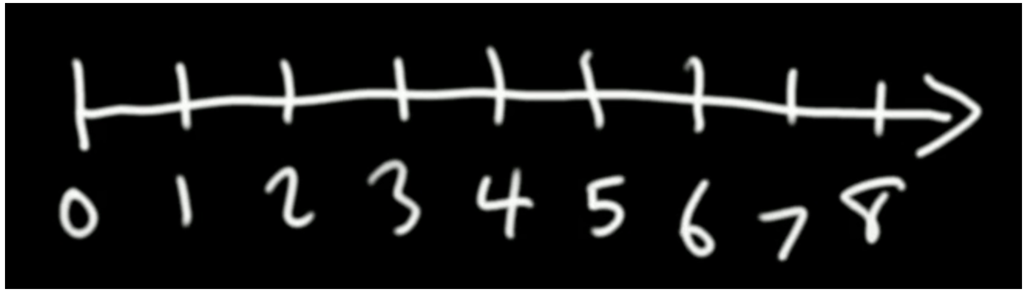
# Complex Number
# & Quantum Fourier Transformation

https://youtu.be/i0kPyc99ZXA

IT융합공학부 송경주

# Complex Number

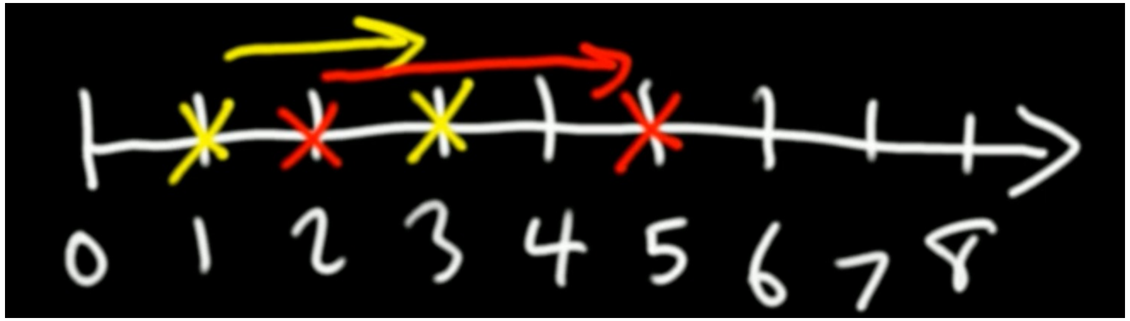
- 숫자를 한 라인으로 나타낼 수 있다.




- 라인에서 1+2 연산을 생각한다면 1 point에서 오른쪽으로 2 point 이동한 거리를 나타낸 3이 된다.

# Complex Number

- 라인에서 2+3 연산을 생각한다면 2 point에서 오른쪽으로 3 point 이동한 거리를 나타낸 5가 된다.

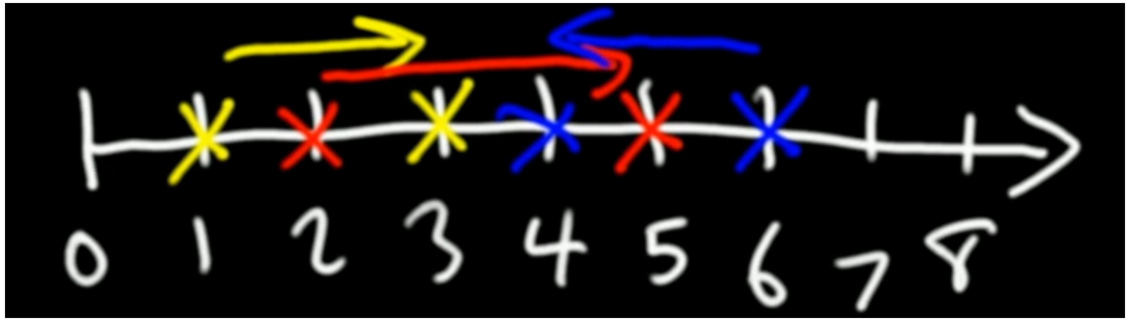


# Complex Number

- 뺄셈은?

# Complex Number

- 뺄셈은?
- 라인에서 6-2 연산을 생각한다면, 6 point에서 **왼쪽**으로 2 point 이동한 거리를 나타낸 4가 된다.




- 라인에서 8-5 연산을 생각한다면, 8 point에서 **왼쪽**으로 5 point 이동한 거리를 나타낸 3이 된다.

# Complex Number

- 수직선 상에서 벗어난다면?

Ex) $5 - 8 = ?$

$2 - 3 = ?$

$3 - 5 = ?$

# Complex Number

- 수직선 상에서 벗어난다면?

Ex) 5 – 8 = ?

2 – 3 = ?

