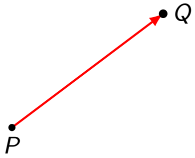
Definizione di vettore applicato

Dati due punti P e Q del piano o dello spazio, per **vettore geometrico applicato** in P e di estremo Q si intende il segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$.
Si può definire anche come coppia ordinata di punti (P, Q) e si denota anche con $Q - P$.

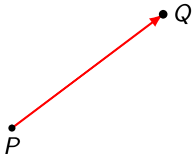


I vettori applicati sono caratterizzati da:

- **una direzione**, quella della retta cui appartengono;
- **un verso**, quello che si osserva percorrendo il segmento orientato da P a Q;
- **un modulo**, indicato con $|PQ|$, che è il numero reale non negativo che esprime la lunghezza del segmento.

Definizione di vettore applicato

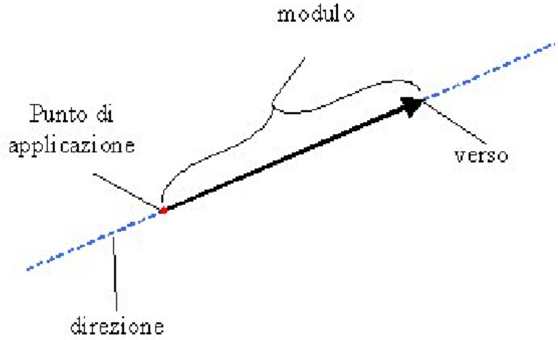
Dati due punti P e Q del piano o dello spazio, per **vettore geometrico applicato** in P e di estremo Q si intende il segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$.
Si può definire anche come coppia ordinata di punti (P, Q) e si denota anche con $Q - P$.



I vettori applicati sono caratterizzati da:

- **una direzione**, quella della retta cui appartengono;
- **un verso**, quello che si osserva percorrendo il segmento orientato da P a Q;
- **un modulo**, indicato con $|PQ|$, che è il numero reale non negativo che esprime la lunghezza del segmento.

Osservazioni. Se P coincide con Q, allora (P, Q) è detto **vettore nullo** e viene indicato con $\mathbf{0}$.
Il vettore geometrico **opposto** al vettore $\overrightarrow{PQ}$ (indicato con $-\overrightarrow{PQ}$) è il vettore $\overrightarrow{PQ'}$, ove Q' è il simmetrico di Q rispetto a P.
Un vettore applicato è detto **versore** di una retta se giace su quella retta ed è di modulo unitario.


modulo
Punto di
applicazione
verso
direzione

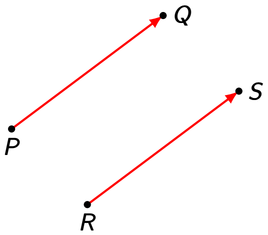
Nell'insieme dei vettori applicati del piano (o dello spazio) $\mathcal{V}$, si può definire la seguente **relazione di equipollenza**.

Relazione di equipollenza

Due vettori applicati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ sono **equipollenti** se e solo se sono paralleli (appartengono a rette parallele), concordi (hanno lo stesso verso) e hanno uguale modulo.

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}) \in R \Leftrightarrow \text{i segmenti sono } ||, \text{ concordi e } |PQ| = |RS|$$

Si dice anche che due vettori applicati sono **equipollenti** se esiste una traslazione (movimento rigido del piano) che permette di sovrapporre l'uno all'altro.



La relazione di equipollenza è una relazione di **equivalenza** (valgono le proprità riflessiva, simmetrica e transitiva).

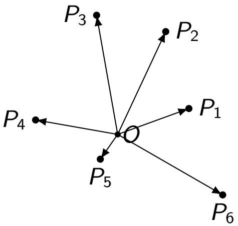
Vettori liberi

La relazione di equipollenza è una relazione di **equivalenza** (valgono le proprità riflessiva, simmetrica e transitiva).
Le **classi di equivalenza** inducono una **partizione** nell'insieme dei vettori applicati del piano (o dello spazio): esse sono non vuote, disgiunte a due a due e la loro unione è l'insieme dei vettori.
Ogni **classe di equivalenza** è un elemento dell'**insieme quoziente** $\mathcal{V}/R$, denotato con V e chiamato **insieme dei vettori liberi** del piano (o dello spazio).

