Fisica
per LT Informatica
Università di Ferrara

Lucia Del Bianco

Dip.to di Fisica e Scienze della Terra

Momento di una forza (*o momento torcente*)

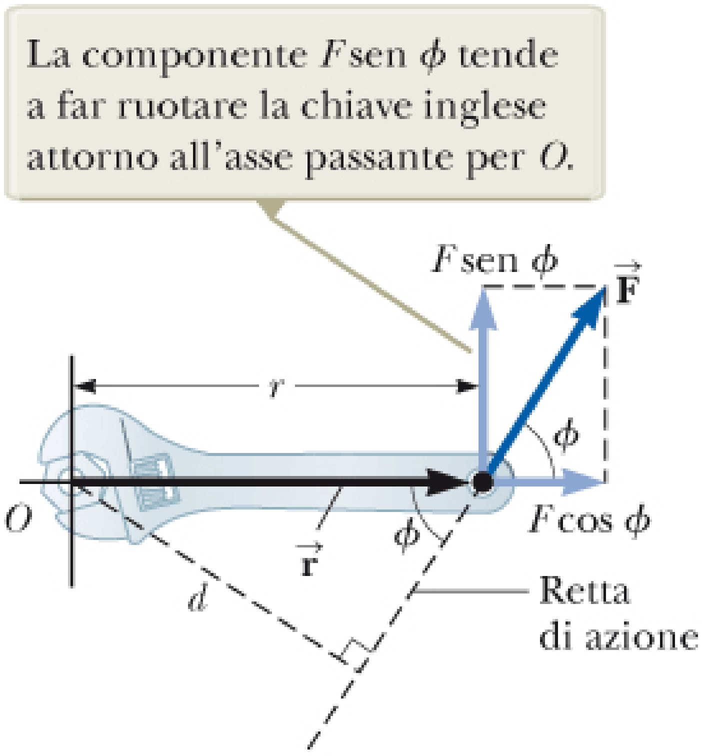


Figura 10.10 Una forza $\vec{F}$ è applicata ad una chiave inglese nel tentativo di svitare un bullone. La forza tende a far ruotare più facilmente la chiave se il modulo F cresce e se il braccio d della forza aumenta.

$$\tau = rF\,sen\,\phi$$ [N m]

r è il vettore posizione che individua il punto di applicazione della forza **F**

F forma un angolo ϕ rispetto alla direzione del vettore **r**

Il momento è definito solo quando è specificato un asse di riferimento rispetto al quale è definita la distanza r

Momento di una forza

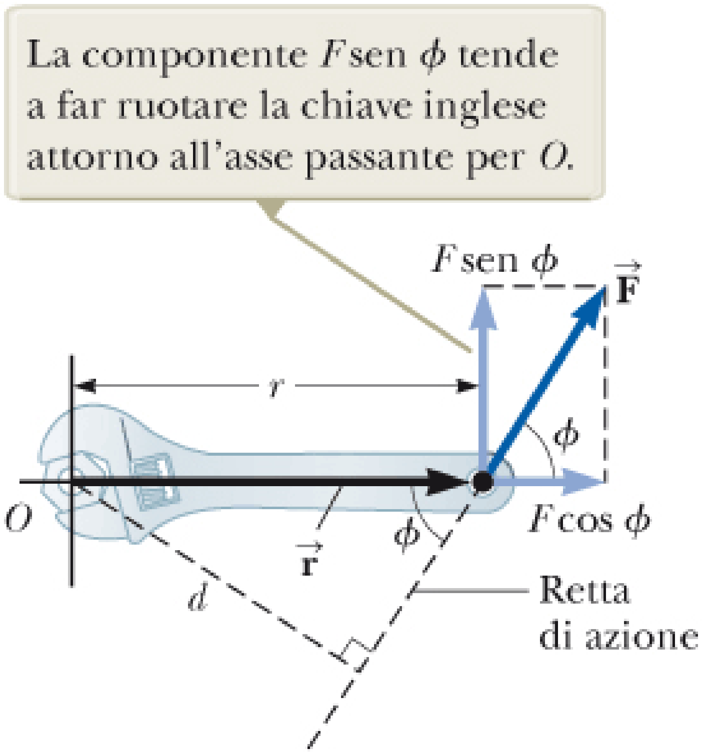


Figura 10.10 Una forza $\vec{F}$ è applicata ad una chiave inglese nel tentativo di svitare un bullone. La forza tende a far ruotare più facilmente la chiave se il modulo F cresce e se il braccio d della forza aumenta.

$$\boxed{\tau = rFsen\phi}$$

[N m]

$$\tau = r(Fsen\phi)$$

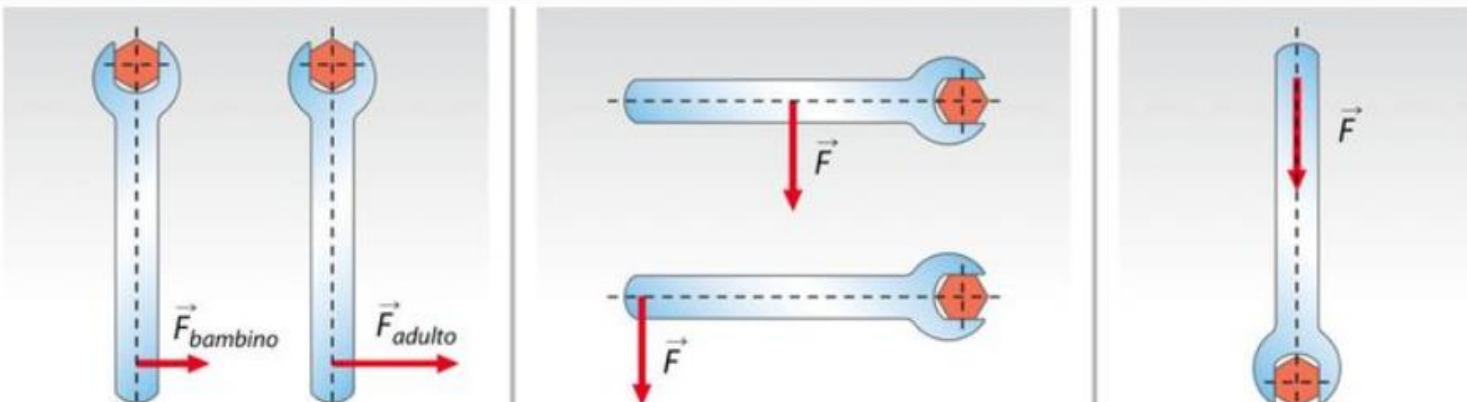
Componente della forza che mette in rotazione il corpo

$$\tau = F(rsen\phi) = Fd$$

d = braccio della forza (distanza fra l'asse di rotazione e la retta di azione della forza)

Momento di una forza

Gli effetti di una **forza applicata a un corpo rigido** dipendono dalla sua **intensità**, dal **punto di applicazione** e dalla **direzione** della forza



a Una forza più intensa permette di svitare più facilmente il bullone.

b L'effetto della forza dipende anche dalla distanza a cui è applicata rispetto al punto di rotazione.

c Il bullone può anche non ruotare sotto l'azione di una forza.

