Istituzioni di Matematica

Docente: Prof. M.D. Rosini

email: massimilianodaniele.rosini@unife.it

Corso di Laurea in Informatica

Università Degli Studi Di Ferrara

a.a. 2022-2023

Funzioni

Indice

Sezione 1 Definizioni e proprietà generali

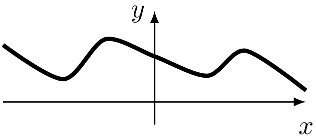
In maniera *non rigorosa*, una legge f definita in tutto $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione se è possibile disegnarne il grafico muovendosi sempre verso destra con la penna.

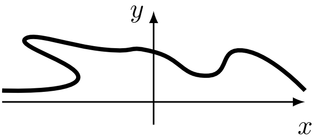
In altri termini, f è una funzione se ad ogni x in $\mathbb{R}$ corrisponde un unico valore $f(x)$ in $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che il grafico di f è ottenuto disegnando nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tutti punti $(x, f(x))$ al variare di x in $\mathbb{R}$.

Esercizio

Quale dei due grafici qui sotto corrisponde al grafico di una funzione?





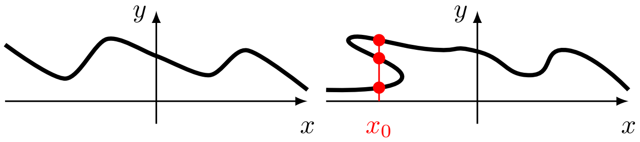
In maniera *non rigorosa*, una legge f definita in tutto $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione se è possibile disegnarne il grafico muovendosi sempre verso destra con la penna.

In altri termini, f è una funzione se ad ogni x in $\mathbb{R}$ corrisponde un unico valore $f(x)$ in $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che il grafico di f è ottenuto disegnando nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tutti punti $(x, f(x))$ al variare di x in $\mathbb{R}$.

Esercizio

Quale dei due grafici qui sotto corrisponde al grafico di una funzione?



Chiaramente solo il grafico di sinistra corrisponde a quello di una funzione, mentre quello a destra no visto che, ad esempio, ad x_0 corrispondono ben tre punti.

Siano A e B insiemi non vuoti.

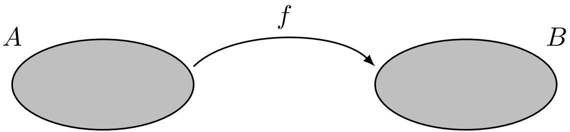
Definizione

- Una funzione f con dominio A e codominio B, o più brevemente

$$f\colon A \to B,$$

è un processo o una relazione che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B, ossia

$$\forall x \in A \quad \exists! y \in B \quad \text{t.c.} \quad y = f(x).$$

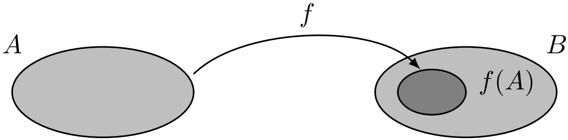


Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

- L'immagine di f è il sottoinsieme $f(A)$ di B dato da

$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ t.c. } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}.$$



Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

- Il grafico di f è il sottoinsieme G di $A \times B$ dato da

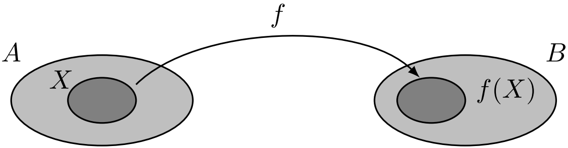
$$G = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

- L'immagine di $X \subseteq A$ tramite f è dato da

$$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X \text{ t.c. } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}.$$

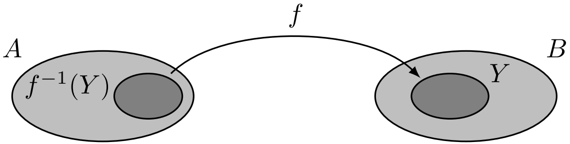


Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

- La controimmagine di $Y \subseteq B$ tramite f è dato da

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : \exists y \in Y \text{ t.c. } y = f(x)\} = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$



Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

- La funzione f è iniettiva se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ovvero

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

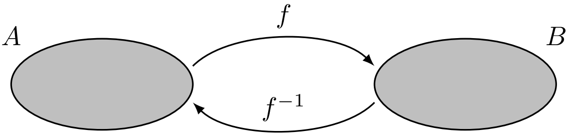
- La funzione f è suriettiva se
$$f(A) = B$$
ovvero
$$\forall y \in B \ \exists x \in A \text{ t.c. } y = f(x).$$

Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

- La funzione f è biettiva se f è iniettiva e suriettiva.
- Se f biettiva, allora la sua funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$ è definita per ogni $y \in B$ come segue

$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

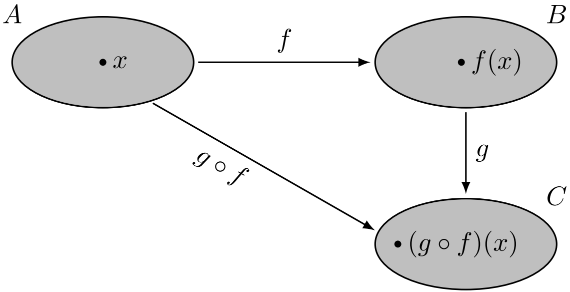


Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

- La funzione composta di $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ è la funzione $g \circ f\colon A \to C$ definita per ogni $x \in A$ da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione

- L'insieme di definizione di f è il più grande insieme D per cui $f(x)$ è ben definita per ogni $x \in D$.