$\boxed{3 - 5 = ?}$ → 2 – 6 → 1 – 7 → 0 – 8

- **0 아래에 수직선을 연장해서 표기! ( 0의 오른쪽 N과 왼쪽 N은 같은 것이 아니므로 이를 구별하는 수단으로 "–" 사용)**

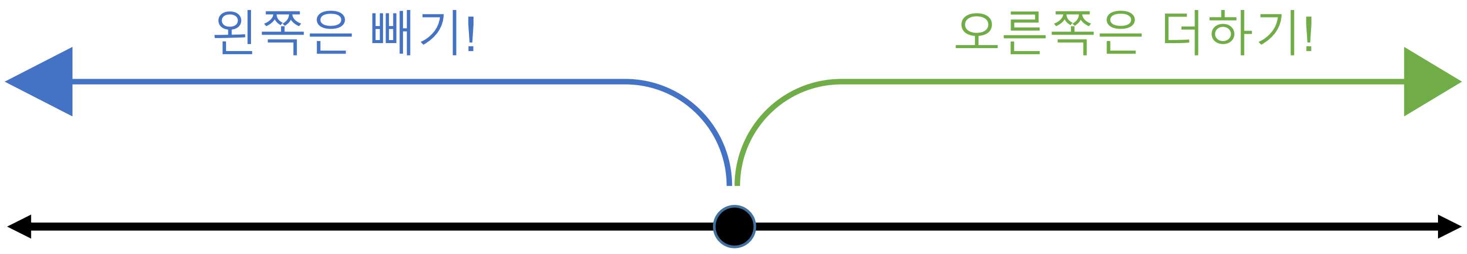

구분 불가능


구분 가능

# Complex Number

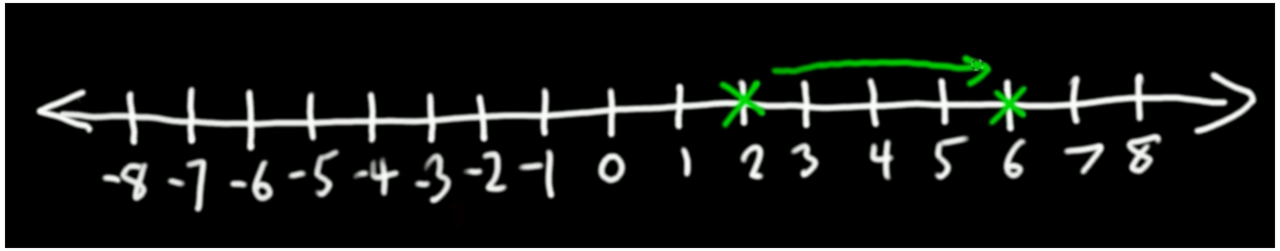
A + B = C
A – B = C

- 시작 포인트: A
- 움직이는 방향은: + (오른쪽), – (왼쪽)
- 움직이는 크기: B
- 움직인 후 최종 위치 : C



# Complex Number

- 곱셈은?
  - $2\times3 = 6$




이것은 단순히 연산 결과를 옮긴 것

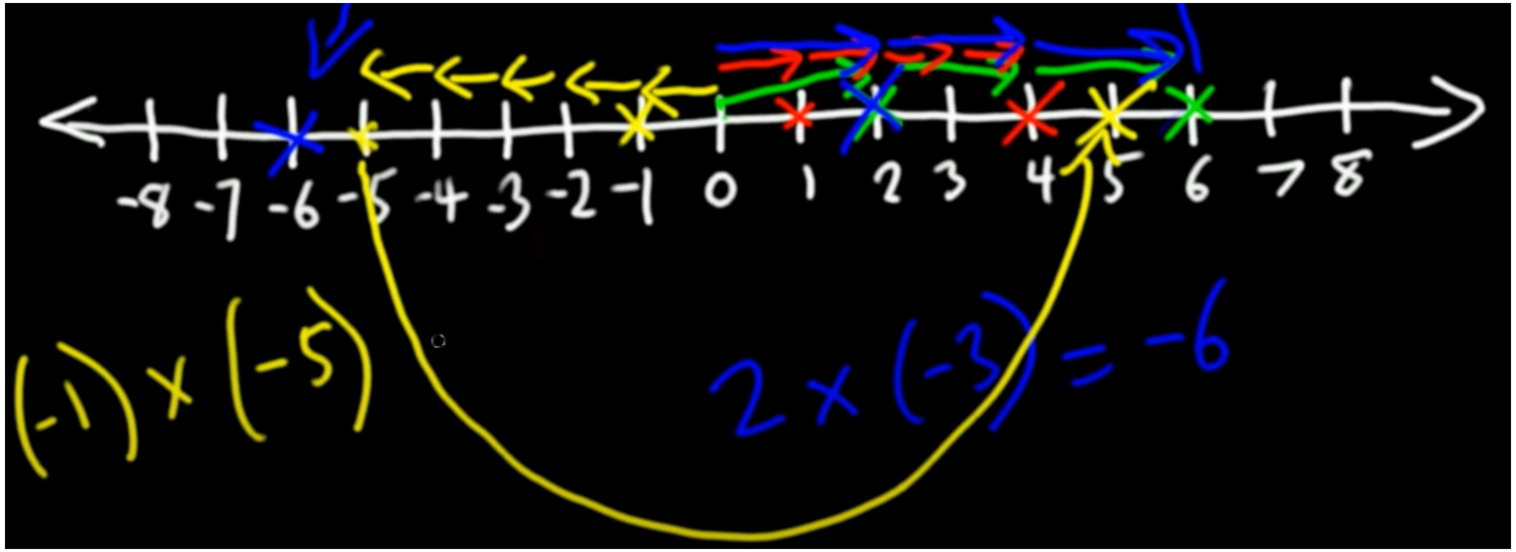

논리적으로 나타낸 원리

Zero point 에서 2point 자리로 이동하고, 이것을 3번 반복

# Complex Number

- 곱셈은?
  - $-1\times\boxed{(-5)} = 5$

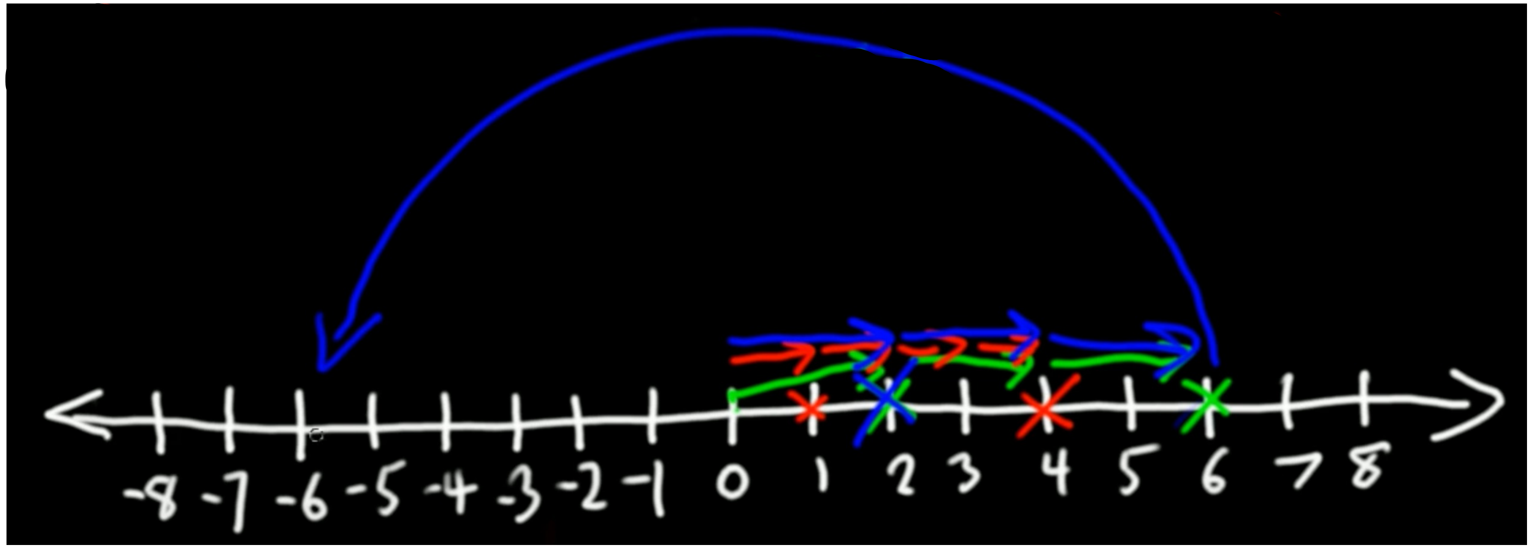
**0을 중심으로 Rotation!**



# Complex Number

- 곱셈은?
  - $2\times\boxed{(-3)} = -6$

0을 중심으로 Rotation!



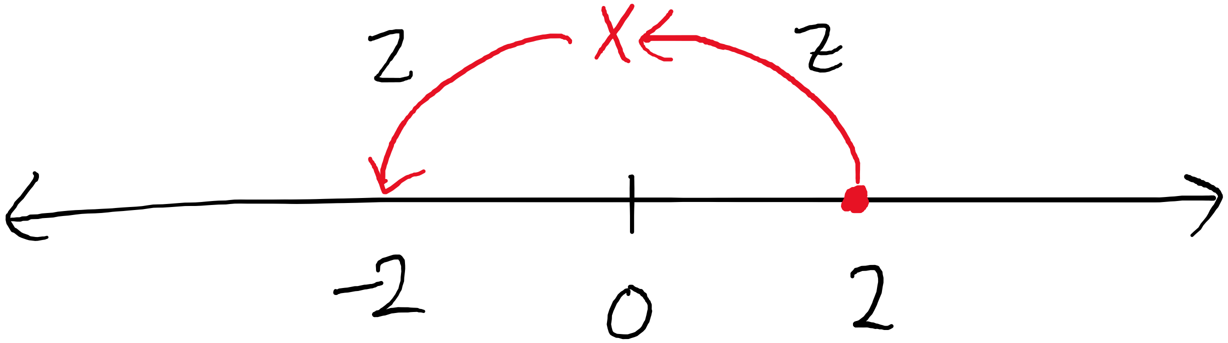
# Complex Number

- 지금까지 숫자들의 rotation은 180° 로 진행됨

  → 그렇다면 180° 보다 작은 rotation 으로 움직였을 때의 point는?

90°로 Rotation 하는 연산을 $z$라고 하면,

$$2 \times z \times z = -2$$
$$2z^2 = -2$$
$$z^2 = -1$$
$$\therefore z = \sqrt{-1}$$

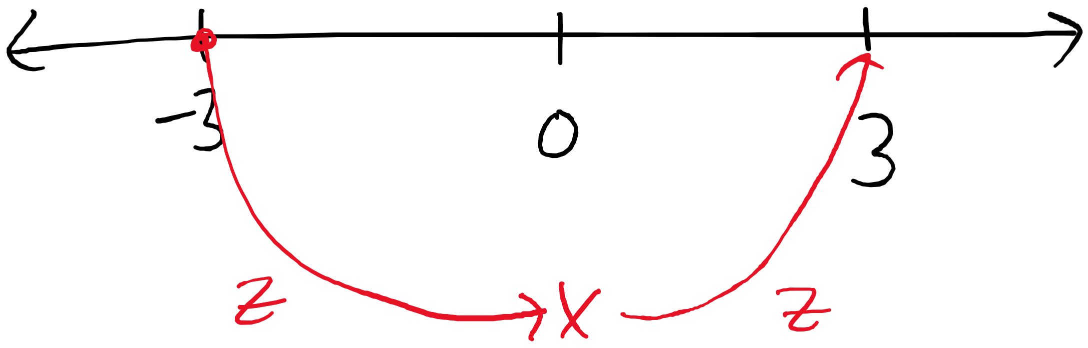


# Complex Number

- 지금까지 숫자들의 rotation은 180° 로 진행됨
  → 그렇다면 180° 보다 작은 rotation 으로 움직였을 때의 point는?

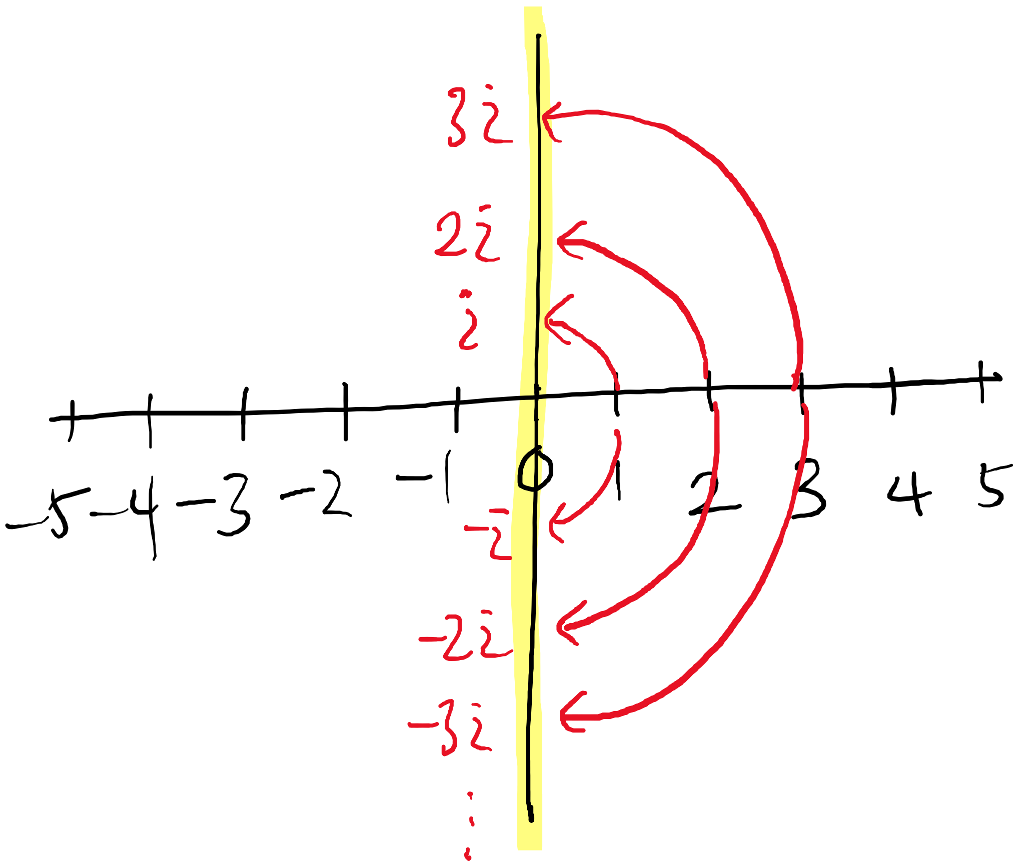
90°로 Rotation 하는 연산을 $z$라고 하면,

$$-3 \times z \times z = 3$$
$$-3z^2 = 3$$
$$-z^2 = 1$$
$$\therefore z = \sqrt{-1}$$



