1. Dato uno spazio vettoriale V e un vettore $v_0 \in V$, mostrare che $T: V \to V$ definita come $T(v) = v + v_0$ è lineare se e solo se $v_0 = 0$.

T è lineare se e solo se

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u) \qquad \forall \alpha, \beta \in R, u, v \in V$$

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha v + \beta u + v_0 \qquad (*)$$

$$\alpha T(v) + \beta T(u) = \alpha(v + v_0) + \beta(u + v_0) \qquad (**)$$

<u>Eguaglio (*) e (**) per vedere le condizioni.</u>

$$\alpha v + \beta u + v_0 = \alpha v + \alpha v_0 + \beta u + \beta v_0$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0 = (\alpha + \beta) v_0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \alpha - \beta) v_0 = 0 \quad \forall \alpha, \beta$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0 = 0$$

2. Dato uno spazio vettoriale V e un vettore $v_0 \in V$, mostrare che $T: V \to V$ definita come $T(v) = v_0$ è lineare se e solo se $v_0 = 0$.

T è lineare se e solo se

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u) \qquad \forall \alpha, \beta \in R, u, v \in V$$

$$T(\alpha v + \beta u) = v_0 \qquad (*)$$

$$\alpha T(v) + \beta T(u) = \alpha v_0 + \beta v_0 \qquad (**)$$

Eguaglio (*) e (**) per vedere le condizioni.

$$v_0 = \alpha v_0 + \beta v_0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1-(\alpha+\beta))\, v_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_0 = 0$$
$$\forall \alpha, \beta$$

3. Si dice traccia di una matrice quadrata A di ordine n la somma degli elementi diagonali:

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \quad + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Mostrare che $\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare.

Dati A e B di ordine n, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Occorre verificare che:

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B)$$

Si considera:

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = (\alpha a_{11} + \beta b_{11}) + \dots + (\alpha a_{nn} + \beta b_{nn})$$
$$= \alpha(a_{11} + \dots + a_{nn}) + \beta(b_{11} + \dots + b_{nn}) \quad \Delta$$

$$\alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B) = \alpha(a_{11} + \quad + a_{nn}) + \beta(b_{11} + \quad + b_{nn}) \quad \Delta\Delta$$

Poiché Δ e $\Delta\Delta$ sono uguali, tr è lineare.

4. Sia $A \in M_{mn}(R)$ fissata.
Mostrare che l'applicazione $f : M_{np}(R) \to M_{mp}(R)$ definita da $f(B) = AB$ è lineare.

Occorre verificare che

$$f(\alpha B + \beta C) = \alpha f(B) + \beta f(C) \quad \forall \alpha, \beta \quad \forall B, C \in M_{np}(R)$$

Si considera:

$$f(\alpha B + \beta C) = A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC \quad (1)$$

(AB e AC sono moltiplicabili)
(A e $\alpha B + \beta C$ sono moltiplicabili)

$$\alpha f(B) + \beta f(C) = \alpha AB + \beta AC \quad (11)$$

Poiché (1) e (11) sono uguali, f è lineare.

6. Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3, 0)$. Dire se f è lineare; trovare $\mathrm{Im} f$ e la sua dimensione; trovare $\mathrm{Ker} f$ e la sua dimensione.

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- f è lineare se e solo se $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vale che

$$f\left(\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha_1 f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha_2 f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Si verifica:

$$f\left(\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \\ 0 \\ \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Delta}$$

$$\alpha_1 f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha_2 f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\Delta\Delta}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \\ 0 \\ \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siccome Δ e $\Delta\Delta$ sono uguali, f è lineare

$$\mathrm{Imm}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^4 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1, x_3 \in R \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Poiché $\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right)$

$\dim \mathrm{Imm} f = 2$.

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \text{ tali che } f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^3 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad \dim \mathrm{Ker} f = 1$$

7. Sia $f: R^4 \to R^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$
$= (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$.
Dire se f è lineare; trovare $\mathrm{Im}\, f$ e la sua dimensione, $\mathrm{Ker}\, f$ e la sua dimensione.

$$f: R^4 \longrightarrow R^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Occorre verificare che, $\forall \alpha, \beta \in R$ e

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in R^4$ vale che

$$f\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = \alpha f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \beta f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = f \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \\ \alpha x_4 + \beta y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 - (\alpha x_3 + \beta y_3) \\ \alpha x_1 + \beta y_1 + (\alpha x_3 + \beta y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) \\ \alpha(x_2 - x_3) + \beta(y_2 - y_3) \\ \alpha(x_1 + x_3) + \beta(y_1 + y_3) \end{pmatrix} \quad \Delta$$

$$\alpha f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+\beta f\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2-x_3\\x_1+x_3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y_1+y_2\\y_2-y_3\\y_1+y_3\end{pmatrix}$$

$$\text{(11)}\quad =\begin{pmatrix}\alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2)\\\alpha(x_2-x_3)+\beta(y_2-y_3)\\\alpha(x_1+x_3)+\beta(y_1+y_3)\end{pmatrix}$$

Poiché (1) e (11) sono uguali, f è lineare.

$$\operatorname{Imm} f=\left\{\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2-x_3\\x_1+x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=1-1=0 \qquad \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$\dim \operatorname{Imm} f=2$$

$$\operatorname{Ker} f=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}: f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}: \begin{matrix}x_1+x_2=0\\x_2-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{matrix}\right\}$$

Si risolve il sistema omogeneo.

Si toglie la terza equazione -

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \dim \operatorname{Ker} f = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$