Proposizione

Se $f\colon A \to B$ è biettiva, allora si ha che:

$$(f \circ f^{-1})(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y \qquad \forall y \in B,$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x \qquad \forall x \in A.$$

Nella seguente definizione utilizziamo l'ordinamento di $\mathbb{R}$, e per questo consideriamo A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Definizione

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti ed $f \colon A \to B$ una funzione.

- f è crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$
- f è strettamente crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
- f è decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$
- f è strettamente decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Nella seguente definizione utilizziamo l'ordinamento di $\mathbb{R}$, e per questo consideriamo A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Definizione

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti ed $f\colon A \to B$ una funzione.

- f è monotona se è crescente o decrescente.
- f è strettamente monotona se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Nella seguente definizione utilizziamo l'ordinamento di $\mathbb{R}$, e per questo consideriamo A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Definizione

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti ed $f \colon A \to B$ una funzione.

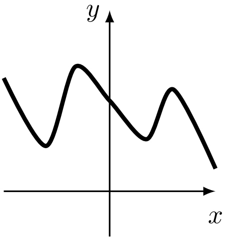
- f è pari se per ogni $x \in A$ si ha
$$f(-x) = f(x).$$
- f è dispari se per ogni $x \in A$ si ha
$$f(-x) = -f(x).$$
- f è periodica se esiste $T > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si ha
$$f(x + T) = f(x).$$
In tal caso il più piccolo $T > 0$ per cui vale l'uguaglianza precedente e detto periodo.

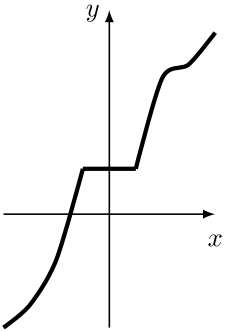
Esempio

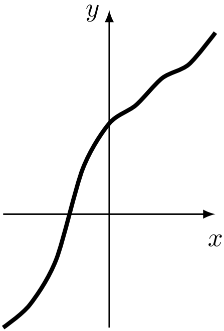
Vedremo in seguito che tutte le funzioni trigonometriche sono periodiche.

Esercizio

Quali dei seguenti grafici corrispondono a funzioni monotone?

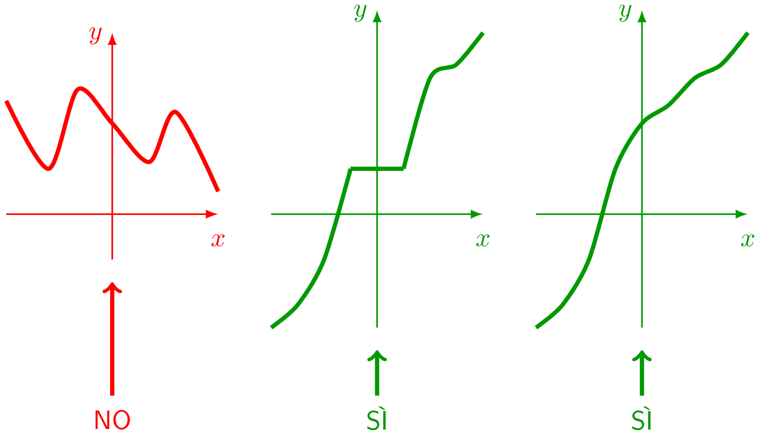






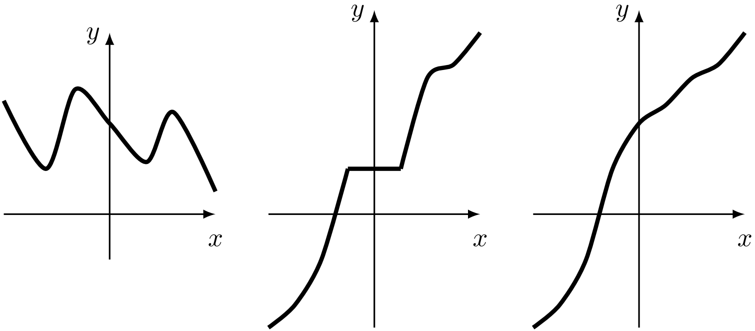
Esercizio

Quali dei seguenti grafici corrispondono a funzioni monotone?



