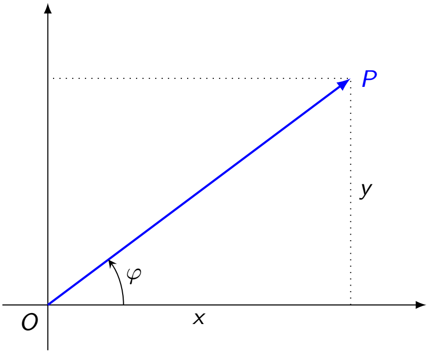
Osservazione



$$\boldsymbol{v} = x\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{|OP|} \qquad \sin(\varphi) = \frac{y}{|OP|}$$

Prodotto scalare

Definizione di prodotto scalare tra due vettori

Siano $\boldsymbol{v}_1 = [\overrightarrow{OP_1}]$ e $\boldsymbol{v}_2 = [\overrightarrow{OP_2}]$ due vettori liberi e sia φ l'angolo compreso tra i due vettori applicati $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$.
Si dice **prodotto scalare** tra i due vettori il **numero reale** dato da:

$$< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > \equiv |OP_1||OP_2| \cos\varphi$$

Il prodotto scalare tra due vettori è nullo se e solo se uno dei due vettori è nullo oppure i due vettori sono ortogonali ($\cos\varphi = 0$).

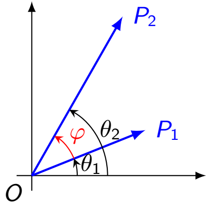
Definizione di prodotto scalare tra due vettori

Siano $\mathbf{v}_1 = [\overrightarrow{OP_1}]$ e $\mathbf{v}_2 = [\overrightarrow{OP_2}]$ due vettori liberi e sia φ l'angolo compreso tra i due vettori applicati $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$.
Si dice **prodotto scalare** tra i due vettori il **numero reale** dato da:

$$< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \equiv |OP_1||OP_2| \cos\varphi$$

Il prodotto scalare tra due vettori è nullo se e solo se uno dei due vettori è nullo oppure i due vettori sono ortogonali ($\cos\varphi = 0$).
In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O, se P_1 ha coordinate (x_1, y_1) e P_2 ha coordinate (x_2, y_2), allora

$$< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \equiv |OP_1||OP_2| \cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2$$



Infatti, se θ_1 è l'angolo tra l'asse x e $\overrightarrow{OP_1}$ e θ_2 è l'angolo tra l'asse x e $\overrightarrow{OP_2}$, allora

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos(\theta_2)\cos(\theta_1) + \sin(\theta_2)\sin(\theta_1) \\ &= \frac{x_2}{|OP_2|}\frac{x_1}{|OP_1|} + \frac{y_2}{|OP_2|}\frac{y_1}{|OP_1|} \\ &\Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = |OP_1||OP_2|\cos(\varphi) = < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \end{aligned}$$

Prodotto scalare

Il prodotto scalare gode delle seguenti **proprietà**:

- $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > = < \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 >$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà commutativa**)

Il prodotto scalare gode delle seguenti **proprietà**:

- $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >=< \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 >$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà commutativa**)
- $< \boldsymbol{v}_1, \alpha \boldsymbol{v}_2 >= \alpha < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$

Prodotto scalare

Il prodotto scalare gode delle seguenti **proprietà**:

- $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >=< \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 >$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà commutativa**)
- $< \boldsymbol{v}_1, \alpha \boldsymbol{v}_2 >= \alpha < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$
- $< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} > > 0$, per ogni $\boldsymbol{v} \neq 0$ ($< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} >= |\boldsymbol{v}|^2 > 0$)

Prodotto scalare

Il prodotto scalare gode delle seguenti **proprietà**:

- $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >=< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 >$, per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ (**proprietà commutativa**)
- $< \mathbf{v}_1, \alpha \mathbf{v}_2 >= \alpha < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$
- $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > > 0$, per ogni $\mathbf{v} \neq 0$ ($< \mathbf{v}, \mathbf{v} >= |\mathbf{v}|^2 > 0$)
- $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 >=< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > + < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 >$, per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ (**proprietà distributiva**)

