Definizione

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ (matrici quadrate di ordine n).
A è **simile** a B quando esiste una matrice N non singolare tale che

$$N^{-1}BN = A$$

o equivalentemente $BN = NA$ o $N^{-1}B = AN^{-1}$.
Quando A è simile a B, si scrive $A \sim B$.

Esempio.
Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile. Allora la matrice $A = N^{-1}BN$ è simile ad B:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{N} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

La relazione di similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza nell'insieme $\mathcal{M}_n(K)$.

Infatti valgono le seguenti proprietà:

- **Riflessiva**: A è simile a se stessa: $A = I^{-1}AI$.
- **Simmetrica**: se $A \sim B$, allora esiste N invertibile tale che $A = N^{-1}BN$; segue che

  $$N^{-1}BN = A \Leftrightarrow NN^{-1}BNN^{-1} = NAN^{-1} \Leftrightarrow B = NAN^{-1} = (N^{-1})^{-1}AN^{-1}$$

  Dunque $B \sim A$.
- **Transitiva**: se $A \sim B$ e $B \sim C$ esistono matrici invertibili N ed M tali che

  $$A = N^{-1}BN \qquad B = M^{-1}CM$$

  Dunque si ha

  $$A = N^{-1}BN = N^{-1}(M^{-1}CM)N = (MN)^{-1}C(MN)$$

  e quindi $A \sim C$.

Data una matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, la sua **classe di equivalenza** è data da

$$[A]_\sim = \{B \in \mathcal{M}_n(K) : B \sim A\}$$

Teorema

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$.
$A \sim B \Leftrightarrow$ esistono V spazio vettoriale su K di dimensione n, $f : V \to V$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V tali che $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$

$\Rightarrow$ Siano A e B simili. Allora esiste N non singolare tale che $B = N^{-1}AN$.
Siano $V = K^n$ e $f : K^n \to K^n$ la funzione lineare associata a A rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ di K^n, ossia $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$. Allora se si indica con $\mathcal{B}'$ la base formata dalle colonne di N, si ha $N = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}}(i_V)$.
Allora, poichè la rappresentazione di f rispetto alla base $\mathcal{B}'$ si ottiene da:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'}(i_V) M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}}(i_V) = N^{-1}AN = B$$

segue che $B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$.
$\Leftarrow$ Se viceversa esistono V spazio vettoriale su K, $f : V \to V$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V tali che $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$, allora vale che

$$B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V) A M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_V)$$

Poichè $N = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(i_V)$ è invertibile con inversa $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(i_V)$ allora A e B sono simili.

Osservazione: La classe di equivalenza di A è l'insieme di tutte le matrici che rappresentano lo stesso endomorfismo di K^n rispetto ad ogni possibile base.

Il teorema precedente suggerisce che per studiare le proprietà di un endoformismo, è sufficiente studiare la classe di equivalenza delle matrici che rappresentano l'endomorfismo rispetto a ogni possibile base.
Per questo studiamo le propietà di matrici simili.

Proprietà delle matrici simili I

1. **Se $A \sim B$, allora A e B hanno uguale determinante.**
   Infatti se $A \sim B$, esiste N invertibile tale che $A = N^{-1}BN$.
   Passando ai determinanti e applicando il teorema di Binet (sono matrici quadrate):

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(N^{-1}BN) = \det(N^{-1})\det(B)\det(N) = \det(N^{-1}N)\det(B) \\ &= \det(I)\det(B) = \det(B)\end{aligned}$$

2. Si ricorda che la **traccia di una matrice** è la somma dei suoi elementi diagonali:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

   Per ogni $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ e $\alpha \in K$, vale che
   - $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
   - $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$
   - $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$
   - $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA)$$

Se $A \sim B$, allora $\mathbf{tr}(A) = \mathbf{tr}(B)$.
Infatti se $A \sim B$, esiste N invertibile tale che $A = N^{-1}BN$; dunque

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(N^{-1}BN) = \mathrm{tr}(NN^{-1}B) = \mathrm{tr}(B)$$

3. **Se $A \sim B$, allora $r(A) = r(B)$.**
   Infatti se $A \sim B$, esiste una applicazione lineare $f : V \to V$ e due basi $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ tali che
   $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = [f(v_1)_{\mathcal{B}}, \dots, f(v_n)_{\mathcal{B}}]$ e
   $B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = [f(w_1)_{\mathcal{B}'}, \dots, f(w_n)_{\mathcal{B}'}]$.
   Poichè $\dim(\mathrm{Imm}(f))$ è invariante rispetto alla base scelta ed è uguale sia a $r(A)$ che a $r(B)$, segue $r(A) = r(B)$.

