Il centro di massa

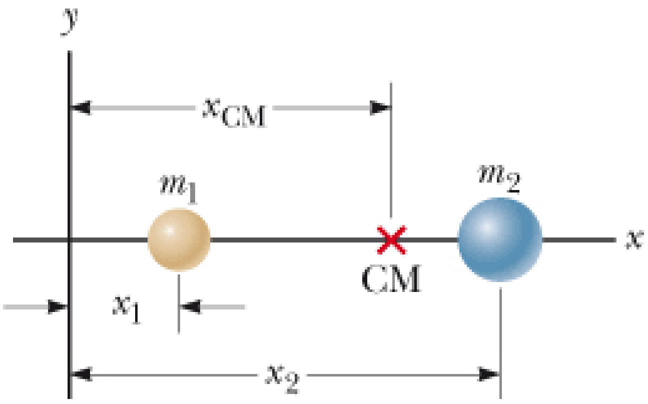


Figura 8.14 Il centro di massa di due particelle che hanno masse diverse è situato sull'asse x a x_{CM}, un punto posto tra le particelle, più vicino a quella dotata di massa maggiore.

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

Dopo un intervallo di tempo Δt

$$x'_{CM} = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

$$\Delta x_{CM} = x'_{CM} - x_{CM}$$

$$v_{CM} = \frac{\Delta x_{CM}}{\Delta t}$$

Il centro di massa

$$\Delta x_1 = x_1^{'} - x_1 \qquad \Delta x_2 = x_2^{'} - x_2$$

$$\Delta x_{CM} = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$

Dividendo la eq. (3) per ΔT

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \qquad v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t}$$

$$(m_1 + m_2) v_{CM} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad (4)$$

La quantità di moto di un sistema di particelle è quella che avrebbe il CM considerato come punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema

Il centro di massa

$$(m_1 + m_2)v_{CM} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad (4)$$

Per un sistema isolato, il secondo membro è costante

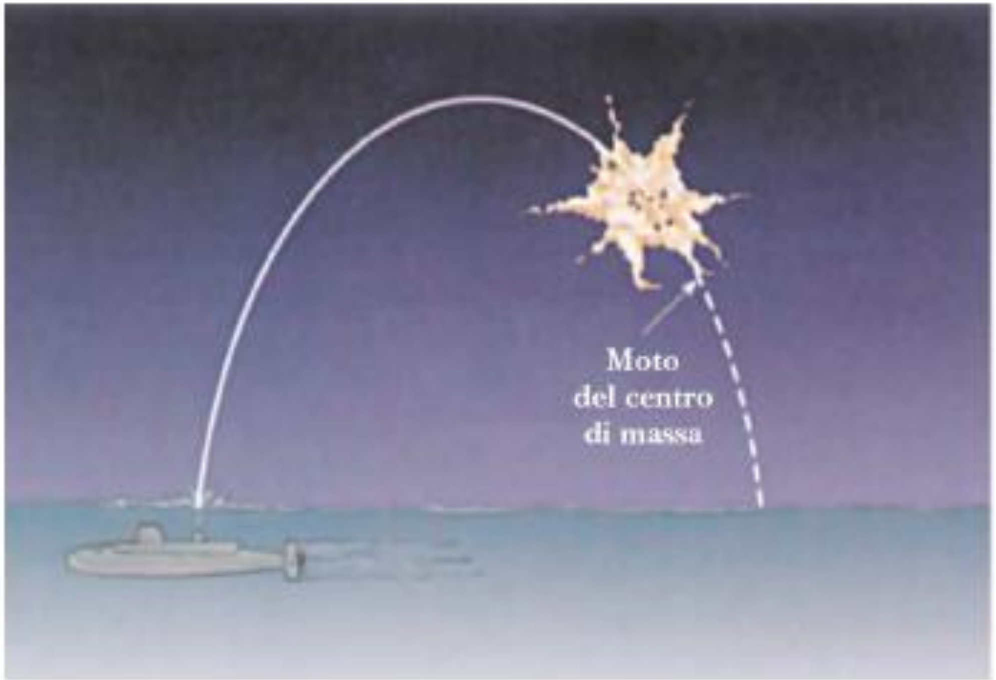
La quantità di moto di un sistema di particelle è quella che avrebbe il CM considerato come punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema

$$(m_1 + m_2)v_{CM} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Per un sistema isolato, anche il primo membro è costante

IL CM di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme (se non e' in quiete)

Il centro di massa



Se sul sistema agiscono anche forze esterne, il moto del CM non è più rettilineo uniforme, ma non viene alterato dall’azione delle forze interne.

Se un razzo esplode si sprigionano forze interne che però non modificano la velocità del CM, che continua a muoversi sulla medesima traiettoria.

