Esempio.

$$\begin{cases} x + y - z & = & 3 \\ 4x - y + 5z & = & 0 \end{cases}$$

Sistema di primo grado di due equazioni algebriche in tre incognite x, y, z**.**
Il grado di un sistema di equazioni algebriche è il prodotto dei gradi delle singole equazioni. In questo caso vale $1 \cdot 1 = 1$.
Quando tutte le equazioni hanno grado 1, il sistema si dice lineare.

Notazione matriciale: nel caso dell'esempio si può anche scrivere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definizione di sistema lineare

Un **sistema lineare di m equazioni in n incognite** è dato da:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ove $x_1, \ldots, x_n$ sono le **incognite** di ciascuna equazione.
Detti $a_{ij} \in \mathbb{R}$ gli elementi di una matrice $m \times n$ e b_i le m componenti di un vettore di $\mathbb{R}^m$, il sistema si può scrivere in notazione matriciale come:

$$Ax = b \qquad A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}^m$$

A si dice **matrice dei coefficienti**, b è detto **vettore dei termini noti** e x è detto **vettore delle incognite**.

Una soluzione del sistema è una n-upla di reali, o un vettore di $\mathbb{R}^n$ che sostituito alle incognite verifica identicamente le equazioni.

Esempio.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e il termine noto sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

Una soluzione è il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$ che verifica identicamente le equazioni, ossia $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Osservazioni I

- Se si denotano con $A^1, ..., A^n \in \mathbb{R}^m$ le colonne della matrice A e con $A_1, ..., A_m \in \mathbb{R}^n$ le righe della matrice A, un sistema lineare si può vedere in uno dei seguenti modi:

$$\begin{cases} A_1 x = b_1 \\ A_2 x = b_2 \\ \quad ... \\ A_m x = b_m \end{cases}$$

oppure

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = b$$

ossia **b è combinazione lineare delle colonne di A e le incognite sono le coordinate di b rispetto a $A^1, ... A^n$**, oppure

$$Ax = b$$

Esempio.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Il sistema si può pensare come:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono quelle terne di scalari (ad esempio $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$) che permettono di scrivere il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Se $b = \mathbf{0}$, il sistema si dice **omogeneo**:

$$Ax = \mathbf{0}$$

- Il sistema lineare omogeneo $Ax = \mathbf{0}$ si dice **sistema omogeneo associato al sistema lineare** $Ax = b$, con $b \neq \mathbf{0}$.

Compatibilità

Un sistema si dice **compatibile** se ammette almeno una soluzione, **incompatibile** se non ammette soluzioni.

Un sistema omogeneo è sempre compatibile in quanto ammette sempre la soluzione banale, ossia $x = \mathbf{0}$.

Una soluzione non banale di un sistema omogeneo, se esiste, è una n-upla che stabilisce la **lineare dipendenza** delle colonne di A in $\mathbb{R}^m$.

$$Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = 0$$

Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non nulle (ad esempio $(-3, 1)$); dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti.

Se esiste solo la soluzione nulla, vuol dire che le colonne della matrice dei coefficienti sono linearmente indipendenti.

Esempi di sistemi non omogenei

- Il sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = & 1 \\ x_1 - x_2 = & 3 \end{cases}$$
è **compatibile** in quanto ammette soluzione $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Essa è unica.
- Il sistema
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = & 1 \\ x_1 + 2x_2 = & 0 \end{cases}$$
è incompatibile in quanto i primi membri sono uguali memtre i secondi non lo sono. **Non esiste** una coppia di reali che soddisfa entrambi le equazioni.
- Il sistema
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = & -1 \\ 2x_1 + 6x_2 = & -2 \end{cases}$$
è **compatibile** e ammette **infinite soluzioni** $\begin{pmatrix} -1 - 3t \\ t \end{pmatrix}$ al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$. Le due equazioni sono proporzionali e quindi hanno le stesse soluzioni: risolvendo la prima si trovano le soluzioni.