Dunque se A e B sono simili hanno uguale determinante, traccia e rango.

Non vale il viceversa.
Infatti, date $A = I_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, le due matrici hanno stesso determinante, traccia e rango, ma non sono simili, poichè l'unica matrice simile a I_2 è I_2 stessa ($N^{-1}I_2N = I_2$ per ogni N invertibile).

Definizione

Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
$\lambda \in K$ è autovalore di A se esiste un vettore $x \in K^n$, $x \neq 0$, tale che

$$Ax = \lambda x$$

Ciò equivale a $f_A(x) = \lambda x$, se f_A è l'endomorfismo $K^n \to K^n$ associato ad A rispetto alla base canonica.

Nella pratica, un autovettore è un vettore x per cui il prodotto di A per x vale un multiplo o sottomultiplo di x stesso, ossia x e Ax generano lo stesso sottospazio di K^n. Nella definizione si richiede $x \neq 0$, altrimenti ogni scalare sarebbe autovettore: $A\,0 = \lambda 0$, per ogni $\lambda \neq 0$.

Osservazione.
Lo scalare $0 \in K$ può essere autovalore di A. Infatti $0 \in K$ è autovalore di $A \Leftrightarrow$ esiste $x \neq 0$ tale che $Ax = 0x \Leftrightarrow \ker(A) \neq \{0\}$ ($\Leftrightarrow$ l'endomorfismo associato ad A non è iniettivo).

Ci poniamo ora il **problema della diagonalizzazione** di una matrice.
Esso è strettamente connesso alla determinazione di autovalori e autovettori di una matrice.
Si dice che una matrice A è **diagonalizzabile** se esiste una matrice N tale che $D = N^{-1}AN$, con D diagonale, o equivalentemente $ND = AN$.
Equivalentemente, A è diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale D.

Una matrice A di ordine n è diagonalizzabile se esiste una base di elementi $\{N^1, ..., N^n\}$ di K^n (autovettori di A) tale che l'applicazione lineare associata $f_A : K^n \to K^n$ rispetto a tale base è rappresentata da una matrice diagonale, ossia

$$AN^1 = \lambda_1 N^1 \quad ... \quad AN^n = \lambda_n N^n$$

$$A[N^1 \ N^2 \ .... \ N^n] = [\lambda_1 N^1 \ \lambda_2 N^2 \ .... \ \lambda_n N^n] \Leftrightarrow AN = ND$$

A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale, ossia se e solo se A è simile a una matrice diagonale.
N è la matrice che diagonalizza A.

In altre parole:
A è diagonalizzabile (oppure f è diagonalizzabile) se e solo se la classe di equivalenza di $[A]_\sim$ contiene almeno una matrice diagonale.

Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
A è diagonalizzabile (ossia A è simile a una matrice diagonale D) se e solo se esiste una base $\{N^1, ..., N^n\}$ di K^n formata da autovettori di A.
Gli elementi diagonali di D si dicono autovalori di A. Se N è la matrice le cui colonne sono gli autovettori, allora $D = N^{-1}AN$.
Vale che

$$AN = ND \qquad A = NDN^{-1}$$

L'ultima uguaglianza si dice **decomposizione spettrale** di A.

Dunque per vedere se una matrice è diagonalizzabile dobbiamo cercare autovalori e autovettori.

Definizione di V_λ

- Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ e sia $\lambda \in K$.
  $V_\lambda = \{v \in K^n : Av = \lambda v\}$ è un sottoinsieme di K^n dato da tutti gli autovettori associati all'autovalore λ.

Teorema

V_λ è un sottospazio di K^n.
Se λ è autovalore di A, V_λ si dice **autospazio** di A.

