a quello della rotazione terrestre. Ciò risulterebbe in un satellite che apparirebbe senza moto est-ovest relativo all'osservatore in una data posizione. Un'altra condizione è che un satellite geosincrono *dove trovarsi su un'orbita sopra l'Equatore*. Diversamente esso apparirebbe sottoposto a delle oscillazioni nord-sud durante un'orbita. Anche se il satellite si trovasse alla distanza opportuna dalla Terra, esso si muoverebbe rapidamente nella direzione nord-sud, con la necessità di un apparato di puntamento molto accurato. In più, esso si troverebbe sotto l'orizzonte per un lungo periodo di tempo, non essendo così utile per determinare una posizione.



"... Più grande è la velocità ... con la quale (un sasso) viene gettato, più lontano arriva prima di cadere sulla Terra. Possiamo perciò supporre che la velocità possa venire aumentata in modo da descrivere un arco di 1, 2, 5, 10, 100, 1000 miglia prima di cadere fino a che, superando le dimensioni della Terra, attraversi lo spazio senza toccare il suolo". Da Newton, *System of the World*.

Fisica ragionata 4

Un satellite è in orbita circolare nello spazio. È necessario che vi sia un oggetto massivo al centro dell'orbita?

Ragionamento Questa è la situazione normale, i satelliti sono normalmente in orbita attorno alla Terra, un oggetto massivo. Immaginiamo, tuttavia, di legare una pietra nel punto intermedio di una fune e di farla ruotare su una circonferenza come viene mostrato in Figura 11.10. In questo caso, non vi è nulla al centro della traiettoria circolare della pietra, nulla lungo il suo raggio che eserciti una forza sulla pietra. La forza risultante che tiene la pietra nella sua orbita circolare è una combi-

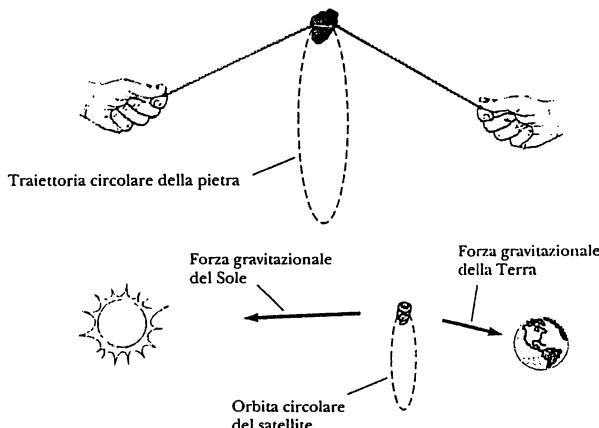


Figura 11.10 (Fisica ragionata 4)

nazione delle componenti radiali di due forze, ognuna impressa dalla fune dai due lati della pietra.

La domanda posta non aveva a che fare con la pietra e la fune; essa riguardava i satelliti. Vi è una controparte gravitazionale di questa situazione? C'è. Immaginiamo di muoverci fra la Terra e il Sole lungo la linea che li congiunge. A un certo punto lungo la linea, la forza di attrazione gravitazionale della Terra equilibrerà quella del Sole. Ciò è simile all'equilibrio lungo la fune della tensione su ambedue i lati della pietra, la pietra è in equilibrio fra due forze uguali. Immaginiamo, ora, di tirare il satellite perpendicolarmente fuori dalla linea Terra-Sole di una piccola quantità. Quanto più la distanza è relativamente piccola, tanto più le componenti delle forze della Terra e del Sole lungo la loro congiungente si cancelleranno. Le componenti delle due forze perpendicolari alla linea centrale si sommeranno fornendo la forza risultante che tenderebbe a riportare indietro il satellite sulla linea centrale. Supponiamo, ora, di mettere in moto il satellite in un'orbita circolare proprio con la giusta velocità. Il satellite orbiterà attorno a un punto centrale nel quale non è localizzata alcuna massa.

Il satellite ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer 3) fu lanciato nel 1978 e posto proprio su una tale orbita allo scopo di studiare il vento solare. Il vantaggio, rispetto a un'orbita centrata sul Sole è quello che il satellite sta sempre dal lato del Sole rivolto verso la Terra, per cui esso è costantemente in comunicazione con la Terra. In mancanza di una missione specifica per la cometa di Halley, il satellite ISEE-3 fu rimosso da questa orbita nel 1982 e posto in orbita attorno alla Luna, in attesa di sorvolare la cometa di Halley. Sulla strada di questo sorvolo, esso passò attraverso la coda della cometa Giacobini-Zinner e con successo raccolse importanti dati su ambedue le comete.

Esempio 11.4 Un satellite in orbita ellittica

Un satellite si muove su un'orbita ellittica intorno alla Terra, come in Figura 11.11. Le distanze minima e massima dalla superficie terrestre sono 400 km e 3000 km. Trovare le velocità del satellite all'apogeo e al perigeo.

Soluzione Poiché la massa del satellite è trascurabile rispetto a quella della Terra, possiamo ritenere il centro di massa della Terra fermo. La gravità è una forza *centrale*, per cui il momento angolare del satellite rispetto

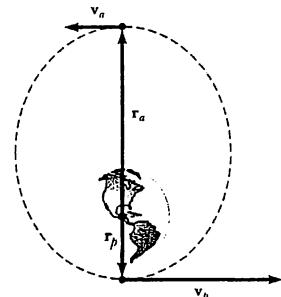


Figura 11.11 (Esempio 11.4) Un satellite in orbita ellittica attorno alla Terra.

al centro di massa della Terra si conserva. Con i pedici a e p per indicare le posizioni dell'apogeo e del perigeo, la conservazione del momento angolare dà $L_p = L_a$, ossia

$$\begin{aligned} mv_p r_p &= mv_a r_a \\ v_p r_p &= v_a r_a \end{aligned} \quad [1]$$

Applicando la conservazione dell'energia, otteniamo $E_p = E_a$, ossia

$$\begin{aligned} U_p + K_p &= U_a + K_a \\ -G \frac{M_t m}{r_p} + \frac{1}{2} m v_p^2 &= -G \frac{M_t m}{r_a} + \frac{1}{2} m v_a^2 \\ 2 GM_t \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p} \right) &= (v_a^2 - v_p^2) \end{aligned} \quad [2]$$

Assumendo che il raggio della Terra sia 6.37×10^6 m e facendo uso dei dati, troviamo che $r_a = 9.37 \times 10^6$ m e $r_p = 6.77 \times 10^6$ m. Siccome conosciamo i valori numerici di G , M_t , r_p e r_a , possiamo usare le Equazioni (1) e (2) per determinare le due incognite, (v_p e v_a). Risolvendo il sistema, si ottiene

$$v_p = 8.27 \text{ km/s}$$

$$v_a = 5.98 \text{ km/s}$$

Velocità di fuga

Supponiamo che un oggetto di massa m sia lanciato verticalmente verso l'alto dalla superficie della Terra con una velocità iniziale v_i , come in Figura 11.12. Si possono applicare considerazioni energetiche per determinare il valore minimo della velocità iniziale per cui l'oggetto possa sottrarsi al campo gravitazionale della Terra. L'Equazione 11.6 fornisce l'energia totale dell'oggetto in un qualsiasi punto quando la sua velocità e la distanza dal centro della Terra sono note. Sulla superficie della Terra $v_i = v$ e $r_i = R_t$; quando l'oggetto raggiunge la sua quota massima, $v_f = 0$ ed $r_f = r_{\max}$. Poiché l'energia totale del sistema si conserva, l'applicazione di queste condizioni nell'Equazione 11.7 dà

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_t m}{R_t} = -\frac{GM_t m}{r_{\max}}$$

Risolvendo per v_i^2 si ottiene

$$v_i^2 = 2GM_t \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{r_{\max}} \right) \quad [11.10]$$

Se la velocità iniziale è nota, questa espressione può venire utilizzata per calcolare la quota massima h , poiché sappiamo che $h = r_{\max} - R_t$.

Siamo ora in condizione di calcolare la velocità minima che l'oggetto deve avere sulla superficie della Terra per poter sfuggire all'influenza del campo gravitazionale. Ciò corrisponde alla situazione in cui l'oggetto raggiunge esattamente una distanza infinita con una velocità finale nulla. Ponendo $r_{\max} = \infty$, nell'Equazione 11.10, e prendendo $v_i = v_{\text{fuga}}$ (velocità di fuga), otteniamo

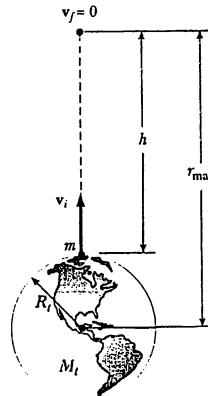


Figura 11.12 Un corpo di massa m lanciato verso l'alto dalla superficie terrestre con una velocità iniziale v_i raggiunge una quota massima h .

Velocità di fuga •

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2GM_t}{R_t}} \quad [11.11]$$

Notiamo che questa espressione per v_{fuga} è indipendente dalla massa dell'oggetto lanciato dalla Terra. Una navicella spaziale ha la stessa velocità di fuga di una molecola. Inoltre, il risultato è indipendente dalla *direzione* della velocità, purché la traiettoria non incontri la Terra.

Se all'oggetto viene fornita una velocità iniziale uguale a v_{fuga} , la sua energia totale è nulla. Ciò può essere visto notando che per $r = \infty$ l'energia cinetica e l'energia potenziale sono entrambe nulle. Se v_i è maggiore di v_{fuga} , l'energia totale è positiva e l'oggetto avrà un'energia cinetica residua, per $r = \infty$.

Si dovrebbe infine notare che le Equazioni 11.10 e 11.11 possono essere applicate ad oggetti lanciati verticalmente da un qualsiasi pianeta. Ossia, in generale, la velocità di fuga da un pianeta di massa M e raggio R è data da

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad [11.12]$$

TABELLA 11.3 Velocità di fuga per i pianeti, la Luna e il Sole

Pianeti	v_{fuga} (km/s)
Mercurio	4.3
Venere	10.3
Terra	11.2
Marte	5.0
Giove	60.0
Saturno	36.0
Urano	22.0
Nettuno	24.0
Plutone	1.1
Luna	2.3
Sole	618.0

Un elenco di valori della velocità di fuga, per i pianeti, la Luna e il Sole è riportato in Tabella 11.3. Notiamo che i valori variano da 1.1 km/s per Plutone a circa 618 km/s per il Sole. Questi risultati, collegati ad alcune idee della teoria cinetica dei gas (Capitolo 16), spiegano perché alcuni pianeti hanno atmosfere ed altri no. Come vedremo più avanti, una molecola di gas ad una data temperatura ha una velocità media che dipende dalla sua massa e dalla temperatura. Atomi più leggeri, come l'idrogeno e l'elio, hanno una velocità più alta di altre specie. Quando la velocità degli atomi più leggeri è molto maggiore di questa velocità media, una frazione notevole delle molecole può allontanarsi dal pianeta. Questo meccanismo spiega anche perché la Terra non riesca a trattenere l'idrogeno e l'elio nella sua atmosfera mentre altre molecole molto più pesanti, come l'ossigeno e l'azoto, non sfuggono. D'altra parte, Giove ha un valore della velocità di fuga molto elevato (60 km/s), che gli permette di trattenere l'idrogeno, costituente principale della sua atmosfera.

Buchi neri

Nel Capitolo 10 abbiamo descritto brevemente un evento raro detto supernova, la catastrofica esplosione di una stella di grande massa. Il materiale che rimane nel nucleo centrale di un tale oggetto continua a collassare, ma l'ultimo destino del nucleo dipende dalla sua massa. Se il nucleo ha una massa minore di 1.4 volte la massa del nostro Sole, esso si raffredda gradualmente e finisce la sua esistenza come una stella nana bianca. Invece, se il nucleo ha una massa maggiore, la stella può collassare ulteriormente sotto l'azione delle forze gravitazionali. Ciò che resta è una stella di neutroni, una regione compresa entro un raggio di circa 10 km. (Sulla Terra, un cucchiaino di questo materiale peserebbe circa cinque miliardi di tonnellate!)

Una morte ancora più singolare può accadere a una stella quando il suo nucleo ha una massa maggiore di tre masse solari. Non si conoscono in natura forze così intense da impedire il collasso di una tale stella. Il collasso può continuare finché la stella diventa soltanto un punto nello spazio, chiamato comunemente **bucco nero**. In realtà, i buchi neri sono resti di stelle collasate sotto il loro stesso peso. Oggetti come una nave spaziale possono entrare nel buco nero. Una volta dentro non possono più sfuggire. Appena un oggetto entra nel buco nero, esso è attratto in profondità verso il centro e rimane intrappolato per sempre (Fig. 11.13).

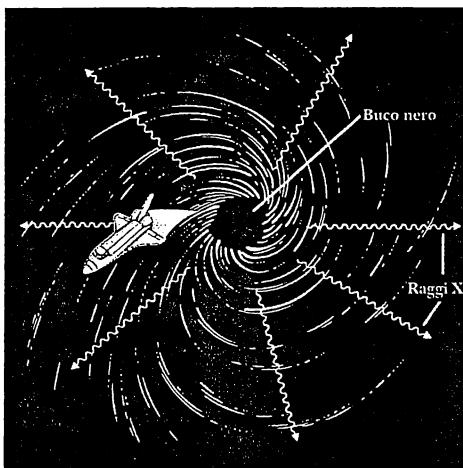


Figura 11.13 Il campo gravitazionale in prossimità di un buco nero è così intenso che nulla può sfuggire. Qualunque oggetto si muova in vicinanza di un buco nero può emettere raggi X.

La velocità di fuga da un corpo sferico può essere calcolata dall'Equazione 11.12. Se la velocità di fuga supera la velocità della luce, c , la radiazione all'interno (come la luce visibile) non può sfuggire e il corpo appare nero; di qui l'origine della terminologia "buco nero". Il raggio critico, R_s , per il quale ciò avviene è chiamato raggio di Schwarzschild (Fig. 11.14). Prendendo $v_{\text{fuga}} = c$ nell'Equazione 11.12 e ricavando R_s , si ottiene $R_s = 2GM/c^2$. Per esempio, il valore di R_s per un buco nero con una massa uguale a quella del Sole è calcolato in 3.0 km; con una massa uguale a quella della Terra avrebbe un raggio di circa 9 mm.

Sebbene la luce non possa sfuggire da un buco nero, la luce proveniente da eventi che accadono in vicinanza di un buco nero potrebbe essere visibile. Una stella compagna catturata dal forte campo gravitazionale del buco nero potrebbe emettere raggi X (Fig. 11.13). Su questa base di ragionamento sono stati rivelati parecchi candidati a buchi neri, il più famoso si trova in Cigno X-1, la prima sorgente di raggi X rivelata nella costellazione del Cigno. Vi è anche evidenza che supermassivi buchi neri esistano al centro delle galassie.

ESERCIZIO 5 La velocità di fuga dalla superficie della Terra è 11.2 km/s. Stimare la velocità di fuga per una astronave sulla superficie della Luna. La Luna ha una massa 1/81 di quella della Terra e un raggio 1/4 di quello terrestre. Risposta 2.49 km/s

ESERCIZIO 6 (a) Calcolare la minima energia necessaria per spedire un'astronave di 3000 kg dalla Terra a un punto distante nello spazio dove la gravità terrestre è trascurabile. (b) Se il viaggio dura tre settimane, quale potenza media dovranno fornire i motori? Risposta (a) 1.88×10^{11} J (b) 103 kW

ESERCIZIO 7 Un satellite si muove su un'orbita ellittica attorno alla Terra in modo tale che, al perigeo e all'apogeo, le distanze dal centro della Terra sono, rispettivamente, D e $4D$. Trovare il rapporto delle velocità nelle due posizioni, v_p/v_a . Risposta 4

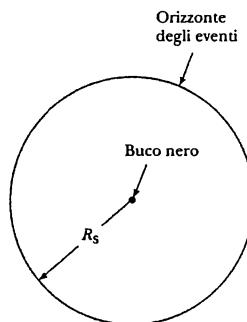


Figura 11.14 Un buco nero. La distanza R_s è uguale al raggio di Schwarzschild. Ogni evento che avviene entro il confine di raggio R_s , chiamato orizzonte degli eventi, è invisibile per un osservatore esterno.

11.5 • SPETTRI ATOMICI E TEORIA DI BOHR DELL'ATOMO DI IDROGENO

Come avete già imparato in chimica, l'atomo di idrogeno è il sistema atomico più semplice che si conosca, e soprattutto il più importante da capire. La maggior parte di ciò che si impara sull'atomo di idrogeno (che è costituito da un protone e un elettrone) può essere esteso a diversi ioni con un solo elettrone come He^+ e Li^{2+} . Inoltre, una esaurente comprensione della fisica basilare dell'atomo di idrogeno può essere usata per descrivere gli atomi più complessi e la tavola periodica degli elementi.

Supponiamo che un tubo di vetro, in cui sia stato fatto il vuoto, venga riempito con idrogeno (o qualche altro gas). Se, agli elettrodi posti alle estremità del tubo, viene applicata un'alta tensione sufficiente per produrre una corrente elettrica nel gas, il tubo emette una luce il cui colore è caratteristico del gas (cioè è il modo in cui una insegnina al neon funziona). Quando si analizza la luce emessa con uno strumento chiamato spettroscopio, si osserva una serie discreta di righe, ciascuna riga corrispondente a una diversa lunghezza d'onda, o colore, della luce. Una tale serie di righe spettrali è comunemente chiamata **spettro di emissione**. Le lunghezze d'onda contenute in un dato spettro a righe sono caratteristiche dell'elemento che emette la luce (Fig. 11.15). Poiché non esistono due elementi che emettono lo stesso spettro a righe, questo fenomeno rappresenta una meravigliosa e attendibile tecnica per identificare gli elementi in una sostanza.

Come imparerete più in dettaglio nel Capitolo 13, un'onda meccanica è una perturbazione che trasporta energia mentre si muove attraverso un sistema senza trasportare materia. Una forma comune di onda periodica è l'onda sinu-

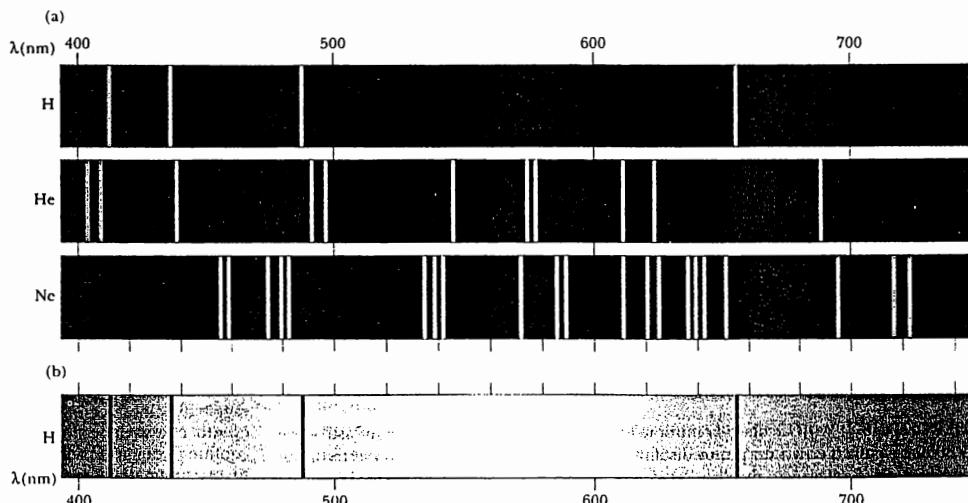


Figura 11.15 Spettri visibili (a) Spettri a righe prodotti dall'emissione nell'intervallo visibile per gli elementi: idrogeno, elio e neon. (b) Spettro di assorbimento per l'idrogeno. Le righe nere di assorbimento si presentano alle stesse lunghezze d'onda delle righe di emissione dell'idrogeno mostrate in (a).

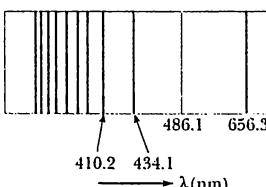
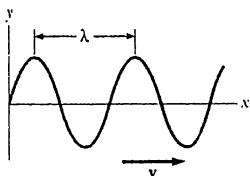


Figura 11.16 Un'onda sinusoidale che viaggia verso destra. Ogni punto dell'onda si muove di una distanza pari a una lunghezza d'onda, λ , in un tempo uguale al periodo dell'onda.

Figura 11.17 Una serie di righe spetrali per l'atomo di idrogeno. Le righe contrassegnate fanno parte della serie di Balmer.

soidale, la cui forma è disegnata in Figura 11.16. La distanza fra due creste consecutive dell'onda è chiamata **lunghezza d'onda**, λ . Quando l'onda viaggia verso destra con una velocità v , ogni punto dell'onda percorre una distanza pari a una lunghezza d'onda in un intervallo di tempo di un periodo, T (il tempo per un ciclo), cosicché la velocità dell'onda è data da $v = \lambda/T$. L'inverso del periodo, $1/T$, è la **frequenza**, f , dell'onda; essa rappresenta il numero di cicli per secondo. Così, la velocità dell'onda è spesso scritta come $v = \lambda f$. In questo paragrafo, poiché avremo a che fare con onde elettromagnetiche, le quali viaggiano alla velocità della luce, c , la relazione appropriata è

$$c = \lambda f \quad [11.13]$$

Lo spettro di emissione dell'idrogeno mostrato in Figura 11.17 include quattro righe caratteristiche che si trovano a lunghezze d'onda di 656.3 nm, 486.1 nm, 434.1 nm e 410.2 nm. Nel 1885, Johann Balmer (1825-1898) trovò che la lunghezza d'onda di queste righe e di altre meno rilevanti poteva essere descritta dalla seguente semplice equazione empirica:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{Serie di Balmer} \quad [11.14]$$

dove n può assumere valori interi di 3, 4, 5, ..., e R_H è una costante, ora chiamata **costante di Rydberg**. Se la lunghezza d'onda è espressa in metri, R_H ha il valore

$$R_H = 1.0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

La prima riga nella serie di Balmer, a 656.3 nm, corrisponde a $n = 3$ nell'Equazione 11.14; la riga a 486.1 nm corrisponde a $n = 4$ e così via.

Oltre alla luce emessa a una specifica lunghezza d'onda, un elemento può anche assorbire luce a una specifica lunghezza d'onda. Le righe spetrali corrispondenti a questo processo formano ciò che è noto come **spettro di assorbimento**. Uno spettro di assorbimento può essere ottenuto facendo passare una radiazione a spettro continuo (cioè contenente tutte le lunghezze d'onda) attraverso il vapore dell'elemento da analizzare. Lo spettro di assorbimento consiste di una serie di righe scure sovrapposte allo spettro continuo.

All'inizio del XX secolo, gli scienziati erano sconcertati dal fallimento della fisica classica nella spiegazione delle caratteristiche degli spettri. Perché gli atomi di un dato elemento emettono soltanto certe righe? Inoltre, perché gli atomi assorbono soltanto le lunghezze d'onda che emettono? Nel 1913, Bohr



Niels Bohr (1885-1962)

Fisico danese, propose il primo modello quantistico dell'atomo. Partecipò attivamente ai primi sviluppi della meccanica quantistica e fornì la gran parte della cornice filosofica. Tra gli anni 1920 e 1930, Bohr diede l'Istituto di Studi Avanzati di Copenhagen. L'Istituto era un centro di attrazione per la maggior parte dei migliori fisici del mondo e forniva un foro per lo scambio di idee. Quando Bohr visitò gli Stati Uniti nel 1939 per partecipare ad una conferenza scientifica, portò la notizia che la fissione dell'uranio era stata scoperta da Hahn e Strassman a Berlino. I risultati, confermati poco dopo da altri scienziati, costituirono le basi per lo sviluppo della bomba atomica negli Stati Uniti durante la seconda guerra mondiale. Fu insignito del premio Nobel per la fisica nel 1922 per le sue scoperte sulla struttura degli atomi e della radiazione emessa dagli stessi.

forrà una spiegazione degli spettri atomici che presenta alcune caratteristiche contenute nella teoria attualmente accettata. Facendo uso dell'atomo più semplice, l'idrogeno, Bohr descrisse un modello di ciò che ritenne potesse essere la struttura dell'atomo. Nel suo modello dell'atomo di idrogeno sono presenti sia caratteristiche classiche sia alcuni postulati che non potevano essere giustificati all'interno dello schema della fisica classica.³ I postulati della teoria di Bohr applicati all'atomo di idrogeno sono i seguenti.

1. L'elettrone si muove in orbite circolari attorno al protone sottoposto alla forza di attrazione coulombiana, come in Figura 11.18.
2. Solo certe orbite sono stabili. Queste sono orbite nelle quali l'atomo di idrogeno non emette energia sotto forma di radiazione. Quindi, l'energia totale dell'atomo rimane costante, e si può applicare la meccanica classica per descrivere il moto dell'elettrone.
3. L'atomo di idrogeno emette radiazione quando l'elettrone "salta" da un livello iniziale più energetico ad uno di energia minore. Il "salto" non può essere visualizzato o trattato classicamente. In particolare, la frequenza, f , della radiazione emessa nel salto è in relazione alla variazione di energia dell'atomo ed è **indipendente dalla frequenza del moto orbitale dell'elettrone**. La frequenza della radiazione emessa è

$$E_i - E_f = \hbar f \quad [11.15]$$

dove E_i è l'energia dello stato iniziale, E_f l'energia dello stato finale, \hbar è la costante di Planck (vedi Paragrafo 10.9), ed $E_i > E_f$.

4. La dimensione delle orbite elettroniche permesse è determinata da una condizione imposta al momento angolare orbitale dell'elettrone: le orbite permesse sono quelle per le quali il momento angolare dell'elettrone rispetto al nucleo è un multiplo intero di $\hbar = \hbar/2\pi$,

$$m_e v r = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad [11.16]$$

Usando questi quattro postulati, si possono calcolare i livelli energetici permessi e le lunghezze d'onda emesse dall'atomo di idrogeno. L'energia potenziale elettrica del sistema mostrato in Figura 11.18 è data da $U_e = -k_e e^2/r$, dove k_e è la costante di Coulomb⁴, e è la carica dell'elettrone, ed r è la distanza elettrone-protone. Quindi, l'energia totale dell'atomo, che contiene ambedue i termini di energia cinetica e potenziale, è

$$E = K + U_e = \frac{1}{2} m_e v^2 - k_e \frac{e^2}{r} \quad [11.17]$$

Applicando la seconda legge di Newton a questo sistema, vediamo che la forza di attrazione di Coulomb sull'elettrone $k_e e^2/r^2$ (Eq. 5.15), deve essere uguale al prodotto della massa per l'accelerazione centripeta ($a = v^2/r$) dell'elettrone:

$$\frac{k_e e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

³ Il modello di Bohr può essere applicato con successo agli ioni idrogenoidi come l'elio ionizzato e il litio ionizzato, ma la teoria non descrive correttamente gli spettri di atomi e ioni più complessi.

⁴ $k_e = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$, dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto. Vedi nota a pag. 134 [N.d.T.].

Postulati della teoria • di Bohr

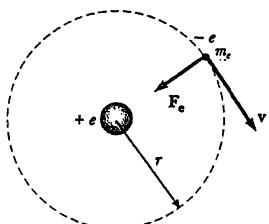


Figura 11.18 Modello dell'atomo di idrogeno di Bohr in cui all'elettrone sono permesse solamente orbite di raggi discreti.

Da questa espressione, vediamo immediatamente che l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{k_e e^2}{2r} \quad [11.18]$$

Sostituendo il valore di K nell'Equazione 11.17, troviamo che l'energia totale dell'atomo è

$$E = -\frac{k_e e^2}{2r} \quad [11.19]$$

- *Energia totale dell'atomo di idrogeno*

Si osservi che l'energia totale è negativa, indicando che il sistema elettrone-proton è legato. Questo significa che bisogna fornire una quantità di energia $k_e e^2 / 2r$ all'atomo per allontanare l'elettrone e portarlo ad uno stato di energia zero. Si può ottenere un'espressione per il raggio r delle orbite stazionarie, risolvendo il sistema di Equazioni 11.16 e 11.18:

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k_e e^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad [11.20]$$

- *Raggio delle orbite di Bohr per l'idrogeno*

Questo risultato mostra che i raggi hanno valori discreti, ossia sono *quantizzati*.

L'orbita con $n = 1$ ha il raggio più piccolo; esso è chiamato **raggio di Bohr**, a_0 , e ha il valore:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_e e^2} = 0.529 \text{ \AA} = 0.0529 \text{ nm} \quad [11.21]$$

- *Raggio di Bohr*

Le prime tre orbite di Bohr sono riportate in Figura 11.19.

La quantizzazione del raggio delle orbite porta immediatamente alla quantizzazione dell'energia. Si può vedere ciò sostituendo $r_n = n^2 a_0$ nell'Equazione 11.19, ottenendo con ciò i livelli di energia permessi:

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad [11.22]$$

Inserendo i valori numerici nell'Equazione 11.22abbiamo

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad [11.23]$$

(Nel Paragrafo 9.7 abbiamo visto che $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$). Il livello di energia più basso, chiamato **stato fondamentale**, ha $n = 1$ e un'energia $E_1 = -13.6 \text{ eV}$. Il livello successivo o **primo livello (stato) eccitato** ha $n = 2$ ed una energia $E_2 = E_1 / 2^2 = -3.4 \text{ eV}$. Un diagramma dei livelli energetici che mostra questi stati di energia discreti e i corrispondenti numeri quantici è riportato in Figura 11.20. Il livello massimo, limite, corrispondente a $n = \infty$ (o $r = \infty$) ed $E = 0$, rappresenta lo stato per cui l'elettrone è stato rimosso dall'atomo. La minima energia richiesta per ionizzare l'atomo (cioè, sottrarre completamente l'elettrone, quando si trova nello stato fondamentale, dall'influenza del protone) è detta **energia di ionizzazione**. Dalla Figura 11.20 vediamo che l'energia di ionizzazione per l'idrogeno ottenuta dal modello di Bohr è 13.6 eV. Ciò costituisce un ulteriore successo per la teoria di Bohr, poiché l'energia di ionizzazione dell'idrogeno era stata già misurata e risultava precisamente 13.6 eV.

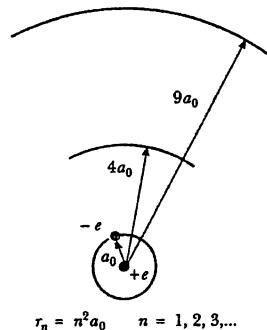


Figura 11.19 Le prime tre orbite di Bohr per l'idrogeno.

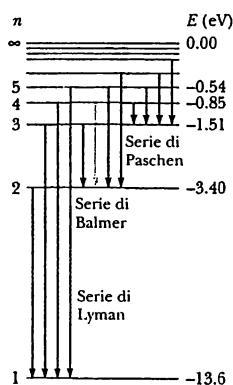


Figura 11.20 Diagramma dei livelli energetici per l'idrogeno. In tale diagramma le energie discrete permesse sono riportate nell'asse verticale. Nulla è riportato in orizzontale; lo scopo dei tratti orizzontali è quello di poter disegnare le transizioni permesse. I numeri quantici sono riportati sulla sinistra.

La Figura 11.20 mostra pure altre serie spettrali (le serie di Lyman e di Paschen) che furono trovate dopo la scoperta di Balmer. Questi spettri obbediscono ad altre formule empiriche, che si conciliano con il modello di Bohr.

L'Equazione 11.22, insieme al terzo postulato di Bohr, consente di calcolare la frequenza del fotone emesso nel salto da un'orbita più esterna ad un'orbita più interna:

$$f = \frac{E_i - E_f}{\hbar} = \frac{k_e e^2}{2a_0 \hbar} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad [11.24]$$

Dal momento che la grandezza che si misura è la lunghezza d'onda, è conveniente convertire la frequenza in lunghezza d'onda usando $c = \lambda f$:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k_e e^2}{2a_0 \hbar c} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad [11.25]$$

Il fatto rimarcatissimo è che l'espressione teorica, l'Equazione (11.25), è identica alla forma generalizzata delle relazioni empiriche scoperte da Balmer e altri, date dall'Equazione 11.14,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad [11.26]$$

comprovato dal fatto che la costante $k_e e^2 / 2a_0 \hbar c$ è uguale alla costante di Rydberg misurata sperimentalmente, $R_H = 1.0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$. Dopo che Bohr dimostrò l'accordo di queste due grandezze con una precisione di circa l'1%, fu subito accettato questo fatto come prova conclusiva della sua nuova teoria della meccanica quantistica. Inoltre, Bohr mostrò che tutte le serie spettrali dell'idrogeno hanno una naturale spiegazione nella teoria. Queste specie spettrali sono mostrate come transizioni tra livelli energetici nella Figura 11.20.

Bohr estese immediatamente il suo modello per l'idrogeno ad altri elementi in cui tutti gli elettroni, eccetto uno, sono stati tolti dall'influenza del nucleo. Si pensava che elementi ionizzati come He^+ , Li^{++} e Be^{+++} fossero presenti nelle atmosfere stellari calde, dove avvengono frequenti collisioni tra atomi con un'energia sufficiente ad allontanare uno o più elettroni atomici. Bohr mostrò che molte righe misteriose osservate nel Sole e in parecchie stelle non potevano essere dovute all'idrogeno, ma erano correttamente previste dalla sua teoria se attribuite all'elio (He^+) ionizzato una volta.

Sebbene il modello di Bohr abbia avuto qualche successo nel prevedere gli spettri di atomi con un solo elettrone, esso ha tuttavia qualche serio inconveniente. Per esempio, non può tener conto degli spettri visibili di atomi più complessi e non è in grado di prevedere alcuni sottili dettagli dell'atomo di idrogeno e di altri atomi semplici.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

In condizioni sperimentali normali, gli atomi di idrogeno mostrano più righe di emissione che di assorbimento. Perché?

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Supponiamo che l'energia di un elettrone in un atomo di idrogeno sia $-E$. Qual è l'energia cinetica? Qual è l'energia potenziale?

Esempio 11.5 Una transizione elettronica nell'idrogeno

L'elettrone dell'atomo d'idrogeno compie una transizione dal livello energetico con $n = 2$ a quello fondamentale (corrispondente a $n = 1$). Determinare la lunghezza d'onda e la frequenza della radiazione emessa.

Soluzione Per ottenere λ possiamo usare direttamente l'Equazione 11.26, con $n_i = 2$ e $n_f = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \\ \frac{1}{\lambda} &= R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R_H}{4} \\ \lambda &= \frac{4}{3R_H} = \frac{4}{3(1.097 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1})}\end{aligned}$$

$$= 1.215 \times 10^{-7} \text{ m} = 121.5 \text{ nm} \quad (\text{ultravioletto})$$

Poiché $c = \lambda f$, la frequenza della radiazione è

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.215 \times 10^{-7} \text{ m}} = 2.47 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

ESERCIZIO 8 Qual è la lunghezza d'onda della radiazione emessa dall'idrogeno quando l'elettrone passa dallo stato con $n = 3$ a quello con $n = 1$?

$$\text{Risposta } \frac{9}{8R_H} = 102.6 \text{ nm.}$$

Il principio di corrispondenza di Bohr

Nello studio della relatività nel Capitolo 9, abbiamo trovato che la meccanica newtoniana non si può usare per descrivere fenomeni che avvengono a velocità prossime a quelle della luce. La meccanica di Newton è un caso particolare della meccanica relativistica ed è utile solo quando v è molto minore di c . Similmente, la meccanica quantistica è in accordo con la fisica classica quando svaniscono le differenze di energia dei livelli quantizzati. Questo principio, portato avanti per primo da Bohr, è chiamato **principio di corrispondenza**.

Per esempio, si consideri un'orbita elettronica dell'atomo di idrogeno con $n > 10\,000$. Per un valore così grande di n , la differenza di energia tra livelli adiacenti è quasi nulla e i livelli sono pressoché continui. Conseguentemente, il modello classico è ragionevolmente accurato nel descrivere il sistema per grandi valori di n . In accordo con la descrizione classica, la frequenza della luce emessa dall'atomo è uguale alla frequenza di rivoluzione dell'elettrone nella sua orbita attorno al nucleo. I calcoli mostrano che per $n > 10\,000$, questa frequenza differisce da quella prevista dalla meccanica quantistica per meno dello 0.015%.

SOMMARIO

La legge di Newton della gravitazione universale stabilisce che la forza gravitazionale, che attrae due qualsiasi particelle di masse m_1 ed m_2 separate da una distanza r , ha il valore

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad [11.1]$$

dove G è la costante di gravitazione universale e vale $6.672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Le leggi di Keplero del moto dei pianeti stabiliscono che:

1. Tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche, con il Sole in uno dei fuochi.
2. Il raggio vettore, tracciato dal Sole a uno qualsiasi dei pianeti descrive aree uguali in intervalli di tempo uguali.

3. Il quadrato del periodo orbitale di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita ellittica.

La seconda legge di Keplero è una conseguenza del fatto che la forza di gravità è una *forza centrale*. Ciò implica che il momento angolare del sistema pianeta-Sole è una costante del moto.

La prima e terza legge sono una conseguenza della natura dell'inverso del quadrato della distanza nella legge di gravitazione universale. La seconda legge di Newton, tenendo conto dell'espressione della forza data dall'Equazione 11.1, prova che il periodo T e il raggio r dell'orbita di un pianeta attorno al Sole sono legate dalla relazione

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s} \right) r^3 \quad [11.4]$$

dove M_s è la massa del Sole. La maggior parte dei pianeti hanno orbite quasi circolari attorno al Sole. Nel caso di orbite ellittiche, l'Equazione 11.4 è valida se ad r viene sostituito il semiasse maggiore, a .

Se un sistema isolato consiste di una particella di massa m che si muove con velocità v nelle vicinanze di un corpo di grande massa M , l'*energia totale* del sistema è costante ed è data da

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad [11.6]$$

Se m si muove in un'orbita circolare di raggio r attorno a M , dove $M \gg m$, l'energia totale del sistema è data da

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad [11.9]$$

L'energia totale è negativa per qualunque sistema legato, cioè per un sistema la cui orbita è chiusa, come un'orbita circolare o ellittica.

La velocità minima che un oggetto deve avere per sfuggire al campo gravitazionale di una sfera uniforme di massa M e raggio R è

$$v_{\text{luga}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad [11.12]$$

Il modello di Bohr riesce a descrivere gli spettri dell'atomo di idrogeno e degli ioni idrogenoidi. Una delle ipotesi fondamentali del modello è che l'elettrone possa stare solo su particolari orbite tali che il momento angolare mv sia un multiplo intero di $h/2\pi = \hbar$. Assumendo orbite circolari e considerando l'interazione coulombiana fra l'elettrone e il protone, si trova che le energie degli stati quantici dell'idrogeno sono date da

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0 n^2} \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad [11.22]$$

dove k_e è la costante di Coulomb, e è la carica dell'elettrone, n è un numero intero chiamato **numero quantico** e $a_0 = 0.0529 \text{ nm}$ è il **raggio di Bohr**.

Se l'elettrone nell'atomo di idrogeno fa una transizione da un'orbita di numero quantico n_i a una di numero quantico n_f (con $n_f < n_i$), dall'atomo viene emessa una radiazione di frequenza

$$f = \frac{k_e e^2}{2a_0 \hbar} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad [11.24]$$

Usando $E = hf = hc/\lambda$, si possono calcolare le lunghezze d'onda della radiazione per le varie transizioni in cui c'è una variazione di numero quantico, $n_i \rightarrow n_f$. Le lunghezze d'onda calcolate sono in eccellente accordo con gli spettri a righe osservati.

DOMANDE CONCETTUALI

1. Se la forza gravitazionale su un oggetto è direttamente proporzionale alla sua massa, perché le masse più grandi non cadono con una accelerazione maggiore di quelle più piccole?
 2. La forza gravitazionale che il Sole esercita sulla Luna è circa il doppio di quella esercitata dalla Terra sulla Luna. Perché il Sole non strappa via la Luna dalla Terra durante una eclissi di Sole?
 3. Spiegare come mai è necessario più carburante ad una navicella per viaggiare dalla Terra alla Luna che non per il viaggio di ritorno. Stimarne la differenza.
 4. Spiegare dettagliatamente perché non viene compiuto lavoro su di un pianeta che si muove lungo un'orbita circolare attorno al Sole, sebbene una forza gravitazionale agisca sul pianeta. Qual è il lavoro netto fatto su di un pianeta durante ogni rivoluzione se si muove attorno al Sole in un'orbita ellittica?
 5. In quale punto della sua orbita ellittica la velocità di un pianeta è massima? E in quale punto è minima?
 6. Perché non viene posto in orbita un satellite per le comunicazioni attorno al 45mo parallelo? Non sarebbe ciò più utile per gli Stati Europei che non uno in orbita attorno all'Equatore?
 7. Si dice che Henry Cavendish in un suo esperimento del 1798 abbia "pesato la Terra". Fornire una spiegazione di questa affermazione.
 8. Se si potesse scavare un buco al centro della Terra,
- credete che la forza su una massa m obbedirebbe sempre alla Equazione 11.1? Quale pensate che sarebbe la forza su m al centro della Terra?
9. La navetta *Voyager* fu accelerata dalla forza di gravità del pianeta Giove fino al conseguimento della velocità di fuga dal Sole. In che modo ciò è possibile?
 10. La navetta *Apollo 13* ebbe dei problemi all'impianto di ossigeno circa a metà del suo viaggio verso la Luna. Perché la missione fu fatta proseguire attorno alla Luna con il rientro sulla Terra in una fase successiva e non subito?
 11. Discutere somiglianze e differenze tra la descrizione classica del moto planetario e il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno.
 12. La teoria di Bohr per l'atomo di idrogeno è basata su diverse ipotesi. Discutere queste ipotesi e il loro significato. Fra queste ipotesi ce n'è qualcuna in contraddizione con la fisica classica?
 13. Spiegare il significato insito nel fatto che l'energia totale dell'atomo nel modello di Bohr è negativa.
 14. Supponiamo che l'elettrone nell'atomo di idrogeno segua le leggi della meccanica classica invece di quelle della meccanica quantistica. Per quale ragione questo ipotetico atomo emetterebbe uno spettro continuo invece dello spettro a righe che si osserva sperimentalmente?

PROBLEMI

Paragrafo 11.1 La legge di gravitazione universale di Newton rivisitata

1. Chi esercita una forza gravitazionale di attrazione più intensa su un oggetto sulla Terra: la Luna o il Sole? Calcolare queste forze per una massa di 1.00 kg.
2. Due transatlantici, ciascuno con una massa di 40 000 tonnellate, si muovono su percorsi paralleli, a 100 m di distanza. Qual è l'intensità dell'accelerazione di uno dei due transatlantici rispetto all'altro dovuta alla mutua attrazione gravitazionale?
3. Il campo gravitazionale sulla superficie della Luna è circa un sesto di quello sulla superficie terrestre. Se il raggio della Luna è circa un quarto di quello della Terra, trovare il rapporto fra la densità media della Luna e la densità media della Terra.
4. Uno studente propone di misurare la costante gravitazionale G sospendendo due masse sferiche dal soffitto di una cattedrale e misurando la deflessione dei cavi dalla verticale. Tracciare un diagramma di corpo libero per una delle masse. Se vengono sospese due masse di 100.0 kg all'estremità di cavi lunghi 45.00 m e i cavi sono collegati al soffitto a 1.000 m di distanza, quale sarà la separazione delle masse?

5. Sulla rotta per la Luna gli astronauti dell'Apollo raggiungono un punto in cui l'attrazione gravitazionale della Luna è uguale a quella della Terra. Determinare la distanza di questo punto dal centro della Terra.

Paragrafo 11.2 Le leggi di Keplero

Paragrafo 11.3 La legge di gravitazione universale e il moto dei pianeti

6. Un satellite è in orbita circolare proprio sopra la superficie lunare. (Il raggio della Luna è 1738 km).
 - (a) Qual è l'accelerazione del satellite? (b) Qual è la velocità del satellite? (c) Qual è il periodo dell'orbita del satellite?
7. Il satellite *Explorer VIII*, messo in orbita il 3 Novembre 1960 per lo studio della ionosfera, ha i seguenti parametri orbitali: perigeo 459 km, apogeo 2289 km (ambedue le distanze sono calcolate dalla superficie terrestre), periodo 112.7 min. Determinare il rapporto v_p/v_a .
8. La distanza di avvicinamento al Sole della cometa di Halley è di 0.570 A.U. (1 A.U. = 1.50×10^{11} km) ed il suo periodo orbitale di 75.6 anni. Determinare la

distanza di massimo allontanamento della cometa dal Sole prima che abbia inizio il suo viaggio di ritorno (Figura P11.8).

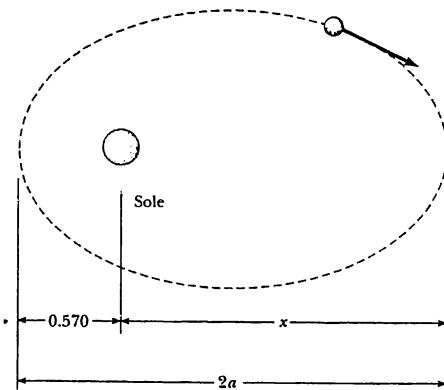


Figura P11.8

9. Io, una piccola Luna del pianeta Giove, ha un periodo orbitale di 1.77 giorni ed un raggio orbitale di 4.22×10^5 km. Determinare la massa di Giove.
10. Due pianeti X e Y viaggiano in senso antiorario in orbite circolari attorno a una stella, come in Figura P11.10. Il raggio delle loro orbite sta nel rapporto 3 : 1. A un certo istante, essi sono allineati come in Figura P11.10a, realizzando una linea retta con la stella. Cinque anni dopo, il pianeta X è ruotato di 90° come in Figura P11.10b. Dove si troverà il pianeta Y a questo tempo?

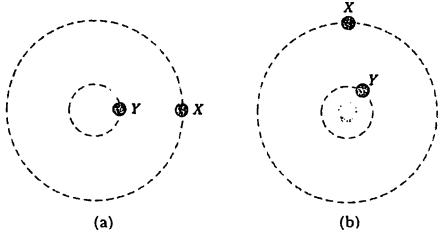


Figura P11.10

11. Un satellite "stazionario", che rimane sempre fermo nello stesso punto sopra l'equatore di un pianeta, viene posto in orbita attorno a Giove per studiare la famosa macchia rossa. Giove ha un periodo di rotazione di 9.9 ore. Determinare l'altezza di tale satellite in orbita attorno a Giove, usando i dati riportati nella Tabella 11.2.

Paragrafo 11.4 Considerazioni energetiche sul moto dei pianeti e dei satelliti

12. Un satellite di massa 200 kg è posto in un'orbita terrestre a 200 km sopra la superficie. (a) Assumendo un'orbita circolare, quanto impiega il satellite a completare un'orbita? (b) Qual è la velocità del satellite? (c) Qual è la minima energia necessaria per porre in orbita il satellite? (Si trascuri l'attrito con l'aria).
13. Una navicella spaziale è lanciata dalla superficie della Terra con una velocità iniziale di 2.00×10^4 m/s. Quale sarà la sua velocità quando sarà molto lontana dalla Terra (trascurare le forze d'attrito)?
14. Un satellite della Terra ha una massa di 100 kg e si trova a una altezza di 2.00×10^6 m. (a) Qual è l'energia potenziale del sistema satellite-Terra in questa posizione? (b) Qual è l'intensità della forza gravitazionale sul satellite?
15. Un satellite, di 1000 kg, è in orbita attorno alla Terra ad una altezza di 100 km. Quanta energia deve essere fornita al satellite per variare l'altezza dell'orbita da 100 km a 200 km?
16. Un satellite di massa m orbita attorno alla Terra ad un'altezza h_1 . Si vuole aumentare l'altezza dell'orbita circolare fino ad h_2 . Quanta energia si deve aggiungere al sistema per effettuare questa variazione di altezza?
17. Un satellite si muove in un'orbita circolare appena sopra la superficie di un pianeta. Dimostrare che la velocità orbitale v e la velocità di fuga del satellite, v_{fuga} , sono legate dall'espressione $v_{\text{fuga}} = \sqrt{2} v$.
18. Il pianeta Urano ha una massa di circa 14.0 volte la massa della Terra e un raggio 3.70 volte il raggio terrestre. (a) Stabilendo un rapporto con le corrispondenti grandezze terrestri, trovare l'accelerazione di gravità al di sopra delle nubi di Urano. (b) Trascurando la rotazione del pianeta, trovare la minima velocità di fuga da Urano.
19. Determinare la velocità di fuga per un razzo sul lato lontano di Ganimede, la più grande luna di Giove. Il raggio di Ganimede è 2.64×10^6 m e la sua massa è 1.495×10^{23} kg. La massa di Giove è 1.90×10^{27} kg e la distanza fra Giove e Ganimede è 1.071×10^9 m. Assicuratevi di includere l'effetto gravitazionale di Giove, ma potete trascurare il moto di rivoluzione di Giove e di Ganimede attorno al loro centro di massa.
20. Quanto lavoro viene svolto dal campo gravitazionale della Luna quando un meteorite arriva dallo spazio esterno e cade sulla superficie lunare?
21. In "The Moon Is a Harsh Mistress" (La Luna è una dura padrona) di Robert Heinlein, i coloni della Luna minacciano di lanciare pietre giù sulla Terra se non viene loro concessa l'indipendenza (o almeno una rappresentanza). Si assume che un cannone possa lanciare una pietra al doppio della velocità necessaria per sfuggire da una Luna isolata e stazionaria. Calcolare la velocità di questa pietra quando essa entra nell'atmosfera terrestre.

22. Un'astronave che ha la forma di un lungo cilindro ha una lunghezza di 100 m e la sua massa con tutti gli occupanti è 1000 kg. Essa si è perduta in vicinanza di un buco nero di 1.0 m di raggio e di massa 100 volte quella del Sole. (Fig. P11.22). Se la prua dell'astronave punta verso il centro del buco nero, e se la distanza fra la prua dell'astronave e il centro del buco nero è 10.0 km, (a) determinare l'accelerazione media dell'astronomo. (b) Qual è la differenza di accelerazione subita dagli occupanti la prua dell'astronave e da quelli in coda all'astronave, più lontani dal buco nero?

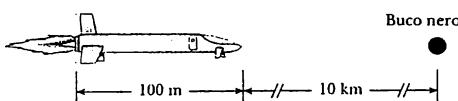


Figura P11.22

Paragrafo 11.5 Spettri atomici e teoria di Bohr dell'atomo di idrogeno

23. Per l'atomo di idrogeno inizialmente nel suo stato fondamentale, utilizzare il modello di Bohr per calcolare (a) la velocità orbitale dell'elettrone, (b) l'energia cinetica (in eV) dell'elettrone e (c) l'energia potenziale elettrica (in eV) dell'atomo.
24. Una radiazione è emessa da un atomo di idrogeno, il quale subisce una transizione dallo stato $n = 3$ allo stato $n = 2$. Calcolare (a) l'energia, (b) la lunghezza d'onda, (c) la frequenza della radiazione emessa.
25. Un atomo di idrogeno è nel suo primo stato eccitato ($n = 2$). Usando la teoria di Bohr dell'atomo, calcolare (a) il raggio dell'orbita, (b) la quantità di moto dell'elettrone, (c) il momento angolare dell'elettrone, (d) l'energia cinetica, (e) l'energia potenziale e (f) l'energia totale.
26. Quanta energia è necessaria per ionizzare l'idrogeno (a) quando si trova nel suo stato fondamentale? (b) Quando è nello stato con $n = 3$?
27. Mostrare che la velocità dell'elettrone nella n -ma orbita di Bohr dell'idrogeno è data da
- $$v_n = \frac{k_e e^2}{n \hbar}$$
28. (a) Calcolare il momento angolare della Luna dovuto al suo moto orbitale attorno alla Terra. Nel calcolo si usi 3.84×10^8 m come distanza media Terra-Luna e 2.36×10^6 s come periodo dell'orbita lunare. (b) Determinare il corrispondente numero quantico. (c) Di quale frazione dovrebbe essere aumentata la distanza Terra-Luna affinché il numero quantico aumenti di 1?
29. Voyager I e II sorvolarono Io, la luna di Giove, e fotografarono i vulcani attivi che emettono zolfo liquido a un'altezza di 70 km dalla superficie di questa luna. Determinare la velocità con cui lo zolfo esce dal vulcano. La massa di Io è di 8.9×10^{22} kg e il suo raggio di 1820 km.
30. Come astronauti, osservate che un piccolo pianeta è sferico. Dopo essere atterrati, venite fuori e camminate in linea retta ritornando alla vostra nave spaziale dal lato opposto dopo aver percorso 25.0 km. Trattenete allora un martello e una piuma a un'altezza di 1.40 m, li lasciate liberi, e li osservate scendere sulla superficie in 29.2 s. Determinare la massa del pianeta.
- G.K. O'Neill nel 1974 propose la realizzazione di una stazione spaziale cilindrica di 6.00 km di diametro e di 30 km di lunghezza. Tale stazione avrebbe dovuto avere sulla superficie interna città, distese verdi e laghi e, al centro, aria e nuvole. Tutto questo avrebbe dovuto essere mantenuto al suo posto dalla rotazione del cilindro attorno al suo asse maggiore. Determinare la velocità di rotazione del cilindro necessaria a simulare un campo di gravità di 1 g alle pareti del cilindro.
32. Un "satellite treetop" è un satellite che orbita appena al di sopra della superficie di un oggetto sferico, assumendo che non ci sia attrito con l'aria. (a) Trovare il periodo di un "satellite treetop" della Terra. (b) Dimostrare che la sua velocità è data da $v = \sqrt{4 \pi G \rho / 3}$, dove ρ è la densità del pianeta.
- Nel corso introduttivo di laboratorio di fisica, la bilancia di Cavendish, per la misura della costante gravitazionale G , è costituita da due sfere puntiformi di 1.50 kg e 15.0 g di massa rispettivamente, i cui centri distano 4.50 cm. Calcolare la forza gravitazionale tra le sfere.
34. Mostrare che la velocità di fuga dalla superficie di un pianeta di densità uniforme è direttamente proporzionale al raggio del pianeta.
35. Due ipotetici pianeti di masse m_1 ed m_2 e raggi r_1 ed r_2 , rispettivamente, sono fermi quando sono separati da una distanza infinita. A causa della loro attrazione gravitazionale, essi vanno l'uno verso l'altro su una rotta di collisione. (a) Quando la distanza fra i loro centri è d , trovare la velocità di ciascun pianeta e la loro velocità relativa. (b) Trovare l'energia cinetica di ciascun pianeta appena prima della collisione se $m_1 = 2.00 \times 10^{24}$ kg, $m_2 = 8.00 \times 10^{24}$ kg, $r_1 = 3.00 \times 10^6$ m, ed $r_2 = 5.00 \times 10^6$ m. (Suggerimento: si noti che sia l'energia che la quantità di moto si conservano).
36. La distanza massima della Terra dal Sole (all'afelio) è 1.521×10^{11} m, e la distanza di massimo avvicinamento (al perielio) è eguale a 1.471×10^{11} m. Se la velocità orbitale della Terra al perielio è 3.027×10^4 m/s, determinare (a) la velocità orbitale della Terra all'afelio, (b) l'energia cinetica e potenziale al perielio e (c) l'energia cinetica e potenziale all'afelio. Si conserva l'energia totale? (Trascurare le influenze della Luna e degli altri pianeti).

Problemi generali

29. Voyager I e II sorvolarono Io, la luna di Giove, e fotografarono i vulcani attivi che emettono zolfo liquido a

37. (a) Determinare la quantità di lavoro (in joule) che si deve compiere su un *payload* (razzo con un carico utile a pagamento) per portarlo a un'altezza di 1000 km sulla superficie terrestre. (b) Determinare la quantità di lavoro in più che si deve compiere per porre il *payload* in orbita circolare a questa altezza.
38. Una stella di neutroni è una stella collassata di densità estremamente elevata, in cui tutti gli elettroni e protoni sono stretti insieme per formare neutroni. Una stella di neutroni ha una massa che è circa uguale a quella del Sole ed un raggio di circa 10,0 km. Calcolare: (a) l'accelerazione di gravità alla superficie, (b) il peso di un uomo di 70,0 kg alla superficie e (c) l'energia necessaria per portare un neutrone di massa 1.67×10^{-27} kg dalla superficie all'infinito.
39. Quando la navicella *Apollo 11* entrò in orbita attorno alla Luna, la sua massa era 9.979×10^3 kg, il suo periodo di 119 min e la sua distanza media dal centro della Luna 1.849×10^6 m. Assumendo che la sua orbita fosse circolare e che la Luna sia una sfera uniforme, determinare (a) la massa della Luna, (b) la velocità orbitale della navicella e (c) l'energia minima richiesta alla navicella per abbandonare l'orbita e sfuggire all'attrazione gravitazionale della Luna.
40. Tre oggetti puntiformi che hanno masse m , $2m$ e $3m$, sono fissati ai vertici di un quadrato di lato di lunghezza a tale che l'oggetto più leggero si trovi nell'angolo alto a sinistra, il più pesante nell'angolo in basso a sinistra e l'altro oggetto nell'angolo in alto a destra. Determinare il modulo e la direzione dell'orientata dell'accelerazione gravitazionale risultante al centro del quadrato.
41. Impulsi di raggi X provenienti da Cygnus X-1, una sorgente nello spazio di radiazioni X, sono stati registrati da missili durante voli ad alta quota. Si può supporre che i segnali abbiano origine da una goccia di materia ionizzata che orbita intorno ad un buco nero con un periodo di 5,00 ms. Se la goccia descrive un'orbita circolare attorno ad un buco nero, la cui massa è 20,0 volte quella del Sole, quant'è il raggio dell'orbita?
42. Studi riguardanti il legame tra il Sole e la Via Lattea hanno rivelato che il Sole è situato vicino al bordo esterno del disco galattico, a circa 30 000 anni-luce dal centro. Inoltre, si è trovato che il Sole ha una velocità orbitale di circa 250 km/s attorno al centro della galassia. (a) Quant'è il periodo di questo moto del Sole nella galassia? (b) Quant'è approssimativamente la massa della Via Lattea? Sfruttando il fatto che il Sole è una tipica stella, calcolare il numero di stelle nella nostra galassia.
43. Quattro possibili transizioni per l'atomo di idrogeno sono le seguenti:
- (A) $n_i = 2; n_f = 5$ (B) $n_i = 5; n_f = 3$
- (C) $n_i = 7; n_f = 4$ (D) $n_i = 4; n_f = 7$
44. (a) Quale transizione emette il fotone con la lunghezza d'onda più corta?
 (b) In quale transizione l'atomo guadagna più energia?
 (c) In quale(i) transizione(i) l'atomo perde energia?
 45. *Vanguard I*, lanciato il 3 marzo 1958, è il più vecchio satellite umano ancora in orbita. La sua orbita iniziale aveva un apogeo di 3970 km e un perigeo di 650 km. La sua velocità massima era 8,23 km/s ed ha una massa di 1,60 kg. (a) Determinare il periodo dell'orbita. (Usare il semiasse maggiore). (b) Determinare la velocità all'apogeo e al perigeo. (c) Trovare l'energia totale del satellite.
46. Due stelle di massa M ed m , poste ad una distanza d , ruotano in orbite circolari attorno al loro centro di massa (Fig. P11.45). Mostrare che ogni stella ha un periodo dato da
- $$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} d^3$$
- (Suggerimento: applicare la seconda legge di Newton ad ogni stella e notare come la condizione del centro di massa imponga $Mr_2 = mr_1$, dove $r_1 + r_2 = d$).

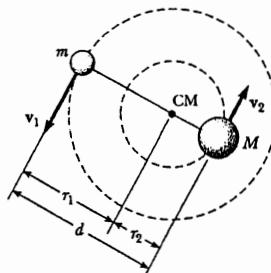


Figura P11.45

46. Nel 1978, astronomi del Naval Observatory scoprirono che il pianeta Plutone ha una Luna, chiamata Caronte, che oscura il pianeta ogni 6,4 giorni. Se dalle osservazioni effettuate risulta che la distanza da centro a centro tra Plutone e Caronte è di 19 700 km, determinare la massa totale ($M + m$) di Plutone e della sua Luna. (Suggerimento: usare il risultato del Problema 45).
47. Due atomi di idrogeno urtano centralmente e rimangono con energia cinetica nulla. Ciascuno emette un fotone di 121,6 nm (transizione da $n = 2$ a $n = 1$). A quale velocità i due atomi si muovono prima dell'urto?
48. Un razzo ha una velocità iniziale verticale, sulla su-

periferie della Terra, di $v_0 = 2\sqrt{Rg}$ dove R è il raggio terrestre e l'accelerazione di gravità alla superficie è g . I motori del razzo vengono spenti, e successivamente il razzo viaggia soltanto sotto l'azione della forza gravitazionale. (Si trascuri l'attrito con l'atmosfera e la rotazione terrestre). Ricavare un'espressione per la velocità, v , in funzione della distanza, r , dal centro della Terra in termini di g , R ed r .

Problemi al calcolatore

- S1. Quattro masse puntiformi sono fissate come è mostrato in Figura PC11.1. L'energia potenziale gravitazionale per una particella di prova di massa m che si muove lungo l'asse x nel campo gravitazionale delle masse fissate si può scrivere come

$$U(x) = -\frac{GM_1 m}{r_1} - \frac{GM_2 m}{r_2} - \frac{GM_3 m}{r_3} - \frac{GM_4 m}{r_4}$$

dove $r_2 = r_4 = [b^2 + (x + a)^2]^{1/2}$ e $r_3 = r_5 = [b^2 + (x - a)^2]^{1/2}$. Il Foglio Elettronico 11.1 calcola $U(x)$ e la forza $F(x) = -dU(x)/dx$ esercitata sulla particella di prova. Le grandezze M_1, M_2, M_3, M_4, a , e b sono parametri di ingresso. La massa della particella di prova è 1.00 kg. (Questo è il caso di due particelle sull'asse y in $y = +1.00$ m e -1.00 m). (a) Fare un grafico di $U(x)$ e $F(x)$ versus x per $x = -4.00$ m fino a $x = +4.00$ m. (b) Se la particella di prova ha una energia di -7.50×10^{-11} J, descrivere il moto della particella. (c) Come varia la forza sulla particella quando essa si muove lungo l'asse x ?

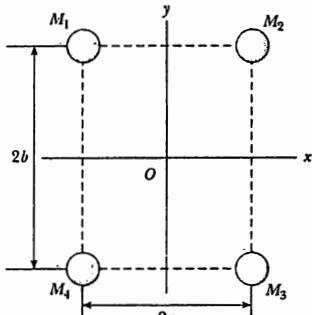


Figura PC11.1

- S2. Nel Foglio Elettronico 11.1, sia $a = 1.00$ m, $b = 0.50$ m, ed $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 1.00$ kg. La massa della particella è 1.00 kg. (a) Fare un grafico di $U(x)$ e di $F(x)$

versus x . (b) Se la particella di prova ha una energia di -2.00×10^{-10} J, quale moto è possibile?

- S3. Se un proiettile viene sparato verticalmente sulla superficie terrestre con una velocità iniziale v_0 inferiore della velocità di fuga $v_{\text{fuga}} = \sqrt{2gR_t} = 11.2$ km/s, il proiettile salirà fino a una altezza massima h sopra la superficie terrestre e ritornerà indietro. Trascurando la resistenza dell'aria e usando la conservazione dell'energia, mostrare che

$$h = \frac{R_t v_0^2}{2gR_t - v_0}$$

dove R_t è il raggio della Terra. Scrivere un foglio elettronico per calcolare h per $v_0 = 1, 2, 3, \dots, 11$ km/s. Fare un grafico di h/R_t versus v_0 . Cosa accade quando v_0 si avvicina alla velocità di fuga v_{fuga} ?

- S4. L'accelerazione di un oggetto che si muove nel campo gravitazionale della Terra è

$$\mathbf{a} = -GM_t \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione diretto dal centro della Terra verso l'oggetto. Scegliendo l'origine al centro della Terra e assumendo che l'oggetto si muova nel piano xy , l'accelerazione ha componenti cartesiane

$$a_x = -\frac{GM_t x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad a_y = \frac{GM_t y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Scrivere un foglio elettronico (o un programma per computer) adatto per calcolare la posizione dell'oggetto in funzione del tempo. (Usare la tecnica sviluppata nel Foglio Elettronico 11.1 come modello per il programma). Si assuma che la posizione iniziale dell'oggetto sia $x = 0$ e $y = 2R_t$, dove R_t è il raggio terrestre, e si dia all'oggetto una velocità iniziale di 5 km/s nella direzione positiva x . L'incremento temporale deve essere piccolo abbastanza da poter essere praticabile. Si tenti con 5 s. Riportare in grafico le coordinate x e y dell'oggetto in funzione del tempo. L'oggetto colpirà la Terra? Variare la velocità iniziale finché non si trovi un'orbita circolare.

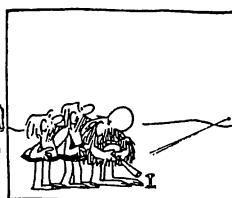
- S5. Modificare il foglio elettronico (o il programma) del Problema S4 per calcolare l'energia cinetica, potenziale, e l'energia totale in funzione del tempo. Come varia nel tempo nei diversi casi?

- S6. Modificare il foglio elettronico (o il programma) del Problema S4 per calcolare il momento angolare dell'oggetto. In coordinate ortogonali, $L = m(xv_y - yv_x)$. Come varia il momento angolare col tempo? La seconda legge di Keplero sul moto dei pianeti implica che L si conservi. L calcolata è costante?

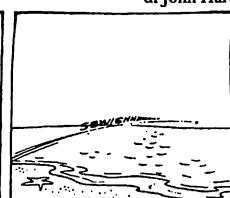
RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- La seconda legge di Keplero è una conseguenza della conservazione del momento angolare. Il momento angolare si conserva ogni volta non c'è momento meccanico, la qual cosa è vera per qualsiasi forza centrale, indipendentemente dalla dipendenza dalla distanza di separazione. Quindi, la seconda legge di Keplero resterebbe invariata. La particolare forma matematica della terza legge di Keplero dipende dal carattere della forza come l'inverso del quadrato. Se la forza andasse come l'inverso del cubo, vi sarebbe una relazione di proporzionalità fra una potenza del periodo e una potenza del semiasse maggiore, ma le potenze sarebbero diverse da quelle della effettiva legge.
- L'attrito dell'aria causa una diminuzione dell'energia meccanica del sistema satellite-Terra. Ciò riduce l'asse maggiore dell'orbita, portando il satellite più vicino alla superficie della Terra. Un satellite in un'orbita più piccola, tuttavia, deve viaggiare più velocemente. Quindi, l'effetto dell'attrito dell'aria è di far crescere la velocità del satellite!
- La terza legge di Keplero (Eq. 11.4), che si applica a tutti i pianeti, ci dice che il periodo di un pianeta è proporzionale a $r^{3/2}$. Poiché Saturno e Giove sono molto più lontani dal Sole che la Terra, essi hanno periodi più lunghi. Il campo gravitazionale del Sole (la cui intensità è GM_S/r^2) è molto più debole alla distanza del pianeta Giove. Quindi, i pianeti esterni subiscono una accelerazione centripeta molto minore di quella della Terra e, corrispondentemente, periodi più lunghi.
- In uno spettro di emissione, un gas viene inizialmente eccitato in uno stato quantico più alto. Lo spettro di emissione è generato dalla successiva transizione verso il basso che può avvenire verso tutti gli stati più bassi. Se la transizione non avviene verso lo stato più basso, l'atomo può compiere una ulteriore transizione dallo stato intermedio allo stato più basso. Per esempio, una transizione può avvenire da $n = 10$ a $n = 5$, seguita da una transizione da $n = 5$ a $n = 1$. Quindi, vi è un ricco mescolamento di righe spettrali nello spettro, corrispondenti a questo grande numero di possibili transizioni. Uno spettro di assorbimento è normalmente generato con il gas a temperatura ambiente, alla quale si trova la gran parte di tutti gli atomi nello stato fondamentale. Quindi, quando viene assorbita una radiazione, sono possibili le transizioni verso l'alto che coinvolgono *soltanto lo stato fondamentale*. Perciò, vi sono meno transizioni che per lo spettro di emissione e un minor numero di righe.
- Nella discussione sull'atomo di idrogeno, si può vedere che l'energia cinetica è uguale a metà del valore assoluto dell'energia potenziale. Quindi, possiamo avere $K = E$ e $U_r = -2E$.

B.C.



di John Hart



12

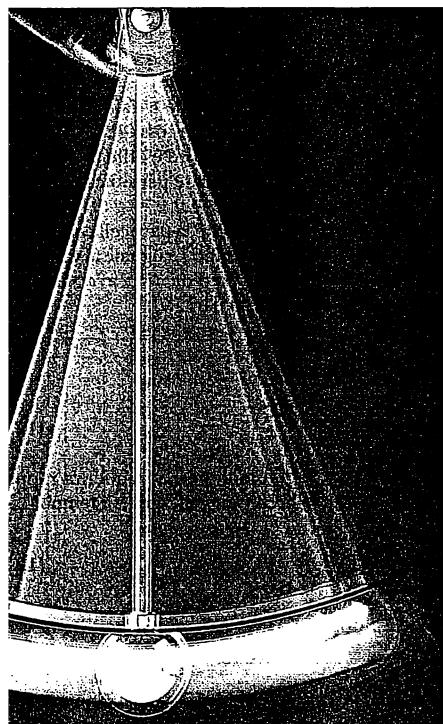
Moto oscillatorio

Se la forza che agisce su un corpo varia col tempo, anche l'accelerazione del corpo varia col tempo. Se la forza agisce sempre verso la posizione di equilibrio del corpo, ne risulta un moto ripetitivo di avanti e indietro rispetto a questa posizione. Il moto è un esempio di ciò che si chiama moto *periodico* o *oscillatorio*.

Probabilmente vi sono più familiari alcuni esempi di moto periodico, come le oscillazioni di una massa collegata a una molla, il moto di un pendolo e le vibrazioni di uno strumento musicale a corda. Numerosi sistemi sono dotati di moto oscillatorio. Per esempio, le molecole di un solido

oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio; le onde elettromagnetiche, come le onde luminose, le onde radar e radio, sono caratterizzate dai vettori campo elettrico e

- 12.1 Moto armonico semplice
- 12.2 Moto di una massa collegata a una molla
- 12.3 Energia di un oscillatore armonico semplice
- 12.4 Moto del pendolo
- 12.5 Oscillazioni smorzate (Facoltativo)
- 12.6 Oscillazioni forzate (Facoltativo)



◀ **Fotografia a lunga esposizione di un pendolo, che consiste di una piccola sfera sospesa tramite una fune leggera. Il tempo necessario al pendolo per compiere una oscillazione completa si chiama periodo, e lo spostamento massimo del pendolo dalla posizione verticale si chiama ampiezza. Come vedremo in questo capitolo, il periodo del suo moto, per piccole ampiezze, dipende soltanto dalla lunghezza del pendolo e dal valore dell'accelerazione di gravità.**
(James Stevenson/SPL/Photo Researchers)

magnetico oscillanti; nei circuiti a corrente alternata, tensione, corrente e carica elettrica variano periodicamente con il tempo.

Gran parte di questo capitolo riguarderà il **moto armonico semplice**. In questo tipo di moto, un oggetto oscilla indefinitamente fra due punti dello spazio senza perdita di energia meccanica. Nei sistemi meccanici reali, sono sempre presenti forze ritardanti (attrito). Queste forze riducono l'energia meccanica del sistema nel tempo e le oscillazioni si dicono *smorezze*. Se dall'esterno, invece, viene applicata una forza eccitatrice in modo da compensare la perdita di energia con l'energia fornita, chiameremo il moto *oscillazione forzata*.

12.1 • MOTO ARMONICO SEMPLICE

Una particella che si muove lungo l'asse x compie un **moto armonico semplice** quando x , la sua posizione rispetto alla posizione di equilibrio, varia nel tempo secondo la relazione

Posizione in funzione del tempo in un moto armonico semplice

$$\rightarrow x = A \cos(\omega t + \phi) \quad [12.1]$$

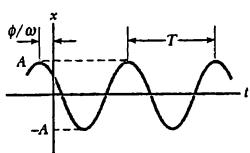


Figura 12.1 Posizione in funzione del tempo per una particella che si muove di moto armonico semplice. A è l'ampiezza del moto e T è il periodo.

dove ω , A e ϕ sono costanti del moto. Per dare un significato fisico a queste costanti, conviene riportare x in funzione di t , come in Figura 12.1. Notiamo innanzitutto che A , chiamata **ampiezza** del moto, è semplicemente lo **spostamento massimo della particella sia nel verso positivo che in quello negativo delle x** . La costante ω è detta **pulsazione** (definita nell'Eq. 12.4). L'angolo costante ϕ è chiamato **costante di fase** (o angolo di fase) e, analogamente all'ampiezza A , è determinato unicamente dalla posizione e dalla velocità iniziale della particella. Le costanti A e ϕ ci dicono quale fosse la posizione al tempo $t=0$. La grandezza $(\omega t + \phi)$ è detta **fase del moto** ed è utile per confrontare il moto di due particelle. Si noti che la funzione x è periodica e si ripete ogni volta che ωt aumenta di 2π radianti.

Il **periodo** del moto, T , è il tempo necessario affinché la particella compia un ciclo completo del suo moto. Cioè, il valore di x al tempo t è uguale al valore di x al tempo $t+T$. Si può dimostrare che il periodo è dato da $T = 2\pi/\omega$, usando il fatto che la fase aumenta di 2π radianti in un tempo pari a T :

$$\omega t + \phi + 2\pi = \omega(t+T) + \phi$$

Semplificando questa espressione, vediamo che $\omega T = 2\pi$, ossia

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [12.2]$$

L'inverso del periodo è detto **frequenza** del moto, f . La frequenza rappresenta il numero di oscillazioni che la particella compie nell'unità di tempo:

$$\text{Frequenza} \cdot \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [12.3]$$

L'unità di misura di f è cicli al secondo, o hertz (Hz). Riscrivendo l'Equazione 12.3 otteniamo

$$\text{Pulsazione} \cdot \rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [12.4]$$

La costante ω è detta **pulsazione**, come già abbiamo fatto notare, e ha come unità di misura radianti al secondo (rad/s). Discuteremo il significato geometrico di ω nel Paragrafo 12.4.

Possiamo ottenere la **velocità** di una particella soggetta a un moto armonico semplice derivando rispetto al tempo la posizione x (Eq. 12.1):

$$\rightarrow v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad [12.5]$$

L'**accelerazione** della particella è dv/dt :

$$\rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad [12.6]$$

Poiché $x = A \cos(\omega t + \phi)$, possiamo esprimere l'Equazione 12.6 nella forma

$$\rightarrow a = -\omega^2 x \quad [12.7]$$

Dall'Equazione 12.5 vediamo che, poiché le funzioni seno e coseno oscillano fra ± 1 , i valori estremi di v sono $\pm \omega A$. L'Equazione 12.6 ci dice che i valori estremi dell'accelerazione sono $\pm \omega^2 A$. Quindi, i valori **massimi** della velocità e dell'accelerazione sono

$$v_{\max} = \omega A \quad [12.8]$$

$$a_{\max} = \omega^2 A \quad [12.9]$$

- *Velocità nel moto armonico semplice*

- *Accelerazione nel moto armonico semplice*

- *Valori massimi della velocità e dell'accelerazione nel moto armonico semplice*

La Figura 12.2a riporta la posizione in funzione del tempo per un valore arbitrario della costante di fase. Le curve della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo sono illustrate nelle Figure 12.2b e 12.2c. Esse mostrano che la fase della velocità differisce dalla fase della posizione di $\pi/2$ rad, o di 90° . Cioè, quando x è massimo o minimo, la velocità è nulla. Analogamente, quando x è

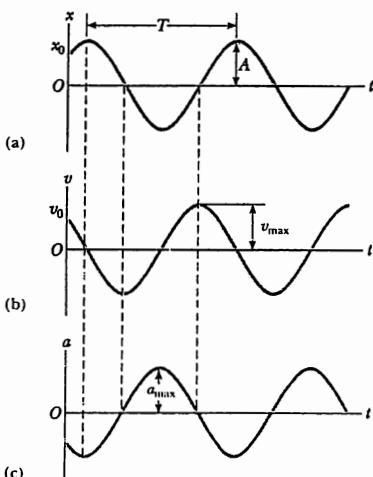


Figura 12.2 Rappresentazione grafica di un moto armonico semplice:
(a) la posizione in funzione del tempo, (b) la velocità in funzione del tempo e (c) l'accelerazione in funzione del tempo. Si noti che la velocità è sfasata di 90° rispetto alla posizione e l'accelerazione è sfasata di 180° rispetto alla posizione.

zero il modulo della velocità è massimo. Inoltre, notiamo che la fase dell'accelerazione differisce dalla fase della posizione di π radienti, o 180° . Cioè, quando x è massimo, a è un massimo nel verso opposto.

Come stabilito precedentemente, $x = A \cos(\omega t + \phi)$ è un'espressione generale per la posizione della particella rispetto alla posizione di equilibrio, dove la costante di fase ϕ e l'ampiezza A devono essere scelte in base alle condizioni iniziali del moto. Supponiamo che siano date la posizione iniziale x_0 e la velocità iniziale v_0 , di un singolo oscillatore; cioè, per $t = 0$, $x = x_0$ e $v = v_0$. Sotto queste condizioni, le Equazioni 12.1 e 12.5 danno

$$x_0 = A \cos \phi \quad \text{e} \quad v_0 = -\omega A \sin \phi \quad [12.10]$$

Dividendo queste due equazioni si elimina A , ottenendo $(v_0/x_0) = -\omega \tan \phi$, ossia

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad [12.11]$$

La fase ϕ e l'ampiezza A • possono essere ottenute dalle condizioni iniziali

Inoltre, se consideriamo la somma $x_0^2 + (v_0/\omega)^2 = A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi$ (dove abbiamo usato l'Eq. 12.10) e ricaviamo A , troviamo che

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad [12.12]$$

Si vede, così, che ϕ e A sono noti se x_0 , ω e v_0 vengono specificati. Tratteremo alcuni casi specifici nel prossimo paragrafo.

Concludiamo questo paragrafo sottolineando le seguenti proprietà di una particella che si muove di moto armonico semplice:

Proprietà del moto • armonico semplice

- La posizione, la velocità e l'accelerazione variano tutti sinusoidalmente nel tempo ma non sono in fase, come è mostrato nella Figura 12.2.
- L'accelerazione è proporzionale allo spostamento, ma ha verso opposto.
- La frequenza e il periodo del moto sono indipendenti dall'ampiezza.

Esempio 12.1 Un corpo oscillante

Un corpo oscilla di moto armonico semplice lungo l'asse x e la sua posizione varia col tempo secondo l'equazione

$$x = (4.00 \text{ m}) \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$$

dove t è in secondi e i due termini in parentesi sono in radianti.

(a) Determinare l'ampiezza, la frequenza e il periodo del moto.

Soluzione Dal confronto di questa equazione con

l'equazione generale $x = A \cos(\omega t + \phi)$ si trova $A = 4.00 \text{ m}$, $\omega = \pi \text{ rad/s}$ e quindi $f = \omega / 2\pi = \pi / 2\pi = 0.50 \text{ s}^{-1}$ e $T = 1/f = 2.00 \text{ s}$.

(b) Calcolare velocità ed accelerazione del corpo al variare del tempo t .

Soluzione

$$v = \frac{dx}{dt} = -4.00 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{4} \right) \frac{d}{dt} (\pi t)$$

$$= -(4.00 \pi \text{ m/s}) \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = -4.00 \pi \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{dt}(\pi t) \\ &= -(4.00 \pi^2 \text{ m/s}^2) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1 Usando i risultati di (b) calcolare posizione, velocità e accelerazione al tempo $t = 1.00 \text{ s}$.

Risposta $x = -2.83 \text{ m}$; $v = 8.89 \text{ m/s}$; $a = 27.9 \text{ m/s}^2$

ESERCIZIO 2 Calcolare la massima velocità e la massima accelerazione del corpo. Risposta Dalle espressioni generali di $v(t)$ e $a(t)$ trovate in (b) si vede che esse hanno valore massimo quando la loro funzione trigonometrica seno o coseno è pari a 1; quindi v , varia tra $\pm 4.00 \pi \text{ m/s}$ ed a tra $\pm 4.00 \pi^2 \text{ m/s}^2$; $v_{\max} = 4.00 \pi \text{ m/s}$ e $a_{\max} = 4.00 \pi^2 \text{ m/s}^2$.

ESERCIZIO 3 Una particella che si muove di moto armonico semplice viaggia su un percorso totale di 20.0 cm in ciascun ciclo del suo moto, e la sua accelerazione massima è 50.0 m/s^2 . Trovare (a) la pulsazione del moto e (b) la velocità massima della particella. Risposta (a) 31.6 rad/s (b) 1.58 m/s

12.2 • MOTO DI UNA MASSA COLLEGATA A UNA MOLLA

Consideriamo un sistema fisico costituito da una massa, m , collegata all'estremità di una molla, che sia libera di muoversi su un piano orizzontale privo di attrito (Fig. 12.3). Sappiamo per esperienza che questo sistema oscillatorà avanti e indietro se verrà spostato dalla sua posizione di equilibrio $x = 0$, in cui la molla non è in tensione. Poiché la superficie è priva di attrito, la massa compirà un moto armonico semplice. Un dispositivo sperimentale che dimostra con chiarezza che questo sistema si muove di moto armonico semplice è illustrato in Figura 12.4. Una penna è fissata a una massa che oscilla verticalmente per mezzo di una molla. Durante il moto della massa, una striscia di carta si muove orizzontalmente, così come viene mostrato, e la penna disegna un andamento sinusoidale. Possiamo capire ciò qualitativamente ricordando innanzitutto che quando la massa si sposta dall'equilibrio di una piccola distanza x , la molla esercita su di essa una forza data dalla legge di Hooke,

$$F = -kx \quad [12.13]$$

dove k è la costante elastica della molla. Questa forza viene chiamata **forza di richiamo lineare** perché è proporzionale allo spostamento ed è sempre diretta verso la posizione di equilibrio, *opposta* allo spostamento. Cioè, quando la massa si sposta verso destra in Figura 12.3, x è positivo e la forza di richiamo agisce verso sinistra. Quando la massa si sposta verso sinistra rispetto alla posizione $x = 0$, x è negativo ed F agisce verso destra.

Se applichiamo la seconda legge di Newton al moto della massa lungo la direzione x , otteniamo

$$\begin{aligned} F &= -kx = ma \\ a &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \quad [12.14]$$

Cioè, proprio quanto abbiamo imparato nel Paragrafo 12.1, l'accelerazione è proporzionale allo spostamento della massa dalla posizione di equilibrio ed è in verso opposto. Se la massa viene spostata a una distanza massima, $x = A$, e a un certo istante iniziale viene lasciata libera da ferma, la sua accelerazione iniziale è $-kA/m$, (cioè, l'accelerazione ha il suo massimo valore negativo). Quando la

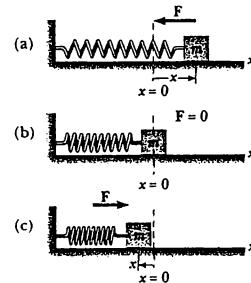


Figura 12.3 Una massa collegata a una molla si muove su un piano privo di attrito di moto armonico semplice. (a) Quando la massa viene spostata a destra della posizione di equilibrio, lo spostamento è positivo e l'accelerazione è negativa. (b) Nella posizione di equilibrio, $x = 0$, l'accelerazione è nulla ma la velocità è massima. (c) Quando lo spostamento è negativo, l'accelerazione è positiva.

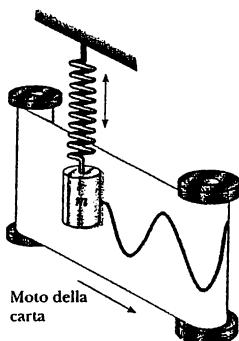


Figura 12.4 Un apparato sperimentale per dimostrare il moto armonico semplice. Una penna collegata a una massa oscillante traccia una onda sinusoidale sulla carta che scorre.

massa passa dalla posizione di equilibrio, la posizione è $x = 0$ e l'accelerazione è nulla. In questo istante il modulo della sua velocità è massimo. La massa continua a muoversi a sinistra della sua posizione di equilibrio e, infine, raggiunge la posizione $x = -A$; in questo istante la sua accelerazione è kA/m (massimo valore positivo) e la sua velocità è nulla. Vediamo, allora, che la massa oscilla fra i due punti di inversione $x = \pm A$. In un ciclo completo del suo moto la massa compie un percorso di $4A$.

Descriviamo, ora, questo moto in modo quantitativo. Ricordando che $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, possiamo esprimere l'Equazione 12.14 come

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad [12.15]$$

Se sostituiamo il rapporto k/m con il simbolo ω^2 , abbiano

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad [12.16]$$

allora l'Equazione 12.15 si può scrivere nella forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad [12.17]$$

Ciò che si vuole è una soluzione dell'Equazione 12.17, cioè, una funzione $x(t)$ che soddisfi l'equazione differenziale del secondo ordine. Poiché le Equazioni 12.17 e 12.7 sono equivalenti, vediamo che la soluzione deve essere quella di un moto armonico semplice:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Per accettare ciò esplicitamente, si noti che se $x = A \cos(\omega t + \phi)$, allora

$$\frac{dx}{dt} = A \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \phi) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Confrontando le espressioni per x e d^2x/dt^2 , vediamo $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ e l'Equazione 12.17 è soddisfatta.

Basata sulla precedente discussione, si può fare la seguente affermazione:

Ogniqualvolta una forza agente su una particella è direttamente proporzionale allo spostamento ma in verso opposto, la particella si muove di moto armonico semplice.

Daremo ulteriori esempi fisici nei paragrafi seguenti.

Poiché il periodo di un moto armonico semplice è $T = 2\pi/\omega$ e la frequenza è l'inverso del periodo, possiamo esprimere il periodo e la frequenza del moto del sistema massa-molla come

Periodo per un sistema massa-molla

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad [12.18]$$

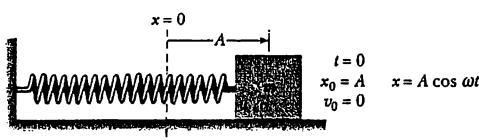


Figura 12.5 Un sistema massa-molla parte da fermo dalla posizione $x_0 = A$, in questo caso $\phi = 0$ e $x = A \cos \omega t$.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [12.19]$$

- Frequenza per un sistema massa-molla

Cioè, il periodo e la frequenza dipendono *soltanto* dalla massa e dalla costante elastica della molla. Come ci si poteva aspettare, la frequenza è maggiore per una molla più rigida (valore più alto di k) e diminuisce all'aumentare della massa.

Caso particolare I Per comprendere meglio il significato fisico della soluzione dell'equazione del moto, consideriamo il seguente caso particolare: supponiamo di allontanare una massa di una distanza A dalla posizione di equilibrio e di lasciarla partire da ferma da questa posizione (Fig. 12.5). In questo caso dobbiamo richiedere che la nostra soluzione $x(t)$ obbedisca alle *condizioni iniziali*, per $t = 0$, $x_0 = A$ e $v_0 = 0$. Queste condizioni sono soddisfatte se noi scegliamo $\phi = 0$ e dando come soluzione $x = A \cos \omega t$. Questa soluzione appartiene alla categoria $x = \cos(\omega t + \phi)$, con $x_0 = A$ e $\phi = 0$; infatti, a $t = 0$ questa soluzione soddisfa la condizione $x_0 = A$, poiché $\cos 0 = 1$. Vediamo così che A e ϕ contengono le informazioni date dalle condizioni iniziali. Vediamo ora, per questo caso particolare, l'andamento della velocità e dell'accelerazione. Poiché $x = A \cos \omega t$,

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t \quad \text{e} \quad a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t$$

Dall'espressione della velocità, si vede che la condizione $v_0 = 0$ a $t = 0$ è soddisfatta; mentre dall'espressione dell'accelerazione si ottiene che, a $t = 0$, $a = -\omega^2 A$. Fisicamente ciò ha senso poiché quando lo spostamento è a destra la forza sulla massa è diretta verso sinistra; inoltre, in questa posizione è $F = -kA$ per cui l'accelerazione iniziale è $-kA/m$.

Si poteva ottenere la soluzione $x = A \cos \omega t$ in modo più formale usando la Equazione 12.10a, $\operatorname{tg} \phi = -v_0/\omega x_0$. Poiché a $t = 0$ si ha $v_0 = 0$ anche $\operatorname{tg} \phi = 0$ e, quindi, $\phi = 0$.

In Figura 12.6 sono riportati, per questo caso particolare, gli andamenti temporali di posizione, velocità e accelerazione. Come già trovato, l'accelerazione oscilla tra i valori estremi $\pm \omega^2 A$ mentre lo spostamento avviene tra $\mp A$. Infine, i valori estremi della velocità sono $\pm \omega A$ che si hanno quando $x = 0$. Si vede così come la soluzione quantitativa sia in accordo con la descrizione qualitativa del nostro sistema.

Caso particolare II Supponiamo ora che la massa sia dotata di una velocità iniziale v_0 verso *destra* rispetto alla posizione di riposo della molla, per cui $t = 0$, $x_0 = 0$ e $v = v_0$ (Fig. 12.7). La nostra soluzione particolare deve ora soddisfare queste condizioni iniziali.

Applicando l'Equazione 12.11, $\operatorname{tg} \phi = -v_0/\omega x_0$, e la condizione iniziale $x_0 = 0$ per $t = 0$, si ottiene $\operatorname{tg} \phi = -\infty$ ossia $\phi = -\pi/2$. Quindi, la soluzione è data da $x = A \cos(\omega t - \pi/2)$, che può scriversi $x = A \sin \omega t$. Inoltre, dall'Equazione 12.11 vediamo che $A = v_0/\omega$, perciò, possiamo esprimere la nostra soluzione come

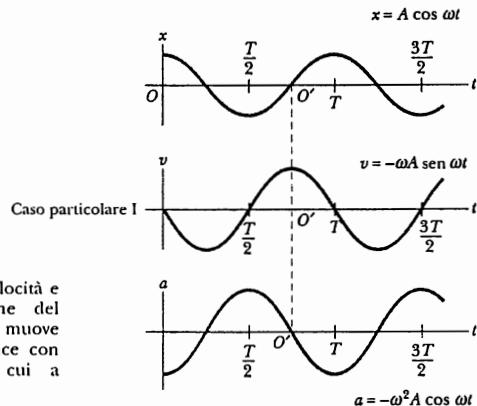


Figura 12.6 Posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo per una massa che si muove di moto armonico semplice con condizioni iniziali per cui a $t=0$, $x_0 = A$ e $v_0 = 0$.

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

La velocità e l'accelerazione in questo caso sono

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \omega t \quad \text{e} \quad a = \frac{dv}{dt} = -\omega v_0 \sin \omega t$$

Ciò è consistente con il fatto che la massa ha sempre il massimo della sua velocità per $x = 0$, mentre, in questa posizione, la forza e l'accelerazione sono nulle. Il grafico di queste funzioni del tempo in Figura 12.6 corrisponde all'origine posta in O' . Quale sarebbe la soluzione per x se la massa si muovesse inizialmente verso sinistra nella Figura 12.7?

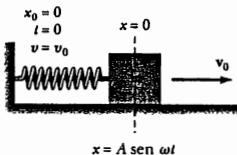


Figura 12.7 Il sistema massa-molla inizia il suo moto dalla sua posizione di equilibrio $x_0 = 0$ per $t = 0$. Se la sua velocità è v_0 verso destra, la sua posizione varia secondo la relazione $x = A \sin \omega t$.

Fisica ragionata 1

Sappiamo che il periodo di oscillazione di una massa sospesa a una molla è proporzionale alla radice quadrata della massa. Quindi, se progettiamo un esperimento nel quale sospendiamo masse diverse all'estremità di una molla e misuriamo il periodo di oscillazione, il grafico del quadrato del periodo in funzione della massa risulterà una linea retta, come è suggerito dalla Figura FR12.1. Ma troviamo che la linea retta non passa dall'origine. Perché?

Ragionamento La ragione per cui la retta non passa dall'origine è che la stessa molla ha massa. Quindi, l'inerzia alle variazioni di moto del sistema è una combinazione della massa sospesa all'estremità della molla e della massa oscillante della spirale della molla. L'intera massa della molla, tuttavia, non oscilla. La spira più bassa oscilla con la stessa ampiezza della massa, e la spira più alta non oscilla per niente. Per una molla cilindrica, si possono usare argomenti sull'energia per dimostrare che l'effettiva massa addizionale che rappresenta l'oscillazione della molla è un terzo della massa della molla. Il quadrato del periodo è proporzionale alla massa totale oscillante, ma il grafico nel diagramma mostra il quadrato del periodo in funzione soltanto della massa sospesa alla molla. Un grafico del quadrato del periodo versus la massa totale (massa sospesa alla molla più l'effettiva massa oscillante della molla) passerebbe dall'origine.

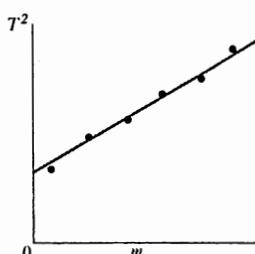


Figura FR12.1 (Fisica ragionata 1)

Fisica ragionata 2

Se fai un salto nel vuoto con una corda elastica, oscillerai su e giù all'estremità dell'elastico dopo esserti tuffato da un ponte. Supponiamo che realizzi questo tuffo e misuri la frequenza dei rimbalzi. Poi ti sposti in un altro ponte. Scopri che la corda elastica è troppo lunga per tuffartici da questo ponte: urteresti il suolo. Allora, pieghi la corda a metà e fai il salto con la corda elastica raddoppiata. Quale sarà la frequenza dei tuoi rimbalzi confrontata con quella ottenuta col salto dal primo ponte?

Ragionamento Assumiamo come modello per la corda elastica una molla. La forza esercitata da una molla è proporzionale alla distanza fra le spire quando la molla è estesa. Immaginiamo di estendere una molla per una data lunghezza e di misurare la distanza fra le spire. Tagliamo, quindi, la molla a metà. Se metà della molla viene ora estesa della stessa lunghezza, le spire disteranno il doppio rispetto a quando la molla era intera. Quindi, è necessaria una forza due volte maggiore per estendere mezza molla, per cui concludiamo che la mezza molla ha una costante elastica che è il doppio di quella della molla intera. Ora consideriamo la corda elastica piegata che assimiliamo al modello di due mezze molle in parallelo. Ciascuna mezza ha una costante elastica che è il doppio della costante elastica originaria della corda elastica. In più, una data massa sospesa alla corda elastica piegata subirà due forze, una da ciascuna mezza molla. In conclusione, la forza necessaria per una data estensione sarà quattro volte maggiore che per la corda elastica originaria. L'effettiva costante elastica della corda piegata è, perciò, quattro volte maggiore della costante elastica originaria. Poiché la frequenza di oscillazione è proporzionale alla radice quadrata della costante elastica, la tua frequenza di rimbalzo con la corda piegata sarà due volte quella della corda originaria.



(Fisica ragionata 2) Salto nel vuoto. (*Gamma*)

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Un "bouncing ball" (attrezzo usato dai pugili per allenarsi. *N.d.T.*) è un esempio di moto armonico semplice? Il moto giornaliero di uno studente da casa a scuola e ritorno è un moto armonico semplice?

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Una massa è appesa a una molla e viene misurata la frequenza di oscillazione, f_1 , del sistema. La massa, una seconda identica massa, e la molla vengono trasportate dallo Space Shuttle nello spazio. Le due masse sono collegate alle estremità della molla e il sistema viene trasportato nello spazio in una passeggiata spaziale. La molla viene estesa e il sistema viene lasciato oscillare mentre fluttua nello spazio. Qual è la frequenza di oscillazione del sistema, in funzione di f_1 ?

Esempio 12.2 Un sistema massa-molla

Una massa di 200 g collegata a una molla di massa trascurabile, avente costante elastica 5.00 N/m, è libera di oscillare su un piano orizzontale privo di attrito. Se la massa è lasciata partire da ferma in una posizione a 5.00 cm dall'equilibrio, come in Figura 12.5. (a) Si trovi il periodo del moto.

Soluzione Questa situazione corrisponde al I° caso particolare dove $x = A \cos \omega t$ con $A = 5.00 \times 10^{-2}$ m; e:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00 \text{ N/m}}{200 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 5.00 \text{ rad/s}$$

e

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00} = 1.26 \text{ s}$$

(b) Si determini la massima velocità della massa.

Soluzione

$$v_{\max} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s}) (5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.250 \text{ m/s}$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2 (5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.25 \text{ m/s}^2$$

(c) Si diano le espressioni della posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo.

Soluzione Nel nostro caso $x = A \cos \omega t$, come nel I° caso, così usando i valori calcolati in (a), (b) e (c) si ha

$$x = A \cos \omega t = (0.0500 \text{ m}) \cos 5.00 t$$

$$v = -A \omega \sin \omega t = -(0.250 \text{ m/s}) \sin 5.00 t$$

$$a = -A \omega^2 \cos \omega t = -(1.25 \text{ m/s}^2) \cos 5.00 t$$

ESERCIZIO 4 (a) Una massa di 400 g è sospesa verticalmente tramite una molla, e si trova che la molla è allungata di 8.0 cm. Trovare la costante elastica. (b) Quanto si allungherà la molla se la massa sospesa è di 575 g? Risposta (a) 49 N/m (b) 12 cm

ESERCIZIO 5 Una massa di 3.0 kg è collegata a una molla e tirata orizzontalmente per una estensione massima di 0.50 m. Quale costante elastica deve avere la molla se la massa subisce un'accelerazione uguale all'accelerazione di gravità? Risposta 59 N/m

12.3 • ENERGIA DI UN OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE

Consideriamo ora il sistema massa-molla di Figura 12.5 dal punto di vista energetico. Ci si aspetta che, essendo il piano privo d'attrito, l'energia meccanica totale si conservi. Usando l'Equazione 12.5 possiamo calcolare l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad [12.20]$$

Mentre l'energia potenziale che immagazzina la molla quando è deformata di x è pari a $\frac{1}{2} kx^2$, che, usando l'Equazione 12.1, si può scrivere

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad [12.21]$$

Vediamo che sia K che U hanno sempre valori positivi. Poiché $\omega^2 = k/m$, l'energia totale di un oscillatore armonico è

$$E = K + U = \frac{1}{2} kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

che, essendo $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, dove $\theta = \omega t + \phi$, si riduce a

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \quad [12.22]$$

Energia cinetica di un oscillatore armonico semplice

Energia potenziale di un oscillatore armonico semplice

Energia totale di un oscillatore armonico semplice

Cioè, l'energia totale di un oscillatore armonico è una costante del moto ed è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione. Infatti, l'energia meccanica totale è pari alla massima energia potenziale della molla deformata di $x = \pm A$, punti in cui $v = 0$ e l'energia cinetica è nulla; mentre, tutta l'energia meccanica è cinetica nella posizione di equilibrio $x = 0$ ove anche $U = 0$, cosicché a $x = 0$, $E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$.

In Figura 12.8a sono riportati, per il caso $\phi = 0$, gli andamenti temporali delle energie cinetica e potenziale. Entrambe U e K sono sempre positive e la loro somma, cioè l'energia totale del sistema, è costante e pari a $\frac{1}{2} kA^2$. In Figura 12.8b sono invece riportate le variazioni di K e U in funzione dello spostamento. Si noti che l'energia si trasforma continuamente da energia potenziale immagazzinata nella molla in energia cinetica della massa e viceversa. In Figura 12.9 sono riportati per un ciclo completo del moto la posizione, la velocità, l'accelerazione, l'energia cinetica e l'energia potenziale di un sistema massa-molla. Poiché molti dei fatti discussi sono concentrati in questa figura si consiglia di studiarla attentamente.

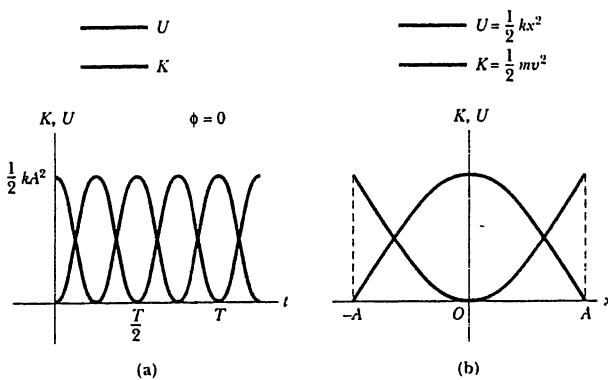


Figura 12.8 (a) L'energia cinetica e l'energia potenziale di un oscillatore armonico semplice in funzione del tempo per il caso $\phi = 0$; (b) le stesse grandezze in funzione dello spostamento; ($K + U$) è costante in entrambi i grafici.

Infine, la velocità per ogni generica posizione x può essere facilmente calcolata usando la conservazione dell'energia totale

$$\begin{aligned} E &= K + U = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \\ v &= \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \end{aligned} \quad [12.23]$$

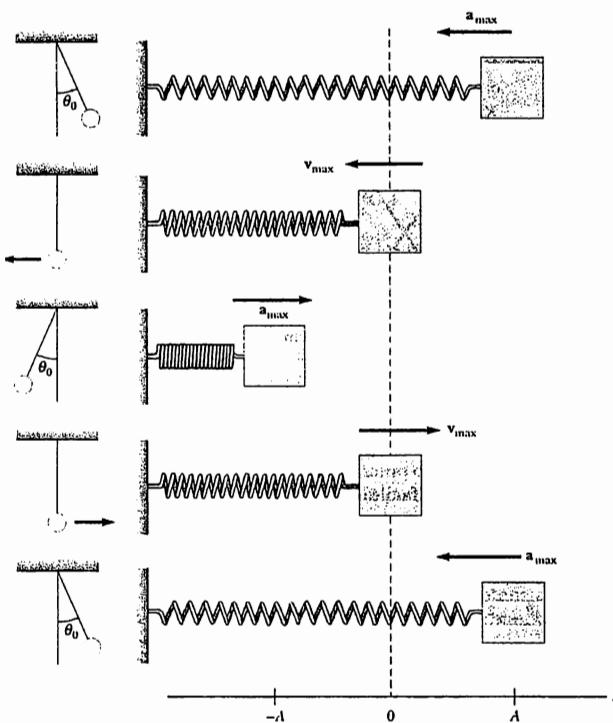
Di nuovo si trova qui che la velocità è massima per $x = 0$ ed è zero nei punti di inversione del moto $x = \pm A$.

- *La velocità in un moto armonico semplice in funzione della posizione*

Fisica ragionata 3

Una massa che oscilla all'estremità di una molla orizzontale scivola avanti e indietro su una superficie priva di attrito. Durante una oscillazione, si posiziona una massa identica, con attaccato del Velcro (una marca di adesivo), nel punto di massimo spostamento. Appena la massa oscillante raggiunge il suo massimo spostamento e si trova istantaneamente ferma, essa aderisce all'altra massa tramite il Velcro, e le due masse continuano ad oscillare insieme. Varierà il periodo di oscillazione? Varierà l'ampiezza di oscillazione? Varierà l'energia dell'oscillazione?

Ragionamento Il periodo di oscillazione varia, poiché il periodo dipende dalla massa oscillante. L'ampiezza non varia. Poiché la nuova massa è stata aggiunta quando la massa originaria era ferma, la combinazione delle masse è pure ferma in questo punto, definendo un'ampiezza uguale a quella dell'originaria oscillazione. Anche l'energia non varia. Nel punto di massimo spostamento, l'energia è tutta quanta energia potenziale immagazzinata nella molla, che dipende soltanto dalla costante elastica e dall'ampiezza, non dalla massa. La massa incrementata passerà attraverso la posizione di equilibrio con una velocità minore di quella dell'oscillazione originaria, ma con la stessa energia cinetica. Un altro modo di affrontare la cosa è di pensare come possa essersi trasferita energia nel sistema oscillante: non si è compiuto alcun lavoro (nessuna altra forma di energia è stata trasferita), cosicché l'energia del sistema non può essere variata.



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2} kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2} kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} kA^2$

Figura 12.9 Analogia tra il moto di un pendolo e il moto armonico semplice di un sistema massa-molla; i parametri nella tabella sono relativi al sistema massa-molla assumendo che a $t = 0$, $x = A$ cosicché $x = A \cos \omega t$ (Caso I).

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Un sistema massa-molla è sottoposto a un moto armonico con ampiezza A . L'energia totale varia se la massa viene raddoppiata ma non l'ampiezza? L'energia cinetica e potenziale in un dato punto vengono influenzate dalla variazione di massa? Spiegare.

Esempio 12.3 Oscillazioni su una superficie orizzontale

Una massa di 0.50 kg collegata a una molla di costante elastica 20.0 N/m, oscilla su una superficie orizzontale priva di attrito. (a) Se la massima ampiezza del moto è 3 cm, si calcoli l'energia totale del sistema e la sua velocità massima.

Soluzione Dalla Equazione 12.22 si ha

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} \left(20.0 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (3.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 9.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Quando la massa si trova in $x = 0$, $U = 0$ ed $E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2$; quindi,

$$\frac{1}{2} mv_{\max}^2 = 9.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{18.0 \times 10^{-3} \text{ J}}{0.50 \text{ kg}}} = 0.19 \text{ m/s}$$

(b) Qual è la velocità della massa quando passa per $x = 2.0 \text{ cm}$?

Soluzione Si può usare direttamente l'Equazione 12.23:

$$\begin{aligned} v &= \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \\ &= \pm \sqrt{\frac{20.0}{0.50} (3.0^2 - 2.0^2) \times 10^{-4}} \\ &= \pm 0.14 \text{ m/s} \end{aligned}$$

I segni + e - indicano che in questo istante la massa si può muovere o verso destra o verso sinistra.

(c) Calcolare per $x = 2.0 \text{ cm}$ le energie cinetica e potenziale del sistema.

Soluzione Usando il risultato di (b) si ha

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (0.50 \text{ kg}) (0.14 \text{ m/s})^2 = 5.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \left(20.0 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (2.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \\ &= 4.0 \times 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

Nota che la somma $K + U$ è uguale all'energia meccanica totale, E .

ESERCIZIO 6 Per quale valore di x la massa ha una velocità pari a 0.10 m/s ? Risposta $\pm 2.6 \text{ cm}$.

12.4 • MOTO DEL PENDOLO

Il **pendolo semplice** è un altro sistema meccanico che si muove di moto armonico semplice. Esso consiste di una massa, m , sospesa a un filo leggero di lunghezza L , la cui estremità superiore è fissata come in Figura 12.10. Il moto avviene in un piano verticale ed è determinato dalla forza di gravità. Noi mostreremo che il moto è quello di un oscillatore armonico semplice, a condizione che l'angolo θ che il pendolo forma con la verticale sia piccolo.

Le forze agenti sulla massa sono la tensione, T , e la forza peso mg . La componente tangenziale del peso, $mg \sin \theta$, agisce sempre verso $\theta = 0$, opposta allo spostamento. Quindi, la forza tangenziale è una forza di richiamo e possiamo usare la seconda legge di Newton per scrivere l'equazione del moto nella direzione tangenziale come

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

dove s è lo spostamento misurato lungo l'arco in Figura 12.10, e il segno meno indica che F_t agisce verso la posizione di equilibrio. Poiché $s = L\theta$ ed L è costante, questa equazione si riduce a

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Il secondo membro è proporzionale a $\sin \theta$ piuttosto che a θ ; quindi, concludiamo che il moto non è un moto armonico semplice poiché esso non ha la forma dell'Equazione 12.17. Tuttavia, se si assume che θ sia *piccolo*, possiamo

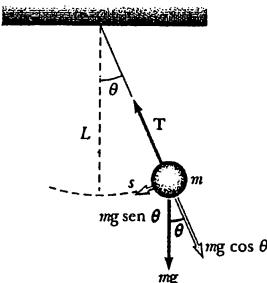


Figura 12.10 Quando θ è piccolo, il pendolo semplice oscilla con un moto armonico semplice attorno alla posizione di equilibrio ($\theta = 0$). La forza di richiamo è $mg \sin \theta$, la componente del peso tangente all'arco di circonferenza.

usare l'approssimazione $\sin \theta \approx \theta$, dove θ è misurato in radianti¹, e l'equazione del moto diventa

*Equazione del moto •
di un pendolo semplice
(piccoli θ)*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad [12.24]$$

Abbiamo ora un'espressione che ha la stessa forma dell'Equazione 12.17, per cui possiamo concludere che il moto è un moto armonico semplice. Quindi, si può scrivere $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$, ove θ_0 è il **massimo spostamento angolare** e la pulsazione ω è

*Pulsazione di un •
pendolo semplice*

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad [12.25]$$

Il periodo del moto è

*Periodo di un •
pendolo semplice*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad [12.26]$$

In altre parole, il periodo e la pulsazione di un pendolo semplice che oscilla con piccoli angoli dipendono soltanto dalla lunghezza del filo e dalla accelerazione di gravità. Poiché il periodo è *indipendente* dalla massa, concludiamo che *tutti* i pendoli semplici di uguale lunghezza oscillano, nello stesso posto, con lo stesso periodo. L'analogia fra il moto di un pendolo semplice e il sistema massa-molla è illustrato in Figura 12.9.

Il pendolo semplice si può usare come cronometro ed è anche un dispositivo per misure molto precise dell'accelerazione di gravità. Queste misure sono importanti poiché le variazioni locali del valore di g possono fornire informazioni per localizzare giacimenti di petrolio o altre risorse sotterranee.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Un pendolo semplice è sospeso al soffitto di un ascensore fermo, e se ne misura il periodo. Descrivere le variazioni, se accadono, nel periodo quando l'ascensore (a) accelera verso l'alto, (b) accelera verso il basso, e (c) si muove con velocità costante.

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Immaginiamo che un pendolo sia appeso al soffitto di un'automobile. Quando l'automobile scende giù in folle da una collina, la posizione di equilibrio del pendolo è verticale? Il periodo di oscillazione varia rispetto a quello di una automobile ferma?

PROBLEMA CONCETTUALE 6

Un orologio a pendolo dipende dal periodo del pendolo per mantenere un tempo corretto. Supponiamo che un orologio a pendolo sia calibrato correttamente e che la temperatura della stanza nella quale si trova aumenti. L'orologio ritarderà, anticiperà, oppure rimarrà esatto? *Suggerimento:* un metallo si dilata quando la sua temperatura aumenta.

¹ Vedi Appendice A per ulteriori dettagli sulla approssimazione per piccoli angoli.

Esempio 12.4 Quanto è alta la torre?

Un uomo entra in una torre e vuol sapere quanto è alta. Egli nota che un pendolo lungo dal soffitto al pavimento della torre ha un periodo di 12.0 s. Quanto è alta la torre?

Soluzione Basta usare $T = 2\pi \sqrt{L/g}$ e risolvere rispetto ad L

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{(9.80 \text{ m/s}^2) (12.0 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 35.7 \text{ m}$$

ESERCIZIO 7 Il pendolo di questo esempio è portato sulla Luna, dove l'accelerazione di gravità è 1.67 m/s²: quale sarà il suo periodo? Risposta 29.1 s

Il pendolo fisico

Un pendolo fisico, o composto, consiste di un generico corpo rigido sospeso a un asse fisso non passante per il suo centro di massa; se spostato dalla posizione di equilibrio questo sistema oscilla. Consideriamo un corpo rigido impennato nel punto O che dista d dal baricentro (Fig. 12.11). La forza di gravità agisce sul corpo con un momento τ di modulo $mgd \sin \theta$ e, poiché $\tau = I\alpha$ con I momento di inerzia rispetto all'asse passante per O , si ottiene

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Il segno meno indica che il momento della forza tende a far diminuire θ , cioè la forza peso produce un momento di richiamo.

Anche in questo caso per valori di θ piccoli, tali che sia $\sin \theta \approx \theta$, l'equazione si riduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \left(\frac{mgd}{I} \right) \theta = -\omega^2 \theta \quad [12.27]$$

Si noti che l'equazione ha la stessa forma dell'Equazione 12.17, cosicché il moto è un moto armonico semplice. La soluzione dell'Equazione 12.17 è quindi $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$, ove θ_0 è il massimo spostamento angolare e la pulsazione è

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad [12.28]$$

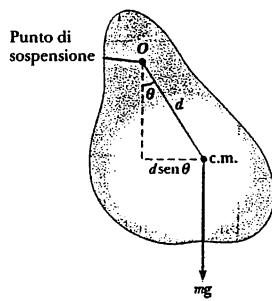
FACOLTATIVO

Figura 12.11 Un pendolo fisico è un corpo rigido girevole intorno a un punto O diverso dal suo centro di massa; in condizione di equilibrio la retta del vettore peso passa per O , cioè θ è nullo; quando il sistema ruota di un angolo θ si genera un momento di richiamo pari a $mgd \sin \theta$.

- *Periodo del moto per un pendolo fisico*

Si può usare questa relazione per misurare il momento d'inerzia di un corpo rigido quando sia nota la posizione del centro di massa, e quindi d , e si determini il periodo di oscillazione. Notiamo infine che l'Equazione 12.28 si riduce a quella di un pendolo semplice (Eq. 12.26) quando $I = md^2$, cioè quando tutta la massa è concentrata nel centro di massa.

PROBLEMA CONCETTUALE 7

Due studenti stanno guardando l'oscillazione di un pendolo di Foucault che ha un grande peso terminale. Uno studente dice, "vado di nascosto vicino la recinzione ed appicco della gomma da masticare sopra il peso terminale del pendolo, per far variare la sua frequenza di oscillazione". L'altro studente dice, "ciò non cambierà la frequenza, la frequenza di un pendolo è indipendente dalla massa". Quale studente ha ragione?

Esempio 12.5 Una sbarra oscillante

Una sbarra uniforme di massa M e lunghezza L è incernierata ad una estremità in modo da oscillare in un piano verticale (Fig. 12.12). Trovare il periodo di oscillazione se l'ampiezza del moto è piccola.

Soluzione Il momento di inerzia della sbarra rispetto a un asse ad essa perpendicolare passante per l'estremità è $\frac{1}{3}ML^2$, mentre la distanza d tra perno e centro di massa è $L/2$. Sostituendo questi valori nell'Equazione 12.28 si ha

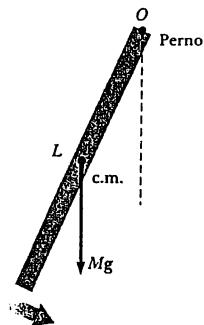


Figura 12.12 (Esempio 12.5) Una sbarra rigida che oscilla intorno a un perno posto alla sua estremità è un pendolo fisico con $d = L/2$ e $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg \cdot \frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Commento In uno dei primi allunaggi, un astronauta che camminava sulla superficie lunare aveva una striscia pendente dalla sua tuta spaziale. Uno scienziato osservando da Terra alla televisione le oscillazioni della striscia dedusse dal periodo di questa il valore della accelerazione di gravità sulla Luna, considerando la striscia un pendolo composto. Come pensi abbia fatto il calcolo?

ESERCIZIO 8 Calcolare il periodo di un metro rigido che oscilla senza attrito in un piano verticale intorno ad una sua estremità (Fig. 12.12).

Risposta 1.64 s.

ESERCIZIO 9 Un pendolo semplice ha una lunghezza di 3.00 m. Determinare la variazione del suo periodo se esso viene portato da un punto dove $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ a una quota dove l'accelerazione di gravità diventa 9.79 m/s^2 .

Risposta 1.78×10^{-3} s.

12.5 • OSCILLAZIONI SMORZATE

Fino ad ora abbiamo considerato solo il moto oscillatorio di sistemi ideali che sotto la sola azione di una forza di richiamo lineare oscillano indefinitamente. Nei sistemi reali sono sempre presenti forze dissipative, come l'attrito, che smorzano e ritardano il moto del sistema. In questi casi l'energia meccanica diminuisce nel tempo ed il moto è detto *smorzato*.