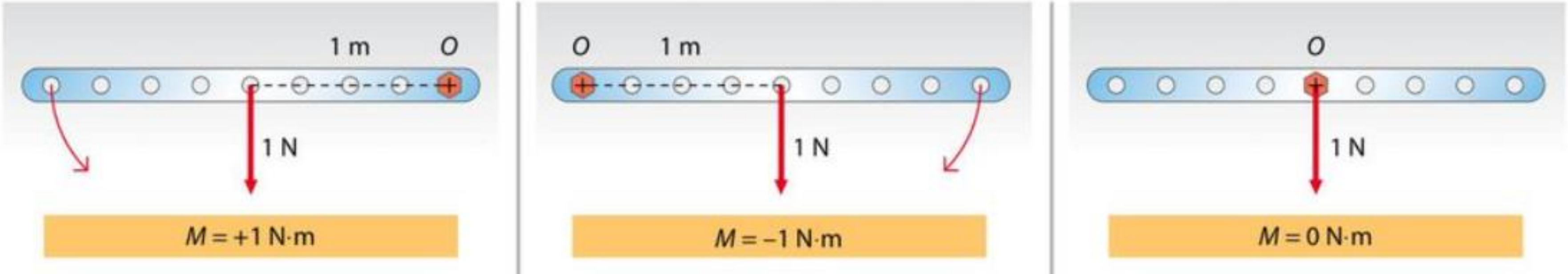
$$\tau = rF sen\phi$$

Momento di una forza

Momento positivo: la forza produce **rotazione antioraria**

Momento negativo: la forza produce **rotazione oraria**

Momento nullo: la forza **non produce rotazione**



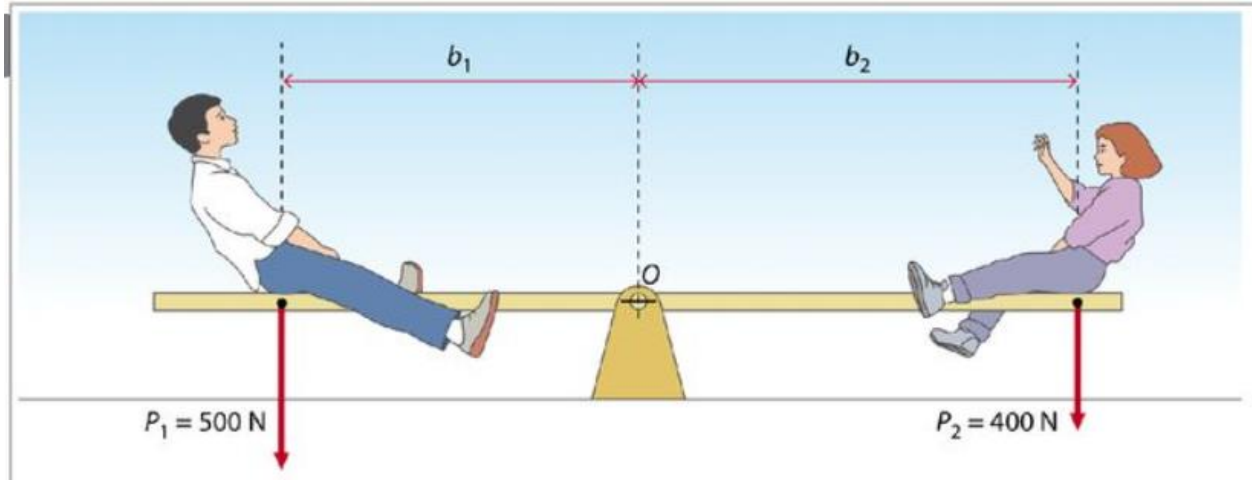
a La forza fa ruotare il righello in senso antiorario; il momento è positivo.

b La forza produce rotazione in senso orario; il momento è negativo.

c La forza non produce rotazione; il momento è zero.

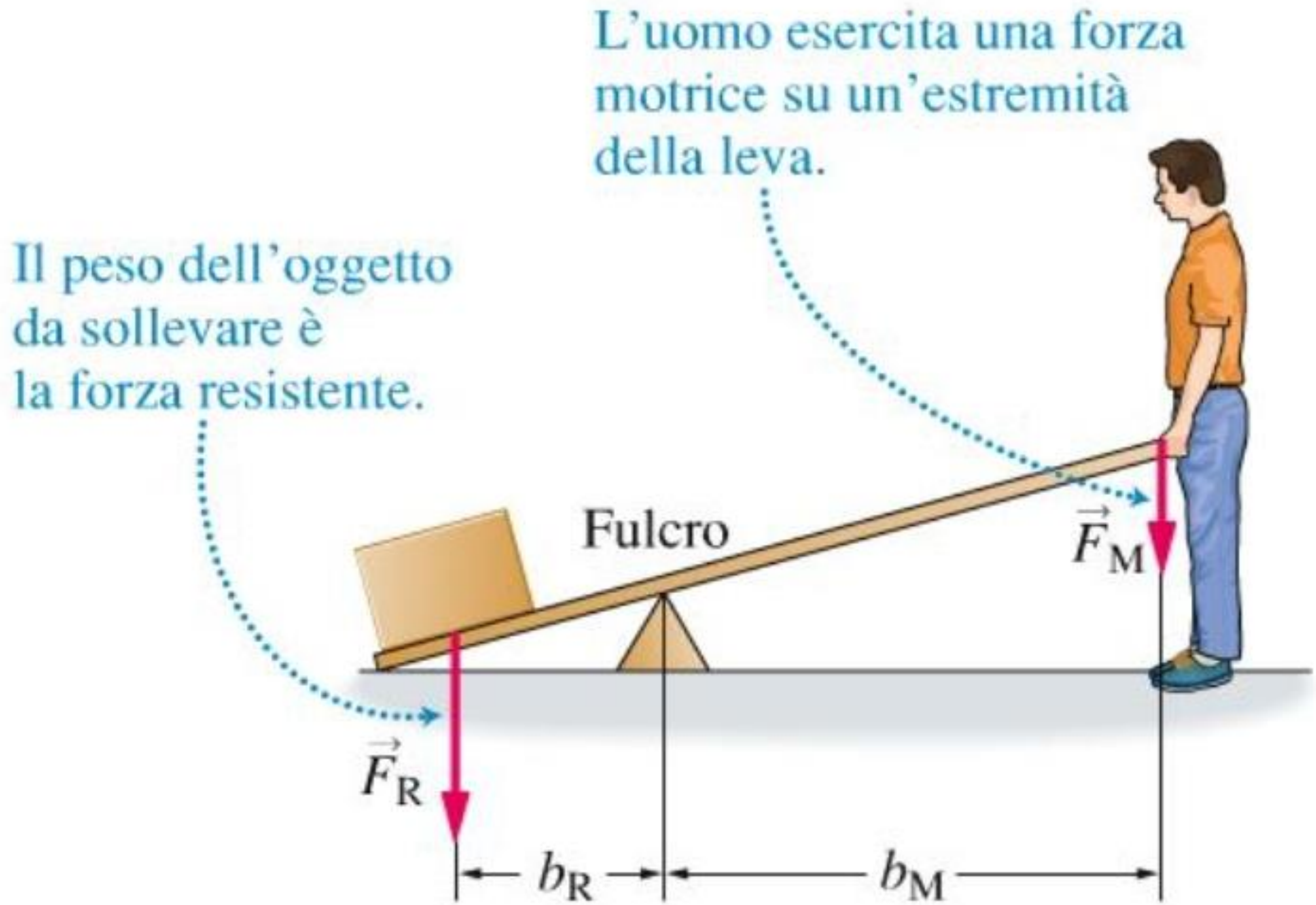
Momento di una forza

Quando un oggetto è in **equilibrio** la **somma algebrica dei momenti di tutte le forze applicate**, calcolati rispetto allo stesso punto, **è uguale a zero**.



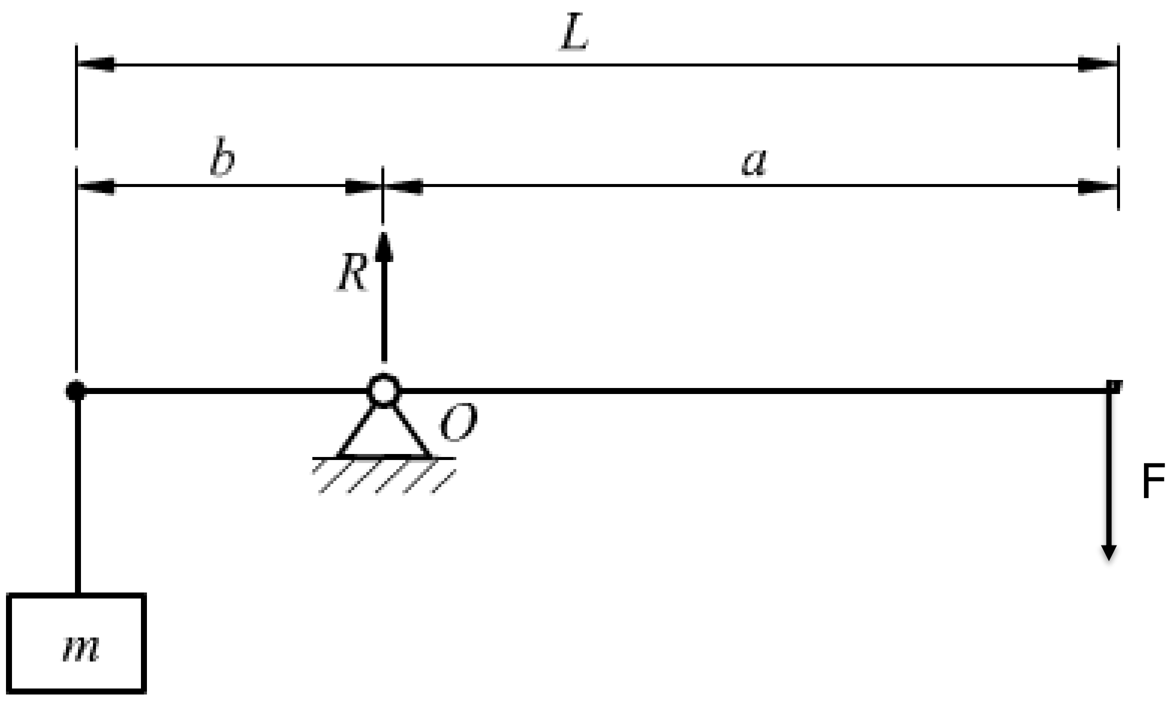
L'asta è in equilibrio se i momenti sono uguali e opposti. La bambina ha un peso minore, quindi deve sedere più lontano dal vincolo.