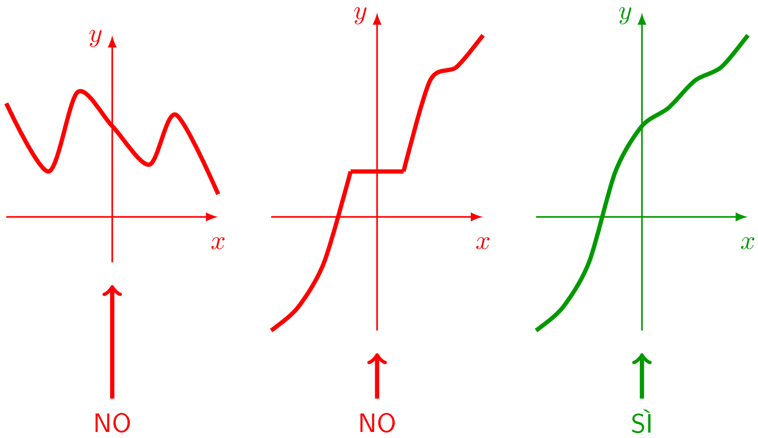
Esercizio

Quali dei seguenti grafici corrispondono a funzioni strettamente monotone?



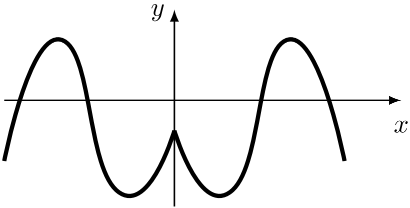
Esercizio

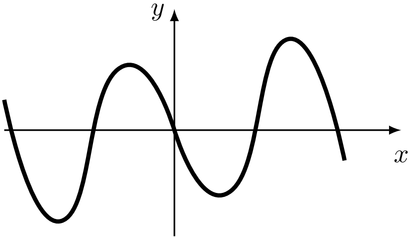
Quali dei seguenti grafici corrispondono a funzioni strettamente monotone?



Esercizio

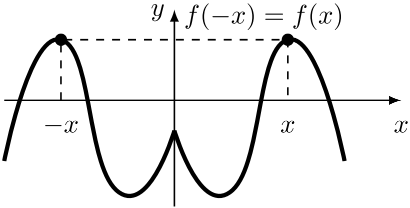
Quale dei seguenti grafici corrisponde ad una funzione pari e quale ad una funzione dispari?



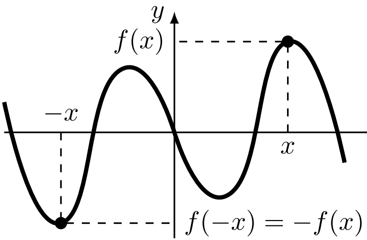


Esercizio

Quale dei seguenti grafici corrisponde ad una funzione pari e quale ad una funzione dispari?



funzione pari



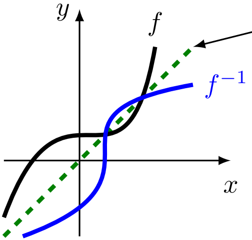
funzione dispari

Proposizione

Una funzione strettamente monotona è iniettiva.

Osservazione

Ruotando il grafico di una funzione (biettiva) f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante si ottiene il grafico della funzione inversa f^{-1}.



bisettrice del primo e terzo quadrante

Una volta disegnato su di un foglio il grafico di f, se ruotiamo il foglio tenendo le mani sull'angolo in basso a sinistra ed in alto a destra, quello che si vede in controluce è il grafico della funzione inversa f^{-1}.

Proposizione

Se f è invertibile allora:

- f strettamente crescente $\iff$ f^{-1} strettamente crescente;
- f strettamente decrescente $\iff$ f^{-1} strettamente decrescente.

Esercizio

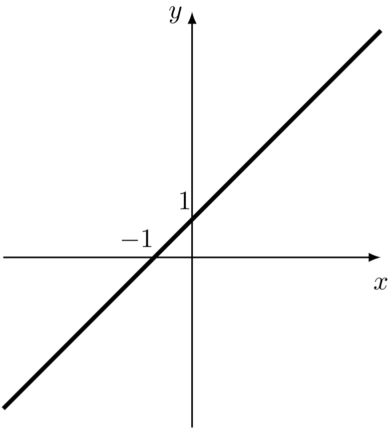
Disegnare il grafico di

$$f(x) = x + 1.$$

Esercizio

Disegnare il grafico di

$$f(x) = x + 1.$$

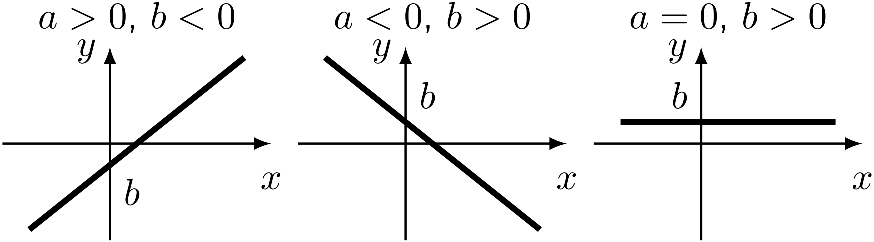


Esempio

Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$f(x) = ax + b$$

ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$ e come grafico una retta.