Il centro di massa

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Due particelle (stessa massa) si urtano **elasticamente**

$$v_1 = v \qquad v_2 = \frac{1}{2} v \qquad m_1 = m_2$$

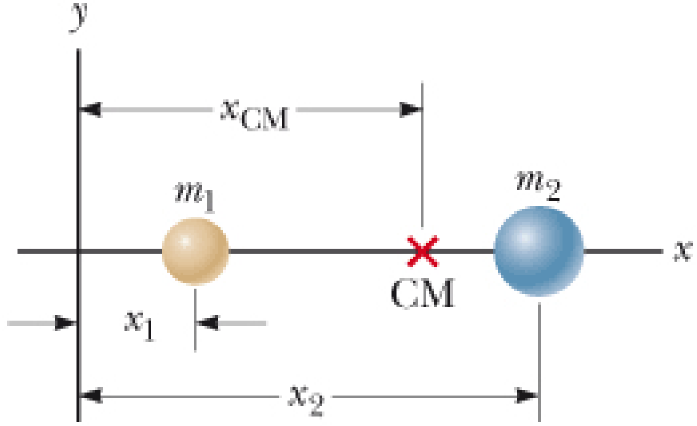
Dopo l'urto le due particelle si scambiano la velocità

$$v_{CM\_prima} = v_{CM\_dopo} = \frac{3v}{4}$$

Il CM si muove di moto rettilineo uniforme con velocità che non viene modificata dall'urto

Il centro di massa

Il CM di un sistema di due particelle (P_1 e P_2) di massa m_1 e m_2 è quel punto del segmento P_1P_2 che divide il segmento stesso in parti inversamente proporzionali alle masse.



$$d_1 = x_{CM} - x_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - x_1 = m_2(x_2 - x_1)$$

$$d_2 = x_2 - x_{CM} = x_2 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = m_1(x_2 - x_1)$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{m_1(x_2 - x_1)} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

dove x_i è la coordinata x della i-esima particella e M è la *massa totale* del sistema. Le coordinate y e z del centro di massa sono definite, in modo del tutto analogo, dalle relazioni

$$y_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \qquad \text{e} \qquad z_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

Il centro di massa può essere individuato dal suo vettore di posizione $\vec{r}_{CM}$. Le coordinate ortogonali di questo vettore sono x_{CM}, y_{CM}, e z_{CM},

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}}{M}$$

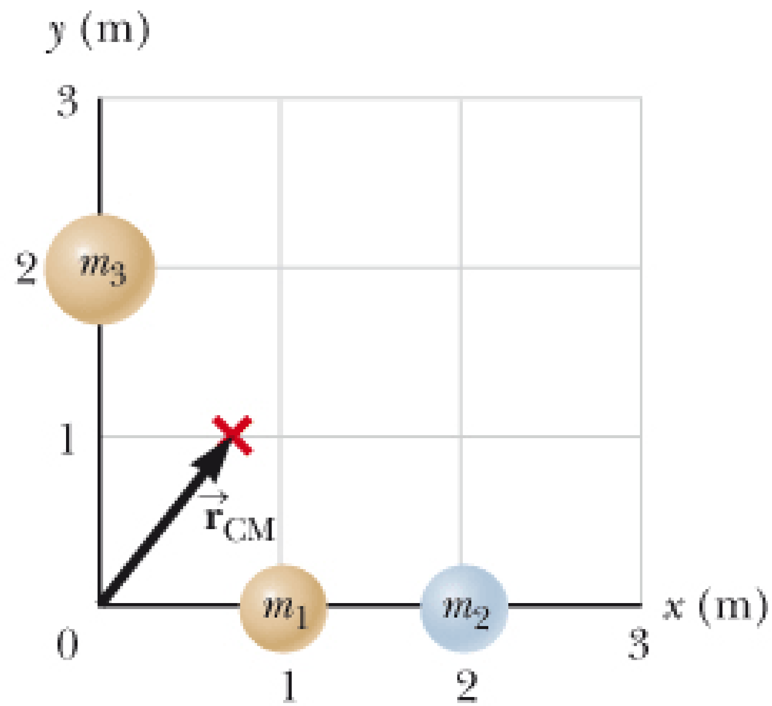
$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M}}$$

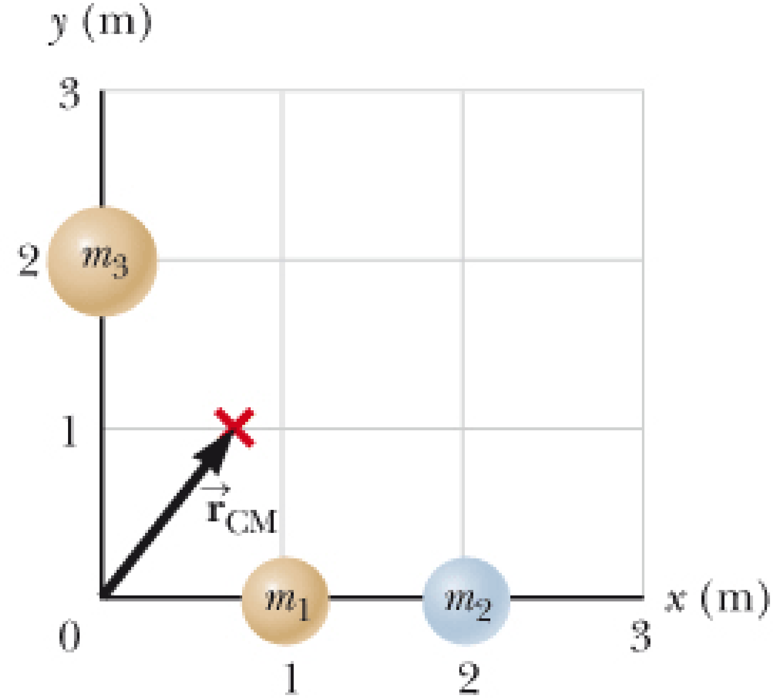
dove $\vec{r}_i$ è il vettore posizione della i-esima particella definito da