$$P_1 \cdot b_1 = P_2 \cdot b_2$$


L'uomo esercita una forza motrice su un'estremità della leva.
Il peso dell'oggetto da sollevare è la forza resistente.
Fulcro
$\vec{F}_M$
$\vec{F}_R$
b_R
b_M

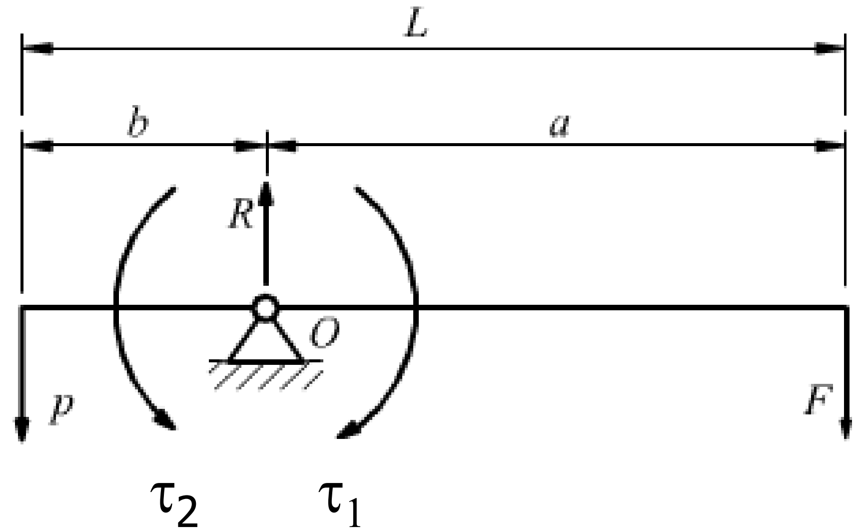
ESERCIZIO

La leva illustrata è sollecitata da una massa m = 72 kg che agisce con braccio b = 12 cm rispetto al fulcro 0. Considerando la lunghezza L = 96 cm della leva, trovare la forza F da applicare alla seconda estremità della leva che pone il sistema in equilibrio.



Evidentemente la massa m sotto l'effetto della forza di gravità produce una forza peso pari a:

$p = m \cdot g = 72 \cdot 9{,}81 = 706{,}32N$



Rispetto al fulcro i momenti sono:

$\tau_2 = p \cdot b = 706{,}32 \cdot 12 = 8475{,}84\ Ncm$

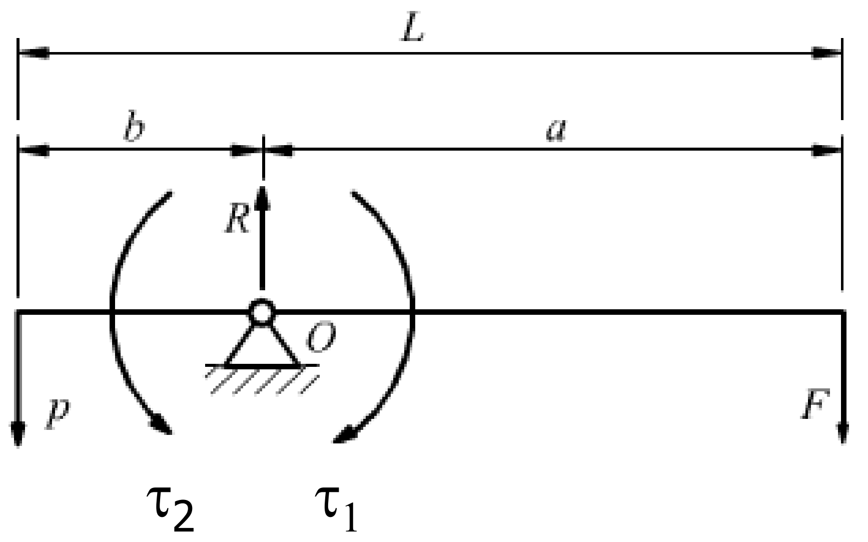
il braccio $a = L - b = 96 - 12 = 84cm$

$\tau_1 = F \cdot a = F \cdot 84$

dato che deve essere per l'equilibrio $\tau_2 = \tau_1$

$$F \cdot 84 = 8475{,}84 \longrightarrow F = \frac{8475{,}84}{84} = 100{,}9N$$

Trovare la reazione vincolare del fulcro in 0.



Per il calcolo della reazione vincolare in O applichiamo il teorema dei momenti con polo all'estremo sinistro della leva:

$$0 = R \cdot b - F \cdot L \quad \longrightarrow \quad R \cdot b = F \cdot L$$

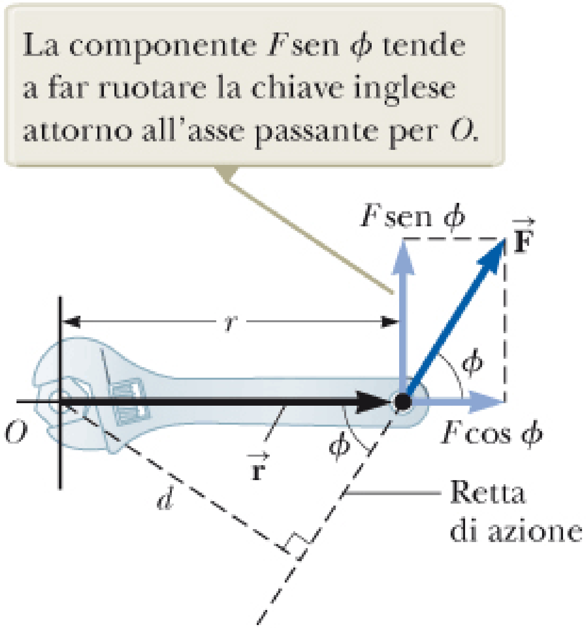
$$R = \frac{F \cdot L}{b} = \frac{100{,}9 \cdot 96}{12} = 807{,}2N$$

LAVORO ROTAZIONALE

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$ **Lavoro traslazionale**

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (Fsen\phi)rd\theta = \tau d\theta$$

Lavoro rotazionale
Prodotto del momento della forza e lo spostamento angolare



Fsenϕ è sempre parallela allo spostamento

Fcosϕ non compie lavoro

LAVORO ROTAZIONALE

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (Fsen\phi)rd\theta = \tau d\theta$$

Lavoro rotazionale
Prodotto fra il momento della forza e lo spostamento angolare

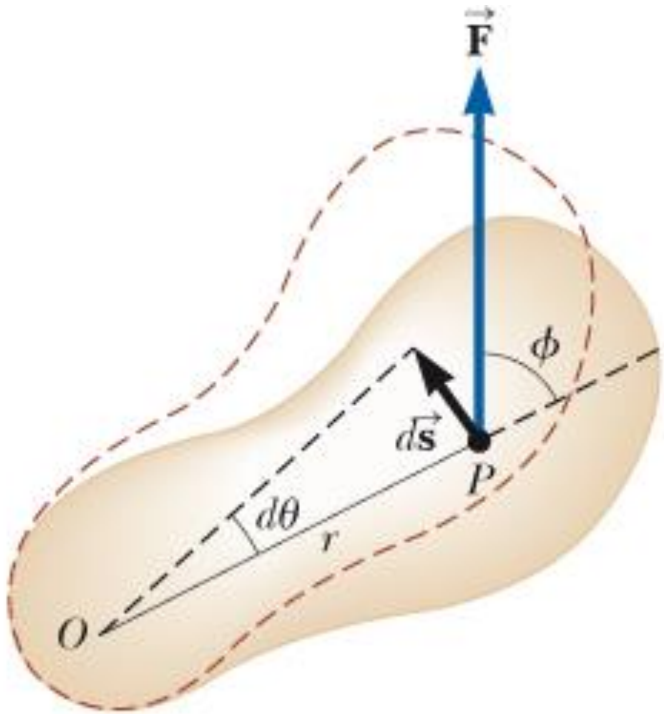


Figura 10.19 Un corpo rigido ruota attorno ad un asse per il punto O sotto l'azione di una forza esterna $\vec{F}$ applicata in P.

