# Variabili Aleatorie Discrete

Stefania Bartoletti

20 Marzo 2022

# Ricapitolando

- Uno spazio degli eventi discreto $\Omega$ è un insieme finito o numerabile di esiti $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$.
- La probabilità di un esito $\omega$ è denotata da $\mathbb{P}\{\omega\}$.
- Un evento $E$ è un sottoinsieme di $\Omega$. La probabilità di un evento $E$ è $\mathbb{P}\{E\} = \sum \mathbb{P}\{\omega\}$

# Variabili Aleatorie

- Lanciamo due volte un dado e registriamo gli esiti come coppie $(i, j)$, dove $i$ è il risultato del primo lancio e $j$ il risultato del secondo. Lo spazio degli eventi sarà

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\} = \{(i,j)|i,j = 1,\ldots,6\}$$

# Variabili Aleatorie

- Lanciamo due volte un dado e registriamo gli esiti come coppie $(i, j)$, dove $i$ è il risultato del primo lancio e $j$ il risultato del secondo. Lo spazio degli eventi sarà

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\} = \{(i,j)|i,j = 1,\ldots,6\}$$

- La funzione di probabilità è $\mathbb{P}\{(i,j)\} = 1/36$.

# Variabili Aleatorie

- Lanciamo due volte un dado e registriamo gli esiti come coppie $(i, j)$, dove $i$ è il risultato del primo lancio e $j$ il risultato del secondo. Lo spazio degli eventi sarà

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\dots,(6,6)\} = \{(i,j)|i,j = 1,\dots,6\}$$

- La funzione di probabilità è $\mathbb{P}\{(i,j)\} = 1/36$.
- Nel gioco, si vincono $500$ goleador se la somma è $7$ e si perdono $100$ goleador altrimenti.

# Variabili Aleatorie

- Lanciamo due volte un dado e registriamo gli esiti come coppie $(i, j)$, dove $i$ è il risultato del primo lancio e $j$ il risultato del secondo. Lo spazio degli eventi sarà

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\} = \{(i,j)|i,j = 1,\ldots,6\}$$

- La funzione di probabilità è $\mathbb{P}\{(i,j)\} = 1/36$.
- Nel gioco, si vincono $500$ goleador se la somma è $7$ e si perdono $100$ goleador altrimenti.
- Questa ricompensa la chiamiamo x e la desciviamo formalmente come:

$$\mathsf{x}(i,j) = \begin{cases} 500 & \text{if } (i+j) = 7 \\ -100 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# Variabili Aleatorie

- Lanciamo due volte un dado e registriamo gli esiti come coppie $(i, j)$, dove $i$ è il risultato del primo lancio e $j$ il risultato del secondo. Lo spazio degli eventi sarà

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\dots,(6,6)\} = \{(i,j)|i,j = 1,\dots,6\}$$

- La funzione di probabilità è $\mathbb{P}\{(i,j)\} = 1/36$.

# Variabili Aleatorie

- Lanciamo due volte un dado e registriamo gli esiti come coppie $(i, j)$, dove $i$ è il risultato del primo lancio e $j$ il risultato del secondo. Lo spazio degli eventi sarà

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\} = \{(i,j)|i,j = 1,\ldots,6\}$$

- La funzione di probabilità è $\mathbb{P}\{(i,j)\} = 1/36$.
- Immaginiamo una seconda ricompensa, la chiamiamo y e la desciviamo formalmente come:

$$\mathrm{y}(i,j) = ij - 10$$

# Variabili Aleatorie

- Lanciamo due volte un dado e registriamo gli esiti come coppie $(i, j)$, dove $i$ è il risultato del primo lancio e $j$ il risultato del secondo. Lo spazio degli eventi sarà

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,6)\} = \{(i,j) | i, j = 1, \ldots, 6\}$$

- La funzione di probabilità è $\mathbb{P}\{(i,j)\} = 1/36$.
- Immaginiamo una seconda ricompensa, la chiamiamo y e la desciviamo formalmente come:

$$\mathsf{y}(i,j) = ij - 10$$

- Queste funzioni di ricompensa sono esempi di variabili aleatorie, che assegnano un numero ad ogni possibile esito nello spazio degli eventi.

# Definizione:

Dato uno spazio degli eventi $\Omega$, una variabile aleatoria discreta è una funzione

$$\mathrm{x} : \Omega \to \mathbb{R}$$

che può assumere un numero discreto di valori.