Un caso frequente di forza frenante è quello, discusso nel Capitolo 5, in cui la forza è proporzionale alla velocità e agisce in verso opposto al moto, come spesso accade a un corpo che si muove in un fluido. Tenendo presente che la forza frenante è $R = -bv$, con b costante, e che la forza di richiamo è $-kx$, la seconda legge di Newton si scrive nel nostro caso come

$$\sum F_x = -kx - bv = ma_x \quad [12.29]$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Poiché la soluzione di questa equazione richiede una matematica che può non esserti ancora familiare, la riportiamo di seguito senza dimostrazione. Quando la forza frenante è piccola in media rispetto a kx , cioè quando $b < \sqrt{4mk}$, la soluzione dell'Equazione 12.29 è

$$x = A e^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi) \quad [12.30]$$

dove la pulsazione del moto è

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad [12.31]$$

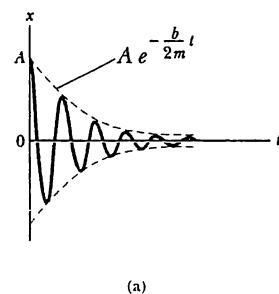
Questa soluzione puoi verificarla sostituendola nell'Equazione 12.30. L'andamento temporale della posizione x per il nostro caso è mostrato in Figura 12.13a; si vede che quando la forza dissipativa è piccola rispetto a quella di richiamo, il moto conserva il carattere oscillatorio ma l'ampiezza delle vibrazioni diminuisce col tempo ed alla fine il moto cessa. Questo è noto come *oscillatore sottermorzato*. La linea tratteggiata di Figura 12.13a, che è l'*inviluppo* della curva oscillante, rappresenta il termine esponenziale dell'Equazione 12.30, e mostra che l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce esponenzialmente nel tempo. Per un moto con una data costante elastica e una data massa, l'ampiezza delle oscillazioni è smorzata tanto più rapidamente quanto più il massimo valore della forza frenante si avvicina al massimo valore della forza di richiamo. Esempio di moto oscillatorio smorzato è quello di Figura 12.13b ove la massa è immersa in un liquido.

È conveniente esprimere la pulsazione delle oscillazioni nella forma

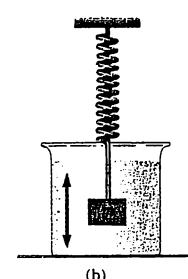
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

dove $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ è la pulsazione dell'oscillatore in assenza di forza frenante (oscillatore non smorzato), cioè quando $b = 0$ ed il sistema oscilla di moto armonico semplice alla sua pulsazione naturale ω_0 . All'aumentare della forza frenante l'oscillazione diventa più lenta e si smorza più rapidamente, vedi Figura 12.14a; quando b raggiunge il valore critico $b_c/2m = \omega_0$, il sistema non oscilla più ed il

FACOLTATIVO



(a)



(b)

Figura 12.13 (a) Andamento temporale della posizione di un oscillatore sottermorzato. È anche indicata la variazione con il tempo dell'ampiezza. (b) Una massa che oscilla in un liquido è un esempio di oscillatore smorzato.

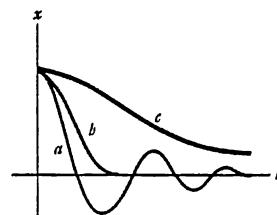


Figura 12.14 Andamenti temporali delle posizioni per (a) un oscillatore sottermorzato, (b) un oscillatore critico e (c) un oscillatore sovrasmorzato.

moto è detto **criticamente smorzato**. In questo caso, $b = b_c$, il sistema torna in equilibrio in modo esponenziale, vedi Figura 12.14b.

Se il mezzo è tanto viscoso che la forza frenante è maggiore della forza di richiamo, cioè se $b/2m > \omega_0$, allora il sistema è **sovrasmorzato**, esso non oscilla ma semplicemente ritorna verso la posizione di equilibrio; il tempo necessario per raggiungere l'equilibrio aumenta all'aumentare della forza frenante, come indicato in Figura 12.14c. In ogni caso, per la presenza dell'attrito, l'energia dell'oscillatore diminuisce nel tempo fino a divenire nulla; essa si dissipa nel mezzo frenante cui è ceduta come energia termica.

FACOLTATIVO

12.6 • OSCILLAZIONI FORZATE

Abbiamo ora visto come le forze dissipative facciano diminuire nel tempo l'energia di un oscillatore smorzato. Queste perdite di energia possono essere compensate applicando al sistema una forza che compie un lavoro positivo sul sistema; il sistema riceve energia da una forza applicata che agisce in verso concorde con il suo moto. Per esempio, un bambino su una altalena può essere mantenuto in moto con spinte opportunamente intervallate. L'ampiezza del moto resta costante se durante un ciclo l'energia fornita bilancia l'energia dissipata per attrito.

Un esempio frequente di oscillatore forzato è quello di un oscillatore smorzato cui è applicata una forza esterna che varia in modo armonico, $F = F_0 \cos \omega t$, ove ω è la pulsazione della forza ed F_0 è una costante. Aggiungendo questa forza eccitatrice, l'Equazione 12.29 diventa:

$$F_0 \cos \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad [12.32]$$

Anche in questo caso non presentiamo la soluzione generale che è alquanto laboriosa; notiamo, tuttavia, che dopo un tempo sufficientemente lungo si raggiunge una situazione *stazionaria* in cui l'energia dissipata in un ciclo è pari a quella ricevuta dal sistema, e l'oscillazione prosegue con ampiezza costante. Quando si raggiunge la situazione stazionaria, la soluzione dell'Equazione 12.32 diventa

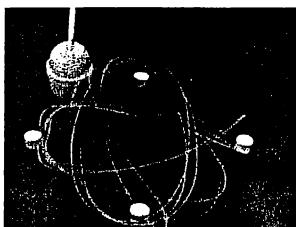
$$x = A \cos (\omega t + \phi) \quad [12.33]$$

dove

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad [12.34]$$

e dove $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ è la pulsazione dell'oscillatore non smorzato ($b = 0$). Da un punto di vista fisico, si può arguire che l'oscillatore in uno stato stazionario deve avere la stessa pulsazione della forza eccitatrice, per cui ci si può aspettare la soluzione data dall'Equazione 12.33.

L'Equazione 12.34 mostra che il moto di un oscillatore forzato non si smorza finché è guidato da una forza esterna che fornisce l'energia necessaria a compensare le perdite dovute alle forze frenanti. Si noti che la massa oscilla con la pulsazione ω della forza applicata. Per piccoli smorzamenti l'ampiezza dell'oscillazione diventa particolarmente grande quando la forza ha una pulsazio-



Questa è una simulazione al calcolatore di un comportamento caotico di un pendolo pilotato. La non linearità del moto è dovuta al momento della forza gravitazionale che è proporzionale al seno dell'angolo. Un importante problema di ricerca è la previsione delle condizioni per le quali diversi sistemi fisici mostrano un comportamento caotico. (© Yoav Levy/Phototake)

ne vicina a quella propria dell'oscillatore ovvero $\omega \approx \omega_0$. Questo aumento drammatico dell'ampiezza vicino alla frequenza propria è detto **risonanza**, e la pulsazione propria ω_0 è detta anche **pulsazione di risonanza** del sistema.

La spiegazione fisica di questo aumento delle ampiezze vicino alla risonanza sta nel fatto che si realizzano le condizioni più favorevoli per trasferire energia al sistema; infatti, la derivata temporale di x , che è la velocità v dell'oscillatore, è proporzionale a $\sin(\omega t + \phi)$; quando si applica una forza in fase con v , la potenza (cioè il lavoro per unità di tempo) che la forza trasferisce all'oscillatore, pari ad $F \cdot v$ è sempre positiva se F e v sono in fase; ed è questa la condizione che si realizza alla risonanza. Si può così concludere che **alla risonanza la forza applicata è in fase con la velocità dell'oscillatore e la potenza trasferita all'oscillatore è massima**.

In Figura 12.15 è riportato l'andamento dell'ampiezza in funzione della pulsazione della forza applicata per oscillatori con e senza smorzamento. Notare come l'ampiezza aumenta al diminuire dello smorzamento ($b \rightarrow 0$), e come aumentando lo smorzamento si allarghi la curva di risonanza. Comunque, in condizioni stazionarie e per ogni frequenza di oscillazione, l'energia trasferita al sistema è sempre pari all'energia dissipata a causa delle forze frenanti, mentre l'energia posseduta dall'oscillatore resta costante nel tempo. In assenza di smorzamento ($b = 0$), l'Equazione 12.34 mostra che l'ampiezza tende ad infinito quando $\omega \rightarrow \omega_0$. In altre parole, se non vi sono perdite, un oscillatore inizialmente fermo sollecitato da una forza continuamente in fase con la velocità aumenterà indefinitamente sia l'energia che l'ampiezza del moto. Questo è comunque un caso limite che non si presenta nella realtà poiché un qualche limitato smorzamento è sempre presente, e alla risonanza l'ampiezza sarà grande ma finita.

Un modo di visualizzare i fenomeni di risonanza è l'apparato di Figura 12.16, in cui vari pendoli di lunghezza diversa sono sospesi a una fune tesa. Se uno dei pendoli, P ad esempio, è posto in moto in un piano perpendicolare al piano verticale contenente la fune, anche gli altri cominciano ad oscillare, poiché sono accoppiati per mezzo della fune tesa. Tra tutti questi, che sono forzati ad oscillare a causa di questo accoppiamento, il pendolo ad avere ampiezza maggiore è il pendolo Q che ha la stessa lunghezza di P , quindi, anche la stessa pulsazione propria di oscillazione.

Più avanti vedremo che i fenomeni di risonanza si presentano in vari settori della fisica; ad esempio alcuni circuiti elettrici hanno una frequenza propria o di risonanza. Le strutture meccaniche, quali i ponti, hanno una frequenza propria e possono essere messe in risonanza se sollecitate da forze eccitatorie con questa frequenza. Un esempio di questa risonanza di strutture avvenne nel 1940 quando il ponte Tacoma Narrows a Washington crollò per effetto di vibrazioni risonanti (Fig. 12.17). Anche se il vento non era particolarmente forte, il ponte alla fine crollò per la formazione di vortici (turbolenze), a frequenze pari a quelle della struttura del ponte.

Si possono citare altri esempi di oscillazioni risonanti come il suono prodotto dai cavi telefonici in presenza di vento. Macchine possono rompersi se una parte oscillante entra in risonanza con altre parti in movimento.

Fisica ragionata 4

In una regione di terremoti, il coefficiente di smorzamento delle costruzioni deve essere grande o piccolo?

Ragionamento Lo smorzamento di una costruzione deve essere grande, cosicché

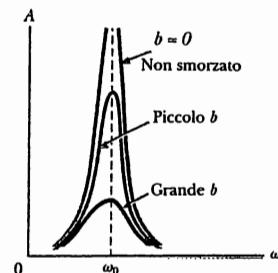


Figura 12.15 Ampiezza dell'oscillazione di un oscillatore forzato in funzione della pulsazione ω della forza esterna applicata per diversi smorzamenti. La risonanza avviene quando la pulsazione della forza è pari ad ω_0 , quella propria dell'oscillatore. La forma della curva di risonanza dipende dal coefficiente di smorzamento, b .

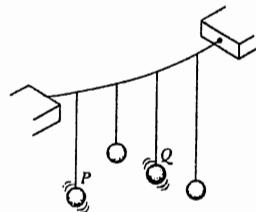


Figura 12.16 Se il pendolo P viene posto in oscillazione, il pendolo Q finirà con l'oscillare con l'ampiezza maggiore (rispetto a quella di tutti gli altri) poiché la sua lunghezza è uguale a quella di P e quindi ha la stessa frequenza propria di vibrazione. I pendoli oscillano in un piano perpendicolare al piano verticale contenente la fune stazionaria.

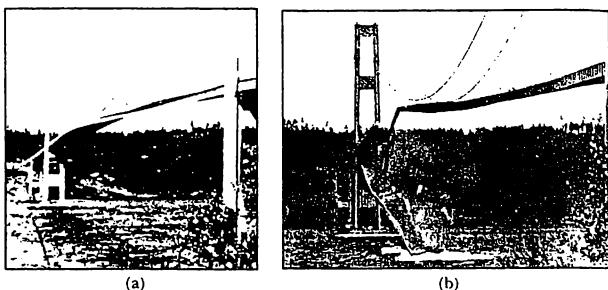


Figura 12.17 (a) Venti intensi producono vibrazioni del ponte, innescando oscillazioni a una frequenza prossima a quella propria della struttura del ponte. (b) Quando si manifesta questa condizione di risonanza, il ponte crollerà. (*UPI/Bettmann Newsphotos*)

la curva di risonanza sia larga e piatta. La costruzione risponderà a un largo campo di frequenze del terremoto, con una risposta relativamente piccola. Se lo smorzamento fosse piccolo, con una curva di risonanza stretta e piccata, la costruzione respingerebbe molte delle frequenze dei terremoti ma risponderebbe in modo disastroso a uno stretto campo di frequenze.

PROBLEMA CONCETTUALE 8

Ti trovi all'estremità di un trampolino per i tuffi e saltelli per farlo oscillare. Trovi che la massima risposta, in termini di ampiezza di oscillazione dell'estremità del trampolino, si ottiene quando saltelli a frequenza f . Ti muovi, ora, nel mezzo del trampolino e ripeti l'esperimento. La frequenza di risonanza per le oscillazioni forzate è in questo punto maggiore di f , minore di f , o uguale ad f ? Perché?

PROBLEMA CONCETTUALE 9

Alcuni paracadutisti hanno dei buchi nel loro ombrello per permettere all'aria di muoversi con regolarità attraverso l'involucro. Senza i buchi, l'aria raccolta sotto il paracadute, quando questo cade, verrebbe rilasciata attraverso i bordi laterali alternativamente e periodicamente da un lato e dall'altro. Perché questo rilascio periodico dell'aria potrebbe causare dei problemi?

SOMMARIO

La posizione di un oscillatore armonico semplice varia periodicamente nel tempo secondo la relazione

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad [12.1]$$

dove A è l'ampiezza del moto, ω è la pulsazione e ϕ è la costante di fase. Il valore di ϕ dipende dalla posizione e velocità iniziali dell'oscillatore.

Il tempo per una oscillazione completa si chiama periodo del moto ed è definito da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [12.2]$$

L'inverso del periodo è la frequenza del moto, la quale è uguale al numero di oscillazioni al secondo.

La velocità e l'accelerazione di un oscillatore armonico semplice sono

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad [12.5]$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad [12.6]$$

Così, la velocità massima è ωA e l'accelerazione massima è $\omega^2 A$. Quando l'oscillatore si trova nei due punti di inversione, $x = \pm A$, la velocità è nulla mentre il suo modulo è massimo nella posizione di equilibrio, $x = 0$. Il modulo dell'accelerazione è massimo nei punti di inversione ed è zero nella posizione di equilibrio.

Un sistema massa-molla che si muove su un percorso privo d'attrito manifesta un moto armonico semplice con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad [12.18]$$

dove k è la costante elastica della molla ed m è la massa collegata alla molla.

L'energia cinetica e potenziale di un oscillatore armonico semplice variano nel tempo e sono

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad [12.20]$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad [12.21]$$

L'energia totale di un oscillatore armonico semplice è una costante del moto ed è

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \quad [12.22]$$

L'energia potenziale di un oscillatore armonico semplice è massima quando la particella si trova nei punti di inversione (spostamento massimo dalla posizione di equilibrio) ed è zero nella posizione di equilibrio. L'energia cinetica è zero nei punti d'inversione ed è massima nella posizione di equilibrio.

Un pendolo semplice di lunghezza L si muove, per piccoli spostamenti angolari rispetto alla verticale, di moto armonico semplice con un periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad [12.26]$$

Cioè, il periodo è indipendente dalla massa sospesa.

Un pendolo fisico si muove di moto armonico semplice attorno a un asse che non passa dal suo centro di massa. Il periodo di questo moto è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad [12.28]$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione e d è la distanza dell'asse dal centro di massa.

Oscillazioni smorzate si verificano in un sistema in cui una forza frenante si oppone alla forza di richiamo lineare. Se un tale sistema viene messo in moto e poi lasciato a se stesso, la sua energia meccanica diminuisce nel tempo per l'azione della forza frenante non conservativa. È possibile compensare questa perdita di energia applicando al sistema una forza esterna periodica in fase con il moto del sistema. Quando la frequenza della forza esterna periodica è uguale alla frequenza propria dell'oscillatore *non smorzato*, questo inizia il suo moto da fermo, e, poiché viene continuamente trasferita energia all'oscillatore, la sua ampiezza aumenta illimitatamente.

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] L'accelerazione di un oscillatore armonico semplice può rimanere costante durante il moto? L'accelerazione può essere nulla? Spiegare.
- [2] Spiegare perché le energie, cinetica e potenziale, di un sistema massa-molla non possono mai essere negative.
- [3] Quanto è lungo il percorso compiuto da un corpo che si muove di moto armonico di ampiezza A in un tempo pari ad un periodo?
4. Se un sistema massa-molla appeso verticalmente è posto in oscillazione, perché alla fine il moto si arresterà?
5. Se un orologio a pendolo batte esattamente il tempo alla base di una montagna, continuerà a essere preciso quando verrà spostato in cima alla montagna? Spiegare.
6. Se un orologio a pendolo ritarda, si potrebbe regolarlo, aggiustando la "lunghezza" del pendolo?
7. Il peso di un pendolo è costituito da una sfera piena d'acqua. Che cosa accadrà alla frequenza di oscillazione di questo pendolo se la sfera ha un buco dal quale esce lentamente l'acqua?
8. Un battaglione di soldati marcia al passo. Perché, quando si deve attraversare un ponte, si ordina ai soldati di rompere il passo?
- [9] Se la lunghezza di un pendolo semplice viene quadruplicata, che cosa accade (a) alla sua frequenza e (b) al suo periodo?
10. L'ampiezza di un sistema che si muove di moto armonico semplice viene raddoppiata. Determinare la variazione (a) dell'energia totale, (b) della velocità massima, (c) dell'accelerazione massima e (d) del periodo.
- [11] Un oscillatore armonico semplice ha un'energia totale E . (a) Calcolare l'energia potenziale e cinetica quando lo spostamento è uguale a metà dell'ampiezza. (b) Per quale valore dello spostamento l'energia cinetica è uguale all'energia potenziale?
- [12] Se la posizione di una particella varia come $x = -A \cos \omega t$, qual è la costante di fase nell'Equazione 12.1? In quale posizione la particella inizia il suo moto?
13. Lo spostamento di una particella oscillante tra $t = 0$ e un tempo successivo t è uguale necessariamente alla posizione della particella al tempo t ? Spiegare.
- [14] Determinare se le grandezze seguenti, per un oscillatore armonico semplice, possono essere oppure no, nella stessa direzione orientata: (a) posizione e velocità, (b) velocità e accelerazione, (c) posizione e accelerazione.
15. L'ampiezza A e la costante di fase ϕ di un oscillatore possono essere determinate se viene specificata soltanto la posizione per $t = 0$? Spiegare.
16. Un pendolo semplice si muove di moto armonico semplice quando θ è piccolo. Il moto è periodico se θ è grande? Come cambia il periodo del moto quando θ aumenta?
17. Avvengono oscillazioni smorzate per qualsiasi valore di b e k ? Spiegare.
- [18] Per un sistema in risonanza è possibile avere oscillazioni smorzate? Spiegare.

PROBLEMI

Paragrafo 12.1 Moto armonico semplice

- [1] La posizione di un punto materiale varia come $x = (4.00 \text{ m}) \cos(3.00 \pi t + \pi)$ con x in m e t in s. Determinare (a) frequenza e periodo del moto, (b) ampiezza, (c) costante di fase del moto, e (d) la posizione del punto per $t = 0.250 \text{ s}$.
2. Un punto materiale oscilla di moto armonico semplice, secondo $x = (5.00 \text{ cm}) \cos(2t + \pi/6)$, con x in cm e t in s. Trovare per $t = 0$ (a) lo spostamento della particella, (b) la sua velocità (c) la sua accelerazione. (d) Trovare il periodo e l'ampiezza del moto.
3. Un pistone di automobile, di massa 2.00 kg , compie un moto armonico semplice. Se il moto del pistone ha una ampiezza di 5.00 cm determinare la massima velocità ed accelerazione del pistone quando il motore gira alla velocità di 3600 giri/min .
4. Una particella, di 20.0 g , si muove di moto armonico con una frequenza di 3.00 oscillazioni/s ed una ampiezza di 5.00 cm . Determinare: (a) la distanza percorsa dalla particella in un ciclo, (b) la massima velocità e la posizione relativa, (c) la massima accelerazione e la posizione relativa.
- [5] Una particella che si muove di moto armonico nell'istante $t = 0$ si trova nell'origine e si sposta verso destra. Se l'ampiezza del moto è 2.00 cm e la frequenza 1.50 Hz , (a) mostrare che la posizione varia come $x = (2.00 \text{ cm}) \sin(3.00 \pi t)$. Determinare (b) la massima velocità e in quanto tempo ($t > 0$) la raggiunge, (c) la massima accelerazione e in quanto tempo ($t > 0$) la raggiunge per la prima volta e (d) il percorso totale compiuto tra $t = 0$ e $t = 1.00 \text{ s}$.
6. Se i valori iniziali di posizione, velocità e accelerazione di un corpo che si muove di moto armonico semplice sono x_0 , v_0 e a_0 , e se la pulsazione dell'oscillazione è ω , (a) mostrare che la posizione e la velocità del corpo in ogni istante si può scrivere come
- $$x(t) = x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega} \right) \sin \omega t$$
- $$v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$

- (b) Se l'ampiezza del moto è A , mostrare che

$$v^2 - ax = v_0^2 - a_0 x_0 = A^2 \omega^2$$

Paragrafo 12.2 Moto di una massa collegata a una molla

(Nota: in tutti i problemi che seguono trascurare la massa della molla).

7. Un arciere tende la corda del suo arco di 0.400 m esercitando una forza che aumenta uniformemente da zero a 230 N. (a) Qual è la costante elastica equivalente dell'arco? (b) Quanto lavoro viene fatto per tendere l'arco?
8. Una massa di 1.00 kg si muove su un piano orizzontale privo di attrito sotto l'azione di una molla di costante elastica 25.0 N/m. A $t = 0$ la massa è ferma in $x = -3.00$ cm (cioè la molla è compressa di 3.00 cm). Trovare (a) il periodo del moto, (b) i massimi valori di velocità e accelerazione, (c) spostamento, velocità e accelerazione in funzione del tempo.
9. Una massa di 0.500 kg collegata a una molla di costante elastica 8.00 N/m oscilla di moto armonico semplice con un'ampiezza di 10.0 cm. Calcolare (a) il valore massimo del modulo della sua velocità e della sua accelerazione, (b) velocità e accelerazione quando la massa si trova a $x = 6.00$ cm dalla posizione di equilibrio e (c) il tempo necessario affinché la massa si muova da $x = 0$ a $x = 8.00$ cm.
10. Un blocco di massa incognita è collegato a una molla di costante elastica 6.50 N/m ed oscilla di moto armonico semplice con una ampiezza di 10.0 cm. Quando la massa è a metà strada fra la sua posizione di equilibrio e un estremo, la sua velocità misurata è di $+30.0$ cm/s. Calcolare (a) la massa del blocco, (b) il periodo del moto, e (c) la massima accelerazione del blocco.
11. Una massa di 1.00 kg è collegata a una molla orizzontale. La molla è inizialmente allungata di 0.100 m e la massa viene liberata da ferma. Dopo 0.500 s, la velocità della massa è zero. Qual è la velocità massima della massa?
12. Una particella, appesa ad una molla ideale, può compiere oscillazioni con una pulsazione $\omega_0 = 2.00$ rad/s. La molla, appesa al soffitto di un ascensore, pende in quiete rispetto all'ascensore stesso, quando questo scende ad una velocità costante di 1.50 m/s. L'ascensore si ferma bruscamente. Determinare: (a) l'ampiezza di oscillazione della particella, (b) l'equazione del moto della particella. (Scegliere come positiva la direzione verso l'alto).

Paragrafo 12.3 Energia di un oscillatore armonico semplice

(Trascurare le masse delle molle).

13. Un'automobile ha una massa di 1000 kg e viene diretta verso un muro di mattoni in un test per la sicurezza.

Il paraurti si comporta come una molla di costante elastica 5.00×10^6 N/m) e si osserva una compressione massima di 3.16 cm quando la macchina si arresta. Qual'era la velocità iniziale dell'automobile?

14. Un carrello di 4000 kg parte da fermo da una miniera lungo un binario in discesa. Alla fine del percorso, 10.0 m più in basso, vi è una molla con $k = 400\,000$ N/m. Di quanto si comprimerà la molla per fermare il carrello? Si trascuri l'attrito.
15. Una massa di 200 g collegata ad una molla oscilla di moto armonico semplice con periodo di 0.250 s. Se l'energia totale del sistema è 2.00 J, trovare (a) la costante elastica della molla e (b) l'ampiezza delle oscillazioni.
16. Un sistema massa-molla oscilla con ampiezza 3.50 cm. Se la costante elastica è 250 N/m e la massa è 0.500 kg, determinare (a) l'energia meccanica del sistema, (b) la massima velocità e (c) la massima accelerazione della massa.
17. Una massa di 50.0 g, fissata ad una molla, di massa trascurabile e costante elastica di 35.0 N/m, compie delle oscillazioni di 4.00 cm di ampiezza, su una superficie orizzontale liscia. Determinare, per un allungamento della molla di 1.00 cm: (a) l'energia totale del sistema oscillante, (b) la velocità della massa e, per un allungamento di 3.00 cm, (c) l'energia cinetica e (d) l'energia potenziale.
18. Una massa di 2.00 kg è fissata ad una molla e posta su una superficie orizzontale liscia. La massa, allontanata di 0.200 m dalla sua posizione di equilibrio, fatta coincidere con l'origine dell'asse x , è mantenuta in quiete da una forza orizzontale di 20.0 N. La massa, lasciata libera dalla posizione di riposo, $x_0 = 0.200$ m, compie oscillazioni armoniche semplici. Determinare: (a) la costante elastica della molla, k , (b) la frequenza delle oscillazioni, f , (c) la massima velocità della massa, v_{max} , e la corrispondente posizione, (d) la massima accelerazione, a_{max} , e la corrispondente posizione, (e) l'energia totale del sistema, E . Per x pari ad un terzo dello spostamento massimo, determinare (f) la velocità e (g) l'accelerazione.

Paragrafo 12.4 Moto di un pendolo

19. Un pendolo semplice ha un periodo di 2.50 s. (a) Quanto è lungo? (b) Quale periodo avrebbe sulla Luna dove $g_L = 1.67$ m/s²?
20. Un pendolo "al secondo" passa dalla sua posizione di equilibrio una volta al secondo. (Il periodo del pendolo è 2.000 s). La lunghezza di un pendolo "al secondo" è 0.9927 m a Tokyo e 0.9942 m a Cambridge, Inghilterra. Qual è il rapporto dell'accelerazione di gravità nelle due località?
21. Un pendolo semplice, di 0.250 kg e di 1 m di lunghezza, viene abbandonato da una posizione iniziale che forma un angolo di 15.0° con la verticale. De-

- terminare (a) la massima velocità, (b) la massima accelerazione angolare e (c) la massima forza di richiamo.
22. Lo spostamento angolare di un pendolo è descritto dall'equazione $\theta = 0.320 \cos \omega t$, dove θ è misurato in radianti e $\omega = 4.43$ rad/s. Determinare il periodo e la lunghezza del pendolo.
- [23] Una particella di massa m , può muoversi senza attrito all'interno di una ciotola di raggio R . Mostrare che per piccoli spostamenti dall'equilibrio la particella compie un moto armonico con pulsazioni pari a quelle di un pendolo semplice lungo R , cioè $\omega = \sqrt{g/R}$.
24. Un pendolo semplice è lungo 5.00 m. (a) Qual è il periodo del moto armonico semplice per questo pendolo se esso è posto in un ascensore accelerato verso l'alto a 5.00 m/s^2 ? (b) Qual è il periodo se l'ascensore accelera verso il basso a 5.00 m/s^2 ? (c) Qual è il periodo del moto armonico semplice se esso è posto su un furgone che accelera orizzontalmente a 5.00 m/s^2 ?
25. Un bastoncino leggerissimo si estende rigidamente 0.500 m oltre un estremo di un'asta di un metro. L'asta è sospesa a un perno all'estremo lontano del bastoncino e viene posta in oscillazione. (a) Determinare il periodo di oscillazione. (b) Di quale percentuale questa differisce da un pendolo semplice lungo 1.00 m?
26. Consideriamo il pendolo fisico di Figura 12.11. (a) Se il suo momento di inerzia rispetto a un asse passante attraverso il suo centro di massa e parallelo all'asse passante per il suo punto di sospensione è I_{CM} , mostrare che il suo periodo è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{CM} + md^2}{mgd}}$$

dove d è la distanza fra il punto di sospensione e il centro di massa. (b) Mostrare che il periodo ha un valore minimo quando d soddisfa la relazione $md^2 = I_{CM}$.

Paragrafo 12.5 Oscillazioni smorzate

27. Un pendolo di 1.00 m di lunghezza è abbandonato ad un angolo iniziale di 15.0° . Dopo 1000 s l'ampiezza di oscillazione si riduce a 5.50° per effetto delle forze d'attrito. Determinare il valore di $b/2m$.
28. Mostrare che l'Equazione 12.30 è soluzione della Equazione 12.29 se $b^2 < 4mk$.
29. Mostrare che la variazione nel tempo dell'energia meccanica per un oscillatore smorzato è data da $dE/dt = -bv^2$ e perciò è sempre negativa. (Suggerimento: eseguire la derivata dell'espressione per l'energia meccanica di un oscillatore, $E = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}kx^2$, e usare l'Eq. 12.29).

Paragrafo 12.6 Oscillazioni forzate

30. Calcolare la frequenza di risonanza dei seguenti sistemi: (a) una massa di 3.00 kg collegata ad una molla di costante elastica 240 N/m, (b) un pendolo semplice lungo 1.50 m.
31. Alla massa di 2.00 kg, collegata ad una molla, è applicata la forza esterna $F = (3.00 \text{ N})\cos(2\pi t)$. Se la costante elastica della molla è 20.0 N/m, determinare (a) il periodo e (b) l'ampiezza del moto, assumendo che non vi sia smorzamento. (Suggerimento: usare l'Equazione 12.34 con $b = 0$).
32. Mostrare che un oscillatore forzato non smorzato ($b = 0$) ha come soluzione dell'Equazione 12.32, l'Equazione 12.33, con un'ampiezza data dall'Equazione 12.34.

Problemi generali

33. Una massa m è libera di oscillare, appesa ad una molla (Fig. P12.33). Con $m = 0.810 \text{ kg}$, il periodo è di 0.910 s . Una massa di valore incognito, appesa alla stessa molla, determina un periodo di oscillazione di 1.16 s . Determinare: (a) la costante elastica della molla, (b) la massa incognita.

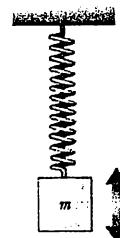


Figura P12.33

34. Una massa m oscilla liberamente, collegata a una molla verticale, con un periodo T (Fig. P12.33). Una massa incognita m' oscilla, con la stessa molla, con un periodo T' . Determinare (a) la costante elastica della molla e (b) la massa incognita m' .
- [35] Un pendolo è realizzato con un'asta rigida di massa trascurabile, lunga L , a cui è appesa una massa M ; ad una distanza h dal punto di sospensione il pendolo è collegato ad una molla orizzontale di costante k che è non deformata quando il pendolo è verticale (Fig. P12.35). Calcolare la frequenza delle oscillazioni del sistema per piccoli angoli θ .
36. Una tavola orizzontale, di lunghezza L e massa M , è incernierata ad un estremo mentre l'altro poggia su una molla di costante elastica k (Fig. P12.36), e il suo momento di inerzia rispetto alla cerniera è $\frac{1}{3}ML^2$. Se la tavola è ruotata di un angolo piccolo θ rispetto all'orizzontale e abbandonata, mostrare che essa oscilla di moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{k/M}$.

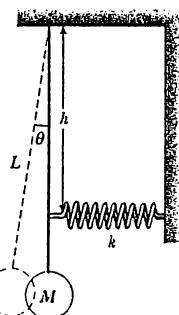


Figura P12.35

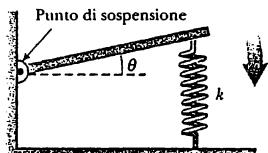


Figura P12.36

- [37] Un blocco P descrive un moto armonico semplice, di frequenza $f = 1.50 \text{ Hz}$, scivolando lungo una superficie liscia orizzontale. Un blocco B è in quiete, come viene mostrato in Figura P12.37. Il coefficiente d'attrito statico tra i due blocchi è $\mu_s = 0.600$. Determinare la massima ampiezza di oscillazione del sistema costituito dai due blocchi, senza che B scivoli su P .

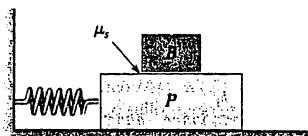


Figura P12.37

38. Un blocco di 2.00 kg si trova in quiete all'estremo inferiore di una molla ($k = 500 \text{ N/m}$), sospesa al soffitto di un ascensore. L'ascensore sale con una accelerazione pari a $\frac{1}{3} g$, che si annulla bruscamente (per $t = 0$). Determinare: (a) la pulsazione dell'oscillazione del blocco, quando l'accelerazione è nulla, (b) la compressione della molla, durante il tempo di accelerazione dell'ascensore, (c) l'ampiezza di oscillazione e l'angolo iniziale, osservati da un passeggero nell'ascensore. (Si consideri positiva la direzione verso l'alto).

- [39] Un pendolo semplice, di lunghezza di 2.23 m e massa 6.74 kg , ha una velocità iniziale di 2.06 m/s , nella posizione di equilibrio. Nell'ipotesi che il pendolo compia un moto armonico semplice, determinare: (a) il periodo del moto, (b) l'energia totale e (c) il massimo angolo di spostamento.

40. Le persone che usano motociclette e biciclette imparano a stare attenti ai dossi che si trovano per le strade, e specialmente alle piste di prova ondulate, una situazione di molte creste ugualmente spaziate o dossi posti a una certa distanza. Che cosa c'è di così negativo nelle piste di prova ondulate? Una motocicletta ha diverse molle e ammortizzatori nelle sue sospensioni, ma noi possiamo considerare un modello con una sola molla che sostiene una massa. Si può ottenere una stima della costante elastica della molla pensando a quanto un pesante motociclista la comprima quando la carica. Calcolare, sulla base di una ragionevole stima, la distanza tra i dossi della pista ondulata di prova per la quale un motociclista debba essere particolarmente attento quando viaggia a velocità da autostrada.
41. Una massa M è collegata ad una molla di costante elastica, k , di massa m e lunghezza a riposo ℓ (Fig. P12.41); la massa oscilla di moto armonico su un piano orizzontale liscio. Trovare (a) l'energia cinetica del sistema quando la massa M ha velocità v e (b) il periodo delle oscillazioni. (Suggerimento: assumere che ogni segmento dx della molla oscilla in fase e con una velocità proporzionale alla distanza dall'estremo fisso $v_x = (x/\ell) v$, ed ha una massa $dm = (m/\ell) dx$.)

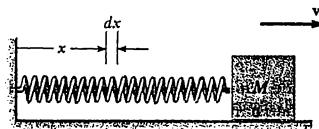


Figura P12.41

42. Una massa M , fissata all'estremità di una molla di massa m_m , con costante elastica k , compie un moto armonico semplice. Il periodo di oscillazione è dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + (m_m/3)}{k}}$$

Viene realizzato un esperimento in due fasi, apprendendo ad una molla, la cui massa misurata è di 7.4 g , differenti pesi, come è mostrato in Figura P12.33. (a) Vengono misurati allungamenti di 17.0 cm , 29.3 cm , 35.3 cm , 41.3 cm , 47.1 cm e 49.3 cm per valori della massa M di 20.0 g , 40.0 g , 50.0 g , 60.0 g , 70.0 g e 80.0 g .

rispettivamente. Tracciare un grafico di Mg in funzione di x e tracciare, utilizzando il metodo dei minimi quadrati, una retta di interpolazione dei dati sperimentali. Dalla pendenza della retta, si ricavi il valore della costante k . (b) Il sistema viene fatto oscillare con moto armonico semplice e con un cronometro si misurano i diversi periodi. Con $M = 80.0 \text{ g}$, il tempo corrispondente a 10 oscillazioni complete è di 13.41 s. L'esperimento viene ripetuto per i valori di M di 70.0 g, 60.0 g, 50.0 g, 40.0 g e 20.0 g; i tempi corrispondenti a 10 oscillazioni complete sono di 12.52 s, 11.67 s, 10.67 s, 9.62 s e 7.03 s. Calcolare T per ciascun valore della massa M . Tracciare un grafico di T^2 in funzione di M e determinare il valore di k dalla pendenza della retta ricavata con il metodo dei minimi quadrati, di interpolazione dei dati sperimentali. Confrontare i due valori ottenuti per k . (c) Ricavare un valore di m_m dal grafico e confrontarlo con quello misurato.

43. Una massa M è collegata a due elastici uguali, lunghi L ; su ognuno dei due agisce una tensione T . Si sposta la massa di un piccolo tratto y in direzione verticale (Fig. P12.43); mostrare, assumendo che la tensione T non varia apprezzabilmente, che (a) la forza di richiamo è $(-2T/L)y$ e (b) il sistema si muove di moto armonico semplice con pulsazione $\omega = \sqrt{2T/mL}$.

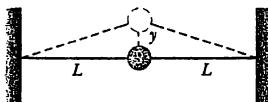


Figura P12.43

44. Consideriamo un oscillatore smorzato come è mostrato in Figura 12.13. Assumiamo che la massa sia 375 g, la costante elastica della molla sia 100 N/m, e $b = 0.100 \text{ kg/s}$. (a) Quanto tempo è necessario affinché l'ampiezza diventi la metà del valore iniziale? (b) Quanto ci mette l'energia meccanica a diminuire fino alla metà del suo valore iniziale? (c) Mostrare che, in generale, il tasso percentuale di diminuzione dell'ampiezza in un oscillatore smorzato è metà di quello col quale diminuisce l'energia meccanica.

45. Un piccolo disco sottile di raggio r e massa m è incollato rigidamente alla faccia di un secondo disco sottile di raggio R e massa M come viene mostrato in Figura P12.45. Il centro del disco piccolo è posto sul bordo del disco grande. Il disco grande è sospeso al suo centro su un asse privo di attrito. L'insieme viene ruotato di un piccolo angolo θ rispetto alla sua posizione di equilibrio e quindi lasciato libero. (a) Mostrare che la velocità del centro di massa quando passa dalla posizione di equilibrio è

$$v = 2 \left[\frac{Rg(1 - \cos \theta)}{(M/m) + (\tau/R)^2 + 2} \right]^{1/2}$$

- (b) Mostrare che il periodo del moto è

$$T = 2\pi \left[\frac{(M+2m)R^2 + mr^2}{2mgR} \right]^{1/2}$$

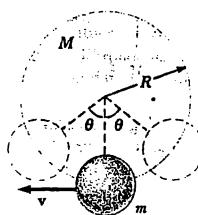
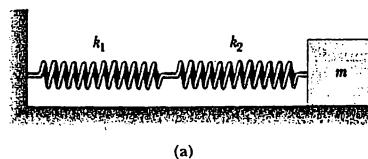


Figura P12.45

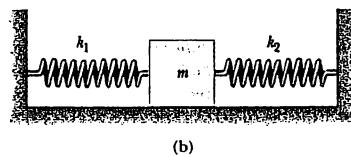
46. Una massa m è collegata a due molle di costanti elastiche k_1 e k_2 , come in Figura P12.46a e P12.46b. In ciascun caso, la massa si muove su un tavolo privo di attrito e viene spostata dall'equilibrio e poi rilasciata. Mostrare che in ciascun caso la massa si muove di moto armonico semplice con periodi

$$(a) T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

$$(b) T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$



(a)



(b)

Figura P12.46

47. Immaginiamo che un buco perfori la Terra fino al suo centro. Si può far vedere che un oggetto di massa

m a una distanza r dal centro della Terra è attratto verso il centro della Terra soltanto dalla porzione di massa ombreggiata in Figura P12.47. Scrivere la legge di gravitazione di Newton per un oggetto a distanza r dal centro della Terra e dimostrare che la forza agente su di esso ha la forma della legge di Hooke, $F = -kr$, dove la costante elastica effettiva è $k = (4/3)\pi\rho Gm$, dove ρ è la densità della Terra, assunta uniforme, e G è la costante di gravitazione universale.

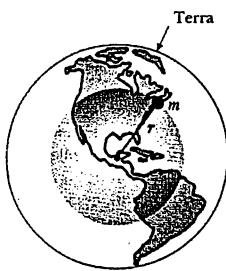


Figura P12.47

Problemi al calcolatore

- S1. Usare un foglio elettronico per fare un grafico della posizione x in funzione del tempo per un corpo soggetto a un moto armonico semplice. (a) Usare $A = 2.00 \text{ m}$, $\omega = 5.00 \text{ rad/s}$, e $\phi = 0$. Sullo stesso grafico, riportare la funzione per $\phi = \pi/4$, $\pi/2$, e π . Spiegare come le diverse costanti di fase influenzino la posizione del corpo. (b) Ripetere la parte (a) con $\omega = 5.00 \text{ rad/s}$. Il grafico come viene influenzato dalla variazione di ω ?
- S2. L'energia potenziale e cinetica di una particella di massa m che oscilla con una molla è data dalle Equazioni 12.20 e 12.21. Usare un foglio elettronico per riportare in grafico $U(t)$, $K(T)$, e la loro somma in funzione del tempo sullo stesso grafico. Le variabili di ingresso dovranno essere k , A , m , e ϕ . Cosa accade della somma di $U(t)$ e $K(T)$ quando le variabili di ingresso cambiano?
- S3. Consideriamo un pendolo semplice di lunghezza L che viene spostato dalla verticale di un angolo θ e poi rilasciato. In questo problema, bisogna determinare la pulsazione per ogni valore della posizione angolare iniziale. Mettere a punto un foglio elettronico per integrare l'equazione del moto di un pendolo semplice:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Si assume che la condizione iniziale sia $\theta = \theta_0$ e $d\theta/dt = 0$ al tempo $t = 0$. Scegliere i valori di θ_0 e L , e trovare la posizione angolare θ in funzione del

tempo. Usando gli stessi valori di θ_0 , confrontare i risultati per ϑ con quelli ottenuti dalla relazione $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$ dove $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Ripetere per diversi valori di θ_0 . Assicurarsi di includere grandi valori della posizione angolare iniziale. Il periodo varia quando la posizione angolare iniziale varia? Come si confronta il periodo per grandi valori di θ con quello calcolato per piccoli valori di θ_0 ? (Nota: usando il metodo modificato di Eulero per risolvere questa equazione differenziale troveresti che l'ampiezza tende a crescere col tempo. Il metodo del quarto ordine di Runge-Kutta discusso nel Supplemento *Ricerche col Foglio Elettronico* sarebbe una scelta migliore per risolvere l'equazione differenziale. Tuttavia, se scegli dt sufficientemente piccolo, la soluzione ottenuta col metodo modificato di Eulero sarà ottima).

- S4. Nel mondo reale l'attrito è sempre presente. Modificare il tuo foglio elettronico adatto al problema S3 per includere la forza di resistenza dell'aria: $F_{\text{aria}} = -bv$. In questo caso, l'equazione del moto è

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt}$$

dove m è la massa del pendolo e b è il coefficiente frizionale. Integra questa equazione e calcola la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in funzione del tempo usando i valori calcolati di θ e $d\theta/dt$. Poiché l'energia non è costante, quando si dissipà più velocemente in un ciclo l'energia del pendolo?

- S5. L'equazione differenziale per la posizione di un oscillatore armonico smorzato di massa m , e forzato dall'esterno è

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t$$

dove ω_0 e b sono costanti, F_0 è l'ampiezza della forzante, e ω è la pulsazione della forzante. Nel caso di una massa con una molla, $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, dove k è la costante elastica. Scrivere un programma per computer o preparare un foglio elettronico per integrare questa equazione del moto. Le variabili d'ingresso sono il coefficiente di smorzamento, b , la massa m , ω (la pulsazione propria del sistema), ed F_0 . Scegliere i valori per la velocità e la posizione iniziale e calcolare la posizione x in funzione del tempo. Variare la pulsazione della forzante ω . Selezionare alcuni valori vicini a ω_0 . Avviene la risonanza? (Nota: il programma potrebbe non funzionare o bloccarsi in prossimità della risonanza. L'ampiezza del moto potrebbe avere valori molto grandi quando $\omega = \omega_0$. Inoltre, il metodo di Eulero usualmente tende a sovrastimare la soluzione. Altri metodi come quello del quarto ordine di Runge-Kutta discusso nel Supplemento *Ricerche col Foglio Elettronico* danno una soluzione più accurata).

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Il "bouncing ball" non è un esempio di moto armonico semplice. La palla non segue una funzione sinusoidale per la sua posizione in funzione del tempo. Neanche il moto giornaliero di uno studente è un moto armonico semplice, poiché lo studente sta in una posizione fissa, la scuola, per un lungo periodo di tempo. Se il suo moto fosse sinusoidale, lo studente dovrebbe muoversi sempre più lentamente mentre si avvicina al suo banco, e, appena seduto nel banco, dovrebbe di nuovo ripartire verso casa!
- Quando la molla con le due masse è posta in oscillazione nello spazio, la spira che sta al centro della molla non si muove. Quindi, possiamo immaginare di bloccare la spira centrale sul posto senza influenzare il moto. Se facciamo così, abbiamo due sistemi oscillanti separati, uno su ciascun lato del blocco. La mezza molla su ciascun lato del blocco ha una costante elastica doppia di quella della molla completa, come si può dimostrare con il seguente ragionamento. La forza esercitata dalla molla è proporzionale alla distanza fra le spire quando la molla è estesa. Immaginiamo di estendere la molla di una certa quantità e di misurare la distanza fra le spire. Tagliamo, quindi, la molla a metà. Se, ora, una mezza molla viene estesa della stessa quantità, ogni spira disterà dalla successiva il doppio rispetto alla molla intera. Quindi, sarà necessaria una forza doppia per allungare la mezza molla, per cui concludiamo che la mezza molla ha una costante elastica che è il doppio di quella della molla intera. Allora, il nostro sistema di masse bloccato con due mezze molle vibrerà con una frequenza che sarà maggiore di f di un fattore $\sqrt{2}$.
- No. Poiché $E = \frac{1}{2}kA^2$, la variazione della massa, lasciando l'ampiezza costante, non influenza l'energia totale. L'energia potenziale $E = \frac{1}{2}kx^2$ dipende soltanto dalla posizione, non dalla massa. Poiché $K = E - U$, l'energia cinetica dipenderà pure dalla posizione e non dalla massa.
- Se accelera verso l'alto, l'effettiva " g " è maggiore dell'accelerazione di gravità, per cui il periodo diminuisce. Se accelera verso il basso, l'effettiva " g " è minore dell'accelerazione di gravità, per cui il periodo aumenta. Se si muove con velocità costante, il periodo non varia. (Se il pendolo è in caduta libera non oscilla).
- Poiché la macchina accelera verso la base della collina, il principio di equivalenza ci dice che vi è una effettiva componente di un campo gravitazionale diretta verso la sommità. Combinando questa con il reale campo gravitazionale, il campo gravitazionale risultante non è più verticale. Quindi, la posizione di equilibrio del pendolo non sarà verticale. Inoltre, il campo gravitazionale risultante ha variato il suo modulo rispetto al campo reale, cosicché varierà pure il periodo del pendolo.
- Quando la temperatura aumenta, la lunghezza del pendolo crescerà, a causa della dilatazione termica. Con un aumento della lunghezza, il periodo del pendolo aumenterà. Quindi, esso impiegherà più tempo per eseguire ciascuna oscillazione, per cui ciascun secondo per l'orologio durerà di più del secondo reale. Allora, l'orologio *ritarderà*.
- Ha ragione il primo studente. Mentre la variazione di massa di un pendolo semplice non fa variare la frequenza, il pendolo di Foucault è un pendolo *fisico*: il peso terminale ha una dimensione. Assumendo che il cavo di sospensione sia molto leggero, quando la gomma da masticare viene posta sul peso terminale, il centro di massa del pendolo fisico si sposta di pochissimo verso l'alto. Ciò accorcia l'effettiva lunghezza del pendolo e quindi ne viene alterata la frequenza.
- Il trampolino per i tuffi si comporta come un pendolo fisico. Con la tua massa all'estremità del trampolino il momento di inerzia tuo e del trampolino sarà massimo. Quando tu ti muovi al centro del trampolino, il momento di inerzia del sistema diminuisce, e la frequenza propria di oscillazione aumenta rispetto a f .
- Se il periodo del rilascio alternativo dell'aria si accordasse con il periodo di oscillazione dei paracadute, vi potrebbe essere una risposta risonante. La fluttuazione dei paracadute potrebbe diventare tanto energetica da innescare delle irregolarità tali da fargli perdere la sua azione frenante.

13

Moto ondulatorio

La maggior parte di noi ha potuto notare le onde quando da bambini abbiamo lanciato dei sassi in uno stagno. La perturbazione creata dal sasso si manifesta come un'increspatura di onde che si allargano fino a raggiungere i bordi dello stagno. Se si esamina attentamente il moto di una foglia che galleggia vicino al punto in cui il sasso ha raggiunto l'acqua, si può vedere la foglia muoversi su e giù e lateralmente rispetto alla sua posizione originaria ma non essere soggetta ad alcuno spostamento risultante verso la sorgente della perturbazione o in verso opposto. L'onda d'acqua (la perturbazione) si muove da un punto ad un altro, *ma l'acqua non viene trasportata con essa.*

Il mondo è pieno di ogni specie di onde, onde sonore, onde in una corda, onde dei terremoti, onde radio e raggi X. La maggior parte delle onde appartiene ad una di queste due categorie. Le **onde meccaniche**, la cui perturbazione si propaga attraverso un mezzo; sono due esempi di onde meccaniche le onde sonore, per le quali l'aria è il mezzo e le onde dei terremoti, per le quali la crosta terrestre è il mezzo. Le **onde elettromagnetiche** che sono una classe particolare di onde che non richiedono un mezzo per potersi propagare; le onde luminose e le onde radio sono due esempi familiari. In questo capitolo limiteremo la nostra attenzione

alle onde meccaniche, rimandando lo studio delle onde elettromagnetiche al Capitolo 24.

Il concetto di onda è astratto. Quando osserviamo un'onda nell'acqua,



► Grandi onde come questa attraversano enormi distanze sulla superficie dell'oceano, ma l'acqua non viaggia insieme all'onda. Le creste e gli avallamenti dell'onda spesso formano configurazioni ripetitive. (Superstock)

CONTENUTO

- 13.1 Tre caratteristiche delle onde
- 13.2 Tipi di onde
- 13.3 Propagazione di onde unidimensionali trasversali
- 13.4 Propagazione di onde sinusoidali
- 13.5 Sovrapposizione e interferenza di onde
- 13.6 La velocità delle onde trasversali nelle corde
- 13.7 Riflessione e trasmissione di onde
- 13.8 Energia trasmessa da onde sinusoidali nelle corde
- 13.9 Onde sonore
- 13.10 L'effetto doppler

ciò che noi vediamo è un riassestamento della superficie dell'acqua. Senza l'acqua non ci sarebbe l'onda. In questo caso e in ogni altro riguardante un'onda meccanica, ciò che noi interpretiamo come onda corrisponde alla perturbazione di un mezzo. Quindi, possiamo considerare un'onda meccanica come il **moto di una perturbazione**. Questo moto non deve essere confuso con il moto delle particelle che costituiscono il mezzo. In generale, descriviamo il moto di un'onda meccanica specificando le posizioni di tutte le particelle del mezzo perturbato in funzione del tempo.

13.1 • TRE CARATTERISTICHE DELLE ONDE

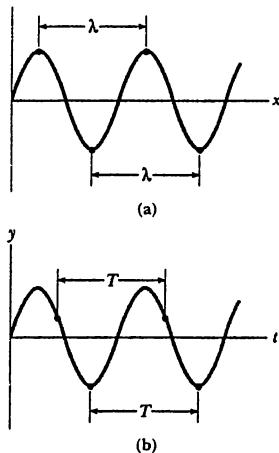


Figura 13.1 (a) La lunghezza d'onda λ di un'onda è la distanza fra due punti di un'onda che si comportano identicamente. (b) Il periodo T di un'onda è il tempo necessario a un'onda per percorrere una lunghezza d'onda.

Tutte le onde meccaniche richiedono (1) una qualche sorgente di perturbazione, (2) un mezzo che possa essere perturbato e (3) un qualche meccanismo fisico mediante il quale le particelle del mezzo possano interagire l'una con l'altra. Tutte le onde trasportano energia, ma la quantità di energia trasmessa attraverso un mezzo e il meccanismo responsabile del trasporto di energia differiscono da un caso all'altro. Per esempio, la potenza delle onde dell'oceano durante una tempesta è molto più grande della potenza delle onde sonore generate da uno strumento musicale.

Per descrivere le onde sono importanti tre caratteristiche fisiche: la lunghezza d'onda, la frequenza e la velocità dell'onda. La lunghezza d'onda è la distanza minima fra due punti di un'onda che si comportano identicamente. Per esempio, creste adiacenti o avallamenti adiacenti. La Figura 13.1a mostra, a un certo istante, lo spostamento di una particella in funzione della posizione lungo l'asse x per un'onda sinusoidale. Il simbolo greco λ (lambda) viene usato per indicare la lunghezza d'onda.

La maggior parte delle onde è periodica. La frequenza di queste onde è la rapidità di ripetizione della perturbazione. Il periodo dell'onda è il tempo minimo necessario alla perturbazione per ripetersi ed è uguale all'inverso della frequenza. La Figura 13.1b mostra, per una posizione fissata, lo spostamento in funzione del tempo per un'onda sinusoidale, dove il periodo è il tempo fra due spostamenti identici di una particella.

Le onde viaggiano, o si *propagano*, con una specifica velocità che dipende dalle proprietà del mezzo che è stato perturbato. Per esempio, le onde sonore viaggiano nell'aria a 20°C con una velocità di circa 343 m/s, mentre la velocità del suono nella maggior parte dei solidi è maggiore di 343 m/s.

Fisica ragionata 1

Perché è importante non produrre rumori in zona di valanghe? Nel film "Al servizio di Sua Maestà" (United Artists, 1969), il cattivo tenta di fermare James Bond, che fugge sugli sci, sparando con un fucile e causando una valanga. Perché accade ciò?

Ragionamento L'essenza di un'onda è la propagazione di una *perturbazione* attraverso un mezzo. Un impulso sonoro, simile allo sparo nel film di James Bond, causa una perturbazione acustica che si propaga attraverso l'aria e impatta su uno strato di neve che è appena pronto a rompersi spontaneamente per iniziare una valanga. Un tale disastroso evento avvenne nel 1916 durante la prima guerra mondiale, quando i soldati austriaci sulle Alpi furono investiti da una valanga provocata dallo sparo di un cannone.

13.2 • TIPI DI ONDE

Un modo per dimostrare il moto ondulatorio è di strattoneare l'estremità libera di una lunga corda in tensione che abbia l'altra estremità fissata come in Figura 13.2. In questo modo, si forma un singolo impulso che viaggia (verso destra in Fig. 13.2) con una velocità definita. Questo tipo di perturbazione è un'onda che si propaga, e la corda è il mezzo attraverso il quale si propaga. La Figura 13.2 rappresenta quattro "istantanee" dell'onda che si propaga. La forma dell'impulso varia poco mentre esso viaggia lungo la corda.¹

Notiamo che quando l'impulso viaggia, ogni segmento perturbato della corda si muove perpendicolarmente al moto dell'onda. La Figura 13.3 illustra questa circostanza per un particolare segmento *P*. È da notare che non vi è alcuna parte della corda che si muova nella direzione dell'onda. Un'onda che si propaga come questa, nella quale le particelle del mezzo perturbato si muovono perpendicolarmente alla velocità dell'onda, si chiama onda trasversale.

In un'altra classe di onde, le onde longitudinali, le particelle del mezzo subiscono uno spostamento parallelo alla direzione del moto dell'onda. Le onde sonore nell'aria, per esempio, sono longitudinali. La perturbazione corrisponde a una serie di regioni di alta e bassa pressione che si propagano nell'aria o in qualsiasi altro mezzo materiale con una certa velocità. Un impulso longitudinale può essere prodotto facilmente in una molla in tensione come in Figura 13.4. L'estremità libera viene spinta avanti e indietro lungo l'asse della molla. Questa azione genera delle regioni compresse e allungate delle spire che viaggiano lungo la molla, parallelamente al moto ondoso.²

Alcune onde non sono né trasversali né longitudinali, ma una combinazione dei due tipi. Le superfici ondose dell'acqua sono un ottimo esempio. La Figura 13.5 mostra il moto delle particelle d'acqua alla superficie come un'onda che si propaga verso destra. Ciascuna particella si muove su una traiettoria circolare e quindi la perturbazione possiede ambedue le componenti trasversale e longitudinale. Quando l'onda passa, le particelle d'acqua sulle creste si muovono nella direzione dell'onda mentre quelle che si trovano negli avallamenti si muovono in direzione opposta. Dunque non c'è alcuno spostamento risultante delle particelle d'acqua. Un tappo di sughero che dondola sulla superficie di uno stagno mostra, al passare di un'onda, questo moto circolare.

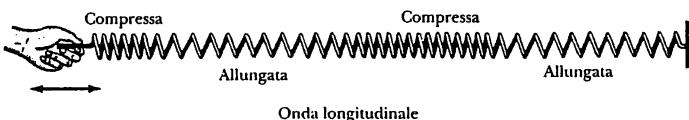


Figura 13.4 Un impulso longitudinale lungo una molla in tensione. Lo spostamento delle spire è nella direzione del moto dell'onda. Per le condizioni iniziali del moto descritte nel testo, la regione compressa è seguita da una regione allungata.

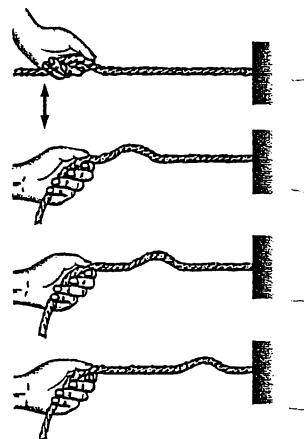


Figura 13.2 Un impulso in moto lungo una corda tesa. La forma dell'impulso è all'incirca invariata durante il moto lungo la corda.

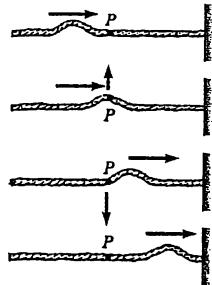


Figura 13.3 Un impulso in moto lungo una corda tesa è un'onda trasversale. Ossia ogni elemento *P* della corda si muove in una direzione perpendicolare al moto dell'onda.

¹ Strettamente parlando, l'impulso cambia la sua forma e si allarga durante il moto. Questo effetto si chiama *dispersione* ed è comune a molte onde meccaniche.

² Nel caso di onde longitudinali in un gas, ogni zona di compressione è una regione a pressione e densità più alte rispetto alla media e ogni regione di rarefazione è a pressione e densità più basse della media.

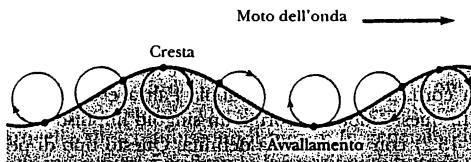


Figura 13.5 Moto ondulatorio sulla superficie dell'acqua. Le particelle sulla superficie dell'acqua si muovono su traiettorie quasi circolari. Ogni particella si sposta orizzontalmente e verticalmente rispetto alla sua posizione di equilibrio, come rappresentato dai cerchi.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

In una lunga coda di gente che aspetta di comprare il biglietto per il cinema, quando la prima persona se ne va, avviene un moto impulsivo, mentre le persone si spostano in avanti per riempire l'intervallo vuoto. L'intervallo vuoto si muove attraverso la coda delle persone. Cosa determina la velocità di questo impulso? Esso è longitudinale o trasversale? Cosa determina la "ola" durante una partita di calcio, quando il pubblico si alza in piedi e si risiede all'arrivo dell'onda nella loro posizione, e questo impulso si muove lungo tutto lo stadio? Cosa determina la velocità di questo impulso? Esso è trasversale o longitudinale?

13.3 • PROPAGAZIONE DI ONDE UNIDIMENSIONALI TRASVERSALI

Finora abbiamo dato solo una descrizione grafica e a parole di un'onda che si propaga. Diamo ora una descrizione matematica di un'onda unidimensionale che si propaga. Consideriamo nuovamente un impulso che viaggia verso destra in una corda tesa con velocità v costante, come in Figura 13.6. L'impulso si muove lungo l'asse x (l'asse della corda) e lo spostamento trasversale della corda è misurato lungo la coordinata y .

La Figura 13.6a rappresenta la forma e la posizione dell'impulso al tempo $t = 0$; a quest'istante la forma dell'impulso, qualunque sia, può essere rappresentata come $y = f(x)$; ossia y è una certa funzione definita di x . Lo *spostamento massimo*, y_m , è detto *ampiezza* dell'onda. Poiché la velocità dell'impulso è v , in un tempo t esso viaggia verso destra per una distanza vt (Fig. 13.6b). Se la

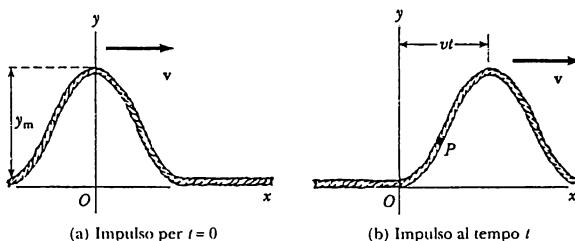


Figura 13.6 Un'onda unidimensionale che si propaga verso destra con velocità v . (a) Per $t = 0$ la forma dell'impulso è data da $y = f(x)$. (b) A un certo istante t , la forma resta invariata e lo spostamento verticale di un qualsiasi punto P del mezzo è dato da $y = f(x - vt)$.

forma dell'impulso non cambia nel tempo possiamo rappresentare lo spostamento y , per tutti gli istanti successivi, misurato in un sistema di riferimento fisso con origine in O , nel modo seguente:

$$y = f(x - vt) \quad [13.1]$$

In modo analogo se l'impulso viaggia verso *sinistra*, il suo spostamento è dato da

$$y = f(x + vt) \quad [13.2]$$

Lo spostamento y , talvolta chiamato **funzione d'onda**, dipende dalle due variabili x e t . Per questa ragione è spesso indicato con $y(x, t)$ e si legge "y funzione di x e t "; è importante comprendere il significato di y .

Consideriamo un determinato punto P sulla corda, identificato da un valore particolare delle coordinate. Quando l'onda passa per P , la coordinata y del punto cresce, raggiunge un massimo e poi diminuisce fino a zero. La **funzione d'onda $y(x, t)$** rappresenta la coordinata y di un qualsiasi punto P a un qualunque istante t . Inoltre, se t è fissato, allora la funzione d'onda y in funzione di x rappresenta la *forma effettiva dell'impulso a quell'istante*. Ciò è equivalente all'immagine istantanea dell'onda in quell'istante.

Per un impulso, che si muove senza variare la sua forma, la velocità dell'impulso nel suo insieme coincide con la velocità di un qualsiasi punto dell'impulso, ad esempio la cresta. Per determinare la velocità dell'impulso possiamo calcolare di quanto si muove la cresta in un breve intervallo di tempo e poi dividere questa distanza per l'intervallo di tempo. La cresta dell'impulso corrisponde a quel punto in cui y assume il valore massimo. Per poter seguire il moto della cresta, si deve sostituire in $x - vt$ dell'Equazione 13.1 un valore particolare, ad esempio x_0 . (Questo valore x_0 è detto *argomento* della funzione y). Indipendentemente da x e t , dobbiamo impostare che $x - vt = x_0$ per rimanere sulla cresta: questa condizione rappresenta quindi l'equazione del moto della cresta. Per $t = 0$ la cresta è in $x = x_0$; ad un tempo dt successivo, essa si trova in $x = x_0 + v dt$, perciò la cresta si è spostata di una distanza $dx = (x_0 + v dt) - x_0 = v dt$ in un tempo dt . Chiaramente, la velocità dell'onda, detta spesso **velocità di fase**, è data da

$$v = \frac{dx}{dt} \quad [13.3] \quad \bullet \text{Velocità di fase}$$

La **velocità dell'onda**, o **velocità di fase**, non deve venire confusa con la velocità trasversale (che è nella direzione y) di una particella nel mezzo.

Il seguente esempio illustra come una specifica funzione d'onda viene utilizzata per descrivere il moto di un impulso.

Esempio 13.1 Un impulso in moto verso destra

Un impulso in moto verso destra lungo l'asse x è rappresentato dalla funzione d'onda

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3.0t)^2 + 1}$$

dove x e y sono misurati in cm e t in secondi. Disegniamo la forma dell'onda per $t = 0$, $t = 1.0$ s e $t = 2.0$ s.

Soluzione Per prima cosa, notiamo che questa funzione è della forma $y = f(x - vt)$. Dall'espressione, vediamo che la velocità dell'onda è 3.0 cm/s. Inoltre, l'ampiezza dell'onda (il massimo valore di y) è data da $y_m = 2.0$ cm. La posizione del picco dell'impulso corrisponde al valore di x per il quale il denominatore è un minimo, cioè, dove $(x - 3.0t) = 0$. Agli istanti $t = 0$, $t = 1.0$ s e $t = 2.0$ s le espressioni della funzione d'onda sono

$$y(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1} \quad \text{per } t = 0$$

$$y(x, 1.0) = \frac{2}{(x - 3.0)^2 + 1} \quad \text{per } t = 1.0 \text{ s}$$

$$y(x, 2.0) = \frac{2}{(x - 6.0)^2 + 1} \quad \text{per } t = 2.0 \text{ s}$$

$$y(0.50, 0) = \frac{2}{(0.50)^2 + 1} = 1.6 \text{ cm}$$

Analogamente $y(1.0, 0) = 1.0 \text{ cm}$, $y(2.0, 0) = 0.40 \text{ cm}$, ecc. Continuando questo procedimento per altri valori di x si ottiene la forma d'onda mostrata in Figura 13.7a; allo stesso modo si ottengono i grafici per $y(x, 1.0)$ e $y(x, 2.0)$ mostrati nelle Figure 13.7b e 13.7c, rispettivamente. Queste immagini istantanee mostrano come l'impulso si muove verso destra senza modificare la sua forma, con una velocità costante di 3.0 cm/s .

Possiamo utilizzare queste espressioni per disegnare le funzioni d'onda in funzione di x a questi istanti. Ad esempio valutiamo $y(x, 0)$ a $x = 0.50 \text{ cm}$:

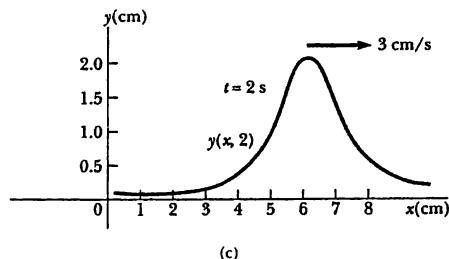
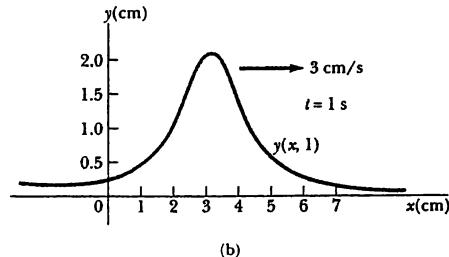
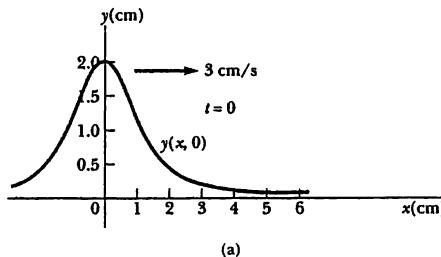


Figura 13.7 (Esempio 13.1) Grafici delle funzioni $y(x, t) = 2 / [(x - 3t)^2 + 1]$. (a) per $t = 0$, (b) per $t = 1 \text{ s}$, (c) per $t = 2 \text{ s}$.

13.4 • PROPAGAZIONE DI ONDE SINUSOIDALI

In questo paragrafo introduciamo un'importante forma d'onda nota come **onda sinusoidale** (Fig. 13.8). La curva rossa rappresenta un'istantanea del moto di un'onda sinusoidale per $t = 0$ e la curva blu rappresenta un'istantanea dell'onda a un istante successivo t . Per $t = 0$, lo spostamento della curva si può scrivere

$$y = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad [13.4]$$

dove l'ampiezza A , come al solito, rappresenta il massimo valore dello spostamento, e λ è la lunghezza d'onda come è definita nella Figura 13.1a. Così, vediamo che lo spostamento si ripete quando x aumenta di un multiplo intero di λ . Se l'onda si muove verso destra con una velocità di fase v , la funzione d'onda in un istante successivo t è:

$$y = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \quad [13.5]$$

Cioè, l'onda sinusoidale si muove verso destra a una distanza vt nel tempo t , come in Figura 13.8. Si noti che la funzione d'onda ha la forma $f(x - vt)$ e rappresenta un'onda che si muove verso destra. Se l'onda si muove verso sinistra, la quantità $x - vt$ viene sostituita da $x + vt$, proprio come nel caso dell'impulso descritto dalle Equazioni 13.1 e 13.2.

Poiché il periodo T è il tempo necessario all'onda per percorrere la distanza di una lunghezza d'onda, la velocità di fase, la lunghezza d'onda e il periodo sono legati da

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad [13.6]$$

ossia,

$$\lambda = vT \quad [13.7]$$

Sostituendo l'Equazione 13.6 nell'Equazione 13.5, troviamo

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad [13.8]$$

Questa forma della funzione d'onda mostra chiaramente la natura periodica di y . Cioè, a ogni dato istante t (un'istantanea dell'onda), y ha lo stesso valore nei punti x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, e così via. Inoltre, per ogni data posizione x , i valori di y sono gli stessi al tempo t , $t + T$, $t + 2T$, e così via.

Possiamo esprimere la funzione d'onda sinusoidale in una forma conveniente definendo altre due grandezze: il **numero d'onda** k e la **pulsazione** ω :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [13.9] \quad \bullet \text{ Numero d'onda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [13.10] \quad \bullet \text{ Pulsazione}$$

Si noti che nell'Equazione 13.10 abbiamo usato la definizione di frequenza, $f = 1/T$. Usando queste definizioni, vediamo che l'Equazione 13.8 si può scrivere in forma più compatta

$$y = A \sin (kx - \omega t) \quad [13.11]$$

Questa forma è quella che useremo con maggiore frequenza.

Usando le Equazioni 13.9 e 13.10, possiamo esprimere la **velocità di fase**, v , nella forma alternativa

$$v = \frac{\omega}{k} \quad [13.12]$$

$$v = f\lambda \quad [13.13] \quad \bullet \text{ Velocità di un'onda sinusoidale}$$

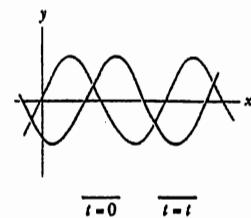


Figura 13.8 Un'onda sinusoidale unidimensionale in moto verso destra con velocità v . La curva rossa rappresenta un'istantanea dell'onda per $t = 0$ e la curva blu a un istante successivo t .

La funzione d'onda data dall'Equazione 13.11 assume che lo spostamento y sia zero per $x = 0$ e $t = 0$. Poiché ciò può non verificarsi, allora se lo spostamento trasversale non è zero per $x = 0$ e $t = 0$, noi esprimiamo la funzione d'onda nella forma

**Funzione d'onda •
per un'onda sinusoidale
che si propaga**

$$y = A \sin(kx - \omega t - \phi) \quad [13.14]$$

dove ϕ si chiama **costante di fase** e può essere determinata dalle condizioni iniziali.

Fisica ragionata 2

La grandezza che chiamiamo numero d'onda k è qualche volta chiamata *frequenza spaziale*. Perché?

Ragionamento La frequenza angolare (pulsazione) ω è 2π diviso per l'intervallo di *tempo* relativo a un ciclo di oscillazione dell'onda, il periodo, T . Il numero d'onda k è 2π diviso per l'intervallo *spaziale* relativo a un ciclo di oscillazione dell'onda, la lunghezza d'onda, λ (l'intervallo spaziale di un ciclo dell'onda). A causa della somiglianza dei parametri, è ragionevole considerare ω come la frequenza *temporale* (pulsazione) e k come la frequenza *spaziale*.

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Le onde sonore di un programma musicale sono codificate in onde radio per la trasmissione da uno studio al ricevitore di casa. Un'onda radio con una lunghezza d'onda di 3 metri trasporta un'onda sonora che ha in aria una lunghezza d'onda di 3 metri. Ha frequenza più alta, l'onda radio o l'onda sonora?

Esempio 13.2 Un'onda sinusoidale che si propaga

Un'onda sinusoidale che si propaga nel verso positivo delle x ha un'ampiezza di 15.0 cm, una lunghezza d'onda di 40.0 cm e una frequenza di 8.00 Hz. Lo spostamento verticale del mezzo per $t = 0$ e $x = 0$ è 15.0 cm come viene mostrato in Figura 13.9. (a) Determinare il numero d'onda, il periodo, la pulsazione e la velocità di fase dell'onda.

Soluzione Usando le Equazioni 13.9, 13.10, e 13.13, troviamo i valori seguenti:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{40.0 \text{ cm}} = 0.157 \text{ rad/cm}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00 \text{ s}^{-1}} = 0.125 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8.00 \text{ s}^{-1}) = 50.3 \text{ rad/s}$$

$$v = f\lambda = (8.00 \text{ s}^{-1})(40.0 \text{ cm}) = 320 \text{ cm/s}$$

(b) Si determini la fase iniziale ϕ e si scriva un'espressione generale per la funzione d'onda.

Soluzione Poiché l'ampiezza $A = 15.0$ cm e viene fornito il valore $y = 15.0$ cm per $x = 0$ e $t = 0$, sostituendo nell'Equazione 13.14 si ottiene

$$15 = 15 \sin(-\phi) \quad \text{ossia} \quad \sin(-\phi) = 1$$

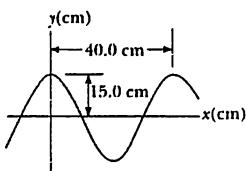


Figura 13.9 (Esempio 13.2) Un'onda sinusoidale di lunghezza d'onda $\lambda = 40.0$ cm e ampiezza $A = 15.0$ cm. La funzione d'onda può venire scritta nella forma $y = A \cos(kx - \omega t)$.

Essendo $\sin(-\phi) = -\sin \phi$ vediamo che $\phi = -\pi/2$ rad (oppure -90°). Dunque, la funzione d'onda è della forma

$$y = A \sin \left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos(kx - \omega t)$$

Possiamo vedere ciò notando che la funzione coseno è sfasata di 90° rispetto alla funzione seno. Sostituendo i valori per A , k , e ω in questa espressione, otteniamo

$$y = (15.0 \text{ cm}) \cos(0.157x - 50.3t)$$

Onde sinusoidali nelle corde

Un modo di produrre un'onda in una corda molto lunga è mostrato in Figura 13.10. Un'estremità della corda è collegata a una lama posta in vibrazione. Poiché la lama oscilla verticalmente con un moto armonico semplice, essa produce un'onda che si propaga nella corda verso destra. La Figura 13.10 mostra immagini istantanee dell'onda, ad intervalli di un quarto di periodo. Si noti che ogni particella della corda, come P , oscilla verticalmente nella direzione y con un moto armonico semplice. Così deve essere, poiché ogni particella segue il moto armonico semplice della lama. Perciò ogni tratto della corda può venire considerato come un oscillatore armonico, che vibra con una frequenza uguale alla frequenza di vibrazione della lama, che pone in movimento la corda³. Si noti che, sebbene ogni tratto di corda oscilli nella direzione y , l'onda (o la perturbazione) viaggia nella direzione x con velocità v .

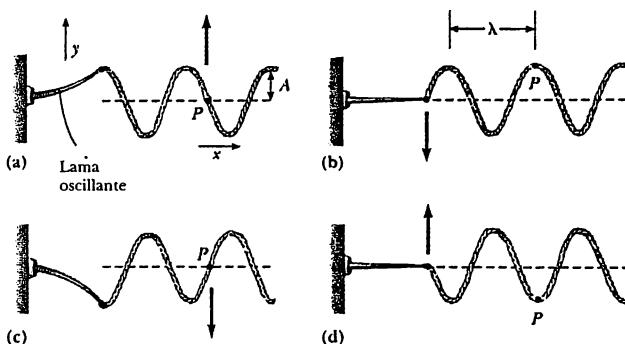


Figura 13.10 Un metodo per produrre onde sinusoidali in una corda omogenea. L'estremità sinistra della corda è collegata a una lama in vibrazione. Si noti che ogni tratto, ad esempio P , oscilla con un moto armonico semplice in direzione verticale.

³ In questo sistema assumiamo che la massa oscilli sempre verticalmente. La tensione della corda varierebbe se la massa potesse muoversi di lato; un tale moto renderebbe l'analisi molto complicata.

Naturalmente, questa è la definizione di onda trasversale. In questo caso l'energia trasportata dall'onda che si propaga è fornita dalla lama in vibrazione.

Se la forma d'onda per $t = 0$ è quella descritta in Figura 13.10b, allora la funzione d'onda può essere scritta come

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

Possiamo usare questa espressione per descrivere il moto di un qualsiasi punto della corda. Il punto P (o un qualsiasi altro punto della corda) si muove verticalmente e così la sua coordinata x rimane costante. Perciò la velocità trasversale, v_y , del punto P (da non confondersi con la velocità dell'onda v) e l'accelerazione trasversale, a_y , sono date da:

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Big|_{x=\text{costante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t) \quad [13.15]$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Big|_{x=\text{costante}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \quad [13.16]$$

Il valore massimo di queste grandezze è semplicemente il valore assoluto dei coefficienti delle funzioni seno e coseno:

$$(v_y)_{\max} = \omega A \quad [13.17]$$

$$(a_y)_{\max} = \omega^2 A \quad [13.18]$$

Si deve sottolineare che la velocità trasversale e l'accelerazione trasversale non raggiungono il loro valore massimo simultaneamente; infatti, la velocità trasversale raggiunge il suo massimo valore (ωA) quando lo spostamento è $y = 0$, mentre l'accelerazione trasversale raggiunge il suo massimo valore ($\omega^2 A$) quando $y = -A$. Infine le Equazioni 13.17 e 13.18 sono identiche alle corrispondenti equazioni per il moto armonico semplice.

Esempio 13.3 Una corda mantenuta in moto sinusoidale

La corda mostrata in Figura 13.10 viene mantenuta in movimento ad un'estremità, con una frequenza di 5.00 Hz. L'ampiezza del moto è 12.0 cm e la velocità dell'onda è 20.0 m/s. Determinare la pulsazione, il numero d'onda e scrivere un'espressione per la funzione d'onda.

Soluzione Usando le Equazioni 13.10 e 13.12, otteniamo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi (5.00 \text{ Hz}) = 31.4 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{31.4 \text{ rad/s}}{20.0 \text{ m/s}} = 1.57 \text{ rad/m}$$

Poiché $A = 12.0 \text{ cm} = 0.120 \text{ m}$, otteniamo

$$y = A \sin(kx - \omega t) = (0.120 \text{ m}) \sin(1.57x - 31.4t)$$

ESERCIZIO 1 Calcolare il valore massimo della velocità trasversale e dell'accelerazione trasversale di ogni punto della corda. Risposta $3.77 \text{ m/s}; 118 \text{ m/s}^2$

ESERCIZIO 2 Quando una particolare corda vibra con una frequenza di 4.00 Hz, si genera un'onda trasversale di lunghezza d'onda 60.0 cm. Determinare la velocità dell'onda nella corda. Risposta 2.40 m/s

ESERCIZIO 3 Per una certa onda trasversale, la distanza fra due massimi successivi è 1.2 m e l'altezza massima passa in un dato punto lungo la direzione di propagazione ogni 12 s. Calcolare la velocità dell'onda. Risposta 0.80 m/s

13.5 • SOVRAPPOSIZIONE E INTERFERENZA DI ONDE

In natura molti fenomeni interessanti non possono essere descritti da un singolo impulso in movimento. È necessario, invece, analizzare le forme d'onda complesse in termini di una combinazione di molte onde. Per analizzare queste combinazioni d'onde, possiamo usare il **principio di sovrapposizione**, il quale afferma che

se due o più onde si muovono in un mezzo, la funzione d'onda risultante è in ogni punto la somma algebrica delle funzioni d'onda delle singole onde.

- *Le onde lineari obbediscono al principio di sovrapposizione*

Questa proprietà piuttosto peculiare è mostrata in natura da molte onde. *Onde* che obbediscono a questo principio vengono dette *lineari* e sono generalmente caratterizzate da piccole ampiezze d'onda. Onde che violano il principio di sovrapposizione sono dette *non lineari* e sono spesso caratterizzate da grandi ampiezze. In questo libro tratteremo solo onde lineari.

Una conseguenza del principio di sovrapposizione è l'osservazione che **due onde che si propagano possono passare l'una attraverso l'altra senza venire distrutte o modificate**. Ad esempio, quando due sassi vengono lanciati nello stagno le onde circolari che si allargano sulla superficie non si distruggono tra loro. In realtà le increspature si attraversano. La struttura complessa che viene osservata può essere interpretata come due insiemi indipendenti di cerchi che

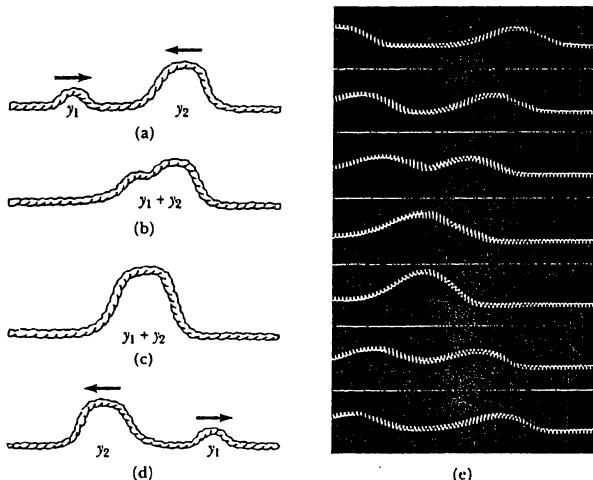


Figura 13.11 (Sinistra) Due impulsi in moto lungo una corda tesa in versi opposti si attraversano. Quando gli impulsi sono sovrapposti, come in (b) e (c), lo spostamento risultante nella corda è la somma degli spostamenti di ogni impulso. Poiché entrambi gli impulsi hanno spostamenti positivi, la loro sovrapposizione è un'*interferenza costruttiva*. (Destra) Immagini istantanee della sovrapposizione di due impulsi uguali asimmetrici in moto in versi opposti lungo una corda tesa. (Foto, Education Development Center, Newton, Mass.)

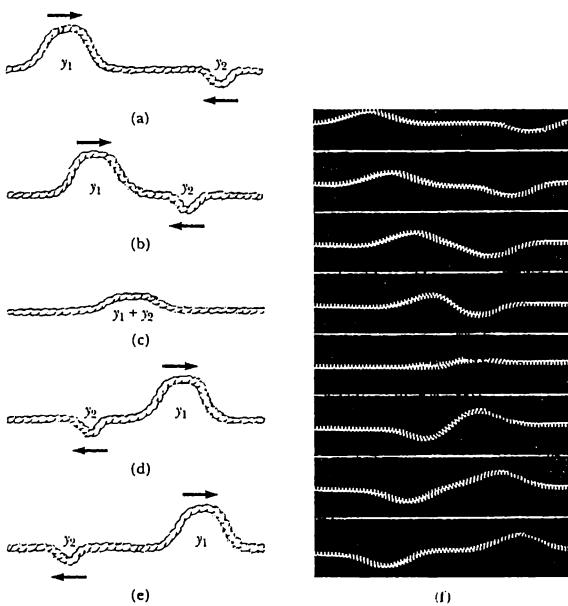


Figura 13.12 (Sinistra) Due impulsi in moto in versi opposti con spostamenti uguali ma opposti. Quando si sovrappongono, i relativi spostamenti si sottraggono producendo un'interferenza distruttiva. Si noti che in (c) lo spostamento è zero per tutti i valori di x . (Destra) Immagini istantanee della sovrapposizione di due impulsi simmetrici in moto lungo versi opposti, con spostamenti opposti l'uno rispetto all'altro. (Foto, Education Development Center, Newton, Mass.).

si espandono. allo stesso modo, quando onde sonore prodotte da due sorgenti si propagano nell'aria, possono anch'esse attraversarsi. Il suono risultante, che si ascolta in un punto dato, è la risultante delle due perturbazioni.

Una semplice rappresentazione grafica del principio di sovrapposizione è ottenuta considerando due impulsi che viaggiano in versi opposti lungo una corda tesa come in Figura 13.11. La funzione d'onda per l'impulso che si muove verso destra è y_1 e la funzione d'onda per l'impulso che si muove verso sinistra è y_2 ; gli impulsi hanno la stessa velocità, ma forme diverse. Si assume che ogni impulso sia simmetrico (per quanto ciò non sia necessario) e che entrambi gli spostamenti siano positivi. Quando le onde iniziano a sovrapporsi (Fig. 13.11b) la forma d'onda risultante è data da $y_1 + y_2$. Quando le creste degli impulsi coincidono esattamente (Fig. 13.11c) la funzione d'onda $y_1 + y_2$ è simmetrica. I due impulsi alla fine si separano e continuano a muoversi nelle loro direzioni originali (Fig. 13.11d). Notiamo che le funzioni d'onda finali rimangono invariate come se i due impulsi non si fossero mai incontrati! La combinazione di onde diverse nella stessa regione dello spazio, che produce un'onda risultante, è detta **interferenza**.

Per i due impulsi mostrati in Figura 13.11, gli spostamenti verticali degli impulsi individuali avvengono nello stesso verso e la funzione d'onda risultante (quando gli impulsi si sovrappongono) è caratterizzata da uno spostamento



Figura d'interferenza prodotte da onde che si allargano non dovute ad alcune gocce di pioggia che cadono in uno stagno. (Martin Dohrn/SPL/Photo Researchers)

maggiori di quello determinato dalle singole onde. Consideriamo ora due impulsi identici, uno opposto all'altro, che viaggiano in versi opposti in una corda tesa, come in Figura 13.12. In questo caso, quando gli impulsi iniziano a sovrapporsi, la forma d'onda risultante è la somma dei due diversi spostamenti. Di nuovo i due impulsi si attraversano.

ESERCIZIO 4 Due onde si propagano nella stessa direzione lungo una corda tesa. Ciascuna ha un'ampiezza di 4.0 cm e sono sfasate di 90° . Trovare l'ampiezza dell'onda risultante. Risposta 5.7 cm

13.6 • LA VELOCITÀ DELLE ONDE TRASVERSALI NELLE CORDE

Nel caso di onde lineari, la **velocità delle onde meccaniche** dipende solo dalle proprietà del mezzo attraverso cui viaggia la perturbazione. In questo paragrafo focalizzeremo la nostra attenzione sulla determinazione della velocità di un impulso trasversale che viaggia in una corda tesa. Se la **tensione** della corda è F e la sua **massa per unità di lunghezza** è μ , allora la velocità dell'onda v è data da

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad [13.19]$$

Utilizziamo ora un'analisi meccanica per ottenere l'espressione precedente, per la velocità di un impulso che si propaga in una corda tesa. Consideriamo un impulso in moto verso destra con velocità costante v , misurata rispetto a un sistema di riferimento fisso. È più conveniente assumere un sistema di riferimento che si muova assieme all'impulso con la stessa velocità, in modo che l'impulso sia fermo in questo sistema, come in Figura 13.13a. Ciò è possibile poiché le leggi di Newton sono valide, sia in un sistema fisso che in un sistema che si muove a velocità costante. Un *piccolo* tratto della corda di lunghezza Δs forma approssimativamente l'arco di cerchio di raggio R , mostrato in Figura 13.13a, ed ingrandito in Figura 13.13b. Nel sistema di riferimento dell'impulso il segmento ombreggiato si muove verso sinistra con velocità v . Questo piccolo tratto subisce un'accelerazione centripeta uguale a v^2/R , che viene generata dalla tensione F della corda. La forza F agisce da entrambe le parti del tratto, tangenzialmente all'arco, come in Figura 13.13b. Le componenti orizzontali di F si annullano ed ogni componente verticale $F \sin \theta$ agisce radialmente verso l'interno, verso il centro dell'arco. Perciò la forza totale radiale è $2F \sin \theta$. Poiché il segmento è piccolo, θ è piccolo e possiamo approssimare $\sin \theta \approx \theta$. Perciò, la forza radiale totale può essere espressa come

$$F_r = 2F \sin \theta = 2F\theta$$

Il tratto ha una massa data da $m = \mu \Delta s$, dove μ è la massa per unità di lunghezza della corda. Poiché il segmento è un arco di cerchio che sottende un angolo al centro 2θ , $\Delta s = R(2\theta)$, e dunque:

$$m = \mu \Delta s = 2\mu R\theta$$

Se applichiamo la seconda legge di Newton a questo segmento, la componente radiale del moto dà

$$F_r = \frac{mv^2}{R} \quad \text{ossia} \quad 2F\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R}$$

- *Velocità di un'onda in una corda tesa*

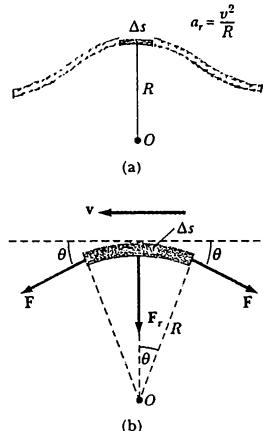


Figura 13.13 (a) Per ottenere la velocità v di un'onda in una corda tesa, è opportuno descrivere il moto di un piccolo tratto di corda in un sistema di riferimento in moto. (b) La forza risultante su un piccolo tratto di lunghezza Δs è nella direzione radiale. La componente orizzontale della tensione si annulla.

dove F , è la forza che fornisce l'accelerazione centripeta al segmento e mantiene la curvatura in quel punto.

Risolvendo rispetto a v si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Si noti che questo procedimento è basato sull'ipotesi che l'altezza dell'impulso sia piccola rispetto alla lunghezza della corda, per cui possiamo usare l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$. Inoltre, il modello assume che la tensione F non venga influenzata dalla presenza dell'impulso, in modo tale che F sia la stessa in tutti i punti della corda. Infine, notiamo che questa dimostrazione non presuppone alcuna forma particolare per l'impulso; concludiamo perciò che un impulso di *una forma qualsiasi* viaggia in una corda con velocità $v = \sqrt{F/\mu}$, senza modificare la sua forma.

Fisica ragionata 3

Un agente segreto viene intrappolato in un edificio in cima a un ascensore a pianterreno. Esso prova a spedire un messaggio, a un compagno che si trova all'ultimo piano, per mezzo di colpetti sul cavo dell'ascensore. Quando gli impulsi dei colpetti si muovono lungo il cavo verso il compagno, la velocità con cui si muovono rimarrà la stessa, aumenterà o diminuirà? Se gli impulsi sono spediti a intervalli di un secondo, saranno ricevuti dal compagno a intervalli di un secondo?

Ragionamento Il cavo dell'ascensore si può rappresentare come una corda pesante. La velocità dell'onda nel cavo è funzione della tensione del cavo. Quando l'onda si muove nel cavo verso l'alto, incontra una tensione crescente, poiché ciascun punto del cavo deve sopportare il peso di tutto il cavo più basso (e dell'ascensore). Quindi, la velocità dell'impulso aumenta mentre si sposta più in alto lungo il cavo. La frequenza degli impulsi non viene influenzata, poiché ciascun impulso impiegherà lo stesso tempo per raggiungere la cima: essi arriveranno in cima al cavo a intervalli di un secondo.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

In meccanica, spesso si assumono corde prive di massa. Perché ciò non è una buona assunzione quando si trattano onde nelle corde?

Esempio 13.4 Velocità di un impulso in una corda

Una corda omogenea ha una massa di 0.300 kg e una lunghezza di 6.00 m. La tensione è mantenuta tramite una massa di 2.00 kg sospesa a una estremità (Fig. 13.14). Determinare la velocità di un impulso in questa corda. Si assuma che la tensione non sia influenzata dalla massa della corda.

Soluzione La tensione F della corda è eguale alla forza peso della massa sospesa di 2.00 kg:

$$F = mg = (2.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 19.6 \text{ N}$$

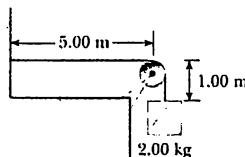


Figura 13.14 (Esempio 13.4) La tensione F nella corda è mantenuta dalla massa sospesa. La velocità dell'onda è data dall'espressione $v = \sqrt{F/\mu}$.

(Questo calcolo della tensione trascura la massa della corda. In realtà la corda non potrà mai essere perfettamente orizzontale, per cui la tensione non sarà uniforme). La massa per unità di lunghezza μ è

Pertanto la velocità dell'onda è

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{19.6 \text{ N}}{0.0500 \text{ kg/m}}} = 19.8 \text{ m/s}$$

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{0.300 \text{ kg}}{6.00 \text{ m}} = 0.0500 \text{ kg/m}$$

ESERCIZIO 5 Mostrare che l'Equazione 13.19 è dimensionalmente corretta usando le dimensioni note di F e μ .

ESERCIZIO 6 Onde trasversali si propagano con una velocità di 20.0 m/s in una corda sottoposta a una tensione di 6.00 N. Quale tensione sarebbe necessaria per una velocità dell'onda di 30.0 m/s nella stessa corda? Risposta 13.5 N

13.7 • RIFLESSIONE E TRASMISSIONE DI ONDE

Quando un impulso che si propaga raggiunge una discontinuità, una parte o tutto l'impulso verrà riflesso. La parte non riflessa si dice che viene *trasmessa* attraverso la discontinuità. Consideriamo un impulso che viaggi lungo una corda fissata a un'estremità (Fig. 13.15). Quando l'impulso raggiunge l'estremità fissa della corda, esso viene riflesso. Poiché il supporto che fissa la corda alla parete è rigido, nessuna parte dell'impulso verrà trasmessa alla parete.

Si noti che l'impulso riflesso ha esattamente la stessa ampiezza dell'impulso in arrivo ma è invertito. Questa inversione si può spiegare in questo modo. Quando l'impulso incontra l'estremità della corda fissata al supporto, la corda genera una forza verso l'alto sul supporto. Per la terza legge di Newton, il supporto deve esercitare una forza di reazione uguale e opposta sulla corda. Questa forza verso il basso è la causa dell'inversione dell'impulso dopo la riflessione.

Consideriamo adesso un'altra circostanza nella quale vi è riflessione totale e trasmissione nulla. In questo caso l'impulso arriva all'estremità di una corda che è libera di muoversi verticalmente come in Figura 13.16. La tensione all'estremità viene mantenuta legando la corda a un anello di massa trascurabile che sia libero di scivolare verticalmente su un'asta priva di attrito. L'impulso verrà nuovamente riflesso ma questa volta non verrà invertito. Quando l'impulso raggiunge l'asta, esercita una forza sull'estremità libera, provocando un'accelerazione dell'anello verso l'alto. In questo processo, l'anello possiede una quantità di moto verso l'alto quando raggiunge il suo massimo spostamento ed è allora richiamato nella sua posizione originaria dalla componente verso il basso della forza di tensione. Ciò produce un impulso riflesso senza inversione, la cui ampiezza è la stessa di quella dell'impulso incidente.

Infine, possiamo avere una situazione, all'estremità della corda, intermedia fra due casi estremi; cioè, non completamente rigida né completamente libera. In questo caso, una parte dell'onda viene trasmessa e una parte viene riflessa. Per esempio, supponiamo che una corda leggera sia collegata a una corda più pesante come in Figura 13.17. Quando un impulso che viaggia nella corda leggera raggiunge il confine fra le due corde, una parte dell'impulso viene riflessa e invertita e una parte viene trasmessa alla corda più pesante. Come ci si può aspettare, ambedue gli impulsi trasmesso e riflesso avranno ampiezze più piccole dell'impulso incidente. L'inversione nell'onda riflessa ha lo stesso comportamento di un impulso che incontra un confine rigido.

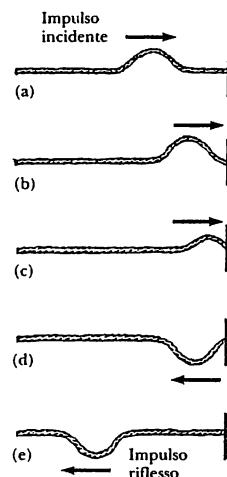


Figura 13.15 La riflessione di un impulso a un'estremità fissa di una corda tesa. Si noti che l'impulso riflesso è invertito, ma la sua forma resta la stessa.

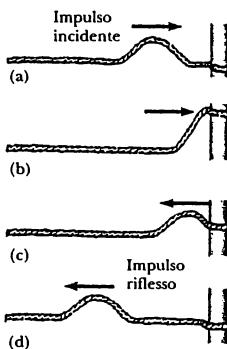


Figura 13.16 La riflessione di un impulso a un'estremità libera di una corda tesa. In tal caso l'impulso riflesso non viene invertito.

Quando un impulso che viaggia in una corda pesante incontra il punto di separazione con una corda più leggera, come in Figura 13.18, una parte viene riflessa e una parte è trasmessa. Questa volta, però, l'impulso riflesso non è invertito. In entrambi i casi, da leggera a pesante e da pesante a leggera, le altezze relative degli impulsi riflessi e trasmessi dipendono dalle densità relative delle due corde.

Nel paragrafo precedente, abbiamo trovato che la velocità di un'onda in una corda aumenta quando la massa per unità di lunghezza diminuisce. In altre parole, un impulso viaggia più lentamente in una corda pesante che non in una corda leggera se ambedue sono sottoposte alla stessa tensione. Le seguenti regole generali si applicano alle onde riflesse:

quando un impulso viaggia dal mezzo A al mezzo B e $v_A > v_B$ (cioè, quando B ha una densità maggiore di A), l'impulso riflesso viene invertito. Quando un impulso viaggia da un mezzo A a un mezzo B e $v_A < v_B$ (A è più denso di B), l'impulso riflesso non viene invertito.

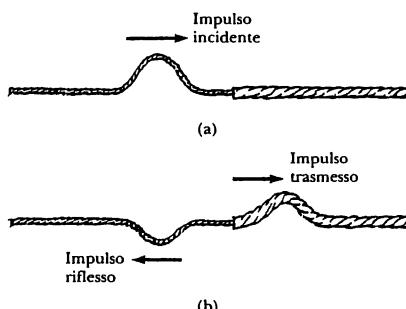


Figura 13.17 (a) Un impulso in moto verso destra in una corda leggera legata a una corda più pesante. (b) L'impulso incidente viene parzialmente riflesso (ed invertito), e parzialmente trasmesso alla corda più pesante.

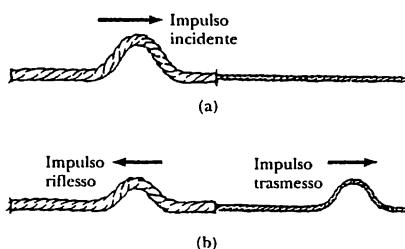


Figura 13.18 (a) Un impulso in moto verso destra in una corda pesante legata a una corda più leggera. (b) L'impulso incidente viene parzialmente riflesso (e non invertito) e parzialmente trasmesso alla corda più leggera.

13.8 • ENERGIA TRASMESSA DA ONDE SINUSOIDALI NELLE CORDE

Quando delle onde si propagano in un mezzo, trasportano energia e quantità di moto. Ciò viene facilmente dimostrato, agganciando un peso a una corda tesa e inviando un impulso lungo la corda, come in Figura 13.19. Quando l'impulso incontra il peso, quest'ultimo verrà momentaneamente spostato, come si vede in Figura 13.19b. In tale processo dell'energia viene trasferita al peso poiché deve essere compiuto del lavoro per muoverlo verso l'alto.

In questo paragrafo, vogliamo dedurre la rapidità con cui l'energia viene trasportata lungo la corda. Assumeremo che l'onda che si propaga in una certa direzione sia un'onda sinusoidale. Successivamente estenderemo queste idee alle onde tridimensionali.

Consideriamo un'onda sinusoidale in moto in una corda (Fig. 13.20). La sorgente di energia è un agente esterno, all'estremità sinistra della corda, che svolge lavoro, per produrre le oscillazioni. Focalizziamoci su un elemento della corda di lunghezza Δx e massa Δm . Ognuno di questi tratti si muove verticalmente di moto armonico semplice. Inoltre, ogni tratto ha la stessa pulsazione, ω , e la stessa ampiezza, A . Come abbiamo visto nel Capitolo 12 l'energia totale E associata a una particella che si muove di moto armonico semplice è $\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ (Eq. 12.22), dove k è la costante elastica equivalente della forza di richiamo. Se applichiamo questa espressione all'elemento di lunghezza Δx vediamo che l'energia totale di questo elemento è

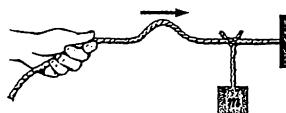
$$\Delta E = \frac{1}{2} (\Delta m) \omega^2 A^2$$

Se μ è la massa per unità di lunghezza, allora il tratto di lunghezza Δx ha una massa Δm eguale a $\mu \Delta x$. Perciò possiamo esprimere ΔE come

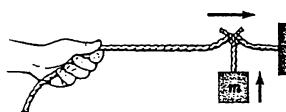
$$\Delta E = \frac{1}{2} (\mu \Delta x) \omega^2 A^2 \quad [13.20]$$

Se l'onda viaggia da sinistra a destra come in Figura 13.20, l'energia ΔE è prodotta dal lavoro svolto sull'elemento Δm dall'elemento di corda a sinistra di Δm . In modo analogo l'elemento Δm compie lavoro sull'elemento alla sua destra e vediamo che in questo modo l'energia viene trasmessa verso destra. La rapidità con cui l'energia viene trasmessa lungo la corda, ovvero la potenza, è data da dE/dt . Se facciamo tendere Δx a 0, l'Equazione 13.20 dà

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left(\mu \frac{dx}{dt} \right) \omega^2 A^2$$



(a)



(b)

Figura 13.19 (a) Un impulso che viaggia verso destra in una corda tesa alla quale viene appesa una massa. (b) Energia e quantità di moto sono trasmesse alla massa collegata quando passa l'impulso.

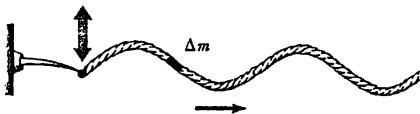


Figura 13.20 Un'onda sinusoidale in moto lungo l'asse x in una corda tesa. Ogni tratto si muove lungo la direzione verticale e possiede la stessa energia totale. La potenza trasmessa dall'onda è uguale all'energia contenuta in una lunghezza d'onda divisa per il periodo dell'onda.

Poiché dx/dt è uguale alla velocità dell'onda, v , otteniamo

$$\text{Potenza} \bullet P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad [13.21]$$

Ciò dimostra che la potenza trasmessa da un'onda sinusoidale in una corda è proporzionale (1) alla velocità dell'onda, (2) al quadrato della pulsazione (e quindi della frequenza) e (3) al quadrato dell'ampiezza. In conclusione tutte le onde sinusoidali hanno le seguenti proprietà generali: **la potenza trasmessa da una qualsiasi onda sinusoidale è proporzionale al quadrato della pulsazione e al quadrato dell'ampiezza.**

Vediamo così che un'onda che si propaga in un mezzo corrisponde a un trasporto di energia nel mezzo senza un trasferimento di materia. Una sorgente di oscillazione fornisce l'energia e produce una perturbazione sinusoidale nel mezzo. La perturbazione può propagarsi attraverso il mezzo come risultato dell'interazione tra particelle adiacenti. Per poter verificare l'Equazione 13.21 sperimentalmente, bisognerebbe progettare uno strumento che posto all'estremità della corda possa sottrarre l'energia all'onda senza produrre alcuna riflessione.

Fisica ragionata 4

Abbiamo dimostrato che le onde trasportano energia, non soltanto le onde nelle corde, ma tutte le onde. Mettere a punto un semplice dispositivo che mostri come le onde trasferiscano sia quantità di moto che energia.

Ragionamento Immaginiamo di coprire le estremità di un tubo di cartone con dei fogli elastici, fissati con dell'adesivo, per formare un rudimentale doppio tamburo. Disponiamo, adesso, il tubo orizzontalmente su un tavolo e sospendiamo una pallina di ping-pong a una funicella cosicché essa tocchi appena una delle superfici elastiche. Se, ora, battiamo un colpo sull'altro estremo con un dito, il suono attraverserà il tubo, urterà l'estremo che ha di fronte, e la pallina di ping-pong salterà lontano dal foglio elastico. Ciò dimostra che le onde sonore trasferiscono quantità di moto alla pallina di ping-pong.

Esempio 13.5 Potenza fornita a una corda vibrante

Una corda tesa di massa per unità di lunghezza $\mu = 5.00 \times 10^{-2}$ kg/m, è sottoposta ad una tensione di 80.0 N.

Quale potenza deve essere fornita alla corda per generare onde sinusoidali a una frequenza di 60.0 Hz e ampiezza di 6.00 cm?

Soluzione La velocità dell'onda nella corda è data da

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \left(\frac{80.0 \text{ N}}{5.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m}} \right)^{1/2} = 40.0 \text{ m/s}$$

Poiché $f = 60$ Hz, la pulsazione ω dell'onda sinusoidale nella corda vale

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0 \text{ Hz}) = 377 \text{ rad/s}$$

Usando questi valori nell'Equazione 13.21 con $A = 6.00 \times 10^{-2}$ m, si ottiene

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \\ &= \frac{1}{2} (5.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m})(377 \text{ s}^{-1})^2 \\ &\quad \times (6.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2 (40.0 \text{ m/s}) = 512 \text{ W} \end{aligned}$$

13.9 • ONDE SONORE

Spostiamo la nostra attenzione dalle onde trasversali a quelle longitudinali. Come è stato definito nel Paragrafo 13.2, le onde longitudinali sono onde in cui la vibrazione delle particelle del mezzo avviene nella direzione del moto dell'onda. Le onde sonore sono l'esempio più importante di onde longitudinali. Esse si possono propagare attraverso qualunque mezzo materiale, in quanto la loro velocità dipende dalle proprietà del mezzo.

Gli spostamenti corrispondenti a un'onda sonora nell'aria sono spostamenti longitudinali delle singole molecole dalle loro posizioni di equilibrio. Questi spostamenti vengono prodotti quando la sorgente delle onde, come il diaframma degli altoparlanti, oscilla di moto armonico semplice. Per esempio, si può produrre un'onda sonora sinusoidale unidimensionale in un tubo lungo e stretto contenente del gas, per mezzo di un pistone vibrante a una estremità, come in Figura 13.21. Le zone più scure, nella figura, rappresentano regioni in cui il gas è compresso e, conseguentemente, la densità e la pressione sono maggiori dei loro valori all'equilibrio. Questa regione, chiamata **compressione**, si forma quando il pistone viene spinto nel tubo. La compressione si muove lungo il tubo come un impulso, comprimendo continuamente gli strati che si trovano davanti. Quando il pistone torna indietro, il gas davanti al pistone si espande e conseguentemente la pressione e la densità in questa zona cadono al di sotto dei loro valori all'equilibrio. Queste regioni di bassa pressione, chiamate **rarefazioni**, sono rappresentate dalle aree più chiare nella Figura 13.21. Anche le rarefazioni si propagano lungo il tubo, seguendo le compressioni. Entrambe le zone si muovono con una velocità uguale alla velocità del suono in quel mezzo. La velocità delle onde sonore nell'aria a 20°C è circa 343 m/s.

Quando il pistone oscilla avanti e indietro sinusoidalmente, si creano continuamente zone di compressione e rarefazione. La distanza fra due compressioni (o rarefazioni) successive è uguale alla lunghezza d'onda λ . Mentre queste regioni viaggiano lungo il tubo, ogni piccolo elemento di volume del mezzo si muove di moto armonico semplice parallelamente alla direzione dell'onda (in altre parole, longitudinalmente). Se $s(x, t)$ è lo spostamento di un piccolo elemento di volume dalla sua posizione di equilibrio, possiamo esprimere questa funzione armonica di spostamento come

$$s(x, t) = s_{\max} \cos(kx - \omega t) \quad [13.22]$$

dove s_{\max} è lo **spostamento massimo dall'equilibrio** (l'ampiezza di spostamento), k è il numero d'onda e ω è la pulsazione del pistone. Si noti che lo spostamento dell'elemento di volume avviene lungo x , la direzione del moto dell'onda sonora, e ciò ovviamente significa che stiamo descrivendo un'onda longitudinale. Anche la variazione della pressione del gas, ΔP , misurata rispetto al suo valore di equilibrio, è sinusoidale ed è data da

$$\Delta P = \Delta P_{\max} \sin(kx - \omega t) \quad [13.23]$$

L'ampiezza di pressione, ΔP_{\max} , è la massima variazione di pressione rispetto al valore di equilibrio ed è proporzionale all'ampiezza di spostamento, s_{\max} :

$$\Delta P_{\max} = \rho v \omega s_{\max} \quad [13.24]$$

dove ρ è la densità del mezzo, v è la velocità dell'onda e ωs_{\max} è la massima velocità longitudinale del mezzo di fronte al pistone.

Così, vediamo che un'onda sonora si può considerare sia come un'onda di spostamento sia come un'onda di pressione. Un confronto fra le Equazioni

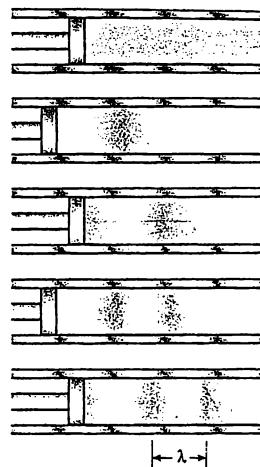


Figura 13.21 Un'onda sinusoidale longitudinale che si propaga in un tubo riempito di gas compressibile. La sorgente dell'onda è un pistone vibrante sulla sinistra. Le regioni ad alta e bassa pressione sono rispettivamente scure e chiare.

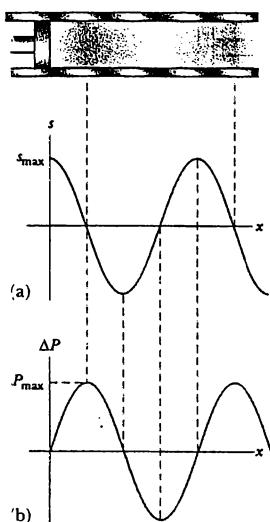


Figura 13.22 (a) Ampiezza di spostamento in funzione della posizione, e (b) ampiezza di pressione in funzione della posizione, per una onda sinusoidale longitudinale. Si noti che l'onda di spostamento è sfasata di 90° rispetto all'onda di pressione.

13.22 e 13.23 mostra che l'onda di pressione è sfasata di 90° rispetto all'onda di spostamento. I grafici di queste funzioni sono mostrati in Figura 13.22. Si noti che la variazione di pressione è massima quando lo spostamento è zero, mentre lo spostamento è massimo quando la variazione di pressione è zero. Poiché la pressione è proporzionale alla densità del mezzo, l'espressione che descrive come varia la densità rispetto al suo valore all'equilibrio sarà simile all'Equazione 13.13.

Fisica ragionata 5

Garth Brooks ottenne un grande successo con la canzone "The Thunder Rolls" (Caged Panther Music, Inc., 1990). Perché il tuono genera un lungo suono simile al "rotolamento"? E il lampo come produce inizialmente il tuono?

Ragionamento Assumiamo di stare al livello del suolo e di trascurare le riflessioni del suolo. Quando scoppia un lampo, un canale di aria ionizzata trasporta una enorme corrente elettrica da una nube al suolo. Ciò causa un rapidissimo aumento della temperatura di questo canale di aria quando la corrente lo percorre. L'aumento di temperatura causa una improvvisa espansione dell'aria. Questa espansione è così rapida e intensa da produrre una tremenda perturbazione: il tuono. Il brontolio del tuono (rotolamento) è dovuto al fatto che il canale del lampo è una sorgente molto estesa: l'intera lunghezza del canale genera il suono praticamente allo stesso istante. Il suono prodotto all'estremità inferiore del canale ci raggiunge prima, se ci troviamo al suolo, poiché questo è il punto più vicino, e poi successivamente ci raggiungono le porzioni più alte del canale. Se i canali del lampo fossero perfettamente in linea retta, il suono risultante dovrebbe assomigliare a un rombo stazionario, ma la forma a zig-zag del percorso causa la variazione sonora risultante in un rotolamento, quando il suono arriva da più porzioni del canale contemporaneamente nello stesso posto. Ciò genera un rumore periodico, inframmezzato da altri istanti in cui il suono chiaro che ci raggiunge è di bassa intensità.

13.10 • L'EFFETTO DOPPLER

Quando suona il clacson di un veicolo che viaggia lungo un'autostrada, la frequenza del suono che percepite è più alta quando il veicolo si avvicina a voi di quando si allontana. Questo è un esempio dell'**effetto Doppler**, così chiamato dal nome del fisico austriaco Christian Johann Doppler (1803-1853).

In generale, un effetto Doppler si verifica ogniqualvolta c'è un moto relativo fra la sorgente e l'osservatore. Quando la sorgente e l'osservatore si muovono l'uno verso l'altro, l'osservatore ode una frequenza più alta della frequenza vera della sorgente. Quando la sorgente e l'osservatore si allontanano reciprocamente, l'osservatore ode una frequenza più bassa della frequenza vera della sorgente.⁴

⁴ Sebbene l'effetto Doppler, comunemente, venga maggiormente avvertito con le onde sonore, esso è comune a tutte le onde sinusoidali. Per esempio, uno spostamento in frequenza delle onde luminose (onde elettromagnetiche) viene prodotto dal moto relativo fra sorgente e osservatore. Infatti, nel 1842 Doppler fu il primo a riportare uno spostamento in frequenza connesso con la luce emessa da stelle ruotanti l'una attorno all'altra in sistemi di stelle doppie.

L'effetto Doppler è usato nei sistemi radar della polizia per misurare la velocità degli autoveicoli. Analogamente, gli astronomi usano l'effetto per determinare il moto relativo di stelle, galassie e altri oggetti celesti.

Consideriamo, inizialmente, il caso in cui l'osservatore, O, si muova con velocità v_O e la sorgente, S, sia ferma come in Figura 13.13. Per semplicità assumeremo che l'aria sia ferma e che l'osservatore si muova direttamente verso la sorgente (considerata puntiforme). Supponiamo che la frequenza della sorgente sia f , la lunghezza d'onda λ e la velocità del suono v . Un osservatore fermo rileverebbe f vibrazioni al secondo, dove $f = v / \lambda$. (Cioè, quando la sorgente e l'osservatore sono ambedue fermi, la frequenza osservata deve essere uguale alla frequenza vera della sorgente). Tuttavia, poiché l'osservatore si muove verso la sorgente con velocità v_O riceverà, in più, un numero di vibrazioni al secondo uguale a v_O / λ . Quindi, la frequenza udita dall'osservatore, f' , è più alta: $f' = v / \lambda + v_O / \lambda$. Poiché $\lambda = v / f$, possiamo esprimere f' come

$$f' = f \left(\frac{v + v_O}{v} \right) \quad (\text{osservatore che si muove verso la sorgente}) \quad [13.25]$$

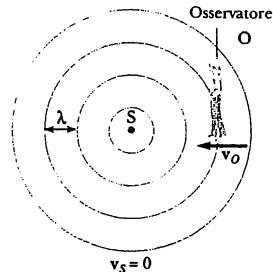


Figura 13.23 Un osservatore O in moto con velocità v_O verso una sorgente puntiforme stazionaria S, percepisce una frequenza f' che è più alta della frequenza della sorgente.

Consideriamo, ora, il caso in cui la sorgente si muova con una velocità v_S , relativamente al mezzo, e l'osservatore sia fermo. Se la sorgente si muove direttamente verso l'osservatore A in Figura 13.24a, i fronti d'onda visti dall'osservatore sono più vicini l'uno all'altro di quanto dovrebbero essere se la sorgente fosse ferma. Il risultato è che la lunghezza d'onda λ' misurata dall'osservatore A è più corta di quella vera, λ , della sorgente. Durante ciascuna vibrazione, per un tempo T (il periodo), la sorgente si muove di una distanza $v_S T = v_S / \lambda$. Quindi, la lunghezza d'onda è più corta di questa quantità e la lunghezza d'onda osservata sarà $\lambda' = \lambda - v_S / \lambda$. Poiché $\lambda = v / f$, la frequenza udita dall'osservatore A è

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = f \left(\frac{v}{v - v_S} \right) \quad (\text{sorgente che si muove verso l'osservatore}) \quad [13.26]$$

Cioè, la frequenza è più alta quando la sorgente si muove verso l'osservatore. In modo analogo, se il moto della sorgente è verso l'osservatore B fermo, il segno di v_S è invertito nell'Equazione 13.26.