$Fsen\phi$ è sempre parallela allo spostamento

$Fcos\phi$ non compie lavoro

LAVORO ROTAZIONALE

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Lavoro traslazionale

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (Fsen\phi)rd\theta = \tau d\theta$$

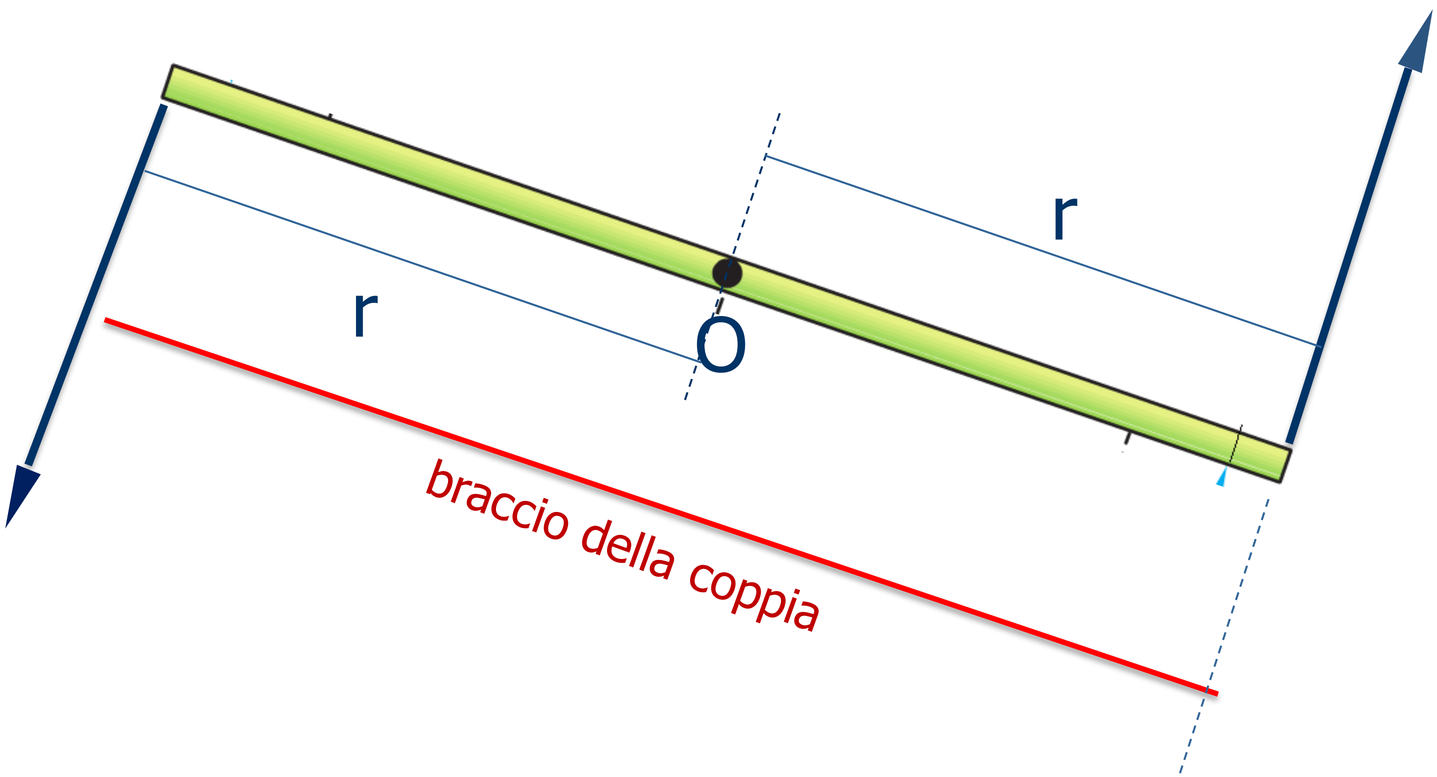
Lavoro rotazionale
Prodotto fra il momento della forza e lo spostamento angolare

$$W = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega_B^2 - \frac{1}{2}I\omega_A^2 = \Delta K_r$$

Teorema della energia cinetica per il moto rotazionale

COPPIA DI FORZE

Una **coppia di forze** è composta da due forze complanari, uguali in modulo e parallele (aventi la stessa direzione) opposte in verso, applicate a due punti diversi di un corpo rigido (cioè hanno distinta retta di azione).



COPPIA DI FORZE

Il momento della coppia di forze è la somma dei momenti delle singole forze rispetto al centro di rotazione, essendo uguali tali momenti poiché sono uguali le forze, uguali i bracci e entrambi i momenti generano una rotazione antioraria (caso della figura), quindi possiamo scrivere:

$$\tau = F \cdot r + F \cdot r = F \cdot 2 \cdot r$$

se chiamiamo b (braccio della coppia), la distanza tra le rette d'azione(o direzioni) delle forze avremo:

$$b = 2 \cdot r$$

quindi il momento della coppia sarà: $\tau = F \cdot b$

Il **braccio della coppia** è la distanza fra le due rette di azione delle due forze.

Il momento della coppia è il prodotto del braccio per l'intensità di una delle due forze.

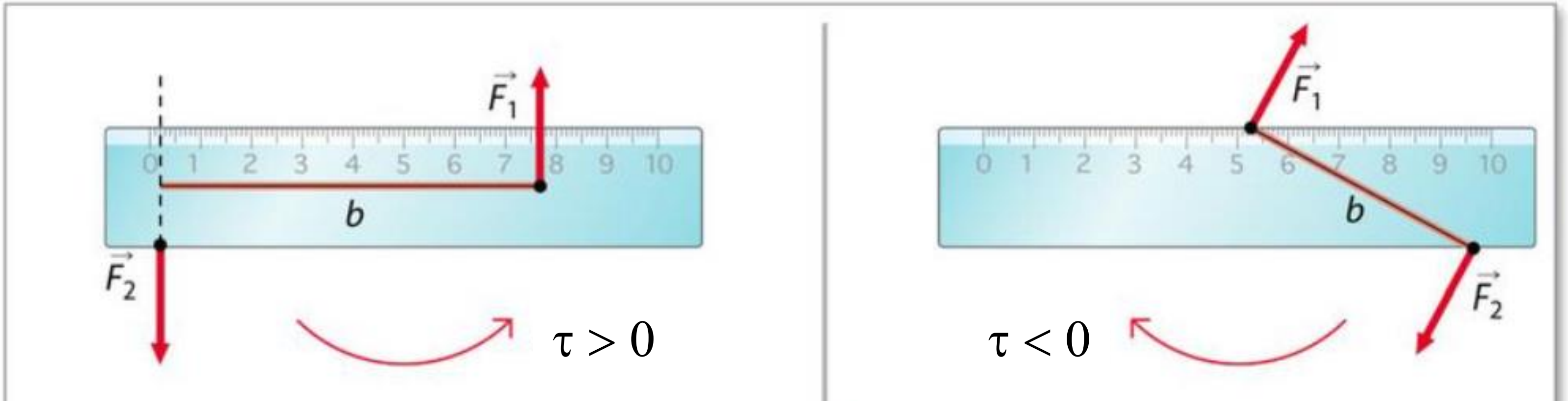
A Quando ruotiamo il manubrio della bicicletta applichiamo, con le mani, due forze uguali e opposte.

