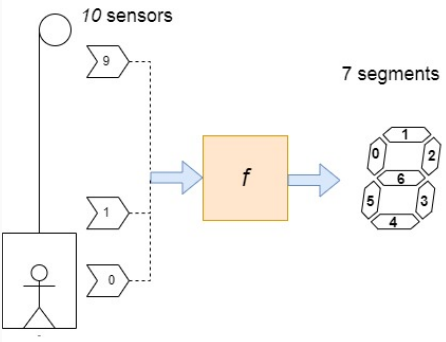
Algebra di Boole, funzioni booleane e calcolo delle proposizioni

Architettura degli elaboratori

M. Favalli

Department of Engineering

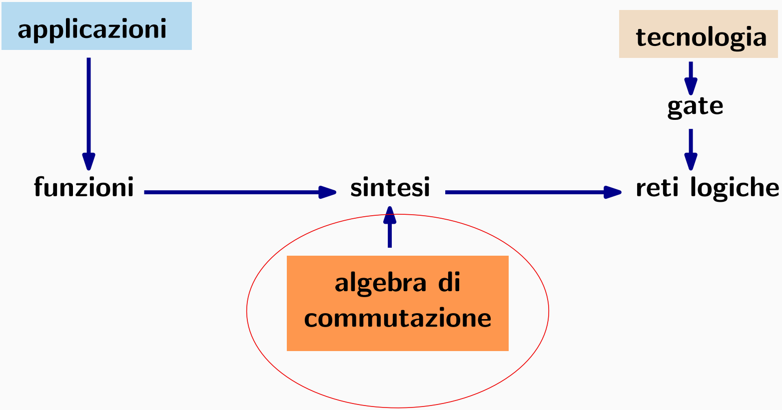
Sommario



Boolean function		
level	input 9876543210	output 01234567
0	0000000001	1111110
1	0000000010	0011000
....	....	....
9	1000000000	1111101
errors	other conf.	1100111

Le configurazioni binarie in ingresso devono essere trasfromate in configurazioni binarie in ucita ⇒ funzione binaria

Obbiettivi



applicazioni
tecnologia
gate
funzioni
sintesi
reti logiche
algebra di commutazione

Strumenti

- **Vogliamo cercare un formalismo che ci consenta di associare un espressione alla tabella di veritá**
- **I valori 0 e 1 appartengono a N (naturali) per cui si potrebbe pensare di utilizzare gli operatori aritmetici di somma e prodotto**
- **Chiaramente non é possibile per vari motivo, il cui piú importante é che N é un insieme infinito ($1 + 1 = 2$) e $\{0, 1\}$ no**
- **Sorprendentemente si potrebbe fare qualcosa mettendo in gioco la divisione (e il modulo), ma non é una strada efficiente**

Sommario

Algebra di Boole - I

- **Introdotta nel XIX secolo da Boole per analizzare algebricamente problemi di calcolo proposizionale (al fine di studiare le leggi del pensiero)**
- **É stata poi utilizzata come fondamento per la logica formale che costituisce la base per il ragionamento scientifico**
- **In questo corso verrá considerata come modello matematico per la sintesi e l'analisi di sistemi digitali**

Algebra di Boole - I

- **Definizione:**

$$\mathcal{A} = \{A, +, \cdot, ', 0, 1\}$$

- A **supporto dell'algebra**
- $+$ **: operatore binario di disgiunzione (OR, somma logica)**
- $\cdot$ **: operatore binario di congiunzione (AND, prodotto logico)**
- $'$ **: operatore unario di complementazione (NOT, negazione)**
- **0 elemento neutro rispetto a $+$, 1 elemento neutro rispetto a $\cdot$**

