① SIA DATA LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. DETERMINARE SE POSSIBILE UNA MATRICE ORTOGONALE U CHE DIAGONALIZZA A.

RICORDO Matrice ortogonale $A^T = A^{-1}$

PROPRIETÀ: A ortogonale $\Leftrightarrow AA^T = I$

TEOREMA SPETTRALE Se A è una matrice reale simmetrica di ordine n allora $\exists$ una matrice ortogonale U che la diagonalizza, ossia

Gli autovettori formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

$$U^T A \underset{\substack{\text{autovettori} \\ \text{di } A}}{U} = \underset{\text{diagonale autovalori}}{D}$$

Equivalentemente $A = UDU^T$, perché

premoltiplico per U e post moltiplico per U^T $\quad \underbrace{UU^T}_{I} A \underbrace{UU^T}_{I} = UDU^T \Rightarrow A = UDU^T$

COME COSTRUIRE U

- AUTOVALORI E AUTOSPAZI DI A
- BASE ORTONORMALE $\forall$ AUTOSPAZIO, EVENTUALMENTE APPLICANDO GRAHM-SCHMIDT E ORTONORMALIZZANDO GLI AUTOVETTORI
- SI UNISCONO LE BASI ORTONORMALI DEGLI AUTOSPAZI $\Rightarrow$ BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ FORMATA DA AUTOVETTORI DI A
- U HA PER COLONNE GLI ELEMENTI DELLA BASE

A È REALE E SIMMETRICA $\overset{\text{TEO SPET.}}{\Longrightarrow}$ $U \; \exists$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 - 1\right] + \left[(-1)(\lambda-1) - 1\right] - \left[\cancel{1} + \lambda - \cancel{1}\right]$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2 + \cancel{1} - 2\lambda - \cancel{1}) + (-\lambda + \cancel{1} - \cancel{1}) - \lambda =$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda^2 + \cancel{2\lambda} - \cancel{2\lambda} = \lambda^2(\lambda - 3)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 3 \qquad A$ SIMMETRICA $\Rightarrow m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$

- $\lambda_1 = 0$

$$V_1: \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x - y - z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$$

$$V_1 = \{(-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = [\underset{v_1}{(-1, 1, 0)}, \underset{v_2}{(-1, 0, 1)}]$$

- $\lambda_2 = 3$

$$V_2: \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ z = -x + 2y \\ -x - y - 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ z = -x + 2y \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

$$V_2 = \{(y, y, y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} = [\underset{v_3}{(1, 1, 1)}]$$

USO GRAHM-SCHMIDT PERCHÉ GLI ELEMENTI DI V_1 e V_2 NON SONO ORTOGONALI TRA LORO!

$v_1' = (-1, 1, 0)$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (-1,0,1) - \frac{\langle (-1,0,1),(-1,1,0) \rangle}{\langle (-1,1,0),(-1,1,0) \rangle}(-1,1,0) =$$

$$= (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' =$$

$$= (1,1,1) - \frac{\overbrace{\langle (1,1,1),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1) \rangle}^{=0}}{\langle (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1) \rangle}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right) +$$

$$- \frac{\overbrace{\langle (1,1,1),(-1,1,0) \rangle}^{=0}}{\langle (-1,1,0),(-1,1,0) \rangle}(-1,1,0) = (1,1,1)$$

PARTE "INUTILE" PERCHE' AUTOVETTORI ASSOCIATI AD AUTOVALORI DIVERSI SONO SEMPRE ORTOGO= NALI
$\Rightarrow (1,1,1)$ E' IL 3° VETTORE ORTOGONALE

$$v_3'' = \frac{v_3'}{|v_3'|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$v_2'' = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$v_1'' = \frac{v_1'}{|v_1'|} = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

2) DATO L'OPERATORE LINEARE $f(x,y,z) = (x+y+2z, x+2y+z, 2x+y+z)$
a) VERIFICARE SE SI TRATTA DI UN OPERATORE SIMMETRICO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ E' LA MATRICE ASSOCIATA ALLA BASE CANONICA

A E' SIMMETRICA $\Rightarrow$ f E' SIMMETRICO

* VERIFICHIAMO ANCHE CHE f E' LINEARE

Siano $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. f è lineare se
$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$

$$\Rightarrow f(\alpha v_1 + \beta v_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + 2\alpha z_1 + 2\beta z_2,$$
$$\alpha x_1 + \beta x_2 + 2\alpha y_1 + 2\beta y_2 + \alpha z + \beta z_2,$$
$$2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2) =$$

