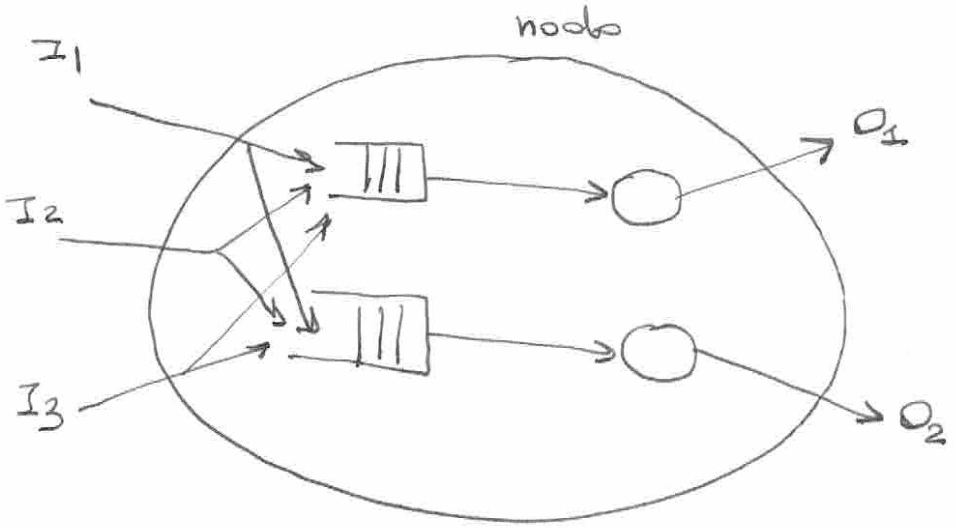
ELEMENTI DI TEORIA DELLE CODE

Queuing Models (or Waiting line Models)

Trova applicazione in vari ambiti ed è fondamentale per il progetto e l'analisi delle reti di comunicazione (es. store & forward di pacchetti).

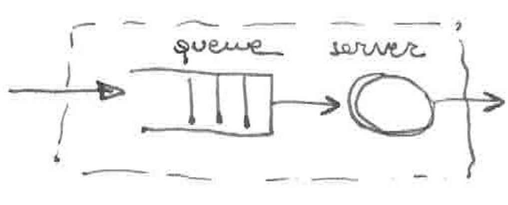


i nodi sono dotati di buffer in cui vengono immagazzinati in attesa di essere serviti e smaltiti

Una persona/pkt arriva nel sistema per ottenere un servizio, eventualmente aspetta in coda e quando viene servito parte

arrivi e servizi seguono una certa distribuzione (sono aleatori non deterministici)

sono quindi aleatori i tempi di interarrivo, i tempi di permanenza in coda/sistema e i tempi di partenza



I sistemi a coda sono modellabili come <u>catene di Markov</u> con stato al tempo t $X(t) = j$ e prob. di transizione fra stati $i \to j$ $P_{ij}(s,t) = \mathbb{P}\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$; $t>s$

Lo stato rappresenta la situazione in cui si trova il sistema rispetto a variabili prese come riferimento (es. # pkt nel sistema). e la sua evoluzione è descritta con una sequenza di salti fra gli stati stessi.

Vediamo un primo risultato utile

<u>Th:</u> ~~In~~ una catena di Markov t-cont i tempi di permanenza nei singoli stati seguono una distrib. esponenziale

τ_i : temp permanenza nello stato i

PDF $f_{\tau_i}(t) = f_{\tau_i}(\emptyset)\, e^{-f_{\tau_i}(\emptyset) t}$

CDF $F_{\tau_i}(t) = 1 - e^{-f_{\tau_i}(\emptyset) t}$

dim.

Assenza di memoria $\mathbb{P}\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = h(t)$
indip. da s

Dal teor. di Bayes

$$\mathbb{P}\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = \frac{\mathbb{P}\{\tau_i > s+t, \tau_i > s\}}{\mathbb{P}\{\tau_i > s\}} \overset{t \geq 0}{=} \frac{\mathbb{P}\{\tau_i > s+t\}}{\mathbb{P}\{\tau_i > s\}} = h(t)$$

Quindi per ogni valore di s $\mathbb{P}\{\tau_i > s+t\} = h(t)\,\mathbb{P}\{\tau_i > s\}$
ed in particolare per $s = 0$ si ha

$$\mathbb{P}\{\tau_i > t\} = h(t)\,\mathbb{P}\{\tau_i > 0\} = h(t)$$

siamo nello stato i per cui $\tau_i > 0$
e $\mathbb{P}\{\tau_i > 0\} = 1$

Pertanto $\mathbb{P}\{\tau_i > s+t\} = \mathbb{P}\{\tau_i > s\}\,\mathbb{P}\{\tau_i > t\}$

