# NP & Code Base

https://youtu.be/4tKNQg9T734

최승주





#### Contents

P class & NP class

NP Hard & NP Complete

LEDAkem & LEDApkc & LDPC

NIST Round 2



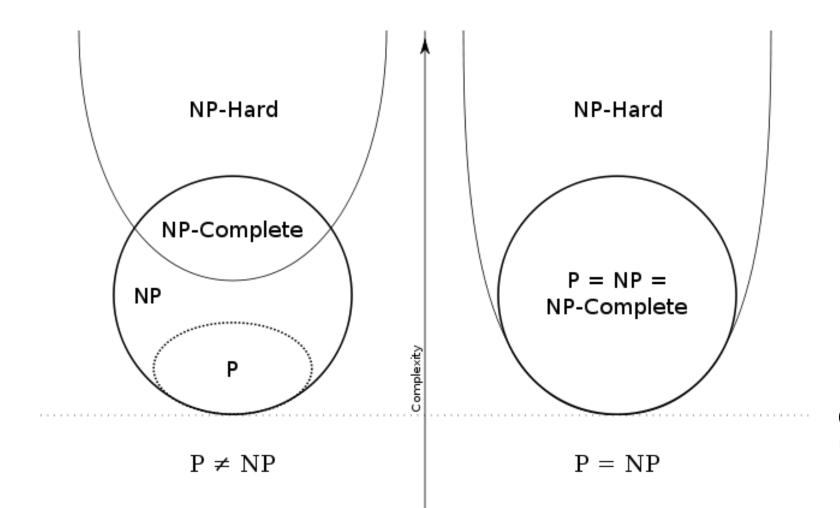
# 1, 2 장의 목표

• NP 완전 문제를 배워보자

야호



# NP 문제



이게 뭔 그림일까 넘모 궁금하다

- 어떤 문제에 대해서 Polynomial Time Algorithm이 존재하면 해당 **문제**는 클래스 P에 속한다.
  - 알고리즘이 클래스 P에 속하는 것이 아닌, 해당 문제가 속하는 것

Polynomial Time Algorithm
 n^k 형태로 최악의 시간 복잡도가 정의되는 알고리즘
 ex) 선택정렬, 삽입정렬, 버블정렬, 퀵 정렬 등등
 n^2의 최악의 시간 복잡도



• 어떤 문제에 대해서 Polynomial Time Algorithm이 존재하면 해당 문제는 클래스 P에 속한다.

- N^k의 형태, 즉 다항시간에 해당 문제에 대한 solution을 찾을 수 있으면 P에 속함
- n^2, n^3, n^4... 등 다항시간이면 **효율적**(efficient)인 알고리즘으로 본다.



- 지금까지의 문제들은 시간이 오래 걸린다 해도 풀리기는 함
- 세상에는 풀지 못하는 문제들이 존재함
  - 풀 수는 있지만, Polynomial Time Algorithm이 개발되지 않은 문제
  - 다항시간에 풀리지 않음

대체 이런 어려운 문제는 무엇인가?



- 문제를 해결하는 Non-Deterministic Polynomial Time algorithm이 존재할 시, 해당 문제는 클래스 NP에 속함
  - 문제가 속하는 것이지 알고리즘이 속하는 것은 아님

"어떤 문제에 대해서 Polynomial Time Algorithm이 존재하면 해당 **문제**는 클래스 P에 속한다." - P 클래스 -



- 문제를 해결하는 Non-Deterministic Polynomial Time algorithm이
   존재할 시, 해당 문제는 클래스 NP에 속함
  - Non-Deterministic: 비 결정적

- 비 결정적 다항시간 알고리즘
- 같은 인풋이 들어가도 다른 아웃풋을 낼 수 있는 알고리즘



- 비 결정적 다항시간 알고리즘
  - 같은 인풋이 들어가도 다른 아웃풋을 낼 수 있는 알고리즘

#### 왜 다항시간인가?

- 어떤 어려운 문제를 푸는 상황
- 다항시간 안에 아웃풋을 만들어 낼 수도 있는데,
   어떠한 경우에는 다항시간 안에 끝나지 않는 경우도 있는 상황

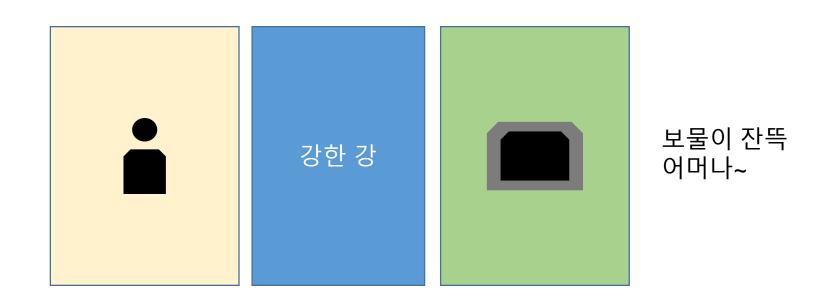


- 비 결정적 다항시간 알고리즘
  - 같은 인풋이 들어가도 다른 아웃풋을 낼 수 있는 알고리즘
  - **비결정적** 다항시간 알고리즘이 존재할 경우 클래스 NP에 속함

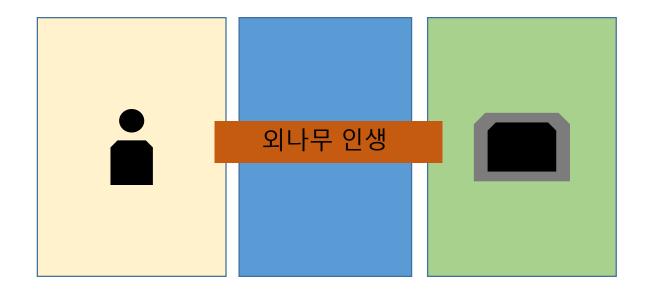


- 비 결정적 다항시간 알고리즘
  - 어떤 certificate가 다항시간(Polynomial Time)에 verify할 수 있으면, 그 문제는 클래스 NP에 속한다.