Teorema 0: caratterizzazione dell'insieme delle soluzioni

Se un sistema di m equazioni in n incognite è **compatibile**, le sue soluzioni sono **tutte e sole** le $n-$uple ottenute sommando a una soluzione particolare di $Ax = b$ le soluzioni del sistema omogeneo associato $Ax = 0$.

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ **Per prima cosa**, si dimostra che se $\bar{x}$ è una soluzione di $Ax = b$ e $\tilde{x}$ è una soluzione di $Ax = 0$, la somma è soluzione di $Ax = b$.
Sia Σ l'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ e Σ_0 l'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$.
Se $\bar{x} \in \Sigma$ e $\tilde{x} \in \Sigma_0$, allora

$$A(\bar{x} + \tilde{x}) = A\bar{x} + A\tilde{x} = b + 0 = b$$

Segue che $\bar{x} + \tilde{x} \in \Sigma$.
$\Leftarrow$ **Viceversa** dimostriamo che tutte le soluzioni di $Ax = b$ si scrivono come somma di una soluzione particolare e di una soluzione del sistema omogeneo associato.
Date due soluzioni x', x'' del sistema $Ax = b$, allora $Ax' = b$ e $Ax'' = b$. Dunque

$$A(x' - x'') = Ax' - Ax'' = 0$$

e $x' - x'' = \tilde{x} \in \Sigma_0$. Pertanto ogni soluzione x' si trova come somma di una soluzione particolare x'' di $Ax = b$ e di una soluzione $\tilde{x}$ del sistema omogeneo associato $Ax = 0$.

Il teorema precedente suggerisce di studiare le proprietà dei sistemi omogenei.

Teorema 1: sistemi compatibili

Dato un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite, se $n > m$ il sistema ammette soluzione non banale.

Dimostrazione.
Se si scrive il sistema come

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = \mathbf{0}$$

siccome $A^i \in \mathbb{R}^m$ (dimensione m) e in $\mathbb{R}^m$ ci sono al più m vettori lin. indip., segue che le colonne di A sono linearmente dipendenti e dunque esistono $x_1, ..., x_n$ non tutti nulli per cui vale l'uguaglianza.

L'insieme delle soluzioni di un sistema $Ax = 0$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
Infatti se x_1, x_2 sono due soluzioni del sistema omogeneo e $c \in R$, allora $cx_1 - x_2$ è ancora una soluzione del sistema omogeneo, ossia appartiene al sottospazio:

$$A(cx_1 - x_2) = cAx_1 - Ax_2 = c0 - 0 = 0$$

Tale sottospazio è detto **sottospazio nullo di A o nucleo di A** e si denota con $\ker(A)$.
Per un qualunque sistema compatibile $Ax = b$, si può allora dire che ogni sua soluzione appartiene a $\bar{x} + \ker(A)$, ove $\bar{x}$ è una soluzione particolare di $Ax = b$.

Esempio.
Data l'equazione

$$x_1 + x_2 = 1$$

l'insieme delle soluzioni è $(1,0) + \{(t,-t), t \in \mathbb{R}\}$, perchè ker$(A)$ con $A = (1,1)$ è l'insieme dei vettori $\{(t,-t), t \in \mathbb{R}\}$. In tal caso la dimensione del ker(A) è 1. Dunque si hanno infinite soluzioni, o come si suol dire ∞^1 soluzioni.

Dato un sistema compatibile, esso ammette una e una sola soluzione se ker$(A) = \{0\}$ o equivalentemente le colonne di A sono linearmente indipendenti.

Teorema 2 - Un caso notevole: sistema di Cramer

Dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite, se $n = m$ e le colonne di A sono linearmente indipendenti (o equivalentemente $\det(A) \neq 0$), il sistema ammette una e una sola soluzione.

Dimostrazione.
Se si scrive il sistema come

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = b$$

siccome $A^i \in \mathbb{R}^n$ (dimensione n), segue che le colonne di A sono una base per $\mathbb{R}^n$. Quindi b si esprime in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base.