Infine, se la sorgente e l'osservatore sono ambedue in moto, si trova, per la frequenza percepita, la seguente relazione generale:

$$f' = f \left(\frac{v \pm v_O}{v \mp v_S} \right) \quad [13.27]$$

In questa espressione, il segno superiore ($+ v_O$ e $- v_S$) si riferisce al moto di avvicinamento fra sorgente e osservatore e il segno inferiore ($- v_O$ e $+ v_S$) si riferisce all'allontanamento reciproco.

Quando si lavora con problemi che coinvolgono l'effetto Doppler, una regola conveniente da ricordare circa i segni è la seguente: la parola *avvicinamento* è associata all'*aumento* della frequenza percepita. La parola *allontanamento* è associata alla *diminuzione* della frequenza percepita.



"A me piace ascoltare il solitario lamento del fischio del treno, quando il valore della frequenza dell'onda cambia per effetto Doppler".

- Frequenza udita quando la sorgente e l'osservatore sono in moto

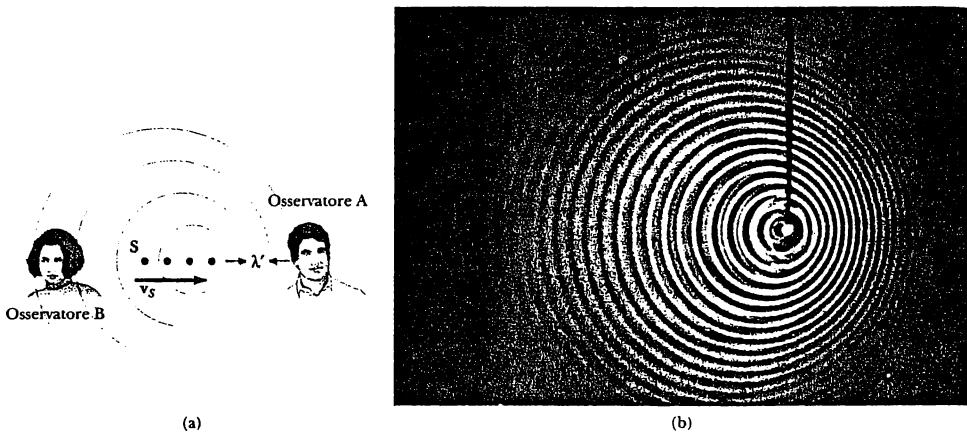


Figura 13.24 (a) Una sorgente S si muove con velocità v_s verso un osservatore fermo A e si allontana da un osservatore fermo B. L'osservatore A percepisce una frequenza più alta, l'osservatore B una frequenza più bassa. (b) L'effetto Doppler osservato nelle increspature sulla superficie dell'acqua in un serbatoio. (Educational Development Center, Newton, Mass., per gent. conc.)

Fisica ragionata 6

Supponiamo che piazziate i diffusori di un sistema stereo lontano l'uno dall'altro e correte da destra a sinistra, o da sinistra a destra. Se correte svelti abbastanza e avete una eccellente sensibilità per distinguere i toni, potrete notare che la musica che viene riprodotta sembra essere stonata quando vi trovate fra i due diffusori. Perché?

Ragionamento Quando vi trovate fra i diffusori, state correndo allontanandovi da uno e avvicinandovi all'altro. Quindi, si verifica uno spostamento Doppler verso il basso per il suono proveniente dal diffusore dal quale vi allontanate e uno spostamento Doppler verso l'alto per il suono proveniente dal diffusore verso cui correte. Conseguentemente il suono proveniente dai due diffusori non sarà intonato. Un calcolo mostra che un velocista di classe mondiale potrebbe correre veloce abbastanza per generare una differenza di un semitonino nel suono proveniente dai due diffusori.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Supponiamo che soffi il vento. Ciò causerà un effetto Doppler per un osservatore che ascolta un suono che arriva attraverso l'aria? Esso sarà simile a quello di una sorgente che si muove o a quello di un osservatore che si muove?

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Stai guidando verso una parete a picco e suoni il clacson. Vi sarà uno spostamento Doppler del suono quando riceverai l'eco? Sarà simile a quello di una sorgente che si muove o a quello di un osservatore che si muove? Che cosa accade se la riflessione non proviene dalla parete ma da una antistante parete di una enorme nave spaziale aliena che si muove verso di te mentre guidi?

Esempio 13.6 La sirena rumorosa

Un'ambulanza viaggia in autostrada alla velocità di 120 km/h. La sua sirena emette un suono alla frequenza di 400 Hz. Qual è la frequenza udita da un passeggero in auto, che viaggia a 90 km/h nel verso opposto quando la macchina si avvicina e quando si allontana dall'ambulanza?

Soluzione Sia la velocità del suono nell'aria $v = 343 \text{ m/s}$. Possiamo usare l'Equazione 13.27 in entrambi i casi. Quando l'auto e l'ambulanza si avvicinano l'una all'altra, la frequenza percepita è

$$f' = f \left(\frac{v + v_0}{v - v_s} \right) = (400 \text{ Hz}) \left(\frac{343 \text{ m/s} + 24.6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 33.5 \text{ m/s}} \right)$$

$$= 475 \text{ Hz}$$

Analogamente, quando entrambe si allontanano l'una dall'altra, un passeggero nell'auto percepisce una frequenza:

$$f' = f \left(\frac{v - v_0}{v + v_s} \right) = (400 \text{ Hz}) \left(\frac{343 \text{ m/s} - 24.6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + 33.5 \text{ m/s}} \right)$$

$$= 338 \text{ Hz}$$

Si noti che la variazione di frequenza rilevata dal passeggero dell'auto, $475 - 338 \text{ Hz} = 137 \text{ Hz}$ è più del 30% della frequenza reale emessa.

ESERCIZIO 7 Si supponga che il passeggero della vettura sia in sosta sul lato dell'autostrada lungo cui l'ambulanza viaggia a una velocità di 120 km/h. A quale frequenza il passeggero dell'automobile sentirà la sirena dell'ambulanza (a) all'avvicinarsi e (b) all'allontanarsi dell'ambulanza dalla vettura parcheggiata?

Risposta (a) 443 Hz (b) 364 Hz.

ESERCIZIO 8 Una banda musicale suona su un veicolo in moto. La banda suona la nota intermedia DO (262 Hz), ma questa viene udita dagli spettatori fuori dal veicolo come un DO diesis (277 Hz). Qual è la velocità del veicolo? Risposta 18.6 m/s

SOMMARIO

Un'onda trasversale è un'onda nella quale le particelle del mezzo si muovono in una direzione perpendicolare alla direzione della velocità dell'onda. Un esempio è un'onda in una corda tesa.

Le onde longitudinali sono quelle nelle quali le particelle del mezzo si muovono parallelamente alla velocità dell'onda. Le onde sonore nell'aria sono longitudinali.

Un'onda unidimensionale che viaggia con una velocità v nel verso positivo dell'asse x può essere rappresentata da una funzione d'onda della forma $y = f(x - vt)$. Analogamente, la funzione d'onda che viaggia nel verso negativo dell'asse x ha la forma $y = f(x + vt)$. La forma dell'onda a ogni istante (un'istantanea dell'onda) si ottiene mantenendo t costante.

Il principio di sovrapposizione afferma che quando due o più onde si muovono in un mezzo, la funzione d'onda risultante è uguale alla somma algebrica delle singole funzioni d'onda. Le onde che obbediscono a questo principio si dicono *lineari*. Quando due onde si combinano nello spazio, esse interferiscono per produrre un'onda risultante.

La funzione d'onda per un'onda sinusoidale unidimensionale che viaggia verso destra si può esprimere come

$$y = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] = A \sin (kx - \omega t) \quad [13.6, 13.12]$$

dove A è l'ampiezza, λ è la lunghezza d'onda, k il numero d'onda e ω la pulsazione. Se T è il periodo ed f la frequenza, allora v , k e ω si possono scrivere

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \quad [13.7, 13.14]$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [13.10]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [13.11]$$

La velocità di un'onda che viaggia in una corda tesa di massa per unità di lunghezza μ e tensione F è

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad [13.19]$$

Quando un impulso che viaggia in una corda incontra un estremo fisso, l'impulso viene riflesso e invertito. Se l'impulso raggiunge un estremo libero, viene riflesso ma non invertito.

La potenza trasmessa da un'onda sinusoidale in una corda tesa è

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad [13.21]$$

La variazione di frequenza udita da un osservatore quando si verifica un moto relativo fra la sorgente e l'osservatore si chiama effetto Doppler. Quando la sorgente e l'osservatore si avvicinano reciprocamente, l'osservatore ode una frequenza più alta della frequenza vera della sorgente. Quando la sorgente e l'osservatore si allontanano reciprocamente, l'osservatore ode una frequenza più bassa della frequenza vera della sorgente.

DOMANDE CONCETTUALI

1. Come costruireste un'onda longitudinale in una molla estesa? Sarebbe possibile costruire un'onda trasversale in una molla?
2. Di quale fattore occorrerebbe aumentare la tensione di una corda tesa per raddoppiare la velocità dell'onda?
3. Quando si propaga in una corda tesa, un impulso si inverte sempre per riflessione? Spiegare.
4. La velocità verticale di un elemento di una corda orizzontale tesa nella quale si propaga un'onda dipende dalla velocità dell'onda?
5. Delle onde sinusoidali vengono generate in una corda, sottoposta a una tensione costante, da una sorgente di vibrazione. Se la potenza fornita alla corda viene raddoppiata, di quale fattore cambierà l'ampiezza? La velocità dell'onda cambierà in queste condizioni?
6. Consideriamo un'onda che si propaga in una corda tesa. Qual è la differenza, se c'è, fra la velocità dell'onda e la velocità di un piccolo elemento della corda?
7. Cosa accade alla lunghezza d'onda di un'onda lungo una corda quando la frequenza viene raddoppiata? Assumete che la tensione nella corda rimanga costante.
8. Quando tutte le corde di una chitarra vengono tese alla stessa tensione, la velocità di un'onda nelle corde basse, a massa più elevata, sarà più alta o più bassa rispetto alla velocità di un'onda nelle corde più leggere?
9. Se si tende un tubo di gomma e lo si percuote si vede un impulso che viaggia sopra e sotto il tubo. Che cosa succede se si tende di più il tubo? E se si riempie il tubo di acqua?
10. In un'onda longitudinale lungo una molla, le spire della molla si muovono avanti e indietro nella direzione di propagazione dell'onda. La velocità dell'onda dipende dalla velocità massima di ciascuna delle spire?
11. Quando due onde interferiscono, l'onda risultante può essere più grande di ciascuna delle due onde iniziali? In quali condizioni?
12. Un corpo solido può trasportare sia onde longitudinali che trasversali, ma un fluido può trasportare soltanto onde longitudinali. Perché?
13. In un terremoto sono emesse sia un'onda di spostamento (S) che una di pressione (P). L'onda (trasversale) di spostamento (S) viaggia sulla Terra più lentamente dell'onda di pressione (longitudinale) P (4.5 km/s contro 7.8 km/s). Misurando il tempo d'arrivo delle onde come si può determinare quanto dista l'epicentro del terremoto? Quante stazioni di rilevamento sono necessarie per localizzare la posizione dell'epicentro?

PROBLEMI

Paragrafo 13.3 Propagazione di onde unidimensionali trasversali

1. A $t = 0$ un impulso trasversale in un filo viene descritto dalla funzione

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

dove x e y sono in metri. Scrivere la funzione $y(x, t)$ che descrive quest'onda se viaggia nel verso positivo delle x , con una velocità di 4.50 m/s.

2. Onde sull'oceano con distanza cresta a cresta di 10.0 m possono essere descritte da

$$y(x, t) = (0.800 \text{ m}) \sin [0.628(x - vt)]$$

dove $v = 1.20 \text{ m/s}$. (a) Fare uno schizzo di $y(x, t)$ a $t = 0$. (b) Fare uno schizzo a $t = 2.00 \text{ s}$. Si osservi che la forma d'onda intera si è spostata di 2.40 m nella direzione positiva x in questo intervallo di tempo.

3. Un'onda che si muove lungo l'asse x è descritta da

$$y(x, t) = 5.0e^{-(x+5.0t)^2}$$

dove x è espresso in metri e t in secondi. Determinare (a) il verso del moto dell'onda e (b) la velocità dell'onda.

4. Due impulsi A e B viaggiano in versi opposti in una corda tesa, con una velocità di 2.00 cm/s. L'ampiezza di A è il doppio dell'ampiezza di B . Gli impulsi sono mostrati in Figura P13.4 per $t = 0$. Disegnate la forma della corda per $t = 1, 1.5, 2, 2.5$ e 3 secondi.

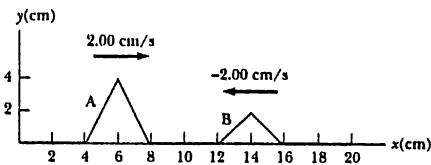


Figura P13.4

Paragrafo 13.4 Propagazione di onde sinusoidali

5. Un'onda sinusoidale viaggia in una fune. Si osserva che l'oscillatore che genera l'onda compie 40.0 vibrazioni in 30.0 s. Inoltre un determinato massimo viaggia per 425 cm in 10.0 s nella corda. Qual è la lunghezza d'onda?
6. Un'onda sinusoidale di lunghezza d'onda 2.00 m e ampiezza 0.100 m si propaga con una velocità di 1.00 m/s in una corda. Inizialmente, l'estremo sinistro della corda si trova nell'origine e l'onda si muove da

sinistra verso destra. Trovare (a) la frequenza e la pulsazione, (b) il numero d'onda, e (c) la funzione d'onda per questa onda. Determinare l'equazione del moto per (d) l'estremo sinistro della corda, ed (e) per il punto nella corda per $x = 1.50 \text{ m}$ alla destra dell'estremo sinistro. (f) Qual è la velocità massima per ciascun punto della corda?

7. (a) Scrivere l'espressione di y in funzione di x e t , per un'onda sinusoidale che viaggia in una fune nel verso *negativo* dell'asse x , con le seguenti caratteristiche: $y_{\max} = 8.00 \text{ cm}$, $\lambda = 80.0 \text{ cm}$, $f = 3.00 \text{ Hz}$ e $y(0, t) = 0$ per $t = 0$. (b) Scrivere l'espressione di y in funzione di x per l'onda in (a) assumendo che $y(x, 0) = 0$ nel punto $x = 10 \text{ cm}$.

8. Un'onda trasversale in una corda è descritta dall'equazione:

$$y = (0.120 \text{ m}) \sin \pi (x/8 + 4t)$$

(a) Determinare la velocità trasversale e l'accelerazione a $t = 0.200 \text{ s}$ in un punto situato a $x = 1.60 \text{ m}$. (b) Quali sono la lunghezza d'onda, il periodo e la velocità di propagazione di quest'onda?

9. Un'onda è descritta da $y = (2.00 \text{ cm}) \sin(kx - \omega t)$, dove $k = 2.11 \text{ rad/m}$, $\omega = 3.62 \text{ rad/s}$, x è espresso in metri, e t in secondi. Determinare l'ampiezza, la lunghezza d'onda, la frequenza, e la velocità dell'onda.

10. Un'onda sinusoidale che si propaga nella direzione $-x$ (verso sinistra) ha un'ampiezza di 20.0 cm, una lunghezza d'onda di 35.0 cm, e una frequenza di 12.0 Hz. La posizione dell'onda per $t = 0$, $x = 0$ è $y = -3.00 \text{ cm}$ e ha qui una velocità positiva. (a) Disegnare l'onda per $t = 0$. (b) Trovare il numero d'onda, il periodo, la pulsazione, e la velocità di fase dell'onda. (c) Scrivere un'espressione per la funzione d'onda $y(x, t)$.

11. Un'onda sinusoidale trasversale ha un periodo $T = 25.0 \text{ ms}$ e viaggia nella direzione x negativa con velocità $v = 30.0 \text{ m/s}$. A $t = 0$, una particella della corda a $x = 0$ ha uno spostamento di 2.00 cm e una velocità $v = -2.00 \text{ m/s}$. (a) Qual è l'ampiezza dell'onda? (b) Qual è la fase iniziale? (c) Qual è il valore della massima velocità trasversale? (d) Scrivere la funzione d'onda dell'onda.

Paragrafo 13.5 Sovrapposizione e interferenza di onde

12. Due impulsi in una corda sono descritti dalle Equazioni

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{-5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

- (a) In quale direzione viaggia ciascun impulso? (b) A quale istante le due onde si elideranno esattamente ovunque? (c) In quale punto le due onde si elidono sempre?

- [13]** Due onde sinusoidali in una corda sono definite dalle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}y_1 &= (2.00 \text{ cm}) \sin(20.0x - 30.0t) \\y_2 &= (2.00 \text{ cm}) \sin(25.0x - 40.0t),\end{aligned}$$

dove y e x sono in cm e t in secondi. (a) Qual è la differenza di fase tra queste due onde nel punto $x = 5.00 \text{ cm}$ a $t = 2.00 \text{ s}$? (b) Qual è il valore positivo di x più vicino all'origine per cui le due fasi differiscono di $\pm\pi$ a $t = 2.00 \text{ s}$? (Questo è dove le onde daranno come risultante zero).

Paragrafo 13.6 La velocità delle onde trasversali nelle corde

14. Una corda di pianoforte ha massa per unità di lunghezza di $5.00 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ ed è tesa con una tensione di 1350 N . Trovare la velocità con cui un'onda viaggia su questa corda.
15. Una corda è lunga 4.00 m e ha una massa di 0.200 kg . Se un'onda impulsiva trasversale viaggia da un estremo all'altro in 0.100 s , qual è la tensione della corda?
- [16]** Un filo di acciaio lungo 30.0 m e un filo di rame lungo 20.0 m , entrambi di diametro 1 mm , sono uniti per un estremo e testi con una tensione di 150 N . Quanto tempo impiegherà un'onda trasversale a percorrere l'intera lunghezza dei due fili?
17. Un impulso trasversale viaggia alla velocità di 200 m/s in un filo di rame teso del diametro di 1.50 mm . Qual è la tensione del filo? (La densità del rame è 8.92 g/cm^3).
18. Un filo sottile con massa per unità di lunghezza di 8.00 g/m ha i due estremi fissati a due pareti separate da una distanza uguale a $3/4$ della lunghezza L del filo (Fig. P13.18). Una massa m è sospesa al centro del filo, ponendolo in tensione. (a) Trovare l'espressione della velocità dell'onda trasversale nel filo in funzione della massa appesa. (b) Quanto dovrebbe valere la massa appesa per avere una velocità di 60.0 m/s ?

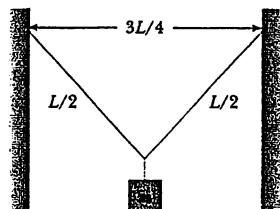


Figura P13.18

- [19]** Un astronauta sulla Luna vuole misurare il valore locale dell'accelerazione di gravità g_{Luna} misurando il tempo necessario agli impulsi di propagarsi lungo un filo che tiene sospesa una grande massa. Si assume un filo di massa 4.00 g e lungo 1.60 m e il valore della massa sospesa 3.00 kg . Un impulso impiega 36.1 ms per percorrere la lunghezza del filo. Calcolare g_{Luna} da questi dati. (Si può trascurare la massa del filo quando si calcola la sua tensione).

Paragrafo 13.8 Energia trasmessa da onde sinusoidali nelle corde

20. Una fune tesa ha una massa di 0.180 kg ed una lunghezza di 3.60 m . Quale potenza deve essere fornita per generare delle onde sinusoidali, che abbiano una ampiezza di 0.100 m ed una lunghezza d'onda di 0.500 m e che si muovano con una velocità di 30.0 m/s ?
- [21]** Delle onde sinusoidali di 5.00 cm di ampiezza devono venire trasmesse lungo una corda, la cui densità lineare è $4.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m}$. Se la massima potenza fornita dalla sorgente è 300 W e la corda è sottoposta ad una tensione di 100 N , qual è la massima frequenza di vibrazione, alla quale la sorgente può funzionare?
22. Si trova che un pezzo di corda di 6.00 m di lunghezza contiene 4 onde complete e ha una massa di 180 g . La corda vibra sinusoidalmente con una frequenza di 50.0 Hz e con uno spostamento cresta a cresta di 15.0 cm . (*Cresta a cresta* significa distanza verticale tra lo spostamento della cresta positiva e lo spostamento della cresta negativa). (a) Scrivere la funzione di questa onda che viaggia lungo l'asse x nel verso positivo e (b) determinare la potenza che deve essere fornita alla corda.
23. Una corda orizzontale può trasmettere una potenza massima P_0 (senza rompersi) se è attraversata da un'onda di ampiezza A e pulsazione ω . Allo scopo di aumentare questa potenza, uno studente piega la corda e usa la corda doppia come un trasmettitore. Determinare la massima potenza che si può trasmettere lungo la doppia corda, assumendo che la tensione rimanga la stessa.
24. Un'onda d'acqua bidimensionale si allarga con un fronte d'onda circolare. Mostrare che l'ampiezza A a distanza r dalla perturbazione iniziale è proporzionale a $1/\sqrt{r}$. (*Suggerimento*: considerare l'energia concentrata nell'increspatura che si muove verso l'esterno).

Paragrafo 13.9 Onde sonore

(In questo paragrafo si usino all'occorrenza i seguenti valori a meno che non sia diversamente specificato: densità dell'aria in equilibrio, $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$; velocità del suono nell'aria, $v = 343 \text{ m/s}$. Inoltre, le variazioni di pressione ΔP sono misurate rispetto alla pressione atmosferica).

25. Un vaso di fiori cade fuori da un balcone 20.0 m al di sopra di un marciapiedi sul quale si trova un uomo di 1.75 m di altezza. A quale altezza dal suolo deve trovarsi il vaso affinché non sia troppo tardi perché un grido d'allarme raggiunga l'uomo in tempo? Si assume che l'uomo in basso impieghi 0.300 s per reagire all'allarme
26. Un aereo di soccorso vola orizzontalmente a velocità costante alla ricerca di un battello in avaria. Quando l'aereo si trova direttamente sopra il battello, l'equipaggio del battello suona la sirena. Nel tempo in cui il ricevitore di suoni dell'aereo percepisce la sirena, l'aereo ha percorso una distanza uguale alla metà della sua quota sopra l'oceano. Se il suono impiega 2.00 s a raggiungere l'aereo, determinare (a) la velocità dell'aereo, e (b) la sua quota. Assumere la velocità del suono uguale a 343 m/s.
27. Un'onda sonora in un cilindro è descritta dalle Equazioni 13.22 fino a 13.24. Dimostrare che $\Delta P = \pm \rho v \omega \sqrt{s^2_{\text{max}} - s^2}$.
28. Calcolare l'ampiezza di pressione di un'onda sonora a 2000 Hz nell'aria, se l'ampiezza di spostamento è uguale a 2.00×10^{-8} m.
29. Uno sperimentatore cerca di generare nell'aria un'onda sonora che abbia un'ampiezza di spostamento di 5.50×10^{-6} m. L'ampiezza di pressione è 8.40×10^{-1} Pa. Qual è la lunghezza d'onda minima che può avere l'onda sonora?
30. Un'onda sonora nell'aria ha un'ampiezza di pressione di 4.00 Pa e una frequenza di 5000 Hz. Al punto $x = 0$ quando $t = 0$ si ha $\Delta P = 0$. (a) Quanto vale ΔP a $x = 0$ quando $t = 2.00 \times 10^{-4}$ s e (b) quanto vale ΔP a $x = 0.0200$ m quando $t = 0$?

Paragrafo 13.10 L'effetto doppler

31. Un treno passa davanti a un marciapiede per passeggeri alla velocità costante di 40.0 m/s. Il segnale acustico del treno ha la frequenza caratteristica di 320 Hz. (a) Che variazione di frequenza è percepita da una persona sul marciapiede al passare del treno? (b) Che lunghezza d'onda osserva una persona sul marciapiede mentre il treno si avvicina?
32. Un conducente viaggia in un'autostrada verso nord ad una velocità di 25.0 m/s. Una macchina della polizia che viaggia verso sud a 40.0 m/s si avvicina con la sua sirena che emette un suono di 2500 Hz. (a) Quale frequenza è rilevata dal conducente quando la macchina della polizia si avvicina? (b) Quale frequenza è rilevata dal guidatore quando la macchina della polizia lo ha sorpassato? (c) Ripetere (a) e (b) nel caso in cui la macchina della polizia stia viaggiando verso nord.
33. Rimanendo in piedi presso un incrocio pedonale, ascoltate una frequenza di 560 Hz proveniente dalla sirena di una macchina della polizia che sta avvicinandosi. Dopo che l'auto è passata, la frequenza

della sirena udita è 480 Hz. Determinare la velocità dell'auto in base a queste osservazioni.

34. Un diapason che vibra a 512 Hz cade da fermo e accelera a 9.80 m/s^2 . A quale distanza dal punto di caduta si trova il diapason quando le onde di 485 Hz di frequenza raggiungono il punto da cui è caduto? Si assume per la velocità del suono 343 m/s.
35. Un blocco con un altoparlante fissato ad esso è collegato a una molla di costante elastica $k = 20.0 \text{ N/m}$ come in Figura P13.35. La massa totale del blocco e dell'altoparlante è 5.00 kg, e l'ampiezza del moto di questo equipaggio è 0.500 m. Se l'altoparlante emette onde sonore di frequenza 440 Hz, determinare il campo di frequenze udite dalla persona che si trova alla destra dell'altoparlante.

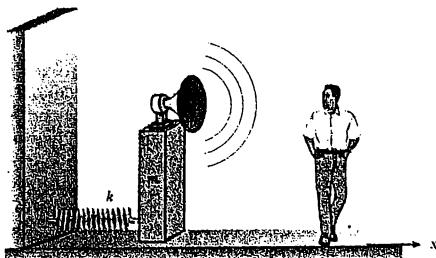


Figura P13.35

Problemi generali

36. Non occupati da spettatori, una serie di posti all'aperto in uno stadio di calcio hanno sedili solidi e sollevati. Stai sul campo di fronte ad essi ed improvvisamente batti due assi di legno una sola volta. Odi provenire dai sedili di fronte un suono con un tono definito che ti ricorda una breve nota di tromba. Tieni conto di questo suono. Calcola l'ordine di grandezza stimato per la sua frequenza, lunghezza d'onda e durata sulla base dei dati che puoi specificare.
37. Un blocco di 2.00 kg pende da una corda elastica, essendo sostenuto in modo che la corda non sia allungata. La lunghezza a riposo della corda è 0.500 m e la sua massa è 5.00 kg. La costante elastica della corda è 100 N/m. Il blocco viene lasciato e si ferma nel punto più basso. (a) Determinare la tensione della corda quando il blocco è nel punto più basso. (b) Qual è la lunghezza della corda in questa posizione allungata? (c) Trovare la velocità dell'onda trasversa nella corda se il blocco viene mantenuto nella posizione più bassa.
38. Un blocco di massa M pende da una corda elastica, essendo sostenuto in modo che la corda non sia

allungata. La lunghezza a riposo della corda è L_0 e la sua massa è m , molto minore di M . La costante elastica della corda è k . Il blocco viene lasciato e si ferma nel punto più basso. (a) Determinare la tensione della corda quando il blocco si trova nel punto più basso. (b) Qual è la lunghezza della corda in questa posizione allungata? (c) Trovare la velocità dell'onda trasversa nella corda se il blocco viene mantenuto nella posizione più bassa.

- [39] La funzione d'onda per un'onda trasversale in un filo teso è (in unità SI)

$$y(x, t) = (0.350 \text{ m}) \sin(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

(a) Qual è la velocità dell'onda? (Dare il modulo e il verso). (b) Qual è lo spostamento a $t = 0$, $x = 0.100 \text{ m}$? (c) Qual è la lunghezza d'onda e la frequenza dell'onda? (d) Qual è il massimo valore della velocità trasversa della corda?

40. Una pietra viene lanciata in un profondo burrone e si sente che tocca il fondo 10.2 s dopo l'abbandono. La velocità del suono in aria è 343 m/s . Quanto è profondo il burrone? Quale sarebbe l'errore percentuale nella determinazione della profondità se il tempo richiesto al suono per raggiungere il bordo del burrone fosse ignorato?
41. Il suolo oceanico giace sopra uno strato di basalto che costituisce la crosta terrestre, ovvero la parte più superficiale della Terra in questa zona. Sotto questa crosta si trova una roccia di peridotite più densa, che forma il mantello della Terra. Il confine tra questi due strati è detto *discontinuità di Mohorovičić* ("Moho" per brevità). Se si facesse esplodere una carica alla superficie del basalto, essa genererebbe un'onda sismica che verrebbe riflessa dal Moho. Se la velocità di quest'onda nel basalto fosse di 6.50 km/s e il tempo di andata e ritorno fosse di 1.85 s , quale sarebbe lo spessore della crosta oceanica?
42. Un operaio batte su un tubo di acciaio con un martello, generando sia un'onda longitudinale che trasversale. Le onde riflesse ritornano con 2.40 s di differenza fra loro. Quanto è distante il punto di riflessione? (Per l'acciaio, $v_{\text{long.}} = 6.20 \text{ km/s}$ e $v_{\text{trav.}} = 3.20 \text{ km/s}$).
- [43] Una fune di massa m e lunghezza L è sospesa verticalmente. Dimostrare che un impulso trasversale percorre la lunghezza della fune in un tempo $t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$. (Suggerimento: determinare prima l'espressione della velocità in un qualsiasi punto a distanza x dall'estremità inferiore della fune, considerando la tensione della fune come risultato del peso complessivo del tratto al di sotto di quel punto).
44. Il fischio di un treno ($f = 400 \text{ Hz}$) è più alto o più basso a seconda che il treno si avvicini o si allontani. (a) Dimostrare che la differenza tra la frequenza del
- fischio del treno quando si avvicina e quella del fischio quando si allontana è:
- $$\Delta f = \frac{2f \left(\frac{u}{v} \right)}{1 - \frac{u^2}{v^2}} \quad u = \text{velocità del treno} \quad v = \text{velocità del suono}$$
- (b) Calcolare Δf per un treno che viaggia a 130 km/h . Assumere per la velocità del suono 340 m/s .
- [45] Per poter determinare la sua velocità, una paracadutista trasporta un generatore di frequenze. Un suo amico a terra è equipaggiato per ricevere ed analizzare le onde sonore. Mentre la paracadutista sta atterrando con la velocità finale, il suo generatore di frequenza emette una frequenza di 1800 Hz . (Si assuma l'assenza di moto nell'aria e la velocità del suono di 343 m/s , indipendentemente dall'altitudine). (a) Se il suo amico al suolo (precisamente al di sotto della paracadutista) registra onde della frequenza di 2150 Hz , qual è la velocità di discesa della paracadutista? (b) Se la paracadutista fosse sufficientemente attrezzata per ricevere le onde riflesse dal suolo, che frequenza registrerebbe?
46. Un impulso che viaggia lungo una corda di densità lineare di massa μ è descritto dalla relazione
- $$y = [A_0 e^{-bx}] \sin(kx - \omega t)$$
- dove il fattore nella parentesi quadra rappresenta l'ampiezza. (a) Qual è la potenza $P(x)$ trasportata da quest'onda nel punto x ? (b) Qual è la potenza $P(0)$ portata da quest'onda nell'origine? (c) Calcolare il rapporto $P(x)/P(0)$.
47. Un pipistrello, che si muove a una velocità di 5.00 m/s , sta cacciando un insetto. Se il pipistrello emette un suono di 40.0 kHz e riceve un'eco di 40.4 kHz , a che velocità si muove l'insetto mentre si avvicina o si allontana dal pipistrello? Assumere $v = 340 \text{ m/s}$ per la velocità del suono nell'aria.
48. Un terremoto sul fondo dell'oceano nel golfo dell'Alaska induce un *tsunami* ("onda sismica") che raggiunge Hilo nelle Hawaï distante 4450 km in un tempo di $9 \text{ h } 30 \text{ m}$. Tsunami ha un'enorme lunghezza d'onda ($100\text{-}200 \text{ km}$) e per tali onde la velocità di propagazione è $v = \sqrt{gd}$, in cui d è la profondità media dell'acqua. Dalle informazioni date, trovare la velocità media dell'onda e la profondità media dell'oceano tra l'Alaska e le Hawaï. (Questo metodo fu usato nel 1856 per stimare la profondità media del Pacifico molto tempo prima che ne fosse fatta una determinazione diretta con il sonar).

Problemi al calcolatore

- S1. Due impulsi trasversali viaggiano in versi opposti

lungo l'asse x e sono descritti dalle seguenti funzioni d'onda:

$$y_1(x, t) = \frac{6}{(x - 3t)^2} \quad y_2(x, t) = -\frac{3}{(x + 3t)^2}$$

dove x e y sono in cm e t in s. Scrivere un programma che permetta di ottenere la forma della funzione d'onda risultante $y_1 + y_2$ in funzione del tempo. Usare questo programma e disegnare le forme d'onda per $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ e 3.0 s.

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Un impulso in una lunga coda di gente è longitudinale, poiché il moto delle persone è parallelo alla direzione di propagazione dell'impulso. La velocità è determinata dal tempo di reazione delle persone e dalla velocità con la quale esse si muovono, una volta che si libera lo spazio davanti a loro. Vi è pure un fattore psicologico, per quelle persone che non vogliono occupare lo spazio libero di fronte a loro troppo presto per non intimidire la persona che li precede. La "ola" nello stadio è trasversale, poiché i tifosi si alzano verticalmente, mentre l'onda li sorpassa orizzontalmente. La velocità di questo impulso dipende dai limiti della bravura dei tifosi ad alzarsi e sedersi rapidamente, e dal fattore psicologico associato all'anticipazione di vedere l'impulso che si avvicina al posto dell'osservatore.
- Sia l'onda radio che l'onda sonora hanno la stessa lunghezza d'onda. La velocità di propagazione, tuttavia, è molto più alta per le onde elettromagnetiche che per le onde sonore, cosicché la frequenza delle onde radio è molto maggiore delle onde sonore. Il campo udibile delle onde sonore si estende da circa 15 Hz a 15 000 Hz, mentre le radio frequenze sono in kHz (chilohertz) per le trasmissioni AM (modulazione di ampiezza) e in MHz (megahertz) per le FM (modulazione di frequenza).
- Un'onda in una corda priva di massa avrebbe una velocità di propagazione infinita per il fatto che la densità lineare di massa sarebbe zero.
- Il vento può cambiare lo spostamento Doppler. Sia v_0 che v_s dovrebbero essere interpretate nella nostra equazione come velocità dell'osservatore e della sorgente relativamente all'aria. Se la sorgente e l'osservatore si muovono relativamente l'uno all'altro, l'osservatore udrà uno spostamento in frequenza in aria calma e un diverso spostamento in frequenza se soffia il vento. Tuttavia, se la sorgente e l'osservatore sono fermi l'uno rispetto all'altro, non vi sarà spostamento quando soffia il vento.
- L'eco viene spostato per effetto Doppler, e lo spostamento è simile sia al movimento della sorgente che a quello dell'osservatore. Il suono che parte dal tuo clacson nella direzione del tuo avanzamento aumenta in frequenza per effetto Doppler, poiché esso proviene dalla sorgente in moto. Quando il suono si riflette indietro e viene verso di te, tu sei un osservatore in moto, e quindi vi sarà un secondo spostamento Doppler ancora verso una frequenza più alta. Se il suono si riflette dall'astronave che viaggia verso di te, vi sarà un altro spostamento verso una frequenza più alta dovuto a una sorgente in moto. La superficie riflettente dell'astronave funziona come una sorgente in moto.

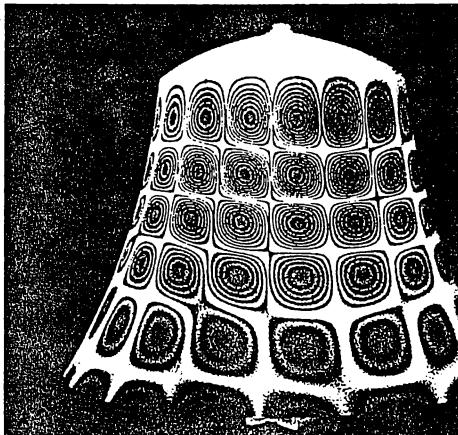
Sovrapposizione e onde stazionarie

- 14.1 Sovrapposizione e interferenza di onde sinusoidali
- 14.2 Onde stazionarie
- 14.3 Frequenze naturali in una corda tesa
- 14.4 Onde stazionarie in colonne d'aria
- 14.5 Battimenti: interferenza temporale (Facoltativo)
- 14.6 Onde complesse (Facoltativo)

Un aspetto importante delle onde è l'effetto della loro combinazione quando due o più onde si propagano nello stesso mezzo. Per esempio, cosa succede a una corda quando l'onda che si propaga verso una sua estremità fissata viene riflessa su se stessa? In un mezzo lineare, cioè in quello in cui la forza di richiamo del mezzo è proporzionale allo spostamento del mezzo stesso, si può applicare il principio di sovrapposizione per ottenere la perturbazione risultante. Questo principio può essere applicato a vari tipi di onde, incluse le onde nelle corde, le onde sonore, le onde della superficie dell'acqua e le onde elettromagnetiche. Il principio di sovrapposizione dice che lo spostamento reale di qualsiasi parte del mezzo perturbato è uguale alla somma algebrica degli spostamenti causati dalle onde individualmente. Nel Capitolo 13 abbiamo usato il termine **interferenza** per descrivere l'effetto prodotto dalla combinazione di due onde, che si muovono simultaneamente attraverso un mezzo.

Questo capitolo si occupa del principio di sovrapposizione, quando viene applicato alle onde sinusoidali. Se le onde sinusoidali, che si combinano in uno stesso mezzo, hanno la stessa frequenza e lunghezza d'onda, si trova che, a certe frequenze e in certe circostanze, si può ottenere una

Fotografia di onde stazionarie in una campanella che vibra. La fotografia fu scattata usando una tecnica nota come *media temporale di ologrammi interferometrici*. Un tale ologramma consiste di milioni di ologrammi sovrapposti, ma questo ologramma mette in evidenza le due posizioni di massima deflessione della campanella vibrante. La configurazione qui registrata avviene alla frequenza di 2684 Hz, ma si osservano altre configurazioni a frequenze più basse e più alte. (Per gent. conc. del Prof. Thomas D. Rossing, Northern Illinois University)



situazione stazionaria, detta **onda stazionaria**. Per esempio, una corda tesa fissa ad ambedue le estremità presenta un insieme discreto di configurazioni di oscillazione, dette **modi di vibrazione**, che dipendono dalla tensione e dalla massa per unità di lunghezza della corda. Questi modi di vibrazione si trovano negli strumenti musicali a corde. Gli altri strumenti musicali, come l'organo e il flauto, usano le frequenze naturali (o proprie) del suono nei tubi cavi. Queste frequenze dipendono dalla lunghezza del tubo, dalla sua forma e dal fatto che un'estremità sia aperta o chiusa.

In questo capitolo considereremo anche la sovrapposizione e l'interferenza di onde con frequenze e lunghezze d'onda diverse. Quando due onde sonore con frequenza poco diversa interveriscono, si sentono delle variazioni di intensità sonora dette *battimenti*. La frequenza di battimento corrisponde alla rapidità di alternanza fra interferenza costruttiva e distruttiva. Infine descriveremo come qualsiasi forma d'onda periodica complessa può essere, in generale, descritta da una combinazione delle funzioni seno e coseno.

14.1 • SOVRAPPOSIZIONE E INTERFERENZA DI ONDE SINUSOIDALI

Applichiamo questo principio a due onde sinusoidali che si propagano in un mezzo nella stessa direzione. Se due onde si propagano verso destra e hanno la stessa frequenza, la stessa lunghezza d'onda e la stessa ampiezza, ma sono diverse in fase, si possono esprimere le loro funzioni d'onda individuali come

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2 = A \sin(kx - \omega t - \phi)$$

Quindi, la funzione d'onda risultante y è data da

$$y = y_1 + y_2 = A [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t - \phi)]$$

Per semplificare questa espressione, è conveniente usare la seguente identità trigonometrica:

$$\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Se poniamo $a = kx - \omega t$ e $b = kx - \omega t - \phi$, si trova che l'onda risultante y si riduce a

$$y = \left(2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \sin\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right) \quad [14.1]$$

Ci sono parecchi aspetti importanti in questo risultato. Anche la funzione d'onda risultante y è sinusoidale e ha la stessa frequenza e lunghezza d'onda delle singole onde. L'ampiezza dell'onda risultante è $2A \cos(\phi/2)$, e la sua fase è uguale a $\phi/2$. Se la fase ϕ è uguale a 0, allora $\cos(\phi/2) = \cos 0 = 1$ e l'ampiezza dell'onda risultante è $2A$. In altre parole, l'ampiezza dell'onda risultante è doppia dell'ampiezza di ciascuna onda singola. In questo caso si dice che le onde sono *in fase* e pertanto interveriscono costruttivamente. Cioè i picchi e gli zeri delle singole onde si presentano sempre nella stessa posizione, come mostrato in Figura 14.1a. In generale l'interferenza costruttiva avviene quando $\cos(\phi/2) = \pm 1$, o quando $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ D'altra parte, se ϕ è uguale a π radianti (o qualsiasi multiplo *dispari* di π) allora $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ e l'onda risultante ha ampiezza zero ovunque. In questo caso, le due onde interveriscono distruttivamente. Cioè il picco di

- *Risultante di due onde sinusoidali che si propagano*

- *Interferenza costruttiva*

- *Interferenza distruttiva*

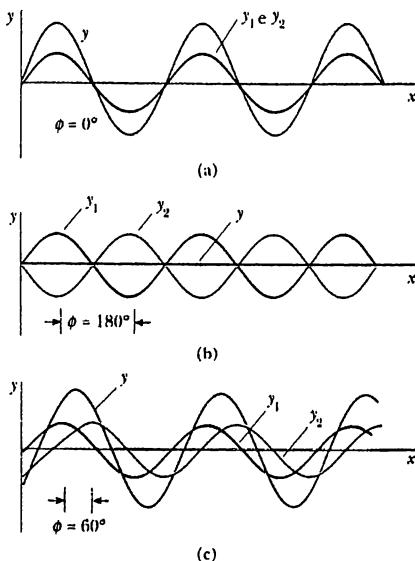


Figura 14.1 La sovrapposizione di due onde di ampiezza y_1 e y_2 . (a) Quando le due onde sono in fase, il risultato è l'interferenza costruttiva. (b) Quando le due onde sono sfasate di 180° il risultato è l'interferenza distruttiva. (c) Quando la fase è compresa fra $0 < \phi < 180^\circ$, la risultante y si presenta in una forma intermedia fra quella mostrata in (a) e quella mostrata in (b).

un'onda coincide con la valle della seconda (Fig. 14.1b) e i loro spostamenti si annullano in ogni punto. Infine, quando la fase ha valore arbitrario fra 0 e π come in Figura 14.1c, l'onda risultante ha un'ampiezza il cui valore è compreso fra 0 e $2A$.

Interferenza di onde

Un semplice dispositivo per dimostrare l'interferenza delle onde sonore è illustrato in Figura 14.2. Si emette un suono dall'altoparlante A in un tubo in P, dove c'è un giunto a forma di T. Metà dell'intensità sonora si propaga in un verso e metà nel verso opposto. Perciò le onde sonore che raggiungono il ricevitore R sull'altro lato possono propagarsi lungo due cammini diversi. Il ricevitore può essere un microfono, la cui uscita può essere amplificata e inviata a un auricolare o a un oscilloscopio. La distanza totale dall'altoparlante al ricevitore è detta lunghezza di cammino, r . La lunghezza di cammino del tratto inferiore è fissata a η_1 . Lungo il tratto superiore, la lunghezza di cammino η_2 può essere variata facendo scorrere il tubo a forma di U in modo simile a un trombone. Quando la differenza delle lunghezze di cammino $\Delta r = |\eta_2 - \eta_1|$ è zero o qualche multiplo intero della lunghezza d'onda λ , le due onde che raggiungono il ricevitore saranno in fase e interferiranno costruttivamente come in Figura 14.1a. In questo caso, il

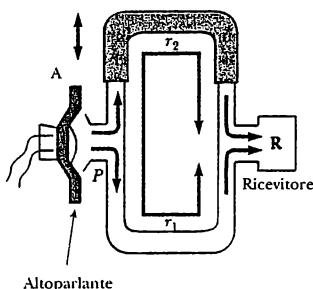


Figura 14.2 Un sistema acustico per dimostrare l'interferenza delle onde sonore. Il suono dell'altoparlante si propaga in un tubo e si divide in due parti in *P*. Le due onde che si sovrappongono sul lato opposto, sono rivelate in *R*. Si noti che la lunghezza del cammino superiore r_2 può essere variata dalla sezione scorrevole.

ricevitore rivelerà un massimo nell'intensità sonora. Se la lunghezza del cammino r_2 è regolata in modo che la differenza di cammino Δr sia $\lambda/2, 3\lambda/2, \dots, n\lambda/2$ (per n dispari), le due onde saranno sfasate esattamente di 180° al ricevitore e quindi si annulleranno fra loro. In questo caso di interferenza completamente distruttiva, il ricevitore non rivelerà alcun suono. Questo semplice esperimento è una illustrazione chiara del fenomeno dell'interferenza. Inoltre, dimostra il fatto che una differenza di fase può avere origine fra due onde generate dalla stessa sorgente, quando si propagano lungo cammini di lunghezza diversa.

È spesso utile esprimere la differenza di cammino in funzione della differenza di fase ϕ fra le due onde. Poiché una differenza di cammino di una lunghezza d'onda corrisponde a una differenza di fase di 2π radianti, si ottiene la proporzione $\lambda/2\pi = \Delta r/\phi$ ossia

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2\pi} \phi \quad [14.2]$$

Ci sono molti altri esempi in natura di fenomeni di interferenza. Più avanti nel testo descriveremo parecchi interessanti effetti di interferenza che riguardano le onde luminose.

- *Relazione fra differenza di cammino e differenza di fase*

Fisica ragionata 1

Se i diffusori di un sistema stereofonico sono collegati in "controfase", un altoparlante si muove verso l'esterno quando l'altro si muove verso l'interno. Ciò determina un indebolimento delle note basse, che può essere corretto invertendo i fili su una connessione di un diffusore. Perché si verifica, in questo caso, soltanto un effetto sulle note basse e non su quelle alte?

Ragionamento Immaginiamo che tu stia seduto di fronte ai diffusori, a metà strada fra di essi. Il suono, quindi, attraversa la stessa distanza da ciascun altoparlante fino a te, senza che si verifichi alcuna differenza di fase nel suono, poiché essa dipende dalla differenza di cammino. Poiché i diffusori sono collegati in controfase, le onde sonore sono sfasate di mezza lunghezza d'onda quando partono dagli altoparlanti e, conseguentemente, quando arrivano alle tue orecchie. Ciò che ne risulta sarà una cancellazione del suono per tutte le frequenze, nel caso ideale di una testa senza dimensioni posizionate esattamente nel punto di mezzo fra gli altoparlanti. Se la testa ideale venisse spostata dalla linea centrale, vi sarebbe una ulteriore differenza di fase introdotta dalla differenza di lunghezza del cammino del suono proveniente dai due diffusori. Nel caso di bassa frequenza, grande lunghezza d'onda per le note basse, la differenza di cammino sarà una piccola frazione della lunghezza d'onda, sicché rimarrà comunque una significativa cancellazione. Per le alte frequenze, piccole lunghezze d'onda

delle note alte, piccoli movimenti della testa ideale risulteranno in una maggiore frazione di una lunghezza d'onda nella differenza di cammino o anche in multipli della lunghezza d'onda. Quindi, le note acute resteranno in fase col movimento della testa. Se, ora, aggiungiamo il fatto che la testa non ha dimensioni nulle e il fatto che vi sono due orecchie, possiamo vedere che non è possibile la cancellazione completa, e, anche con piccoli movimenti della testa, uno o ambedue le orecchie saranno nel massimo o ad esso vicine per le note acute. Tuttavia, la dimensione della testa è molto più piccola delle lunghezze d'onda dei bassi, per cui si verifica un significativo indebolimento dei bassi su una regione più ampia di fronte ai diffusori.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Quando impulsi della stessa forma (uno verso l'alto e l'altro verso il basso) che si muovono in una corda si attraversano, vi è un istante nel quale la corda non mostra alcuno spostamento in alcuno dei suoi punti rispetto alla posizione di equilibrio. In questo istante scompare l'energia trasportata dagli impulsi? Se no, dove si trova?

Esempio 14.1 Due altoparlanti alimentati dalla stessa sorgente

Una coppia di altoparlanti distanti 3.00 m è alimentata dallo stesso oscillatore come in Figura 14.3. L'ascoltatore originariamente è nel punto O situato sull'asse a 8.00 m dal centro del sistema. L'osservatore si sposta *perpendicolarmente* all'asse di 0.350 m prima di raggiungere il *primo minimo* nell'intensità sonora. Qual è la frequenza dell'oscillatore?

Soluzione Il primo minimo si presenta quando le due onde raggiungono l'ascoltatore in P con una differenza di fase di 180° , ovvero con una differenza di cammino di $\lambda/2$. Per calcolare la differenza di cammino, dobbiamo calcolare i percorsi r_1 ed r_2 . Facendo uso dei due triangoli ombreggiati in Figura 14.3 e delle distanze assegnate, troviamo:

$$r_1 = \sqrt{(8.00 \text{ m})^2 + (1.15 \text{ m})^2} = 8.08 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{(8.00 \text{ m})^2 + (1.85 \text{ m})^2} = 8.21 \text{ m}$$

Quindi, la differenza di percorso è $r_2 - r_1 = 0.13 \text{ m}$ e dal momento che deve essere uguale a $\lambda/2$, troviamo che $\lambda = 0.26 \text{ m}$.

Per ottenere la frequenza dell'oscillatore, usiamo la $v = \lambda f$ dove v è la velocità del suono nell'aria, 343 m/s:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \text{ m/s}}{0.26 \text{ m}} = 1.3 \text{ kHz}$$

ESERCIZIO 1 Se la frequenza dell'oscillatore è regolata in modo che l'ascoltatore senta il primo minimo a una distanza di 0.75 m da O , qual è la nuova frequenza dell'oscillatore? Risposta 0.63 kHz.

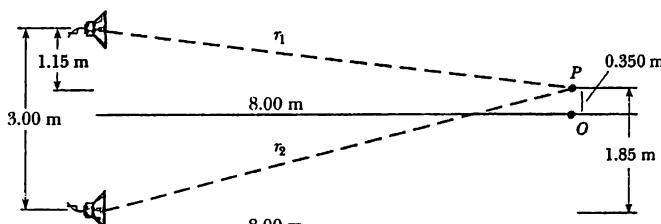


Figura 14.3 (Esempio 14.1)

14.2 • ONDE STAZIONARIE

Se una corda tesa è bloccata ad ambedue le estremità, le onde che si propagano in ambedue i versi si rifletteranno alle estremità. Le onde incidenti e riflesse si combineranno secondo il principio di sovrapposizione.

Si considerino due onde sinusoidali nello stesso mezzo con la stessa ampiezza, frequenza e lunghezza d'onda, ma che si propagano in versi *opposti*. Le loro funzioni d'onda possono essere scritte

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2 = A \sin(kx + \omega t)$$

dove y_1 rappresenta un'onda che si propaga verso destra e y_2 rappresenta un'onda che si propaga verso sinistra. Sommando queste due funzioni si ottiene la funzione d'onda risultante:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi f$, come sempre. Usando l'identità trigonometrica $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$, questa si riduce a

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t \quad [14.3]$$

- *Funzione d'onda di un'onda stazionaria*

Questa espressione rappresenta la funzione d'onda di un'onda stazionaria. Da questo risultato si vede che un'onda stazionaria ha pulsazione ω e ampiezza data da $2A \sin kx$ (la quantità fra parentesi nell'Eq. 14.3). Cioè ciascuna particella della corda vibra con un moto armonico semplice della stessa frequenza. Tuttavia, l'ampiezza del moto di una data particella dipende da x . Ciò è in contrasto con la situazione che riguarda un'onda sinusoidale che si propaga, in cui tutte le particelle oscillano sia con la stessa ampiezza che con la stessa frequenza.

Poiché l'ampiezza dell'onda stazionaria, per qualsiasi x , è uguale a $2A \sin kx$, si vede che l'ampiezza massima ha valore $2A$. Ciò avviene quando la coordinata x soddisfa la condizione $\sin kx = \pm 1$ o quando

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Poiché $k = 2\pi/\lambda$, le posizioni di massima ampiezza, dette **ventri**, sono date da

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots = \frac{n\lambda}{4} \quad [14.4] \quad \bullet \quad \text{• Posizione dei ventri}$$

dove $n = 1, 3, 5, \dots$. Si osservi che ventri adiacenti sono separati da una distanza di $\lambda/2$.

In modo analogo, l'onda stazionaria ha ampiezza *minima* nulla quando x soddisfa la condizione $\sin kx = 0$ o quando

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

fornendo

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots = \frac{n\lambda}{2} \quad [14.5] \quad \bullet \quad \text{• Posizione dei nodi}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Questi punti di ampiezza nulla, detti **nodi**, sono ancora spaziati di $\lambda/2$. La distanza fra un nodo e un ventre adiacente è $\lambda/4$.

Una descrizione grafica delle configurazioni di onda stazionaria prodotta, a vari istanti, da due onde che si propagano in versi opposti è mostrata in Figura 14.4. La parte superiore di ciascuna figura rappresenta le singole onde che si propagano, e la parte inferiore rappresenta le configurazioni dell'onda stazionaria. I nodi dell'onda stazionaria sono indicati con *N* e i ventri sono indicati

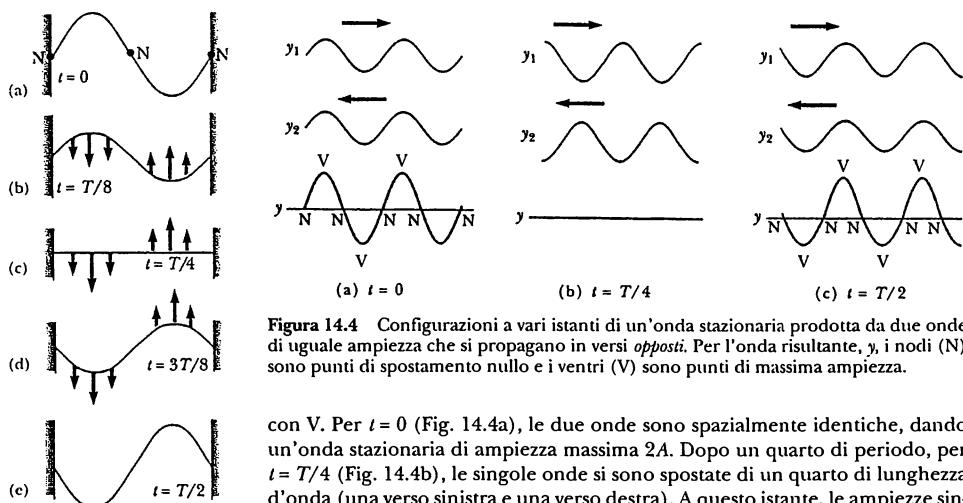


Figura 14.4 Configurazioni a vari istanti di un'onda stazionaria prodotta da due onde di uguale ampiezza che si propagano in versi opposti. Per l'onda risultante, y , i nodi (N) sono punti di spostamento nullo e i ventri (V) sono punti di massima ampiezza.

Figura 14.5 Rappresentazione di onde stazionarie in una corda tesa, che mostra immagini istantanee, durante metà del ciclo. (a) Per $t = 0$ la corda è momentaneamente a riposo, per cui tutta l'energia è energia potenziale U , associata con lo spostamento verticale dei segmenti della corda (energia di deformazione). (b) Per $t = T/8$ la corda è in moto e l'energia è metà cinetica e metà potenziale. (c) Per $t = T/4$, la corda è orizzontale (non deformata) e pertanto $U = 0$ e tutta l'energia è cinetica. Il moto continua come indicato, e infine si ripete la configurazione iniziale (a).

con V. Per $t = 0$ (Fig. 14.4a), le due onde sono spazialmente identiche, dando un'onda stazionaria di ampiezza massima $2A$. Dopo un quarto di periodo, per $t = T/4$ (Fig. 14.4b), le singole onde si sono spostate di un quarto di lunghezza d'onda (una verso sinistra e una verso destra). A questo istante, le ampiezze singole sono uguali e opposte per tutti i valori di x , e quindi l'onda risultante ha ampiezza nulla ovunque. Per $t = T/2$ (Fig. 14.4c) le onde singole sono nuovamente identiche spazialmente, e producono una configurazione dell'onda stazionaria invertita rispetto alla configurazione per $t = 0$.

È istruttivo discutere l'energia associata al moto di un'onda stazionaria. Per illustrare questo punto si consideri un'onda stazionaria formata in una corda tesa fissata a entrambe le estremità, come in Figura 14.5. Tutti i punti della corda oscillano verticalmente con la stessa frequenza, tranne i nodi che sono fissi. Inoltre, i vari punti hanno diverse ampiezze di moto. La Figura 14.5 rappresenta immagini istantanee dell'onda stazionaria a vari momenti, per metà di un ciclo. I nodi rappresentano punti della corda che sono sempre fermi, e le posizioni dei massimi e dei minimi non variano mai. Ciascun punto della corda esegue un moto armonico semplice in direzione verticale. Cioè, si può pensare l'onda stazionaria come un grande insieme di oscillatori che vibrano parallelamente l'uno all'altro. L'energia della corda in vibrazione si alterna continuamente fra energia potenziale elastica, all'istante in cui la corda è momentaneamente a riposo (Fig. 14.5a), ed energia cinetica, all'istante in cui la corda è orizzontale e le particelle hanno la loro massima velocità (Fig. 14.5c). Le particelle della corda negli istanti intermedi hanno sia energia potenziale che energia cinetica (Figg. 14.5b e 14.5d).

Esempio 14.2 Formazione di un'onda stazionaria

Due onde che si propagano in versi opposti producono un'onda stazionaria. Le funzioni d'onda singole sono date da

$$y_1 = (4.0 \text{ cm}) \sin(3.0x - 2.0t)$$

$$y_2 = (4.0 \text{ cm}) \sin(3.0x + 2.0t)$$

dove x e y sono in cm. (a) Trovare il massimo spostamento dovuto al moto per $x = 2.3 \text{ cm}$.

Soluzione Quando le due onde si sommano, il risultato è un'onda stazionaria la cui funzione è data

dall'Equazione 14.3, con $A = 4.0 \text{ cm}$ e $k = 3.0 \text{ rad/cm}$:

$$y = (2A_0 \sin kx) \cos \omega t = [(8.0 \text{ cm}) \sin 3.0x] \cos \omega t$$

Pertanto il *massimo* spostamento del punto $x = 2.3 \text{ cm}$ è dato da

$$y_{\max} = (8.0 \text{ cm}) \sin 3.0x|_{x=2.3}$$

$$= (8.0 \text{ cm}) \sin(6.9 \text{ rad}) = 4.6 \text{ cm}$$

(b) Trovare le posizioni dei nodi e dei ventri.

Soluzione Poiché $k = 2\pi/\lambda = 3 \text{ rad/cm}$ si vede che $\lambda = 2\pi/3 \text{ cm}$. Pertanto, dall'Equazione 14.4 si ricava che i ventri si trovano a

$$x = n \left(\frac{\pi}{6} \right) \text{ cm} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

e dall'Equazione 14.5 si ricava che i nodi si trovano a

$$x = n \frac{\lambda}{2} = n \left(\frac{\pi}{3} \right) \text{ cm} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

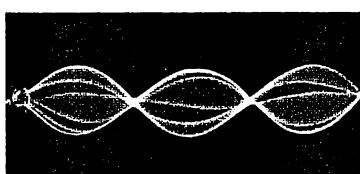
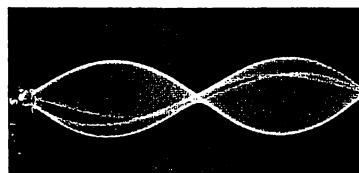
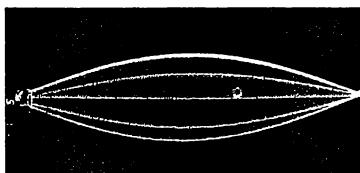
14.3 • FREQUENZE NATURALI IN UNA CORDA TESA

Si consideri una corda di lunghezza L fissata ad entrambe le estremità, come in Figura 14.6. Le onde stazionarie sono indotte nella corda da una continua sovrapposizione di onde incidenti sulle estremità e onde riflesse dalle estremità. La corda ha un certo numero di configurazioni naturali di vibrazione dette **modi normali**. Ciascuno di questi ha una frequenza caratteristica; le frequenze si calcolano facilmente.

Si osservi innanzitutto che le estremità della corda devono essere nodi poiché questi punti sono *fissi*. Se la corda viene spostata nel suo punto di mezzo e poi lasciata libera, vengono eccitati tutti i modi che non hanno un nodo al centro. Consideriamo il modo normale nel quale il centro della corda è un ventre (Fig. 14.6b). Per questo modo normale, la lunghezza della corda è uguale a $\lambda/2$ (la distanza fra i nodi):

$$L = \lambda_1/2 \quad \circ \quad \lambda_1 = 2L$$

Il successivo modo normale, di lunghezza d'onda λ_2 (Fig. 14.6c), avviene quando la lunghezza della corda è uguale a una lunghezza d'onda, cioè quando $\lambda_2 = L$. Il terzo modo normale (Fig. 14.6d) corrisponde al caso in cui la lunghezza è



Fotografia multiflash di configurazioni di onde stazionarie in una corda sottoposta a un vibratore alla sua estremità sinistra. La figura con un solo ventre in alto a sinistra rappresenta la fondamentale ($n = 1$), la figura con due ventri, a destra, rappresenta la seconda armonica ($n = 2$), mentre la figura con tre ventri rappresenta la terza armonica ($n = 3$). (© Richard Megna 1991, Fundamental Photographs, NYC)

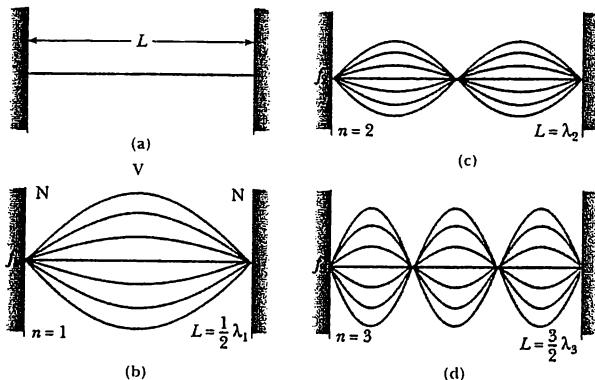


Figura 14.6 (a) Onde stazionarie in una corda di lunghezza L fissata ad entrambe le estremità. I modi normali di vibrazione, mostrati tramite esposizioni multiple, formano una serie armonica; (b) la frequenza fondamentale o prima armonica; (c) la seconda armonica e (d) la terza armonica.

uguale a $3\lambda/2$, cioè, $\lambda_3 = 2L/3$. In generale, la lunghezza d'onda dei vari modi normali può essere espressa convenientemente come

**Lunghezza d'onda •
dei modi normali**

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [14.6]$$

dove l'indice n si riferisce all' n -esimo modo di vibrazione. Le frequenze naturali associate a questi modi si ottengono dalla relazione $f = v/\lambda$, dove la velocità d'onda v è la stessa per tutte le frequenze. Usando l'Equazione 14.6, si trova che le frequenze dei modi normali sono date da

**Frequenze dei modi •
normali in funzione della
velocità dell'onda e della
lunghezza della corda**

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} v \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [14.7]$$

Poiché $v = \sqrt{F/\mu}$ (Eq. 13.19), dove F è la tensione della corda e μ è la massa per unità di lunghezza, si possono esprimere i modi normali di una corda tesa (qualche volta chiamati *armoniche*) anche come

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [14.8]$$

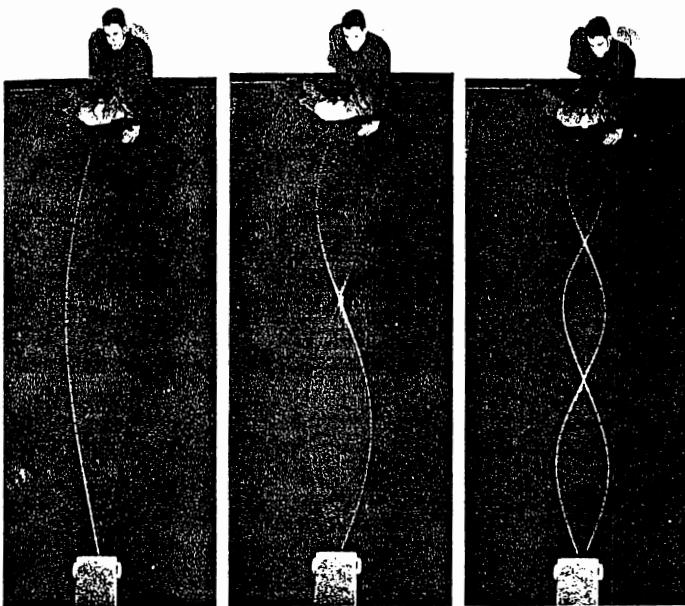
**Frequenze dei modi •
normali in funzione della
tensione della corda e della
densità lineare di massa**

La frequenza più bassa, corrispondente a $n = 1$, è detta *fondamentale* o, *frequenza fondamentale*, f_1 ed è data da

**Frequenza fondamentale •
di una corda tesa**

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad [14.9]$$

Chiaramente, le frequenze degli altri modi sono multipli interi della frequenza fondamentale, cioè, $2f_1, 3f_1, 4f_1$, e così via. Queste frequenze naturali più alte, insieme con la frequenza fondamentale, formano una **serie armonica**. La fondamentale, f_1 , è la prima armonica; la frequenza $f_2 = 2f_1$ è la seconda armonica, la frequenza f_n è la n -esima armonica.



Fotografie di onde stazionarie. Quando un'estremità della corda viene fatta oscillare trasversalmente con una frequenza che aumenta, si formano configurazioni con un numero sempre maggiore di ventri; soltanto certe frequenze definite producono configurazioni fisse. (Photos, Education Development Center, Newton, Mass.).

Possiamo ottenere il risultato precedente in un modo alternativo. Poiché abbiamo imposto che la corda sia fissata a $x = 0$ e $x = L$, la funzione d'onda $y(x, t)$ data dall'Equazione 14.3 deve essere zero in questi punti in tutti gli istanti. Cioè, le condizioni al contorno richiedono che $y(0, t) = 0$ e $y(L, t) = 0$ per ogni valore di t . Poiché $y = (2A_0 \operatorname{sen} kx) \cos \omega t$, la prima condizione, $y(0, t) = 0$ è automaticamente soddisfatta, poiché $\operatorname{sen} kx = 0$ a $x = 0$. Per soddisfare la seconda condizione, $y(L, t) = 0$, si richiede che $\operatorname{sen} kL = 0$. Questa condizione è soddisfatta quando l'angolo kL è un multiplo di π (180°). Pertanto, i valori di k sono¹

$$k_n L = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [14.10]$$

Poiché $k_n = 2\pi/\lambda_n$, si trova che

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right)L = n\pi \quad \text{ossia} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

che è identica all'Equazione 14.6.

Quando si modifica la forma di una corda tesa, in modo che la sua forma iniziale corrisponda a una qualsiasi delle sue armoniche, una volta rilasciata essa vibrerà alla frequenza di quell'armonica. Se invece la corda viene pizzicata, la vibrazione che viene generata includerà frequenze di varie armoniche, compre-

¹ Si esclude $n = 0$ perché questo valore corrisponde al caso semplice in cui non esiste alcun'onda ($k = 0$).

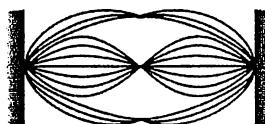


Figura 14.7 Esposizioni multiple di una corda tesa che vibra simultaneamente nella sua prima e seconda armonica.

sa la fondamentale. In effetti, la corda “seleziona” le frequenze corrispondenti ai modi normali se viene sollecitata da una perturbazione non armonica (per esempio quando un dito la pizzica).

La Figura 14.7 mostra una corda tesa, che vibra simultaneamente con la sua prima e seconda armonica. In questa figura la vibrazione combinata è la sovrapposizione delle due vibrazioni mostrate nelle Figure 14.6b e 14.6c. L’inviluppo maggiore corrispondente alla frequenza fondamentale di vibrazione, f_1 , e gli inviluppi più piccoli alla seconda armonica, f_2 . In generale, il moto risultante, o lo spostamento, può essere descritto da una sovrapposizione di varie funzioni d’onda armoniche con differenti frequenze e ampiezze. Quindi, il suono che si sente corrisponde a una forma d’onda complessa associata a questi vari modi di vibrazione. (Ritorneremo su questo punto nel Paragrafo 14.6).

La frequenza di uno strumento a corde può essere cambiata, sia variando la tensione F che cambiando la lunghezza L . Per esempio, la tensione delle corde delle chitarre e dei violini viene variata da un meccanismo di regolazione a vite o girando spine collocate sul manico dello strumento. Quando si aumenta la tensione della corda, la frequenza dei modi normali aumenta secondo l’Equazione 14.8. Una volta che lo strumento sia “accordato”, il suonatore varia la frequenza muovendo le sue dita lungo il manico dello strumento, cambiando pertanto la lunghezza della parte vibrante della corda. Quando si accorcia la lunghezza, aumenta la frequenza, poiché le frequenze dei modi normali sono inversamente proporzionali alla lunghezza della corda.

PROBLEMA CONCETTUALE 2

I chitarristi qualche volta suonano una “armonica”, toccando leggermente una corda esattamente al centro e pizzicandola. Il risultato è una nota un’ottava più alta della fondamentale della corda, sebbene la corda non sia pressata sul manico. Perché accade ciò?

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Un arciere lancia una freccia con l’arco. La corda dell’arco manifesta onde stazionarie dopo la partenza della freccia? Se è così e se l’arco è perfettamente simmetrico da lanciare la freccia proprio dal centro della corda, quali armoniche vengono eccitate?

Esempio 14.3 Datemi un DO

Il DO centrale della scala di DO-maggiore su un pianoforte ha la frequenza fondamentale di 262 Hz, e la nota LA ha la frequenza fondamentale di 440 Hz. (a) Calcolare le frequenze delle due armoniche successive del DO.

Soluzione Poiché $f_1 = 262$ Hz, si possono usare le Equazioni 14.8 e 14.9 per ricavare le frequenze f_2 e f_3 :

$$f_2 = 2f_1 = 524 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 786 \text{ Hz}$$

(b) Se si assume che le due corde del pianoforte per le note DO e LA abbiano la stessa massa per unità di lunghezza e la stessa lunghezza, calcolare il rapporto delle tensioni fra le due corde.

Soluzione Usando l’Equazione 14.8 per le due corde che vibrano alle loro frequenze fondamentali si ottiene

$$f_{1\text{LA}} = \frac{1}{2L} \sqrt{F_{\text{LA}}/\mu} \quad \text{e} \quad f_{1\text{DO}} = \frac{1}{2L} \sqrt{F_{\text{DO}}/\mu}$$

$$\frac{f_{1\text{LA}}}{f_{1\text{DO}}} = \sqrt{\frac{F_{\text{LA}}}{F_{\text{DO}}}}$$

$$F_{\text{LA}}/F_{\text{DO}} = (f_{1\text{LA}}/f_{1\text{DO}})^2 = (440/262)^2 = 2.82$$

(c) Le densità delle corde sono in realtà eguali e la lunghezza della corda LA è il 64% di quella della corda DO. Qual è il rapporto fra le loro tensioni?

$$\frac{f_{1\text{LA}}}{f_{1\text{DO}}} = (L_{\text{DO}}/L_{\text{LA}}) \sqrt{F_{\text{LA}}/F_{\text{DO}}} = (100/64) \sqrt{F_{\text{LA}}/F_{\text{DO}}}$$

$$\frac{f_{1\text{LA}}}{f_{1\text{DO}}} = (0.64)^2 (440/262)^2 = 1.16$$

ESERCIZIO 2 Una corda tesa è lunga 160 cm e ha una densità lineare di 0.0150 g/cm. Quale tensione della corda genererà la seconda armonica di 460 Hz? Risposta 813 N

ESERCIZIO 3 Una corda di densità lineare 1.0×10^{-3} kg/m e lunghezza 3.0 m è tesa fra due punti. Un estremo viene messo in vibrazione trasversale a 200 Hz. Quale tensione della corda genererà una configurazione di onda stazionaria con tre ventri nella lunghezza della corda? Risposta 160 N

14.4 • ONDE STAZIONARIE IN COLONNE D'ARIA

Si possono generare onde stazionarie longitudinali in un tubo d'aria, come una canna d'organo, come risultato dell'interferenza fra onde longitudinali che si propagano in direzioni opposte. La relazione di fase fra l'onda incidente e l'onda riflessa da una estremità dipende dal fatto che l'estremità sia aperta o chiusa. Questa è analoga alla relazione di fase fra le onde trasversali, incidente e riflessa alle estremità di una corda. L'estremità chiusa di una colonna d'aria è un nodo di spostamento, proprio come l'estremità fissa di una corda vibrante è un nodo di spostamento. Come risultato, all'estremità chiusa di un tubo d'aria, l'onda riflessa è sfasata di 180° rispetto all'onda incidente. Inoltre, poiché l'onda di pressione è sfasata di 90° con l'onda di spostamento (Paragrafo 13.9), l'estremità chiusa di una colonna d'aria corrisponde a un ventre di pressione (cioè un punto di massima variazione della pressione).

Se l'estremità di una colonna d'aria è aperta all'atmosfera, le molecole d'aria hanno completa libertà di moto. Pertanto l'onda riflessa è quasi in fase con l'onda incidente quando il diametro del tubo è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda del suono. Di conseguenza, l'estremità aperta di una colonna d'aria è un ventre di spostamento e un nodo di pressione.

Strettamente parlando, l'estremità aperta di una colonna d'aria non è esattamente un ventre. Quando una compressione raggiunge un'estremità aperta, non raggiunge la piena espansione finché non passa un po' oltre l'estremità. Per un tubo a pareti sottili di sezione circolare, questa *correzione di bocca* è circa $0.6R$, dove R è il raggio del tubo. Quindi, la lunghezza effettiva del tubo è un po' più lunga della vera lunghezza L .

I primi tre modi di vibrazione di un tubo aperto ad entrambe le estremità sono mostrati in Figura 14.8a. Immettendo aria dall'orlo alla sinistra, si formano onde stazionarie longitudinali e il tubo risuona alle sue frequenze naturali. Tutti i modi di vibrazione vengono eccitati simultaneamente (sebbene non con la stessa ampiezza). Si osservi che le estremità sono ventri di spostamento (approssimativamente). Nel modo fondamentale, la lunghezza d'onda è il doppio della lunghezza del tubo; e quindi la frequenza della fondamentale, f_1 , è data da $v/2L$. In modo simile, si trova che le frequenze delle armoniche sono $2f_1, 3f_1, \dots$. Perciò, in un tubo aperto ad entrambe le estremità, le frequenze naturali di vibrazione formano una serie armonica, cioè, le armoniche superiori sono multipli interi della frequenza fondamentale. Poiché sono presenti tutte le armoniche, si possono esprimere le frequenze naturali di vibrazione come

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [14.11]$$

- Frequenze naturali di un tubo aperto alle estremità

dove v è la velocità del suono nell'aria.

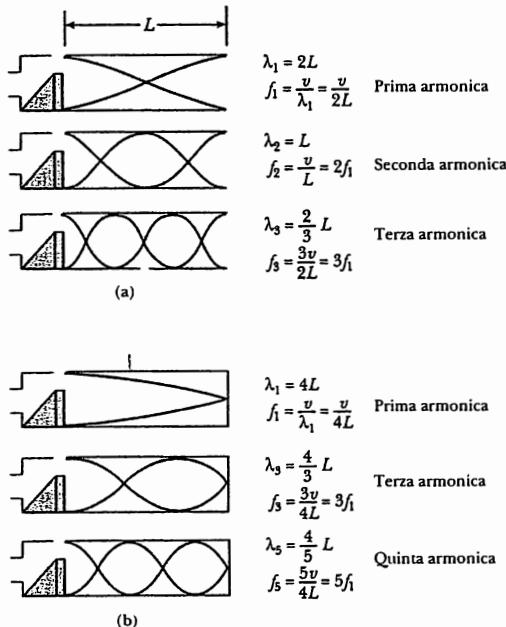


Figura 14.8 (a) Onde stazionarie longitudinali in una canna d'organo aperta ad entrambe le estremità. Le frequenze naturali, che formano una serie armonica, sono f_1 , $2f_1$, $3f_1$, . . . (b) Onde stazionarie longitudinali in una canna d'organo chiusa a una estremità. Si noti che solo le armoniche *dispari* sono presenti, e pertanto le frequenze naturali sono f_1 , $3f_1$, $5f_1$, . . .

Se un tubo è chiuso a un'estremità e aperto all'altra, l'estremità chiusa è un nodo di spostamento (Fig. 14.8b). In questo caso, la lunghezza d'onda del modo fondamentale è quattro volte la lunghezza del tubo. Quindi, la fondamentale, f_1 , è uguale a $v/4L$, e le frequenze delle armoniche superiori sono uguali a $3f_1$, $5f_1$, . . . Cioè, in un tubo chiuso a una estremità, solo le armoniche dispari sono presenti e queste sono date da

Frequenze naturali •
di un tubo chiuso
a una estremità

$$f_n = n \frac{v}{4L} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad [14.12]$$

Le onde stazionarie nelle colonne d'aria sono le principali sorgenti del suono prodotto dagli strumenti a fiato.

Fisica ragionata 2

Quando le onde attraversano l'oceano fanno sì che l'acqua in un porto sia sottoposta a notevoli oscillazioni, chiamate *seiches* (risonanze). Perché si verificano?

Ragionamento L'acqua in un porto è chiusa e possiede una frequenza naturale (propria) che dipende dalle dimensioni del porto. Ciò è analogo alla frequenza naturale di una colonna d'aria chiusa in una bottiglia, che venga eccitata soffiando attraverso il bordo aperto. Le onde oceaniche passano dall'entrata del porto a una certa frequenza. Se questa frequenza è uguale a quella naturale del porto, allora si può formare una grande onda stazionaria per risonanza. Ciò si può simulare trasportando la vaschetta del pesciolino piena d'acqua. Se si cammina, la frequenza si accorda con la frequenza naturale dell'acqua mentre essa fluisce avanti e indietro, innescando una grande onda stazionaria nella vaschetta.

Fisica ragionata 3

Una tromba naturale non ha pistoni, chiavi, fessure o buchi per le dita. Come è possibile eseguire un brano?

Ragionamento I pezzi per tromba naturale sono limitati alle armoniche della frequenza fondamentale, poiché manca il controllo sulle frequenze dato dai pistoni, dalle chiavi, dalle fessure o dai buchi per le dita. Il suonatore ottiene note diverse variando la tensione delle labbra quando suona la tromba, per eccitare armoniche diverse. Il campo di un suono normale per una tromba (naturale) è lungo la terza, quarta, quinta e sesta armonica della fondamentale. Per esempio, "Reveille" è suonata proprio con le tre note Sol Do, e Mi, e "Taps" è suonata con queste tre note e il Sol dell'ottava superiore del Sol basso.

Fisica ragionata 4

Se un'orchestra non opera la fase di preparazione "riscaldamento" prima di una esecuzione, gli archi tendono al bemolle e i fiati al diesis, durante l'esecuzione. Perché?

Ragionamento Senza fase di riscaldamento, tutti gli strumenti, all'inizio di un concerto, si trovano a temperatura ambiente. Quando gli strumenti a fiato vengono suonati si riempiono con l'aria calda dell'emissione del suonatore. L'aumento della temperatura dell'aria nello strumento causa un aumento della velocità del suono, la quale fa aumentare le frequenze di risonanza della colonna d'aria. Di conseguenza, gli strumenti tendono al diesis. Le corde degli strumenti a corda aumentano pure di temperatura a causa dell'attrito dovuto allo strofinio dell'arco. Ciò causa la dilatazione termica, la quale a sua volta causa una diminuzione della tensione delle corde. Con una diminuzione della tensione, la velocità dell'onda nelle corde diminuisce, e così diminuisce la frequenza fondamentale. In conclusione, gli archi tendono al bemolle.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Nel Balboa Park di San Diego, California, vi è un organo all'aperto. La frequenza fondamentale di una particolare canna di questo organo varia nei giorni caldi e freddi? Quanto varia approssimativamente nei giorni di alta e bassa pressione atmosferica?

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Se hai una serie di bottiglie di vetro, con quantità d'acqua diverse all'interno, puoi ottenere delle note musicali battendole con un cucchiaio, o soffiando attraverso l'apertura superiore delle bottiglie. Quando colpisci le bottiglie, la frequenza delle note diminuisce quando il livello dell'acqua aumenta. Quando soffi nelle bottiglie, la frequenza delle note aumenta quando il livello dell'acqua aumenta. Perché c'è una differenza nel comportamento delle frequenze nei due casi?

Esempio 14.4 Risonanza in un tubo

Un tubo ha la lunghezza di 1.23 m. (a) Determinare le frequenze delle prime tre armoniche se il tubo è aperto a entrambe le estremità. Si prenda $v = 343 \text{ m/s}$ come velocità del suono nell'aria.

Soluzione La frequenza fondamentale di un tubo aperto è

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2(1.23 \text{ m})} = 139 \text{ Hz}$$

Poiché sono presenti tutte le armoniche, la seconda e la terza armonica sono date da $f_2 = 2f_1 = 278 \text{ Hz}$ e $f_3 = 3f_1 = 417 \text{ Hz}$.

(b) Quali sono le tre frequenze determinate in (a) se il tubo è chiuso a una estremità?

Soluzione La frequenza fondamentale di un tubo

chiuso a una estremità è

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(1.23 \text{ m})} = 69.7 \text{ Hz}$$

In questo caso sono presenti solo le armoniche dispari e pertanto le due armoniche successive hanno frequenze date da $f_3 = 3f_1 = 209 \text{ Hz}$ e $f_5 = 5f_1 = 349 \text{ Hz}$.

(c) Nel caso del tubo aperto, quante armoniche sono presenti nell'intervallo udibile umano normale (da 20 a 20 000 Hz)?

Soluzione Poiché tutte le armoniche sono presenti, $f_n = nf_1$. Quindi la frequenza più alta corrisponde a $n = 20\,000/139 = 144$, per cui sono presenti 144 armoniche. In realtà, solo le prime armoniche avranno ampiezza sufficiente per essere percepite.

Esempio 14.5 Misura della frequenza di un diapason

Un semplice apparato per dimostrare la risonanza in un tubo è descritto in Figura 14.9a. Un tubo verticale lungo, aperto, è parzialmente sommerso in un secchio d'acqua e un diapason vibrante di frequenza ignota è posto sulla cima. Si regola la lunghezza della colonna d'aria, L , muovendo verticalmente il tubo. Le onde sonore generate dal diapason sono rinforzate quando la lunghezza della colonna corrisponde a una delle frequenze di risonanza del tubo.

Il più piccolo valore di L per cui si ottiene un massimo nell'intensità sonora è 9 cm. Da questa misura, determinare la frequenza del diapason e il valore di L per i due successivi modi di risonanza.

Ragionamento Sebbene il tubo sia aperto ad ambedue i lati per permettere all'acqua di entrare, la superficie dell'acqua agisce come una parete a un'estremo di lunghezza L . Perciò questa sistemazione rappresenta un tubo chiuso a un'estremo e la fondamentale ha frequenza $v/4L$ (Fig. 14.9b).

Soluzione Prendendo $v = 343 \text{ m/s}$ come velocità del suono in aria e $L = 0.0900 \text{ m}$, si ottiene

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{344 \text{ m/s}}{4(0.0900 \text{ m})} = 953 \text{ Hz}$$

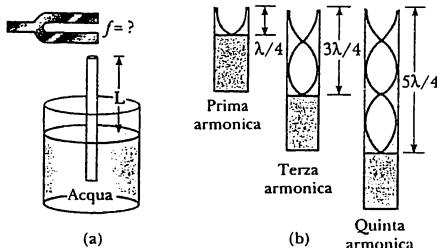


Figura 14.9 (a) Apparato per dimostrare la risonanza delle onde sonore in un tubo chiuso a un'estremità. La lunghezza L della colonna d'aria viene variata muovendo il tubo verticalmente mentre esso è parzialmente immerso in acqua. (b) I primi tre modi normali di vibrazione del sistema mostrato in (a).

Da questa informazione sul modo fondamentale, si vede che la lunghezza d'onda è data da $\lambda = 4L = 0.360 \text{ m}$. Poiché la frequenza della sorgente è costante, si vede che i due successivi modi risonanti (Fig. 14.9b) corrispondono alle lunghezze di $3\lambda/4 = 0.270 \text{ m}$ e $5\lambda/4 = 0.450 \text{ m}$, rispettivamente.

ESERCIZIO 4 La canna più lunga di un certo organo è 4.88 m. Qual è la frequenza fondamentale (0.0°C) se l'estremo non eccitato della canna è (a) chiuso e (b) aperto?

Risposta (a) 17.0 Hz (b) 34.0 Hz

ESERCIZIO 5 Una colonna d'aria di 2.00 m è aperta ai due estremi. La frequenza di una certa armonica è 410 Hz, e la frequenza della successiva armonica più alta è 492 Hz. Determinare la velocità del suono nella colonna d'aria. Risposta 328 m/s

14.5 • BATTIMENTI: INTERFERENZA TEMPORALE

FACOLTATIVO

I fenomeni di interferenza che abbiamo trattato finora riguardano la sovrapposizione di due o più onde con la stessa frequenza che si propagano in versi opposti. Poiché la forma d'onda risultante in questo caso dipende dalle coordinate del mezzo perturbato, ci si può riferire a questo fenomeno come a una *interferenza spaziale*. Le onde stazionarie nelle corde e nelle canne sono esempi comuni di interferenza spaziale.

Consideriamo un altro tipo di effetto di interferenza, che risulta dalla sovrapposizione di due onde con *frequenze leggermente diverse*. In questo caso, quando si osservano le due onde in un dato punto, esse sono periodicamente in fase o sfasate. Cioè, vi è un'alternanza nel tempo fra interferenza costruttiva e distruttiva. Pertanto ci si riferisce a questo fenomeno come a una **interferenza nel tempo o interferenza temporale**.

Per esempio, se si percuotono due diapason di frequenze leggermente diverse, si sentono suoni ad intensità pulsante, detti **battimenti**.

Un **battimento** è la variazione periodica di intensità in una determinata posizione, dovuta alla sovrapposizione di due onde che hanno frequenze leggermente diverse.

- *Definizione di battimenti*

Il numero di battimenti che si percepiscono al secondo, o **frequenza di battimento**, è uguale alla differenza di frequenza fra le due sorgenti. La massima frequenza di battimento che l'orecchio umano può rivelare è di circa 20 battimenti/s. Quando la frequenza di battimento supera questo valore, essa si mescola in modo indistinguibile con i suoni che producono i battimenti.

Si possono usare i battimenti per accordare uno strumento a corde, come un pianoforte, confrontando una nota con un tono di riferimento di frequenza nota. La corda può poi essere regolata per produrre un'onda di frequenza uguale a quella di riferimento, tendendola o rilassandola, finché non si sentono più battimenti.

Si considerino due onde di uguale ampiezza che si propagano attraverso un mezzo con frequenze leggermente diverse f_1 e f_2 . Si può rappresentare lo spostamento che ciascuna onda produrrebbe in un certo punto come

$$y_1 = A \cos 2\pi f_1 t \quad \text{e} \quad y_2 = A \cos 2\pi f_2 t$$

Usando il principio di sovrapposizione, si trova che lo spostamento risultante in un certo punto è dato da

$$y = y_1 + y_2 = A (\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t)$$

È conveniente scrivere ciò in una forma che usa l'identità trigonometrica

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

Ponendo $a = 2\pi f_1 t$ e $b = 2\pi f_2 t$, si trova che

$$y = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \cos 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \quad [14.13]$$

I grafici che mostrano le forme d'onda singole e l'onda risultante sono mostrati in Figura 14.10. Dai fattori nell'Equazione 14.13 si vede che la vibrazione risul-

- *Risultante di due onde di diversa frequenza ma uguale ampiezza*

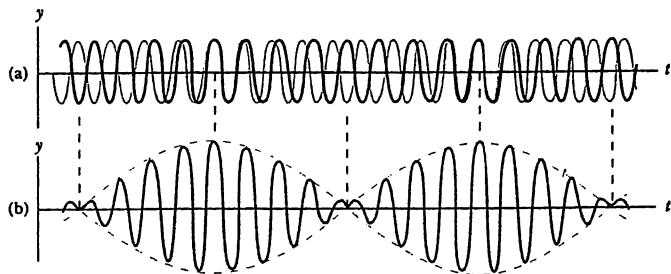


Figura 14.10 I battimenti sono formati dalla combinazione di due onde di frequenze leggermente diverse che si propagano nello stesso verso. (a) Le onde singole. (b) Le onde combinate hanno un'ampiezza (linea tratteggiata) che oscilla nel tempo.

tante in un certo punto ha una frequenza effettiva uguale alla frequenza media $(f_1 + f_2)/2$, e un'ampiezza data da

$$A_b = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \quad [14.14]$$

Ossia, l'*ampiezza varia nel tempo* con una frequenza data da $(f_1 - f_2)/2$. Quando f_1 è vicina a f_2 , la variazione di ampiezza è lenta, come illustrato dall'inviluppo (linea tratteggiata) della forma d'onda risultante in Figura 14.10b.

Si osservi che verrà rivelato un battimento, o un massimo di ampiezza, ogni volta che

$$\cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t = \pm 1$$

Cioè, ci saranno *due* massimi in ciascun ciclo. Poiché l'ampiezza varia con la frequenza come $(f_1 - f_2)/2$, il numero di battimenti al secondo o la frequenza di battimento f_b , è il doppio di questo valore. Cioè

$$f_b = f_1 - f_2 \quad [14.15]$$

Per esempio, se due diapason vibrassero singolarmente a frequenze di 438 Hz e 442 Hz, l'onda sonora risultante dalla loro interferenza avrebbe una frequenza di 440 Hz (la fondamentale della nota LA del pianoforte) e una frequenza di battimento di 4 Hz. Cioè, l'ascoltatore sentirebbe un'onda sonora di 440 Hz che presenta massimi di intensità quattro volte ogni secondo.

PROBLEMA CONCETTUALE 6

Hai a disposizione un diapason standard di frequenza nota e un secondo diapason la cui frequenza è incognita. Quando funzionano insieme, odi una frequenza di battimento di 4 Hz. Tu sai che la frequenza del diapason misterioso è diversa da quello standard di 4 Hz, ma non sei in grado di dire se è più alta o più bassa. Cosa dovresti fare per determinarla? (*Suggerimento:* stai masticando della gomma quando esegui queste misure).

14.6 • ONDE COMPLESSE

La forma delle onde sonore, emesse dalla maggior parte degli strumenti è molto complessa. Forme d'onda caratteristiche prodotte da un diapason, un flauto e un clarinetto, ciascuno che emette la stessa nota, sono mostrate in Figura 14.11. Sebbene ciascuno strumento abbia la sua forma d'onda caratteristica, la Figura 14.11 mostra che ciascuna delle forme d'onda è di natura periodica. Inoltre, si osservi che un diapason percosso produce una sola armonica (la frequenza fondamentale), mentre il flauto e il clarinetto producono molte frequenze, che includono la fondamentale e varie armoniche. Quindi le forme d'onda complesse prodotte da un violino o un clarinetto, e la conseguente ricchezza di timbri musicali sono il risultato della sovrapposizione di varie armoniche. Questo fatto è in contrasto con il tamburo, in cui gli ipertoni non formano una serie armonica.

Il problema di analizzare forme d'onda complesse sembra a prima vista un compito difficile. Se la forma d'onda è periodica, può essere rappresentata con una precisione arbitraria dalla combinazione di un numero sufficientemente grande di onde sinusoidali che formano una serie armonica. Infatti, si può rappresentare qualsiasi funzione periodica o qualsiasi funzione finita come una serie di termini delle funzioni seno e coseno usando una tecnica matematica, basata sul *teorema di Fourier*. La corrispondente somma di termini che rappresentano la forma d'onda è detta *serie di Fourier*.

Sia $y(t)$ una qualsiasi funzione periodica del tempo con periodo T per cui $y(t+T) = y(t)$. Il *teorema di Fourier* afferma che questa funzione può essere espressa come

$$y(t) = \sum_n (A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t) \quad [14.16]$$

dove la frequenza più bassa $f_1 = 1/T$.

Le frequenze più alte sono multipli interi della fondamentale per cui $f_n = n f_1$. I coefficienti A_n e B_n rappresentano le ampiezze delle varie onde. L'ampiezza della n -esima armonica è proporzionale a $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, e la sua intensità è proporzionale a $A_n^2 + B_n^2$.

La Figura 14.12 rappresenta un'analisi armonica delle forme d'onda mostrate in Figura 14.11. Si osservi la variazione delle intensità relative in funzione del

FACOLTATIVO

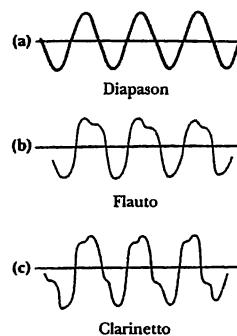


Figura 14.11 Forme d'onda prodotte da (a) diapason, (b) flauto e (c) clarinetto, ciascuno approssimativamente della stessa frequenza. (Adattato da C.A. Culver, *Musical Acoustics*, 4th ed., New York, McGraw-Hill, 1956, p. 128).

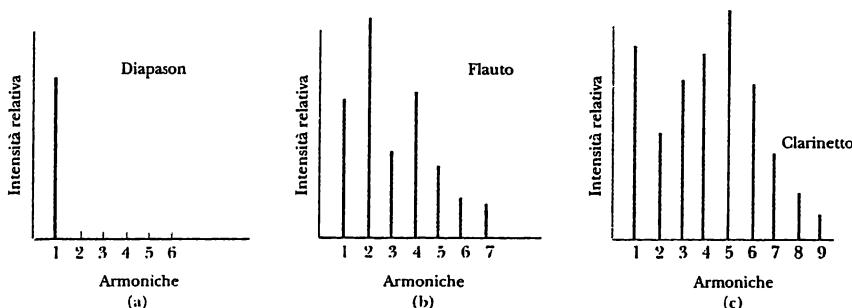


Figura 14.12 Armoniche delle forme d'onda mostrate in Figura 14.11. Si osservino le variazioni di intensità delle varie armoniche. (Adattato da C.A. Culver, *Musical Acoustics*, 4th ed., New York, McGraw-Hill, 1956).

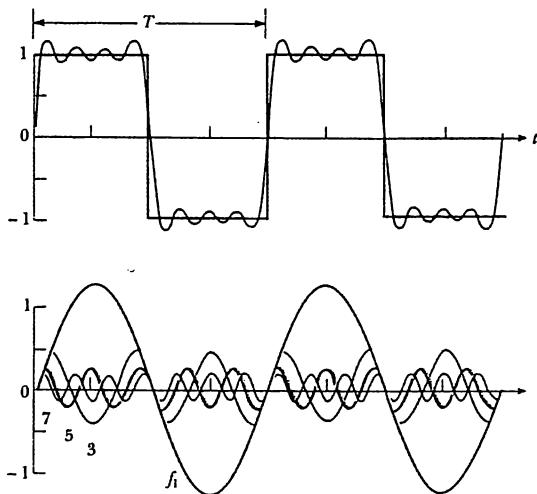


Figura 14.13 Sintesi armonica di un'onda quadra, che può essere rappresentata dalla somma delle armoniche dispari della fondamentale. (Da M.L. Warren, *Introductory Physics*, New York, W.H. Freeman, 1979, p. 178; per gent. onc.).

contenuto armonico del flauto e del clarinetto. In generale, qualsiasi suono musicale (di altezza definita) contiene componenti che sono parti dell'insieme armonico, con intensità relative variabili.

Come esempio di *sintesi di Fourier*, si consideri l'onda quadra periodica mostrata in Figura 14.13. Si osservi che l'onda quadra è il risultato della somma di una serie di armoniche *dispari* della fondamentale. La serie contiene solo funzioni seno (cioè $B_n = 0$ per ogni n). Sono mostrate solo le prime quattro armoniche dispari e le loro ampiezze relative. Aggiungendo più armoniche si ottiene un miglior accordo con la vera forma d'onda.

Usando la tecnologia moderna, si possono generare suoni musicali elettronicamente, mescolando un numero qualsiasi di armoniche con ampiezze variabili. Questi sintetizzatori di musica elettronica largamente usati sono in grado di produrre una varietà infinita di timbri musicali e sequenze ripetitive.

Fisica ragionata 5

Un professore esegue un esperimento dimostrativo in cui egli respira dell'olio e poi parla con una voce curiosamente comica. Uno studente spiega, "La velocità del suono nell'olio è maggiore di quella nell'aria, per cui la frequenza fondamentale delle onde stazionarie nella bocca aumenta." Un altro studente dice, "No, la frequenza fondamentale è determinata dalle corde vocali e non può essere variata. Soltanto il *timbro* della voce può cambiare." Quale studente ha ragione?

Ragionamento Il secondo studente ha ragione. La frequenza fondamentale del tono complesso della voce è determinata dalla vibrazione delle corde vocali e non può essere variata sostituendo un gas diverso nella bocca. L'introduzione dell'olio nella bocca causa un'eccitazione di armoniche più alte che nella voce normale, la frequenza fondamentale della voce è la stessa: soltanto il timbro è variato. La inusuale introduzione di armoniche di frequenza più alta è causa della descrizione comune di questo effetto come una voce più acuta, ma ciò non è corretto.

SOMMARIO

Quando due onde di uguale ampiezza e frequenza si sovrappongono, l'onda risultante ha un'ampiezza che dipende dalla differenza di fase ϕ fra le due onde. L'**interferenza costruttiva** avviene quando le due onde sono *in fase* ovunque, cioè quando $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$. L'**interferenza distruttiva** avviene quando le due onde sono sfasate di 180° ovunque, cioè quando $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

Le **onde stazionarie** sono formate dalla sovrapposizione di due onde sinusoidali della stessa frequenza, ampiezza e lunghezza d'onda, ma che si propagano in versi *opposti*. L'onda stazionaria risultante è descritta dalla funzione d'onda

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t \quad [14.3]$$

Quindi la sua ampiezza varia come $\sin kx$. I punti di massima ampiezza (detti **ventri**) si trovano a $x = n\pi/2k = n\lambda/4$ (per n dispari). I punti di ampiezza nulla (detti **nodi**) si trovano a $x = n\pi/k = n\lambda/2$ (per valori interi di n).

Si possono produrre onde stazionarie con frequenze specifiche in sistemi come corde tese, tubi vuoti, sbarre e pelli di tamburo. Le frequenze naturali di vibrazione di una corda tesa di lunghezza L , fissata a entrambe le estremità, sono date da

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [14.8]$$

dove F è la tensione della corda e μ la sua massa per unità di lunghezza. Le frequenze naturali di vibrazione formano una serie armonica, cioè, $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$.

Le configurazioni delle onde stazionarie per le onde longitudinali in un tubo vuoto dipendono dal fatto che le estremità del tubo siano aperte o chiuse. Se il tubo è aperto a entrambe le estremità, le frequenze naturali di vibrazione formano una serie armonica. Se un'estremità è chiusa, sono presenti solo armoniche dispari della fondamentale.

Il fenomeno dei **battimenti** è generato dalla sovrapposizione di due onde di frequenze leggermente diverse, che si propagano. Per le onde sonore in un dato punto, si percepisce un'alternanza dell'intensità sonora nel tempo. Perciò, i battimenti corrispondono all'*interferenza nel tempo*.

Qualsiasi forma d'onda periodica può essere rappresentata dalla combinazione di onde sinusoidali che formano una serie armonica. Il processo è detto *sintesi di Fourier* ed è basato sul *teorema di Fourier*.

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] Quando due onde interferiscono costruttivamente o distruttivamente c'è perdita o guadagno di energia? Spiegare.
- [2] Il fenomeno dell'interferenza fra le onde si verifica solo per le onde sinusoidali?
- [3] Alcuni cantanti si vantano di poter frantumare un bicchiere di vino mantenendo una certa nota della loro voce per un periodo di parecchi secondi (vedere la Fig. D14.3). Quale meccanismo causa la rottura del vetro? (Il vetro deve essere molto pulito per potersi rompere).
- [4] Cosa limita l'ampiezza del moto di un sistema vibrante reale che viene fatto funzionare ad una delle sue frequenze naturali?
- [5] Spiegare perché ci sono tutte le armoniche in un organo a canne aperte ad entrambe le estremità e solo quelle dispari in una canna chiusa ad un'estremità.
- [6] Un meccanico di un aeroplano osserva che il suono prodotto da un bimotore varia rapidamente in intensità quando funzionano entrambi i motori. Cosa può causare la variazione dell'intensità?
- [7] Perché una corda vibrante di chitarra ha un suono più intenso se montata sullo strumento di quando vibra in aria lontano dallo strumento?

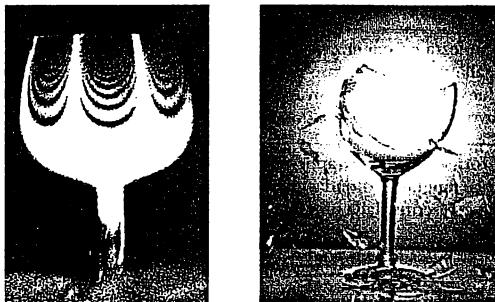


Figura D14.3 (Domanda 3) (A sinistra) Configurazione di onda stazionaria in un bicchiere che vibra. Il bicchiere si frantuma se l'ampiezza di vibrazione diventa troppo grande. (Per gent. conc. del Professor Thomas D. Rossing, Northern Illinois University) (A destra) Un bicchiere frantumato dal suono amplificato di una voce umana. (© Ben Rose 1992/The IMAGE Bank)

- [8] Quando la base di un diapason in vibrazione viene piazzata contro una lavagna il suono diventa più forte a causa della risonanza. Come incide questo fatto sulla durata del tempo di vibrazione del diapason? Ciò concorda con la conservazione dell'energia?
9. Per allontanare gli insetti dalle loro macchine, alcuni automobilisti montano delle canne sottili piccole sui paraurti. Le canne emettono un sibilo acuto quando le macchine sono in moto. Come si crea questo suono?
10. Se bagnate le vostre dita e le ruotate lentamente sul bordo sottile di un bicchiere da vino si sente un suono acuto. Perché? Come potreste produrre varie note musicali con una serie di bicchieri da vino?
11. Quando una campana suona, le onde stazionarie si formano sulla circonferenza della campana. Quali condizioni al contorno devono essere soddisfatte per le lunghezze d'onda di risonanza? Come influisce una crepa nella campana nelle condizioni al contorno e quindi sul suono emesso dalla campana?
12. Spiegare perché la vostra voce sembra migliore del solito quando cantate nella doccia.
13. Qual è il motivo della presenza della "coulisse" nel trombone o dei tasti nella tromba?
14. Malgrado una ragionevole fermezza di mano, certe persone spesso versano il loro caffè quando lo trasportano verso la propria sedia. Discutere come la risonanza possa essere una causa di questa difficoltà e immaginare un modo per risolvere il problema.

PROBLEMI

Paragrafo 14.1 Sovrapposizione e interferenza di onde sinusoidali

- [1] Due onde sinusoidali sono descritte da

$$y_1 = (5.00 \text{ m}) \sin [\pi (4.00 x - 1200 t)]$$

$$y_2 = (5.00 \text{ m}) \sin [\pi (4.00 x - 1200 t - 0.250)]$$

dove x , y_1 e y_2 sono in m e t è in s. (a) Qual è l'ampiezza dell'onda risultante? (b) Qual è la frequenza dell'onda risultante?

2. Un'onda sinusoidale è descritta da

$$y_1 = (0.0800 \text{ m}) \sin [2\pi (0.100x - 80.0t)]$$

dove y_1 e x sono in m e t è in s. Scrivere l'espressione per un'onda che ha la stessa frequenza, ampiezza e lunghezza d'onda di y_1 , ma che sommata a y_1 dia una risultante di ampiezza 8×3 cm.

3. Due onde viaggiano nello stesso verso lungo una corda tesa. Ciascuna ha un'ampiezza di 4.00 cm e sono sfasate di 90° . Trovare l'ampiezza dell'onda risultante.
4. Due onde sinusoidali identiche di lunghezza d'onda 3.00 m viaggiano nello stesso verso alla velocità di 2.00 m/s. La seconda onda ha origine nello stesso punto della prima ma a un tempo successivo. Determinare l'intervallo di tempo minimo possibile fra i tempi di partenza delle due onde se l'ampiezza dell'onda risultante è la stessa di quella delle due onde originarie.
5. Due altoparlanti sono azionati dallo stesso oscillatore a 800 Hz e sono l'uno di fronte all'altro alla distanza di 1.25 m. Trovare i due punti lungo la retta che unisce i due altoparlanti dove si aspetterebbero dei minimi relativi. (Usare $v = 343 \text{ m/s}$).
6. Un diapason genera onde sonore con una frequenza di 246 Hz. Le onde viaggiano in direzione opposta

lungo un corridoio, si riflettono sulle pareti e ritornano. Qual è la differenza di fase tra le onde quando si incontrano? Il corridoio è lungo 47.0 m e il diapason è a 14.0 m da un estremo. La velocità del suono è 343 m/s.

Paragrafo 14.2 Onde stazionarie

7. Usare l'identità trigonometrica

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

per dimostrare che la risultante di due funzioni d'onda ciascuna di ampiezza A , pulsazione ω e numero d'onda k , e che si propagano in versi opposti può essere scritta

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t$$

Per semplicità, porre tutti gli angoli di fase uguali a zero.
8. Due onde sinusoidali che si propagano in versi opposti interferiscono per produrre un'onda stazionaria descritta da

$$y = (1.50 \text{ m}) \sin(0.400x) \cos(200t)$$

dove x è in m e t è in s. Determinare la lunghezza d'onda, la frequenza e la velocità delle onde che interferiscono.

9. Due onde in una corda lunga sono date da

$$y_1 = (0.0150 \text{ m}) \cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right)$$

$$y_2 = (0.0150 \text{ m}) \cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)$$

con x e y in m e t in s. (a) Determinare la posizione dei nodi dell'onda stazionaria risultante. (b) Qual è lo spostamento massimo per $x = 0.400 \text{ m}$?

10. Due onde che danno origine a un'onda stazionaria lungo una corda sono date da

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y_2 = A \sin(kx + \omega t)$$

Dimostrare (a) che l'aggiunta di una fase arbitraria cambierà solamente la posizione dei nodi, e (b) che la distanza fra i nodi rimane costante.

Paragrafo 14.3 Frequenze naturali in una corda tesa

11. Uno studente vuole formare un'onda stazionaria in un filo di lunghezza 1.80 m fissato ad ambedue gli estremi. La velocità dell'onda è 540 m/s. Qual è la frequenza minima che lo studente dovrebbe applica-

- re per stabilire delle onde stazionarie?
12. Si produce un'onda stazionaria in una corda lunga 120 cm fissata a entrambe le estremità. La corda vibra in quattro segmenti, quando viene fatta oscillare alla frequenza di 120 Hz. (a) Determinare la lunghezza d'onda. (b) Qual è la frequenza fondamentale?
13. La corda di un violoncello vibra nel suo modo fondamentale con una frequenza di 220 Hz. La lunghezza della corda è 70.0 cm e la massa 1.20 g. (a) Trovare la tensione della corda. (b) Determinare la frequenza dell'armonica che fa vibrare la corda in tre segmenti.
14. Una corda di lunghezza L , massa per unità di lunghezza μ e tensione F sta vibrando alla sua frequenza fondamentale. Quale effetto avranno le modifiche seguenti sulla frequenza fondamentale? (a) La lunghezza della corda viene raddoppiata, mentre tutti gli altri fattori sono tenuti costanti. (b) La massa per unità di lunghezza viene raddoppiata, mentre tutti gli altri fattori sono tenuti costanti. (c) La tensione viene raddoppiata, mentre tutti gli altri fattori sono tenuti costanti.
15. Una corda di chitarra lunga 60.0 cm, sottoposta alla tensione di 50.0 N, ha una massa per unità di lunghezza di 0.100 g/cm. Qual è la frequenza risonante più alta, udibile da una persona, che può percepire frequenze fino a 20 000 Hz?
16. Un filo teso vibra nel suo modo fondamentale ad una frequenza di 400 Hz. Quale sarebbe la frequenza fondamentale se il filo fosse lungo la metà con un diametro doppio e con una tensione quattro volte maggiore?
17. Un filo lungo 2.00 m e massa 0.100 kg è fissato ad ambedue gli estremi. La tensione del filo è mantenuta a 20.0 N. Quali sono le frequenze dei primi tre modi permessi di vibrazione? Se si osserva un nodo in un punto a 0.400 m dall'estremità, con quale modo e a quale frequenza vibra?
18. Una corda di violino è lunga 0.350 m ed è accordata per suonare a $f_1 = 392 \text{ Hz}$. Dove deve porre il violinista il dito per suonare una nota di frequenza $f_2 = 440 \text{ Hz}$? Se questa posizione deve rimanere precisa a metà della larghezza del dito (cioè entro 0.600 cm), di quale frazione la tensione della corda può variare?
19. Trovare la frequenza fondamentale e le tre frequenze successive che possono causare una configurazione di onda stazionaria in una corda lunga 30.0 m, di massa per unità di lunghezza $9.00 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$, e tesa con una tensione di 20.0 N.
20. In un bicchiere di vetro viene stabilita un'onda stazionaria con due nodi e due ventri ugualmente distanziati attorno alla circonferenza di 20.0 cm del suo orlo. Se nel vetro le onde trasversali si muovono a 900 m/s, quale alta armonica dovrebbe produrre una cantante lirica in modo che la sua frequenza possa frantumare il bicchiere con una vibrazione risonante?

Paragrafo 14.4 Onde stazionarie in una colonna d'aria

(In questo paragrafo, tranne dove indicato diversamente, si assuma che la velocità del suono nell'aria sia 343 m/s).

21. Calcolare la lunghezza minima di un tubo che ha la frequenza fondamentale di 240 Hz se il tubo è (a) chiuso a una estremità e (b) chiuso a entrambe le estremità.
22. Un tubo di vetro di lunghezza L (aperto a entrambi gli estremi) è posto vicino ad un altoparlante audio di frequenza $f = 0.680$ kHz. Per quali valori di L il tubo risuonerà con l'altoparlante?
23. La lunghezza complessiva di un ottavino è 32.0 cm. La colonna d'aria che risuona vibra come un tubo con entrambe le estremità aperte. (a) Trovare la frequenza della nota più bassa che l'ottavino può suonare, assumendo che la velocità del suono sia 340 m/s. (b) Aprendo i buchi sullo strumento si può accorciare la lunghezza della colonna d'aria risonante. Se la nota più alta che l'ottavino può suonare è 4000 Hz, trovare la distanza tra due nodi adiacenti per questa nota.
24. La frequenza fondamentale di una canna d'organo aperta corrisponde al DO centrale (261.6 Hz sulla scala musicale cromatica). La terza risonanza di una canna d'organo chiusa ha la stessa frequenza. Quali sono le lunghezze delle due canne?
25. Si produce una condizione di risonanza in un tubo con un diapason di frequenza f . Scrivere un'espressione per la lunghezza del tubo tale da farlo risuonare nel suo n -esimo modo, se il tubo è (a) aperto a entrambe le estremità e (b) chiuso a un'estremità?
26. Non mettere nulla nelle tue orecchie! Fai una stima della lunghezza del tuo canale auricolare, dalla sua apertura all'esterno dell'orecchio fino al timpano. Se consideri il canale come un tubo aperto a un estremo e chiuso all'altro, per quale frequenza fondamentale, approssimativamente, ti aspetti che il tuo udito sia più sensibile? Spiega perché puoi udire specialmente suoni deboli intorno a questa frequenza.
27. La cabina di una doccia misura 86.0 cm \times 86.0 cm \times 210 cm. Se cantate in una doccia, quali frequenze risulteranno esaltate (per risonanza) assumendo che la cabina si comporti come un tubo chiuso a entrambi gli estremi? Si assuma che la voce umana abbia un intervallo di frequenze tra 130 e 2000 Hz. La velocità del suono nella cabina calda della doccia sia 355 m/s.
28. Un tubo aperto lungo 0.400 m è posto verticalmente in un secchio cilindrico, quasi a toccare il fondo del secchio, la cui area è 0.100 m². Dell'acqua viene versata lentamente nel secchio finché un diapason di frequenza 440 Hz, tenuto sopra il tubo, produce una risonanza. Trovare la massa dell'acqua nel secchio in questo istante.
29. Dell'acqua viene pompata dentro un lungo cilindro

al tasso di 18.0 cm³/s. Il raggio del cilindro è 4.00 cm, e sulla parte superiore aperta del cilindro vi è un diapason che vibra alla frequenza di 200 Hz. Quando l'acqua sale, quanto tempo passa fra due risonanze consecutive?

30. Dell'acqua viene pompata dentro un lungo cilindro con un tasso del flusso volumico R . Il raggio del cilindro è r (cm), e all'estremità superiore aperta del cilindro vi è un diapason che vibra alla frequenza f . Quando l'acqua sale, quanto tempo passa fra due risonanze consecutive?
31. Un pezzo di tubo metallico ha la lunghezza giusta affinché quando esso è tagliato in due pezzi, le loro frequenze di risonanza più basse siano 256 Hz per uno e 440 Hz per l'altro. (a) Quale frequenza di risonanza avrebbe prodotto l'originaria lunghezza del tubo, e (b) quanto era lungo il pezzo originario?
32. Un pezzo di tubo di cartone, chiuso un estremo, è della lunghezza giusta affinché quando esso viene tagliato in due pezzi (diversi), le loro frequenze di risonanza siano 256 Hz per il pezzo chiuso a un estremo e 440 Hz per il pezzo aperto ai due estremi. (a) Quale frequenza di risonanza dovrebbe essere prodotta dall'originario tubo di cartone, e (b) quanto era lungo il pezzo originario?

Paragrafo 14.5 Battimenti: interferenza temporale (Facoltativo)

33. In certi intervalli di frequenze nella tastiera di un pianoforte, più corde della stessa nota sono accordate insieme per aumentare il volume del suono. Ad esempio, la nota a 110 Hz ha due corde così accordate. Se una corda scivola dalla sua tensione normale di 600 N a 540 N, quale frequenza di battimento si sentirà quando le due corde sono percosse simultaneamente?
34. Uno studente tiene in mano un diapason che oscilla a 256 Hz. Egli cammina verso una parete a una velocità costante di 1.33 m/s. (a) Quale frequenza di battimenti osserva tra il diapason e la sua eco? (b) Quanto velocemente deve camminare allontanandosi dalla parete per osservare una frequenza di battimenti di 5.00 Hz?
35. Un flauto è progettato per suonare una frequenza di 261.6 Hz, il DO centrale, quando tutti i buchi sono coperti e la temperatura è 20.0°C. (a) Si consideri il flauto come un tubo aperto alle due estremità; trovare la lunghezza del flauto, assumendo che il DO centrale sia la fondamentale. (b) Un secondo suonatore in una stanza vicina più fredda suona pure il DO centrale su un flauto identico. Si ode un battimento di frequenza 3.00 Hz. Qual è la temperatura della stanza? La velocità del suono in aria è descritta da

$$v = (331 \text{ m/s}) \sqrt{1 + \frac{T}{273^\circ}}$$

dove T è la temperatura Celsius.

Problemi generali

36. Due altoparlanti sono posti su una parete a distanza di 2.00 m. Un ascoltatore sta di fronte a uno degli altoparlanti a 3.00 m dalla parete. Gli altoparlanti sono azionati da un unico oscillatore a una frequenza di 300 Hz. (a) Qual è la differenza di fase tra le due onde quando raggiungono l'ascoltatore? (b) Qual è la frequenza più prossima a 300 Hz alla quale l'oscillatore può essere aggiustato in modo tale che l'osser-vatore sentirà un suono d'intensità minima?
37. Su una marimba, la sbarretta di legno che suona una nota quando viene percosso vibra come un'onda stazionaria trasversale con 3 ventri e 2 nodi. La frequenza più bassa prodotta da una sbarretta lunga 40.0 cm è 87.0 Hz. (a) Trovare la velocità delle onde trasversali sulla sbarretta. (b) Il volume e la durata del suono emesso sono amplificati da una canna risonante sospesa verticalmente sotto il centro della sbarretta. Se la canna è aperta solamente nel fondo e la velocità del suono è 340 m/s, qual è la lunghezza della canna richiesta per risuonare con la sbarretta?



