Ejercicios de Introducción al Análisis Real

"Lo que es trivial hay que demostrarlo, porque lo que no es trivial yo no lo demuestro"

Omar Duque

Iván Felipe Salamanca
isalamancam@unal.edu.co

Edgar Santiago Ochoa
eochoaq@unal.edu.co

Mateo Andrés Manosalva
mmanosalva@unal.edu.co

Contenido

Espacios métricos

El curso de Introducción al Análisis Real es uno de los más pesados en la carrera de matemáticas y los estudiantes carecen casi que de toda ayuda (no hay monitorias y los espacios en clase a veces son insuficientes), por estos motivos decidimos hacer este solucionario de las notas de Introducción al Análisis Real de los profesores Leonardo Rendón y Serafín Bautista, esto más que un solucionario es una guía de lectura de las notas, aquí encontrarás muchos de los conceptos o ideas del curso desde un punto de vista más de estudiante que ha sufrido esa materia y que sabe lo compleja que puede llegar a ser.

Esperamos que las soluciones de los ejercicios que aportamos acá sirvan de guía para entender los conceptos y mecanismos que se deben usar para atacar este tipo de problemas.

Muchos éxitos - mmanosalva y eochoaq

1.1 Algunos ejercicios al lector:

- Probar que $(\mathbb{R}^n, d_1)$ y $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ son espacios métricos.

  Demostración. • Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$d_1(p,q) = \sum_{k=1}^{n} |p_k - q_k|$$

Luego como $|p_k - q_k| \geq 0$, $d_1(p,q) \geq 0$ (estamos sumando valores positivos). Ahora si $d_1(p,q) = 0$, como $|p_k - q_k| \geq 0$ entonces $|p_k - q_k| = 0$ para todo k, luego $p_k = q_k$ para todo k, es decir $p = q$, además note que

$$d_1(p,q) = \sum_{k=1}^{n} |q_k - p_k| = d_1(q,p)$$

Esto ya que $|p_k - q_k| = |q_k - p_k|$, Ahora veamos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned} d_1(p,q) &= \sum_{k=1}^{n} |p_k - q_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |p_k - q_k + r_k - r_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |p_k - r_k| + \sum_{k=1}^{n} |r_k - q_k| = d_1(p,r) + d_1(r,q) \end{aligned}$$

• Nuevamente tomamos $p, q \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$d_\infty(p,q) = \max_{1\leq k\leq n} |p_k - q_k|$$

como $|p_k - q_k| \geq 0$ pues es claro que el máximo será mayor igual que 0 y por tanto $d_\infty(p,q) \geq 0$. Como $|p_k - q_k| = |q_k - p_k|$:

$$d_\infty(p,q) = \max_{1\leq k\leq n} |q_k - p_k| = d_\infty(q,p)$$

Ahora si $max_{1\leq k\leq n}|q_k - p_k| = 0$, $|p_k - q_k| = 0$ para todo k (si el máximo el 0 los demás también por definición de máximo) y como $|p_k - q_k| = 0$ para todo k, pues $p_k = q_k$ para todo k, es decir $p = q$. Veamos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned} d_\infty(p,q) &= \max_{1\leq k\leq n} |p_k - q_k| \\ &= \max_{1\leq k\leq n} |p_k - q_k + r_k - r_k| \\ &\leq \max_{1\leq k\leq n} |p_k - r_k| + \max_{1\leq k\leq n} |r_k - q_k| \\ &\leq d_\infty(p,r) + d_\infty(r,q) \end{aligned}$$

□

- Sea X un conjunto no vacío y $f : X \to \mathbb{R}$. Diremos que f es una función acotada si existe $k > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene $|f(x)| \leq k$. Consideremos el conjunto $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada }\}$. Definamos:

$$\begin{aligned} d : B(X) \times B(X) &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto d(f,g) \end{aligned}$$

donde $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$. Entonces $(B(X), d)$ es un espacio métrico.

Demostración. Es inmediato que $d(f,g) \geq 0$ por definición de supremo y porque $|f(x) - g(x)| \geq 0$. Como $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, entonces también se tiene que $d(f,g) = d(g,f)$.