B Lo stesso succede quando giriamo una chiave nella toppa della serratura.

COPPIA DI FORZE

Momento positivo: la coppia produce rotazione **antioraria**

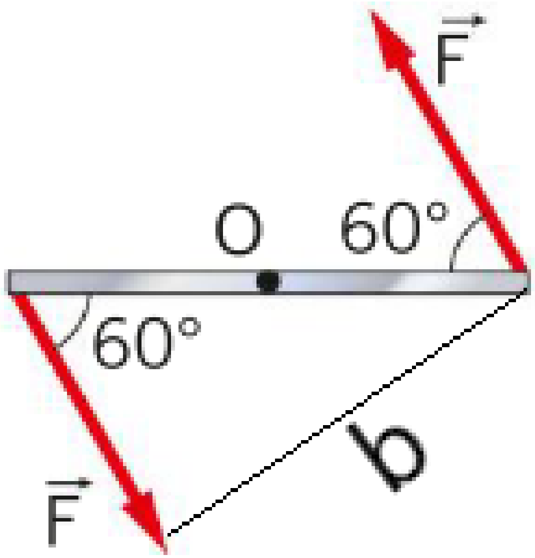
Momento negativo: la coppia produce rotazione **oraria**



a La coppia produce una rotazione antioraria; il momento è positivo.

b La coppia produce una rotazione oraria; il momento è negativo.

ESERCIZIO



Una coppia di forze, ognuna di valore 50.0 N, è applicata agli estremi di un’asta lunga L = 80.0 cm, vincolata nel centro.

Calcolare il valore del momento della coppia di forze.
Qual è il verso di rotazione dell’asta?

$$L = 80,0cm = 0,80m$$

quindi:

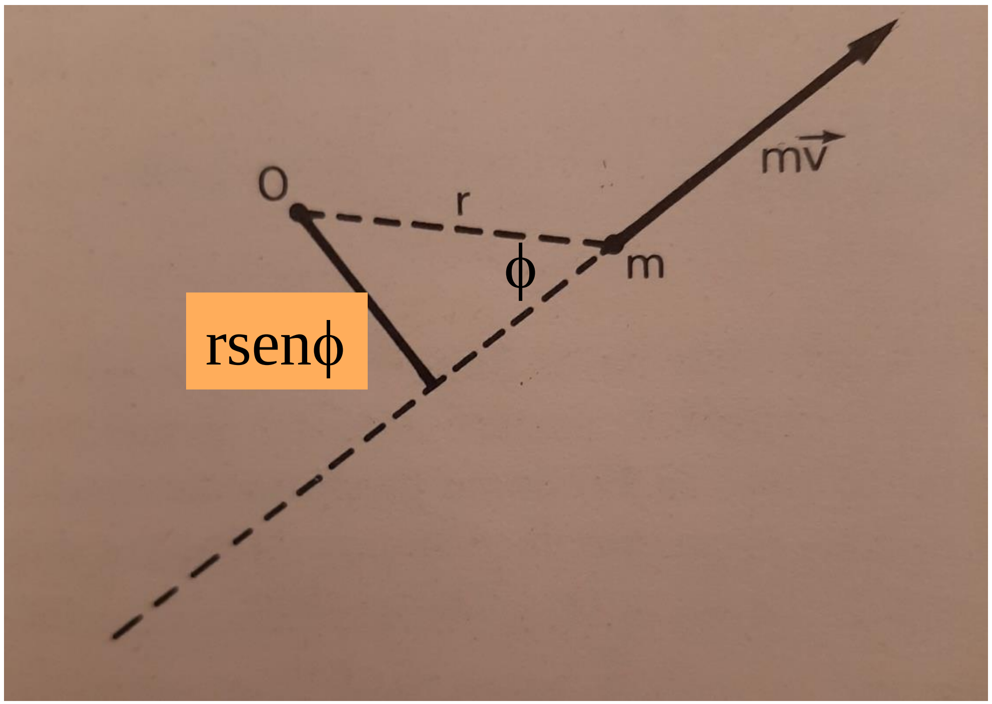
$$b = L \cdot sen(60) = 0,80 \cdot 0,87 = 0,69m$$

$$\tau = F \cdot b = 50(N) \cdot 0,69(m) = 34,6N \cdot m$$

2)La coppia fa ruotare l’asta in senso antiorario pertanto il momento prodotto è positivo.

Momento angolare (*o della quantità di moto*)

$$L = mv(rsen\phi)$$



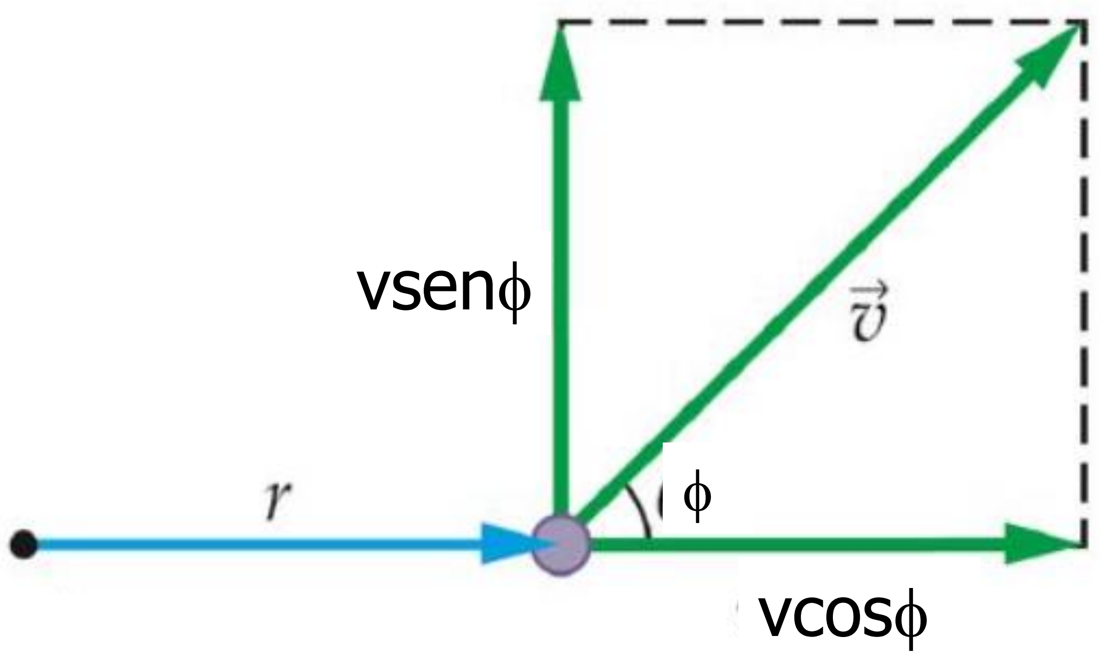
Il momento angolare, rispetto ad un punto fisso O, è il prodotto del modulo mv della quantità di moto per la distanza fra O e la retta individuata dal vettore velocità

[kg (m/s) m]= [kg m^2 s^{-1}]=[N m s]

(essendo N = kg m/s^2)

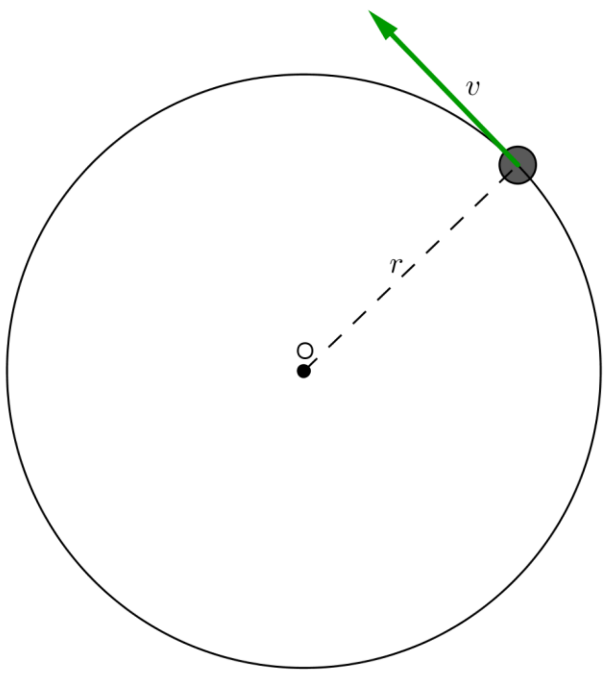
Momento angolare (*o della quantità di moto*)

$$L = rm(vsen\phi)$$



Momento angolare (*o della quantità di moto*)