Vettori liberi

La relazione di equipollenza è una relazione di **equivalenza** (valgono le proprità riflessiva, simmetrica e transitiva).
Le **classi di equivalenza** inducono una **partizione** nell'insieme dei vettori applicati del piano (o dello spazio): esse sono non vuote, disgiunte a due a due e la loro unione è l'insieme dei vettori.
Ogni **classe di equivalenza** è un elemento dell'**insieme quoziente** $\mathcal{V}/R$, denotato con V e chiamato **insieme dei vettori liberi** del piano (o dello spazio).
Una classe di equivalenza è composta da tutti i vettori applicati equipollenti a un vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$ e può essere rappresentata da un qualsiasi vettore applicato ad essa appartenente. Si denota la classe con $[\overrightarrow{PQ}]$.

La relazione di equipollenza è una relazione di **equivalenza** (valgono le proprità riflessiva, simmetrica e transitiva).
Le **classi di equivalenza** inducono una **partizione** nell'insieme dei vettori applicati del piano (o dello spazio): esse sono non vuote, disgiunte a due a due e la loro unione è l'insieme dei vettori.
Ogni **classe di equivalenza** è un elemento dell'**insieme quoziente** $\mathcal{V}/R$, denotato con V e chiamato **insieme dei vettori liberi** del piano (o dello spazio).
Una classe di equivalenza è composta da tutti i vettori applicati equipollenti a un vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$ e può essere rappresentata da un qualsiasi vettore applicato ad essa appartenente. Si denota la classe con $[\overrightarrow{PQ}]$.
Ciò vuol dire che, fissato un punto O del piano (o dello spazio), **ciascuna classe di equivalenza possiede un rappresentante applicato in O**, ossia **O i vettori applicati in sono rappresentanti di tutti i vettori liberi.**



L'insieme V e il piano

Dato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano di origine O, la funzione che associa ad ogni punto P la classe di equivalenza di $\overrightarrow{OP}$ in V è biettiva:

$$\pi \to V \qquad P \mapsto [\overrightarrow{OP}]$$

Dato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano di origine O, la funzione che associa ad ogni punto P la classe di equivalenza di $\overrightarrow{OP}$ in V è biettiva:

$$\pi \to V \qquad P \mapsto [\overrightarrow{OP}]$$

D'altra parte, ad ogni punto P del piano è associato in modo biunivoco una coppia ordinata di numeri reali, ossia le coordinate (x_P, y_P):

$$\mathbb{R}^2 \to \pi \qquad (x_P, y_P) \mapsto P$$

Dato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano di origine O, la funzione che associa ad ogni punto P la classe di equivalenza di $\overrightarrow{OP}$ in V è biettiva:

$$\pi \to V \qquad P \mapsto [\overrightarrow{OP}]$$

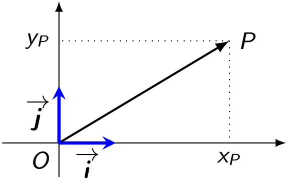
D'altra parte, ad ogni punto P del piano è associato in modo biunivoco una coppia ordinata di numeri reali, ossia le coordinate (x_P, y_P):

$$\mathbb{R}^2 \to \pi \qquad (x_P, y_P) \mapsto P$$

Pertanto esiste una **applicazione biettiva** tra una coppia ordinata di numeri reali, che sono le **coordinate** di P, e la classe di equivalenza di $\overrightarrow{OP}$, ossia il vettore libero $[\overrightarrow{OP}]$:

$$\mathbb{R}^2 \to V \qquad (x_P, y_P) \mapsto [\overrightarrow{OP}]$$

Questo fatto permette di **identificare** P con il vettore $[\overrightarrow{OP}]$ e con la coppia di coordinate (x_P, y_P) di P, che si dicono le coordinate di $[\overrightarrow{OP}]$.



I vettori unitari sugli assi coordinati si indicano convenzionalmente con $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e si dicono **versori degli assi cartesiani**.

Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nello spazio di origine O, si può ragionare nello spazio in modo analogo, ottenendo una corrispondenza biunivoca tra le terne ordinate di numeri reali e i vettori liberi dello spazio:

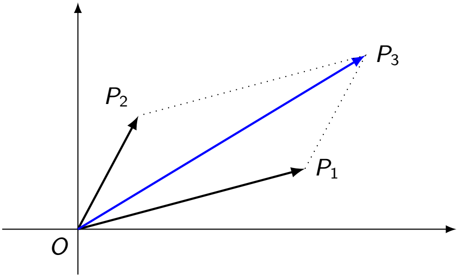
$$\mathbb{R}^3 \to V \qquad (x_P, y_P, z_P) \mapsto [\overrightarrow{OP}]$$

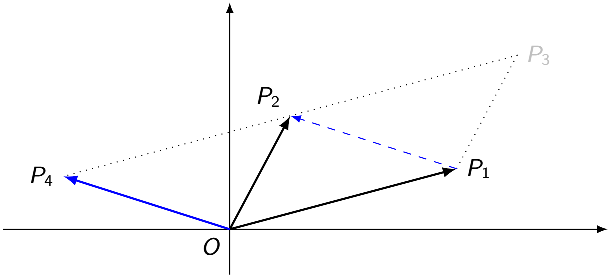
In questo caso i vettori unitari sugli assi coordinati si indicano convenzionalmente con $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ e si dicono **versori degli assi cartesiani**.

D'ora in avanti ogni volta che consideriamo un vettore libero assumiamo di prendere come rappresentante un vettore applicato nell'origine del riferimento.

Dati due vettori liberi $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ e i due vettori applicati $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ che li rappresentano, si definisce come **somma dei due vettori** il vettore libero $\boldsymbol{v}_3$ rappresentato dal vettore applicato $\overrightarrow{OP_3}$, ottenuto con la cosiddetta **regola del parallelogramma**: $\overrightarrow{OP_3}$ è la diagonale del parallelogramma di cui $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ sono lati:

Il vettore somma si può ottenere anche applicando all'estremo del primo vettore, $\overrightarrow{OP_1}$, un vettore $\overrightarrow{P_1P_3}$ equipollente al secondo, $\overrightarrow{OP_2}$.





Dalla definizione di somma si ricava quella di **differenza di due vettori** $\boldsymbol{v}_2 = [\overrightarrow{OP_2}]$ e $\boldsymbol{v}_1 = [\overrightarrow{OP_1}]$: la differenza di $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ è il vettore rappresentato dal vettore applicato $\overrightarrow{OP_4}$, ossia è il lato del parallelogramma avente $\overrightarrow{OP_2}$ come diagonale e $\overrightarrow{OP_1}$ come altro lato.
Si può anche vedere la differenza di $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ come l'altra diagonale del parallelogramma di cui $\overrightarrow{OP_2}$ e $\overrightarrow{OP_1}$ sono lati (orientata dal secondo vettore al primo).

Somma di vettori

Per la legge di composizione interna di somma tra vettori

$$V \times V \to V$$
$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \mapsto \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

valgono le seguenti proprietà:

- $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$ per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà associativa**)

Somma di vettori

Per la legge di composizione interna di somma tra vettori

$$V \times V \to V$$
$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \mapsto \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

valgono le seguenti proprietà:

- $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$ per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà associativa**)
- esiste l'elemento neutro, che è la classe di equivalenza del vettore nullo, indicato con $\mathbf{0}$: $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ (**esistenza dell'elemento neutro**)

Per la legge di composizione interna di somma tra vettori

$$V \times V \to V$$
$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \mapsto \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

valgono le seguenti proprietà:

- $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$ per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà associativa**)
- esiste l'elemento neutro, che è la classe di equivalenza del vettore nullo, indicato con $\mathbf{0}$: $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ (**esistenza dell'elemento neutro**)
- per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ esiste $-\boldsymbol{v}$ tale che $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ (**esistenza dell'elemento opposto**)

Per la legge di composizione interna di somma tra vettori

$$V \times V \to V$$
$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \mapsto \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

valgono le seguenti proprietà:

- $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$ per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà associativa**)
- esiste l'elemento neutro, che è la classe di equivalenza del vettore nullo, indicato con $\mathbf{0}$: $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ (**esistenza dell'elemento neutro**)
- per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ esiste $-\boldsymbol{v}$ tale che $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ (**esistenza dell'elemento opposto**)
- $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$ per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà commutativa**)