# Definizione:

Dato uno spazio degli eventi $\Omega$, una variabile aleatoria discreta è una funzione

$$x : \Omega \to \mathbb{R}$$

che può assumere un numero discreto di valori.

Si chiama variabile aleatoria, ovvero casuale, perchè il suo valore dipende dall'esito di un esperimento, esito che è casuale per definizione.

# Definizione:

Dato uno spazio degli eventi $\Omega$, una variabile aleatoria discreta è una funzione

$$x : \Omega \to \mathbb{R}$$

che può assumere un numero discreto di valori.

Si chiama variabile aleatoria, ovvero casuale, perchè il suo valore dipende dall'esito di un esperimento, esito che è casuale per definizione.

Andremo a trattare x come ogni altra variabile: sommandola ad altre variabili, elevandola ad una certa potenza, etc.

Per ogni valore $x$, denotiamo con $\mathsf{x} = x$ l'evento che consiste in tutti gli esiti $\omega$ con $\mathsf{x}(\omega) = x$.

Per ogni valore $x$, denotiamo con $\mathsf{x} = x$ l'evento che consiste in tutti gli esiti $\omega$ con $\mathsf{x}(\omega) = x$.

Toy Example

$$\mathsf{x}(i,j) = \begin{cases} 500 & \text{if } (i+j) = 7 \\ -100 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- L'evento $\mathsf{x} = 500$ si ottiene per gli esiti:

$$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

che è l'insieme degli esiti la cui somma è $7$.

Per ogni valore $x$, denotiamo con $\mathsf{x} = x$ l'evento che consiste in tutti gli esiti $\omega$ con $\mathsf{x}(\omega) = x$.
Toy Example

$$\mathsf{x}(i,j) = \begin{cases} 500 & \text{if } (i+j) = 7 \\ -100 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- L'evento $\mathsf{x} = 500$ si ottiene per gli esiti:

  $$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

  che è l'insieme degli esiti la cui somma è 7.
- Ne deduciamo che $\mathbb{P}\{\mathsf{x} = 500\} = 1/6$.

Per ogni valore $x$, denotiamo con $\mathsf{x} = x$ l'evento che consiste in tutti gli esiti $\omega$ con $\mathsf{x}(\omega) = x$.

Toy Example

$$\mathsf{x}(i,j) = \begin{cases} 500 & \text{if } (i+j) = 7 \\ -100 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- L'evento $\mathsf{x} = 500$ si ottiene per gli esiti:

  $$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

  che è l'insieme degli esiti la cui somma è 7.
- Ne deduciamo che $\mathbb{P}\{\mathsf{x} = 500\} = 1/6$.
- Di fatto, $x$ può assumere qualsiasi valore, anche quelli che $\mathsf{x}$ non può assumere. Nell'esempio, $\mathsf{x} = 1000$ corrisponde all'insieme degli eventi $\{\} = \emptyset$. Ne consegue che $\mathbb{P}\{\mathsf{x} = 1000\} = 0$.

# Probability mass function

Definizione: La funzione di probabilità di massa (pmf) di una variabile aleatoria discreta $\mathsf{x}$ è la funzione

$$f_{\mathsf{x}}(x) = \mathbb{P}\left\{\mathsf{x} = x\right\}$$

Proprietà

1. $0 \leqslant f_{\mathsf{x}}(x) \leqslant 1$
2. Se $x$ è un valore che $\mathsf{x}$ non assume mai, allora $f_{\mathsf{x}}(x) = 0$.

# Toy Example

Sia $\Omega$ lo spazio degli eventi per il lancio di due dadi e si consideri la variabile

$$\mathsf{m}(i, j) = \max(i, j).$$

Per esempio, l'esito $(3, 5)$ ha $\mathsf{m}(3, 5) = 5$.

# Toy Example

Sia $\Omega$ lo spazio degli eventi per il lancio di due dadi e si consideri la variabile

$$\mathsf{m}(i,j) = \max(i,j).$$

Per esempio, l'esito $(3,5)$ ha $\mathsf{m}(3,5) = 5$.

Possiamo descrivere una variabile aleatoria elencando tutti i suoi possibili valori e le probabilità associate a questi. Nell'esempio abbiamo

# Toy Example

Sia $\Omega$ lo spazio degli eventi per il lancio di due dadi e si consideri la variabile

$$\mathsf{m}(i,j) = \max(i,j).$$

Per esempio, l'esito $(3,5)$ ha $\mathsf{m}(3,5) = 5$.