Tenemos que $|f(x) - g(x)| \geq 0$, luego por definición de supremo si $\sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = 0$, entonces $|f(x) - g(x)| = 0$ para todo $x \in X$, así $f = g$, o sea si $d(f,g) = 0$, entonces $f = g$. Veamos ahora la desigualdad triangular :

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |f(x) - g(x) + h(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in X} |h(x) - g(x)| \\ &= d(f,h) + d(h,g) \end{aligned}$$

Esto ya que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$

$\square$

- Dado (E,d) un espacio métrico, toda bola abierta es un conjunto abierto. En efecto, dados $B_E(p,r)$ (con $r>0$ y $p\in E$) y $q\in B_E(p,r)$, tomamos $r'=r-d(p,q)$ de donde se tiene que $B_E\left(q,r'\right)\subset B_E(p,r)$ (verifique esta contenencia como ejercicio).

  Demostración. Sea $x\in B_E(q,r')$, entonces:

$$\begin{aligned} d(p,x) &\leq d(p,q)+d(q,x) \\ &\leq r-d(q,x)+d(q,x) \\ &\leq r \end{aligned}$$

  Luego el punto $x\in B_E(p,r)$ y se tiene la contenencia

  $\square$

  Note que la prueba no debe depender del dibujo, sin embargo hacer dibujos puede ser de ayuda para tener una idea de la demostración, como ocurrió en este caso

Teorema 1.1 (Teorema 9)**.** Dado (E,d) en espacio métrico, tenemos que:

1) E es cerrado
2) $\emptyset$ es cerrado
3) Unión finita de cerrados es cerrada.
4) Intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

Demostración.

- Note que $E^C=\emptyset$ luego el complemento de E es abierto.
- Por definición E es abierto, luego $\emptyset$ es cerrado.
- Consideremos C_i una familia de cerrados, luego

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)^C=\bigcap_{i=1}^{n} C_i^C$$

  Y como intersección finita de abiertos es abierto, entonces acabamos.
- Nuevamente consideremos C_i una familia de cerrados, entonces:

$$\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^C=\bigcup_{i\in I} C_i^C$$

  Y como unión arbitraria de abiertos es abierto, entonces acabamos.

$\square$

- Sea (E,d) un espacio métrico $\{p\}=\bigcap_{r>0}B[p,r]$

  Demostración. Suponga que $\{p\}\neq\bigcap_{r>0}B[p,r]$, luego existe $x\in\bigcap_{r>0}B[p,r]$ tal que $x\neq p$, entonces $x\in B[p,r]$ para todo $r>0$, pero $x\neq p$, por tanto $d(x,p)>0$, así existe $0<r<d(x,p)$ tal que $x\notin B[p,r]$, contradicción. $\square$

1.1.1. Quiz 4:

- $\mathbb{Q}$ es abierto en $(\mathbb{R}, d_1)$.

  Falso: Observamos que vía la definición de abierto $\mathbb{Q}$ no puede ser abierto ya que toda bola con centro en un racional va a tener irracionales dentro que no están en $\mathbb{Q}$ y por tanto la bola no está contenida en $\mathbb{Q}$, luego no es abierto.

  De hecho es la forma de argumentar esto, vía la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ que ya conocemos de los cursos anteriores.

  De manera más formal para todo $r > 0$, $B(q, r) = (q - r, q + r) \not\subseteq \mathbb{Q}$, ya que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

  Esto ocurre ya que estamos tomando bolas en $\mathbb{R}$. (Este argumento es para la métrica usual).

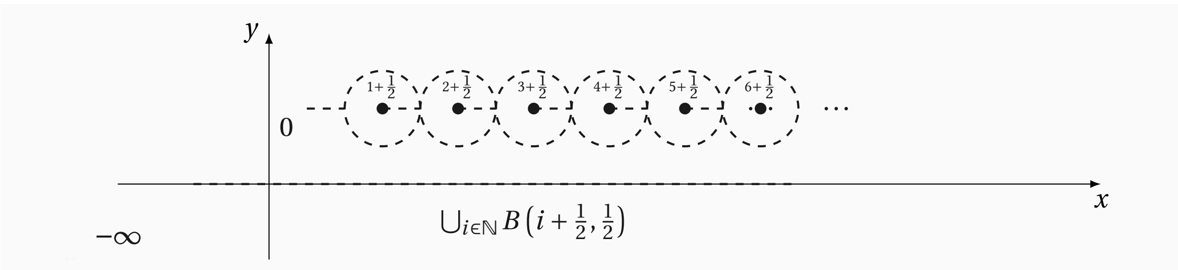
- $\mathbb{Q}$ es abierto en $(\mathbb{R}, d_d)$.