(Problema 37) Suonatori di marimba a Mexico City.
(Murray Greenberg)

38. Un altoparlante nella parte anteriore di una stanza e un altro identico nel fondo della stessa sono alimentati da uno stesso oscillatore a 456 Hz. Uno studente cammina a una velocità uniforme di 1.50 m/s attraversando la lunghezza della stanza. Quanti battimenti al secondo sente lo studente?
39. Due fischi di treni hanno la stessa frequenza di 180 Hz. Quando un treno è fermo in stazione e suona il suo fischi, si sente una frequenza di battimenti di 2.00 Hz da un treno in movimento. Quali due possibili velocità e direzioni può avere il treno in movimento?
40. Jane aspetta su un marciapiede della stazione, mentre due treni si avvicinano dalla stessa direzione e alla stessa velocità di 8.00 m/s. Ambedue i treni suonano i

loro fischi (che hanno la stessa frequenza), e uno dei due treni è a una certa distanza più indietro dell'altro. Dopo che il primo treno sorpassa Jane, ma prima che il secondo treno la sorpassi, essa ode dei battimenti di frequenza 4.00 Hz. Qual è la frequenza dei fischi dei treni?

41. Una corda (massa = 4.80 g, lunghezza = 2.00 m, tensione = 48.0 N), fissa a entrambi gli estremi, vibra nella sua seconda armonica. Qual è la lunghezza d'onda in aria del suono emesso dalla corda vibrante?
42. Una canna aperta alle due estremità ha una frequenza fondamentale di 300 Hz quando la velocità del suono in aria è 333 m/s. (a) Qual è la lunghezza della canna? (b) Qual è la frequenza della seconda armonica quando la temperatura dell'aria è tale che la velocità del suono nella canna è 344 m/s?
43. Una corda con una massa di 8.00 g e una lunghezza di 5.00 m ha un estremo fissato a una parete; l'altro estremo, tramite una puleggia, tiene sospesa una massa di 4.00 kg. Se la corda viene pizzicata, qual è la frequenza fondamentale di vibrazione?
44. In un accordo in maggiore su una scala musicale fisica, le frequenze stanno nei rapporti 4:5:6:8. Una serie di canne, chiuse a un estremo, devono essere tagliate in modo che quando suonano nel loro modo fondamentale, riproducano l'accordo in maggiore. (a) Quali sono i rapporti delle lunghezze delle canne? (b) Quanto devono essere lunghe le canne se la frequenza più bassa dell'accordo è 256 Hz? (c) Quali sono le frequenze di questo accordo?
45. Due fili sono saldati insieme. I fili sono dello stesso materiale, ma uno ha il diametro doppio dell'altro. Essi sono sottoposti a una tensione di 4.60 N. Il filo sottile ha una lunghezza di 40.0 cm e una densità lineare di massa di 2.00 g/m. Il sistema è vincolato a entrambi gli estremi e vibra in modo tale che due ventri siano presenti con il modo centrale posizionato proprio alla saldatura. (a) Qual è la frequenza di vibrazione? (b) Quanto è lungo il filo grosso?
46. Due corde identiche, fissate ciascuna a entrambi gli estremi sono poste l'una accanto all'altra. Se la corda A comincia a oscillare nella sua frequenza fondamentale, si osserva che la corda B comincia a vibrare nella sua terza ($n = 3$) armonica. Determinare il rapporto della tensione della corda B e della tensione della corda A.
47. Un'onda stazionaria è prodotta in una corda a lunghezza e tensione variabile da un oscillatore di frequenza essa pure variabile. Quando la frequenza dell'oscillatore è f , in una corda di lunghezza L e tensione F ci sono n ventri. (a) Se la lunghezza della corda è raddoppiata, di quale fattore bisognerebbe cambiare la frequenza per avere lo stesso numero di ventri? (b) Se la frequenza e la lunghezza rimangono costanti, quale tensione produrrà $n + 1$ ventri? (c) Se

la frequenza è triplicata e la lunghezza dimezzata, di quale fattore dovrebbe essere cambiata la tensione per produrre un numero di ventri due volte maggiore?

48. Un rivelatore radar di velocità di una macchina fa uso dell'effetto Doppler dovuto alle microonde riflesse dalla vettura in moto, per mezzo dei battimenti tra l'onda ricevuta e l'onda trasmessa e misurandone la differenza. L'effetto Doppler per la luce è dato da

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

dove f_0 è la frequenza trasmessa, c la velocità della luce (3×10^8 m/s) e v la velocità relativa dei due oggetti. (a) Mostrare che l'onda riflessa verso la sorgente ha una frequenza data da

$$f = f_0 \frac{(c+v)}{(c-v)}$$

(b) Mostrare che l'espressione per la frequenza di battimenti delle microonde può essere scritta come $f_b = 2v/\lambda$. (Poiché la frequenza di battimenti è minore della frequenza trasmessa, si può usare l'approssimazione $f + f_0 = 2f_0$). (c) Quale frequenza di battimenti si misura per una velocità di 30 m/s se le microonde hanno una frequenza di 10.0 GHz (1 GHz = 10^9 Hz). (d) Se la frequenza di battimenti è misurata con un errore di ± 5 Hz con quale errore si misura la velocità?

49. Se due frequenze di risonanza consecutive di una canna d'organo sono 0.550 kHz e 0.650 kHz, calcolare la frequenza fondamentale e la lunghezza della canna. (Si usi $v = 340$ m/s).
50. Un filo lungo 2.00 m e di massa 0.0100 kg è fissato ad ambedue gli estremi e vibra nel modo più semplice sottoposto a una tensione di 200 N. Quando un diaframma viene posto vicino al filo, si ode un battimento di frequenza 5.00 Hz. (a) Qual è la frequenza (frequenze) del diaframma? (b) Quale dovrebbe essere la tensione del filo per far scomparire i battimenti?

51. La funzione d'onda per un'onda stazionaria è data nell'Equazione 14.3 come $y = 2A \sin kx \cos \omega t$. (a) Riscrivere questa funzione d'onda in funzione della lunghezza d'onda λ e della velocità dell'onda v . (b) Scrivere la funzione d'onda della più semplice onda stazionaria della corda tesa di lunghezza L . (c) Scrivere la funzione d'onda per la seconda armonica. (d) Generalizzare questi risultati e scrivere la funzione d'onda per la n -sima risonanza.

Problemi al calcolatore

- S1. Il Foglio Elettronico 14.1 somma due onde a un certo

istante di tempo t . La funzione d'onda risultante è

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \phi_2)$$

Sommare due onde che viaggiano in versi opposti avanti la stessa lunghezza d'onda, la stessa fase e la stessa velocità. (a) Usare $A_1 = A_2 = 0.10$ m, $\omega_1 = -\omega_2 = 3.0$ rad/s, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, e $k_1 = k_2 = 2.0$ rad/m. Osservare il grafico associato. Scegliere diversi valori di t per osservare il tempo di evoluzione della funzione d'onda risultante. Si ottengono onde stazionarie? (b) Ripetere la parte (a) usando $A_1 = 0.10$ m, $A_2 = 0.20$ m.

- S2. Usare il Foglio Elettronico 14.1 per sommare onde che differiscono soltanto in fase. (a) Scegliere $A_1 = A_2 = 0.10$ m, $\omega_1 = \omega_2 = 2.5$ rad/s, $k_1 = k_2 = 1.0$ rad/m, $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2$, e π . Osservare il grafico associato. Per quali valori di ϕ_2 si ottiene una interferenza costruttiva? Un'interferenza distruttiva? (b) Ripetere la parte (a) usando $A_2 = 0.20$ m.

- S3. Usare il Foglio Elettronico 14.1 per sommare onde con diverse lunghezze d'onda. (a) Scegliere $A_1 = A_2 = 0.10$ m, $\omega_1 = \omega_2 = 3.0$ rad/s, $k_1 = 2.0$ rad/m, $k_2 = 1.0$ rad/m e $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Osservare il grafico associato. (b) Ripetere la parte (a) con $k_2 = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e 10. Esaminare il grafico in ciascun caso. Spiegare ciò che appare nel grafico.

- S4. Tre onde con la stessa frequenza, lunghezza d'onda e ampiezza, viaggiano nello stesso verso. Ciascuna differisce in fase in modo tale che $(\phi_2 - \phi_1) = (\phi_3 - \phi_2) = \Delta\phi$. Modificare il Foglio Elettronico 14.1 per sommare le tre onde a un certo t fissato. Calcolare la funzione d'onda risultante per $t = 0.0, 1.0$ e 2.0 s. Usare $A_1 = A_2 = A_3 = 0.050$ m, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 2.5$ rad/s, e $k_1 = k_2 = k_3 = 1.0$ rad/m. Scegliere $\Delta\phi = \pi/6$. Osservare il grafico associato. Ripetere per diversi valori di $\Delta\phi$.

- S5. Mettere a punto un foglio elettronico o un programma per computer per sommare due onde di frequenze diverse:

$$y_1 = y_0 \cos 2\pi f_1 t \quad y_2 = y_0 \cos 2\pi f_2 t$$

Se le due frequenze sono vicine, si produrranno dei battimenti. Il tuo programma è in grado di mostrare i battimenti? Dai tuoi risultati numerici, come si può correlare la frequenza di battimento con le frequenze delle due onde?

- S6. Il teorema di Fourier afferma che ogni onda periodica di frequenza f , non importa quanto complessa, si può esprimere come la somma di funzioni sinusoidali pari e dispari. Cioè,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

dove $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione fondamentale. (a) Usare $A_1 = 1$, $A_2 = 1/2$, $A_3 = 1/3$, e così via. Tutte le ϕ sono zero. (b) Usare $A_1 = 1$, $A_3 = 1/3$, $A_5 = 1/5$, e così via. Tutte le A pari e tutte le ϕ sono zero. Mettere a punto un foglio elettronico o un programma per computer per calcolare questa somma. Dovresti progettare il tuo foglio elettronico o il tuo programma affinché il

numero di termini nella somma si possa facilmente specificare. Partire con il primo termine ($n = 1$). Quindi far ripartire il calcolo con un maggior numero di termini nella somma ($n = 2, 3, 4, \dots, 20$). Fare un grafico della somma in modo che vengano mostrati uno o più periodi. Si osservi la forma d'onda che viene costruita quando si aggiungono più termini.

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Nell'istante in cui non c'è spostamento della corda, la corda comunque si muove. Quindi, l'energia in questo istante è immagazzinata completamente come energia cinetica dell'intera corda.
- Al centro della corda, vi è un nodo per la seconda armonica, così come per ogni armonica di numero pari. Ponendo il dito al centro e pizzicando, il chitarrista elimina ogni armonica che non ha un nodo in questo punto, ossia tutte le armoniche dispari. Le armoniche pari possono vibrare relativamente libere con il dito al centro poiché esse non subiscono spostamenti in questo punto. Il risultato è un suono con un mescolamento di frequenze che corrispondono a multipli interi della seconda armonica, che è un'ottava più alta della fondamentale.
- La corda dell'arco viene allontanata dall'equilibrio e rilasciata, in modo simile a quello con cui una corda di chitarra viene tirata e rilasciata quando è pizzicata. Quindi, nella corda dell'arco si ecciteranno onde stazionarie. Se la freccia lascia la corda esattamente al centro, allora verranno eccitate una serie di armoniche dispari. Le armoniche pari non saranno eccitate poiché esse hanno un nodo nel punto dove la corda manifesta il suo massimo spostamento.
- Una variazione della temperatura causa una variazione della velocità del suono e, quindi, della frequenza fondamentale. La velocità del suono per le frequenze udibili in atmosfera aperta è funzione soltanto della temperatura e non dipende dalla pressione. Quindi, non ci sarà alcun effetto sulla frequenza fondamentale per variazioni della pressione atmosferica.
- Quando le bottiglie vengono colpiti, si stabiliscono vibrazioni di onde stazionarie nel materiale vetroso delle bottiglie. Le frequenze di queste vibrazioni sono determinate dalla tensione del vetro e dalla massa che fa da carico al vetro. Quando il livello dell'acqua aumenta, la massa di carico del vetro aumenta, poiché il vetro è a contatto con l'acqua. Questo aumento della massa di carico fa diminuire la frequenza. D'altra parte, soffiando nella bottiglia si stabilisce una vibrazione di un'onda stazionaria nell'aria della cavità sopra l'acqua. Quando il livello dell'acqua aumenta, la lunghezza di questa cavità diminuisce e la frequenza aumenta.
- Se prendi la gomma da masticare e la incollvi su uno dei due rebbi del diapason misterioso, esso abbassera la sua frequenza, a causa dell'aumento di massa. Ora, quando i due diapason funzionano insieme, la frequenza di battimento sarà diversa. Se la frequenza di battimento sarà più bassa, allora i due diapason sono più vicini in frequenza, quindi il diapason misterioso deve essere di frequenza più alta rispetto a quello standard. Se la frequenza di battimento sarà più alta, le frequenze differiranno di più, e il diapason misterioso dovrà avere una frequenza più bassa. Per questa spiegazione si assume che il pezzo di gomma da masticare sia piccolo abbastanza da far spostare la frequenza del diapason per meno di 4 Hz.

15

Meccanica dei fluidi

- 15.1 Pressione
- 15.2 Variazione della pressione con la profondità
- 15.3 Misure di pressione
- 15.4 Forze di galleggiamento e principio di Archimede
- 15.5 Dinamica dei fluidi
- 15.6 Linee di corrente ed equazione di continuità
- 15.7 Teorema di Bernoulli
- 15.8 Altre applicazioni del teorema di Bernoulli (Facoltativo)
- 15.9 Energia eolica (Facoltativo)
- .5.10 Viscosità (Facoltativo)
- 15.11 Moto turbolento (Facoltativo)

La materia viene abitualmente considerata in uno dei tre stati: solido, liquido, o gassoso. L'esperienza quotidiana ci dice che un solido ha una forma e un volume definiti. Un mattone mantiene la sua forma familiare e le sue dimensioni un giorno dopo l'altro. Sappiamo pure che un liquido ha un volume definito ma non una forma. Infine, un gas libero non ha né volume né forma definiti. Queste definizioni ci aiutano a rappresentare gli stati della materia, ma sono in qualche modo degli artifici. Per esempio, l'asfalto e la plastica sono normalmente considerati solidi, ma in lunghi periodi di tempo tendono a scorrere come dei liquidi. Analogamente, molte sostanze possono essere solide, liquide, o gassose (oppure una combinazione di queste), in funzione della temperatura e della pressione. In generale, il tempo necessario a una certa sostanza per variare la sua forma in risposta a una forza esterna determina se noi trattiamo la sostanza come un solido, un liquido, oppure un gas.

Un fluido è un insieme di molecole che sono sistamate in modo casuale e vengono tenute insieme da deboli forze di coesione e da forze esercitate dalle pareti del contenitore. Sia i liquidi che i gas sono fluidi. Nella nostra trattazione della meccanica dei fluidi, vedremo che non ci sarà bisogno di alcun principio fisico nuovo per spie-

► **Un subacqueo gioca con un polpo presso Poor Knights Island, Nuova Zelanda. Quando il sub scende a grandi profondità, la pressione dell'acqua aumenta al di sopra della pressione atmosferica, e la pressione interna del corpo aumenta pure per mantenere l'equilibrio. I subacquei sono capaci di nuotare a profondità maggiori di 300 m. (Darryl Torckler/Tony Stone Images)**



gare effetti quali le forze di galleggiamento su un corpo sommerso e la spinta dinamica sulle ali di un aeroplano. Considereremo, per prima cosa, un fluido in equilibrio e deriveremo un'espressione per la pressione esercitata da un fluido in funzione della sua densità e profondità. Tratteremo, poi, i fluidi in moto, una branca chiamata dinamica dei fluidi. Un fluido in moto può essere descritto per mezzo di un modello nel quale vengono fatte certe assunzioni semplificatrici. Useremo questo modello per analizzare alcune situazioni di importanza pratica. Un risultato importante noto come **teorema di Bernoulli** ci consentirà di determinare le relazioni fra la pressione, la densità, e la velocità in ogni punto di un fluido.

15.1 • PRESSIONE

Lo studio della meccanica dei fluidi coinvolge la densità di una sostanza, definita come la sua massa per unità di volume. Per questa ragione, la Tabella 15.1 elenca la densità di varie sostanze. Questi valori variano poco con la temperatura, poiché il volume di una sostanza varia con la temperatura (come vedremo nel Cap. 16). Si noti che in condizioni standard (0°C e pressione atmosferica) le densità dei gas sono circa 1/1000 delle densità dei solidi e dei liquidi. Questa differenza implica che in un gas lo spazio medio molecolare, sotto queste condizioni, è circa dieci volte maggiore, lungo ciascuna dimensione, di quello di un solido o di un liquido.

I fluidi non reagiscono alle forze di taglio, e quindi le forze che possono esercitarsi su un oggetto immerso in un fluido sono soltanto quelle che tendono a comprimere l'oggetto. La forza esercitata da un fluido su un oggetto è sempre perpendicolare alle superfici dell'oggetto, come viene mostrato in Figura 15.1.

La pressione in un punto specifico di un fluido si può misurare con uno strumento come il dispositivo mostrato in Figura 15.2. Il dispositivo consiste in un cilindro in cui è stato fatto il vuoto che contiene un pistone leggero collegato a una molla. Quando lo strumento viene immerso nel fluido, il fluido preme il pistone verso l'interno e comprime la molla finché la forza verso l'interno applicata dal fluido viene equilibrata dalla forza verso l'esterno esercitata dalla molla. La pressione del fluido si può misurare direttamente se la molla è stata preventivamente calibrata. Ciò si ottiene applicando una forza nota per comprimere la molla di una data quantità.

TABELLA 15.1 Densità di alcune sostanze comuni

Sostanza	ρ (kg/m^3) ^a	Sostanza	ρ (kg/m^3) ^a
Ghiaccio	0.917×10^3	Acqua	1.00×10^3
Alluminio	2.70×10^3	Acqua di mare	1.03×10^3
Ferro	7.86×10^3	Alcool etilico	0.806×10^3
Rame	8.92×10^3	Benzene	0.879×10^3
Argento	10.5×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Piombo	11.3×10^3	Aria	1.29
Oro	19.3×10^3	Ossigeno	1.43
Platino	21.4×10^3	Idrogeno	8.99×10^{-2}
Glicerina	1.26×10^3	Elio	1.79×10^{-1}

^a Tutti i valori corrispondono a condizioni di pressione e temperatura standard (STP). Per convertire in grammi su centimetro cubo, moltiplicare per 10^{-3} .

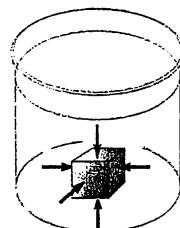


Figura 15.1 La forza esercitata dal fluido su un corpo immerso è perpendicolare in ogni punto alla superficie del corpo. La forza del fluido sulle pareti del recipiente è perpendicolare alle pareti in ogni punto.

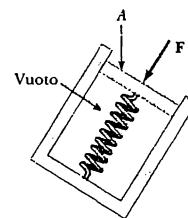


Figura 15.2 Un semplice strumento per misurare la pressione.

Se F è il valore della forza del pistone e A è l'area del pistone, allora la pressione media P del fluido, al livello a cui lo strumento è stato immerso è definita dal rapporto tra forza e area:

Definizione di pressione •



Le racchette evitano che la persona affondi nella neve soffice distribuendo il peso della persona su una superficie più grande, riducendo così la pressione sulla superficie della neve. (Earl Young/ FPG)

Per definire la pressione in uno specifico punto, consideriamo un fluido che agisca sul dispositivo mostrato in Figura 15.2. Se la forza normale esercitata dal fluido su un elemento di superficie di area δA che contiene il punto in questione è F , allora la pressione in questo punto è

$$P = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{F}{\delta A} = \frac{dF}{dA} \quad [15.2]$$

Come vedremo nel prossimo paragrafo, la pressione in un fluido varia con la profondità. Quindi, per ottenere la forza totale agente su una parete piana di un contenitore, dobbiamo integrare l'Equazione 15.2 su tutta la superficie.

Poiché la pressione è una forza per area unitaria, essa ha le dimensioni di N/m^2 nel sistema SI. Un altro nome per l'unità di pressione nel sistema SI è pascal (Pa).

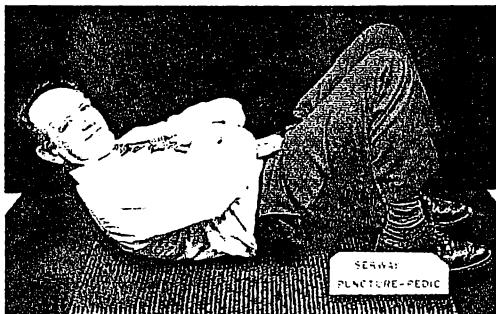
$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 \quad [15.3]$$

Fisica ragionata 1

L'intrepido professore di fisica, dopo un'estenuante lezione, si rilassa con un sonnellino su un letto di chiodi, come nella fotografia. Come è possibile ciò?

Ragionamento Se tenti di far sopportare l'intero peso del tuo corpo su un singolo chiodo, la pressione sul tuo corpo è uguale al tuo peso diviso per la piccolissima area della punta del chiodo. Questa pressione è sufficientemente grande per perforare la pelle. Tuttavia, se tu distribuisci il tuo peso su parecchie centinaia di chiodi, come sta facendo il professore, la pressione si riduce considerevolmente poiché la superficie che sostiene il tuo peso è l'area totale di tutti i chiodi in contatto col tuo corpo. (Nota che distendersi su un letto di chiodi è molto più confortevole che star seduto su un letto di chiodi. Stare in piedi su un letto di chiodi senza scarpe non è consigliabile).

(Fisica ragionata 1) (Jim Lehman)



Fisica ragionata 2

Le ventose si possono usare per trattenere degli oggetti sulle superfici. Perché gli astronauti non usano le ventose per trattenere gli oggetti sulle superfici esterne dello space shuttle?

Ragionamento Il funzionamento di una ventosa dipende dal fatto che l'aria viene espulsa dalla ventosa quando essa viene premuta contro una superficie. Quando, poi, viene rilasciata essa tende a tornare indietro per un po', causando una diminuzione di pressione del gas rimasto intrappolato. Quindi, la differenza fra la pressione atmosferica all'esterno della ventosa e la pressione ridotta all'interno fornisce una forza risultante che spinge la ventosa contro la superficie. Per gli astronauti in orbita attorno alla Terra, non vi è aria all'esterno della nave spaziale. Quindi, se una ventosa fosse pressata contro una superficie esterna all'astronave, la pressione differenziale sarebbe nulla.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Una donna che calza delle scarpe con tacco a spillo viene invitata in una casa in cui la cucina ha un pavimento coperto in vinile. Perché dovrebbe esserne interessata la padrona di casa?

ESERCIZIO 1 Fare una stima della densità del *nucleo* di un atomo. Questo risultato che cosa suggerisce intorno alla struttura della materia? (Usare il fatto che la massa del protone è uguale a 1.67×10^{-27} kg e che il raggio è approssimativamente 10^{-15} m).

Risposta 4.0×10^{17} kg/m³; la materia è per la maggior parte costituita da spazio vuoto.

15.2 • VARIAZIONE DELLA PRESSIONE CON LA PROFONDITÀ

Come i subacquei sanno bene, la pressione nel mare o in un lago aumenta quando il sub nuota verso il fondo. Analogamente, la pressione atmosferica decresce con l'altitudine. Per questa ragione, gli aerei che volano a grandi altezze devono pressurizzare le cabine.

Mostreremo, ora, come la pressione in un liquido aumenti linearmente con la profondità. Consideriamo un liquido di densità ρ a riposo e aperto all'atmosfera, come in Figura 15.3. Scegliamo un campione del liquido contenuto entro un immaginario cilindro di area di base A che si estende dalla superficie del liquido fino a profondità h . La pressione esercitata dal fluido sulla superficie inferiore è P , e la pressione sulla faccia superiore del cilindro è la pressione atmosferica, P_0 . Quindi, la forza verso l'alto esercitata dal liquido sul fondo del cilindro è PA , e la forza verso il basso esercitata dall'atmosfera sulla superficie superiore del cilindro è P_0A . Poiché la massa del liquido nel cilindro è $\rho V = \rho Ah$, il peso del fluido nel cilindro è $w = \rho g V = \rho g Ah$. Poiché il cilindro è in equilibrio, la forza verso l'alto sul fondo deve essere maggiore della forza verso il basso sulla faccia superiore del campione per poter sostenere il suo peso:

$$PA - P_0A = \rho g Ah$$

ossia

$$P = P_0 + \rho gh$$

[15.4]

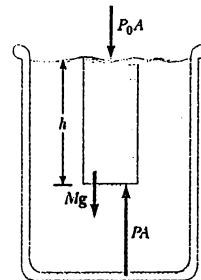


Figura 15.3 La variazione di pressione in un fluido con la profondità. La forza risultante sul volume d'acqua entro la zona ombreggiata deve essere zero.

• *Variazione della pressione con la profondità*

Cioè, la pressione assoluta P a una profondità h al di sotto della superficie di un liquido aperto alla pressione atmosferica è maggiore della pressione atmosferica di una quantità ρgh .

Nei nostri calcoli e nei problemi di fine capitolo, assumeremo abitualmente che la pressione atmosferica sia

$$P_0 = 1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

L'Equazione 15.4 conferma che la pressione è la stessa in tutti i punti che hanno la stessa profondità, indipendentemente dalla forma del contenitore.

Sulla base del fatto che la pressione in un liquido dipende soltanto dalla profondità, ogni aumento della pressione alla superficie deve essere trasmesso in ogni punto del fluido. Questa legge fu scoperta per primo dallo scienziato francese Blaise Pascal (1623-1662) ed è chiamata legge di Pascal: una variazione di pressione applicata a un liquido chiuso viene trasmessa integralmente in ogni punto del liquido e alle pareti del contenitore.

Un'importante applicazione della legge di Pascal è la pressa idraulica, illustrata in Figura 15.4. Una forza F_1 viene applicata a un piccolo pistone di area A_1 . La pressione viene trasmessa attraverso un liquido a un grande pistone di area A_2 . Poiché la pressione è la stessa in ambedue i lati, vediamo che $P = F_1/A_1 = F_2/A_2$. Quindi, la forza F_2 è maggiore della forza F_1 per un fattore moltiplicativo A_2/A_1 . I freni idraulici, i sollevatori delle macchine, i martinetti idraulici e i sollevatori fanno uso di questa legge.

Fisica ragionata 3

La pressione del sangue viene normalmente misurata con la manichetta dello sfigomanometro attorno al braccio. Supponiamo che la pressione sanguigna venisse misurata con la manichetta attorno al polpaccio della gamba di una persona che sta in piedi. La lettura della pressione sanguigna sarebbe la stessa di quella fatta al braccio?

Ragionamento La pressione sanguigna misurata al polpaccio sarebbe maggiore di quella misurata al braccio. Se immaginiamo che il sistema vascolare del corpo sia un recipiente che contiene un liquido (il sangue), la pressione nel liquido aumenterà con la profondità. Il sangue al polpaccio è più profondo nel liquido di quello al braccio e si trova a una pressione maggiore.

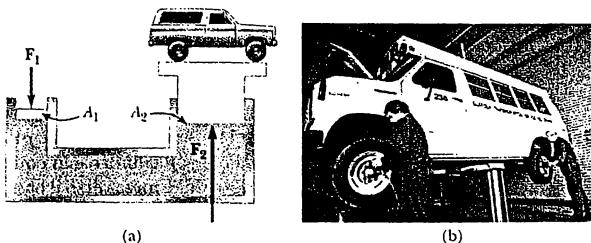
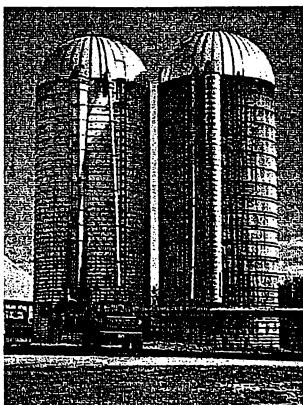


Figura 15.4 (a) Schema di una leva idraulica. Poiché l'aumento della pressione è lo stesso sia a destra che a sinistra, una piccola forza F_1 a sinistra produce una forza F_2 molto più grande a destra. (b) Un autobus in riparazione viene sostenuto da un elevatore idraulico in una officina. (Superstock)

(Problema concettuale 2) (*Henry Leap*)

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Un tipico silo di una fattoria ha molti collari fissati attorno al suo perimetro come viene mostrato nella fotografia. Perché lo spazio fra collari successivi è minore nelle porzioni più basse del silo?

Esempio 15.1 L'elevatore per auto

In un elevatore per auto, utilizzato in una stazione di servizio, dell'aria compressa esercita una forza su un piccolo pistone di raggio $R = 5.00 \text{ cm}$. Questa pressione viene trasmessa a un secondo pistone di raggio 15.0 cm . Quale forza deve venire esercitata dall'aria compressa per sollevare un'auto che pesa $13\,300 \text{ N}$? Quale pressione produrrà questa forza?

Soluzione Poiché la pressione esercitata dall'aria compressa viene trasmessa invariata attraverso il fluido, otteniamo

$$F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) F_2 = \frac{\pi (5.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{\pi (15.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} (1.33 \times 10^4 \text{ N})$$

$$= 1.48 \times 10^3 \text{ N}$$

La pressione, che questa forza produrrà, è data da

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.48 \times 10^3 \text{ N}}{\pi (5.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 1.88 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Questa pressione è approssimativamente il doppio della pressione atmosferica.

Notiamo che il lavoro fornito (il lavoro svolto da F_1) è eguale al lavoro prodotto (il lavoro svolto da F_2) in modo che l'energia si conservi.

Esempio 15.2 La forza su una diga

Dell'acqua arriva a un'altezza H di una diga di lunghezza w (Fig. 15.5). Determinare la forza risultante sulla diga.

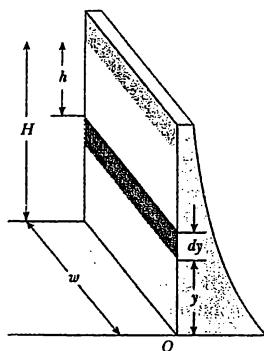
Ragionamento Possiamo calcolare la forza agente sulla diga semplicemente moltiplicando l'area per la pressione, ma la pressione varia con la profondità. Questo problema si può risolvere trovando la forza dF dell'agente su una stretta striscia orizzontale a profondità h e quindi integrando l'espressione per trovare la forza totale sulla diga.

Soluzione La pressione a una profondità h al di sotto della superficie nella posizione ombreggiata è

$$P = \rho gh = \rho g (H - y)$$

(Abbiamo trascurato la pressione atmosferica poiché agisce da entrambi i lati della diga). Usando l'Equazione 15.2, ricaviamo la forza nella striscia ombreggiata

$$dF = P dA = \rho g (H - y) w dy$$



Perciò la forza totale sulla diga è

$$F = \int P dA = \int_0^H \rho g (H-y) w dy = \frac{1}{2} \rho g w H^2$$

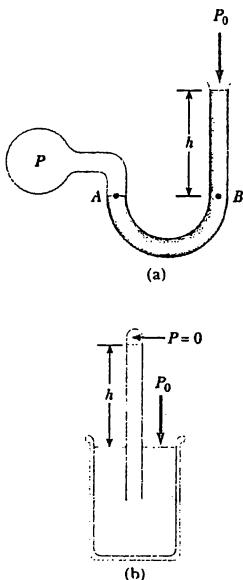
Si osservi che la diga è realizzata in modo tale che il suo spessore aumenti con la profondità (Fig. 15.5), poiché la pressione cresce con la profondità.

Esercizio 2 Usare il fatto che la pressione aumenta linearmente con la profondità per trovare la pressione media sulla diga. Risposta $\frac{1}{2} \rho g H$

Figura 15.5 (Esempio 15.2). La forza totale agente su una diga deve essere ottenuta dall'espressione $F = \int P dA$ dove dA è l'area della striscia scura.

ESERCIZIO 3 Qual è la forza idrostatica sulla diga del Grand Coulee se l'acqua nel bacino è profonda 150 m e la diga è larga 1200 m? Risposta 1.32×10^{11} N

ESERCIZIO 4 In alcune zone, le lastre di ghiaccio della Groenlandia sono spesse 1.0 km. Stimare la pressione sul suolo sotto il ghiaccio ($\rho_{\text{ghiaccio}} = 920 \text{ kg/m}^3$). Risposta $9 \times 10^6 \text{ Pa}$



15.3 • MISURE DI PRESSIONE

Uno strumento semplice per la misura della pressione è il manometro a tubo aperto illustrato in Figura 15.6a. Un'estremità di un tubo a U che contiene del liquido è aperta all'atmosfera e l'altra estremità è collegata a un sistema con pressione incognita P . La pressione nel punto B è $P_0 + \rho gh$, dove ρ è la densità del fluido; la pressione in B è uguale alla pressione in A , che è anche la pressione incognita. Concludiamo perciò che $P = P_0 + \rho gh$. La pressione P è chiamata pressione assoluta, mentre $P - P_0$ è chiamata pressione relativa; per esempio, la pressione che si misura nelle gomme di una bicicletta è una pressione relativa.

Un altro strumento utilizzato per la misura della pressione è il comune barometro, inventato da Evangelista Torricelli (1608-1647). Un lungo tubo chiuso a un'estremità viene riempito con mercurio e poi rovesciato in una bacina piena di mercurio (Fig. 15.6b). All'estremità chiusa del tubo si forma un vuoto spinto e perciò la pressione può essere considerata zero. Ne deriva che $P_0 = \rho gh$ dove ρ è la densità del mercurio e h l'altezza della colonna di mercurio. La pressione di una atmosfera è definita come la pressione equivalente a una colonna di mercurio di altezza 0.7600 m a 0°C con $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$. A questa temperatura il mercurio ha una densità di $13.595 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, perciò,

$$\begin{aligned} P_0 &= \rho gh = (13.595 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (9.80665 \text{ m/s}^2) (0.7600 \text{ m}) \\ &= 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 (\text{Pa}) \end{aligned}$$

Figura 15.6 Due strumenti per la misura della pressione: (a) il manometro a tubo aperto; (b) il barometro a mercurio.

15.4 • FORZE DI GALLEGGIAMENTO E PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Il principio di Archimede può essere esposto nel modo seguente:

Ogni corpo immerso parzialmente o totalmente in un fluido viene spinto verso l'alto da una forza uguale al peso del fluido spostato dal corpo.

Chiunque ha sperimentato il principio di Archimede; ad esempio, ricordate come sia relativamente facile sollevare qualcuno se si trova in una piscina mentre ciò può risultare difficolto a terra. Evidentemente l'acqua fornisce un sostegno parziale a qualsiasi oggetto che vi si trova immerso. Diciamo che un oggetto che si trova in un fluido viene da questo spinto verso l'alto e questa forza viene chiamata **spinta di Archimede** (o forza di galleggiamento). Secondo il principio di Archimede il valore della spinta è uguale al peso del fluido spostato dal corpo.

Il principio di Archimede può essere verificato nella seguente maniera: supponiamo di focalizzare la nostra attenzione sul volume cubico d'acqua nel contenitore di Figura 15.7. Questo cubo d'acqua è in equilibrio sotto l'azione di forze agenti su di esso; una di queste forze è la forza di gravità: cosa neutralizza questa forza rivolta verso il basso? Apparentemente, il resto dell'acqua all'interno del contenitore spinge il cubo verso l'alto e lo mantiene in equilibrio. In questo modo la spinta verso l'alto, B , sul cubo d'acqua è esattamente uguale in modulo al peso dell'acqua all'interno del cubo

$$B = w$$

Immaginiamo ora che il cubo d'acqua venga sostituito da un cubo d'acciaio delle stesse dimensioni. Qual è la spinta verso l'alto sul cubo d'acciaio? L'acqua che circonda il cubo si comporterà alla stessa maniera, sia che si tratti di un cubo d'acqua o di uno d'acciaio a subire la spinta verso l'alto; perciò la spinta verso l'alto, che agisce su un cubo d'acciaio è la stessa che agisce su un cubo d'acqua delle stesse dimensioni. Questo risultato si applica a un qualunque oggetto immerso, qualunque siano la sua forma, le sue dimensioni e la sua densità.

Dimostriamo ora in modo esplicito che le forze di galleggiamento sono uguali in modulo al peso del fluido spostato. La pressione sulla faccia inferiore del cubo in Figura 15.7 è maggiore della pressione sulla faccia superiore di una quantità $\rho_f gh$, dove con ρ_f si è indicata la densità del fluido e con h l'altezza del cubo. Poiché la differenza di pressione ΔP è uguale alla forza, dovuta alla spinta di Archimede, per unità d'area, cioè $\Delta P = B/A$, vediamo che $B = (\Delta P) \cdot (A) = \rho_f g h A = \rho_f g V$ dove V è il volume del cubo. Poiché la massa dell'acqua nel cubo è $M = \rho_f V$, si ottiene

$$B = w = \rho_f V g = Mg \quad [15.5]$$

dove w è il peso del fluido spostato.

Prima di procedere con gli esempi, è istruttivo paragonare le forze agenti su un oggetto completamente immerso in un fluido con quelle agenti su un oggetto galleggiante.

Caso I. Oggetto completamente immerso Quando un oggetto è *completamente* immerso in un fluido di densità ρ_f , la spinta di Archimede è data da $B = \rho_f V_0 g$, dove V_0 è il volume del corpo. Il peso di un oggetto, di densità ρ_0 , è $w = Mg =$

• Principio di Archimede

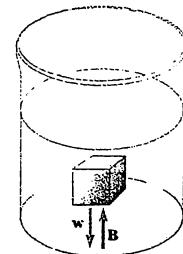


Figura 15.7 Le forze esterne agenti sul cubo d'acqua sono il suo peso w e la spinta B . In condizioni di equilibrio $B = w = mg$.



Archimede (287 - 212 a.C.)

Archimede, matematico, fisico e ingegnere greco, fu il più grande scienziato dell'antichità. Secondo la leggenda, il re Erone chiese ad Archimede di determinare se la corona reale fosse fatta di oro puro o invece vi fossero stati mescolati altri metalli. La determinazione doveva essere eseguita senza danneggiare la corona. Archimede, presumibilmente, arrivò alla soluzione mentre faceva un bagno, notando una parziale perdita di peso quando immergeva nell'acqua le braccia e le gambe. Secondo il racconto, egli fu così eccitato da questa sua grande scoperta che corse nudo attraverso le strade di Siracusa urlando "Eureka!" che in greco significa "Ho trovato!"

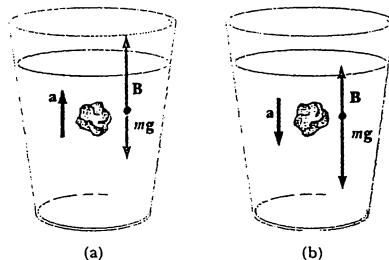
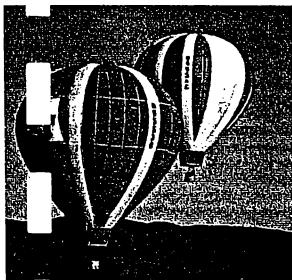


Figura 15.8 (a) Un corpo completamente immerso, con una densità minore di quella del fluido, subirà una forza risultante diretta verso l'alto. (b) Un corpo completamente immerso, con una densità maggiore di quella del fluido, affonderà.



Mongolfiera su Albuquerque, nel New Mexico. Poiché l'aria calda è meno densa dell'aria fredda, sulle mongolfiere viene generata una forza risultante verso l'alto.

(William Moriarity/Rainbow)

$\rho_0 V_0 g$, e la forza risultante agente sull'oggetto è $B - W = (\rho_f - \rho_0) V_0 g$. Se la densità del corpo è minore di quella del fluido (Fig. 15.8a), esso accelererà verso l'alto. Al contrario, se il corpo ha una densità maggiore di quella del fluido, affonderà (Fig. 15.8b).

Caso II. Corpo galleggiante Si consideri un corpo, in equilibrio statico, che galleggi in un fluido, cioè che sia parzialmente immerso. La spinta di Archimede in questo caso è equilibrata dalla forza di gravità, diretta verso il basso. La forza d'Archimede è $B = \rho_f V g$, dove V indica il volume del fluido spostato dal corpo (che corrisponde al volume del corpo immerso nel fluido). Il peso del corpo è $W = Mg = \rho_0 V_0 g$, $w = B$, e quindi si ha $\rho_f V g = \rho_0 V_0 g$, ossia

$$\frac{\rho_0}{\rho_f} = \frac{V}{V_0} \quad [15.6]$$

In condizioni normali la densità media di un pesce è leggermente maggiore di quella dell'acqua e pertanto il pesce tenderebbe ad affondare, se non usasse un qualche meccanismo per variare la propria densità. Il pesce raggiunge questo scopo regolando internamente la grandezza della sua vescica natatoria contenente gas. In questo modo i pesci sono in grado di nuotare a qualsiasi profondità.

Fisica ragionata 4

Supponiamo che un ricevimento di lavoro si svolga sulla terrazza di un grande edificio. Trasportando una bevanda analcolica che contiene un cubetto di ghiaccio, prendi l'ascensore, il quale inizia ad accelerare verso il basso. Cosa accade al ghiaccio della bevanda? Esso galleggia di più nel liquido? Affonda di più? Oppure esso non viene influenzato dal moto?

Ragionamento Il livello del ghiaccio nel liquido non viene influenzato dal moto. L'accelerazione dell'ascensore è equivalente a una variazione del campo gravitazionale, secondo il principio di equivalenza. Se l'ascensore accelera verso il basso, si sarebbe tentati di dire che l'effetto è lo stesso di una diminuzione di gravità: il peso del cubetto di ghiaccio diminuisce, causando un maggior galleggiamento. Ricorda, tuttavia, che il modulo della forza di Archimede (spinta di galleggiamento) è uguale al peso del liquido spostato dal ghiaccio. Il peso del liquido diminuisce anch'esso con l'effettiva diminuzione della gravità. Con la diminuzione dello stesso fattore sia del peso del cubetto di ghiaccio sia della spinta di Archimede, il livello del ghiaccio resta invariato.

Fisica ragionata 5

Un fioraio, tramite un fattorino, spedisce un cesto di fiori presso un domicilio. Il cesto include un palloncino di elio collegato ad esso, il quale, improvvisamente, si libera dal cesto e inizia ad accelerare in alto verso il cielo. Il fattorino, sorpreso dalla perdita del palloncino lascia cadere il cesto di fiori. Mentre il cesto cade, il sistema cesto-Terra subisce un aumento di energia cinetica e una diminuzione di energia potenziale gravitazionale, consistente con la conservazione dell'energia meccanica. Il sistema palloncino-Terra, tuttavia, subisce sia un aumento di energia potenziale gravitazionale, sia di energia cinetica. Ciò risulta in accordo con il principio di conservazione dell'energia meccanica? Se no, da dove estrae l'energia extra?

Ragionamento Nel caso del sistema del cesto di fiori e della Terra, si può fare una buona approssimazione per il moto del cesto trascurando l'effetto dell'aria. Quindi, il principio di conservazione dell'energia meccanica è soddisfatto, con l'eccezione di una piccola quantità di energia che si trasforma in energia interna del cesto e dell'aria a causa dell'attrito. Per il sistema palloncino-Terra, non possiamo trascurare l'effetto dell'aria: la forza di galleggiamento dell'aria che causa la salita del palloncino.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

La pressione atmosferica varia di giorno in giorno. Una nave galleggerà di più nell'acqua in un giorno di alta pressione rispetto a un giorno di bassa pressione?

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Supponiamo che una barca danneggiata galleggi appena nell'oceano dopo che un buco nello scafo è stato tamponato. Essa viene trainata verso la costa e poi lungo un fiume, per raggiungere un cantiere per le riparazioni. Quando è trainata lungo il fiume essa affonda. Perché?

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Cinquecento grammi di gommapiuma e cinquecento grammi di piombo hanno lo stesso peso. Se essi fossero posti sui piatti di una bilancia a bracci uguali, sarebbero in equilibrio?

PROBLEMA CONCETTUALE 6

Una persona su un battello galleggiante in un piccolo stagno affonda l'ancora. Il livello dello stagno aumenterà, diminuirà o rimarrà lo stesso?

Esempio 15.3 Un oggetto immerso

Un pezzo di alluminio è sospeso tramite una fune e viene poi immerso in un contenitore d'acqua (Fig. 15.9). La massa dell'alluminio è 1.0 kg e la sua densità è $2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Calcolare la tensione del filo prima e dopo l'immersione.

Soluzione Quando il pezzo di alluminio è sospeso in aria, come in Figura 15.9a, la tensione della fune, T_1 (letta sulla scala graduata) è uguale al peso Mg dell'alluminio, assumendo che la spinta di Archimede nell'aria possa essere trascurata:

$$T_1 = Mg = (1.0 \text{ kg}) (9.80 \text{ m/s}^2) = 9.8 \text{ N}$$

Quando viene immerso nell'acqua, l'alluminio è soggetto a una spinta verso l'alto B , come in Figura 15.9b, che riduce la tensione della fune. Poiché il sistema è in equilibrio,

$$T_2 + B - Mg = 0$$

$$T_2 = Mg - B = 9.8 \text{ N} - B$$

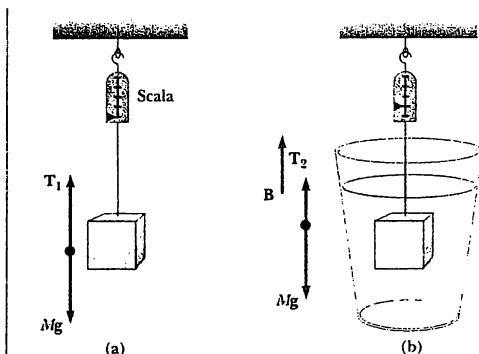


Figura 15.9 (Esempio 15.3) (a) Quando il corpo d'alluminio è sospeso in aria, la scala fornisce il peso vero, Mg (trascurando la spinta di Archimede dell'aria). (b) Quando l'alluminio viene immerso in acqua, la spinta di Archimede B riduce il valore fornito dalla scala e $T_2 = Mg - B$.

Per poter calcolare B bisogna prima calcolare il volume dell'alluminio:

$$V_{Al} = \frac{M}{\rho_{Al}} = \frac{1.0 \text{ kg}}{2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} = 3.7 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Poiché la spinta di Archimede è uguale al peso dell'acqua spostata, otteniamo

$$\begin{aligned} B &= M_w g = \rho_w V_{Al} g \\ &= (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(3.7 \times 10^{-4} \text{ m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2) \\ &= 3.6 \text{ N} \end{aligned}$$

Perciò,

$$T_2 = 9.8 \text{ N} - B = 9.8 \text{ N} - 3.6 \text{ N} = 6.2 \text{ N}$$

ESERCIZIO 5 Qual è il peso vero di un metro cubo di plastica leggera che ha un peso specifico relativo di 0.15? Si noti che il peso vero di un oggetto è il suo peso nel vuoto. Risposta 1.47 kN

15.5 • DINAMICA DEI FLUIDI

Finora ci si è limitati allo studio di un fluido in quiete. Si consideri ora un fluido in movimento. Invece di affrontare lo studio del moto di ciascuna particella del fluido in funzione del tempo, adotteremo l'approccio più comunemente usato che consiste nella descrizione delle proprietà del fluido in ciascun punto, in funzione del tempo.

Caratteristiche del flusso

In un fluido in moto, si possono caratterizzare due tipi principali di flusso. Il flusso è detto **stazionario** quando i cammini seguiti da ciascuna particella del fluido sono scorrevoli e non si intersecano tra di loro (Fig. 15.10). In condizioni di flusso stazionario la velocità del fluido in ogni punto rimane costante nel tempo.

Per velocità superiori a un valore critico, il flusso del fluido diventa **non stazionario** o **turbolento**. Il flusso turbolento è un flusso irregolare caratterizzato da alcune regioni simili ai vortici (Fig. 15.11). Ad esempio, il flusso dell'acqua diventa turbolento in zone dove sono presenti rocce o strettoie, con la formazione spesso di rapide.

Il termine **viscosità** viene comunemente usato per definire il grado di attrito interno nel flusso di un fluido. L'attrito interno è associato alla resistenza tra due strati adiacenti di liquido in moto relativo. A causa della viscosità, parte dell'energia cinetica viene convertita in energia termica, con un meccanismo simile a quello che determina la perdita di energia cinetica di un oggetto che striscia su una superficie scabra.

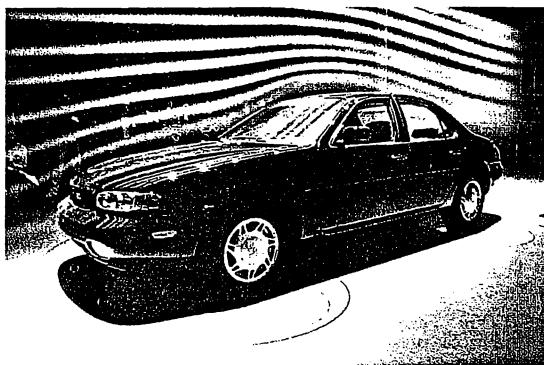


Figura 15.10 Un'illustrazione delle linee di corrente attorno a una automobile in un test nel tunnel del vento. Le linee di corrente nell'aria sono rese visibili dalle particelle di fumo. (Andy Sacks/Tony Stone Images)

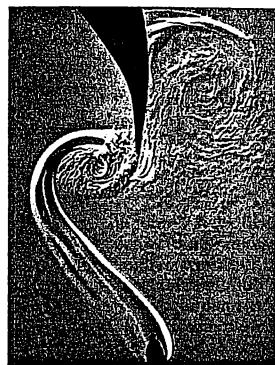


Figura 15.11 Flusso turbolento: la punta di una lama in rotazione (regione scura) forma un vortice nell'aria, riscaldata da una lampada ad alcool (lo stoppino è alla base della figura). Si osservi la turbolenza dell'aria su ambo i lati della lama in rotazione (© Harold R. Edgerton. Palma Press, Inc., per gent. conc.).

Poiché il moto di un fluido reale è assai complesso e non ancora completamente spiegato, è necessario ricorrere ad alcune ipotesi semplificative nell'affrontare il problema. Come si vedrà, molti aspetti di un fluido reale in moto possono essere compresi analizzando il comportamento di un fluido ideale. Nel modello di un fluido ideale si fanno le seguenti quattro ipotesi.

1. **Fluido non viscoso.** In un fluido non viscoso l'attrito interno viene trascurato e un oggetto in moto in un fluido non viscoso non è soggetto a forze d'attrito viscose.
2. **Fluido incompressibile.** La densità del fluido rimane costante nel tempo, e non varia per variazioni di pressione nei fluidi.
3. **Flusso stazionario.** In un moto stazionario, si considera che la velocità in ogni punto del fluido non vari nel tempo.
4. **Flusso irrotazionale.** Il flusso del fluido è irrotazionale se il momento angolare del fluido è nullo in ogni punto. Se una piccola ruota, posta in qualsiasi punto del fluido, non ruota attorno al suo centro di massa, il flusso è irrotazionale. (Se la ruota fosse in rotazione, come si verificherebbe se vi fosse turbolenza, il flusso sarebbe rotazionale).

Le prime due assunzioni sono proprietà di un fluido ideale. Le ultime due sono descrizioni delle modalità di fluire dei fluidi.

15.6 • LINEE DI CORRENTE ED EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Il cammino seguito da una particella di un fluido è chiamato **linea di corrente**. La velocità di una particella del fluido risulta sempre tangente in ogni punto alla linea di corrente lungo la quale si muove (Fig. 15.12). Due linee di corrente non possono intersecarsi; in tal caso una particella all'incrocio tra le due linee

- **Proprietà dei fluidi ideali**

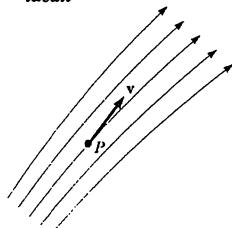


Figura 15.12 Il disegno rappresenta un insieme di linee di flusso. Una particella che passa per il punto P descrive una di queste linee e la sua velocità è tangente in ogni punto alla linea di corrente lungo la quale si muove.

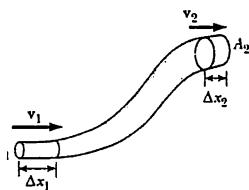


Figura 15.13 Un fluido in moto stazionario attraverso un tubo di sezione variabile. Il volume di fluido che attraversa A_1 in un tempo Δt è eguale al volume di fluido che attraversa A_2 nello stesso intervallo di tempo. Perciò $A_1 v_1 = A_2 v_2$.

Equazione di continuità •

potrebbe muoversi in una o l'altra delle due direzioni e il flusso non sarebbe quindi stazionario. Un insieme di linee di corrente, come viene mostrato in Figura 15.12, forma un tubo di flusso. Si osservi che le particelle del fluido non possono entrare o uscire dalle pareti del tubo, poiché, altrimenti, le linee di corrente si intersecherebbero.

Si consideri un fluido che scorre in un tubo di sezione variabile, come viene mostrato in Figura 15.13. In regime stazionario, le particelle si muovono con velocità tangente in ogni punto alle linee di corrente, lungo le quali esse si muovono.

In un piccolo intervallo di tempo Δt , il fluido all'estremità inferiore del tubo si muove di una distanza $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$; se A_1 è l'area della sezione trasversale in questa regione, allora la massa contenuta nella regione ombreggiata è $\Delta m_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$. Analogamente, il fluido che attraversa l'estremità superiore del tubo, ha una massa $\Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$. Comunque, poiché la massa si conserva e poiché il moto è stazionario, la massa che attraversa A_1 in un intervallo di tempo Δt deve essere eguale alla massa che attraversa A_2 nello stesso intervallo di tempo. Perciò $\Delta m_1 = \Delta m_2$, ossia $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$. Poiché ρ è costante, per il flusso stazionario di un fluido incompressibile, l'equazione precedente si riduce a

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{costante} \quad [15.7]$$

Questa espressione è detta equazione di continuità, ossia, il prodotto dell'area e della velocità del fluido, in tutti i punti di un tubo, è costante. Perciò, come ci si aspetterebbe, la velocità è maggiore dove il tubo è più stretto e minore dove è più ampio. Il prodotto Av , che ha le dimensioni di volume/tempo è chiamato portata; la condizione $Av = \text{costante}$ è equivalente al fatto che la quantità di fluido che entra da un'estremità del tubo in un dato intervallo di tempo è uguale alla quantità di fluido che esce dal tubo nello stesso intervallo di tempo, assumendo che non vi siano perdite.

Esempio 15.4 Riempimento di un secchio vuoto

Un tubo per l'acqua di 2.00 cm di diametro viene utilizzato per riempire un secchio da 20.0 litri. Se occorre 1.00 min per riempire il secchio, qual è la velocità v con la quale l'acqua esce dal tubo? (1 litro = 10^3 cm^3).

Soluzione L'area della sezione trasversale del tubo è

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \left(\frac{2.00^2}{4} \right) \text{ cm}^2 = \pi \text{ cm}^2$$

Secondo i dati il flusso dell'acqua è 20.0 litri/min. Uguagliandolo al prodotto Av si ottiene

$$Av = 20.0 \frac{\text{litri}}{\text{min}} = \frac{20.0 \times 10^3 \text{ cm}^3}{60.0 \text{ s}}$$

$$v = \frac{20.0 \times 10^3 \text{ cm}^3}{(\pi \text{ cm}^2) (60.0 \text{ s})} = 106 \text{ cm/s}$$

ESERCIZIO 6 Se il diametro del tubo è ridotto a 1 cm quale sarà la velocità dell'acqua all'uscita del tubo, assumendo la stessa portata? Risposta 424 cm/s.

15.7 • TEOREMA DI BERNOULLI

Quando un fluido è in movimento lungo un tubo di sezione e altezza variabile, la pressione lungo il tubo varierà. Nel 1738 il fisico svizzero Daniel Bernoulli (1700-1782) ottenne per primo l'espressione fondamentale che mette in relazione la pressione con la velocità e con l'altezza del fluido.

Consideriamo il flusso di un fluido ideale attraverso un tubo di sezione variabile in un intervallo di tempo Δt , come mostrato in Figura 15.14. La forza all'estremità inferiore del tubo è $P_1 A_1$ dove P_1 è la pressione nella sezione 1. Il lavoro svolto da questa forza è $W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V$, dove ΔV è il volume

della regione inferiore ombreggiata. In modo analogo il lavoro svolto sul fluido nella parte superiore nell'intervallo di tempo Δt è $W_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 \Delta V$. (Si noti che il volume che attraversa la sezione 1 in un intervallo di tempo Δt è uguale al volume che attraversa la sezione 2 nello stesso intervallo di tempo). Questo lavoro è negativo poiché la forza sul fluido si oppone allo spostamento. Il lavoro netto svolto da queste forze nell'intervallo di tempo Δt è

$$W_F = (P_1 - P_2) \Delta V$$

Se un elemento di fluido di massa Δm entra nel tubo con velocità v_1 e ne esce con velocità v_2 , allora la variazione di energia cinetica è

$$\Delta K = \frac{1}{2} (\Delta m) v_2^2 - \frac{1}{2} (\Delta m) v_1^2$$

Quando l'elemento di fluido supera il dislivello $y_2 - y_1$, il lavoro svolto dalla gravità è negativo ed è dato da

$$W_g = -\Delta mg(y_2 - y_1)$$

Poiché il lavoro netto svolto sul fluido è $W_F + W_g$, possiamo applicare il teorema dell'energia cinetica a questo volume di fluido, per ottenere

$$(P_1 - P_2) \Delta V = \frac{1}{2} (\Delta m) v_2^2 - \frac{1}{2} (\Delta m) v_1^2 + \Delta mg y_2 - \Delta mg y_1$$

Dividendo ogni termine per ΔV e ricordando che $\rho = \Delta m / \Delta V$, l'espressione si riduce a

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad [15.8]$$

Questo è il teorema di Bernoulli applicato a un fluido ideale. Spesso viene espresso nella forma

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{costante} \quad [15.9]$$

Il teorema di Bernoulli dice che la somma della pressione (P), dell'energia cinetica per unità di volume ($\frac{1}{2} \rho v^2$) e dell'energia potenziale gravitazionale per unità di volume ($\rho g y$) è costante in tutti i punti di una linea di corrente.

Si noti che il teorema di Bernoulli non è una somma di termini di densità di energia perché P è una pressione, non una densità di energia. Quando un fluido è fermo $v_1 = v_2 = 0$ e l'Equazione 15.12 diventa

$$P_1 - P_2 = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h$$

in accordo con l'Equazione 15.4.

Fisica ragionata 6

Nei tornadi, qualche volta avviene che le finestre delle case esplodono verso l'esterno. Qualche volta, i tetti delle case vengono sollevati. Che cosa causa questi eventi? Come mai l'apertura delle finestre durante un tornado aiuta, in teoria, sebbene ciò possa sembrare contro l'intuizione?

Ragionamento La velocità del vento in un tornado è molto alta. Secondo il teorema di Bernoulli, una velocità così alta causa una bassa pressione. Quando questi venti passano in prossimità di una finestra, la pressione all'esterno della finestra scende molto al di sotto della pressione interna, dovuta all'aria all'interno della casa. Di conseguenza, la forza risultante verso l'esterno può frantumare la finestra. Quando questi venti ad alta velocità passano sopra i tetti di una casa, la pressione sopra

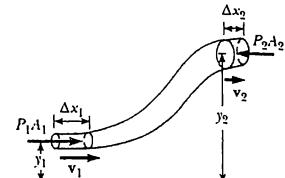


Figura 15.14 Un fluido che scorre attraverso un tubo con sezione trasversale variabile. Il volume di fluido attraverso A_1 in un intervallo di tempo Δt deve essere uguale al volume che fluisce attraverso A_2 nello stesso intervallo di tempo. Quindi, $A_1 v_1 = A_2 v_2$.



Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Daniel Bernoulli fu il fisico e il matematico svizzero che effettuò importanti scoperte nella idrodinamica. L'opera più famosa di Bernoulli, *Idrodinamica*, fu pubblicata nel 1738; si tratta di uno studio teorico-pratico sull'equilibrio, la pressione e la velocità dei liquidi. In questa pubblicazione Bernoulli tentò anche di fornire una spiegazione del comportamento dei gas con pressione e temperatura variabili; era l'inizio della teoria cinetica dei gas. (Corbis-Bettmann).

il tetto è molto minore della pressione all'interno del tetto, ancora dovuta all'aria all'intero della casa. La differenza di pressione può essere sufficiente per sollevare il tetto della casa. Aprendo le finestre, la differenza di pressione fra l'aria all'esterno e all'interno si può ridurre attraverso un flusso d'aria attraverso le finestre aperte. Ciò ridurrà la possibilità di esplosione delle finestre e del sollevamento dei tetti.

PROBLEMA CONCETTUALE 7

Quando guidate una piccola automobile lungo un'autostrada e un camion vi sorpassa ad alta velocità, vi sentiti attratti verso il camion. Perché?

Esempio 15.5 Il tubo di Venturi

Il tubo orizzontale a sezione variabile, illustrato in Figura 15.15, noto come *tubo di Venturi*, può essere utilizzato per la misura delle velocità di un fluido incompressibile; determiniamo la velocità nel punto 2 se la differenza di pressione $P_1 - P_2$ è nota.

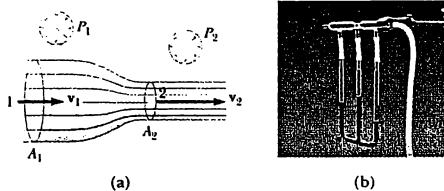


Figura 15.15 (Esempio 15.5) La pressione P_1 è più elevata della pressione P_2 poiché $v_1 < v_2$. Questo strumento può venire usato per misurare la velocità di un fluido. (b) Fotografia di un tubo di Venturi. (CENCO, per gent. conc.)

Soluzione Poiché il tubo è orizzontale, $y_1 = y_2$ e l'Equazione 15.8 applicata nei punti 1 e 2 dà

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Dall'equazione di continuità (Eq. 15.7), vediamo che $A_1 v_1 = A_2 v_2$, ossia

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione precedente si ottiene

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Possiamo ottenere inoltre un'espressione per v_1 usando questo risultato e l'equazione di continuità; notiamo che, essendo $A_2 < A_1$, segue che P_1 è maggiore di P_2 . In altre parole la pressione è ridotta nella parte a sezione più piccola del tubo. Questo risultato è analogo al caso seguente. Consideriamo una camera affollata in cui le persone sono schiacciate l'una contro l'altra: appena la porta viene aperta e la gente comincia ad uscire, tale schiacciamento (pressione) è minore vicino alla porta dove il movimento (flusso) è più rapido.

ESERCIZIO 7 La galleria idrodinamica Carfield Thomas presso l'Università di Stato della Pennsylvania ha una sezione circolare che si restringe da un diametro di 3.6 m fino alla sezione dove si conducono le prove, che è di 1.2 m di diametro. Se la velocità del flusso, nella sezione a grande diametro è 3.0 m/s, determinare la velocità del flusso nella sezione di prova. Risposta 27 m/s

FACOLTATIVO

15.8 • ALTRE APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI BERNOULLI

Consideriamo le linee di corrente che fuiscono attorno all'ala di un aeroplano come in Figura 15.16. Assumiamo che le linee di corrente giungano all'ala orizzontalmente da destra alla velocità v_1 . La conformazione dell'ala deflette le linee di corrente verso il basso con una velocità v_2 . Poiché le linee di corrente vengono deflesse dall'ala, l'ala deve esercitare una forza sulle linee di corrente.

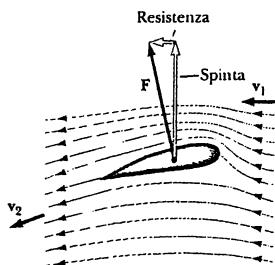


Figura 15.16 Flusso di linee di corrente attorno all'ala di un aeroplano. L'aria giunge da destra con una velocità v_1 e viene deflessa verso il basso dall'ala, lasciando il bordo d'uscita dell'ala con una velocità v_2 . Poiché l'aria viene deflessa, si esercita una forza F sull'ala che ha una componente verticale e una orizzontale.

Secondo la terza legge di Newton, le linee di corrente esercitano una forza uguale e opposta F sull'ala. Questa forza ha una componente verticale chiamata **spinta** (o spinta dinamica) e una componente orizzontale chiamata **resistenza**. La spinta dipende da vari fattori, quali la velocità dell'aereo, la superficie alare, la sua curvatura, e l'angolo fra l'ala e l'orizzontale. Quando l'angolo aumenta, si può instaurare un flusso turbolento al di sopra dell'ala che riduce la spinta.

La spinta sull'ala è compatibile col teorema di Bernoulli. La velocità delle linee di corrente è maggiore sopra l'ala, quindi la pressione dell'aria sopra l'ala è minore di quella al di sotto, generando una forza risultante verso l'alto.

In generale, un corpo subisce la spinta ogni volta che qualsiasi effetto causi una variazione della direzione del fluido quando esso fluisce oltre il corpo. Diversi fattori che influenzano la spinta sono la forma del corpo, la sua orientazione rispetto al flusso del fluido, il moto di rotazione (per esempio, una palla di baseball che ruota su se stessa), e la struttura della superficie del corpo.

Un numero rilevante di strumenti funziona nel modo indicato in Figura 15.17. Un flusso d'aria che passa attraverso un tubo aperto riduce la pressione al di sopra del tubo. Questa diminuzione di pressione fa sì che il liquido salga verso il flusso d'aria. Il liquido viene allora disperso in una nuvola di goccioline. Si può ricordare che questo cosiddetto nebulizzatore viene utilizzato nelle bombolette spray di profumo e di vernice.

Se una persona ha un'arteriosclerosi avanzata, il teorema di Bernoulli spiega un effetto chiamato pulsazione vascolare. In questa situazione si riduce la sezione dell'arteria, come risultato di un accumulo di placche nelle sue pareti interne (Fig. 15.18). Se la velocità del sangue è sufficientemente elevata nella regione ristretta, l'arteria può rimanere schiacciata dalla pressione esterna, causando un'interruzione momentanea del flusso sanguigno. A questo punto non c'è alcun effetto dovuto al teorema di Bernoulli e il vaso si riapre sotto la pressione arteriosa; quando il sangue scorre nuovamente attraverso l'arteria ristretta, la pressione interna cala e l'arteria si chiude nuovamente. Tali variazioni di flusso possono essere rivelate con uno stetoscopio. Se la placca inizia a spostarsi e finisce in un vaso più piccolo che porta sangue al cuore, la persona può subire un attacco cardiaco.

Fisica ragionata 7

Consideriamo la porzione del sistema di un impianto idraulico domestico mostrato in Figura 15.19. Il sifone di blocco sotto il lavello intrappa un tampone d'acqua che evita ai gas che si formano nel tubo di scarico di insinuarsi fino al lavello, e dentro casa. Supponiamo che la lavastoviglie stia scaricando, cosicché l'acqua si muove

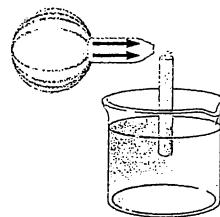


Figura 15.17 Un flusso di aria che passa sopra un tubo immerso in un liquido, produrrà un innalzamento del fluido nel tubo.

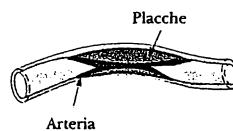


Figura 15.18 Il sangue deve attraversare più velocemente del normale un'arteria ristretta.

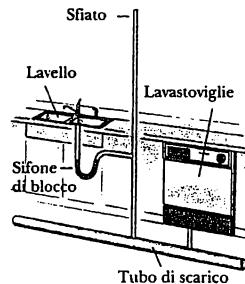


Figura 15.19 (Fisica ragionata 7)

verso sinistra nel tubo di scarico. Qual è la funzione dello sfiato, che è aperto all'aria sopra il tetto della casa? In quale direzione si muove l'aria nell'apertura dello sfiato, verso l'alto o verso il basso?

Ragionamento Supponiamo che non ci sia lo sfiato, cosicché lo scarico del lavello è semplicemente collegato attraverso il sifone di blocco col tubo di scarico principale. Quando l'acqua dalla lavastoviglie si muove verso sinistra nel tubo di scarico, la pressione nel tubo di scarico diminuisce rispetto alla pressione atmosferica, secondo il teorema di Bernoulli. La pressione nello scarico del lavello è praticamente uguale alla pressione atmosferica. Quindi, la differenza di pressione può spingere il tampone d'acqua del sifone di blocco del lavello giù per il tubo fino al tubo di scarico principale, eliminando così la barriera per i gas. Con l'aggiunta dello sfiato sul tetto, la diminuzione di pressione dell'acqua della lavastoviglie causerà l'entrata dell'aria nel tubo di sfiato sul tetto. Ciò manterrà la pressione nel tubo di sfiato e nella parte destra dello scarico del lavello a una pressione vicina a quella atmosferica, per cui si conserverà il tampone d'acqua nel sifone.

FACOLTATIVO

15.9 • ENERGIA EOLICA

Il vento come sorgente d'energia non è un concetto nuovo. Infatti, ci sono delle prove che mulini a vento erano utilizzati in Babilonia e in Cina fin dal 2000 a.C. L'energia cinetica portata dal vento ha origine dall'energia solare.

Sebbene il vento sia potenzialmente una grande sorgente d'energia (circa 5 kW per acro negli Stati Uniti), è stato sfruttato solo in piccola scala. È stato stimato che, su scala globale, il vento contribuisce a una potenza totale disponibile di 2×10^{10} kW (tre volte il consumo di energia nel 1972). Perciò, se solo una piccola parte della potenza disponibile potesse essere sfruttata, la potenza del vento rappresenterebbe una frazione significativa del nostro fabbisogno energetico. Come tutte le risorse energetiche indirette, anche i sistemi eolici hanno alcuni svantaggi che in questo caso nascono dalle variazioni della velocità del vento. Il Dipartimento dell'energia degli U.S.A. sta attualmente progettando macchine a vento capaci di generare 2.5 MW.

Possiamo utilizzare alcune delle idee sviluppate in questo capitolo per stimare la potenza del vento; una macchina ad energia eolica utilizza la conversione in energia meccanica, per esempio di un albero di rotazione, dell'energia cinetica dell'aria in movimento. L'energia cinetica per unità di volume di una colonna d'aria in movimento è data da

$$\frac{\text{Energia cinetica}}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

dove ρ è la densità dell'aria e v la sua velocità. La portata dell'aria attraverso una colonna con sezione trasversale di area A , è Av (Fig. 15.20); cioè, la quantità d'aria che attraversa l'area della sezione trasversale del sistema che raccoglie il vento, come ad esempio le pale rotanti del propulsore. Moltiplicando l'energia cinetica per unità di volume per la portata, si ottiene il trasferimento di energia nell'unità di tempo, o, in altre parole, la potenza:

$$\text{Potenza} = \frac{\text{Energia cinetica}}{\text{volume}} \times \frac{\text{volume}}{\text{tempo}} = (\frac{1}{2} \rho v^2) (Av) = \frac{1}{2} \rho v^3 A \quad [15.10]$$

La potenza disponibile per unità d'area è perciò

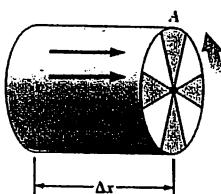


Figura 15.20 Vento che passa attraverso una colonna cilindrica di sezione trasversale A con velocità v .

$$\frac{P}{A} = \frac{1}{2} \rho v^3 \quad [15.11]$$

Come conseguenza di questo risultato, se la colonna d'aria in movimento è portata a riposo, verrà resa disponibile una potenza di $\frac{1}{2} \rho v^3$ per ogni metro quadrato di superficie esposta al vento. Ad esempio, se assumiamo una velocità moderata di 12 m/s e prendiamo $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$, troviamo

$$\frac{P}{A} = \frac{1}{2} \left(1.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^3 \approx 1100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1.1 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Poiché la potenza per unità d'area varia con il cubo della velocità, il suo valore raddoppia se v aumenta solo del 26%; la potenza fornita viene invece dimezzata, se la velocità decresce del 26%.

Questo calcolo è basato sulle condizioni ideali e assume che tutta l'energia cinetica venga resa disponibile. In realtà il flusso d'aria esce dal generatore con un certa velocità residua e calcoli più raffinati mostrano che nel migliore dei casi si può utilizzare il 59.3% di questa quantità¹. L'espressione per la potenza massima ottenibile per unità d'area nel caso di un generatore a vento ideale è

$$\frac{P_{\max}}{A} = \frac{8}{27} \rho v^3 \quad [15.12]$$

In una macchina eolica reale, ulteriori perdite che derivano dalla natura non ideale del propulsore, dalla trasmissione e dal generatore, riducono la potenza totale disponibile a circa il 15% del valore predetto dall'Equazione 15.11. In Figura 15.21 vengono mostrati gli schemi di due tipi di turbine a vento.

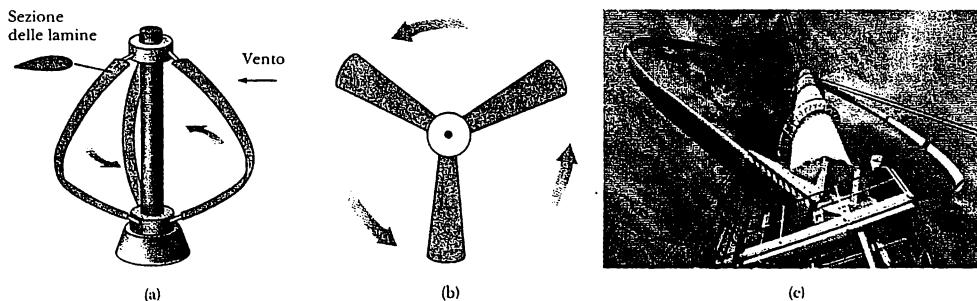


Figura 15.21 (a) Un generatore a vento con asse verticale. (b) Un generatore a vento con asse orizzontale. (c) Fotografia di un generatore a vento ad asse verticale. (DOE, per gent. conc.)

¹ Per ulteriori dettagli, vedere J.H. Krenz, *Energy Conversion and Utilization*, Boston, Allyn and Bacon, 1976, Cap. 8.

Esempio 15.6 Potenza fornita da un mulino a vento

Calcolare la potenza fornita da un generatore a vento le cui pale hanno un diametro di 80 m, assumendo una velocità del vento di 10 m/s e un'efficienza globale del 15%.

$$= 3.0 \times 10^6 \text{ W} = 3.0 \text{ MW}$$

Poiché, però, l'efficienza globale è del 15% la potenza fornita è

$$P = 0.15 P_{\max} = 0.45 \text{ MW}$$

Soluzione Poiché il raggio delle pale è 40 m, l'area della superficie esposta al vento è

$$A = \pi r^2 = \pi (40 \text{ m})^2 = 5.0 \times 10^3 \text{ m}^2$$

Se il 100% dell'energia disponibile potesse essere sfruttata, la potenza massima ottenibile sarebbe

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \rho A v^3 = \frac{1}{2} \left(1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (5.0 \times 10^3 \text{ m}^2) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^3$$

Per confronto, un sistema di turbine a vapore piuttosto grande fornisce una potenza di circa 1 GW; occorrebbero dunque 2200 generatori a vento di questo tipo per poter ottenere la stessa resa delle turbine a vapore. Il gran numero di generatori richiesti per ottenere una ragionevole potenza è chiaramente lo svantaggio più grande dello sfruttamento dell'energia del vento.

FACOLTATIVO

15.10 • VISCOSITÀ

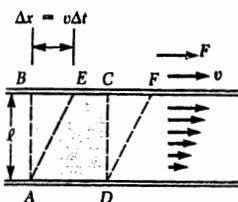


Figura 15.22 Uno strato di liquido tra due superfici solide in cui la superficie inferiore è fissata e quella superiore si muove verso destra con velocità v .

Abbiamo visto che un fluido non si oppone a un carico di scorrimento; comunque i fluidi offrono un certo grado di resistenza al moto di scorrimento. Questa resistenza è una forma di attrito interno chiamata «viscosità». Nel caso dei liquidi, la viscosità nasce a causa della forza d'attrito tra strati adiacenti di fluido, quando scorrono l'uno sull'altro. Il grado di viscosità di un fluido può essere chiarito dal seguente esempio: se due superfici piane di vetro sono separate da uno strato di fluido, ad esempio olio, con una superficie ferma in una certa posizione, risulta facile far scivolare una superficie sull'altra (Fig. 15.22). Se invece il fluido tra le due superfici è catrame, il compito di far scivolare le superfici diventa molto più difficile. Possiamo così concludere che il catrame ha una viscosità più alta dell'olio. In Figura 15.22 vediamo come la velocità di strati successivi cresca da 0 a v , quando ci si sposta dallo strato adiacente alla superficie tenuta ferma a uno strato adiacente a quella in movimento.

In un solido un carico di scorrimento produce uno spostamento relativo di strati adiacenti. In modo analogo strati adiacenti di un fluido sottoposto a un carico di scorrimento sono posti in moto relativo. Consideriamo nuovamente due superfici piane parallele, una fissa e l'altra in moto verso destra sotto l'azione di una forza F come in Figura 15.22. A causa di questo moto una parte del liquido $ABCD$ viene spostata nella porzione $AEFD$ dopo un breve intervallo di tempo, e ci si renderà conto che il liquido ha subito una deformazione dovuta allo scorrimento. Per definizione il carico di scorrimento sul liquido è eguale al rapporto F/A , dove A è l'area della faccia sottoposta al carico, mentre la deformazione relativa è definita come il rapporto $\Delta x/\ell$. Ossia,

$$\text{carico di scorrimento} = \frac{F}{A} \quad \text{deformazione relativa} = \frac{\Delta x}{\ell}$$

La superficie superiore si muove con velocità v e il fluido adiacente alla superficie ha la stessa velocità. Allora in un intervallo di tempo Δt il fluido vicino alla superficie superiore si sposta di una distanza $\Delta x = v\Delta t$ e possiamo esprimere la deformazione relativa per unità di tempo come

$$\frac{\text{deformazione relativa}}{\Delta t} = \frac{\Delta x/\ell}{\Delta t} = \frac{v}{\ell}$$

Questa equazione dice che la velocità di deformazione relativa è v/ℓ .

Il coefficiente di viscosità η per il fluido è definito come il rapporto tra il carico di scorrimento e la velocità di deformazione relativa:

$$\eta = \frac{F/A}{v/\ell} = \frac{F\ell}{Av} \quad [15.13] \quad \bullet \text{ Coefficiente di viscosità}$$

Le unità SI per la viscosità sono $N \cdot s/m^2$. I coefficienti di viscosità per alcune sostanze vengono riportati in Tabella 15.2. Le unità cgs della viscosità sono $\text{dine} \cdot \text{s}/\text{cm}^2$, chiamate poise.

TABELLA 15.2 Viscosità di alcuni fluidi

Fluido	T (°C)	Viscosità η ($N \cdot s/m^2$)
Acqua	20	1.0×10^{-3}
Acqua	100	0.3×10^{-3}
Sangue	37	2.7×10^{-3}
Glicerina	20	830×10^{-3}
Olio per motore	30	250×10^{-3}

L'espressione per η data dall'Equazione 15.13 è valida solo se la velocità del fluido varia linearmente con la posizione. In questo caso, è comune dire che il gradiente di velocità v/ℓ è uniforme. Se il gradiente di velocità *non* è uniforme dobbiamo esprimere η nella forma generale

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dy} \quad [15.14]$$

dove il gradiente di velocità dv/dy è la variazione della velocità con la posizione, quest'ultima misurata perpendicolarmente alla direzione della velocità.

Esempio 15.7 Misura del coefficiente di viscosità

Un piatto di metallo di area 0.15 m^2 è collegato a una massa di 8 g mediante un filo che passa attraverso una puleggia ideale, come in Figura 15.23. Uno strato di lubrificante di spessore 0.3 mm è posto tra il piatto e la superficie. Quando viene rilasciato, il piatto si muove verso destra con una velocità di 0.085 m/s . Determinare il coefficiente di viscosità del lubrificante.

Soluzione Poiché il piatto si muove con velocità costante, la sua accelerazione è nulla; il piatto si muove verso destra per l'azione della tensione del filo T e della forza d'attrito f associata al fluido viscoso. In tal caso la tensione è eguale in modulo al peso del corpo sospeso,

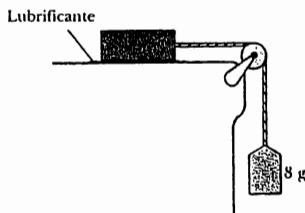


Figura 15.23 (Esempio 15.7)

perciò

$$f = T = mg = (8 \times 10^{-3} \text{ kg}) (9.80 \text{ m/s}^2)$$

$$= 7.84 \times 10^{-2} \text{ N}$$

Il lubrificante a contatto con la superficie orizzontale è a riposo, mentre lo strato a contatto col piatto si muove

con la velocità del piatto. Assumendo che il gradiente di velocità sia uniforme, otteniamo

$$\eta = \frac{F\ell}{Av} = \frac{(7.84 \times 10^{-2} \text{ N}) (0.3 \times 10^{-3} \text{ m})}{(0.05 \text{ m}^2) (0.085 \text{ m/s})}$$

$$= 5.53 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

FACOLTATIVO

15.11 • MOTO TURBOLENTO



Quando strati adiacenti di un fluido viscoso scorrono l'uno sull'altro e le linee di corrente si mantengono stabili, il moto viene detto *laminare*. Comunque a velocità sufficientemente alte, il moto del fluido cambia da laminare a un moto irregolare e casuale, che viene detto *turbolento*. La velocità a cui inizia il moto turbolento dipende dalla geometria del mezzo che contiene il fluido e dalla viscosità del fluido.

Molti sono gli esempi di moto turbolento che possono essere citati: lo scorrere dell'acqua in un ruscello o un fiume pieno di sassi, il fumo che sale da una ciminiera in un giorno ventoso; oppure l'acqua nella scia di una barca o l'aria nelle scie formate dagli aeroplani o da altri veicoli in moto.

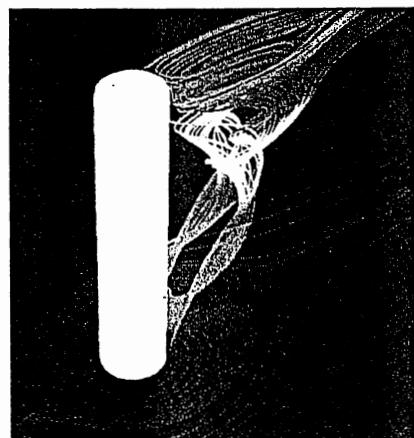
Sperimentalmente è stato trovato che il passaggio a un moto turbolento è caratterizzato da un parametro adimensionale detto **numero di Reynolds**, *RN*, dato da

Numero di Reynolds •

$$RN = \frac{\rho vd}{\eta} \quad [15.15]$$

dove ρ è la densità del fluido, v la sua velocità, η la viscosità e d è una lunghezza geometrica associata al flusso. Per il moto in un tubo, d rappresenta il diametro del tubo. Nel caso di moto attorno a una sfera, d rappresenta il diametro della sfera.

Alcuni esperimenti mostrano che se il numero di Reynolds è inferiore a 2000, il moto di un fluido in un tubo è laminare; la turbolenza avviene se il numero di Reynolds supera 3000.



Simulazione, fornita da un calcolatore Cray 2 (uno dei calcolatori più potenti nel mondo) del flusso di un gas attorno a un cilindro del motore di un razzo. Si osservi il vortice di destra, simile a quello di un tornado. Simulazioni come questa aiutano a spiegare fenomeni osservati nelle ricerche sperimentali. (Dipartimento per l'Energia degli Stati Uniti, per gent. conc.)

SOMMARIO

La **pressione**, P , in un fluido è la forza per unità d'area che il fluido esercita su un oggetto immerso nel fluido:

$$P = \frac{F}{A} \quad [15.1]$$

Nel sistema SI la pressione ha le unità di N/m^2 e $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ pascal (Pa)}$.

La pressione in un fluido varia con la profondità secondo l'espressione

$$P = P_0 + \rho gh \quad [15.4]$$

dove P_0 è la pressione atmosferica ($\approx 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$) e ρ è la densità del fluido.

La legge di Pascal stabilisce che quando una pressione è applicata a un fluido racchiuso in un contenitore, la pressione è trasmessa invariata a ogni punto del fluido e delle pareti del contenitore.

Quando un oggetto è parzialmente o completamente immerso in un fluido, questo ultimo esercita una forza verso l'alto sull'oggetto, chiamata **spinta di Archimede**. Secondo il principio di Archimede, la spinta è uguale al peso del fluido spostato dal corpo.

Diversi aspetti della fluidodinamica (fluidi in moto) possono essere compresi assumendo che il fluido sia non-viscoso ed incompressibile e che il moto del fluido sia in uno stato stazionario, senza turbolenza.

Utilizzando queste ipotesi si ottengono due risultati importanti che riguardano il moto dei fluidi attraverso un tubo di sezione non uniforme:

- La portata attraverso il tubo è costante, il che equivale a dire che il prodotto dell'area della sezione trasversale A per la velocità v , è costante in ogni punto. Questa è l'**equazione di continuità**

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{costante} \quad [15.7]$$

- La somma della pressione, dell'energia cinetica per unità di volume e dell'energia potenziale per unità di volume ha lo stesso valore in tutti i punti di una linea di corrente. Questa legge è nota come **teorema di Bernoulli**

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gy = \text{costante} \quad [15.9]$$

La viscosità di un fluido è la misura della sua resistenza allo scorrimento. Il coefficiente di viscosità di un fluido è definito dal rapporto tra il carico di scorrimento e la velocità di variazione della deformazione relativa.

Il limite di turbolenza del moto di un fluido è determinato da un parametro detto numero di Reynolds, il cui valore dipende dalla densità del fluido, dalla sua velocità e viscosità, e inoltre da un fattore geometrico.

DOMANDE CONCETTUALI

- [1] La Figura D15.1 mostra le vedute aeree proprio sulla verticale di due dighe. Ambedue le dighe hanno la stessa lunghezza (la dimensione verticale nelle figure) e la stessa altezza (verso l'interno della pagina in figura). La diga sulla sinistra sbarra un lago molto grande, mentre quella sulla destra sbarra un fiume stretto. Quale diga deve essere costruita per essere più robusta?

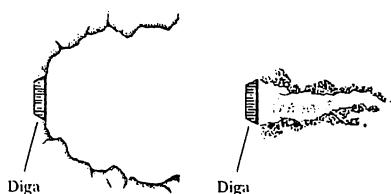


Figura D15.1 (Domanda concettuale 1)

- 2.** Alcuni studenti di fisica collegano un lungo tubo all'apertura di un pallone. Lasciando il pallone al suolo, l'altro estremo del tubo viene sollevato sul tetto di una costruzione a molti piani dell'università. Degli studenti in cima alla costruzione iniziano a versare dell'acqua nel tubo. Gli studenti al suolo guardano il pallone che si riempie di acqua. Sul tetto, gli studenti rimangono sorpresi nel vedere che il tubo sembra non riempirsi mai: si può continuare a versare nel tubo sempre più acqua. Al suolo, il pallone scoppià bagnando gli studenti da capo a piedi. Perché il sistema tubo-pallone non si riempie mai e perché il pallone scoppià?
- 3.** Una chiatte trasporta lungo un fiume un carico di ghiaia. Avvicinandosi a un ponte basso, il capitano constata che la sommità del cumulo di ghiaia non riuscirà a passare sotto il ponte. Il capitano ordina all'equipaggio di scaricare in acqua immediatamente della ghiaia dal mucchio. Questa, è una decisione opportuna?
- 4.** Due bicchieri di vetro che hanno lo stesso peso ma forme diverse e sezioni diverse sono riempiti di acqua allo stesso livello. Secondo l'espressione $P_0 + \rho gh$, la pressione sul fondo è la stessa per ambedue i bicchieri. Nonostante ciò, perché uno pesa più dell'altro?
- 5.** Pascal usò un barometro con acqua come fluido barometrico. Perché non è pratico usare dell'acqua per un tipico barometro?
- 6.** Un pallone riempito di elio sale verso l'alto fino a che la sua densità diviene uguale a quella dell'aria. Se un sottomarino inizia l'immersione andrà comunque fino al fondo dell'oceano o si fermerà quando la sua densità diventa la stessa di quella dell'acqua circostante?
- 7.** Un pesce resta sul fondo del vaso, mentre questo viene pesato. Se il pesce comincia a nuotare, il peso cambierà?
- 8.** Il piombo ha una densità più alta del ferro ed entrambi sono più densi dell'acqua. La spinta di Archimede è più grande, più piccola o eguale su un oggetto di piombo o di ferro delle stesse dimensioni?
- 9.** Un cubo di ghiaccio viene posto in un bicchiere d'acqua. Quale sarà il livello dell'acqua quando il ghiaccio si scioglie?
- 10.** Il rifornimento d'acqua per una città è spesso assicurato da dei serbatoi costruiti ad una certa altezza. L'acqua scorre dai serbatoi attraverso dei tubi fino alle case dove si aprono i rubinetti. Perché l'acqua esce più velocemente al primo piano di uno stabile che non ad un piano più alto?
- 11.** Se l'aria di un asciugacapelli viene inviata su una pallina da ping pong, la pallina si solleva. Spiegare come la pallina possa rimanere in equilibrio.
- 12.** Quando i saltatori con gli sci sono in aria perché spingono il corpo in avanti e tengono le mani ai fianchi?
- 13.** Spiegare come mai una bottiglia chiusa, piena a metà di un liquido, può galleggiare.
- 14.** La spinta di Archimede su di un nuotatore è più grande: quando ha espirato o inspirato?
- 15.** Un pezzo di legno è parzialmente immerso in un contenitore pieno d'acqua. Se il contenitore viene chiuso e pressurizzato al di sopra della pressione atmosferica, il legno sale, scende o rimane allo stesso livello? (Suggerimento: il legno è poroso).
- 16.** Poiché la pressione atmosferica è circa 10^5 N/m^2 e l'area della superficie del torace umano è circa 0.13 m^2 , la forza esercitata dall'atmosfera sul torace è circa $13\,000 \text{ N}$. Come mai il nostro corpo non collassa?
- 17.** Se una persona lascia cadere una palla all'interno di un ascensore in caduta libera, questa rimane sospesa, ferma rispetto alla persona, poiché l'ascensore, la persona e la palla subiscono la stessa accelerazione verso il basso, g . Che cosa succede, se si ripete l'esperimento con un pallone, riempito di elio. È diverso il risultato? (Questo è un trabocchetto).
- 18.** Due navi uguali salpano. Una trasporta un carico di gommapiuma, mentre la seconda è vuota. Confrontare le rispettive linee di galleggiamento.
- 19.** Un piccolo pezzo d'acciaio è legato a un blocco di legno. Quando il blocco viene posto in una vasca d'acqua, con l'acciaio sulla parte superiore, metà del blocco risulta immersa. Se il blocco viene capovolto, affinché il pezzo d'acciaio risulti sott'acqua, la parte del blocco immersa aumenta, diminuisce o rimane la stessa? Si modifica il livello dell'acqua, quando il blocco viene capovolto?
- 20.** I cani della prateria mantengono aerate le loro tane, costruendo sopra una delle imboccature dei mucchi di terra, aperti in cima alle correnti d'aria, mentre una seconda entrata, a livello del suolo, comunica con l'esterno, dove l'aria è pressoché stagnante. Perché questo accorgimento crea un flusso d'aria attraverso la tana?
- 21.** Un barattolo chiuso di coca cola dietetica galleggia in una vasca d'acqua, mentre uno di coca cola normale della stessa marca va a fondo. Come si può spiegare il diverso comportamento?

PROBLEMI

Paragrafo 15.1 Pressione

- 1.** Una donna di 50.0 kg è appoggiata ad un tacco di una scarpa. Se il tacco è circolare, di diametro 0.500 cm , quale pressione essa esercita sul pavimento?
- 2.** Un re ordina una corona d'oro di 0.500 kg di massa. Quando arriva dal fabbro, il volume della corona è 185 cm^3 . La corona è interamente in oro?
- 3.** Determinare la massa complessiva dell'atmosfera terrestre. (Il raggio della Terra è di $6.37 \times 10^6 \text{ m}$ e la

pressione atmosferica a livello del suolo di $1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$.

Paragrafo 15.2 Variazione della pressione con la profondità

- 4.** Determinare la pressione assoluta sul fondo di un lago la cui profondità è 30.0 m .
- 5.** La molla di un misuratore di pressione mostrata in Figura 15.4 ha una costante elastica di 1000 N/m e il

pistone ha un diametro di 2.00 cm. Determinare la profondità in acqua per cui la molla risulta compresa di 0.500 cm.

6. Il piccolo pistone di un montacarichi idraulico ha una sezione di area 3.00 cm^2 e il pistone più grande ha un'area di 200 cm^2 (Fig. 15.4). Quale forza deve venire applicata al pistone più piccolo per sollevare un carico di 15.0 kN ? (Nelle stazioni di servizio si utilizza l'aria compressa).
7. Calcolare l'area di contatto tra una ventosa completamente svuotata d'aria e il soffitto necessaria a sostenere il peso di uno studente di 80.0 kg .
8. Una piscina rettangolare ha le dimensioni $30.0 \text{ m} \times 10.0 \text{ m}$ e $h = 2.00 \text{ m}$, dove h è la profondità. Se la vasca è completamente riempita d'acqua, calcolare la forza esercitata dall'acqua (a) sul fondo della piscina, (b) su ciascun lato.
9. La pressione atmosferica normale è di $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$. All'avvicinarsi di un temporale si osserva in un barometro una diminuzione di 20.0 mm dell'altezza della colonna di mercurio. Determinare la pressione atmosferica. (La densità del mercurio è di 13.59 g/cm^3).
10. Del mercurio viene versato in un tubo a forma di U, come in Figura P15.10a. Il braccio sinistro del tubo ha una sezione di area $A_1 = 10.0 \text{ cm}^2$, e il braccio di destra ha una sezione di area $A_2 = 5.00 \text{ cm}^2$. Cento grammi di acqua vengono versati nel braccio destro, come in Figura P15.10b. (a) Determinare la lunghezza della colonna d'acqua nel braccio destro del tubo ad U. (b) Dato che la densità del mercurio è 13.6 g/cm^3 , di quale altezza, h , salirà il mercurio nel braccio sinistro?

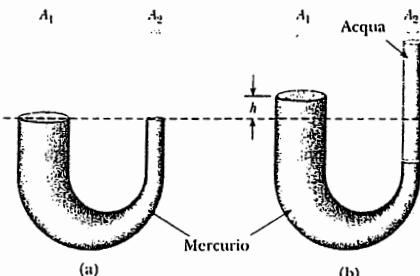


Figura P15.10

11. Blaise Pascal fece una copia del barometro di Torricelli utilizzando del vino rosso di Bordeaux come liquido (cosa questa assai gradita per un francese). La densità del vino è di $0.984 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (Fig. P15.11). Determinare l'altezza h della colonna di vino, alla pressione normale atmosferica. (Usare per

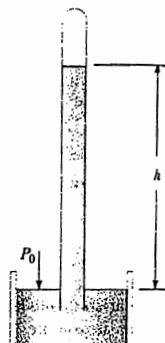


Figura P15.11

il valore 9.8 m/s^2). Sopra la colonna ci sarà un buon vuoto come si verifica nel caso dell'uso di mercurio come liquido?

12. Un materassino di gommapiuma ha uno spessore di 10.0 cm e una densità di 300 kg/m^3 . Determinare l'area del materassino, quando galleggia in acqua dolce, con una persona di 75.0 kg , sdraiata sopra.
13. Un materassino di gommapiuma ha uno spessore h e densità ρ . Qual è l'area del materassino se esso galleggia con la sua superficie superiore proprio a pelo dell'acqua (dolce) quando sostiene un nuotatore di massa m^2 ?
14. Un dirigibile viene riempito con 400 m^3 di elio. Determinare il carico che può venire sollevato. (La densità dell'aria è di 1.29 kg/m^3 , mentre quella dell'elio è 0.180 kg/m^3).
15. Un cubo di legno di 20.0 cm di lato con una densità di 650 kg/m^3 galleggia nell'acqua. (a) Qual è la distanza tra la faccia superiore del cubo e la superficie dell'acqua? (b) Quale quantità in peso di piombo deve essere messa sul cubo affinché la sua faccia superiore sia a livello dell'acqua?
16. Quanti palloncini ad elio sarebbero necessari per sostenerli? Poiché l'elio è una risorsa non rinnovabile, sviluppa una risposta teorica piuttosto che una risposta sperimentale. Nella tua soluzione fissa le grandezze fisiche che consideri come dati e i valori che tu misuri o stimi per esse.
17. Una sfera di plastica galleggia in acqua con il 50.0% del suo volume immerso. Questa stessa sfera galleggia in olio con il 40.0% del suo volume immerso. Determinare le densità dell'olio e della sfera.
18. Una rana, posta in un guscio semisferico, galleggia in un mare verde-azzurro di densità di 1.35 g/cm^3 senza affondare. Il guscio, di massa trascurabile, ha un raggio di 6 cm , determinare la massa della rana (Fig. P15.18).

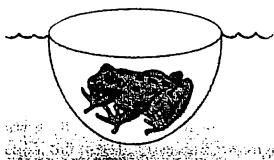


Figura P15.18

- [19] Determinare la quantità di elio (in metri cubi) necessaria a sollevare un pallone fino a un'altezza di 8000 m, con un carico di 400 kg. ($\rho_{\text{He}} = 0.18 \text{ kg/m}^3$). Si consideri che il volume del pallone rimanga costante e che la densità dell'aria diminuisca con l'altezza secondo la relazione: $\rho_{\text{aria}} = \rho_0 e^{-z/H_{100}}$. (z = altezza in metri, ρ_0 = densità a livello del mare = 1.25 kg/m^3).

20. Un blocco di metallo di 10.0 kg che misura $15.0 \text{ cm} \times 10.0 \text{ cm} \times 10.0 \text{ cm}$ è sospeso tramite una bilancia a molla ed immerso in acqua come in Figura 15.9b. La dimensione di 15.0 cm è sulla verticale e la parte più alta del blocco è a 5.00 cm dalla superficie dell'acqua. (a) Quali sono le forze che agiscono sulla parte superiore e sul fondo del blocco? (Prendere $P_0 = 1.0130 \times 10^5 \text{ N/m}^2$). (b) Qual è la lettura sulla scala graduata? (c) Dimostrare che la spinta di Archimede è eguale alla differenza tra la forza sulla sommità e sul fondo del blocco.

Paragrafo 15.5 Dinamica dei fluidi

Paragrafo 15.6 Linee di corrente ed equazione di continuità

Paragrafo 15.7 Il teorema di Bernoulli

21. La portata d'acqua lungo un tubo orizzontale è $2.00 \text{ m}^3/\text{min}$. Determinare la velocità in un punto in cui il diametro del tubo è (a) 10.0 cm e (b) 5.00 cm .
22. Il leggendario Dutch che salvò l'Olanda mettendo il suo dito nel buco di un argine aveva un dito di 1.20 cm di diametro. Assumendo che il buco si trovasse 2.00 m al di sotto della superficie del mare (densità 1030 kg/m^3), (a) quale fu la forza agente sul suo dito? (b) Se avesse tolto il suo dito dal buco, quanto tempo sarebbe stato necessario affinché il flusso d'acqua avesse riempito un acro di terra per una profondità di 30.48 cm (1 piede) assumendo che il buco fosse rimasto di dimensione costante? (Il volume di un acro per un piede è circa 1234 m^3 e rappresenta il consumo annuo di acqua per una famiglia di quattro persone).

23. Un grosso serbatoio riempito d'acqua ha un piccolo foro laterale a 16.0 m al di sotto della superficie dell'acqua. Se il flusso attraverso il foro è $2.50 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$ determinare (a) la velocità alla

- quale l'acqua esce dal foro, (b) il diametro del foro.
24. Un tubo orizzontale di 10.0 cm di diametro ha una progressiva riduzione del diametro a 5.00 cm . Se la pressione dell'acqua nella sezione più larga è di $8.00 \times 10^4 \text{ Pa}$, mentre è di $6.00 \times 10^4 \text{ Pa}$ in quella più stretta, determinare la velocità del flusso d'acqua nelle due sezioni del tubo.
25. Dell'acqua viene pompata dal fiume Colorado fino al Grand Canyon Village attraverso un tubo di 15.0 cm di diametro. Il fiume è a 564 m di quota mentre il villaggio si trova a 2096 m . (a) Qual è la minima pressione con la quale deve essere pompata l'acqua per arrivare al villaggio? (b) Se ogni giorno vengono pompati 4500 m^3 , qual è la velocità dell'acqua nel tubo? (c) Quale pressione in più è necessaria per spedire questo flusso? *Nota:* si può assumere che l'accelerazione di gravità e la densità dell'aria siano costanti in questo campo di altitudini.
26. Il vecchio Geyser nel Parco di Yellowstone entra in eruzione ad intervalli approssimativamente di un'ora e l'altezza del suo getto raggiunge i 40.0 m . Determinare (a) la velocità d'uscita dell'acqua dal suolo, (b) la pressione (al di sopra di quella atmosferica) nella camera calda sotterranea.

Paragrafo 15.8 Altre applicazioni del teorema di Bernoulli (Facoltativo)

27. Un aeroplano ha una massa di $1.60 \times 10^4 \text{ kg}$, e ogni ala ha un'area di 40.0 m^2 . Durante il volo in quota la pressione sulla parte inferiore dell'ala è $7.00 \times 10^4 \text{ Pa}$. Determinare la pressione sulla superficie superiore dell'ala.
28. Un tubo di Venturi può venire usato per misurare la portata di un fluido (Fig. 15.15). Se la differenza di pressione è $P_1 - P_2 = 21.0 \text{ kPa}$, determinare la portata in m^3/s , supposto che il raggio del tubo esterno sia di 1.00 cm , quello del tubo interno di 2 cm ed il fluido sia benzina ($\rho = 700 \text{ kg/m}^3$).
29. Un tubo di Pitot può essere usato per determinare la velocità di un flusso d'aria misurando la differenza tra la pressione totale e quella statica (Fig. P15.29). Se il fluido contenuto nel tubo è mercurio, di densità $\rho_{\text{Hg}} = 13\,600 \text{ kg/m}^3$ e $\Delta h = 5.00 \text{ cm}$, determinare la

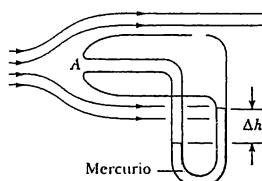


Figura P15.29

velocità del flusso d'aria. (Si suppone che nel punto A l'aria sia ferma e $\rho_{\text{aria}} = 1.25 \text{ kg/m}^3$).

30. Per estrarre l'acqua da un serbatoio viene usato un sifone, come indicato in Figura P15.30. Il sifone ha un diametro costante d . (a) Se $h = 1.00 \text{ m}$, determinare la velocità del flusso all'uscita del sifone. (b) Quale valore massimo può avere l'altezza rispetto alla superficie dell'acqua del punto più alto del sifone? (Per avere un flusso continuo, la pressione nel liquido non può essere inferiore a quella atmosferica).

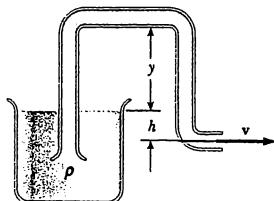


Figura P15.30

31. Un largo contenitore di raccolta è riempito fino a un'altezza h_0 . Il contenitore ha un buco ad altezza h dal fondo (Fig. P15.31). (a) Dimostrare che la velocità alla quale l'acqua viene fuori è $\sqrt{2g(h_0 - h)}$ se il flusso è stazionario e privo di attrito. (b) A quale distanza dal contenitore il flusso arriverà al suolo?

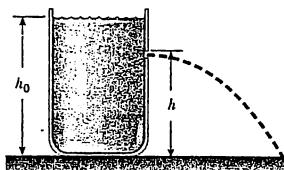


Figura P15.31

32. Viene praticato un buco ad altezza h su un lato del contenitore di altezza h_0 , pieno d'acqua come in Figura P15.31. Se l'acqua deve essere lanciata il più lontano possibile orizzontalmente, (a) a quale altezza dal fondo del contenitore si deve fare il buco? (b) Trascurando le perdite per attrito, a quale distanza (inizialmente) dal lato del contenitore arriverà l'acqua al suolo?

Problemi generali

33. Una pallina da ping-pong ha un diametro di 3.80 cm e una densità media di 0.0840 g/cm^3 . Quale forza è necessaria per tenerla completamente immersa in acqua?

34. La Figura P15.34 mostra un recipiente di acqua con una valvola in basso. Se la valvola è aperta, qual è la massima altezza che raggiunge l'acqua venendo fuori dal tubo sulla destra del recipiente? Si assuma che $h = 10.0 \text{ m}$, $L = 2.00 \text{ m}$, e $\theta = 30.0^\circ$ e che la sezione in A sia molto grande rispetto a B.

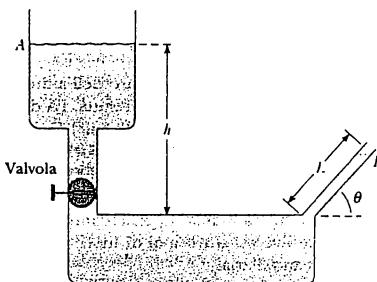


Figura P15.34

35. Un pallone riempito di elio è legato a una fune uniforme lunga 2.00 m e del peso di 0.0500 kg . Il pallone è sferico con un raggio di 0.400 m . Quando viene liberato, esso sale per una lunghezza h della fune e poi rimane in equilibrio, come in Figura P15.35. Determinare il valore di h . L'involucro del pallone ha una massa di 0.250 kg .

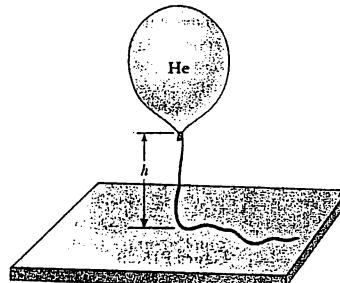


Figura P15.35

36. L'acqua viene spinta fuori da un estintore dalla pressione dell'aria all'interno, come viene mostrato in Figura P15.36. Quale valore di pressione, oltre a quella atmosferica, verrà indicato dal manometro quando il getto d'acqua ha una velocità di 30.0 m/s e il livello dell'acqua sotto l'ugello è di 0.500 m ?
37. Torricelli fu il primo a capire che noi viviamo sul fondo di un oceano d'aria e fece la corretta supposizione che la pressione atmosferica fosse dovuta al peso dell'aria. La densità dell'aria al suolo è di

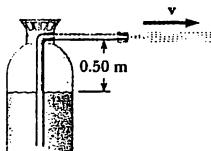


Figura P15.36

1.29 kg/m^3 e diminuisce all'aumentare dell'altitudine, poiché l'atmosfera diviene più rarefatta. La densità viene considerata costante (1.29 kg/m^3) fino ad un'altitudine h e zero per altitudini superiori, dove h indica la profondità dell'oceano d'aria o lo spessore dell'atmosfera. Determinare il valore di h , che produce una pressione di 1 atm alla superficie terrestre. Il picco del monte Everest si trova al di fuori della superficie dell'oceano d'aria?

38. Il vero peso di un corpo è il suo peso quando viene misurato nel vuoto, dove non ci sono spinte di Archimede. Un corpo di volume V viene pesato nell'aria su una bilancia usando pesi di densità ρ . Se la densità dell'aria è ρ_{aria} e la bilancia indica un peso w' , dimostrare che il peso vero w è dato da

$$w = w' + \left(V - \frac{w'}{\rho g} \right) \rho_{\text{aria}} g$$

39. Un piolo di legno di 1.20 cm di diametro galleggia nell'acqua con 0.400 cm del suo diametro al di fuori (Fig. P15.39). Determinare la densità del piolo.

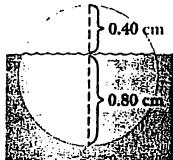


Figura P15.39

40. Un beaker contenente 2.00 kg di olio (densità = 916.0 kg/m^3) è posato su una bilancia. Un blocco di ferro di 2.00 kg è sospeso a una bilancia a molla e completamente sommerso nell'olio, come in Figura P15.40. Determinare le letture di equilibrio di ambedue le bilance.

41. Se una bomba nucleare di 1 megaton esplode al suolo, il picco di sovrappressione (cioè l'aumento di pressione rispetto alla pressione atmosferica) a una distanza di 6.00 km è di 0.200 atm . Determinare la forza, che a seguito dell'esplosione viene esercitata sulla parete esterna, di $4.50 \text{ m} \times 22.0 \text{ m}$, di una casa.

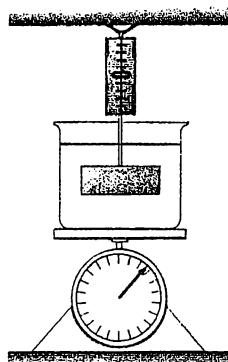


Figura P15.40

42. Una molla leggera di costante elastica $k = 90.0 \text{ N/m}$ è ferma verticalmente su un tavolo (Fig. P15.42a). Un pallone di 2.00 g è riempito di elio (densità = 0.180 kg/m^3) per un volume di 5.00 m^3 collegato alla molla e causando il suo allungamento come in Figura P15.42b. Determinare la lunghezza dell'espansione L quando il pallone è in equilibrio.

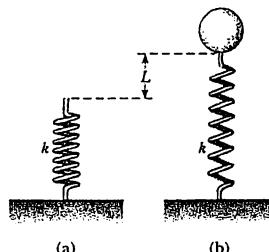


Figura P15.42

43. In riferimento alla Figura 15.5, mostrare che il momento totale esercitato dall'acqua dietro la diga attorno ad un asse passante per O è $\frac{1}{3} \rho g u H^3$. Dimostrare che la linea d'azione della forza totale esercitata dall'acqua è ad una distanza $\frac{1}{3} H$ da O .
44. Nel 1657 Otto von Guericke, inventore della pompa, fece il vuoto in una sfera fatta di due emisferi di ottone. Due squadre di otto cavalli ognuna non riuscirono a separare i due emisferi (Fig. P15.44). (a) Dimostrare che la forza F richiesta per separare i due emisferi è $\pi R^2 (P_0 - P)$, dove R è il raggio degli emisferi e P è la pressione interna che è molto minore di P_0 . (b) Determinare la forza se $P = 0.100 P_0$ ed $R = 0.300 \text{ m}$.
45. Nel 1983, gli Stati Uniti iniziarono a coniare la moneta

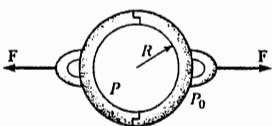


Figura P15.44 (Henry Leap and Jim Lehman)

ta di un cent, usando zinco ricoperto con rame invece di rame puro. Se la massa di un vecchio cent di rame è di 3.083 g, mentre quella di un cent nuovo è di 2.517 g, calcolare la percentuale di zinco (in volume) nel nuovo cent. La densità del rame è di 8.960 g/cm^3 mentre quella dello zinco è di 7.133 g/cm^3 . La moneta vecchia e la nuova hanno lo stesso volume.

46. Un involucro sferico sottile di massa 4.00 kg e diametro 0.200 m è riempito con elio (densità = 0.180 kg/m^3). Esso viene liberato da fermo sul fondo di una piscina piena d'acqua profonda 4.00 m. (a) Trascurando gli effetti dovuti all'attrito, mostrare che l'involucro sale con accelerazione costante, e determinare il valore di questa accelerazione. (b) Quanto tempo impiega per raggiungere la superficie dell'acqua?
47. Un fluido incoppressibile, non viscoso, inizialmente fermo nella porzione verticale del tubo mostrato in Figura P15.47a, dove $L = 2.00 \text{ m}$. Quando la valvola viene aperta, il fluido scorre nella sezione orizzontale del tubo. Qual è la velocità del fluido quando esso si trova interamente nella sezione orizzontale come in Figura P15.47b? Si assuma che la sezione di tutto il

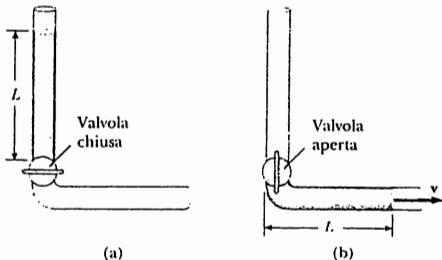


Figura P15.47

- tubo sia costante.
48. Dell'acqua scende da una diga alta h metri a una velocità di $R \text{ kg/s}$. (a) Dimostrare che la potenza fornita dall'acqua è

$$P = Rgh$$

- dove g è l'accelerazione di gravità. (b) Ciascuna unità idroelettrica, della Diga del Grand Coulee, scarica l'acqua alla velocità di $8.50 \times 10^5 \text{ kg/s}$ da una altezza di 87.0 m . La potenza sviluppata dalla caduta dell'acqua è convertita in energia elettrica con una efficienza dell'85.0%. Determinare la potenza elettrica prodotta da ciascuna unità idroelettrica.
49. Dimostrare che la variazione di pressione atmosferica con l'altitudine è data da $P = P_0 e^{-\alpha h}$ con $\alpha = \rho_0 g / P_0$, P_0 è la pressione atmosferica a un livello di riferimento, e ρ_0 è la densità dell'aria a questo livello. Assumere che la diminuzione di pressione atmosferica col crescere dell'altitudine sia data dall'Equazione 15.4 e che la densità dell'aria sia proporzionale alla pressione.
50. Un cubo di ghiaccio di lato 20.0 mm galleggia in un bicchiere di acqua fredda con una delle sue facce parallela alla superficie dell'acqua. (a) A quale distanza dalla superficie dell'acqua si trova la faccia inferiore del cubo? (b) Dell'alcool etilico alla stessa temperatura viene versato lentamente sulla superficie dell'acqua fino a formare uno strato di 5.00 mm , al di sopra del livello dell'acqua. Quando il cubo di ghiaccio è nuovamente in equilibrio idrostatico, quale sarà la distanza tra la superficie dell'acqua e la faccia inferiore del cubo? (c) Viene versato dell'altro alcool etilico fino a che la faccia superiore del cubo di ghiaccio sia allo stesso livello dell'alcool (in equilibrio idrostatico). Qual è lo spessore dello strato di alcool etilico?
51. Un pallone leggero riempito di elio di densità 0.180 kg/m^3 è legato tramite una fune leggera di lunghezza $L = 3.00 \text{ m}$. La fune è legata al suolo, formando un pendolo semplice "invertito" come in Figura P15.51a. Se il pallone viene spostato leggermente dall'equilibrio, come in Figura P15.51b, (a) mostrare che il suo moto è un moto armonico semplice, e (b) determinare il periodo del moto. Assumere che la densità dell'aria sia 1.29 kg/m^3 , e trascurare l'energia perduta per attrito.

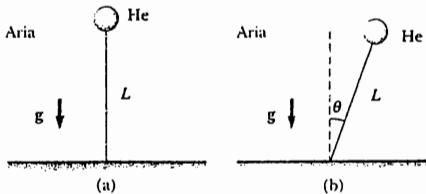


Figura P15.51

52. *Legge di Torricelli:* un serbatoio, coperto, contenente un liquido di densità ρ ha un buco laterale a un'altezza y_1 dal fondo (Fig. P15.52). Il diametro del buco è piccolo relativamente al diametro del serbatoio. L'aria sopra il liquido viene mantenuta a pressione P . Si assuma che il flusso sia stazionario e privo di attrito. Mostrare che la velocità alla quale il liquido viene fuori dal buco è

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh}$$

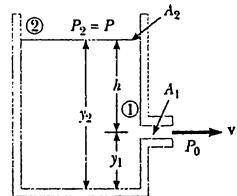


Figura P15.52

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Essa potrebbe esercitare sul pavimento una pressione sufficiente per lasciare degli incavi e delle tracce sulla copertura. La grande pressione è causata dal fatto che il suo peso è distribuito sulla superficie piccolissima della sezione dei tacchi a spillo. Se tu fossi la padrona di casa, potresti suggerirle di togliersi le scarpe e di usare delle ciabatte.
- Se si pensa il grano immagazzinato nel silo come un fluido, la pressione che il grano esercita sulle pareti del silo aumenta con l'aumentare della profondità proprio come aumenta la pressione dell'acqua in un lago all'aumentare della profondità. Quindi, lo spazio fra collari è inferiore nelle porzioni più basse per contrastare le forze che agiscono sulle pareti verso l'esterno in queste regioni.
- Il livello di galleggiamento di una nave in acqua non dipende dalla pressione atmosferica. L'aria esercita una forza di galleggiamento trascurabile rispetto all'acqua. La forza di Archimede dipende dalla pressione *differenziale* nel fluido. In un giorno di alta pressione, la pressione in tutti i punti dell'acqua è maggiore di quella in un giorno di bassa pressione. Poiché, inoltre, l'acqua è praticamente incompressibile, il tasso di variazione di pressione con la profondità è lo stesso, non causando quindi alcuna variazione nella forza di Archimede.
- Nell'oceano, la barca galleggia a causa della forza di Archimede dovuta all'*acqua salata*. L'acqua salata è più densa dell'acqua dolce. Quando la barca viene trainata lungo il fiume, la forza di Archimede dovuta all'acqua dolce del fiume non è sufficiente a equilibrare il peso della barca, per cui essa affonda.
- La bilancia non sarà in equilibrio: il lato del piombo sarà più basso. Benché i pesi in entrambi i lati della bilancia siano gli stessi, la gomina-piuma, a causa del suo grande volume, subirà una forza di galleggiamento dovuta all'aria circostante. Quindi, la forza risultante del peso e della forza di galleggiamento, verso il basso, sarà maggiore per il piombo che per la gomina-piuma.
- Il livello dello stagno diminuisce. Ciò accade perché l'ancora sposta più acqua quando è a bordo. Un oggetto che galleggia sposta un volume d'acqua il cui peso è uguale al peso dell'oggetto. Un oggetto sommerso, sposta un volume d'acqua uguale al volume dell'oggetto. Poiché la densità dell'ancora è maggiore di quella dell'acqua, un volume d'acqua che pesi quanto l'ancora sarà maggiore del volume dell'ancora.
- Quando il camion vi sorpassa, l'aria tra voi e il camion viene compressa nel canale fra voi e il camion e si muove a velocità maggiore di quando la vostra vettura si trova all'aria aperta. Secondo il teorema di Bernoulli, l'alta velocità dell'aria produce una pressione più bassa di quella dell'aria dal lato della vettura verso l'esterno. La differenza di pressione fornisce una forza risultante agente sulla vostra macchina verso il camion.