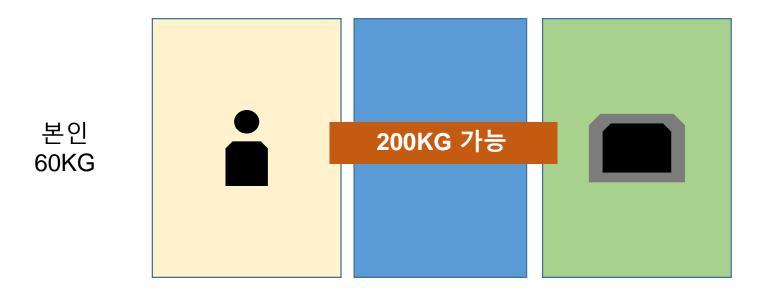




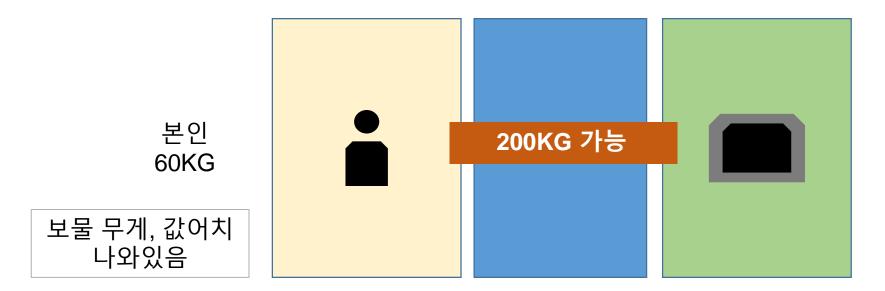










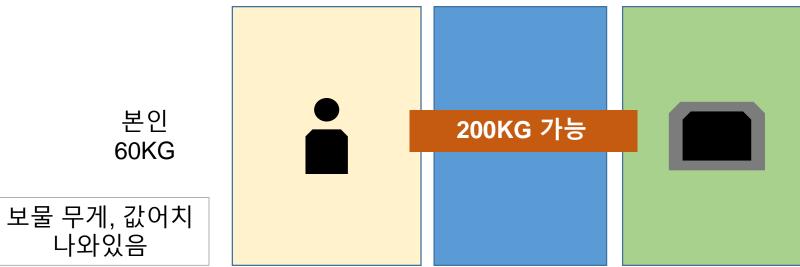




• 비 결정적 다항시간 알고리즘

예시) 2억 이상, 200kg 넘지 않는 보물의 조합이 있나 없나

**Decision Problem** 



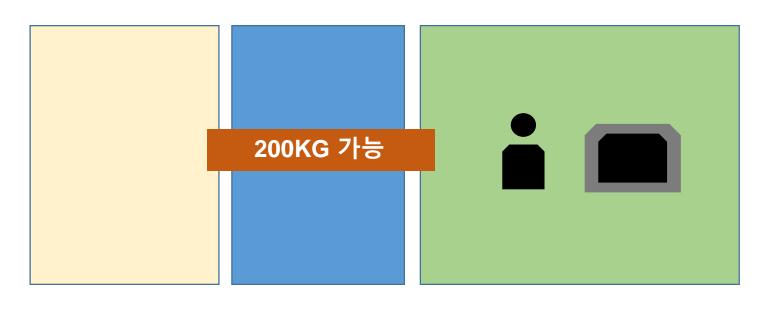




• 비 결정적 다항시간 알고리즘

예시) 2억 이상, 200kg 넘지 않는 보물의 조합이 있나 없나

**Decision Problem** 







• 비 결정적 다항시간 알고리즘

예시) 2억 이상, 200kg 넘지 않는 보물의 조합이 있나 없나

보물이 n개가 있다.

각 보물에 번호가 있다.

N비트가 나온다.

보물을 배낭에 담으면 1, 아니면 0



• 비 결정적 다항시간 알고리즘

예시) 2억 이상, 200kg 넘지 않는 보물의 조합이 있나 없나

00001010001...1000 → 2억 원 넘고 200kg 안되나?

11000010010...1000 → 2억 원 넘고 200kg 안되나?

01101010000...1000 → 2억 원 넘고 200kg 안되나?

2^n개의 조합





• 비 결정적 다항시간 알고리즘

예시) 2억 이상, 200kg 넘지 않는 보물의 조합이 있나 없나

어떤 사람이 조합을 줌

0000101000111010110101010...10100

그냥 건너가서 번호대로 담기만 하면 됨

→ 2억이 넘는데 200kg가 넘지가 않음



• 비 결정적 다항시간 알고리즘 예시) 2억 이상, 200kg 넘지 않는 보물의 조합이 있나 없나

그냥 건너가서 번호대로 담기만 하면 됨

→ 2억이 넘는데 200kg가 넘지가 않음

조합 찾았다!! 다항시간 안에 찾음



• 비 결정적 다항시간 알고리즘 예시) 2억 이상, 200kg 넘지 않는 보물의 조합이 있나 없나

#### 다항시간 안에 찾음

해당 문제에 대해 다항시간(Polynomial Time)에 대답을 하였다.

"어떤 certificate가 다항시간에 verify할 수 있으면, 그 문제는 클래스 NP에 속한다."



• 비 결정적 다항시간 알고리즘

예시) 2억 이상, 200kg 넘지 않는 보물의 조합이 있나 없나

Certificate를 받고, 다항시간에 확인할 수 있으면 문제는 클래스 NP에 속함

- 만약 해당 certificate가 2억이 넘지 않거나 200kg를 넘어버린다고 해도 충족 시켜야 하는 조합이 없다고 단정지을 수 없다.
  - → 아직 모르는 것이다.



• P 클래스와 NP 클래스

"어떤 문제에 대해서 Polynomial Time Algorithm이 존재하면 해당 **문제**는 클래스 P에 속한다." - P 클래스 -

즉, 클래스 P에 있는 문제들은 모두 클래스 NP에 속한다.

"어떤 certificate가 다항시간에 verify할 수 있으면, 그 문제는 클래스 NP에 속한다."