Caso di un corpo di massa m che si muove con velocità **v** lungo una traiettoria circolare di raggio r



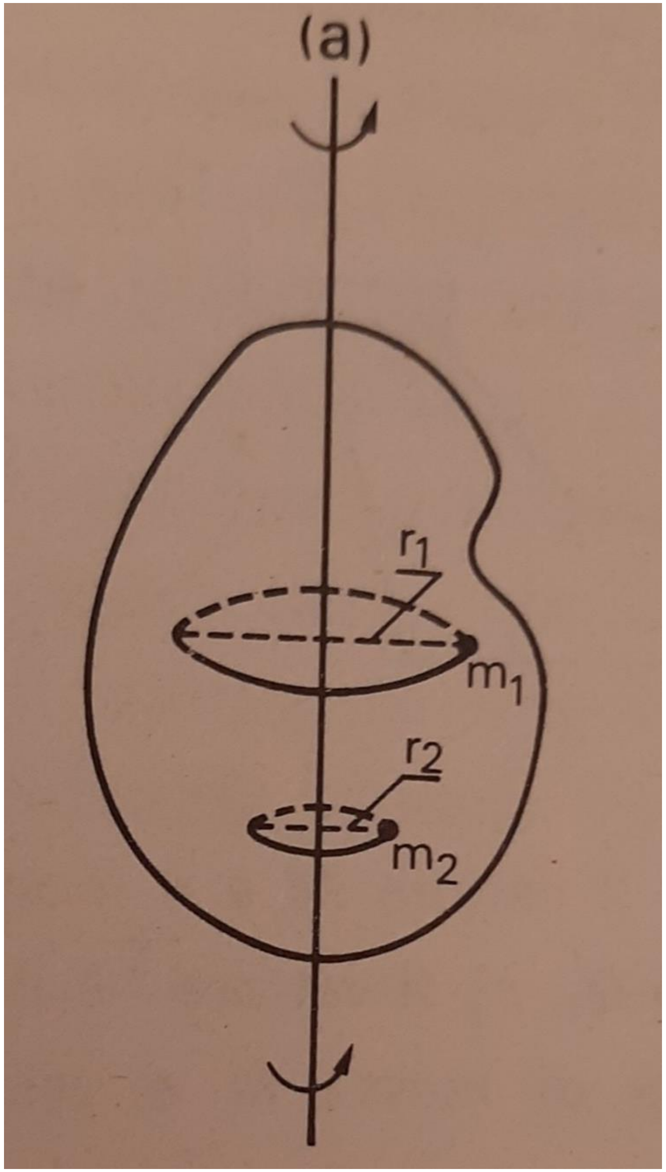
$$L = mvr$$

Momento angolare rispetto al centro O della circonferenza

$$v = r\omega$$

$$L = mr^2\omega$$

Corpo rigido che ruota intorno ad un asse



$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \ldots$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots = \sum_i m_i r_i^2$$

Momento di inerzia del corpo rigido

$$L = I\omega$$

$$p = mv$$

Relazione analoga traslazionale

Carattere vettoriale del momento

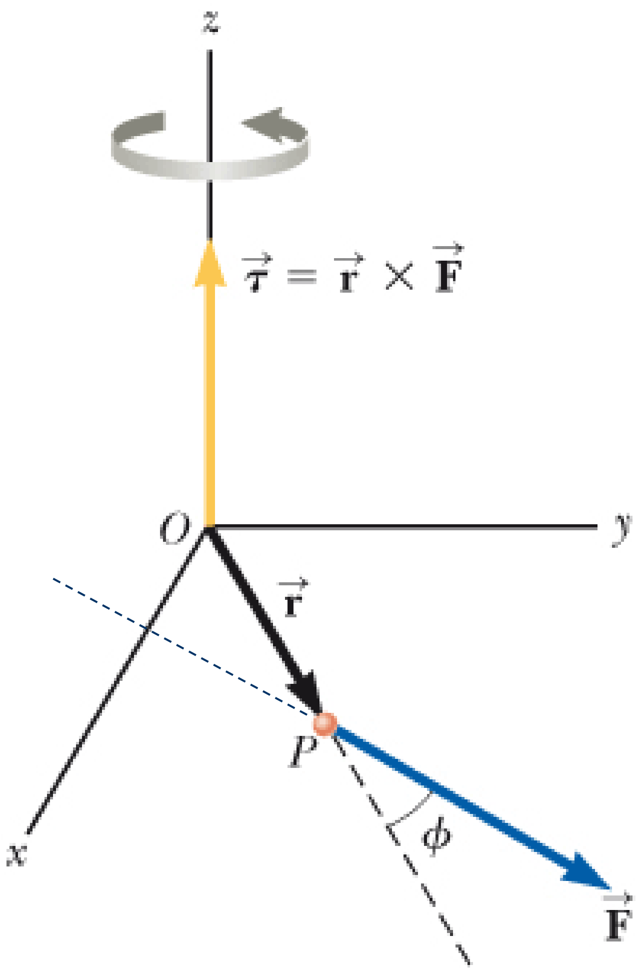


Figura 10.12 Il vettore momento meccanico $\vec{\tau}$ giace perpendicolarmente al piano formato dal vettore posizione $\vec{r}$ e dalla forza applicata $\vec{F}$.

$$\tau = rF sen\phi$$

Modulo del momento della forza

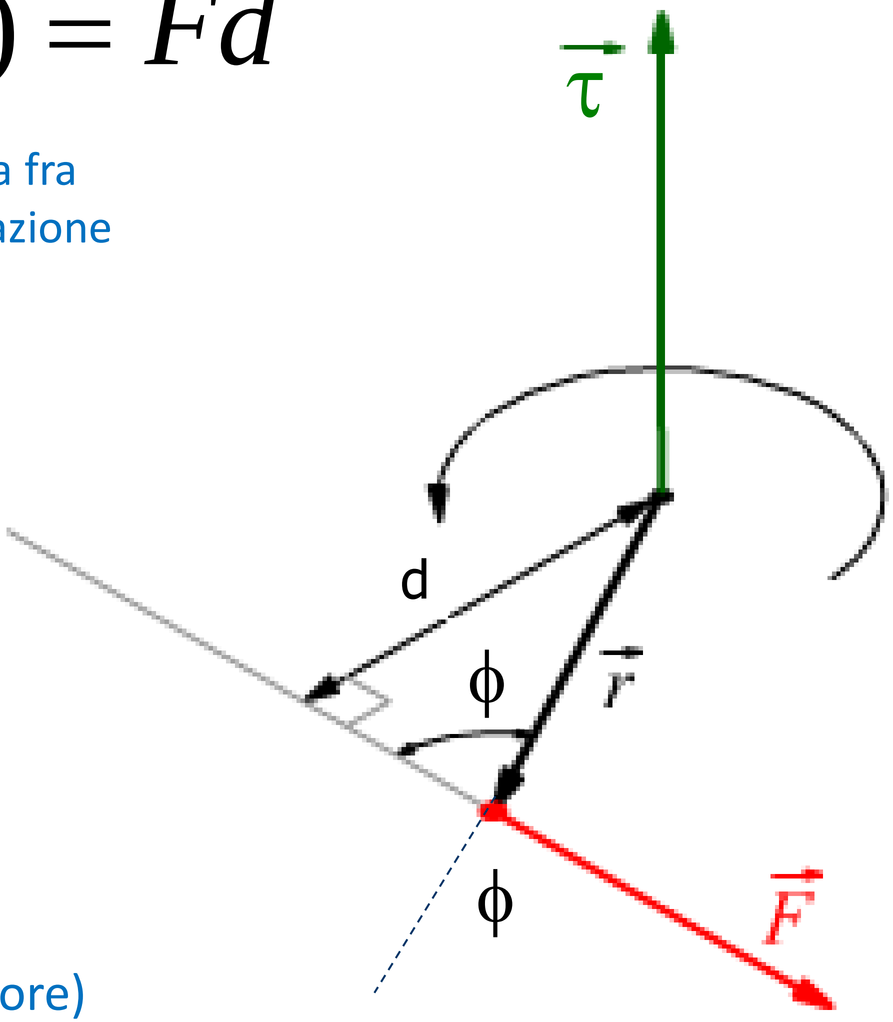
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Definizione di momento (vettore) usando il **prodotto vettoriale**