  Demostración. Sea $q \in \mathbb{Q}$, consideremos $B(q, \frac{1}{2})$ entonces como estamos en la métrica discreta $B(q, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} : d_d(q, x) < \frac{1}{2}\} = \{q\}$ por definición de la métrica y como podemos hacer esto para todo $q \in \mathbb{Q}$ y un conjunto es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas, razonando inductivamente acabamos. $\square$

- $B\left(0, \frac{1}{2}\right) = B\left[0, \frac{1}{4}\right]$ en $(\mathbb{R}, d_d)$.

  Verdadero: $B(0, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} : d_d(0, x) < \frac{1}{2}\} = \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : d_d(0, x) \leq \frac{1}{4}\} = B[0, \frac{1}{4}]$

- $\mathbb{N}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, d_1)$.



  Demostración. Para ver que los naturales son cerrados con d_1, veamos que su complemento es abierto. Observe que:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 0) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B\left(i + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

  Note que esas bolas son abiertas y unión arbitraria de abiertos es abierto, efectivamente esas bolas cubren $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ entonces acabamos.

  $\square$

- Todo conjunto es abierto y cerrado en $(\mathbb{R}, d_d)$.

  Demostración. Sea $X \subseteq R$ en (R, d_d), X es abierto ya que:

$$X = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

Y $\mathbb{R} \setminus X$ también ya que:

$$\mathbb{R} \setminus X = \bigcup_{j \in \mathbb{R} \setminus X} B\left(j, \frac{1}{2}\right)$$

Luego X es cerrado ya que su complemento es abierto, estos conjuntos los llamaremos **clopen** para simplificar en algunos casos. □

Note que podemos escoger cualquier $r \leq 1$ y la prueba se mantiene.

- El conjunto $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ es cerrado en $\left(\left[0, \frac{1}{2}\right), d_1|_{[0,\frac{1}{2})\times(0,\frac{1}{2})}\right)$

  Falso: Queremos ver que $[0, \frac{1}{4})^C = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ no es abierto, note que $B(\frac{1}{4}, r) = (\frac{1}{4} - r, \frac{1}{4} + r)$ para todo $r > 0$ no está contenida en $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, entonces $[0, \frac{1}{4})$ no es cerrado en $([0, \frac{1}{2}), d|_{[0,\frac{1}{2})\mathrm{x}[0,\frac{1}{2})})$

- Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E_1 \subset E$. Si A es abierto en $\left(E_1, d|_{E_1 \times E_1}\right)$, entonces A es abierto en (E, d).

  Falso: El conjunto $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ es abierto en $\left(\left[0, \frac{1}{2}\right), d_1|_{[0,\frac{1}{2})\times[0,\frac{1}{2})}\right)$, pero no en (R, d_1)

- Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E_1 \subset E$. Si A es abierto en (E, d), entonces A es abierto en $\left(E_1, d|_{E_1 \times E_1}\right)$.

  Demostración. Sea A abierto en (E, d), entonces:

  $$A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$$

  Luego:

  $$A \cap E_1 = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a) \cap E_1$$

  Y sabemos que $B(a, r_a) \cap E_1$ es abierto en E_1 y como unión arbitraria de abiertos es abierto $A \cap E_1$ es abierto, es decir A es abierto en E_1.

  □

Y acabamos esta sección.

1.1.2. Quiz 5:

- $\mathbb{Q}' = \emptyset en\, (\mathbb{R}, d_d)$.

  Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ entonces $(B(x, \frac{1}{3}) \setminus \{x\}) = \emptyset$, luego $(B(x, \frac{1}{3}) \setminus \{x\}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, por tanto $\mathbb{Q}' = \emptyset$. □

- $\overline{\mathbb{N}} = \emptyset$ en $(\mathbb{R}, d_1)$.

  Falso: Sabemos que S es cerrado si y solo si $\overline{S} = S$, antes probamos que $\mathbb{N}$ en $(\mathbb{R}, d_1)$ es cerrado luego

  $$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$$

- $\partial\mathbb{Q} = \emptyset$ en $(\mathbb{R}, d_1)$.

  Falso: Sabemos que $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ y como $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ son densos en $\mathbb{R}$ entonces $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$, así $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

- $[0,1)' = [0,1)$ en $\left([0,1), d_1|_{(0,1)\times[0,1)}\right)$.