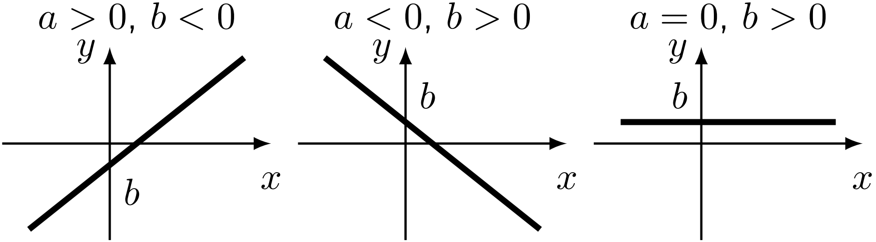


Esempio

Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$f(x) = ax + b$$

ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$ e come grafico una retta.



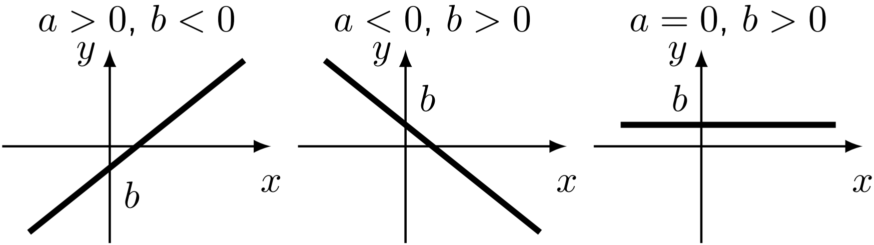
Se $a \neq 0$ allora l'immagine è $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Se $a = 0$ allora l'immagine è $f(\mathbb{R}) = \{b\}$.

Esempio

Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$f(x) = ax + b$$

ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$ e come grafico una retta.



f è strettamente crescente $\iff$ se $a > 0$.
f è strettamente decrescente $\iff$ se $a < 0$.
a ci dà la rapidità con cui la funzione cresce se $a > 0$, o decresce se $a < 0$.

Esempio

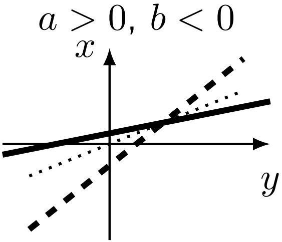
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo che

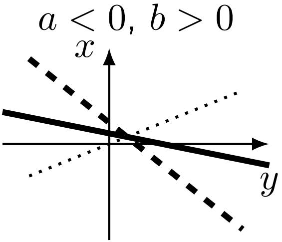
$$f(x) = ax + b$$

ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$ e come grafico una retta.

Infine f è iniettiva se e solo se $a \neq 0$ ed in tal caso $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biettiva e la funzione inversa è

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}.$$





Esercizio

La funzione

$$f(x) = x^2$$

ha come insieme di definizione $D = ?$

Esercizio

La funzione

$$f(x) = x^2$$

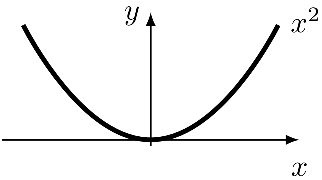
ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$, è una funzione pari o dispari?

Esercizio

La funzione

$$f(x) = x^2$$

ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$, è una funzione pari e ha come grafico la parabola. Inoltre $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha come immagine $f(D) = ?$



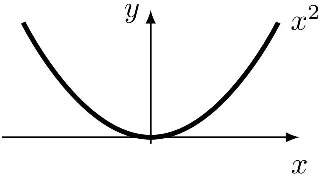
Esercizio

La funzione

$$f(x) = x^2$$

ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$, è una funzione pari e ha come grafico la parabola. Inoltre $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha come immagine $f(D) = [0, +\infty)$

è iniettiva in $\mathbb{R}$?

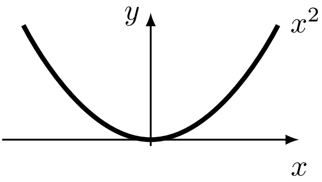


Esercizio

La funzione

$$f(x) = x^2$$

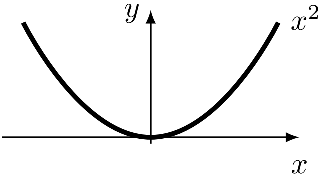
ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$, è una funzione pari e ha come grafico la parabola. Inoltre $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha come immagine $f(D) = [0, +\infty)$ e non è iniettiva in $\mathbb{R}$.



Esercizio

La funzione

$$f(x) = x^2$$



ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$, è una funzione pari e ha come grafico la parabola. Inoltre $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha come immagine $f(D) = [0, +\infty)$ e non è iniettiva in $\mathbb{R}$.

