Matematica discreta - a.a. 2021-22 - I parziale

Ogni risposta deve essere giustificata.

Any answer must be justified.

1. (3 punti) Determinare il vettore proiezione del vettore $w = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ sul piano contenente i vettori $u = -\vec{i}$ e $v = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Determinare il volume del parallelepipedo di spigoli u, v e w.

   Let determine the projection vector of the vector $w = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ on the plane containing the vectors $u = -\vec{i}$ and $v = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Determine the volume of the parallelepiped of edges u, v and w.

2. (4 punti) Dati il sottoinsieme $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y = 0\}$ e il sottospazio $W = [(1, 0, 1)]$, mostrare che

   - U è sottospazio di $\mathbb{R}^3$
   - determinare $U + W$
   - mostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ (usando la relazione di Grassmann)

   Given the subset $U = \{(x, y, z)\ in \mathbb{R}^3 : x - 3y = 0\}$ and the subspace $W = [(1, 0, 1)]$, let prove that

   - U is a subspace of $\mathbb{R}^3$
   - determine $U + W$
   - prove that $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ (using Grassmann's formula)

3. (4 punti) Mostrare che non esiste alcun valore di k per cui la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$ ha rango 2. Calcolare l'inversa se possibile nel caso di $k = 0$.

   Let prove that there is no value of k for which the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$ has rank 2. Compute the inverse of A (if there exists) when $k = 0$.

4. (4 punti) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quante e quali soluzioni possiede il seguente sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= -1 \\ (k+1)x + y + kz &= 0 \end{aligned}$$

Let determine for any value of $k \in \mathbb{R}$ if the following system admits solutions and, in this case, compute the solutions:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= -1 \\ (k+1)x + y + kz &= 0 \end{aligned}$$

5. (4 punti) Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che manda il vettore (x, y) nel vettore $(3x+2y, x-y, x+y)$. Trovare $\dim(\ker(f))$ e $\dim(\mathrm{Imm}(f)$ e una base per ciascun sottospazio; dire se la funzione è iniettiva e/o suriettiva.
   Per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k+4, 0, 2k)$ appartiene a $\mathrm{Imm}(f)$?

   Let consider the linear transformation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ such that $(x, y) \to (3x+2y, x-y, x+y)$. Let find $\dim(\ker(f))$ and $\dim(\mathrm{Imm}(f)$ and a basis for each subspace; let determine if the function is injective and/or surjective.
   Let determine the values of the real parameter k (if there exist) such that the vector $v = (k+4, 0, 2k)$ belongs to $\mathrm{Imm}(f)$?

1. Determinare la proiezione di $w = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ sul piano contenente i vettori $u = -\vec{i}$ e $v = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

La proiezione di w è il vettore w' ottenuto come

$$w' = w - \langle w, u \times v \rangle \frac{u \times v}{\|u \times v\|^2}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +\vec{j} + (-1)\vec{k} = \vec{j} - \vec{k}$$

$$|u \times v|^2 = 1 + 1 = 2 \qquad \langle w, \vec{j} - \vec{k} \rangle = 1 - 2 = -1$$

$$w' = w - \frac{(-1)}{2}(\vec{j} - \vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$$

Volume del parallelepipedo

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |1 - 2| = 1$$

2. $U = \{(x, y, z) \in R^3 : x - 3y = 0\}$

Mostriamo che U è sottospazio di R^3 usando la I caratterizzazione

- Siano $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U$
  Allora $x_1 - 3y_1 = 0$, $x_2 - 3y_2 = 0$, ossia $x_1 = 3y_1$ e $x_2 = 3y_2$.
  Segue che

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) =$$
$$= (3y_1, y_1, z_1) + (3y_2, y_2, z_2)$$
$$= (3(y_1 + y_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in U$$

  Poichè $x_1 + x_2 = 3(y_1 + y_2) \Rightarrow U$ è chiuso rispetto alla somma

- Sia $\alpha \in R$ e $(x, y, z) \in U$, ossia $x = 3y$

$$\alpha(x, y, z) = \alpha(3y, y, z) = (3\alpha y, \alpha y, \alpha z) \in U$$

  Infatti $\alpha x = 3\alpha y = \alpha(3y)$.

- $(0, 0, 0) \in U$

$$U = \{(3y, y, z)\} = [(3, 1, 0), (0, 0, 1)]$$

I due generatori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \dim U = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$W = [(1,0,1)]$ $\qquad$ $\dim W = 1$

$U + W = [(1,0,1),(3,1,0),(0,0,1)]$

I tre vettori che sono generatori di $U+W$ sono anche lin. indipendenti.

Infatti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Dunque $U+W$ ha dimensione 3

Pertanto $U+W = R^3$.

Inoltre dalla relazione di Grassmann si ha

$$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$
$$3 = 2 + 1 - 0$$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow U \oplus W = R^3$ è somma diretta.

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2(k-1) - 2(k)(k-1) =$$
$$= 2k - 2 - 2k^2 + 2k$$
$$= -2k^2 + 4k - 2 =$$
$$= -2(k^2 - 2k + 1)$$
$$= -2(k-1)^2$$

Per $k = 1$ la matrice è singolare

Tuttavia per $k = 1$ la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$ che ha rango 1

Dunque per nessun valore di k la matrice ha rango 2.

Considerare il caso $k = 0$, per cui la matrice è non singolare.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.

$$2x+y+z=-1$$
$$(k+1)x+y+kz=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad r(A)\geq 1 \qquad r(A)\leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} = 2-k-1 = 1-k \qquad k\neq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k+1 & k \end{vmatrix} = 2k-k-1 = k-1 \qquad k\neq 1$$

per $k\neq 1$, $\underline{r(A)=2 \quad e \quad r(A\,b)=2}$

$$r(A\,b)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ k+1 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+y=-1-z \\ (k+1)x+y=-kz \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{1-k}\begin{vmatrix} -1-z & 1 \\ -kz & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1-z+kz}{1-k} = \frac{-1+(k-1)z}{1-k}$$

$$y=\frac{1}{1-k}\begin{vmatrix} 2 & -1-z \\ k+1 & -kz \end{vmatrix} = \frac{k+1}{1-k} \quad +z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{1-k} \\ \dfrac{k+1}{1-k} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∞^1 soluzioni

per $k=1$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 1$$

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(A|b) = 2$$

$r(A) \neq r(A\ b)$ sistema incompatibile

In sintesi

per $k \neq 1$, ∞^1 soluzioni

per $k = 1$, sistema impossibile

5. $f : R^2 \to R^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad r(A) = 2 \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2 \neq 0$

$\mathrm{Imm} f = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ $\quad \dim \mathrm{Ran} f = 2$

$\dim \mathrm{Ker} f = 2 - 2 = 0 \quad \mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

La funzione è iniettiva ma non suriettiva.

$v = \begin{pmatrix} k+4 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \mathrm{Imm} f$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & k+4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2k \end{vmatrix} = (k+4)(2) + 2k(-3-2) =$$
$$= 2k + 8 - 10k =$$
$$= -8k + 8$$

Per $k = 1$, $v \in \mathrm{Imm} f$, altrimenti (per $k \neq 1$) $v \notin \mathrm{Imm} f$.