Istituzioni di Matematica

Docente: Prof. M.D. Rosini

email: massimilianodaniele.rosini@unife.it

Corso di Laurea in Informatica

Università Degli Studi Di Ferrara

a.a. 2022-2023

codice: ypt5brn

INFORMAZIONI SULL'ESAME

Scritto di esercizi:
Voto minimo (per superamento): 11/30.
Voto massimo: 25/30.
Validità: 1 anno (si considera voto migliore nel caso si sostengano più scritti di esercizi).
Si può utilizzare: formulario (foglio A4 manoscritto fronte/retro),
calcolatrice (no grafici e no trigonometria).
Non si può utilizzare: cellulari, dispense o libri.

Scritto di teoria:
Prima dello scritto di teoria si deve aver superato uno scritto di esercizi.
Voto minimo (per superamento): 3/30.
Voto massimo: 7/30.
Non si può usare nulla: ci si presenta con una penna ed un foglio.
Alla fine dello scritto di teoria viene proposto solo il voto finale: se non lo si accetta si perde il voto ottenuto allo scritto di teoria ma non quello ottenuto allo scritto di esercizi.

Voto esame: voto scritto di esercizi + voto scritto di teoria (31 e 32 $\rightarrow$ 30 e lode).

INFORMAZIONI SULL'ESAME

I parziale: 07/11 aula F8

II parziale: coincide con il primo appello della sessione invernale

Sessione invernale: 11 gennaio - 24 febbraio 2023 (2 appelli ese.+teo.)

Sessione estiva: 16 giugno - 31 luglio 2023 (3 appelli ese.+teo.)

Sessione autunnale: 1 settembre - inizio lezioni a.a. 23/24 (1 appello ese.+teo.)

I PARZIALE 07/11/2022

1) Studio grafico di funzione semplice. (4 punti)

2) Radici di numeri complessi. (6 punti)

3) Parte reale ed immaginaria di un numero complesso. (2 punti)

4) $\inf$, $\sup$, $\min$ e $\max$ di insiemi dati da disequazioni. (6 punti)

5) Limiti. (3 punti)

6) Soluzioni di equazioni. (2 punti)

7) Divisioni tra polinomi. (2 punti)

Nome, Cognome.. Matricola ....

Compito 1

I parziale di esercizi di Istituzioni di Matematica del 09/11/2021
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (4 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \arctan(|x+2|) - \arctan(x+2),$$

determinare:

a) *il dominio di definizione D di f;*

b) *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

c) *se f è iniettiva o meno in D;*

d) *disegnare il grafico ed eventuali asintoti.*

Esercizio 2 (6 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = -\frac{27}{2}\sqrt{2} + \frac{27}{2}\sqrt{2}i$$

Esercizio 3 (2 punti) *Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di*

$$z = \frac{1-6i}{5+5i}.$$

Esercizio 4 (6 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf, *il* sup, *e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{1/3}(x^2+4x-77) > \log_{1/3}(8x)\right\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x^2+14x+24}{3x^2-3x-36} \leqslant 0\right\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{5x^2+5x-70} > \sqrt{2x^2+8x-10}\right\}$$

Esercizio 5 (3 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{9+\frac{9}{n}+\frac{9}{n^2}}-3\right)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5x}{9^{9x}-1}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(6n-\frac{6}{n}\right)\ln\left(1-\frac{20}{n}\right)$

Esercizio 6 (2 punti) *Calcolare, se esistono, le soluzioni reali delle seguenti equazioni.*

a) $\log_9\left(\frac{5x+69}{6x-2}\right) = \log_9(4x-4)$

b) $30\cdot e^{2x} - 76\cdot e^x + 48 = 0$

Esercizio 7 (2 punti) *Calcolare il quoziente ed il resto delle seguenti divisioni tra polinomi.*

a) $\dfrac{4x^4-8x^3-4x^2-22x+59}{2x^2+4x+7}$

b) $\dfrac{-6x^4-14x^3+22x^2+27x-11}{x+3}$

II PARZIALE ??/01/2023

1) Studio di funzioni. (5 punti)

2) Derivate. (4 punti)

3) Integrali. (6 punti)

4) Limiti. (2 punti)

5) Calcolo di somma finita. (2 punti)

6) Studio di serie. (2 punti)

7) Ordine di infinitesimo e parte principale. (3 punti)

8) Equazioni differenziali. (2 punti)

Nome, Cognome.. Matricola ....

Compito 1

II parziale di esercizi di Istituzioni di Matematica del 19/01/2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = x + \frac{5}{x},$$

si determinino:

$\boxed{a}$ *l'insieme di definizione D di f;*

$\boxed{b}$ *la derivata $f'(x)$;*

$\boxed{c}$ *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*

$\boxed{d}$ *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

$\boxed{e}$ *il grafico di f, le coordinate di eventuali punti di intersezione con gli assi ed asintoti.*

Esercizio 2 (4 punti) *Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni.*

$$\textbf{a) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{15}} \arcsin(\sqrt{15}x)$$

$$\textbf{b) } f(x) = \frac{3}{40}\left(-9+6x^2\right)^{10/9}$$

$$\textbf{c) } f(x) = \sin(5x)^4$$

$$\textbf{d) } f(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln(7x)-1)$$

Esercizio 3 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\textbf{a) } \int (\cot(8x) + \tan(8x))\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{b) } \int_0^{\pi/2} \sin(9x)\left(1-\cos(9x)\right)^6 \mathrm{d}x$$

$$\textbf{c) } \int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 4 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\textbf{a) } \lim_{n\to+\infty} \left(-2n + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{14}{n}\right)$$

$$\textbf{b) } \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{\cos(6x)-1}}{\sqrt{\cos(3\ln(1+\sin(-9x)))} - 1}$$

Esercizio 5 (2 punti) *Calcolare il valore della seguente somma finita.*

$$\sum_{n=1}^{44} n$$

Esercizio 6 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n\geqslant 1} n^2 \arctan\left(\frac{1}{n}\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

$\boxed{a}$ *La serie converge.* $\boxed{b}$ *La serie diverge.* $\boxed{c}$ *La serie è irregolare.*

Esercizio 7 (3 punti) *Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale della seguente funzione per $x \to 0$, ovvero riscrivere la seguente funzione nella forma $f(x) = cx^\gamma + o(x^\gamma)$.*

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{4+x^3} + \sin\left(\frac{x^{1/10}}{6}\right) - 2$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -6 \end{cases}$$

Scritti di esercizi

1) Radici di numeri complessi. (6 punti)

2) $\inf$, $\sup$, $\min$ e $\max$ di insiemi dati da disequazioni. (4 punti)

3) Studio di funzioni. (5 punti)

4) Limiti. (2 punti)

5) Calcolo di somma finita. (2 punti)

6) Studio di serie. (2 punti)

7) Integrali. (6 punti)

8) Equazioni differenziali. (2 punti)

Nome, Cognome.. Matricola...............................

Compito 1

Scritto di esercizi di Istituzioni di Matematica del .../.../2022
Corso di Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2021/2022

Svolgere **solo ed esclusivamente** il compito associato alla propria matricola, come indicato nel file che si trova nello stream di Classroom. Scrivere in maniera leggibile nome, cognome e matricola. Riportare le soluzioni degli esercizi dietro questa pagina. **NON si devono includere gli svolgimenti.** Il punteggio massimo è **25**.

Esercizio 1 (6 punti) *Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione e scriverle in forma trigonometrica.*

$$z^3 = 125\mathrm{i}$$

Esercizio 2 (4 punti) *Riscrivere come unione di intervalli i seguenti insiemi, calcolarne l'*inf, *il* sup, *e, se esistono,* min *e* max.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+4}{x-3} \leqslant \frac{x-5}{x-9}\right\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x^2+6x-24} < \sqrt{5x^2+22x+6}\right\}$$

Esercizio 3 (5 punti) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{4-12x}{-1+4x},$$

si determinino:

$\boxed{a}$ *l'insieme di definizione D di f;*

$\boxed{b}$ *la derivata $f'(x)$;*

$\boxed{c}$ *l'insieme dei punti $x \in D$ in cui $f'(x) > 0$;*

$\boxed{d}$ *l'immagine $I = f(D)$ di f;*

$\boxed{e}$ *il grafico di f, le coordinate di eventuali punti di intersezione con gli assi ed asintoti.*

Esercizio 4 (2 punti) *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{12} e^{12n}}{n^{12n+6}}$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x+5-\sqrt{x+47}}{x-2}$$

Esercizio 5 (2 punti) *Calcolare il valore della serie numerica* $\sum_{n\geqslant 0} (a_n - a_{n+1})$ *con*

$$a_n = \frac{-8n^2-7n-5}{(8n+9)^2}.$$

Esercizio 6 (2 punti) *Data la serie numerica*

$$\sum_{n\geqslant 1} n^5 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

quale delle seguenti asserzioni è vera? Motivare la risposta.

$\boxed{a}$ *La serie converge.* $\boxed{b}$ *La serie diverge.* $\boxed{c}$ *La serie è irregolare.*

Esercizio 7 (6 punti) *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\textbf{a)}\ \int \frac{\sqrt{7-2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{b)}\ \int_0^1 (e^{3x}+4)\sqrt{e^{3x}+12x}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{c)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{1+25x^{10}}\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 8 (2 punti) *Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 72y(x) = 0 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 9 \end{cases}$$

Indice

Sezione 1 Lettere greche

α	alfa
β	beta
γ	gamma
δ	delta
ε	epsilon
ζ	zeta
η	eta
θ	teta

ι	iota
κ	kappa
λ	lambda
μ	mu
ν	nu
ξ	xi
o	omicron
π	pi greco

ρ	ro
σ	sigma
τ	tau
υ	upsilon
ϕ, φ	fi
χ	chi
ψ	psi
ω	omega

Sezione 2 Connettivi logici

$\neg A$	non A
$A \wedge B$	A e B
$A \vee B$	A oppure B
$A \Longrightarrow B$	se A allora B (A implica B)
$A \Longleftrightarrow B$	A se e solo se B

Osservazione

Visto che

$$\big(A \Longrightarrow B\big) \Longleftrightarrow \big((\neg B) \Longrightarrow (\neg A)\big),$$

dimostrare che

A implica B

equivale a dimostrare che

se B non vale, allora A non vale.

Il secondo modo di procedere è tipico delle dimostrazioni per assurdo.

Sezione 3 Quantificatori

$\forall a \ldots$	per ogni $a \ldots$
$\exists a : \ldots$	esiste a tale che ...
$\exists! a : \ldots$	esiste un unico a tale che ...

Osservazione

Si noti che

- $\big(\neg(\forall a)\big) \iff \big(\exists a\big)$,
- $\big(\neg(\exists a)\big) \iff \big(\forall a\big)$,

ovvero:

- la negazione di un "per ogni" ci dà un "esiste",
- la negazione di un "esiste" ci dà un "per ogni".

Per convincerci di ciò consideriamo il seguente esempio.

Esercizio

Assumiamo che entrambe le seguenti asserzioni siano vere:

a) Pinocchio mente sempre,

b) Pinocchio ha detto che tutti i suoi cappelli sono gialli.

Quale delle seguenti asserzioni è sicuramente vera?

A) Pinocchio ha almeno un cappello.

B) Pinocchio ha un solo cappello ed è giallo.

C) Pinocchio ha almeno un cappello giallo.

D) Pinocchio non ha cappelli gialli.

E) Pinocchio non ha cappelli.

Assumiamo che entrambe le seguenti asserzioni siano vere:

a) Pinocchio mente sempre,

b) Pinocchio ha detto che tutti i suoi cappelli sono gialli.

Quale delle seguenti asserzioni è sicuramente vera?

A) Pinocchio ha almeno un cappello.

B) Pinocchio ha un solo cappello ed è giallo.

C) Pinocchio ha almeno un cappello giallo.

D) Pinocchio non ha cappelli gialli.

E) Pinocchio non ha cappelli.

L'unica l'asserzione sicuramente vera è

A) Pinocchio ha almeno un cappello.

Vediamo perché (le risposte vanno sempre motivate!).

Sia C l'insieme dei cappelli di Pinocchio, allora

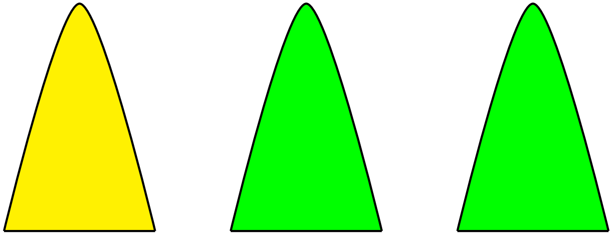
$$\textbf{a)}\text{ Pinocchio mente sempre } \wedge \textbf{ b)}\text{ Pinocchio ha detto che tutti i suoi cappelli sono gialli}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{non è vero che ``tutti i cappelli di Pinocchio sono gialli''}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{non è vero che ``}\forall c \in C \text{ si ha che } c \text{ è giallo''}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{``}\exists c \in C \text{ tale che } c \text{ non è giallo''}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{``Pinocchio ha almeno un cappello che non è giallo''}$$
$$\Downarrow$$
$$\textbf{A)}\text{ Pinocchio ha almeno un cappello}$$

Casomai questa soluzione non convinca tutti, passiamo in rassegna tutte le altre asserzioni per dimostrare che esse potrebbero essere false.

Consideriamo l'asserzione

B) Pinocchio ha un solo cappello ed è giallo.

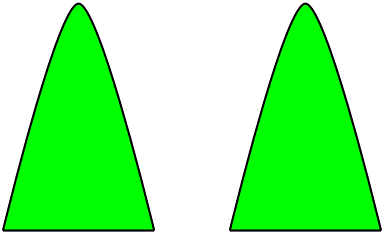
Assumiamo che, ad esempio, Pinocchio abbia un solo cappello giallo e due verdi. In tal caso l'asserzione **b)** è in effetti falsa, ma lo è anche l'asserzione **B)**.



Consideriamo l'asserzione

C) Pinocchio ha almeno un cappello giallo.

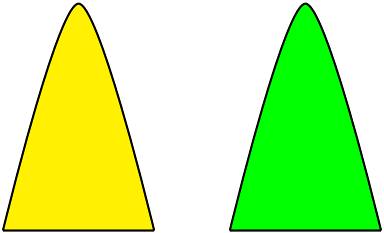
Assumiamo che, ad esempio, Pinocchio abbia due cappelli verdi. In tal caso l'asserzione **b)** è in effetti falsa, ma lo è anche l'asserzione **C)**.