  Demostración. Tenemos que $x \in [0,1)'$ si y solo si $x \in \overline{[0,1) - \{x\}}$, observe que:

$$
\begin{aligned}
\overline{[0,1) - \{x\}} &= [0,1) \setminus int([0,1] \setminus ([0,1) \setminus \{x\})) \\
&= [0,1) \setminus int(\{x\}) \\
&= [0,1) \setminus \emptyset
\end{aligned}
$$

  En efecto si $x \in [0,1)$, $x \in [0,1)'$ □

- $\partial\mathbb{R} = \emptyset$ en $(\mathbb{R}, d_1)$.

  Verdadero: $\partial\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \cap \overline{\emptyset} = \mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset$

- $\mathbb{R}' = \emptyset$ en $(\mathbb{R}, d_d)$.

  Demostración. Como en las pruebas anteriores note que si $r \leq 1$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, $B(x,r) \setminus \{x\} = \emptyset$ y por tanto $B(x,r) \setminus \{x\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$, luego $\mathbb{R}' = \emptyset$ □

- Sean (E,d) espacio métrico, $a \in E$ y $r > 0$. Entonces $\overline{B(a,r)} = B[a,r]$.

  Falso: Sea $(\mathbb{R}, d_d)$ los reales con la métrica discreta, luego:

$$
\overline{B(0,1)} = \overline{\{0\}} = \{0\}
$$

  Mientras que:

$$
B[0,1] = \mathbb{R}
$$

- $\mathbb{N}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, d_\infty)$.

  Demostración. Tenemos que:

$$
d_1(p,q) = \sum_{k=1}^{n} \left| p_k - q_k \right|
$$

  y

$$
d_\infty(p,q) = \max_{1\leq k\leq n} \left| p_k - q_k \right|.
$$

  Pero como en este caso estamos en $\mathbb{R}$, entonces

$$
d_1(p,q) = |p-q| = d_\infty(p,q)
$$

  Entonces como $\mathbb{N}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, d_1)$, también es cerrado en $(\mathbb{R}, d_\infty)$

  □

- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado en $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, entonces A es cerrado en $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

  Demostración. Tenemos que A es cerrado en $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, luego A^C es abierto en $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, así para todo $x \in A^C$ existe un r_x tal que:

$$B_\infty(x, r_x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_\infty(x, y) < r_x\} \subseteq A^C$$

  Ahora supongamos que A no es cerrado en $(\mathbb{R}^n, d_1)$, luego A^C no es abierto en $(\mathbb{R}^n, d_1)$, es decir, existe $a \in A^C$ tal que para todo $r > 0$:

$$B_2(a, r) \nsubseteq A^C$$

  En particular $B_2(a, r_a) \nsubseteq A^C$, pero como $d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) < r_a$, entonces $B_2(a, r_a) \subseteq B_\infty(a, r_a) \subseteq A^C$, contradicción.

  □

1.1.3. Ejercicios adicionales.

Nota. los siguientes ejercicios fueron propuestos en 2022-2 en un parcial de Análisis, el propósito de esta sección es que sirva para que el estudiante pueda hacerse una idea del modelo de preguntas que se suelen hacer y esté preparado

En cada caso determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero demuéstrelo de lo contrario dé un contra ejemplo.

- Si $A \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado y acotado inferiormente en $\mathbb{R}$ con la métrica usual $|x - y|$ entonces A tiene elemento mínimo.

  Demostración. Supongamos que A es acortado inferiormente en $\mathbb{R}$, entonces existe $i = \text{ínf}(A)$, veamos que $i \in A$. Supongamos que $i \notin A$, entonces $i \in \mathbb{R} \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto porque A es cerrado, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(i, \epsilon) = (i - \epsilon, i + \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, por otro lado como $i = \text{ínf}(A)$ existe $b \in A$ tal que $i \leq b < i + \epsilon$, luego $b \in (i - \epsilon, i + \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Contradicción, luego $i \in A$, es decir $i = \text{mín}(A)$.

  □

- Sean (X, d) un espacio métrico y A, B subconjuntos de X tales que $int(A) \subseteq B \subseteq \bar{A}$ entonces $\bar{B} = \bar{A}$.

  Falso: Contraejemplo: Sean $(\mathbb{R}, d_1)$, $\mathbb{N} = A$ y $\{0\} = B$, entonces como $int(\mathbb{N}) = \emptyset$, es claro que $int(\mathbb{N}) \subseteq \{0\}$, por otro lado $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ ya que $\mathbb{N}$ es cerrado, y $\overline{\{0\}} = \{0\}$, en efecto $\{0\} \neq \mathbb{N}$.