$f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è biettiva e la sua funzione inversa è $f^{-1}(y) = ?$

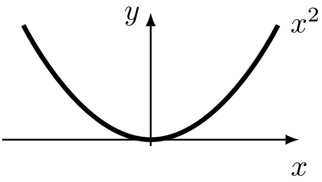
$f\colon (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ è biettiva e la sua funzione inversa è $f^{-1}(y) = ?$

Esercizio

La funzione

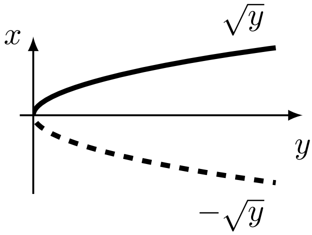
$$f(x) = x^2$$

ha come insieme di definizione $D = \mathbb{R}$, è una funzione pari e ha come grafico la parabola. Inoltre $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha come immagine $f(D) = [0, +\infty)$ e non è iniettiva in $\mathbb{R}$.



$f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è biettiva e la sua funzione inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$f\colon (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ è biettiva e la sua funzione inversa è $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.



Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^3.$$

Insieme di definizione $D =?$

f è una funzione pari o dispari?

Disegnare il grafico.

Immagine $f(D) =?$

f è monotona in D?

f è invertibile?

Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^3.$$

Insieme di definizione $D = ?$

$D = \mathbb{R}$

f è una funzione pari o dispari?

Dispari.

Disegnare il grafico.

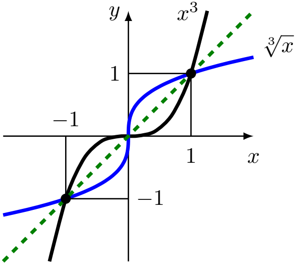


Immagine $f(D) = ?$

$f(D) = \mathbb{R}$

f è monotona in D?

f è strettamente crescente.

f è invertibile?

Sì, e la sua funzione inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Esercizio

Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Insieme di definizione $D = ?$

f è una funzione pari o dispari?

Immagine $f(D) = ?$

f è monotona in D?

Disegnare il grafico.
f è invertibile?

Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Insieme di definizione $D = ?$

$D = [-1, 1]$

f è una funzione pari o dispari?

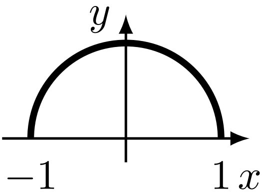
Pari.

Immagine $f(D) = ?$

$f(D) = [0, 1]$

f è monotona in D?

f non è monotona in D, ma è strettamente crescente in $[-1, 0]$ ed è strettamente decrescente in $[0, 1]$.



f è invertibile?

f non è invertibile in D. Lo è però $f\colon [-1, 0] \to [0, 1]$ e la sua funzione inversa è $f^{-1} \equiv -f$. Anche $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ è invertibile e la sua funzione inversa è $f^{-1} \equiv f$.

Disegnare il grafico.

Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Insieme di definizione $D = ?$

f è una funzione pari o dispari?

Immagine $f(D) = ?$

f è monotona in D?

f è invertibile?

Disegnare il grafico.

Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Insieme di definizione $D =?$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f è una funzione pari o dispari?

Dispari.

Immagine $f(D) =?$

$f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f è monotona in D?

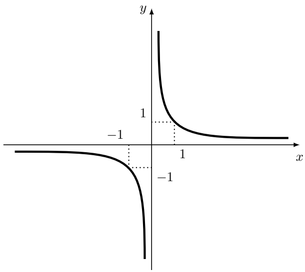
f non è monotona in D, ma è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ ed in $(0, +\infty)$.

f è invertibile?

f è invertibile in D e coincide con la sua inversa.

Disegnare il grafico.

Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.



Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

Insieme di definizione $D = ?$

f è una funzione pari o dispari?

Immagine $f(D) = ?$

f è monotona in D?

f è invertibile?

Disegnare il grafico.

Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

Insieme di definizione $D = ?$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

f è una funzione pari o dispari?

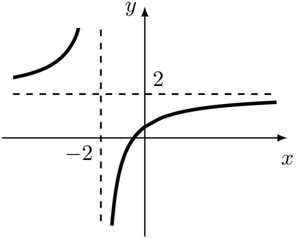
Né pari né dispari.

Immagine $f(D) = ?$

$f(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

f è monotona in D?

f non è monotona in D, ma è strettamente crescente in $(-\infty, -2)$ ed in $(-2, +\infty)$.



f è invertibile?

f è invertibile in D e la sua funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ è definita da

$$f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{2-y}.$$

Disegnare il grafico.

Esercizio

Consideriamo la funzione
$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Insieme di definizione $D = ?$

f è una funzione pari o dispari?

Immagine $f(D) = ?$

f è monotona in D?

f è invertibile?

Disegnare il grafico.

Esercizio

Consideriamo la funzione
$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Insieme di definizione $D = ?$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f è una funzione pari o dispari?

Dispari.

Immagine $f(D) = ?$

$f(D) = \mathbb{R} \setminus (-2, 2) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

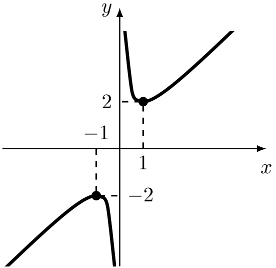
f è monotona in D?

f non è monotona in D, ma è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ ed in $(1, +\infty)$, mentre è strettamente decrescente in $[-1, 0)$ ed in $(0, 1]$.

f è invertibile?

f non è invertibile in D.