Per la legge di composizione interna di somma tra vettori

$$V \times V \to V$$
$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \mapsto \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

valgono le seguenti proprietà:

- $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$ per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà associativa**)
- esiste l'elemento neutro, che è la classe di equivalenza del vettore nullo, indicato con $\mathbf{0}$: $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ (**esistenza dell'elemento neutro**)
- per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ esiste $-\boldsymbol{v}$ tale che $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ (**esistenza dell'elemento opposto**)
- $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$ per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà commutativa**)

$(V, +)$ **è un gruppo commutativo**.

Prodotto di un vettore per uno scalare

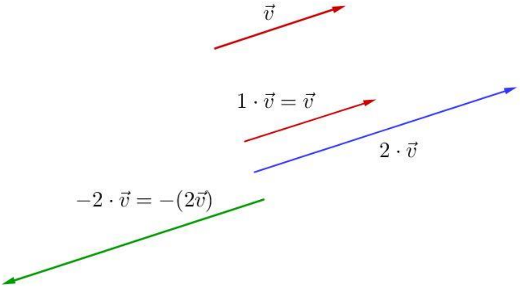
Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore (rappresentato dal vettore applicato $\overrightarrow{OP}$) e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero reale.

Si definisce il vettore $\alpha\boldsymbol{v}$ come la classe di equivalenza del vettore $\mathbf{0}$ se $\alpha = 0$, oppure quella del vettore applicato con direzione uguale a quella di $\overrightarrow{OP}$, verso concorde se $\alpha > 0$, discorde se $\alpha < 0$ e modulo uguale a $|\alpha||OP|$.

Prodotto di un vettore per uno scalare

Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore (rappresentato dal vettore applicato $\overrightarrow{OP}$) e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero reale.

Si definisce il vettore $\alpha\boldsymbol{v}$ come la classe di equivalenza del vettore $\mathbf{0}$ se $\alpha = 0$, oppure quella del vettore applicato con direzione uguale a quella di $\overrightarrow{OP}$, verso concorde se $\alpha > 0$, discorde se $\alpha < 0$ e modulo uguale a $|\alpha||OP|$.



Prodotto di un vettore per uno scalare

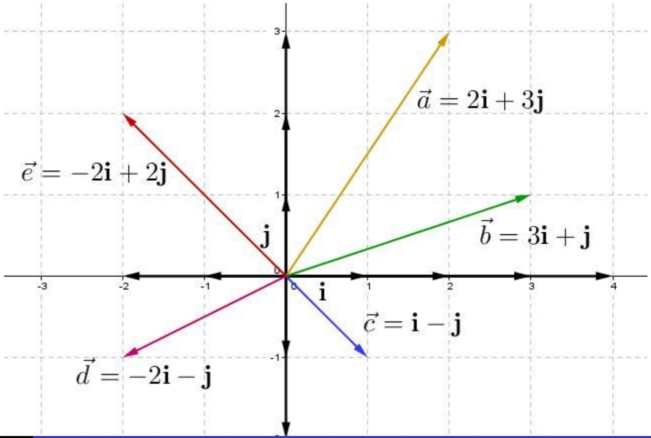
Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore (rappresentato dal vettore applicato $\overrightarrow{OP}$) e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero reale.
Si definisce il vettore $\alpha\boldsymbol{v}$ come la classe di equivalenza del vettore $\mathbf{0}$ se $\alpha = 0$, oppure quella del vettore applicato con direzione uguale a quella di $\overrightarrow{OP}$, verso concorde se $\alpha > 0$, discorde se $\alpha < 0$ e modulo uguale a $|\alpha||OP|$.