Carattere vettoriale del momento

$$\tau = F(r sen\phi) = Fd$$

d = braccio della forza (distanza fra l'asse di rotazione e la retta di azione della forza)



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Definizione di momento (vettore) usando il **prodotto vettoriale**

Prodotto vettoriale

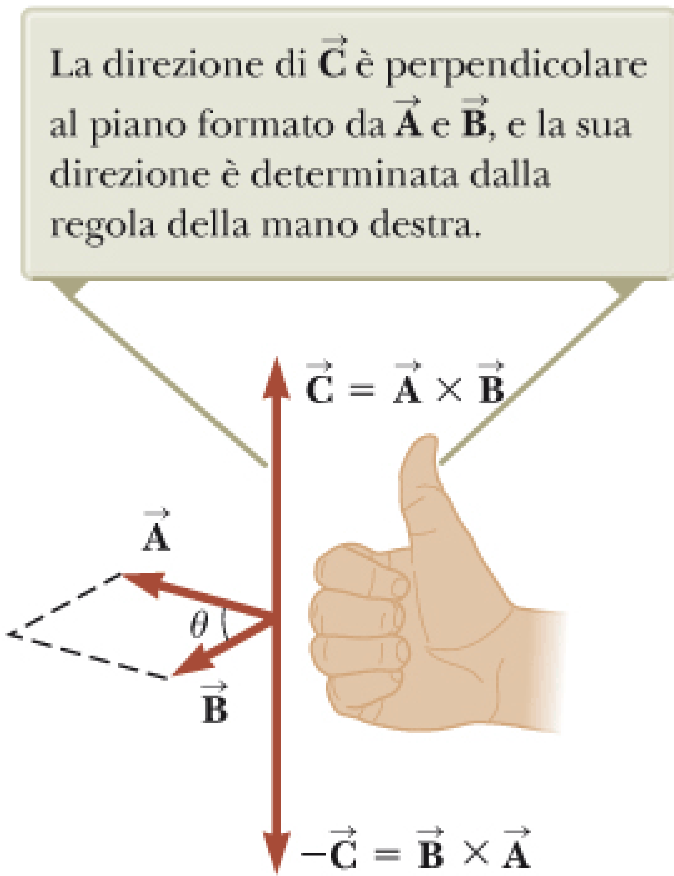


Figura 10.13 Il prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$ fornisce un terzo vettore $\vec{C}$ di modulo $AB \operatorname{sen} \theta$ pari all'area del parallelogramma disegnato.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\left|\vec{C}\right| = AB sen\,\theta$$

Non è commutativo (è anti-commutativo)

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Se **A** e **B** sono paralleli $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

Se **A** è perpendicolare a **B**

$$\vec{A} \times \vec{B} = \mathrm{AB}$$

Prodotto vettoriale

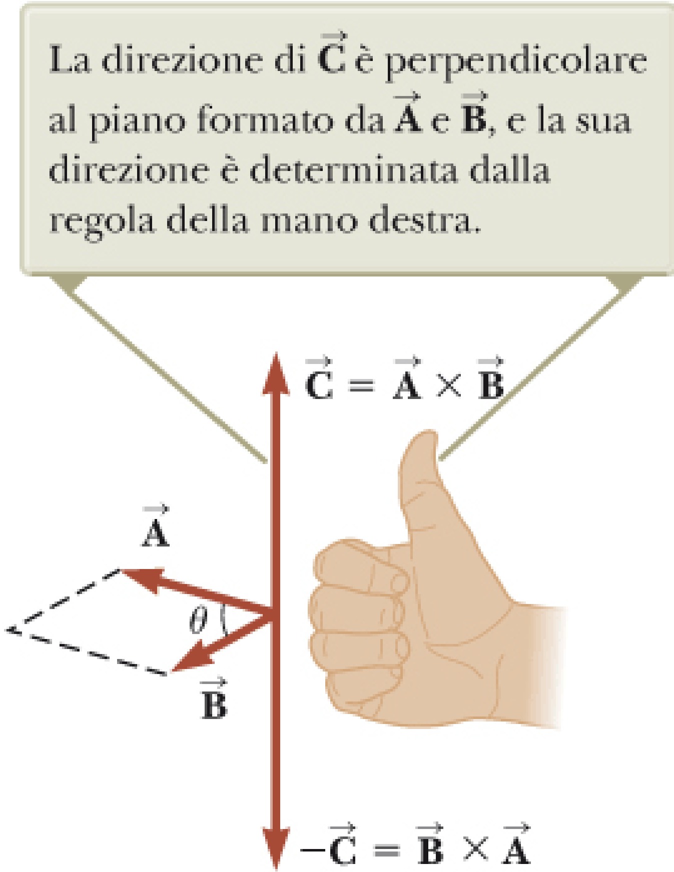


Figura 10.13 Il prodotto vettoriale $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ fornisce un terzo vettore $\vec{\mathbf{C}}$ di modulo AB sen θ pari all'area del parallelogramma disegnato.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\left|\vec{C}\right| = AB sen\,\theta$$