Disegnare il grafico.



Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

Insieme di definizione $D = ?$

f è una funzione pari o dispari?

Immagine $f(D) = ?$

f è monotona in D?

f è invertibile?

Disegnare il grafico.

Esercizio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x.$$

Insieme di definizione $D = ?$

$D = \mathbb{R}$

f è una funzione pari o dispari?

Né pari né dispari.

Immagine $f(D) = ?$

$f(D) = (0, +\infty)$

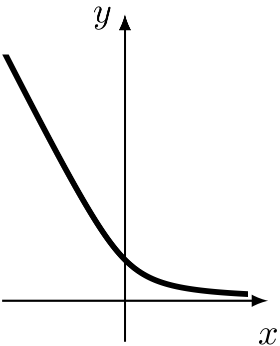
f è monotona in D?

f è strettamente decrescente.

f è invertibile?

f è invertibile ed $f^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2y}$.

Disegnare il grafico.



Sezione 2 Alcune funzioni elementari

Funzione potenza con esponente naturale

Sia $n \in \mathbb{N}$. La funzione potenza n-esima $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

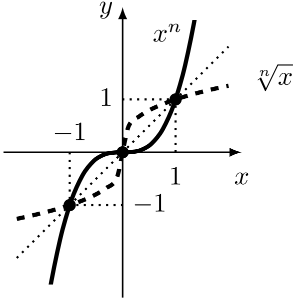
$$f(x) = x^n.$$

- Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, allora

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è una funzione dispari, è strettamente crescente (quindi è anche iniettiva) ed è biettiva in quanto suriettiva, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; la sua funzione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione radice n-esima definita da

$$f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}.$$



Funzione potenza con esponente naturale

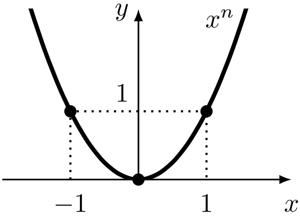
Sia $n \in \mathbb{N}$. La funzione potenza n-esima $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = x^n.$$

- Se $n \in \mathbb{N}$ è pari, allora

$$f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

è una funzione pari, è suriettiva ma non è iniettiva.



Funzione potenza con esponente naturale

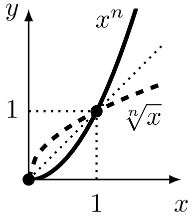
Sia $n \in \mathbb{N}$. La funzione potenza n-esima $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = x^n.$$

- Se $n \in \mathbb{N}$ è pari, allora

$$f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$

è strettamente crescente (quindi è anche iniettiva) e biettiva in quanto suriettiva, $f([0,+\infty)) = [0,+\infty)$; la sua funzione inversa $f^{-1}\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ è la funzione radice n-esima $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.



Funzione potenza con esponente naturale

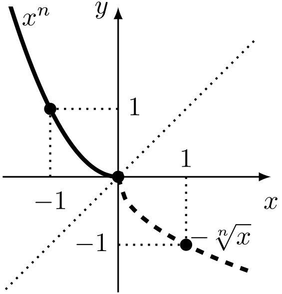
Sia $n \in \mathbb{N}$. La funzione potenza n-esima $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = x^n.$$

- Se $n \in \mathbb{N}$ è pari, allora

$$f\colon (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$$

è strettamente decrescente (quindi è anche iniettiva) e biettiva in quanto suriettiva, $f((-\infty,0]) = [0,+\infty)$; la sua funzione inversa $f^{-1}\colon [0,+\infty) \to (-\infty, 0]$ è definita da $f^{-1}(y) = -\sqrt[n]{y}$.



Funzione esponenziale

Prima di introdurre la funzione esponenziale, ricordiamo che se $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ ed $n \in \mathbb{N}$, allora $r = m/n \in \mathbb{Q}$ ed

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m ,$$

mentre per un generico $x \in \mathbb{R}$ si definisce

$$a^x = \sup\left\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\right\}.$$

Funzione esponenziale

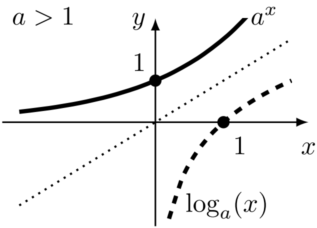
Sia $a \in (0, +\infty)$. La funzione esponenziale $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è definita da

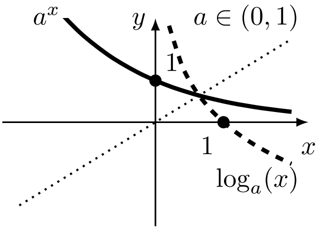
$$f(x) = a^x.$$

Osserviamo che:
- $a > 1$ f è strettamente crescente;
- $a = 1$ f è costante;
- $a \in (0,1)$ f è strettamente decrescente.