# Complex Number

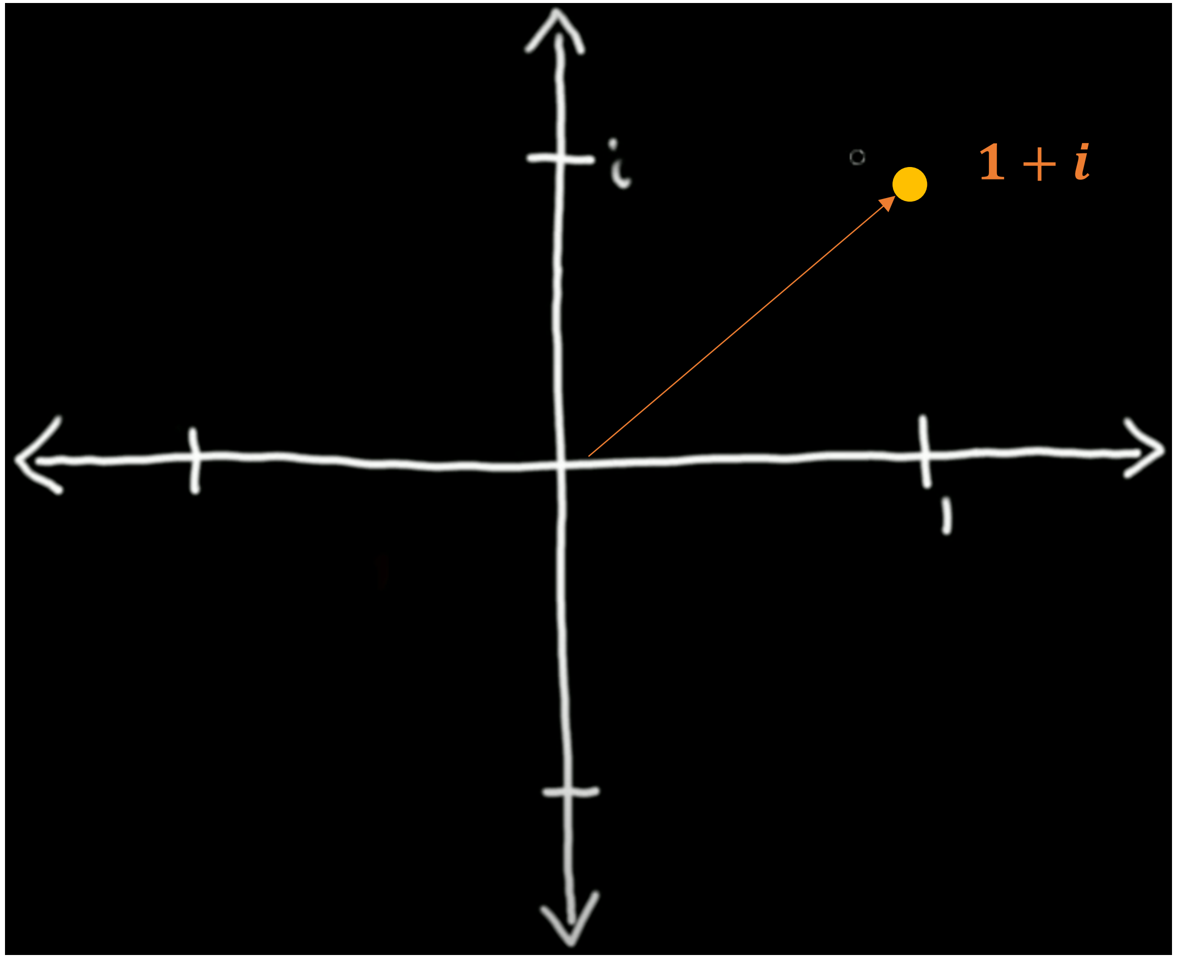
- 제곱근은 또 다른 수직선 상의 연장으로 나타낼 수 있음
  →$z = \sqrt{-1}$을 수학자들이 $i$로 정의하고 허수라고 명명함



# Complex Number

- Complex Number(복소수) = 실수부 + 허수부

수직선상에 없는 요소들을 표현 가능

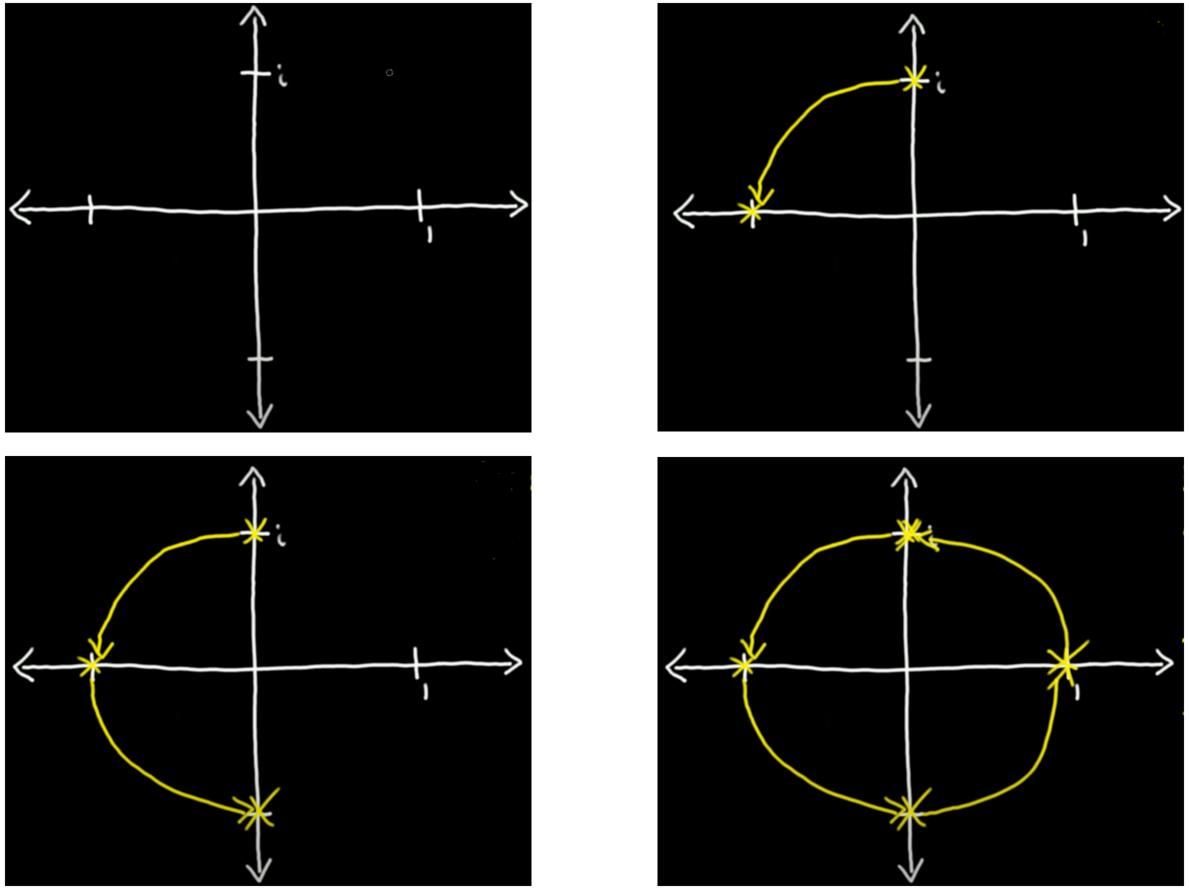


# Complex Number

- 지수(Exponent)