$$\vec{\mathbf{r}}_i \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

Un sistema è formato da tre particelle disposte come in Figura.
Le masse delle particelle sono $m1 = m2 = 1.0$ kg e $m3 = 2.0$ kg.
Trovare il centro di massa del sistema.

Figura 8.18
(Esempio 8.11) Due particelle sono poste sull'asse x ed una particella singola si trova sull'asse y come mostrato. Il vettore indica la posizione del centro di massa del sistema.





$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\ \text{kg})(1.0\ \text{m}) + (1.0\ \text{kg})(2.0\ \text{m}) + (2.0\ \text{kg})(0)}{1.0\ \text{kg} + 1.0\ \text{kg} + 2.0\ \text{kg}} = \frac{3.0\ \text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\ \text{kg}} = 0.75\ \text{m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\ \text{kg})(0) + (1.0\ \text{kg})(0) + (2.0\ \text{kg})(2.0\ \text{m})}{4.0\ \text{kg}} = \frac{4.0\ \text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\ \text{kg}} = 1.0\ \text{m}$$

EdiSES

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\ \text{kg})(1.0\ \text{m}) + (1.0\ \text{kg})(2.0\ \text{m}) + (2.0\ \text{kg})(0)}{1.0\ \text{kg} + 1.0\ \text{kg} + 2.0\ \text{kg}} = \frac{3.0\ \text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\ \text{kg}} = 0.75\ \text{m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\ \text{kg})(0) + (1.0\ \text{kg})(0) + (2.0\ \text{kg})(2.0\ \text{m})}{4.0\ \text{kg}} = \frac{4.0\ \text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\ \text{kg}} = 1.0\ \text{m}$$

Scriviamo la posizione del vettore centro di massa:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} = (0.75\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$$

Il centro di massa

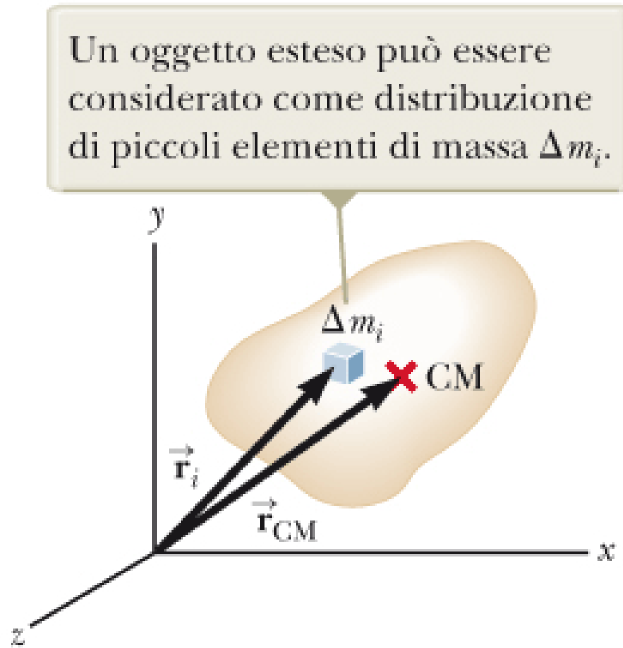


Figura 8.15 Il centro di massa dell'oggetto è situato nella posizione individuata dal vettore $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$, che ha coordinate x_{CM}, y_{CM} e z_{CM}.

. Ciascun elemento si può considerare come una particella di massa Δm_i, di coordinate x_i, y_i, z_i. La distanza fra le particelle è molto piccola cosicché questo modello rappresenta una buona approssimazione della distribuzione continua di massa del corpo. La coordinata x del centro di massa delle particelle che rappresentano il corpo, e perciò il suo centro di massa approssimato, è

$$x_{CM} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$

con espressioni simili per y_{CM} e z_{CM}. Se assumiamo che il numero di elementi tenda all'infinitc

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

dove l'integrazione è estesa a tutta la lunghezza del corpo nella direzione x. Analogamente, per y_{CM} e z_{CM} otteniamo

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \, dm \quad \text{e} \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

Possiamo esprimere il vettore posizione del centro di massa di un corpo esteso come

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{\mathbf{r}} \, dm$$