Esercizi sui numeri finiti con Matlab
Prof. V. Ruggiero

1. Realizzare una funzione Matlab che calcola il valore del seno iperbolico $\sinh x$ tramite la relazione:

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Si confronti con la funzione Matlab $\sinh(x)$ (che assumiamo essere il valore esatto del seno iperbolico) e si realizzi il grafico dell'errore assoluto e relativo per $x = 10^p$ con $p = -6, \ldots, 3$. Quale è la causa di errore per valori piccoli di x? Cosa succede per valori grandi di x?

2. La costante "e" di Eulero è definita come

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n \quad \text{con} \quad \gamma_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n)\right].$$

Realizzare uno script Matlab che esegue il calcolo della successione γ_n, per $n = 10^p$ con $p = 0:2:8$. Discutere i risultati ottenuti dopo averli visualizzati graficamente.

3. Si calcoli la funzione di Bessel J_{20} in $x = 1$ usando la formula di ricorrenza:

$$J_{m+1} = 2mJ_m - J_{m-1}$$

dove J_0 e J_1 sono ottenuti con le funzioni di Matlab `besselj(0,1)` e `besselj(1,1)`, rispettivamente. Valutare se i risultati ottenuti sono attendibili (confrontarli con i valori ottenuti usando la funzione di Matlab `besselj(m,1)`).

4. Valutare l'integrale della funzione $f(x) = \dfrac{x^n}{4x+1}$ nell'intervallo $(0,1)$ mediante la formula di ricorrenza

$$y_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - y_{n-1}\right)$$

con $y_0 = (1/4)\log(5)$, oppure mediante la formula

$$y_n = \frac{1}{n+1} - 4y_{n+1}$$

partendo da un valore di y_{n+1} nullo e con n abbastanza grande. Confrontare le due formule per effettuare il calcolo di y_{20} e dire quale delle due è più stabile.

5. Valutare e^x con $x = [x] + f$ dove $f = x - [x]$ (parte decimale), calcolando con lo sviluppo in serie di Taylor

$$\text{(a)} \quad \left(\mathrm{e}^{(f/[x])+1}\right)^{[x]}, \qquad \text{(b)} \quad \mathrm{e}^{[x]}\mathrm{e}^f, \qquad \text{(c)} \quad \underbrace{(\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}\cdots\mathrm{e})}_{[x]\ \text{volte}}\,\mathrm{e}^f.$$

6. Calcolare le soluzioni di un'equazione di secondo grado in modo stabile (evitando formule con cancellazione).

7. Valutare l'espressione $y = \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x}$ per valori di $x = 10^{-i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Commentare i risultati ottenuti, tenendo conto che l'espressione precedente può essere semplificata a $y = x + 2$.

8. Calcolare la sequenza di Fibonacci fino al termine F_{100} nei due seguenti modi:

   - usare $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$;
   - usare $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

9. Realizzare un M-function file per la valutazione della seguente funzione:

$$f(x) = 1.01\mathrm{e}^{4x} - 4.62\mathrm{e}^{3x} - 3.11\mathrm{e}^{2x} + 12.2\mathrm{e}^x - 1.99.$$

Calcolare e^x usando uno sviluppo in serie accuratamente implementato in modo da ridurre la propagazione degli errori. Posto $y = \mathrm{e}^x$, implementare la valutazione della funzione usando lo schema di Horner. Confrontare la stabilità dei due algoritmi.

10. Si calcoli $y_{15} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{15}}{4x+1}\,\mathrm{d}x$, usando la formula di ricorrenza:

$$y_0 = \frac{1}{4}\ln(5)\,, \qquad y_n = \frac{1}{n+1} - 4y_{n+1}\,.$$

11. Considerare le relazioni di ricorrenza

$$p_0 = 1,\ p_1 = \frac{1}{3},\ p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} - \frac{1}{6}p_{n-2}\,; \qquad q_0 = 1,\ q_1 = \frac{1}{3},\ q_n = \frac{5}{3}q_{n-1} - \frac{4}{9}q_{n-2}\,.$$

Calcolare in modo stabile le sequenze generate dalle relazioni per $n = 2, \ldots, 8$.

12. Realizzare un M-function file che calcoli in modo stabile la somma $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2}$.

13. Per il calcolo di π si possono usare differenti metodi:

- sviluppo in serie di $\arctan(1) = \pi/4$:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$$

- sviluppo in serie di $\arcsin(1/2) = \pi/6$:

$$\pi = 6\left(0.5 + \frac{(0.5)^3}{2\cdot 3} + \frac{(1\cdot 3)(0.5)^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{(1\cdot 3\cdot 5)(0.5)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right)$$

- metodo di Wallis:

$$p_0 = 2\,, \qquad p_k = p_{k-1}\frac{4k^2}{4k^2-1} \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

  con $\lim_{k\to\infty} p_k = \pi$;
- metodo di Archimede: nella circonferenza di raggio 1 vengono inscritti successivamente dei poligoni regolari di 2^p lati, per $p = 2, 3, 4, \ldots$; l'area di ciascun poligono è data dal prodotto di 2^p per l'area di ciascun triangolo che lo costituisce. Se indichiamo con θ l'angolo al centro, l'area di ogni triangolo è data da $(1/2)\sin(\theta)$. I valori di $\sin(\theta)$ sono calcolati con la formula:

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} \qquad \cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)}$$

  Partendo da $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, si itera il procedimento;
- regola dei trapezi: si approssima $\pi/4$ con la somma delle aree dei trapezi di altezza $1/n$ inscritti in un quarto di cerchio di raggio unitario;
- metodo di Montecarlo: il valore di π è approssimato nel seguente modo. Si generano n coppie di numeri casuali compresi tra 0 e 1. Siano i_n e t_n, rispettivamente, il numero di punti di coordinate (x, y) interni al quarto di cerchio inscritto nel quadrato di lato 1 e il numero totale di punti considerato. Si approssima π mediante $p_n = 4i_n/t_n$.

Studiare sperimentalmente la stabilità e l'efficienza di almeno tre di questi metodi (tempo necessario, precisione ottenuta, tipo di errori generati,. . .).