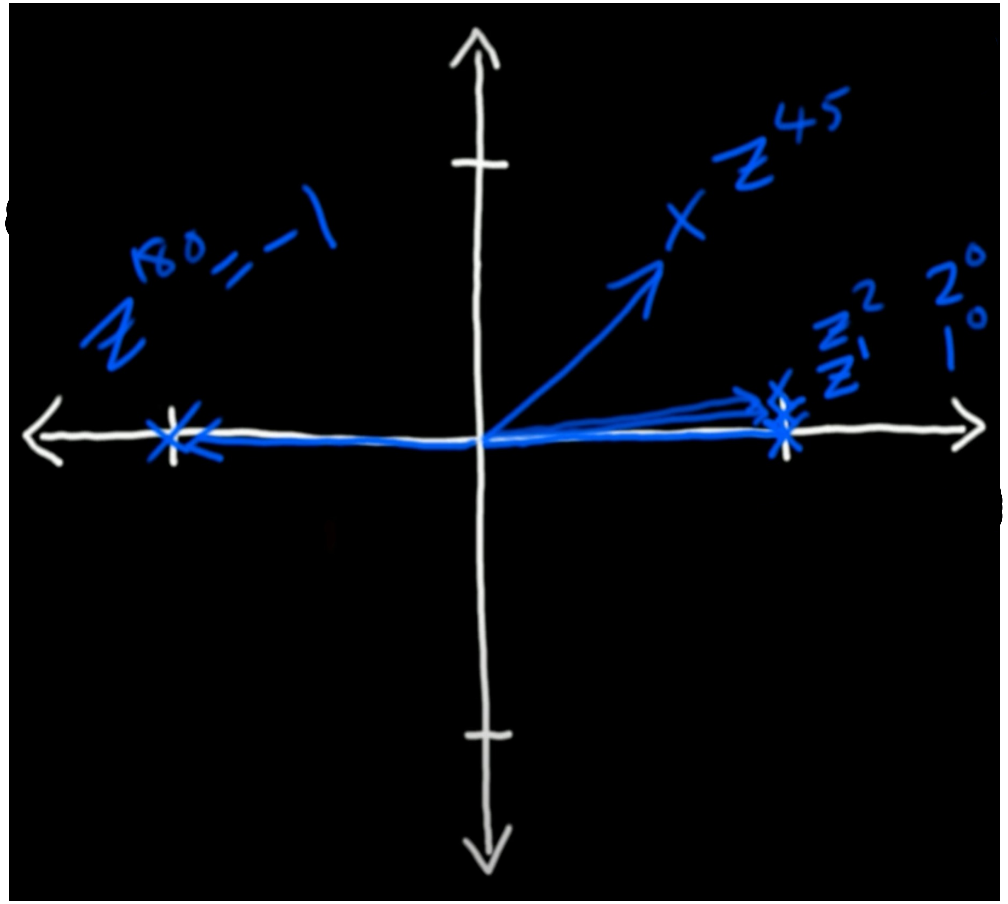
Ex) $i$ 를 제곱하면 90° 씩 회전하여 결국 계속 원을 그리며 제자리로 돌아옴

$(i, i^2, i^3, i^4, i^5, \cdots)$



# Complex Number

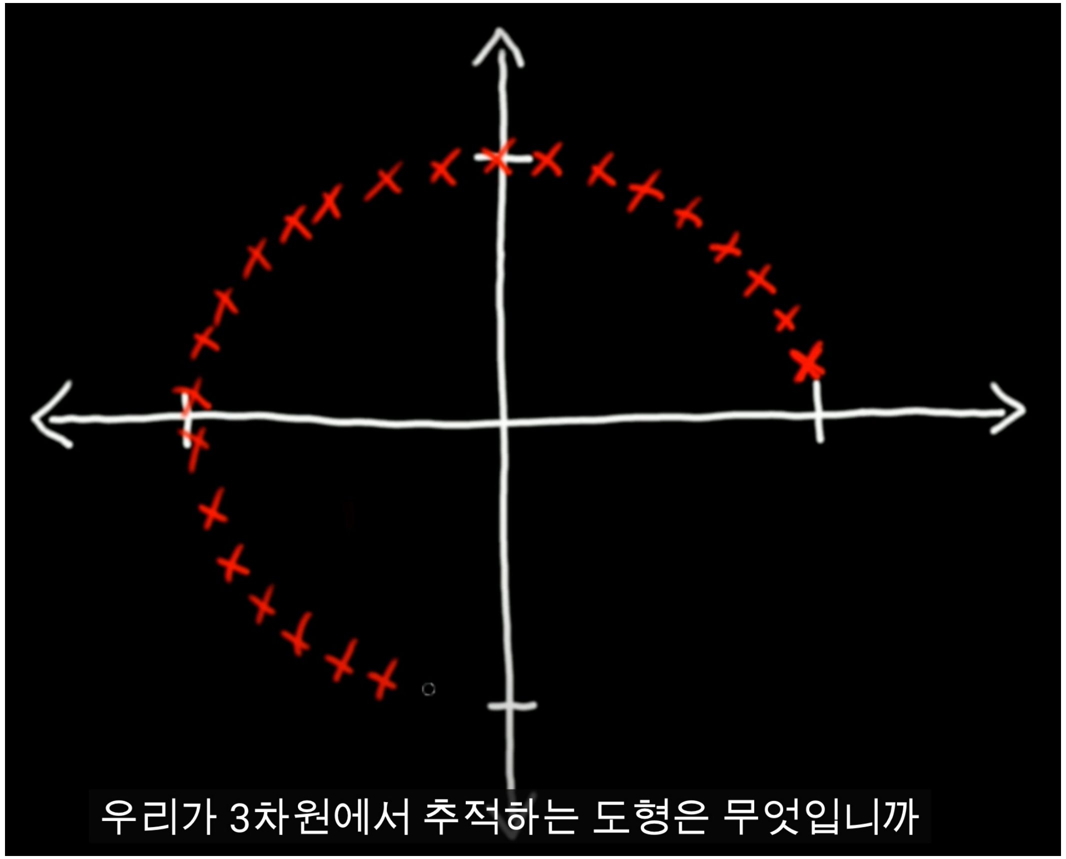
- 주기적 특성
  - $1 = z^0 = z^{360} = z^{720}$



# Complex Number

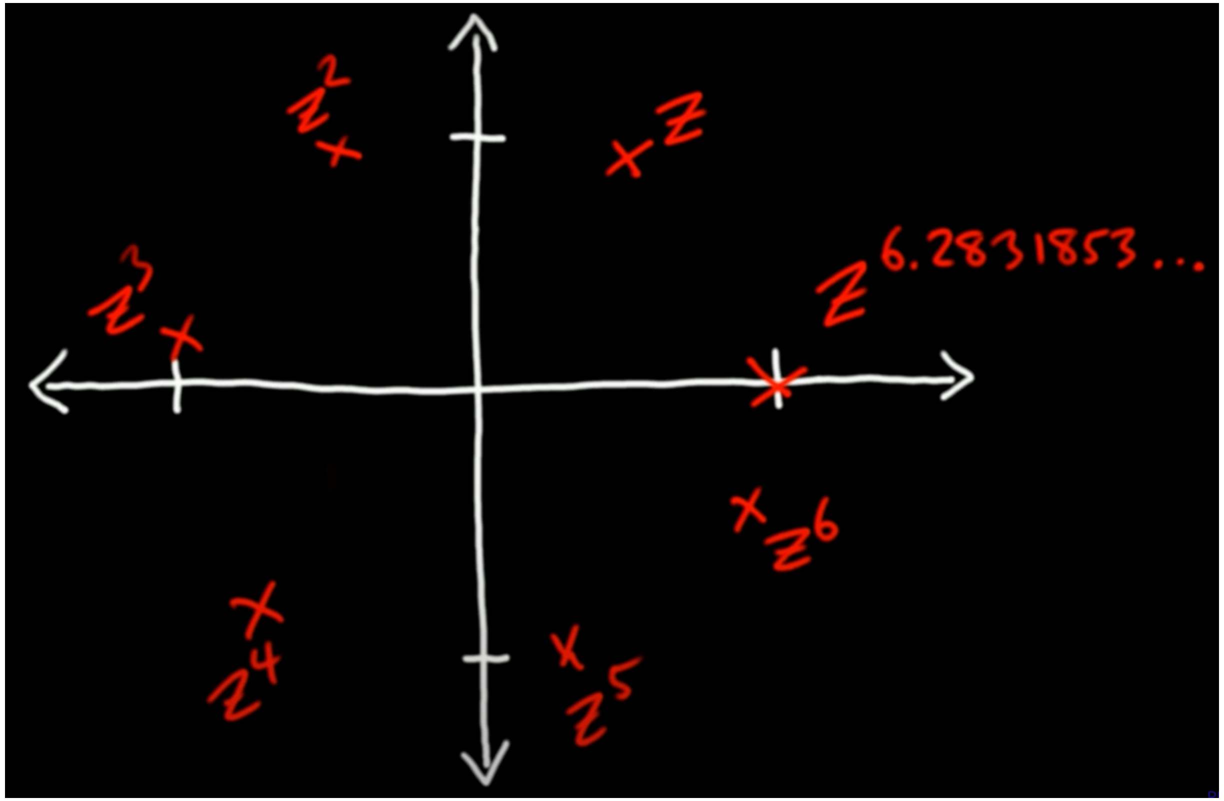
- 같은 크기의 각도로 시간에 따라 이동하면 실수, 허수 좌표평면은 같은 곳을 돌게 됨

  → 시간 축이 3차원에 추가되었다고 생각하면 스프링 같은 모형으로 그려짐!