$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1 + 2\alpha z_1 + \beta x_2 + \beta y_2 + 2\beta z_2,$$
$$\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + \alpha z_1 + \beta x_2 + 2\beta y_2 + \beta z_2,$$
$$2\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 + 2\beta x_2 + \beta y_2 + \beta z_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$$

Infatti $\alpha f(v_1) = \alpha(x_1+y_1+2z_1,\ x_1+2y_1+z_1,\ 2x_1+y_1+z_1)$ analogamente per $\beta f(v_2)$

$\Rightarrow f$ è lineare

b) Trovare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che sia ortonormale e formata da autovettori di f

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda-1)-1\right] + \left[-\lambda+1-2\right] + -2\left[\underbrace{1+2(\lambda-2)}_{1+2\lambda-4}\right] =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2\lambda+2-1) - \lambda - 1 + 6 - 4\lambda =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+1) - 5\lambda + 5 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - \lambda^2 + 3\lambda - 1 - 5\lambda + 5 =$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = \lambda^2(\lambda-4) - (\lambda-4) = (\lambda-4)(\lambda^2-1) =$$

$$= (\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4,\quad \lambda_2 = -1,\quad \lambda_3 = 1$

- $\lambda_1 = 4$

$$V_1: \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{3x - y - 2z = 0} \\ -x + 2y - z = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

OSS: 1ª riga $= -$ (2ª riga + 3ª riga)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ -4y + 2z - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow V_1 = [(1,1,1)]$$

- $\lambda_2 = -1$

$$V_2: \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-2x - y - 2z = 0} \\ -x - 3y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$ sono uguali

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - z \\ 6y + \cancel{2z} - y - \cancel{2z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = [(1,0,1)]$$

- $\lambda_3 = 1$

$$V_3: \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ \cancel{-x - y - z = 0} \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$ 2ª riga $= \dfrac{1^a + 3^a}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow V_3 = [(1,-2,1)]$$

Normalizzo: $|v_1| = \sqrt{3}$, $|v_2| = \sqrt{2}$, $|v_3| = \sqrt{6}$

$$v_1'' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad v_2'' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad v_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{ v_1'', v_2'', v_3'' \}$

c) SCRIVERE LA MATRICE CHE RAPPRESENTA f RISPETTO ALLA BASE TROVATA AL PUNTO b).

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) DATA LA FORMA QUADRATICA $q(x,y,z) = 1 x^2 + 3y^2 - 4xz + 4z^2$

SI DIVIDE PER DUE

a) SCRIVERE LA MATRICE A CHE RAPPRESENTA q

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

coefficienti dei termini quadrati

metà dei coeff. dei termini misti

b) STABILIRE IL SEGNO DI q

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ -0 & +\lambda - 3 & -0 \\ 2 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)[(\lambda-1)(\lambda-4) - 4] =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + \cancel{4} - \cancel{4}) =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 5\lambda) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 5 \quad \Rightarrow$ SONO TUTTI NON NEGATIVI

TEO $\Rightarrow q$ È SEMIDEFINITA POSITIVA

TEO SIA A SIM. $n \times n$, $x^T A x$ SI DICE
- DEF. POS $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i$
- DEF. NEG $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$
- SEMIDEF. POS $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$
- SEMIDEF. NEG $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$
- INDEF. $\Leftrightarrow \exists$ 2 AUTOVALORI DI SEGNO OPPOSTO

c) DETERMINARE UNA BASE CHE DIAGONALIZZA LA FORMA QUADRATICA

- $\lambda_1 = 0$

$$V_1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -3y = 0 \\ 2x - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 = [(2, 0, 1)] = [v_1]$$

$$v_1' = \frac{v_1}{|v_1|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

- $\lambda_2 = 3$

$$V_2 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z + 2z = 0 \\ x = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_2 = [(0,1,0)] = [v_2] \quad \Rightarrow v_2' = (0,1,0)$$

- $\lambda_3 = 5$

$$V_3 : \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x + \cancel{2z} = 0 \\ 2y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_3 = [(1,0,-2)] \quad \Rightarrow v_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{ v_1', v_2', v_3' \}$$