- Si (X, d) es un espacio métrico entonces $d'(x, y) = d^2(x, y)$ también define una métrica en X^2.

  Falso: Contraejemplo: Tome $(\mathbb{R}, d_1)$, veamos que $(\mathbb{R}, d_1^2)$ no es un espacio métrico. Note que $d_1^2(3, 1) > d_1^2(3, 2) + d_1^2(2, 1)$ $(4 > 1 + 1)$, lo que contradice la desigualdad triangular

- (X, d) un espacio métrico y $\left(A_j\right)_{j \in J}$ una familia de subconjuntos de X. Si $a \in \overline{A_j}$ para todo $j \in J$ entonces $a \in \overline{\bigcap_{j \in J} A_j}$.

  Falso: Contrajemplo: Sean $\mathbb{Q}, \mathbb{I}$, en $(\mathbb{R}, d_1)$, y sea $x = \sqrt{2}$, como $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ y $x \in \overline{\mathbb{I}}$, sin embargo $x \notin \overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$

- Sean:
  - X el espacio de las funciones acotadas $f : I \to \mathbb{R}$ definidas en el intervalo real $I = [0, 1]$,
  - d la métrica definida en X^2 por $d(f, g) = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|$,
  - $f_0(x) = x^2, f_n(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(2\pi nx)}{2\pi n}$ con $n \in \mathbb{Z}^+, x \in I$ y
  - $B\left(f_0, \frac{3}{2}\right) = \left\{f \in X : d\left(f, f_0\right) < \frac{3}{2}\right\}$ entonces $f_n \in B\left(f_0, \frac{3}{2}\right)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

  Demostración. Queremos ver que $f_n \in B(f_0, \frac{3}{2})$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, es decir que $d(f_n, f_0) < \frac{3}{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, luego por la definición de la métrica:

$$
\begin{aligned}
d(f_n, f_0) &= \sup_{x\in I} \left| x^2 - \frac{x^2 sen(2\pi nx)}{2\pi n} \right| \\
&= \sup_{x\in I} \left| x^2 \left(1 - \frac{sen(2\pi nx)}{2\pi n}\right) \right| \\
&\leq \sup_{x\in I} \left| 1 - \frac{sen(2\pi nx)}{2\pi n} \right| && (x^2 \leq 1) \\
&\leq \left| 1 + \frac{1}{2\pi n} \right| && (-1 \leq sin(\theta) \leq 1) \\
&< \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

  Ya que $0 < \frac{1}{2\pi n} < \dfrac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

  □

  Nota. cuando decimos métrica sobre X^2 queremos decir que la métrica va del producto cartesiano X x X en $\mathbb{R}$, no confundir con X^2 x X^2

  Nota. Los siguientes ejercicios fueron propuestos en 2023-1 en el primer parcial de análisis:

Sean (X, d) es un espacio métrico y A es un subconjunto de X. En cada caso determine si la proposición es verdadera o falsa y demuéstrela o dé un contra-ejemplo según sea el caso.

- $X = \overline{A} \cup A^C$

  Demostración. Sabemos que $\overline{A} = X \setminus int(A^C)$. En efecto $X \setminus int(A^C) \cup A^C = X$ ya que $int(A^C) \subseteq A^C$ □

- $\partial(\partial A) = \partial A$

  Falso: Contraejemplo: Considere $(\mathbb{R}, d_1)$, sabemos que $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ y que $\partial\mathbb{R} = \emptyset$, luego $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \neq \partial(\partial\mathbb{Q}) = \partial\mathbb{R} = \emptyset$

- $X = int(A) \cup \partial(A) \cup A^C$

  Demostración. Tenemos que $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^C}$, luego

$$\begin{aligned} int(A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A^C}) \cup A^C &= int(A) \cup (\overline{A} \cup A^C \cap \overline{A^C} \cup A^C) \\ &= int(A) \cup (X \cap (X \setminus int(A) \cup A^C)) \\ &= int(A) \cup (X \setminus int(A)) \\ &= X \end{aligned}$$

□

Nota. Aquí usamos varias de las propiedades de las notas en el capítulo del concepto de clausura, derivado y frontera, note que además usamos la propiedad anterior en la prueba cuando afirmamos que $\overline{A} \cup A^C = X$, note también que usamos que $(A^C)^C = A$ pero pues ustedes ya vieron conjuntos allí.