Equivalentemente si può dire che se le colonne di A sono linearmente indipendenti (o $\det(A) \neq 0$), allora il sistema omogeneo ammette solo la soluzione banale e dunque il sistema non omogeneo ha una e una sola soluzione.

Regola di Cramer

Dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite, $Ax = b$ con $\det(A) \neq 0$, allora la soluzione del sistema è data da

$$x_j = \frac{|A^1, ..., A^{j-1}, b, A^{j+1}, ...A^n|}{|A|} \quad j = 1, ..., n$$

Dimostrazione.
La soluzione del sistema è data dalle coordinate di b rispetto $A^1, ..., A^n$:

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = b$$

Allora si ha che

$$
\begin{aligned}
& |A^1, \ldots, A^{j-1}, b, A^{j+1}, \ldots, A^n| = \\
= \; & |A^1, \ldots, A^{j-1}, x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n, A^{j+1}, \ldots, A^n| = \\
= \; & |A^1, \ldots, A^{j-1}, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i A^i \right), A^{j+1}, \ldots, A^n| = \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} x_i |A^1, \ldots, A^{j-1}, A^i, A^{j+1}, \ldots, A^n| = \\
= \; & x_1 |A^1, \ldots, A^{j-1}, A^1, A^{j+1}, \ldots, A^n| + \\
& + x_2 |A^1, A^2, \ldots, A^{j-1}, A^2, A^{j+1}, \ldots, A^n| + \\
& + \ldots + \\
& + x_j |A^1, \ldots, A^{j-1}, A^j, A^{j+1}, \ldots, A^n| + \\
& + \ldots + \\
& + x_n |A^1, \ldots, A^{j-1}, A^n, A^{j+1}, \ldots, A^n| = \\
= \; & x_j |A^1, \ldots, A^{j-1}, A^j, A^{j+1}, \ldots A^n| = x_j |A|
\end{aligned}
$$

Da cui $x_j = \frac{|A^1, \ldots, A^{j-1}, b, A^{j+1}, \ldots A^n|}{|A|}$.

Esempio

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3x+ & 2y & -z = 1 \\ x & & +z = 3 \\ 2x- & y & -2z = 4 \end{array} \right.$$

In questo caso

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Regola di Cramer IV

$\det(A) = 12$. Dunque si ha:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{24}{12} = 2 \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-24}{12} = -2 \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1
\end{aligned}
$$

Osservazione

Dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite, $Ax = b$ con $\det(A) \neq 0$, è banale mostrare che

$$x = A^{-1}b$$

Infatti in tal caso, esiste la matrice inversa di A e dunque

$$x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

Pertanto si può risolvere il sistema calcolando l'inversa e poi facendo il prodotto (**metodo dell'inversa**).
Nel caso dell'esempio:

$$A^{-1}b = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}}{|A|} b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ATTENZIONE: per n crescente è **molto** più oneroso del metodo di Cramer, a causa del calcolo di $\mathrm{adj}(A)$.

Per la caratterizzazione della compatibilità di un sistema lineare, è fondamentale il seguente teorema.

Teorema di Rouchè –Capelli

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ha soluzione (è compatibile) se e soltanto se il rango della matrice A è uguale al rango della matrice $[A, b]$, detta **matrice completa**: $r(A) = r([A, b])$.

Dimostrazione.
Il sistema può essere scritto nella forma

$$A^1 x_1 + \ldots + A^n x_n = b$$

Il sistema ha soluzione **se e solo se** esistono $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ tali che

$$A^1 \bar{x}_1 + \ldots + A^n \bar{x}_n = b$$

ossia **se e solo se** b è combinazione lineare delle colonne di A. Ma ciò equivale a dire che il rango di A è uguale al rango di $[A, b]$.