Consideriamo l'asserzione

D) Pinocchio non ha cappelli gialli.

Assumiamo che, ad esempio, Pinocchio abbia un cappello giallo ed uno verde. In tal caso l'asserzione **b)** è in effetti falsa, ma lo è anche l'asserzione **D)**.



Consideriamo l'asserzione

E) Pinocchio non ha cappelli.

Se assumessimo che l'asserzione **E)** sia vera, allora anche l'asserzione **b)** sarebbe vera in quanto non ci sarebbe un cappello di Pinocchio che non sia giallo, proprio perché Pinocchio non avrebbe cappelli.

L'argomentazione di quest'ultimo punto potrebbe sembrare artificiale, ma non lo è. Per spiegarla, consideriamo un altro esempio.

Consideriamo una sala in cui nessuno abbia un cellulare. In tal caso possiamo dire che tutti i cellulari sono spenti e, al tempo stesso, possiamo dire che tutti i cellulari sono accesi, semplicemente perché non ci sono cellulari. Infatti, se qualcuno volesse dimostrare che la prima asserzione è falsa, dovrebbe trovare un cellulare acceso, ma ovviamente non ci riuscirebbe. Discorso analogo per la seconda asserzione.

Sezione 4 Operazioni tra numeri razionali

Per calcolare la somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente di due numeri razionali $a/b, c/d \in \mathbb{Q}$, dove $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $b, d \neq 0$, basta applicare le seguenti formule

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c},$$

e poi semplificare la frazione ottenuta dividendo numeratore e denominatore per il loro massimo comune divisore.

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{10}{16} + \dfrac{14}{-20}$

2) $\dfrac{-11}{6} + \dfrac{19}{-6}$

3) $\dfrac{-12}{11} + \dfrac{16}{-12}$

4) $\dfrac{9}{8} + \dfrac{17}{16}$

5) $\dfrac{-9}{10} + \dfrac{-13}{-14}$

6) $\dfrac{-5}{13} + \dfrac{18}{20}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{4}{5} - \dfrac{-15}{14}$

2) $\dfrac{-2}{5} - \dfrac{7}{-13}$

3) $\dfrac{-1}{-5} - \dfrac{-18}{-18}$

4) $\dfrac{-2}{18} - \dfrac{-6}{-12}$

5) $\dfrac{18}{-11} - \dfrac{-1}{19}$

6) $\dfrac{7}{-5} - \dfrac{8}{-8}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{10}{16}+\dfrac{14}{-20}=-\dfrac{3}{40}$

2) $\dfrac{-11}{6}+\dfrac{19}{-6}=-5$

3) $\dfrac{-12}{11}+\dfrac{16}{-12}=-\dfrac{80}{33}$

4) $\dfrac{9}{8}+\dfrac{17}{16}=\dfrac{35}{16}$

5) $\dfrac{-9}{10}+\dfrac{-13}{-14}=\dfrac{1}{35}$

6) $\dfrac{-5}{13}+\dfrac{18}{20}=\dfrac{67}{130}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{4}{5}-\dfrac{-15}{14}=\dfrac{131}{70}$

2) $\dfrac{-2}{5}-\dfrac{7}{-13}=\dfrac{9}{65}$

3) $\dfrac{-1}{-5}-\dfrac{-18}{-18}=-\dfrac{4}{5}$

4) $\dfrac{-2}{18}-\dfrac{-6}{-12}=-\dfrac{11}{18}$

5) $\dfrac{18}{-11}-\dfrac{-1}{19}=-\dfrac{331}{209}$

6) $\dfrac{7}{-5}-\dfrac{8}{-8}=-\dfrac{2}{5}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{11}{14} \cdot \dfrac{-13}{17}$

2) $\dfrac{13}{-17} \cdot \dfrac{8}{-17}$

3) $\dfrac{4}{4} \cdot \dfrac{-12}{13}$

4) $\dfrac{-20}{18} \cdot \dfrac{3}{-19}$

5) $\dfrac{2}{-11} \cdot \dfrac{15}{-4}$

6) $\dfrac{19}{-13} \cdot \dfrac{-7}{-10}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{(-8)/1}{(-11)/(-2)}$

2) $\dfrac{14/2}{(-20)/8}$

3) $\dfrac{12/(-4)}{(-15)/11}$

4) $\dfrac{14/8}{(-10)/(-6)}$

5) $\dfrac{13/(-15)}{(-20)/(-20)}$

6) $\dfrac{1/(-4)}{12/(-5)}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{11}{14} \cdot \dfrac{-13}{17} = -\dfrac{143}{238}$

2) $\dfrac{13}{-17} \cdot \dfrac{8}{-17} = \dfrac{104}{289}$

3) $\dfrac{4}{4} \cdot \dfrac{-12}{13} = -\dfrac{12}{13}$

4) $\dfrac{-20}{18} \cdot \dfrac{3}{-19} = \dfrac{10}{57}$

5) $\dfrac{2}{-11} \cdot \dfrac{15}{-4} = \dfrac{15}{22}$

6) $\dfrac{19}{-13} \cdot \dfrac{-7}{-10} = -\dfrac{133}{130}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{(-8)/1}{(-11)/(-2)} = -\dfrac{16}{11}$

2) $\dfrac{14/2}{(-20)/8} = -\dfrac{14}{5}$

3) $\dfrac{12/(-4)}{(-15)/11} = \dfrac{11}{5}$

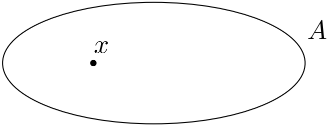
4) $\dfrac{14/8}{(-10)/(-6)} = \dfrac{21}{20}$

5) $\dfrac{13/(-15)}{(-20)/(-20)} = -\dfrac{13}{15}$

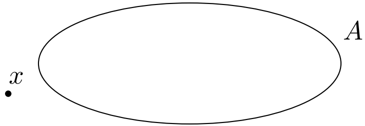
6) $\dfrac{1/(-4)}{12/(-5)} = \dfrac{5}{48}$

Sezione 5 Insiemi e sottoinsiemi

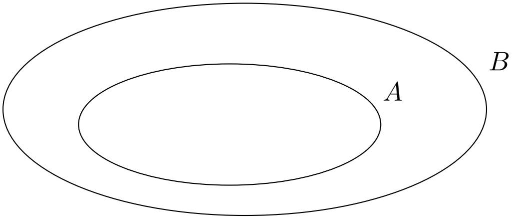
$x \in A$ x appartiene all'insieme A



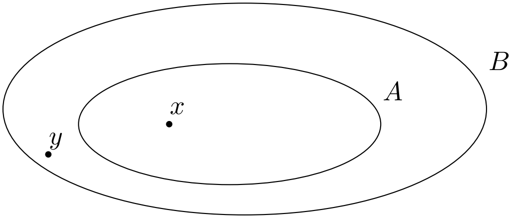
$x \notin A$ x non appartiene all'insieme A



$A \subseteq B$ $\quad$ A è sottoinsieme di B

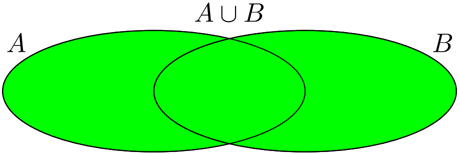


$A \subset B$ $\quad$ A è strettamente contenuto in B

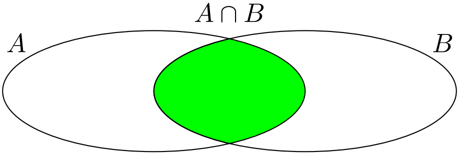


$$A \subset B \iff A \subseteq B \text{ e } B \setminus A \neq \emptyset \iff (x \in A \Longrightarrow x \in B) \text{ ed } (\exists y \in B : y \notin A)$$

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$ $\qquad$ A unione B

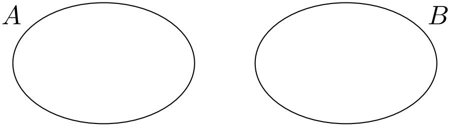


$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ $\qquad$ A intersezione B

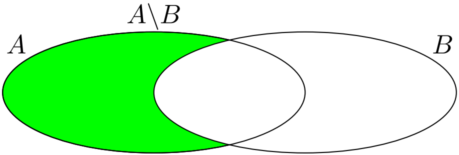


$\emptyset$ insieme vuoto

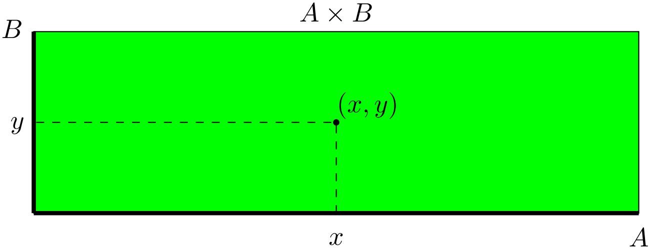
$A \cap B = \emptyset$ A e B sono disgiunti



$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ insieme differenza di A e B



$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ insieme prodotto di A e B

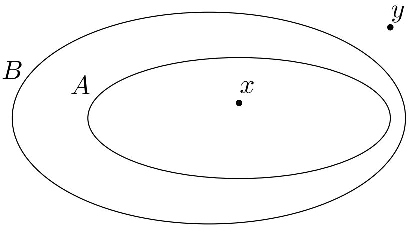


$x \in A$	x appartiene all'insieme A,
$x \notin A$	x non appartiene all'insieme A,
$A \subseteq B$	A è sottoinsieme di B,
$A \subset B$	A è strettamente contenuto in B,
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$	A unione B,
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$	A intersezione B,
$\emptyset$	insieme vuoto,
$A \cap B = \emptyset$	A e B sono disgiunti,
$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ e non } x \in B\}$	insieme differenza di A e B,
$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$	insieme prodotto di A e B.

Osservazione

Osserviamo che:

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Longrightarrow x \in B) \iff (y \notin B \Longrightarrow y \notin A),$$



$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A) \iff (x \in A \Longleftrightarrow x \in B),$$
$$A \subset B \iff A \subseteq B \text{ e } B \backslash A \neq \emptyset \iff (x \in A \Longrightarrow x \in B) \text{ ed } \exists y \in B \setminus A.$$

Osservazione

Osserviamo che se $A \neq B$, allora

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \qquad A \times B \neq B \times A.$$

Un sottoinsieme A di B ha la forma

$$A = \{x \in B : P(x)\},$$

dove $P(x)$ è una proposizione che dipende dalla variabile x che appartiene all'insieme B, quindi x è un elemento di A se e solo se la proposizione $P(x)$ è vera.

Esempio

Se $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali e

$P(n)$: n è un numero pari,

allora

$$A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\} \qquad \text{è l'insieme dei numeri pari,}$$
$$B = \mathbb{N} \setminus A \qquad \text{è l'insieme dei numeri dispari.}$$

Sezione 6 Intervalli

Definizione

$A \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se si ha:

$$x_1,\ x_2 \in A \text{ ed } x_1 < x_2, \text{ allora } [x_1, x_2] \subseteq A.$$

Osservazione

Detto in parole povere, un intervallo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che non ha buchi.

Ricordiamo la seguente caratterizzazione degli intervalli:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	intervallo aperto e limitato;
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$	intervallo chiuso e limitato;
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$	intervallo aperto a sinistra, chiuso a destra e limitato;
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$	intervallo chiuso a sinistra, aperto a destra e limitato;
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$	intervallo illimitato a sinistra e chiuso a destra;
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	intervallo illimitato a sinistra ed aperto a destra;
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$	intervallo chiuso a sinistra ed illimitato a destra;
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	intervallo aperto a sinistra ed illimitato a destra.

Ricordiamo la seguente rappresentazione degli intervalli:

(a, b)

$[a, b]$

$[a, b)$

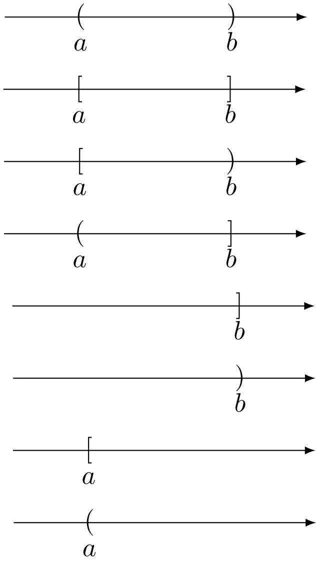
$(a, b]$

$(-\infty, b]$

$(-\infty, b)$

$[a, +\infty)$

$(a, +\infty)$



Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $(-9,-1)\cup(-8,-3)$

2) $(-4,-2)\cup(2,6)$

3) $(-8,-3)\cup(5,9)$

4) $(-7,7)\cup(-9,-1)$

5) $(-8,-4)\cup(-6,-3)$

6) $(-9,7)\cup(-7,4)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $[-2,1]\cup[5,9]$

2) $[1,4]\cup[-4,9]$

3) $[-8,9]\cup[4,7]$

4) $[-9,-5]\cup[-3,5]$

5) $[3,7]\cup[-7,6]$

6) $[-5,4]\cup[-1,1]$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $(-9,-1)\cup(-8,-3)=(-9,-1)$

2) $(-4,-2)\cup(2,6)=(-4,-2)\cup(2,6)$

3) $(-8,-3)\cup(5,9)=(-8,-3)\cup(5,9)$

4) $(-7,7)\cup(-9,-1)=(-9,7)$

5) $(-8,-4)\cup(-6,-3)=(-8,-3)$

6) $(-9,7)\cup(-7,4)=(-9,7)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $[-2,1]\cup[5,9]=[-2,1]\cup[5,9]$

2) $[1,4]\cup[-4,9]=[-4,9]$

3) $[-8,9]\cup[4,7]=[-8,9]$

4) $[-9,-5]\cup[-3,5]=[-9,-5]\cup[-3,5]$

5) $[3,7]\cup[-7,6]=[-7,7]$

6) $[-5,4]\cup[-1,1]=[-5,4]$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left(\frac{6}{11}, \frac{11}{13}\right) \cup \left(\frac{1}{20}, \frac{5}{4}\right)$

2) $\left(\frac{5}{8}, \frac{10}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{13}, \frac{19}{3}\right)$

3) $\left(\frac{3}{13}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{20}{17}, \frac{13}{5}\right)$