Proprietá di chiusura

- **rispetto alla somma:**

$$a + b \in A \ \forall a, b \in A$$

- **rispetto al prodotto**

$$a \cdot b \ \ \in A \ \forall a, b \in A$$

- **rispetto alla complementazione**

$$a' \in A \ \forall a \in A$$

Si fará riferimento ad algebre di Boole finite (*A* é finito) (esistono algebre di Boole in cui il supporto non é finito)

Postulati (Huntington)

- **congiunzione e disgiunzione sono** *commutative*
  $a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$
- **esistono un elemento neutro rispetto a** $+$ **(indicato con 0) e un elemento neutro rispetto a** $\cdot$ **(indicato con 1) tali che:**
  $a + 0 = a \quad a \cdot 1 = a$
- **proprietá** *distributiva***:**
  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \qquad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- **per ogni** $a \in A$ **esiste ed é unico un** *complemento* a' **tale che**
  $a + a' = 1 \qquad a \cdot a' = 0$

Esempio

- **Si verifichi se l'algebra definita da: $\{\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \setminus, \emptyset, M\}$ (dove M é un insieme e $\mathcal{P}(M)$ é l'insieme dei suoi sottoinsiemi) costitusce un algebra di Boole**
  - **la chiusura é chiaramente verificata: l'intersezione e l'unione di due sottoinsiemi di M sono chiaramente ancora dei sottoinsiemi di M, lo stesso vale per il complemento (se $S \in \mathcal{P}(M)$ allora $S' = M \setminus S \in \mathcal{P}(M)$**
  - **unione e intersezione sono commutative**
  - **l'elemento neutro rispetto a $\cup$ é $\emptyset$, rispetto a $\cap$ é M, infatti $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap M = S$**
  - **si utilizzino i diagrammi di Venn per verificare le proprietá distributive e l'unicitá del complemento**

Variabili

- **Una variabile booleana é un simbolo che indica un qualsiasi elemento di A, il suo valore é uno specifico elemento di A.**
- **Si adotterá la convenzione di indicarle mediante simboli dell'alfabeto con eventuali indici (es. $x, y, ...$, oppure $x_1, x_2, ..., x_n$)**
- **Si noti che é importante distinguere le variabili dagli elementi di A**

Proprietá - I

- **associativa:** $x + (y + z) = (x + y) + z$ **e** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- **idempotenza:** $x + x = x$ **e** $x \cdot x = x$
- **elemento nullo:** $x + 1 = 1$ **e** $x \cdot 0 = 0$
- **unicitá del complemento (o elemento inverso):** x' **é unico**
- **assorbimento:** $x + x \cdot y = x$ **e** $x \cdot (x + y) = x$
- **semplificazione:** $x + x' \cdot y = x + y$ **e** $x \cdot (x' + y) = x \cdot y$
- **involuzione:** $(x')' = x$

Proprietá - II

- **Leggi di De Morgan (relazionano somma e prodotto logico)**

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

- **Consenso**

$$x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + x' \cdot z$$

$$(x + y) \cdot (x' + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (x' + z)$$

- **puó essere interessante verificare tutte queste proprietá mediante l'utilizzo dei diagrammi di Venn**

Dimostrazioni - I

Le proprietá viste in precedenza possono essere dimostrate utilizzando gli assiomi dell'algebra (idempotenza)

$$
\begin{aligned}
x \cdot x &= (x \cdot x) + 0 && \textbf{elemento neutro} \\
&= (x \cdot x) + (x \cdot x') && \textbf{complemento} \\
&= x \cdot (x + x') && \textbf{distributiva} \\
&= x \cdot 1 && \textbf{complemento} \\
&= x && \textbf{elemento neutro}
\end{aligned}
$$

Dimostrazioni - II

Esempio: semplificazione

$$
\begin{array}{rcll}
x + x' \cdot y & = & (x \cdot 1) + x' \cdot y & \textbf{elemento neutro} \\
 & = & (x \cdot (y + y')) + x' \cdot y & \textbf{complemento} \\
 & = & x \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y & \textbf{distributiva} \\
 & = & x \cdot y + x \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y & \textbf{idempotenza} \\
 & = & x \cdot (y + y') + (x + x') \cdot y & \textbf{distributiva} \\
 & = & x \cdot 1 + 1 \cdot y & \textbf{complemento} \\
 & = & x + y & \textbf{elemento neutro}
\end{array}
$$

Principio di dualitá

Si puó notare che assiomi e proprietá dell'algebra di Boole sono forniti in due versioni e che si puó passare dall'una all'altra sostituendo $+$ con $\cdot$ e viceversa e sostituendo 0 con 1 e viceversa.