16

Temperatura e teoria cinetica dei gas

Il nostro studio fin qui ha riguardato principalmente la meccanica newtoniana, la quale riesce a spiegare un'ampia gamma di fenomeni come il moto delle palle da baseball, dei razzi e dei pianeti. Ora ci dedicheremo allo studio della termodinamica, che si occupa dei concetti di calore e temperatura. Come vedremo, la termodinamica spiega molto bene le proprietà macroscopiche della materia e la correlazione fra queste proprietà e la meccanica degli atomi e delle molecole.

Vi siete mai chiesti come un frigorifero raffreddi, o quali tipi di trasformazioni avvengono nel motore di una automobile o che cosa accada dell'energia cinetica di un oggetto quando si ferma? Le leggi della termodinamica e i concetti di calore e temperatura ci permetteranno di rispondere a queste domande pratiche. A un oggetto che viene riscaldato possono accadere molte cose. Le sue dimensioni possono cambiare leggermente, oppure esso può essere fuso, fatto evaporare, bruciato o perfino fatto



◀ Il recipiente di vetro contiene ghiaccio secco (anidride carbonica solida). La nube bianca è vapore di anidride carbonica, il quale è più denso dell'aria e quindi cade dal recipiente.
(R. Folwell/Science Photo Library/Photo Researchers)

- 16.1 Temperatura e principio zero della termodinamica
- 16.2 I termometri e le scale di temperatura
- 16.3 Dilatazione termica di solidi e liquidi
- 16.4 Descrizione macroscopica di un gas perfetto
- 16.5 La teoria cinetica dei gas

esplosione. Il risultato dipende dalla composizione dell'oggetto, da quanto viene riscaldato e dall'ambiente che lo circonda. In generale, la termodinamica si occupa delle trasformazioni fisiche e chimiche della materia in tutti i suoi stati di aggregazione, solido, liquido, gas e plasma.

Questo capitolo si conclude con lo studio dei gas perfetti. Affronteremo questo studio in due fasi. Nella prima esamineremo i gas perfetti su scala macroscopica. Qui avremo a che fare con relazioni fra grandezze quali la pressione, il volume e la temperatura. Nella seconda fase, esamineremo i gas su scala microscopica, usando un modello che rappresenti i componenti di un gas come dei punti materiali. Quest'ultimo approccio, chiamato *teoria cinetica dei gas*, ci aiuterà a comprendere ciò che accade a livello atomico capace di influire su proprietà macroscopiche come la pressione e la temperatura.

16.1 • TEMPERATURA E PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

Spesso associamo il concetto di **temperatura** di un oggetto alla sensazione di quanto caldo o freddo esso sia nel toccarlo. Pertanto, i nostri sensi ci forniscono una indicazione qualitativa della temperatura. Però i nostri sensi sono infidabili e spesso ingannevoli. Per esempio, se noi rimuoviamo un contenitore metallico per ghiaccio e una confezione di verdura congelata dal congelatore, il contenitore del ghiaccio sembra, al tatto, più freddo della verdura anche se entrambi hanno la stessa temperatura. Ciò avviene perché il metallo è un conduttore di calore migliore del cartone. Ciò di cui abbiamo bisogno è un metodo affidabile e riproducibile per stabilire il «caldo» o il «freddo» relativo dei corpi. Gli scienziati hanno sviluppato vari tipi di termometri per fare queste misure quantitative.

Siamo abituati al fatto che due oggetti a temperature iniziali diverse raggiungeranno alla fine una temperatura intermedia, se messi a contatto l'uno con l'altro. Per esempio, se due bevande, una calda e l'altra fredda, sono poste in un contenitore isolato, esse raggiungeranno una temperatura di equilibrio, con la bevanda fredda che si riscalderà e quella calda che si raffredderà. Similmente, se una tazza di caffè caldo viene raffreddata con un cubetto di ghiaccio, il ghiaccio fonderà e la temperatura del caffè diminuirà.

Per capire il concetto di temperatura è utile prima definire due espressioni usate molto spesso: **contatto termico** ed **equilibrio termico**. Per afferrare il significato di **contatto termico**, immaginiamo due oggetti posti in un contenitore isolato in modo tale che essi possano interagire fra loro ma non con il resto del mondo. Se gli oggetti si trovano a temperature diverse essi si scambiano energia. L'**energia scambiata tra gli oggetti a causa della differenza di temperatura si chiama calore**. Esamineremo il concetto di calore in dettaglio nel Capitolo 17. Per lo scopo della corrente discussione, assumeremo che i due oggetti sono in **contatto termico** se tra essi può essere scambiato calore. L'**equilibrio termico** è la situazione nella quale due corpi in **contatto termico** tra di loro cessano di avere scambio di calore.

Consideriamo ora due corpi, A e B, che non sono in **contatto termico** tra loro e un terzo corpo, C, che sarà il nostro termometro. Vogliamo determinare se A e B sarebbero o no in **equilibrio termico** una volta posti in **contatto termico** tra loro. Il termometro (corpo C) viene inizialmente messo in **contatto termico** con A finché si raggiunge l'equilibrio termico. A questo punto l'indicazione del

termometro rimarrà costante e ne prenderemo nota. Il termometro viene poi messo in contatto termico con B e viene registrata la sua lettura dopo che si è raggiunto l'equilibrio termico. Se le due letture sono le stesse, allora A e B sono in equilibrio termico fra loro.

Possiamo riassumere questi risultati in un enunciato noto come **principio zero della termodinamica** (principio dell'equilibrio):

Se i corpi A e B sono separatamente in equilibrio termico con un terzo corpo C, allora A e B saranno in equilibrio termico fra loro se posti in contatto termico.

- **Principio zero della termodinamica**

Questo enunciato, sebbene sembri ovvio e insignificante, è facilmente provato sperimentalmente ed è importantissimo poiché può essere usato per definire la temperatura. Possiamo riferirci alla temperatura come alla proprietà che determina se un corpo è in equilibrio termico con altri corpi oppure no. **Due corpi in equilibrio termico fra loro sono alla stessa temperatura.**

16.2 • I TERMOMETRI E LE SCALE DI TEMPERATURA

I termometri sono dispositivi usati per definire e misurare la temperatura di un sistema. Tutti i termometri fanno uso della variazione di qualche proprietà fisica con la temperatura. Alcune di queste proprietà fisiche sono (1) la variazione di volume di un liquido, (2) la variazione in lunghezza di un solido, (3) la variazione di pressione di un gas a volume costante, (4) la variazione di volume di un gas a pressione costante, (5) la variazione della resistenza elettrica di un conduttore e (6) la variazione di colore di un corpo molto caldo. Per una data sostanza, si può stabilire una scala di temperatura basata su una di queste grandezze fisiche.

Il termometro più comune di uso quotidiano consiste di una massa liquida - usualmente mercurio o alcool - che si dilata in un capillare di vetro quando viene riscaldato (Fig. 16.1). In questo caso la proprietà fisica è la variazione di volume di un liquido. Si può ora definire qualsiasi variazione di temperatura come proporzionale alla variazione di lunghezza della colonna di liquido. Il termometro può essere tarato ponendolo in contatto termico con qualche sistema naturale che rimanga a temperatura costante. Un tale sistema è una miscela di acqua e ghiaccio in equilibrio termico a pressione atmosferica, la quale, per definizione, si trova alla temperatura di zero gradi Celsius, scritta 0°C . Questa temperatura viene chiamata **punto di fusione del ghiaccio**. Un altro sistema usato comunemente è una miscela di acqua e vapore in equilibrio termico a pressione atmosferica; la sua temperatura è 100°C , il **punto di ebollizione dell'acqua**. Una volta stabiliti i livelli del liquido termometrico in questi due punti, la colonna viene divisa in 100 segmenti uguali, ognuno dei quali indica una variazione di temperatura di un grado Celsius.

Termometri tarati in questo modo presentano dei problemi quando sono necessarie letture molto accurate. Per esempio, un termometro ad alcool tarato ai punti di congelamento ed ebollizione dell'acqua è in accordo con un termometro a mercurio solo nei punti di taratura. Poiché mercurio e alcool hanno proprietà di dilatazione termica differenti, quando uno legge una temperatura, diciamo, di 50°C , l'altro può indicare un valore leggermente diverso.

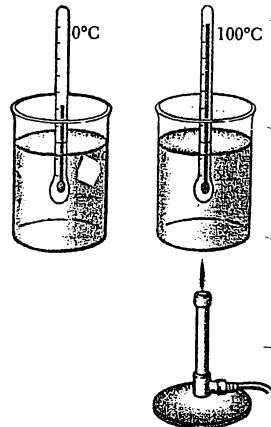


Figura 16.1 Rappresentazione schematica di un termometro a mercurio. A causa della dilatazione termica, il livello del mercurio aumenta quando il mercurio viene riscaldato da 0°C (punto di fusione del ghiaccio) a 100°C (punto di ebollizione dell'acqua).

Le discrepanze fra termometri sono grandi specialmente se le temperature da misurare sono lontane dai punti di taratura.

Un ulteriore problema pratico di ogni termometro è il suo limitato intervallo di temperatura. Un termometro al mercurio, per esempio, non si può usare al di sotto del suo punto di congelamento, che è -39°C . Per superare questi problemi, abbiamo bisogno di un termometro universale le cui letture siano indipendenti dalla sostanza usata. Il termometro a gas fornisce questo requisito.

Il termometro a gas a volume costante e la scala Kelvin

In un termometro a gas, le letture di temperatura sono quasi indipendenti dalla sostanza usata nel termometro. Uno di questi è il termometro a gas a volume costante mostrato in Figura 16.2. La proprietà fisica di questo dispositivo è la variazione di pressione con la temperatura di un volume fissato di gas. Quando fu sviluppato il termometro a gas a volume costante, esso fu tarato usando i punti di fusione e di ebollizione dell'acqua, nel modo seguente (adesso viene usata una procedura di taratura diversa, che sarà discussa brevemente). Il contenitore del gas veniva immerso in un bagno di acqua e ghiaccio in equilibrio termico e il serbatoio di mercurio *B* veniva alzato o abbassato in modo tale da mantenere il volume del gas costante, condizione indicata dal punto zero sulla scala. L'altezza *h*, la differenza tra i livelli del serbatoio e della colonna *A*, indicava la pressione nel contenitore a 0°C . Il contenitore veniva quindi immerso in acqua al punto di ebollizione e il serbatoio *B* veniva riaggiustato finché l'altezza della colonna *A* fosse ancora coincidente con lo zero della scala, assicurando così che il volume del gas fosse rimasto lo stesso di quello che aveva nel bagno di acqua e ghiaccio (da cui la designazione "a volume costante"). Ciò dava un valore della pressione a 100°C . Questi valori di pressione e temperatura venivano riportati in un grafico come in Figura 16.3. La linea congiungente i due punti serve come curva di taratura per misurare temperature incognite. Se volessimo misurare la temperatura di una sostanza, dovremmo porre il contenitore del gas in contatto termico con la sostanza e aggiustare la colonna di mercurio finché il gas abbia raggiunto il suo volume specificato. L'altezza della colonna di mercurio ci indicherà la pressione del gas e noi potremo allora trovare la temperatura della sostanza dal grafico.

Supponiamo ora che le temperature siano misurate con vari termometri a gas, contenenti gas diversi. Gli esperimenti dimostrano che le letture dei termometri sono quasi indipendenti dal tipo di gas usato finché la pressione del gas è bassa e la temperatura è molto al di sopra del punto di liquefazione (Fig. 16.4). L'accordo fra termometri che usano gas diversi migliora se si riduce la pressione.

Se si estrapolano le curve in Figura 16.4 indietro verso le temperature negative, si trova, in tutti i casi, che la pressione è zero quando la temperatura è -273.15°C . Questa temperatura significativa è usata come base per la scala di temperatura in Kelvin, la quale pone il suo punto zero (0 K) a -273.15°C . L'ampiezza di un grado nella scala Kelvin è la stessa di quella della scala Celsius. Allora, la relazione che consente la conversione fra queste temperature è

$$T_C = T - 273.15 \quad [16.1]$$

dove T_C è la temperatura Celsius e T la temperatura Kelvin (chiamata anche temperatura assoluta).

I primi termometri a gas fecero uso dei punti di fusione e di ebollizione dell'acqua in accordo con la procedura appena descritta. Tuttavia, questi punti sono difficili da riprodurre sperimentalmente. Per questa ragione, una nuova

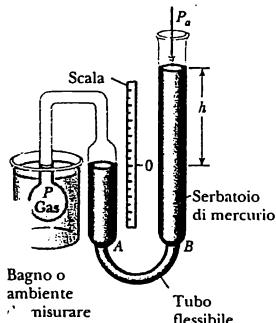


Figura 16.2 Un termometro a gas a volume costante misura la pressione del gas contenuto nel recipiente immerso nel bagno. Il volume del gas nel recipiente è mantenuto costante alzando o abbassando il serbatoio *B* in modo tale che il livello del mercurio nella colonna *A* rimanga costante.

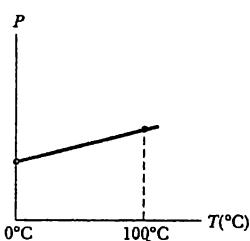


Figura 16.3 Un tipico grafico della pressione in funzione della temperatura ottenuto con un termometro a gas a volume costante. I punti rappresentano temperature di riferimento note (punto di fusione e di ebollizione dell'acqua).

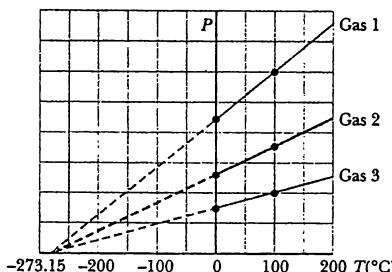


Figura 16.4 La pressione in funzione della temperatura per gas rarefatti. Si noti che, per tutti i gas, l'estrapolazione della pressione è zero alla temperatura unica di -273.15°C .

procedura, basata su un singolo punto fisso, fu adottata nel 1954 dal Comitato Internazionale di Pesi e Misure. Il punto triplo dell'acqua, che corrisponde all'unica temperatura e pressione alla quale acqua, vapor d'acqua e ghiaccio coesistono in equilibrio, fu scelto come un riferimento di temperatura conveniente e riproducibile per la scala Kelvin. Ciò accade alla temperatura di 0.01°C e alla pressione di 4.58 mm di mercurio. Alla temperatura del punto triplo dell'acqua è stato assegnato nella scala Kelvin il valore di 273.16 kelvin (K). Così, l'unità di temperatura SI, il kelvin, è definito come $1/273.16$ della temperatura del punto triplo dell'acqua.

La Figura 16.5 mostra la temperatura Kelvin per vari processi fisici e strutturali. Ci si riferisce alla temperatura di 0 K come allo zero assoluto, e come mostra la Figura 16.5 questa temperatura non può mai essere raggiunta, benché esperimenti in laboratorio l'abbiano avvicinata.

Cosa accadrebbe a una sostanza se la sua temperatura raggiungesse 0 K? Come indica la Figura 16.4, la pressione esercitata sulle pareti del recipiente sarebbe zero. Nel Paragrafo 16.5 mostreremo che la pressione di un gas è proporzionale all'energia cinetica delle molecole del gas. Allora, secondo la fisica classica, l'energia cinetica del gas dovrebbe essere zero e non dovrebbe esserci più moto in tutti i singoli componenti del gas; quindi, le molecole dovrebbero stare ferme sul fondo del contenitore. La teoria quantistica, discussa nel Capitolo 28, modifica questa affermazione indicando che a questa temperatura così bassa dovrebbe esserci una energia residua, chiamata *energia del punto zero*.

Le scale di temperatura Celsius, Fahrenheit e Kelvin

L'Equazione 16.1 mostra che la temperatura Celsius, T_C , è spostata rispetto alla temperatura assoluta (Kelvin) T , di 273.15° . Poiché l'ampiezza di un grado è la stessa nelle due scale, una differenza di temperatura di 5°C è uguale a una differenza di temperatura di 5 K. Le due scale differiscono soltanto per la scelta del punto zero. Allora, il punto di fusione dell'acqua (273.15 K) corrisponde a 0.00°C , e il punto di ebollizione (373.15 K) è equivalente a 100.00°C .

- *Il kelvin*



Figura 16.5 Temperatura assoluta alla quale avvengono vari processi fisici. Si noti che la scala è logaritmica.

La scala di temperatura più comune usata quotidianamente negli Stati Uniti è la **scala Fahrenheit**. Questa scala pone la temperatura di fusione dell'acqua a 32°F e la temperatura del punto di ebollizione a 212°F. La relazione fra le scale Celsius e Fahrenheit è

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32^\circ\text{F} \quad [16.2]$$

L'Equazione 16.2 si può usare facilmente per trovare una relazione tra variazioni di temperatura nelle scale Celsius e Fahrenheit. Viene lasciato come problema mostrare che se la temperatura Celsius varia di ΔT_C , la temperatura Fahrenheit varia di una quantità ΔT_F , data da

$$\Delta T_F = \frac{9}{5} \Delta T_C \quad [16.3]$$

Fisica ragionata 1

Un gruppo di astronauti del futuro atterra su un pianeta abitato. Fra essi si accende una discussione sulle forme di vita in funzione delle scale di temperatura. Viene fuori che gli abitanti di questo pianeta hanno una scala di temperatura basata sul punto di fusione e di ebollizione dell'acqua separati da 100 gradi degli abitanti. Queste due temperature su questo pianeta saranno le stesse di quelle sulla Terra? L'ampiezza dei gradi degli abitanti del pianeta sarà la stessa della nostra? Supponiamo che gli abitanti abbiano pure derivato una scala simile alla scala Kelvin. Il loro zero assoluto sarà lo stesso del nostro?

Ragionamento I valori di 0°C e 100°C per il punto di fusione e di ebollizione dell'acqua sono definiti dalla pressione atmosferica. Su un altro pianeta, è molto improbabile che la pressione sia la stessa di quella terrestre. Quindi, sul pianeta l'acqua potrebbe congelare e bollire a temperature diverse. Gli abitanti potrebbero chiamare queste temperature 0° e 100°, ma queste non corrisponderebbero alle nostre temperature di 0° e 100°. Se gli abitanti assegnassero i valori di 0° e 100° a queste temperature, allora i loro gradi non avrebbero la stessa ampiezza dei nostri gradi Celsius (a meno che la loro pressione atmosferica non fosse uguale alla nostra). Per una versione della scala Kelvin da parte di questo pianeta, lo zero assoluto sarebbe uguale al nostro, poiché esso è basato su una definizione naturale e universale, piuttosto che essere associato a una particolare sostanza o a una data pressione atmosferica.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Durante una lezione di astronomia, la temperatura al centro di una stella viene data dal professore come 1.5×10^7 gradi. Uno studente chiede se essa è espressa in Kelvin o Celsius. Come rispondereste?

Esempio 16.1 Riscaldamento di una pentola d'acqua

Una pentola d'acqua viene riscaldata da 25°C a 80°C. Qual è la sua variazione di temperatura nella scala Kelvin e in quella Fahrenheit?

Soluzione Dall'Equazione 16.1, vediamo che la variazione di temperatura nella scala Celsius è uguale

alla variazione nella scala Kelvin. Perciò,

$$\Delta T = \Delta T_C = 80 - 25 = 55^\circ\text{C} = 55\text{ K}$$

Dall'Equazione 16.3, troviamo che:

$$\Delta T_F = \frac{9}{5} \Delta T_C = \frac{9}{5} (80 - 25) = 99^\circ\text{F}$$

ESERCIZIO 1 Il punto di fusione dell'oro è 1064°C, e il punto di ebollizione è 2660°C. (a) Esprimere queste temperature in kelvin. (b) Calcolare la differenza fra queste temperature in gradi Celsius e Kelvin.

Risposte (a) 1337 K; 2933 K (b) 1596°C; 1596 K

16.3 • DILATAZIONE TERMICA DI SOLIDI E LIQUIDI

La nostra discussione sui termometri a liquido ha fatto uso di una ben nota variazione che avviene in una sostanza: quando la sua temperatura aumenta, il suo volume aumenta. (Come vedremo brevemente, in alcuni materiali il volume diminuisce quando la temperatura aumenta). Questo fenomeno, noto come **dilatazione termica**, gioca un ruolo importante in numerose applicazioni. Per esempio, giunti di dilatazione termica debbono essere inseriti in fabbricati, autostrade in cemento e ponti per compensare le variazioni di dimensioni causate dalle variazioni di temperatura.

La dilatazione termica complessiva di un corpo è la conseguenza della variazione della distanza media di separazione tra gli atomi o le molecole che lo costituiscono. Per capire ciò, consideriamo come si comportano gli atomi in una sostanza solida. A temperature ordinarie, gli atomi vibrano attorno alle loro posizioni di equilibrio con un'ampiezza di circa 10^{-11} m, e la separazione media tra di essi è circa 10^{-10} m. Quando la temperatura del solido aumenta, gli atomi vibrano con ampiezza maggiore e la separazione media tra di essi aumenta. L'aumento della separazione media con l'aumento della temperatura (e la conseguente dilatazione termica) è dovuta all'asimmetria della curva dell'energia potenziale fra gli atomi¹. Se la dilatazione termica di un corpo è sufficientemente piccola confrontata con le sue dimensioni iniziali, allora la variazione di ogni dimensione è, con buona approssimazione, dipendente dalla prima potenza della variazione di temperatura.

Supponiamo che un corpo abbia una lunghezza iniziale L_0 lungo una certa direzione a una certa temperatura. La lunghezza aumenta di ΔL per una variazione di temperatura ΔT . Gli esperimenti mostrano che, quando ΔT è sufficientemente piccolo, ΔL è proporzionale a ΔT e a L_0 :

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad [16.4]$$

ossia

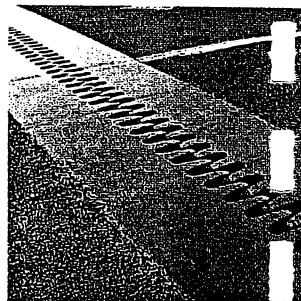
$$L - L_0 = \alpha L_0 (T - T_0) \quad [16.5]$$

dove L è la lunghezza finale, T è la temperatura finale e la costante di proporzionalità α è chiamata **coefficiente medio di dilatazione lineare** per un dato materiale ed è espressa in unità di $(^{\circ}\text{C})^{-1}$.

Può essere utile immaginare la dilatazione termica come un ingrandimento fotografico. Per esempio, quando una rondella metallica è riscaldata (Fig. 16.6), tutte le dimensioni, incluso il raggio del foro, aumentano in accordo con l'Equazione 16.4. La Tabella 16.1 elenca i coefficienti medi di dilatazione lineare per vari materiali. Si noti che per questi materiali α è positivo, indicando un incremento della lunghezza con un aumento della temperatura. Ciò non accade sempre. Per esempio, alcune sostanze, come la calcite (CaCO_3), all'aumentare della temperatura si dilatano lungo una dimensione (α positivo) e si contraggono lungo un'altra (α negativo).

Poiché la dimensione lineare di un corpo varia con la temperatura, segue che anche il volume e l'area variano con la temperatura. Si consideri un cubo che abbia il lato di lunghezza iniziale L_0 e perciò un volume $V_0 = L_0^3$. Quando la temperatura viene aumentata, la lunghezza di ciascun lato aumenta di

$$L = L_0 + \alpha L_0 \Delta T$$



Giunti di dilatazione termica vengono usati per separare le sezioni di strada sui ponti. Senza questi giunti, la superficie si deformerebbe a causa della dilatazione termica nei giorni molto caldi, e si fessurererebbe a causa della contrazione nei giorni molto freddi. (Frank Siteman, Stock/Boston)

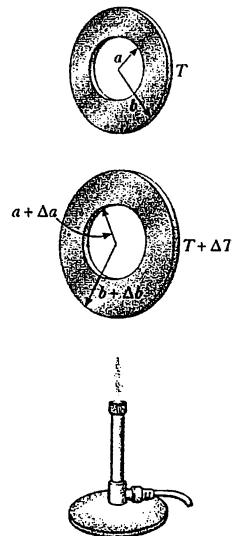
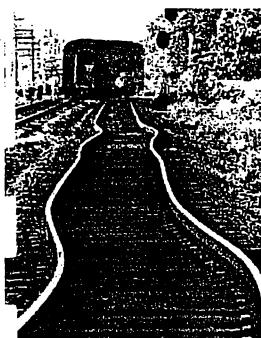


Figura 16.6 Dilatazione termica di una rondella di metallo omogeneo. Si noti che quando la rondella viene riscaldata tutte le dimensioni aumentano. (La dilatazione è esagerata in questa figura).

¹ Se le oscillazioni fossero rigorosamente armoniche la separazione atomica media non cambierebbe, indipendentemente dall'ampiezza dell'oscillazione [N.d.T.].

TABELLA 16.1 Coefficienti di dilatazione per alcuni materiali a temperatura ambiente

Materiale	Coefficiente di dilatazione lineare α ($^{\circ}\text{C}$) $^{-1}$	Materiale	Coefficiente di dilatazione cubica β ($^{\circ}\text{C}$) $^{-1}$
Alluminio	24×10^{-6}	Alcool etilico	1.12×10^{-4}
Ottone e bronzo	19×10^{-6}	Benzene	1.24×10^{-4}
Rame	17×10^{-6}	Acetone	1.5×10^{-4}
Vetro (ordinario)	9×10^{-6}	Glicerina	4.85×10^{-4}
Vetro (Pyrex)	3.2×10^{-6}	Mercurio	1.82×10^{-4}
Piombo	29×10^{-6}	Trementina	9.0×10^{-4}
Acciaio	11×10^{-6}	Benzina	9.6×10^{-4}
Invar (lega Ni-Fe)	0.9×10^{-6}	Aria a 0°C	3.67×10^{-3}
Cemento	12×10^{-6}	Elio a 0°C	3.665×10^{-3}



Espansione termica: l'altissima temperatura in un giorno di luglio in Ausbury Park è la causa della deformazione dei binari ferroviari. (Wide World Photos)

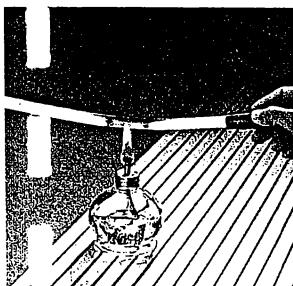


Figura 16.7 Una lamina bimetallica si piega quando viene riscaldata su una fiamma. Essa ritorna alla sua forma originale quando si riporta a temperatura ambiente. In che modo essa si piegherebbe se fosse raffreddata? (Per gent. conc. di Central Scientific Company)

Il nuovo volume, $V = L^3$, sarà

$$L^3 = (L_0 + \alpha L_0 \Delta T)^3 = L_0^3 + 3\alpha L_0^2 \Delta T + 3\alpha^2 L_0^3 (\Delta T)^2 + \alpha^3 L_0^3 (\Delta T)^3$$

Gli ultimi due termini di questa espressione contengono la quantità $\alpha \Delta T$ elevata alla seconda e alla terza potenza. Poiché $\alpha \Delta T$ è molto minore di uno, il suo quadrato diventa ancora più piccolo. Quindi, possiamo trascurare questi due termini e ottenere un'espressione più semplice:

$$V = L^3 = L_0^3 + 3\alpha L_0^2 \Delta T = V_0 + 3\alpha V_0 \Delta T$$

ossia

$$\Delta V = V - V_0 = \beta V_0 \Delta T \quad [16.6]$$

dove $\beta = 3\alpha$. La grandezza β è chiamata **coefficiente medio di dilatazione cubica (o volumica)**. Nel derivare l'Equazione 16.6 abbiamo considerato un cubo pieno ma essa descrive un campione solido di qualsiasi forma, liquido, o gas a pressione costante.

Con un procedimento analogo, si può mostrare che l'*aumento di superficie* di un corpo dovuto alla variazione di temperatura è

$$\Delta A = \gamma A_0 \Delta T \quad [16.7]$$

dove γ , il **coefficiente medio di dilatazione quadratica (o superficiale)**, è dato da $\gamma = 2\alpha$.

Come viene indicato nella Tabella 16.1, ciascuna sostanza ha il suo proprio caratteristico coefficiente di dilatazione termica. Per esempio, quando due barre di ottone e di acciaio di uguale lunghezza subiscono lo stesso aumento di temperatura a partire da un valore iniziale comune, la barra di ottone si dilata di più di quella di acciaio perché ha un coefficiente di dilatazione maggiore di quello dell'acciaio. Un semplice dispositivo chiamato lamina bimetallica, che utilizza questo principio, viene utilizzato come termostato in apparecchi di uso comune. La lamina è realizzata saldando due metalli diversi. Quando la temperatura della lamina aumenta, i due metalli si dilatano di quantità differenti e la lamina si piega come in Figura 16.7.

Fisica ragionata 2

Supponiamo che un corpo solido, leggermente più denso dell'acqua, sia posto al fondo di un contenitore d'acqua. Si può cambiare la temperatura di questo sistema in modo che il corpo galleggi in superficie?

Ragionamento Immaginiamo di abbassare la temperatura. I liquidi tendono ad avere coefficienti di dilatazione lineare maggiori che i solidi, cosicché la densità dell'acqua aumenterà più rapidamente con la caduta di temperatura di quella del solido. Se la densità del solido fosse inizialmente soltanto appena maggiore di quella dell'acqua, sarebbe possibile in linea di principio di farlo galleggiare abbassando la temperatura, sebbene si debba fronteggiare il possibile problema del raggiungimento del punto di congelamento dell'acqua prima che ciò accada.

Fisica ragionata 3

Una padrona di casa sta dipingendo il soffitto, e una goccia di pittura cade dal pennello sul bulbo caldo di una lampadina accesa. Il bulbo si rompe. Perché?

Ragionamento L'involucro di vetro di una lampadina riceve energia dalla superficie interna per radiazione del filamento incandescente e per il moto del gas che riempie il bulbo. Quindi, il vetro può diventare molto caldo. Se una goccia di pittura cade sul vetro, la porzione di vetro dell'involucro si raffredderà istantaneamente, e la contrazione di questa regione causerà una tensione termica che romperà il vetro.

PROBLEMA CONCETTUALE 2

I comuni termometri sono fatti di una colonna di mercurio in un contenitore di vetro. Basandosi sul funzionamento di questi termometri comuni, quale tra il vetro e il mercurio ha maggiore coefficiente di dilatazione lineare? (Non rispondere consultando la tabella!)

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Due sfere sono costruite con lo stesso metallo e hanno lo stesso raggio, ma una è cava e l'altra è piena. Le sfere subiscono lo stesso aumento di temperatura. Quale sfera si espanderà di più?

Esempio 16.2 Il foro diventa più grande o più piccolo?

In un pezzo di acciaio è praticato un foro di area 100 cm^2 alla temperatura di 20°C . Qual è l'area del foro se l'acciaio è riscaldato da 20°C a 100°C ?

dell'area del foro si può trovare usando l'Equazione 16.7.

$$\Delta A = \gamma A_0 \Delta T$$

Soluzione Un foro in un materiale si dilata esattamente allo stesso modo come se fosse un pezzo di materiale che avesse la stessa forma del foro. La variazione

$$\begin{aligned} &= [22 \times 10^{-6} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}] (100 \text{ cm}^2) (80 \text{ }^\circ\text{C}) \\ &= 0.18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Il comportamento anomalo dell'acqua

In generale i liquidi aumentano il loro volume all'aumentare della temperatura e hanno coefficienti di dilatazione cubica circa dieci volte maggiori di quelli dei solidi. L'acqua è un'eccezione a questa regola, come si può vedere dalla sua curva di densità in funzione della temperatura in Figura 16.8. Quando la temperatura aumenta da 0°C a 4°C , l'acqua si contrae e pertanto la sua densità aumenta. Per temperature superiori a 4°C , l'acqua si dilata all'aumentare della temperatura. In altre parole, la densità dell'acqua raggiunge un valore massimo di 1000 kg/m^3 a 4°C .

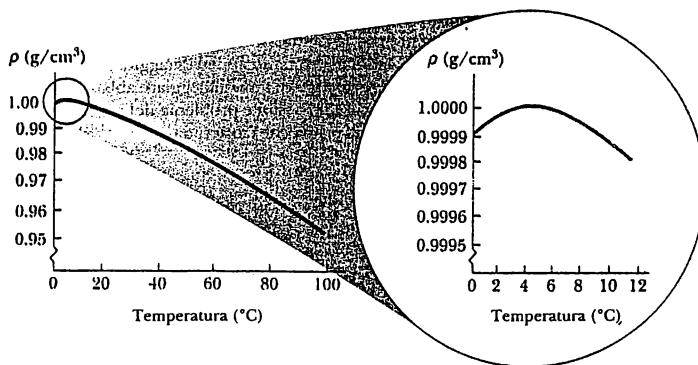


Figura 16.8 La densità dell'acqua in funzione della temperatura. L'inserito sulla destra mostra che il massimo di densità per l'acqua si verifica a 4°C.

Possiamo spiegare perché uno stagno si congela in superficie come conseguenza del comportamento anomalo del coefficiente di dilatazione termica dell'acqua. Quando la temperatura atmosferica scende, diciamo da 7°C a 6°C, l'acqua in superficie dello stagno si raffredda pure e conseguentemente diminuisce il volume. Ciò significa che l'acqua in superficie è più densa dell'acqua sottostante, la quale non si è raffreddata né è diminuita di volume. Il risultato è che l'acqua della superficie fluisce verso il fondo e l'acqua più calda dal fondo viene forzata in superficie dove si raffredda. Quando la temperatura atmosferica si trova tra 4°C e 0°C, tuttavia, l'acqua in superficie si dilata per il raffreddamento e diventa meno densa di quella al di sotto. Il processo di mescolamento finisce e alla fine l'acqua congegna. Quando l'acqua congegna, il ghiaccio rimane in superficie perché il ghiaccio è meno denso dell'acqua. Il ghiaccio continua a crescere in superficie mentre l'acqua vicina al fondo dello stagno rimane a 4°C. Se così non fosse, pesci e altre forme di vita aquatica non potrebbero sopravvivere.

ESERCIZIO 2 Un serbatoio di carburante di automobile è riempito fino all'orlo con 45 L di benzina a 10°C. Immediatamente dopo, il veicolo viene parcheggiato in un posto dove la temperatura è 35°C. Quanta benzina si versa dal serbatoio a causa della dilatazione? (Trascurare la dilatazione del serbatoio). Risposta 1.08 L



Figura 16.9 Un gas perfetto contenuto in un cilindro con un pistone mobile che permette di variare il volume. Lo stato del gas è definito dalla sua pressione, dal suo volume e dalla sua temperatura.

16.4 • DESCRIZIONE MACROSCOPICA DI UN GAS PERFETTO

In questo paragrafo ci occuperemo delle proprietà di un gas di massa m confinato in un recipiente di volume V a pressione P e temperatura T . Sarebbe utile sapere come sono messe in relazione queste grandezze. In generale, l'equazione che collega queste grandezze, chiamata *equazione di stato*, è molto complicata. Tuttavia, se il gas viene mantenuto a pressione molto bassa (oppure a bassa densità), si trova sperimentalmente che l'*equazione di stato* è molto semplice. Ci si riferisce comunemente a un simile gas a bassa densità come a un *gas perfetto*. La maggior parte dei gas a temperatura ambiente e a pressione atmosferica si comporta come un gas perfetto.

È conveniente esprimere la quantità di gas in un dato volume in funzione del numero di moli, n . Come abbiamo appreso nel Paragrafo 1.2, una mole di qualunque sostanza è quella quantità di materia che contiene un numero di Avogadro di molecole, $N_A = 6.022 \times 10^{23}$. Il numero di moli, n , di una sostanza è correlato alla sua massa, m , dalla relazione

$$n = \frac{m}{M} \quad [16.8]$$

dove M è il peso molecolare della sostanza, generalmente espresso in grammi su mole. Per esempio, il peso molecolare della molecola di ossigeno, O_2 , è 32.0 g/mole. Quindi, la massa di una mole di ossigeno è 32.0 g.

Si supponga ora che un gas perfetto sia confinato in un recipiente cilindrico il cui volume possa essere variato per mezzo di un pistone mobile, come in Figura 16.9. Assumeremo che il cilindro non abbia perdite, e quindi la massa (o il numero di moli) rimanga costante. Per un sistema di questo tipo, gli esperimenti forniscono le seguenti informazioni. Primo, quando il gas viene tenuto a temperatura costante, la sua pressione è inversamente proporzionale al volume (legge di Boyle). Secondo, quando la pressione del gas è tenuta costante, il volume è direttamente proporzionale alla temperatura (legge di Charles e Gay-Lussac). Queste osservazioni possono essere riassunte nella seguente equazione di stato dei gas perfetti:

$$PV = nRT \quad [16.9]$$

In questa espressione, chiamata legge dei gas perfetti, R è una costante per uno specifico gas che può essere determinata sperimentalmente, e T è la temperatura assoluta in kelvin. Esperimenti effettuati su parecchi gas dimostrano che quando la pressione si avvicina a zero, la quantità PV/nT si avvicina allo stesso valore di R per tutti i gas. Per questa ragione R è chiamata **costante universale dei gas**. In unità SI, dove la pressione viene espressa in pascal (Pa) e il volume in metri cubi (m^3), il prodotto PV ha unità di newton per metro ($N \cdot m$), o joule, ed R ha il valore

$$R = 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K} \quad [16.10]$$

Se la pressione viene espressa in atmosfere e il volume in litri (1 litro = $10^{-3} \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$), allora R ha il valore

$$R = 0.0821 \text{ L} \cdot \text{atm/mole} \cdot \text{K}$$

Usando questo valore di R nell'Equazione 16.9, si trova che il volume occupato da una mole di qualunque gas alla pressione atmosferica e 0°C (273 K) è 22.4 litri.

La legge dei gas perfetti è spesso espressa introducendo il numero totale di molecole, N . Poiché il numero totale di molecole è uguale al prodotto del numero di moli per il numero di Avogadro, N_A , possiamo scrivere l'Equazione 16.9 come

$$\begin{aligned} PV &= nRT = \frac{N}{N_A} RT \\ PV &= Nk_B T \end{aligned} \quad [16.11]$$

dove k_B è chiamata **costante di Boltzmann** e ha il valore

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad [16.12]$$



Questi palloni colorati salgono quando si brucia del gas al loro interno. Poiché l'aria calda è meno densa dell'aria fredda, la forza di galleggiamento verso l'alto è maggiore della forza totale verso il basso, causando la salita del pallone. Il moto verticale si può anche controllare facendo sfiatare l'aria calda alla sommità del pallone. (Richard Megna, Fundamental Photographs, NYC)

- Costante universale dei gas

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Alcuni giganti si fermano nei negozi per comprare del cibo preconfezionato, incluse buste di patatine. Essi guidano fino ad arrivare in montagna per il loro picnic. Quando scaricano il loro cibo, notano che le buste delle patatine sono gonfie come dei palloni. Perché accade ciò?

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Un materiale molto comune da imballaggio è costituito da piccole bolle di aria intrappolate fra due fogli di plastica. Molti trovano divertente far scoppiare le bolle dopo aver ricevuto un pacco (altri individui che stanno vicino e sentono il rumore potrebbero non essere altrettanto divertiti). Questo materiale protegge meglio il contenuto del pacco in un giorno caldo o in un giorno freddo?

Esempio 16.3 Compressione di una bombola di gas

Una certa quantità di gas, elio puro, viene immessa in una bombola che contiene un pistone mobile. Il volume, la pressione e la temperatura iniziali sono $15 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 200 kPa e 300 K. Se il volume è ridotto a $12 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ e la pressione aumenta a 350 kPa, trovare la temperatura finale del gas. Assumere che l'elio si comporti come un gas perfetto.

Soluzione Poiché non esce gas dalla bombola, il numero di moli rimane costante; pertanto usando $PV = nRT$ per i punti iniziale e finale si ottiene

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

dove i ed f si riferiscono ai valori iniziali e finali. Risolvendo per T_f si ottiene

$$T_f = \left(\frac{P_f V_f}{P_i V_i} \right) T_i = \frac{(350 \text{ kPa}) (12 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(200 \text{ kPa}) (15 \times 10^{-3} \text{ m}^3)} (300 \text{ K}) \\ = 420 \text{ K}$$

Esempio 16.4 Riscaldamento di una bottiglia d'aria

Una bottiglia di vetro sigillata, che contiene aria alla pressione atmosferica (101 kPa), di volume 30 cm³ è a 27°C. Viene riscaldata. Quando la temperatura dell'aria nella bottiglia raggiunge 200°C, qual è la pressione dentro la bottiglia? Si assuma che qualsiasi variazione di volume della bottiglia sia abbastanza piccola da essere trascurabile.

Soluzione Questo esempio si risolve nello stesso modo dell'Esempio 16.3. Cominciamo dall'espressione

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

Poiché i volumi iniziale e finale del gas sono assunti uguali, questa espressione si riduce alla

$$\frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f}$$

Ciò implica

$$P_f = \left(\frac{T_f}{T_i} \right) (P_i) = \left(\frac{473 \text{ K}}{300 \text{ K}} \right) (101 \text{ kPa}) = 159 \text{ kPa}$$

Ovviamente, più alta è la temperatura, più alta è la pressione esercitata dall'aria contenuta nella bottiglia. Naturalmente se la temperatura aumentasse sufficientemente, la bottiglia si frantumerebbe.

ESERCIZIO 3 In questo esempio trascureremo la variazione del volume della bottiglia. Se il coefficiente di dilatazione volumica per il vetro è $27 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$, trovare la variazione di volume. Risposta 0.14 cm³

ESERCIZIO 4 Un gas perfetto è contenuto in un recipiente a volume costante. Inizialmente, la sua temperatura è 10.0°C e la sua pressione è 2.50 atm. Qual è la sua pressione quando la sua temperatura è 80.0°C? Risposta 3.12 atm

ESERCIZIO 5 Un serbatoio pieno di ossigeno (O₂) contiene 12.0 kg di ossigeno a una pressione differenziale di 40.0 atm. Determinare la massa dell'ossigeno che è stata prelevata dal serbatoio quando la pressione segnata è 25.0 atm. Si assuma che la temperatura del serbatoio rimanga costante. Risposta 4.39 kg

16.5 • LA TEORIA CINETICA DEI GAS

Nel precedente paragrafo abbiamo discusso le proprietà di un gas perfetto, usando grandezze come la pressione, il volume, il numero di moli e la temperatura. In questo paragrafo mostreremo che queste proprietà macroscopiche possono essere comprese sulla base di ciò che accade su scala atomica (microscopica). Inoltre, riesamineremo la legge dei gas perfetti in termini del comportamento delle singole molecole che costituiscono il gas.

Poiché le interazioni molecolari in un gas sono molto più deboli di quelle nei solidi e nei liquidi, limiteremo la nostra discussione al comportamento molecolare dei gas.

Modello molecolare per la pressione di un gas perfetto

Useremo inizialmente la teoria cinetica dei gas per mostrare che la pressione che un gas esercita sulle pareti del recipiente è una conseguenza degli urti delle molecole del gas contro le pareti. Faremo le seguenti ipotesi.

- Il numero di molecole è grande, e la distanza di separazione tra esse è grande confrontata con le loro dimensioni. Ciò significa che le molecole occupano una frazione trascurabile del volume del contenitore.
- Le molecole obbediscono alle leggi del moto di Newton, ma nell'insieme si muovono a caso. Con "a caso" intendiamo che ogni molecola si può muovere in qualunque direzione con qualsiasi velocità. Assumiamo inoltre che la distribuzione delle velocità non vari nel tempo; nonostante gli urti fra le molecole. Cioè, in ogni istante, una certa percentuale di molecole si muove ad alta velocità, una certa costante percentuale si muove a bassa velocità, e così via.
- Nel nostro modello trascuriamo gli urti reciproci delle molecole.
- Le forze fra molecole sono trascurabili, tranne durante gli urti. Le forze tra le molecole sono a corto raggio, cosicché le molecole interagiscono fra loro soltanto durante gli urti.
- Il gas considerato è una sostanza pura; cioè, tutte le molecole sono identiche.

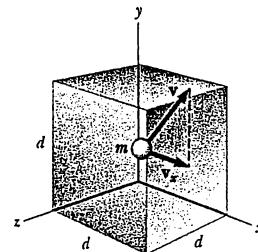
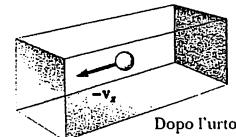
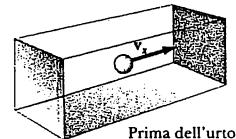


Figura 16.10 Una scatola cubica di lato d contenente un gas perfetto. La molecola indicata si muove con velocità v .

- *Ipotesi della teoria cinetica per un gas perfetto*



Sebbene spesso rappresentiamo un gas perfetto come costituito di singoli atomi, i gas molecolari a bassa pressione mostrano ugualmente una buona approssimazione al comportamento ideale. Gli effetti delle rotazioni e vibrazioni molecolari non influenzano, in media, il moto che qui consideriamo.

Deriviamo ora un'espressione per la pressione di N molecole di un gas perfetto in un contenitore di volume V . Il contenitore è un cubo con spigoli di lunghezza d (Fig. 16.10). Focalizzeremo la nostra attenzione su una di queste molecole, di massa m e assumeremo che si stia muovendo con una componente della velocità nella direzione x , v_x (Fig. 16.11). Quando la molecola urta elasticamente contro una parete, la sua velocità si inverte. Poiché la componente x della quantità di moto p_x della molecola è mv_x prima dell'urto e $-mv_x$ dopo l'urto, la variazione di quantità di moto della molecola è

$$\Delta p_x = mv_f - mv_i = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x$$

Applicando il teorema dell'impulso (Eq. 8.12) alla molecola, si ha

$$F_1 \Delta t = \Delta p_x = -2mv_x$$

Figura 16.11 Una molecola urta elasticamente contro la parete del contenitore. La sua componente x della quantità di moto viene invertita e una quantità di moto viene comunicata alla parete. La sua componente y rimane invariata. In questa costruzione assumiamo che la molecola si muova sul piano xy .

Capitolo 16 Temperatura e teoria cinetica dei gas

Affinché la molecola possa subire due urti contro la stessa parete, deve attraversare una distanza $2d$ nella direzione x . Quindi, l'intervallo di tempo tra due urti contro la stessa parete è

$$\Delta t = \frac{2d}{v_x}$$

La sostituzione di questo risultato nell'equazione dell'impulso ci consente di esprimere la forza che la parete esercita su una molecola:

$$F_1 = \frac{-2mv_x}{\Delta t} = \frac{-2mv_x^2}{2d} = \frac{-mv_x^2}{d}$$

Ora, per la terza legge di Newton, la forza applicata dalla molecola alla parete è uguale in modulo e in verso opposto:

$$F_{1, \text{sulla parete}} = -F_1 = -\left(\frac{-mv_x^2}{d}\right) = \frac{mv_x^2}{d}$$

La forza totale esercitata sulla parete da tutte le molecole si trova sommando le forze di ciascuna molecola:

$$F = \frac{m}{d} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2)$$

In questa equazione, v_{x1} è la componente x della velocità della molecola 1, v_{x2} è la componente x della molecola 2, e così via. La somma termina quando raggiungiamo la molecola N poiché vi sono N molecole nel contenitore.

Per procedere oltre, si noti che il valore medio del quadrato delle velocità nella direzione x per le N molecole è

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2}{N}$$

Pertanto, la forza totale sulla parete può essere scritta

$$F = \frac{m}{d} N \overline{v_x^2}$$

Adesso focalizziamoci su una molecola nel contenitore e diciamo che questa molecola ha componenti della velocità v_x , v_y e v_z . Il teorema di Pitagora mette in relazione il quadrato della velocità con i quadrati delle componenti:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Quindi, il valore medio di v^2 per tutte le molecole nel contenitore è in relazione ai valori medi di v_x^2 , v_y^2 e v_z^2 secondo l'espressione

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

Tuttavia, la media del quadrato delle componenti della velocità è la stessa in ogni direzione in quanto il moto è totalmente casuale. Quindi,

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

e si ottiene

$$\overline{v^2} = 3 \overline{v_x^2}$$

Allora, la forza totale sulla parete è

$$F = \frac{N}{3} \left(\frac{mv^2}{d} \right)$$

Questa espressione ci permette di trovare la pressione esercitata sulla parete:

$$\begin{aligned} P &= \frac{F}{A} = \frac{F}{d^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{N}{d^3} mv^2 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{N}{V} \right) (mv^2) \\ P &= \frac{2}{3} \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \end{aligned} \quad [16.13]$$

- **Pressione di un gas perfetto**

Questo risultato mostra che la pressione è proporzionale al numero di molecole per unità di volume e all'energia cinetica media traslazionale delle molecole, $\frac{1}{2} mv^2$. Con questo semplice modello di gas perfetto, siamo arrivati a un importante risultato che mette in relazione la grandezza macroscopica della pressione con una grandezza atomica, il valore medio del quadrato della velocità molecolare. Quindi, abbiamo una chiave di collegamento tra il mondo atomico (microscopico) e il mondo macroscopico.

Possiamo notare che l'Equazione 16.13 verifica alcune proprietà della pressione che probabilmente ci sono familiari. Un modo di aumentare la pressione all'interno di un contenitore è di aumentare il numero di molecole per unità di volume del contenitore. Si ottiene ciò quando si immette aria in uno pneumatico. La pressione dello pneumatico può anche essere aumentata aumentando l'energia cinetica traslazionale delle molecole. Come vedremo brevemente, ciò può essere ottenuto aumentando la temperatura del gas all'interno dello pneumatico. Ciò accade perché la pressione all'interno dello pneumatico aumenta quando lo pneumatico si riscalda durante un lungo viaggio. Il continuo flettersi degli pneumatici, mentre si muovono lungo la superficie stradale, genera calore che viene trasferito all'aria all'interno aumentandone la temperatura, la quale infine produce l'aumento di pressione.

Interpretazione molecolare della temperatura

Possiamo avere qualche intuizione del significato di temperatura scrivendo prima l'Equazione 16.13 nella forma più familiare

$$PV = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$$

Confrontiamo ora questa con l'equazione di stato di un gas perfetto:

$$PV = Nk_B T$$

Si ricordi che l'equazione di stato è basata su fatti sperimentali che riguardano il comportamento macroscopico dei gas. Uguagliando i membri a destra di queste espressioni, si ottiene che

$$T = \frac{2}{3k_B} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \quad [16.14]$$

- **La temperatura è proporzionale all'energia cinetica media**

Cioè, la temperatura è una misura diretta dell'energia cinetica media traslazionale delle molecole.

Riscrivendo l'Equazione 16.14, si può mettere in relazione l'energia cinetica media traslazionale molecolare con la temperatura:

**Energia cinetica •
media per molecola**

Cioè, l'energia cinetica media traslazionale per molecola è $\frac{3}{2} k_B T$. Poiché $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$, segue che

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} k_B T \quad [16.15]$$

Analogamente, per i moti lungo y e z, segue che

$$\frac{1}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} k_B T \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} k_B T$$

Perciò, ad ogni grado di libertà traslazionale è associata una uguale quantità di energia del gas, e precisamente $\frac{1}{2} k_B T$. (In generale, i "gradi di libertà" si riferiscono al numero di modi indipendenti tramite i quali una molecola può acquisire energia). Una generalizzazione di questo risultato, nota come **teorema di equipartizione dell'energia**, dice che l'**energia di un sistema in equilibrio termico è ugualmente suddivisa fra tutti i gradi di libertà**.

L'energia cinetica traslazionale totale di N molecole di un gas è semplicemente N volte l'energia media per molecola, che è data dall'Equazione 16.15:

$$E = N \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T \quad [16.17]$$

dove abbiamo usato la costante di Boltzmann $k_B = R/N_A$ e il numero di moli di gas $n = N/N_A$. Da questo risultato, vediamo che l'**energia cinetica totale di un sistema di molecole è proporzionale alla temperatura assoluta del sistema**.

La radice quadrata di $\overline{v^2}$ è chiamata **radice quadratica media (rqm) della velocità delle molecole**. Dall'Equazione 16.15 otteniamo per la velocità rqm,

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad [16.18]$$

dove M è il peso molecolare in kg/mole. Questa espressione mostra che, a una data temperatura, le molecole più leggere si muovono più velocemente, in media, delle molecole più pesanti. Per esempio, l'idrogeno, con un peso molecolare di 2×10^{-3} kg/mole, si muove quattro volte più veloce dell'ossigeno, il cui peso molecolare è 32×10^{-3} kg/mole. La Tabella 16.2 elenca la velocità rqm di varie molecole a 20°C.

TABELLA 16.2 Alcune velocità rqm

Gas	Peso molecolare (g/mole)	v_{rms} a 20°C (m/s)
H ₂	2.02	1902
He	4.0	1352
H ₂ O	18	637
Ne	20.1	603
N ₂ o CO	28	511
NO	30	494
CO ₂	44	408
SO ₂	64	338

Fisica ragionata 4

Immaginiamo un gas dentro un cilindro con un pistone mobile. Il pistone viene spinto in basso, comprimendo il gas, e poi rilasciato. Quando le molecole del gas urtano contro il pistone, esso si innalza. Dal punto di vista (a) energetico, e (b) della teoria cinetica, spiegare come l'espansione di questo gas causa l'abbassamento della sua temperatura.

Ragionamento (a) Dal punto di vista energetico, le molecole urtano il pistone e lo spostano di una certa quantità. Quindi, le molecole compiono lavoro sul pistone, il che rappresenta un trasferimento di energia dal gas verso l'esterno. Di conseguenza, l'energia interna del gas diminuisce. Poiché la temperatura è correlata all'energia interna, diminuisce pure la temperatura del gas.

(b) Dal punto di vista della teoria cinetica, una molecola che urta col pistone causa un rimbalzo del pistone con una certa velocità. Secondo il principio di conservazione della quantità di moto, quindi, la molecola rimbalza con una velocità minore di quella che aveva prima dell'urto. Quindi, quando avvengono questi urti, la velocità media dell'insieme di molecole si riduce. Poiché la temperatura è correlata con la velocità media delle molecole, la temperatura del gas diminuisce.

PROBLEMA CONCETTUALE 6

I piccoli pianeti tendono ad avere poca o nessuna atmosfera. Perché?

Esempio 16.5 Un serbatoio di elio

Un serbatoio di volume 0.300 m^3 contiene 2.00 moli di gas elio a 20.0°C . Assumendo che l'elio si comporti come un gas perfetto (a) trovare l'energia interna totale del sistema.

Soluzione Usando l'Equazione 16.17 con $n = 2$ e $T = 293 \text{ K}$, si ottiene

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} (2.00 \text{ moli}) (8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K}) (293 \text{ K}) \\ &= 7.30 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

(b) Qual è l'energia cinetica media per molecola?

Soluzione Dall'Equazione 16.15, si vede che l'energia cinetica media per molecola è uguale a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \overline{v^2} &= \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}) (293 \text{ K}) \\ &= 6.07 \times 10^{-21} \text{ J} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 6 Usando il fatto che la massa molare dell'elio è $4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mole}$, calcolare la velocità $\overline{v_{\text{qm}}}$ degli atomi a 20.0°C . Risposta $1.35 \times 10^3 \text{ m/s}$.

SOMMARIO

Il principio zero della termodinamica afferma che se due corpi, A e B, sono separatamente in equilibrio termico con un terzo corpo, allora A e B sono in equilibrio termico fra loro.

La relazione fra T_C , la temperatura Celsius e T , la temperatura (assoluta) Kelvin, è

$$T_C = T - 273.15 \quad [16.1]$$

La relazione fra le temperature Fahrenheit e Celsius è

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32^\circ\text{F} \quad [16.2]$$

Quando una sostanza è riscaldata, generalmente si dilata. Se un oggetto ha una lunghezza iniziale L_0 a una certa temperatura ed è sottoposto a una variazione di temperatura ΔT , la sua lunghezza varia di una quantità ΔL la quale è proporzionale alla lunghezza iniziale dell'oggetto e alla variazione di temperatura:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad [16.4]$$

Il parametro α è chiamato coefficiente medio di dilatazione lineare.

La variazione di superficie di una sostanza è data da

$$\Delta A = \gamma A_0 \Delta T \quad [16.7]$$

dove γ è il coefficiente medio di dilatazione quadratica che è uguale a 2α .

La variazione di volume di molte sostanze è proporzionale al volume iniziale, V_0 , e alla variazione di temperatura, ΔT :

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

dove β è il coefficiente medio di dilatazione cubica che è uguale a 3α .

Un gas perfetto è un gas che obbedisce all'equazione

$$PV = nRT \quad [16.9]$$

dove P è la pressione del gas, V il suo volume, n il numero di moli, R la costante universale dei gas ($8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K}$), e T è la temperatura assoluta in kelvin. Un gas reale a pressioni molto basse si comporta approssimativamente come un gas perfetto.

La pressione di N molecole di un gas perfetto contenute in un volume V è data da

$$P = \frac{2}{3} \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{1}{2} m \bar{v^2} \right) \quad [16.13]$$

dove $\frac{1}{2} m \bar{v^2}$ è l'**energia cinetica media per molecola**.

L'energia cinetica media delle molecole di un gas è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta del gas:

$$\frac{1}{2} m \bar{v^2} = \frac{3}{2} k_B T \quad [16.15]$$

dove k_B è la costante di Boltzmann ($1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$).

La radice quadratica media della velocità delle molecole (v_{rms}) è

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad [16.18]$$

DOMANDE CONCETTUALI

1. Un pezzo di rame è lasciato cadere dentro un recipiente d'acqua. Se la temperatura dell'acqua aumenta, cosa succede alla temperatura del rame? Quando saranno in equilibrio termico l'acqua e il rame?
2. Nel film *Apollo 13* (Universal, 1995), l'attore che impersona l'astronauta Jim Lovell dice, descrivendo la sua passeggiata lunare, "Io camminerò in un luogo dove c'è una differenza di 400° fra la luce del sole e l'ombra." Che cosa è esattamente ciò che è caldo alla luce del sole e freddo all'ombra? Supponiamo che un astronauta che sta sulla Luna tenga un termometro nella sua mano guantata. Esso leggerà la temperatura del vuoto sulla superficie della Luna? Esso leggerà una temperatura? Se è così, quale oggetto o sostanza ha questa temperatura?
3. Quando l'anello metallico e la sfera metallica in Figura D16.3 sono a temperatura ambiente, la sfera non può passare attraverso l'anello, mentre dopo il riscaldamento dell'anello, la sfera può attraversarlo. Perché ciò è possibile?
4. Spiegare perché la colonna di mercurio di un termometro prima discende leggermente e poi risale se il termometro viene immerso in acqua calda.
5. Dei segni per indicare la lunghezza vengono fatti su un nastro d'acciaio in un ambiente alla temperatura di 22°C . Le misure fatte con il nastro in un giorno in

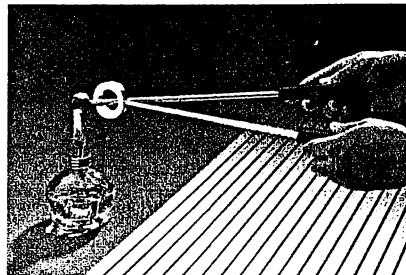


Figura D16.3 (Per gent. conc. di Central Scientific Company)

cui la temperatura è 27°C sono troppo lunghe, troppo corte o corrette?

6. Se un pallone riempito di elio è posto in un congelatore, il suo volume aumenterà, diminuirà o rimarrà invariato?
7. Che cosa prevede l'equazione di stato dei gas perfetti per il volume di un gas allo zero assoluto? Perché questa previsione è sbagliata?
8. Cosa accade a un palloncino di elio lasciato libero in aria? Si espanderà o si contrarrà? Si fermerà salendo a una certa altezza?

9. Un pallone di gomma riempito d'aria viene immerso in un recipiente di azoto liquido che si trova a 77 K. Descrivere cosa accade al pallone, assumendo che esso rimanga flessibile mentre si raffredda.
10. Due cilindri identici alla medesima temperatura contengono lo stesso tipo di gas. Se il cilindro A contiene tre volte più gas del cilindro B, che cosa si può dire delle pressioni relative nei cilindri?
11. Dopo che del cibo è stato cucinato in una pentola a pressione, perché è molto importante raffreddare la pentola con acqua fredda prima di tentare di aprire il coperchio?
- [12]** La costa in un particolare punto dell'oceano è molto rocciosa. In un posto, la formazione rocciosa è tale che una grotta è posta con un'apertura sottomarina, come viene mostrato in Figura D16.12. (a) All'interno della grotta, vi è una zona di aria intrappolata. Quando il livello del mare si alza e si abbassa per le maree, il livello dell'acqua nella grotta si alza e si abbassa? Se la risposta è affermativa, avrà la stessa ampiezza di quella del mare? (b) Supponiamo che la grotta sia profonda, cosicché essa sia completamente sommersa e riempita d'acqua quando c'è alta marea, come viene mostrato in Figura D16.12b. Alla bassa marea, il livello dell'acqua nella grotta sarà lo stesso



Figura D16.12

di quello del mare?

- [13]** Una frizione a base di alcool viene qualche volta usata per aiutare ad abbassare la temperatura di un paziente che soffre. Perché ciò aiuta?
14. Un gas perfetto è contenuto in un recipiente a 300 K. Se la temperatura viene aumentata a 900 K, di quale fattore varierà ciascuna delle seguenti grandezze? (a) L'energia cinetica media di una molecola; (b) la velocità rqm delle molecole; (c) la variazione della quantità di moto media in un urto di una molecola con una parete; (d) la frequenza di urti delle molecole con le pareti; (e) la pressione del gas.

PROBLEMI

Paragrafo 16.2 I termometri e le scale di temperatura

- Convertire le seguenti temperature in Celsius e Kelvin: (a) la temperatura normale del corpo umano, 98.6°F; (b) la temperatura dell'aria in un giorno freddo, -5.00°F.
- In un termometro a gas a volume costante, la pressione a 20.0°C è 0.980 atm. (a) Qual è la pressione a 45.0°C? (b) Qual è la temperatura se la pressione è 0.500 atm?
- [3]** Un termometro a gas, a volume costante, viene tarato alla temperatura del ghiaccio secco (-80.0°C) e a quella del punto di ebollizione dell'alcool etilico (78.0°C). Le pressioni sono 0.900 atm e 1.635 atm, rispettivamente. Determinare (a) il valore dello zero assoluto fornito dalla taratura, (b) le pressioni che si misurano al punto di fusione ed ebollizione dell'acqua.
- Mostrare che la temperatura -40.0° è unica in quanto essa ha lo stesso valore numerico nelle scale Celsius e Fahrenheit.
- [5]** L'azoto liquido ha il punto di ebollizione a -195.81°C, alla pressione atmosferica. Esprimere questa temperatura in (a) gradi Fahrenheit, (b) Kelvin.
- In una scala di temperature Strana, il punto di congelamento dell'acqua è -15.0°S e il punto di ebollizione è +60.0°S. Sviluppare una equazione di conversione

lineare fra questa scala di temperatura e la scala Celsius.

- Mostrare che se la temperatura nella scala Celsius varia di ΔT_C , la temperatura Fahrenheit varia di ΔT_F che è uguale a $\frac{9}{5} \Delta T_C$.
- La differenza di temperatura fra l'interno e l'esterno di un motore di automobile è 450°C. Esprimere questa differenza di temperatura (a) nella scala Fahrenheit, (b) nella scala Kelvin.
- La temperatura di uno stato del nord-est degli Stati Uniti varia da 105°F in estate a -25.0°F in inverno. Scrivere l'intervallo di temperatura in gradi Celsius.

Paragrafo 16.3 Dilatazione termica di solidi e liquidi

(Usare la Tabella 16.1).

- Le sezioni di cemento di un'autostrada sono progettate per avere una lunghezza di 25.0 m. Le sezioni sono costruite a 10.0°C. Quale spaziatura minima l'ingegnere dovrebbe lasciare *tra le sezioni* per eliminare la deformazione del cemento, se il cemento dovrà raggiungere la temperatura di 50.0°C?
- [11]** Un cavo telefonico in rame è teso, con un certo lasco, tra due pali, distanti 35.0 m. Determinare la variazione di lunghezza del cavo quando la temperatura passa da -20.0°C, in un giorno d'inverno, a 35.0°C,

in un giorno d'estate.

12. Un anello di ottone con un diametro interno di 10.00 cm, alla temperatura di 20.0°C, viene riscaldato e fatto scorrere lungo un'asta di alluminio, che ha un diametro, a 20.0°C, di 10.01 cm. Nell'ipotesi che rimangano costanti i coefficienti di dilatazione lineari, determinare (a) la temperatura a cui bisogna raffreddare il sistema per poter separare i due oggetti. Questa condizione è realizzabile? (b) Che cosa succederebbe se il diametro dell'asta di alluminio fosse di 10.02 cm?
13. Una montatura di occhiali è costruita in plastica epossidica. A temperatura ambiente (si assuma 20.0°C), la montatura ha i buchi circolari per le lenti di 2.20 cm di raggio. A quale temperatura dovrebbe essere riscaldata la montatura per poter inserire lenti da 2.21 cm di raggio? Il coefficiente di dilatazione lineare per la plastica epossidica è 1.30×10^{-4} (°C) $^{-1}$.
14. Un'asta di rame e un'asta di acciaio vengono riscaldate. A 0°C il rame ha una lunghezza L_R , l'acciaio L_A . Quando le aste sono riscaldate o raffreddate, si mantiene una differenza di 5.00 cm fra le loro lunghezze. Determinare i valori di L_R e L_A .
15. Su una lastra di rame viene praticato un foro quadrato, di 8.00 cm di lato. Determinare la variazione dell'area del foro per un aumento di 50.0 K della temperatura della lastra.
16. Un contenitore da 200 litri viene completamente riempito, alla temperatura di 10.0°C, con tetracloruro di carbonio, che ha un coefficiente di dilatazione cubica di 5.81×10^{-4} (°C) $^{-1}$. Determinare la quantità di liquido che traboccherà se la temperatura viene portata a 30.0°C.
17. L'elemento attivo di un certo laser è costituito da una sbarretta di vetro lunga 30.0 cm con un diametro di 1.50 cm. Se la temperatura della sbarretta aumenta di 65.0°C, trovare l'aumento (a) in lunghezza, (b) in diametro e (c) in volume. (Usare $\alpha = 9.00 \times 10^{-6}$ (°C) $^{-1}$).
18. Una bottiglia di vetro Pirex viene tarata a temperatura ambiente (20.0°C) e poi riempita con acetone a 35.0°C, fino alla tacco di 100 ml. Il sistema viene successivamente riportato a 20.0°C. (a) Determinare il volume dell'acetone. (b) Vi è una significativa variazione del volume della bottiglia?
19. Del gas è contenuto in un recipiente di 8.00 litri a temperatura di 20.0°C e alla pressione di 9.00 atm. (a) Determinare il numero di moli del gas. (b) Quante molecole si trovano nel recipiente?
20. Una bombola, di 0.100 m³ di volume, contiene elio alla pressione di 150 atm. Quanti palloni sferici, di 30 cm di diametro, potranno essere riempiti alla pressione assoluta di 1.20 atm, con il gas contenuto nella bombola?
21. Un auditorio misura 10.0 m × 20.0 m × 30.0 m. Determinare il numero di molecole d'aria necessarie a riempire la sala, alla temperatura di 20.0°C e pressione di 1 atm.
22. Nove grammi d'acqua vengono versati in una pentola a pressione da 2.00 litri e riscaldati a 500°C. Determinare la pressione all'interno della pentola.
23. La massa totale di un pallone aerostatico e del suo carico (escludendo l'aria all'interno) è di 200 kg. Il volume del pallone è di 400 m³. L'aria esterna ha una temperatura di 10°C e la pressione di 1 atm = 1.013×10^5 Pa. Determinare a quale temperatura deve essere riscaldata l'aria nel pallone, affinché esso possa decollare. La densità dell'aria a 10.0°C è 1.25 kg/m^3 .
24. Una mole di ossigeno è alla pressione di 6.00 atm e alla temperatura di 27.0°C. (a) Se il gas viene riscaldato a volume costante finché la pressione raddoppia, qual è la temperatura finale? (b) Se il gas viene riscaldato in modo che sia la pressione che il volume raddoppiano, qual è la temperatura finale?
25. Uno pneumatico da automobile viene gonfiato con aria, originariamente alla temperatura di 10.0°C e pressione atmosferica. Durante il processo, l'aria viene compressa al 28.0% del suo volume iniziale e la temperatura viene portata a 40.0°C. Determinare la pressione, in Pa, dello pneumatico. Dopo un percorso ad alta velocità, la temperatura dell'aria nello pneumatico è di 85.0°C ed il volume interno risulta aumentato del 2.00%. Determinare il nuovo valore della pressione dello pneumatico, in Pa.
26. Un pallone atmosferico è progettato per gonfiarsi a un raggio massimo di 20.0 m quando è in volo alla sua altezza di esercizio, dove la pressione dell'aria è 0.0300 atm e la temperatura è 200 K. Se il pallone è riempito a pressione atmosferica e a 300 K, qual è il suo raggio al decollo?
27. Fare una stima della massa d'aria nella vostra stanza da letto. Fissate le grandezze che assumete come dati e i valori che misurate o di cui fate una stima.
28. Una stanza di volume 80.0 m³ contiene dell'aria che ha un peso molecolare medio di 29.0 g/mole. Se la temperatura della stanza aumenta da 18.0°C a 25.0°C, quale massa di aria (in kg) uscirà dalla stanza? Si assuma che la pressione dell'aria nella stanza sia mantenuta a 101 kPa.
29. Una stanza di volume V contiene dell'aria che ha un peso molecolare medio di M g/mole. Se la temperatura della stanza viene aumentata da T_1 a T_2 , quale massa di aria esce dalla stanza? Si assuma che la pressione nella stanza rimanga sempre P_0 .
30. A 25.0 m sotto la superficie del mare (densità = 1025 kg/m^3), in cui la temperatura è 5.00°C, un subacqueo espira una bolla d'aria che ha un volume

Paragrafo 16.4 Descrizione macroscopica di un gas perfetto

19. Del gas è contenuto in un recipiente di 8.00 litri a temperatura di 20.0°C e alla pressione di 9.00 atm. (a) Determinare il numero di moli del gas. (b) Quante molecole si trovano nel recipiente?
20. Una bombola, di 0.100 m³ di volume, contiene elio alla pressione di 150 atm. Quanti palloni sferici, di 30 cm di diametro, potranno essere riempiti alla pres-

di 1.00 cm^3 . Se la temperatura della superficie del mare è 20.0°C , qual è il volume della bolla proprio prima che scoppi sulla superficie?

Paragrafo 16.5 La teoria cinetica dei gas

31. Usare la definizione del numero di Avogadro per trovare la massa di un atomo di elio.
32. Un contenitore cubico chiuso ermeticamente di 20.0 cm di lato contiene un numero di molecole pari a tre volte il numero di Avogadro alla temperatura di 20.0°C . Trovare la forza esercitata dal gas su una delle pareti del recipiente.
33. Un cilindro contiene una miscela di elio e argon in equilibrio alla temperatura di 150°C . (a) Qual è l'energia cinetica media per ciascun tipo di molecola? (b) Qual è la velocità rqm di ciascun tipo di molecola?
34. Per quale temperatura la velocità rqm dell'atomo di elio (massa = $6.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$) sarebbe uguale (a) alla velocità di fuga dalla Terra, $1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$, e (b) la velocità di fuga dalla Luna, $2.37 \times 10^3 \text{ m/s}$?
35. Nel periodo di 1.00 s , 5.00×10^{23} molecole di azoto colpiscono una parete di area 8.00 cm^2 . Se le molecole si muovono con una velocità di 300 m/s e colpiscono la parete frontalmente con urti perfettamente elastici, trovare la pressione esercitata sulla parete. (La massa di una molecola di N_2 è $4.68 \times 10^{-26} \text{ kg}$).
36. La temperatura all'interno del Sole è approssimativamente $2.00 \times 10^7 \text{ K}$. Trovare (a) l'energia cinetica media traslazionale di un protone all'interno del Sole e (b) la radice quadratica media della velocità del protone.
37. Un recipiente da 5.00 litri contiene 0.125 moli di un gas perfetto alla pressione di 1.50 atm . Quanto è l'energia cinetica media traslazionale di una molecola?
38. Una miscela di due gas diffonde attraverso un filtro a un tasso proporzionale alla loro velocità rqm . (a) Trovare il rapporto delle velocità per i due isotopi del cloro, ^{35}Cl e ^{37}Cl , quando essi si diffondono nell'aria. (b) Quale isotopo è più veloce?

Problemi generali

39. Per quale temperatura Fahrenheit le temperature Kelvin e Fahrenheit sono numericamente uguali?
40. Uno studente misura la lunghezza di una sbarra di ottone con un metro di acciaio a 20.0°C . La lettura è 95.00 cm . Cosa indicherà il metro quando sbarra e metro si troveranno a (a) -15.0°C , (b) 55.0°C .
41. La densità della benzina è 730 kg/m^3 a 0°C . Quanti chilogrammi in più di benzina osterreste se compraste 40 litri di benzina a 0°C piuttosto che a 20°C da una pompa non compensata in temperatura?
42. Una palla d'acciaio ha il diametro di 4.000 cm a 20.0°C . Una lastra di alluminio presenta un foro del diametro di 3.994 cm a 20.0°C . Quale temperatura,

uguale, devono avere i due corpi affinché la palla attraversi il foro?

43. Un termometro a mercurio è costruito come in Figura P16.43. Il tubo capillare ha un diametro di 0.00400 cm e il bulbo ha il diametro di 0.250 cm . Trascurando la dilatazione del vetro, trovare la variazione di altezza della colonna di mercurio per una variazione di temperatura di 30.0°C .

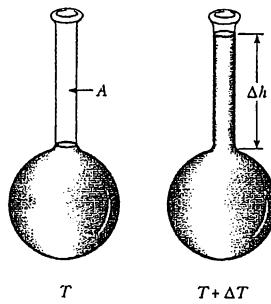


Figura P16.43

44. Un liquido con un coefficiente di dilatazione cubica β riempie appena la parte sferica di un capillare (Fig. P16.43) di volume V alla temperatura T . Il capillare è fatto di un materiale che ha coefficiente di dilatazione lineare α . Il liquido è libero di dilatarsi nella parte cilindrica del capillare di sezione A . (a) Se la temperatura aumenta di ΔT , mostrare che il liquido sale nel capillare di una quantità Δh data da $\Delta h = (V/A) \times (\beta - 3\alpha) \Delta T$. (b) Per un sistema tipico, come un termometro a mercurio, perché è una buona approssimazione il trascurare la dilatazione del capillare?
45. La lastra rettangolare mostrata in Figura P16.45 ha un'area uguale a ℓw . Se la temperatura aumenta di ΔT , mostrare che l'aumento dell'area è dato da $\Delta A = 2\alpha \Delta A T$, dove α è il coefficiente di dilatazione lineare. Quale approssimazione implica questa espressione?

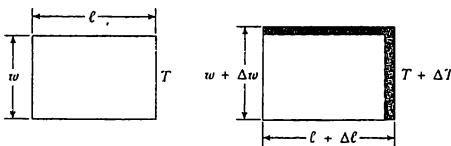


Figura P16.45

46. Mostrare che l'equazione di stato di un gas perfetto si può scrivere come $PM = \rho RT$, dove M è il peso molecolare.

47. Un fluido ha una densità ρ . (a) Mostrare che la variazione *frazionale* della densità per la variazione di temperatura ΔT è data da $\Delta\rho/\rho = -\beta\Delta T$. Qual è il significato del segno negativo? (b) L'acqua dolce ha una densità massima di 1.000 g/cm^3 a 4.0°C . A 10.0°C , la sua densità è 0.9997 g/cm^3 . Qual è β per l'acqua in questo intervallo di temperatura?
48. Un cilindro è chiuso sulla parte superiore da un pistone mobile, di 0.01 m^2 di sezione e di massa trascurabile, collegato a una molla di costante elastica $2.00 \times 10^3 \text{ N/m}$ (Fig. P16.48). Il cilindro contiene 5.00 litri di gas, alla pressione di 1 atm e alla temperatura di 20.0°C ; la molla in questa condizione non è in tensione. Se la temperatura viene portata a 250°C , determinare (a) l'innalzamento del pistone, (b) la pressione del gas.

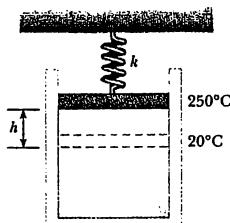


Figura P16.48

49. Un cilindro verticale di sezione A è limitato superiormente da un pistone di massa m , che può scorrere senza attrito (Fig. P16.49). (a) Se ci sono n moli di gas perfetto nel cilindro a temperatura T , determinare l'altezza h , a cui il pistone sarà in equilibrio sotto l'azione del proprio peso. (b) Qual è il valore di h se $n = 0.200$ moli, $T = 400 \text{ K}$, $A = 0.00800 \text{ m}^2$ e $m = 20.0 \text{ kg}$?
 50. Una sbarretta bimetallica è costituita da due sbarre sottili di metalli diversi, saldate tra di loro. Se la sbarra viene riscaldata, il metallo a coefficiente di dilatazione lineare maggiore subirà una dilatazione maggiore rispetto all'altro, costringendo la sbarra ad incurvarsi secondo un arco di circonferenza con il raggio esterno corrispondente alla circonferenza

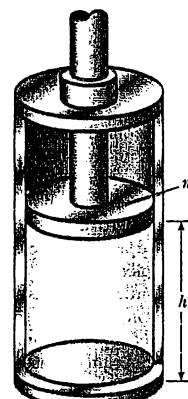


Figura P16.49

maggiore (Fig. P16.50). (a) Esprimere l'angolo di curvatura θ in funzione della lunghezza iniziale delle due sbarre, dei rispettivi coefficienti lineari di dilatazione, della variazione di temperatura e della differenza dei raggi ($\Delta r = r_2 - r_1$). (b) Dimostrare che l'angolo di curvatura si annulla per ΔT tendente a zero o per coefficienti di dilatazione uguali. (c) Che cosa avviene se si raffredda la sbarra?

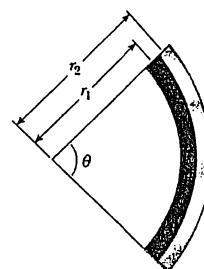


Figura P16.50

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Una risposta accurata sarebbe quella che la cosa non ha importanza! Le temperature in Kelvin e Celsius differiscono soltanto di 273 gradi. Questa differenza è inapprezzabile per temperature dell'ordine di 10^7 . Se immaginiamo che la temperatura data sia in Kelvin, e trascuriamo qualsiasi problema connesso con le cifre significative, allora la temperatura Celsius sarebbe $1.4999727 \times 10^7 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Il mercurio deve avere un coefficiente di dilatazione lineare maggiore. Quando la temperatura di un termometro sale, sia il mercurio che il vetro si dilatano. Se ambedue avessero lo stesso coefficiente di dilatazione lineare, il mercurio e la cavità di vetro si dilaterebbero della stessa quantità, e non vi sarebbe apparente movimento dell'estremo della colonna di mercurio relativamente alla scala di calibrazione sul

- vetro. Se il vetro si dilatasse di più del mercurio, la lettura diminuirebbe mentre la temperatura aumenterebbe. Ora che abbiamo dedotto ciò concettualmente, possiamo guardare la tabella e trovare che il coefficiente per il mercurio è circa 20 volte maggiore di quello del vetro, per cui la dilatazione del vetro si può effettivamente trascurare.
3. Una cavità in un materiale si dilata esattamente nello stesso modo come se la cavità fosse piena di materiale. Quindi, ambedue le sfere si dilateranno della stessa quantità.
 4. Le buste di patatine contengono una certa quantità di aria. Quando le buste vengono portate in montagna, la pressione atmosferica esterna sulle buste diminuisce. Di conseguenza, la differenza fra la pressione dell'aria all'interno delle buste e la diminuita pressione esterna dà come risultato una forza che gonfia la busta.
 5. In un giorno freddo, l'aria intrappolata nelle bolle

deve trovarsi a una pressione minore, secondo la legge dei gas perfetti. Quindi, il volume delle bolle sarà minore che in un giorno caldo, e il materiale non dovrebbe proteggere meglio il contenuto del pacco.

6. Il trattenere un'atmosfera da parte di un pianeta dipende dalla forza gravitazionale che vincola il gas all'atmosfera del pianeta. Sui pianeti piccoli, la forza gravitazionale è molto piccola, e la velocità di fuga è corrispondentemente piccola. Se un piccolo pianeta inizia la sua esistenza con una atmosfera, le molecole del gas avranno una distribuzione delle velocità, secondo la teoria cinetica. Alcune di queste molecole avranno una velocità più alta della velocità di fuga del pianeta e abbandoneranno l'atmosfera. Quando la restante atmosfera viene riscaldata dalla radiazione solare, molte molecole raggiungeranno velocità alte abbastanza per sfuggire. In conclusione, l'atmosfera si diffonderà nello spazio.



Per gent. conc. di John Hart e Field Enterprises, Inc.

17

Il calore e il primo principio della termodinamica

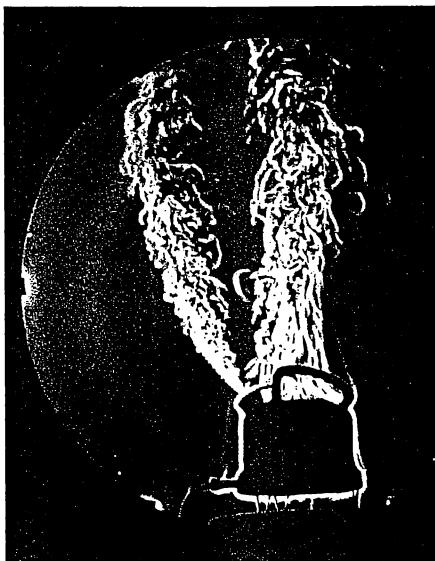
ARGOMENTI

- 17.1 Calore, energia termica, ed energia interna
- 17.2 Calore specifico
- 17.3 Calore latente e cambiamenti di fase
- 17.4 Lavoro ed energia termica nelle trasformazioni termodinamiche
- 17.5 Il primo principio della termodinamica
- 17.6 Alcune applicazioni del primo principio della termodinamica
- 17.7 Propagazione del calore (Facoltativo)

Fino a circa il 1850, i campi riguardanti il calore e la meccanica venivano considerati due branche distinte della scienza, e il principio di conservazione dell'energia sembrava che descrivesse soltanto una certa specie di sistemi meccanici. A metà del XIX secolo esperimenti messi a punto dall'inglese James Joule (1818-1889) e da altri mostraronono che a un sistema può essere aggiunta (o sottratta) energia sia come calore sia come lavoro svolto sul (o dal) sistema. Adesso l'energia termica è trattata come una forma di energia che si può trasformare in energia meccanica. Una volta che il concetto di energia si è allargato includendo l'energia termica, il principio di conservazione dell'energia emerse come una legge universale della natura.

Questo capitolo tratterà il concetto di calore, il primo principio della termodinamica e alcune importanti applicazioni. Il primo principio della termodinamica è semplicemente il principio di conservazione dell'energia. Esso ci dice che un aumento di energia di una forma deve essere accompagnato da una diminuzione di energia di qualche altra forma. Il primo principio non pone restrizioni sulla possibile conversione tra forme di energia. Inoltre, esso non fa distinzioni

Fotografia Schlieren di una teiera che mostra il vapore e la turbolenza delle correnti di convezione. (Gary Settles/Science Source/Photo Researchers)



tra l'effetto del calore e del lavoro: una variazione dell'energia interna. Secondo il primo principio, l'energia interna di un sistema può essere aumentata sia per trasferimento di energia termica al sistema sia svolgendo lavoro sul sistema. Una differenza importante tra energia termica e meccanica non risulta evidente dal primo principio: è possibile convertire totalmente energia meccanica in energia termica per mezzo del lavoro, ma è impossibile convertire totalmente energia termica in energia meccanica come unico risultato di un qualsiasi processo.

17.1 • CALORE, ENERGIA TERMICA, ED ENERGIA INTERNA

È necessario fare una maggiore distinzione tra energia interna e calore. L'energia interna è tutta quanta l'energia appartenente a un sistema quando esso è stazionario (cioè che non trasla né ruota), includendo l'energia nucleare, l'energia chimica e l'energia di deformazione (come quella di una molla compressa o allungata), così come l'energia termica associata al moto casuale di atomi e molecole. Il calore è l'energia che si trasferisce fra il sistema e l'ambiente circostante a causa di una loro differenza di temperatura.

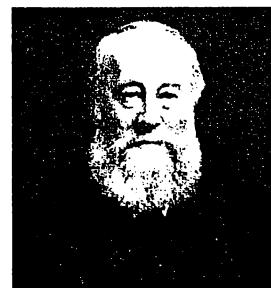
Nel capitolo precedente abbiamo mostrato che l'energia termica di un gas perfetto monoatomico è associata al moto interno dei suoi atomi. In questo caso particolare, l'energia termica è soltanto l'energia cinetica su scala microscopica; aumentando la temperatura del gas, aumenta l'energia cinetica degli atomi e aumenta l'energia termica del gas. Più in generale, inoltre, l'energia termica include tutte le forme di energia molecolare, come l'energia cinetica rotazionale e vibrazionale e l'energia potenziale.

Analogamente consideriamo la distinzione tra lavoro ed energia che abbiamo discusso nel Capitolo 7. Il lavoro svolto su (o da) un sistema è una misura dell'energia trasferita fra il sistema e il suo ambiente circostante, mentre l'energia meccanica (cinetica e/o potenziale) è una conseguenza del suo moto e della sua posizione. Allora, quando una persona svolge lavoro su un sistema, viene trasferita energia dalla persona al sistema. Non ha senso parlare del lavoro *di* un sistema – ci si dovrebbe riferire soltanto al *lavoro svolto su o da un sistema* quando è avvenuto un certo processo nel quale è stata trasferita energia al o dal sistema. Similmente, non ha senso usare il termine calore a meno che non sia stata trasferita energia per effetto di una differenza di temperatura.

È importante ammettere che tra due sistemi può essere trasferita energia anche senza che avvenga uno scambio di energia termica. Quando un gas è compresso da un pistone, il gas si riscalda e la sua energia termica aumenta, ma non vi è trasferimento alcuno di energia termica; se il gas successivamente si espande rapidamente, esso si raffredda e la sua energia termica diminuisce, ma non vi è trasferimento di energia termica con l'ambiente circostante. In ciascun caso, si è trasferita energia al o dal sistema tramite il lavoro, ma si manifesta dentro il sistema come un aumento o una diminuzione di energia termica. La variazione di energia interna in questi esempi è uguale alla variazione di energia termica ed è misurata dalla corrispondente variazione di temperatura.

Unità di calore

Prima che si comprendesse come l'energia termica fosse una forma di energia, gli scienziati definirono il calore in termini di variazione di temperatura prodotta in un corpo. Quindi, l'unità di energia chiamata **caloria** (cal) fu



James Prescott Joule
(1818-1889)

Fisico inglese, Joule ricevette formalmente una certa istruzione in matematica, filosofia e chimica da John Dalton ma fu in gran parte autodidatta. Il periodo di ricerca più attivo di Joule, dal 1837 fino al 1847, lo condusse all'enunciazione del principio di conservazione dell'energia e all'equivalenza del calore e delle altre forme di energia. I suoi studi sulle relazioni quantitative tra gli effetti elettrici, meccanici e chimici del calore culminarono nella sua comunicazione del 1843 relativa alla quantità di lavoro richiesto per produrre una unità di calore, chiamato equivalente meccanico del calore. (Per gent. conc. del Presidente e del Consiglio della Royal Society)

- Definizione di caloria

definita come la quantità di calore necessaria per aumentare la temperatura di 1 g di acqua da 14.5°C a 15.5°C.¹ (Si noti che "Caloria", con la C maiuscola, usata per indicare il contenuto di energia chimica del cibo, è in realtà una chilocaloria). Analogamente, l'unità di calore nel sistema inglese era la unità termica britannica (Btu), definita come il calore richiesto per aumentare la temperatura di 1 lb (1 libbra è uguale a 4.448 N) di acqua da 63°F a 64°F.

Nel 1948, gli scienziati decisero che poiché il calore (come il lavoro) è una misura di un trasferimento di energia, la sua unità SI sarebbe diventata il joule. La caloria è ora definita esattamente come 4.186 J:

**Equivalent meccanico •
del calore**

$$1 \text{ cal} \equiv 4.186 \text{ J} \quad [17.1]$$

Si noti che questa definizione non fa alcun riferimento al riscaldamento dell'acqua. Questa relazione è nota, per ragioni puramente storiche, come **equivalente meccanico del calore**.

Esempio 17.1 Un modo drastico di perdere peso

Uno studente mangia per cena una quantità di cibo corrispondente a 2000 Calorie-cibo. Vuole fare un lavoro equivalente in palestra sollevando una massa di 50.0 kg. Quante volte deve alzare il peso per spendere tutta questa energia? Si assuma che lo studente alzi il peso di 2,00 m ogni volta e che non si faccia alcun lavoro quando si lascia cadere il peso sul pavimento.

Soluzione Poiché 1 Caloria-cibo = 10³ cal, il lavoro richiesto è 2.00×10^6 cal. Trasformandolo in Joule, si trova che il lavoro totale richiesto è

$$W = (2.00 \times 10^6 \text{ cal}) (4.186 \text{ J/cal}) = 8.37 \times 10^6 \text{ J}$$

Il lavoro svolto quando viene sollevato il peso una volta a un'altezza h è eguale a mgh . Pertanto il lavoro svolto per sollevare il peso n volte è $nmgh$. Uguagliando tale quantità al lavoro totale richiesto si ottiene

$$W = nmgh = 8.37 \times 10^6 \text{ J}$$

$$n = \frac{8.37 \times 10^6 \text{ J}}{(50.0 \text{ kg}) (9.80 \text{ m/s}^2) (2.00 \text{ m})} = 8.54 \times 10^3 \text{ volte}$$

Se lo studente è in buona forma e solleva il peso, per esempio, ogni 5 s, gli sarebbero necessarie 12 h per raggiungere questo scopo.

17.2 • CALORE SPECIFICO

La quantità di calore necessario per aumentare la temperatura di una data massa di una sostanza di una certa quantità varia con la sostanza. Per esempio, il calore necessario per aumentare la temperatura di 1 kg di acqua di 1°C è 4186 J, ma il calore necessario per aumentare la temperatura di 1 kg di rame di 1°C è soltanto 387 J. Ogni sostanza richiede un solo valore per la quantità di calore necessaria a variare la temperatura di 1 kg di 1°C, e questo numero è chiamato **calore specifico** della sostanza. La Tabella 17.1 elenca i calori specifici di alcune sostanze.

Supponiamo che una quantità Q di energia venga trasferita a m kg di una sostanza, per cui la temperatura vari di ΔT . Il **calore specifico**, c , della sostanza è definito come

$$c \equiv \frac{Q}{m \Delta T} \quad [17.2]$$

¹ Originariamente, la caloria fu definita come il calore necessario per aumentare la temperatura di 1 g d'acqua di 1°C. Tuttavia, misure accurate hanno mostrato che l'energia dipende alquanto dalla temperatura: quindi, è stata sviluppata una definizione più precisa.

TABELLA 17.1 Calore specifico di alcune sostanze a 25°C e a pressione atmosferica

Sostanza	Calore specifico, c	
	J/kg · °C	cal/g · °C
Elementi solidi		
Alluminio	900	0.215
Berillio	1830	0.436
Cadmio	230	0.055
Rame	387	0.0924
Germanio	322	0.077
Oro	129	0.0308
Ferro	448	0.107
Piombo	128	0.0305
Silicio	703	0.168
Argento	234	0.056
Altri solidi		
Ottone	380	0.092
Legno	1700	0.41
Vetro	837	0.200
Ghiaccio (-5.0°C)	2090	0.50
Marmo	860	0.21
Liquidi		
Alcool (etilico)	2400	0.58
Mercurio	140	0.033
Acqua (15.0°C)	4186	1.00

Da questa definizione, possiamo esprimere l'energia trasferita, Q , tra un sistema di massa m e l'ambiente circostante per una variazione di temperatura ΔT come

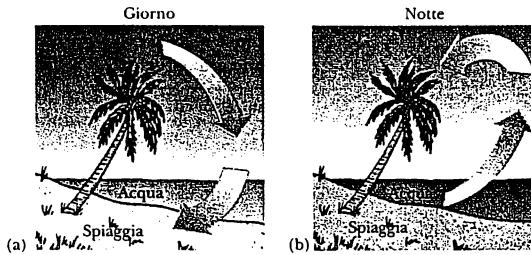
$$Q = mc\Delta T \quad [17.3]$$

Per esempio, l'energia per aumentare la temperatura di 0.5 kg di acqua di 3.0°C è (0.5 kg)(4186 J/kg · °C)(3.0°C) = 6280 J. Si noti che quando la temperatura aumenta, ΔT e Q sono *positivi*, e in corrispondenza l'energia *entra nel* sistema. Quando la temperatura diminuisce, ΔT e Q sono *negativi* e l'energia *esce dal* sistema.

Quando si misurano i calori specifici, si trova che i valori ottenuti dipendono dalle condizioni sperimentali. In generale, le misure fatte a pressione costante sono diverse da quelle fatte a volume costante. Per i solidi e i liquidi, la differenza tra i due valori è generalmente non più di qualche per cento ed è spesso trascurata. Per i gas, la differenza tra i due valori è significativa.

Si nota dalla Tabella 17.1 che l'acqua ha il calore specifico più alto tra le sostanze con le quali abbiamo ordinariamente a che fare. L'alto calore specifico dell'acqua è responsabile delle temperature moderate che si riscontrano nelle regioni vicino a grandi estensioni d'acqua. Quando la temperatura di una grande estensione d'acqua diminuisce durante l'inverno, l'acqua trasferisce energia all'aria, la quale trasporta l'energia verso terra quando i venti prevalenti sono

Figura 17.1 Circolazione dell'aria in una spiaggia. (a) In un giorno caldo, l'aria sopra la sabbia calda si riscalda più velocemente di quella sopra l'acqua che è più fredda. L'aria fredda sopra l'acqua si sposta verso la spiaggia al posto dell'aria più calda che si innalza. (b) Di notte, la sabbia si raffredda più rapidamente dell'acqua e quindi il moto delle correnti d'aria si inverte.



favorevoli. Per esempio, i venti prevalenti della costa occidentale degli Stati Uniti sono diretti verso terra, e l'energia liberata dall'Oceano Pacifico quando esso si raffredda rende le zone costiere più calde di quanto esse non sarebbero altrimenti. Ciò spiega perché la costa occidentale determina generalmente condizioni invernali più favorevoli rispetto alla costa orientale, dove i venti non trasportano l'energia verso terra.

Il fatto che il calore specifico dell'acqua sia maggiore di quello della sabbia è responsabile del modello di circolazione d'aria in una spiaggia. Durante il giorno, il Sole cede una uguale quantità di energia sia alla spiaggia che all'acqua, ma il basso calore specifico della sabbia causa un aumento di temperatura della spiaggia maggiore di quello dell'acqua. Conseguentemente, l'aria al di sopra del suolo raggiunge una temperatura più alta di quella al di sopra dell'acqua e l'aria più fredda sopra l'acqua se ne allontana, convogliata dallo spostamento dell'aria calda che si solleva, per il principio di Archimede, determinando durante il giorno una brezza dal mare verso terra. Poiché l'aria calda innalzandosi si raffredda gradualmente, essa di conseguenza si abbassa, realizzando il modello mostrato in Figura 17.1a. Durante la notte, la sabbia si raffredda più rapidamente dell'acqua e il modello di circolazione si inverte poiché l'aria più calda si trova ora sopra l'acqua (Fig. 17.1b). (Le brezze di mare e di terra sono ben conosciute dai marinai).

Conservazione dell'energia: calorimetria

Situazioni nelle quali energia meccanica viene convertita in energia termica avvengono frequentemente. Ne vedremo alcuni negli esempi che seguono questo paragrafo e nei problemi alla fine del capitolo, ma qui la massima attenzione sarà diretta verso una particolare specie di situazione di conservazione dell'energia. Nei problemi in cui si farà uso della procedura che descriveremo, chiamati problemi di **calorimetria**, sarà considerato soltanto il trasferimento di energia termica tra il sistema e l'ambiente circostante.

Una tecnica per misurare il calore specifico di un solido o liquido è semplicemente quello di riscaldare la sostanza una certa temperatura, metterla in un recipiente contenente acqua, di massa e temperatura note, e misurare la temperatura dell'acqua dopo che si è raggiunto l'equilibrio. Poiché nel processo è stata compiuta una quantità trascurabile di lavoro, il principio di conservazione dell'energia richiede che l'energia termica che lascia la sostanza più calda (di calore specifico sconosciuto) sia uguale a quella che entra nell'acqua.² I dispositi-

² Per misure di precisione, il recipiente contenente l'acqua dovrebbe essere incluso nei nostri calcoli, poiché anche esso scambia calore. Ciò richiederebbe una conoscenza della sua massa e della sua composizione. Tuttavia, se la massa dell'acqua è grande confrontata con quella del contenitore, possiamo trascurare il calore scambiato dal contenitore. Inoltre, in tali misure si dovrebbero prendere delle precauzioni per minimizzare il trasferimento di energia termica tra il sistema e l'ambiente circostante.

vi nei quali avviene questo trasferimento di energia termica si chiamano **calorimetri**.

Per esempio, supponiamo che m_x sia la massa di una sostanza il cui calore specifico vogliamo determinare, c_x sia il suo calore specifico e T_x la sua temperatura iniziale. Siano m_a , c_a e T_a i valori corrispondenti per l'acqua. Se T è la temperatura finale d'equilibrio dopo il mescolamento, allora dall'Equazione 17.3 troviamo che l'energia termica acquistata dall'acqua è $m_a c_a (T - T_a)$ e l'energia termica perduta dalla sostanza di c ignoto è $-m_x c_x (T - T_x)$. Assumendo che il sistema totale (acqua + sostanza incognita) non perda né guadagni energia termica, segue che l'energia termica acquistata dall'acqua deve essere uguale all'energia termica perduta dalla sostanza incognita:

$$m_a c_a (T - T_a) = -m_x c_x (T - T_x)$$

Risolvendo rispetto a c_x si ottiene

$$c_x = \frac{m_a c_a (T - T_a)}{m_x (T_x - T)} \quad [17.4]$$

Fisica ragionata 1

L'equazione $Q = mc\Delta T$ esprime la relazione fra l'energia, Q , trasferita a un corpo di massa m , e il calore specifico, c , per mezzo del calore e della risultante variazione di temperatura, ΔT . In realtà, l'energia al primo membro dell'equazione potrebbe essere trasferita con un altro metodo, non necessariamente calore. Dare alcuni esempi nei quali si può usare questa equazione per calcolare una variazione di temperatura di un corpo, ma nei quali non è coinvolto il calore.

Ragionamento Vi sono numerosi esempi, alcuni dei quali sono:

1. Durante i primi secondi dopo avere acceso un tostapane, la temperatura dell'avvolgimento elettrico aumenta. Qui, il meccanismo di trasferimento è la *trasmissione elettrica* di energia attraverso il cavo di alimentazione.
2. La temperatura di una patata in un forno a microonde aumenta a causa dell'assorbimento delle microonde. In questo caso, il meccanismo di trasferimento dell'energia è la *radiazione elettromagnetica*: le microonde.
3. Una borsa con palline di piombo viene fatta cadere sul pavimento molte volte, causando l'aumento di temperatura delle palline. Il meccanismo di trasferimento è, qui, il *lavoro* compiuto durante la deformazione delle palline quando esse colpiscono il suolo.
4. Un carpentiere usa un trapano per fare un buco in un pezzo di legno. La punta non riesce a penetrare molto ma diventa molto calda. L'aumento di temperatura, in questo caso, è dovuto al *lavoro* compiuto sulla punta per mezzo del legno.
5. La temperatura della miscela aria-benzina nel cilindro di un motore di automobile aumenta quando scocca la scintilla. In questo caso, l'energia è già nella miscela aria-benzina come energia potenziale elettrica e viene trasformata in energia termica della miscela per mezzo della *reazione chimica* della combustione.

In ciascuno di questi casi, così come in molti altri che si potrebbero considerare, il Q che interessa, al primo membro dell'equazione, non è una misura di calore ma viene sostituito con l'energia trasferita o trasformata con altri mezzi. Indipendentemente dal fatto che venga coinvolto il calore, si può usare l'equazione per calcolare la variazione di temperatura.

Esempio 17.2 Raffreddamento di un lingotto caldo

Un pezzo di metallo da 0.0500 kg è riscaldato a 200.0°C e poi lasciato cadere in un secchio contenente 0.400 kg d'acqua inizialmente a 20.0°C. Se la temperatura finale di equilibrio del sistema è 22.4°C, trovare il calore specifico del metallo.

Soluzione Poiché l'energia termica ceduta dal metallo è eguale a quella assorbita dall'acqua, si può scrivere

$$\begin{aligned} m_x c_x (T_{xi} - T_{xf}) &= m_a c_a (T_{af} - T_{ai}) \\ (0.400 \text{ kg}) (4186 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}) (22.4^\circ\text{C} - 20.0^\circ\text{C}) \\ &= (0.0500 \text{ kg}) (c_x) (200.0^\circ\text{C} - 22.4^\circ\text{C}) \end{aligned}$$

da cui

$$c_x = 453 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

Il metallo è molto probabilmente ferro, come si può vedere confrontando questo risultato coi dati di Tabella 17.1.

ESERCIZIO 1 Qual è l'energia termica totale ceduta all'acqua raffreddando il lingotto? Risposta 4020 J

ESERCIZIO 2 Un cowboy spara un proiettile d'argento di 2.00 g, con una velocità alla bocca dell'arma di 200 m/s, contro una parete del saloon in legno di pino. Si assume che tutta l'energia interna generata dall'urto sia assorbita dal proiettile. Qual è la variazione di temperatura del proiettile? Risposta 85.5°C

ESERCIZIO 3 Quante calorie sono necessarie per aumentare la temperatura di 3.0 kg di alluminio da 20°C a 50°C? Risposta 19.4 kcal

17.3 • CALORE LATENTE E CAMBIAMENTI DI FASE

Ordinariamente una sostanza subisce una variazione di temperatura quando dell'energia viene trasferita tra la sostanza e il suo ambiente circostante. Vi sono situazioni, tuttavia, nelle quali al trasferimento di energia non corrisponde una variazione di temperatura. Ciò accade ogni volta che le caratteristiche fisiche della sostanza cambiano da una forma ad un'altra, ciò viene comunemente chiamato **cambiamento di fase**. Alcuni comuni cambiamenti di fase sono da solido a liquido (fusione), da liquido a gas (ebollizione) e una variazione nella struttura cristallina di un solido. Tutti questi cambiamenti di fase implicano una variazione di energia interna.

L'energia termica necessaria per il cambiamento di fase di una data massa, m , di una sostanza pura è

$$Q = mL \quad [17.5]$$

Calore latente • dove L è chiamato **calore latente** (calore "nascosto") della sostanza e dipende dalla natura del cambiamento di fase così come dalle proprietà della sostanza. Il **calore latente di fusione**, L_f , è il termine usato quando la fase cambia da solido a liquido, e il **calore latente di vaporizzazione**, L_v , è il termine usato quando il cambiamento di fase è da liquido a gas.³ Per esempio il calore latente di fusione dell'acqua a pressione atmosferica è $3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}$ e il calore latente di vaporizzazione dell'acqua è $2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$. I calori latenti di sostanze diverse variano considerevolmente, come si può vedere nella Tabella 17.2.

³ Quando un gas si raffredda, esso alla fine torna allo stato liquido, cioè *condensa*. L'energia termica trasferita durante il processo è chiamata **calore latente di condensazione** che è uguale al calore latente di vaporizzazione. Quando un liquido si raffredda, alla fine solidifica, e il **calore latente di solidificazione** è uguale al calore latente di fusione.

TABELLA 17.2 Calori latenti di fusione e vaporizzazione

Sostanza	Punto di fusione (°C)	Calore latente di fusione (J/kg)	Punto di ebollizione (°C)	Calore latente di vaporizzazione (J/kg)
Elio	-269.65	5.23×10^3	-268.93	2.09×10^4
Azoto	-209.97	2.55×10^4	-195.81	2.01×10^5
Ossigeno	-218.79	1.38×10^4	-182.97	2.13×10^5
Alcool etilico	-114	1.04×10^5	78	8.54×10^5
Acqua	0.00	3.33×10^5	100.00	2.26×10^6
Zolfo	119	3.81×10^4	444.60	3.26×10^5
Piombo	327.3	2.45×10^4	1750	8.70×10^5
Alluminio	660	3.97×10^4	2450	1.14×10^7
Argento	960.80	8.82×10^4	2193	2.33×10^6
Oro	1063.00	6.44×10^4	2660	1.58×10^6
Rame	1083	1.34×10^5	1187	5.06×10^6

Consideriamo, per esempio, l'energia termica necessaria per trasformare 1 g di ghiaccio a -30.0°C in vapore (vapore acqueo) a 120.0°C. La Figura 17.2 riporta i risultati sperimentali ottenuti quando viene fornita gradualmente energia al ghiaccio. Esaminiamo ciascuna porzione della curva separatamente.

Parte A In questo tratto di curva, si fa variare la temperatura del ghiaccio da -30.0°C a 0.0°C. Poiché il calore specifico del ghiaccio è 2090 J/kg · °C, possiamo calcolare la quantità di energia fornita dall'Equazione 17.3:

$$Q = m_f c_g \Delta T = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) (2090 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}) (30.0 \text{ }^\circ\text{C}) = 62.7 \text{ J}$$

Parte B Quando il ghiaccio raggiunge 0.0°C, la miscela acqua-ghiaccio rimane a questa temperatura - sebbene si continui a fornire energia - fino a quando il ghiaccio fonde totalmente per diventare acqua. L'energia necessaria per fondere 1.00 g di ghiaccio a 0.0°C è, dall'Equazione 17.5,

$$Q = mL_f = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) (3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}) = 333 \text{ J}$$

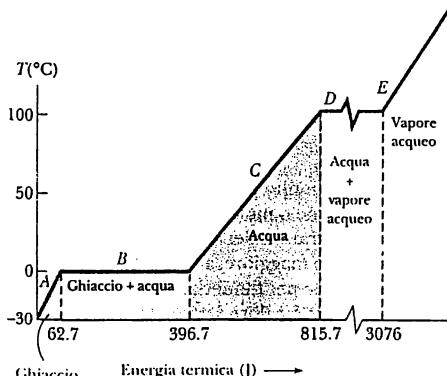


Figura 17.2 Grafico della temperatura in funzione dell'energia termica fornita a 1 g di ghiaccio, inizialmente a -30.0°C, per trasformarlo in vapore a 120°C.

Parte C Tra 0.0°C e 100.0°C non accade nulla di notevole. In questo tratto non si verifica alcun cambiamento di fase. L'energia fornita all'acqua serve per aumentare la sua temperatura. L'energia necessaria per aumentare la temperatura da 0.0°C a 100.0°C è

$$\begin{aligned} Q &= m_a c_a \Delta T = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) (4.19 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}) (100.0 \text{ }^\circ\text{C}) \\ &= 4.19 \times 10^2 \text{ J} \end{aligned}$$

Parte D A 100.0°C avviene un altro cambiamento di fase dell'acqua per passare da liquido a 100.0°C a vapore a 100.0°C. Proprio come nella Parte B, la miscela acqua-vapore rimane a 100.0°C - sebbene si continui a fornire energia - fino a quando tutto il liquido si è trasformato in vapore. L'energia necessaria per trasformare 1.00 g di acqua in vapore a 100.0°C è

$$Q = m L_v = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) (2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}) = 2.26 \times 10^3 \text{ J}$$

Parte E In questo tratto di curva, viene fornita energia al vapore senza che avvenga alcun cambiamento di fase. L'energia necessaria per aumentare la temperatura del vapore a 120.0°C è

$$Q = m_v c_v \Delta T = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) (2.01 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}) (20.0 \text{ }^\circ\text{C}) = 40.2 \text{ J}$$

La quantità di energia totale che si deve fornire per trasformare 1 grammo di ghiaccio da -30.0°C in vapore a 120.0°C è quindi circa 3.11×10^3 J. Inversamente, per raffreddare un grammo di vapore da 120.0°C fino alla fase di ghiaccio a -30.0°C, è necessario estrarre 3.11×10^3 J di energia termica.

I cambiamenti di fase possono essere descritti in termini delle modifiche di configurazione delle molecole, quando dell'energia viene fornita o sottratta a una sostanza. Consideriamo, prima, il cambiamento di fase liquido-gas. Le molecole in un liquido sono vicine le une alle altre e le forze tra di esse sono più intense di quelle tra le molecole del gas, che sono più lontane. Perciò, si deve compiere del lavoro sul liquido, a livello molecolare, contro queste forze attrattive molecolari per separare le molecole. Il calore latente di vaporizzazione è la quantità di energia che si deve fornire al liquido per ottenere ciò.

Similmente, al punto di fusione di un solido, immaginiamo che l'ampiezza di vibrazione degli atomi attorno alle loro posizioni di equilibrio diventi grande abbastanza per consentire agli atomi di superare le barriere degli atomi adiacenti e di muoversi nelle loro nuove posizioni. Le nuove posizioni sono, in media, meno simmetriche e per questa ragione gli atomi hanno una energia più alta. Il calore latente di fusione è uguale al lavoro necessario, a livello molecolare, per trasformare la massa da una fase solida ordinata alla fase liquida disordinata.

La distanza media fra gli atomi diventa molto più grande nella fase gassosa che nella fase liquida o solida. Ciascun atomo o molecola viene allontanato dai suoi vicini senza il contributo delle forze attrattive dei nuovi vicini. Quindi, non è sorprendente che sia necessario un lavoro maggiore, a livello molecolare, per vaporizzare la massa di una data sostanza che per fonderla, e che il calore latente di vaporizzazione sia molto maggiore del calore latente di fusione (Tab. 17.2).

Fisica ragionata 2

Il risultato intuitivo del fornire energia a una sostanza è quello di osservare un aumento di temperatura. Ma se l'energia viene fornita al ghiaccio a 0°C, la sua temperatura non aumenta. Dove va a finire l'energia?

Ragionamento Quando viene fornita energia al ghiaccio, diciamo, a -10°C, la maggior parte dell'energia va ad aumentare la vibrazione molecolare, la quale è una manifestazione fisica dell'aumento della temperatura. Quando viene fornita energia al ghiaccio a 0°C, la temperatura del ghiaccio resta costante e il ghiaccio fonde. La maggior parte dell'energia va ad aumentare l'energia potenziale elettrica e a rompere i legami fra le molecole. Ciò somiglia alla somministrazione di energia al sistema pietra-Terra per lanciare la pietra con velocità sufficiente a sfuggire dalla Terra: il legame gravitazionale fra la pietra e la Terra è stato rotto. Rompendo i legami fra le molecole d'acqua nel ghiaccio permettiamo alle molecole di muoversi l'una rispetto all'altra, la qual cosa noi intendiamo come il comportamento di un liquido dovuto alla fusione.

STRATEGIA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

• Problemi di calorimetria

Se incontrate difficoltà nei problemi di calorimetria, considerate i seguenti fattori.

1. Assicurarsi che le unità siano tutte coerenti. Per esempio, se state usando il calore specifico in cal/g · °C, assicurarsi che le masse siano espresse in grammi e le temperature in Celsius.
2. La perdita e il guadagno di energia termica (lo scambio di calore) si trova usando $Q = mc\Delta T$ soltanto per gli intervalli nei quali non avvengono cambiamenti di fase. Le equazioni $Q = mL_f$ e $Q = mL_v$ devono essere usate soltanto quando avvengono cambiamenti di fase.
3. Spesso si verificano errori di segno nelle equazioni calore sottratto = calore fornito. Un modo di controllare le vostre equazioni è quello di esaminare il segno di tutte le ΔT che compaiono in esse.

Esempio 17.3 Ebollizione dell'olio liquido

L'olio liquido ha un punto di ebollizione molto basso, 4.2 K e un calore latente di vaporizzazione molto basso, 2.09×10^4 J/kg (Tab. 17.2). Una potenza costante di 10.0 W è trasferita a un contenitore di olio liquido da un riscaldatore elettrico a immersione. In queste condizioni, quanto tempo sarà necessario per fare evaporare 1.00 kg di olio liquido a 4.2 K?

Ragionamento e soluzione Poiché $L_v = 2.09 \times 10^4$ J/kg per l'olio liquido, si dovranno fornire 2.09×10^4 J d'energia per fare evaporare 1.00 kg di liquido. La potenza fornita all'olio è 10.0 W = 10.0 J/s. Ciò è in un

secondo si forniscono all'olio 10.0 J di energia. Pertanto, il tempo necessario per fornire 2.09×10^4 J è

$$t = \frac{2.09 \times 10^4 \text{ J}}{10.0 \text{ J/s}} = 2.09 \times 10^3 \text{ s} \approx 35 \text{ min}$$

ESERCIZIO 4 Se si forniscono 10.0 W di potenza a 1.00 kg d'acqua a 100.0°C, quanto tempo occorrerà all'acqua per evaporare completamente?
Risposta 62.8 h

17.4 • LAVORO ED ENERGIA TERMICA NELLE TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

Nell'approccio macroscopico alla termodinamica si descrive lo *stato* di un sistema con variabili quali pressione, volume, temperatura ed energia interna. Il numero di variabili macroscopiche necessarie per caratterizzare un sistema dipende dalla natura del sistema. Per un sistema omogeneo, come un gas che contiene un solo tipo di molecola, generalmente sono necessarie solo due variabili, come pressione e volume. Comunque è importante notare che uno *stato macroscopico* di un sistema isolato può essere specificato solo se il sistema è internamente in equilibrio termico. Nel caso di un gas in un contenitore, l'equilibrio termico interno richiede che ogni parte del contenuto sia alla stessa pressione e alla stessa temperatura.

Si consideri del gas contenuto in un cilindro chiuso da un pistone mobile (Fig. 17.3). Il gas in equilibrio occupa il volume V ed esercita una pressione uniforme P sulle pareti e sul pistone. Se il pistone ha una sezione di area A , la forza esercitata dal gas sul pistone è $F = PA$. Assumiamo ora che il gas si espanda in modo quasi-statico, cioè abbastanza lentamente da permettere al sistema di cambiare stato attraverso una serie (infinita) di stati di equilibrio. Quando il pistone si muove di una distanza dy , il lavoro compiuto dal gas sul pistone è

$$dW = F dy = PA dy$$

Poiché $A dy$ è l'aumento di volume del gas, dV , si può esprimere il lavoro compiuto come

$$dW = P dV \quad [17.6]$$

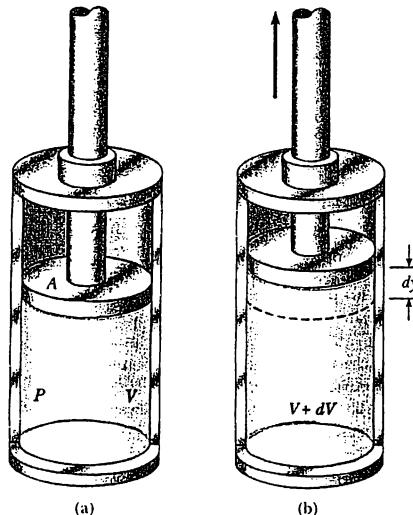


Figura 17.3 Il gas contenuto in un cilindro a pressione P lavora su un pistone quando il sistema si espande dal volume V al volume $V + dV$.