• Polynomial Time Algorithm: n^k 형태로 최악 시간복잡도가 정의되는 알고리즘

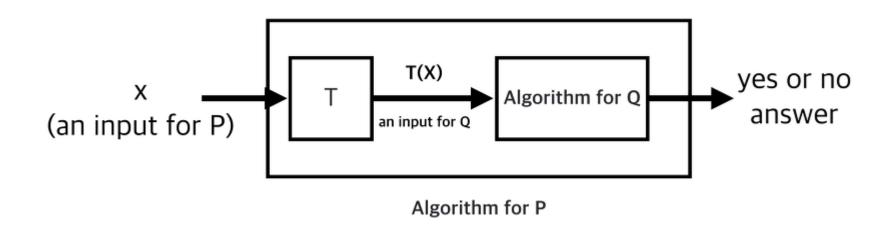
• 클래스 P: 특정 문제에 대해서 Polynomial Time Algorithm이 존재하는 문제

• 클래스 NP: 어떤 certificate가 다항시간에 verify할 수 있는 문제
Non-Deterministic Polynomial Time Algorithm이 존재하는 문제



• NP 클래스 안에 있는 모든 문제가 어떤 문제 Q로 reducible하면 그 문제 Q는 NP-Hard

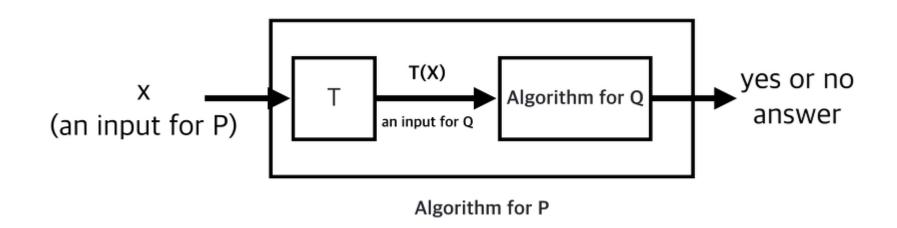




- x는 P의 인풋
- x가 T(Transformation Function)라는 박스를 만나서 아웃풋을 만들어 준다
  - → Q의 인풋

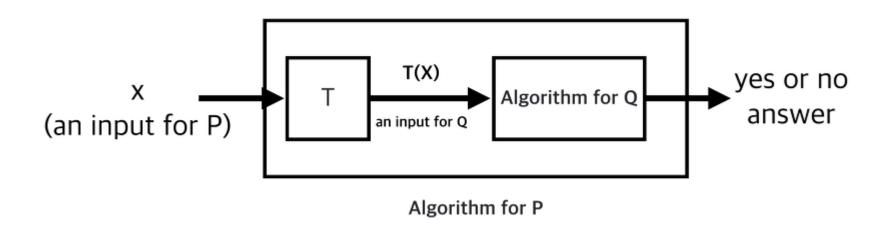
Transformation Function: P의 인풋을 Q의 인풋으로 바꾸어주는 역할





- Q를 풀 수 있는 알고리즘이 존재한다고 가정
- 원래 P의 인풋인 x를 T를 거쳐 Q를 풀 수 있는 알고리즘에 대입한 결과: Yes | No



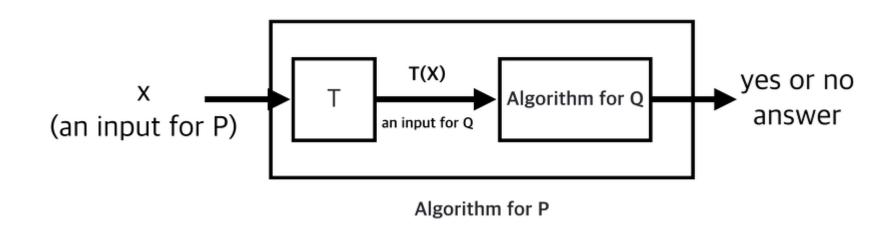


- 원래 P의 인풋인 x를 T를 거쳐 Q를 풀 수 있는 알고리즘에 대입한 결과:

Yes: 이 상황에서 P에 Yes를 대입하니 Yes

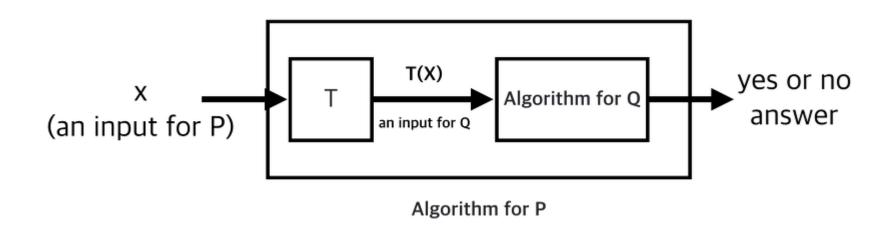
No: 이 상황에서 P에 No를 대입하니 No





- Q를 풀 수 있는 알고리즘으로 P를 풀었다.
- Q를 해결하는 알고리즘으로 P도 풀렸으니 Q가 조금 더 어려운 문제 어렵거나 같은 난이도의 문제



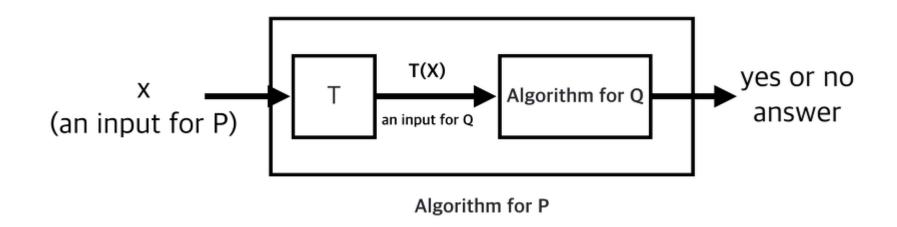


"Problem P is reducible to Q"

뒤에 있는 Q가 P보다 어려운 문제(P<=Q)

"NP 클래스 안에 있는 모든 문제가 어떤 문제 Q로 reducible하면 그 문제 Q는 NP-Hard이다."





"NP 클래스 안에 있는 모든 문제가 어떤 문제 Q로 reducible하면 그 문제 Q는 NP-Hard이다."

- NP클래스 안에 있는 모든 문제들보다 Q가 어렵다.



또 다른 즐거운 예시)

우리는 지금 모두 학생 - NP 클래스

"어렵다"의 기준은 **나이** 

학생이 아닌 나이가 많은 사람 A가 있다. NP클래스는 아니지만 어려운 사람

즉, NP-Hard한 사람





또 다른 즐거운 예시)

우리는 지금 모두 학생 - NP 클래스

"어렵다"의 기준은 **나이** 

학생이 아닌 나이가 많은 사람 A가 있다.

이런 NP-Hard한 사람이 학생이 되면

NP-Complete가 된다.



