20. $W = \{(x-y+z, 2x+y-4z, x-z), x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= [(1,2,1), (-1,1,0)\ (1,-4,-1)]$

$a(1,2,1) + b(-1,1,0) + c(1,-4,-1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 2a+b-4c=0 \\ a-c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a-b=0 \\ -2a+b=0 \\ a=c \end{cases} \quad \begin{cases} b=2a \\ c=a \end{cases}$$

$\dim W = 2$ <u>i vettori sono lin. dipendenti</u>

ma $(1,2,1)$ $(-1,1,0)$ sono indipendenti

$a(1,2,1) + b(-1,1,0) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=b \\ 3a=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$(1,2,1)$ $(-1,1,0)$ sono una base

Si verifica se $(2,-5,-1) \in W$

$(2,-5,-1) = a(1,2,1) + b(-1,1,0)$

$$\begin{cases} 2=a-b \\ -5=2a+b \\ -1=a \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}$$

26. Dati $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ trovare il sottospazio generato dai due vettori

$$W = \{ x(1,0,0) + y(0,1,0) \}$$

$$= \{ (x, y, 0) \}$$

$\dim W = 2$

29. Dati $(1,2,0)$, $(0,1,a)$, $(1,a,-1)$ stabilire per quali valori di a i vettori sono lin. dip. o indip.

$$\alpha(1,2,0) + \beta(0,1,a) + \gamma(1,a,-1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma a = 0 \\ \beta a - \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\gamma = -\beta a \\ \gamma = \beta a \\ -2\beta a + \beta + \beta a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\beta(a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$\beta(a-1)^2 = 0$$

$a = 1$ l. dip. $(\beta \neq 0)$

$a \neq 1$ l. indip. $(\beta = 0,\ \gamma = 0,\ \alpha = 0)$

30. base di $\mathbb{R}$ $\{1\}$

32. $V = \mathbb{R}^4$

$A = \{(x, y, z, t),\ y = 0,\ 2z - t = 0\}$

$B = \{(x, y, z, t),\ x - t = 0\ \ y + z = 0\}$

Calcolare $\dim(A+B)$.

$A = \{(x, 0, z, 2z)\} = [\underbrace{(1,0,0,0)\ (0,0,1,2)}_{\text{lin. indip.}}]$

$B = \{(x, -z, z, x)\} = [\underbrace{(1,0,0,1)\ (0,-1,1,0)}_{\text{lin. indip.}}]$

$A+B$ è generato da

$(1,0,0,0)\ (0,0,1,2)\ (1,0,0,1)\ (0,-1,1,0)$

$\dim A = 2$

$\dim B = 2$

$$\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,0,1,2) + \gamma(1,0,0,1) + \delta(0,-1,1,0) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \delta &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \qquad \dim(A+B) = 4$$

è somma diretta

$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$

$\Rightarrow \underline{\dim(A \cap B) = 0}$ $\qquad A \cap B = \{0\}$

33. $V = \mathbb{R}^3$ $A = \{(a+b, b, a)\}$

$B = \{(x, y, z) \quad x - y = 0\}$

Trovare la somma dei sottospazi.

$A = [(1,0,1)\ (1,1,0)]$ dim $A = 2$

lin. indip.

$B = \{(x, x, z)\} = [(1,1,0)\ (0,0,1)]$ dim $B = 2$

lin. indip.

$A + B = [(1,0,1)(1,1,0)(0,0,1)]$

$\alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ dim$(A+B) = 3$

dim$(A \cap B) = 1$ $V = A + B$ non è somma diretta

dim$(A+B)$ = dim(A) + dim(B) − dim$(A \cap B)$

$3 = 2 + 2 - 1$

34. Dato

$A = [(2,0,0,1), (0,0,-2,0), (0,0,1,-1)]$

$B = [(0,1,0,0), (1,1,0,0)]$

trovare la somma dei sottospazi.

Si verifica se i generatori di A sono lin. ~~di~~ indipendenti.

$$\alpha(2,0,0,1) + \beta(0,0,-2,0) + \gamma(0,0,1,-1) =$$
$$= (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ -2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \qquad \dim A = 3$$

Si verifica se i generatori di B sono lin. indipendenti.

$$\alpha(0,1,0,0) + \beta(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \qquad \dim B = 2$$

$$A+B = [(2,0,0,1), (0,0,-2,0), (0,0,1,-1),$$
$$(0,1,0,0), (1,1,0,0)]$$

Poichè $A+B \subseteq R^4$ deve avere dimensione inferiore o uguale a 4.

Determiniamo il sottoinsieme massimale di elementi lin. indipendenti dell'insieme di generatori.
Eliminiamo un elemento.

$$\alpha(0,0,-2,0)+\beta(0,0,1,-1)+\gamma(0,1,0,0)$$
$$+\delta(1,1,0,0)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{cases}\delta=0\\ \gamma+\delta=0\\ -2\alpha+\beta=0\\ -\beta=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\delta=0\\ \gamma=0\\ \beta=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

$A+B$ ha una base data da

$(0,0,-2,0)$ $(0,0,1,-1)$ $(0,1,0,0)$ $(1,1,0,0)$

$\dim(A+B)=4$

$$\Rightarrow -\dim(A+B)+\dim A+\dim B=\dim(A\cap B)$$
$$-4 \quad +3 \quad +2 \quad =1$$

$\dim(A\cap B)=1$

$A+B$ non è somma diretta

$A\cap B\neq\{0\}$

42. Dimostrare che $R^4 = U \oplus W$ dove

$U = [(1, 0, -\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0)]$

e $W = [(0, -2, 0, 3), (0, 1, 0, 1)]$.

Si può verificare che i generati di U e quelli di W sono linearmente indipendenti:

$$\alpha (1, 0, -\sqrt{5}, 0) + \beta (\sqrt{5}, 0, -1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \sqrt{5}\beta = 0 \\ -\alpha\sqrt{5} - \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\sqrt{5}\beta \\ 5\beta - \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Analogamente per W.

$$U + W = [(1, 0, -\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0), (0, -2, 0, 3), (0, 1, 0, 1)]$$

Si verifica che i generatori di U+W siano lin. indipendenti.

$$a (1, 0, -\sqrt{5}, 0) + b (\sqrt{5}, 0, -1, 0) + c (0, -2, 0, 3) + d (0, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a + \sqrt{5}b = 0 \\ -2c + d = 0 \\ -\sqrt{5}a - b = 0 \\ 3c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + \sqrt{5}b = 0 \\ -\sqrt{5}a - b = 0 \\ -2c + d = 0 \\ 3c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow a = b = 0 \\ \\ \Rightarrow c = d = 0 \end{matrix}$$

Poiché

dim U+W = 4 e dim U + dim W = 2 + 2 = 4

$\Rightarrow$ dim $U \cap W = 0 \Rightarrow U \oplus W = R^4$

43. Dimostrare che $R^3 = U \oplus W$, ove

$U = \{(x, y, z) : x - y = 0\}$

$W = [(1, 0, 1)]$

Si osserva che $\dim W = 1$.

$U = \{(x, x, z)\} = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

I generatori sono lin. indipendenti (verifica per esercizio) $\Rightarrow \dim U = 2$

$U + W = [(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Si verifica che i generatori siano lin. indipendenti.

$a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\dim U + W = 3$

Poiché $\dim U + \dim W = 2 + 1 = 3$

$\Rightarrow \dim U \cap W = 0$

$\Rightarrow U \oplus W = \mathbb{R}^3$