Possiamo descrivere una variabile aleatoria elencando tutti i suoi possibili valori e le probabilità associate a questi. Nell'esempio abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc} m: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ f_{\mathsf{m}}(m): & 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{array}$$

In questo caso $f_{\mathsf{m}}(8) = 0$

# Toy Example

Sia $\Omega$ lo spazio degli eventi per il lancio di due dadi e si consideri la variabile

$$\mathsf{m}(i,j) = \max(i,j).$$

Per esempio, l'esito $(3,5)$ ha $\mathsf{m}(3,5) = 5$.

Possiamo descrivere una variabile aleatoria elencando tutti i suoi possibili valori e le probabilità associate a questi. Nell'esempio abbiamo

$$\begin{array}{rcccccc} m: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ f_{\mathsf{m}}(m): & 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{array}$$

In questo caso $f_{\mathsf{m}}(8) = 0$
Esercizio: Calcolare la pmf per la variabile aleatoria $\mathsf{z} = i + j$

# Cumulative Distribution Function

Definizione: La funzione di distribuzione cumulativa (cdf) di una variabile aleatoria discreta $\mathsf{x}$ è la funzione

$$F_{\mathsf{x}}(x) = \mathbb{P}\left\{\mathsf{x} \leqslant x\right\}$$

Proprietà

1. $0 \leqslant F_{\mathsf{x}}(x) \leqslant 1$
2. Se $a \leqslant b$ allora $F_{\mathsf{x}}(a) \leqslant F_{\mathsf{x}}(b)$ (non-decrescente)
3. $\lim_{x \to -\infty} F_{\mathsf{x}}(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F_{\mathsf{x}}(x) = 1$

# Toy Example

Sia $\Omega$ lo spazio degli eventi per il lancio di due dadi e si consideri la variabile

$$\mathsf{m}(i,j) = \max(i,j).$$

Per esempio, l'esito $(3,5)$ ha $\mathsf{m}(3,5) = 5$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ : | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
| $f_{\mathsf{m}}(m)$ : | $1/36$ | $3/36$ | $5/36$ | $7/36$ | $9/36$ | $11/36$ |
| $F_{\mathsf{m}}(m)$ : | $1/36$ | $4/36$ | $9/36$ | $16/36$ | $25/36$ | $36/36$ |

In questo caso $F_{\mathsf{m}}(-8) = 0$

# Toy Example

Sia $\Omega$ lo spazio degli eventi per il lancio di due dadi e si consideri la variabile

$$\mathsf{m}(i,j) = \max(i,j).$$

Per esempio, l'esito $(3,5)$ ha $\mathsf{m}(3,5) = 5$.

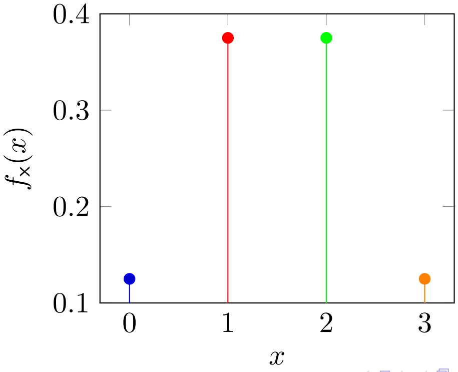
| $m:$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{\mathsf{m}}(m):$ | $1/36$ | $3/36$ | $5/36$ | $7/36$ | $9/36$ | $11/36$ |
| $F_{\mathsf{m}}(m):$ | $1/36$ | $4/36$ | $9/36$ | $16/36$ | $25/36$ | $36/36$ |

In questo caso $F_{\mathsf{m}}(-8) = 0$
Esercizio: Calcolare la cdf per la variabile aleatoria $\mathsf{z} = i + j$

# Toy Example

Sia x la variabile aleatoria che descrive il numero di teste in tre lanci di moneta

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f_{\mathsf{x}}(x)$ : | $1/8$ | $3/8$ | $3/8$ | $1/8$ |
| $F_{\mathsf{x}}(x)$ : | $1/8$ | $4/8$ | $7/8$ | 1 |



# Toy Example

Sia x la variabile aleatoria che descrive il numero di teste in tre lanci di moneta

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f_{\mathsf{x}}(x)$ : | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |
| $F_{\mathsf{x}}(x)$ : | 1/8 | 4/8 | 7/8 | 1 |