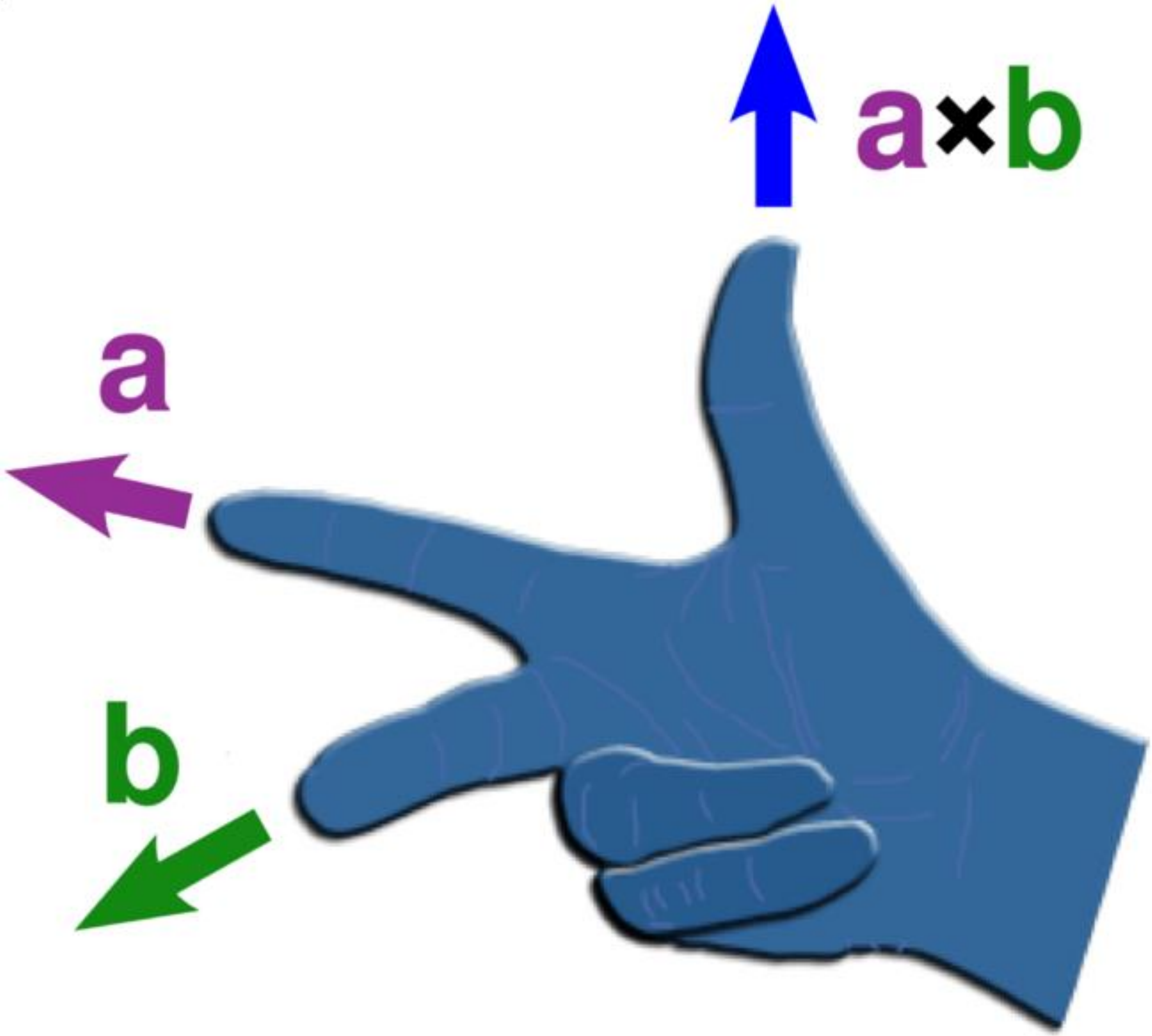
Obbedisce alla legge distributiva

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

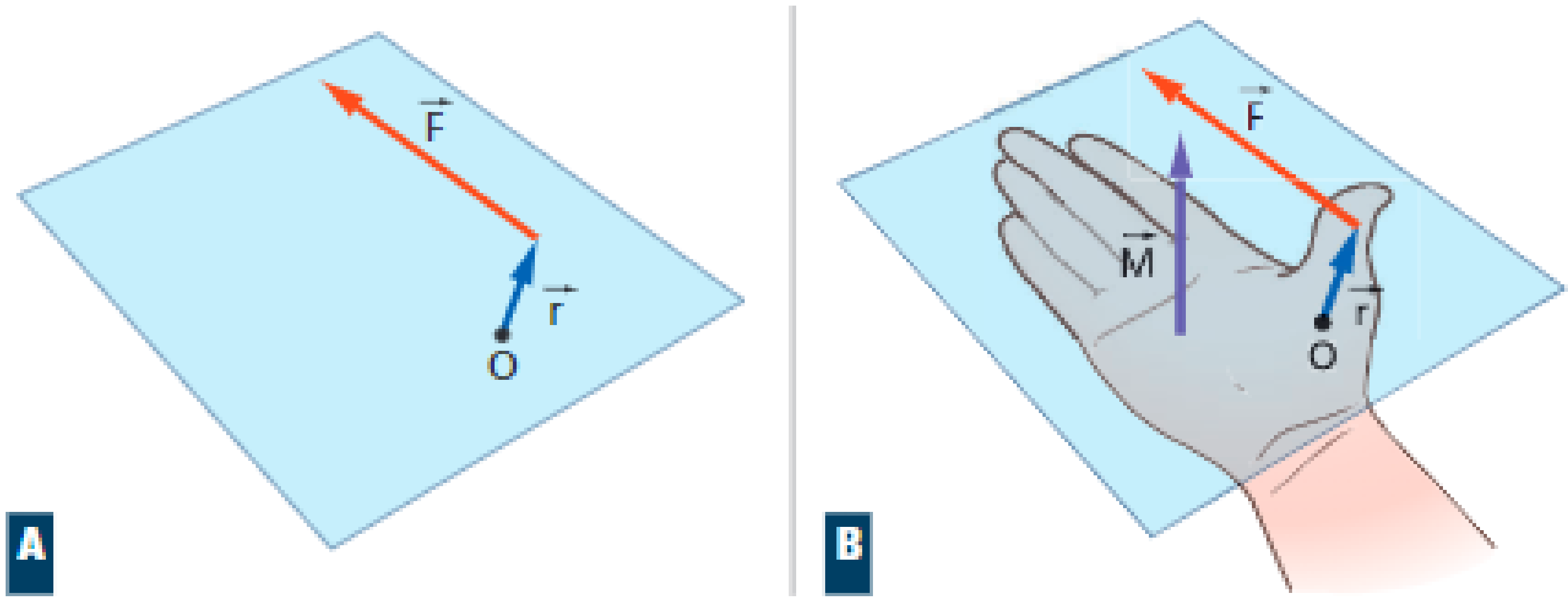
Derivata del prodotto vettoriale rispetto a una variabile t

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

EdiSES


a×b
a
b

Carattere vettoriale del momento



Direzione perpendicolare al piano che contiene la forza F e il punto O

Verso dato dalla **regola della mano destra**: mettendo il pollice da O al punto di applicazione della forza e le altre dita nel verso di F, il verso di M esce dal palmo della mano

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

I segni sono intercambiabili. Per esempio

$$\hat{i} \times (-\hat{j}) = -\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \qquad \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ESERCIZIO

Due vettori giacenti nel piano xy sono espressi dalle equazioni
A = 2 **i** + 3**j** e **B** = - **i** + 2**j**.

Determinare il prodotto vettoriale **A** × **B**

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

Eseguiamo il prodotto:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = \boxed{7\hat{\mathbf{k}}}$$

Due vettori giacenti nel piano xy sono espressi dalle equazioni
A = 2 **i** + 3**j** e **B** = - **i** + 2**j**.

Determinare il prodotto vettoriale **A** × **B**

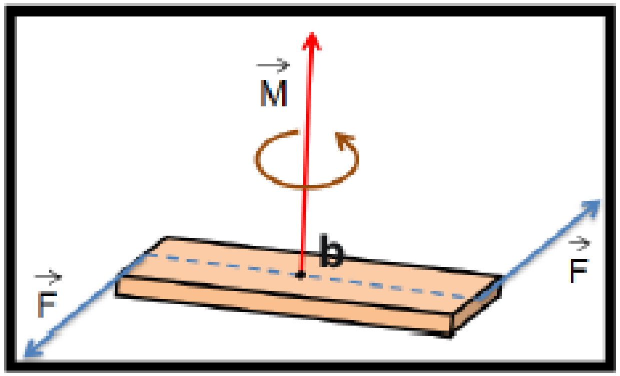
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4+3)\,\hat{k} = 7\,\hat{k}$$

Verificare che **A** × **B** = - **B** × **A**

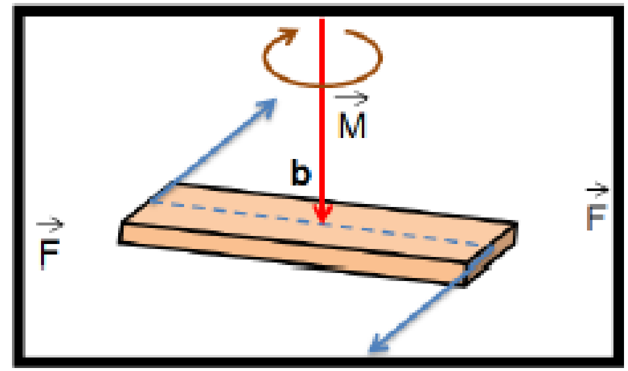
$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3-4) = -7\,\hat{k}$$

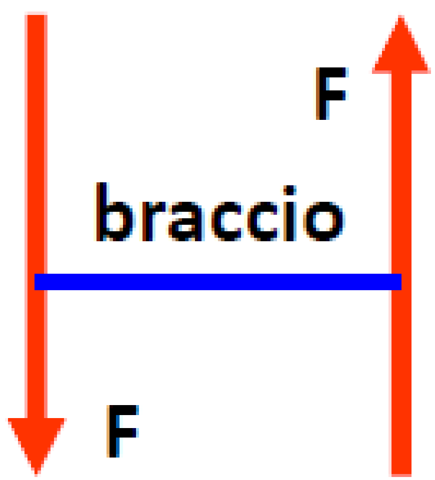
COPPIA DI FORZE

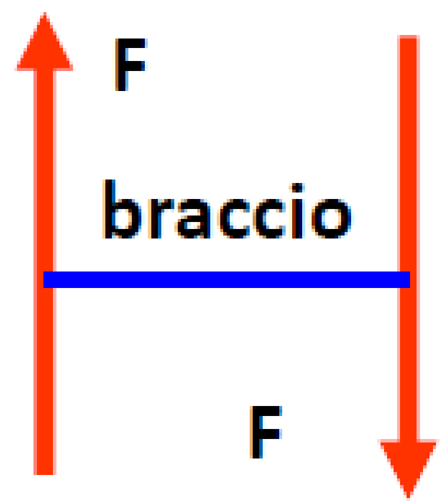
Antioraria



Oraria







Verso del momento è uscente dal piano

Verso del momento è entrante nel piano