Prodotto scalare

Il prodotto scalare gode delle seguenti **proprietà**:

- $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >=< \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 >$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà commutativa**)
- $< \boldsymbol{v}_1, \alpha \boldsymbol{v}_2 >= \alpha < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$
- $< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} > > 0$, per ogni $\boldsymbol{v} \neq 0$ ($< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} >= |\boldsymbol{v}|^2 > 0$)
- $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 >=< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > + < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 >$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà distributiva**)

Il prodotto scalare gode delle seguenti **proprietà**:

- $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >=< \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 >$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà commutativa**)
- $< \boldsymbol{v}_1, \alpha \boldsymbol{v}_2 >= \alpha < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$
- $< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} > > 0$, per ogni $\boldsymbol{v} \neq 0$ ($< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} >= |\boldsymbol{v}|^2 > 0$)
- $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 >=< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > + < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 >$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà distributiva**)

Per i versori (ortonormali) degli assi coordinati vale che

$$< \overrightarrow{\boldsymbol{i}}, \overrightarrow{\boldsymbol{i}} >= 1 \quad < \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}} >= 1$$

$$< \overrightarrow{\boldsymbol{i}}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}} >=< \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \overrightarrow{\boldsymbol{i}} >= 0$$

Prodotto scalare

Tenuto conto che i versori degli assi cartesiani sono ortogonali tra loro e che il prodotto scalare di un versore con se stesso vale 1, l'espressione del prodotto scalare in termini di **coordinate cartesiane** si ottiene anche nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \langle x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} \rangle \\
&= \langle x_1 \vec{i}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} \rangle + \langle y_1 \vec{j}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} \rangle \\
&= x_1 x_2 \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle + x_1 y_2 \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle + y_1 x_2 \langle \vec{j}, \vec{i} \rangle + y_1 y_2 \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle \\
&= x_1 x_2 + y_1 y_2
\end{aligned}$$

Da $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \equiv |OP_1||OP_2| \cos\varphi$, si ha

$$\cos\varphi = \frac{< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >}{|OP_1||OP_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Tenuto conto che i versori degli assi cartesiani sono ortogonali tra loro e che il prodotto scalare di un versore con se stesso vale 1, l'espressione del prodotto scalare in termini di **coordinate cartesiane** si ottiene anche nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle &= \langle x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \rangle \\
&= \langle x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}}, x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \rangle + \langle y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \rangle \\
&= x_1 x_2 \langle \overrightarrow{\boldsymbol{i}}, \overrightarrow{\boldsymbol{i}} \rangle + x_1 y_2 \langle \overrightarrow{\boldsymbol{i}}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \rangle + y_1 x_2 \langle \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \overrightarrow{\boldsymbol{i}} \rangle + y_1 y_2 \langle \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \rangle \\
&= x_1 x_2 + y_1 y_2
\end{aligned}$$

Da $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > \equiv |OP_1||OP_2| \cos\varphi$, si ha

$$\cos\varphi = \frac{< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >}{|OP_1||OP_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Osservazione.

L'espressione dei coseni degli angoli θ_x, θ_y (coseni direttori) che un vettore $v \equiv (x, y)$ forma con gli assi coordinati x e y si ottiene come

$$\cos\theta_x = \frac{< \boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{i}} >}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \cos\theta_y = \frac{< \boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}} >}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Nel caso di vettori $\boldsymbol{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ nello spazio, l'espressione in coordinate cartesiane diventa

$$\begin{aligned} < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > &= < x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z_1 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}, x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z_2 \overrightarrow{\boldsymbol{k}} >= \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

Pertanto, da $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > \equiv |OP_1||OP_2| \cos\varphi$, si ha

$$\cos\varphi = \frac{< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >}{|OP_1||OP_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Osservazione.