Qualunque relazione di uguaglianza di un algebra di Boole rimane valida scambando ovunque gli operatori di somma e prodotto logico e gli elementi neutri 0 e 1.

Si vedrá in seguito il significato circuitale di tale principio

Sommario

Algebra di commutazione

Si tratta di un algebra di Boole in cui il supporto é costituito da due soli valori $\{0,1\}$:

$$\mathcal{B} = (\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$$

- **ciascuna variabile puó assumere due soli valori**
- **descrizione tabellare degli operatori**

$+$	x	
y	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

$\cdot$	x	
y	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

$'$	
x	**0**
0	**1**
1	**0**

nota: il simbolo $'$ puó essere sostituito da un trattino sopra l'espressione che si vuole complementare $\overline{x}$

Espressioni

Un espressione booleana definita su un insieme di variabili booleane $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é definita dalle seguenti regole:

- **gli elementi del supporto sono espressioni**
- **le variabili $x_1, x_2, ..., x_n$ sono espressioni**
- **se g e h sono espressioni booleane, allora lo sono anche $g + h$, $g \cdot h$ e g'**
- **non esistono altre espressioni oltre a quelle ottenute applicando iterativamente le regole precedenti**

Convenzioni

Una volta che sia ben definito l'insieme di simboli utilizzato per rappresentare le variabili, si puó eliminare il simbolo di prodotto logico $\cdot$

Per le proprietá dell'algebra di commutazione si possono anche omettere alcune parentesi ricordando che il prodotto logico é prioritario rispetto alla somma logica

- $x + (yz)$ **puó essere scritta come** $x + yz$

La proprietá associativa consente di eliminare ulteriori parentesi

- $x + (y + z)$ **puó essere scritta come** $x + y + z$

Esempi di espressioni

Definite sulle variabili x, y, w, z:

$$
\begin{array}{ll}
1 & x \\
x' & x \cdot 0 + x' \\
x + y \cdot 1 & x + y(w + z) \\
x + y \cdot 1' & x + (y'(w + z)')
\end{array}
$$

Sommario

Funzioni booleane

Funzione booleana **di** n **variabili: relazione** $f : A^n \rightarrow A$ **che mette in corrispondenza gli elementi del dominio** $A^n = A \times A \times ....A$ **con quelli del codominio.**

- **funzione costante:** $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a, \quad \forall a \in A$
- **funzione proiezione:** $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i, \quad \forall x_i \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- **se** g **e** h **sono funzioni booleane a** n **variabili allora anche** $(g + h)$**,** $(g \cdot h)$ **e** (g') **sono funzioni booleane:**
    - $(g + h)(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_1, x_2, ..., x_n) + h(x_1, x_2, ..., x_n)$
    - $(g \cdot h)(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot h(x_1, x_2, ..., x_n)$
    - $(g')(x_1, x_2, ..., x_n) = (g(x_1, x_2, ..., x_n))'$

Funzioni di commutazione

Nell'algebra di commutazione $A = \{0, 1\}$ **(che viene indicato anche come** $\mathbb{B}$**) per cui:**

$$f \ : \ \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

Le funzioni di commutazione possono essere descritte tramite tabelle della veritá in cui si ha una riga per ciascuna configurazione delle variabili.