Se il gas si espande, allora dV è positivo e il lavoro compiuto dal gas è positivo, mentre se il gas viene compresso, dV è negativo, implicando che il lavoro compiuto dal gas è negativo. (In quest'ultimo caso, il lavoro negativo può essere interpretato come lavoro compiuto sul sistema). Chiaramente il lavoro compiuto dal sistema è zero quando il volume resta costante. Il lavoro totale compiuto dal gas quando il suo volume varia da V_i a V_f è dato dall'integrale dell'Equazione 17.6:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad [17.7]$$

Per calcolare questo integrale si deve conoscere come varia la pressione durante la trasformazione. (Si osservi che una *trasformazione* è *non specificata* se vengono solamente forniti gli stati iniziale e finale. Al contrario una trasformazione è una variazione di stato del sistema *specificata completamente*). In generale la pressione non è costante, ma dipende dal volume e dalla temperatura. Se la pressione e il volume sono noti in ogni punto della trasformazione, gli stati del gas possono essere rappresentati come una curva nel diagramma P - V in Figura 17.4. Il lavoro svolto nell'espansione dallo stato iniziale allo stato finale è l'area sotto la curva nel diagramma P - V .

Come si può vedere dalla Figura 17.4, il lavoro svolto nell'espansione dallo stato iniziale, i , allo stato finale, f , dipenderà dal cammino specifico seguito tra questi due stati. Per illustrare questo punto importante, si considerino parecchi cammini diversi che connettono i ed f (Fig. 17.5). Nella trasformazione descritta in Figura 17.5a, la pressione del gas è inizialmente ridotta da P_i a P_f , tramite raffreddamento a volume costante V_i e successivamente il gas si espande da V_i a V_f a pressione costante P_f . Il lavoro svolto lungo questo cammino è $P_f(V_f - V_i)$. Nella Figura 17.5b, il gas inizialmente si espande da V_i a V_f a pressione costante P_i , e successivamente la pressione è ridotta da P_i a P_f a volume costante V_f . Il lavoro svolto lungo questo cammino è $P_i(V_f - V_i)$ che è maggiore di quello svolto nella trasformazione descritta in Figura 17.5a. Infine, per la trasformazione riportata in Figura 17.5c, dove entrambe le grandezze P e V variano con continuità, il lavoro svolto ha un valore intermedio fra i valori ottenuti nelle prime due trasformazioni. Per calcolare il lavoro in questo caso, bisogna conoscere la forma della curva nel diagramma P - V . Pertanto, si vede che il lavoro svolto da un sistema dipende dalla trasformazione con cui il sistema passa dallo stato iniziale allo stato finale. In altre parole, il lavoro svolto dipende dagli stati iniziali, finali e intermedi del sistema.

Analogamente, si trova che l'energia termica trasferita all'interno o all'esterno di un sistema dipende dalla trasformazione. Ciò si può dimostrare considerando le

- *Il lavoro è uguale all'area sotto la curva nel diagramma P - V*

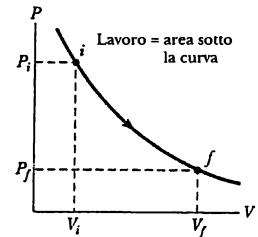


Figura 17.4 Un gas si espande reversibilmente (lentamente) dallo stato i allo stato f . Il lavoro compiuto dal gas è uguale all'area sotto la curva nel diagramma P - V .

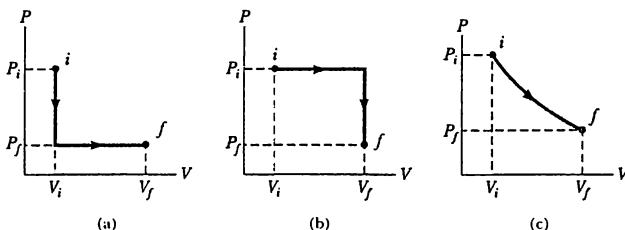
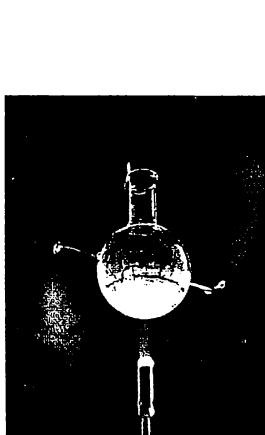


Figura 17.5 Il lavoro compiuto da un gas quando viene portato da uno stato iniziale a uno stato finale, dipende dai cammini intermedi fra questi due stati.



Questo dispositivo, chiamato macchina di Erone, fu inventato da Erone nel 150 a.C. circa ad Alessandria. Quando l'acqua nella bottiglia, sospesa a una fune, bolle, la fuoriesce di vapore da due tubicini laterali della bottiglia (in versi opposti) produce un momento delle forze, che mette in rotazione la bottiglia. (CENCO, *per gent. conc.*)

Espansione libera • adiabatica

Il calore dipende • dal cammino fra lo stato iniziale e finale

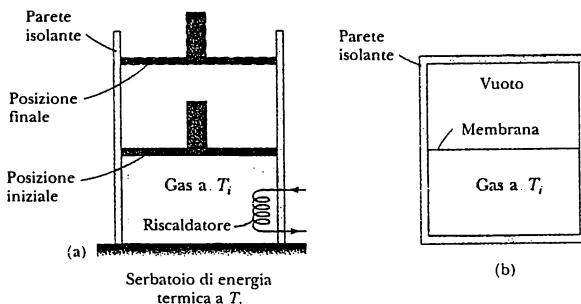


Figura 17.6 (a) Un gas a temperatura T_i si espande lentamente assorbendo energia termica da un serbatoio alla stessa temperatura. (b) Un gas si espanderà rapidamente in una regione vuota, rompendo una membrana.

situazioni descritte in Figura 17.6. In ciascun caso il gas ha gli stessi valori, per la pressione, volume e temperatura, iniziali e finali e viene assunto come perfetto. In Figura 17.6a, il gas è in contatto termico con un serbatoio di energia termica e un piccolo avvolgimento riscaldatore permette un trasferimento di energia al gas dalla superficie dell'avvolgimento. Appena una quantità infinitesima di energia viene assorbita dal gas, la pressione del gas diventa infinitesimalmente maggiore di quella atmosferica, il gas si espanderà e causerà l'innalzamento del pistone. Durante questa espansione fino ad un certo volume finale V_f , l'energia necessaria per mantenere una temperatura costante T_f sarà ceduta dall'avvolgimento riscaldatore al gas.

Consideriamo ora il sistema termicamente isolato mostrato in Figura 17.6b. Quando la membrana si rompe, il gas si espanderà rapidamente nel vuoto finché occupa un volume V_f . In questo caso il gas non compie lavoro, perché non c'è nessun pistone mobile. Inoltre, non viene scambiata energia attraverso la parete termicamente isolata, che si chiama *parete adiabatica*. Questa trasformazione viene spesso detta *espansione libera adiabatica*, o semplicemente *espansione libera*. In generale, una trasformazione adiabatica è una trasformazione in cui non viene scambiata energia termica fra il sistema e l'ambiente circostante.

Gli stati iniziale e finale di un gas perfetto in Figura 17.6a sono identici agli stati iniziale e finale in Figura 17.6b, ma i cammini sono diversi. Nel primo caso l'energia termica è ceduta lentamente al gas e il gas compie lavoro sul pistone. Nel secondo caso, nessuna energia termica viene trasferita e il lavoro compiuto è nullo. Pertanto, concludiamo che **il calore, come il lavoro, dipende dagli stati iniziale, finale e intermedi del sistema**. Inoltre, poiché calore e lavoro dipendono dal cammino, nessuna delle due grandezze si conserva indipendentemente durante una trasformazione termodinamica.

Fisica ragionata 3

Perché l'aria in cima a una montagna è più fredda? E perché il versante sopravento della montagna è più piovoso di quello sottovento?

Ragionamento Immaginiamo che una certa quantità di aria venga spinta dalla valle verso la cima della montagna dai venti prevalenti. L'aria è un cattivo conduttore termico, cosicché la trasformazione termodinamica che avviene per questa aria è

quasi adiabatica. Quando l'aria sale, essa va verso regioni di minore pressione atmosferica. Conseguentemente, l'aria si espande. A causa dell'espansione, essa compie lavoro sull'aria circostante. Ciò implica un trasferimento di energia fuori dal sistema, per cui l'energia interna diminuisce. Quindi, questa parte di aria diventa più fredda quando sale lungo la montagna. Se l'aria contiene vapor d'acqua, l'abbassamento della temperatura mentre sale lungo la montagna può causare la condensazione in gocce di pioggia. Perciò, la pioggia tende a cadere di più sul versante sopravento quando la temperatura si abbassa. Sul versante下风, la maggior parte del vapor d'acqua si è già condensato in pioggia, e la quantità d'aria si riscalda ancora quando scende lungo la montagna. Quindi, sul versante sottovento della montagna vi sarà poca pioggia.

Un esempio interessante di ciò avviene alle Hawaii. I venti prevalenti sono spesso da nord-est. L'isola di Kauai ha una montagna molto alta (Monte Waialeale, 1548 m), ed è uno dei posti più piovosi della Terra, con una media annuale di precipitazioni di 1170 cm. Proprio a sud-ovest di Kauai si trova l'isola di Niihau, la quale è molto secca e richiede un sistema di irrigazione per le fattorie. La ragione di ciò è la posizione sottovento di Niihau relativamente a Kauai.

17.5 • IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Quando si introduceva per la prima volta nel Capitolo 7 la legge di conservazione dell'energia, si stabilì che l'energia meccanica di un sistema si conserva in assenza di forze non conservative, come l'attrito. Cioè, le variazioni di energia interna di un sistema non erano incluse in questo modello meccanico. Il **primo principio della termodinamica** è una generalizzazione della legge di conservazione dell'energia, che include possibili variazioni di energia interna. È una legge valida universalmente che può essere applicata a tutti i tipi di trasformazioni. Inoltre, fornisce un collegamento fra il mondo microscopico e quello macroscopico.

Abbiamo visto che l'energia può essere scambiata fra un sistema e l'ambiente in due modi. Uno è il lavoro compiuto da (o su) un sistema il quale richiede che vi sia uno spostamento macroscopico del punto di applicazione di una forza (o pressione). L'altro modo è il trasferimento di energia termica che avviene attraverso gli urti casuali delle molecole. Ciascuno di questi rappresenta una variazione di energia del sistema e quindi ha come risultato variazioni misurabili nelle variabili macroscopiche del sistema, come la pressione, la temperatura e il volume di un gas.

Per fornire a questi concetti una base più quantitativa, si supponga che un sistema termodinamico subisca una variazione da uno stato iniziale a uno finale, durante la quale una quantità Q di calore venga assorbita (o ceduta) e un lavoro W sia compiuto dal (o sul) sistema. Per esempio, il sistema può essere un gas la cui pressione e il cui volume variano da P_i , V_i a P_f , V_f . Se si misura la grandezza $Q - W$ per vari cammini che collegano gli stati di equilibrio finale e iniziale (cioè per varie trasformazioni), si trova che $Q - W$ è la stessa per tutti i cammini che collegano gli stati iniziale e finale. Concludiamo che la grandezza $Q - W$ è determinata completamente dagli stati iniziale e finale del sistema, e chiamiamo la grandezza $Q - W$ variazione di energia interna del sistema. Sebbene le grandezze Q e W dipendano entrambe dal cammino, la grandezza $Q - W$ è indipendente dal cammino. Se si indica la funzione energia interna con la lettera U , allora la variazione di energia interna, $\Delta U = U_f - U_i$, può essere espressa come

$$\Delta U = Q - W$$

[17.8]

• *Primo principio della termodinamica*

dove tutte le grandezze devono essere espresse nelle stesse unità di energia. L'Equazione 17.8 è nota come **primo principio della termodinamica**. Si deve osservare che, quando viene usato in questa forma, Q è positivo quando il calore è assorbito dal sistema, e W è positivo quando il lavoro è compiuto dal sistema.

Quando un sistema subisce un cambiamento di stato infinitesimo, dove una piccola quantità di calore dQ viene scambiata e una piccola quantità di lavoro dW è compiuta, anche l'energia interna varia di una piccola quantità. Pertanto, per processi infinitesimi si può esprimere il primo principio come⁴

Primo principio della termodinamica per variazioni infinitesime

$$dU = dQ - dW \quad [17.9]$$

In termodinamica, non si è interessati alla forma specifica di energia interna. Si può ora fare un'analogia con la funzione energia potenziale, associata a un corpo che si muove sotto l'influenza della gravità, senza attrito. La funzione energia potenziale è indipendente dal cammino ed è solo la sua variazione che riveste interesse. Allo stesso modo, ciò che interessa è la variazione di energia interna di un sistema termodinamico, poiché sono definite solo le differenze. Per l'energia interna può essere scelto qualsiasi stato termodinamico di riferimento.

Prendiamo, ora, alcuni casi speciali. Prima consideriamo un **sistema isolato**, cioè un sistema che non interagisce con l'ambiente. In questo caso non c'è scambio di calore e il lavoro svolto è nullo; quindi l'energia interna resta costante. Cioè, poiché $Q = W = 0$, $\Delta U = 0$ e perciò $U_i = U_f$. Concludiamo allora che l'**energia interna di un sistema isolato resta costante**.

Successivamente consideriamo una trasformazione in cui il sistema subisce una **trasformazione ciclica**, cioè una trasformazione che inizia e termina nello stesso stato del sistema. In questo caso, la variazione di energia interna è zero e il calore assorbito dal sistema è eguale al lavoro compiuto durante il ciclo. Cioè in una trasformazione ciclica

**Per un sistema isolato •
U resta costante**

Trasformazione ciclica •

$$\Delta U = 0 \quad \text{e} \quad Q = W$$

Si osservi che il lavoro netto compiuto nel ciclo è eguale all'area racchiusa dal cammino che rappresenta la trasformazione in un diagramma P - V . Come vedremo nel Capitolo 18, le trasformazioni cicliche sono molto importanti per descrivere la termodinamica delle macchine termiche, che sono dispositivi in cui una parte dell'energia termica assorbita viene trasformata in lavoro meccanico.

Se avviene una trasformazione in cui il lavoro svolto è nullo, allora la variazione di energia interna è uguale al calore assorbito o ceduto dal sistema. Se il calore è assorbito dal sistema, Q è positivo e l'energia interna aumenta. Per un gas possiamo associare questo aumento di energia interna a un aumento dell'energia cinetica delle molecole. D'altra parte se avviene una trasformazione in cui il calore scambiato è nullo e il lavoro è compiuto dal sistema, allora il valore della variazione dell'energia interna è uguale al valore cambiato di segno del lavoro compiuto dal sistema. Cioè l'energia interna del sistema diminuisce. Per esempio, se un gas viene compresso (da un pistone mobile) senza scambiare calore, il lavoro compiuto è negativo e l'energia interna aumenta di nuovo.

⁴ Si dovrebbe notare che dQ e dW non sono differenziali esatti, sebbene dU sia un differenziale esatto. Infatti, dQ e dW non sono differenziali di una qualche grandezza definibile in uno stato. Per ulteriori dettagli su questo punto, si veda R.P. Bauman, *Modern Thermodynamics and Statistical Mechanics*, New York, Macmillan, 1992.

Abbiamo visto che non c'è realmente distinzione fra calore e lavoro su scala microscopica. Entrambi possono produrre una variazione di energia interna del sistema. Sebbene le grandezze macroscopiche Q e W non siano delle proprietà di un sistema, esse sono messe in relazione con l'energia interna tramite il primo principio della termodinamica. Una volta che una trasformazione o un cammino termodinamico è definito, Q e W possono essere calcolati o misurati e la variazione di energia interna può essere ricavata dal primo principio. Una delle conseguenze importanti del primo principio è che c'è una grandezza chiamata *energia interna*, il cui valore è determinato dallo stato del sistema. La funzione energia interna è perciò detta **funzione di stato**.

Fisica ragionata 4

Se un gas perfetto subisce un'espansione libera (un'espansione nel vuoto) in un contenitore isolato, esso non compie lavoro, poiché non spinge alcunché in nessun posto. Non vi è neppure calore scambiato con l'ambiente circostante, poiché il contenitore è isolato. Quindi, il primo principio ci dice che l'energia interna e la temperatura restano costanti. Cosa si può dire su un gas di ioni carichi positivamente? Se esso subisce un'espansione libera in un contenitore isolato, che cosa accade alla temperatura del gas?

Ragionamento Per un gas perfetto, si assume che non vi sia interazione fra le molecole (eccetto durante gli urti), cosicché l'energia del gas non dipende dalla distanza intermolecolare. Per un gas di particelle cariche, tuttavia, l'energia dipende dalla distanza intermolecolare, poiché vi è un'energia potenziale elettrica associata alle forze elettriche fra gli ioni. Se il gas carico è sottoposto a un'espansione libera, non viene svolto lavoro (spingendo alcunché in nessun posto) e non vi è scambio di calore. L'energia potenziale elettrica complessiva del gas diminuisce, poiché le particelle si muovono più distanti. In conclusione, l'energia cinetica media delle particelle aumenterà, e, infine, aumenterà la temperatura del gas.

Fisica ragionata 5

Negli anni '70, in Atlantic City, New Jersey, furono approvate le case da gioco, le quali in inverno sarebbero diventate molto fredde. Le proiezioni sull'energia che furono preparate per i progetti delle case da gioco mostrarono che sarebbe stata necessaria l'aria condizionata per operare anche nel bel mezzo di un freddo Gennaio. Perché?

Ragionamento Se consideriamo che l'aria nella casa da gioco sia un gas al quale possiamo applicare il primo principio, immaginiamo che non vi sia aria condizionata e non vi sia ventilazione, cosicché questo gas rimane semplicemente a temperatura ambiente. Non vi è lavoro svolto sul gas, per cui focalizzeremo la nostra attenzione sul calore assorbito. Una casa da gioco contiene un gran numero di persone, molte delle quali sono attive (lanciano dadi, grida di incoraggiamento, ecc.), e molte di queste si trovano in uno stato di eccitazione (festeggiamento, frustrazione, panico, ecc.). Perciò, questa gente emana un flusso di energia per mezzo del calore dei loro corpi. Questa energia va nell'aria della casa da gioco facendo aumentare l'energia interna dell'aria. Col grande numero di gente eccitata in una casa da gioco (oltre le numerosissime lampade incandescenti e le macchine), la temperatura del gas può raggiungere valori estremamente elevati. Per mantenere la temperatura a un valore ragionevole, vi deve essere un trasferimento di energia dall'aria all'esterno. I calcoli hanno mostrato che la conduzione attraverso le pareti, anche in un Gennaio a -12°C , non è sufficiente per mantenere il richiesto trasferimento di energia, sicché il sistema dell'aria condizionata deve funzionare continuamente per tutto l'anno.

17.6 • ALCUNE APPLICAZIONI DEL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Per applicare il primo principio della termodinamica a sistemi specifici è utile definire prima alcune trasformazioni termodinamiche comuni. Una **trasformazione adiabatica** è definita come una trasformazione durante la quale non viene scambiato calore dal sistema, cioè $Q = 0$.

Trasformazione adiabatica •

Una trasformazione adiabatica può essere ottenuta o isolando termicamente il sistema dall'ambiente (per esempio con polistirolo o con una parete sottovuoto) o facendo avvenire il processo rapidamente. Applicando il primo principio della termodinamica in questo caso, si vede che

$$\Delta U = -W \quad [17.10]$$

Primo principio per una trasformazione adiabatica •

Da questo risultato si vede che se il gas si espande adiabaticamente, W è positivo e perciò ΔU è negativa e il gas si raffredda. Viceversa un gas si riscalda, quando viene compresso adiabaticamente.

Le trasformazioni adiabatiche sono molto importanti nella pratica dell'ingegneria. Alcuni esempi comuni di trasformazioni adiabatiche includono l'espansione di gas caldi nei motori a combustione interna, la liquefazione dei gas in un sistema di raffreddamento e la fase di compressione in un motore diesel.

L'**espansione libera** descritta in Figura 17.6b è una trasformazione adiabatica nella quale nessun lavoro è compiuto sul o dal gas. Poiché $Q = 0$ e $W = 0$, si vede dal primo principio che $\Delta U = 0$ per questa trasformazione. Cioè, in una **espansione libera adiabatica** l'energia interna iniziale e finale di un gas è uguale. Come vedremo nel prossimo capitolo, l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla sua temperatura. Pertanto, non ci aspetteremo alcuna variazione di temperatura in una espansione libera adiabatica. Ciò è in accordo con gli esperimenti svolti a bassa pressione. Esperimenti accurati ad alta pressione per i gas reali mostrano una leggera diminuzione della temperatura dopo l'espansione.

Una trasformazione che avviene a pressione costante è detta **trasformazione isobara**. Quando avviene una tale trasformazione, il calore scambiato e il lavoro svolto sono entrambi non nulli. Il lavoro svolto è semplicemente la pressione moltiplicata per la variazione di volume, ossia $P(V_f - V_i)$.

Una trasformazione che avviene a volume costante è detta **trasformazione isocora**. In questa trasformazione, il lavoro svolto è chiaramente nullo. Quindi dal primo principio si vede che

$$\Delta U = Q \quad [17.11]$$

Trasformazione isobara • (a pressione costante)

Trasformazione isocora • (a volume costante)

Primo principio per una trasformazione isocora •

Questo ci dice che se del calore viene assorbito da un sistema, mantenuto a volume costante, tutto il calore si trasforma in aumento dell'energia interna del sistema. Per esempio, quando un contenitore di deodorante viene gettato nel fuoco, il sistema (il gas dentro il contenitore) assorbe calore per conduzione attraverso le pareti metalliche del contenitore. Il risultato è un aumento di temperatura e di pressione fino a quando il contenitore con tutta probabilità esplode.

Una trasformazione che avviene a temperatura costante è detta **trasformazione isoterna**. L'energia interna di un gas perfetto è solo funzione della temperatura. Quindi, in una trasformazione isoterna di un gas perfetto, $\Delta U = 0$.

Espansione isoterna di un gas perfetto

Si supponga che un gas perfetto si espanda in modo quasi-statico a temperatura costante come descritto dal diagramma P - V in Figura 17.7. La curva è una iperbole che obbedisce all'equazione $PV = \text{costante}$. Calcoliamo il lavoro compiuto

Trasformazione isoterna • (a temperatura costante)

dal gas nell'espansione dallo stato i allo stato f . L'espansione isoterma di un gas può essere ottenuta ponendo il gas in buon contatto termico con un serbatoio di energia termica, alla stessa temperatura, come in Figura 17.6a.

Il lavoro è dato dall'Equazione 17.7. Poiché il gas è perfetto e la trasformazione è quasi-statica, si può applicare $PV = nRT$ per ogni punto del cammino. Pertanto si ha

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

Ma in questo caso T è costante; pertanto si può portare fuori dal segno di integrale, insieme a n ed R

$$W = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}$$

Per calcolare questo integrale, usiamo il noto risultato $\int \frac{dx}{x} = \ln x$. Troviamo quindi

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad [17.12]$$

Numericamente questo lavoro è uguale all'area ombreggiata sotto la curva nel diagramma P - V in Figura 17.7. Se il gas si espande isotermicamente, allora $V_f > V_i$ e si vede che il lavoro compiuto dal gas è positivo, come ci saremmo aspettati. Se il gas viene compresso isotermicamente, allora $V_f < V_i$ ed il lavoro compiuto dal gas è negativo. Nel prossimo capitolo troveremo che l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura. Quindi, per una trasformazione isoterma $\Delta U = 0$ e dal primo principio si conclude che l'energia termica trasferita dal serbatoio al gas è uguale al lavoro compiuto dal gas, ossia $Q = W$.

Il processo di ebollizione

Si supponga che un liquido di massa m vaporizzi a pressione costante P . Il suo volume allo stato liquido è V_l , e il suo volume allo stato di vapore è V_v . Troviamo il lavoro compiuto nell'espansione e la variazione di energia interna del sistema.

Poiché l'espansione avviene a pressione costante, il lavoro compiuto dal sistema è

$$W = \int_{V_l}^{V_v} P dV = P \int_{V_l}^{V_v} dV = P (V_v - V_l)$$

Il calore che deve essere fornito al liquido per la sua completa vaporizzazione è eguale a $Q = mL_v$ dove L_v è il calore latente di vaporizzazione del liquido. Usando il primo principio e il risultato precedente, si ottiene

$$\Delta U = Q - W = mL_v - P (V_v - V_l) \quad [17.13]$$

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Supponiamo che un gas molto diluito (o a bassa densità) subisca una trasformazione isoterma, durante la quale viene svolto un lavoro W . Quanta energia viene trasferita per mezzo del calore?

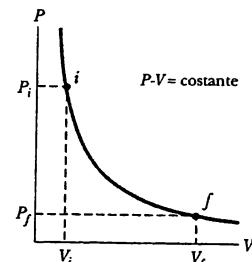


Figura 17.7 Il diagramma P - V di un'espansione isoterma da uno stato iniziale a uno stato finale. La curva è un'iperbole equilatera.

- *Lavoro svolto in una trasformazione isoterma*

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Consideriamo il corpo umano quando esegue degli esercizi faticosi, come sollevare pesi o correre in bicicletta. Viene svolto del lavoro compiuto dal corpo, e dell'energia esce per conduzione dalla pelle verso l'ambiente circostante. Secondo il primo principio della termodinamica, la temperatura del corpo dovrebbe diminuire costantemente durante l'esercizio. Tuttavia, ciò non accade. In questa circostanza risulta non valido il primo principio? Spiegare.

Esempio 17.4 Ebollizione dell'acqua

Un grammo d'acqua occupa il volume di 1.00 cm^3 a pressione atmosferica. Quando quest'acqua è fatta bollire diviene 1671 cm^3 di vapore d'acqua. Calcolare la variazione di energia interna per questa trasformazione.

Soluzione Poiché il calore latente di vaporizzazione dell'acqua è $2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$ a pressione atmosferica, il calore necessario per fare evaporare 1.00 g d'acqua è

$$Q = m L_v = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) (2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}) = 2260 \text{ J}$$

Il lavoro compiuto dal sistema è positivo e uguale a

$$\begin{aligned} W &= P(V_v - V_i) \\ &= (1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2) [(1671 - 1.00) \times 10^{-6} \text{ m}^3] \\ &= 169 \text{ J} \end{aligned}$$

Quindi la variazione di energia interna è data da

$$\Delta U = Q - W = 2260 \text{ J} - 169 \text{ J} = 2.09 \text{ kJ}$$

L'energia interna del sistema *aumenta* poiché ΔU è positivo. Vediamo che la maggior parte del calore assorbito dal liquido (93%) va ad aumentare l'energia interna. Solo una piccola frazione del calore (7%) va in lavoro esterno.

FACOLTATIVO

17.7 • PROPAGAZIONE DEL CALORE

In pratica, è importante capire la rapidità con cui l'energia viene trasferita fra un sistema e l'ambiente circostante e il meccanismo responsabile del trasferimento. Probabilmente avete usato un thermos o qualche altro tipo di recipiente termicamente isolato per conservare il caffè caldo per un certo tempo. Il recipiente riduce il trasferimento di energia fra l'aria esterna e il caffè caldo. Alla fine, naturalmente, il caffè raggiungerà la temperatura dell'aria, poiché il recipiente non è un isolante perfetto. In generale, non ci sarà scambio di energia fra un sistema e l'ambiente circostante quando essi sono alla medesima temperatura.

Conduzione di calore

Il processo di propagazione del calore più semplice da descrivere quantitativamente è detto **conduzione di calore**. In questo processo, la propagazione del calore può essere vista su scala atomica come scambio di energia cinetica fra le molecole, nel quale le particelle meno energetiche guadagnano energia urtando con le particelle più energetiche. Per esempio, se si mette una sbarretta di rame nel fuoco tenendola per una estremità, si scopre che la temperatura del metallo tenuto in mano aumenta rapidamente. L'energia raggiunge la mano tramite la conduzione. Il modo in cui l'energia si propaga dalla fiamma, attraverso la sbarretta di rame fino alla mano, può essere compreso esaminando ciò che avviene agli atomi del metallo. Inizialmente, prima che la sbarretta sia messa nel fuoco, gli atomi di rame vibrano attorno alla loro posizione di equilibrio. Quando la fiamma riscalda la sbarretta, gli atomi di rame vicini al fuoco cominciano a vibrare con ampiezze sempre maggiori. Questi atomi che vibrano con grandi ampiezze urtano i loro vicini e trasferiscono parte della loro energia durante l'urto. Lentamente, gli atomi di rame più lontani lungo la sbarretta



I segni di neve sciolti nel parcheggio indicano la presenza di tubi di vapore usati per favorire la rimozione della neve. Il calore del vapore è condotto fino al pavimento dai tubi e causa la fusione della neve. (Dr. Albert A. Bartlett, Università del Colorado, Boulder, per gent. conc.)

aumentano la loro ampiezza di vibrazione, finché le vibrazioni di grande ampiezza raggiungono l'estremità tenuta con la mano. L'effetto di questo aumento della vibrazione è un aumento di temperatura del metallo e probabilmente una mano scottata.

Sebbene il trasferimento di energia in un metallo possa essere parzialmente spiegato tramite il concetto di vibrazione atomica e di moto degli elettroni, la velocità della conduzione di calore dipende anche dalle proprietà della sostanza che viene riscaldata. Per esempio, è possibile tenere con la mano un pezzo di amianto sul fuoco indefinitamente; ciò implica che l'amianto conduce molto poco il calore. In generale, i metalli sono buoni conduttori di calore e materiali come amianto, sughero, carta e lana di vetro sono cattivi conduttori. Anche i gas sono cattivi conduttori di calore a causa della loro natura di sistema diluito. I metalli sono buoni conduttori di calore, perché contengono molti elettroni relativamente liberi di muoversi nel materiale e trasferire energia da un posto all'altro. Perciò, in un buon conduttore, come il rame, la conduzione di calore ha luogo attraverso le vibrazioni degli atomi e attraverso il moto degli elettroni liberi.

La conduzione del calore avviene solo se c'è una differenza di temperatura tra due parti del mezzo conduttore. Si consideri una sbarra di materiale di spessore Δx e sezione A con le sue facce opposte a temperature differenti T_1 e T_2 , dove $T_2 > T_1$ (Fig. 17.8). Si trova sperimentalmente che l'energia Q propagata in un intervallo di tempo Δt fluisce dall'estremità più calda a quella più fredda. Si trova che la velocità con cui si propaga il calore, $Q/\Delta t$, è proporzionale alla sezione e alla differenza di temperatura e inversamente proporzionale allo spessore. Cioè,

$$\frac{Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

È utile usare il simbolo H per indicare la velocità di trasferimento del calore, cioè $H = Q/\Delta t$. Si osservi che H ha come unità il watt, mentre Q è espresso in joule e Δt in secondi ($1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$). Per una sbarra di spessore infinitesimo dx e una differenza di temperatura dT , si può scrivere la legge della conduzione del calore

$$H = -kA \frac{dT}{dx} \quad [17.14]$$

dove la costante di proporzionalità k è detta **conducibilità termica** del materiale e dT/dx è noto come **gradiante di temperatura** (la variazione di temperatura con la posizione). Il segno negativo nell'Equazione 17.14 denota che l'energia fluisce come calore nella direzione di diminuzione della temperatura.

Si supponga che una sostanza abbia la forma di una lunga sbarretta uniforme di lunghezza L , come in Figura 17.9, e sia isolata in modo che il calore non possa sfuggire dalla sua superficie tranne che alle estremità, che sono a contatto termico con dei termostati⁵ alle temperature T_1 e T_2 . Quando si raggiunge uno stato stazionario, la temperatura in ogni punto lungo la sbarretta è costante nel tempo. In questo caso, il gradiante di temperatura è lo stesso ovunque lungo la sbarretta ed è

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{L}$$



Figura 17.8 Propagazione del calore attraverso una sbarra conduttrice di sezione A e spessore Δx . Le facce opposte sono a differenti temperature T_1 e T_2 .

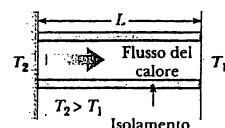


Figura 17.9 Conduzione del calore attraverso una sbarretta isolata di lunghezza L . Le estremità opposte sono in contatto termico con termostati a due temperature diverse.

⁵ Dispositivo capace di scambi termici mantenendo la propria temperatura a un valore costante T . Vedi anche la nota (2) a pag. 509 [N.d.T.].

Pertanto il calore propagato nell'intervallo di tempo Δt è

$$H = kA \frac{(T_2 - T_1)}{L} \quad [17.15]$$

Le sostanze che sono buoni conduttori di calore hanno valori grandi di conducibilità termica, mentre gli isolanti termici hanno valori bassi di conducibilità termica. Si vede dalla Tabella 17.3, che i metalli sono generalmente conduttori termici migliori dei non-metalli.

Per una sbarra (o piastra) formata da strati di vari metalli di spessori L_1, L_2, \dots e conducibilità k_1, k_2, \dots , la velocità di propagazione del calore attraverso la sbarra allo stato stazionario è data da

$$H = \frac{A (T_2 - T_1)}{\sum_i (L_i/k_i)} \quad [17.16]$$

dove T_1 e T_2 sono le temperature delle estremità esterne della sbarra (tenute costanti) e il simbolo di somma è esteso a tutte le sbarre.

TABELLA 17.3 Conducibilità termiche di alcune sostanze

Sostanza	Conducibilità termica (W/m · °C)
Metalli (a 25°C)	
Alluminio	238
Rame	397
Oro	314
Ferro	79.5
Piombo	34.7
Argento	427
Gas (a 20°C)	
Aria	0.0234
Elio	0.138
Idrogeno	0.172
Azoto	0.0234
Ossigeno	0.0238
Non-metalli (valori approssimativi)	
Amianto	0.08
Cemento	0.8
Diamante	2300
Vetro	0.8
Ghiaccio	2
Gomma	0.2
Acqua	0.6
Legno	0.08

Convezione

Vi sarà capitato qualche volta di riscaldarvi le mani, tenendole sopra una fiamma. In questo caso, l'aria, sopra la fiamma, si riscalda e si espande; la densità dell'aria di conseguenza diminuisce e l'aria sale. La massa d'aria calda che arriva alle mani le riscalda. Il trasferimento di energia termica dovuto al moto di una sostanza riscaldata è chiamato convezione. Quando il moto è dovuto a differenze di densità, come avviene per l'aria vicino a una fiamma, si tratta di convezione naturale. Se la sostanza calda è messa in moto da un ventilatore o da una pompa, come avviene nei sistemi di riscaldamento ad aria calda o ad acqua calda, il processo è detto convezione forzata.

La circolazione del flusso d'aria in vicinanza del mare è un esempio di convezione. Analogamente, il mescolamento che ha luogo quando l'acqua si raffredda ed, eventualmente, congela alla sua superficie (Capitolo 16) è un esempio di convezione naturale. Il mescolamento prodotto dalle correnti di convezione cessa quando la temperatura dell'acqua ha raggiunto i 4°C. Poiché l'acqua in un lago non può essere raffreddata, per convezione, a temperature inferiori ai 4°C, e l'acqua di per sé non è un buon conduttore di calore, la sua temperatura si mantiene circa a 4°C per tempi lunghi. I pesci, quindi, trovano una temperatura confortevole in cui vivere anche per periodi prolungati di freddo.

Se non vi fossero le correnti di convezione, sarebbe molto difficoltoso far bollire l'acqua. Quando l'acqua viene riscaldata in una teiera, gli strati inferiori sono i primi ad essere riscaldati. Gli strati caldi d'acqua si espandono e, a causa della diminuzione di densità, salgono in superficie. Contemporaneamente l'acqua fredda più densa prende il posto dell'acqua calda sul fondo della teiera e viene a sua volta riscaldata.

Lo stesso processo ha luogo quando si riscalda una stanza con un radiatore. Il radiatore caldo riscalda l'aria nella parte più bassa della stanza. L'aria calda si espande e per effetto della minore densità sale nella zona più alta della stanza, da dove l'aria fredda, più densa, scende prendendo il posto dell'aria calda. Il modello della corrente d'aria continua che si instaura, prodotta dalla convezione, è mostrato in Figura 17.10.

Radiazione

Il terzo meccanismo di trasferimento dell'energia è la radiazione. Tutti i corpi irradiano continuamente energia sotto forma di onde elettromagnetiche. Il tipo di radiazione associata al trasferimento di energia termica da un posto a un altro è indicato come radiazione infrarossa. Attraverso la radiazione elettromagnetica circa 1340 J di energia termica proveniente dal Sole colpiscono ogni secondo 1 m² della parte esterna dell'atmosfera terrestre. Una parte di questa energia è riflessa indietro nello spazio e una parte è assorbita dall'atmosfera, e tuttavia ogni giorno riesce ad arrivare sulla superficie terrestre una quantità oltre cento volte superiore al fabbisogno energetico del pianeta. Basterebbe che fossimo capaci di catturarla e usarla efficientemente. L'aumento del numero di case con impianti a energia solare è un esempio del tentativo di utilizzare questa sorgente gratuita di energia.

L'energia radiante del Sole influenza la nostra esistenza quotidiana in molti modi. Essa influenza la temperatura media terrestre, le correnti oceaniche, l'agricoltura, l'andamento delle precipitazioni piovose e così via. Per esempio, consideriamo cosa accade alla temperatura atmosferica durante la notte. Se c'è copertura nuvolosa sulla Terra il vapore d'acqua delle nuvole riflette indietro una parte della radiazione infrarossa emessa dal suolo e di conseguenza la temperatura rimane a livelli moderati. In assenza di nuvole, però, non c'è nulla che

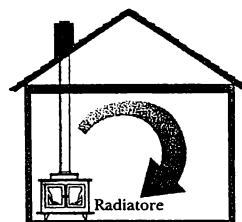


Figura 17.10 Correnti di convezione prodotte in una stanza, riscaldata da un radiatore.

impedisca a questa radiazione di sfuggire nello spazio e pertanto la temperatura si abbassa di più in una notte limpida che in una notte nuvolosa.

La potenza di emissione di energia radiante da un corpo è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta. Ciò è noto come **legge di Stefan**, spesso scritta nella forma

$$P = \sigma A e T^4 \quad [17.17]$$

dove P è la potenza irradiata dal corpo in W (o J/s), σ è una costante universale pari a $5.6696 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$, A è l'area della superficie del corpo in m^2 , e è una costante detta **emissività**, e T è la temperatura assoluta. Il valore di e può variare tra 0 e 1 e dipende dalle proprietà della superficie.

Un corpo irradia energia a una velocità data dall'Equazione 17.17. Nello stesso tempo, il corpo assorbe anche energia elettromagnetica. Se l'ultimo processo non avvenisse, un corpo, alla fine, irradierebbe tutta la sua energia e la sua temperatura raggiungerebbe lo zero assoluto. L'energia che un corpo assorbe viene dall'ambiente circostante, che consiste di altri corpi che irradiano energia. Se un corpo è a temperatura T e l'ambiente è a temperatura T_0 , l'energia netta assorbita o ceduta ogni secondo dal corpo, come risultato della radiazione, è data da

$$P_{\text{netta}} = \sigma A e (T^4 - T_0^4) \quad [17.18]$$

Quando un oggetto è in *equilibrio* con l'ambiente, *irradia e assorbe energia alla stessa velocità, per cui la sua temperatura resta costante*. Quando un oggetto è più caldo dell'ambiente irradia più energia di quanta ne assorba e quindi si raffredda. Un **assorbitore ideale** è definito come un oggetto che assorbe tutta l'energia che incide su di esso. L'emissività di un assorbitore ideale è uguale all'unità. Un oggetto di questo tipo è spesso chiamato **corpo nero**. Un assorbitore ideale è anche un irradiatore ideale di energia. Al contrario, un oggetto con emissività uguale a zero non assorbe assolutamente l'energia incidente su di esso. Un simile oggetto riflette tutta l'energia incidente e pertanto è un sistema riflettente perfetto.

Il vaso Dewar

Il thermos, detto anche vaso Dewar⁶ nella comunità scientifica, è un esempio pratico di contenitore progettato per minimizzare le perdite di energia per convezione, conduzione e radiazione. Un contenitore di questo tipo viene usato per immagazzinare liquidi caldi o freddi per lunghi periodi di tempo. La costruzione tipica (Fig. 17.11) consiste in un recipiente di vetro pyrex a due pareti con pareti interne argentate. Nello spazio fra le pareti viene fatto il vuoto, per minimizzare la propagazione di calore per convezione e conduzione. Le pareti argentate minimizzano la propagazione di calore per radiazione riflettendo la maggior parte del calore trasmesso per irraggiamento. Una minima quantità di energia viene persa attraverso il collo del vaso, poiché il vetro è un cattivo conduttore di calore e la sezione del vetro nella direzione della conduzione è piccola. Una ulteriore riduzione della perdita di energia è ottenuta riducendo le dimensioni del collo del vaso. I vasi Dewar sono comunemente usati per immagazzinare azoto liquido (punto di ebollizione 77 K) e ossigeno liquido (punto di ebollizione 90 K).

Per altri liquidi criogenici, come l'olio liquido, che ha un calore specifico molto basso (punto di ebollizione 4.2 K), è spesso necessario usare un sistema a doppio Dewar in cui il vaso Dewar contenente il liquido è a sua volta contenuto in un secondo vaso Dewar. Lo spazio tra i due vasi è riempito con azoto liquido.

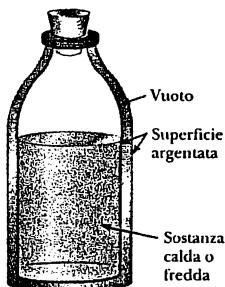


Figura 17.11 Vista in sezione di un recipiente Dewar usato per immagazzinare liquidi caldi e freddi e altre sostanze.

⁶ Inventato da Sir James Dewar (1842–1923).

Fisica ragionata 6

Se stai seduto vicino al fuoco con gli occhi chiusi, puoi sentire un significativo riscaldamento delle palpebre. Se, ora, metti degli occhiali e riprovi, le tue palpebre non avvertiranno quasi alcun riscaldamento. Perché?

Ragionamento La maggior parte del calore che si avverte quando si sta vicino al fuoco è dovuto alla radiazione da parte del fuoco. Una notevole frazione di questa radiazione si trova nella parte infrarossa dello spettro. Le tue palpebre sono particolarmente sensibili alla radiazione infrarossa. Tuttavia, i vetri degli occhiali sono opachi alla radiazione infrarossa. Quindi, quando metti gli occhiali, blocchi la maggior parte della radiazione che raggiunge le tue palpebre, e così esse sentiranno più fresco.

Fisica ragionata 7

Se osservi attentamente il bulbo di una vecchia lampadina bruciata, ti accorgerai di una regione più scura che esiste sulla superficie interna. Inoltre, questa regione si trova sulla parte dell'involucro di vetro che sta più in alto quando la lampadina è accesa. Qual è l'origine di questa zona scura, e perché si trova nel punto più alto?

Ragionamento La zona scura è tungsteno, che è vaporizzato dal filamento della lampadina e si è raccolto sulla superficie interna del vetro. Molte lampadine contengono gas per consentire la convezione all'interno del bulbo. Il gas vicino al filamento è ad altissima temperatura, causando una espansione e fluendo verso l'alto per il principio di Archimede. Quando il gas fluisce verso l'alto, trasporta i vapori di tungsteno, cosicché il tungsteno si raccoglie sulla superficie nel punto più alto della lampadina.

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Strofini il palmo della mano su una superficie metallica per 30 o 45 secondi. Poni il palmo dell'altra mano su una zona non strofinata della superficie e poi sulla zona strofinata. La parte strofinata sembrerà più calda. Ripeti, ora, questo procedimento su una superficie di legno. Potrai notare che la differenza di temperatura fra la parte strofinata e non del legno sembra maggiore di quella della superficie metallica. Perché?

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Nei climi abitualmente caldi che sono soggetti ad occasionali gelate, i coltivatori irrorano i frutti con acqua, sperando che si formi uno straterello di ghiaccio sui frutti. Perché ciò è vantaggioso?

PROBLEMA CONCETTUALE 5

In una notte limpida e fredda, perché si forma della brina sulla parte superiore delle cassette per la posta e sulle macchine piuttosto che ai lati?

PROBLEMA CONCETTUALE 6

Si possono riscaldare delle tazze di acqua per caffè o tè per mezzo di una spirale a immersione, la quale immersa nell'acqua si riscalda per mezzo dell'elettricità. Le istruzioni avvertono di non usare la spirale fuori dall'acqua. Perché? La spirale a immersione sarebbe adatta per riscaldare una tazza di stufato?

SOMMARIO

Il **calore** è un trasferimento di energia che avviene unicamente come conseguenza di una differenza di temperatura. L'**energia interna** di una sostanza è una funzione dello stato della sostanza e generalmente aumenta all'aumentare della temperatura.

La **caloria** è la quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 g d'acqua da 14.5°C a 15.5°C. Si trova sperimentalmente che l'**equivalente meccanico del calore** è 1 cal = 4.186 J. La **capacità termica**, C , di una sostanza è definita come la quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura della sostanza di un grado Celsius.

L'**energia termica** necessaria per variare la temperatura di una sostanza di ΔT è

$$Q = mc \Delta T \quad [17.3]$$

dove m è la massa della sostanza e c il suo **calore specifico**.

L'**energia termica** necessaria per il cambiamento di fase di una sostanza pura di massa m è data da

$$Q = mL \quad [17.5]$$

Il parametro L è detto **calore latente** della sostanza e dipende dalla natura del cambiamento di fase e dalle proprietà della sostanza.

Una **trasformazione quasi-statica** è una trasformazione che avviene abbastanza lentamente da permettere al sistema di essere sempre in uno stato di equilibrio.

Il **lavoro compiuto dal gas**, quando il suo volume passa da un certo valore iniziale V_i a un certo valore finale V_f è

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad [17.7]$$

dove P è la pressione, la quale può variare durante la trasformazione. Per calcolare W , deve essere specificata la natura della trasformazione, P e V devono essere noti a ogni passo della trasformazione. Poiché il lavoro svolto dipende dagli stati iniziale, finale e intermedi, allora dipende dal cammino compreso fra gli stati iniziale e finale.

Il **primo principio della termodinamica** è il principio di conservazione dell'energia. Esso include tutte le forme di energia, inclusa l'**energia termica**.

Quando un sistema stazionario subisce un cambiamento da uno stato a un altro, la variazione di energia interna del sistema, ΔU , è data da

$$\Delta U = Q - W \quad [17.8]$$

dove Q è l'**energia termica** assorbita o ceduta dal sistema e W è il **lavoro compiuto** dal sistema. Sebbene Q e W dipendano entrambi dal cammino che collega lo stato iniziale a quello finale, la quantità ΔU è indipendente dal cammino.

Un sistema isolato non interagisce con l'ambiente circostante. L'**energia interna** di un sistema isolato rimane costante. In una **trasformazione ciclica** (una trasformazione che inizia e finisce nello stesso stato), $\Delta U = 0$ e pertanto $Q = W$. Cioè il calore assorbito dal sistema è uguale al lavoro compiuto durante il ciclo. Una **trasformazione adiabatica** è una trasformazione in cui non viene scambiata energia termica tra il sistema e l'ambiente. In questo caso, il primo principio fornisce $\Delta U = -W$. Cioè, l'**energia interna** varia come conseguenza del lavoro compiuto dal (o sul) sistema. In una **espansione libera adiabatica** di un gas, $Q = 0$ e $W = 0$ e perciò $\Delta U = 0$. Cioè, l'**energia interna** non varia in una tale trasformazione. Una **trasformazione isocora** è una trasformazione che avviene a volume costante. Nessun lavoro è compiuto in questo processo. Una **trasformazione isobara** è una trasformazione che avviene a pressione costante. Il lavoro compiuto in una tale trasformazione è semplicemente $P\Delta V$. Una **trasformazione isoterna** è una trasformazione che avviene a temperatura costante. Il lavoro compiuto da un gas perfetto durante una trasformazione isoterna è

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad [17.12]$$

DOMANDE CONCETTUALI

1. Distinguere chiaramente fra temperatura, calore, energia termica ed energia interna.
2. Quando un thermos pieno di caffè caldo viene agitato, quali sono le variazioni (se ci sono) in (a) temperatura del caffè e (b) energia interna del caffè?
3. Usando il primo principio della termodinamica, spiegare perché l'energia *totale* di un sistema isolato si conserva sempre.
4. L'alcool etilico ha un calore specifico pari a circa la metà di quello dell'acqua. Se si fornisce la stessa quantità di calore a masse uguali di acqua e alcool in recipienti separati, confrontare l'aumento di temperatura dei due liquidi.
5. Un piccolo crogiuolo estratto da un forno a 200°C viene immerso in una tinozza d'acqua a temperatura ambiente (questo processo chiamato "quenching", consiste in un raffreddamento brusco). Fare una valutazione della temperatura finale di equilibrio.
6. Il penny USA è ora fatto di zinco ricoperto di rame. Può essere eseguito un esperimento calorimetrico per provare il contenuto di metallo di un insieme di penny? Se è possibile, descrivere la procedura da usare.
7. Perché è errata l'affermazione: "Presi due corpi qual-
- siasi, quello a temperatura maggiore contiene una quantità maggiore di calore"?
8. Qual è la difficoltà maggiore nella misura dei calori specifici, se un campione, con una temperatura superiore a 100°C, viene immerso in acqua?
9. La temperatura dell'aria sopra le aree costiere è molto influenzata dal grande calore specifico dell'acqua. Una ragione è che l'energia termica ceduta quando 1 metro cubo di acqua si raffredda di 1.0°C farà aumentare di 1.0°C la temperatura di un volume molto maggiore di aria. Ottenere una stima di questo volume d'aria. Il calore specifico dell'aria è approssimativamente 1.0 kJ/kg · °C. Si assuma che la densità dell'aria sia 1,3 kg/m³.
10. Devi prendere una pentola caldissima dalla cucina. Hai a disposizione una coppia di presine isolanti. Per prendere la pentola in modo più confortevole bagni le presine in acqua fredda o le usi asciutte?
11. I pionieri immagazzinavano frutta e verdura in celle sotterranee. Discutere il più esaurientemente possibile la scelta di questo luogo di immagazzinamento.
12. In inverno, i pionieri citati nella Domanda 11 conservavano una tinozza d'acqua accanto alle loro provviste. Perché?

PROBLEMI

Paragrafo 17.1 Calore, energia termica, ed energia interna

Paragrafo 17.2 Calore specifico

1. Il famoso esperimento di Joule per misurare l'equivalente meccanico del calore è illustrato nella Figura P17.1. Le due masse hanno un valore di 1.50 kg ciascuna, e il recipiente contiene 200 g di acqua; qual è l'aumento di temperatura dell'acqua dopo che le masse sono scese di 3.00 m?
2. Un campione di rame di 50.0 g si trova a 25.0°C. Se gli viene fornita una quantità di calore di 1200 J, qual è la temperatura finale del rame?
3. La temperatura di un lingotto d'argento, di 525 g, aumenta di 10.0°C, quando assorbe una quantità di calore pari a 1.23 kJ. Determinare il calore specifico dell'argento.
4. Qual è l'ordine di grandezza del calore che uno scal-dabagno fornisce all'acqua per un bagno caldo? Come si confronta questa energia con l'apporto giornaliero di energia dal cibo? Nella risposta fissare le grandezze da stimare e i valori che si stimano per esse.
5. Un ferro di cavallo di 1.50 kg a 600°C è lasciato cadere in un secchio contenente 20.0 kg di acqua a 25.0°C. Qual è la temperatura finale di equilibrio? (Trascurare la capacità termica del contenitore).

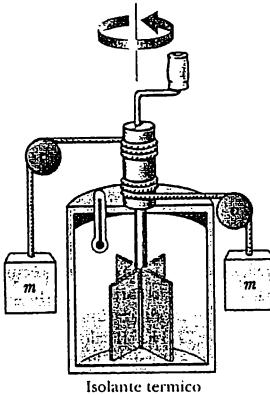


Figura P17.1 I pesi che scendono mettono in rotazione le palette, causando un aumento della temperatura dell'acqua.

6. Una tazza di alluminio di 200 g contiene 800 g di acqua in equilibrio termico alla temperatura di 80.0°C. Il sistema tazza-acqua viene raffreddato uniformemente diminuendo la sua temperatura di

- 1.50°C al minuto. A quale tasso viene sottratta energia termica? Esprimere la risposta in watt.
7. Un calorimetro in alluminio di massa 100 g, contiene 250 g d'acqua. Il sistema è in equilibrio termico a 10.0°C. Due blocchi metallici, uno di rame ed uno di un metallo incognito, di 50.0 g e 70.0 g di massa e alle temperature di 80.0°C e 100°C, rispettivamente, vengono immersi nell'acqua. Il sistema raggiunge una temperatura di equilibrio di 20.0°C. Determinare: (a) il calore specifico del secondo blocco e (b) il tipo di metallo di cui è costituito, con l'aiuto della Tabella 17.1.
8. Il lago Erie contiene circa 4.00×10^{11} m³ d'acqua. Determinare: (a) la quantità di calore necessaria per aumentare la temperatura dell'acqua da 11.0°C a 12.0°C, (b) approssimativamente il numero di anni necessari per ottenere tale quantità di calore, sfruttando integralmente l'energia elettrica erogata da una centrale da 1000 MW.
9. Un penny di rame da 3.00 g a 25.0°C cade a terra da un'altezza di 50.0 m. (a) Se il 60.0% della sua energia potenziale iniziale va in aumento di energia interna del penny, calcolare la sua temperatura finale. (b) Il risultato dipende dalla massa del penny? Spiegare.
- Paragrafo 17.3 Calore latente e cambiamenti di fase**
10. Quanta energia termica è necessaria per trasformare un cubetto di ghiaccio di 40.0 g a -10.0°C in vapore a 110°C?
11. Se 90.0 g di piombo fuso a 327.3°C vengono versati in uno stampo di ferro di 300 g, inizialmente a 20.0°C, quale sarà la temperatura finale del sistema? (Assumere che non ci sia perdita di energia con l'ambiente circostante).
12. Vapore a 100°C viene aggiunto a del ghiaccio a 0°C. (a) Trovare la quantità di ghiaccio fuso e la temperatura finale quando la massa di vapore è 10.0 g e la massa di ghiaccio è 50.0 g. (b) Ripetere il calcolo quando la massa di vapore è 1.00 g e la massa di ghiaccio è 50.0 g.
13. Un blocco di rame di massa 1.00 kg, inizialmente a 20.0°C, viene calato in un grande recipiente d'azoto liquido a 77.3 K. Calcolare la quantità, in chilogrammi, di azoto che vaporizza fino al momento in cui il rame raggiunge 77.3 K. (Il calore specifico del rame è 0.0920 cal/g.°C e il calore latente di vaporizzazione dell'azoto è 48.0 cal/g).
14. Un calorimetro in rame, di massa 50.0 g, contiene 250 g d'acqua a 20.0°C. Determinare la quantità di vapore, che deve essere condensato nell'acqua, perché il sistema raggiunga una temperatura finale di 50.0°C.
15. Si aggiungono 250 g di ghiaccio, a 0°C, a 600 g di acqua, a 18.0°C, in un recipiente isolato. Determinare: (a) la temperatura finale del sistema, (b) la quantità rimanente di ghiaccio.
16. Un proiettile di piombo, di massa 3.00 g a 30.0°C, alla velocità di 240 m/s, colpisce un blocco di ghiaccio a 0°C, rimanendovi conficcato. Quanto ghiaccio fonde?
17. Due proiettili di piombo veloci, ciascuno di massa 5.00 g e temperatura 20.0°C, urtano frontalmente a una velocità di 500 m/s ciascuno. Assumendo che l'urto sia perfettamente anelastico e che non ci sia perdita di energia con l'atmosfera, descrivere lo stato finale del sistema dei due proiettili.
- Paragrafo 17.4 Lavoro ed energia termica nelle trasformazioni termodinamiche**
18. Un gas in un contenitore è alla pressione di 1.50 atm e occupa un volume di 4.00 m³. Qual è il lavoro fatto dal gas se (a) si espande a pressione costante ad un volume doppio di quello iniziale e (b) è compresso a pressione costante a un quarto del suo volume iniziale?
19. Un gas ideale si espande al doppio del suo volume iniziale, di 1.00 m³, in una trasformazione reversibile, in cui $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5.00 \text{ atm/m}^6$, come viene mostrato in Figura P17.19. Determinare il lavoro compiuto dal gas nell'espansione.
-
- Figura P17.19
20. Determinare il lavoro compiuto da un fluido: (a) nell'espansione da *f* ad *i*, come mostrato in Figura P17.20, (b) nella compressione da *i* a *f*, lungo lo stesso percorso.
-
- Figura P17.20
21. Una mole di gas perfetto è riscaldata lentamente dallo stato (P_0 , V_0) allo stato ($3P_0$, $3V_0$) in modo tale che la

- pressione del gas sia direttamente proporzionale al volume. (a) Quanto lavoro viene svolto nella trasformazione? (b) Qual è la relazione fra la temperatura del gas e il volume durante questa trasformazione?
22. Un campione di elio si comporta come un gas perfetto quando viene riscaldato a pressione costante da 273 K a 373 K. Se il gas compie 20.0 J di lavoro, qual è la massa dell'elio?

Paragrafo 17.5 Il primo principio della termodinamica

23. Si comprime un gas alla pressione costante di 0.800 atm da un volume di 9.00 litri a un volume di 2.00 litri. Nel processo, 400 J di energia termica sono ceduti al gas. (a) Qual è il lavoro compiuto dal gas? (b) Qual è la variazione di energia interna del gas?
24. Un sistema termodinamico subisce una trasformazione durante la quale l'energia interna diminuisce di 500 J. Se, allo stesso tempo, si compiono 220 J di lavoro sul sistema, trovare il calore assorbito o ceduto dal sistema.
25. Un gas compie la trasformazione ciclica mostrata in Figura P17.25. (a) Trovare l'energia termica netta assorbita dal sistema in un ciclo completo. (b) Se il ciclo viene percorso in verso opposto, cioè la trasformazione procede lungo ACBA, qual è l'energia termica netta assorbita per ciclo?

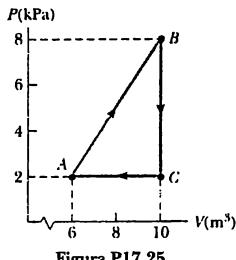


Figura P17.25

26. Si consideri la trasformazione ciclica di Figura P17.25. Se Q è negativo per la trasformazione BC e ΔU è negativa per la trasformazione CA, determinare i segni di Q , W e ΔU in ciascuna trasformazione.

Paragrafo 17.6 Alcune applicazioni del primo principio della termodinamica

27. Un gas perfetto inizialmente a 300 K subisce una espansione isobara alla pressione di 2.50 kPa. Se il volume aumenta da 1.00 m^3 a 3.00 m^3 e il gas assorbe 12500 J di energia termica, trovare (a) la variazione di energia interna del gas e (b) la sua temperatura finale.
28. Una mole di gas perfetto compie 3000 J di lavoro sull'ambiente circostante mentre si espande isotermicamente a una pressione finale di 1.00 atm e un volume di 25.0 litri. Determinare (a) il volume iniziale e (b) la temperatura del gas.

29. Determinare: (a) il lavoro compiuto dal vapore, per il passaggio allo stato di vapore di 1.00 mole d'acqua alla temperatura di ebollizione di 100°C e alla pressione di 1.00 atm, (b) la variazione di energia interna del vapore nella transizione di fase. Si consideri il vapore come un gas ideale.

30. Una mole di gas inizialmente alla pressione di 2.00 atm e al volume di 0.300 litri ha un'energia interna uguale a 91.0 J. Nel suo stato finale, la pressione è di 1.50 atm, il volume 0.800 litri e l'energia interna è uguale a 182 J. Per i tre cammini IAF, IBF, IF in Figura P17.30, calcolare (a) il lavoro compiuto dal gas e (b) l'energia termica netta scambiata nella trasformazione.

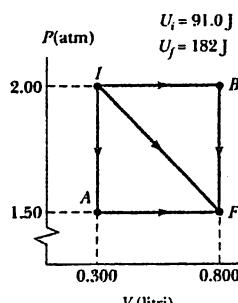


Figura P17.30

31. Due moli di elio gassoso, inizialmente alla temperatura di 300 K e alla pressione di 0.400 atm, subiscono una compressione isoterma fino ad una pressione di 1.20 atm. Determinare (a) il volume finale del gas, (b) il lavoro compiuto dal gas e (c) l'energia termica trasferita. Si consideri l'elio un gas ideale.
32. Un blocco di alluminio di 1.00 kg viene riscaldato alla pressione atmosferica, con un innalzamento della temperatura da 22.0°C a 40.0°C. Determinare: (a) il lavoro compiuto dall'alluminio, (b) la quantità di calore assorbito, (c) la variazione di energia interna dell'alluminio.
33. Una mole di vapor d'acqua alla temperatura di 373 K viene raffreddato a 283 K. Il calore ceduto dal raffreddamento del liquido è assorbito da 10.0 mol di un gas perfetto, causando la sua espansione a una temperatura costante di 273 K. Se il volume finale del gas perfetto è 20.0 litri, determinare il volume iniziale del gas.
34. Una mole di vapore a temperatura T_i viene raffreddato trasformandosi in acqua liquida a temperatura T_f . Il calore scambiato viene assorbito da mol di un gas perfetto, causando la sua espansione a temperatura costante T_0 . Se il volume finale del gas perfetto è V_f , determinare il volume iniziale del gas.
35. Un gas perfetto è sottoposto a un ciclo termodinamico

rappresentato da due trasformazioni isobare e due isoterme come viene mostrato in Figura P17.35. Mostrare che il lavoro totale svolto in un ciclo è dato da

$$W_{\text{tot}} = P_1 (V_2 - V_1) \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

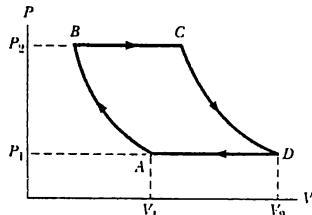


Figura P17.35

Paragrafo 17.7 Propagazione del calore (Facoltativo)

36. Un condotto per il vapore è ricoperto da un materiale isolante di 1.50 cm di spessore e di conducibilità termica $0.200 \text{ cal/cm} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{s}$. Quanto calore si perde ogni secondo quando il vapore è a 200°C e l'ambiente circostante si trova a 20.0°C ? Il condotto ha una circonferenza di 20.0 cm e una lunghezza di 50.0 m. Si trascurino le perdite dalle estremità del condotto.
37. Una sbarra di oro è in contatto termico con una sbarra di argento della stessa sezione e lunghezza (Fig. P17.37). Un'estremità della sbarra composta è mantenuta a 80.0°C , mentre l'estremità opposta è a 30.0°C . Trovare la temperatura della giunzione quando la propagazione di calore raggiunge lo stato stazionario.

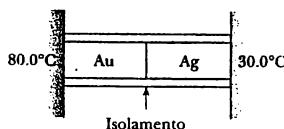


Figura P17.37

38. Un contenitore di materiale isolante, a forma di scatola, ha una superficie di 1.20 m^2 di area e uno spessore delle pareti di 4.00 cm. Un riscaldatore elettrico da 10.0 W, posto all'interno, mantiene una temperatura costante, maggiore di quella esterna di 15.0°C . Determinare la conducibilità termica, k , del materiale isolante.
39. Una finestra atermica di 6.00 m^2 d'area è costruita con due piani di vetro, ognuno spesso 4.00 mm, separati da uno strato d'aria di 5.00 mm. Se l'interno è a 20.0°C e l'esterno è a -30.0°C , qual è la perdita di calore attraverso la finestra?
40. La superficie del Sole ha una temperatura di circa

5800 K . Prendendo il raggio del Sole uguale a $6.96 \times 10^8 \text{ m}$, calcolare la potenza totale irradiata dal Sole. (Si assuma $\epsilon = 1.00$).

Problemi generali

41. Cento grammi di azoto liquido a 77.3 K vengono agitati velocemente in un becher contenente 200 g d'acqua a 5.00°C . Se l'azoto abbandona la soluzione subito dopo essersi trasformato in gas, quanta acqua congela? (Il calore latente di vaporizzazione dell'azoto è 48.0 cal/g , e il calore latente di fusione dell'acqua è 80.0 cal/g).
42. Uno sciattore di fondo di 75.0 kg si sposta sulla neve con un coefficiente di attrito fra sci e neve di 0.200. Si assuma che tutta la neve sotto gli sci si trovi a 0°C e che tutta l'energia termica generata dall'attrito venga assorbita dalla neve, la quale rimane aderente agli sci fino a quando fonde. Quale distanza dovrà percorrere con gli sci per fondere 1.00 kg di neve?
43. Una sbarretta di alluminio, lunga 0.500 m e di sezione 2.50 cm^2 , è inserita in un contenitore termicamente isolato contenente elio liquido a 4.22 K . La sbarretta è inizialmente a 300 K . (a) Se viene inserita metà della sbarretta nell'elio, quanti litri di elio evaporeranno nel tempo necessario alla mezza sbarretta a raggiungere la temperatura di 4.22 K ? (Assumere che la metà superiore della sbarretta non si raffreddi). (b) Se l'estremità superiore della sbarretta viene mantenuta a 300 K , qual è, approssimativamente, il tasso di evaporazione dell'elio liquido dopo che la metà inferiore della sbarretta ha raggiunto 4.22 K ? (Si noti che l'alluminio ha una conducibilità termica di $31.0 \text{ J/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{K}$ a 4.2 K , un calore specifico di $0.210 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$, e una densità di 2.70 g/cm^3 . La densità dell'elio liquido è 0.125 g/cm^3).
44. Un calorimetro a flusso è un apparato usato per misurare il calore specifico di un liquido. La tecnica consiste nel misurare la differenza di temperatura fra i punti d'ingresso e di uscita di un liquido che scorre, fornendo calore a un tasso noto. In un particolare esperimento, un liquido di densità 0.780 g/cm^3 fluisce attraverso un calorimetro con la portata di $4.00 \text{ cm}^3/\text{s}$. A regime, si stabilisce una differenza di temperatura di 4.80°C fra i punti d'ingresso e di uscita, quando il calore è fornito al tasso di 30.0 J/s . Qual è il calore specifico del liquido?
45. Una mole di gas perfetto è contenuta in un cilindro con un pistone mobile. La pressione, il volume e la temperatura iniziali sono rispettivamente P_0 , V_0 e T_0 . Trovare il lavoro compiuto dal gas per le seguenti trasformazioni nel diagramma PV : (a) una compressione isobara in cui il volume finale è la metà del volume iniziale, (b) una compressione isoterma in cui la pressione finale è quattro volte quella iniziale, (c) una trasformazione isocora in cui la pressione finale è il triplo di quella iniziale.

46. Una mole di gas perfetto, inizialmente a 300 K, è raffreddata a volume costante finché la sua pressione finale è un quarto di quella iniziale. Poi, il gas si espanderà a pressione costante finché raggiunge la temperatura iniziale. Determinare il lavoro svolto dal gas.
47. Un gas perfetto inizialmente a pressione P_0 , volume V_0 e temperatura T_0 descrive il ciclo in Figura P17.47. (a) Trovare il lavoro complessivo compiuto dal gas per ciclo. (b) Quanto è il calore complessivo assorbito dal sistema per ciclo? (c) Ottenere un valore numerico per il lavoro complessivo svolto per ciclo, per una mole di gas inizialmente a 0°C.

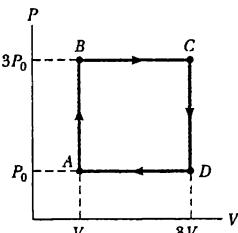


Figura P17.47

48. Una piastra di ferro è tenuta premuta su una ruota d'acciaio, in modo che ci sia una forza di attrito dinamico di 50.0 N, che agisce fra i due pezzi di metallo. La velocità relativa con cui le due superfici strisciano l'una sull'altra è 40.0 m/s. (a) Calcolare la velocità con cui l'energia meccanica viene trasformata in energia termica. (b) La piastra e la ruota hanno una massa di 5.00 kg ciascuna, e ciascuna di esse riceve il 50.0% del calore di attrito. Se il sistema è fatto funzionare come descritto per 10 s e ciascun corpo poi raggiunge una temperatura interna uniforme, qual è l'incremento di temperatura risultante?

49. Un forno solare consiste di uno specchio riflettente curvo che focalizza la luce del Sole su un oggetto da riscaldare (Fig. P17.49). La potenza solare, per unità d'area, che raggiunge la Terra in un certo luogo è

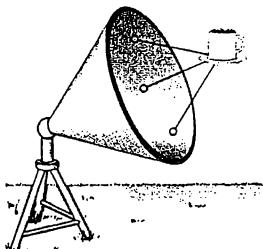


Figura P17.49

- 600 W/m², e un piccolo forno solare ha un diametro di 0.600 m. Assumendo che il 40.0% dell'energia incidente sia trasformata in energia termica, quanto tempo sarà necessario per vaporizzare 0.500 litri d'acqua inizialmente a 20.0°C? (Trascurare la capacità termica del contenitore).
50. Una teiera elettrica sta bollendo. La potenza elettrica assorbita dall'acqua è 1.00 kW. Assumendo che la pressione del vapore nella teiera sia uguale a quella atmosferica, determinare la velocità di efflusso del vapore dal beccuccio della teiera se il beccuccio ha una sezione di 2.00 cm².
51. Una quantità di gas perfetto di 0.2 moli è contenuta all'interno di un cilindro chiuso da un pistone mobile. Il pistone ha una massa di 8000 g, una superficie di 5.00 cm² ed è libero di scorrere su e giù, in modo da mantenere costante la pressione del gas. Quanto lavoro viene compiuto quando la temperatura del gas viene aumentata da 20.0°C a 300°C?
52. Un cilindro contiene 1.00 kg di acqua a 0°C sotto un pistone che tocca appena la superficie dell'acqua. Il pistone viene sollevato rapidamente, cosicché una parte dell'acqua vaporizza e un'altra parte congela (non rimane alcuna parte liquida). Assumendo che la temperatura rimanga costante a 0°C, determinare la massa di ghiaccio che si forma nel cilindro.

Problemi al calcolatore

- S1. La velocità alla quale un corpo con una temperatura iniziale T_i si raffredda quando la temperatura dell'ambiente circostante è T_0 è data dalla legge di Newton del raffreddamento:

$$\frac{dQ}{dt} = hA(T - T_0)$$

dove A è l'area della superficie del corpo, e h è una costante che caratterizza la velocità di raffreddamento, chiamata coefficiente di conducibilità termica esterna. La temperatura del corpo T a ogni istante è

$$T = T_0 + (T_i - T_0) e^{-hAt/mc}$$

dove m è la massa del corpo e c è il suo calore specifico.

Il Foglio Elettronico 17.1 calcola e riporta in grafico la temperatura del corpo in funzione del tempo. Si consideri il raffreddamento di una tazza di caffè alla temperatura iniziale di 75°C. Dopo 3 min, esso si raffredda a una temperatura adatta a poterlo bere di 45°C. La temperatura ambiente è 22°C, l'area effettiva del caffè è 125 cm² e la sua massa è 200 g. Si assuma il calore specifico uguale a quello dell'acqua. Si usi il Foglio Elettronico 17.1 per trovare h per questa tazza di caffè. Cioè, trovare il valore di h per il quale $T = 45^\circ\text{C}$ per $t = 180$ s.

- S2. Nel modello di Einstein di un solido cristallino il calo-

re specifico molare a volume costante è

$$C_V = 3R \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{(e^{T_E/T}-1)^2}$$

dove T_E è una temperatura caratteristica detta temperatura di Einstein e T è la temperatura in Kelvin. (a) Verificare che $C_V \approx 3R$, la legge di Dulong-Petit, per $T \gg T_E$, calcolando $C_V - 3R$. (b) Per il diamante, T_E è approssimativamente 1060 K. Se 1 mol di diamante

viene riscaldata da 300 K a 600 K, integrare numericamente

$$\Delta U = \int C_V dT$$

per trovare l'aumento di energia interna del materiale. Si usi il foglio elettronico per risolvere l'integrazione numerica col metodo del rettangolo. (Si può anche tentare di usare il metodo trapezoidale di Simpson per calcolare l'integrale).

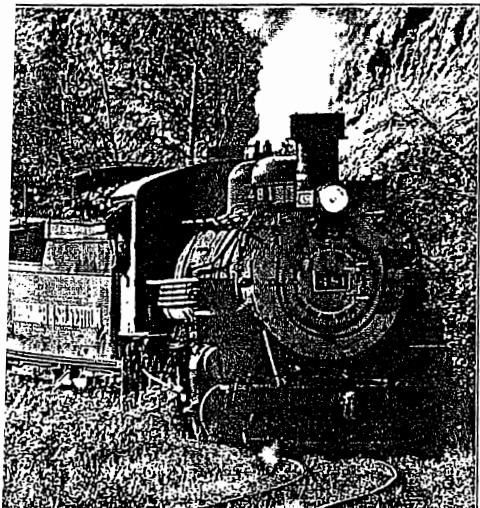
RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Se la trasformazione è isoterma, non vi è variazione di energia interna. In accordo col primo principio, allora, il calore è uguale al lavoro svolto dal gas, $Q = W$.
- L'energia che esce dal corpo per mezzo del lavoro e del calore viene sostituita per mezzo di processi biologici che trasformano l'energia potenziale contenuta nel cibo che l'individuo consuma in energia interna. In questo modo è possibile mantenere costante la temperatura del corpo.
- Quando strofini la superficie, stai compiendo un lavoro su di essa, e l'energia interna della superficie aumenta. L'incremento di energia interna viene rivelato come un aumento di temperatura. Con la superficie metallica, una parte di questa energia viene trasferita lontano dalla zona strofinata per *conduzione*. Quindi, l'energia interna rimanente nella zona strofinata non è così tanta per il metallo come per il legno, ed esso sembra relativamente più freddo del legno.
- Se il frutto fosse esposto direttamente all'aria fredda, sarebbe probabile un abbassamento della sua temperatura parecchi gradi al di sotto del punto di congelamento, causando un danno. Irrorando con acqua, si forma uno strato di ghiaccio sul frutto. Ciò fornisce un certo isolamento del frutto, cosicché la sua temperatura rimarrà un po' più alta di quella dell'aria.
- Uno dei modi con cui i corpi trasferiscono energia è la radiazione. Se consideriamo una cassetta per la posta, la parte superiore della cassetta è orientata verso il cielo limpido. La radiazione emessa da questa zona va verso l'alto nello spazio. Vi è soltanto una piccola frazione di radiazione che viene giù dallo spazio sulla sommità della cassetta per la posta. La radiazione che parte dai lati della cassetta viene assorbita dall'ambiente circostante. La radiazione *proveniente* dall'ambiente circostante (alberi, case, macchine, ecc.), inoltre, può raggiungere i lati della cassetta, rendendola più calda che non la sommità. In conclusione, la parte più alta è più fredda e la brina si forma prima.
- Il funzionamento della spirale ad immersione dipende dalla convezione dell'acqua per mantenere una temperatura di sicurezza. Quando l'acqua vicino alle spire si riscalda, fluisce verso la sommità della tazza per il principio di Archimede. La temperatura della spirale non può superare la temperatura di ebollizione dell'acqua, 100°C. Se la spirale funziona nell'aria, il processo di convezione viene a ridursi e non vi è più il limite superiore dei 100°C. Di conseguenza, le spire possono raggiungere una temperatura alta abbastanza per danneggiarle. Se la spirale è usata per cercare di riscaldare un liquido denso e spesso come uno stufo, il processo di convezione non è veloce abbastanza per allontanare rapidamente l'energia dalle spire, per cui queste possono ancora diventare tanto calde da danneggiarsi.

18

Macchine termiche, entropia, e il secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica, studiato nel capitolo precedente, è il principio di conservazione dell'energia generalizzato per includere il calore come una forma di trasferimento di energia. Questo principio non pone restrizioni al tipo di conversione di energia che può avvenire. Inoltre, esso non prevede alcuna distinzione fondamentale fra l'introduzione di energia in un sistema per mezzo del calore e del lavoro: in base al primo principio, l'energia interna (termica) di un corpo può essere aumentata sia fornendogli calore che compiendo lavoro su di esso. Esiste, tuttavia, un'importante differenza fra calore e lavoro che non risulta evidente dal primo principio. Una manifestazione di questa differenza è il fatto che è impossibile convertire integralmente energia termica in energia meccanica come unico risultato di una qualsiasi trasformazione.



◀ Questa locomotiva a vapore viaggia da Durango a Silverton in Colorado. Le prime locomotive a vapore ottenevano la loro energia dalla combustione del legno o del carbone. Il calore generato produceva il vapore che azionava la locomotiva. I treni moderni usano motori elettrici o diesel. Tutti i motori termici generano calore bruciando un combustibile e convertendo soltanto una frazione di questa energia in energia meccanica. (© Lois Moulton, Tony Stone Worldwide, Ltd.)

CONTENUTO

- 18.1 Macchine termiche e il secondo principio della termodinamica
- 18.2 Trasformazioni reversibili e irreversibili
- 18.3 La macchina di Carnot
- 18.4 Pompe di calore e frigoriferi
- 18.5 Un enunciato alternativo del secondo principio
- 18.6 Entropia
- 18.7 Variazioni di entropia nelle trasformazioni irreversibili
- 18.8 L'entropia su scala microscopica
- 18.9 Entropia e disordine (Facoltativo)



Lord Kelvin, fisico e matematico inglese (1824-1907)

Nato come William Thomson a Belfast, Kelvin fu il primo a proporre l'uso della scala assoluta di temperatura. La scala Kelvin, così chiamata in suo onore, è stata discussa nel Paragrafo 16.2. Gli studi di Kelvin sulla teoria di Carnot lo condussero all'idea che il calore non poteva passare spontaneamente da un corpo più freddo a uno più caldo. (J. L. Charmet/SPL/Photo Researchers)

Diversamente da quanto implica il primo principio, soltanto certi tipi di trasformazioni possono avvenire. Il secondo principio della termodinamica stabilisce quali trasformazioni possono o no avvenire in natura. I seguenti sono esempi di trasformazioni che sono consistenti con il primo principio della termodinamica ma possono procedere soltanto con un ordine regolato dal secondo principio.

1. Quando due oggetti a temperature diverse sono messi a contatto termico fra loro, l'energia termica fluisce sempre dal corpo più caldo a quello più freddo. Mai dal più freddo al più caldo.
2. Una palla di gomma che cade per terra rimbalza diverse volte e alla fine si ferma, ma una palla ferma al suolo giammai inizia a rimbalzare spontaneamente.
3. Un pendolo che oscilla alla fine si ferma a causa degli urti con le molecole d'aria e dell'attrito nei suoi punti di sospensione, e la sua energia meccanica iniziale si trasforma in energia termica; la trasformazione inversa di energia non avviene mai.

Tutte queste sono *trasformazioni irreversibili*, cioè, processi che avvengono spontaneamente in una sola direzione. Nessuna trasformazione irreversibile si svolgerà mai in senso inverso, poiché se ciò avvenisse, verrebbe violato il secondo principio della termodinamica¹.

Dal punto di vista dell'ingegneria, forse, l'applicazione più importante del secondo principio della termodinamica è il rendimento limitato delle macchine termiche. Il secondo principio dice che non può essere costruita una macchina capace di trasformare continuamente energia termica, in un processo ciclico, *totalmente* in altre forme di energia.

18.1 • MACCHINE TERMICHE E IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Una **macchina termica** è un dispositivo che trasforma energia termica in altre forme utili di energia, come l'energia meccanica. In un tipico processo, per esempio, per produrre elettricità in una centrale, viene bruciato carbone o qualche altro combustibile e l'energia termica prodotta viene usata per trasformare l'acqua in vapore. Questo vapore viene convogliato alle pale di una turbina, ponendola in rotazione. Infine, l'energia meccanica associata a questa rotazione è utilizzata per far funzionare un generatore elettrico. Un'altra macchina termica, il motore a combustione interna della vostra automobile, estrae energia termica dalla combustione del carburante e trasforma una frazione di questa energia in energia meccanica.

Una macchina termica fa compiere lavoro a una qualche sostanza attraverso un processo ciclico durante il quale (1) viene assorbita energia termica da una sorgente a temperatura alta, (2) viene compiuto lavoro dalla macchina e (3) viene ceduta energia termica dalla macchina a una sorgente a bassa temperatura. Come esempio, consideriamo il funzionamento di una macchina a vapore nella quale la sostanza che lavora è l'acqua. L'acqua compie un ciclo nel quale prima si trasforma in vapore in una caldaia e poi si espande spingendo un pistone. Dopo che il vapore viene condensato con acqua fredda, esso ritorna alla caldaia e il processo ricomincia.

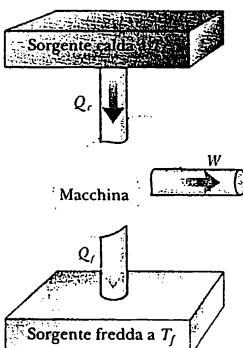


Figura 18.1 Rappresentazione schematica di una macchina termica. La macchina assorbe l'energia termica Q_c dalla sorgente calda, cede l'energia termica Q_f alla sorgente fredda e compie il lavoro W .

¹ Per essere più precisi diremo che l'insieme di eventi nella direzione inversa del tempo è altamente improbabile. Da questo punto di vista, gli eventi in una direzione sono estremamente più probabili di quelli nella direzione opposta.

È utile rappresentare schematicamente una macchina termica come in Figura 18.1. La macchina assorbe una quantità di energia, Q_c , dalla sorgente calda², svolge il lavoro W , e cede l'energia Q_f alla sorgente fredda. Poiché la sostanza che lavora compie un ciclo, la sua energia interna iniziale e finale è la stessa, per cui $\Delta U = 0$. Quindi, dal primo principio si vede che **il lavoro totale, W , compiuto da una macchina termica è uguale all'energia termica netta scambiata dalla macchina**. Come si può vedere dalla Figura 18.1, $Q_{\text{netto}} = Q_c - Q_f$, perciò

$$W = Q_c - Q_f \quad [18.1]$$

dove Q_c e Q_f sono prese come quantità positive.

Se la sostanza che lavora è un gas, **il lavoro totale svolto in una trasformazione ciclica è l'area racchiusa dalla curva che rappresenta la trasformazione in un diagramma P - V** . Ciò è mostrato per una trasformazione ciclica arbitraria nella Figura 18.2.

Il rendimento, ϵ , di una macchina termica è definito come il rapporto fra il lavoro totale svolto e l'energia termica assorbita ad alta temperatura durante un ciclo:

$$\epsilon = \frac{W}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c} \quad [18.2]$$

Possiamo considerare il rendimento come il rapporto fra "ciò che si ottiene" (energia meccanica) e "ciò che si spende" (energia termica ad alta temperatura). L'Equazione 18.2 mostra che una macchina termica avrebbe un rendimento del 100% ($\epsilon = 1$) soltanto se $Q_f = 0$, cioè se non venisse scambiato calore con la sorgente fredda. In altre parole, una macchina termica con rendimento unitario dovrebbe trasformare tutta l'energia termica assorbita in energia meccanica. Una delle conseguenze del secondo principio della termodinamica implica che ciò è impossibile.

Il secondo principio della termodinamica si può enunciare come segue: è impossibile costruire una macchina termica che, operando in un ciclo, abbia come unico risultato quello di assorbire calore da una sorgente e produrre una uguale quantità di lavoro.

Questa forma del secondo principio è utile per capire il funzionamento delle macchine termiche. Con riferimento all'Equazione 18.2, il secondo principio afferma che, nel funzionamento di una macchina termica, W non può mai essere uguale a Q_c , o, alternativamente, che una certa quantità di calore, Q_f , deve essere ceduta all'ambiente circostante. Di conseguenza, è impossibile per principio costruire una macchina termica con un rendimento del 100%.

Il pedaggio sui primi due principi della termodinamica può essere riassunto come segue: il primo principio afferma che non possiamo ottenere, in una trasformazione ciclica, più energia di quanta ne forniamo, e il secondo principio dice che non si può neppure pareggiare il conto perché bisogna assorbire, ad alta temperatura, una quantità di calore maggiore del lavoro prodotto.

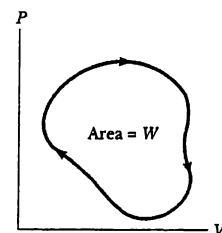


Figura 18.2 Il diagramma P - V per una trasformazione ciclica arbitraria. Il lavoro complessivo svolto è uguale all'area racchiusa dalla curva.

- **Rendimento**

- **Secondo principio della termodinamica**

² Qui e nel seguito con le locuzioni "sorgente calda (fredda)" e "sorgente di calore" si vorrà indicare un dispositivo capace di scambi termici mantenendo la propria temperatura a un valore costante T ("termostato"). L'aggettivo "caldo (freddo)" indica la temperatura di una "sorgente" relativamente a un'altra a temperatura "minore (maggiore)" [N.d.T.].

Fisica ragionata 1

Una macchina termica assorbe e fornisce energia *per mezzo del calore*?

Ragionamento Il modello schematico tipico di una macchina termica mostra che l'energia assorbita dalla macchina entra per mezzo del calore e quella fornita esce per mezzo sia del calore che del lavoro. Tuttavia, ciò è soltanto uno schema. L'energia può entrare e uscire con altri mezzi. In un motore di automobile, per esempio, l'energia entra nei cilindri per mezzo di un *trasferimento di massa* – l'energia è trasportata dal carburante – e poi trasformata in energia termica dal processo di combustione. Lo scarico è pure un trasferimento di massa – la miscela carburante-aria bruciata attraverso il tubo di scappamento. L'atmosfera si può considerare una macchina termica – la radiazione del suolo viene assorbita dall'atmosfera. Circa lo 0.5% di questa energia lavora per condurre i sistemi locali dei venti nella circolazione atmosferica generale. Il resto viene irradiato nello spazio. In questo caso, l'energia in entrata e in uscita viene trasferita per mezzo della *radiazione elettromagnetica*.

Esempio 18.1 Rendimento di un motore

Calcolare il rendimento di un motore che assorbe 2000 J di calore durante la fase di combustione e cede 1500 J per attrito e nella fase di emissione dei gas.

$$\epsilon = 1 - \frac{Q_f}{Q_r} = 1 - \frac{1500 \text{ J}}{2000 \text{ J}} = 0.25 \text{ o } 25\%$$

Soluzione Il rendimento del motore è dato dalla Equazione 18.2

ESERCIZIO 1 Se un motore ha un rendimento del 20% e dissipà 3000 J per attrito, determinare il lavoro fornito dal motore. Risposta 750 J

ESERCIZIO 2 Il calore assorbito da un motore è tre volte maggiore del lavoro che esso fornisce. (a) Qual è il rendimento? (b) Qual è la percentuale di calore assorbito che viene rilasciata al serbatoio freddo? Risposta (a) 0.333 (b) 2/3

18.2 • TRASFORMAZIONI REVERSIBILI E IRREVERSIBILI

Nel prossimo paragrafo discuteremo una macchina termica ideale che è la macchina che ha il più alto rendimento possibile. Allo scopo di capirne la natura, esamineremo prima il significato delle trasformazioni reversibili e irreversibili. Una trasformazione si dice **reversibile** se, dopo che è avvenuta, il sistema può essere riportato nelle condizioni iniziali lungo lo stesso percorso nel quale ogni punto sia uno stato di equilibrio. Una trasformazione che non soddisfi a tali requisiti è **irreversibile**.

Tutte le trasformazioni naturali sono irreversibili. Da un'enorme numero di esempi che potrebbero essere scelti, esaminiamo l'espansione libera di un gas, precedentemente discussa nel Paragrafo 17.4, e mostriamo che essa non può essere reversibile. Il gas è contenuto in un recipiente adiabatico (termicamente isolato), come è mostrato nella Figura 18.3, con una membrana che separa il gas dallo spazio vuoto. Se la membrana viene bucata, il gas si espanderà liberamente nel vuoto. Poiché il gas non esercita alcuna forza che sposti l'ambiente circostante, esso non compie lavoro nell'espandersi. Inoltre, non vi è energia termica trasferita al o dal gas poiché il contenitore è adiabatico. Allora, in questa trasformazione, il sistema è cambiato ma non l'ambiente circostante. Immaginiamo ora di tentare di invertire la trasformazione comprimendo il gas al suo

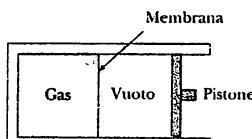


Figura 18.3 Espansione libera di un gas.

volume iniziale. Diciamo che si usa una macchina per spingere indietro il pistone. Si noti, tuttavia, che questa azione modifica sia il sistema che l'ambiente circostante. L'ambiente circostante cambia poiché deve essere compiuto lavoro da un agente esterno sul sistema, e il sistema cambia poiché la compressione aumenta la temperatura del gas. Potremmo abbassare la temperatura del gas permettendogli un contatto termico con una sorgente esterna. Sebbene questa seconda trasformazione riporti il gas al suo stato iniziale, l'ambiente circostante risulta ancora modificato in quanto gli è stata fornita energia termica. Se questa energia termica potesse in qualche modo essere utilizzata per far funzionare un motore al fine di comprimere il gas, il sistema e l'ambiente circostante potrebbero essere riportati al loro stato iniziale. Ma, il nostro enunciato del secondo principio della termodinamica afferma che questa energia termica non può essere completamente trasformata in energia meccanica come unico risultato di una trasformazione isoterma. Dobbiamo concludere che non è avvenuta una trasformazione reversibile.

Sebbene le trasformazioni reali siano sempre irreversibili, alcune sono quasi reversibili. Se una trasformazione reale avviene lentissimamente in modo tale che il sistema sia sempre virtualmente in equilibrio, la trasformazione può essere considerata reversibile. Per esempio, immaginiamo di comprimere un gas molto lentamente facendo cadere qualche granello di sabbia su un pistone privo di attrito come in Figura 18.4. Il processo di compressione può essere invertito ponendo il gas in contatto con un termostato. La pressione, il volume e la temperatura del gas sono ben definiti durante questa compressione isoterma. Ciascun granello di sabbia aggiunto rappresenta un cambiamento verso un nuovo stato di equilibrio. La trasformazione può essere invertita per mezzo della rimozione dei granelli di sabbia dal pistone.

Una caratteristica generale delle trasformazioni reversibili è che esse non presentano effetti dissipativi, come turbolenze o attriti, che trasformano l'energia meccanica in energia termica. In pratica, tali effetti non si possono eliminare completamente, e quindi non è sorprendente che le trasformazioni reali in natura siano irreversibili.

18.3 • LA MACCHINA DI CARNOT

Nel 1824 un ingegnere francese di nome Sadi Carnot (1796-1832) descrisse la teoria di una macchina, che ora si chiama macchina di Carnot, la quale è di grande importanza sia dal punto di vista pratico che teorico. Egli mostrò che una macchina termica che operasse fra due termostati in un ciclo ideale reversibile, detto **ciclo di Carnot**, sarebbe la macchina con il più alto rendimento possibile. Una tale macchina ideale determina un limite superiore per il rendimento di tutte le macchine. Cioè, il lavoro complessivo svolto da una sostanza sottoposta a un ciclo di Carnot è la massima quantità di lavoro possibile per una data quantità di energia termica fornita alla sostanza dal termostato a temperatura più alta.

Per descrivere il ciclo di Carnot, assumeremo che la sostanza che compie il lavoro tra i termostati a T_i e T_f sia un gas perfetto contenuto in un cilindro chiuso da un pistone mobile. Le pareti del cilindro e il pistone sono termicamente isolati. I quattro stadi del ciclo di Carnot sono mostrati in Figura 18.5, mentre nella Figura 18.6 è rappresentato il diagramma P - V del ciclo. Il ciclo consiste di due trasformazioni adiabatiche e di due isometriche, tutte reversibili.

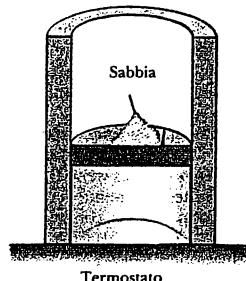
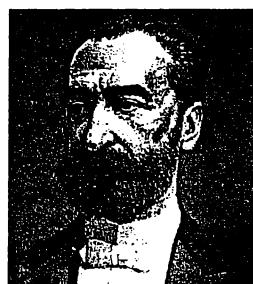
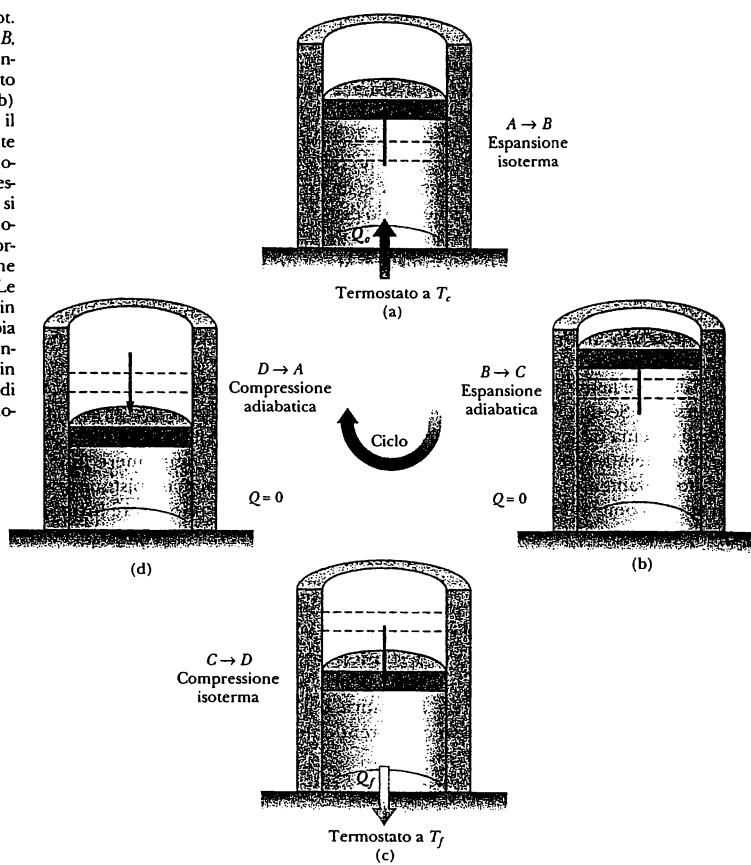


Figura 18.4 Un gas a contatto termico con un termostato viene compresso lentamente lasciando cadere granelli di sabbia sul pistone. La compressione è isoterma e reversibile.



Sadi Carnot (1796-1832)
Fisico francese, Carnot è considerato il fondatore della termodinamica. Alcune sue note trovate dopo la morte indicano che egli fu il primo a scoprire la relazione fra calore e lavoro.

Figura 18.5 Il ciclo di Carnot.
 (a) Nella trasformazione $A \rightarrow B$, il gas si espande isotermicamente mentre si trova in contatto con un termostato a T_c . (b) Nella trasformazione $B \rightarrow C$, il gas si espande adiabaticamente ($Q = 0$). (c) Nella trasformazione $C \rightarrow D$, il gas viene compresso isotermicamente mentre si trova in contatto con un termostato a $T_f < T_c$. (d) Nella trasformazione $D \rightarrow A$, il gas viene compresso adiabaticamente. Le frecce verso l'alto sul pistone in (a) e (b) indicano che la sabbia viene rimossa durante l'espansione, e le frecce verso il basso in (c) e (d) indicano l'aggiunta di sabbia durante la compressione.



- La trasformazione $A \rightarrow B$ è una espansione isotermica alla temperatura T_c , nella quale il gas è mantenuto in contatto termico con un termostato alla temperatura T_c (Fig. 18.5a). Durante la trasformazione il gas assorbe il calore Q_c dal termostato e compie il lavoro W_{AB} innalzando il pistone.
- Nella trasformazione $B \rightarrow C$, la base del cilindro viene isolata termicamente e il gas si espande adiabaticamente, cioè non avviene alcuno scambio termico (Fig. 18.5b). Durante la trasformazione, la temperatura si abbassa dal valore T_c al valore T_f e il gas compie il lavoro W_{BC} innalzando il pistone.
- Nella trasformazione $C \rightarrow D$, il gas è posto in contatto termico con il termostato a temperatura T_f (Fig. 18.5c) ed è compresso isotermicamente alla temperatura T_f . Durante questo tempo, il gas cede la quantità di energia termica Q_f al termostato e viene compiuto sul gas il lavoro W_{CD} .

- Nello stadio finale, $D \rightarrow A$, la base del cilindro viene di nuovo isolata termicamente (Fig. 18.5d) e il gas è compresso adiabaticamente. La temperatura del gas aumenta al valore T_c , e il lavoro svolto sul gas è W_{DA} .

La Figura 18.6 è il diagramma $P\text{-}V$ per il ciclo. Il ciclo consiste in due trasformazioni adiabatiche e due trasformazioni isotermiche, tutte reversibili.

Carnot ha dimostrato che il rendimento della macchina di Carnot è

$$\epsilon_c = \frac{T_c - T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad [18.3]$$

- Rendimento del ciclo di Carnot

È importante osservare che nell'equazione, T deve essere espressa in kelvin. Da questo risultato si vede che tutte le macchine di Carnot che lavorano tra le stesse due temperature hanno lo stesso rendimento. Inoltre, il rendimento di una macchina di Carnot funzionante fra due temperature è maggiore del rendimento di qualunque macchina reale operante fra le stesse due temperature.

L'Equazione 18.3 si può applicare a qualunque sostanza che lavori in un ciclo di Carnot tra due termostati. Secondo questo risultato, il rendimento è zero se $T_f = T_c$ come ci si aspetta. Il rendimento cresce quando T_f diminuisce e T_c aumenta. Tuttavia, il rendimento può essere unitario (100%) soltanto se $T_f = 0$ K. Un tale termostato non è disponibile e così il massimo rendimento è sempre minore dell'unità. Nella maggior parte dei casi pratici, il termostato freddo è vicino alla temperatura ambiente, circa 300 K. Quindi ci si sforza, normalmente, di aumentare la temperatura del termostato caldo. Tutte le macchine reali sono meno efficienti della macchina di Carnot, poiché esse sono tutte soggette a difficoltà pratiche, incluso l'attrito, ma specialmente per la necessità di operare irreversibilmente per completare un ciclo in un breve periodo di tempo.

PROBLEMA CONCETTUALE 1

Che cosa è più efficace per aumentare il rendimento di una macchina di Carnot, aumentare T_c di ΔT , o diminuire T_f di ΔT ?

PROBLEMA CONCETTUALE 2

Un costruttore di automobili fa sapere che le sue macchine offrono lo stesso consumo per chilometro con o senza aria condizionata in funzione. Ci credi? Ascoltando la radio, varia il consumo per chilometro? Accendendo le luci? Facendo funzionare il tergiluce? Alzando o abbassando il finestrino meccanicamente?

PROBLEMA CONCETTUALE 3

Se si eliminasse totalmente l'attrito da una macchina di Carnot, il suo rendimento potrebbe essere del 100%?

- Una forma alternativa della seconda legge della termodinamica

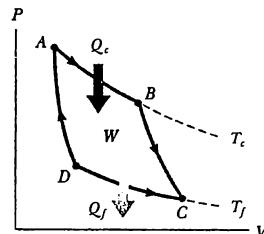
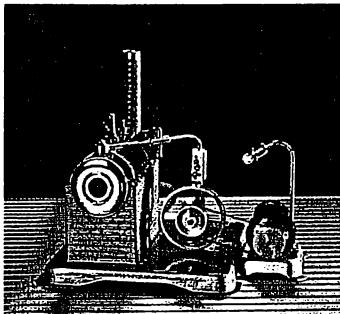


Figura 18.6 Il diagramma $P\text{-}V$ per il ciclo di Carnot. Il lavoro complessivo fatto, W , è uguale al calore netto scambiato in un ciclo, $Q_c - Q_f$. Si osservi che per il ciclo $\Delta U = 0$.

Esempio 18.2 La macchina a vapore

Una macchina a vapore ha un bollitore che opera a 500 K. Il calore trasforma l'acqua in vapore che fa funzionare il pistone. La temperatura di scarico è quella

dell'aria esterna, circa 300 K. Qual è il massimo rendimento di questa macchina a vapore?



Un modello di macchina a vapore con una caldaia orizzontale incorporata. L'acqua è riscaldata elettricamente e genera il vapore utilizzato per far funzionare il generatore elettrico sulla destra. (Per gent. conc. di CENCO)

Soluzione Dall'espressione del rendimento di una macchina di Carnot, si trova il massimo rendimento per qualsiasi macchina che lavori fra queste temperature

$$\epsilon_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0.4 \text{ o } 40\%$$

Si dovrebbe osservare che questo è il più alto rendimento teorico della macchina. In pratica il rendimento sarà considerevolmente inferiore.

ESERCIZIO 3 Determinare il massimo lavoro che la macchina può compiere in ogni ciclo operativo, se assorbe 200 J di calore dal termostato caldo a ogni ciclo.
Risposta 80 J.

ESERCIZIO 4 Una macchina termica opera tra due termostati a 20°C e 300°C. Qual è il massimo rendimento possibile per questa macchina? Risposta 49%

18.4 • POMPE DI CALORE E FRIGORIFERI

Una pompa di calore è un dispositivo meccanico che trasferisce energia termica da una regione a bassa temperatura a una regione a temperatura più alta. Le pompe di calore sono molto popolari per il raffreddamento ed ora cominciano ad essere più conosciute anche per il riscaldamento. Nell'impiego per il riscaldamento, un fluido refrigerante messo in circolo assorbe energia termica all'esterno e la cede all'interno della struttura. Tale fluido è generalmente sotto forma di vapore a bassa pressione che, in una serpentina all'esterno dell'unità, assorbe calore dall'aria o dal suolo. Questo gas viene quindi compresso ed entra all'interno dell'unità come vapore caldo e ad alta pressione dove condensando allo stato liquido cede l'energia termica immagazzinata. Un condizionatore d'aria (per la refrigerazione) è semplicemente una pompa di calore al contrario, con "l'esterno" e "l'interno" scambiati.

La Figura 18.7 rappresenta schematicamente una pompa di calore. La temperatura esterna è T_f , la temperatura interna è T_c , e il calore assorbito dal fluido circolante è Q_f . Il compressore compie un lavoro W sul fluido e l'energia termica trasferita dalla pompa all'interno della struttura è Q_c .

L'efficienza di una pompa di calore, funzionante come un dispositivo per il riscaldamento, è data in termini di un numero detto **coefficiente di prestazione, COP**. Questo è definito come il rapporto fra l'energia trasferita alla sorgente calda e il lavoro richiesto per tale trasferimento:

$$\text{COP (pompa di calore)} = \frac{\text{energia trasferita come calore}}{\text{lavoro svolto dalla pompa}} = \frac{Q_c}{W} \quad [18.4]$$

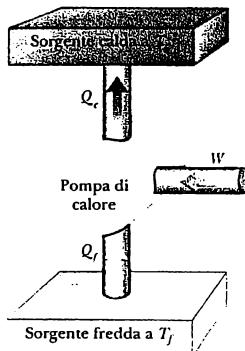


Figura 18.7 Disegno schematico di una pompa di calore, che assorbe il calore Q_f dalla sorgente fredda e cede il calore Q_c alla sorgente calda.

Se la temperatura esterna è -4°C o più alta, il COP di una pompa di calore è circa 4. Cioè, l'energia termica trasferita nella casa è circa quattro volte maggiore del lavoro compiuto dal compressore della pompa di calore. Tuttavia, al diminuire della temperatura esterna, diventa più difficile per la pompa di calore estrarre energia termica sufficiente dall'aria e il COP diminuisce. Infatti, il COP può diventare minore dell'unità per temperature ancora più basse.

Una macchina termica che utilizza un ciclo di Carnot inverso costituisce una pompa di calore; infatti, è la pompa di calore con il coefficiente di prestazione più elevato relativamente alle temperature fra le quali opera. Il massimo coefficiente di prestazione è

$$\text{COP}_c(\text{pompa di calore}) = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Sebbene le pompe di calore siano prodotti relativamente nuovi nel campo del riscaldamento, il frigorifero è diventato un elettrodomestico usuale nelle case da anni. Il frigorifero lavora in modo molto simile alla pompa di calore, tranne che raffredda il suo interno pompando l'energia termica dagli scomparti per la conservazione del cibo all'aria esterna più calda. Durante questa operazione, un frigorifero sottrae energia termica Q_f dal suo interno e nel processo il suo motore compie un lavoro W . Il coefficiente di prestazione di un frigorifero o di una pompa di calore usata nel suo ciclo di raffreddamento è

$$\text{COP}(\text{frigorifero}) = \frac{Q_f}{W} \quad [18.5]$$

Un frigorifero efficiente estrae la maggior quantità di energia termica dalla sorgente fredda con la minima quantità di lavoro. Perciò un buon frigorifero dovrebbe avere un alto coefficiente di prestazione, tipicamente 5 o 6.

Il coefficiente di prestazione più elevato è ancora quello di un frigorifero la cui sostanza che lavora compie un ciclo di Carnot inverso:

$$\text{COP}_f(\text{frigorifero}) = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Quando la differenza fra le temperature dei due termostati si avvicina a zero, il coefficiente di prestazione teorico di una pompa di calore di Carnot tende all'infinito. In pratica, la bassa temperatura della serpentina di raffreddamento e l'alta temperatura del compressore limitano il COP a valori al di sotto di 10.

Fisica ragionata 2

Supponiamo che la temperatura all'interno di una casa sia mantenuta costante a 22°C . Assumiamo che l'esterno, in estate, si trovi a 33°C , e il condizionatore d'aria (pompa di calore) lavori per mantenere la casa a 22°C . Poi, durante l'inverno, l'esterno si trova a 11°C e la pompa di calore viene usata per mantenere la casa ancora a 22°C . In ambedue i casi, vi sarebbe una differenza di 11°C fra le temperature dell'interno e dell'esterno. La bolletta del consumo elettrico per la pompa di calore sarà più alta in estate che in inverno. Perché?

Regionamento In estate, l'interno della casa funziona da termostato a bassa temperatura per la macchina termica, e l'aria esterna è il termostato a temperatura alta. L'energia estraetta dall'aria interna si unisce con l'energia che entra nella pompa di calore per via dell'alimentazione elettrica, e l'insieme viene trasferito all'aria esterna. Quindi, il solo vantaggio dell'energia che entra attraverso l'alimentazione elet-

trica è di pompare energia dall'interno all'esterno. In inverno, l'energia estratta dall'aria esterna si unisce con l'energia che entra nella pompa di calore attraverso l'alimentazione elettrica, e l'insieme viene trasferito all'aria interna. Quindi, l'energia entrante per mezzo dell'elettricità svolge due funzioni: fa funzionare la pompa di calore e si somma all'energia interna dell'aria all'interno della casa. In conclusione, deve essere estratta meno energia dall'aria esterna in inverno che dall'aria interna in estate, e quindi costa di meno far funzionare la pompa di calore in inverno.

Fisica ragionata 3

È una soffocante giornata d'estate, e il vostro sistema di condizionamento d'aria non funziona. In cucina, si trova un frigorifero funzionante e una cassa piena di ghiaccio. Cosa aprireste, e lascereste aperto, per raffreddare la stanza più efficientemente?

Ragionamento Il termostato ad alta temperatura per il vostro frigorifero di cucina è l'aria della cucina. Se la porta del frigorifero venisse lasciata aperta, dell'energia verrebbe estratta dall'aria della cucina, passerebbe attraverso il sistema di refrigerazione e ritornerebbe direttamente indietro all'aria. Il risultato sarebbe quello di far diventare l'aria della cucina *più calda* per l'aggiunta dell'energia proveniente dall'alimentazione elettrica necessaria per far funzionare il frigorifero. Se viene aperta la cassa di ghiaccio, energia dell'aria entra nel ghiaccio, aumentandone la temperatura e causando la sua fusione. Il trasferimento di energia dall'aria causa l'abbassamento della sua temperatura. Quindi, sarebbe più efficiente aprire la cassa di ghiaccio.

PROBLEMA CONCETTUALE 4

Perché i condizionatori di casa sono posti nelle finestre o in buchi attraverso i muri?

PROBLEMA CONCETTUALE 5

Può una pompa di calore fornire più energia di quella che consuma?

18.5 • UN ENUNCIATO ALTERNATIVO DEL SECONDO PRINCIPIO

Il primo principio della termodinamica afferma che l'energia si conserva in ogni trasformazione, ma c'è dell'altro oltre a ciò e il secondo principio aggiunge il tocco finale. Per illustrare ciò che intendiamo, supponiamo che voi desideriate raffreddare una pizza calda mettendola sopra un blocco di ghiaccio. Certamente la cosa funzionerà, poiché, in tutte le situazioni analoghe in cui vi sarete imbatuti, il calore si sarà sempre trasferito dal corpo caldo a quello freddo. Se aspettate un po', una certa quantità di energia termica, diciamo 500 J, si trasferirà dalla pizza al ghiaccio. L'energia si è conservata e il primo principio è soddisfatto. Eppure, nulla nel primo principio dice che questo calore non possa trasferirsi in senso contrario. (Immaginate il vostro stupore se un giorno ponendo la pizza sul ghiaccio 500 J di energia termica si trasferissero dal ghiaccio alla pizza!). È il secondo principio della termodinamica che determina la direzione di un tale fenomeno naturale.

Un'analogia può essere fatta con la sequenza impossibile di eventi che si vedrebbero in un film proiettato all'indietro, come una persona che si tuffa fuori da una piscina, una mela che viene su dal suolo per attaccarsi al ramo dell'albero, o una pentola d'acqua calda che inizi a raffreddarsi pur rimanendo a contatto con una fiamma viva. Tali eventi che avvengono invertendo il tempo

sono impossibili poiché essi violano il secondo principio della termodinamica. Le trasformazioni reali hanno una direzione preferenziale del tempo, spesso chiamata freccia del tempo.

Il secondo principio è stato enunciato in molti modi diversi, ma si può dimostrare che tutti gli enunciati sono equivalenti. Quale forma userete dipenderà dalla applicazione che avete in mente. Per esempio, se siete interessati al trasferimento di energia termica tra la pizza e il ghiaccio, potrete scegliere di concentrarvi sul secondo principio nella forma seguente: **il calore non fluirà spontaneamente da un corpo freddo a un corpo caldo.** A una prima occhiata, questo enunciato del secondo principio sembra radicalmente diverso da quello del Paragrafo 18.1. I due enunciati sono, in realtà, equivalenti sotto tutti gli aspetti. Sebbene non lo faremo qui, si può dimostrare che se è falso uno dei due enunciati lo è anche l'altro.

18.6 • ENTROPIA

Il concetto di temperatura è contenuto nel principio zero della termodinamica e il concetto di energia interna (termica) è contenuto nel primo principio. La temperatura e l'energia interna sono entrambe funzioni di stato; cioè, esse possono essere usate per descrivere lo stato termodinamico di un sistema. Un'altra funzione di stato, collegata al secondo principio della termodinamica, è l'**entropia**, S . In questo paragrafo definiamo l'entropia su una scala macroscopica come fu espressa per la prima volta dal fisico tedesco Rudolf Clausius (1822-1888) nel 1865.

Si consideri una trasformazione infinitesima di un sistema tra due stati di equilibrio. Se dQ_r è la quantità di energia termica che si trasferirebbe se il sistema seguisse un cammino reversibile, allora la variazione di entropia, *relativa al cammino reale seguito*, è uguale alla quantità di calore scambiato lungo il cammino reversibile diviso per la temperatura assoluta del sistema:

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \quad [18.6]$$

Il pedice r nel termine dQ_r , è un promemoria per ricordare che il trasferimento di energia termica si deve misurare lungo un cammino reversibile, anche quando il sistema ha percorso in realtà un cammino irreversibile. Quando il calore è assorbito dal sistema, dQ_r è positivo e perciò l'entropia aumenta. Quando il calore viene ceduto dal sistema, dQ_r è negativo e l'entropia diminuisce. Si noti che l'Equazione 18.6 non definisce l'entropia, ma piuttosto la *variazione* di entropia. Ciò è consistente con il fatto che un cambiamento di stato è sempre accompagnato da uno scambio di calore. Quindi, la grandezza significativa nella descrizione di una trasformazione è la *variazione* di entropia.

Originariamente l'entropia trovò il suo posto nella termodinamica, ma la sua importanza crebbe enormemente quando si sviluppò il campo della fisica chiamato meccanica statistica, poiché questo metodo di analisi forniva un modo alternativo di interpretare l'entropia. Nella meccanica statistica, il comportamento di una sostanza è descritto in termini del comportamento statistico dei suoi atomi e molecole. Uno dei principali risultati di questa trattazione è il principio che i sistemi isolati tendono al disordine e l'**entropia è una misura di questo disordine**.

Per esempio, considerate le molecole di un gas nell'aria della vostra stanza. Se tutte le molecole del gas si muovessero insieme come soldati che marciano al passo, esse sarebbero in uno stato molto ordinato. Questo è anche uno stato improbabile. Se si potessero vedere le molecole, si osserverebbe che esse si muo-



Rudolph Clausius
(1822-1888)

"Io propongo... di chiamare S l'entropia di un corpo dalla parola greca 'trasformazione'. Ho deliberatamente inventato la parola 'entropia' affinché sia simile a energia, perché queste due grandezze hanno un significato fisico analogo e una analogia di denominazione sembra essere utile".
(AIP Niels Bohr Library, Collezione Landé, per gent. conc.)

- *Definizione di Clausius della variazione di entropia*

vono casualmente in tutte le direzioni, urtando l'una contro l'altra, cambiando velocità dopo l'urto, alcune muovendosi velocemente, altre lentamente. Questo è uno stato altamente disordinato. È pure altamente probabile che lo stato reale sia un tale stato altamente disordinato.

La causa di questa perpetua tendenza al disordine si vede facilmente. Per ogni data energia del sistema, soltanto certi stati sono possibili, o accessibili. Questi stati si assumono tutti ugualmente probabili. Tuttavia, quando si esaminano questi stati possibili, si trova che la maggior parte di essi sono "stati" disordinati piuttosto che ordinati. Poiché ciascuno stato è ugualmente probabile, risulta altamente probabile che lo stato reale sia uno degli stati altamente disordinati, o più precisamente, che lo stato reale sia uno di quelli tra i quali il sistema si sposta muovendosi tra stati ugualmente disordinati. Nella discussione che segue, perciò, il termine *stato* indicherà un insieme di stati con un equivalente ammontare di disordine.

Tutte le trasformazioni fisiche tendono verso gli stati più probabili per il sistema e per l'ambiente circostante. Lo stato più probabile è sempre quello con un grado di disordine più alto. Poiché l'entropia è una misura del disordine, un modo alternativo di dire ciò è che **l'entropia dell'universo aumenta in tutte le trasformazioni naturali**. Questo enunciato è ancora un modo di esprimere il secondo principio della termodinamica.

Per calcolare la variazione di entropia per una trasformazione finita, dobbiamo notare che T in generale non è costante. Se dQ_r è il calore scambiato reversibilmente quando il sistema si trova alla temperatura T , allora la variazione di entropia per un'arbitraria trasformazione reversibile fra uno stato iniziale e uno stato finale è

$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \quad (\text{cammino reversibile}) \quad [18.7]$$

Sebbene non ne daremo qui la dimostrazione, la variazione di entropia di un sistema che va da uno stato a un altro ha lo stesso valore per *tutti* i cammini che collegano i due stati. Ossia, la variazione di entropia di un sistema dipende soltanto dalle proprietà degli stati di equilibrio iniziale e finale.

Nel caso di una trasformazione **adiabatica reversibile**, non vi è scambio di calore fra il sistema e l'ambiente esterno, quindi $\Delta S = 0$. Poiché non avviene alcuna variazione di entropia, tale trasformazione si chiama **trasformazione isoentropica**.

Si consideri la variazione di entropia di una macchina termica di Carnot che lavori fra le temperature T_f e T_c . In un ciclo, la macchina assorbe il calore Q_c dalla sorgente calda e cede il calore Q_f alla sorgente fredda. Allora, la variazione totale di entropia in un ciclo è

$$\Delta S = \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f}$$

dove il segno negativo del secondo termine rappresenta il fatto che il calore Q_f è ceduto dal sistema. Per un ciclo di Carnot,

$$\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c}$$

La variazione di entropia per un ciclo di Carnot è zero

Usando questo risultato nella precedente espressione per ΔS , troviamo che la variazione totale di entropia per una macchina di Carnot che lavora in un ciclo è *zero*.

Si consideri ora un sistema che compie un ciclo reversibile arbitrario. Poiché l'entropia è una funzione di stato e dipende solo dalle proprietà di un dato stato di equilibrio, concludiamo che $\Delta S = 0$ per *qualsiasi* ciclo. Possiamo scrivere questa condizione nella forma matematica

Ancora il secondo principio

Variazione di entropia per una trasformazione finita

$$\oint \frac{dQ_r}{T} = 0 \quad [18.8] \quad \bullet \Delta S = 0 \text{ per qualunque ciclo}$$

dove il simbolo \oint indica che l'integrazione è estesa a un percorso *chiuso*.