- $int(int(A)) = int(A)$

  Demostración. Tenemos que $int(A)$ es abierto, luego como un conjunto es abierto si y solo si es igual a su interior entonces $int(int(A)) = int(A)$ □

- Si ∂A es abierto entonces $A = \emptyset$

  Falso: Contraejemplo: Considere (R, d_1), luego $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es abierto pero $\mathbb{Q} \neq \emptyset$.

- Si $X = \mathbb{R}^n$ y A es d_1-abierto entonces A es d_2-abierto.

  Demostración. Suponga que A es d_1-abierto, entonces para todo $x \in A$, existe r tal que:

  $$B_1(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_1(x, y) < r\} \subseteq A$$

  Y como $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$, entonces existe r' $B_2(x, r') \subseteq B_1(x, r) \subseteq A$, luego A es d_2-abierto

  □

  Nota. Para este caso estamos usando la definición de métrica equivalente, note que si $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $d_1(x, y) \leq C d_2(x, y)$, luego eso es lo que nos garantiza la existencia de ese radio r' de tal manera que $B_2(x, r') \subseteq B_1(x, r)$.

  Nota. Note que en las notas hace falta hacer énfasis en esta definición, sin embargo este tipo de detalles se suelen cubrir en clase, en cualquier caso el lector puede buscar en algún medio externo la definición de métrica equivalente y notar este detalle sutil.

- Si $A \subseteq Y \subseteq X$ y A es Y-abierto entonces A es X-abierto.

  Falso: Contraejemplo: Si $E = \mathbb{R}$ con $d(x, y) = |x - y|$ el conjunto $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ no es abierto en $\mathbb{R}$ pero es abierto en $\left(E_1, d|_{E_1 \times E_1}\right)$ con $E_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Simplemente observe que $B_{E_1}\left(0, \frac{1}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right)$.

- Si $x \in X$ entonces para todo $r > 0$ se tiene que $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$.

  Falso: Contraejemplo: Sea $(\mathbb{R}, d_d)$, entonces $\overline{B(0, 1)} = \overline{\{0\}} = 0$ ya que $\{0\}$ es cerrado con la métrica discreta, pero $B[0, 1] = \mathbb{R}$, luego no son iguales.

Nota. Sobre este parcial como se puede notar los ejercicios no son tan complejos si se nos permite usar las propiedades de las notas (que se ven también en clase), pero es probable que para ser usadas en el parcial el estudiante deba demostrarlas, en cuyo caso recomendamos entender muy bien las ideas de cada una de las pruebas, la idea nunca es memorizar las pruebas o las propiedades sino entender un poco la geometría del asunto y las ideas principales de cada prueba.

1.2 El conjunto de Cantor

Nota. En esta sección solo trataremos el problema de probar que el conjunto de cantor es perfecto, es decir que todo elemento del conjunto pertenece a su derivado. Quizás luego pongamos un diagrama de la prueba de que no es contable, un resultado más fuerte que quizás se podría sugerir es revisar la prueba de que todo conjunto perfecto no puede ser contable.

- El conjunto de Cantor es perfecto:

  Demostración. Para demostrar que el conjunto de Cantor C es perfecto, para cada $x \in C$ y para cada $\epsilon > 0$ se debe encontrar un punto $y \in C - \{x\}$ tal que $|x - y| < \epsilon$.

  Para buscar y, recordemos que C se construye como la intersección de conjuntos $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ donde C_n es una unión de 2^n intervalos disjuntos cada uno de longitud 3^{-n}, y recordemos también que C tiene intersección no vacía con cada uno de esos 2^n intervalos.

  Elija n tal que $3^{-n} < \epsilon$. Sea $[a, b]$ el intervalo de C_n que contiene a x. Cuando se quita el tercio medio de $[a, b]$, se obtienen dos intervalos $\left[a, b'\right], \left[b'', b\right]$ de C_{n+1}. El punto x está contenido en uno de esos dos intervalos, y hay un punto $y \in C$ que está contenido en el otro de esos dos intervalos. Por lo tanto, $y \neq x$ y $|x - y| < \epsilon$. □

  Nota. Enlace para ver la prueba de que todo conjunto perfecto no es contable:

  Enlace.

1.3 Sucesiones

Este capítulo es cosa densa, mucho cuidado.

1.3.1. Algunos ejercicios al lector:

En esta sección también hay algunos ejercicios que el libro dice que son triviales,pero lo que es trivial hay que demostrarlo.