Osserva

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}\{\tau_i > t\} = \frac{d}{dt}\left(1 - \mathbb{P}\{\tau_i \leq t\}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - F_{\tau_i}(t)\right) = -f_{\tau_i}(t)$$

$$\frac{d}{ds}\mathbb{P}\{\tau_i > s+t\} = \mathbb{P}\{\tau_i > t\}\left(-f_{\tau_i}(s)\right)$$

$$\frac{d\,\mathbb{P}\{\tau_i > s+t\}}{\mathbb{P}\{\tau_i > t\}} = -f_{\tau_i}(s)\,ds$$

Per $s = 0$ $\quad \dfrac{d\,\mathbb{P}\{\tau_i > t\}}{\mathbb{P}\{\tau_i > t\}} = -f_{\tau_i}(0)\,ds$

e integrando in s da 0 a t ambo i lati

$$\ln \mathbb{P}\{\tau_i > t\} = -f_{\tau_i}(0)\,t \implies \boxed{\mathbb{P}\{\tau_i > t\} = e^{-f_{\tau_i}(0)\,t}}$$

$$\text{e} \quad f_{\tau_i}(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}\{\tau_i \leq t\} = -\frac{d}{dt}\mathbb{P}\{\tau_i > t\} \implies \boxed{f_{\tau_i}(t) = +f_{\tau_i}(0)\,e^{-f_{\tau_i}(0)\,t}}$$

Evoluzione dello stato

Come evolve lo stato dal tempo s al tempo t>s?

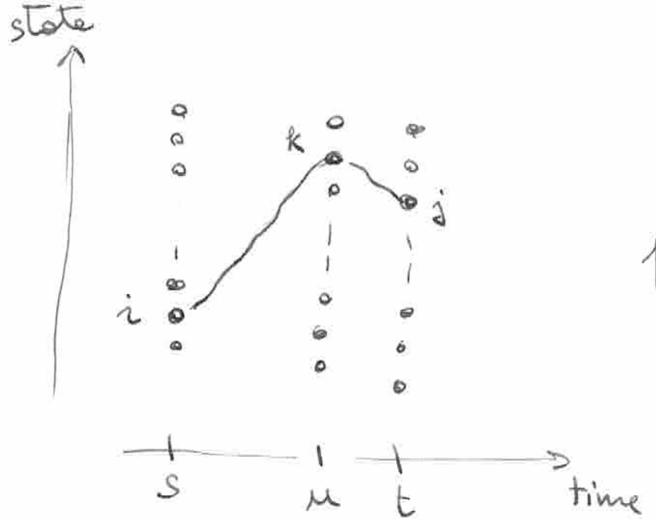
Occorre definire la prob. di transizione fra stati

$X(s)=i \to X(t)=j$

$$p_{ij}(s,t) = \mathbb{P}\{X(t)=j \mid X(s)=i\} \quad ; \; t>s$$

Consideriamo un istante intermedio u

$s < u \leq t$ — in u il processo passa per un generico stato k



$$p_{ij}(s,t) = \sum_k \mathbb{P}\{X(t)=j, X(u)=k \mid X(s)=i\}$$

Ricorda $\mathbb{P}\{A,B \mid C\} = \mathbb{P}\{A \mid B,C\}\,\mathbb{P}\{B \mid C\}$ da cui

$$p_{ij}(s,t) = \sum_k \underbrace{\mathbb{P}\{X(t)=j \mid X(u)=k, X(s)=i\}}_{\text{Markov}} \mathbb{P}\{X(u)=k \mid X(s)=i\}$$

$$= \sum_k \mathbb{P}\{X(t)=j \mid X(u)=k\}\,\mathbb{P}\{X(u)=k \mid X(s)=i\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,u)\, p_{kj}(u,t)}$$

equazione di Chapman–Kolmogorov [C-K]

Dall'equazione di Chapman-Kolmogorov si può dare una descrizione matriciale definendo, per ogni coppia di istanti (s,t) la

matrice di probabilità di transizione $\underline{\underline{H}}(s,t) = \left[p_{ij}(s,t) \right]$

se N sono gli stati possibili (ad es. legati alla lunghezza del buffer e quindi al numero di elementi in coda)