Il prodotto per uno scalare è una legge di composizione esterna $\mathbb{R} \times V \to V$ tale che valgono le seguenti proprietà:

- $\alpha(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in V$ (**associatività mista**)
- $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in V$ (**distributiva del prodotto rispetto alla somma di reali**)
- $\alpha(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \alpha\boldsymbol{v}_2$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**distributiva del prodotto rispetto alla somma di vettori**)
- $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ per ogni $\boldsymbol{v} \in V$, ove $1 \in \mathbb{R}$ (**elemento neutro per il prodotto**)

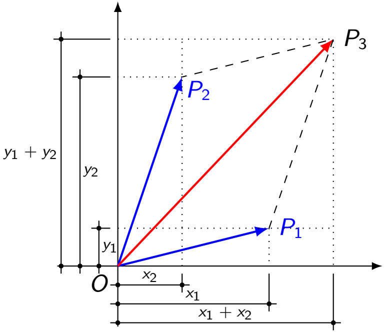
Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano di origine O, è facile vedere che un vettore applicato $\overrightarrow{OP}$, ove (x, y) sono le coordinate di P, si può scrivere come $x\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$.

Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano di origine O, è facile vedere che un vettore applicato $\overrightarrow{OP}$, ove (x, y) sono le coordinate di P, si può scrivere come $x\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$.



Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano di origine O, è facile vedere che un vettore applicato $\overrightarrow{OP}$, ove (x, y) sono le coordinate di P, si può scrivere come $x\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$.
Allora dati due vettori liberi $\boldsymbol{v}_1 = [\overrightarrow{OP_1}]$ e $\boldsymbol{v}_2 = [\overrightarrow{OP_2}]$, con P_1 di coordinate (x_1, y_1) e P_2 di coordinate (x_2, y_2), allora il **vettore somma** $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ ha come rappresentante il vettore applicato $\overrightarrow{OP_3}$ ove P_3 ha coordinate

$$(x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



Grazie all'uso delle coordinate, il vettore somma si ottiene in modo algebrico:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 &= (x_1\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_1\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}) + (x_2\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_2\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}) \\ &= (x_1 + x_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + (y_1 + y_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\end{aligned}$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora il **vettore prodotto per uno scalare** $\alpha \boldsymbol{v}_1$ ha come rappresentante il vettore applicato $\overrightarrow{OQ}$ ove Q ha coordinate

$$(x_Q, y_Q) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

Usando le coordinate, il vettore prodotto si ottiene in modo algebrico:

$$\alpha \boldsymbol{v}_1 = \alpha(x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{j}}) = (\alpha x_1) \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + (\alpha y_1) \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$$

Inoltre applicando il teorema di Pitagora, il **modulo di un vettore** v rappresentato da $\overrightarrow{OQ}$ ove Q ha coordinate (x_Q, y_Q) è dato da

$$|OQ| = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}$$

Più in generale per un segmento applicato $\overrightarrow{AB}$ con A di coordinate (x_A, y_A) e B di coordinate (x_B, y_B), il modulo è dato da

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Inoltre due vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono **uguali** se $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2}$, ossia $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Analogamente avviene per i vettori nello spazio.
Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nello spazio di origine O, è facile vedere che un vettore rappresentato da un vettore applicato $\overrightarrow{OP}$, ove (x, y, z) sono le coordinate di P, si può scrivere come $x\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z\,\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$.
Allora dati due vettori liberi $\boldsymbol{v}_1 = [\overrightarrow{OP_1}]$ e $\boldsymbol{v}_2 = [\overrightarrow{OP_2}]$, con P_1 di coordinate (x_1, y_1, z_1) e P_2 di coordinate (x_2, y_2, z_2), allora il **vettore somma** $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ ha come rappresentante il vettore applicato $\overrightarrow{OP_3}$ ove P_3 ha coordinate

$$(x_3, y_3, z_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora **vettore prodotto per uno scalare** $\alpha \boldsymbol{v}_1$ ha come rappresentante il vettore applicato $\overrightarrow{OQ}$ ove Q ha coordinate

$$(x, y, z) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

Inoltre applicando il teorema di Pitagora, il **modulo di un vettore $\boldsymbol{v}$** rappresentato da $\overrightarrow{OQ}$ ove Q ha coordinate (x, y, z) è dato da

$$|OQ| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Più in generale per un segmento applicato $\overrightarrow{AB}$ con A di coordinate (x_A, y_A, z_A) e B di coordinate (x_B, y_B, z_B), il modulo è dato da

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Inoltre due vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono **uguali** se $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2}$, ossia $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.