- Es fácil demostrar que $n_k \geq k$ (Inducción)

  Demostración. Supongamos que la secuencia comienza en $k = 1$. Entonces, lo más pequeño que puede ser n_1 es 1. Por lo tanto, $n_k \geq k$ es verdadero para $k = 1$. Ahora, asumimos por inducción que $n_k \geq k$ para algún k. Dado que lo más pequeño que puede ser n_{k+1} es $n_k + 1$, obtenemos

  $$n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1.$$

  □

  (Para esta prueba es clave saber que tanto k como n_k son naturales.)

Nota. Note que una subsecesión podría verse como un subconjunto de una sucesión ya que los puntos $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\} \subseteq \{x_1, x_2, \ldots\}$. Esto es lo que nos permite ver que toda subsucesión de una sucesión acotada es acotada.

Nota. En el teorema 10 lo que nos quieren decir es que $S \subseteq E$ es cerrado si y solo si cualquier sucesión convergente en el espacio que es definida en S converge en S, o sea su límite pertenece a S, algo de esperar.

- En la proposición 22 se hace la prueba para sucesiones crecientes pero no decrecientes, veamos ese caso:

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y acotada en $(\mathbb{R}, d_1)$, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada entonces es acotada inferiormente y por lo tanto existe $I = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que el $\lim_{n\to\infty} a_n = I$. Dado $\epsilon > 0$ por la propiedad de aproximación existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $I + \epsilon > a_N$ y como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente

$$I + \epsilon > a_N \geq a_n \quad \text{si } n \geq N$$

Por otro lado $I + \epsilon > a_n > I - \epsilon$ (ya que $I = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$), Así $|a_n - I| < \epsilon$ para todo $n \geq N$, luego $\lim_{n\to\infty} a_n = I$ □

- Ejercicio proposición 23

Teorema 1.2. Proposición 23:

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $(\mathbb{R}, d_1)$, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes, entonces:

- $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

Lema 1.3. Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente (que converge a b), entonces $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y converge a $-b$.

Demostración. Tenemos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y converge a b, es decir para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ $|b_n - b| < \epsilon$, luego:

$$|-b_n + b| = |-1(b_n - b)| = |-1||b_n - b| = |b_n - b| < \epsilon$$

Luego $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y converge a $-b$ □

Con este lema podemos hacer la prueba del teorema solo para $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ ya que el caso de la resta es corolario de esto, note que basta considerar la sucesión $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y usar el resultado para la suma.

Demostración. Tenemos que $(a_n)_{n\in N}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes, es decir para todo $\epsilon > 0$ existen $N_1 \in \mathbb{N}$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n > N_1$ $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ y si $n > N_2$, $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$, luego si $n > \max\{N_1, N_2\}$, entonces.