4) $\left(\frac{3}{16}, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{13}{9}, \frac{19}{3}\right)$

5) $\left(\frac{7}{11}, \frac{13}{11}\right) \cup \left(\frac{13}{14}, \frac{13}{6}\right)$

6) $\left(\frac{6}{13}, \frac{13}{7}\right) \cup \left(\frac{13}{18}, \frac{5}{4}\right)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left[1, \frac{16}{5}\right] \cup \left[\frac{8}{15}, 12\right]$

2) $\left[\frac{5}{6}, \frac{12}{7}\right] \cup \left[\frac{10}{17}, \frac{17}{11}\right]$

3) $\left[\frac{11}{6}, 3\right] \cup \left[\frac{4}{19}, \frac{7}{8}\right]$

4) $\left[\frac{18}{11}, \frac{12}{7}\right] \cup \left[\frac{11}{14}, \frac{17}{13}\right]$

5) $\left[\frac{3}{13}, \frac{15}{16}\right] \cup \left[\frac{16}{19}, 3\right]$

6) $\left[\frac{11}{14}, \frac{15}{13}\right] \cup \left[\frac{5}{19}, 1\right]$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left(\frac{6}{11},\frac{11}{13}\right)\cup\left(\frac{1}{20},\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{1}{20},\frac{5}{4}\right)$

2) $\left(\frac{5}{8},\frac{10}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{13},\frac{19}{3}\right)=\left(\frac{5}{13},\frac{19}{3}\right)$

3) $\left(\frac{3}{13},\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{20}{17},\frac{13}{5}\right)=\left(\frac{3}{13},\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{20}{17},\frac{13}{5}\right)$

4) $\left(\frac{3}{16},\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{13}{9},\frac{19}{3}\right)=\left(\frac{3}{16},\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{13}{9},\frac{19}{3}\right)$

5) $\left(\frac{7}{11},\frac{13}{11}\right)\cup\left(\frac{13}{14},\frac{13}{6}\right)=\left(\frac{7}{11},\frac{13}{6}\right)$

6) $\left(\frac{6}{13},\frac{13}{7}\right)\cup\left(\frac{13}{18},\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{6}{13},\frac{13}{7}\right)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left[1,\frac{16}{5}\right]\cup\left[\frac{8}{15},12\right]=\left[\frac{8}{15},12\right]$

2) $\left[\frac{5}{6},\frac{12}{7}\right]\cup\left[\frac{10}{17},\frac{17}{11}\right]=\left[\frac{10}{17},\frac{12}{7}\right]$

3) $\left[\frac{11}{6},3\right]\cup\left[\frac{4}{19},\frac{7}{8}\right]=\left[\frac{4}{19},\frac{7}{8}\right]\cup\left[\frac{11}{6},3\right]$

4) $\left[\frac{18}{11},\frac{12}{7}\right]\cup\left[\frac{11}{14},\frac{17}{13}\right]=\left[\frac{11}{14},\frac{17}{13}\right]\cup\left[\frac{18}{11},\frac{12}{7}\right]$

5) $\left[\frac{3}{13},\frac{15}{16}\right]\cup\left[\frac{16}{19},3\right]=\left[\frac{3}{13},3\right]$

6) $\left[\frac{11}{14},\frac{15}{13}\right]\cup\left[\frac{5}{19},1\right]=\left[\frac{5}{19},\frac{15}{13}\right]$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $(-2,3)\cap(-4,9)$

2) $(-6,9)\cap(-1,4)$

3) $(-7,-4)\cap(-3,-1)$

4) $(-4,5)\cap(-8,-6)$

5) $(-7,11)\cap(-4,-1)$

6) $(-19,-5)\cap(-6,6)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left(\frac{1}{19},1\right)\cap\left(\frac{9}{4},\frac{16}{3}\right)$

2) $\left(\frac{2}{19},1\right)\cap\left(\frac{3}{19},\frac{11}{10}\right)$

3) $\left(\frac{8}{17},\frac{14}{5}\right)\cap\left(\frac{6}{5},\frac{17}{8}\right)$

4) $\left(\frac{5}{16},\frac{9}{7}\right)\cap\left(\frac{8}{13},\frac{8}{5}\right)$

5) $\left(\frac{5}{16},\frac{8}{13}\right)\cap\left(\frac{9}{7},\frac{8}{5}\right)$

6) $\left(\frac{5}{16},\frac{10}{17}\right)\cap\left(0,\frac{15}{17}\right)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $(-2,3)\cap(-4,9)=(-2,3)$

2) $(-6,9)\cap(-1,4)=(-1,4)$

3) $(-7,-4)\cap(-3,-1)=\emptyset$

4) $(-4,5)\cap(-8,-6)=\emptyset$

5) $(-7,11)\cap(-4,-1)=(-4,-1)$

6) $(-19,-5)\cap(-6,6)=(-6,-5)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left(\frac{1}{19},1\right)\cap\left(\frac{9}{4},\frac{16}{3}\right)=\emptyset$

2) $\left(\frac{2}{19},1\right)\cap\left(\frac{3}{19},\frac{11}{10}\right)=\left(\frac{3}{19},1\right)$

3) $\left(\frac{8}{17},\frac{14}{5}\right)\cap\left(\frac{6}{5},\frac{17}{8}\right)=\left(\frac{6}{5},\frac{17}{8}\right)$

4) $\left(\frac{5}{16},\frac{9}{7}\right)\cap\left(\frac{8}{13},\frac{8}{5}\right)=\left(\frac{8}{13},\frac{9}{7}\right)$

5) $\left(\frac{5}{16},\frac{8}{13}\right)\cap\left(\frac{9}{7},\frac{8}{5}\right)=\emptyset$

6) $\left(\frac{5}{16},\frac{10}{17}\right)\cap\left(0,\frac{15}{17}\right)=\left(\frac{5}{16},\frac{10}{17}\right)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $[2, 14] \cap [7, 17]$

2) $[11, 14] \cap [14, 17]$

3) $[7, 9] \cap [2, 10]$

4) $[0, 10] \cap [14, 19]$

5) $[1, 18] \cap [5, 9]$

6) $[9, 19] \cap [15, 19]$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{19}{14}\right]$

2) $\left[\frac{5}{3}, \frac{14}{5}\right] \cap \left[\frac{11}{20}, \frac{5}{3}\right]$

3) $\left[0, \frac{11}{20}\right] \cap \left[\frac{5}{3}, \frac{14}{5}\right]$

4) $\left[\frac{10}{17}, \frac{11}{8}\right] \cap \left[\frac{10}{19}, \frac{20}{17}\right]$

5) $\left[\frac{1}{4}, \frac{14}{5}\right] \cap \left[\frac{5}{18}, \frac{19}{18}\right]$

6) $\left[\frac{1}{8}, \frac{5}{14}\right] \cap \left[\frac{9}{11}, \frac{19}{12}\right]$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $[2, 14] \cap [7, 17] = [7, 14]$

2) $[11, 14] \cap [14, 17] = \{14\}$

3) $[7, 9] \cap [2, 10] = [7, 9]$

4) $[0, 10] \cap [14, 19] = \emptyset$

5) $[1, 18] \cap [5, 9] = [5, 9]$

6) $[9, 19] \cap [15, 19] = [15, 19]$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{19}{14}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right]$

2) $\left[\frac{5}{3}, \frac{14}{5}\right] \cap \left[\frac{11}{20}, \frac{5}{3}\right] = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

3) $\left[0, \frac{11}{20}\right] \cap \left[\frac{5}{3}, \frac{14}{5}\right] = \emptyset$

4) $\left[\frac{10}{17}, \frac{11}{8}\right] \cap \left[\frac{10}{19}, \frac{20}{17}\right] = \left[\frac{10}{17}, \frac{20}{17}\right]$

5) $\left[\frac{1}{4}, \frac{14}{5}\right] \cap \left[\frac{5}{18}, \frac{19}{18}\right] = \left[\frac{5}{18}, \frac{19}{18}\right]$

6) $\left[\frac{1}{8}, \frac{5}{14}\right] \cap \left[\frac{9}{11}, \frac{19}{12}\right] = \emptyset$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $(-9,-6)\setminus(-2,7)$

2) $(-2,7)\setminus(1,9)$

3) $(-3,4)\setminus(-5,3)$

4) $(-4,4)\setminus(-2,5)$

5) $(-5,-2)\setminus(-7,3)$

6) $(-6,1)\setminus(-4,-3)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left(\frac{1}{2},\frac{17}{3}\right)\setminus\left(1,\frac{6}{5}\right)$

2) $\left(\frac{10}{19},1\right)\setminus\left(\frac{14}{15},\frac{10}{9}\right)$

3) $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)\setminus\left(\frac{18}{17},\frac{13}{5}\right)$

4) $\left(\frac{1}{13},20\right)\setminus\left(1,\frac{12}{5}\right)$

5) $\left(\frac{13}{18},\frac{6}{7}\right)\setminus\left(\frac{3}{4},4\right)$

6) $\left(1,\frac{17}{9}\right)\setminus\left(\frac{1}{2},20\right)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $(-9,-6)\setminus(-2,7)=(-9,-6)$

2) $(-2,7)\setminus(1,9)=(-2,1]$

3) $(-3,4)\setminus(-5,3)=[3,4)$

4) $(-4,4)\setminus(-2,5)=(-4,-2]$

5) $(-5,-2)\setminus(-7,3)=\emptyset$

6) $(-6,1)\setminus(-4,-3)=(-6,-4]\cup[-3,1)$

Esercizio

Se possibile, semplificare le seguenti espressioni.

1) $\left(\frac{1}{2},\frac{17}{3}\right)\setminus\left(1,\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{1}{2},1\right]\cup\left[\frac{6}{5},\frac{17}{3}\right)$

2) $\left(\frac{10}{19},1\right)\setminus\left(\frac{14}{15},\frac{10}{9}\right)=\left(\frac{10}{19},\frac{14}{15}\right]$

3) $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)\setminus\left(\frac{18}{17},\frac{13}{5}\right)=\emptyset$

4) $\left(\frac{1}{13},20\right)\setminus\left(1,\frac{12}{5}\right)=\left(\frac{1}{13},1\right]\cup\left[\frac{12}{5},20\right)$

5) $\left(\frac{13}{18},\frac{6}{7}\right)\setminus\left(\frac{3}{4},4\right)=\left(\frac{13}{18},\frac{3}{4}\right]$

6) $\left(1,\frac{17}{9}\right)\setminus\left(\frac{1}{2},20\right)=\emptyset$

Sezione 7 Potenze e radici

Definizione

Se $n \in \mathbb{N}$ ed $a \in \mathbb{R}$, allora per definizione:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}.$$

$a^0 = 1\ \forall a \in \mathbb{R}$, in particolare $0^0 = 1$.
Se $n \in \mathbb{N}$ ed $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$a^{-n} = 1/a^n.$$

Osservazione

Il fatto che $a^0 = 1$ per $a \neq 0$ segue in maniera naturale dal seguente ragionamento. Prendiamo $a = 2$. Sappiamo come costruire la seguente lista da sinistra verso destra partendo da $2^1 = 2$: basta moltiplicare ad ogni passo per 2.

$$2^0 = ? \qquad 2^1 = 2 \xrightarrow{\times 2} 2^2 = 4 \xrightarrow{\times 2} 2^3 = 8 \xrightarrow{\times 2} 2^4 = 16$$

In realtà, dalla costruzione da sinistra verso destra segue anche la costruzione da destra verso sinistra: invece di moltiplicare per 2 basta dividere per 2, ed è pertanto ovvio perché debba essere $2^0 = 1$, $2^{-1} = 1/2$ e così via.

$$2^{-1} = \tfrac{1}{2} \xleftarrow{\div 2} 2^0 = 1 \xleftarrow{\div 2} 2^1 = 2 \xleftarrow{\div 2} 2^2 = 4 \xleftarrow{\div 2} 2^3 = 8 \xleftarrow{\div 2} 2^4 = 16$$

Definizione

Se $n \in \mathbb{N}$ ed $a \in \mathbb{R}$, allora per definizione:

$$\sqrt[n]{a} = r \in \mathbb{R} \iff r^n = a.$$

In particolare, se n è pari, allora deve essere $a \geqslant 0$.

Definizione

Se $a \in \mathbb{R}$ e $r = m/n \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{Z}$ ed $n \in \mathbb{N}$, allora per definizione:

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

In particolare, se n è pari, allora deve essere $a \geqslant 0$.

Definizione

Se $x \in \mathbb{R}$ ed $a > 0$, allora per definizione:

$$a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}.$$

Dati $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^x / a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y} = (a^y)^x$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Di conseguenza, dati $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$a^x \cdot b^y = (a^{1/y} \cdot b^{1/x})^{x \cdot y} \qquad a^{1/x} \cdot b^{1/y} = (a^y \cdot b^x)^{1/(x \cdot y)}$$

Se inoltre $m, n \in \mathbb{N}$, allora si ha

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Osservazione

Le regole sopra elencate vanno utilizzate con attenzione quando a e b non sono positivi. Infatti, se $a < 0$, allora si ha

$$\begin{aligned} &\left(a^2\right)^{1/6} = (|a|^2)^{1/6} = (|a|^{1/6})^2 = |a|^{1/3}, \\ &0 < \left(a^2\right)^{1/6} \neq a^{1/3} < 0. \end{aligned}$$

Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} &\left((-4)^2\right)^{1/6} = (4^2)^{1/6} = (4^{1/6})^2 = 4^{1/3}, \\ &0 < \left((-4)^2\right)^{1/6} \neq (-4)^{1/3} < 0. \end{aligned}$$

Si osservi anche che

$$\begin{array}{llll} a > 1 & \text{e} \quad a^x > a^y & \iff & x > y, \\ a < 1 & \text{e} \quad a^x > a^y & \iff & x < y. \end{array}$$

Definizione

Si definisce potenza un'espressione del tipo x^a, dove la base è incognita e l'esponente è fisso.
Nell'espressione x^a, x è detta base della potenza ed a è detto esponente della potenza.

Definizione

Si definisce esponenziale un'espressione del tipo a^x, dove la base è fissa, mentre l'esponente è incognito.
Nell'espressione a^x, a è detta base dell'esponenziale e x è detto esponente dell'esponenziale.

Esercizio

Semplificare le seguenti radici quadrate.

