UN PO' DI TEORIA SUL RANGO DI UNA MATRICE

DEF Si chiama minore di ordine k di una matrice A il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata di ordine k.

LIN. DIP = linearmente dipendenti
LIN. INDIP = " indipendenti

TEO Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ con $m \leq n$. $\;_m\overset{n}{\boxed{A}}$

sono due modi equivalenti:
- Le m righe di A sono lin. dip. $\iff$ tutti i minori di ordine m sono nulli
- Le m righe di A sono lin. indip. $\iff$ $\exists$ un minore di ordine m di A che non sia nullo.

Analogamente per colonne.

DEF
- Il rango di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è pari al massimo ordine di un minore non nullo.
- Si definisce rango di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ la dimensione dello spazio vettoriale delle righe (o delle colonne) di A: $rg(A) = \dim\left(\begin{smallmatrix}\text{spazio}\\\text{righe}\end{smallmatrix}\right) = \dim\left(\begin{smallmatrix}\text{spazio}\\\text{colonne}\end{smallmatrix}\right)$

OSS Il rango viene anche chiamato caratteristica e si indica con:
$rg(A) = rank(A) = r(A) = c(A)$

OSS
- $r(A)$ è il n° massimo di righe o colonne di A linearmente indipendenti
- $r(A) \geq 0$
- $r(A) = 0 \iff A = 0$ matrice identicamente nulla
- Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow r(A) \leq \min(m,n)$
- $r(A) = r(A^T)$
- Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, allora $r(A) = n \iff \det(A) \neq 0$
- $\underbrace{r(I_n)}_{\text{rango della matrice identità di ordine } n} = n$

rango della matrice identità di ordine $n \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ogni riga/colonna è un vettore della base canonica, cioè un versore cartesiano.

TEO $r(A) = k \iff \exists$ un minore $|\bar{A}|$ di ordine k non nullo e ogni minore di ordine $k+1$ ottenuto orlando $\bar{A}$ o che contenga $\bar{A}$ è nullo.

- Si sfrutta il concetto di rango per determinare le dimensioni di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

$S = \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow$ costruisco la matrice A che ha per righe gli elementi di S

Allora la dimensione del sottospazio generato da S è uguale al rango di A cioè $\dim([S]) = rg(A)$

ESEMPIO (SLIDE) Sia $S = \{(1,2,-1,3),\ (2,1,4,7),\ (1,-1,5,4)\}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) \leq \min\{3,4\} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 - 18 + 9 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 11 - 22 + 11 = 0$$

Entrambi i minori di ordine 3 sono nulli $\Rightarrow rg(A) = 2$

Ma $rg(A) = \dim([S]) \Rightarrow \dim([S]) = 2$.

- Se $rg(A) = k$ e se il minore di ordine k è non nullo le k righe di A formano una base di $[S]$, perché sono lin. indip.

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_5\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_5 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = k$

minore di ordine k

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{matrix}} & \begin{matrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_{41} & s_{42} & s_{43} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} \end{matrix} & \begin{matrix} s_{44} \\ s_{55} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

ESEMPIO (SLIDE) La base dell'esempio precedente è data da 2 vettori
$\mathcal{B} = \{(1,2,-1,3),\ (2,1,4,7)\}$

- Per verificare che un vettore appartiene al sottospazio generato da S lo si aggiunge come ultima riga della matrice A.
Si ottiene quindi una nuova matrice B.
Il vettore appartiene al sottospazio iniziale se e solo se il rango della nuova matrice B è uguale alla dimensione di S.
In altre parole, il vettore che si aggiunge è combinazione lineare degli elementi della base di S.
(sulle slide: $A_{m+1} \in [S] \Leftrightarrow r(B) = k$, ossia $r(B) = \dim([S])$)

ESEMPIO (SLIDE) Verificare (dell'es. precedente) che $(3,3,3,10) \in [S]$

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}}^{\neq 0} & \begin{matrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 10 \end{matrix} \end{pmatrix} \Rightarrow rg(B) \geq 2$$

Tutti i minori di ordine 3 di B che contengono $\square$ sono nulli.
$\Rightarrow (3,3,3,10) \in [S]$ ✓