Dimostrazione.
Infatti presi $v_1, v_2 \in V_\lambda$ e $c \in K$, si ha che $Av_1 = \lambda v_1$ e $Av_2 = \lambda v_2$. Occorre mostrare che $cv_1 - v_2$ è un elemento di V_λ. Infatti si ha

$$A(cv_1 - v_2) = cAv_1 - Av_2 = c\lambda v_1 - \lambda v_2 = \lambda(cv_1 - v_2)$$

Dunque $cv_1 - v_2 \in V_\lambda$.

- λ è autovalore di A (o di f) se e solo se $V_\lambda \neq \{0\}$.
- La dimensione di V_λ è maggiore o uguale a 1.
- Se 0 è autovalore di A, $V_0 = \{v \in K^n : Av = 0v\} = \{v \in K^n : Av = 0\} = \ker(A)$

Teorema

Sia A una matrice quadrata.
Un vettore v **non** può essere autovettore di A **associato a due autovalori distinti**.

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che v sia un autovettore di A associato a due autovalori λ_1 e λ_2, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ossia $Av = \lambda_1 v$ e $Av = \lambda_2 v$. Allora

$$0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2) v$$

con $v \neq 0$. Dunque $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, da cui $\lambda_1 = \lambda_2$.

Pertanto autospazi associati ad autovalori distinti hanno intersezione dato dal solo vettore nullo:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$$

Teorema

Autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
In altre parole, se $v_1, \ldots, v_m$ sono autovettori di A associati a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a due a due distinti, allora i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono **linearmente indipendenti**.

Dimostrazione.
Si dimostra per induzione su m.

- Se $m = 1$, v_1 è linearmente indipendente perchè è non nullo.
- Supponiamo che la proprietà sia vera per $m - 1$ ($v_1, \ldots, v_{m-1}$ associati a $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ a due a due distinti sono linearmente indipendenti) e lo dimostriamo per m.
  Si consideri
  $$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$$
  Applicando A ad ambo i membri si ottiene:
  $$A(a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m) = A(0) = 0$$
  $$a_1 A v_1 + \ldots + a_m A v_m = 0$$
  $$a_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + a_m \lambda_m v_m = 0$$

Se si moltiplica $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$ per λ_m e si sottrae il risultato dall'ultima equazione, si ottiene:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + a_m \lambda_m v_m - \lambda_m (a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m) = 0$$

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + \ldots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_{m-1} + a_m \underbrace{(\lambda_m - \lambda_m)}_{=0} \cdot v_m = 0$$

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + \ldots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_{m-1} = 0$$

Siccome per ipotesi induttiva $v_1, .., v_{m-1}$ sono linearmente indipendenti e $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$, $i = 1, \ldots, m-1$, segue

$$a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$$

Segue allora da

$$\underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_{m-1} v_{m-1}}_{=0} + a_m v_m = 0$$

che $a_m = 0$ perchè $v_m \neq 0$.

In K^n si hanno al massimo n vettori linearmente indipendenti.
Di conseguenza, **una matrice di ordine n non può avere più di n autovalori distinti.**

Conseguenza

Sia A una matrice di ordine n. **Se A ha n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.**

Questo è un primo criterio perchè una matrice sia diagonalizzabile. Infatti in tal caso esistono n autovettori di A linearmente indipendenti che formano una matrice N. Dunque si ha $AN = DN$, ove D è la matrice diagonale degli n autovalori distinti.

Non è vero il contrario.
Per esempio l'identità di ordine 2 è diagonalizzabile ma ha due autovalori uguali.

Determinare autovalori e autospazi di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

λ è **autovalore** di A se e solo se esiste $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$ tale che $Ax = \lambda x$.
Ciò equivale a dire che esiste $(x_1, x_2)^T \neq (0,0)^T$ tale che

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + (\lambda - 2)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0$$

Il sistema deve avere soluzioni non banali e dunque il determinante della matrice deve essere **nullo**:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1, \lambda = 4$$

Esempio II

Dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.