La riga riporta il valore delle variabili e il corrispondente valore di f**.**

Tabella di veritá

Esempio: funzione delle variabili x, y e z che vale 1 se e solo se almeno due variabili valgono 1:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

Funzioni di commutazione

- **Quante sono le possibili funzioni di n variabili?**
- **Date n variabili si hanno 2^n possibili configurazioni (ovvero gli elementi di $\{0, 1\}^n$, quindi la funzione é definita da una configurazione ordinata di 2^n elementi**
- **Il numero di funzioni é quindi pari al numero di possibili configurazioni di 2^n elementi, ovvero 2^{2^n}**
- **Esempi**

n	**num. di funzioni**
1	$2^{2^1} = 4$
2	$2^{2^2} = 16$
3	$2^{2^3} = 256$
....	**....**

Letterali

Letterale: **coppia (variabile, valore) di una variabile booleana ($x \in \{0, 1\}$)**

Nell'algebra di commutazione, si hanno 2 possibili letterali:

- $(x, 1)$ **indicato come** x
- $(x, 0)$ **indicato come** x'

Vedremo il loro utilizzo nella valutazione del costo di una rete logica

Funzioni - Esempi

Esempi di funzioni di 1 o 2 variabili alcune delle quali hanno una particolare importanza dal punto di vista della realizzazione delle reti

Funzioni di 1 variabile (x)

x	$f(x)$			
0	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**
	costante 0	**proiezione di** x	**negazione di** x	**costante 1**

Funzioni - Esempi

Funzioni di 2 variabili

xy	$f(x)$					
00	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
01	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
10	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
11	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
	cost. 0	**cost. 1**	**proiez. di** x	**proiez. di** y	**negaz. di** x	**negaz. di** y

Funzioni - Esempi

Funzioni di 2 variabili (continua)

xy	$f(x)$					
00	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
01	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
10	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
11	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
	AND	**OR**	**NAND**	**NOR**	**EXOR**	**EQUIV.**

Funzioni - Esempi

Funzioni di 2 variabili (continua)

xy	$f(x)$			
00	**1**	**1**	**0**	**0**
01	**0**	**1**	**1**	**0**
10	**1**	**0**	**0**	**1**
11	**1**	**1**	**0**	**0**

Funzioni ottenibili dalle precedenti negando una variabile, ad esempio la prima rappresenta un OR fra x e y negato

Valutazione di un espressione

1. **Data un espressione (w) dell'algebra di commutazione che utilizza le variabili $x_1, x_2, ..., x_n$**
2. **Si definisce valutazione dell'espressione rispetto a una configurazione $\langle x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0} \rangle \in \{0, 1\}^n$ delle variabili, il procedimento mediante il quale si sostituisce a ciascuna variabile il suo valore e applicando le regole dell'algebra di commutazione si ottiene un valore $w_0 \in \{0, 1\}$**
3. **Ripetendo il procedimento per tutte le possibili configurazioni, si ottiene una tabella di veritá: a ogni espressione corrisponde una funzione**

Espressione $\Rightarrow$ funzione

- **Si consideri l'espressione** $w = (x_1 + x_2) \cdot x_3$
- **Valutazione per 110:** $w(110) = (1 + 1) \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$
- **Valutazione completa**

$x_1 x_2 x_3$	w
000	**0**
001	**0**
010	**0**
011	**1**
100	**0**
101	**1**
110	**0**
111	**1**

Espressioni vs. funzioni

- **A una singola espressione corrisponde una singola funzione, mentre a una funzione possono corrispondere piú espressioni**
- **Due espressioni w e y definite sullo stesso insieme di variabili si dicono equivalenti se forniscono lo stesso valore per ogni possibile valutazione (corrispondono quindi alla stessa funzione).**
- **Qualsiasi trasformazione eseguita utilizzando postulati e proprietá dell'algebra di commutazione porta a un espressione equivalente a quella di partenza**
- **Le funzioni possono essere viste come un livello di specifica (es. funzione che dati in ingresso n bit calcola il bit di paritá)**
- **Le espressioni come si vedrá sono in relazione all'implementazione di reti**