# NP 문제 – NP Complete

#### **NP-Complete**

- NP-Hard이면서 NP클래스 안에 있으면 NP-Complete이다.
- NP 클래스에 속해 있으면서, 어떤 기준에 의해 가장 어려운 문제



#### NP-Complete 즐거운 예시)



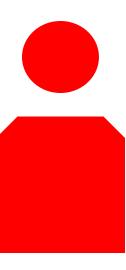
제일 잘 싸움 잘 싸우니 NP-Hard NP 클래스 안에 있으니 NP Complete



#### NP-Complete 즐거운 예시)



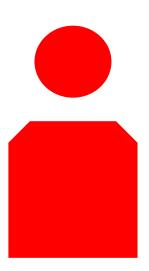
짱이 되고 싶은 전학생 - 모든 학생과 1대1 싸우는 것보다 제일 쎈 애들과 싸운다.





#### NP-Complete 즐거운 예시)





전학생이 싸워서 이겼다고 가정

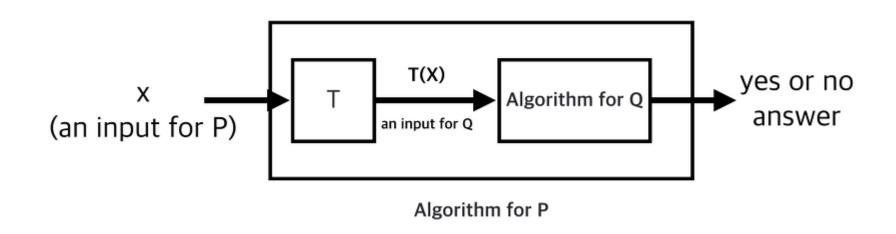
- 전학생은 NP 클래스의 NP-Hard가 된다.
- 진 학생들은 지기는 했지만 여전히 쌘 NP-Hard



NP-Complete 즐거운 예시)

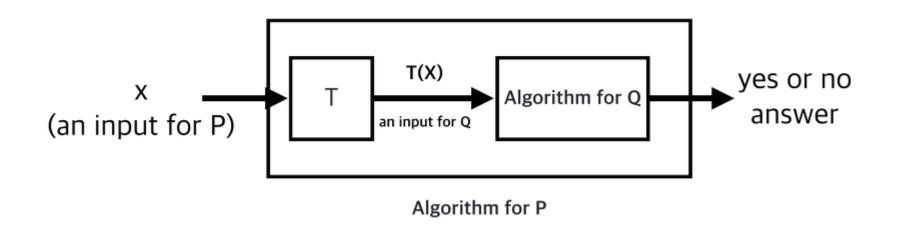
- 전학생이 1등을 해서 기존 1등이 부정이 되는 것은 아니다.
- 기존 1등 및 새로 1등한 전학생도 모두 NP-Complete





증명할 것: 어떤 문제 P가 Q로 reducible하다(Q가 더 어렵거나 같다).
"NP클래스 안에 있는 모든 문제가 어떤 문제Q로 reducible하면, 그 문제 Q는 NP-Hard이다."
P의 인풋을 T에 넣어서 Q의 인풋으로 바꿔 푼 결과를 P에 넣었더니 전부 성립
Q는 NP-Hard

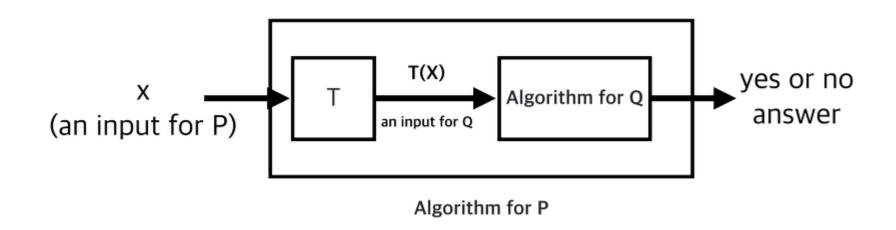




Q는 NP-Hard

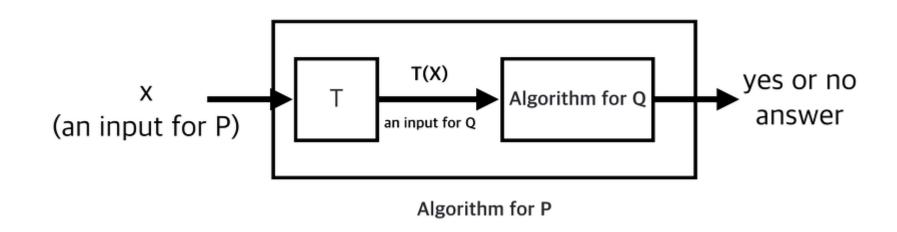
NP 클래스 인지 구별: 어떤 certificate가 다항시간에 verify되면 그 문제는 NP 클래스 이다.





- T에서 다항시간이 걸렸다고 가정
- Algorithm for Q도 다항시간이 걸렸다고 가정
- 전체 박스가 다항시간에 풀림
- P를 다항시간에 풀게 되는 것





- 만약 문제 P를 NP클래스 안에 있는 어떤 문제보다 어려운 문제, NP-Complete로 골랐는데, 다항시간에 풀리는 경우
- NP-Complete 문제들은 이때까지 알려진 다항시간 알고리즘이 없다.

- 만약 문제 P를 NP클래스 안에 있는 어떤 문제보다 어려운 문제, NP-Complete로 골랐는데, 다항시간에 풀리는 경우
- NP 클래스 안에 있는 어떤 문제보다 어려운 문제가 풀린다.
  - → NP 클래스 안에 있는 모든 문제를 다항시간에 풀 수 있다.

- 모든 과정이 다항시간에 이루어진다면, NP가 P에 속하게 된다.
  - "어떤 문제에 대해서 Polynomial Time Algorithm이 존재하면 해당 **문제**는 클래스 P에 속한다." - P 클래스 -



- 만약 문제 P를 NP클래스 안에 있는 어떤 문제보다 어려운 문제, NP-Complete로 골랐는데, 다항시간에 풀리는 경우
- NP 클래스 안에 있는 어떤 문제보다 어려운 문제가 풀린다.
  - → NP 클래스 안에 있는 모든 문제를 다항시간에 풀 수 있다.