Si determina l'autospazio V_{-1} relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = -x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = -x_2 \end{array}$$

$$V_{-1} = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : -2x_1 - 2x_2 = 0; -3x_1 - 3x_2 = 0\} = \{(x_1, -x_1)^T\} = [(1, -1)^T]$$

In modo analogo, per $\lambda_2 = 4$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4x_2 \end{array}$$

$$V_4 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0; -3x_1 + 2x_2 = 0\} = \{(x_1, \frac{3}{2}x_1)^T\} = [(2, 3)^T]$$

Poichè A di ordine 2 ha due autovalori distinti, essa è diagonalizzabile. In particolare, $\mathcal{B}' = \{(1, -1)^T, (2, 3)^T\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A che la rendono diagonale attraverso la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = N^{-1}AN \Leftrightarrow AN = ND$$

Esempio III

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

Formalizziamo l'esempio.

Definizioni

Si dice **matrice caratteristica** di A la matrice $\lambda I - A$, con I identità di ordine n e λ una indeterminata (incognita).
Si dice **polinomio caratteristico** di A il determinante di $\lambda I - A$ e si indica con $\Delta_A(\lambda) = |\lambda I - A|$.
Si dice **equazione caratteristica** di A l'equazione $\Delta_A(\lambda) = 0$.

Se A è una matrice di ordine n, allora

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \dots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

E' facile mostrare che il polinomio caratteristico $\Delta_A(\lambda)$:

- ha grado n
- è monico: il coefficiente di λ^n è 1
- il coefficiente di λ^{n-1} è $-\mathrm{tr}(A)$
- il termine noto è $(-1)^n|A|$

$$\lambda^n - \mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n|A|$$

Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
$\lambda \in K$ è autovalore di A se e solo se è soluzione del'equazione caratteristica di A:

$$\Delta_A(\lambda) = 0$$

Dimostrazione.
Lo scalare $\lambda \in K$ è autovalore di $A \Leftrightarrow$ esiste $x \in K^n$, $x \neq 0$, tale che $Ax = \lambda x \Leftrightarrow$
esiste $x \in K^n$, $x \neq 0$, tale che $(\lambda I - A)x = 0 \Leftrightarrow$
il sistema lineare associato ad $\lambda I - A$ ammette soluzione non banale $\Leftrightarrow$
$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow \Delta_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ è soluzione dell'equazione caratteristica di A.

Se λ è **autovalore** di A, allora si ha che

$$V_\lambda = \{x \in K^n : Ax = \lambda x\} = \{x \in K^n : (A - \lambda I)x = 0\}$$

ossia l'**autospazio** V_λ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice caratteristica $\lambda I - A$.

Determinare autovalori e autospazi di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Consideriamo l'equazione caratteristica di A, cioè $\Delta_A(\lambda) = 0$:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Le soluzioni di $\Delta_A(\lambda) = 0$, ossia di $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ sono gli autovalori di A. Dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.
Si determina V_{-1}. Occorre risolvere il sistema lineare omogeneo $(-1I - A)x = 0$:

$$V_{-1} = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : -2x_1 - 2x_2 = 0; -3x_1 - 3x_2 = 0\} = \{(x_1, -x_1)^T\} = [(1, -1)^T]$$

ove la matrice dei coefficienti è stata ottenuta sostituendo a λ il valore -1 nella matrice caratteristica di A.
In modo analogo, si ha:

$$V_4 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0; -3x_1 + 2x_2 = 0\} = \{(x_1, \frac{3}{2}x_1)^T\} = [(2, 3)^T]$$

Teorema

Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è radice del suo polinomio caratteristico, cioè $\Delta_A(A) = 0$.

Dimostrazione.

Si fornisce la dimostrazione nel caso in cui A è diagonalizzabile.

Sia $A \in M_n(K)$ una matrice diagonalizzabile e siano $v_1, ..., v_n$ una base di K^n formata da autovettori di A. Indicati con $\lambda_1, ..., \lambda_n$ i corrispondenti autovalori, si ha:

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_n) \qquad \Delta_A(\lambda) \in P_n(\mathbb{R})$$

e quindi

$$\Delta_A(A) = (A - \lambda_1 I)...(A - \lambda_n I)$$

Poichè in questo caso i prodotti commutano (ossia $(A - \lambda_j I)(A - \lambda_i I) = (A - \lambda_i I)(A - \lambda_j I)$), si ha che per ogni autovettore v_i vale

$$\Delta_A(A)v_i = (A - \lambda_1 I)...(A - \lambda_n I)v_i = (A - \lambda_1 I)...(A - \lambda_n I)(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

perchè $Av_i = \lambda_i v_i$, per $i = 1, ...n$. Questo accade per ogni $i = 1, ..., n$.