Dato un sistema di m equazioni in n incognite

$$Ax = b$$

occorre verificare se $r(A) = r([A, b]) = k$. In tal caso il sistema ammette soluzione (compatibile).
Inoltre esiste un minore $|\bar{A}|$ di ordine k non nullo (e i minori di ordine $k + 1$ sono tutti nulli).

- E' possibile eliminare le equazioni che contengono coefficienti che non compaiono nella sottomatrice $\bar{A}$, perchè queste sono dipendenti dalle equazioni rimaste e dunque hanno le stesse soluzioni.
- Si porta al secondo membro i termini che contengono le incognite i cui coefficienti non appartengono ad $\bar{A}$.
- In questo modo si ottiene un sistema di k equazioni in k incognite con determinante non nullo, che ha una e una sola soluzione (si può risolvere con la regola di Cramer).

La soluzione del sistema dipende dalle $n - k$ incognite trasportate al secondo membro, incognite che vengono assunte come parametri ai quali assegnare valori arbitrari. Si dice che il sistema ha ∞^{n-k} soluzioni.

Esempio.

$$\begin{cases} x + y + 3z = & 1 \\ 2x + 4y - z = & 3 \\ 3x + 5y + 2z = & 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Si osserva che $|A| = 0$. Dunque $r(A) < 3$.
Inoltre, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Segue che $r(A) = 2$. Occorre verificare che $r([A, b]) = 2$.
Basta controllare

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Si elimina la terza equazione:

$$\begin{cases} x + y + 3z = & 1 \\ 2x + 4y - z = & 3 \end{cases}$$

Si porta al II membro l'incognita z:

$$\begin{cases} x + y = & 1 - 3z \\ 2x + 4y = & 3 + z \end{cases}$$

Si risolve il sistema pensando a z come a un parametro:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-3z & 1 \\ 3+z & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1-13z}{2} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3z \\ 2 & 3+z \end{vmatrix}}{2} = \frac{1+7z}{2}$$

Le soluzioni sono $\infty^{3-2} = \infty$ e sono date da $\begin{pmatrix} \frac{1-13z}{2} \\ \frac{1+7z}{2} \\ z \end{pmatrix}$.

Si osservi che la soluzione si scrive come $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, ossia una soluzione particolare più il sottospazio $\ker(A)$.

L'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo non è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ **(0 non appartiene all'insieme)**.

Il sottospazio delle soluzioni di un sistema omogeneo ha dimensione $n - r(A)$.

Definizione di sistema a gradini

Un sistema di m equazioni in n incognite si dice a gradini se la matrice dei coefficienti è trapezoidale superiore. Il suo rango è maggiore o uguale degli elementi diagonali non nulli.

Esempio

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = & 1 \\ \quad\quad 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = & 2 \\ \quad\quad\quad\quad 4x_3 + x_4 = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ & 4 & 3 & -5 \\ & & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice e della matrice completa è 3 (si può estrarre un minore triangolare superiore diverso da 0).
Quando il sistema a gradini è compatibile, esso è semplice da risolvere:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = & 1 - x_4 \\ \quad\quad 4x_2 + 3x_3 = & 2 + 5x_4 \\ \quad\quad\quad\quad 4x_3 = & 1 - x_4 \end{cases}$$

Si considera x_4 come parametro e dall'ultima equazione si determina x_3, poi lo si sostituisce nella penultima equazione e si determina x_2 ...,fino alla determinazione di x_1 dalla prima equazione:

$$\begin{cases} x_3 = & \dfrac{1 - x_4}{4} \\ x_2 = & \dfrac{5 + 23x_4}{16} \\ x_1 = & \dfrac{9 - 37x_4}{40} \end{cases}$$

Si può sempre ricondurre un sistema alla forma di **sistema a gradini** mediante semplici operazioni elementari (che non alterano il rango):

A. **scambio di posizione tra due equazioni:** il sistema resta equivalente; il rango per righe non cambia anche se lo scambio di righe cambia il segno dei minori coinvolti nello scambio (il determinante cambia segno se si scambiano due righe);

B. **moltiplicazione di una equazione per uno scalare non nullo**: il sistema resta equivalente; il rango per righe non cambia perchè le righe restano dipendenti o indipendenti; i minori coinvolti differiscono per lo scalare (proprietà del determinante);

C. **sostituzione di una equazione con la somma dell'equazione a una combinazione di altre:** il sistema resta equivalente; il rango resta inalterato e così i minori coinvolti (proprietà del determinante).