Eq. C-K in forma matriciale

$$\boxed{\underline{\underline{H}}(s,t) = \underline{\underline{H}}(s,u)\, \underline{\underline{H}}(u,t)}$$

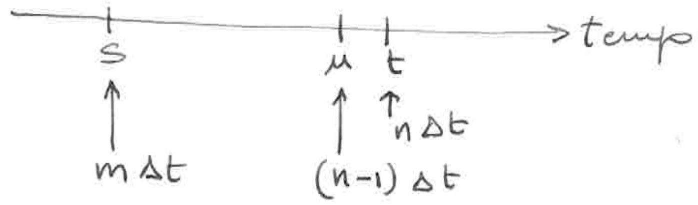
Nel caso tempo discreto, gli istanti temporali s, u, t sono multipli di Δt.

Al fine di valutare le velocità di transizione fra stati consideriamo il caso in cui u sia un Δt precedente a t (equaz. C-K in avanti) e il caso in cui u sia un Δt successivo a s (equaz. C-K all'indietro)

Equazione C-K in avanti

passo Δt

$m, n \in \mathbb{Z}$



$$\underline{\underline{H}}(s,t) = \underline{\underline{H}}(m\Delta t, n\Delta t) = \underline{\underline{H}}(m\Delta t, (n-1)\Delta t)\, \underline{\underline{H}}((n-1)\Delta t, n\Delta t)$$

definiamo $\underline{\underline{V}}(t) = \underline{\underline{H}}(t, t+\Delta t) = [\, P_{ij}(t, t+\Delta t)\,]$

$$\underline{\underline{H}}(s,t) = \underline{\underline{H}}(m\Delta t, (n-1)\Delta t)\, \underline{\underline{V}}((n-1)\Delta t)$$

la differenza fra due matrici di transizione in istanti distanziati di Δt è

$$\underline{\underline{H}}(m\Delta t, n\Delta t) - \underline{\underline{H}}(m\Delta t, (n-1)\Delta t) =$$

$$= \underline{\underline{H}}(m\Delta t, (n-1)\Delta t)\, [\, V((n-1)\Delta t) - \underline{\underline{I}}\,]$$

matrice identità

Rapporto incrementale

$$\frac{\underline{\underline{H}}(m\Delta t, n\Delta t) - \underline{\underline{H}}(m\Delta t, (n-1)\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \underline{\underline{H}}(m\Delta t, (n-1)\Delta t)\, \frac{V((n-1)\Delta t) - \underline{\underline{I}}}{\Delta t}$$

quindi al limite per $\Delta t \to \emptyset$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underline{\underline{H}}(s,t) = \underline{\underline{H}}(s,t)\, \underline{\underline{Q}}(t)}$$ eq. C-K in avanti

contiene Δt

con $\underline{\underline{Q}}(t) = \lim_{\Delta t \to \emptyset} \frac{\underline{\underline{V}}(t) - \underline{\underline{I}}}{\Delta t}$ matrice delle frequenze di transizione

la soluzione richiede specificare le cond. iniziali (s)

Vediamo cosa rappresenta la matrice delle frequenze di transizione

velocità, tasso

$$\underline{\underline{Q}}(t) = \left[q_{ij}(t) \right]$$

- $j = i$ permanenza nello stato

$$q_{ii}(t) = \lim_{\Delta t \to \emptyset} \frac{P_{ii}(t, t+\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 - P_{ii}(t, t+\Delta t)}_{\text{prob. di uscita dallo stato } i} = \underbrace{-q_{ii}(t)}_{\text{velocità uscita da stato } i} \Delta t + o(\Delta t)$$

- $j \neq i$

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to \emptyset} \frac{P_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P_{ij}(t, t+\Delta t)}_{\text{prob. } i \to j} = \underbrace{q_{ij}(t)}_{\text{velocità } i \to j} \Delta t$$

<u>Osservazione</u> : conservazione energia

$$\sum_j q_{ij}(t) = \emptyset$$

la somma dei tassi di uscita da un nodo (incluso permanenza) è nulla.