L'espressione dei coseni degli angoli $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ che un vettore $v \equiv (x, y, z)$ forma con gli assi coordinati x, y, z (**coseni direttori**) si ottiene come

$$\begin{aligned} \cos\theta_x &= \frac{< \boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{i}} >}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\theta_y &= \frac{< \boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}} >}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\theta_z &= \frac{< \boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{k}} >}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Siano $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\boldsymbol{i}} - 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{v} = -3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$.

- $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} >} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{9} = 3$
- $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= 1.0 - 2.(-3) + 3.0 = 6$
- i coseni direttori di $\boldsymbol{u}$ sono $\frac{<\boldsymbol{u}, \overrightarrow{\boldsymbol{i}}>}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\frac{<\boldsymbol{u}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}}>}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{-2}{\sqrt{14}}$, $\frac{<\boldsymbol{u}, \overrightarrow{\boldsymbol{k}}>}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$
- i coseni direttori di $\boldsymbol{v}$ sono $\frac{<\boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{i}}>}{|\boldsymbol{v}|} = 0$, $\frac{<\boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}}>}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{-3}{3} = -1$, $\frac{<\boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{k}}>}{|\boldsymbol{v}|} = 0$
- i due vettori formano un angolo il cui coseno vale $\cos\varphi = \frac{6}{3\sqrt{14}}$

Sia $\boldsymbol{v} \equiv [\overrightarrow{OQ}]$ un vettore e r una retta passante per O di **versore** $\boldsymbol{u}$ ($|\boldsymbol{u}| = 1$), tale che retta e vettore formano un angolo φ.
La proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{v}$ nella direzione della retta è il vettore $\boldsymbol{v}' \equiv [\overrightarrow{OQ'}]$, ove Q' è la proiezione ortogonale del punto Q su r. Si osserva che

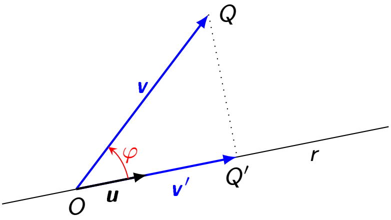
$$< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} >= |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}| \cos\varphi = |OQ| \cos\varphi = |OQ'|$$

Pertanto il vettore $\boldsymbol{v}'$ è dato da

$$\boldsymbol{v}' = |OQ'|\boldsymbol{u} =< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} > \boldsymbol{u}$$

Se non si conosce $\boldsymbol{u}$, ma si conosce un vettore $\boldsymbol{w}$ parallelo alla retta, allora $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}$:

$$\boldsymbol{v}' = |OQ'|\frac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|} =< \boldsymbol{v}, \frac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|} > \frac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|} = \frac{< \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} >}{< \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} >}\boldsymbol{w}$$



Il Teorema di Pitagora

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono due vettori ortogonali, allora

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2$$

Come provarlo?

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|^2 &= <\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}> + <\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> + <\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}> + <\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}> \\ &= |\boldsymbol{u}|^2 + \mathbf{0} + \mathbf{0} + |\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 \end{aligned}$$

Definizione di prodotto vettoriale tra due vettori

Siano $\boldsymbol{v}_1 = [\overrightarrow{OP_1}]$ e $\boldsymbol{v}_2 = [\overrightarrow{OP_2}]$ due vettori liberi e sia φ l'angolo compreso tra i due vettori applicati $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$.
Si dice **prodotto vettoriale** dei due vettori il vettore $\boldsymbol{v}_3$:

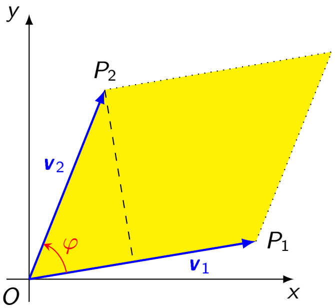
$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 \equiv \boldsymbol{v}_3 = [\overrightarrow{OP_3}]$$

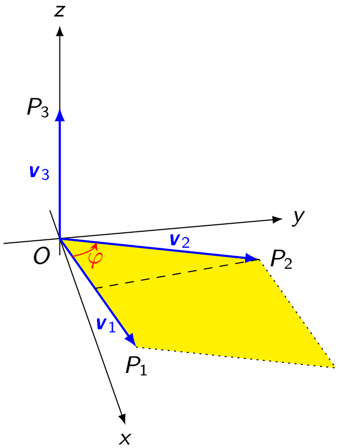
così definito:

