Un punto che si muove di moto armonico con periodo t = 4.4 s si trova al tempo t = 0 s nella posizione $x(0) = 0.28\ \mathrm{m}$ con velocità $v(0) = -2.5\ m/s$. Scrivere l'equazione del moto. Calcolare i valori massimi di velocità e posizione.

Fonte: MNV3, Cap.1, Problemi 1.28

$T = 4.4\ s$

$x(t = 0\ s) = x(0) = 0.28\ m$

$v(t = 0\ s) = v(0) = -2.5\ m/s$

eq. moto ? v_{MAX} ? x_{MAX} ?

1) eq. moto ?

- SCRIVO EQ. MOTO IN GENERALE

$$x(t) = \overset{?}{A} \sin(\omega t) + \overset{?}{B} \cos(\omega t)$$

- APPLICO CONDIZIONI INIZIALI PER TROVARE A E B

$x(0) = A \sin(\omega \cdot 0) + B \cos(\omega \cdot 0)$ DOVE $\sin(0) = 0$

$\cos(0) = 1$

PERCIÒ $x(0) = B \cdot 1 = B$ ✓ DOVE $x(0) = 0.28\ m$

APPLICO LA CONDIZIONE INIZIALE SULLA VELOCITÀ:

- SCRIVO L'EQ. DELLA VELOCITÀ IN GENERALE

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$$

- APPLICO CONDIZIONE INIZIALE $(t=0)$

$$v(0) = A\omega\cos(\omega\cdot 0) - B\omega\underbrace{\sin(\omega\cdot 0)}_{0} =$$

$$v(0) = A\omega \quad \text{DOVE} \quad v(0) = -2.5\ m/s$$

$$\Rightarrow A = \frac{v(0)}{\omega} \quad \text{DOVE} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ rad}{4.4\ s}$$

PERCIÒ L'EQUAZIONE DEL MOTO È

$$x(t) = \frac{v(0)}{\omega} \sin(\omega t) + x(0) \cos(\omega t)$$

TROVO I VALORI NUMERICI

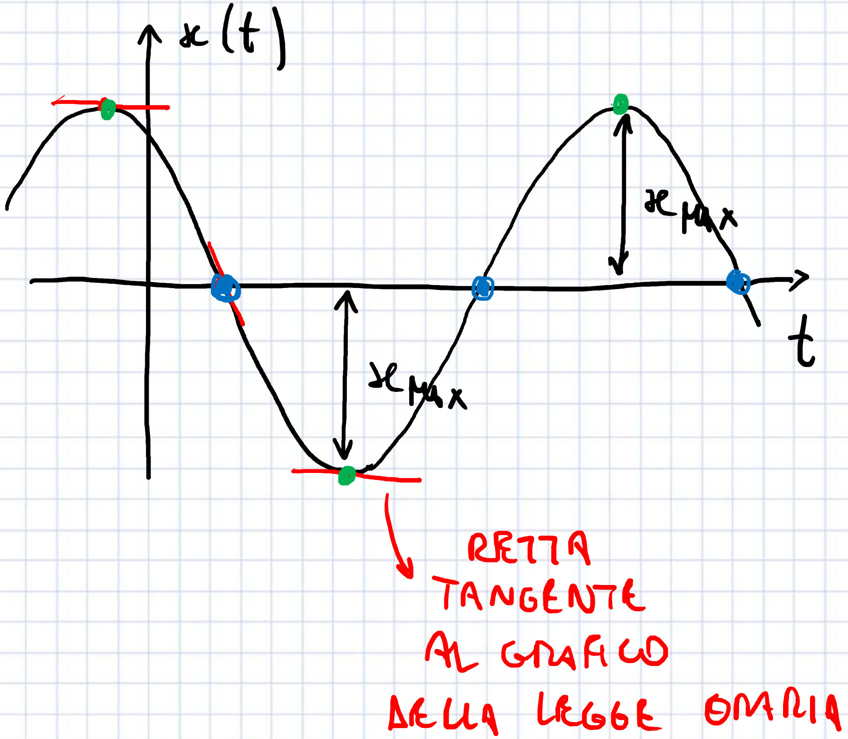
$$\omega = \frac{2\pi}{4.4} \text{ rad/s} = 1.43 \text{ rad/s}$$

$$v(0)/\omega = \frac{-2.5 \text{ m}/\cancel{s}}{1.43 \text{ rad}/\cancel{s}} = -1.75 \text{ m/rad} = A$$

PERCIÒ $x(t) = -1.75 \sin(\omega t) + 0.28 \cos(\omega t)$

2) v_{MAX} ? x_{MAX} ?

PER RICAVARE QUESTI VALORI RAGIONIAMO SUL MOTO ARMONICO, A PARTIRE DALLA LEGGE ORARIA.