Pertanto detta $N = [v_1, \ ..., v_n]$ la matrice non singolare avente per colonne gli autovettori $v_1, ..., v_n$, si ha che

$$\Delta_A(A)[v_1 \ ...v_n] = \Delta_A(A)N = 0 \Rightarrow \Delta_A(A) = 0$$

Teorema

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$.
Se $A \sim B$ allora $\Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$.

Dimostrazione.
Se $A \sim B$, esiste una matrice invertibile $N \in \mathcal{M}_n(K)$ tale che $A = N^{-1}BN$. Allora

$$\begin{aligned}\Delta_A(\lambda) &= |\lambda I - A| = |\lambda I - N^{-1}BN| = |\lambda N^{-1}N - N^{-1}BN| = |N^{-1}\lambda IN - N^{-1}BN| \\ &= |N^{-1}(\lambda I - B)N| = |N^{-1}||\lambda I - B||N| = |N^{-1}N||\lambda I - B| = \Delta_B(\lambda)\end{aligned}$$

Osservazione.
Le matrici $A = I_2$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico ma, come già osservato non sono simili. Quindi la conclusione del teorema non si può invertire.

Definizione

Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
Si dice **molteplicità algebrica** dell'autovalore λ_i la molteplicità di λ_i in quanto soluzione dell'equazione caratteristica di A.
Si dice che λ_i ha molteplicità h se $\Delta_A(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - \lambda_i)^h$ ma non è divisibile per $(\lambda - \lambda_i)^{h+1}$.

Si dice **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ_i la dimensione dell'autospazio V_{λ_i}.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + 4x_3)^T$. Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica, autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

Molteplicità algebrica di $\lambda_1 = 1$ è 2.
Molteplicità algebrica di $\lambda_2 = 4$ è 1.

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x_1, x_2, x_3)^T : -x_1 - 3x_3 = 0\} = \\ &= \{(-3x_3, x_2, x_3)^T\} = \\ &= [(0, 1, 0)^T, (-3, 0, 1)^T] \end{aligned}$$

Molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 1$ è 2.

Analogamente

$$\begin{aligned} V_4 &= \{(x_1, x_2, x_3)^T : 3x_1 = 0, 3x_2 = 0, -x_1 = 0\} = \\ &= \{(0, 0, x_3)^T\} = [(0, 0, 1)^T] \end{aligned}$$

Molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 4$ è 1.

Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
Sia λ_i un autovalore di A. Allora la molteplicità algebrica di λ_i è **maggiore o uguale** alla molteplicità geometrica di λ_i.

Dimostrazione.
Sia λ_i un autovalore di A e sia f_A l'endomorfismo associato ad A; siano
$h =$ molteplicità geometrica di λ_i
$\bar{h} =$ molteplicità algebrica di λ_i
Occorre provare che $h \leq \bar{h}$.

La dimensione di V_{λ_i} vale h. Dunque esistono h vettori $v_1, ..., v_h$ che formano una base di V_{λ_i}. E' sempre possibile trovare altri $n - h$ vettori di $\mathbb{R}^n$, $v_{h+1}, ..., v_n$ che insieme ai precedenti formano una base di $\mathbb{R}^n$.

Si può allora scrivere che:

$$
\begin{aligned}
Av_1 &= \lambda_i v_1 \\
\ldots \\
Av_h &= \lambda_i v_h \\
Av_{h+1} &= c_{1,h+1} v_1 + \ldots + c_{h,h+1} v_h + c_{h+1h+1} v_{h+1} + \ldots + c_{nh+1} v_n \\
\ldots \\
Av_n &= c_{1,n} v_1 + \ldots + c_{h,n} v_h + c_{h+1n} v_{h+1} + \ldots + c_{nn} v_n
\end{aligned}
$$