Un'altra importante proprietà dell'entropia è il fatto che l'entropia dell'Universo non varia nelle trasformazioni reversibili. Ciò può essere compreso notando che due corpi, *A* e *B*, che interagiscono fra loro reversibilmente dovrebbero essere sempre in equilibrio termico fra di loro. Cioè, le loro temperature dovrebbero essere sempre uguali. Quindi, quando una piccola quantità di calore, dQ , viene fornita da *A* a *B*, l'aumento di entropia di *B* è dQ/T , mentre la corrispondente variazione di entropia di *A* è $-dQ/T$. Allora, la variazione totale di entropia del sistema (*A* + *B*) è zero e l'entropia dell'Universo resta invariata per una trasformazione reversibile.

Come caso particolare, il seguente esempio mostra come calcolare la variazione di entropia di una sostanza soggetta a un cambiamento di fase.

Esempio 18.3 Variazione di entropia: processo di fusione

Una sostanza solida con un calore latente di fusione L_f fonde alla temperatura T_f . Calcolare la variazione di entropia che avviene quando fondono m grammi di sostanza.

Soluzione Assumiamo che il processo di fusione avvenga così lentamente da poter essere considerato reversibile. In questo caso la temperatura può essere considerata costante e uguale a T_f . Usando l'Equazione 18.7 e $Q = mL_f$, si ha

$$\Delta S = \int \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T_f} \int dQ = \frac{Q}{T_f} = \frac{mL_f}{T_f}$$

Si osservi che possiamo portare T_f fuori dal segno di integrale in questo caso, poiché il processo è isotermo.

ESERCIZIO 5 Calcolare la variazione di entropia quando 300 g di piombo fondono a 327°C. Il piombo ha un calore latente di fusione uguale a 24.5 kJ/g.

Risposta $\Delta S = 12.3 \text{ J/K}$.

ESERCIZIO 6 Qual è la diminuzione di entropia in 1 mol di gas elio che viene raffreddato a 1 atm dalla temperatura ambiente (20°C) a 4 K? (C dell'elio = 21 J/mol · K.)

Risposta -90.2 J/K

18.7 • VARIAZIONI DI ENTROPIA NELLE TRASFORMAZIONI IRREVERSIBILI

Per definizione, la variazione di entropia di un sistema può essere calcolata solo per cammini reversibili che collegano gli stati di equilibrio iniziale e finale. Per calcolare le variazioni di entropia per i processi reali (irreversibili) dobbiamo prima tener conto che la funzione entropia (come l'energia interna) dipende solo dallo *stato* del sistema. Cioè, l'entropia è una funzione di stato. Quindi, la variazione di entropia di un sistema fra due stati di equilibrio qualsiasi dipende solo dagli stati iniziale e finale. Si trova sperimentalmente che la variazione di entropia è la stessa per tutte le trasformazioni fra gli stessi stati iniziale e finale. È anche possibile dimostrare che se non fosse così, il secondo principio della termodinamica sarebbe violato.

Considerando il fatto che l'entropia di un sistema dipende solo dallo stato del sistema, possiamo ora calcolare le variazioni di entropia per le trasformazioni irreversibili fra due stati di equilibrio. Si può ottenere ciò inventando una trasformazione reversibile (o una serie di trasformazioni reversibili) fra i due

stati di equilibrio e calcolando $\int dQ_r/T$ per la trasformazione reversibile. La variazione di entropia nella trasformazione irreversibile è la stessa di quella della trasformazione reversibile fra i due stati di equilibrio. Nelle trasformazioni irreversibili, è criticamente importante distinguere tra Q , l'effettiva energia termica trasferita nella trasformazione, e Q_r , l'energia termica che si dovrebbe trasferire lungo un cammino reversibile. È soltanto la seconda che dà il valore corretto per la variazione di entropia. Per esempio, come vedremo, se un gas perfetto si espanderà adiabaticamente nel vuoto, $Q=0$, ma $\Delta S \neq 0$ poiché $Q_r \neq 0$. Il cammino reversibile, fra gli stessi due stati, è l'espansione isotermica reversibile che dà $\Delta S > 0$.

Come vedremo nell'esempio seguente, la variazione di entropia del sistema più l'ambiente esterno è sempre positiva per una trasformazione irreversibile. In generale, l'entropia totale (e il disordine) aumenta sempre nelle trasformazioni irreversibili. Da queste considerazioni, il secondo principio della termodinamica può essere enunciato come segue: **l'entropia totale di un sistema isolato che subisce una trasformazione non può diminuire**. Inoltre, se la trasformazione è *irreversibile*, l'entropia totale di un sistema isolato *aumenta sempre*. D'altra parte, in una trasformazione reversibile, l'entropia totale di un sistema isolato rimane costante.

Quando si trattano corpi interagenti non isolati dall'ambiente circostante, ricordarsi che l'aumento di entropia si applica per il sistema e il suo ambiente circostante. Quando due corpi interagiscono compiendo una trasformazione irreversibile, l'aumento di entropia di una parte del sistema è maggiore della diminuzione di entropia dell'altra parte. Quindi, concludiamo che la variazione di entropia dell'Universo è maggiore di zero per una trasformazione irreversibile e uguale a zero per una trasformazione reversibile. Alla fine, l'entropia dell'Universo dovrebbe raggiungere un valore massimo. A questo punto l'Universo si troverà in uno stato di temperatura e densità uniforme. Tutte le trasformazioni fisiche, chimiche e biologiche cesseranno, poiché uno stato di perfetto disordine implica che non vi è energia disponibile per compiere lavoro. Questo triste stato è qualche volta indicato come la **morte termica dell'Universo**.

Conduzione di calore

Si consideri il trasferimento reversibile di energia termica Q da una sorgente calda a temperatura T_c a una sorgente fredda a temperatura T_f . Poiché la sorgente fredda assorbe l'energia termica Q , la sua entropia aumenta di Q/T_f . Allo stesso tempo, la sorgente calda cede il calore Q e diminuisce la sua entropia di Q/T_c . L'aumento di entropia della sorgente fredda è maggiore della diminuzione di entropia della sorgente calda, poiché T_f è minore di T_c . Quindi, la variazione totale di entropia del sistema (e dell'Universo) è maggiore di zero:

$$\Delta S_U = \frac{Q}{T_f} - \frac{Q}{T_c} > 0$$

Fisica ragionata 4

L'enunciato sull'entropia del secondo principio afferma che l'entropia dell'Universo aumenta in una trasformazione irreversibile. Ciò suona molto diversamente dalle precedenti due forme del secondo principio: "1. È impossibile costruire una macchina termica che, compiendo un ciclo, produca come unico risultato l'assorbimento di calore da un termostato e la sua conversione in una uguale quan-

tità di lavoro. 2. L'energia non può fluire spontaneamente per mezzo del calore da un corpo freddo a un corpo caldo". Questi due enunciati possono essere consistenti con l'interpretazione riguardo all'entropia del secondo principio?

Ragionamento Non vi è problema per la consistenza. Nel primo enunciato, l'energia termica nel termostato è energia disordinata: il moto casuale delle molecole. Il lavoro svolto risulterebbe in una energia ordinata: spingendo un pistone per una certa distanza, per esempio. In questo caso, il moto di tutte le molecole del pistone è nella stessa direzione. Se una macchina termica assorbisse calore e svolgesse una uguale quantità di lavoro, allora si sarebbe convertito disordine in ordine, violando l'enunciato sull'entropia. Nel secondo enunciato, partiamo con un sistema ordinato: la temperatura più alta nel corpo caldo, e la più bassa nel corpo freddo. Questa separazione di temperature è un esempio di ordine. Se l'energia fluisse dal corpo freddo a quello caldo, di modo che aumentasse ulteriormente la differenza di temperatura, ciò implicherebbe un aumento di ordine, in violazione dell'enunciato sull'entropia.

Esempio 18.4 Come passa il calore?

Un grande corpo freddo è a 273 K, e un grande corpo caldo è a 373 K. Dimostrare che è impossibile trasferire una piccola quantità di energia termica, diciamo 8.00 J, dal corpo freddo al corpo caldo senza far diminuire l'entropia dell'Universo.

Ragionamento Assumiamo che, durante lo scambio di calore, i due corpi non cambino la loro temperatura. Ciò non è un'assunzione necessaria; la usiamo per evitare di utilizzare per fede le tecniche del calcolo integrale. La trasformazione come è stata descritta è irreversibile, per cui dovremo trovare una trasformazione reversibile equivalente. È sufficiente assumere che i corpi caldo e freddo siano in contatto con un termostato (vedi nota a pag. 495 e nota a pag. 509) la cui temperatura possa attraversare il campo di valori fra 273 K e 373 K, che trasferisca energia termica ma il cui stato non vari durante la trasformazione. Allora, il trasferimento di energia termica a o da ciascun corpo è reversibile e possiamo porre $Q = Q_r$.

Soluzione La variazione di entropia del corpo caldo è

$$\Delta S_r = \frac{Q}{T_c} = \frac{8.00 \text{ J}}{373 \text{ K}} = 0.0214 \text{ J/K}$$

Il corpo freddo cede calore, e la sua variazione di entropia è

$$\Delta S_f = \frac{Q}{T_f} = \frac{-8.00 \text{ J}}{273 \text{ K}} = -0.0293 \text{ J/K}$$

La variazione totale di entropia dell'Universo è

$$\Delta S_U = \Delta S_f + \Delta S_r = -0.0079 \text{ J/K}$$

Questa è una violazione del concetto che l'entropia dell'Universo aumenta sempre nelle trasformazioni naturali. Ciò, il *passaggio spontaneo di calore dal corpo freddo a quello caldo non può avvenire*.

ESERCIZIO 7 Nell'esempio precedente si supponga che gli 8.00 J di calore passino dal corpo caldo a quello freddo. Qual è la variazione di entropia dell'Universo? Risposta + 0.0079 J/K.

Espansione libera

Un gas perfetto in un contenitore isolato, occupa inizialmente un volume V_i (Fig. 18.8). Una membrana che separa il gas da un'altra regione sottovuoto si rompe improvvisamente per cui il gas si espande (irreversibilmente) al volume V_f . Troviamo la variazione di entropia del gas e dell'Universo.

La trasformazione, chiaramente, non è né reversibile né quasi-statica. Il lavoro compiuto dal gas contro il vuoto è zero e, poiché le pareti sono isolanti, non viene scambiato calore durante l'espansione. Cioè, $W = 0$ e $Q = 0$. Applicando il

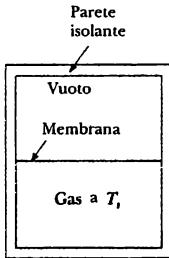


Figura 18.8 Espansione libera di un gas. Quando il setto che separa il gas dalla regione sottovuoto si rompe, il gas si espande liberamente e irreversibilmente per cui occupa un volume finale maggiore. Il contenitore è termicamente isolato dall'ambiente, per cui $Q = 0$.

primo principio, si vede che la variazione di energia interna è nulla; pertanto $U_i = U_f$. Poiché il gas è perfetto, U dipende soltanto dalla temperatura, sicché concludiamo che $T_i = T_f$.

Per applicare l'Equazione 18.7, dovremmo trovare Q_r ; cioè, dovremmo trovare un percorso reversibile equivalente che condivida gli stessi stati iniziale e finale. Una scelta semplice è un'espansione isotermica reversibile nella quale il gas spinga lentamente un pistone. Poiché T è costante, in questa trasformazione, l'Equazione 18.7 dà

$$\Delta S = \int \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f dQ_r$$

Ma $\int dQ_r$ è semplicemente il lavoro compiuto dal gas durante l'espansione isotermica reversibile da V_i a V_f , il quale è dato dall'Equazione 17.12. Facendo uso di questo risultato, troviamo che

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \quad [18.9]$$

Poiché $V_f > V_i$, concludiamo che ΔS è positivo e così, sia l'entropia che il disordine del gas (e dell'Universo) aumentano come conseguenza dell'espansione adiabatica irreversibile.

Scambio irreversibile di calore

Una sostanza di massa m_1 , calore specifico c_1 , e temperatura iniziale T_1 è posta in contatto termico con una seconda sostanza di massa m_2 , calore specifico c_2 e temperatura iniziale T_2 , dove $T_2 > T_1$. Le due sostanze sono contenute in un recipiente adiabatico per cui non c'è scambio di energia termica con l'ambiente circostante. Si lascia che il sistema raggiunga l'equilibrio termico. Qual è la variazione di entropia totale del sistema?

Innanzitutto, calcoliamo la temperatura finale di equilibrio, T_f . La conservazione dell'energia richiede che l'energia termica ceduta da una sostanza sia uguale all'energia termica assorbita dall'altra. Poiché, per definizione, $Q = mc\Delta T$, per ciascuna sostanza, si ottiene $Q_1 = -Q_2$, ossia

$$\begin{aligned} m_1 c_1 \Delta T_1 &= -m_2 c_2 \Delta T_1 \\ m_1 c_1 (T_f - T_1) &= -m_2 c_2 (T_f - T_2) \end{aligned}$$

Risolvendo per T_f si ottiene:

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \quad [18.10]$$

Si osservi che $T_1 < T_f < T_2$, come ci si aspetta.

Il processo è irreversibile, poiché il sistema passa attraverso una serie di stati di non equilibrio. Durante una simile trasformazione la temperatura a qualsiasi istante non è ben definita. Però si può immaginare che il corpo caldo alla temperatura iniziale T_i sia raffreddato lentamente alla temperatura T_f mettendolo in contatto termico con una serie di termostati che differiscano infinitesimalmente in temperatura, e il primo termostato sia alla temperatura iniziale T_i e l'ultimo sia a T_f . Una simile serie di piccole variazioni di temperatura approssimerebbe un processo reversibile. Applicando l'Equazione 18.7 e osservando che $dQ = mc\,dT$ per una variazione infinitesima, si ottiene

$$\Delta S = \int_1 \frac{dQ_1}{T} + \int_2 \frac{dQ_2}{T} = m_1 c_1 \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} + m_2 c_2 \int_{T_2}^{T_f} \frac{dT}{T}$$

dove abbiamo supposto che i calori specifici restino costanti. Integrando, si trova

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2} \quad [18.11]$$

dove T_f è data dall'Equazione 18.10. Se si sostituisce l'Equazione 18.10 nell'Equazione 18.11, si può dimostrare che uno dei termini dell'equazione sarà sempre positivo e l'altro negativo. (Potete verificarlo voi stessi). Comunque, il termine positivo sarà sempre maggiore del termine negativo, implicando un valore positivo per ΔS . Perciò, concludiamo che in questo processo irreversibile l'entropia del sistema e dell'Universo aumenta.

Si osservi, infine, che l'Equazione 18.11 è valida quando due sostanze sono poste a contatto termico, senza mescolarsi. Se le sostanze sono fluide e si ha mescolamento, si può applicare il risultato solo se i due fluidi sono dello stesso tipo.

- *Variazione di entropia per uno scambio di calore*

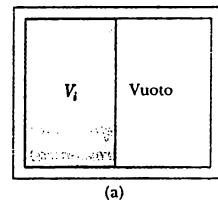
18.8 • L'ENTROPIA SU SCALA MICROSCOPICA³

Come abbiamo visto, ci si può avvicinare all'entropia dal punto di vista macroscopico, usando parametri come la pressione e la temperatura. L'entropia può essere trattata anche da un punto di vista microscopico attraverso l'analisi statistica del moto molecolare. Useremo un modello microscopico per analizzare l'espansione libera di un gas perfetto discussa nel paragrafo precedente.

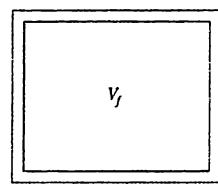
Nella teoria cinetica dei gas, le molecole del gas si considerano come particelle che si muovono in modo casuale. Supponiamo che tutto il gas sia confinato nel volume V_i (Fig. 18.9a). Quando il setto che divide V_i dallo scomparto più grande viene rimosso, le molecole alla fine si distribuiranno in qualche modo in tutto il volume, V_f (Fig. 18.9b). La natura esatta della distribuzione riguarda il campo della probabilità.

Una tale probabilità può essere determinata trovando prima le probabilità per la varietà di posizioni molecolari implicate nel processo dell'espansione libera. Nell'istante dopo la rimozione del setto (e prima che le molecole abbiano avuto l'opportunità di precipitarsi nell'altra metà del contenitore), tutte le molecole si trovano nel volume iniziale. Calcoliamo, ora, per le molecole che sopravvivono, la probabilità per una particolare configurazione dovuta al moto casuale in un volume più grande V . Assumiamo che ciascuna molecola occupi un qualche volume microscopico, V_m . Allora il numero totale di posizioni possibili per una molecola, in un volume macroscopico iniziale, V_i , è il rapporto $W_i = V_i/V_m$, che è un numero enorme. Assumiamo che ciascuna di queste posizioni sia ugualmente probabile.

Quando altre molecole vengono aggiunte al sistema, il numero di stati possibili si moltiplica di conseguenza. Trascurando la bassissima probabilità che due molecole tentino di occupare lo stesso volume, ciascuna molecola può andare in ognuna delle (V_i/V_m) posizioni, cosicché il numero di possibilità è $W_i^N = (V_i/V_m)^N$. Sebbene un grande numero di stati possibili possa essere considerato insolito, il numero totale di stati è talmente smisurato che questi stati eccezionali hanno una probabilità trascurabile di verificarsi. Perciò, il numero di stati



(a)



(b)

Figura 18.9 In una espansione libera il gas si espande occupando un volume maggiore dove prima c'era il vuoto.

³ Questo paragrafo è stato adattato dal testo di A. Hudson e R. Nelson, *University Physics*, Philadelphia, Saunders College Publishing, 1990, per gent. conc. dell'Editore.



Nel gioco del poker, un "full" (una coppia più un tris) è una buona mano. Si può calcolare la probabilità di distribuire questa mano per un mazzo standard di 52 carte, assumendo che vengano date 5 carte alla volta.

(Tom Mareschel, The IMAGE Bank)

equivalenti è proporzionale a $(V_f / V_m)^N$. Similmente, se il volume aumenta al valore V_f , il numero di stati equivalenti aumenta a $W_f^N = (V_f / V_m)^N$. Quindi, le probabilità sono $P_i = cW_i^N$ e $P_f = cW_f^N$, dove la costante c viene lasciata indeterminata. Il rapporto di queste probabilità è

$$\frac{W_f}{W_i} = \frac{cW_f^N}{cW_i^N} = \frac{\left(\frac{V_f}{V_m}\right)^N}{\left(\frac{V_i}{V_m}\right)^N} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^N$$

Se estraiamo il logaritmo naturale dei due membri di questa equazione e lo moltiplichiamo per la costante di Boltzmann, k_B , troviamo

$$k_B \ln \left(\frac{W_f}{W_i} \right) = nN_A k_B \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

dove scriviamo il numero di molecole N , come nN_A , il numero di moli moltiplicato il numero di Avogadro. Dal Paragrafo 16.4 sappiamo che $N_A k_B$ è la costante universale dei gas R , per cui questa equazione si può scrivere come

$$k_B \ln W_f - k_B \ln W_i = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad [18.12]$$

Da considerazioni termodinamiche (specialmente l'Eq. 18.9) sappiamo che quando n moli di un gas subiscono un'espansione libera da V_i a V_f , la variazione di entropia, ΔS , è

$$S_f - S_i = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad [18.13]$$

Si noti che i secondi membri delle Equazioni 18.12 e 18.13 sono identici. Noi, allora, stabiliamo la seguente correlazione tra *entropia* e numero di stati (microscopici) accessibili al sistema nel suo stato (macroscopico):

$$S = k_B \ln W \quad [18.14]$$

Sebbene la nostra discussione abbia fatto uso dell'esempio specifico dell'espansione libera di un gas perfetto, uno sviluppo più rigoroso dell'interpretazione statistica dell'entropia conduce alla stessa conclusione. L'*entropia* è una misura del disordine microscopico.

Immaginiamo che un recipiente di gas contenga molecole con modulo della velocità maggiore del valore medio sul lato sinistro, e molecole con il modulo della velocità minore del valore medio sul lato destro (una configurazione *ordinata*), come in Figura 18.10a. Confrontiamo con una miscela di tali molecole lente e veloci come in Figura 18.10b (una configurazione *disordinata*). Voi vi aspettereste che la configurazione ordinata fosse altamente improbabile in quanto i moti casuali tendono a mescolare uniformemente le molecole lente e veloci. Eppure ciascuna di queste configurazioni, *individualmente*, è ugualmente probabile. Tuttavia, le configurazioni disordinate sono molte di più di quelle ordinate, per cui, *complessivamente*, le configurazioni ordinate sono molto meno probabili.

Calcoliamo questa probabilità per 100 molecole. La probabilità di ogni singola molecola di trovarsi nella parte sinistra del recipiente come risultato del moto casuale è $1/2$. Se le molecole si muovono indipendentemente, la probabilità che le 50 molecole più veloci si trovino a un certo istante nella parte sinistra è $(1/2)^{50}$. Analogamente, la probabilità che le restanti 50 molecole più lente si trovino a un certo istante nella parte destra è $(1/2)^{50}$. Quindi, la probabilità di

Entropia (definizione) • microscopica

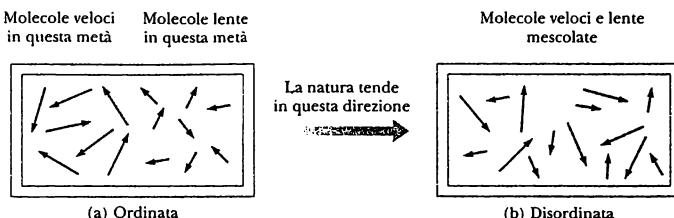


Figura 18.10 Un recipiente di gas in due stati possibili ugualmente probabili. (a) Una configurazione *ordinata*; uno fra i *pochi* insiemi, e quindi *complessivamente improbabile*. (b) Una configurazione *disordinata*; uno fra i *molti* sistemi, e quindi *complessivamente probabile*.

trovare questa separazione veloci-lente a causa del moto casuale è il prodotto $(1/2)^{50}(1/2)^{50} = (1/2)^{100}$, che corrisponde circa a 1 possibilità su 10^{30} . Quando questo calcolo viene estrapolato da 100 molecole a una mole di gas (circa 10^{23} molecole), si trova che la configurazione *ordinata* risulta *estremamente improbabile*!

Fisica ragionata 5

Una scatola contiene 5 molecole di gas, sparse in tutta la scatola. A un certo istante, tutte e 5 si trovano nella stessa metà della scatola. Ciò viola il secondo principio della termodinamica? Il secondo principio è valido per questo sistema?

Ragionamento Strettamente parlando, questa situazione viola il secondo principio della termodinamica. Per rispondere alla seconda domanda, tuttavia, il secondo principio non vale per un piccolo numero di particelle. Il secondo principio è basato sull'insieme di un enorme numero di particelle, cosicché gli stati disordinati abbiano probabilità astronomicamente più alte degli stati ordinati. Poiché il mondo macroscopico è costituito da questo immenso numero di particelle, vediamo la validità del secondo principio, poiché le trasformazioni procedono dall'ordine verso il disordine. Nel sistema delle 5 molecole, l'idea generale del secondo principio è valida nel senso che vi sono più stati disordinati che stati ordinati, ma la relativamente alta probabilità degli stati ordinati fa sì che essi di tanto in tanto esistano.

PROBLEMA CONCETTUALE 6

In giardino crescono una varietà di fiori. I fiori vengono raccolti e sistemati in un mazzo. Dopo che i fiori sono appassiti, vengono gettati e bruciati. Sistemare questi tre stati dei fiori (crescita in giardino, sistemazione in un mazzo, e bruciati nel fuoco) in ordine di entropia crescente.

PROBLEMA CONCETTUALE 7

Immaginiamo un'espansione adiabatica di un gas. Secondo la definizione di entropia, non vi è variazione di entropia, poiché non viene trasferita energia per mezzo del calore. Ma le molecole del gas, ora, hanno a disposizione un volume maggiore per muoversi, per cui sembra che vi sia un aumento del disordine. Un aumento di disordine significa un aumento di entropia. Come è possibile conciliare queste osservazioni, una che suggerisce che l'entropia non varia e l'altra che suggerisce un aumento dell'entropia?

Esempio 18.5 Espansione libera di un gas perfetto: macroscopico versus microscopico

Consideriamo ancora l'espansione libera di un gas perfetto. Verifichiamo che le trattazioni macroscopica e microscopica conducano alla stessa conclusione. Supponiamo che una mole di gas si espanda liberamente in un volume quattro volte maggiore del suo volume iniziale (V_i). La temperatura iniziale e finale è, ovviamente, la stessa. (a) Usando la trattazione macroscopica, calcolare la variazione di entropia. (b) Trovare la probabilità, P_p , che tutte le molecole si trovino, a causa del moto casuale, simultaneamente nel volume iniziale V_i . (c) Usando gli argomenti di probabilità della parte (b), calcolare la variazione di entropia, ΔS , per l'espansione libera e dimostrare che essa è consistente con la parte (a).

Soluzione (a) Dall'Equazione 18.9 otteniamo

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = (1) R \ln \left(\frac{4V_i}{V_i} \right) = R \ln 4$$

(b) Il numero di stati disponibili per una singola molecola in V_i è $W_i = (V_i / V_m)$. Per una mole (N_A), il numero di stati disponibili è

$$P_i = c W_i^{N_A} = c \left(\frac{V_i}{V_m} \right)^{N_A}$$

(c) Il numero di stati per tutte le N_A molecole nel volume $V_f = 4V_i$ è

$$P_f = c W_f^{N_A} = c \left(\frac{V_f}{V_m} \right)^{N_A} = c \left(\frac{4V_i}{V_m} \right)^{N_A}$$

Dall'Equazione 18.14 otteniamo

$$\Delta S = k_B \ln W_f^{N_A} - k_B \ln W_i^{N_A} = k_B \ln \left(\frac{W_f^{N_A}}{W_i^{N_A}} \right) = k_B \ln (4^{N_A}) \\ = N_A k_B \ln 4 = R \ln 4$$

Questa risposta è la stessa della parte (a), la quale è ricavata con i parametri macroscopici.

FACOLTATIVO

18.9 • ENTROPIA E DISORDINE

Quando si ammirano le bellezze della natura, è facile accorgersi che gli eventi che accadono nelle trasformazioni naturali hanno una grande componente di casualità. Per esempio, la distanza fra gli alberi in una foresta naturale è piuttosto casuale. Se voi scoprirete una foresta dove tutti gli alberi fossero ugualmente distanziati, potreste concludere che la foresta è stata probabilmente impiantata dall'uomo. Possiamo esprimere il risultato di questa osservazione dicendo che **una configurazione disordinata è molto più probabile di una ordinata se le leggi della natura possono agire senza alcuna interferenza**.

Abbiamo già trovato che l'entropia è una misura del disordine di un sistema dalla relazione $S = k_B \ln W$, dove W è il numero di stati disponibili nei quali le molecole possono essere distribuite ed è perciò una misura del disordine, o casualità, del sistema. Possiamo ulteriormente esplorare il significato di questa relazione considerando un altro esempio specifico. Si immagini di avere un sacchetto di 100 biglie, delle quali 50 sono rosse e 50 sono verdi. È consentito estrarre quattro biglie dal sacchetto secondo le seguenti regole. Estrarre una biglia, registrarne il colore, rimetterla nel sacchetto ed estrarne un'altra. Continuare questo procedimento fino a quando sono state estratte quattro biglie. Poiché ciascuna biglia viene rimessa nel sacchetto prima di estrarre la successiva, la probabilità di estrarre una biglia rossa è sempre uguale a quella di estrarre una verde. Tutte le possibili estrazioni sono mostrate nella Tabella 18.1. Per esempio, il risultato RRVR significa che nella prima estrazione la biglia era rossa, nella seconda rossa, nella terza verde e nella quarta rossa. Come indica la tabella, vi è un solo modo di estrarre quattro biglie rosse. Invece, vi sono quattro possibili sequenze che danno una biglia verde e tre rosse, sei sequenze che danno due verdi e due rosse, quattro sequenze che danno tre verdi e una rossa e una sequenza che dà tutte verdi. L'estrazione più probabile, due rosse e

TABELLA 18.1 Possibili risultati dell'estrazione di quattro biglie da un sacchetto

Risultato finale	Possibili estrazioni	Numero totale degli stessi risultati
Tutte R	RRRR	1
1V, 3R	RRRV, RRVR, RVRR, VRRL	4
2V, 2R	RRVV, RVRV, VRRV, RVVR, VRVR, VVRR	6
3V, 1R	VVVR, VVRV, VRVV, VVVV	4
Tutte V	VVVV	1

due verdi, corrisponde allo stato più disordinato. Ciò è considerato disordine semplicemente perché non possiamo distinguere individualmente le molecole con lo stesso colore, o tra le singole molecole. La probabilità che si estraggano quattro biglie rosse o quattro verdi, è molto più bassa, poiché questi stati sono i più ordinati. Dall'Equazione 18.14 vediamo che lo stato di maggior disordine ha l'entropia più alta poiché esso è più probabile. D'altra parte, gli stati più ordinati (tutte rosse o tutte verdi) sono i meno probabili a verificarsi e sono gli stati di minima entropia. Il risultato dell'estrazione può andare da uno stato altamente ordinato, che ha la minima entropia, a uno stato altamente disordinato, che ha la massima entropia.

Fisica ragionata 6

Metti una fascia elastica alla tua fronte e nota la sensazione di temperatura. Togli la fascia elastica dalla fronte, allungala e rimettila di nuovo in fronte. Essa sembrerà ora più calda. Togli nuovamente la fascia elastica dalla fronte, lascia che ritorni alla sua lunghezza normale e indossala di nuovo. Essa sembrerà più fredda.

- (a) Perché avvengono queste variazioni di temperatura?
- (b) Alcuni propongono che la risposta alla domanda (a) sia *attrito interno*, quando porzioni della fascia elastica strofinano fra di loro durante la variazione di dimensione. Come risponderesti a questa proposta?

Ragionamento (a) La risposta è contenuta nel secondo principio della termodinamica. L'elastico consiste di lunghe molecole in filamenti, l'asse dei quali segue direzioni casuali rispetto alla direzione della lunghezza della fascia. La forza di tensione tende a far sì che i filamenti di molecole si allineino parallelamente alla fascia. Ciò rappresenta un aumento del grado di *ordine* delle molecole, la qual cosa implica una *diminuzione* di entropia. Se la fascia elastica viene allungata improvvisamente, tuttavia, allora il processo di tensione è quasi adiabatico, e la variazione netta di entropia è quasi zero. Quindi, deve avvenire una qualche variazione che compensi la diminuzione di entropia dovuta all'allineamento dei filamenti. Si può compensare la diminuzione se le molecole aumentano il loro moto vibrazionale, per cui la loro temperatura aumenta: ciò riguarda la sensazione di riscaldamento sulla fronte.

Quando la fascia elastica ritorna alla sua lunghezza originale, i filamenti di molecole possono ritornare disordinati, col risultato di aumentare l'entropia. L'aumento di entropia nelle direzioni delle molecole è accompagnata da una diminuzione di entropia delle vibrazioni molecolari. Questa diminuzione nella vibrazione rappresenta una diminuzione dell'energia interna, e tu hai la sensazione, in questa circostanza, di una temperatura più fredda.

(b) L'argomento dell'attrito interno potrebbe essere ritenuto consistente con l'aumento di temperatura associato allo stiramento della fascia elastica. Quando la fascia elastica ritorna alla sua lunghezza originale, tuttavia, vi dovrebbe essere uno *strofinio aggiuntivo* delle porzioni della fascia, e l'attrito interno dovrebbe dar luogo a un ulteriore *aumento* di temperatura. Ciò risulta inconsistente con l'osservazione che la temperatura diminuisce quando la fascia elastica ritorna alla sua lunghezza originale. L'attrito interno può essere invocato come argomento quando il filo di una gruccia si riscalda per essere piegato avanti e indietro, ma il fenomeno della fascia elastica ha la sua spiegazione nel secondo principio della termodinamica.

SOMMARIO

Le trasformazioni reali procedono nelle direzioni governate dal secondo principio della termodinamica. Una **macchina termica** è un dispositivo che trasforma energia termica in altre forme utili di energia. Il lavoro totale prodotto da una macchina termica che utilizza una sostanza in una trasformazione ciclica ($\Delta U = 0$) è

$$W = Q_c - Q_f \quad [18.1],$$

dove Q_c è l'energia termica assorbita da una sorgente calda e Q_f è l'energia termica ceduta a una sorgente fredda.

Il **rendimento**, ϵ , di una macchina termica è definito come il rapporto fra il lavoro totale svolto e l'energia termica assorbita per ciclo dal termostato ad alta temperatura:

$$\epsilon = \frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c} \quad [18.2]$$

Il **secondo principio della termodinamica** si può enunciare così: è impossibile costruire una macchina termica che, in un ciclo, produca come unico effetto l'assorbimento di energia termica da una sorgente e la produzione di una uguale quantità di lavoro.

Una trasformazione è **reversibile** se può essere realizzata in modo tale che il sistema possa ritornare alle sue condizioni iniziali lungo lo stesso cammino in cui ogni punto sia uno stato di equilibrio. Una trasformazione che non soddisfi a queste condizioni è **irreversibile**.

Il **rendimento di una macchina termica** che funziona secondo il **ciclo di Carnot** è dato da

$$\epsilon_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad [18.3]$$

dove T_c è la temperatura assoluta del termostato caldo e T_f è la temperatura assoluta del termostato freddo.

Nessuna macchina termica che operi fra le temperature T_f e T_c può avere un rendimento maggiore di una macchina che esegua reversibilmente un ciclo di Carnot fra le stesse due temperature.

Il secondo principio della termodinamica stabilisce che quando avviene una trasformazione reale (irreversibile), il grado di disordine del sistema più l'ambiente esterno aumenta. Quando una trasformazione avviene in un sistema isolato, energia ordinata viene trasformata in energia disordinata. La misura del disordine di un sistema è chiamata **entropia**, S .

La variazione di entropia, dS , di un sistema che compie una trasformazione infinitesima fra due stati di equilibrio è

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \quad [18.6]$$

La variazione di entropia di un sistema che passa fra due stati di equilibrio è

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \quad [18.7]$$

Il valore di ΔS è lo stesso per tutti i percorsi reversibili fra gli stessi stati iniziale e finale.

La variazione di entropia per qualunque trasformazione ciclica reversibile è zero e, quando ciò avviene, l'entropia dell'Universo resta costante.

L'entropia è una funzione di stato; cioè, essa dipende soltanto dallo stato del sistema. La variazione di entropia per un sistema che compie una trasformazione reale (irreversibile) fra due stati di equilibrio è la stessa di quella di una trasformazione reversibile fra gli stessi stati.

In una trasformazione irreversibile, l'entropia totale di un sistema isolato aumenta sempre. In generale, l'entropia totale (e il disordine) aumenta sempre in qualunque trasformazione irreversibile. Inoltre, la variazione di entropia dell'Universo è maggiore di zero per qualunque trasformazione irreversibile.

Da un punto di vista microscopico, l'**entropia**, S , è definita come

$$S \equiv k_B \ln W \quad [18.14]$$

dove k_B è la costante di Boltzmann e W è il numero di stati (microscopici) disponibili per il sistema nel suo stato (macroscopico). Poiché la tendenza statistica del sistema è di procedere verso stati di maggiore probabilità e di maggior disordine, tutte le trasformazioni naturali sono irreversibili e aumentano l'entropia. Perciò, l'**entropia è una misura del disordine microscopico**.

DOMANDE CONCETTUALI

1. Quali sono alcuni fattori che limitano il rendimento dei motori delle automobili?
2. Una turbina a vapore è uno dei principali componenti di una centrale elettrica. Perché è vantaggioso aumentare la temperatura del vapore quanto più possibile?
3. È possibile costruire una macchina termica che non dia origine ad inquinamento termico?
4. Discutere la variazione di entropia di un gas che si espanda (a) a temperatura costante e (b) adiabaticamente.
5. In Israele sono stati costruiti piccoli laghi solari dove l'energia del Sole viene concentrata vicino al fondo della pozza salata. Con una opportuna stratificazione di sale nell'acqua, si evitano moti convettivi e si possono raggiungere temperature di 100°C. Si possono fare delle ipotesi sul massimo rendimento con il quale poter estrarre dalla pozza energia utile?
6. Perché un'automobile consuma più carburante in inverno che in estate?
7. Una pompa di calore può avere un coefficiente di prestazione minore dell'unità? Spiegare.
8. In questo capitolo, il ciclo di Carnot è stato trattato in un diagramma $P\text{-}V$. Quale aspetto avrebbe il ciclo in un diagramma $T\text{-}S$?
9. Dare alcuni esempi di trasformazioni irreversibili che avvengono in natura. Dare un esempio di una trasformazione naturale che sia quasi reversibile.
10. Una trasformazione termodinamica avviene in modo tale che l'entropia del sistema varia di -8.0 J/K . In base al secondo principio della termodinamica, che cosa possiamo concludere intorno alla variazione di entropia dell'ambiente circostante?
11. Se una soluzione di zucchero sovrassatura evapora lentamente, nel contenitore si formano cristalli di zucchero. Quindi, le molecole di zucchero vanno da una forma più disordinata (in soluzione) a una altamente ordinata: la forma cristallina. Questo processo viola il secondo principio della termodinamica? Spiegare.
12. Dire come si può aumentare e come diminuire l'entropia di una mole di un metallo, che si trova a temperatura ambiente.
13. Una pompa di calore deve venire installata in una regione dove la temperatura media esterna, nei mesi invernali, è di -20°C . In previsione di ciò, spiegare perché è consigliabile disporre il compressore esterno in profondità sotto il terreno. Perché nei climi freddi non si usano comunemente pompe di calore?
14. Il vostro compagno di stanza riassetta la stanza in subbuglio dopo una festa, facendo ordine via via. Poiché l'ordine nella stanza è stato aumentato, è stato violato il secondo principio della termodinamica?
15. Discutere le variazioni di entropia che avvengono quando (a) si cuoce una pagnotta di pane e (b) si consuma il pane.
16. Una macchina diesel funziona con un rapporto di

- compressione di circa 15. Una a benzina ha un rapporto di compressione di circa 6. Quale delle due macchine scalda di più? Quale delle due (almeno teoricamente) può funzionare con maggiore rendimento?
17. Se si scuote un barattolo di vetro pieno di gelatine, di diversa grandezza, si osserva che le più grandi tendono a comparire alla superficie, mentre le più piccole vanno a fondo. Spiegare perché questo avviene e se il secondo principio della termodinamica viene violato.
18. Il dispositivo in Figura D18.18, detto convertitore termoelettrico, usa una serie di celle semiconduttrici per trasformare energia termica in energia elettrica. Nella fotografia, a sinistra, le due estremità del dispositivo sono alla stessa temperatura e non viene prodotta energia elettrica. Tuttavia, quando una estremità è a una temperatura maggiore dell'altra, come nella fotografia di destra, viene prodotta energia elettrica, poiché il dispositivo estrae energia dal serbatoio caldo, e fa funzionare un piccolo motore elettrico. Spiegare perché una differenza di temperatura produce energia elettrica in questa dimostrazione e in che senso questo curioso esperimento dimostra il secondo principio della termodinamica.

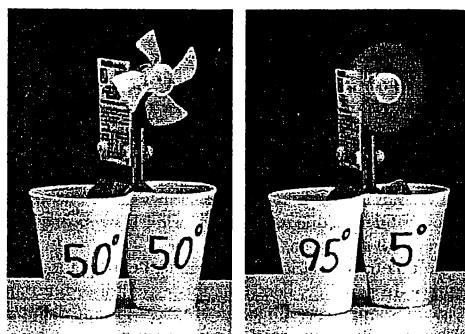


Figura D18.18 (Per gent. conc. di PASCO Scientific Company)

PROBLEMI

Paragrafo 18.1 Macchine termiche e il secondo principio della termodinamica

- In ciascun ciclo, una macchina termica assorbe 360 J di calore e svolge 25.0 J di lavoro. Trovare (a) il rendimento della macchina e (b) il calore ceduto in ciascun ciclo.
- Una macchina termica produce 200 J di lavoro in ogni ciclo e ha un rendimento del 30.0%. Per ciascun ciclo di operazione, (a) quanta energia termica viene assorbita e (b) quanta energia termica viene ceduta?
- Una particolare macchina ha in uscita una potenza di 5.00 kW e un rendimento del 25.0%. Se la macchina cede 8000 J di energia termica per ciascun ciclo, trovare (a) il calore assorbito in ciascun ciclo e (b) il tempo per compiere ciascun ciclo.

Paragrafo 18.3 La macchina di Carnot

- Una macchina termica lavora tra 200°C e 80.0°C raggiungendo il 20.0% del rendimento massimo possibile. Quanto calore deve essere assorbito affinché la macchina compia 10.0 kJ di lavoro?
- Una delle macchine termiche più efficienti mai costruite lavora fra 430°C e 1870°C. Il suo rendimento reale è il 42.0%. (a) Qual è il massimo rendimento teorico? (b) Quanta potenza fornisce la macchina se assorbe 1.40×10^5 J al secondo? (c) Confrontare questo rendimento osservato con quello previsto per una macchina reale.

- Una macchina di Carnot ha una potenza d'uscita di 150 kW. La macchina lavora fra due termostati a 20.0°C e 500°C.
 - Quanta energia termica viene assorbita all'ora?
 - Quanta energia termica viene ceduta all'ora?
- Una macchina a vapore lavora in un clima freddo dove la temperatura di scarico è di 0°C. Calcolare il massimo rendimento teorico della macchina, (a) se la temperatura di immissione del vapore è di 100°C e (b) se il vapore viene surriscaldato a 200°C.
- La temperatura bassa in un ciclo di Carnot è 300 K. Qual è la temperatura alta se il rendimento del ciclo è il 30.0%?
- Un gas perfetto compie un ciclo di Carnot. L'espansione isoterna avviene a 250°C, e la compressione isoterna avviene a 50.0°C. Se il gas assorbe 1200 J di calore nell'espansione isoterna, trovare (a) il calore ceduto al serbatoio freddo in ciascun ciclo e (b) il lavoro netto fatto dal gas in ciascun ciclo.
- Una centrale elettrica lavora con un rendimento del 32.0% durante l'estate quando l'acqua del mare per il raffreddamento è a 20.0°C. La centrale usa vapore a 350°C per far funzionare le turbine. Assumendo che il rendimento della centrale vari con la stessa proporzione del rendimento ideale, quale sarebbe il rendimento della centrale in inverno quando l'acqua del mare è a 10.0°C?
- È stata proposta una centrale elettrica che userebbe il

- gradiente di temperatura dell'oceano. Il sistema funzionerebbe fra 20.0°C (temperatura di superficie dell'acqua) e 5.00°C (temperatura dell'acqua alla profondità di circa 1 km). (a) Qual è il rendimento massimo di un simile sistema? (b) Se la potenza di uscita della centrale fosse 75.0 MW, quanta energia termica verrebbe assorbita per ora? (c) Considerando il vostro risultato per (a), pensate che ne valga la pena?
12. Supponiamo che una macchina termica sia collegata a due sorgenti di calore, una un contenitore di alluminio fuso (660°C) e l'altra un blocco di mercurio solido (-38.9°C). La macchina funziona solidificando 1.00 g di alluminio e fondendo 15.0 g di mercurio in ciascun ciclo. Il calore latente di fusione dell'alluminio è $3.97 \times 10^5 \text{ J/kg}$; quello del mercurio è $1.18 \times 10^4 \text{ J/kg}$. Qual è il rendimento della macchina?
13. Una macchina reale con un rendimento del 20.0% viene usata per mettere in moto un treno da fermo fino a 5.00 m/s. È noto che una macchina ideale (Carnot) che usasse gli stessi termostati freddo e caldo accelererebbe lo stesso treno da fermo fino alla velocità di 6.50 m/s utilizzando la stessa quantità di carburante. Se la macchina usa aria a 300 K come termostato freddo, trovare la temperatura del vapore che serve come termostato caldo.

Paragrafo 18.4 Pompe di calore e frigoriferi

14. Calcolare l'efficienza di una macchina frigorifera, che lavora con il rendimento di una macchina di Carnot tra le temperature di -3.00°C e +27.0°C.
15. Un frigorifero ideale o una pompa di calore è equivalente a una macchina di Carnot funzionante in senso inverso. Cioè, calore Q_f è assorbito dal termostato freddo e calore Q_i viene fornito al termostato caldo. (a) Mostrare che il lavoro che deve essere compiuto per far funzionare il frigorifero o la pompa è

$$W = \frac{T_c - T_f}{T_f} Q_f$$

(b) Mostrare che il coefficiente di prestazione del frigorifero ideale è

$$\text{COP} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

16. Calcolare quanto lavoro viene richiesto ad una macchina frigorifera ideale di Carnot per sottrarre 1.00 J di energia termica da un gas elio a 4.00 K e per la cessione di questo calore all'ambiente alla temperatura di 293 K (temperatura ambiente).
17. Un frigorifero ha un coefficiente di prestazione uguale a 5.00. Se il frigorifero assorbe 120 J di energia termica per ogni ciclo da un termostato freddo, trovare (a) il lavoro compiuto in ciascun ciclo e (b) il calore espulso verso il termostato caldo.

18. Una pompa di calore, mostrata nella Figura P18.18, è essenzialmente una macchina termica che funziona in senso inverso. Essa assorbe calore dall'aria fredda e lo immette in una stanza più calda. Tipicamente, il rapporto fra l'energia termica reale introdotta nella stanza e il lavoro compiuto dal motore è il 10% del massimo teorico. Si determini l'energia termica immessa nella stanza per joule di lavoro compiuto dal motore se la temperatura interna è 20.0°C e quella esterna -5.00°C.

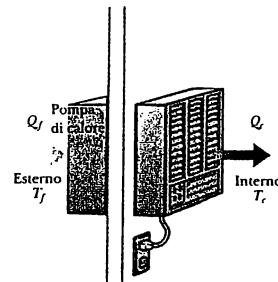


Figura P18.18

Paragrafo 18.6 Entropia

19. Una bacinella contiene 500 g d'acqua a 0°C. Calcolare la variazione di entropia dell'acqua se si congela completamente e lentamente a 0°C.
20. Alla pressione di 1 atm, l'olio liquido bolle a 20.5 K. Il calore latente di vaporizzazione è di 20.5 kJ/kg. Calcolare la variazione di entropia per chilogrammo di sostanza a seguito della vaporizzazione.
21. Calcolare la variazione di entropia di 250 g d'acqua quando viene riscaldata lentamente da 20.0°C a 80.0°C. (*Suggerimento:* si osservi che $dQ = mc dT$.)

Paragrafo 18.7 Variazioni di entropia e trasformazioni irreversibili

22. La superficie del Sole ha una temperatura approssimativamente di 5700 K e quella terrestre di circa 290 K. Calcolare la variazione di entropia nel trasferimento di 1000 J di energia termica dal Sole alla Terra.
23. Una macchina di 1500 kg si muove a 20.0 m/s. Il conducente frena per una fermata. I freni si raffreddano con l'aria circostante, la quale ha una temperatura abbastanza costante di 20.0°C. Qual è la variazione totale di entropia?
24. Una valanga di ghiaccio e neve, di massa 1000 kg, scende a valle lungo un pendio con un dislivello di 200 m. Calcolare la variazione complessiva di entropia nel caso che la temperatura dell'aria sia di -3.00°C.
25. Un ferro di cavallo di 1.00 kg viene preso da una fornace a 900°C e immerso in 4.00 kg di acqua a 10.0°C.

Se non si disperde calore con l'ambiente circostante, determinare la variazione totale di entropia.

21. Con quale velocità tu personalmente fai aumentare l'entropia dell'Universo proprio ora? Calcola un ordine di grandezza stimato, fissando le grandezze che assumi come dati i valori che tu misuri o stimi per esse.
27. A sinistra del contenitore c'è una mole di H_2 gassoso, mentre a destra è stato praticato il vuoto (Fig. P18.27, i volumi a destra e sinistra sono uguali). All'apertura della valvola, il gas idrogeno fluisce nella parte destra. Calcolare la variazione di entropia. La temperatura del gas cambia?

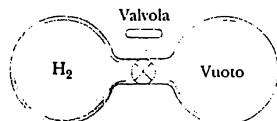


Figura P18.27

28. Un serbatoio di 2.00 litri ha un setto centrale che lo divide in due parti uguali, come si vede nella Figura P18.28. La parte a sinistra contiene H_2 gassoso, quella a destra O_2 gassoso; entrambi i gas sono a temperatura ambiente ed alla pressione di 1 atm. Il setto viene tolto, consentendo così ai due gas di mescolarsi. Calcolare l'aumento di entropia.

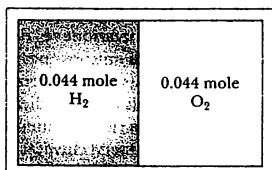


Figura P18.28

Paragrafo 18.8 Entropia su scala microscopica

Paragrafo 18.9 Entropia e disordine (Facoltativo)

29. Se si lanciano due dadi, qual è il numero totale di modi in cui si ottiene (a) un 12 e (b) un 7?
30. Comporre una tabella simile alla Tabella 18.1 per il seguente evento. Lanciate quattro monete in aria simultaneamente. Prendete nota del risultato del vostro lancio in termini del numero di teste e croci che escono. Per esempio, TTCT e TCTT sono due possibili modi in cui si possono ottenere tre teste e una croce. (a) Sulla base della vostra tabella, qual è il risultato più probabile di un lancio? In termini di entropia, (b) qual è lo stato più ordinato, e (c) quello più disordinato?
31. Ripetere la procedura usata per costruire la Tabella 18.1 (a) nel caso in cui estrae tre biglie dal vostro sacchetto piuttosto che quattro e (b) nel caso in cui se ne estraggono cinque invece di quattro.
- Problemi generali**
32. In un giorno caldo, una casa in Florida viene raffreddata da un condizionatore d'aria. La temperatura esterna è 36.0°C e l'aria all'interno è a 18.0°C. Se dalla casa vengono rimossi 50 000 kJ/h di energia termica, qual è la minima potenza che deve essere fornita al condizionatore?
33. Ogni secondo presso le cascate del Niagara, circa 5000 m³ di acqua cadono da un'altezza di 50.0 m. Qual è l'aumento di entropia per secondo dovuto alla caduta dell'acqua? (Si assuma un ambiente a 20.0°C).
34. Se una macchina termica con un rendimento del 35.0% (Fig. 18.1) funziona in senso inverso come un frigorifero (Fig. 18.7), quanto sarebbe il suo coefficiente di prestazione?
35. Quanto lavoro è necessario, usando un frigorifero ideale di Carnot, per trasformare 0.500 kg di acqua a 10.0°C in ghiaccio a -20.0°C? Si assuma che il compartimento del congelatore sia mantenuto a -20.0°C e il frigorifero scarichi il calore in una stanza a 20.0°C.
36. Una macchina termica lavora tra due termostati alla temperatura $T_2 = 600$ K e $T_1 = 350$ K, assorbendo 1000 J di energia termica dal termostato a temperatura più alta e compiendo un lavoro di 250 J. Calcolare: (a) la variazione di entropia dell'Universo, ΔS_U , per questa trasformazione e (b) il lavoro W che potrebbe venire fatto da una macchina ideale di Carnot, che lavora tra gli stessi termostati. (c) Dimostrare che la differenza di lavoro fatto nei due casi è $T_1 \Delta S_U$.
37. Una casa disperde calore attraverso le pareti e il tetto a una velocità di 5000 J/s = 5.00 kW, quando la temperatura interna è di 22.0°C e quella esterna di -5.00°C. Calcolare la potenza elettrica necessaria a mantenere la temperatura interna a 22.0°C nei casi seguenti: (a) l'energia elettrica viene usata da stufe a resistenza elettrica (che convertono tutta l'elettricità fornita in calore), (b) l'energia elettrica viene usata per azionare un motore elettrico, che mette in funzione il compressore di una pompa di calore (la pompa ha un'efficienza del 60.0% di quella di un ciclo di Carnot).
38. Un atleta la cui massa è 70.0 kg beve 450 g di acqua raffreddata. L'acqua è alla temperatura di 2°C. (a) Trascurando la variazione di temperatura del corpo dovuta all'immissione d'acqua (per cui il corpo viene considerato come un termostato a 37°C), trovare l'aumento di entropia dell'intero sistema. (b) Assumere che tutto il corpo venga raffreddato dalla bevuta e che il calore specifico medio dell'uomo sia uguale al calore specifico dell'acqua. Trascurando

- qualsiasi altro scambio di calore e qualsiasi cessione di calore metabolico, trovare la temperatura dell'atleta dopo aver bevuto l'acqua fredda, data una temperatura iniziale del corpo di 37°C . Sotto queste ipotesi, qual è l'aumento di entropia dell'intero sistema? Confrontare il risultato con quello di (a).
- (30) Un frigorifero ha un coefficiente di prestazione di 3.00. Lo scomparto del ghiaccio è a -20.0°C , e la temperatura ambiente è 22.0°C . Il frigorifero può trasformare 30.0 g di acqua a 22.0°C in 30.0 g di ghiaccio a -20.0°C ogni minuto. Quale potenza in ingresso è necessaria? Si trascuri qualunque altro raffreddamento del frigorifero e si dia la risposta in watt.
- (31) Un congelatore ideale (Carnot) in una cucina è alla temperatura di 260 K, mentre l'aria della cucina si trova a una temperatura costante di 300 K. Supponiamo che l'isolamento del congelatore non sia perfetto per cui si verifica un certo flusso di calore alla velocità di 0.150 W. Determinare la potenza media del motore del congelatore necessaria per mantenere la temperatura costante.
- (32) Una centrale, che ha un rendimento di Carnot, produce 1000 MW di potenza elettrica con turbine che assorbono vapore a 500 K ed espellono acqua a 300 K in un fiume. Se l'acqua della corrente risulta 6.00 K più calda a causa dello scarico della centrale, determinare la velocità di flusso del fiume.
- (33) Una centrale, che ha un rendimento di Carnot, produce una potenza elettrica P con turbine che assorbono vapore a temperatura T_f e dissipano calore in un fiume attraverso uno scambiatore di calore a temperatura T_f . Se l'acqua della corrente è più calda di ΔT a causa del calore fornito dalla centrale, determinare la velocità del flusso del fiume.
- (34) Qual è la minima quantità di lavoro che si deve fare per assorbire 400 J di calore da un corpo molto massiccio a 0°C mentre si cede calore a un termostato alla temperatura di 20.0°C ?
- (35) Un gas segue il cammino 123 nel diagramma P - V di Figura P18.44 e 418 J di calore vengono assorbiti dal sistema. Inoltre, viene svolto un lavoro di 167 J. (a) Qual è la variazione di energia interna del sistema? (b) Qual è il calore che viene assorbito dal sistema se la trasformazione segue il cammino 143? Il lavoro compiuto dal gas lungo questo cammino è 63.0 J. Quanto lavoro totale dovrebbe essere svolto o no dal sistema se esso seguisse (c) il cammino 12341? (d) Il cammino 14321? (e) Qual è la variazione di energia interna del sistema nelle trasformazioni descritte in (c) e (d)?

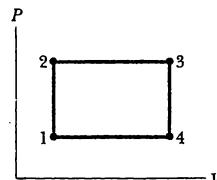


Figura P18.44

- (45) La Figura P18.45 rappresenta n moli di un gas perfetto monoatomico che compiono un ciclo reversibile che consiste di due isoterme alle temperature $3T_0$ e T_0 e due trasformazioni a volume costante. Determinare in funzione di n , R e T_0 , (a) il calore complessivo scambiato dal gas e (b) il rendimento di una macchina che lavora in questo ciclo.

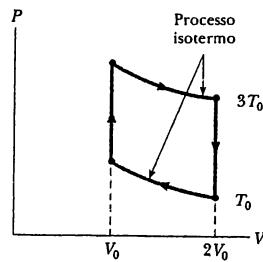
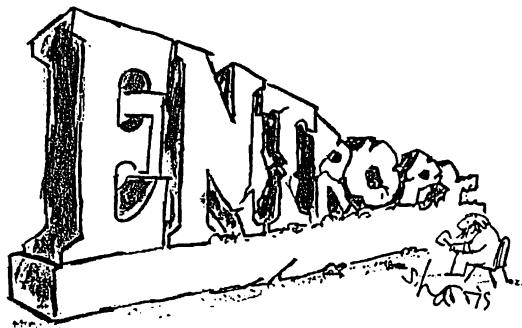


Figura P18.45

- (46) Una centrale elettrica ha un'efficienza totale del 20.0%. La centrale fornisce 150 MW di potenza a una città e le sue turbine usano carbone come carburante. Il carbone che brucia produce vapore a 190°C , che aziona le turbine. Questo vapore viene poi condensato in acqua a 25.0°C passando attraverso le bobine di raffreddamento in contatto con l'acqua. (a) Quante tonnellate di carbone consuma al giorno l'impianto ($1 \text{ tonnellata} = 10^3 \text{ kg}$)? (b) Qual è il costo totale del carburante all'anno se il prezzo di fornitura è 10 000 lire/tonnellata? (c) Se l'acqua del fiume viene aspirata a 20.0°C con quale portata minima deve fluire nelle bobine di raffreddamento affinché la sua temperatura non superi i 25.0°C ? (Suggerimento: il calore di combustione del carbone è 33.0 kJ/g).

RISPOSTE AI PROBLEMI CONCETTUALI

- Il rendimento di una macchina di Carnot è dato dal rapporto della differenza fra le temperature fra le quali si opera ($T_c - T_f$) e la temperatura del termostato caldo (T_c). Aumentando T_c di ΔT o diminuendo T_f di ΔT ambedue hanno lo stesso effetto sulla differenza delle temperature di esercizio. Ma soltanto l'aumento di T_c ha un effetto sul denominatore della frazione, aumentando il denominatore, e, così, diminuendo il valore della frazione. Quindi, sarebbe più efficace diminuire T_f di ΔT .
- Un motore di automobile ha un certo rendimento, il quale determina quanta energia è necessaria per far funzionare la macchina. Se non funziona alcun accessorio, questa energia è completamente utilizzabile per variare l'energia cinetica della macchina (durante le accelerazioni) e vincere gli attriti quando la macchina si muove. Se gli accessori sono funzionanti, l'energia per queste operazioni deve essere fornita dal motore, lasciando meno energia disponibile per il movimento della macchina, e quindi aumentando il consumo per chilometro. Quindi, il condizionatore d'aria, la radio, le luci, e i tergilavavetri aumenteranno tutti il consumo per chilometro. Cosa che non accade quando si alzano o si abbassano manualmente i finestrini: l'energia per questa operazione proviene dal corpo di chi guida.
- Se venisse eliminato l'attrito, il motore avrebbe il massimo rendimento possibile, ma anche una macchina di Carnot non può avere un rendimento del 100%: ciò violerebbe il secondo principio. Il massimo rendimento dipende dalle temperature di esercizio.
- Il ruolo di un condizionatore d'aria è quello di una pompa di calore: esso pompa energia da un termostato freddo (l'aria all'interno) a un termostato caldo (l'aria all'esterno). Quindi, lo "scarico" del condizionatore d'aria deve essere verso l'aria esterna, la qual cosa si verifica se il condizionatore d'aria è installato in una finestra o in un buco nella parete. Se un condizionatore d'aria funzionasse all'interno di una stanza, l'aria entrerebbe nell'apparecchio, si sommerebbe ad essa l'energia entrante dall'alimentazione elettrica e poi verrebbe restituita indietro alla stanza, elevandone la temperatura.
- Si, una pompa di calore può fornire significativamente più energia di quella che consuma. In inverno, l'energia fornita all'interno della casa è la somma dell'energia estratta dall'aria esterna e dell'energia entrante nella macchina per mezzo dell'elettricità. Se il COP della pompa di calore è 5, allora essa fornisce un'energia 5 volte maggiore di quella che consuma.
- In ordine di aumento di entropia: sistemazione del mazzo, crescita in giardino, distruzione col fuoco.
- Non vi è aumento di entropia da nessuno dei due punti di vista. Nell'espansione adiabatica, la temperatura diminuisce. Quindi, sebbene le molecole abbiano un volume maggiore in cui muoversi, esse si muovono con velocità più basse. La diminuzione della velocità rappresenta un maggior ordine, poiché il pigia pigia delle molecole viene diminuito. Un calcolo mostra che la diminuzione di entropia dovuto alla riduzione del pigia pigia compensa esattamente l'aumento dovuto all'incremento del volume. Quindi, le variazioni nette di entropia sono zero.



APPENDICE A

TABELLA A.1 Fattori di conversione

Lunghezza					
	m	cm	km	in.	ft
1 metro	1	10^2	10^{-3}	39.37	3.281
1 centimetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}
1 chilometro	10^3	10^5	1	3.937×10^4	3.281×10^3
1 pollice	2.540×10^{-2}	2.540	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}
1 piede	0.3048	30.48	3.048×10^{-4}	12	1
1 miglio	1609	1.609×10^5	1.609	6.336×10^4	5280
					1

Massa				
	kg	g	slug	u
1 chilogrammo	1	10^3	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 grammo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug	14.59	1.459×10^4	1	8.789×10^{27}
1 unità di massa atomica	1.660×10^{-27}	1.660×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

Tempo				
	s	min	h	giorno
1 secondo (s)	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}	1.157×10^{-5}
1 minuto (min)	60	1	1.667×10^{-2}	6.994×10^{-4}
1 ora (h)	3600	60	1	4.167×10^{-2}
1 giorno (g)	8.640×10^4	1440	24	1
1 anno (a)	3.156×10^7	5.259×10^5	8.766×10^3	365.2
				1

Velocità				
	m/s	cm/s	ft/s	mi/h
1 metro/secondo	1	10^2	3.281	2.237
1 centimetro/secondo	10^{-2}	1	3.281×10^{-2}	2.237×10^{-2}
1 piede/secondo	0.3048	30.48	1	0.6818
1 miglio/ora	0.4470	44.70	1.467	1

Note: 1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s.

	Forza		
	N	dyn	lb
1 newton	1	10^5	0.2248
1 dina	10^{-5}	1	2.248×10^{-6}
1 libbra	4.448	4.448×10^5	1

	Lavoro, energia, calore		
	J	erg	ft · lb
1 joule	1	10^7	0.7376
1 erg	10^{-7}	1	7.376×10^{-8}
1 ft · lb	1.356	1.356×10^7	1
1 eV	1.602×10^{-19}	1.602×10^{-12}	1.182×10^{-19}
1 cal	4.186	4.186×10^7	3.087
1 Btu	1.055×10^3	1.055×10^{10}	7.779×10^2
1 kWh	3.600×10^6	3.600×10^{13}	2.655×10^6

	eV	cal	Btu	kWh
1 joule	6.242×10^{18}	0.2389	9.481×10^{-4}	2.778×10^{-7}
1 erg	6.242×10^{11}	2.389×10^{-8}	9.481×10^{-11}	2.778×10^{-14}
1 ft · lb	8.464×10^{18}	0.3239	1.285×10^{-3}	3.766×10^{-7}
1 eV	1	3.827×10^{-20}	1.519×10^{-22}	4.450×10^{-26}
1 cal	2.613×10^{19}	1	3.968×10^{-3}	1.163×10^{-6}
1 Btu	6.585×10^{21}	2.520×10^2	1	2.930×10^{-4}
1 kWh	2.247×10^{25}	8.601×10^5	3.413×10^2	1

	Pressione		
	Pa	dyn/cm ²	atm
1 pascal = 1 newton/metri ²	1	10	9.869×10^{-6}
1 dina/centimetro ²	10^{-1}	1	9.869×10^{-7}
1 atmosfera	1.013×10^5	1.013×10^6	1
1 centimetro di mercurio*	1.333×10^3	1.333×10^4	1.316×10^{-2}
1 libbra/pollice ²	6.895×10^3	6.895×10^4	6.805×10^{-2}
1 libbra/piede ²	47.88	4.788×10^2	4.725×10^{-4}

	cm Hg	lb/in. ²	lb/ft ²
1 pascal = 1 newton/metri ²	7.501×10^{-4}	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 dina/centimetro ²	7.501×10^{-5}	1.450×10^{-5}	2.089×10^{-3}
1 atmosfera	76	14.70	2.116×10^3
1 centimetro di mercurio*	1	0.1943	27.85
1 libbra/pollice ²	5.171	1	144
1 libbra/piede ²	3.591×10^{-2}	6.944×10^{-3}	1

*A 0°C ed in una località in cui l'accelerazione di gravità ha il suo valore "standard" = 9.80665 m/s^2 .

TABELLA A.2 Simboli, dimensioni ed unità delle grandezze fisiche

Grandezza	Simbolo comune	Unità*	Dimensioni†	Unità in funzione delle unità di base SI
Accelerazione	a	m/s^2	L/T^2	m/s^2
Accelerazione angolare	α	$\text{radianti}/\text{s}^2$	T^{-2}	s^{-2}
Angolo	θ, ϕ	radianti	1	
Area	A	m^2	L^2	m^2
Calore	Q	joule (J)	ML^2/T^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Calore specifico	c	$\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}$	$\text{L}^2/\text{T}^2 \cdot \text{K}$	$\text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{K}$
Calore (specifico) molare	C	$\text{J}/\text{mole} \cdot \text{K}$		$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{mole} \cdot \text{K}$
Campo elettrico	E	$\text{V}/\text{m} (= \text{N}/\text{C})$	ML/QT^2	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{A} \cdot \text{s}^3$
Campo magnetico	B	tesla (T) ($= \text{Wb}/\text{m}^2$)	M/QT	$\text{kg}/\text{A} \cdot \text{s}^2$
Capacità	C	farad (F) ($= \text{C}/\text{V}$)	$\text{Q}^2\text{T}^2/\text{ML}^2$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4/\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Carica	q, Q, e	coulomb (C)	Q	$\text{A} \cdot \text{s}$
Conduttività	σ	$1/\Omega \cdot \text{m}$	$\text{Q}^2\text{T}/\text{ML}^3$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^3/\text{kg} \cdot \text{m}^3$
Corrente	I	AMPERE	Q/T	A
Costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	$\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 (= \text{F}/\text{m})$	$\text{Q}^2\text{T}^2/\text{ML}^3$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4/\text{kg} \cdot \text{m}^3$
Costante dielettrica relativa	κ			
Densità di massa	ρ	kg/m^3	M/L^3	kg/m^3
Densità di carica:				
di linea	λ	C/m	Q/L	$\text{A} \cdot \text{s}/\text{m}$
di superficie	σ	C/m^2	Q/L^2	$\text{A} \cdot \text{s}/\text{m}^2$
di volume	ρ	C/m^3	Q/L^3	$\text{A} \cdot \text{s}/\text{m}^3$
Densità di corrente	J	A/m^2	Q/T^2	A/m^2
Energia	E, U, K	joule (J)	ML^2/T^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Entropia	S	J/K	$\text{ML}^2/\text{T}^2 \cdot \text{K}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{K}$
Flusso elettrico	Φ	$\text{V} \cdot \text{m}$	ML^3/QT^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^3/\text{A} \cdot \text{s}^3$
Flusso magnetico	Φ_B	weber (Wb)	ML^2/QT	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{A} \cdot \text{s}^2$
Forza	F	newton (N)	ML/T^2	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Forza elettromotrice	E	volt (V)	ML^2/QT^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{A} \cdot \text{s}^3$
Frequenza	f, ν	hertz (Hz)	T^{-1}	s^{-1}
Frequenza angolare (pulsazione)	ω	radianti/s	T^{-1}	s^{-1}
Induttanza	L	henry (H)	ML^2/Q^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{A}^2 \cdot \text{s}^2$
Lavoro	W	joule (J) ($= \text{N} \cdot \text{m}$)	ML^2/T^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Lunghezza d'onda	λ	m	L	m
Massa	m, M	CHILOGRAMMO	M	kg
Momento angolare (o della quantità di moto)	L	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$	ML^2/T	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
Momento della forza	τ	$\text{N} \cdot \text{m}$	ML^2/T^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Momento di dipolo:				
elettrico	p	$\text{C} \cdot \text{m}$	QL	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$
magnetico	μ	$\text{N} \cdot \text{m}/\text{T}$	QL^2/T	$\text{A} \cdot \text{m}^2$
Momento di inerzia	I	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	ML^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Numerico atomico	Z			
Periodo	T	s	T	s
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$\text{N}/\text{A}^2 (= \text{H}/\text{m})$	$\text{ML}/\text{Q}^2\text{T}$	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{A}^2 \cdot \text{s}^2$
Potenza	P	watt (W) ($= \text{J}/\text{s}$)	ML^2/T^3	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Potenziale (tensione el.)	V	volt (V) ($= \text{J}/\text{C}$)	ML^2/QT^2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{A} \cdot \text{s}^3$
Pressione	P, p	pascal (Pa) ($= \text{N}/\text{m}^2$)	M/LT^2	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}^2$
Quantità di moto (o impulso)	p	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$	ML/T	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$
Quantità di sostanza	n	mole	-	mol
Resistenza	R	ohm (Ω) ($= \text{V}/\text{A}$)	$\text{ML}^2/\text{Q}^2\text{T}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{A}^2 \cdot \text{s}^3$

* Le unità di base del SI sono riportate in lettere maiuscole.

† I simboli M, L, T e Q denotano rispettivamente massa, lunghezza, tempo e carica.

TABELLA A.2 (Continua)

Grandezza	Simbolo comune	Unità*	Dimensioni†	Unità in funzione delle unità di base SI
Spostamento:				
distanza	s	METRO	L	m
lunghezza	d, h ℓ, L			
Temperatura	T	KELVIN	K	K
Tempo	t	SECONDO	T	s
Velocità	v	m/s	L/T	m/s
Velocità angolare	ω	radianti/s	T ⁻¹	s ⁻¹
Volume	V	m ³	L ³	m ³

* Le unità di base del sistema SI sono riportate in lettere maiuscole.

† I simboli M, L, T e Q denotano rispettivamente massa, lunghezza, tempo e carica.

TABELLA A.3 Tavola di masse atomiche selezionate^a

Z	Elemento	Simbolo	Massa atomica chimica (u)	Numero di massa (* indica radioattivo)	Massa atomica (u)	Abbondanza percentuale	Periodo di dimezzamento (se radioattivo)
0	(Neutrone)	n		1*	1.008 665		10.4 min
1	Idrogeno	H	1.0079	1	1.007 825	99.985	
	Deuterio	D		2	2.014 102	0.015	
	Trizio	T		3*	3.016 049		12.33 anni
2	Elio	He	4.00260	3	3.016 029	0.00014	
				4	4.002 603	99.99986	
3	Litio	Li	6.941	6	6.015 121	7.5	
				7	7.016 002	92.5	
4	Berillio	Be	9.0122	7*	7.016 928		53.3 giorni
				9	9.012 174	100	
5	Boro	B	10.81	10	10.012 936	19.9	
				11	11.009 305	80.1	
6	Carbonio	C	12.011	11*	11.011 433		20.4 min
				12	12.000 000	98.90	
				13	13.003 355	1.10	
				14*	14.003 242		5730 anni
7	Azoto	N	14.0067	13*	13.005 738		9.96 min
				14	14.003 074	99.63	
				15	15.000 108	0.37	
8	Ossigeno	O	15.9994	15*	15.003 065		122 s
				16	15.994 915	99.761	
				18	17.999 160	0.20	
9	Fluoro	F	18.99840	19	18.998 404	100	
10	Neon	Ne	20.180	20	19.992 435	90.48	
				22	21.991 383	9.25	
11	Sodio	Na	22.98987	22*	21.994 434		2.61 anni
				23	22.989 770	100	
				24*	23.990 961		14.96 h

TABELLA A.3 (Continua)

Z	Elemento	Simbolo	Massa atomica chimica (u)	Numero di massa (* indica radioattivo) A	Massa atomica (u)	Abbondanza percentuale	Periodo di dimezzamento (se radioattivo) $T_{1/2}$
12	Magnesio	Mg	24.305	24	23.985 042	78.99	
				25	24.985 838	10.00	
				26	25.982 594	11.01	
13	Alluminio	Al	26.98154	27	26.981 538	100	
				28	27.976 927	92.23	
14	Silicio	Si	28.086	29	28.976 495	4.67	
				30	29.973 770	3.10	
				31	30.973 762	100	
15	Fosforo	P	30.97376	32*	31.973 908		14.26 giorni
				33	31.972 071	95.02	
16	Zolfo	S	32.066	34	32.971 459	0.75	
				35*	33.967 867	4.21	
				36	34.969 033		87.5 giorni
17	Cloro	Cl	35.453	37	34.968 853	75.77	
				38	36.965 903	24.23	
18	Argon	Ar	39.948	39	35.967 547	0.337	
				40	39.962 384	99.600	
19	Potassio	K	39.0983	41	38.963 708	93.2581	
				42*	39.964 000	0.0117	1.28×10^9 anni
				43	40.961 827	6.7302	
20	Calcio	Ca	40.08	44	39.962 591	96.941	
				45	43.955 481	2.086	
21	Scandio	Sc	44.9559	46	44.955 911	100	
				47	46.951 765	8.0	
22	Titanio	Ti	47.88	48	47.947 947	7.3	
				49	48.947 871	5.5	
				50	49.944 792	5.4	
23	Vanadio	V	50.9415	51	49.947 161	0.25	1.5×10^{17} anni
				52	50.943 962	99.75	
24	Cromo	Cr	51.996	53	49.946 047	4.345	
				54	51.940 511	83.79	
				55	52.940 652	9.50	
25	Manganese	Mn	54.93805	56	53.938 883	2.365	
				57	54.938 048	100	
				58	53.939 613	5.9	
26	Ferro	Fe	55.847	59	55.934 940	91.72	
				60	56.935 396	2.1	
				61	57.933 278	0.28	

continua

Le masse nella sesta colonna sono masse atomiche, che includono la massa degli Z elettroni. I dati sono tratti dal National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, messi a punto da Jagdish K. Tuli, nel luglio 1990. I dati sono basati sui risultati sperimentali riportati in *Nuclear Data Sheets* e *Nuclear Physics* e anche da *Chart of the Nuclides*, 14th ed. Le masse atomiche sono basate su quelle di A.H. Wapstra, G. Audi, e R. Hockstra. Le abbondanze isotopiche sono basate su quelle di N.E. Holden.

TABELLA A.3 (Continua)

Z	Elemento	Simbolo	Massa atomica chimica (u)	Numero di massa (* indica radioattivo) A	Massa atomica (u)	Abbondanza percentuale	Periodo di dimezzamento (se radioattivo) $T_{1/2}$
27	Cobalto	Co	58.93320	59	58.933 198	100	5.27 anni
				60*	59.933 820		
28	Nichel	Ni	58.693	58	57.935 346	68.077	
				60	59.930 789		
29	Rame	Cu	63.54	62	61.928 346	3.634	
				63	62.929 599	69.17	
30	Zinco	Zn	65.39	65	64.927 791	30.83	
				66	65.926 035	27.9	
31	Gallio	Ga	69.723	67	66.927 129	4.1	
				68	67.924 845	18.8	
32	Germanio	Ge	72.61	69	68.925 580	60.108	
				71	70.924 703	39.892	
33	Arsenico	As	74.9216	70	69.924 250	21.23	
				72	71.922 079	27.66	
34	Selenio	Se	78.96	73	72.923 462	7.73	
				74	73.921 177	35.94	
35	Bromo	Br	79.904	76	75.921 402	7.44	
				75	74.921 594	100	
36	Cripton	Kr	83.80	74	73.922 474	0.89	
				76	75.919 212	9.36	
37	Rubidio	Rb	85.468	77	76.919 913	7.63	
				81	80.916 287	49.31	
38	Stronzio	Sr	87.62	78	77.920 400	0.35	
				80	79.916 377	2.25	
39	Ittrio	Y	88.9058	82	81.913 481	11.6	
				83	82.914 136	11.5	
40	Zirconio	Zr	91.224	84	83.911 508	57.0	
				86	85.910 615	17.3	
41	Niobio	Nb	92.9064	85	84.911 793	72.17	
				87*	86.909 186	27.83	
42	Molibdeno	Mo	95.9084	86	85.909 266	9.86	
				87	86.908 883	7.00	
43	Rutenio	Ru	101.072	88	87.905 618	82.58	
				90*	89.907 737	29.1 anni	
44	Osmio	Os	190.232	89	88.905 847	100	
				90	89.904 702	51.45	
45	Iridio	Ir	191.064	91	90.905 643	11.92	
				92	91.905 038	17.15	
46	Platino	Pt	195.084	94	93.906 314	17.38	
				96	95.908 274	2.80	

TABELLA A.3 (Continua)

Z	Elemento	Simbolo	Massa atomica chimica (u)	Numero di massa (* indica radioattivo) A	Massa atomica (u)	Abbondanza percentuale	Periodo di dimezzamento (se radioattivo) $T_{1/2}$
42	Molibdeno	Mo	95.94	92	91.906 807	14.84	
				94	93.905 085	9.25	
				95	94.905 841	15.92	
				96	95.904 678	16.68	
				97	96.906 020	9.55	
				98	97.905 407	24.13	
				100	99.907 476	9.63	
43	Tecnezio	Tc		98*	97.907 215		4.2×10^6 anni
				99*	98.906 254		2.1×10^5 anni
44	Rutenio	Ru	101.07	96	95.907 597	5.54	
				99	98.905 939	12.7	
				100	99.904 219	12.6	
				101	100.905 558	17.1	
				102	101.904 348	31.6	
				104	103.905 428	18.6	
				103	102.905 502	100	
45	Rodio	Rh	102.9055	104	103.904 033	11.14	
				105	104.905 082	22.33	
				106	105.903 481	27.33	
				108	107.903 893	26.46	
				110	109.905 158	11.72	
				107	106.905 091	51.84	
				109	108.904 754	48.16	
46	Palladio	Pd	106.42	110	109.903 004	12.49	
				111	110.904 182	12.80	
				112	111.902 760	24.13	
				113*	112.904 401	12.22	
				114	113.903 359	28.73	
				116	115.904 755	7.49	
				113	112.904 060	4.3	
47	Argento	Ag	107.868	115*	114.903 876	95.7	4.4×10^{14} anni
				116	115.901 743	14.53	
				117	116.902 953	7.68	
				118	117.901 605	24.22	
				119	118.903 308	8.58	
				120	119.902 197	32.59	
				122	121.903 439	4.63	
48	Cadmio	Cd	112.41	124	123.905 274	5.79	
				121	120.903 820	57.36	
				123	122.904 215	42.64	
				122	121.903 052	2.59	
				124	123.902 817	4.79	
				125	124.904 429	7.12	
				126	125.903 309	18.93	
49	Indio	In	114.82	128*	127.904 463	31.70	$> 8 \times 10^{24}$ anni
				130*	129.906 228	33.87	$\leq 1.25 \times 10^{21}$ anni

continua

TABELLA A.3 (Continua)

Z	Elemento	Simbolo	Massa atomica chimica (u)	Numero di massa (* indica radioattivo)	A	Massa atomica (u)	Abbondanza percentuale	Periodo di dimezzamento (se radioattivo) $T_{1/2}$
53	Iodio	I	126.9045	127	126.904 474	100	1.6×10^7 anni	
				129*	128.904 984			
54	Xenon	Xe	131.29	129	128.904 779	26.4	$\geq 2.36 \times 10^{21}$ anni	
				130	129.903 509	4.1		
				131	130.905 069	21.2		
				132	131.904 141	26.9		
				134	133.905 294	10.4		
				136*	135.907 215	8.9		
				133	132.905 436	100		
55	Cesio	Cs	132.9054	134	133.904 492	2.42		
56	Bario	Ba	137.33	135	134.905 671	6.593	$> 5 \times 10^{16}$ anni	
				136	135.904 559	7.85		
				137	136.905 816	11.23		
				138	137.905 236	71.70		
57	Lantano	La	138.905	139	138.906 346	99.9098		
58	Cerio	Ce	140.12	140	139.905 434	88.43	2.3×10^{15} anni	
				142*	141.909 241	11.13		
59	Praseodimio	Pr	140.9076	141	140.907 647	100	$> 1 \times 10^{18}$ anni	
				142	141.907 718	27.13		
60	Neodimio	Nd	144.24	143	142.909 809	12.18	17.7 anni	
				144*	143.910 082	23.80		
				145	144.912 568	8.30		
				146	145.913 113	17.19		
				148	147.916 888	5.76		
				150*	149.920 887	5.64		
				145*	144.912 745			
				144	143.911 996	3.1		
				147*	146.914 894	15.0	1.06×10^{11} anni	
				148*	147.914 819	11.3		
61	Promezio	Pm	150.36	149*	148.917 180	13.8		
				150	149.917 273	7.4	7×10^{15} anni	
				152	151.919 728	26.7		
				154	153.922 206	22.7		
				151	150.919 846	47.8		
				153	152.921 226	52.2		
				155	154.922 618	14.80		
				156	155.922 119	20.47		
				157	156.923 957	15.65		
62	Samario	Sm	150.36	158	157.924 099	24.84		
				160	159.927 050	21.86		
				159	158.925 345	100		
				161	160.926 930	18.9		
				162	161.926 796	25.5		
63	Europio	Eu	151.96	163	162.928 729	24.9	$> 2 \times 10^{15}$ anni	
				164	163.929 172	28.2		
				165	164.930 316	100		
64	Gadolino	Gd	157.25				1.06×10^{11} anni	
65	Terbio	Tb	158.9253				7×10^{15} anni	
66	Disprosio	Dy	162.50				$> 2 \times 10^{15}$ anni	
67	Olmio	Ho	164.9303				$> 1 \times 10^{18}$ anni	

TABELLA A.3 (Continua)

Z	Elemento	Simbolo	Massa atomica chimica (u)	Numero di massa (* indica radioattivo)		Massa atomica (u)	Abbondanza percentuale	Periodo di dimezzamento (se radioattivo) $T_{1/2}$
				A	massa			
68	Erbio	Er	167.26	166	165.930 292	33.6		
				167	166.932 047	22.95		
				168	167.932 369	27.8		
				170	169.935 462	14.9		
69	Tulio	Tm	168.9342	169	168.934 213	100		
				170	169.934 761	3.05		
70	Iterbio	Yb	173.04	171	170.936 324	14.3		
				172	171.936 380	21.9		
				173	172.938 209	16.12		
				174	173.938 861	31.8		
				176	175.942 564	12.7		
				175	174.940 772	97.41		
71	Lutezio	Lu	174.967	176*	175.942 679	2.59	3.78×10^{10} anni	
				176	175.941 404	5.206		
72	Afnio	Hf	178.49	177	176.943 218	18.606		
				178	177.943 697	27.297		
				179	178.945 813	13.629		
				180	179.946 547	35.100		
				181	180.947 993	99.988		
				182	181.948 202	26.3		
73	Tantalo	Ta	180.9479	183	182.950 221	14.28		
				184	183.950 929	30.7		
				186	185.954 358	28.6		
				185	184.952 951	37.40		
74	Tungsteno (Wolframio)	W	183.85	187*	186.955 746	62.60	4.4×10^{10} anni	
				188	187.955 832	13.3		
75	Renio	Re	186.207	189	188.958 139	16.1		
				190	189.958 439	26.4		
				192	191.961 468	41.0		
				191	190.960 585	37.3		
				193	192.962 916	62.7		
				194	193.962 655	32.9		
76	Osmio	Os	190.2	195	194.964 765	33.8		
				196	195.964 926	25.3		
				198	197.967 867	7.2		
				197	196.966 543	100		
				198	197.966 743	9.97		
				199	198.968 253	16.87		
77	Iridio	Ir	192.2	200	199.968 299	23.10		
				201	200.970 276	13.10		
				202	201.970 617	29.86		
				204	203.973 466	6.87		
				203	202.972 320	29.524		
				205	204.974 400	70.476		
78	Platino	Pt	195.08	(Th C")	208*	207.981 992	3.053 m	

continua

TABELLA A.3 (Continua)

Z	Elemento	Simbolo	Massa atomica chimica (u)	Numero di massa (* indica radioattivo) A	Massa atomica (u)	Abbondanza percentuale	Periodo di dimezzamento (se radioattivo) $T_{1/2}$			
82	Piombo	Pb	207.2	204*	203.973 020	1.4	$\geq 1.4 \times 10^{17}$ anni			
				206	205.974 440	24.1				
				207	206.975 871	22.1				
				208	207.976 627	52.4				
				(Ra D)	209.984 163		22.3 anni			
				(Ac B)	210.988 734		36.1 min			
				(Th B)	211.991 872		10.64 h			
				(Ra B)	213.999 798		26.8 min			
				209	208.980 374	100				
				(Th C)	210.987 254		2.14 min			
83	Bismuto	Bi	208.9803	211*						
84	Polonio	Po		210*	209.982 848		138.38 giorni			
				(Ra F)	213.995 177		164 μ s			
85	Astato	At		214*						
86	Radon	Rn		218*	218.008 685		1.6 s			
87	Francio	Fr		222*	222.017 571		3.823 giorni			
88	Radio	Ra		223*	223.019 733		22 min			
89	Attinio	Ac		226*	226.025 402		1600 anni			
				(Ms Th ₁)	228*		5.75 anni			
90	Torio	Th	232.0381	227*	227.027 749		21.77 anni			
				(Rd Th)						
91	Protoattinio	Pa		228*	228.028 716		1.913 anni			
					232.038 051	100	1.40×10^{10} anni			
92	Uranio	U	238.0289	231*	231.035 880		32.760 anni			
					232*		69 anni			
93	Nettunio	Np		233*	233.039 630		1.59 $\times 10^5$ anni			
94	Plutonio	Pu		235*	235.043 924	0.720	7.04 $\times 10^8$ anni			
					236*		2.34 $\times 10^7$ anni			
				(Ac U)	238*		4.47 $\times 10^9$ anni			
					237*		2.14 $\times 10^6$ anni			
					239*		24.120 anni			
					242*		3.73 $\times 10^5$ anni			
					244*		8.1 $\times 10^7$ anni			

APPENDICE B

Richiami di matematica

Queste appendici di matematica vanno intese come un breve richiamo di operazioni e metodi. All'inizio del corso lo studente dovrebbe avere una totale familiarità con le tecniche algebriche di base, con la geometria analitica e con la trigonometria. Le appendici sul calcolo differenziale e integrale sono più dettagliate e sono indirizzate a quegli studenti che hanno difficoltà nell'applicare concetti di calcolo a situazioni fisiche. I simboli matematici usati nel testo sono riportati nella seguente tabella.

Simboli matematici usati nel testo e loro significato

Simbolo	Significato
=	eguale a
\equiv	definito come
\neq	diverso da
\propto	proporzionale a
>	maggiore di
<	minore di
\gg (\ll)	molto maggiore (minore) di
\approx	circa eguale a
\sim	dell'ordine di grandezza di
Δx	variazione di x
$\sum_{i=1}^N x_i$	somma di x_i da $i = 1$ a $i = N$
$ x $	valore assoluto di x (quantità sempre positiva)
$\Delta x \rightarrow 0$	Δx tendente a zero
$\frac{dx}{dt}$	derivata di x rispetto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivata parziale di x rispetto a t
\int	integrale

B.1 • NOTAZIONE SCIENTIFICA

Molte grandezze che gli scienziati usano hanno spesso valori molto grandi o molto piccoli. Per esempio, la velocità della luce è circa 300 000 000 m/s e l'inchiostro necessario per fare il puntino su una i in questo testo è di circa 0.000 000 001 kg. Ovviamente,

sarebbe molto poco pratico leggere, scrivere e fare uso di numeri come questi. Noi evitiamo questi problemi mediante l'uso delle potenze di 10:

$$\begin{aligned}10^0 &= 1 \\10^1 &= 10 \\10^2 &= 10 \times 10 = 100 \\10^3 &= 10 \times 10 \times 10 = 1000 \\10^4 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000 \\10^5 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000\end{aligned}$$

e così via. Il numero degli zeri corrisponde alla potenza alla quale 10 è elevato, detto esponente di 10. Per esempio, la velocità della luce, 300 000 000 m/s può essere espressa come 3×10^8 m/s.

Per numeri minori di 1 possiamo fare le seguenti osservazioni:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.0001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.00001$$

In questi casi, la posizione del punto decimale è alla sinistra del numero 1 ed è uguale al valore dell'esponente (negativo). I numeri espressi come una potenza di 10 moltiplicati per un altro numero fra 1 e 10 si dicono espressi in **notazione scientifica**. Per esempio, la notazione scientifica di 5 943 000 000 è 5.943×10^9 , e quella per 0.0000832 è 8.32×10^{-5} .

Quando si moltiplicano numeri espressi in notazione scientifica, è molto utile la seguente regola generale:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \quad [B.1]$$

dove n ed m possono essere numeri *qualsiasi* (non necessariamente interi). Per esempio $10^2 \times 10^5 = 10^7$. La regola si applica anche se uno degli esponenti è negativo. Per esempio $10^3 \times 10^{-8} = 10^{-5}$.

Quando si dividono numeri espressi in notazione scientifica, si noti che:

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m} \quad [B.2]$$

ESERCIZIO Con l'aiuto delle regole precedenti, verificare le risposte a quanto segue:

1. $86\,400 = 8.64 \times 10^4$
2. $9\,816\,762.5 = 9.8167625 \times 10^6$

$$\begin{aligned}3. \quad 0.0000000398 &= 3.98 \times 10^{-8} \\4. \quad (4 \times 10^8)(9 \times 10^9) &= 3.6 \times 10^{18} \\5. \quad (3 \times 10^7)(6 \times 10^{-12}) &= 1.8 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6. \quad \frac{75 \times 10^{-11}}{5 \times 10^{-3}} &= 1.5 \times 10^{-7} \\7. \quad \frac{(3 \times 10^6)(8 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{17})(6 \times 10^5)} &= 2 \times 10^{-18}\end{aligned}$$

B.2 • ALGEBRA

Alcune regole fondamentali

Quando si effettuano operazioni algebriche, si applicano le regole dell'aritmetica. Simboli quali x , y , z si usano normalmente per rappresentare grandezze non conosciute, che prendono il nome di incognite.

Dapprima, consideriamo l'equazione

$$8x = 32$$

Se vogliamo trovare la x che risolve, possiamo dividere (o moltiplicare) ogni lato dell'equazione per lo stesso fattore diverso da zero senza distruggere l'uguaglianza. In questo caso, se dividiamo entrambi i membri dell'equazione per 8, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{8x}{8} &= \frac{32}{8} \\x &= 4\end{aligned}$$

Ora consideriamo l'equazione

$$x + 2 = 8$$

In questo tipo di espressione, possiamo aggiungere o sottrarre la stessa quantità da ogni membro. Se sottraiamo 2 da ogni membro, otteniamo

$$\begin{aligned}x + 2 - 2 &= 8 - 2 \\x &= 6\end{aligned}$$

In generale, se $x + a = b$, allora $x = b - a$.

Ora consideriamo l'equazione

$$\frac{x}{5} = 9$$

Se moltiplichiamo ogni membro per 5, rimane la x isolata a sinistra e il 45 a destra:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{5}\right)(5) &= 9 \times 5 \\x &= 45\end{aligned}$$

In tutti i casi, qualunque operazione venga fatta sul lato sinistro dell'uguaglianza deve essere effettuata anche sul destro.

Richiamiamo le seguenti regole per moltiplicare, dividere, sommare e sottrarre frazioni, dove a, b, c sono tre numeri.

	Regola	Esempio
Moltiplicazione	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$
Divisione	$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2/3}{4/5} = \frac{(2)(5)}{(3)(4)} = \frac{10}{12}$
Addizione	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{(2)(5) - (4)(3)}{(3)(5)} = \frac{2}{15}$

ESERCIZI Trovare la x nei seguenti esercizi:

Risposta

$$\begin{array}{ll} 1. \quad a = \frac{1}{1+x} & x = \frac{1-a}{a} \\ 2. \quad 3x-5 = 13 & x = 6 \\ 3. \quad ax-5 = bx+2 & x = \frac{7}{a-b} \\ 4. \quad \frac{5}{2x+6} = \frac{3}{4x+8} & x = -\frac{11}{7} \end{array}$$

Potenze

Quando si moltiplicano fra loro le potenze di una certa grandezza x , si applicano le seguenti regole:

$$x^n x^m = x^{n+m} \quad [B.3]$$

Per esempio, $x^2 x^4 = x^{2+4} = x^6$

Quando si divide la potenza di una data grandezza, si noti che

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad [B.4]$$

Per esempio, $x^8/x^2 = x^{8-2} = x^6$.

Una potenza che è una frazione, quale ad esempio $\frac{1}{3}$, corrisponde a una radice come segue:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad [B.5]$$

Per esempio, $4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.5874$. (Un calcolatore scientifico è utile per tale calcolo).

Infine, ogni grandezza x^n che è elevata alla m -esima potenza è

$$(x^n)^m = x^{nm} \quad [B.6]$$

La Tabella B.1 riassume le regole degli esponenti.

TABELLA B.1 Regole degli esponenti

$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^n x^m = x^{n+m}$
$x^n/x^m = x^{n-m}$
$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
$(x^n)^m = x^{nm}$

ESERCIZI Verificare quanto segue:

1. $3^2 \times 3^3 = 243$
2. $x^5 x^{-8} = x^{-3}$
3. $x^{10}/x^5 = x^{15}$
4. $5^{1/3} = 1.709975$ (Usare il calcolatore)
5. $60^{1/4} = 2.783158$ (Usare il calcolatore)
6. $(x^4)^3 = x^{12}$

Fattorizzazione

Alcune formule utili per fattorizzare un'equazione sono

$$\begin{array}{ll} ax + ay + az = a(x + y + z) & \text{Fattore comune} \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 & \text{Quadrato perfetto} \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) & \text{Differenza di quadrati} \end{array}$$

Equazioni quadratiche

La forma generale di una equazione quadratica è

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad [\text{B.7}]$$

dove x è la grandezza incognita e a , b e c sono fattori numerici chiamati coefficienti dell'equazione. Questa equazione ha due soluzioni, date da

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad [\text{B.8}]$$

Se $b^2 \geq 4ac$, le soluzioni sono reali.

Esempio 1

L'equazione $x^2 + 5x + 4 = 0$ ha le seguenti soluzioni corrispondenti ai due segni del termine di radice quadrata:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

Cioè,

$$x_+ = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \quad x_- = \frac{-5 - 3}{2} = -4$$

dove x_+ rappresenta la soluzione che corrisponde al segno + ed x_- rappresenta la soluzione che corrisponde al segno -.

ESERCIZI Risolvere le seguenti equazioni quadratiche:

Ris.

1. $x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x_+ = 1 \quad x_- = -3$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad x_+ = 2 \quad x_- = \frac{1}{2}$
3. $2x^2 - 4x - 9 = 0 \quad x_+ = 1 + \sqrt{22}/2 \quad x_- = 1 - \sqrt{22}/2$

Equazioni lineari

Un'equazione lineare ha la forma generale

$$y = ax + b \quad [\text{B.9}]$$

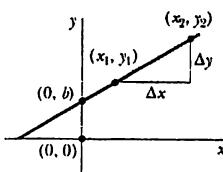


Figura B.1

dove a e b sono costanti. Questa equazione è detta lineare perché il grafico di y in funzione di x è una retta come mostrato in Figura B.1. La costante b , chiamata **intercetta**, rappresenta il valore di y per il quale la retta interseca l'asse delle y . La costante a rappresenta la pendenza della retta ed è anche uguale alla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle x . Se due punti qualunque della retta sono specificati dalle coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , come in Figura B.1, allora la **pendenza** della retta può essere espressa

$$\text{Pendenza} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta \quad [\text{B.10}]$$

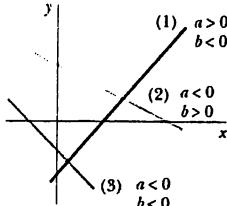


Figura B.2

ESERCIZI

- Tracciare i grafici delle seguenti rette:
(a) $y = 5x + 3$ (b) $y = -2x + 4$ (c) $y = -3x - 6$
- Trovare le pendenze delle rette descritte nell'Esercizio 1.
Risposte (a) 5 (b) -2 (c) -3
- Trovare le pendenze delle rette che passano per le seguenti coppie di punti:
(a) $(0, -4)$ e $(4, 2)$; (b) $(0, 0)$ e $(2, -5)$; (c) $(-5, 2)$ e $(4, -2)$
Risposte (a) $3/2$ (b) $-5/2$ (c) $-4/9$

Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo un'equazione del tipo $3x + 5y = 15$, che ha due incognite, x ed y . Tale equazione non ha una soluzione unica. Infatti, $(x = 0, y = 3)$, $(x = 5, y = 0)$ e $(x = 2, y = 9/5)$ sono tutte soluzioni di questa equazione.

Se un problema ha due incognite, una soluzione unica è possibile solo se si hanno due equazioni indipendenti. In generale, se un problema ha n incognite la sua soluzione richiede n equazioni indipendenti. Per risolvere contemporaneamente due equazioni a due incognite, x ed y , risolviamo una equazione per x in funzione di y e sostituiamo questa espressione nell'altra equazione.

Esempio 2

Risolvere il sistema delle due equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} (1) \quad 5x + y &= -8 \\ (2) \quad 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

Soluzione Da (2), $x = y + 2$. Sostituendo nella (1) si ha

$$\begin{aligned} 5(y + 2) + y &= -8 \\ 6y &= -18 \\ y &= -3 \\ x &= y + 2 = -1 \end{aligned}$$

Soluzione alternativa: moltiplica ogni termine della (1) per il fattore 2 e aggiungi il risultato alla (2):

$$\begin{array}{r} 10x + 2y = -16 \\ 2x - 2y = 4 \\ \hline 12x = -12 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= x - 2 = -3 \end{aligned}$$

Due equazioni lineari possono anche essere risolte usando un metodo grafico. Se le rette che corrispondono alle due equazioni sono rappresentate in un sistema di coordinate cartesiane, l'intersezione delle due linee rappresenta la soluzione. Per esempio, considera le due equazioni

$$x - y = 2$$

$$x - 2y = -1$$

Esse sono rappresentate nella Figura B.3. L'intersezione delle due linee ha le coordinate $x = 5$, $y = 3$. Questa rappresenta la soluzione delle due equazioni. Potresti verificare questa soluzione mediante le tecniche analitiche discusse prima.

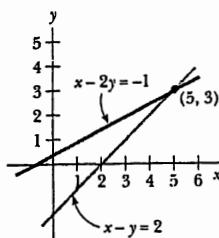


Figura B.3

ESERCIZI Risovi i seguenti sistemi di equazioni a due incognite:

Risposte

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1. $x + y = 8$ | $x = 5, y = 3$ |
| $x - y = 2$ | |
| 2. $98 - T = 10a$ | $T = 65, a = 3.27$ |
| $T - 49 = 5a$ | |
| 3. $6x + 2y = 6$ | $x = 2, y = -3$ |
| $8x - 4y = 28$ | |

Logaritmi

Supponiamo che una grandezza x sia espressa come potenza di una qualche grandezza a :

$$x = a^y \quad [\text{B.11}]$$

Il numero a è chiamato **base**. Il **logaritmo** di x rispetto alla base a è uguale all'esponente y al quale bisogna elevare la base per soddisfare l'espressione $x = a^y$:

$$y = \log_a x \quad [\text{B.12}]$$

Al contrario, l'**antilogaritmo** di y è il numero x :

$$x = \text{antilog}_a y \quad [\text{B.13}]$$

In pratica, le due basi più spesso usate sono la base 10 chiamata **base comune** dei logaritmi e la base $e = 2.718 \dots$, chiamata **base naturale** dei logaritmi. Quando si usano i logaritmi comuni,

$$y = \log_{10} x \quad (\text{oppure } x = 10^y) \quad [\text{B.14}]$$

Quando si usano i logaritmi naturali,

$$y = \ln_e x \quad (\text{oppure } x = e^y) \quad [\text{B.15}]$$

Per esempio, $\log_{10} 52 = 1.716$, cosicché $\text{antilog}_{10} 1.716 = 10^{1.716} = 52$. Analogamente, $\ln_e 52 = 3.951$, così $\text{antiln}_e 3.951 = e^{3.951} = 52$.

In generale, si noti che si può convertire dalla base 10 alla base e mediante l'uguaglianza

$$\ln_e x = (2.302585) \log_{10} x \quad [\text{B.16}]$$

Infine, alcune utili proprietà dei logaritmi sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\log(ab) &= \log a + \log b \\ \log(a/b) &= \log a - \log b \\ \log(a^n) &= n \log a \\ \ln e &= 1 \\ \ln e^a &= a \\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln a\end{aligned}$$

B.3 • GEOMETRIA

La distanza d fra due punti le cui coordinate sono (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad [\text{B.17}]$$

Il radiante come misura di un angolo: la lunghezza dell'arco s di un arco circolare (Fig. B.4) è proporzionale al raggio r per un fissato valore dell'angolo θ (in radianti)

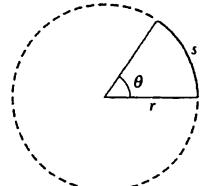


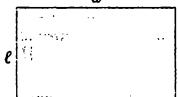
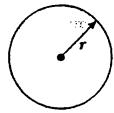
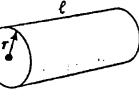
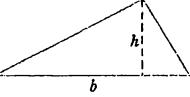
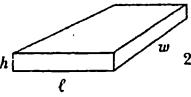
Figura B.4

$$s = r\theta$$

$$\theta = \frac{s}{r} \quad [\text{B.18}]$$

La Tabella B.2 fornisce le aree e i volumi per alcune forme geometriche usate in questo testo:

TABELLA B.2 Utili richiami di geometria

Forma	Area o volume	Forma	Area o volume
	Area = ℓw		Area = $4\pi r^2$ Volume = $\frac{4\pi r^3}{3}$
Rettangolo		Sfera	
	Area = πr^2 (Circonferenza = $2\pi r$)		Superficie laterale = $2\pi r\ell$ Area = $2\pi r^2$ Volume = $\pi r^2\ell$
Cerchio		Cilindro	
	Area = $\frac{1}{2}bh$		Area = $2(\ell h + \ell w + hw)$ Volume = ℓwh
Triangolo		Box regolare	

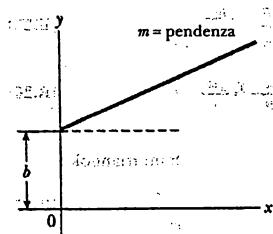


Figura B.5

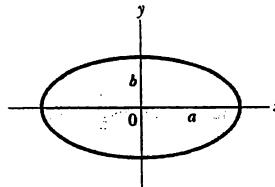


Figura B.6

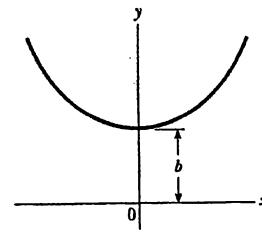


Figura B.7

L'equazione di una linea retta (Fig. B.5) è data da

$$y = mx + b \quad [\text{B.19}]$$

dove b è l'intercetta di y ed m la pendenza della linea.

L'equazione di una circonferenza di raggio R centrata nell'origine è

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad [\text{B.20}]$$

L'equazione di una ellisse con l'origine coincidente col suo centro (Fig. B.6) è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [\text{B.21}]$$

dove a è la lunghezza del semiasse maggiore e b la lunghezza del semiasse minore.

L'equazione di una parabola il cui vertice si trova in $y = b$ (Fig. B.7) è

$$y = ax^2 + b \quad [\text{B.22}]$$

L'equazione di un'iperbole equilatera (Fig. B.8) è

$$xy = \text{costante} \quad [\text{B.23}]$$

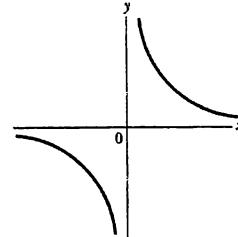
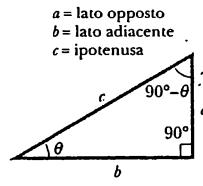


Figura B.8

B.4 • TRIGONOMETRIA

La parte di matematica basata sulle speciali proprietà dei triangoli rettangoli è chiamata trigonometria. Per definizione, un triangolo rettangolo contiene un angolo di 90° . Considera il triangolo rettangolo mostrato in Figura B.9, dove il cateto a è opposto all'angolo θ , il cateto b è adiacente all'angolo θ , e c è l'ipotenusa del triangolo. Le tre funzioni trigonometriche di base definite in un triangolo di questo tipo sono il seno (sen), coseno (cos) e la tangente (tan). In termini dell'angolo θ , queste funzioni sono definite da



$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}} = \frac{a}{c} \quad [\text{B.24}]$$

Figura B.9

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}} = \frac{b}{c} \quad [\text{B.25}]$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{cateto adiacente a } \theta} = \frac{a}{b} \quad [\text{B.26}]$$

Il teorema di Pitagora stabilisce le seguenti relazioni fra i lati di un triangolo:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad [\text{B.27}]$$

Dalle precedenti definizioni e dal teorema di Pitagora, segue che

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Le funzioni cosecante, secante e cotangente sono definite da

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

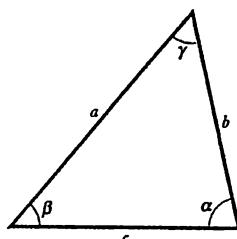
Le relazioni che seguono si ricavano immediatamente dal triangolo rettangolo mostrato in Figura B.9:

$$\begin{cases} \sin \theta = \cos (90^\circ - \theta) \\ \cos \theta = \sin (90^\circ - \theta) \\ \cot \theta = \tan (90^\circ - \theta) \end{cases}$$

Alcune proprietà delle funzioni trigonometriche sono le seguenti:

$$\begin{cases} \sin (-\theta) = -\sin \theta \\ \cos (-\theta) = \cos \theta \\ \tan (-\theta) = -\tan \theta \end{cases}$$

Le seguenti relazioni si applicano ad ogni triangolo come mostrato in Figura B.10:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Legge dei coseni

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

Legge dei seni

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

La Tabella B.3 riporta un certo numero di utili identità trigonometriche.

TABELLA B.3 Alcune identità trigonometriche

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 & \csc^2 \theta &= 1 + \cot^2 \theta \\ \sec^2 \theta &= 1 + \tan^2 \theta & \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 1 - \cos \theta &= 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} & \tan \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \\ \sin A \pm \sin B &= 2 \sin \left[\frac{1}{2}(A \pm B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A \mp B) \right] \\ \cos A \pm \cos B &= 2 \cos \left[\frac{1}{2}(A \pm B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A - B) \right] \\ \cos A - \cos B &= 2 \sin \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \sin \left[\frac{1}{2}(A - B) \right] \end{aligned}$$

Esempio 3

Considera il triangolo rettangolo in Figura B.11, in cui $a = 2$, $b = 5$ e c è incognito. Dal teorema di Pitagora, abbiamo

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$$

$$c = \sqrt{29} = 5.39$$

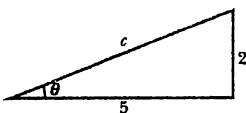


Figura B.11

Per trovare l'angolo θ , nota che

$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{2}{5} = 0.400$$

Da una tavola di funzioni o da un calcolatore, abbiamo

$$\theta = \tan^{-1}(0.400) = 21.8^\circ$$

dove $\tan^{-1}(0.400)$ è la notazione per "l'angolo la cui tangente è 0.400", talvolta scritta come $\arctan(0.400)$.

ESERCIZI

- Nella Figura B.12 trovare (a) il lato opposto a θ , (b) il lato adiacente a ϕ , (c) $\cos \theta$, (d) $\sin \phi$ ed (e) $\tan \phi$.
Risposte (a) 3, (b) 3, (c) $\frac{4}{5}$, (d) $\frac{4}{5}$ (e) $\frac{4}{3}$.
- In un triangolo rettangolo, i due lati che sono perpendicolari l'un l'altro sono lunghi 5 m e 7 m. Qual è la lunghezza del terzo lato del triangolo?
Risposta 8.60 m.
- Un triangolo rettangolo ha un'ipotenusa di lunghezza 3 m, ed uno dei suoi angoli è 30° . Quale è la lunghezza (a) del lato opposto all'angolo di 30° , (b) del lato adiacente all'angolo di 30° ?
Risposte (a) 1.5 m, (b) 2.60 m.

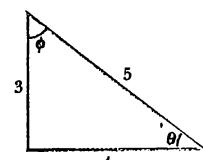


Figura B.12

B.5 • SVILUPPI IN SERIE

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2} x^2 \pm \frac{1}{3} x^3 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad |x| < \pi/2$$

x in radianti

Per $x \ll 1$, si possono usare le seguenti approssimazioni:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$\sin x \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$$

$$\tan x \approx x$$

B.6 • CALCOLO DIFFERENZIALE

Per descrivere fenomeni fisici in varie branche della scienza talvolta è necessario usare gli strumenti base del calcolo, introdotti per la prima volta da Newton. L'uso del calcolo è fondamentale nella trattazione di vari problemi in meccanica newtoniana, elettricità e magnetismo. In questo paragrafo, riportiamo semplicemente alcune proprietà di base che dovrebbero rappresentare un utile quadro riassuntivo per lo studente.

Come prima cosa deve essere specificata una **funzione** che mette in relazione una variabile con un'altra (come ad esempio la posizione in funzione del tempo). Supponiamo che una delle variabili sia chiamata y (la variabile dipendente), l'altra x (la variabile indipendente). Potremmo avere una relazione funzionale quale ad esempio

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Se a, b, c e d hanno valori costanti fissati, allora y può essere calcolata per ogni valore di x . Noi normalmente abbiamo a che fare con funzioni continue, vale a dire quelle per le quali y varia con x senza bruschi salti.

La **derivata** di y rispetto a x è definita come il limite delle pendenze delle corde tracciate fra due punti sulla curva y in funzione di x all'avvicinarsi a zero di Δx . Matematicamente, scriviamo questa definizione come

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad [B.28]$$

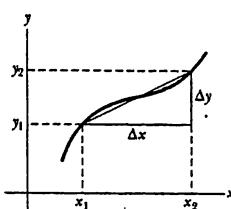


Figura B.13

dove Δy e Δx sono definiti come $\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$ (vedi Fig. B.13).

Un'utile espressione da ricordare quando $y(x) = ax^n$, dove a è una costante ed n un qualunque numero positivo o negativo (intero o frazionario), è

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \quad [\text{B.29}]$$

Se $y(x)$ è una funzione polinomiale o algebrica di x , applichiamo l'Equazione B.29 a ogni termine del polinomio e prendiamo $da/dx = 0$. È importante notare che dy/dx non significa dy diviso per dx , ma è semplicemente una notazione per il processo di limite della derivata come definito dall'Equazione B.28. Negli Esempi da 4 a 7, calcoliamo le derivate di alcune funzioni con comportamento regolare.

Esempio 4

Supponiamo che $y(x)$ (vale a dire, y come funzione di x) sia data da

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

dove a , b e c sono costanti. Allora segue che

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x) &= a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c \\ &= a(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) \\ &\quad + b(x + \Delta x) + c \end{aligned}$$

così

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b\Delta x$$

Sostituendo nell'Equazione B.28 si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3ax^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2] + b \\ \frac{dy}{dx} &= 3ax^2 + b \end{aligned}$$

Esempio 5

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

Soluzione Applicando l'Equazione B.29 a ciascun termine indipendentemente, e ricordando che la derivata di una costante è nulla, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 40x^4 + 12x^2 + 2$$

Proprietà particolari delle derivate

A. Derivata del prodotto di due funzioni. Se una funzione $f(x)$ è data dal prodotto di due funzioni, indicate con $g(x)$ e $h(x)$, allora la derivata di $f(x)$ è definita come

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x) h(x)] = g \frac{dh}{dx} + h \frac{dg}{dx} \quad [\text{B.30}]$$

B. Derivata della somma di due funzioni. Se una funzione y è uguale alla somma di due funzioni, allora la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} \quad [\text{B.31}]$$

C. Derivata di una funzione composta. Se $y = f(x)$ e x è una funzione di qualche altra variabile z , allora dy/dx può essere scritta come il prodotto di due derivate:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} \quad [\text{B.32}]$$

D. Derivata seconda. La derivata seconda di y rispetto a x è definita come la derivata della funzione dy/dx (ossia, la derivata della derivata). Essa è normalmente indicata come

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad [\text{B.33}]$$

Esempio 6

Trovare la derivata prima di $y(x) = x^3/(x+1)^2$ rispetto ad x .

Soluzione Possiamo riscrivere questa funzione come $y(x) = x^3(x+1)^{-2}$ ed applicare direttamente l'Equazione B.30:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^{-2} \frac{d}{dx} (x^3) + x^3 \frac{d}{dx} (x+1)^{-2}$$

$$= (x+1)^{-2} 3x^2 + x^3 (-2)(x+1)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}$$

Esempio 7

Una utile formula che segue dall'Equazione B.30 è la derivata del rapporto di due funzioni. Mostrare che l'espressione è data da

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{h \frac{dg}{dx} - g \frac{dh}{dx}}{h^2}$$

Soluzione Possiamo scrivere il rapporto come gh^{-1} e poi applicare le Equazioni B.29 e B.30:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{g}{h} \right) &= \frac{d}{dx} (gh^{-1}) = g \frac{d}{dx} (h^{-1}) + h^{-1} \frac{d}{dx} (g) \\ &= -gh^{-2} \frac{dh}{dx} + h^{-1} \frac{dg}{dx} \\ &= \frac{h \frac{dg}{dx} - g \frac{dh}{dx}}{h^2} \end{aligned}$$

TABELLA B.4 Derivate di alcune funzioni

$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$	$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$	$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$		

Note: le lettere a ed n rappresentano delle costanti.

Alcune derivate delle funzioni più comunemente usate sono riportate nella Tabella B.4.

B.7 • CALCOLO INTEGRALE

L'integrazione può essere considerata come l'inverso della differenziazione. Come esempio, consideriamo l'espressione

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$$

che rappresentava il risultato della differenziazione della funzione

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

nell'Esempio 4. Possiamo scrivere la prima espressione come $dy = f(x) dx = (3ax^2 + b) dx$ e ottenere $y(x)$ "sommando" su tutti i valori di x . Matematicamente, scriviamo questa operazione inversa come

$$y(x) = \int f(x) dx$$

Per la funzione $f(x)$ riportata sopra

$$y(x) = \int (3ax^2 + b) dx = ax^3 + bx + c$$

dove c è una costante di integrazione. Questo tipo di integrale è chiamato *integrale indefinito* dal momento che il suo valore dipende dalla scelta della costante c .

Un *integrale indefinito*, in generale è definito come

$$I(x) = \int f(x) dx \quad [B.34]$$

dove $f(x)$ è chiamato l'*integrando* ed è $f(x) = \frac{dI(x)}{dx}$.

Per una *qualsiasi funzione continua* $f(x)$, l'integrale può essere descritto come l'area racchiusa dalla curva $f(x)$ e dall'asse delle x fra due dati valori della x , (x_1 e x_2), come mostrato in Figura B.14.

L'area dell'elemento ombreggiato è approssimativamente data da $f_i \Delta x_i$. Se sommiamo tutti questi elementi di area da x_1 a x_2 e prendiamo il limite di questa somma per $\Delta x_i \rightarrow 0$, otteniamo l'area esatta limitata da $f(x)$ ed x , fra i limiti x_1 e x_2 :

$$\text{Area} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad [B.35]$$

Integrali del tipo definito dall'Equazione B.35 sono chiamati *integrali definiti*.

Appendice B

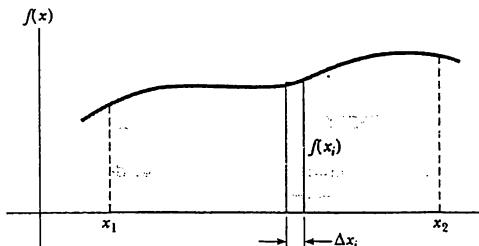


Figura B.14

Uno degli integrali di tipo comune che si ha in situazioni di interesse pratico ha la forma

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \quad [B.36]$$

Questo risultato è ovvio dal momento che la derivazione del secondo membro rispetto ad x fornisce $f(x) = x^n$ direttamente. Se i limiti di integrazione sono noti questo integrale diventa un *integrale definito* e si scrive:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \quad [B.37]$$

Esempi

$$1. \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$2. \int_0^b x^{5/2} dx = \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^b = \frac{2}{5} b^{5/2}$$

$$3. \int_3^5 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8$$

Integrazione per parti

Talvolta risulta utile applicare il metodo di *integrazione per parti* per calcolare alcuni integrali. Il metodo usa le proprietà che

$$\int u dv = uv - \int v du \quad [B.38]$$

dove u e v sono *accuratamente* scelte in modo da ridurre un integrale complicato ad uno più semplice. In molti casi, il metodo va applicato ripetutamente. Si consideri l'esempio

$$I(x) = \int x^2 e^x dx$$

Questo integrale può essere calcolato integrando per parti due volte. La prima volta, se scegliamo $u = x^2$, $v = e^x$, otteniamo

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - 2 \int e^x x dx + c_1$$

Ora, nel secondo termine, scegliamo $u = x$, $v = e^x$, ottenendo così

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2 \int e^x dx + c_1$$

ovvero

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c_2$$

Il differenziale esatto

Un altro metodo da ricordare è l'uso del *differenziale esatto*. Esso consiste nel cercare un cambiamento di variabili tale che il differenziale della funzione sia il differenziale della variabile indipendente che appare nell'integrandi. Per esempio, consideriamo l'integrale

$$I(x) = \int \cos^2 x \sin x dx$$

Esso diventa facile da valutare se riscriviamo il differenziale come $d(\cos x) = -\sin x dx$. L'integrale allora diventa

$$\int \cos^2 x \sin x dx = - \int \cos^2 x d(\cos x)$$

Se ora cambiamo la variabile, ponendo $y = \cos x$, otteniamo

$$\int \cos^2 x \sin x dx = - \int y^2 dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

La Tabella B.5 riporta alcuni utili integrali indefiniti. La Tabella B.6 fornisce l'integrale della probabilità di Gauss e altri integrali definiti. Una lista più completa può essere trovata in vari manuali quali ad esempio *The Handbook of Chemistry and Physics*, edizione CRC.