<u>dim.</u>

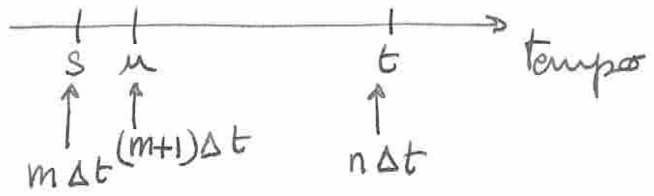
$$\sum_j q_{ij}(t) = \underbrace{\lim_{\Delta t \to \emptyset} \frac{P_{ii}(t, t+\Delta t) - 1}{\Delta t} + \sum_{j \neq i} \lim_{\Delta t \to \emptyset} \frac{P_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}}_{}$$

$$= \lim_{\Delta t \to \emptyset} \frac{\sum_j P_{ij}(t, t+\Delta t) - 1}{\Delta t} = \emptyset \quad \checkmark$$

Equazione C-K all'indietro

passo Δt

$m, n \in \mathbb{Z}$



$$\underline{\underline{H}}(s,t) = \underline{\underline{H}}(m\Delta t, n\Delta t) = \underbrace{\underline{\underline{H}}(m\Delta t,(m+1)\Delta t)}_{\underline{\underline{V}}(m\Delta t)}\, \underline{\underline{H}}((m+1)\Delta t, n\Delta t)$$

Rapporto incrementale

$$\frac{\underline{\underline{H}}(m\Delta t, n\Delta t) - \underline{\underline{H}}((m+1)\Delta t, n\Delta t)}{\Delta t} =$$

$$= \underline{\underline{H}}((m+1)\Delta t, n\Delta t)\, \frac{\underline{\underline{V}}(m\Delta t) - \underline{\underline{I}}}{\Delta t}$$

$$\Big\downarrow \; \Delta t \to \emptyset$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}\underline{\underline{H}}(s,t) = -\,\underline{\underline{Q}}(s)\,\underline{\underline{H}}(s,t)}$$ eq. C-K all'indietro

La soluzione richiede di specificare le cond. finali (t).

* ——————————————— *

SOLUZIONE EQUAZIONE C-K

$$\boxed{\underline{\underline{H}}(s,t) = e^{\int_s^t \underline{\underline{Q}}(u)\,du}}$$

Ora che abbiamo caratterizzato come si transita da uno stato all'altro chiediamoci qual è la prob. di essere in un certo stato i all'istante temporale t. (5)

$$\underline{P}_j(t) = \mathbb{P}\{X(t) = j\}$$

N stati

$$\underline{P}(t) = [P_1(t), P_2(t), \ldots, P_N(t)]$$

Risulta

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{P}(t) &= \underline{P}(\emptyset)\, \underline{\underline{H}}(\emptyset, t) \\ &= \underline{P}(\emptyset)\, e^{\int_\emptyset^t \underline{\underline{Q}}(u)\,du}\end{aligned}}$$

infatti dal teor. di Bayes

$$P_j(t) = \mathbb{P}\{X(t) = j\} = \sum_i \underbrace{\mathbb{P}\{X(t) = j \mid X(\emptyset) = i\}}_{p_{ij}(\emptyset,t)} \underbrace{\mathbb{P}\{X(\emptyset) = i\}}_{P_i(\emptyset)}$$

$$= \sum_i P_i(\emptyset)\, p_{ij}(\emptyset, t)$$

$$\Rightarrow \underline{P}(t) = \underline{P}(\emptyset) \cdot \underline{\underline{H}}(\emptyset, t) \quad \checkmark$$

Inoltre si è certamente in uno dei possibili stati per cui $\sum_k P_k(t) = 1$.

CATENE DI MARKOV OMOGENEE

Una catena di Markov si dice <u>omogenea</u> quando le prob. di transizione da uno stato all'altro non dipendono dal tempo.

$$p_{ij}(s, s+t) = \breve{p}_{ij}(t) \quad \rightarrow \quad \underline{H}(s, s+t) = \underline{\breve{H}}(t)$$

$$q_{ij}(t) = \breve{q}_{ij} \quad \rightarrow \quad \underline{Q}(t) = \underline{\breve{Q}}$$

dalle eq. C-K

- in avanti $\qquad \frac{d}{dt}\underline{\breve{H}}(t) = \underline{\breve{H}}(t)\,\underline{\breve{Q}}$
- all'indietro $\qquad \frac{d}{dt}\underline{\breve{H}}(t) = +\underline{\breve{Q}}\,\underline{H}(t)$

la cui soluzione diventa

$$\underline{\breve{H}}(0) = \underline{I}$$

$$\underline{\breve{H}}(t) = e^{\underline{\breve{Q}}t}$$

e l'eq. diff. sulla probabilità di stato

$$\frac{d}{dt}\underline{P}(t) = \underline{P}(t)\,\underline{\breve{Q}}$$