④ Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}_1 = (1,-1,0)$ $\vec{v}_2 = (-1,-2,4)$

Determinare:

a) il versore $\vec{u}_2$ di $\vec{v}_2$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{v_{2_1}^2 + v_{2_2}^2 + v_{2_3}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \frac{(-1,-2,4)}{\sqrt{21}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

b) la componente ortogonale $\alpha$ di $\vec{v}_1$ rispetto a una retta parallela e concorde con il versore di $\vec{v}_2$.

Poiché in questo caso non si ha la proiezione del vettore $\vec{v}_1$, basta fare il prodotto scalare tra $\vec{v}_1$ e $\vec{u}_2$

$$\alpha = \langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle = \left\langle (1,-1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)\right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{21}} + \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

c) la proiezione ortogonale $\vec{v}'$ di $\vec{v}_1$ sulla retta del punto b)

$$\vec{v}' = \langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle \cdot \vec{u}_2 = \alpha \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}\left(-\frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right) = \left(-\frac{1}{21}, -\frac{2}{21}, \frac{4}{21}\right)$$

L'espressione dei coseni degli angoli $\theta_x$, $\theta_y$ e $\theta_z$ che un vettore $v = (x, y, z)$ forma con gli assi coordinati x, y e z si ottiene come

$$\cos(\theta_x) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{i} \rangle}{|\vec{v}|} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{e_1} \rangle}{|\vec{v}|} = \frac{x}{|\vec{v}|} \quad \text{ove } |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos(\theta_y) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{j} \rangle}{|\vec{v}|} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos(\theta_z) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{k} \rangle}{|\vec{v}|} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Questi sono detti coseni direttori

ESERCIZIO

# CAPITOLO 1: Prodotto vettoriale e prodotto misto

**1** Stabilire se i vettori $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \frac{5}{3}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j} + \frac{5}{6}\vec{k}$ sono paralleli, ortogonali o nessuna delle due.

**RICORDO** Il prodotto scalare $= 0 \iff$ uno dei due vettori è $\vec{0}$ oppure sono $\perp$

Il prodotto vettoriale $= \vec{0} \iff$ uno dei due vettori è $\vec{0}$ oppure sono $//$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle (2,-3,1), (\tfrac{5}{3}, -\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{6}) \rangle = \frac{10}{3} + \frac{15}{2} + \frac{5}{6} = \frac{20+45+5}{6} = \frac{70}{6}$$

$\Rightarrow$ non sono ortogonali

$$\underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{\text{NON è commutativo. Attenzione all'ordine dei vettori}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 5/3 & -5/2 & 5/6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{6} \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5/3 & 5/6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5/3 & -5/2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) - \vec{j}\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) + \vec{k}\left(-5 + 5\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} // \vec{w}$$

**OSS** $\vec{w} = \frac{5}{6}\vec{v} \Rightarrow$ stanno sulla stessa retta, cioè sono linearmente dipendenti

② Determinare $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ in modo tale che i vettori $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$
$\vec{w} = \vec{i} + h_1\vec{j} + h_2\vec{k}$ risultino paralleli.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & h_1 & h_2 \end{vmatrix} = \vec{i}(h_2 + 3h_1) - \vec{j}(2h_2 + 3) + \vec{k}(2h_1 - 1)$$

essendo un sistema in 2 incognite basterebbero 2 eq.

$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ cioè $\vec{v} /\!/ \vec{w}$

$$\iff \begin{cases} h_2 + 3h_1 = 0 \\ 2h_2 + 3 = 0 \\ 2h_1 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h_2 = -3h_1 \\ -6h_1 = -3 \\ 2h_1 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h_2 = -\frac{3}{2} \\ h_1 = \frac{1}{2} \\ 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \checkmark \end{cases}$$

③ Siano $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0)$, $\vec{v}_3 = (1,1,2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$

a) Stabilire se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono o meno complanari

RICORDO Tre vettori sono complanari $\iff$ uno dei tre è $\vec{0}$ oppure il prodotto misto si annulla

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \rangle = \begin{vmatrix} v_{1_1} & v_{1_2} & v_{1_3} \\ v_{2_1} & v_{2_2} & v_{2_3} \\ v_{3_1} & v_{3_2} & v_{3_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

metto i vettori in ordine come righe (o colonne) di una matrice (perché $\det(A) = \det(A^T)$)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{non sono complanari}$$

OSS $V = |\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \rangle| = |1| = 1 \rightarrow$ Volume del parallelepipedo con spigoli $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$