- LA PENDENZA DELLA LINEA ROSSA E' UGUALE ALLA VELOCITA' ISTANTANEA ED E' MASSIMA QUANDO $x(t) = 0$ (PUNTI BLU)

- L'AMPIEZZA DELLO SPOSTAMENTO E' MASSIMA QUANDO LA VELOCITA' ISTANTANEA E' NULLA (PUNTI VERDI)

$\Rightarrow$ DEVO TROVARE L'ISTANTE DI TEMPO PER CUI

$$x(t_{v\,MAX}) = 0 \longrightarrow t_v$$

$$v(t_{x\,MAX}) = 0 \longrightarrow t_x$$

$$x(t_v) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_v) + x_0 \cos(\omega t_v) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_v) = -x_0 \cos(\omega t_v)$$

$$\underbrace{\frac{\sin(\omega t_v)}{\cos(\omega t_v)}} = -x_0 \frac{\omega}{v_0}$$

$$\tan(\omega t_v) = -x_0 \frac{\omega}{v_0}$$

APPLICO LA FUNZIONE INVERSA DI $\tan(\omega t_v)$ AD AMBO I MEMBRI

$$\arctan\left(\tan(\omega t_v)\right) = \arctan\left(-x_0 \frac{\omega}{v_0}\right)$$

$$\omega t_v = \arctan\left(-x_0 \frac{\omega}{v_0}\right)$$

[LA REGOLA È $f^{-1}(f(x)) = x$]

PERCIÒ $t_v = \dfrac{1}{\omega} \arctan\left(-x_0 \dfrac{\omega}{v_0}\right) = 0.111\ s$

CON LA CALCOLATRICE!

ATTENZIONE!

- $\arctan(x)$ SULLE CALCOLATRICI SI PUO' CHIAMARE $\tan^{-1}$
- L'ARGOMENTO DI $\arctan(x)$ E' IN RAD (RADIANTI) QUINDI CONTROLLA L'UNITA' DI MISURA SULLA CALCOLATRICE!

ORA CHE HO TROVATO t_v, LO SOSTITUISCO IN $v(t)$ PER TROVARE v_{MAX}

$$v(t_v) = v_{MAX}$$

RISCRIVO $v(t)$ CON I VALORI DELLE COSTANTI A E B

$$A = \frac{v_0}{\omega} \qquad B = x_0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 \cos(\omega t) - x_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$v(t_v) = v_0 \cos(\omega t_v) - x_0 \omega \sin(\omega t_v) = -2.53 \ m/s$$

QUINDI IL MODULO MASSIMO DELLA VELOCITÀ È

$$|v_{MAX}| = 2.53 \ m/s$$

RIPETO LO STESSO PROCEDIMENTO PER L'AMPIEZZA ...

SFRUTTO $v(t_x) = 0 \iff x(t_x) = x_{MAX}$

$$v(t_x) = 0 \Rightarrow v_0 \cos(\omega t_x) - x_0 \omega \sin(\omega t_x) = 0$$

$$\tan(\omega t_x) = \frac{v_0}{x_0 \omega} \longrightarrow t_x = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{v_0}{x_0 \omega}\right) = -0.987 \ s$$

$$x(t_x) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_x) + x_0 \cos(\omega t_x) = 1.77 \ m = x_{MAX}$$

Un blocchetto di 20 g è lanciato su una superficie priva di attrito verso una molla di costante elastica k = 10 N/m, inizialmente a riposo. Il blocchetto colpisce la molla con una velocità di 2 m/s e vi si attacca. Sfruttando la conservazione dell'energia meccanica, calcolare di quanto si accorcia al massimo la molla dopo l'urto.

$m = 0.02\ Kg$

$K = 10\ N/m$

$v_0 = 2\ m/s$

$x_{MAX} = ?$

POSSO SFRUTTARE LA CONS. DELL'ENERGIA MECCANICA (PERCHÉ NON HO FORZE DISSIPATIVE)

$E_M = K + U_e \qquad U_e = \frac{1}{2} K x^2$

INIZIO: $K_i = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad U_e = 0$ POICHÉ $x = 0$

FINE: $K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = 0 \qquad U_e = \frac{1}{2} K x_{MAX}^2$

NOTA: ALLA FINE, $K_f = 0$ POICHÉ NEL PUNTO DI MASSIMA ESTENSIONE O ACCORCIAMENTO DELLA MOLLA LA VELOCITÀ È SEMPRE NULLA

INIZIO = FINE $\qquad \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} m v_0^2 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} K \boxed{x_{MAX}^2}$ GOAL

$$\Rightarrow \quad x_{MAX}^2 = \frac{m}{K} v_0^2 \qquad x_{MAX} = v_0 \sqrt{\frac{m}{K}} = v_0 / \omega$$

$$= 0.09 \text{ m}$$