Ряды Фурье

Синусно-косинусное представление:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)]$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos(\omega_k t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \sin(\omega_k t)\, dt$$

Вспомнить про четность функций

Можно перейти от суммы к произведению и ввести фазу

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

Комплексное представление

Заменив синус и косинус на их комплексное представление, можно получить

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}$$

$$C_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$$C_k = C_{-k}^*$$

Преобразование Фурье и непериодические сигналы

Ряд Фурье последовательности прямоугольных импульсов, увеличиваем период и переходим от ряда Фурье к интегралу Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt$$

Обратное преобразование

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

В общем случае $S(\omega)$ комплексная величина, и действительная часть отражает амплитудный спектр, а мнимая часть фазовый спектр

Свойства преобразования Фурье

Чисто вещественная функция $s(t)$

$$S(-\omega) = S^*(\omega)$$

Отсюда следствие, если $s(t)$ четная, то спектр чисто вещественный, а если нечетная то чисто мнимый

Линейность

$$s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

Тогда

$$S(\omega) = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

Задержка сигнала

$$s(t) = f(t - \tau)$$

$$S(\omega) = F(\omega) e^{-i\omega\tau}$$

Изменение масштаба времени

$$s(t) = f(at)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Дифференцирование сигнала

$$s(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

$$S(\omega) = i\omega F(\omega)$$

Фурье преобразование интеграла

Дана функция

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x) dx$$

Перейдем к бесконечному пределу

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Theta(t - x) dx$$

Найдем ее Фурье-образ

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Theta(t-x)dx\, e^{-i\omega t}dt =$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-x)\, e^{-i\omega t}dt\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\tau)\, e^{-i\omega(\tau+x)}dt\right]dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\tau)\, e^{-i\omega\tau}dt = S[f]S[\Theta]$$

Нетрудно показать, что

$$S[\Theta] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Окончательно получаем

$$S(\omega) = \frac{S[f]}{i\omega} + S[f]\pi\delta(\omega)$$

Свертка сигналов

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$S(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

Спектр произведения сигналов

$$s(t) = f(t)g(t)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega-\omega')d\omega'$$

Умножение сигнала на гармоническую функцию

$$s(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2}e^{i\varphi_0}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}e^{-i\varphi_0}F(\omega+\omega_0)$$

Связь преобразования Фурье и коэффициентов ряда Фурье

$$C_k = \frac{1}{T}S(\omega_k)$$

Фурье-анализ неинтегрируемых сигналов

Комплексная экспонента

$$s(t) = Ae^{i\omega_0 t}$$

$$S(\omega) = 2\pi A\delta(\omega-\omega_0)$$

Частный случай это образ константы, т.е.

$$S(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$$

Произвольный периодический сигнал

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}$$

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \delta(\omega - \omega_k)$$

Аналоговые системы

$$s_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} s_{in}(\tau) h(\tau - t) d\tau$$

Если произвести Фурье преобразование

$$S_{out}(\omega) = S_{in}(\omega) K(\omega)$$

$K(\omega)$ – коэффициент передачи, это Фурье образ от импульсной характеристики

Связь импульсной характеристики и переходной характеристики

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

переходная характеристика в нашем курсе не используется

Преобразование Лапласа

$$L[y(t)] = Y(s) = \int_0^{\infty} dt y(t) e^{-t}$$

$$L[y'(t)] = sY(s) - y(0)$$

$$L\left[y^{(n)}(t)\right] = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \cdots - y^{n-1}(0)$$

Передаточная функция

Определяет отношение между образами Лапласа выходного и входного сигнала

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}, n > m$$

$W(s)$ – рациональная функция s, ее можно представить в виде отношения произведений (z,p,k)

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}, k = \frac{b_m}{a_n}$$

и в виде суммы простых дробей

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{q=0}^{l_i} \frac{r_{iq}}{(s-p_i)^q}$$

l_i – кратность вырождения i-го корня.