- **modulo**: $|\boldsymbol{v}_3| = |\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2| \sin\varphi$; (area del parallelogramma di cui i due vettori sono lati)
- **direzione** perpendicolare al piano che contiene $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$;
- **verso** dato dalla **regola delle tre dita della mano destra**: sovrapposti $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ al pollice e indice della mano destra, il verso di $\overrightarrow{OP_3}$ è quello indicato dal medio (verso dell'osservatore che vede avvenire la rotazione di $\overrightarrow{OP_1}$ su $\overrightarrow{OP_2}$ in senso antiorario)

Se $\overrightarrow{OP_1}$ è parallelo a $\overrightarrow{OP_2}$ ($\sin\varphi = 0$) oppure uno dei due vettori è nullo il prodotto vettoriale è nullo.

Il modulo di $\boldsymbol{v}_3$ è l'area del parallelogramma costruito sui vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$; infatti se $\boldsymbol{v}_1$ è la base, $\boldsymbol{v}_2 \sin(\varphi)$ è l'altezza.





Prodotto vettoriale

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O (con gli assi orientati in modo da rispettare la regola della mano destra), si ha che:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$-\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \quad -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \quad -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$$
$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Prodotto vettoriale

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O (con gli assi orientati in modo da rispettare la regola della mano destra), si ha che:

$$\begin{array}{lll}
\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{k}} & \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{j}} \\
-\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{k}} & -\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{i}} & -\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{j}} \\
\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = 0 & \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = 0 & \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = 0
\end{array}$$

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti **proprietà:**

- $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_1$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà anticommutativa**)
- $\alpha\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \alpha(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 \times \alpha\boldsymbol{v}_2$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$
- $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà distributiva**)

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O (con gli assi orientati in modo da rispettare la regola della mano destra), si ha che:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$-\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \quad -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \quad -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$$
$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti **proprietà:**

- $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_1$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ (**proprietà anticommutativa**)
- $\alpha\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \alpha(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 \times \alpha\boldsymbol{v}_2$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$
- $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3$, per ogni $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ (**proprietà distributiva**)

ATTENZIONE!! Non vale la proprietà associativa. Un controesempio:

$$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{k} = 0$$
$$\vec{i} \times (\underbrace{\vec{i} \times \vec{k}}_{-\vec{j}}) = -\vec{k}$$

Dalle proprietà segue che se P_1 ha coordinate (x_1, y_1, z_1) e P_2 ha coordinate (x_2, y_2, z_2), allora

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 &= (x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z_1 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) \times (x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z_2 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) = \\
&= x_1 y_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}) + x_1 z_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) + y_1 x_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{j}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{i}}) + \\
&+ y_1 z_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{j}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) + z_1 x_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{k}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{i}}) + z_1 y_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{k}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}) = \\
&= x_1 y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{k}} - x_1 z_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - y_1 x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + y_1 z_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + z_1 x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - z_1 y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \overrightarrow{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
$$

Dalle proprietà segue che se P_1 ha coordinate (x_1, y_1, z_1) e P_2 ha coordinate (x_2, y_2, z_2), allora

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 &= (x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z_1 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) \times (x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z_2 \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) = \\
&= x_1 y_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}) + x_1 z_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) + y_1 x_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{j}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{i}}) + \\
&+ y_1 z_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{j}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{k}}) + z_1 x_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{k}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{i}}) + z_1 y_2 (\overrightarrow{\boldsymbol{k}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}) = \\
&= x_1 y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{k}} - x_1 z_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - y_1 x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + y_1 z_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + z_1 x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - z_1 y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \overrightarrow{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

L'espressione si ottiene dallo sviluppo del **determinante simbolico** rispetto alla prima riga:

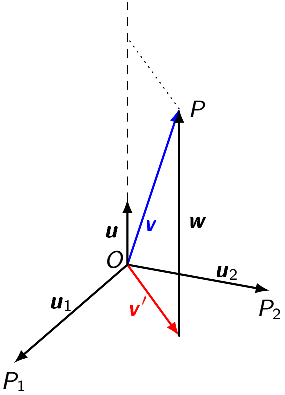
$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Sia $\boldsymbol{v} \equiv [\overrightarrow{OP}]$ un vettore e π un piano passante per O al quale appartengono i due vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$.