1) $\sqrt{600}$

2) $\sqrt{12}$

3) $\sqrt{1053}$

4) $\sqrt{837}$

5) $\sqrt{144}$

6) $\sqrt{84}$

Esercizio

Semplificare le seguenti radici cubiche.

1) $\sqrt[3]{-54}$

2) $\sqrt[3]{-162}$

3) $\sqrt[3]{-384}$

4) $\sqrt[3]{448}$

5) $\sqrt[3]{-48}$

6) $\sqrt[3]{135}$

Esercizio

Semplificare le seguenti radici quadrate.

1) $\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

2) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

3) $\sqrt{1053} = 9\sqrt{13}$

4) $\sqrt{837} = 3\sqrt{93}$

5) $\sqrt{144} = 12$

6) $\sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

Esercizio

Semplificare le seguenti radici cubiche.

1) $\sqrt[3]{-54} = -3\sqrt[3]{2}$

2) $\sqrt[3]{-162} = -3\sqrt[3]{6}$

3) $\sqrt[3]{-384} = -4\sqrt[3]{6}$

4) $\sqrt[3]{448} = 4\sqrt[3]{7}$

5) $\sqrt[3]{-48} = -2\sqrt[3]{6}$

6) $\sqrt[3]{135} = 3\sqrt[3]{5}$

Esercizio

Quale delle seguenti uguaglianze è errata?

a $\frac{x^2 \cdot x^5}{x^{1/3}} = \frac{1}{x^{-20/3}}$

b $\frac{x^{1/3}}{x^2 \cdot x^5} = \frac{1}{x^{20/3}}$

c $x^2 \cdot x^5 = x^{10}$

d $\frac{1}{x^2 \cdot x^5} = x^{-7}$

Esercizio

Quale delle seguenti uguaglianze è errata?

a $\frac{x^2 \cdot x^5}{x^{1/3}} = \frac{1}{x^{-20/3}}$

b $\frac{x^{1/3}}{x^2 \cdot x^5} = \frac{1}{x^{20/3}}$

c $x^2 \cdot x^5 = x^{10}$

d $\frac{1}{x^2 \cdot x^5} = x^{-7}$

c

Esercizio

Il numero $\frac{2^{9/7}}{2^{-5/3}}$ vale

a $2^{(9/7)+(-5/3)}$

b $\frac{1}{2^{(9/7)+(-5/3)}}$

c $\frac{1}{2^{(9/7)-(-5/3)}}$

d $2^{9/7}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5/3}$

Esercizio

Il numero $\frac{2^{9/7}}{2^{-5/3}}$ vale

a $2^{(9/7)+(-5/3)}$

b $\frac{1}{2^{(9/7)+(-5/3)}}$

c $\frac{1}{2^{(9/7)-(-5/3)}}$

d $2^{9/7}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5/3}$

d

Esercizio

Il numero $3^{-2/7}$ vale

- a $3^{7/2}$
- b $(1/3)^{2/7}$
- c $(1/3)^{7/2}$
- d $(-3)^{2/7}$

Esercizio

Il numero $3^{-2/7}$ vale

a $3^{7/2}$

b $(1/3)^{2/7}$

c $(1/3)^{7/2}$

d $(-3)^{2/7}$

b

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

1) $(-4)^{-2} \cdot (-4)^{-3}$

2) $5^{-2} \cdot 5^{2}$

3) $4^{-3} \cdot 4^{2}$

4) $5^{-2} \cdot 5^{-3}$

5) $(-5)^{-3} \cdot (-5)^{4}$

6) $(-2)^{3} \cdot (-2)^{4}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

1) $(-4)^{-2} \cdot (-4)^{-3} = (-4)^{-5} = -\dfrac{1}{1024}$

2) $5^{-2} \cdot 5^{2} = 5^{0} = 1$

3) $4^{-3} \cdot 4^{2} = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

4) $5^{-2} \cdot 5^{-3} = 5^{-5} = \dfrac{1}{3125}$

5) $(-5)^{-3} \cdot (-5)^{4} = (-5)^{1} = -5$

6) $(-2)^{3} \cdot (-2)^{4} = (-2)^{7} = -128$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{1}{a^{y-x}}.$$

1) $\dfrac{4^3}{4^3}$

2) $\dfrac{(-3)^{-2}}{(-3)^{-2}}$

3) $\dfrac{5^4}{5^2}$

4) $\dfrac{2^{-2}}{2^{-3}}$

5) $\dfrac{(-3)^{-2}}{(-3)^3}$

6) $\dfrac{4^3}{4^{-3}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{1}{a^{y-x}}.$$

1) $\dfrac{4^3}{4^3} = 4^0 = 1$

2) $\dfrac{(-3)^{-2}}{(-3)^{-2}} = (-3)^0 = 1$

3) $\dfrac{5^4}{5^2} = 5^2 = 25$

4) $\dfrac{2^{-2}}{2^{-3}} = 2^1 = 2$

5) $\dfrac{(-3)^{-2}}{(-3)^3} = (-3)^{-5} = -\dfrac{1}{243}$

6) $\dfrac{4^3}{4^{-3}} = 4^6 = 4096$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a^x)^y = a^{x\cdot y} = \frac{1}{a^{-x\cdot y}}.$$

1) $(3^3)^1$

2) $((-3)^{-4})^2$

3) $(3^{-4})^4$

4) $((-4)^5)^{-3}$

5) $(5^{-3})^2$

6) $((-5)^{-1})^{-1}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} = \frac{1}{a^{-x \cdot y}}.$$

1) $(3^3)^1 = 3^3 = 27$

2) $((-3)^{-4})^2 = (-3)^{-8} = \frac{1}{3^8}$

3) $(3^{-4})^4 = 3^{-16} = \frac{1}{3^{16}}$

4) $((-4)^5)^{-3} = (-4)^{-15} = -\frac{1}{4^{15}}$

5) $(5^{-3})^2 = 5^{-6} = \frac{1}{5^6}$

6) $((-5)^{-1})^{-1} = (-5)^1 = -5$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x.$$

1) $(-2)^{-3} \cdot 4^{-3}$

2) $5^3 \cdot 4^3$

3) $(-5)^2 \cdot 5^2$

4) $2^8 \cdot 3^8$

5) $2^{-4} \cdot 4^{-4}$

6) $(-5)^4 \cdot 3^4$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x.$$

1) $(-2)^{-3} \cdot 4^{-3} = (-8)^{-3} = -\dfrac{1}{512}$

2) $5^3 \cdot 4^3 = 20^3 = 8000$

3) $(-5)^2 \cdot 5^2 = (-25)^2 = 625$

4) $2^8 \cdot 3^8 = 6^8$

5) $2^{-4} \cdot 4^{-4} = 8^{-4} = \dfrac{1}{8^4}$

6) $(-5)^4 \cdot 3^4 = (-15)^4 = 15^4$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x .$$

1) $\dfrac{5^{-3}}{(-5)^{-3}}$

2) $\dfrac{4^{-2}}{(-2)^{-2}}$

3) $\dfrac{(-5)^{5}}{5^{5}}$

4) $\dfrac{2^{2}}{3^{2}}$

5) $\dfrac{5^{-5}}{(-4)^{-5}}$

6) $\dfrac{(-5)^{-2}}{(-3)^{-2}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x .$$

1) $\dfrac{5^{-3}}{(-5)^{-3}} = \left(\dfrac{5}{-5}\right)^{-3} = -1$

2) $\dfrac{4^{-2}}{(-2)^{-2}} = \left(\dfrac{4}{-2}\right)^{-2} = \dfrac{1}{4}$

3) $\dfrac{(-5)^{5}}{5^{5}} = \left(\dfrac{-5}{5}\right)^{5} = -1$

4) $\dfrac{2^{2}}{3^{2}} = \left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$

5) $\dfrac{5^{-5}}{(-4)^{-5}} = \left(\dfrac{5}{-4}\right)^{-5} = -\dfrac{1024}{3125}$

6) $\dfrac{(-5)^{-2}}{(-3)^{-2}} = \left(\dfrac{-5}{-3}\right)^{-2} = \dfrac{9}{25}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \text{con } x = 1/2.$$

1) $\sqrt{\dfrac{4}{90}} \cdot \sqrt{\dfrac{40}{9}}$

2) $\sqrt{\dfrac{10}{56}} \cdot \sqrt{\dfrac{40}{14}}$

3) $\sqrt{\dfrac{36}{48}} \cdot \sqrt{\dfrac{36}{48}}$

4) $\sqrt{\dfrac{30}{40}} \cdot \sqrt{\dfrac{100}{12}}$

5) $\sqrt{\dfrac{50}{30}} \cdot \sqrt{\dfrac{30}{50}}$

6) $\sqrt{\dfrac{42}{18}} \cdot \sqrt{\dfrac{36}{21}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \text{con } x = 1/2.$$

1) $\sqrt{\frac{4}{90}} \cdot \sqrt{\frac{40}{9}} = \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$

2) $\sqrt{\frac{10}{56}} \cdot \sqrt{\frac{40}{14}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$

3) $\sqrt{\frac{36}{48}} \cdot \sqrt{\frac{36}{48}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

4) $\sqrt{\frac{30}{40}} \cdot \sqrt{\frac{100}{12}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

5) $\sqrt{\frac{50}{30}} \cdot \sqrt{\frac{30}{50}} = \sqrt{1} = 1$

6) $\sqrt{\frac{42}{18}} \cdot \sqrt{\frac{36}{21}} = \sqrt{4} = 2$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^2 \cdot b^3}.$$

1) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$

2) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{6}{2}}$

3) $\sqrt[3]{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt{\frac{4}{6}}$

4) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$

5) $\sqrt[3]{\frac{2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$

6) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{4}{2}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^2 \cdot b^3}.$$

1) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt[6]{\frac{9}{1024}}$

2) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt[6]{\frac{75}{4}}$

3) $\sqrt[3]{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{\frac{32}{75}}$

4) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{243}}$

5) $\sqrt[3]{\frac{2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{500}}$

6) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt[6]{\frac{128}{9}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}$

2) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{27}$

3) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{27}$

4) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{15}$

5) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{12}$

6) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{30}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

$\mathbf{1})\ \sqrt{14} \cdot \sqrt{26} = 2\sqrt{91}$

$\mathbf{2})\ \sqrt{6} \cdot \sqrt{27} = 9\sqrt{2}$

$\mathbf{3})\ \sqrt{28} \cdot \sqrt{27} = 6\sqrt{21}$

$\mathbf{4})\ \sqrt{27} \cdot \sqrt{15} = 9\sqrt{5}$

$\mathbf{5})\ \sqrt{11} \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{33}$

$\mathbf{6})\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{30} = 2\sqrt{15}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

1) $\dfrac{x^6 \cdot x^{10}}{x^6 \cdot x^{10}}$

2) $\dfrac{x^3 \cdot x^6}{x^2 \cdot x^2}$

3) $\dfrac{x \cdot x^9}{x^4 \cdot x}$

4) $\dfrac{x^4 \cdot x^3}{x^7 \cdot x}$

5) $\dfrac{x^9 \cdot x^7}{x^6 \cdot x^3}$

6) $\dfrac{x^2 \cdot x^7}{x^{10} \cdot x^5}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

$\mathbf{1})\ \dfrac{x^6 \cdot x^{10}}{x^6 \cdot x^{10}} = 1$

$\mathbf{2})\ \dfrac{x^3 \cdot x^6}{x^2 \cdot x^2} = x^5$

$\mathbf{3})\ \dfrac{x \cdot x^9}{x^4 \cdot x} = x^5$

$\mathbf{4})\ \dfrac{x^4 \cdot x^3}{x^7 \cdot x} = \dfrac{1}{x}$

$\mathbf{5})\ \dfrac{x^9 \cdot x^7}{x^6 \cdot x^3} = x^7$

$\mathbf{6})\ \dfrac{x^2 \cdot x^7}{x^{10} \cdot x^5} = \dfrac{1}{x^6}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

1) $\left(\left(x^{4}\right)^{8} \cdot x^{9}\right)^{5}$

2) $\left(\left(x^{7}\right)^{8} \cdot x^{7}\right)^{2}$

3) $\left(\left(x^{5}\right)^{9} \cdot x^{9}\right)^{5}$

4) $\left(\left(x^{10}\right)^{8} \cdot x^{2}\right)^{7}$

5) $\left(\left(x^{6}\right)^{5} \cdot x^{9}\right)^{2}$

6) $\left(\left(x^{2}\right)^{7} \cdot x^{6}\right)^{6}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

1) $\left(\left(x^4\right)^8 \cdot x^9\right)^5 = x^{205}$

2) $\left(\left(x^7\right)^8 \cdot x^7\right)^2 = x^{126}$

3) $\left(\left(x^5\right)^9 \cdot x^9\right)^5 = x^{270}$

4) $\left(\left(x^{10}\right)^8 \cdot x^2\right)^7 = x^{574}$

5) $\left(\left(x^6\right)^5 \cdot x^9\right)^2 = x^{78}$

6) $\left(\left(x^2\right)^7 \cdot x^6\right)^6 = x^{120}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x, y, z > 0$.

1) $\dfrac{\left(x^3 \cdot y^3\right)^6}{z^{18}}$

2) $\dfrac{\left(x^9 \cdot y^9\right)^4}{z^{36}}$

3) $\dfrac{\left(x^7 \cdot y^7\right)^3}{z^{21}}$

4) $\dfrac{\left(x^2 \cdot y^2\right)^8}{z^{16}}$

5) $\dfrac{\left(x^5 \cdot y^5\right)^4}{z^{20}}$

6) $\dfrac{\left(x^4 \cdot y^4\right)^9}{z^{36}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x, y, z > 0$.