- 모든 과정이 다항시간에 이루어진다면, NP가 P에 속하게 된다.
  - P = NP 성립
  - 모든 NP 문제가 P인가 증명하면 된다.



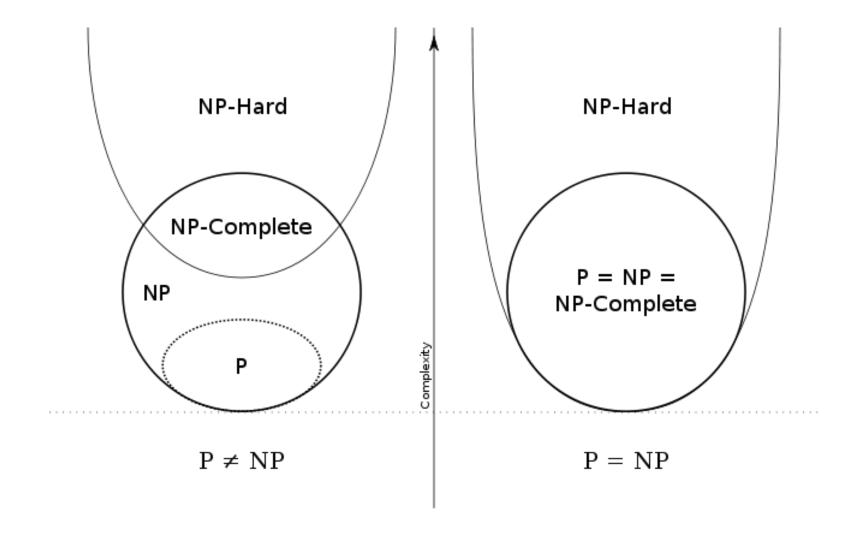
- 만약 문제 P를 NP클래스 안에 있는 어떤 문제보다 어려운 문제, NP-Complete로 골랐는데, 다항시간에 풀리는 경우
- NP 클래스 안에 있는 어떤 문제보다 어려운 문제가 풀린다.
  - → NP 클래스 안에 있는 모든 문제를 다항시간에 풀 수 있다.

- 모든 과정이 다항시간에 이루어진다면, NP가 P에 속하게 된다.
  - P = NP 성립
  - NP-Complete 문제들은 이때까지 알려진 다항시간 알고리즘이 없다.



- 현재까지 알려진 NP-Complete 문제들이 많음
- NP-Complete 문제 하나라도 다항시간 알고리즘을 만들어내면 모든 NP-Complete 문제들이 다항시간에 풀린다는 것을 증명 (서로 더 어렵거나 같은 난이도의 관계이기 때문)







## 양자 컴퓨터

- NP-Complete 문제들은 양자 컴퓨터로도 풀리지 않을 것으로 예상 만약 풀리는 것이 가능하다면 양자 내성 암호라는 것은 불가능



#### LEDAkem & LEDApkc

- NIST에서 2 round를 진행하고 있는 code base 양자 내성 암호 제안
- 키를 암호화 하는 LEDAkem과 공개키 LEDApkc로 나눠서 제출
- 두 제안을 통합하여 LEDAcrypt



#### LEDAkem & LEDApkc

#### LEDAkem

- 선형 오류 정정 코드 사용 및 code based 키 암호화 메커니즘
- 임시 키 KEM 사용, Niederreiter 암호 시스템

#### • LEDApkc

- 선형 오류 정정 코드 사용 및 code based 공개키 암호 시스템
- 공개키 사용, McEliece 암호 시스템



## LEDAkem & LEDApkc 목표

- 보안
  - 모든 공격에 대항 > 공격 복잡성에서 파생된 매개 변수 사용
  - NP-Complete와 연관된 문제 → 신드롬 디코딩

- 효율성
  - 작은 키 쌍 사이즈 → 순환 행렬 H와 G 사용
  - 효율적인 인코딩 및 디코딩 → 순환 행렬 H와 G 그리고 LDPC 코드 LDPC(저밀도패리티 체크)



#### LEDAkem & LEDApkc

• 순환 행렬(Block Circulant) 방식 사용

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = a_0 + a_0 x + a_0 x^2 \mod x^3 + 1$$

- n \* n의 행렬이 첫 행만을 가지고도 표현이 가능
  - 키 사이즈 절약 O(n²) → O(n)
- mod x<sup>n</sup> + 1 형식의 산술과 동일



#### LEDAkem & LEDApkc

- 순환 행렬 패리티와 선형 부호 행렬 이용
- 신드롬 디코딩 방식으로 Quasi-Cyclic(준 순환) 구조를 깰 수 없음
  - QC 구조를 깨는 문제는 NP-Complete

- Cyclic
  - Code  $C = \{000, 101, 011, 110\}$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = 101100$$
  $C_2 = 010110$   $C_3 = 0010111$   $C_1 + C_2 = 1110010$   $C_1 + C_3 = 1001011$   $C_2 + C_3 = 0111001$   $C_1 + C_2 + C_3 = 1100101$ 

#### Cyclic

$$C_1 = 101100$$
  $C_2 = 010110$   $C_3 = 0010111$   $C_1 + C_2 = 1110010$   $C_1 + C_3 = 1001011$   $C_2 + C_3 = 0111001$   $C_1 + C_2 + C_3 = 1100101$ 

$$c_1 o c_2, \qquad c_2 o c_3, \qquad c_3 o c_1 + c_3$$
  $c_1 + c_2 o c_2 + c_3, \qquad c_1 + c_2 + c_3, \qquad c_2 + c_3 o c_1$   $c_1 + c_2 + c_3 o c_1 + c_2$ 



- Cyclic
  - Code  $C = \{000, 101, 011, 110\}$

- Code A = {0000, 1001, 0110, 1111} 는 완전한 Cyclic은 아니지만 Cyclic Code로 취급해준다.

원소 전부가 Cyclic은 아니지만 몇 개는 Cyclic인 경우

- 이러한 Cyclic Code는 polynomial 형식으로 나타내짐

• LDPC

Low Density Parity Check

Bit Protection

ex)

100011 100011

같은 메시지를 2번 보내 확인을 할 수 있다.