Se $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, allora f è una funzione biettiva e la sua funzione inversa è

$$f^{-1}(x) = \log_a(x).$$





Funzione potenza con esponente reale

Sia $a \in \mathbb{R}$. La funzione potenza $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ è definita da

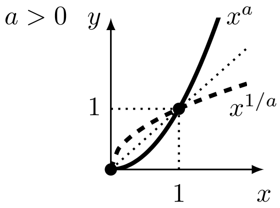
$$f(x) = x^a = 10^{a \log_{10}(x)} = e^{a \ln(x)}.$$

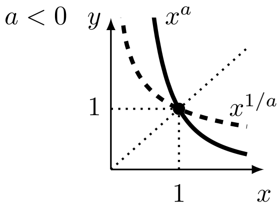
Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
&\bullet\ a > 0 &&\implies && f \text{ è strettamente crescente,}\\
&\bullet\ a = 0 &&\implies && f \text{ è costante,}\\
&\bullet\ a < 0 &&\implies && f \text{ è strettamente decrescente.}
\end{aligned}$$

Dunque, se $a \neq 0$, allora f è una funzione biettiva e la sua funzione inversa è

$$f^{-1}(x) = x^{1/a}.$$

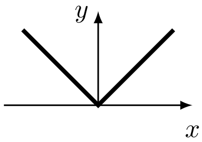




Funzione modulo

La funzione modulo

$$|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$



è definita da

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0, \\ -x & \text{se } -x < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione modulo $|\cdot|$ e una funzione pari.

Funzione modulo

Di seguito alcune proprietà del modulo, facilmente deducibili dal suo grafico, valide ogni costante $a > 0$:

- $|x| \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
- $|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, (disuguaglianza triangolare)
- $|x| < a \iff -a < x < a$,
- $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$,
- $|x| > a \iff x < -a \vee x > a$,
- $|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a \vee x \geqslant a$.

Esercizio

Verificare che

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leqslant 2\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty).$$

Esercizio

Verificare che

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 + x\right| \geqslant 2x + 1\right\} = \left(-\infty, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

Esercizio

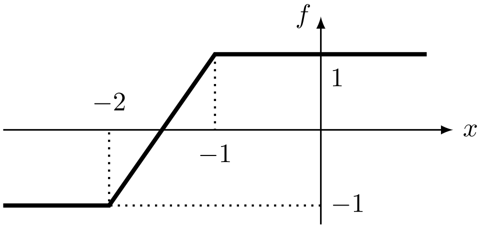
Disegnare il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio

Disegnare il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



f non è iniettiva in $\mathbb{R}$ (ma solo in $[-2, -1]$), è crescente in $\mathbb{R}$ (ma strettamente crescente solo in $[-2, -1]$) e l'immagine è $[-1, 1]$.

Funzione parte intera

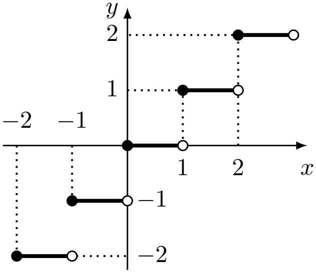
La funzione parte intera

$$[\,\cdot\,] \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$

è definita da

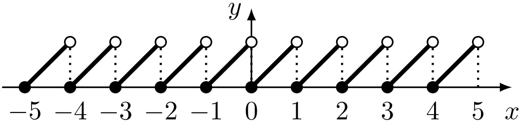
$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leqslant x\}.$$

Osserviamo che la funzione parte intera $[\,\cdot\,]$ è crescente, ma non strettamente crescente visto che è costante a tratti.



Esempio

La funzione mantissa $\{x\} = x - [x]$ è periodica con periodo $T = 1$ ed è strettamente crescente a tratti.



Si noti che $\{x\}$ è la parte frazionaria di x.

Grafici deducibili da quello della funzione f

Dal grafico della funzione f possiamo facilmente dedurre quelli delle seguenti funzioni:

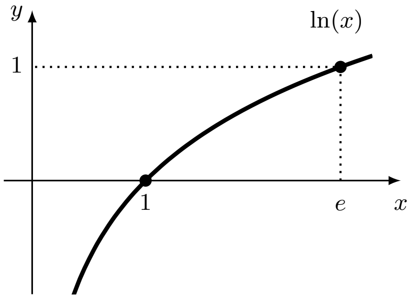
- $x \mapsto f(-x)$,
- $x \mapsto f(|x|)$,
- $x \mapsto -f(x)$,
- $x \mapsto |f(x)|$,
- $x \mapsto |f(|x|)|$,
- $x \mapsto a \cdot f(b \cdot x + c)$.

Infatti per l'ultima funzione basta fare quanto segue:

- considerare il grafico di f;
- traslarlo orizzontalmente di $-c$;
- "riscalare" l'asse delle x di un fattore $\frac{1}{b}$ e l'asse delle y di un fattore a.