1) $\dfrac{\left(x^3 \cdot y^3\right)^6}{z^{18}} = \left(\dfrac{xy}{z}\right)^{18}$

2) $\dfrac{\left(x^9 \cdot y^9\right)^4}{z^{36}} = \left(\dfrac{xy}{z}\right)^{36}$

3) $\dfrac{\left(x^7 \cdot y^7\right)^3}{z^{21}} = \left(\dfrac{xy}{z}\right)^{21}$

4) $\dfrac{\left(x^2 \cdot y^2\right)^8}{z^{16}} = \left(\dfrac{xy}{z}\right)^{16}$

5) $\dfrac{\left(x^5 \cdot y^5\right)^4}{z^{20}} = \left(\dfrac{xy}{z}\right)^{20}$

6) $\dfrac{\left(x^4 \cdot y^4\right)^9}{z^{36}} = \left(\dfrac{xy}{z}\right)^{36}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

1) $$\frac{\left(x^{8/3} \cdot x^{7/8}\right)^{6/4}}{x^{8/3}}$$

2) $$\frac{\left(x^{9/4} \cdot x^{2/5}\right)^{5/6}}{x^{2/5}}$$

3) $$\frac{\left(x^{8/4} \cdot x^{4/8}\right)^{7/2}}{x^{9/5}}$$

4) $$\frac{\left(x^{5/4} \cdot x^{3/2}\right)^{6/8}}{x^{6/9}}$$

5) $$\frac{\left(x^{9/7} \cdot x^{7/6}\right)^{5/2}}{x^{9/5}}$$

6) $$\frac{\left(x^{8/4} \cdot x^{7/8}\right)^{6/8}}{x^{2/6}}$$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

1) $\dfrac{\left(x^{8/3} \cdot x^{7/8}\right)^{6/4}}{x^{8/3}} = x^{127/48}$

2) $\dfrac{\left(x^{9/4} \cdot x^{2/5}\right)^{5/6}}{x^{2/5}} = x^{217/120}$

3) $\dfrac{\left(x^{8/4} \cdot x^{4/8}\right)^{7/2}}{x^{9/5}} = x^{139/20}$

4) $\dfrac{\left(x^{5/4} \cdot x^{3/2}\right)^{6/8}}{x^{6/9}} = x^{67/48}$

5) $\dfrac{\left(x^{9/7} \cdot x^{7/6}\right)^{5/2}}{x^{9/5}} = x^{1819/420}$

6) $\dfrac{\left(x^{8/4} \cdot x^{7/8}\right)^{6/8}}{x^{2/6}} = x^{175/96}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

$\mathbf{1)}\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[4]{x^9}}$

$\mathbf{2)}\ \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt[8]{x^5}}$

$\mathbf{3)}\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[9]{x}}}{\sqrt[9]{x^3}}$

$\mathbf{4)}\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[8]{x}}}{\sqrt[7]{x^7}}$

$\mathbf{5)}\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[9]{x^9}}$

$\mathbf{6)}\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x^3}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

$\mathbf{1})\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[4]{x^9}} = \dfrac{1}{x^{49/24}}$

$\mathbf{2})\ \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt[8]{x^5}} = \dfrac{1}{x^{1/8}}$

$\mathbf{3})\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[9]{x}}}{\sqrt[9]{x^3}} = \dfrac{1}{x^{41/180}}$

$\mathbf{4})\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[8]{x}}}{\sqrt[7]{x^7}} = \dfrac{1}{x^{41/48}}$

$\mathbf{5})\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[9]{x^9}} = \dfrac{1}{x^{41/48}}$

$\mathbf{6})\ \dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{1}{x^{19/24}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x, y > 0$.

1) $\dfrac{x^9 - y^2}{(xy)^4}$

2) $\dfrac{x^7 + y}{(xy)^6}$

3) $\dfrac{x^3 + y^9}{(xy)^5}$

4) $\dfrac{x^{10} - y^8}{(xy)^6}$

5) $\dfrac{x^4 - y^5}{(xy)^3}$

6) $\dfrac{x^9 + y^8}{xy}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x, y > 0$.

$\mathbf{1)}$ $\dfrac{x^9 - y^2}{(xy)^4} = \dfrac{x^5}{y^4} - \dfrac{1}{x^4 y^2}$

$\mathbf{2)}$ $\dfrac{x^7 + y}{(xy)^6} = \dfrac{x}{y^6} + \dfrac{1}{x^6 y^5}$

$\mathbf{3)}$ $\dfrac{x^3 + y^9}{(xy)^5} = \dfrac{x^2}{y^5} + \dfrac{y^4}{x^5}$

$\mathbf{4)}$ $\dfrac{x^{10} - y^8}{(xy)^6} = \dfrac{x^4}{y^6} - \dfrac{y^2}{x^6}$

$\mathbf{5)}$ $\dfrac{x^4 - y^5}{(xy)^3} = \dfrac{x}{y^3} - \dfrac{y^2}{x^3}$

$\mathbf{6)}$ $\dfrac{x^9 + y^8}{xy} = \dfrac{x^8}{y} + \dfrac{y^7}{x}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

1) $\dfrac{x^{6/2} - x^{-9/2}}{x^{-6/4}}$

2) $\dfrac{x^{4/6} + x^{-7/5}}{x^{-9/4}}$

3) $\dfrac{x^{-2/4} - x^{-7/6}}{x^{-3/8}}$

4) $\dfrac{x^{-5/7} + x^{5/9}}{x^{8/6}}$

5) $\dfrac{x^{8/4} - x^{4/9}}{x^{-8/6}}$

6) $\dfrac{x^{2/9} + x^{-8/5}}{x^{3/5}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x > 0$.

1) $\dfrac{x^{6/2} - x^{-9/2}}{x^{-6/4}} = x^{9/2} - \dfrac{1}{x^{3}}$

2) $\dfrac{x^{4/6} + x^{-7/5}}{x^{-9/4}} = x^{35/12} + x^{17/20}$

3) $\dfrac{x^{-2/4} - x^{-7/6}}{x^{-3/8}} = \dfrac{1}{x^{1/8}} - \dfrac{1}{x^{19/24}}$

4) $\dfrac{x^{-5/7} + x^{5/9}}{x^{8/6}} = \dfrac{1}{x^{43/21}} + \dfrac{1}{x^{7/9}}$

5) $\dfrac{x^{8/4} - x^{4/9}}{x^{-8/6}} = x^{10/3} - x^{16/9}$

6) $\dfrac{x^{2/9} + x^{-8/5}}{x^{3/5}} = \dfrac{1}{x^{17/45}} + \dfrac{1}{x^{11/5}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $|y| < x$.

1) $\dfrac{(x^2-y^2)^{6/9}(x-y)^{3/6}}{(x+y)^{5/4}}$

2) $\dfrac{(x^2-y^2)^{5/4}(x-y)^{8/9}}{(x+y)^{2/8}}$

3) $\dfrac{(x^2-y^2)^{5/7}(x-y)^{5/2}}{(x+y)^{9/6}}$

4) $\dfrac{(x^2-y^2)^{9/2}(x-y)^{7/8}}{(x+y)^{8/6}}$

5) $\dfrac{(x^2-y^2)^{4/8}(x-y)^{3/7}}{(x+y)^{6/7}}$

6) $\dfrac{(x^2-y^2)^{9/7}(x-y)^{7/2}}{(x+y)^{8/9}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $|y| < x$.

1) $$\frac{(x^2-y^2)^{6/9}(x-y)^{3/6}}{(x+y)^{5/4}} = (x-y)^{7/6} \cdot \frac{1}{(x+y)^{7/12}}$$

2) $$\frac{(x^2-y^2)^{5/4}(x-y)^{8/9}}{(x+y)^{2/8}} = (x-y)^{77/36} \cdot (x+y)$$

3) $$\frac{(x^2-y^2)^{5/7}(x-y)^{5/2}}{(x+y)^{9/6}} = (x-y)^{45/14} \cdot \frac{1}{(x+y)^{11/14}}$$

4) $$\frac{(x^2-y^2)^{9/2}(x-y)^{7/8}}{(x+y)^{8/6}} = (x-y)^{43/8} \cdot \frac{1}{(x+y)^{19/6}}$$

5) $$\frac{(x^2-y^2)^{4/8}(x-y)^{3/7}}{(x+y)^{6/7}} = (x-y)^{13/14} \cdot \frac{1}{(x+y)^{5/14}}$$

6) $$\frac{(x^2-y^2)^{9/7}(x-y)^{7/2}}{(x+y)^{8/9}} = (x-y)^{67/14} \cdot (x+y)^{25/63}$$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $|y| < x$.

1) $\dfrac{(x^2 - y^2)^{5/8}\sqrt{x - y}}{(x + y)^{9/5}}$

2) $\dfrac{(x^2 - y^2)^{8/4}\sqrt{x - y}}{(x + y)^{8/7}}$

3) $\dfrac{(x^2 - y^2)^{4/8}\sqrt{x - y}}{(x + y)^{6/9}}$

4) $\dfrac{(x^2 - y^2)^{6/7}\sqrt{x - y}}{(x + y)^{8/6}}$

5) $\dfrac{(x^2 - y^2)^{6/5}\sqrt{x - y}}{(x + y)^{8/4}}$

6) $\dfrac{(x^2 - y^2)^{3/5}\sqrt{x - y}}{(x + y)^{9/3}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $|y| < x$.

1) $$\frac{(x^2-y^2)^{5/8}\sqrt{x-y}}{(x+y)^{9/5}} = (x-y)^{9/8} \cdot \frac{1}{(x+y)^{47/40}}$$

2) $$\frac{(x^2-y^2)^{8/4}\sqrt{x-y}}{(x+y)^{8/7}} = (x-y)^{5/2} \cdot (x+y)^{6/7}$$

3) $$\frac{(x^2-y^2)^{4/8}\sqrt{x-y}}{(x+y)^{6/9}} = (x-y) \cdot \frac{1}{(x+y)^{1/6}}$$

4) $$\frac{(x^2-y^2)^{6/7}\sqrt{x-y}}{(x+y)^{8/6}} = (x-y)^{19/14} \cdot \frac{1}{(x+y)^{10/21}}$$

5) $$\frac{(x^2-y^2)^{6/5}\sqrt{x-y}}{(x+y)^{8/4}} = (x-y)^{17/10} \cdot \frac{1}{(x+y)^{4/5}}$$

6) $$\frac{(x^2-y^2)^{3/5}\sqrt{x-y}}{(x+y)^{9/3}} = (x-y)^{11/10} \cdot (x+y)^{12/5}$$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $|y| < x$.

1) $\dfrac{(x^2-y^2)^{2/6}(x-y)^{4/8}}{\sqrt{x+y}}$

2) $\dfrac{(x^2-y^2)^{6/9}(x-y)^{7/2}}{\sqrt{x+y}}$

3) $\dfrac{(x^2-y^2)^{3/4}(x-y)^{3/5}}{\sqrt{x+y}}$

4) $\dfrac{(x^2-y^2)^{3/2}(x-y)^{9/6}}{\sqrt{x+y}}$

5) $\dfrac{(x^2-y^2)^{4/3}(x-y)^{5/8}}{\sqrt{x+y}}$

6) $\dfrac{(x^2-y^2)^{6/2}(x-y)^{6/9}}{\sqrt{x+y}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $|y| < x$.

1) $$\frac{(x^2-y^2)^{2/6}(x-y)^{4/8}}{\sqrt{x+y}} = (x-y)^{5/6}\cdot\frac{1}{(x+y)^{1/6}}$$

2) $$\frac{(x^2-y^2)^{6/9}(x-y)^{7/2}}{\sqrt{x+y}} = (x-y)^{25/6}\cdot\frac{1}{(x+y)^{1/6}}$$

3) $$\frac{(x^2-y^2)^{3/4}(x-y)^{3/5}}{\sqrt{x+y}} = (x-y)^{27/20}\cdot\frac{1}{(x+y)^{1/4}}$$

4) $$\frac{(x^2-y^2)^{3/2}(x-y)^{9/6}}{\sqrt{x+y}} = (x-y)^{3}\cdot(x+y)$$

5) $$\frac{(x^2-y^2)^{4/3}(x-y)^{5/8}}{\sqrt{x+y}} = (x-y)^{47/24}\cdot(x+y)^{5/6}$$

6) $$\frac{(x^2-y^2)^{6/2}(x-y)^{6/9}}{\sqrt{x+y}} = (x-y)^{11/3}\cdot\frac{1}{(x+y)^{5/2}}$$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $|y| < x$.

1) $(x^2 - y^2)^{3/2} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

2) $(x^2 - y^2)^{2/3} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

3) $(x^2 - y^2)^{4/8} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

4) $(x^2 - y^2)^{7/5} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

5) $(x^2 - y^2)^{7/4} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

6) $(x^2 - y^2)^{4/6} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $|y| < x$.

1) $(x^2 - y^2)^{3/2} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = (x-y)^2 \cdot (x+y)$

2) $(x^2 - y^2)^{2/3} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = (x-y)^{7/6} \cdot (x+y)^{1/6}$

3) $(x^2 - y^2)^{4/8} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = (x-y)$

4) $(x^2 - y^2)^{7/5} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = (x-y)^{19/10} \cdot (x+y)^{9/10}$

5) $(x^2 - y^2)^{7/4} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = (x-y)^{9/4} \cdot (x+y)^{5/4}$

6) $(x^2 - y^2)^{4/6} \cdot \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = (x-y)^{7/6} \cdot (x+y)^{1/6}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x, y > 0$.

1) $\dfrac{(xy)^{3/4}}{y^{8/9}\sqrt{x}}$

2) $\dfrac{(xy)^{2/4}}{y^{9/7}\sqrt{x}}$

3) $\dfrac{(xy)^{5/6}}{y^{7/3}\sqrt{x}}$

4) $\dfrac{(xy)^{4/2}}{y^{5/8}\sqrt{x}}$

5) $\dfrac{(xy)^{8/3}}{y^{9/5}\sqrt{x}}$

6) $\dfrac{(xy)^{9/7}}{y^{3/7}\sqrt{x}}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni per $x, y > 0$.

1) $\dfrac{(xy)^{3/4}}{y^{8/9}\sqrt{x}} = x^{1/4} \cdot \dfrac{1}{y^{5/36}}$

2) $\dfrac{(xy)^{2/4}}{y^{9/7}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{y^{11/14}}$

3) $\dfrac{(xy)^{5/6}}{y^{7/3}\sqrt{x}} = x^{1/3} \cdot \dfrac{1}{y^{3/2}}$

4) $\dfrac{(xy)^{4/2}}{y^{5/8}\sqrt{x}} = x^{3/2} \cdot y^{11/8}$

5) $\dfrac{(xy)^{8/3}}{y^{9/5}\sqrt{x}} = x^{13/6} \cdot y^{13/15}$

6) $\dfrac{(xy)^{9/7}}{y^{3/7}\sqrt{x}} = x^{11/14} \cdot y^{6/7}$

Sezione 8 Logaritmi

Definizione

Dati $a > 0$ ed $\alpha > 0$, per definizione $\log_\alpha(a)$ è quel numero $b \in \mathbb{R}$ tale che elevando α a tale numero si ottiene a, cioè $\alpha^b = a$.

