1. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare associata alla matrice A rispetto alla base canonica:

$$A = M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare autovalori e autospazi.

Si determina il polinomio caratteristico:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left((\lambda-3)(\lambda-1)-2\right) +$$
$$+2\left(-\lambda+1-2\right) - 2\left(2+2(\lambda-3)\right)$$
$$= (\lambda-1)\left(\lambda^2+3-4\lambda-2\right) +$$
$$+2\left(-\lambda-1-2-2\lambda+6\right) = $$
$$= (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+1) + 2\underbrace{(-3\lambda+3)}_{-3(\lambda-1)}$$
$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2-4\lambda+1-6\right]$$
$$= (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda-5) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-5)$$

$$\lambda^2-4\lambda-5=0 \iff \lambda = \frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 5$; $\lambda_3 = -1$

Gli autovalori sono distinti, per cui la matrice (o l'applicazione) è diagonalizzabile.

Si determinano gli autospazi.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} -2y - 2z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y = -z \\ y = -x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \equiv y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 4x - 2y - 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x = 2y - z \\ 6y - 6z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y = z \\ x = y \end{array} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} -2x - 2y - 2z = 0 \\ -x - 4y - z = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} x = -y - z \\ -y - \cancel{z} + 4y + \cancel{z} = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{matrix} y = 0 \\ x = -z \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A\,N = N \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

2. Sia $V = \mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

tale che $f((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1, x_2, x_1 + 4x_3)^T$

Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica (nel dominio e codominio), autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

$$M_c^c(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 4)$$

$\lambda_1 = 1$ molteplicità algebrica 2 (m.a)

$\lambda_2 = 4$ molteplicità algebrica 1 (m.a)

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x - 3z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = -3z \right\} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$ molteplicità geometrica 2

m.g.

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 3x = 0 \\ 3y = 0 \\ -x = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y = 0 \right\} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$ molteplicità geometrica 1 (m.g.)

$$\left.\begin{array}{lcc} & \text{m.a.} & \text{m.g.} \\ \lambda_1 & 2 & 2 \\ \lambda_2 & 1 & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ diagonalizzabile}$$

La base rispetto a cui A è diagonalizzabile è

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AN = ND \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Sia

$$f: R^3 \longrightarrow R^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica nel dominio e codominio, autovalori (con m.a. e m.g.) e autospazi.
Dire se la matrice è diagonalizzabile.

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3$$

$\lambda_1 = 1$ m.a. 3

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -z = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \text{m.g. } 2$$

La matrice <u>non</u> è diagonalizzabile.

4. $f: R^3 \to R^3$ sia tale che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica (nel dominio e codominio), autovalori con m.a. e m.g. e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

$$M_C^C(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\left[(\lambda-2)(\lambda-1)-1\right] +$$

$$+(-1)(\lambda-2) =$$

$$= (\lambda-2)\left[\lambda^2 - 3\lambda \cancel{+2} \cancel{-1} \cancel{-1}\right] = \lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\lambda_1 = 0$ m.a. 1

$\lambda_2 = 2$ m.a. 1

$\lambda_3 = 3$ m.a. 1

Molteplicità algebriche tutte uguali a 1.

$\Rightarrow$ la matrice è diagonalizzabile

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -2x + z = 0 \;;\; -2y + z = 0 \;;\; -x + y - z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = -2x \;;\; y = -x \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \qquad m.g.\ 1$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -z = 0 \;;\; z = 0 \;;\; -x + y + z = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = 0 \;;\; x = y \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad m.p.\ 1$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - z = 0 \;;\; y + z = 0 \;;\; -x + y + 2z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = z \;;\; -z = +y \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad m.p.\ 1$$

La matrice diagonalizzante è

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AN = ND$$

$$\text{con } D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

5. Sia $f: R^3 \longrightarrow R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 3x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio), autovalori (con m.a. e m.g.) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

$$M_C^C(f) = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2\lambda + 1 \cdot 0$$

$$= (\lambda-3)^2\lambda$$

$\lambda_1 = 3$ m. a. 2

$\lambda_2 = 0$ m. a. 1

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -y=0 ; -3x+3z=0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

m. g. 1

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -3x - y = 0 \ ; \ -3y = 0 \ ; \ -3x = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad m.g. \ 1$$

	m.a.	m.g
λ_1	2	1
λ_2	1	1

$\Bigg\}$ A <u>non</u> diagonalizzabile

7. Sia $f: R^3 \to R^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z \end{pmatrix}$$

Determinare una base del nucleo di f e una base di Imm f -
Mostrare che i vettori non nulli del nucleo sono autovettori di f e analogamente per i vettori di Imm f.
Determinare una base di R^3 formata da autovettori di f (se esiste) e scrivere la matrice che rappresenta f rispetto a tale base.