Semplificazione di espressioni

Le proprietá dell'algebra di commutazione si possono utilizzare per semplificare le espressioni, ottenendo da un espressione di partenza un espressione equivalente piú semplice

Si vedrá in seguito il ruolo di queste semplificazioni per il progetto delle reti logiche

Per il momento si noti che non abbiamo ancora definito una metrica per quantificare la complessitá di un espressione e che viene seguito un procedimento non sistematico

Gli esercizi che seguono sono comunque utili per acquisire esperienza sulla manipolazione di espressioni

Esercizio

Si semplifichi la seguente espressione dell'algebra di commutazione: $((x+y+z)\cdot w)' + (x+y')(x'+w)$

$$\overbrace{((x+y+z)\cdot w)'}^{DeMorgan} + \overbrace{(x+y')(x'+w)}^{propr.distributiva} =$$

$$= \overbrace{(x+y+z)'}^{DeMorgan} + w' + \overbrace{x(x'+w)}^{propr.distr.} + \overbrace{y'(x'+w)}^{propr.distr.} =$$

$$= x'y'z' + w' + \overbrace{xx'}^{complemento} + xw + y'w + x'y' =$$

$$= \overbrace{(x'y')z' + (x'y')}^{propr.distr.} + w' + \overbrace{0}^{el.neutro} + wx + wy' =$$

$$= (x'y')\overbrace{(z'+1)}^{nullo} + w' + wx + wy' =$$

Esercizio

$$= \overbrace{(x'y') \cdot 1}^{el.neutro} + w' + wx + wy' = x'y' + \overbrace{w' + wx}^{semplificazione} + wy' =$$

$$= \overbrace{x'y' + x}^{semplificazione} + w' + wy' = \overbrace{y' + wy'}^{assorbimento} + x + w' = y' + x + w'$$

Si noti che

- **le proprietá associativa e commutativa della somma e del prodotto sono state utilizzate senza essere referenziate esplicitamente**
- **le diverse proprietá vengono applicate in maniera non sistematica**

Esercizi proposti

Si semplifichino le seguenti espressioni:

1. $x = (a + b)' \cdot (c + (d \cdot e)')' + (a + a'b + a'b')$
2. $x = (b \cdot 1) + (a + (b \cdot e)') \cdot c + ad$
3. $x = a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot d' + a \cdot b \cdot c' + a \cdot b' \cdot d$

Sommario

Logica e calcolo delle proposizioni

L'algebra di Boole é stata presentata come una struttura algebrica astratta, in realtá era stata sviluppata nell'ambito dello studio dellle leggi del pensiero per determinare se i ragionamenti risultano corretti o meno.

Diversamente dalla logica classica, la logica moderna si occupa delle relazioni fra le affermazioni senza interessarsi minimamente della loro validitá.

La logica é diventata uno strumento fondamentale a supporto delle altre scienze (matematica, fisica ....) che si occupano, invece, dei postulati e dei dati sperimentali che formano le affermazioni di partenza di ciascuna teoria.

A noi servirá per ragionare su reti e circuiti

Proposizioni

- **Le proposizioni che interessano sono frasi elementari che possono essere vere o false (ma non entrambe): "il numero 59 é primo", "il numero 10 é divisibile per 7"**
- **Nel linguaggio naturale esistono frasi che possono essere in parte vere e in parte false, frasi che non si sa se sono vere o false e frasi per cui non ha senso chiedersi se sono vere o false.**
- **Una proposizione elementare non puó essere scomposta in ulteriori proposizioni (es.** $2+2=4$**), e puó essere negata (**$2+2\neq 4$**).**
- **Le proposizioni elementari possono essere composte utilizzando i connettivi** *e* **(and,** $\wedge$**, congiunzione) e** *o* **(or,** $\vee$**, disgiunzione), oppure possono essere negate (not** $\neg$**, negazione).**