Se N è la matrice le cui colonne sono $v_1, v_2, \ldots, v_h, v_{h+1}, \ldots, v_n$, si può scrivere:

$$A\underbrace{[v_1, v_2, \ldots, v_h, v_{h+1}, \ldots, v_n]}_{N} =$$

$$= \underbrace{[v_1, v_2, \ldots, v_h, v_{h+1}, \ldots, v_n]}_{N} \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & c_{1h+1} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & c_{2h+1} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & c_{hh+1} & \ldots & c_{hn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{h+1h+1} & \ldots & c_{h+1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{nh+1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AN = NB$$

o anche $N^{-1}AN = B$. Allora, poichè A e B sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico:

$$\Delta_A(\lambda) = |\lambda I - A| = |\lambda I - B| = (\lambda - \lambda_i)^h \Delta_{\overline{B}}(\lambda)$$

ove

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} c_{h+1h+1} & \ldots & c_{h+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{nh+1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Ne segue che la molteplicità algebrica è almeno h ed è **esattamente** h se λ_i non è soluzione di $\Delta_{\overline{B}}(\lambda) = 0$, mentre è **maggiore** di h se λ_i è soluzione anche di $\Delta_{\overline{B}}(\lambda) = 0$. Quindi $\bar{h} \geq h$.
La dimostrazione non dipende dalla base scelta, perchè cambiando base si ottiene una matrice simile, che ha lo stesso polinomio caratteristico.

Osservazione.
Se λ_i è un autovalore con molteplicità algebrica 1, allora anche la molteplicità geometrica è 1.

Il criterio di diagonalizzazione:

Teorema fondamentale della diagonalizzazione

Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
Allora A è **diagonalizzabile** $\Leftrightarrow$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è n e, per ogni autovalore, **la molteplicità algebrica e quella geometrica coincidono**.

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Sia A una matrice diagonalizzabile ($A = NDN^{-1}$) e siano λ_1,...λ_r gli autovalori distinti di A.
Poichè A è diagonalizzabile, esiste una base di K^n formata da autovettori di A (le colonne di N). Sia $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_{h_1}, ..., u_1, ..., u_{h_r}\}$ tale base, con
$v_1, ..., v_{h_1}$ vettori di $\mathcal{B}$ associati a λ_1
...
$u_1, ..., u_{h_r}$ vettori di $\mathcal{B}$ associati a λ_r
Poichè A è simile alla matrice diagonale D che sulla diagonale ha λ_1 replicato h_1 volte,...λ_r replicato h_r volte, segue che

$$\Delta_A(\lambda) = \Delta_D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{h_1} ...(\lambda - \lambda_r)^{h_r}$$

Pertanto la molteplicità algebrica di λ_1 è h_1,..., la molteplicità algebrica di λ_r è h_r e vale $h_1 + ... + h_r = n$.

Poichè $v_1, ...v_{h_1}$ sono linearmente indipendenti e appartengono a V_{λ_1}, la molteplicità geometrica di λ_1 è almeno h_1; poichè non può essere superiore a h_1, segue che h_1 è uguale sia alla molteplicità geometrica che a quella algebrica. Analogamente per gli altri autovalori.

$\Leftarrow$ Siano λ_1,...λ_r gli autovalori distinti di A aventi tutti molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica e siano $h_1, ..., h_r$ queste molteplicità. E'
$h_1 + h_2 + ... + h_r = n$.
Sia
$v_1, ..., v_{h_1}$ una base di V_{λ_1}
...
$u_1, ..., u_{h_r}$ una base di V_{λ_r}
Si dimostra che $N = (v_1, ..., v_{h_1}, ..., u_1, ..., u_{h_r})$ è una matrice non singolare. Basta provare che le colonne di N sono linearmente indipendenti.
Sia

$$\underbrace{a_1 v_1 + ... + a_{h_1} v_{h_1}}_{=z_1} + ... + \underbrace{b_1 u_1 + ... + b_{h_r} u_{h_r}}_{=z_r} = 0$$

La relazione si può riscrivere come:

$$z_1 + ... + z_r = 0$$

con

$$z_1 = a_1 v_1 + ... + a_{h_1} v_{h_1}, ..., z_r = b_1 u_1 + ... + b_{h_r} u_{h_r}$$