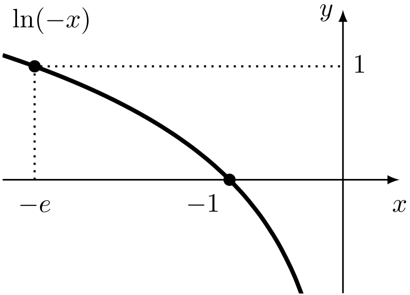
Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(x)$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(x)$.



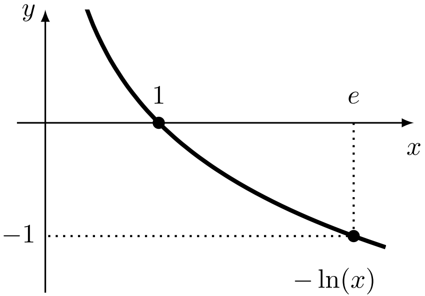
Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(-x)$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(-x)$.



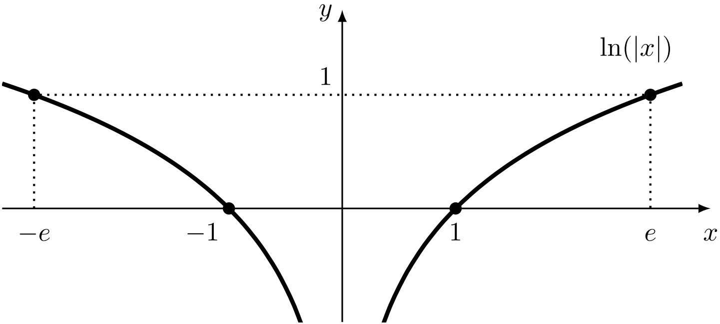
Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $-f(x)$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $-f(x)$.



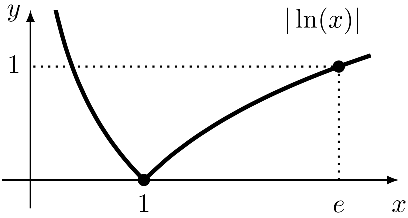
Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(|x|)$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(|x|)$.



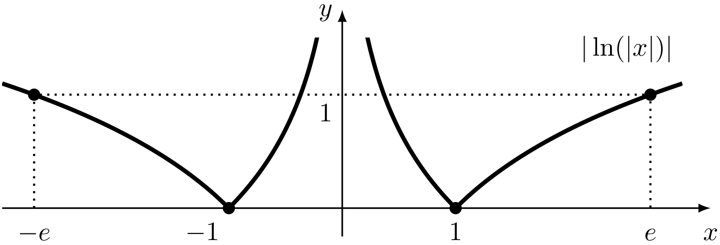
Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $|f(x)|$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $|f(x)|$.



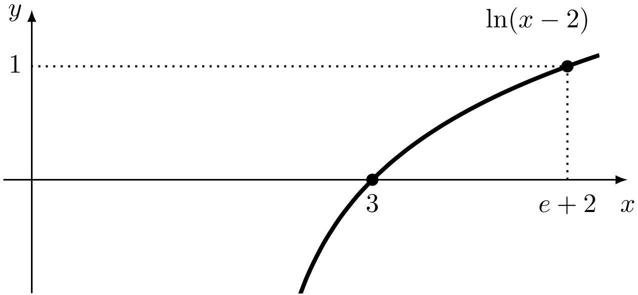
Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $|f(|x|)|$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $|f(|x|)|$.



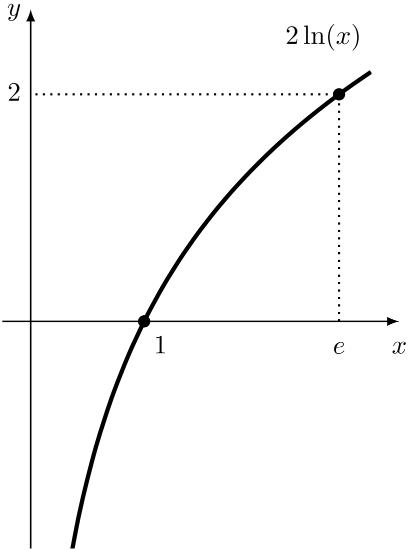
Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(x-2)$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(x-2)$.



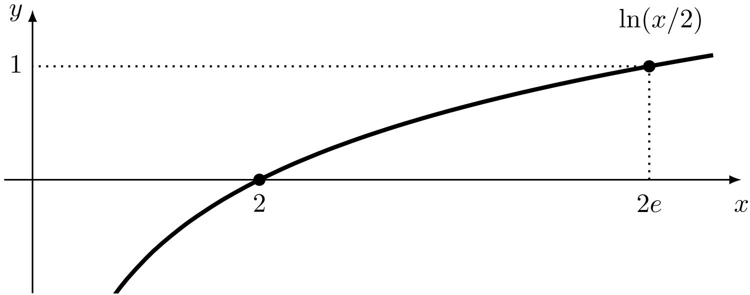
Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $2f(x)$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $2f(x)$.



Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(x/2)$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x)$.
Disegnare il grafico di $f(x/2)$.



TUTTO CHIARO?