Matematica discreta

Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti) Dati i punti $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 2, 3)$, $C = (2, 3, 4)$, determinare l'angolo formato tra i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$; calcolare la proiezione ortogonale di $\overrightarrow{AC}$ su $\overrightarrow{AB}$.

2. (4 punti) Siano $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(x, x.x), x \in \mathbb{R}\}$. Determinare la dimensione di U, V, W, i sottospazi $U + V$, $U + W$, $V + W$ e le rispettive dimensioni. Dire se l'affermazione: *$U + V$, $U + W$, $V + W$ sono uguali* è corretta, motivando la risposta.

3. (4 punti) Determinare al variare di k il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} -5 & k & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 1 & -1-k \\ 0 & k+5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   Considerare la sottomatrice formata dalle prime tre righe e tre colonne. Assegnato a k il valore 0, impostare il calcolo dell'inversa.

4. (4 punti) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quante e quali soluzioni possiede il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ kx + 2z &= 1 \\ -x + 3z &= 1 \end{aligned}$$

5. (4 punti) In $\mathbb{R}^3$, fissata la base canonica e_1, e_2, e_3, consideriamo l'applicazione lineare f definita da $f(e_1) = e_1 + e_3$; $f(e_2) = 2e_1 + 4e_2 + 6e_3$; $f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

   - Deteminare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.
   - Determinare la dimensione e una base per l'immagine $\mathrm{Imm} f$.
   - Determinare la dimensione e una base per il nucleo $\ker f$.
   - Stabilire se f è biettiva.

6. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0)\}$$

sia nel dominio che nel codominio. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

7. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, 2x_2 - x_3, -x_2 + x_3)$. Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica, autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

8. (4 punti) Sia $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,0,1),(1,0,1)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Costruire a partire da essa una base ortogonale. Costruire una base ortonormale.

9. (4 punti) Sia q la forma quadratica data da $q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 4xz + z^2$; determinare il segno della forma quadratica e la base rispetto a cui essa è diagonale.

① $A = (1,2,3)$, $B = (2,2,3)$ $C = (2,3,4)$

angolo tra i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 2-2, 3-3) = (1,0,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-1, 3-2, 4-3) = (1,1,1)$$

$$\theta = \arccos \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\|} = \arccos \frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Proiezione ortogonale di $\overrightarrow{AC}$ su $\overrightarrow{AB}$:

$$\text{vettore } w = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} = \frac{1}{3} (1, 1, 1) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

(2) $U = \{(x, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0),(0,1,0)]$

$V = \{(x, 0, z),\ x, z \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0),(0,0,1)]$

$W = \{(x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,1)]$

$\dim U = 2 \quad \dim V = 2 \quad \dim W = 1$

$U + V = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$; $\dim U+V = 3$

$U + W = [(1,0,0)\ (0,1,0),(1,1,1)]$; $\dim U+W = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$V + W = [(1,0,0),(0,0,1),(1,1,1)]$; $\dim V+W = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$U + V = U + W = V + W = \mathbb{R}^3$

l'unico sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3 è $\mathbb{R}^3$ stesso.

3.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & k & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 1 & -1-k \\ 0 & k+5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\dim(A) = 3 \times 4$

$r(A) \leq 3$

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \qquad r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & k \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & k+5 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & k+5 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5\left(k + \overbrace{5+9}^{14}\right) + k(-9)$$

$$= -5k - 70 - 9k =$$

$$= -14k - 70$$

$\neq 0$ per $k \neq -5$

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1-k \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & -1-k \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5(3 + 3 + 3k) - 45$$

$$= -30 - 15k - 45$$

$$= -75 - 15k$$

$\neq 0$ per $k \neq -5$

Pertanto $r(A) = 2$ per $K = -5$ e

$r(A) = 3$ per $K \neq -5$

Posto $K = 0$,

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det B = -5 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -5(-9-5) = 70$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -14 & +9 & -15 \\ 0 & -15 & +25 \\ 0 & +5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 9 & -15 & 5 \\ -15 & 25 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{9}{70} & -\frac{\cancel{15}\,3}{\cancel{70}\,14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{\cancel{15}\,3}{\cancel{70}\,14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

4.

$$x + 2y - z = -1$$
$$kx + 2z = 1$$
$$-x + 3z = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2(3k+2) = -6k-4$$

(1) $r(A) = 3$ per $k \neq -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ sistema di Cramer $\exists!$ soluzione

(2) $r(A) = 2$ per $k = -\frac{2}{3}$

Per $k = -2/3$
$r(A|b) = 3$ sistema impossibile

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) = -2 \neq 0$$

Caso $k \neq -\frac{2}{3}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2(3k+2)} = \frac{1}{3k+2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ k & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2(3k+2)} = -\frac{k+1}{3k+2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2(3k+2)} = +\frac{(k+1)}{3k+2}$$

5. $f: R^3 \longrightarrow R^3$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 4 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ matrice associata

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 4 & 1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

$r(A) = 3$

$\text{Im} f = R^3$

$\dim \text{Im} f = 3$

$\dim \text{Ker} f = 3 - 3 = 0$

$\text{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

f è biettiva perché è iniettiva e suriettiva.

6)

$f: R^4 \longrightarrow R^4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_B^B(f)$$

$$B = \{ (1,0,0,-1), (1,0,0,0), (0,1,1,0) \ (0,0,1,0))$$

$$M_C^C(f) = M_C^B(i_{R^4}) \underbrace{M_B^B(f)}_{= A} \ M_B^C(i_{R^4})$$

$$M_C^B(i_{R^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_B^C(i_{R^4}) = \left(M_C^B(i_{R^4}) \right)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c \\ c+d \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= -t \\ b &= x+t \\ c &= y \\ d &= z-y \end{aligned} \qquad M_B^C(i_{R^4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. $f: R^3 \longrightarrow R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\left((\lambda-1)^2-1\right)$$

$$= (\lambda-2)^2 \cdot \lambda$$

$\lambda = 2$ molt. algebrica $= 2$

$\lambda = 0$ molt. algebrica $= 1$

$$V_2 = \begin{cases} -z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \quad \text{m. geometrica } 1$$

$$V_0 = \begin{cases} -2x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \quad \text{m. geometrica } 1$$

La matrice non è diagonalizzabile.

(m. alg. $\neq$ m. geometrica)

8 $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|v_1'\|^2 = 3$$

$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}^{=1}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \|v_2'\|^2 = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}$$

$$v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\rangle}{2/3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \\ 0 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \\ 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \|v_3'\|^2 = \frac{1}{2}$$

Base ortogonale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Base ortonormale $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

9. $q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 4xz + z^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-6 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6)\left[(\lambda-1)^2 - 4\right]$$

$$= (\lambda-6)\left(\lambda^2+1-2\lambda-4\right]$$

$$= (\lambda-6)\left(\lambda^2-2\lambda-3\right)$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$\lambda = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$\lambda = 6$

$\lambda = 3$ f. q. indefinita

$\lambda = -1$

$$V_6 = \begin{cases} 5x - 2z = 0 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$V_3 = \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ -3y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$V_{-1} = \begin{cases} -2x - 2z = 0 \\ y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{Base} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$