Связь импульсной характеристики и передаточной функции

Передаточная функция есть преобразование Лапласа импульсной характеристики

Покажем что вид обратного преобразования Фурье простой дроби в разложении передаточной функции есть $r_i e^{p_i t}$

Найдем преобразование Лапласа

$$\int_0^\infty r_i e^{p_i t} e^{-st} dt = \int_0^\infty r_i e^{-(s-p_i)t} dt = \frac{r_i}{s-p_i} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{r_i}{s-p_i}$$

Устойчивость

Импульсная характеристика состоит из слагаемых вида

$$r_i e^{p_i t}$$

Из этого следует что на бесконечном времени функция будет затухать только если

$$\mathrm{Re}(p_i) < 0$$

Пространство состояний

$$\begin{gathered} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}x(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{u}(t) + Dx(t) \end{gathered}$$

Применим преобразование Лапласа

$$\begin{gathered} s\boldsymbol{U}(s) = A\mathbf{U}(s) + \mathbf{B}X(s) \\ Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{U}(s) + DX(s) \end{gathered} \Rightarrow (sI - A)\mathbf{U}(s) = \mathbf{B}X(s) \Rightarrow \mathbf{U}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{B}X(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(sI - A)^{-1}\mathbf{B}X(s) + DX(s)$$

$$Y(s) = [\mathbf{C}(sI - A)^{-1}\mathbf{B} + D]X(s)$$

Функция передачи

$$W(s) = \mathbf{C}(sI - A)^{-1}\mathbf{B} + D$$

Дискретные сигналы

Представление дискретного сигнала

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t - kT) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = s(t)p(t)$$

Функция $p(t)$ периодическая с периодом T поэтому ее можно разложить в ряд Фурье

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\, e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i0} dt = \frac{1}{T}$$

Тогда дискретный сигнал можно записать

$$s_d(t) = \frac{s(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t}$$

Найдем спектр такого сигнала

$$S_d(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t}\, e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i(\omega-\omega_n)t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_n)$$

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_n)$$

Видно, что спектр дискретного сигнала есть бесконечная копия спектра исходного сигнала, и спектр периодический.

Дискретный фильтр

Разностное уравнение

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \cdots + b_m x_{k-m} - a_1 y_{k-1} - \cdots - a_n y_{k-n}$$

z-преобразование

$$Z[x(k)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Обратное преобразование

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Связь с преобразованием Фурье

$$z \to e^{i\omega T}$$

Свойства z-преобразования

Задержка

$$y(k) = x(k - m)$$

$$Y(z) = z^{-m} X(z)$$

Свертка

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2(k - n)$$

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z)$$

Примеры z-преобразований

$$Z[\Theta(n)] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Z[\delta(n)] = 1$$

Дискретная фильтрация

Сигнал можно представить, как сумму

$$x_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta_{0,k-n}$$

Для линейных фильтрующих систем, можно ввести импульсную характеристику как реакцию системы на единичный сигнал $\delta_{0,k-n}$, которая будет полностью характеризовать систему

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n h_{k-n}$$

Из за принципа причинности, $h_{k<0} = 0$ суммирование можно проводить только до k

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{k} x_n h_{k-n}$$

Функция передачи

Т.к. фильтрация — это свертка с импульсной характеристикой то

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}$$

Явный вид функции передачи можно получить, применив z-преобразование к разностному уравнению

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Корреляционный анализ и свойства корреляционных функций.

Равенство Парсеваля

Преобразование Фурье корреляционной функции

$$b_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x) s_2(x - t) dx$$

Найдем ее преобразование Фурье

$$B_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x) s_2(x-t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} s_2(x-t) e^{-i\omega t} dt dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} s_1(x) \int_{\infty}^{-\infty} s_2(\tau) e^{-i\omega(x-\tau)} d\tau dx = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x) e^{-i\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

$$B_{12}(\omega) = S_1(\omega) S_2^*(\omega)$$

Сделаем обратное преобразование Фурье

$$b_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x) s_2(x-t) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S_1(\omega) S_2^*(\omega) d\omega$$

Если 1 и 2 одна и та же функция, то при $t = 0$ получим

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$$

Случайные сигналы с бесконечной энергией рассматривают на временном отрезке $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

$$E_T \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(\omega)|^2 d\omega$$

Теорема Винера-Хинчина

Из предыдущих рассуждений следует

$$b(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(x) s(x-t) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} |S_T(\omega)|^2 d\omega$$

Разделим обе части на период и устремим его к бесконечности

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(x) s(x-t) dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

$$R(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} W(\omega) d\omega$$

$$W(\omega) = \frac{|S_T(\omega)|^2}{T}$$

Спектральная плотность мощности