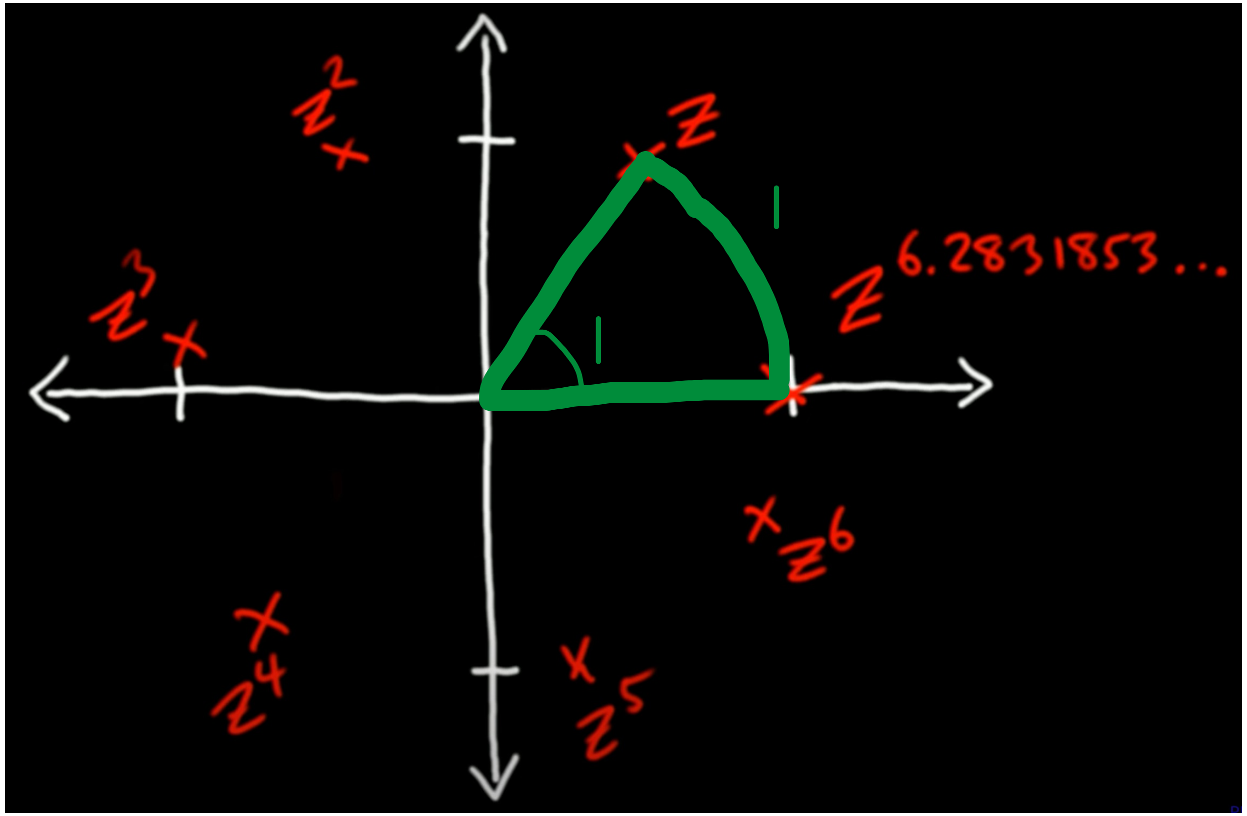

# Complex Number

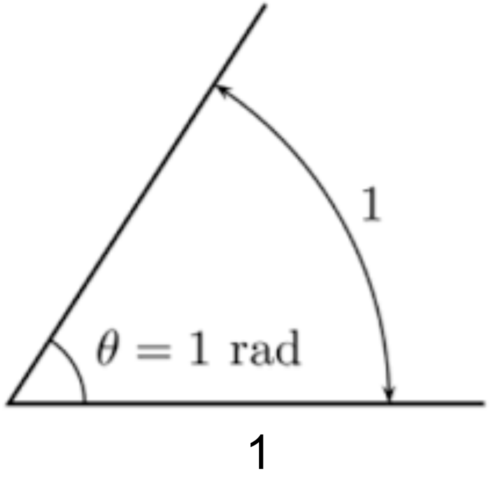
- 복잡한 지수승에서 사람들이 사용하는 기준 : $z = e^{i}$
- $6.2831853 \ldots = \tau = 2\pi$
- 즉 $e^{2\pi i} = 1$



# Complex Number

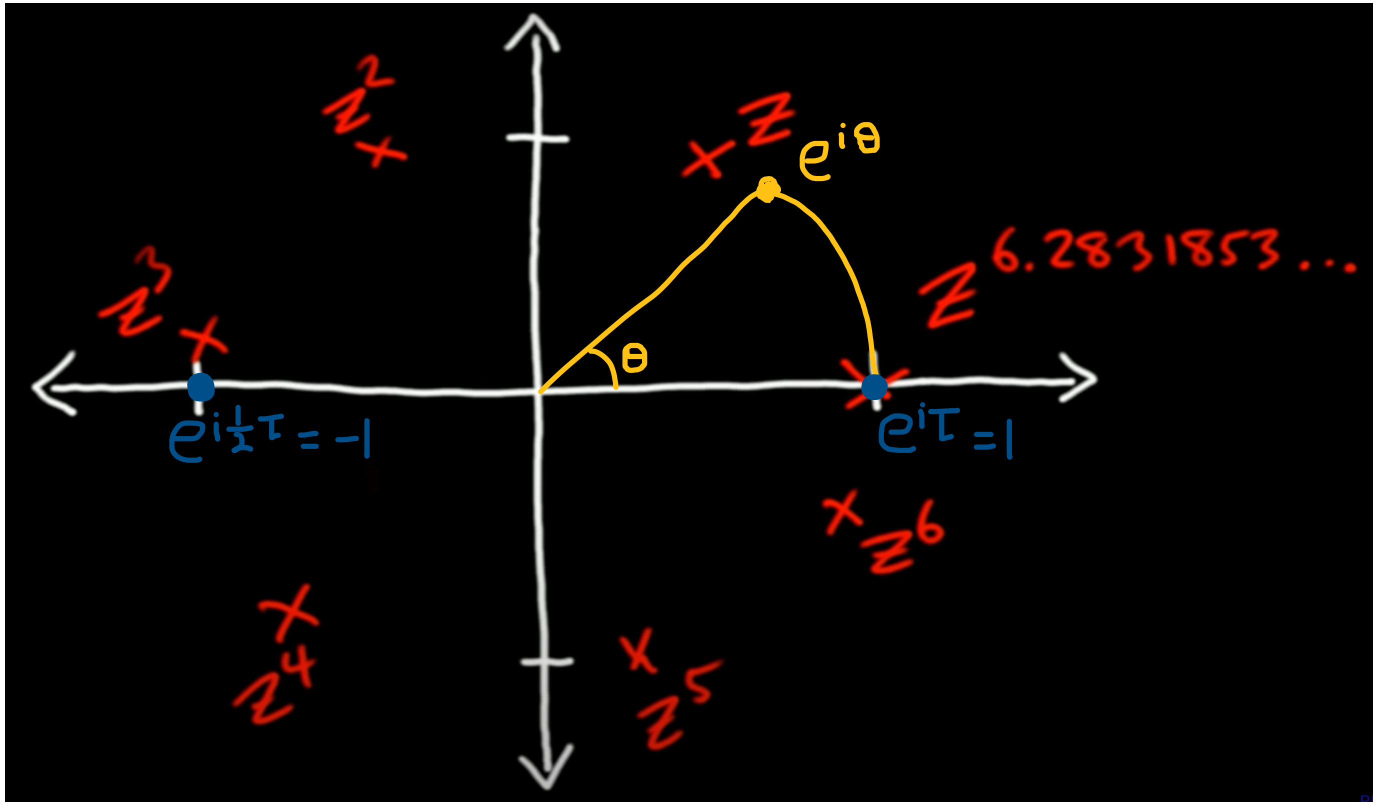
- Radian(라디안)
  - 다음 조건을 만족하는 z는 1라디안을 가짐
  - 1라디안 = 반지름 길이와 호의 길이가 1일 때의 각도



# Complex Number

- $\theta$각도 만큼 이동 : $e^{i\theta}$
- $\tau(2\pi)$각도 만큼 이동 : $e^{i\tau} = 1$
- $\tau(\pi)$각도 만큼 이동 : $e^{i\frac{1}{2}\tau} = -1$ $\qquad \therefore e^{\pi i} + 1 = 0$



# Complex Number

- 신호처리, 주기현상에 많이 사용되는 수식 : $e^{i2\pi ft}$

조금 어려워 보이지만..