Osservazione

Per ricordare tale regola può essere utile il seguente disegno.

$$\log_\alpha(a) = b \iff \alpha^b = a$$

Dati $a, b > 0$ ed $\alpha, \beta > 0$ con $\alpha, \beta \neq 1$, si ha

$$\alpha^{\log_\alpha(a)} = a \qquad \log_\alpha(\alpha^x) = x$$

$$\log_\alpha(1) = 0 \qquad \log_\alpha(0) \text{ non ha significato}$$

$$\log_\alpha(a \cdot b) = \log_\alpha(a) + \log_\alpha(b) \qquad \log_\alpha\left(\frac{a}{b}\right) = \log_\alpha(a) - \log_\alpha(b)$$

$$\log_\alpha(a^x) = x \cdot \log_\alpha(a) \qquad \log_\alpha\left(\frac{1}{a}\right) = \log_\alpha(a^{-1}) = -\log_\alpha(a)$$

$$\log_\alpha(a) = \frac{\log_\beta(a)}{\log_\beta(\alpha)} \qquad \log_\alpha(a) = \log_\alpha(\beta) \cdot \log_\beta(a)$$

$$\log_\alpha(\beta) = \frac{1}{\log_\beta(\alpha)} \qquad a^{\log_\alpha(b)} = b^{\log_\alpha(a)}.$$

Osservazione

Si noti che non esiste una regola per riscrivere $\log_\alpha(a+b)$ oppure $\log_\alpha(a) \cdot \log_\alpha(b)$.

Osservazione

Le regole sopra elencate vanno utilizzate con attenzione quando a non è positivo. Infatti, se $a < 0$, allora si ha

$$\log_\alpha(a^2) = \log_\alpha(|a|^2) = 2\log_\alpha(|a|),$$

$2\log_\alpha(a)$ non è ben definito.

Ad esempio, si ha

$$\log_\alpha\left((-2)^2\right) = \log_\alpha\left(2^2\right) = 2\log_\alpha(2),$$

$2\log_\alpha(-2)$ non è ben definito.

Ricordiamo anche che

$$\begin{aligned} \alpha > 1 \quad \text{e} \quad \log_\alpha(a) > \log_\alpha(b) \quad &\Longleftrightarrow \quad a > b, \\ \alpha < 1 \quad \text{e} \quad \log_\alpha(a) > \log_\alpha(b) \quad &\Longleftrightarrow \quad a < b. \end{aligned}$$

Nell'espressione $\log_\alpha(a)$, α è detta base del logaritmo ed a è detto argomentoargomento del logaritmo.
Se la base è 10, allora spesso la si omette e si scrive semplicemente $\log$, ossia $\log = \log_{10}$. Se la base è il numero di Nepero $e \approx 2.71828$, allora si utilizza $\ln$, ossia $\log_e = \ln$.

Esercizio

Il $\ln(x^4)$ per $x < 0$ è uguale a

a $4\ln(-x)$

b $4\ln(x)$

c $-4\ln(x)$

d non è definito

Esercizio

Il $\ln(x^4)$ per $x < 0$ è uguale a

a $4\ln(-x)$

b $4\ln(x)$

c $-4\ln(x)$

d non è definito

a

Esercizio

Il $\log_2(8) - \log_2(32)$ è uguale a

a $-\log_2(24)$

b -2

c $\frac{\log_2(8)}{\log_2(32)}$

d -5

Esercizio

Il $\log_2(8) - \log_2(32)$ è uguale a

a $-\log_2(24)$

b -2

c $\frac{\log_2(8)}{\log_2(32)}$

d -5

b

Esercizio

Il $\log_3(9) \cdot \log_3(81)$ vale

a $\log_3(90)$

b $\log_3(9) + \log_3(81)$

c 8

d $\log_3(729)$

Esercizio

Il $\log_3(9) \cdot \log_3(81)$ vale

a $\log_3(90)$

b $\log_3(9) + \log_3(81)$

c 8

d $\log_3(729)$

c

Esercizio

Il numero $e^{\ln(-6^2)}$

a non è definito

b vale -36

c vale 36

d è uguale a $e^{2\ln(-6)}$

Esercizio

Il numero $e^{\ln(-6^2)}$

$\boxed{\text{a}}$ non è definito

$\boxed{\text{b}}$ vale -36

$\boxed{\text{c}}$ vale 36

$\boxed{\text{d}}$ è uguale a $e^{2\ln(-6)}$

$\boxed{\text{a}}$

Esercizio

Il $\frac{\log_2(8)}{\log_2(4)}$ vale

a $\frac{3}{2}$

b 1

c $\log_2(8) - \log_2(4)$

d $\log_2(2)$

Esercizio

Il $\frac{\log_2(8)}{\log_2(4)}$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{b}}$ 1

$\boxed{\text{c}}$ $\log_2(8) - \log_2(4)$

$\boxed{\text{d}}$ $\log_2(2)$

$\boxed{\text{a}}$

Esercizio

Il $\frac{\log_4(64)}{\log_4(16)}$ vale

a $\frac{3}{2}$

b 1

c $\log_4(64) - \log_4(16)$

d $\log_4(48)$

Esercizio

Il $\frac{\log_4(64)}{\log_4(16)}$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{b}}$ 1

$\boxed{\text{c}}$ $\log_4(64) - \log_4(16)$

$\boxed{\text{d}}$ $\log_4(48)$

$\boxed{\text{a}}$

Esercizio

Dati $x, y > 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

- a $\ln(x)^8 = \ln(y)^8$
- b $\ln(x^8) - \ln(y^8) = \ln(x^8 - y^8)$
- c $\ln(x^8) + \ln(y^8) = \ln(x^8 + y^8)$
- d $8\ln(x/y) = \ln(x^8) - \ln(y^8)$

Esercizio

Dati $x, y > 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

a $\ln(x)^8 = \ln(y)^8$

b $\ln(x^8) - \ln(y^8) = \ln(x^8 - y^8)$

c $\ln(x^8) + \ln(y^8) = \ln(x^8 + y^8)$

d $8\ln(x/y) = \ln(x^8) - \ln(y^8)$

d

Esercizio

Dati $x, y > 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

a $\ln(5x) = 5\ln(x)$

b $\ln(5x) + \ln(5y) = \ln(25xy)$

c $\ln(5x)\ln(5y) = \ln(25xy)$

d $\ln(x/y) = \ln(x)/\ln(y)$

Esercizio

Dati $x, y > 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

a $\ln(5x) = 5\ln(x)$

b $\ln(5x) + \ln(5y) = \ln(25xy)$

c $\ln(5x)\ln(5y) = \ln(25xy)$

d $\ln(x/y) = \ln(x)/\ln(y)$

b

Esercizio

Verificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$\log_\alpha(a) = b \Longleftrightarrow \alpha^b = a.$$

1) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = -5$ **2**) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$ **3**) $\log_4\left(\frac{1}{1024}\right) = -5$ **4**) $\log_5\left(\frac{1}{3125}\right) = -5$

5) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$ **6**) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$ **7**) $\log_4\left(\frac{1}{256}\right) = -4$ **8**) $\log_5\left(\frac{1}{625}\right) = -4$

9) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$ **10**) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$ **11**) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right) = -3$ **12**) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$

13) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$ **14**) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$ **15**) $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$ **16**) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$

17) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ **18**) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$ **19**) $\log_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1$ **20**) $\log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

21) $\log_2(1) = 0$ **22**) $\log_3(1) = 0$ **23**) $\log_4(1) = 0$ **24**) $\log_5(1) = 0$

25) $\log_2(2) = 1$ **26**) $\log_3(3) = 1$ **27**) $\log_4(4) = 1$ **28**) $\log_5(5) = 1$

29) $\log_2(4) = 2$ **30**) $\log_3(9) = 2$ **31**) $\log_4(16) = 2$ **32**) $\log_5(25) = 2$

33) $\log_2(8) = 3$ **34**) $\log_3(27) = 3$ **35**) $\log_4(64) = 3$ **36**) $\log_5(125) = 3$

37) $\log_2(16) = 4$ **38**) $\log_3(81) = 4$ **39**) $\log_4(256) = 4$ **40**) $\log_5(625) = 4$

41) $\log_2(32) = 5$ **42**) $\log_3(243) = 5$ **43**) $\log_4(1024) = 5$ **44**) $\log_5(3125) = 5$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando le seguenti formule

$$\log_\alpha(a \cdot b) = \log_\alpha(a) + \log_\alpha(b), \quad \log_\alpha\left(\frac{a}{b}\right) = \log_\alpha(a) - \log_\alpha(b).$$

1) $3\log_7(3) + 4\log_7(4) - 2\log_7(2)$

2) $3\log_7(3) + 4\log_7(2) - 2\log_7(4)$

3) $4\log_5(4) + 2\log_5(2) - 3\log_5(3)$

4) $2\log_2(4) + 4\log_2(3) - 3\log_2(2)$

5) $2\log_7(3) + 4\log_7(4) - 3\log_7(2)$

6) $2\log_9(2) + 3\log_9(4) - 4\log_9(3)$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando le seguenti formule

$$\log_\alpha(a \cdot b) = \log_\alpha(a) + \log_\alpha(b), \quad \log_\alpha\left(\frac{a}{b}\right) = \log_\alpha(a) - \log_\alpha(b).$$

1) $3\log_7(3) + 4\log_7(4) - 2\log_7(2) = \log_7(1728)$

2) $3\log_7(3) + 4\log_7(2) - 2\log_7(4) = \log_7(27)$

3) $4\log_5(4) + 2\log_5(2) - 3\log_5(3) = \log_5\left(\frac{1024}{27}\right)$

4) $2\log_2(4) + 4\log_2(3) - 3\log_2(2) = \log_2(162)$

5) $2\log_7(3) + 4\log_7(4) - 3\log_7(2) = \log_7(288)$

6) $2\log_9(2) + 3\log_9(4) - 4\log_9(3) = \log_9\left(\frac{256}{81}\right)$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando le seguenti formule

$$\log_\alpha(a) = \log_\alpha(\beta) \cdot \log_\beta(a), \quad \log_\alpha(a^x) = x \cdot \log_\alpha(a).$$

1) $3\log_8(9) \cdot \log_9(5)$

2) $2\log_9(5) \cdot \log_5(3)$

3) $2\log_6(5) \cdot \log_5(2)$

4) $3\log_2(2) \cdot \log_2(2)$

5) $2\log_8(8) \cdot \log_8(4)$

6) $3\log_9(3) \cdot \log_3(2)$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando le seguenti formule

$$\log_\alpha(a) = \log_\alpha(\beta) \cdot \log_\beta(a), \quad \log_\alpha(a^x) = x \cdot \log_\alpha(a).$$

1) $3\log_8(9) \cdot \log_9(5) = \log_8(125) = 3\log_8(5)$

2) $2\log_9(5) \cdot \log_5(3) = \log_9(9) = 1$

3) $2\log_6(5) \cdot \log_5(2) = \log_6(4)$

4) $3\log_2(2) \cdot \log_2(2) = \log_2(8) = 3$

5) $2\log_8(8) \cdot \log_8(4) = \log_8(16) = \dfrac{4}{3}$

6) $3\log_9(3) \cdot \log_3(2) = \log_9(8)$

Esempio

Semplifichiamo la seguente uguaglianza

$$\frac{\ln(8^7) - \ln(24^7)}{-\frac{7}{5}\left(\ln(14) - \ln(42)\right)}$$

procedendo come segue

$$\frac{\ln(8^7) - \ln(24^7)}{-\frac{7}{5}\left(\ln(14) - \ln(42)\right)} = \frac{7\ln\left(\frac{8}{24}\right)}{-\frac{7}{5}\ln\left(\frac{14}{42}\right)} = -5\,\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = -5.$$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{\ln(63^2)-\ln(18^2)}{\ln(14)-\ln(49)}$

2) $\dfrac{\ln(42^6)-\ln(18^6)}{-6\left(\ln(14)-\ln(6)\right)}$

3) $\dfrac{\ln(12^5)-\ln(48^5)}{\frac{5}{8}\left(\ln(16)-\ln(64)\right)}$

4) $\dfrac{\ln(12^{-4})-\ln(9^{-4})}{\ln(12)-\ln(16)}$

5) $\dfrac{\ln(27^3)-\ln(63^3)}{\frac{3}{2}\left(\ln(12)-\ln(28)\right)}$

6) $\dfrac{\ln(15^{-4})-\ln(21^{-4})}{-\frac{4}{3}\left(\ln(40)-\ln(56)\right)}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{\ln(63^2)-\ln(18^2)}{\ln(14)-\ln(49)}=-2$

2) $\dfrac{\ln(42^6)-\ln(18^6)}{-6\,(\ln(14)-\ln(6))}=-1$

3) $\dfrac{\ln(12^5)-\ln(48^5)}{\frac{5}{8}\,(\ln(16)-\ln(64))}=8$

4) $\dfrac{\ln(12^{-4})-\ln(9^{-4})}{\ln(12)-\ln(16)}=4$

5) $\dfrac{\ln(27^3)-\ln(63^3)}{\frac{3}{2}\,(\ln(12)-\ln(28))}=2$

6) $\dfrac{\ln(15^{-4})-\ln(21^{-4})}{-\frac{4}{3}\,(\ln(40)-\ln(56))}=3$

Sezione 9 Prodotti notevoli

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

1) $\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{8}\right)$

2) $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\right)$

3) $\left(4 - \frac{7}{5}\right)\left(4 + \frac{7}{5}\right)$

4) $\left(\frac{5}{9} - \frac{6}{7}\right)\left(\frac{5}{9} + \frac{6}{7}\right)$

5) $\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{5}\right)\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{5}\right)$

6) $\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

1) $\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{8}\right) = \frac{9}{4} - \frac{81}{64} = \frac{63}{64}$

2) $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{49}{64} - \frac{1}{4} = \frac{33}{64}$

3) $\left(4 - \frac{7}{5}\right)\left(4 + \frac{7}{5}\right) = 16 - \frac{49}{25} = \frac{351}{25}$

4) $\left(\frac{5}{9} - \frac{6}{7}\right)\left(\frac{5}{9} + \frac{6}{7}\right) = \frac{25}{81} - \frac{36}{49} = \frac{-1691}{3969}$

