

Esercizi sui metodi per problemi di approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Prof. V. Ruggiero

Teoria

1. Data la tabella di dati sotto riportata, determinare la retta dei minimi quadrati che onora al meglio i punti assegnati:

x	$f(x)$
-2.5	0
-2	1
-1	2.2
0	2
1	4
2	4
3	6

2. Con gli stessi dati dell'esercizio precedente, impostare il calcolo dei coefficienti della parabola dei minimi quadrati che onora al meglio i punti assegnati.
3. Determinare i parametri a e b del modello $f(x) = ae^x + be^{2x}$, considerando come dati l'insieme $\{(0, 1.5), (1, 2.5), (2, 3.5), (3, 5), (4, 7.5)\}$.
4. Determinare i parametri a e b del modello $f(x) = a \log(x) + b$, considerando come dati l'insieme $\{(0.5, 5), (1, 5), (4, 1), (7, 0.1)\}$.
5. Assegnati i punti $(2, -1), (3, 2), (6, 4), (9, 5)$, determinare la retta che onora tali punti secondo il criterio dei minimi quadrati. Calcolare la somma dei quadrati dei residui.
6. Con riferimento all'esercizio precedente, impostare il problema nel caso si voglia determinare la parabola che meglio approssima l'insieme di punti assegnato.

Laboratorio Matlab

1. A partire dai seguenti dati, forniti con sintassi Matlab,

```
x = [0 : 0.25 : 3]';  
y = [6.3806 7.1338 9.1662 11.5545 15.6414 22.7371 32.0696 ...  
     47.0756 73.1596 111.4684 175.9895 278.5550 446.4441]';
```

costruire il polinomio di miglior approssimazione di grado 3 usando `regressLineare.m`. Cambiare entro `regressLineare.m` la costruzione della matrice di regressione, in modo da costruire la seguente funzione di miglior approssimazione secondo il criterio dei minimi quadrati:

$$f(x) = a_1/(1+x)^2 + a_2/(1+x) + a_3$$

Generare i grafici dei modelli ottenuti, evidenziando i dati.

2. Costruire l'M-file che, assegnate le coppie di dati $(2, 0), (0, -8), (4, 8), (5, 27)$, costruisce la retta dei minimi quadrati che meglio approssima questo insieme di punti. Risolvere il problema anche nel caso si voglia determinare la parabola che meglio approssima l'insieme di punti assegnato. Generare i grafici dei modelli ottenuti, evidenziando i dati.
3. Determinare i parametri a, b e c nella funzione $z = ax + by + c$ mediante il metodo dei minimi quadrati a partire dai seguenti dati :

x	0.0	1.2	2.1	3.4	4.0
y	0.0	0.5	6.0	0.5	5.1
z	1.2	3.4	-4.5	9.9	2.4

4. Assegnato l'insieme di punti $\{(1, 5.12), (3, 3), (6, 2.48), (9, 2.34), (15, 2.48)\}$, determinare la retta che onora tali punti secondo il criterio dei minimi quadrati. Fornire inoltre la somma dei quadrati dei residui. Generare il grafico del modello ottenuto, evidenziando i dati.

5. Determinare la retta che onora nel modo migliore possibile i seguenti punti del piano cartesiano: $(1.0, 1.18)$, $(1.2, 1.26)$, $(1.4, 1.23)$, $(1.6, 1.37)$, $(1.8, 1.37)$, $(2.0, 1.45)$, $(2.2, 1.42)$, $(2.4, 1.46)$, $(2.6, 1.53)$, $(2.8, 1.59)$, $(3.0, 1.50)$. Ripetere l'esercizio costruendo una parabola. Verificare la bontà dei due modelli lineari. Ripetere l'esercizio determinando la funzione $f(x) = a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x}$. Generare i grafici dei modelli ottenuti, evidenziando i dati.
6. Costruire un insieme di dati sperimentali, generando x come un insieme di punti equispaziati nell'intervallo $[-1, 1]$ e y con valori casuali ottenuti dalla funzione `randn` di Matlab). Determinare poi i coefficienti del modello non lineare $f(x) = a_1 e^{a_2 x}$. Generare il grafico del modello ottenuto, evidenziando i dati.
7. Determinare la retta e la parabola che onorano nel modo migliore possibile i seguenti punti (x, y) del piano cartesiano: $(1, -5)$, $(2, -12.4)$, $(3, -15.7)$, $(4, -15.1)$, $(5, -10.5)$, $(6, -1.9)$, $(7, 10.7)$, $(8, 27.4)$. Determinare la parabola e la cubica che onorano nel modo migliore possibile i seguenti punti (x, y) del piano cartesiano: $(0, 1.2)$, $(1.5, 3.5)$, $(2.5, 4.5)$, $(4.0, 5.3)$, $(6.5, 4.5)$, $(8.1, 2.3)$, $(9.3, 0.7)$, $(11.3, -2.0)$, $(13.0, -3.9)$, $(15.5, -4.2)$, $(17.5, -2.6)$, $(19.0, -0.5)$. Per ciascuna di queste curve, calcolare la somma dei quadrati dei residui e verificare che si tratti di modelli adeguati.
8. Considerate le seguenti coppie di dati $(-5, -6)$, $(-4, -5)$, $(0, 7)$, $(4, 0)$, $(5, 3)$, costruire la cubica dei minimi quadrati che meglio approssima questo insieme di dati (impostare solo in problema); se, invece di un polinomio, si considera la funzione $f(x) = a_1 + a_2 e^x$, determinare i parametri a_1 e a_2 secondo il criterio dei minimi quadrati.
9. Determinare i parametri a e b del modello $f(x) = \frac{a}{x} + b$, considerando l'insieme di dati $\{(1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 7)\}$.