Esempio

- **Primo caso**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = & 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = & 2 \end{cases}$$

La matrice completa è :

$$[A, b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Riduciamo a gradini la matrice:

- alla seconda riga si sostituisce la seconda riga meno la prima e alla terza riga la terza riga meno la prima (operazioni di tipo C); si ottiene un sistema equivalente (il rango e i minori non cambiano)):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} A_2 \leftarrow A_2 - A_1 \\ A_3 \leftarrow A_3 - A_1 \end{array}$$

- si scambiano la terza e la seconda riga (operazione di tipo A, cambiano i segni dei minori coinvolti, il rango è uguale):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Si vede che il rango è 3 sia per A che per $[A, b]$. La soluzione del sistema è unica in questo caso ($\infty^{3-3} = \infty^0$):

$$\begin{cases} x_3 = & \frac{1}{2} \\ x_2 = & \frac{1}{2} \\ x_1 = & 2 \end{cases}$$

- **Secondo caso**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = & 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = & 1 \\ 2x_1 - x_4 = & 1 \end{cases}$$

La matrice completa è :

$$[A, b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Riduciamo a gradini la matrice:

- alla seconda riga si sostituisce la seconda riga meno 3 volte la prima e alla terza riga la terza riga meno 2 volte la prima; si ottiene un sistema equivalente (operazione di tipo C):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} A_2 \leftarrow A_2 - 3A_1 \\ A_3 \leftarrow A_3 - 2A_1 \end{array}$$

- alla terza riga si sostituisce la terza riga meno la seconda riga, ottenendo un sistema equivalente (operazione C):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad A_3 \leftarrow A_3 - A_2$$

Si vede che il rango (sia della matrice completa che della incompleta) è 2 (l'ultima riga è tutta nulla). Le soluzioni del sistema sono $\infty^{4-2} = \infty^2$, ottenibili ponendo x_3 e x_4 parametri da

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = & x_3 - x_4 \\ -2x_2 = & 1 - 2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_2 = & \dfrac{-1 + 2x_3 - 3x_4}{2} \\ x_1 = & \dfrac{x_4 + 1}{2} \end{cases}$$

- **Terzo caso**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = & 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = & 1 \end{cases}$$

La matrice completa è :

$$[A, b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Riduciamo a gradini la matrice:

- alla seconda riga si sostituisce la seconda riga meno la prima e alla terza riga la terza riga meno 2 volte la prima; si ottiene un sistema equivalente (operazione C):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} A_2 \leftarrow A_2 - A_1 \\ A_3 \leftarrow A_3 - 2A_1 \end{array}$$

Riduzione di un sistema a gradini IX

- alla terza riga si sostituisce la terza meno la seconda riga, ottenendo un sistema equivalente (operazione C):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad A_3 \leftarrow A_3 - A_2$$

  Si vede che il rango della matrice del sistema è 2 e quello della matrice completa è 3 (basta considerare le prime due colonne e l'ultima). Il sistema è incompatibile.

Sia $Ax = b$ un sistema di m equazioni in n incognite.

Le possibilità sono:

- se $r(A) \neq r([A, b])$: sistema **incompatibile**, nessuna soluzione (sistema impossibile o sovradeterminato)
- se $r(A) = r([A, b]) = k$, il sistema è **compatibile**;
  se $k = n$, il sistema ammette una e una sola soluzione (sistema determinato); se $k < n$, il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni (sistema sottodeterminato).