15. Dire se i seguenti insiemi sono basi di $\mathbb{R}^3$.

(a) $S = \{(1,0,0), (1,2,0), (1,2,3)\}$

Basta far vedere che sono lin. indip.

$$(0,0,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,2,0) + \gamma(1,2,3)$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = 2\beta + 2\gamma \\ 0 = 3\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

<u>E' una base.</u>

(b) $S = \{(1,0,0), (1,2,1), (5,4,2)\}$

$$(0,0,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,2,1) + \gamma(5,4,2)$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + 5\gamma \\ 0 = 2\beta + 4\gamma \\ 0 = \beta + 2\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \alpha - 2\gamma + 5\gamma \\ 0 = \cancel{-4\gamma} + \cancel{4\gamma} \\ \beta = -2\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -2\gamma \\ \alpha = -3\gamma \end{cases}$$

Sono l. dipendenti:

<u>Non sono una base</u>

(c) $S = \{(1,1,0)\ (1,-1,0)\ (1,1,1)\}$

$$(0,0,0) = a(1,1,0) + b(1,-1,0) + c(1,1,1)$$

$$\begin{cases} 0 = a + b + c \\ 0 = a - b + c \\ 0 = c \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ a = b \\ 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

<u>sono una base</u> di R^3

(d) $S = \{(1,2,3)\ (5,4,2)\}$

non possono essere una base perché non sono generatori di R^3.

(e) $S = \{(1,2,3), (-3,4,5), (4,3,-2)\ (1,1,1)\}$

non sono una base perché sono lin. dip.

Sono 4 elementi e il massimo numero di elementi lin. indip. di $\mathbb{R}^3$ è 3.

17. $S = \{(1,1,1), (2,-1,1)(3,0,2)\}$

sono una base di $\mathbb{R}^3$?

$$(0,0,0) = a(1,1,1) + b(2,-1,1) + c(3,0,2)$$

$$\begin{cases} 0 = a + 2b + 3c \\ 0 = a - b \\ 0 = a + b + 2c \end{cases} \quad \begin{cases} a = b \\ 0 = 3a + 3c \\ 0 = 2a + 2c \end{cases} \quad \begin{cases} a = b \\ -a = +c \end{cases}$$

<u>sono linearmente dipendenti</u>

Dunque <u>non sono una base</u> di $\mathbb{R}^3$.

12. Stabilire se i seguenti insiemi sono lin. indip.

(a) $S=\{(0,0)\}\subseteq R^2$ l. dipendente

(b) $S=\{(0,2)\}\subseteq R^2$ l. indipendente

(c) $S=\{\underline{(0,0)},(1,3)\}\subseteq R^2$ l. dipendenti

(d) $S=\{(1,2,3),(2,4,6)\}\subseteq R^3$

l. dipendenti

$(2,4,6)=2\cdot(1,2,3)$

(e) $S=\{(1,2,3),(2,4,5)\}\subseteq R^3$

l. indip.

(f) $S=\{(1,0,0),(0,1,1)(3,4,4)\}\subseteq R^3$

$(0,0,0)=a(1,0,0)+b(0,1,1)+c(3,4,4)$

$$\begin{cases} 0=a+3c \\ 0=b+4c \\ 0=b+4c \end{cases} \qquad \begin{aligned} a&=-3c \\ b&=-4c \end{aligned}$$ l. dip.

(g) $S=\{(1,2,4),(2,4,8),(1,2,3)\}\subseteq R^3$

l. dip. $(2,4,8)=2(1,2,4)$

(h) $S=\{(1,2,-1),(2,-3,5),(7,9,26)\}\subseteq R^3$

$(0,0,0) = a(1,2,-1) + b(2,-3,5) + c(7,9,26)$

$$\begin{cases} 0 = a + 2b + 7c \\ 0 = 2a - 3b + 9c \\ 0 = -a + 5b + 26c \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2b - 7c \\ 0 = -4b - 14c - 3b + 9c \\ 0 = 2b + 7c + 5b + 26c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -7b - \cancel{2}5c \\ 0 = 7b + 33c \\ a = -2b - 7c \end{cases} \quad b = -\frac{5c}{7} \qquad b = 0$$

$$0 = -5c + 33c \Rightarrow c = 0$$

$$a = 0$$

l. indipendenti

(c) $S = \{2 + 3x + 5x^2, 4 + 6x + 10x^2\} \subseteq P_2(x)$

$a(2 + 3x + 5x^2) + b(4 + 6x + 10x^2) = 0$

$(2a + 4b) + (3a + 6b)x + (5a + 10b)x^2 = 0$

$2a + 4b = 0$ $\quad \underline{a = -2b}$ l. dipen.

$3a + 6b = 0$

$5a + 10b = 0$

(d) $S = \{2 + 3x + 5x^2, 2x + 3x^2 + 5x^3\} \subseteq P_3(x)$

$a(2 + 3x + 5x^2) + b(2x + 3x^2 + 5x^3) = 0$

$2a + (3a + 2b)x + (5a + 3b)x^2 + 5b\,x^3 = 0$

$a = 0 \qquad b = 0$ $\qquad$ lin. indip.

19. Trovare un sistema di generatori, una base e la dimensione di

$$W = \{(x, y, z) \in R^3 \quad 2x - 3z = 0\}$$

$$W = \left\{\left(\frac{3}{2}z, y, z\right) \in R^3\right\} = \left[\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right) (0, 1, 0)\right]$$

$$a\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right) + b(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$\frac{3}{2}a = 0$

$\Rightarrow$ sono l. indip.

$b = 0$

$\underline{\dim W = 2}$

$a = 0$