Esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare con matrice associata rispetto alla base canonica:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Determinare gli autovalori della matrice e gli autospazi.

2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + 4x_3)$. Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica, autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3, x_3)$. Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica, autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

4. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica, autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

5. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, 3x_2, 3x_1)$. Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica, autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

6. Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi e, quando possibile, la matrice diagonalizzante delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x, y, z) = (1/3x + 1/3y - 1/3z, 1/3x + 5/6y + 1/6z, -1/3x + 1/6y + 5/6z)$. Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f. Mostrare che i vettori non nulli del nucleo e dell'immagine sono autovettori di f. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f e scrivere la matrice che rappresenta f rispetto a tale base.

8. Mostrare che se v è autovettore di A relativo all'autovalore λ, v è autovettore di A^k, $k \geq 0$ relativo all'autovalore λ^k.

9. Determinare per quali valori di m, il vettore $(1, m)$ è autovettore di $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Determinare per quali valori di k il vettore $(0, 1, 1)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.