• LDPC

Bit Protection ex) 중복 전송

?00011

?00011

-----

?00011

- 같은 비트에 문제가 생기면 찾을 수 없음
- 코드 수치 효율성이 떨어짐



• LDPC

Bit Protection ex)

?00011

?00011

-----

?00011

- 같은 비트에 문제가 생기면 찾을 수 없음
- 코드 수치(Code Rate) 효율성이 떨어짐



• LDPC

Code Rate

LDPC

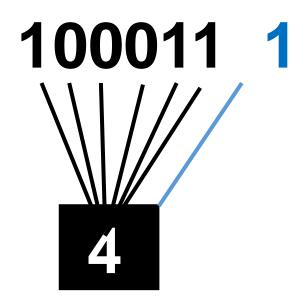
- Code Rate 저하하면 Protection 증가
- Code Rate가 낮으면 낮을 수록 비용이 많이 든다. 보내는 bit의 양이 많아지기 때문

- Code Rate와 Probability of Failure을 잘 생각해 봐야 한다. 메시지는 충분히 보호가 되면서도 효율적인(인코딩과 디코딩이 빠른) 방법이 필요



• LDPC

- 1의 개수를 확인해 전체 bit의 1의 개수가 짝수가 되게 만든다: Parity Bit





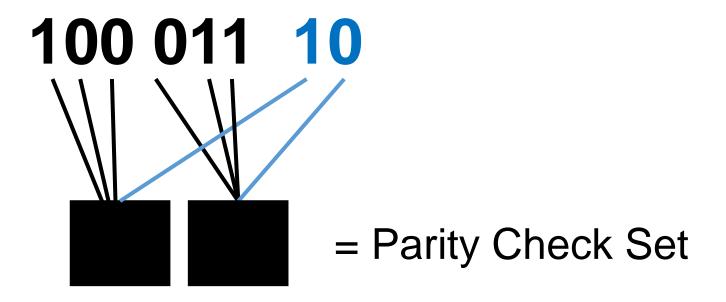
- LDPC
  - 1의 개수를 확인해 전체 bit의 1의 개수가 짝수가 되게 만든다: Parity Bit
  - 에러 확인: 1의 개수가 짝수인지 확인

- 1개의 Parity Bit으로는 1개의 에러만 확인 가능



• LDPC

- 에러의 검출을 높이기 위해 전체 메시지를 2개로 나누어 2개의 패리티 비트 사용



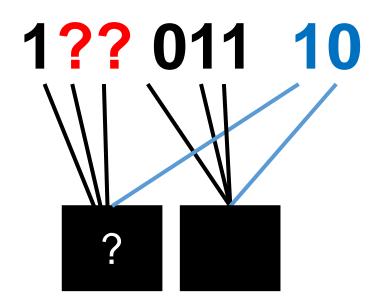


• LDPC

- 패리티 비트를 많이 쓰면 에러 수정 가능 비트의 개수가 증가
- Code rate는 감소

• LDPC

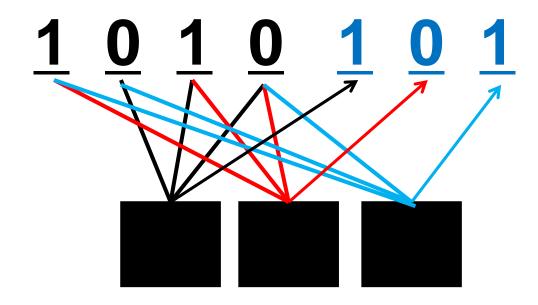
- 여전히 같은 세트에서 오류가 2개 이상 발생하면 오류 찾기 불가능





• LDPC

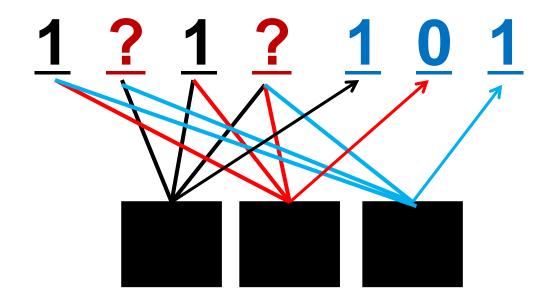
- 이러한 한계를 보안하기 위해 겹치는(overlapping) 패리티 비트 사용 제안





• LDPC

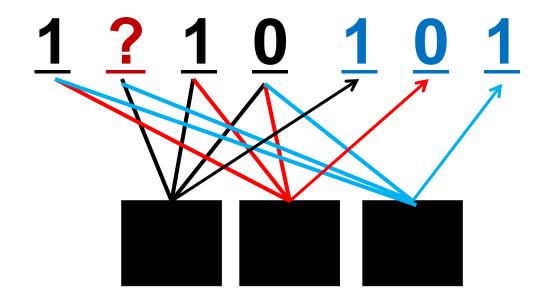
- 이러한 한계를 보안하기 위해 겹치는(overlapping) 패리티 비트 사용 제안





• LDPC

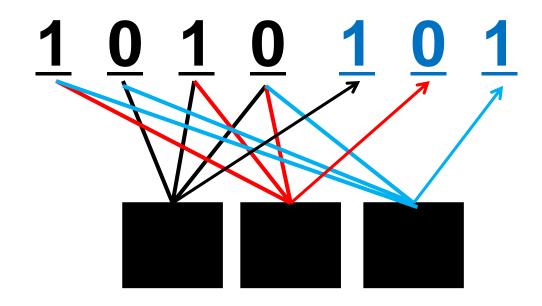
- 이러한 한계를 보안하기 위해 겹치는(overlapping) 패리티 비트 사용 제안