# Complex Number

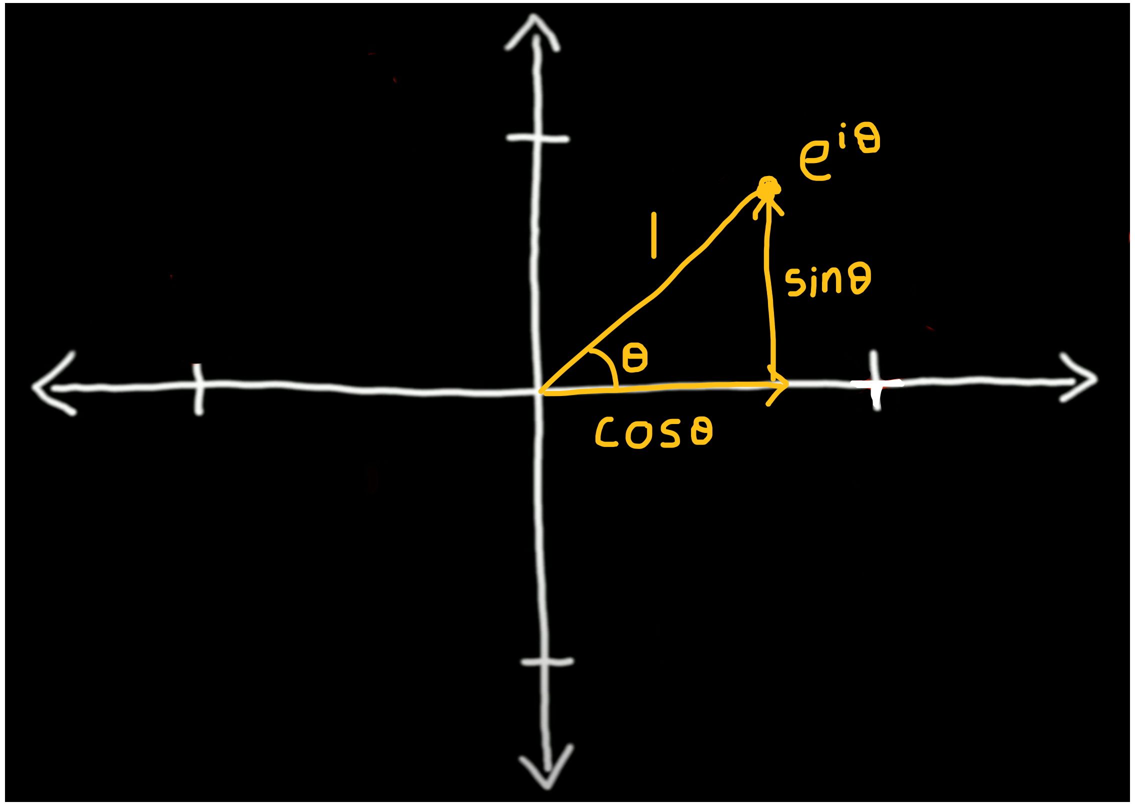
- 신호처리, 주기현상에 많이 사용되는 수식 : $e^{i2\pi ft}$
조금 어려워 보이지만..

- $e^{i2\pi f}$ 은 모두 상수!
  → $t$에 따라 상태가 변하는(지수화 되는) 함수라고 생각하면 됨

# Complex Number

- $cos\theta, sin\theta$

$$e^{i\theta} = cos\theta + \sin\theta i$$

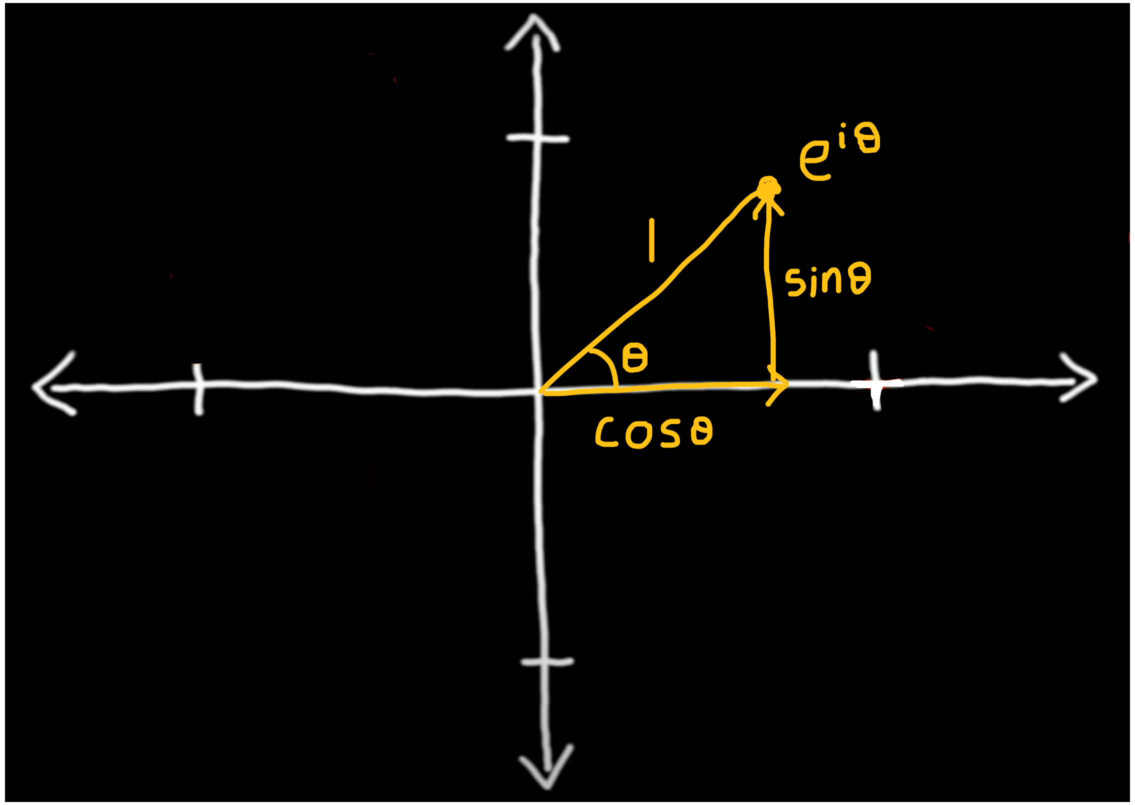


# Complex Number

- $cos\theta, sin\theta$

$$\boxed{e^{i\theta} = cos\theta + \sin\theta i}$$

오일러 공식



# Complex Number

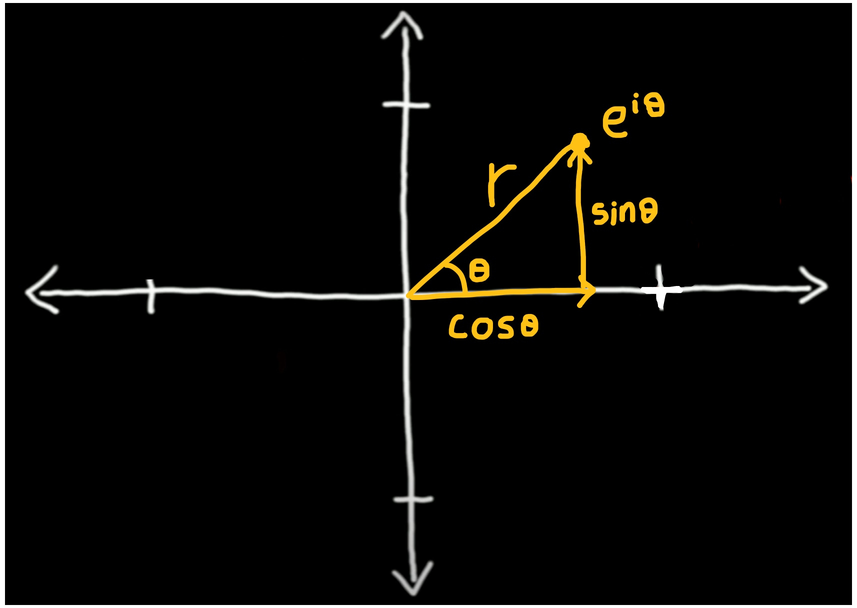
- $cos\theta, sin\theta$

$$\boxed{x + yi = e^{i\theta} = cos\theta + \sin\theta i}$$

오일러 공식

반지름이 r 일 때로 확장해서 나타내면 모든 복소수에 대해 오일러 공식으로 표현 가능

$$re^{i\theta} = rcos\theta + \mathrm{r}\sin\theta i$$



# Complex Number

반지름이 r 일 때로 확장해서 나타내면 모든 복소수에 대해 오일러 공식으로 표현 가능

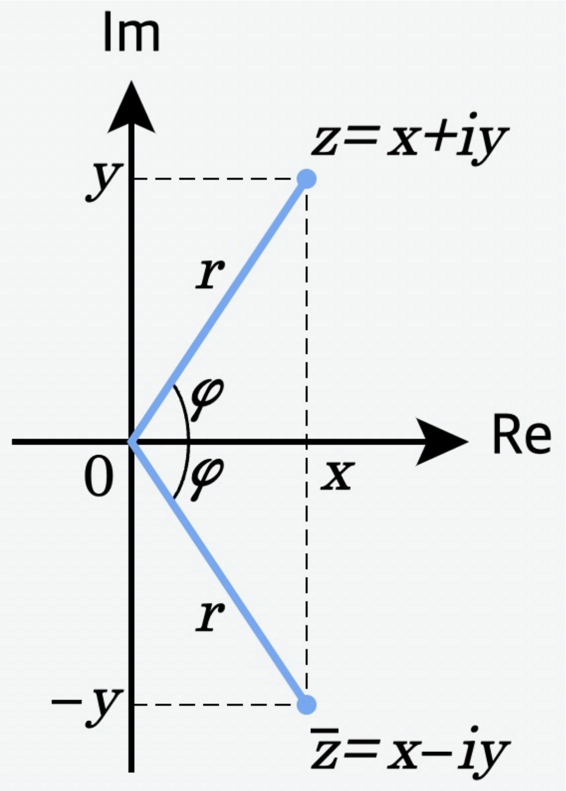
$$re^{i\theta} = rcos\theta + \mathrm{rsin}\theta i$$