La proiezione di $\overrightarrow{OP}$ su π è il vettore $\boldsymbol{v}' = [\overrightarrow{OP'}]$ ove P' è la proiezione ortogonale di P sul piano.

Detto $\boldsymbol{w} = [\overrightarrow{P'P}]$, allora

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}' \text{ e dunque } \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$$



Come determinare $\boldsymbol{w}$? Questo vettore è la proiezione di $\boldsymbol{v}$ lungo la retta ortogonale al piano e passante per O. Poichè $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ appartengono al piano, $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$ è un vettore ortogonale al piano. Un versore $\boldsymbol{u}$ ortogonale al piano è dato da

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2|}$$

Pertanto il vettore $\boldsymbol{w}$, proiezione di $\boldsymbol{v}$ nella direzione di $\boldsymbol{u}$, vale

$$\boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle \boldsymbol{u} = \left\langle \boldsymbol{v}, \frac{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2|} \right\rangle \frac{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2|}$$

Infine, si ha

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \left\langle \boldsymbol{v}, \frac{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2|} \right\rangle \frac{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2|}$$

Sia $\boldsymbol{v} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$; determinare la proiezione $\boldsymbol{v}'$ sul piano coordinato xy.

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{w} = < \boldsymbol{v}, \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}|} > \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{i}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}|} = < \boldsymbol{v}, \overrightarrow{\boldsymbol{k}} > \overrightarrow{\boldsymbol{k}} = 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

Da cui si ha

$$\boldsymbol{v}' = \left(2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right) - 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$$

Prodotto misto di tre vettori

Dati tre vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ si dice **prodotto misto** dei tre vettori il numero reale

$$< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3 >$$

Prodotto misto di tre vettori

Dati tre vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ si dice **prodotto misto** dei tre vettori il numero reale

$$< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3 >$$

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O, se $\boldsymbol{v}_i = [\overrightarrow{OP_i}]$ e P_i sono punti di coordinate (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$, si ha che

$$\begin{aligned} < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3 > &= < \boldsymbol{v}_1, \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} >= \\ &= x_1(\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3)_x + y_1(\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3)_y + z_1(\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3)_z = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Prodotto misto di tre vettori

Dati tre vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ si dice **prodotto misto** dei tre vettori il numero reale

$$< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3 >$$

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O, se $\boldsymbol{v}_i = [\overrightarrow{OP_i}]$ e P_i sono punti di coordinate (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$, si ha che

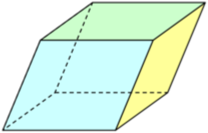
$$\begin{aligned}
< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3 > &= < \boldsymbol{v}_1, \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} >= \\
&= x_1(\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3)_x + y_1(\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3)_y + z_1(\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3)_z = \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Il prodotto misto si annulla quando uno dei tre vettori è nullo oppure, se i tre vettori non sono nulli, se e solo se sono complanari.

Volume del parallelepipedo

Il valore assoluto del prodotto misto è uguale al **volume del parallelepipedo** avente per spigoli i tre vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.
Infatti $|\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3|$ è l'area del parallelogramma alla base del parallelepipedo. Poichè il volume vale l'area di base per l'altezza h, è sufficiente osservare che l'altezza è il valore assoluto della proiezione del terzo spigolo lungo la normale al piano individuata da $\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3$, per cui:

$$h = \left| < \boldsymbol{v}_1, \frac{\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3|} > \right| \Rightarrow V = |\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3| h = | < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3 > |$$



Esempio

Determinare il volume del parallelepipedo avente per spigoli i vettori $\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $-\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{k}}$.

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = 1$$