TABELLA B.5 Alcuni integrali indefiniti (va aggiunta una costante arbitraria a ciascuno di questi integrali)

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	(per $n \neq -1$)	$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$
$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln x$		$\int \frac{dx}{a + be^{ax}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a + be^{ax})$
$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln(a + bx)$		$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
$\int \frac{dx}{(a + bx)^2} = -\frac{1}{b(a + bx)}$		$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$		$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$ ($a^2 - x^2 > 0$)		$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sin ax)$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$ ($x^2 - a^2 > 0$)		$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$
$\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$		$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a} \ln \left(\tan \frac{ax}{2} \right)$
$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{x+a}{x}$		$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} = -\cos^{-1} \frac{x}{a}$ ($a^2 - x^2 > 0$)		$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$		$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$
$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}$		$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$		$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} (\tan ax) - x$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)$		$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a} (\cot ax) - x$
$\int x\sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2}$		$\int \sin^{-1} ax dx = x(\sin^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a}$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]$		$\int \cos^{-1} ax dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a}$
$\int x(\sqrt{x^2 \pm a^2}) dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2}$		$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$		$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
$\int \ln ax dx = (x \ln ax) - x$		

TABELLA B.6 Integrale delle probabilità di Gauss ed integrali correlati

$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	(Integrale della probabilità di Gauss)
$I_1 = \int_0^{\infty} xe^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}$	
$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{dI_0}{d\alpha} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	
$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{dI_1}{d\alpha} = \frac{1}{2\alpha^2}$	
$I_4 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{d^2 I_0}{d\alpha^2} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	
$I_5 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{d^2 I_1}{d\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^3}$	
.	
.	
.	
$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} I_0$	
$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} I_1$	

APPENDICE C

Tavola periodica degli elementi

Gruppo I	Gruppo II	Elementi di transizione									
H 1 1.0080 1s¹											
Li 3 6.94 2s¹	Be 4 9.012 2s²										
Na 11 22.99 3s¹	Mg 12 24.31 3s²										
K 19 39.102 4s¹	Ca 20 40.08 4s²	Sc 21 44.96 3d¹4s²	Ti 22 47.90 3d²4s²	V 23 50.94 3d³4s²	Cr 24 51.996 3d⁵4s¹	Mn 25 54.94 3d⁵4s²	Fe 26 55.85 3d⁶4s²	Co 27 58.93 3d⁷4s²			
Rb 37 85.47 5s¹	Sr 38 87.62 5s²	Y 39 88.906 4d¹5s²	Zr 40 91.22 4d²5s²	Nb 41 92.91 4d³5s¹	Mo 42 95.94 4d⁵5s¹	Tc 43 (99) 4d⁵5s²	Ru 44 101.1 4d⁷5s¹	Rh 45 102.91 4d⁸5s¹			
Cs 55 132.91 6s¹	Ba 56 137.34 6s²	57-71* (178.49) 5d²6s²	Hf 72 (178.49) 5d³6s²	Ta 73 180.95 5d⁴6s²	W 74 183.85 5d⁵6s²	Re 75 186.2 5d⁶6s²	Os 76 190.2 5d⁶6s²	Ir 77 192.2 5d⁷6s²			
Fr 87 (223) 7s¹	Ra 88 (226) 7s²	89-103** (261) 6d²7s²	Rf† 104 (261) 6d²7s²	Ha 105 (262) 6d³7s²	Sg 106 (263) 6d³7s²	Ns 107 (262) 6d⁴7s²	Hs 108 (265) 6d⁵7s²	Mt 109 (266) 6d⁶7s²			

*Serie dei Lantanidi

La 57 138.91 5d¹6s²	Ce 58 140.12 5d¹4f¹6s²	Pr 59 140.91 4f¹6s²	Nd 60 141.21 4f⁴6s²	Pm 61 (147) 4f⁵6s²	Sm 62 150.4 4f⁶6s²
---	---	---	---	--	--

**Serie degli Attinidi

Ac 89 (227) 6d¹7s²	Th 90 (232) 6d²7s²	Pa 91 (231) 5f²6d¹7s²	U 92 (238) 5f³6d¹7s²	Np 93 (239) 5f⁴6d¹7s²	Pu 94 (239) 5f⁶6d⁰7s²
--	--	--	---	--	--

* I valori dei pesi atomici sono valori medi sugli isotopi nelle percentuali in cui esistono in natura. Per un elemento instabile, il numero degli isotopi più stabili è dato in parentesi.

** I nomi degli elementi 104-109 sono controversi. I nomi qui riportati sono quelli raccomandati dagli scopritori.

		Gruppo III	Gruppo IV	Gruppo V	Gruppo VI	Gruppo VII	Gruppo 0	
						H 1	He 2	
						1,0080	1,0026	
						1s ¹	1s ²	
		B 5	C 6	N 7	O 8	F 9	Ne 10	
		10,81	12,011	14,007	15,999	18,998	20,18	
		2p ¹	2p ²	2p ³	2p ⁴	2p ⁵	2p ⁶	
		Al 13	Si 14	P 15	S 16	Cl 17	Ar 18	
		26,98	28,09	30,97	32,06	35,453	39,948	
		3p ¹	3p ²	3p ³	3p ⁴	3p ⁵	3p ⁶	
Ni 28	Cu 29	Zn 30	Ga 31	Ge 32	As 33	Se 34	Br 35	Kr 36
58,71	63,54	65,57	69,72	72,59	74,92	78,96	79,91	83,80
3d ⁸ 4s ²	3d ¹⁰ 4s ²	3d ¹⁰ 4s ²	4p ¹	4p ²	4p ³	4p ⁴	4p ⁵	4p ⁶
Pd 46	Ag 47	Cd 48	In 49	Sn 50	Sb 51	Te 52	I 53	Xe 54
106,4	107,87	112,40	114,82	118,69	121,75	127,60	126,90	131,30
4d ¹⁰	4d ¹⁰ 5s ¹	4d ¹⁰ 5s ²	5p ¹	5p ²	5p ³	5p ⁴	5p ⁵	5p ⁶
Pt 78	Au 79	Hg 80	Tl 81	Pb 82	Bi 83	Po 84	At 85	Rn 86
195,09	196,97	200,59	204,37	207,2	208,98	(210)	(218)	(222)
5d ⁹ 6s ¹	5d ¹⁰ 6s ¹	5d ¹⁰ 6s ²	6p ¹	6p ²	6p ³	6p ⁴	6p ⁵	6p ⁶
110 Scoperto Nov. 1994	111 Scoperto Dec. 1994							

Eu 63	Gd 64	Tb 65	Dy 66	Ho 67	Er 68	Tm 69	Yb 70	Lu 71
152,0	157,25	158,92	162,50	164,93	167,26	168,93	173,0	174,97
4f ⁷ 6s ²	5d ¹ 4f ⁷ 6s ²	5d ¹ 4f ⁸ 6s ²	4f ¹⁰ 6s ²	4f ¹¹ 6s ²	4f ¹² 6s ²	4f ¹³ 6s ²	4f ¹⁴ 6s ²	5d ¹ 4f ¹⁴ 6s ²
Am 95	Cm 96	Bk 97	Cf 98	Es 99	Fm 100	Md 101	No 102	Lr 103
(243)	(245)	(247)	(249)	(253)	(253)	(255)	(255)	(257)
5f ⁷ 6d ⁰ 7s ²	5f ⁷ 6d ¹ 7s ²	5f ⁸ 6d ¹ 7s ²	5f ¹⁰ 6d ⁰ 7s ²	5f ¹¹ 6d ⁰ 7s ²	5f ¹² 6d ⁰ 7s ²	5f ¹³ 6d ⁰ 7s ²	6d ⁰ 7s ²	6d ¹ 7s ²

APPENDICE D

Unità del sistema internazionale (SI)

TABELLA D.1 Unità SI di base

Grandezza di base	Unità di base SI	
	Nome	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Tempo	secondo	s
Corrente elettrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Quantità di una sostanza	mole	mol
Intensità luminosa	candela	cd

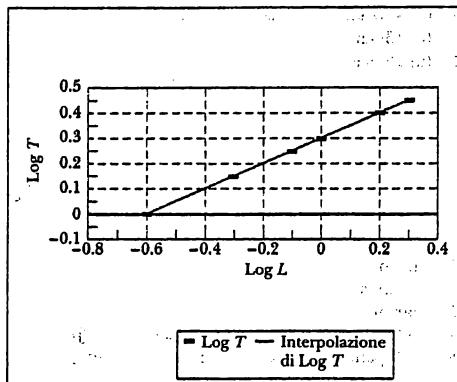
TABELLA D.2 Unità SI derivate

Grandezza	Nome	Simbolo	Espressione in termini delle unità di base	Espressione in termini di altre unità SI
Angolo piano	radiane	rad	m/m	
Frequenza	hertz	Hz	s^{-1}	
Forza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$	J/m
Pressione	pascal	Pa	$kg/m \cdot s^2$	N/m^2
Energia: lavoro	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$	$N \cdot m$
Potenza	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$	J/s
Carica elettrica	coulomb	C	$A \cdot s$	
Potenziale elettrico (f.e.m.)	volt	V	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$	W/A
Capacità	farad	F	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$	C/V
Resistenza elettrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$	V/A
Flusso magnetico	weber	Wb	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$	$V \cdot s$
Intensità del campo magnetico	tesla	T	$kg/A \cdot s^2$	Wb/m^2
Induttanza	henry	H	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$	Wb/A

Risposte ai problemi con numero dispari

Capitolo 1

1. (a) $4.00 \text{ u} = 6.64 \times 10^{-24} \text{ g}$
 (b) $55.9 \text{ u} = 9.28 \times 10^{-23} \text{ g}$
 (c) $207 \text{ u} = 3.44 \times 10^{-22} \text{ g}$
3. 2.86 cm
5. (a) 623 kg/m^3
 (b) Si, perché la sua densità è minore di 1000 kg/m^3
7. $0.579 t \text{ ft}^3/\text{s} + 1.19 \times 10^{-9} t^2 \text{ ft}^3/\text{s}^2$
11. (a) $6.31 \times 10^4 \text{ AU}$ (b) $1.33 \times 10^{11} \text{ AU}$
13. $151 \mu\text{m}$
15. (a) $1.609 \text{ km/h} = 1 \text{ mi/h}$ (b) 88 km/h (c) 16 km/h
17. 1.19×10^{57}
19. ~ 10^2 accordatori
21. (a) 797 (b) 11 (c) 18
23. (a) $346 \text{ m}^2 \pm 13 \text{ m}^2$ (b) $(66.0 \pm 1.3) \text{ m}$
25. $(-2.75, -4.76) \text{ m}$
27. (a) $(2.17 \text{ m}, 1.25 \text{ m})$ e $(-1.90 \text{ m}, 3.29 \text{ m})$
 (b) 4.55 m
29. (a) 10.0 m (b) 15.7 m (c) 0
31. (a) 5.2 m a 60° (b) 3.0 m a 330°
 (c) 3.0 m a 150° (d) 5.2 m a 300°
33. 47.2 unità a 122°
35. 227 passi a 165°
37. (a) $R_x = 49.5$ unità; $R_y = 27.1$ unità
 (b) 56.4 unità a 28.7°
39. 240 m a 237°
41. 196 cm a -14.7°
43. 0.449%
45. $5 \times 10^9 \text{ gal}$
47. $6 \times 10^{20} \text{ kg}$
49. 2.29 km
51. ~ 10^{11} m
- S1. (a) Un grafico di $\log T$ in funzione di $\log L$ per i dati forniti mostra una relazione approssimativamente lineare. Applicando il metodo dei minimi quadrati si ottiene come *best fit* una retta di pendenza 0.503 con una intercetta di 0.302. I punti dati e la retta di *best fit*, $\log T = 0.503 \log L + 0.302$, sono mostrati nella figura in alto nella seconda colonna.



Capitolo 2

1. (a) 2.30 m/s (b) 16.1 m/s (c) 11.5 m/s
3. (a) 5 m/s (b) 1.2 m/s (c) -2.5 m/s
 (d) -3.3 m/s (e) 0
5. (a) $2v_1 v_2 / (v_1 + v_2)$ (b) 0
7. (a) -2.4 m/s (b) -3.2 m/s (c) 4 s
9. (a) 5 m/s (b) -2.5 m/s (c) 0
 (d) 5 m/s
11. $1.34 \times 10^4 \text{ m/s}^2$
13. (a) 2.0 m (b) -3.0 m/s (c) $\sim 2.0 \text{ m/s}^2$
15. (a) 1.3 m/s^2 (b) 2 m/s^2 a 3 s
 (c) a $t = 6 \text{ s}$ e per $t > 10 \text{ s}$ (d) -1.5 m/s^2 a 8 s
17. -16.0 cm/s^2
19. 160 ft
21. (a) 20.0 s (b) No
23. 3.10 m/s
25. (a) -202 m/s^2 (b) 198 m
27. (a) 10.0 m/s verso l'alto (b) 4.68 m/s verso il basso
29. (a) 29.4 m/s (b) 44.1 m
31. (a) 7.82 m (b) 0.782 s
33. (a) 3.00 m/s (b) 6.00 s (c) -0.300 m/s^2
 (d) 2.05 m/s
35. Sì, a 11.4 s e 212 m
37. 0.509 s
39. (a) 5.43 m/s^2 e 3.83 m/s^2
 (b) 10.9 m/s e 11.5 m/s (c) Maggie da 2.62 m
41. $\sim 10^3 \text{ m/s}^2$
43. (a) 2.99 s (b) -15.4 m/s
 (c) 31.3 m/s verso il basso e 34.9 m/s verso il basso
45. (a) 26.4 m (b) 6.88%

APPENDICE D

Unità del sistema internazionale (SI)

TABELLA D.1 Unità SI di base

Grandezza di base	Unità di base SI	
	Nome	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Tempo	secondo	s
Corrente elettrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Quantità di una sostanza	mole	mol
Intensità luminosa	candela	cd

TABELLA D.2 Unità SI derivate

Grandezza	Nome	Simbolo	Espressione in termini delle unità di base	Espressione in termini di altre unità SI
Angolo piano	radiante	rad	m/m	
Frequenza	hertz	Hz	s^{-1}	
Forza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$	J/m
Pressione	pascal	Pa	$kg/m \cdot s^2$	N/m ²
Energia: lavoro	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$	N · m
Potenza	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$	J/s
Carica elettrica	coulomb	C	$A \cdot s$	
Potenziale elettrico (f.e.m.)	volt	V	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$	W/A
Capacità	farad	F	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$	C/V
Resistenza elettrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$	V/A
Flusso magnetico	weber	Wb	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$	V · s
Intensità del campo magnetico	tesla	T	$kg/A \cdot s^2$	Wb/m ²
Induttanza	henry	H	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$	Wb/A

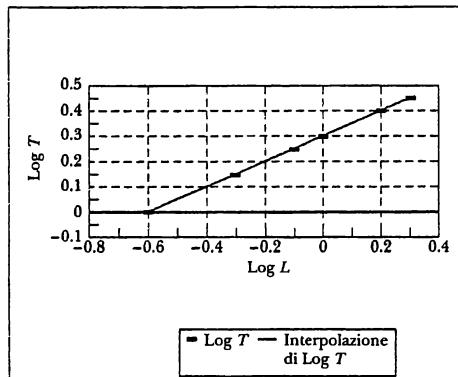
Risposte ai problemi con numero dispari

Capitolo 1

1. (a) $4.00 \text{ u} = 6.64 \times 10^{-24} \text{ g}$
 (b) $55.9 \text{ u} = 9.28 \times 10^{-25} \text{ g}$
 (c) $207 \text{ u} = 3.44 \times 10^{-22} \text{ g}$
3. 2.86 cm
5. (a) 623 kg/m^3
 (b) Si, perché la sua densità è minore di 1000 kg/m^3
7. $0.579 \text{ ft}^3/\text{s} + 1.19 \times 10^{-9} \text{ ft}^2 \text{ ft}^3/\text{s}^2$
11. (a) $6.31 \times 10^4 \text{ AU}$ (b) $1.33 \times 10^{11} \text{ AU}$
13. $151 \mu\text{m}$
15. (a) $1.609 \text{ km/h} = 1 \text{ mi/h}$ (b) 88 km/h (c) 16 km/h
17. 1.19×10^{57}
19. $\sim 10^2$ accordatori
21. (a) 797 (b) 11 (c) 18
23. (a) $346 \text{ m}^2 \pm 13 \text{ m}^2$ (b) $(66.0 \pm 1.3) \text{ m}$
25. $(-2.75, -4.76) \text{ m}$
27. (a) $(2.17 \text{ m}, 1.25 \text{ m})$ e $(-1.90 \text{ m}, 3.29 \text{ m})$
 (b) 4.55 m
29. (a) 10.0 m (b) 15.7 m (c) 0
31. (a) $5.2 \text{ m a } 60^\circ$ (b) $3.0 \text{ m a } 330^\circ$
 (c) $3.0 \text{ m a } 150^\circ$ (d) $5.2 \text{ m a } 300^\circ$
33. $47.2 \text{ unità a } 122^\circ$
35. 227 passi a 165°
37. (a) $R_x = 49.5 \text{ unità}$; $R_y = 27.1 \text{ unità}$
 (b) $56.4 \text{ unità a } 28.7^\circ$
39. $240 \text{ m a } 237^\circ$
41. $196 \text{ cm a } -14.7^\circ$
43. 0.449%
45. $5 \times 10^9 \text{ gal}$
47. $6 \times 10^{20} \text{ kg}$
49. 2.29 km
51. $\sim 10^{11}$
51. (a) Un grafico di $\log T$ in funzione di $\log L$ per i dati forniti mostra una relazione approssimativamente lineare. Applicando il metodo dei minimi quadrati si ottiene come *best fit* una retta di pendenza 0.503 con una intercetta di 0.302. I punti dati e la retta di *best fit*, $\log T = 0.503 \log L + 0.302$, sono mostrati nella figura in alto nella seconda colonna.

Capitolo 2

1. (a) 2.30 m/s (b) 16.1 m/s (c) 11.5 m/s
3. (a) 5 m/s (b) 1.2 m/s (c) -2.5 m/s
 (d) -3.3 m/s (e) 0



5. (a) $2v_1v_2/(v_1 + v_2)$ (b) 0
7. (a) -2.4 m/s (b) -3.2 m/s (c) 4 s
9. (a) 5 m/s (b) -2.5 m/s (c) 0
 (d) 5 m/s
11. $1.34 \times 10^4 \text{ m/s}^2$
13. (a) 2.0 m (b) -3.0 m/s (c) -2.0 m/s^2
15. (a) 1.3 m/s^2 (b) $2 \text{ m/s}^2 \text{ a } 3 \text{ s}$
 (c) a $t = 6 \text{ s}$ e per $t > 10 \text{ s}$ (d) $-1.5 \text{ m/s}^2 \text{ a } 8 \text{ s}$
17. -16.0 cm/s^2
19. 160 ft
21. (a) 20.0 s (b) No
23. 3.10 m/s
25. (a) -202 m/s^2 (b) 198 m
27. (a) 10.0 m/s verso l'alto (b) 4.68 m/s verso il basso
29. (a) 29.4 m/s (b) 44.1 m
31. (a) 7.82 m (b) 0.782 s
33. (a) 3.00 m/s (b) 6.00 s (c) -0.300 m/s^2
 (d) 2.05 m/s
35. Si, a 11.4 s e 212 m
37. 0.509 s
39. (a) 5.43 m/s^2 e 3.83 m/s^2
 (b) 10.9 m/s e 11.5 m/s (c) Maggie da 2.62 m
41. $\sim 10^3 \text{ m/s}^2$
43. (a) 2.99 s (b) -15.4 m/s
 (c) 31.3 m/s verso il basso e 34.9 m/s verso il basso
45. (a) 26.4 m (b) 6.88%

47. (a) 5.46 s (b) 73.0 m (c) 26.7 m/s e 22.6 m/s
 49. (c) $v = 0$ e $a = v_0^2/h$ (d) $v = v_0$ e $a = 0$
 51. $v/\sqrt{3}$
 S3. (a) Approssimativamente per $t = 37.0$ s dopo la partenza della macchina della polizia, ossia 42.0 s dopo che il primo agente ha notato l'infrazione.
 (b) 74.0 m/s (c) 1370 m

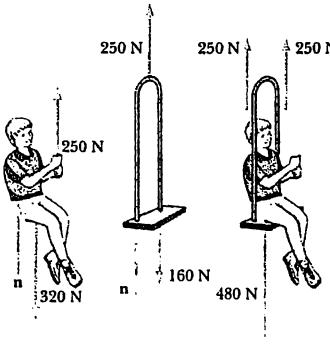
Capitolo 3

1. (a) 4.87 km a 209° da est (b) 23.3 m/s
 (c) 13.5 m/s a 209°
 3. (a) $18.0\hat{i} + (4.00t - 4.90t^2)\hat{j}$
 (b) $18.0\hat{i} + (4.00 - 9.80t)\hat{j}$ (c) $-9.80\hat{j}$ m/s²
 (d) $(54.0\hat{i} - 32.1\hat{j})$ m (e) $(18.0\hat{i} - 25.4\hat{j})$ m/s
 (f) $-9.80\hat{j}$ m/s²
 5. (a) $(2.00\hat{i} + 3.00\hat{j})$ m/s²
 (b) $(3.00t + t^2)\hat{i} + (1.50t^2 - 2.00t)\hat{j}$ m
 7. (a) $a_x = 0.800$ m/s², $a_y = -0.300$ m/s² (b) 339°
 (c) $(360\hat{i} - 72.7\hat{j})$ m, -15.2°
 9. (a) $3.34\hat{i}$ m/s (b) -50.9°
 11. 74.5 m/s
 13. 48.6 m/s
 15. 0.600 m/s²
 17. (a) 2.67 s (b) $29.9\hat{i}$ m/s (c) $(29.9\hat{i} - 26.2\hat{j})$ m/s
 19. (a) Il pallone supera la traversa di 0.889 m;
 (b) mentre discende.
 21. 67.8°
 23. (a) 1.03 s (b) $(8.67\hat{i} + 4.20\hat{j})$ m/s (c) 25.8°
 25. 377 m/s²
 27. (a) 6.00 rev/s (b) 1.52 km/s² (c) 1.28 km/s²
 29. (a) 7.90 km/s (b) 5.07 ks = 1.41 h
 31. 1.48 m/s²
 33. (a) 13.0 m/s² (b) 5.70 m/s (c) 7.50 m/s²
 35. (a) 4.00i m/s (b) $(4.00\hat{i} + 6.00\hat{j})$ m
 37. (a) 41.7 m/s (b) 3.81 s
 (c) $v_x = 34.1$ m/s; $v_y = -13.4$ m/s; 36.6 m/s
 39. 8.94 m/s a -63.4°
 41. 20.0 m
 43. (a) 6.80 km
 (b) L'aereo si troverà a 3.00 km sopra il punto dell'impatto.
 (c) 66.2°
 45. (a) 46.5 m/s (b) -77.6° (c) 6.34 s
 47. (a) 20.0 m/s, 5.00 s (b) $(16.0\hat{i} - 27.1\hat{j})$ m/s
 (c) 6.54 s (d) 24.6 i m
 49. (a) 43.2 m (b) $v_x = 9.66$ m/s; $v_y = -25.6$ m/s
 51. Meno di 265 in e più di 3.48 km
 S1. Vi sono un numero infinito di soluzioni al problema; tuttavia, vi è una limitazione pratica. Possiamo stimare che la massima velocità che il giocatore che effettua il rinvio può imprimerre alla palla sia circa di 20 o 30 m/s. Si usi una velocità entro questo intervallo.
 S3. Vi sono un numero infinito di soluzioni. Per esempio,

se $v_0 = 22.32$ m/s a 45° , allora la palla supera la traversa in 3.01 s. Oppure se $v_0 = 24.60$ m/s a 30° , allora la palla supera la traversa in 2.23 s. Il tempo necessario alla palla per superare la traversa è indifferente, poiché per qualsiasi probabile tempo essa la supererà prima che venga fermato il cronometro.

Capitolo 4

1. (a) $1/3$ (b) 0.750 m/s²
 3. $(6.00\hat{i} + 15.0\hat{j})$ N; 16.2 N
 5. (a) 1.44 m (b) $(50.8\hat{i} + 1.40\hat{j})$ N
 7. (a) $(2.50\hat{i} + 5.00\hat{j})$ N (b) 5.59 N
 9. (a) 3.64×10^{-18} N
 (b) 8.93×10^{-30} N, che è 408 biliardi di volte minore
 11. (a) 534 N verso il basso (b) 54.4 kg
 13. (a) 5.00 m/s² a 36.9° (b) 6.08 m/s² a 25.3°
 15. (a) $\sim 10^{-22}$ m/s² (b) $\sim 10^{-23}$ m
 17. (a) 0.200 m/s² in avanti (b) 10.0 m (c) 2.00 m/s
 19. (a) 15.0 lb verso l'alto (b) 5.00 lb verso l'alto (c) 0
 21. (a) 31.5 N, 37.5 N, 49.0 N (b) 113 N, 56.6 N, 98.0 N
 23. (b) 514 N, 557 N, 325 N
 25. (a) 5.10 kN (b) 3620 kg
 27. 8.66 nord-est
 29. 3.73 m
 31. $a = F/(m_1 + m_2)$; $T = Fm_1/(m_1 + m_2)$
 33. (a) $a_1 = 2a_2$
 (b) $T_1 = m_1 m_2 g / (2m_1 + \frac{1}{2}m_2)$ e
 $T_2 = m_1 m_2 g / (m_1 + \frac{1}{4}m_2)$
 (c) $a_1 = m_2 g / (2m_1 + \frac{1}{2}m_2)$ e
 $a_2 = m_2 g / (4m_1 + m_2)$
 35. (a) 706 N (b) 814 N (c) 706 N (d) 648 N
 37. (a) 3.00 s (b) $(18.0\hat{i} - 9.00\hat{j})$ m (c) 20.1 m
 39. 1.66 MN
 41. (a)



- (b) 0.408 m/s² (c) 83.3 N

43. 1.18 kN
 45. (a) $Mg/2$, $Mg/2$, $Mg/2$, $3Mg/2$, Mg (b) $Mg/2$
 47. $(M + m_1 + m_2)$ ($m_2 g/m_1$)
 49. (a) 30.7° (b) 0.843 N

Capitolo 5

1. $\mu_s = 0.306$ $\mu_d = 0.245$
 3. (a) 256 m (b) 42.7 m
 5. (a) 1.78 m/s^2 (b) 0.368 (c) 9.37 N
 (d) 2.67 m/s
 7. (a) 0.161 (b) 1.01 m/s^2
 9. 37.8 N
 11. (a) 0.931 m/s^2 (b) 6.10 cm
 13. Qualsiasi velocità fino a 8.08 m/s
 15. (a) $9.13 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$ (b) 83.2 nN
 17. (a) attrito statico (b) 0.0850
 19. (a) 68.6 N verso il centro della circonferenza e 784 N verso l'alto
 (b) 0.857 m/s^2
 21. No. Il signore della giungla ha bisogno di una liana che abbia una resistenza minima di 1.38 kN
 23. (a) 6670 N su (b) 20.3 m/s
 25. 3.13 m/s
 27. (a) 32.7 s^{-1} (b) 9.80 m/s^2 verso il basso
 (c) 4.90 m/s^2 verso il basso
 29. (a) 0.0347 s^{-1} (b) 2.50 m/s (c) $a = -cv$
 31. (a) 13.7 m/s verso il basso
 (b) $t(s)$ $x(m)$ $v(\text{m/s})$

0	0	0
0.2	0	-1.96
0.4	-0.392	-3.88
...
1.0	-3.77	-8.71
2.0	-14.4	-12.56
4.0	-41.0	-13.67

 33. (a) 49.5 m/s verso il basso e 4.95 m/s verso il basso
 (b) $t(s)$ $y(m)$ $v(\text{m/s})$

0	1000	0
1.00	995	-9.70
2.00	980	-18.6
10.0	674	-47.7
10.1	671	-16.7
12.0	659	-4.95
145	0	-4.95

35. 2.97 nN
 37. 0.612 m/s^2 verso la Terra
 39. (a) 19.3° (b) 4.21 N
 41. 2.14 rev/min
 43. (b) 732 N verso il basso all'Equatore e 735 N verso il basso ai poli
 45. 20.1°
 47. (b) 2.54 s; 23.6 rev/min
 49. 12.8 N

51. $1.26 \times 10^{32} \text{ kg}$
 53. $\sim 10^{-7} \text{ N}$ verso di te

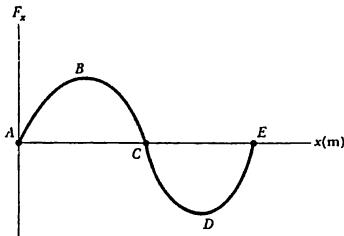
Capitolo 6

1. 15.0 MJ
 3. (a) 32.8 mJ (b) -32.8 mJ
 5. 4.70 kJ
 7. 14.0
 9. (a) 16.0 J (b) 36.9°
 11. (a) 11.3° (b) 156° (c) 82.3°
 13. (a) 7.50 J (b) 15.0 J (c) 7.50 J (d) 30.0 J
 15. 50.0 J
 17. (a) 575 N/m (b) 46.0 J
 19. 12.0 J
 21. (a) 1.20 J (b) 5.00 m/s (c) 6.30 J
 23. (a) 60.0 J (b) 60.0 J
 25. (a) 79.4 N (b) 1.49 kJ (c) $W_f = -1.49 \text{ kJ}$
 27. 2.04 m
 29. (a) -168 J (b) 184 J (c) 500 J
 (d) 148 J (e) 5.64 m/s
 31. 234 J
 33. 875 W
 35. 685 carichi
 37. (a) 20.6 kJ (b) 686 W
 39. 90.0 J
 43. (a) $(3.0 + 24t^2 + 72t^4) \text{ J}$ (b) $12t \text{ m/s}^2$; $48t \text{ N}$
 (c) $(48t + 288t^3) \text{ W}$ (d) 1250 J
 45. 878 kN
 47. (a) 4.12 m (b) 3.35 m
 49. 1.68 m/s
 51. (a) Un grafico di F come variabile indipendente e di L come variabile dipendente mostra che gli ultimi quattro punti tendono a discostarsi di più da una linea retta. Comunque, poiché il primo punto ha la maggiore percentuale di deviazione da una linea retta, probabilmente non siamo giustificati nel rigettare qualsiasi dei punti dati. La pendenza della migliore linea retta che si ottiene con i minimi quadrati è $8.654 \text{ } 545 \text{ mm/N}$. (b) $k = 0.116 \text{ N/mm} = 116 \text{ N/m}$. (c) Il best fit con i minimi quadrati che abbiamo usato è della forma $L = aF + b$; risolvendo si ottiene $F = L/a - b/a = 0.116L - 0.561$. Quindi, per $L = 105 \text{ mm}$, $F = 12.7 \text{ N}$.

Capitolo 7

1. (a) 259 kJ, 0, 259 kJ (b) 0, -259 kJ, 259 kJ
 3. (a) 80.0 J (b) 10.7 J (c) 0
 5. (a) 40.0 J (b) -40.0 J (c) 62.5 J
 7. (a) 22.0 J, 40.0 J (b) Si.
 9. $v = (3gR)^{1/2}$, 0.0980 N verso il basso
 11. (a) 4.43 m/s (b) 5.00 m
 13. 1.84 m
 15. (a) 18.5 km , 51.0 km (b) 10.0 MJ

17. Per $h = 2H/3$ o per $h = R$, per qualsiasi valore più piccolo.
 19. 2.00 m/s, 2.79 m/s, 3.19 m/s
 21. 3.74 m/s
 23. (a) -160 J (b) 73.5 J (c) 28.8 N (d) 0.679
 25. (a) 24.5 m/s (b) Sì (c) 206 m
 (d) Non è realistica
 29. 289 m
 31. (a) 1.84×10^9 kg/m³ (b) 3.27 Mm^3
 (c) -2.08×10^{13} J
 33. (a) -1.67×10^{-14} J (b) Nel centro
 35. (a) + in B, - in D, 0 in A, C ed E
 (b) C stabile; A ed E instabile
 (c)



37. A/r^2
 39. (a) 0.225 J (b) $W_{nc} = -0.363$ J (c) No; la forza normale varia in un modo complicato a causa della pendenza della curva.
 41. 0.328
 43. 0.115
 45. 1.24 m/s
 47. (a) 0.400 m (b) 4.10 m/s (c) Il blocco rimane sulla pista
 49. 914 N/m
 51. 2.06 m/s
 S1. Se la particella ha un'energia iniziale minore di 2471 J, rimarrà intrappolata nella buca di potenziale; per esempio, se $E_T = 1000$ J, essa rimarrà confinata approssimativamente in $-3.15 \text{ m} \leq x \leq 4.58 \text{ m}$.
 S3. $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile; $x = 8.33 \text{ m}$ è un punto di equilibrio instabile.

Capitolo 8

1. $(9.00i - 12.0j)$ kg · m/s; 15.0 kg · m/s
 3. 6.25 cm/s verso ovest
 5. (a) 6.00 m/s (b) 8.40 J
 7. (a) $13.5 \text{ N} \cdot \text{s}$ (b) 9.00 kN (c) 18.0 kN
 9. 260 N normale sulla parete
 11. 87.5 N
 13. 301 m/s
 15. $(4M/m)(g\ell)^{1/2}$
 17. (a) 20.9 m/s est (b) 8.68 kJ in energia termica
 19. (a) 0.284 (b) 115 fJ e 45.4 fJ

21. 91.2 m/s
 23. 0.556 m
 25. (a) 2.88 m/s a 32.3° a nord-est (b) 783 J in energia interna
 27. 2.50 m/s a -60.0°
 29. (a) 1.07 m/s a -29.7° (b) 0.318
 31. (a) $(-9.33i - 8.33j)$ Mm/s (b) 439 fJ
 33. $r_{CM} = (0i + 1.00j)m$
 35. $r_{CM} = (11.7i + 13.3j)\text{ cm}$
 37. 0.00673 nm dal nucleo dell'ossigeno lungo la bisettrice dell'angolo
 39. 0.700 m
 41. (a) 39.0 MN (b) 3.20 m/s^2 su
 43. (a) 442 tonnellate (b) 19.2 tonnellate
 45. 1.39 km/s
 47. (a) -0.667 m/s (b) 0.952 m
 49. 240 s
 51. (a) 100 m/s (b) 374 J
 53. $2v_0$ e 0
 55. $\sim 10^{-29} \text{ m/s a } 10^{-22} \text{ m/s}$
 S1. (a) L'accelerazione massima è 100 m/s^2 . Essa si verifica alla fine del tempo di accensione di 80 s, quando il razzo ha la sua massa minima. La velocità massima che il razzo raggiunge è 3.22 km/s . (b) La velocità raggiunge la metà del suo massimo dopo 55.5 s; se l'accelerazione fosse costante, potrebbe raggiungere la metà della sua velocità massima dopo 40 s (metà del tempo di accensione), ma l'accelerazione è sempre crescente durante il tempo di accensione.
 S3. Gli svantaggi sono dovuti al fatto che la nave deve resistere a una accelerazione doppia e che essa percorre soltanto metà strada quando finisce la spinta. Il vantaggio consiste nell'impiegare metà tempo per raggiungere la sua velocità finale; quindi, essa andrà più lontano in 100 s.

Capitolo 9

5. $0.866c$
 7. 64.9/min; 10.6/min
 9. 1.54 ns
 11. $0.800c$
 13. (a) $2.18 \mu\text{s}$ (b) 649 m
 15. $0.696c$
 17. $0.960c$
 19. 0.0880
 21. (a) 2.73×10^{-24} kg · m/s (b) 1.58×10^{-22} kg · m/s
 (c) 5.64×10^{-22} kg · m/s
 23. (a) $0.850c$ (b) Il risultato è lo stesso
 25. $0.285c$
 27. (a) 939 MeV (b) 3.01 GeV (c) 2.07 GeV
 29. (a) 0.582 MeV (b) 2.45 MeV
 31. $\sim 10^{-15}$
 33. 42.1 g/cm^3
 37. 0.687%
 39. (a) Alcune centinaia di secondi (b) $\sim 10^8$ km

41. (a) 83.3 ns (b) 23.7 m
 45. Si, con 18.8 m d'avanzo
 47. (b) Per v piccola rispetto a c , l'espressione relativistica si accorda con quella classica. Quando v si avvicina a c , l'accelerazione tende a zero, cosicché l'oggetto non potrà mai raggiungere o superare la velocità della luce.
 (c) Calcolo $\int(1 - v^2/c^2)^{-3/2} dv = (qE/m) \int dt$
 per ottenere $v = qEt(m^2c^2 + q^2E^2t^2)^{-1/2}$ e allora
 $\int dx = \int qEt(m^2c^2 + q^2E^2t^2)^{-1/2} dt$ per ottenere
 $x = (c/qE)([m^2c^2 + q^2E^2t^2]^{1/2} - mc)$
- S1. (a)

Z	0.2	0.5	1.0	2.0
v/c	0.180	0.385	0.600	0.800
- (b) Per $Z = 3.8$, $v/c = 0.870$
 S3. Per $Z = 0.2$, $r = 2710$ M(a.l.); $Z = 0.5$, $r = 5770$ M(a.l.);
 $Z = 1.0$, $r = 9000$ M(a.l.); e $Z = 2.0$, $r = 12\ 000$ M(a.l.)
 e $Z = 3.8$, $r = 13\ 800$ M(a.l.)

Capitolo 10

1. (a) 1.99×10^{-7} rad/s (b) 2.65×10^{-6} rad/s
 3. (a) 5.24s (b) 27.4 rad
 5. (a) 822 rad/s^2 (b) 4.21×10^3 rad
 7. 50.0 rev
 9. (a) 25.0 rad/s (b) 39.8 rad/s^2 (c) 0.628 s
 11. (a) 126 rad/s (b) 3.77 m/s (c) 1.26 km/s^2
 (d) 20.1 m
 13. 0.545
 15. (a) $142 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (b) 2.57 kJ
 17. $-3.55 \text{ N} \cdot \text{m}$
 19. (a) -17.0 k (b) 70.5°
 21. No. Il prodotto vettoriale deve essere perpendicolare a ciascuno dei fattori, essendo zero il prodotto scalare con ciascuno di essi.
 23. 2.94 kN su ciascuna ruota posteriore e 4.41 kN su ciascuna ruota anteriore.
 25. 1.46 kN; 1.33 kN (a destra) e 2.58 kN (verso l'alto)
 27. (a) $24.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ (b) 0.0356 rad/s^2 (c) 1.07 m/s^2
 29. $17.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
 31. $60.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
 33. $-m\ell g t \cos\theta \mathbf{k}$
 35. (a) 0.360 rad/s nel verso antiorario (b) 99.9 J
 37. (a) $7.20 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ (b) 9.47 rad/s
 39. $\sim 10^0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 41. (a) 500 J (b) 250 J (c) 750 J
 43. $3g/2L$ e $3g/2$
 45. (a) $2(Rg/3)^{1/2}$ (b) $4(Rg/3)^{1/2}$ (c) $(Rg)^{1/2}$
 47. $1.21 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 49. (a) 118 N e 156 N (b) $1.17 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 51. (a) $(2mgd \sin\theta + kd^2)^{1/2} (I + mR^2)^{-1/2}$
 (b) 1.74 rad/s
 53. (a) $3750 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ (b) 1.88 kJ (c) $3750 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

- (d) 10.0 m/s (e) 7.50 kJ (f) 5.62 kJ

55. $3\omega/8$

S1. La risposta non è unica poiché il momento $\tau = FR$.

Capitolo 11

1. Il Sole: 5.90 mN contro $33.3 \mu\text{N}$
 3. 2/3
 5. 346 Mm
 7. 1.27
 9. 1.90×10^{27} kg
 11. 8.92×10^7 m
 13. 16.6 km/s
 15. 469 MJ
 19. 15.6 km/s
 21. 11.8 km/s
 23. (a) 2.19 Mm/s (b) 2.18 aJ (c) -4.36 aJ
 25. (a) 0.212 nm (b) $9.95 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 (c) $2.11 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ (d) 3.40 eV
 (e) -6.80 eV (f) -3.40 eV
 29. 492 m/s
 31. 0.0572 rad/s
 33. $7.41 \times 10^{-10} \text{ N}$
 35. (a) $m_2(2G/d)^{1/2}(m_1 + m_2)^{-1/2} e$
 $m_1(2G/d)^{1/2}(m_1 + m_2)^{-1/2} e$ ($2G/d)^{1/2}(m_1 + m_2)^{1/2}$
 (b) $1.07 \times 10^{32} \text{ J}$ e $2.67 \times 10^{31} \text{ J}$
 37. (a) 850 MJ (b) 2.71 GJ
 39. (a) $7.34 \times 10^{22} \text{ kg}$ (b) 1.63 km/s
 (c) $1.32 \times 10^{10} \text{ J}$
 41. 119 km
 43. (a) B (b) A (c) B e C
 47. 44.2 km/s
 S5. L'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{GM_t m}{R_t} - \frac{GM_t m}{r}$$

dove G è la costante universale di gravitazione, M_t è la massa della Terra, R_t è il raggio della Terra, m è la massa del satellite, ed r la distanza dal centro della Terra al satellite. L'energia totale, $K+U$, è costante. Vi può essere una piccola variazione nel valore numerico dell'energia totale a causa dei numerosi errori durante l'integrazione delle equazioni differenziali.

Capitolo 12

1. (a) 1.50 Hz, 0.667 s (b) 4.00 m (c) π rad
 (d) 2.83 m
 3. 18.8 m/s , 7.11 km/s^2

5. (b) 18.8 cm/s, 0.333 s (c) 178 cm/s², 0.500 s
 (d) 12.0 cm
7. (a) 575 N/m (b) 46.0 J
9. (a) 40.0 cm/s, 160 cm/s²
 (b) 32.0 cm/s, -96.0 cm/s²
 (c) 0.232 s
11. 0.628 m/s
13. 2.23 m/s
15. (a) 126 N/m (b) 0.178 m
17. (a) 28.0 mJ (b) 1.02 m/s (c) 12.2 mJ
 (d) 15.8 mJ
19. (a) 1.55 m (b) 6.06 s
21. (a) 0.820 m/s (b) 2.57 rad/s² (c) 0.641 N
25. (a) 2.09 s (b) 4.08% maggiore
27. $1.00 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
31. (a) 1.00 s (b) 5.09 cm
33. (a) 38.6 N/m (b) 1.32 kg
35. $f = (2\pi L)^{-1} (gL + k^2/M)^{1/2}$
37. 6.62 cm
39. (a) 3.00 s (b) 14.3 J (c) 25.5°
41. (a) $\frac{1}{2}(M+m/3)v^2$ (b) $2\pi(M+m/3)^{1/2}k^{1/2}$

47. Dopo 42.1 minuti se il buco è privo di attrito S3. Il periodo aumenta quando θ_0 aumenta. Questi periodi sono sempre maggiori di quelli calcolati usando $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$. Per esempio, se $\theta_0 = 45^\circ = \pi/4$ rad, ed $L = 1$ m, allora $T_0 = 2.00709$ s, ma il periodo reale è 2.08 s. (Nota: a causa degli errori numerici nell'integrazione delle equazioni differenziali, l'ampiezza può tendere ad aumentare. Se ciò accade, tenta con intervalli temporali più piccoli).

Capitolo 13

1. $y = 6[(x - 4.5t)^2 + 3]^{-1}$
3. (a) sinistra (b) 5.00 m/s
5. 0.319 m
7. (a) $y = (8.00 \text{ cm})\sin(7.85x + 6.00\pi t)$
 (b) $y = (8.00 \text{ cm})\sin(7.85x + 6.00\pi t - 0.785)$
9. 2.00 m, 2.98 m, 0.576 Hz, 1.72 m/s
11. (a) 2.15 cm (b) 1.95 rad (c) 541 cm/s
 (d) $y = (2.15 \text{ cm})\sin(8.38x + 80\pi t + 1.95)$
13. (a) -73.5° (b) 0.858 cm
15. 80.0 N
17. 631 N
19. 1.64 m/s²
21. 55.1 Hz
23. $(\sqrt{2})P_0$
25. 7.82 m
29. 5.81 m
31. (a) Una diminuzione da 75.7 Hz (b) 0.948 m
33. 26.4 m/s
35. 439 Hz a 441 Hz
37. (a) 39.2 N (b) 0.892 m (c) 83.6 m/s
39. (a) 3.33 m/s (b) -5.48 cm (c) 0.667 m, 5.00 Hz
 (d) 11.0 m/s

41. 6.01 km
45. (a) 55.8 m/s (b) 2500 Hz
47. Il pipistrello lo cattura a 1.69 m/s

Capitolo 14

1. (a) 9.24 m (b) 600 Hz
3. 5.66 cm
5. A 0.0891 m, 0.303 m, 0.518 m, 0.732 m, 0.947 m,
 1.16 m da un altoparlante
9. (a) $x = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ (b) 0.0294 m
11. 150 Hz
13. (a) 163 N (b) 660 Hz
15. 19.976 kHz
17. 5.00 Hz, 10.0 Hz, 15.0 Hz; il quinto modo, 25.0 Hz
19. 0.786 Hz, 1.57 Hz, 2.36 Hz, 3.14 Hz
21. (a) 0.357 m (b) 0.715 m
23. (a) 531 Hz (b) 42.5 mm
25. (a) $L = nv/2f$ dove $n = 1, 2, 3, \dots$
 (b) $L = (2n-1)v/4f$
27. $n/(206 \text{ Hz})$ e $(n+1)/(84.5 \text{ Hz})$ per $n = 1, 2, 3, \dots$
29. 239 s
31. (a) 162 Hz (b) 1.06 m
33. 5.64 battiti/s
35. (a) 0.655 m (b) 11.7°C
37. (a) 34.8 m/s (b) 0.977 m
39. 3.85 m/s allontanandosi dalla stazione oppure
 3.77 m/s verso la stazione
41. 4.85 m
43. 15.7 Hz
45. (a) 59.9 Hz (b) 20.0 cm
47. (a) 1/2 (b) $[n/(n+1)]^2 F$ (c) 9/16
49. 50.0 Hz, 1.70 m
51. (a) $2A \sin(2\pi x/\lambda) \cos(2\pi vt/\lambda)$
 (b) $2A \sin(\pi x/L) \cos(\pi vt/L)$
 (c) $2A \sin(2\pi x/L) \cos(2\pi vt/L)$
 (d) $2A \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi vt/L)$
54. Si possono usare i seguenti passi per modificare il foglio elettronico.
1. SPOSTARE l'intera colonna Y_7 – una colonna a destra
 2. COPIARE la colonna Y_2 – una colonna a destra. CORREGGERE l'intestazione di Y_3 .
 3. COPIARE i dati di ingresso della seconda onda a destra e CORREGGERE le intestazioni per la terza onda.
 4. CORREGGERE la colonna Y_3 per rappresentare i dati della terza onda.
 5. CORREGGERE la colonna Y_T per includere nella somma Y_1 , Y_2 e Y_3 .
56. Tracciare il grafico di $Y(t)$ versus ωt . Potresti partire con tre termini della serie e poi aggiungere ulteriori termini e vedere come varia $Y(t)$.

Capitolo 15

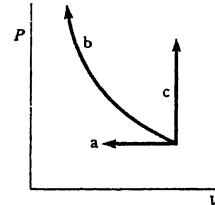
1. 6.24 MPa
3. 5.27×10^{18} kg
5. 1.62 m
7. 7.74×10^{-3} m²
9. 98.6 kPa
11. 10.5 m; no
13. $m/[(\rho_w - \rho_s) h]$
15. (a) 7.00 cm (b) 2.80 kg
17. 1250 kg/m³ e 500 kg/m³
19. 1430 m³
21. (a) 4.24 m/s (b) 17.0 m/s
23. (a) 17.7 m/s (b) 1.73 mm
25. (a) 1 atm + 15.0 MPa (b) 2.98 m/s
(c) 4.45 kPa
27. 68.0 kPa
29. 103 m/s
31. (b) $2\sqrt{h(h_0 - h)}$
33. 0.258 N
35. 1.91 m
37. 8.01 km; si
39. 709 kg/m³
41. 2.00 MN
45. 90.04%
47. 4.43 m/s
51. (b) 1.40 s

Capitolo 16

1. (a) 37.0°C = 310 K (b) -20.6°C = 253 K
3. (a) -274°C (b) 1.27 atm (c) 1.74 atm
5. (a) -320°F (b) 77.3 K
9. Da 40.6°C a -31.6°C
11. 3.27 cm
13. 55.0°C
15. 0.109 cm²
17. (a) 0.176 mm (b) 8.78 μm (c) 0.0930 cm³
19. (a) 3.00 mol (b) 1.80×10^{24} molecole
21. 1.50×10^{29} molecole
23. 471 K
25. (a) 400 kPa (b) 449 kPa
27. Fra 10 kg e 100 kg
29. $(P_0 V M / R)(1/T_1 - 1/T_2)$
31. 6.64×10^{-27} kg
33. (a) 8.76×10^{-21} J per entrambe (b) 1.62 km/s per l'elio e 514 m/s per l'argon
35. 17.6 kPa
37. 1.51×10^{-20} J
39. 575°F
41. 0.522 kg
43. 3.55 cm
45. $\alpha \Delta T$ è molto minore di 1.
47. (a) L'espansione causa una diminuzione di densità.
(b) $5 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$
49. (a) $h = nRT/(mg + P_{\text{atm}}A)$ (b) 0.661 m

Capitolo 17

1. 0.105°C
3. 0.234 J/kg · °C
5. 29.6°C
7. (a) 0.435 cal/g · °C (b) berillio
9. (a) 25.8°C (b) No
11. 59.4°C
13. 0.414 kg
15. (a) 0°C (b) 114 g
17. Piombo liquido a 805°C, se il calore specifico è costante
19. 1.18 MJ
21. (a) $4P_0V_0$ (b) $T = (P_0/nRV_0)V^2$
23. (a) -567 J (b) 167 J
25. (a) 12.0 kJ (b) -12.0 kJ
27. (a) 7.50 kJ (b) 900 K
29. 3.10 kJ; 37.6 kJ
31. (a) 0.0410 m³ (b) -5.48 kJ (c) -5.48 kJ
33. 2.47 L
37. 51.2°C
39. 1.34 kW
41. 47.5 g
43. (a) 16.8 L (b) 0.351 L/s
45. (a) $-P_0V_0/2$ (b) $-P_0V_0 \ln 4$ (c) 0



47. (a) $4P_0V_0$ (b) $4P_0V_0$ (c) 9.08 kJ
49. 5.31 h
51. 466 J
- S1. Variando h fino a $T = 45^\circ\text{C}$ per $t = 180$ s, si trova $h = 0.010\ 855 \text{ cal/s} \cdot \text{cm}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$. Esamina il grafico associato per ciascuna scelta di h .
- S2. (b) $\Delta U = 4669 \text{ J}$

Capitolo 18

1. (a) 6.94% (b) 335 J
3. (a) 10.7 kJ (b) 0.533 s
5. (a) 67.2% (b) 58.8 kW
7. (a) 26.8% (b) 42.3%
9. (a) 741 J (b) 459 J
11. (a) 5.12% (b) 5.27 TJ/h
13. 453 K
17. (a) 24.0 J (b) 144 J
19. -610 J/K
21. 195 J/K

A.40*Risposte ai problemi con numero dispari*

23.	1.02 kJ/K	33.	8.36 MJ/K
25.	716 J/K	35.	32.9 kJ
27.	5.76 J/K; se il gas è perfetto la temperatura rimane costante	37.	(a) 5.00 kW (b) 763 W
29.	(a) 1 (b) 6	39.	77.8 W
31.	(a) Risultato	Numero di estrazioni	41. 5.97×10^4 kg/s 43. 29.3 J
	tutte rosse	1	45. (a) $2nRT_0 \ln 2$ (b) 0.273
	due rosse, una verde	3	
	una rossa, due verdi	3	
	tutte verdi	1	
(b)	Risultato	Numero di estrazioni	
	5R	1	
	4R 1V	5	
	3R 2V	10	
	2R 3V	10	
	1R 4V	5	
	5V	1	

Indice analitico

I numeri di pagina in *corsivo* indicano illustrazioni; i numeri seguiti da "n" indicano note a piè di pagina; i numeri seguiti da "t" indicano tabelle.

- A**
- Acceleratori, 58
Accelerazione, 36-38
 angolare istantanea, 273, 273n, 301
 angolare media, 273
 angolare, e tangenziale, relazione fra, 275-276
 di una carrucola, 295-296, 296
 e velocità angolare, 272-274
 momento meccanico e, 287-288
calcolo della, 37, 37
centripeta, 68, 71, 119-124, 119, 120-121, 123-124, 137-140, 276, 276
 modulo della, 68-69, 68
costante, velocità costante e, 39-42
moto in due dimensioni con, 58-61
moto rotazionale e lineare con,
 equazioni cinematiche per, 274, 274t
moto unidimensionale con,
 equazioni cinematiche per, 41, 41t
del centro di massa, 220
della Luna, 317, 317
di gravità, 61, 61t
 a varie altezze, 315t
 a varie altitudini, 315t
di un disco, forze agenti su, 92, 92
di un oscillatore armonico semplice, 360-361
dimensioni della, 8t
e forza risultante, 90
e massa, 90
instantanea, 36, 38, 47, 58
lineare totale, 276
media, 36, 38, 47, 57-58, 57, 68
modulo della, 68
nel moto armonico semplice, 343, 360
radiale, 70, 71
tangenziale, 70, 70
 e angolare, relazione fra, 276
totale, 70, 70
trasversale, 378
unità di, 91t
Accelerazione-tempo, grafici, 37, 37, 40
Acciaio, buco nello, riscaldamento e, 461
Acqua, ebollizione dell', 494
 punto di ebollizione, 455
 punto di fusione del ghiaccio, 455
- punto triplo, 457
riscaldamento della, 458
temperatura della, e variazioni della densità, 461-462, 462
- Adiabatica, espansione libera, 488, 492, 500
- Aeroplano
 ali dello, flusso d'aria e, 438-439, 439
 giro della morte, 123-124, 124
- Alcool, termometro ad, 455
- Aldrin, Edwin E., Jr., 93
- Algebra, A.13-A.18
- Altezza, misura della, pendolo e, 355
- Altitudine, gravità e, 315
- Altoparlanti, amplificatori collegati in "controfase", 401
due, alimentati dalla stessa sorgente, 402, 402
- Aampiezza
 di onde, 372, 372
 di onde stazionarie, 403
 di pressione, nelle onde sonore, 387
 nel moto armonico semplice, 342
- Antilogaritmo, A.17
- Archimede, 431, 445
- Area, dimensioni della, 8t
- Aria
 in montagna, 488-489
 in una bottiglia, riscaldamento di, 464
- Armonica, serie, 406, 417
- Armoniche, 406-407
 corde tese vibranti e, 408, 408
- Arterie, restringimento, flusso di sangue attraverso, 430, 439
- Ascensore, e contrappesi, 175, 175
- Assorbitore ideale, 498
- Astronave(i), contrazione della lunghezza e, 247-248
 triangolare, 249, 249
 velocità relativa di una, 254, 254, 255
- Atomizzatore,
- Atomo(i)
 in un cubo, 7
 nei solidi, 10
- Attrazione gravitazionale, per le masse, 262
- Attrezzatura per l'esplorazione, sul fondo oceanico, 115-116, 115
- Attrito,
 coefficiente di, 115-116, 115t, 139
 dinamico, 144, 161-162, 161, 161n, 163
 disco da hockey e, 117-118, 117
 situazioni che coinvolgono l', 184-185, 184
forza(e) di, 112-119, 113, 139
 dissipazione di energia meccanica e, 177, 177
 statico, 113-114
 forza massima di, 139
- Atwood, macchina di, 102, 102
- Automobile(i)
 aerodinamica, 128
 momento meccanico e, 287, 287
paraurti delle, forza esercitata sui, 209, 209
- urto(i) di, 210
velocità delle, massima, 123, 123
- Avogadro, numero di, 7, 23
- B**
- Balmer, Johann, 329
- Barometro, 430, 430
- Battimenti, 399, 413-414, 417
 definizione di, 413
 frequenza di, 413
- Benzina, consumo di, 11
- Bernoulli, Daniel, 436, 437
- Big Bang, teoria del, 136
- Bimetallica, striscia, 460, 460
- Biossido di carbonio, gas, 453
- Bohr, Niels, 294, 313, 329
- Bohr, orbita nell'idrogeno, raggio di, 331, 334
- Bohr, principio di corrispondenza di, 333
- Boltzmann, costante di, 463, 470
- Boyle, legge di, 463
- Brahe, Tycho, 313, 316
- Brooks, Garth, 388
- Buchi neri, 264, 326-327, 327
- C**
- Caduta libera, 43, 182, 182
- Calcoli di ordini di grandezza, 10-11
- Calcolo, 7
 differenziale, A.22-A.25
 integrale, A.25-A.29

- C**
- Calore,
 - come trasferimento di energia, 507
 - conduzione del, 494-496, 494-495, 520-521
 - legge della, 495
 - definizione del, 454, 477
 - e primo principio della termodinamica, 476-506
 - equivalente meccanico del, 478
 - flusso di, direzione del, 521
 - latente, 482
 - di condensazione, 482n
 - di fusione, 482, 482n, 483t
 - di vaporizzazione, 482, 483t
 - e cambiamenti di fase, 482-485, 500
 - propagazione del, 494-499, 495
 - irreversibile, 522-523
 - variazioni di entropia e, 523
 - specifico, 478, 500
 - definizione di, 478
 - dell'acqua, e del movimento d'aria in una spiaggia, 480, 480
 - delle sostanze a 25° C, 479-480, 479t
 - misure di, 480-481, 480n
 - unità di, 477-478
 - Caloria (cal), definizione di, 477-478, 478n, 500
 - Calorimetri, 480
 - Calorimetria, 480-481
 - problemi di, 485
 - Cammino, lunghezza di un, 400
 - differenza di, e differenza nell'angolo di fase, 401
 - Campo gravitazionale, 136-137, 137, 263, 263
 - vicino a un buco nero, 326, 327
 - Campo(i)
 - Carnot, ciclo di, 511-513, 512-513, 528
 - variazione di entropia nel, 518
 - Carnot, Sadi, 511, 511
 - Carrucola,
 - accelerazione angolare della, 295-296, 296
 - Cartesiane, sistema di coordinate, 13, 13
 - Carvallopapere (H_p), 164
 - Cavendish, apparato di, 314, 314
 - Cavendish, Henry, 314
 - Celsius, scala, 456-457
 - Celsius, temperatura, 456-457, 469
 - Charles e Gay-Lussac, legge di, 463
 - Chilocaloria, 478
 - Chilogrammo(i), 89
 - definizione di, 4
 - Chilovattora, 165-166
 - Cifre significative, 11-12
 - Cilindro. momento meccanico risultante su un, 281-282, 281
 - Cinematica, 29
 - rotazionale, 274-275
 - Cinematiche, equazioni, 47, 274
 - per il moto rettilineo con accelerazione costante, 41, 42t
 - Cinematiche, equazioni (*continua*)
 - per moti rotazionali e lineari con accelerazione costante, 274, 274t
 - Cinetica, teoria dei gas, 465-469
 - temperatura e, 453-475
 - Circolare, moto, 272, 272, 289, 289
 - non uniforme, 124-126, 124
 - uniforme, 68-70
 - seconda legge di Newton e, 119-124, 119, 139
 - Circonferenza, equazione della, A.19
 - Clausius, Rudolf, 517, 517
 - Coefficiente(i)
 - di attrito, 114-115, 115t, 139
 - di prestazione, 514-515
 - di resistenza, 128
 - Colonne d'aria, onde stazionarie in, 409-412
 - Combustione reazione chimica, 481
 - Condensazione
 - calore latente e, 482n
 - di onde sonore, 387, 387
 - Conducibilità termica, 495, 496t
 - Conduttività termica, 495, 496t
 - Contatto termico, 454-455
 - Continuità, equazione di, linee di corrente e, 435-436
 - Contrappeso, ascensore e, 175, 175
 - Conversione, fattori di, A.1-A.2
 - Convezione, 497, 497
 - Coordinate polari nel piano, 13, 13
 - Coordinate, sistema di, e sistema di riferimento, 12-13
 - Copernico, Nicholas, 313, 316
 - Coppia, 282-283, 283
 - Corda elastica da lancio, 349, 349
 - Corde vocali, vibrazione delle, frequenze fondamentali e, 416
 - Corpi accelerati, e seconda legge di Newton, 100-101
 - Corpo che rotola, energia cinetica totale di un, 299, 299
 - Corpo libero, diagramma di, 98, 98, 100
 - Corpo nero, 498
 - Corpo oscillante, con moto armonico semplice, 344-345
 - Corrispondenza, principio di, Bohr, 333
 - Costante di fase, 376
 - differenza nella, e differenza nella lunghezza del cammino, 401-402
 - nel moto armonico semplice, 342
 - Costante elastica, di una molla, 156
 - Costante universale dei gas, 463, 524
 - Coulomb, forza attrattiva di, 330
 - Cubo
 - atomi in un, 7
 - densità di un, 10
 - D**
 - Densità
 - definizione di, 6, 23
 - del cubo, 10
 - Densità (*continua*)
 - di sostanze comuni, 425t
 - di sostanze varie, 6, 7t
 - Derivata(e), di funzioni, A.22-A.25
 - Deuterio, 262
 - Deutone(i), energia di legame del, 262
 - Dewar vaso, 498, 498
 - Diagrammi del moto, 38-39, 39
 - Diagrammi di energia, e stabilità dell'equilibrio, 191-193, 192 per l'idrogeno, 332-333, 332
 - Diapason,
 - frequenze del, 412, 412, 414
 - Differenziale esatto, A.27
 - Differenziale(i) equazione (i), 127
 - Differenziale, calcolo, A.22-A.25
 - Diga, forza su una, 429-430, 430
 - Dilatazione lineare, coefficienti medi di, 459, 460t, 469
 - Dilatazione superficiale, coefficiente medio di, 460, 469
 - Dilatazione termica, di solidi e liquidi, 459-462, 459-460
 - Dimensionale, analisi, 8-9
 - Dimensioni, come grandezze algebriche, 8
 - Dinamica, problemi di, metodo di Euler per risolvere, 132-133, 132t
 - Dinamica dei fluidi, 434-435
 - Dinamica delle particelle, modelli numerici nella, 130-133
 - Dinamica rotazionale, 294-297
 - Dine-centimetro (dine · cm), 150, 151t
 - Distanza, percorsa da una particella, 15, 15
 - Doppler, Christian Johann, 388
 - Doppler, effetto, 388-391, 388n, 389-390, 392
 - E**
 - Ebolizione, processo di, 493-494
 - Ebolizione, punto di, dell'acqua, 455
 - Einstein, Albert, 235, 238, 241, 244
 - teoria della relatività e, 262-264
 - teoria della relatività ristretta di, 2, 236, 240, 240n
 - Elementi
 - tavola periodica degli, A.30-A.31
 - Elettromagnetismo, 2
 - Elettrone(i)
 - energia a riposo degli, 258
 - quantità di moto dello, 256
 - velocità degli, 235
 - Elettronvolt, 259
 - Elevatore per auto, 428, 429
 - Elio, 262
 - liquido, ebollizione, 485
 - palloni riempiti con, 433
 - serbatoio di, 469
 - Ellisse
 - equazione della, A.19
 - grafico della, 318, 318

- Emissione, spettro(i) di, 328, 328
dell'idrogeno, 329, 329
- Emissività, 498
- Energia(e)
a riposo, 258, 265
associata al moto di onde stazionarie, 404
cinetica, 159-160, 160, 166, 299
dell'oscillatore armonico semplice, 350-351, 351, 361
della Terra e, 322
di un corpo rigido in rotazione, 278
e teorema dell'energia cinetica, 159-164
ed energia potenziale, 173-174
molecolare media, temperatura e, 467-468
relativistica, 257, 265
e non relativistica, confronto, 257-258, 258
rotazionale, 277-279, 277
totale, di molecole, temperatura e, 468
traslazionale, 278
conservazione della, 179-180, 182-183, 185, 188-189, 480-481
energia potenziale e, 173-201
considerazioni, nel moto di pianeti e satelliti, 322-327, 322
dei protoni veloci, 260
dell'oscillatore armonico semplice, 350-353
di ionizzazione, 331
dell'idrogeno, 332-333
di legame, 190
di deuteroni, 262, 916
e lavoro, 149-172
equipartizione della, teorema della, 468
forme di, 149
interna, 477
come funzione di stato, 491, 500
nei sistemi isolati, 490
nelle trasformazioni cicliche, 490, 500
variazione della, 489
lavoro e, confronto, 477
massa come manifestazione di, 259
massa come misura di, 260-261
meccanica, 149
conservazione della, 179-183, 193
definizione di, 179
dissipazione di, e forza d'attrito, 177, 177
forze non conservative e, 177
totale, 179, 193, 322-323, 322
moto dei pianeti e dei satelliti ed, 322-327, 322
nel moto rotatorio, 297-298, 297
potenziale, 174-175, 193
come grandezza scalare, 174
- Energia(e) (*continua*)
di particelle interagenti, 190, 190, 190
di un oscillatore armonico semplice, 350, 351, 361
e conservazione dell'energia, 173-201
ed energia cinetica, 174
elastica, 176, 193
forze conservative e, 177-180
immagazzinata nella molla, 176, 177
punto di riferimento per, 189
variazione della, 178, 191
potenziale, gravitazionale, 174-175, 185-186, 185, 189-191, 189-190, 193-194, 322
relativistica, 256-260
termica, 188
per trasformazione del ghiaccio in vapore, 483-484, 483
totale, 258
cinetica, 302
di un corpo che rotola, 298, 298
definizione di, 258
dell'atomo di idrogeno, 331
dell'Universo, come costante, 188-189, 322, 322
di un oscillatore armonico semplice, 350, 361
meccanica, 179, 193, 322-323, 322
per orbite circolari, 323
per orbite circolari, 334
trasferimento di, 489, 500
trasformazione di, durante il salto con l'asta, 181, 181
trasmessa dalle onde sinusoidali nelle corde, 385-386, 385-386
- Energia-quantità di moto, relazione, 258-259
- Entropia, 517-519, 528
definizione microscopica di, 524
dell'Universo, 520, 529
e disordine, 526-528, 527t, 529
e probabilità, 524
su scala microscopica, 523-525, 525
variazione(i) di, 517, 528-529
aumento della, nelle trasformazioni naturali, 518
definizione di Clausius, 517
nelle trasformazioni irreversibili, 519-523
per il ciclo di Carnot, 518
per la conduzione del calore, 523
per una trasformazione finita, 518
- Equazione(i),
analisi delle, 9
della quantità di moto relativistica, 255-256, 265
di Bernoulli, 437-439, 445
di continuità, linee di corrente e, 435-436
- Equazione(i) (*continua*)
di stato, 462
di un gas perfetto, 463, 470
di trasformazione di Lorentz, 251-255, 251
differenziale, 127
metodo di Eulero, 131-133
lineari, A.15-A.16
sistemi di, risoluzione di, A.16-A.17
prima legge, 489-491
quadratica, 4, 15
- Equazioni quadratiche, A.15
- Equilibrio,
condizioni di, 283
corpi in, 99, 283-284
leggi di Newton del moto e, 98-99
definizione di, 85
del corpo rigido, 282-283, 282-283
indifferente, 193
instabile, 192-193, 192, 193n
prima condizione di, 98
rotazionale, 98n, 283
spostamento massimo dallo, 387
stabile, 192, 192
stabilità dello, grafici dell'energia e, 191-193, 192
statico, 283
termico, 454-455
traslazionale, 283
variazione massima della pressione dallo, 387
- Equivalenza massa-energia, 258, 265-266
- Equivalenza, principio di, 263
- Erg, 150
- Erone, macchina di, 488
- Espansione in serie, A.22
- Espansione, adiabatica, di un gas, 525
dilatazione, superficiale, coefficiente medio di, 460, 469
isoterma, dei gas perfetti, 492-493, 493
libera, 488, 492, 500, 521-522, 522-523
dei gas perfetti, 526
dei gas, 487-488, 488, 492
lineare, coefficiente medio di, 459, 460t, 469
quasi-statica, 486-487, 486, 500
termica, di solidi e liquidi, 459-462, 459
volumica, coefficiente medio di, 460, 460, 470
- Esponenti, regole degli, A.14
- Etere, luminifero, 238
- Eulero, Leonhard, 131
metodo di, 131-133
per risolvere i problemi di dinamica, 131-133, 132t
per risolvere le equazioni differenziali, 131-133, 132t
- F
- Fahrenheit, scala di temperature, 458, 469
- Faraday, Michael, 86, 137

23. 1.02 kJ/K 25. 716 J/K 27. 5.76 J/K ; se il gas è perfetto la temperatura rimane costante

29. (a) 1 (b) 6

31. (a) **Risultato****Numero di estrazioni**

tutte rosse	1
due rosse, una verde	3
una rossa, due verdi	3
tutte verdi	1

33. 8.36 MJ/K 35. 32.9 kJ 37. (a) 5.00 kW (b) 763 W 39. 77.8 W 41. $5.97 \times 10^4 \text{ kg/s}$ 43. 29.3 J 45. (a) $2nRT_0 \ln 2$ (b) 0.273 (b) **Risultato****Numero di estrazioni**

5R	1
4R 1V	5
3R 2V	10
2R 3V	10
1R 4V	5
5V	1

Indice analitico

I numeri di pagina in *corsivo* indicano illustrazioni; i numeri seguiti da "n" indicano note a piè di pagina; i numeri seguiti da "t" indicano tabelle.

A

Acceleratori, 58
Accelerazione, 36-38
 angolare istantanea, 273, 273n, 301
 angolare media, 273
 angolare, e tangenziale, relazione fra, 275-276
 di una carrucola, 295-296, 296
 e velocità angolare, 272-274
 momento meccanico e, 287-288
calcolo della, 37, 37
centripeta, 68, 71, 119-124, 119, 120-121, 123-124, 137-140, 276, 276
 modulo della, 68-69, 68
costante, velocità costante e, 39-42
 moto in due dimensioni con, 58-61
moto rotazionale e lineare con,
 equazioni cinematiche per, 274,
 274t
moto unidimensionale con,
 equazioni cinematiche per, 41, 41t
del centro di massa, 220
della Luna, 317, 317
di gravità, 61, 61n
 a varie altezze, 315t
 a varie altitudini, 315t
di un disco, forze agenti su, 92, 92
di un oscillatore armonico semplice, 360-361
dimensioni della, 8t
e forza risultante, 90
e massa, 90
istantanea, 36, 38, 47, 58
lineare totale, 276
media, 36, 38, 47, 57-58, 57, 68
modulo della, 68
nel moto armonico semplice, 343, 360
radiale, 70, 71
tangenziale, 70, 70
 e angolare, relazione fra, 276
totale, 70, 70
trasversale, 378
unità di, 91t
Accelerazione-tempo, grafici, 37, 37, 40
Acciaio, buco nello, riscaldamento e, 461
Acqua, ebollizione dell', 494
 punto di ebollizione, 455
 punto di fusione del ghiaccio, 455

punto triplo, 457

riscaldamento della, 458
temperatura della, e variazioni della densità, 461-462, 462
Adiabatica, espansione libera, 488, 492, 500
Aeroplano
 ali dello, flusso d'aria e, 438-439, 439
 giro della morte, 123-124, 124
Alcool, termometro ad, 455
Aldrin, Edwin E., Jr., 93
Algebra, A.13-A.18
Altezza, misura della, pendolo e, 355
Altitudine, gravità e, 315
Altoparlanti, amplificatori collegati in "contrafase", 401
 due, alimentati dalla stessa sorgente, 402, 402
Ampiezza
 di onde, 372, 372
 di onde stazionarie, 403
 di pressione, nelle onde sonore, 387
 nel moto armonico semplice, 342
Antilogaritmo, A.17
Archimede, 431, 445
Area, dimensioni della, 8t
Aria
 in montagna, 488-489
 in una bottiglia, riscaldamento di, 464
Armonica, serie, 406, 417
Armoniche, 406-407
 corde tese vibranti e, 408, 408
Arterie, restrinzione, flusso di sangue attraverso, 430, 439
Ascensore, e contrappesi, 175, 175
Assorbitore ideale, 498
Astronave(i), contrazione della lunghezza e, 247-248
 triangolare, 249, 249
 velocità relativa di una, 254, 254, 255
Atomizzatore,
Atomo(i)
 in un cubo, 7
 nei solidi, 10
Attrazione gravitazionale, per le masse, 262
Attrezzatura per l'esplorazione, sul fondo oceanico, 115-116, 115

Attrito,

 coefficiente di, 115-116, 115t, 139
 dinamico, 144, 161-162, 161, 161n, 163
 disco da hockey e, 117-118, 117
 situazioni che coinvolgono l', 184-185, 184t
 forza(e) di, 112-119, 113, 139
 dissipazione di energia meccanica e, 177, 177
 statico, 113-114
 forza massima di, 139
Atwood, macchina di, 102, 102
Automobile(i)
 aerodinamica, 128
 momento meccanico e, 287, 287
paraurti delle, forza esercitata sui, 209, 209
urto(i) di, 210
velocità delle, massima, 123, 123
Avogadro, numero di, 7, 23

B

Balmer, Johann, 329
Barometro, 430, 430
Battimenti, 399, 413-414, 417
 definizione di, 413
 frequenza dei, 413
Benzina, consumo di, 11
Bernoulli, Daniel, 436, 437
Big Bang, teoria del, 136
Bimetallica, striscia, 460, 460
Biossido di carbonio, gas, 453
Bohr, Niels, 294, 313, 329
Bohr, orbita nell'idrogeno, raggio di, 331, 334
Bohr, principio di corrispondenza di, 333
Boltzmann, costante di, 463, 470
Boyle, legge di, 463
Brahe, Tycho, 313, 316
Brooks, Garth, 388
Buchi neri, 264, 326-327, 327

C

Caduta libera, 43, 182, 182
Calcoli di ordini di grandezza, 10-11
Calcolo, 7
 differenziale, A.22-A.25
 integrale, A.25-A.29

- Fase,
 calore latente e, 482-485, 500
 cambiamenti di, 482
 descrizione dei, 484
- Feynman, Richard P., 89, 89n
- Fibrillazione vascolare, 439, 439
- Fisica,
 moderna, 2
 teorie della, 1
- Fluido(i)
 caratteristiche di flusso dei, 434-435
 definizione di, 424-425
 forza di un, su un oggetto immerso, 425, 425
 ideale, attraverso un tubo, 436-437, 436
 proprietà dei, 435
 incompressibile, 435
 irrotazionale, 435
 non viscoso, 435
 oggetto galleggiante in un, forza di galleggiamento e, 431
 oggetto immerso in un, forza di Archimede e, 431-432, 432
 pressione in un, 427-430, 427
 strumento di misura della, 425
 stazionario, 436
- Flusso
 d'aria, linee di flusso, 435
 di linee, ali di aereo e, 438-439, 439
 stazionario, 434
- Forza(e) d'onda, 373
- analisi armonica delle, 415-416, 415
 prodotta da diapason, 415, 415
 prodotta da strumenti musicali, 415, 415
- Formule per la fattorizzazione, A.15
- Forza(e)
 applicata, 158
 lavoro svolto da una, 183-184
 attrattiva di Coulomb, 330
 azione, 94-95, 95
 campo di, 85-86, 86
 centripeta, 121
 come grandezza vettoriale, 15
 complanare, 283
 concetto di, 85-87
 conservativa, 173, 175
 definizione di, 175, 193
 ed energia potenziale, 177-180
 lavoro svolto da una, 178
 costante risultante, 159
 costante, lavoro svolto da una, 150-152, 155, 166
 debole, 135
 di Archimede, 127n, 431, 431, 445
 e alluminio sospeso in aria e in acqua, 433-434, 434
 di attrito, 112-119, 113, 139
 di attrito, fra oggetti e una superficie, 116-117
 di colore, 136, 136
 di contatto, 85-86, 86
- Forza(e) (*continua*)
 di galleggiamento, 127n, 431, 431
 di reazione, 94-95, 95
 di resistenza
 di un oggetto che cade nell'aria, 129, 129
 oscillazioni smorzate e, 357
 di richiamo, 157
 di richiamo lineare, 345
 di una molla, 156-157
 elastica, 156-157
 eletrodebole, 135
 elettromagnetica, 134-135, 134
 equivalenti, 282
 fondamentali della natura, 133-136, 139
 punto di vista corrente, 135-136
 forte, 135
 gravitazionale, 133-134, 134, 174, 174, 313, 313
 e peso, 93-94, 93
 lavoro svolto dalla, 174, 176
 impulsiva, 208
 impulso di una, 207, 225
 intensità di una, 94
 media temporale di una, 207, 207
 misura della, 87, 87
 non conservativa, definizione di, 177, 183
 energia meccanica e, 178
 lavoro svolto da una, 183-188
 normale, 95-96, 96n
 relativistica, 256
 risultante, 85, 88
 accelerazione e, 90
 ritardante, 126, 139
 dipendente dalla velocità, moto con una, 126-130
 proporzionale alla velocità dell'oggetto, 127-128, 127
 ritardante, oscillazioni smorzate e, 357
 di oggetti che cadrano in aria, 129, 129
 su una diga, 429-430, 430
 tangenziale, 286, 286
 terza legge di Newton e, 94-96, 95-96
 unità di, 91, 91t
 variabile, lavoro svolto da una, 154-159, 155, 166
- Fourier, serie di, 415
- Fourier, sintesi di, 416-417
- Fourier, teorema di, 415, 417
- Frazioni, moltiplicazione, divisione e sottrazione di, A.14
- Frequenza(e), 329
 angolare, 375
 del moto armonico semplice, 342, 360
 di battimento, 413
 di oscillazione, del sistema massa-molla, 349
 di risonanza, 359
 di strumenti a corda, 408
 di un diapason, 412, 412, 414
- Frequenza(e) (*continua*)
 di un'onda, 370
 fondamentale, di una corda tesa, 406
 vibrazione di corde vocali e, 416
 naturale, in una corda tesa, 405-409, 406
 di un tubo aperto agli estremi, 409, 410
 di un tubo chiuso a un estremo, 410, 410
 osservata, 389, 389
 per un sistema massa-molla, 347-349, 347-349
 rotazionale, della molecola di ossigeno, 293, 293
 spaziale, 376
- Frigorifero(i), 514-515
- Funzione energia potenziale, 178, 178n
- Funzione spostamento, 387
- Funzione(i) d'onda, 373
 per onde sinusoidali in moto, 376, 391
 per un'onda stazionaria, 403
- Funzioni, derivate delle, A.22-A.25
- Fusione
 calore latente di, 482, 482n, 483t
 processo di, 519
- G
- Galileo Galilei, 2, 43, 43, 87, 237
- Garfield Thomas, galleria idrodinamica, Pennsylvania State University, 438
- Gas, 424
 compressione di una bombola di gas, 464
 di elettroni, 622
 espansione di un, adiabatica, 525
 quasi-statica, 486-487, 486
 espansione libera di un, 488, 488, 492
 e temperatura, 491
 lavoro svolto da un, cammino e, 487, 487
 perfetto, 454, 462
 descrizione macroscopica di un, 462-464, 462
 equazione di stato per un, 463, 470
 espansione isotermica di un, 492-493, 493
 espansione libera di un, 526
 pressione di un, modello molecolare per la, 465-467, 465, 470
 teoria cinetica dei, 465-469
 temperatura e, 453-475.
- Geometria, A.18-A.19
- Ghiaccio, trasformazione in vapore, energia termica per, 483-484, 483
- Giove, immagine presa da *Voyager I*, 320
- Giro della morte, manovra del, 123-124, 124
- Giro-sci, tecnica, 271
- Giunti di dilatazione termica, 459, 459
- Goddard, Robert, 224-225

- G**
- Grandezza(e)
 - algebriche, dimensioni come, 8
 - angolari, e grandezze lineari, relazioni fra, 275-277
 - fisiche, 3-4
 - lineari, e grandezze angolari, relazioni fra, 275-277
 - Gravità,
 - centro di, 219
 - e altitudine, 315
 - scala dei tempi e, 263
 - Gravitazionale
 - costante, 313
 - misura della, 314, 314
 - forza, 133-134, 134, 174, 174
 - e peso, 93-94, 93
 - lente, 264, 264
 - Gravitazione, legge universale di Newton della, 133, 312-317, 317-318, 333
- H**
- Hafele, J.C., 246, 246n
 - Halley, cometa di, 71-72, 71
 - Head, Colonnello James, Accademia Aeronautica, 130n
 - Hoffmann, Jeffrey A., 312
 - Hooke, legge di, 87, 156, 345
 - Hubble Space Telescope, 312
- I**
- Iarda, come unità di misura, 4
 - Icebound*, di Dean Koontz, 323
 - Idrogeno
 - diagramma dei livelli energetici, 332, 332
 - modello di Bohr, 330, 330, 330n, 334
 - orbite di Bohr, raggio delle, 331, 331
 - teoria di Bohr, spettini atomici e, 328-333
 - transizioni elettroniche, 333
 - Impulsiva, approssimazione, 208
 - Impulso,
 - della forza, 207, 225
 - e quantità di moto, 207-209
 - Indefiniti integrali, 155, A.25, A.28
 - Inerzia,
 - della massa, 262
 - momento(i) di, 277, 302
 - di corpi rigidi, 295, 295t
 - per sistemi di particelle, 277-278
 - Inerziale
 - massa, 89-90
 - riferimento, 88, 104, 236
 - leggi della meccanica e, 236-237, 237
 - Infinitesimali variazioni, equazione della
 - prima legge per, 490, 490n
 - Integrale(i),
 - definito, 155, A.25-A.26
 - della probabilità di Gauss, A.29
 - indefinito, 155, A.25, A.28
 - Integrazione per parti, A.26-A.27
- I**
- Interferenza,
 - che produce onde, 380
 - costruttiva, 399, 400
 - di onde, 398, 400-402, 401
 - distruttiva, 399-400, 400, 417
 - nel tempo, 413
 - spaziale, 413
 - temporale, 413
 - Interferometria, olografia mediata nel tempo, 398
 - Interferometro, 239, 239
 - Inversione, punti di, 192
 - Ionizzazione, energia di, 331
 - per l'idrogeno, 331, 332
 - Iperbole equilatera, equazione della, A.19
 - Irreversibili, trasformazioni, 510, 510, 528
 - variazione di entropia e, 519-523
 - Isobatica, trasformazione, 492, 500
 - Isocore, trasformazioni, 492, 500
 - Isoentropica, trasformazione, 518
 - Isolati sistemi, energia interna di, 490
 - Isotermica trasformazione, 492, 500
 - lavoro in una, 493
 - J**
 - Joule (unità), 150
 - Joule, James Prescott, 476, 477
 - K**
 - Kaoni, a riposo, decadimento di, 206, 206
 - Keating, R.E., 246, 246n
 - Kelvin (unità), definizione di, 457
 - Kelvin, scala di temperatura, 456-457, 508
 - Kelvin, temperatura, 456-457, 457, 469
 - Kelvin, Lord, 508
 - Keplero, Giovanni, 2, 313, 316, 316
 - Keplero, leggi di, 316, 333-334
 - seconda, 334
 - e conservazione del momento angolare, 320-321, 320
 - terza, 318-319, 334
 - Kerrigan, Nancy, 291
 - L**
 - Laminare flusso, 434
 - Lampi, 242-243, 243
 - Lavoro,
 - calcolo del, da un grafico, 156, 156
 - come meccanismo di trasferimento, 481
 - definizione di, 150, 150
 - ed energia, 149-172
 - confronto, 478
 - ed energia termica nelle trasformazioni termodinamiche, 486-489
 - espresso come prodotto scalare, 153
 - necessario per allungare una molla, 158-159, 159
 - negativo, 150
 - nel moto rotatorio, 297-298, 297
 - svolto da un gas, percorso e, 487, 487, 500
 - svolto da una forza applicata, 183-184
 - svolto da una forza conservativa, 178
 - Lavoro (continua)
 - svolto da una forza costante, 150-152, 155, 166
 - svolto da una forza non conservativa, 183-188
 - svolto da una forza variabile, 154-159, 155, 166
 - svolto da una molla, 156-158, 157
 - svolto dalla forza gravitazionale, 174, 176
 - totale, di una particella, 155
 - svolto dalla forza della molla, 158
 - unità del, nei sistemi di misura, 150, 151t
 - unità SI del, 150
 - Legge(i),
 - dei gas perfetti, 462-463
 - del moto, 84-111. Vedi anche Newton, leggi del moto.
 - dell'inverso del quadrato, 313, 318, 318n, 321
 - della forza, 84-85
 - della meccanica, sistemi di riferimento inerziali e, 236-237, 237
 - di Boyle, 463
 - di Charles e Gay-Lussac, 463
 - di conduzione del calore, 495
 - di conservazione dell'energia, 179
 - di conservazione della massa-energia, 261
 - di conservazione della quantità di moto, 204-205
 - di gravitazione universale, 136, 313-317, 317-318, 333-334
 - di Hooke, 87, 156
 - di Pascal, 428
 - di Stefan, 498
 - galileiana della somma, per le velocità, 238
 - terza di Newton, 466
 - Legge(i) di Newton del moto, applicazioni delle, 97-104, 98, 112-148
 - corpi in equilibrio e, 98-99
 - forma relativistica delle, 255-260
 - prima, 87-88, 104
 - e riferimenti inerziali, 88
 - seconda, 90-93, 100-101, 207, 207
 - definizione alternativa della, 203
 - moto circolare uniforme e, 119-124, 119, 139
 - nei componenti, 91
 - oggetti accelerati e, 100-101
 - per un sistema di particelle, 220, 226
 - terza, 94-97, 95-96, 104, 466
 - Leggi della forza, 84-85
 - Letto di chiodi, pressione e, 426, 426
 - Linea, retta, equazione della, A.19
 - Lineare moto,
 - con accelerazione costante, 274, 274t
 - Lineare(i), equazioni, A.15-A.16
 - sistema di, risoluzione di, A.16-A.17

- Linee di corrente, 435-436, 435
ed equazione di continuità, 435-436
- Lingotti caldi, raffreddamento di, 482
- Liquidi, dilatazione termica dei, 459-462, 459-460
- Logaritmi, A.17-A.18
- Lorentz, equazioni di trasformazione, 251-255, 251
- Lorentz, Hendrik A., 251
- Lorentz, trasformazione delle velocità, 252-253
inverse, 253
- Lorentz, trasformazioni di, 265
- Luce,
come onda elettromagnetica, 239
spettro visibile della, 328, 328
velocità della, 239, 241
costanza della, 240
- Luminifero, etere, 238
- Luna,
accelerazione della, 317, 317
e Terra, forza fra, 313
velocità di fuga per, 326t
- Lunghezza(e),
come unità di misura, sviluppo della, 4
contrazione delle, 247-248
direzione del moto e, 248, 248
propria, 247
valori approssimati di, 5-6, 5t
- Lunghezza(e) d'onda, 329, 370, 370
dei modi normali, 405-406, 406
- M
Macchina a vapore, 513-514, 514
- Macchina di Carnot, 511-514, 514
- Macchina lanciatrice, rinculo, 205-206, 205
- Macchine termiche, 508, 528
e calore, 508-509
lavoro svolto dalle, 508-509
rappresentazione schematica delle, 508, 509
rendimento delle, 509, 528
termodinamica delle, 490
- Mano destra, regola della, 273-274, 273, 280-281, 280
- Manometro, 430
- Massa(e),
atomica, 6-7, A.4-A.10
attrazione gravitazionale di una, 262
centro di, 217-219, 218-219, 222
accelerazione del, 220
per tre particelle, 219, 219, 226
velocità del, 220, 221, 226
vettore posizione del, 218-219, 226
- collegata a una molla, frequenza di oscillazione, 349
periodo di oscillazione, 348, 348
come manifestazione di energia, 258
come misura di energia, 260-262
come unità di misura, 4-5
- conservazione della, 259
definizione di, 84, 90
della Terra, 315, 315
due, collegate, 289-290, 290
inerzia della, 262
inerziale, 89-90
invariante, 259
misure quantitative di, 89-90
molare, 463
quattro, in rotazione, 279
totale, di un sistema, 218
trascurabile, 97
unità di, 89, 91, 91t
valori approssimati di, 5-6, 5t
- Massa-energia, conservazione della, 261
- Massa-molla, sistema, 163, 163, 349-350, 361
armonico semplice per un, 350, 352
frequenza per un, 347-349, 347-349
periodo per un, 346-348, 347-348
- Massa-molla, urto, 187, 187
- Materia,
stati della, 424
- Maxwell, James Clerk, 2
- Meccanica,
classica, 2, 84
dei fluidi, 424-452
leggi della, sistemi di riferimento
inerziali e, 236-237, 237
newtoniana, 235-236
quantistica, 2
- Mercurio
termometro a, 455-456, 455
- Metro, definizione di, 4
- Michelson, Albert A., 238, 239
- Michelson, interferometro di, 239, 239
- Michelson-Morley, esperimento di, 238-239, 239n
- Microonde, 735
- Modello dell'atomo di Bohr
dell'idrogeno, 330, 330, 330n, 334
spettri atomici e, 328-333
- Moderatore, nucleare, 213
- Molare massa, 463
- Mole, 7, 463
- Molecola(e), radice quadratica
media della velocità delle, 468, 468t, 470
- Molla,
allungamento della, lavoro necessario per, 158-159, 159
costante elastica della, 156
due corpi che urtano con, 214, 214
energia potenziale immagazzinata nella, 176, 177
lavoro svolto da, 156-159, 157
moto di una massa collegata a una, 318, 345-350, 345-346
per misurare la forza, 87, 87
- Moltiplicazione, proprietà distributiva della, 153
- Momento,
angolare, 287-290, 287, 302
conservazione del, 290-292, 290
seconda legge di Keplero e, 320-321, 320
di spin, 294
dell'elettrone, 674
e momento meccanico, 288, 302
quantizzazione del, 293-294
totale, 290
conservazione del, 202-203, 255, 260-262, 261
definizione di, 255
di elettroni, 256
di una particella, variazione del, 207
impulso e, 207-209
istantaneo, angolare, 287
lineare, 203-206, 225
conservazione della, per un sistema
di due particelle, 204, 204
definizione di, 203, 203n
legge di conservazione del, 204-205
relativistico, 255-256
relativistico equazione per il, 255-256, 266
totale, 204-205
di un sistema di particelle, 220-222, 222
- Momento della forza, 279-280, 279, 301-302
definizione di, 279
e accelerazione angolare, 286-287
e momento angolare, 288, 302
e prodotto vettoriale, 279-282
risultante, su un cilindro, 281-282, 281
sui pianeti, 320 .
vettore, 280, 280
- Momento meccanico, braccio del, 279
- Momento(i), di inerzia, 277, 302
del corpo rigido, 295, 295t
per sistemi di particelle, 277-278
- Morley, E.W., 239
- Moto,
accelerato, 42
angolare frequenza del, per il pendolo, 354
armonico semplice, 342-345, 343
accelerazione in un, 343, 360
ampiezza del, 342
costante di fase del, 342
frequenza del, 342, 360
per un sistema massa-molla, 349
periodo di, 342
posizione, in funzione del tempo per un, 342, 342
proprietà di, 344
pulsazione, 342-343
velocità nel, 343, 360
- circolare, 272, 272, 289, 289
non uniforme, 124-126, 126

- Moto (*continua*)**
- uniforme, 68-70
 - seconda legge di Newton e, 119-124, 119, 139
 - del proiettile, 61-68, 62-63, 67
 - di perturbazione, 370
 - di rotolamento, di un corpo rigido, 298-299, 298-299
 - di sistemi di particelle, 220-222
 - di una massa collegata a una molla, 345-350, 345-346
 - direzione del, contrazione delle lunghezze e, 248, 248
 - e forza, 89
 - in due dimensioni, 55-83
 - con accelerazione costante, 58-61
 - in presenza di forze ritardanti
 - dipendenti dalla velocità, 126-130
 - in un piano, 60-61
 - in una dimensione, 29-54
 - leggi del, 84-111. *Vedi anche* Leggi di Newton del moto.
 - ondulatorio, 369-397
 - orbitale, e atomo d'idrogeno, 312-340
 - oscillatorio, 341-368
 - periodico, 341-368
 - periodo del, del pendolo, 353-354, 355
 - per il pendolo fisico, 355
 - planetario, 320, 320
 - e satelliti, considerazioni energetiche, 322-327, 322
 - leggi di Keplero del, 316, 333-334
 - quantità di. *Vedi* Quantità di moto.
 - retilineo con accelerazione costante, equazioni cinematiche per il, 42t
 - confronto con moto rotatorio, 274t
 - rotazionale, 271-311
 - con accelerazione costante, equazioni cinematiche del, 274t
 - lavoro ed energia in un, 297-298, 297
 - teorema dell'energia cinetica per, 298
 - su traiettorie curve, 186, 186
 - unidimensionale, con accelerazione costante, 39-42
 - uniforme, 88, 88
 - Motociclisti, che gareggia a velocità relativistica, 254-255, 254
 - Motore(i), potenza fornita da, 165-166, 165
 - Müller, Karl Alex, 622
 - Muone(i), 245, 245, 247
 - decadimento dei, 245-246, 246
 - Musgrave, F. Story, 312
 - Musicale(i) strumenti, a corda, frequenza degli, 408
 - diagrammi dell'onda sonora prodotta dagli, 415, 415
 - riscaldamento degli, 411
- N**
- Nebulosa del Granchio, 291, 292
- Neutrone(i),**
- rallentamento dei, per mezzo di urti, 213
- Newton (unità), 91
- Newton · metro (N·m), 150, 151t
- Newton, Isaac, 2, 84, 90, 313, 316
- Newtoniana, meccanica, 1-2, 235-236
- Newtoniano, principio di relatività, 236-238
- Nodi, posizione dei, 403
- Notazione scientifica, A.11-A.13
- Numeri
- d'onda, angolare, 375
 - quantico(i), 331, 334
- O**
- Oggetti in caduta libera, 43-46, 44, 47
 - conservazione dell'energia meccanica per gli, 180
 - Onda(e),
 - ampiezza della, 372, 372
 - caratteristiche delle, 370
 - che produce interferenza, 380
 - complessa, 415-416
 - di una campanella vibrante, 398
 - due, di frequenze diverse ma uguali
 - ampiezza, risultante di, 413, 414
 - elettromagnetica, 369
 - frequenza delle, 370
 - impulso di, che viaggia verso sinistra, 373
 - che viaggia verso destra, 372, 373-374, 374-375
 - in moto, 371, 371
 - in corde tese, 379, 380
 - lineare, 379, 391
 - e principio di sovrapposizione, 379
 - longitudinale, 371, 371, 371n, 391
 - meccanica, 369-397
 - moto della, 369-397
 - non lineare, 379
 - piana, 721
 - propagazione della, 370
 - quadra, sintesi armonica della, 416, 416
 - riflessione a trasmissione delle, 383-384, 383-384
 - riflessione di, 383-384, 383-384
 - sinusoidale, 328-329, 329, 374-375, 375, 398
 - in moto in direzioni opposte, 402-403
 - interferenza di, sovrapposizione e, 399-402, 400
 - longitudinale, ampiezza di spostamento, ampiezza di pressione, e posizione per, 387-388, 388
 - nelle corde, 377-378, 377, 377n
 - energia trasmessa dalle, 385-386, 385-386
 - potenza trasmessa dalle, 385-386, 386, 392
 - propagazione, 374-378, 376
- Onda(e) (*continua*)**
- due, risultante di, 399
 - funzione d'onda per, 376, 391
 - velocità delle, 375
 - sonora, compressione della, 387, 387
 - ampiezza di pressione nella, 387
 - interferenza della, 400-401, 401
 - rarificazione della, 387
 - sovraposizione e, 398
 - sovraposizione e interferenza delle, 379-381
 - stazionaria, 398-399, 417
 - ampiezza della, 403
 - configurazione di, in corde tese, 405
 - formazione della, 404-405
 - funzioni d'onda per le, 403
 - in moto in direzioni opposte, 403-404, 404
 - in una colonna d'aria, 409-412
 - moto di una, energia associata a, 404, 404
 - tipi di, 371-372
 - trasversali in moto, unidimensionali, 372-374, 372
 - trasversali, 371, 371, 391
 - nelle corde, velocità delle, 381-383, 381
 - velocità della, 373
 - Orbite,
 - Bohr, raggi delle, nell'idrogeno, 331, 331
 - ellittiche, 318, 318, 320, 320
 - satelliti in, 324-325, 325
 - energia meccanica totale per le, 323
 - Orologio(i)
 - al cesio, 246
 - atomico, 5, 264
 - sincronizzazione di, per descrivere gli eventi, 241, 242
 - Ortogonale, sistema di coordinate, 13, 13
 - Oscillazione(i),
 - di un trampolino, 360
 - forzata, 358-360
 - frequenza delle, della massa-molla, 349
 - periodo della, della massa-molla, 348, 348
 - smorzata, 357-360
 - forza di resistenza e, 357
 - su una superficie orizzontale, 352-353
 - Ossigeno, molecola, 278
 - frequenza rotazionale della, 293, 293
- P**
- Palla vibrante, onde stazionarie, 398
 - Pallone(i)
 - di aria calda, 463
 - riempiti di elio, 433
 - Palloni ad aria calda, 432, 463
 - Parabola, 61-62
 - equazione della, A.19
 - Paradosso dei gemelli, 249-250, 249
 - Parallelogramma, regola del, 17, 17

- Parete adiabatica, 488
 Particella(e),
 due, forze gravitazionali fra, 313, 313
 interagenti, energia potenziale e, 190,
 190, 190n
 lavoro netto fatto da, 155
 massa-energia di, 261
 quantità di moto delle, variazione
 della, 207
 sistemi di, 288-290
 momento d'inerzia di un, 277
 moto di un, 220-222
 quantità di moto totale di un, 220-
 222
 secondo principio di Newton per un,
 220, 226
 sottoposte ad accelerazione costante,
 159-160, 159
 spostamento delle, 15, 15
 tre, centro di massa di, 219, 219, 226
 Pascal (unità), 426
 Pascal, Blaise, 428
 Pascal, legge di, 428, 445
 Pendolo(i),
 conico, 122, 122
 fenomeno di risonanza e, 360
 fisico, 355-356, 355, 361
 guidato, 358
 moto del, moto armonico semplice e,
 352
 periodo del, 247
 semplice, 361
 equazione del moto del, 354
 moto del, 353-356
 periodo del moto del, 353-354, 353
 pulsazione del moto per il, 354
 tempo di esposizione del, 341
 Periodico, moto, 341-368
 Periodo, 69
 del moto, per il pendolo, 353-355, 355
 nel moto armonico semplice, 342, 360
 per un sistema massa-molla, 346-347,
 347-348
 Peso, 93
 determinazione di, su un ascensore,
 103-104, 104
 e forza, 85
 e massa, 90, 104
 forza gravitazionale e, 93-94, 93
 perdita di, calorie e, 478
 Pianeta(i),
 dati sui, 319t
 momento meccanico sui, 320
 moto dei, e moto dei satelliti,
 considerazioni, 322-327, 323
 leggi di Keplero sui, 316, 333-334
 orbita dei, 318, 318, 318n
 velocità di fuga dei, 326t
 Piede · libbre (ft · lb), 150, 151t
 Piede, unità di misura, 4
 Pitagora, teorema di, 244, 466, A.20
 Planck, costante di, 293
 Pompa(e) di calore, 514-516
 disegno schematico delle, 514
 temperatura delle case e, 515-516
 Ponte, Tacoma Narrows, 359, 360
 Posizione vettore, 56
 in funzione del tempo, 59, 60, 63
 Posizione-tempo, grafico, 30, 30, 32, 33,
 34
 Potenza, 164-165
 fornita a un corpo rigido, 297
 fornita dal motore di un ascensore,
 165, 165-166
 istantanea, 164, 166
 media, 164, 166
 trasmessa dalle onde sinusoidali, 385-
 386, 386, 392
 unità SI, 164
 Potenze algebriche, A.14
 Potenze di dieci, 6, 6t, A.12-A.13
 Pressa idraulica, 428, 428
 Pressione, 425-427, 440
 assoluta, 430
 definizione di, 426
 del gas perfetto, modello molecolare
 per la, 465-467, 465, 470
 del sangue, misure della, 428
 letto di chiodi e, 426, 426
 misure di, 430, 430
 nei fluidi, 427-429, 427
 apparecchi per la, 425
 variazione di, con la profondità, 427-
 430, 427
 Pressione, ampiezza, nelle onde sonore,
 387-388
 Prestazione, coefficiente di, 514-515
 Princípio di Archimede, 431
 Probabilità,
 entropia e, 524
 Problemi al calcolatore, A.33-A.35
 Prodotto scalare, 153, 166
 Prodotto vettoriale, 18, 281-282
 di versori, 281
 e momento meccanico, 280, 302
 modulo del, 280
 momento della forza e, 279-282
 proprietà del, 281
 Proiettile,
 altezza massima, 64, 64
 gittata, 64, 64
 traiettoria(e), 61, 61n, 64, 65
 vettore spostamento del, 62-64, 62
 Proiettile, moto del, 61-68, 62-63, 65, 76
 Proprietà associativa della somma, 17, 17
 Proprietà commutativa della somma, 17
 Propulsione, razzo, 222-225, 223
 Protone-protone, collisione, 216
 Puleggia priva di attrito, oggetti collegati
 e, 118, 118
 Pulsazione, 375, 391-392
 del moto armonico semplice, 342-343
 di risonanza, 359
 di un pendolo semplice, 354
 Punto triplo dell'acqua, 457
 Q
 Quantità di moto, 202
 e urti, 202-234
 Quantizzazione, del momento angolare,
 293-294
 R
 Racchette da neve, 426
 Radiante, 272
 Radiazione, 497-498
 elettromagnetica, 481
 Raggio di Bohr, 331, 334
 Rapidità-(Velocità in modulo), 47, 57, 62.
 Vedi anche Velocità.
 alta, resistenza dell'aria ad, 128-129
 angolare, e lineare, relazione fra, 275
 definizione di, 244
 degli elettroni, 235
 delle onde, 373
 di fuga, 325-326, 325
 per i pianeti, Luna, e il Sole, 326t
 di onde sinusoidali che si propagano,
 375
 di onde trasversali nelle corde, 381-383,
 381-382
 di un impulso, 372
 istantanea, 32
 instantanea angolare, 272, 273n, 301
 limite, per oggetti che cadono in fluidi
 viscosi, 127, 127, 139
 lineare, e angolare, relazioni fra, 275
 media angolare, 272
 per oggetti che cadono nell'aria,
 129, 129t, 129
 radice quadratica media, delle
 molecole, 468, 468t, 470
 trasversale, 378
 Rarefazioni, delle onde sonore, 387
 Razzo, nello spazio, 225
 Razzo, propulsione, 222-225, 223
 Reattore nucleare, 261
 Relatività, 235-270
 generale, 262-265
 Newtoniana, principio di, 236-238
 principio di, 240, 243
 ristretta, 236, 240-241, 265
 conseguenze della, 241
 postulati della, 240
 ristretta, teoria della, 2, 236
 Resistenza,
 coefficiente di, 128
 dell'aria, 439
 dell'aria, ad alte velocità, 128-130
 Reversibile, trasformazione, 510-511, 511.
 528
 Richiami matematici, A.11-A.29
 Richiamo, forza di, 156-157
 Riferimento assoluto, sistema di, 239-240
 Rígido(i), corpo,
 equilibrio del, 282-286, 282-283

- Rigido(i), corpo (*continua*)**
 momenti d'inerzia dei, 295, 295t
 moto rotatorio di un, 298-299, 298, 290
 potenza fornita ai, 297
 rotante, energia cinetica di un, 278
 rotazione di un, 294-301
- Risonanza**, 359
 del pendolo, 359
 in un tubo, 412
 strutturale, 359
- Rotazione** di una palla, 125-126, 125
- Rotazione** di una ruota, 275
- Rotazione** di uno sgabello, 299-300, 300
- Rotazione**, di un corpo rigido, 294-301
- Rotazione**, di una sbarretta, 296-297, 296
- Rotolamento** di una sfera, su superficie orizzontale priva d'attrito, 292, 292
- Ruota** in movimento, 275
- Rydberg**, costante di, 329
- S**
- Satellite**, Terra, 319, 319
 geosincrono, 323
 in orbita circolare, 323-324, 324
 in orbita ellittica, 324-325, 325
 moto di un, 320, 320
 e moto planetario, considerazioni energetiche nel, 322-327, 322
- Saturno**, immagine ripresa da *Voyager 1*, 320
- Sbarra**, oscillazioni di una, 356
- Sbarretta**, carica, oscillante, 356, 356
- Scala**, inclinata, 285-286, 285
- Scalare(i)**, 14-15, 23
 vettore moltiplicato per, 18
- Scalare**, prodotto(i), 153-154
 di due vettori, 18
 lavoro espresso da un, 153
- Schwarzschild**, raggio di, 327, 327
- Secondo**, definizione di, 5
- Seiches**, 410
- Sewer**, tubo di, presa, 439-440, 439
- Sfera**,
 che cade nell'olio, 128
 che rotola su un piano inclinato, 300-301
- Sfiatatoio**, per i gas di scarico, 439-440, 439
- SI** (unità), 4, A.32
 di forza, 91
 di lavoro, 150
 di massa, 4, 89
 di potenza, 164
 di pressione, 426
 di temperatura, 457
- SI sistema**, 4-6
- Silo**, 429
- Simultaneità**,
 dilatazione del tempo e, 243-246, 244-252
 e relatività del tempo, 242-243, 243
- Sirena**, di una ambulanza veloce, 391
- Sistema britannico degli ingegneri**, 6
- Sistema convenzionale**, 6
- Sistema gaussiano**, 6
- Sistema Terra-Luna**, 313, 317, 317
- Sistema(i)**
 assoluto, 238-239
 di riferimento inerziale, 236-237, 237
- Sole**,
 velocità di fuga per il, 326t
- Solido(i)**, 424
 dilatazione termica dei, 459-462, 459-460
 numero di atomi nei, 10
- Sonore**, onde, 387, 387
- Sopraelevata**, strada, 121
- Sovrapposizione**, e interferenza di onde sinusoidali, 399-402, 400
- Sovrapposizione**, principio di, 379, 379, 380, 391, 398
 onde lineari e, 379
- Spazio-tempo**, curvatura dello, 264
- Spettro(i)**,
 atomico, teoria di Bohr dell'idrogeno e, 328-333
 di assorbimento, 329
 per l'idrogeno, 328
 di emissione, 328, 328
 dell'idrogeno, 329, 329
- Spin**, 294
- Spinta dinamica**, 439
- Spinta**, nella propulsione dei razzi, 224
- Spostamento**
 angolare, 272, 272
 di una particella, 15-16, 15
 risultante, di vettori, 22
- Stanza**, superficie di una, misura della, 12
- Stato eccitato**, primo, 331
- Stato fondamentale**, 331
- Stefan**, legge di, 498
- Stella** di neutroni, 291, 292
- Stelle**, a neutroni, 291, 292
- Strategia** per risolvere i problemi, 13-14
 conservazione dell'energia, 185
 corpi in equilibrio, 283-284
 moto accelerato, 42
 problemi di calorimetria, 485
 somma di vettori, 21
 urti, 215-216
- Subacqueo**, 424
- Superfici lisce**, 97
 blocchi tirati su, 162, 162
 masse accelerate su, 101, 101, 102-103
- Supernova**, 292, 326
- Swinson**, Derek, 271
- T**
- Tacoma Narrows**, ponte di, 359, 360
- Tavola periodica degli elementi**, A.30-A.31
- Temperatura**,
 assoluta, 456-457, 457, 469
 aumento della, corpi sottoposti a, 469
- Temperatura (*continua*)**
 e principio zero della termodinamica, 454-455, 469
 e teoria cinetica dei gas, 453-475
 ed energia cinetica media molecolare, 467-468, 470
 energia cinetica totale delle molecole e, 468
 espansione libera dei gas e, 491
 interpretazione molecolare della, 467
 unità SI, 457
 variazione(i) in, entropia e, 526-527
 meccanismo di trasferimento della, 481
- Temperatura, gradiente**, 495
- Temperatura, scale della**, termometri e, 455-458
- Tempo**,
 dilatazione del, 245, 265
 simultaneità e, 243-246, 244, 252
 freccia del, 517
 proprio, 245
 relatività del, simultaneità e, 242-243, 243
 standard del, 5
 valori approssimati del, 5-6, 6t
 velocità in funzione del, 40, 40
 vettore posizione in funzione del, 59, 60, 63
 vettore velocità in funzione del, 59, 60
- Teorema degli assi paralleli**, 299
- Teorema dell'energia cinetica**, 149, 159, 166
 energia cinetica e, 159-164
- Teorema dell'impulso**, 207, 207, 208, 225
 gas perfetti e, 465
- Teorema di Bernoulli**, 425, 436, 438-439
- Teoria della Grande Unificazione (GUT)**, 136
- Termodinamica**, 453
 delle macchine termiche, 490
 primo principio della, 489-491, 500, 507
 applicazioni del, 492-494
 calore e, 476-506
 equazione del, 489-490
 per variazione infinitesima, 490, 490n
 principio zero della, temperatura e, 454-455, 469
 secondo principio della, 509, 509n, 518, 525
 definizione alternativa del, 513, 516-517, 520-521, 527-528
 enunciato con l'entropia, 520-521
- Termogramma**, 476
- Termometro a gas a volume costante**, 456, 456
- Termometro(i)**, 455-457, 455
 a gas, a volume costante, 456, 456, 456, 458
 a mercurio, 455-456, 455
 ad alcool, 455

- T**
- Termometro(i) (*continua*)**
 - discrepanze fra, 455-456
 - e scale di temperatura, 455-458
 - Termos, 498, 498**
 - Terra**
 - campo gravitazionale della, 136-137, 137
 - energia cinetica della, 322n
 - forza di gravità della, 93, 93t
 - modello geocentrico della, 316
 - orbita della, e Sole, 321
 - satelliti attorno alla, 319, 319
 - Tolomeo, Claudio, 316
 - Tornado, 441-442
 - Torricelli, Evangelista, 430
 - Traiettoria ellittica, 71, 71
 - Traiettoria(e), del proiettile, 61, 61n, 65, 65
 - Trasformazione adiabatica
 - definizione di, 492, 500
 - reversibile, 518
 - Trasformazione, di Lorentz, 265
 - inverse, 251
 - equazioni di Lorentz delle, 251-255, 251
 - galileiana, 251-252, 253
 - delle coordinate, 237-238, 237
 - delle velocità, 238
 - Trasmissione elettrica, 481
 - Trave, orizzontale, equilibrio su una, 284-285, 284
 - Triangolo, metodo della somma col, 16-17
 - Trigonometria, A.19-A.21
 - Trigonometriche, identità, A.21
 - Tromba naturale, armoniche di una, 411
 - Tubo,
 - aperto agli estremi, frequenze naturali di un, 409, 410
 - chiuso a un estremo, frequenze naturali di un, 410, 410
 - d'acqua, per riempire un secchio, 436
 - di flusso, 436
 - risonanza di un, 412
 - Tuono, suono prodotto dal, 888
 - Turbolento, flusso, 434, 435
- U**
- Ultravioletta, luce, 735**
 - Unità termica britannica (Btu), definizione di, 478**
- U**
- Unità, conversione di, 9-10**
 - Universo,**
 - energia totale dello, 188, 322, 322
 - entropia dello, 520, 529
 - Uragano Fran, 288**
 - Urto(i), 209-210, 209, 216**
 - ad un incrocio, 216-217, 217
 - anelastico, 211, 211, 226
 - in una dimensione, 211-214
 - bidimensionale, 214-215, 215
 - di automobili, 210
 - elastico, 211-213, 212, 226
 - in una dimensione, 211-214
 - fra due corpi, con molla, 214, 214
 - moderazione di neutroni per, 213
 - protone-protone, 216
 - quantità di moto e, 202-234
 - radente, 215, 215
 - totalmente anelastico, 211, 211, 226
- V**
- Valanghe, perturbazione di onde e, 370**
 - Vaporizzazione, calore latente di, 482, 483t**
 - Velocità di fase, 373**
 - Velocità di fuga, 325-326, 325**
 - per i pianeti, Luna, e Sole, 326t
 - Velocità vettoriale, in funzione del tempo, 59, 60**
 - Velocità-tempo, grafici, 35-36, 36-37, 39**
 - angolare, e accelerazione angolare, 272-274
 - del centro di massa, 220, 221, 226
 - dell'onda, 373
 - di fase, 373
 - dimensioni della, 8t
 - in funzione del tempo, 39, 39
 - in funzione della posizione, per l'oscillatore, 351
 - armonico semplice, 39, 39
 - istantanea, 31-35, 34, 47, 56-57, 57
 - legge della somma di Galileo, 238
 - media, 30-31, 33-34, 34, 47, 56, 57
 - nel moto armonico semplice, 343, 360
 - per l'oscillatore armonico semplice, 360-361
 - processi di limitazione della, 34-35, 34**
 - relativa, 254, 254**
 - tangenziale, 275, 275**
 - trasformazione galileiana delle, 253**
 - di Lorentz, 252-253, 265
- W**
- Watt (unità), 164**
 - Watt, James, 164**
- Z**
- Zero assoluto, 457**

Alcune costanti fondamentali^a

Grandezza	Simbolo	Valore ^b
Carica elementare	e	$1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ C}$
Costante dei gas	R	$8.314\,510(70) \text{ J/K} \cdot \text{mol}$
Costante gravitazionale	G	$6.672\,59(85) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Costante di Boltzmann	$k_B = R/N_A$	$1.380\,658(12) \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Costante dielettrica del vuoto	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \text{ (esatto)}$
Costante di Planck	h	$6.626\,075(40) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Costante di Rydberg	R_H	$1.054\,572\,66(63) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Elettronvolt	eV	$1.097\,373\,153\,4(13) \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
Lunghezza d'onda Compton	$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$	$1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ J}$
Magnetone di Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9.274\,015\,4(31) \times 10^{-24} \text{ J/T}$
Magnetone nucleare	$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5.050\,786\,6(17) \times 10^{-27} \text{ J/T}$
Massa del deutone	m_d	$3.343\,586\,0(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa dell'elettrone	m_e	$2.013\,553\,214(24) \text{ u}$
Massa del neutrone	m_n	$9.109\,389\,7(54) \times 10^{-21} \text{ kg}$
Massa del protone	m_p	$5.485\,799\,03(13) \times 10^{-1} \text{ u}$
Número di Avogadro	N_A	$0.510\,999\,06(15) \text{ MeV/c}^2$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$1.674\,928\,6(10) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Quanto di flusso magnetico	$\Phi_0 = \frac{h}{2e}$	$1.008\,664\,904(14) \text{ u}$
Raggio di Bohr	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k}$	$939.565\,63(28) \text{ MeV/c}^2$
Rapporto tensione-frequenza Josephson	$2e/h$	$1.672\,623(10) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Resistenza Hall quantizzata	h/e^2	$1.007\,276\,470(12) \text{ u}$
Stato fondamentale dell'idrogeno	$E_0 = \frac{m_e e^4 k_e^2}{2\hbar^2} = -\frac{e^2 k_e}{2a_0}$	$938.272\,3(28) \text{ MeV/c}^2$
Unità di massa atomica	u	$6.022\,136\,7(36) \times 10^{23} \text{ (mol)}^{-1}$
Velocità della luce nel vuoto	c	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \text{ (esatto)}$

^a Queste costanti sono i valori raccomandati nel 1986 da CODATA, ottenuti applicando il metodo dei minimi quadrati a diverse misure. Per un elenco più completo, veri Cohen, E. Richard, and Barry N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **59**: 1121, 1987.

^b I numeri in parentesi per i valori riportati rappresentano le incertezze nelle ultime due cifre.