Cartesian Form: $z = x + yi$ Polar Form: $z$= $re^{i\theta}$

$\bar{z} = x - yi$ $\bar{z} = re^{i-\theta}$

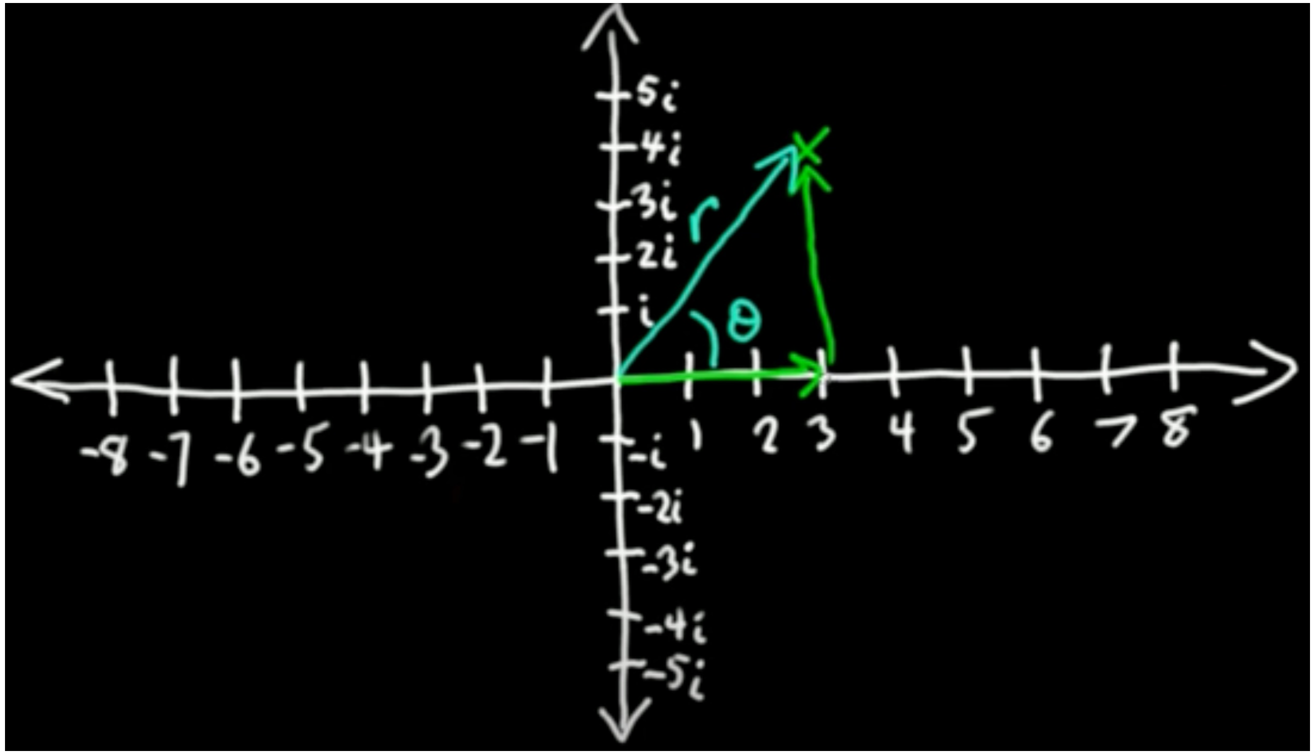
z의 절대값 크기는 켤레 복소수의 곱으로 구할 수 있음

$$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{r^2 e^{i\theta - i\theta}} = r$$



# Complex Number

- 삼각함수의 가장 유용한 응용 → 주기현상 연구

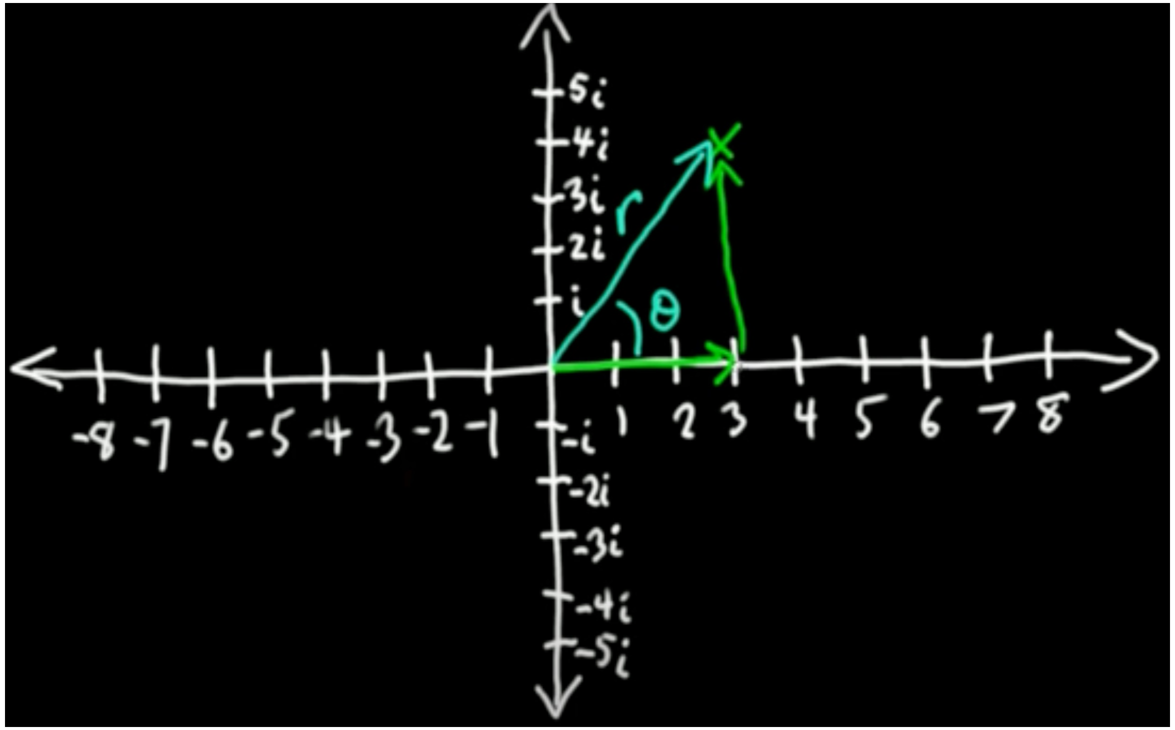



- 좌표 표기법: (3, 4)
- 대수 표기법: 3+4i
- 삼각함수 표기법: 3cos$\theta$+4sin$\theta$
- 극좌표 : $r\angle\theta, re^{i\theta}$

- **각 표기법은 상황에 따라 유용함**
  - 직교 좌표: 덧셈 뺄셈에 편리
  - 극 좌표: 나눗셈 곱셈에 편리

# Complex Number

- 복소수의 원점으로부터 거리를 나타내는 용어들
  - Distance from origin (원점)
  - Radius (반지름)
  - Magnitude (크기)
  - Modulus (모듈러)
  - Amplitude
  - Absolute value (절댓값)




- 각도 $\theta$를 나타내는 많은 용어들
  - Angle
  - Argument
  - phase

# Complex Number

- 켤레 복소수(Conjugate Complex Number)
  - 복소수 $z = a + bi$ 에 대해 켤레 복소수는 $\bar{z} = a - bi$로 표기됨

- 켤레 복소수의 성질$(z = a + bi, \bar{z} = a - bi)$
  1. $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$
  2. $z = 0$ 이라면, $\bar{z} = 0$
  3. $Re(z) = R(\bar{z}) = a$
  4. 만약 $Im(z) = 0$ 이라면, $z = \bar{z}$

- 켤레 복소수 → 복소수의 역수를 계산하는데 쓰임

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$
$$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

# Complex Number

- Bloch Sphere

- 기존 복소수는 실수+복소수의 2차원 공간을 가짐
- Quantum Computer에서 사용되는 양자는 3차원에서 구성되므로 3차원 공간이 필요함 → Bloch Sphere을 사용

# Complex Number

- 양자 상태 표현

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad a, b \in C, \qquad \||\psi\rangle\|_2 = 1$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= r_0 e^{i\phi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\phi_1}|1\rangle = |\psi\rangle \\ &= e^{i\phi_0}(r_0|0\rangle + r_1 e^{i\phi_1 - i\phi_0}|1\rangle) \\ &\approx r_0|0\rangle + r_1 e^{i\phi_1 - i\phi_0}|1\rangle \end{aligned}$$