E' $z_i \in V_{\lambda_i}$, quindi z_i è un autovettore di A associato a λ_i oppure $z_i = 0$.
Necessariamente $z_1 = ... = z_r = 0$ altrimenti ci sarebbe uno z_j che si scrive come combinazione di autovettori associati ad autovalori distinti e autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
Segue che

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 v_1 + ... + a_{h_1} v_{h_1} = 0 \Rightarrow a_1 = 0, ..., a_{h_1} = 0 \\ ... & \\ z_r &= b_1 u_1 + ... + b_{h_r} u_{h_r} = 0 \Rightarrow b_1 = 0, ..., b_{h_r} = 0 \end{aligned}$$

Allora $\{v_1, ..., v_{h_1}, ..., u_1, ..., u_{h_r}\}$ e una base di K^n formata da autovettori di A.
Pertanto A è diagonalizzabile.

Una conseguenza è data al seguente teorema.

Teorema

Sia $K = \mathbb{C}$.
A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ per ogni autovalore, la molteplicità algebrica e quella geometrica coincidono.

Basta osservare che per il teorema fondamentale dell'algebra, ogni polinomio di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n zeri in $\mathbb{C}$. Nel caso di matrici di ordine n a coefficienti reali, occorre anche verificare che la somma delle molteplicità sia n.

- Dire se la seguente matrice è diagonalizzabile e in tal caso diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si determinano gli autovalori di A, risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)((\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4)$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 3)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica 1. Per vedere se A è diagonalizzabile è sufficiente vedere se la molteplicità geometrica di -2 è uguale a 2:

$$V_{-2} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : -4x - 2y = 0; -2x - y = 0; 0 = 0\} = \{(x, -2x, z)^T\}$$

Poichè la base di V_{-2} è data da $(1, -2, 0)^T$ e $(0, 0, 1)^T$, la dimensione di V_{-2} è 2. Ne consegue che A è diagonalizzabile.

Per diagonalizzarla è sufficiente trovare una base anche per V_3:

$$\begin{aligned} V_3 &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x-2y=0; -2x+4y=0; 5z=0\} \\ &= \{(2y,y,0)^T\} = [(2,1,0)^T] \end{aligned}$$

Pertanto la matrice che diagonalizza A è data da una base di $\mathbb{R}^3$ formata dagli autovettori di A:

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$N^{-1}AN = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Dire se la seguente matrice è diagonalizzabile e in tal caso diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si determinano gli autovalori di A, risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica 1. Per vedere se A è diagonalizzabile è sufficiente vedere se la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$ è uguale a 2:

$$V_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0; z = 0; 0 = 0\} = \{(x, x, 0)^T\}$$

Poichè la base di V_2 è data da $(1, 1, 0)^T$, la dimensione di V_2 è 1. Ne consegue che A non è diagonalizzabile.

- Dire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si determinano gli autovalori di A, risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Pertanto A come matrice a elementi in $\mathbb{R}$ non ha autovalori e quindi non è diagonalizzabile, mentre A come matrice a elementi in $\mathbb{C}$ ha due autovalori distinti, precisamente i e $-i$ ed è quindi diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice **simmetrica**.
Esiste una matrice non singolare $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale (con **elementi diagonali reali**).
Ciò equivale a dire che una matrice simmetrica di ordine n ha **sempre** n autovalori reali (contati con molteplicità) e n autovettori linearmente indipendenti, ossia

$$A = NDN^{-1} \quad \text{decomposizione spettrale}$$

Esempio.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1, x_1)^T$.
La matrice associata rispetto alla base canonica è simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 1) - \lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1, $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1, $\lambda_3 = -1$ con molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1.
La matrice è diagonalizzabile:

$$V_0 = \{(x, y, z)^T : -x - y - z = 0; -x = 0\} = \{x = 0; y = -z\} = [(0, 1, -1)^T]$$
$$V_2 = \{(x, y, z)^T : x - y - z = 0; -x + 2y = 0; -x + 2z = 0\} = \{y = z; x = 2z\} =$$
$$= [(2, 1, 1)^T]$$
$$V_{-1} = \{(x, y, z)^T : -2x - y - z = 0; -x - y = 0; -x - z = 0\} = \{y = z; x = -z\}$$

La matrice diagonalizzante è

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$