5) $\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{5}\right)\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{5}\right) = \frac{16}{9} - \frac{64}{25} = \frac{-176}{225}$

6) $\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{16}{9} = \frac{-55}{36}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

1) $\left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1\right)$

2) $\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)$

3) $\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{16}{25} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

4) $\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 - 1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right)$

5) $\left(1 + \frac{3}{5}\right)\left(1 - 1 \cdot \frac{3}{5} + \frac{9}{25}\right)$

6) $\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

1) $\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot 1+1\right)=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$

2) $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-1\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)=1+\frac{1}{64}=\frac{65}{64}$

3) $\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{16}{25}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{64}{125}+\frac{1}{8}=\frac{637}{1000}$

4) $\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-1\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\right)=1+\frac{1}{125}=\frac{126}{125}$

5) $\left(1+\frac{3}{5}\right)\left(1-1\cdot\frac{3}{5}+\frac{9}{25}\right)=1+\frac{27}{125}=\frac{152}{125}$

6) $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=1+\frac{1}{27}=\frac{28}{27}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

1) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

2) $\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{16}{9}\right)$

3) $\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1\right)$

4) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{9}{25} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right)$

5) $\left(\frac{1}{2} - 2\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 + 4\right)$

6) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{16}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{25}\right)$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

1) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{27}{8} - \frac{1}{8} = \frac{13}{4}$

2) $\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{16}{9}\right) = \frac{1}{64} - \frac{64}{27} = \frac{-4069}{1728}$

3) $\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1\right) = \frac{1}{8} - 1 = \frac{-7}{8}$

4) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{9}{25} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right) = \frac{27}{125} - \frac{1}{125} = \frac{26}{125}$

5) $\left(\frac{1}{2} - 2\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 + 4\right) = \frac{1}{8} - 8 = \frac{-63}{8}$

6) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{16}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{25}\right) = \frac{64}{125} - \frac{8}{125} = \frac{56}{125}$

Esempio

Scomponiamo due polinomi in prodotto di binomi:

$$\begin{aligned} x^2 - 6 &= x^2 - (\sqrt{6})^2 = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}), \\ x^4 - 36 &= (x^2)^2 - 6^2 = \left(x^2 - 6\right)\left(x^2 + 6\right) \\ &= \left(x^2 - (\sqrt{6})^2\right)(x^2 + 6) \\ &= (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(x^2 + 6). \end{aligned}$$

Esercizio

Scomporre come prodotto di binomi i seguenti polinomi.

1) $x^2 - 28$

2) $x^2 - 16$

3) $x^2 - 60$

4) $x^2 - 63$

5) $x^2 - 9$

6) $x^2 - 32$

Esercizio

Scomporre come prodotto di binomi i seguenti polinomi.

1) $x^2 - 28 = (x - 2\sqrt{7})(x + 2\sqrt{7})$

2) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

3) $x^2 - 60 = (x - 2\sqrt{15})(x + 2\sqrt{15})$

4) $x^2 - 63 = (x - 3\sqrt{7})(x + 3\sqrt{7})$

5) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

6) $x^2 - 32 = (x - 4\sqrt{2})(x + 4\sqrt{2})$

Esercizio

Scomporre come prodotto di binomi i seguenti polinomi.

1) $x^4 - 196$

2) $x^4 - 36$

3) $x^4 - 16$

4) $x^4 - 256$

5) $x^4 - 169$

6) $x^4 - 144$

Esercizio

Scomporre come prodotto di binomi i seguenti polinomi.

1) $x^4 - 196 = (x - \sqrt{14})(x + \sqrt{14})(x^2 + 14)$

2) $x^4 - 36 = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(x^2 + 6)$

3) $x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

4) $x^4 - 256 = (x - 4)(x + 4)(x^2 + 16)$

5) $x^4 - 169 = (x - \sqrt{13})(x + \sqrt{13})(x^2 + 13)$

6) $x^4 - 144 = (x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12})(x^2 + 12)$

Sezione 10 Potenze di binomi

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

dove

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

è il binomio di Newton, detto anche coefficiente binomiale. Si ricordi che

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è il fattoriale. Così ad esempio abbiamo

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1, \\ (a+b)^1 &= a+b, \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Il fatto che $0! = 1$ segue in maniera naturale dal seguente ragionamento. Sappiamo come costruire la seguente lista da sinistra verso destra partendo da $1! = 1$: basta moltiplicare prima per 2, poi per 3, poi per 4 e così via.

$$\begin{tikzcd}
0! =? & 1! = 1 \arrow[r, bend right, "\times 2"'] & 2! = 2 \arrow[r, bend right, "\times 3"'] & 3! = 6 \arrow[r, bend right, "\times 4"'] & 4! = 24
\end{tikzcd}$$

In realtà, dalla costruzione da sinistra verso destra segue anche la costruzione da destra verso sinistra: invece di moltiplicare basta dividere, ed è pertanto ovvio perché debba essere $0! = 1$.

$$\begin{tikzcd}
0! = 1 & 1! = 1 \arrow[l, bend left, "\div 1"] & 2! = 2 \arrow[l, bend left, "\div 2"] & 3! = 6 \arrow[l, bend left, "\div 3"] & 4! = 24 \arrow[l, bend left, "\div 4"]
\end{tikzcd}$$

Per ricordare i coefficienti si può utilizzare il triangolo di Tartaglia.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\[4pt]
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\[4pt]
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\[4pt]
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\[4pt]
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\[4pt]
1 \quad 1 \\[4pt]
1 \quad 2 \quad 1 \\[4pt]
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\[4pt]
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
\end{array}
$$

$$1 \qquad (a+b)^0 = 1,\ a+b \neq 0$$

$$1 \quad 1 \qquad (a+b)^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \qquad (a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \qquad (a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

1) $\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^2$

5) $(3)^2 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2$

6) $(3)^2 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

1) $\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}+\frac{6}{7}\right)^2 = \left(\frac{87}{28}\right)^2 = \frac{7569}{784}$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{18}{16}\right)^2 = \frac{324}{256}$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{121}{36}$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{13}{14}\right)^2 = \frac{169}{196}$

5) $(3)^2 + 2\cdot 3\cdot\frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \left(3+\frac{7}{3}\right)^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{256}{9}$

6) $(3)^2 + 2\cdot 3\cdot\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(3+\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{225}{16}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} + \left(\frac{7}{5}\right)^2$

2) $(3)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$

3) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

4) $\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

5) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$

6) $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5} + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}-\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{-11}{15}\right)^2 = \frac{121}{225}$

2) $(3)^2 - 2\cdot 3\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(3-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$

3) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 - 2\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{28}\right)^2 = \frac{169}{784}$

4) $\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 2\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{5}-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$

5) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{9}{18}\right)^2 = \frac{81}{324}$

6) $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = \frac{64}{16}$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3$

6) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3 = 1$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3 = 1$

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2197}{1728}$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{125}{216}$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{2197}{1728}$

6) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^3 = 1$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$

5) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3$

Esercizio

Semplificare le seguenti espressioni utilizzando la seguente formula

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^3 = 0$

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-27}{1000}$

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{-1}{8000}$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{-125}{1728}$

5) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{27}$

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

Esercizio

Espandere i seguenti quadrati utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

1) $(x-8)^2$

2) $(x+15)^2$

3) $(x+14)^2$

4) $(x-10)^2$

5) $(x+15)^2$

6) $(x-9)^2$

Esercizio

Espandere i seguenti quadrati utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

1) $(x-8)^2 = x^2 - 16\,x + 64$

2) $(x+15)^2 = x^2 + 30\,x + 225$

3) $(x+14)^2 = x^2 + 28\,x + 196$

4) $(x-10)^2 = x^2 - 20\,x + 100$

5) $(x+15)^2 = x^2 + 30\,x + 225$

6) $(x-9)^2 = x^2 - 18\,x + 81$

Esercizio

Espandere i seguenti cubi utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

1) $(x-1)^3$

2) $(x+1)^3$

3) $(x-8)^3$

4) $(x+10)^3$

5) $(x-8)^3$

6) $(x+6)^3$

Esercizio

Espandere i seguenti cubi utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

1) $(x-1)^3 = x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1$

2) $(x+1)^3 = x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1$

3) $(x-8)^3 = x^3 - 24\,x^2 + 192\,x - 512$

4) $(x+10)^3 = x^3 + 30\,x^2 + 300\,x + 1000$

5) $(x-8)^3 = x^3 - 24\,x^2 + 192\,x - 512$

6) $(x+6)^3 = x^3 + 18\,x^2 + 108\,x + 216$

Esercizio

Espandere le seguenti potenze di binomi utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

1) $(x-7)^4$

2) $(x+5)^4$

3) $(x+10)^4$

4) $(x+3)^4$

5) $(x+9)^4$

6) $(x-2)^4$

Esercizio

Espandere le seguenti potenze di binomi utilizzando la seguente formula

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$\mathbf{1})\ (x-7)^4 = x^4 - 28\,x^3 + 294\,x^2 - 1372\,x + 2401$

$\mathbf{2})\ (x+5)^4 = x^4 + 20\,x^3 + 150\,x^2 + 500\,x + 625$

$\mathbf{3})\ (x+10)^4 = x^4 + 40\,x^3 + 600\,x^2 + 4000\,x + 10000$

$\mathbf{4})\ (x+3)^4 = x^4 + 12\,x^3 + 54\,x^2 + 108\,x + 81$

$\mathbf{5})\ (x+9)^4 = x^4 + 36\,x^3 + 486\,x^2 + 2916\,x + 6561$

$\mathbf{6})\ (x-2)^4 = x^4 - 8\,x^3 + 24\,x^2 - 32\,x + 16$

Sezione 11 Divisione tra polinomi

Dati due polinomi

$$P_m(x) = a_m\, x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + a_1\, x + a_0,$$
$$P_n(x) = b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + b_1\, x + b_0,$$

di grado m ed n, con $m \geqslant n \geqslant 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ e a_m, b_n non nulli, si ha che

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)}$$

dove $P_{m-n}(x)$ e $P_r(x)$ sono *opportuni* polinomi di grado $m-n \geqslant 0$ ed $r < n$, detti polinomio quoziente e polinomio resto. Per calcolare $P_{m-n}(x)$ e $P_r(x)$ si procede come segue: si divide il monomio di grado più alto di $P_m(x)$ per il monomio di grado più alto di $P_n(x)$; si moltiplica il monomio così ottenuto per il polinomio divisore $P_n(x)$ e si sottrae il polinomio risultante dal dividendo $P_m(x)$ ottenendo così un nuovo polinomio $\widetilde{P}(x)$ di grado non superiore a $m-1$. Si itera l'operazione precedente con $\widetilde{P}(x)$ al posto di $P_m(x)$, finché il polinomio risultante dalla sottrazione non sarà di grado $r < n$ (si ricordi che una costante è un polinomio di grado zero). Quest'ultimo è il polinomio resto $P_r(x)$, mentre il polinomio quoziente $P_{m-n}(x)$ si ottiene sommando tutti i monomi ottenuti dalle operazioni di divisione. Se $P_r(x)$ è il polinomio identicamente nullo allora $P_m(x)$ è divisibile per $P_n(x)$.

Esempio

Dividiamo $P_4(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x$ per $P_2(x) = x^2 + 1$. In questo caso $m = 4$ e $n = 2$. Dividendo il monomio di grado più alto di $P_m(x)$, cioè $5x^4$, per il monomio di grado più alto di $P_n(x)$, cioè x^2, si ottiene $5x^2$. Moltiplicando il monomio così ottenuto, cioè $5x^2$, per il polinomio divisore $P_n(x)$ si ottiene $5x^4 + 5x^2$, e lo si sottrae dal dividendo $P_m(x)$ ottenendo così $\tilde{P}(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x$. Iteriamo l'operazione con $\tilde{P}(x)$ al posto di $P_m(x)$. Si ottiene così $P_{m-n}(x) = 5x^2+3x-5$, $P_r(x) = -x + 5$ e pertanto

$$\frac{5x^4 + 3x^3 + 2x}{x^2 + 1} = \left(5x^2 + 3x - 5\right) + \frac{5 - x}{x^2 + 1}.$$

Le operazioni fatte possono essere schematicamente rappresentate come segue.

$$\begin{array}{lllll|l}
+5x^4 & +3x^3 & & +2x & & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & & -5x^2 & & & 5x^2+3x-5 \\ \cline{1-5}
 & +3x^3 & -5x^2 & +2x & & \\
 & -3x^3 & & -3x & & \\ \cline{2-5}
 & & -5x^2 & -x & & \\
 & & +5x^2 & & +5 & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +5 &
\end{array}$$

Esempio

Per riscrivere la seguente espressione razionale

$$\frac{80\,x^4+12\,x^3+4\,x^2}{8\,x^2+2\,x+3}$$

come somma di un polinomio e di una funzione razionale propria basta osservare che

$$\begin{array}{rrrrr|r}
80\,x^4 & +12\,x^3 & +4\,x^2 & & & 8\,x^2+2\,x+3 \\ \cline{6-6}
-80x^4 & -20x^3 & -30x^2 & & & 10\,x^2-x+-3 \\ \cline{1-5}
0 & -8x^3 & -26x^2 & 0x & 0 & \\
 & 8x^3 & 2x^2 & 3x & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & -24x^2 & 3x & 0 & \\
 & & 24x^2 & 6x & 9 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 9x & 9 &
\end{array}$$

e quindi

$$\frac{80\,x^4+12\,x^3+4\,x^2}{8\,x^2+2\,x+3}=10\,x^2-x+-3+\frac{9\,x+9}{8\,x^2+2\,x+3}.$$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $$\frac{-42\,x^4-99\,x^3+20\,x^2+106\,x-16}{7\,x^2+6\,x-10}$$