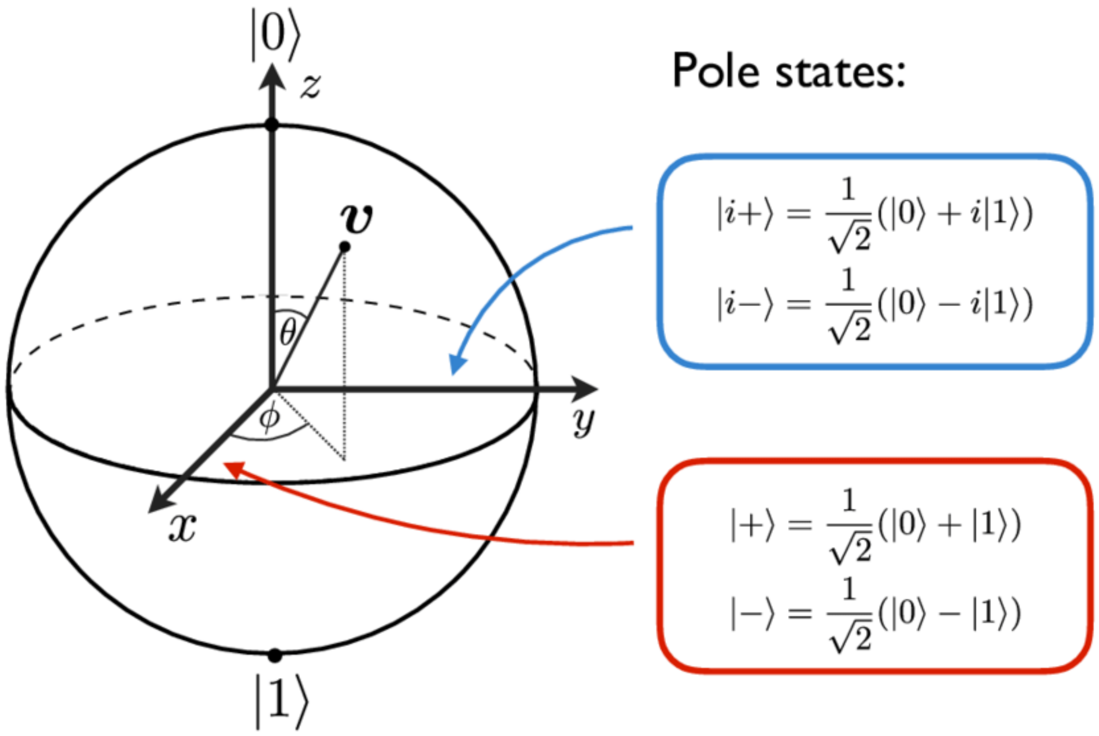
* $e^{i\phi 0}$은 0과 1 확률 진폭에 영향을 주지 않으므로 버릴 수 있음

$$\begin{aligned} \langle\psi||\bar{\psi}\rangle &= r_0^2 + r_1^2 e^{i\phi - i\phi} \\ &= r_0^2 + r_1^2 = 1 \end{aligned}$$

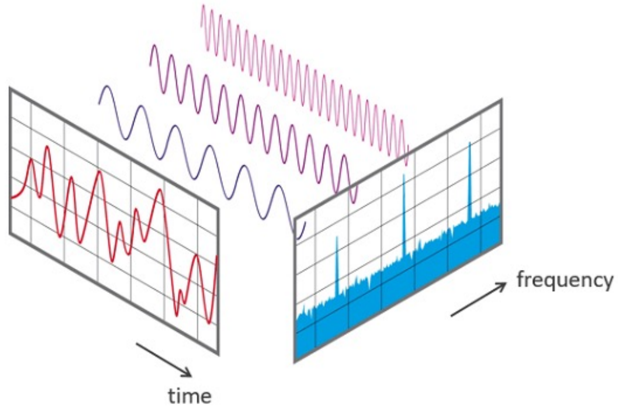
여기서, $r_0$은 $\cos\theta$, $r_1$은 $sin\theta$ 이므로

$$cos\frac{\boxed{\theta}}{2}|0\rangle + sin\frac{\theta}{2}e^{\boxed{i\phi}}|1\rangle$$

$\theta, i, \phi$ 의 3차원으로 표현됨



# Quantum Fourier Transformation




- Fourier Transform

  시간에 관한 파동함수를 빈도에 대한 분석 형태로 바꿔준다.

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} dt$$

  - 일반적인 파동들은 불규칙한 Signal 또한 무수한 cos, sin 파동의 조합으로 표현이 가능하다.
  - Fourier Transform을 이용하면 cos, sin 함수를 통해 진폭 및 주기에 대한 분석 가능

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N} \eta_i (\cos(2\pi t k_i) + i \sin(2\pi t k_i))$$

$\eta_i$: 진폭, $k_i$: 주기

  - 분석을 통해 신호의 원래 구성을 분석할 수 있음

# Quantum Fourier Transformation

- Quantum Fourier Transform

  양자는 파동과 물질의 두가지 성질을 가지는데, 물리학에서 관측전의 양자 상태를 파동으로 생각하므로 파동함수 형태로 나타낼 수 있음

  - 양자컴퓨터에서 Fourier Transform을 하는 이유는 양자 상태를 분석하기 위함

$$|\text{State in Computational Basis}\rangle \xrightarrow{\text{QFT}} |\text{State in Fourier Basis}\rangle$$

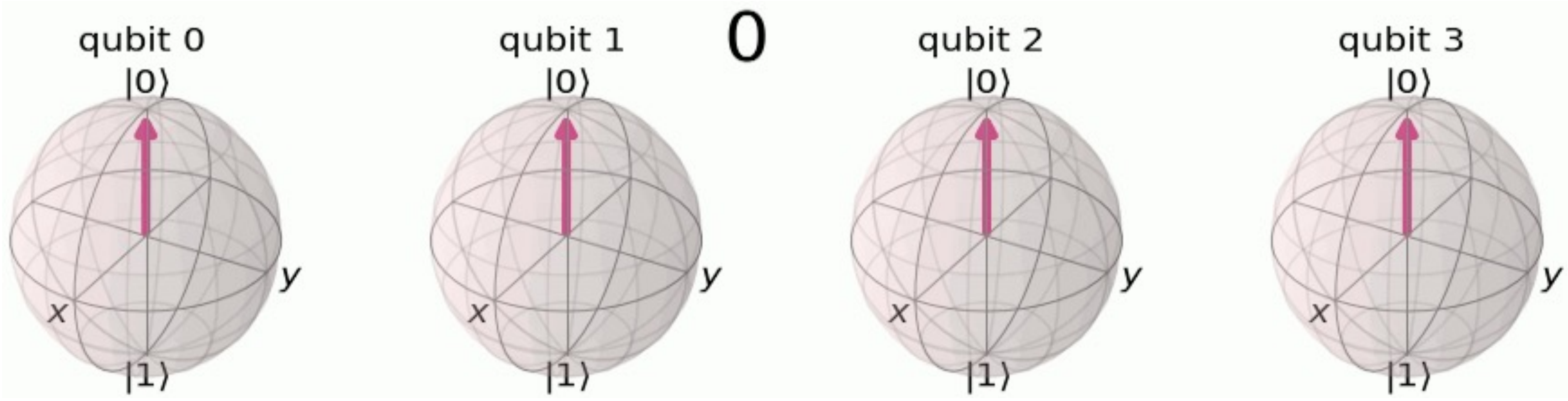
$$\text{QFT}|x\rangle = |\tilde{x}\rangle$$

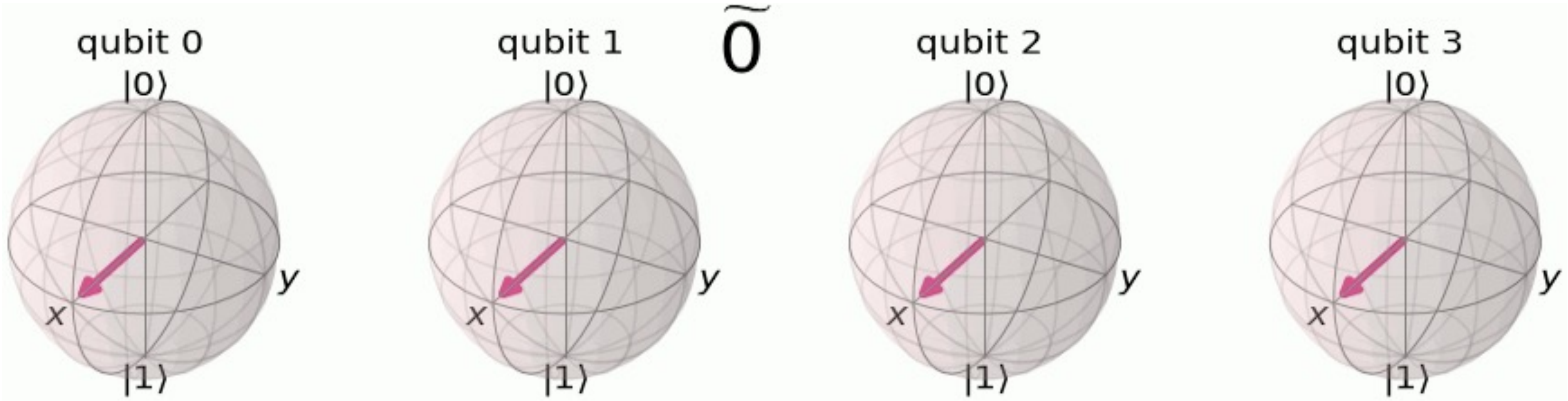
  - n개의 Qubits: $|\psi\rangle = \sum^{2^n-1}{}_{j=0} a_j \mid j\rangle_n = \sum^{N}{}_{j=0} a_j \mid j\rangle_n$ $\quad \alpha_j$: 진폭, $|j\rangle_n$: basis

  - Qubits는 $QFT_n :\mid \psi\rangle = \sum^{N-1}{}_{j=0} a_j \mid j\rangle_n \rightarrow \sum^{N-1}{}_{j=0} b_j \mid j\rangle_n$ 로 맵핑된다.

    where $b_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum^{N-1}{}_{k=0} a_k e^{\frac{2\pi jki}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum^{N-1}{}_{k=0} a_k \omega^{jk}$

# Quantum Fourier Transformation



# Q & A