Esercizi sui metodi per la risoluzione di equazioni non lineari
Prof. V. Ruggiero

Teoria

1. Determinare quanti passi del metodo di bisezione occorrono per calcolare un'approssimazione della soluzione dell'equazione $e^{x/2}/2 - x = 0$ in $[4, 5]$ con una tolleranza pari a 10^{-2}. Calcolare tale approssimazione.

2. Determinare con il metodo di Newton e con il metodo delle secanti un'approssimazione della soluzione dell'equazione $e^{x/2}/2 - x = 0$ in $[4, 5]$.

3. Determinare con il metodo delle approssimazioni successive un'approssimazione dalla soluzione dell'equazione $e^{x/2}/2 - x = 0$ in $[4, 5]$. Verificare le condizioni di convergenza per la funzione usata nel metodo.

4. Determinare un'approssimazione della soluzione dell'equazione $x^3 - x - 1 = 0$ in $[1.2, 2]$ usando il metodo delle approssimazioni successive.

5. Determinare un'approssimazione della soluzione dell'equazione $x^3 - x - 1 = 0$ in $[1.2, 2]$ usando la *regula falsi* e il metodo di Newton. In tale intervallo il metodo di Newton è globalmente convergente?

6. Determinare un'approssimazione della soluzione dell'equazione $x^3 - x - 1 = 0$ in $[1.2, 2]$ mediante il metodo di bisezione, calcolando a priori quanti passi occorreranno per avere un'accuratezza non peggiore di 10^{-5}.

7. Determinare quanti passi del metodo di bisezione occorrono per calcolare un'approssimazione della soluzione dell'equazione $\exp(-x/10)\sin(x/10) = 0$ in $[-0.4, -0.2]$ con una tolleranza pari a 10^{-2}. Calcolare tale approssimazione.

8. Calcolare un'approssimazione della soluzione dell'equazione $x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$ in $[0, 1.7]$ con il metodo di Newton. Verificare se il metodo di Newton è globalmente convergente nell'intervallo.

9. Calcolare un'approssimazione della soluzione dell'equazione relativa al precedente esercizio con il metodo delle secanti.

10. Calcolare un'approssimazione della soluzione dell'equazione $x = \sqrt{x + 2}$ in $[0, 7]$ con il metodo delle approssimazioni successive. Verificare che in tale intervallo il metodo sia globalmente convergente.

11. Trovare un'approssimazione a $\sqrt[3]{25}$ entro l'accuratezza 10^{-4} usando l'algoritmo di bisezione.

12. Usare il metodo di Newton (applicato a f/f') per trovare un'approssimazione di una radice di $f(x) = x^2 + 2xe^x + e^{2x}$ partendo da $x_0 = 0$ e facendo al massimo 10 iterazioni.

13. Dati un cerchio di centro O e raggio r e una corda AB, l'area S del segmento circolare sotteso dall'arco relativo alla corda è data da
$$S = \frac{r^2}{2}\bigl(x - \sin(x)\bigr)$$
dove x è l'angolo $\widehat{AOB}$. L'area e il raggio siano assegnati: $S = 0.5$, $r = 2$. Si determini con il metodo del punto fisso l'angolo x corrispondente. Verificare che siano soddisfatte le condizioni di convergenza.

14. La funzione
$$f(x) = B(1+x)^n - R\frac{(1+x)^n - 1}{x}, \qquad x > 0$$
rappresenta il prestito rimanente quando si è ricevuto un prestito iniziale B, sono passati n anni ed è stato applicato un tasso di interesse x, restituendo R alla fine di ogni anno. Il valore x^* tale che $f(x^*) = 0$ rappresenta il tasso di interesse corretto che vorremmo fosse applicato. Risolvere l'equazione con il metodo di Newton, usando $B = 100000$, $R = 10000$, $n = 10$. Verificare in quale intervallo (contenuto in $]0, 1[$) il metodo converge globalmente.

15. Si applichi il metodo di Halley per determinare lo zero di $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

16. Usare in Matlab i metodi di bisezione, delle approssimazioni successive, di Newton e delle secanti per calcolare entro la tolleranza 10^{-5} una radice dell'equazione $x - e^{-x} = 0$ nell'intervallo $[0, 1]$.

17. Implementare mediante una M-function il metodo della *regula falsi*. Usarla per risolvere l'esercizio precedente.

Laboratorio Matlab

1. Calcolare la radice quadrata di un numero reale non negativo usando il metodo di Newton. Provare il metodo per $1/10^a$, con $a = 0, 4, 8, 12, 16$, e discutere la velocità di convergenza (per valori piccoli, il metodo rallenta: perchè?)

2. Implementare in Matlab il metodo di Halley; applicare il metodo per trovare una radice di $f(x) = x^2+2x\mathrm{e}^x+e^{2x}$ partendo da $x_0 = 0$. Confrontare con il metodo di Newton nella variante relativa a zeri multipli.

3. Implementare il metodo delle secanti; fare un confronto con il metodo di Newton per il calcolo della radice dell'equazione $x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$ in $[0, 1.7]$.

4. Implementare il metodo della *regula falsi* ed eseguire un confronto con il metodo di bisezione, determinando le classi di funzioni per cui ciascun metodo risulta più conveniente.

5. Implementare il metodo di Muller e applicarlo all'equazione $x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$ in $[0, 1.7]$. Confrontare il metodo con l'iterazione funzionale

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 - 2f(x_k)f''(x_k)}}{f''(x_k)}$$

6. Implementare il metodo dell'interpolazione quadratica inversa e applicarlo al caso dell'equazione

$$\mathrm{e}^{-x/10}\sin(x/10) = 0$$

   per trovare una radice in $[-0.4, -0.2]$.

7. Implementare il metodo di Newton per il calcolo degli zeri del polinomio $p_3(x) = x^3 - 10x^2 + 29x - 20$.