$$M^C_C(f) = A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \end{vmatrix} = 0$$

rango $A = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{vmatrix} = \frac{5}{18} - \frac{1}{9} =$

$= \frac{5-2}{18} = \frac{1}{6}$

dim Im $f = 2$ base di Im $f =$

$= \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right]$

$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = -\frac{1}{6}z \end{matrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} x+y=z \\ 2x+5y=-z \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} x=-2y=2z \\ -z=+y \end{matrix} \right\}$

$= \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

Poiché $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$ è autovalore

con autovettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $m.a = m.g = 1$

Si verifica se

$$A\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{1}{3} = \lambda\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda=1$$

$$\frac{1}{9}+\frac{5}{18}-\frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} = \lambda\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda=1$$

$$-\frac{1}{9}+\frac{1}{18}-\frac{5}{18} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} = -\lambda\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda=1$$

$\lambda = 1$ è autovalore

$$A\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{6}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{6}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}+\frac{5}{18}-\frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \lambda\frac{1}{3} \quad \lambda=1$$

$$\frac{1}{9}+\frac{25}{36}+\frac{1}{36} = \frac{\cancel{30}\,5}{\cancel{36}\,6} = \frac{5}{6} = \lambda\cdot\frac{5}{3} \Leftrightarrow \lambda=1$$

$$-\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36} = +\frac{\cancel{6}\,1}{\cancel{36}\,6} = \lambda\frac{1}{6} \Leftrightarrow \lambda=1$$

Gli elementi della base di Imm f sono autovettori l. ind. relativi a $\lambda_2 = 1$

$\Rightarrow$ m.g di $\lambda_2 = 2$

m.g di $\lambda_1 = 1$

La matrice è diagonalizzabile e la base rispetto a cui è diagonalizzabile è

$$N = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$AN = ND \quad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

8. Mostrare che se v è autovettore di A relativo all'autovalore λ, v è autovettore di A^k, $k \geq 0$ relativo all'autovalore λ^k.

Infatti $\quad Av = \lambda v$

$$\Rightarrow A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}\lambda v =$$
$$= \lambda\left(A^{k-1}v\right) = \lambda\left(A^{k-2}Av\right) =$$
$$= \lambda\left(A^{k-2}\lambda v\right) = \lambda^2 A^{k-2} v =$$
$$= \dots = \lambda^k v$$

9. Determinare per quali valori di m, $(1, m)^T$ è autovettore di $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Occorre che

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3 + 7m &= \lambda \\ 2m &= \lambda m \end{aligned}$$

Gli autovalori di $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono

$\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$

① $3 + 7m = 3 \Leftrightarrow \underline{m = 0 \quad \text{per } \lambda_1 = 3}$

② $\begin{aligned} 3 + 7m &= 2 \\ 2m &= 2m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{m = -\frac{1}{7} \quad \text{per } \lambda_2 = 2}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovett relativo a $\lambda_1 = 3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$ è autovett. relativo a $\lambda_2 = 2$

10. Determinare per quali valori di k il vettore $(0,1,1)$ è un autovettore della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si osserva che

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 0=0 \\ k=\lambda \\ 1=\lambda \end{matrix}$$

Per $\lambda = 1$, con $k = 1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

Per $k \neq 1$, è impossibile.

Sia P_2 l'insieme dei polinomi di grado non superiore a 2 e sia

$$f : P_2 \longrightarrow P_2$$

$$a + bx + cx^2 \rightarrow (a+c) + (b+c)x + cx^2$$

Trovare autovalori e autospazi.

~~Poste~~ Presa la base $\{1, x, x^2\}$

$f(1) = 1$

$f(x) = \cancel{1}x$

$f(x^2) = 1 + x + x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3$$

$\lambda_1 = 1$ m.a. 3

$$V_{\lambda_1} = \{ a + bx + cx^2 \in P_2 \text{ t.c. } f(a + bx + cx^2) = 1(a + bx + cx^2) \}$$

$$= \{ a + bx + cx^2 \in P_2 \text{ t.c. } (a+c) + (b+c)x + cx^2 = a + bx + cx^2 \}$$

$$= \{ a + bx + cx^2 \in P_2 : \quad c + cx = 0 \}$$

$V_{\lambda_1} = \{ a + bx \in P_2 \}$