CAPITOLO 3:

1 Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ → Non si può usare Sarrus

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right] + \left[-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right] - 4\left[-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= [3(2+2) - 2(1+2) - (2-4)] + [-(2+2) - 2(2+1) - (4-2)] +$$

$$+ [-(1+2) - 3(2+1) - (4-1)] - 4[-(2-4) - 3(4-2) + 2(4-1)] =$$

$$= (12 - 6 + 2) + (-4 - 6 - 2) + (-3 - 9 - 3) - 4(2 \cancel{-6} \cancel{+6}) =$$

$$= \cancel{8} - 12 - 15 \cancel{-8} = -27$$

usiamo le proprietà del determinante per annullare alcune entrate

Si può lavorare sia sulle righe che sulle colonne

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ \boxed{0 \quad 2 \quad 3 \quad 3} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

→ Riga 2 = Riga 1 + Riga 2 = $= (1, -1, 2, 1) + (-1, 3, 1, 2)$

$$\underset{R_3 = R_3 - R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{R_4 = R_4 - 4R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -3(-9+27) - (-18-9) = -3 \cdot 18 + 27 = -27$$

(2) Senza usare la definizione di lineare indipendenza, stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono lin. dip. o indip.

- $S_1 = \{(1,2,3),(-1,1,0),(0,1,-1)\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-5 = -6 \neq 0 \Rightarrow S_1 \text{ lin. indip}$$

- $S_2 = \{(1,2,1),(1,0,1),(2,2,2)\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow S_2 \text{ lin. dip.}$$

Infatti $v_1 = v_3 - v_2$

(3) Sia A la matrice reale $A = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$

a) Determinare per quali k la matrice è invertibile

RICORDO A invertibile $\Updownarrow$ $\det(A) \neq 0$ } TEOREMA SULL'INVERTIBILITÀ DI MATRICI

$$\det(A) = k\begin{vmatrix} 2k-2 & 0 \\ k-1 & 2-k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k-1 & k \\ 2k-2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= k[(2k-2)(2-k)] - k(2k-2) = k(2k-2)(2-k-1) =$$

$$= k(2k-2)(1-k) = -2k(-k+1)(1-k) = -2k(1-k)^2$$

$\Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \vee k \neq 1$

b) Calcolare l'inversa di A per $k=-1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(-3+1) = 8 \neq 0$$

RICORDO $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\mathrm{Cof}(A))^T = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Adj}(A)$

$$\mathrm{cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\cdot \det(A_{ij})$$

$a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -12$ $\quad a_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4$ $\qquad a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = +8$

$a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$ $\qquad a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$

$a_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -4$ $\qquad a_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$a_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4$ $\qquad \Rightarrow cof(A) = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Adj(A) = (cof(A))^T = \begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4 Calcolare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_4 = 3 \cdot R_1 \Rightarrow rg(A) \leq 3$$

$rg(A) \leq \min\{5, 4\} = 4$

$\leq \min\{\#righe, \#colonne\}$

Osservo che $rg(A) \geq 2$ perchè posso trovare un determinante $\neq 0$ cioè $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Se tutte le sottomatrici 3×3 che contengono il nostro minore hanno $\det = 0 \Rightarrow$ il $rg(A) = 2$. Se almeno un $\det \neq 0 \Rightarrow$ il $rg(A) \geq 3$

mi basta trovarne uno solo $\neq 0$

Infatti:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 3$$

$\Rightarrow$ linea

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left[-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2+1) + (2-4) - (-3) + (2-1) = -2 - 2 + 3 + 1 = 0$$

Provo con l'altro:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0 \text{ perchè } 3^a \text{ riga} = 3 \cdot 1^a \text{ riga}} = 0$$

⑤ Calcolare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il rango della seguente matrice

i) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$

Osserviamo che $rg(A)$ massimo può essere 3.

Inoltre $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2 \quad \forall \lambda$

$\rightsquigarrow rg(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda) - (2 - 3\lambda) + 2(-1) = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda+4)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ • Se $\det A \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -4 \wedge \lambda \neq 1 \rightarrow rg(A) = 3$

• Se $\lambda = 4 \vee \lambda = 1 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ $rg(B) \leq 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow rg(B) \geq 2$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1-6)+(4+3) = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \lambda + 6 - 4 - 3 = \lambda - 1$

Se $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow rg(B) = 3$

Se $\lambda = 1 \Rightarrow rg(B) = 2$

(6) Siano dati i vettori $\vec{v}_1 = (0, 1, -2, \beta)$, $\vec{v}_2 = (\beta+1, -1, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (\beta+3, 2, \beta, -3)$, $\vec{v}_4 = (\beta^2-4, 0, 0, 0)$ di $\mathbb{R}^4$, $\beta \in \mathbb{R}$.
Sia $W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4]$ il sottosp. di $\mathbb{R}^4$ generato da $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$.

Determinare la dimensione di W al variare di β.

Scrivo i vettori come righe di una matrice e calcolo il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & \beta \\ \beta+1 & -1 & 0 & 1 \\ \beta+3 & 2 & \beta & -3 \\ \beta^2-4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-\beta^2+4) \begin{vmatrix} 1 & -2 & \beta \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & \beta & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\beta^2+4)\left[\begin{vmatrix} +2 & \beta \\ \beta & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \beta \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (-\beta^2+4)[6 - \beta^2 - \beta - 4] = (-\beta^2+4)(-\beta^2-\beta+2) = *$$

$$* = (\beta^2-4)(\beta^2+\beta-2) = (\beta^2-4)(\beta+1)(\beta-2) = (\beta-2)^2(\beta+2)(\beta+1)$$

- Se $\beta \neq \pm 2 \wedge \beta \neq -1 \Rightarrow \dim W = 4$
- Se $\beta = \pm 2 \vee \beta = 1 \Rightarrow \dim W \leq 3$ perché il determ. $= 0$.

▸ Se $\beta = 2 \Rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ NON SI PUO' FARE IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE RETTANGOLARE

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(A_2) \geq 2$ e $rg(A_2) \leq 3$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3(2+4) + 5(-2) = -28 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A_2) = 3 \Rightarrow \dim W = 3$

- Se $\beta = -2 \Rightarrow A_{-2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ $R_1 = R_2 + R_3$ cioè $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

  $\Rightarrow$ non può essere $rg(A_{-2}) = 3$
  Ho che $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A_{-2}) \geq 2$ $\Bigg\} \Rightarrow rg(A_{-2}) = 2 \Downarrow \dim W = 2$

- Se $\beta = 1 \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A_1) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2(1+4) + 4(-2) = -18 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A_1) = 3 \Rightarrow \dim W = 3$

b) Esistono valori di β per i quali $W = \mathbb{R}^4$? Se sì, quali?

Se $\beta \neq \pm 2$ e $\beta \neq 1 \Rightarrow \dim W = 4$

Quindi $\left.\begin{array}{l} \dim W = 4 \\ W \subseteq \mathbb{R}^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}^4 \equiv W.$