Esempi

La prima proposizione descrive la condizione di attraversamento di un canale navigabile (in sicurezza!):

"la nave deve pescare meno di 2 metri e essere larga meno di 10 metri e avere degli alberi che arrivano a meno di 7 metri dal pelo dell'acqua"

La seconda la condizione perché un aereo possa volare nella stratosfera:

"deve utilizzare un propulsore a razzo o avere una propulsione elettrica"

La logica formale non si preoccupa del fatto che le proposizioni atomiche siano vere o false, tale compito riguarda discipline tecniche o scientifiche.

Proposizioni vs. algebra di Boole

Data una proposizione p questa puó essere vera (T) o falsa (F). Il significato di negazione, congiunzione e disgiunzione logica é dato dalle seguenti tabelle di veritá:

p	$\neg p$
F	T
T	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

Proposizioni vs. algebra di Boole

É evidente che se si assume $T = 1$, $F = 0$, l'algebra delle proposizioni é un algebra di Boole (corrispondente al caso particolare dell'algebra di commutazione):

$$\mathcal{A} = \{\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$$

Cosa succede se si fa l'assunzione duale?

Qualsiasi espressione proposizionale del tipo indicato puó essere espressa con un espressione dell'algebra di commutazione.

Esempi

"la nave deve pescare meno di 2 metri e essere larga meno di 10 metri e avere degli alberi che arrivano a meno di 7 metri dal pelo dell'acqua"

- p: **"la nave pesca meno di 2 metri"**
- q **"la nave é larga meno di 10 metri"**
- r: **"gli alberi della nave arrivano a meno di 7 metri dal pelo dell'acqua"**

Proposizione : $p \wedge q \wedge r$

"deve utilizzare un propulsore a razzo o avere una propulsione elettrica"

- p: **"l'aereo utilizza un motore a razzo"**
- q: **"l'aereo ha una propulsione elettrica"**

Proposizione : $p \vee q$

Proposizioni condizionali - I

Sono proposizioni del tipo *"se riceveremo un finanziamento (p), il laboratorio verrá ammodernato (q)"*, **formalmente:**

$$p \rightarrow q \qquad p \textbf{ implica } q$$

Analizziamo quando tale proposizione condizionale é vera:

1. **Sicuramente se** p **e** q **sono vere**
2. **Se invece** p **é vera e** q **é falsa,** $p \rightarrow q$ **é falsa. Cosa succede se l'ipotesi** p **é falsa?**

Per la logica formale la frase é vera. Una volta che l'ipotesi sia falsa posso dire quello che voglio sulla tesi.

Proposizioni condizionali - II

- **Possiamo creare una tabella della veritá:**

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

- $p \to q$ **é quindi vera se** p **é vero e** q **é vero o se** p **é falso**
- $p \to q$ **é equivalente a** $p \wedge q \vee \neg p$

Coimplicazione

Si consideri la proposizione: *"se riceveremo un finanziamento (p), il laboratorio verrá ammodernato (q) e se non lo riceveremo non verrá ammodernato"*

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$$

oppure, in maniera equivalente: *"se riceveremo un finanziamento (p), il laboratorio verrá ammodernato (q) e se il laboratorio viene ammodernato é perché abbiamo ricevuto un finanziamento"*

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Questa proposizione viene definita coimplicazione ($\leftrightarrow$) e ha la seguente tabella di veritá

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Conclusioni

- **Abbiamo visto un modello formale (algebra di commutazione) che utilizzeremo per la sintesi di sistemi digitali**
- **Il modello é interessante perché vedremo essere correlato ai sistemi fisici che elaborano le informazioni**
- **L'algebra di commutazione corrisponde a ua semplice forma di logica detta proposizionale, questo ci aiuterá a ragionare sui circuiti digitali**