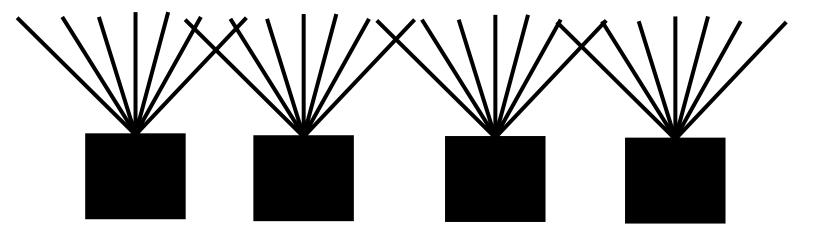
• LDPC

- 한번에 에러를 검출하는 것이 아닌 set를 이용해 하나씩 찾는 방식을 사용



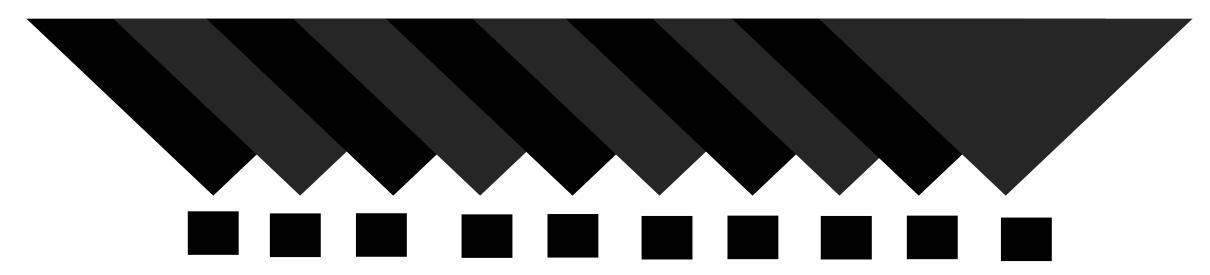


- LDPC
  - 이러한 원리를 이용한 많은 패리티 세트 구조가 연구 되었음



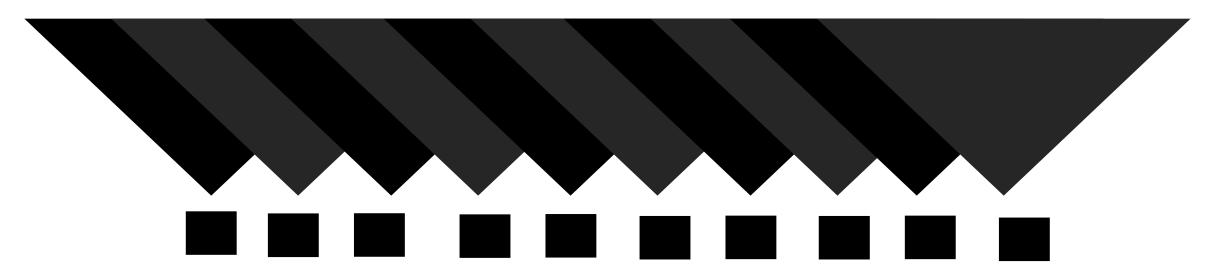


- LDPC
  - 그러나 이러한 구조를 매우 큰 길이의 메시지에 적용을 하면 문제가 발생



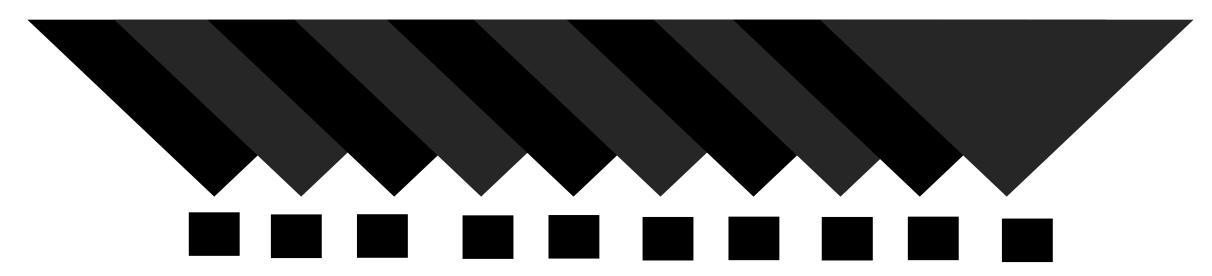


- LDPC
  - 하나의 set가 담당해야 하는 메시지가 커지고 담당 면적에 비해 에러는 적게 발생





- LDPC
  - 패리티 확인을 하는데 너무 복잡한 연산이 소모가 된다.





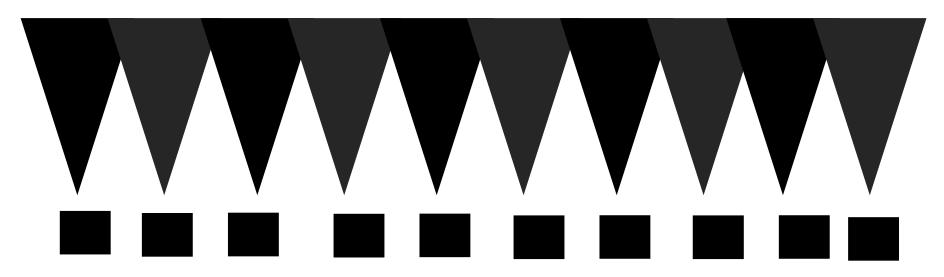
#### • LDPC

- Overlapping 방식을 사용
- 빠르게 연산을 할 수 있어야 함
- 매우 긴 메시지에 적용을 해야 함
- 어떠한 오류든 찾아내야 함
- 적당한 Code rate를 유지해야 함



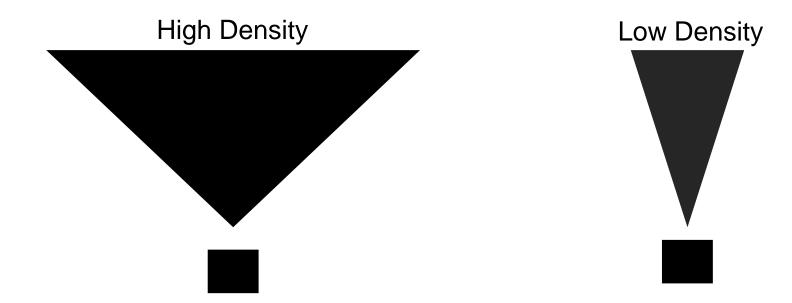
- LDPC
  - 1963 Robert G Gallager가 이러한 문제를 해결하기 위한 구조 제안
  - 현재 패리티 비트 확인 모델은 Gallager의 방식을 따름

- LDPC
  - 세트가 담당하는 비트 수를 줄인다; 하나의 세트에 존재할 오류의 수를 줄인다.
  - 비트를 확인하는데 걸리는 연산의 시간을 줄임



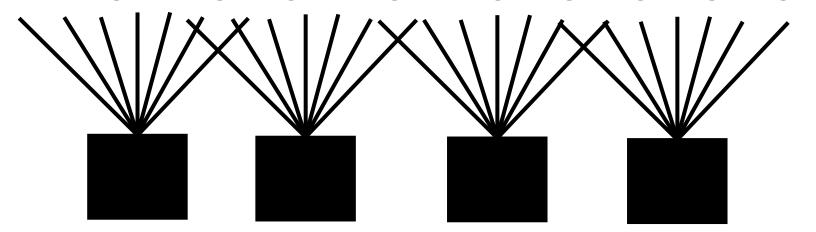


- LDPC
  - 세트가 담당하는 비트 수를 줄인다; 하나의 세트에 존재할 오류의 수를 줄인다.
  - 담당하는 밀도(Density)를 줄인다: Low Density Parity Check Code





- LDPC
  - 이런 세트의 구조는 어떠한 모양을 해야 하는가
  - Peter Alliss: 큰 메시지에서 구조의 모양은 의미가 없다.