2) $$\frac{-30\,x^4+70\,x^3-32\,x^2-3\,x+5}{6\,x^2-8\,x-4}$$

3) $$\frac{-3\,x^4-20\,x^3-14\,x^2+47\,x+25}{3\,x^2+8\,x+3}$$

4) $$\frac{-10\,x^4+49\,x^3+78\,x^2+50\,x+58}{10\,x^2+x+7}$$

5) $$\frac{-6\,x^4+18\,x^3-50\,x^2+54\,x-63}{2\,x^2-4\,x+8}$$

6) $$\frac{40\,x^4-26\,x^3-59\,x^2+42\,x-8}{5\,x^2-7\,x+1}$$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

$$\mathbf{1)}\ \frac{-42\,x^4-99\,x^3+20\,x^2+106\,x-16}{7\,x^2+6\,x-10}=-6\,x^2-9\,x+2+\frac{4\,x+4}{7\,x^2+6\,x-10}$$

$$\mathbf{2)}\ \frac{-30\,x^4+70\,x^3-32\,x^2-3\,x+5}{6\,x^2-8\,x-4}=-5\,x^2+5\,x-2+\frac{x-3}{6\,x^2-8\,x-4}$$

$$\mathbf{3)}\ \frac{-3\,x^4-20\,x^3-14\,x^2+47\,x+25}{3\,x^2+8\,x+3}=-x^2-4\,x+7+\frac{3\,x+4}{3\,x^2+8\,x+3}$$

$$\mathbf{4)}\ \frac{-10\,x^4+49\,x^3+78\,x^2+50\,x+58}{10\,x^2+x+7}=-x^2+5\,x+8+\frac{7\,x+2}{10\,x^2+x+7}$$

$$\mathbf{5)}\ \frac{-6\,x^4+18\,x^3-50\,x^2+54\,x-63}{2\,x^2-4\,x+8}=-3\,x^2+3\,x-7+\frac{2\,x-7}{2\,x^2-4\,x+8}$$

$$\mathbf{6)}\ \frac{40\,x^4-26\,x^3-59\,x^2+42\,x-8}{5\,x^2-7\,x+1}=8\,x^2+6\,x-5+\frac{x-3}{5\,x^2-7\,x+1}$$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $$\frac{8x^4+4x^3-x^2+4x-2}{7x^3+4x^2+3x-2}$$

2) $$\frac{5x^4+6x^3-7x^2-5x+3}{6x^3+9x^2-8x-1}$$

3) $$\frac{7x^4-9x^3+10x^2+6x-3}{4x^3+2x^2-7x+9}$$

4) $$\frac{6x^4-6x^3-9x^2+8x+2}{5x^3-2x^2-8x+8}$$

5) $$\frac{5x^4+10x^3-7x^2-10x+9}{4x^3-9x^2-10x-10}$$

6) $$\frac{2x^4+5x^3-2x^2-10x+1}{5x^3+10x^2+6x+6}$$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

$$\mathbf{1})\ \frac{8x^4+4x^3-x^2+4x-2}{7x^3+4x^2+3x-2}=\frac{8}{7}x-\frac{4}{49}+\frac{-\frac{201}{49}x^2+\frac{320}{49}x-\frac{106}{49}}{7x^3+4x^2+3x-2}$$

$$\mathbf{2})\ \frac{5x^4+6x^3-7x^2-5x+3}{6x^3+9x^2-8x-1}=\frac{5}{6}x-\frac{1}{4}+\frac{\frac{23}{12}x^2-\frac{37}{6}x+\frac{11}{4}}{6x^3+9x^2-8x-1}$$

$$\mathbf{3})\ \frac{7x^4-9x^3+10x^2+6x-3}{4x^3+2x^2-7x+9}=\frac{7}{4}x-\frac{25}{8}+\frac{\frac{57}{2}x^2-\frac{253}{8}x+\frac{201}{8}}{4x^3+2x^2-7x+9}$$

$$\mathbf{4})\ \frac{6x^4-6x^3-9x^2+8x+2}{5x^3-2x^2-8x+8}=\frac{6}{5}x-\frac{18}{25}+\frac{-\frac{21}{25}x^2-\frac{184}{25}x+\frac{194}{25}}{5x^3-2x^2-8x+8}$$

$$\mathbf{5})\ \frac{5x^4+10x^3-7x^2-10x+9}{4x^3-9x^2-10x-10}=\frac{5}{4}x+\frac{85}{16}+\frac{\frac{853}{16}x^2+\frac{445}{8}x+\frac{497}{8}}{4x^3-9x^2-10x-10}$$

$$\mathbf{6})\ \frac{2x^4+5x^3-2x^2-10x+1}{5x^3+10x^2+6x+6}=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}+\frac{-\frac{32}{5}x^2-\frac{68}{5}x-\frac{1}{5}}{5x^3+10x^2+6x+6}$$

Esempio

Per calcolare

$$\frac{81x^2 - 100y^2}{9x + 10y},$$

dividiamo considerando x come variabile ed y come parametro:

$$
\begin{array}{ccc|l}
+81x^2 & & -100y^2 & 9x+10y \\ \cline{4-4}
-81x^2 & -90xy & & 9x-10y \\ \cline{1-3}
0 & -90xy & -100y^2 & \\
 & +90xy & +100y^2 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Dunque $\frac{81x^2-100y^2}{9x+10y} = 9x - 10y$ e $81x^2 - 100y^2$ è divisibile per $9x + 10y$.
In alternativa, utilizzando i prodotti notevoli per decomporre il numeratore si ha $81x^2 - 100y^2 = (9x + 10y)(9x - 10y)$, da cui, semplificando, si ottiene subito il risultato già ottenuto.

Esempio

Per riscrivere la seguente espressione razionale

$$\frac{6x^3+6y^3}{x^2-xy+y^2}$$

come somma di un polinomio e di una funzione razionale propria considerando x come variabile ed y come parametro basta osservare che

$$\begin{array}{cccc|l}
+6x^3 & & & +6y^3 & x^2-xy+y^2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +6x^2y & -6xy^2 & & 6x+6y \\ \cline{1-4}
0 & +6x^2y & -6xy^2 & +6y^3 & \\
 & -6x^2y & +6xy^2 & -6y^3 & \\ \cline{2-4}
 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

e quindi $\frac{6x^3+6y^3}{x^2-xy+y^2} = 6(x+y)$.

In particolare $6x^3+6y^3$ è divisibile per x^2-xy+y^2. In alternativa, utilizzando i prodotti notevoli per decomporre il numeratore si ha $6x^3+6y^3 = 6(x^3+y^3) = 6(x+y)(x^2-xy+y^2)$, da cui, semplificando, si ottiene il risultato già ottenuto.

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $$\frac{9x^3 - 6x^2y - 5xy^2 - y^3}{6x^2 + 6xy + 8y^2}$$

2) $$\frac{5x^3 + 7x^2y + 4xy^2 - 5y^3}{7x^2 - xy + 7y^2}$$

3) $$\frac{6x^3 - 9x^2y - 8xy^2 - 3y^3}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

4) $$\frac{10x^3 - 6x^2y + 5xy^2 + y^3}{8x^2 + 8xy - y^2}$$

5) $$\frac{10x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + 9y^3}{3x^2 - 10xy - y^2}$$

6) $$\frac{5x^3 + 6x^2y - 4xy^2 - 2y^3}{10x^2 - 7xy - 4y^2}$$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $$\frac{9x^3-6x^2y-5xy^2-y^3}{6x^2+6xy+8y^2}=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{-2xy^2+19y^3}{6x^2+6xy+8y^2}$$

2) $$\frac{5x^3+7x^2y+4xy^2-5y^3}{7x^2-xy+7y^2}=\frac{5}{7}x+\frac{54}{49}y+\frac{\frac{5}{49}xy^2-\frac{89}{7}y^3}{7x^2-xy+7y^2}$$

3) $$\frac{6x^3-9x^2y-8xy^2-3y^3}{x^2+2xy+3y^2}=6x-21y+\frac{16xy^2+60y^3}{x^2+2xy+3y^2}$$

4) $$\frac{10x^3-6x^2y+5xy^2+y^3}{8x^2+8xy-y^2}=\frac{5}{4}x-2y+\frac{\frac{89}{4}xy^2-y^3}{8x^2+8xy-y^2}$$

5) $$\frac{10x^3+3x^2y-4xy^2+9y^3}{3x^2-10xy-y^2}=\frac{10}{3}x+\frac{109}{9}y+\frac{\frac{1084}{9}xy^2+\frac{190}{9}y^3}{3x^2-10xy-y^2}$$

6) $$\frac{5x^3+6x^2y-4xy^2-2y^3}{10x^2-7xy-4y^2}=\frac{1}{2}x+\frac{19}{20}y+\frac{\frac{93}{20}xy^2+\frac{9}{5}y^3}{10x^2-7xy-4y^2}$$

Sezione 12 Divisione di un polinomio per un binomio

Sia $n \in \mathbb{N}$. Dato un polinomio

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0$ (quindi $A(x)$ ha grado n) ed un binomio

$$B(x) = x - b,$$

si può applicare la regola di Ruffini per ottenere il polinomio quoziente

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k = q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \cdots + q_1 x + q_0,$$

ed il resto r che è un termine costante (nullo se $A(x)$ è divisibile per $B(x)$), tali che

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + r.$$

Per dividere $A(x)$ per $B(x)$ si procede come segue:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\
b & & q_{n-1} \cdot b & \dots & q_1 \cdot b & q_0 \cdot b \\
\hline
 & \underbrace{a_n}_{q_{n-1}} & \underbrace{a_{n-1} + q_{n-1} \cdot b}_{q_{n-2}} & \dots & \underbrace{a_1 + q_1 \cdot b}_{q_0} & \underbrace{a_0 + q_0 \cdot b}_{r}
\end{array}
$$

In tal caso

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + r.$$

Se $A(b) = 0$, allora $A(x)$ è divisibile per $B(x)$, $r = 0$ e quindi $A(x) = Q(x) \cdot B(x)$.

Esempio

Dividiamo $A(x) = 5x^4 + 3x^3 + x$ per $B(x) = x + 1$ utilizzando la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & & -5 & 2 & -2 & 1 \\ \hline & 5 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}$$

e pertanto

$$5x^4 + 3x^3 + x = (5x^3 - 2x^2 + 2x - 1)(x + 1) + 1.$$

Esempio

Osserviamo che

$$\frac{9\,x^4+80\,x^3+58\,x^2-41\,x+59}{x+8}=9\,x^3+8\,x^2-6\,x+7+\frac{3}{x+8}$$

in quanto

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 9 & 80 & 58 & -41 & 59 \\ -8 & & -72 & -64 & 48 & -56 \\ \hline & 9 & 8 & -6 & 7 & 3 \end{array}$$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $$\frac{-3\,x^4-25\,x^3-33\,x^2+53\,x-4}{x+6}$$

2) $$\frac{3\,x^4-15\,x^3-73\,x^2+16\,x-72}{x-8}$$

3) $$\frac{6\,x^4-52\,x^3-19\,x^2+12\,x-32}{x-9}$$

4) $$\frac{7\,x^4+67\,x^3-21\,x^2+85\,x-55}{x+10}$$

5) $$\frac{-9\,x^4-37\,x^3-40\,x^2-35\,x-14}{x+3}$$

6) $$\frac{-10\,x^4-78\,x^3+12\,x^2-22\,x+71}{x+8}$$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $$\frac{-3\,x^4-25\,x^3-33\,x^2+53\,x-4}{x+6}=-3\,x^3-7\,x^2+9\,x-1+\frac{2}{x+6}$$

2) $$\frac{3\,x^4-15\,x^3-73\,x^2+16\,x-72}{x-8}=3\,x^3+9\,x^2-x+8+\frac{8}{x-8}$$

3) $$\frac{6\,x^4-52\,x^3-19\,x^2+12\,x-32}{x-9}=6\,x^3+2\,x^2-x+3+\frac{5}{x-9}$$

4) $$\frac{7\,x^4+67\,x^3-21\,x^2+85\,x-55}{x+10}=7\,x^3-3\,x^2+9\,x-5+\frac{5}{x+10}$$

5) $$\frac{-9\,x^4-37\,x^3-40\,x^2-35\,x-14}{x+3}=-9\,x^3-10\,x^2-10\,x-5+\frac{1}{x+3}$$

6) $$\frac{-10\,x^4-78\,x^3+12\,x^2-22\,x+71}{x+8}=-10\,x^3+2\,x^2-4\,x+10+\frac{9}{x+8}$$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $\dfrac{9x^3+7x^2+8x-8}{x+10}$

2) $\dfrac{7x^3-5x^2-3x-2}{x+8}$

3) $\dfrac{4x^3+10x^2+4x-8}{x-3}$

4) $\dfrac{9x^3+5x^2-5x-9}{x+9}$

5) $\dfrac{6x^3+3x^2-7x+9}{x+6}$

6) $\dfrac{5x^3+3x^2-x+8}{x+8}$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $\dfrac{9x^3+7x^2+8x-8}{x+10} = 9x^2-83x+838-\dfrac{8388}{x+10}$

2) $\dfrac{7x^3-5x^2-3x-2}{x+8} = 7x^2-61x+485-\dfrac{3882}{x+8}$

3) $\dfrac{4x^3+10x^2+4x-8}{x-3} = 4x^2+22x+70+\dfrac{202}{x-3}$

4) $\dfrac{9x^3+5x^2-5x-9}{x+9} = 9x^2-76x+679-\dfrac{6120}{x+9}$

5) $\dfrac{6x^3+3x^2-7x+9}{x+6} = 6x^2-33x+191-\dfrac{1137}{x+6}$

6) $\dfrac{5x^3+3x^2-x+8}{x+8} = 5x^2-37x+295-\dfrac{2352}{x+8}$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

1) $\dfrac{5x^2 - 4x - 7}{x+5}$

2) $\dfrac{4x^2 - 2x + 2}{x-4}$

3) $\dfrac{5x^2 + 3x + 8}{x-4}$

4) $\dfrac{8x^2 + 5x + 10}{x-8}$

5) $\dfrac{3x^2 + x + 5}{x-9}$

6) $\dfrac{10x^2 - 6x + 1}{x+5}$

Esercizio

Calcolare quoziente e resto.

$$\mathbf{1})\ \frac{5x^2-4x-7}{x+5}=5x-29+\frac{138}{x+5}$$

$$\mathbf{2})\ \frac{4x^2-2x+2}{x-4}=4x+14+\frac{58}{x-4}$$

$$\mathbf{3})\ \frac{5x^2+3x+8}{x-4}=5x+23+\frac{100}{x-4}$$

$$\mathbf{4})\ \frac{8x^2+5x+10}{x-8}=8x+69+\frac{562}{x-8}$$

$$\mathbf{5})\ \frac{3x^2+x+5}{x-9}=3x+28+\frac{257}{x-9}$$

$$\mathbf{6})\ \frac{10x^2-6x+1}{x+5}=10x-56+\frac{281}{x+5}$$

TUTTO CHIARO?