- LDPC
  - Peter Alliss: 큰 메시지에서 구조의 모양은 의미가 없다: 무작위 담당
  - 구조를 형성하는데 고민을 했던 것이 사라짐



#### • LDPC

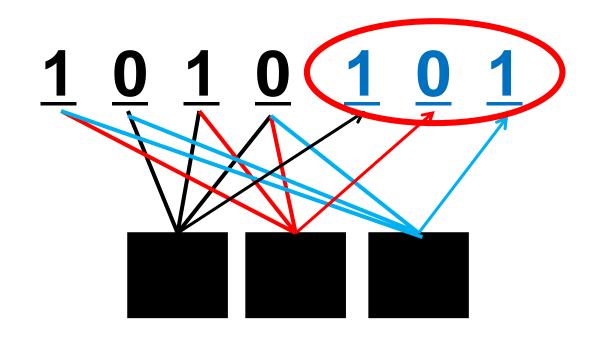
- 작은 밀도의 Overlapping 방식
- 무작위의 구조

- 단순한 연산 가능
- 메시지 길이 상관 없음
- 문제 해결 하기 좋음



#### • LDPC

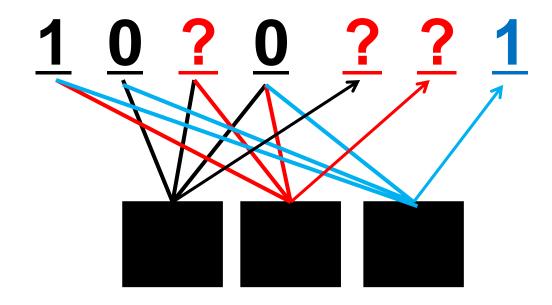
- 아래와 같은 구조에서 패리티 비트는 보호가 되지 않는다.





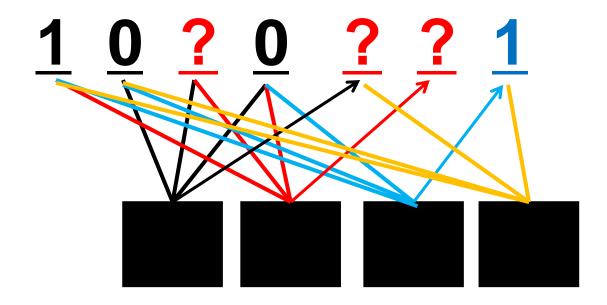
#### • LDPC

- 아래와 같은 구조에서 패리티 비트는 보호가 되지 않는다.



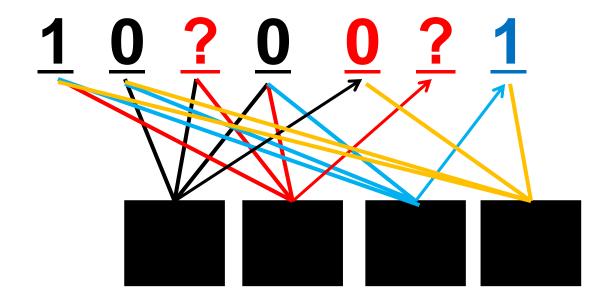


#### • LDPC



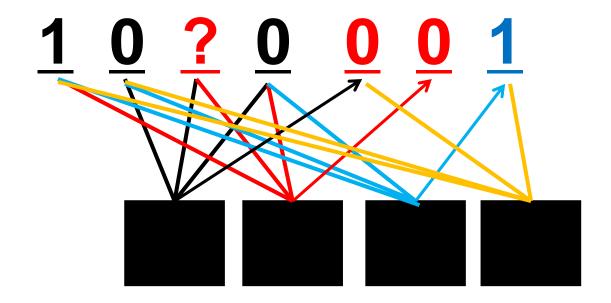


#### • LDPC



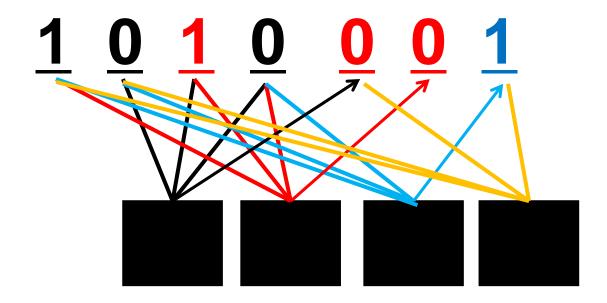


#### • LDPC





#### • LDPC





#### • LDPC

- 작은 밀도의 Overlapping 방식
- 무작위의 구조
- 패리티 비트도 보호

- 단순한 연산 가능
- 메시지 길이 상관 없음
- 문제 해결 하기 좋음



# NIST Round 2

Round 1

Lattice 26

Code 19

etc 19

-----



### NIST Round 2

Round 1

Lattice 26

Code 19

etc 19

-----

64

• Round 2

Lattice 11

Code 8

Muli 4

lso 1

Hash 1

ZK

-----



# NIST Round 2 공개키 암호 및 키 생성 알고리즘

#### Code

- BIKE
- Classic McEliece
- HQC
- LEDAcrypt
- NTS-KEM
- ROLLO
- RQC
- SABER

#### Lattice

- CRYSTALS-KYBER
- FrodoKEM
- LAC
- NewHope
- NTRU
- NTRU Prime
- Round5
- Three Bears

#### Isogency

- SIKE



# NIST Round 2 전자 서명

- Multivariate
   Lattice
   Isogency
   Zero Knowledge
   Hash
  - GeMSS

- CRYSTALS-Dilithium
- SIKE

- Picnic

- SPHINCS+

- LUOV

- FALCON

- MQDSS

- qTESLA

- Rainbow



# Q&A



# 감사합니다