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

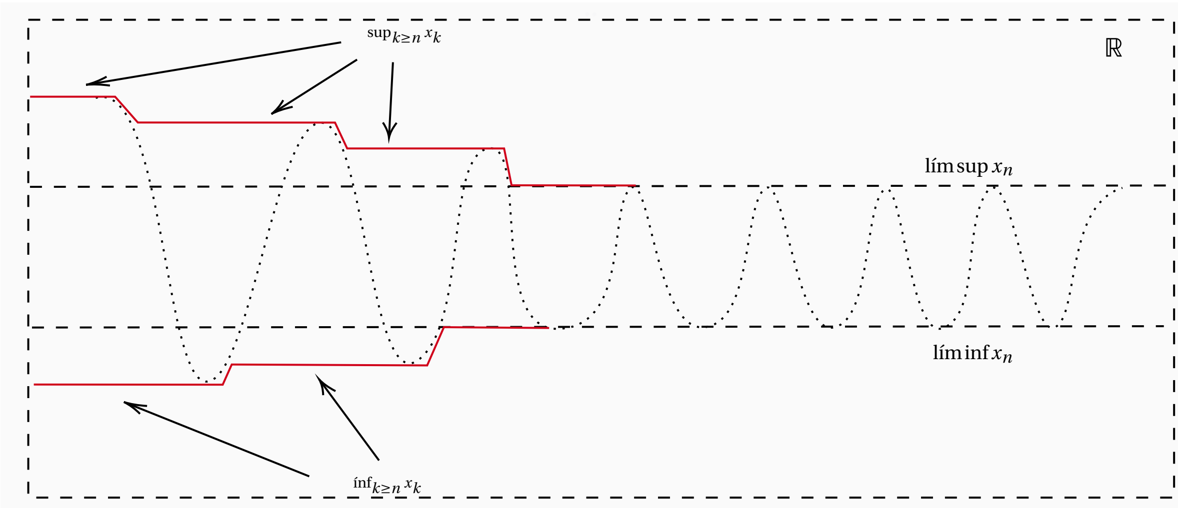
□

Nota. En estas pruebas siempre al escribirlas debemos saber las cotas que vamos a usar, pero esto no significa que siempre debamos ver a ojo que cota usar, usando la definición nos hubiéramos dado cuenta que la suma de las cotas nos iba a dar 2ϵ, por eso escogemos $\frac{\epsilon}{2}$, porque queremos que la suma sea menor que ϵ, en análisis esto se hace para que las demostraciones tengan un mejor estilo, escritura y forma, se supone que con práctica el estudiante debería ser capaz de ver algunas de estas cotas sin mucho esfuerzo, pero si esto no se te da bien no te preocupes, a mí tampoco.

Recordemos que en este punto estamos trabajando con los REALES, ya que vamos a comenzar con el capítulo de límite superior e inferior.

1.3.2. Límite superior y límite inferior:

Esta sección puede resultar confusa en un inicio, aquí trataremos de desglosar un poco la idea fundamental de todo.



Dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en $\mathbb{R}$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $X_n = \{x_k : k \geq n\}$ tomamos

$$\begin{aligned} b_n &= \sup X_n, \text{y} \\ a_n &= \inf X_n. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 \leq \beta.$$

Nota. Todo esto se tiene porque primero estamos en los reales y la sucesión es acotada, podemos garantizar el Sup y el Ínf, note que:

$$X_1 = \{x_1, x_2, \ldots\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{x_2, x_3, \ldots\}$$

Luego $\sup X_1$ o es x_1 o está en X_2 y $\sup X_2$ o es x_2 o está en X_3, luego razonando de esta forma nos damos cuenta que $\sup X_n \leq \sup X_{n-1}$, por eso $b_n \leq b_{n-1}$.

Nota. Todo esto pasa ya que el supremo es mayor o igual que todos los elementos de X_n, luego si el supremo de X_n fuera x_n, entonces el supremo de X_{n+1} sería más pequeño, y en caso de que no fuera x_n, entonces el supremo de X_n y X_{n+1} serían iguales.

Además todos estos $b_n = \sup X_n < \beta$ ya que la sucesión es acotada, para $a_n = \text{ínf} X_n$ se razona de la misma forma para llegar a que $a_n \le a_{n+1}$, espero que esto sea suficiente para entender digamos un poco este tema, es algo que en un inicio cuesta, pero que entenderlo bien es muy muy clave, este tipo de aclaraciones Omar al menos la suele dar en clase, pero en este curso no todos los profesores son tan buenos.

Definición. Definimos el límite inferior (denotado por líminf x_n) y el límite superior (notado por $\limsup x_n)$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\text{lím}\inf x_n = \sup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad y$$
$$\text{lím}\sup x_n = \text{ínf} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

A continuación presentamos una definición un poco más chingona de límites superior e inferior, son equivalentes en realidad las definiciones, pero esta definición es agradable porque nos evita pensar en X_n y desviar nuestra atención.

Definición. Definimos el límite inferior (denotado por liminf x_n) y el límite superior (notado por $\limsup x_n)$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como:

$$\text{lím}\,\text{ínf} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\text{ínf}_{k\ge n} x_k\right)$$
$$\text{lím}\sup x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} x_k\right)$$

No es difícil ver con la definición anterior que ambas son equivalentes, solo observe qué son a_n y b_n en la definición 1.

1.3.3. Quiz 6:

- Sean (a_n) sucesión acotada en $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ y (b_n) una sucesión convergente en $(\mathbb{R}^m, d_2)$. Entonces $(a_n + b_n)$ es acotada en $(\mathbb{R}^m, d_2)$.

- Si la sucesión ($a_n)$ es convergente, con límite no nulo, en $(\mathbb{R}, d_2)$ y $a_{n+1} = 2(a_n)^2 - a_{n-1}$ para $n \ge 3$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

  Demostración. Tenemos que (a_n) es convergente, luego:

$$
\begin{aligned}
a = \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\
&= 2\lim_{n\to\infty}(a_n)^2 - \lim_{n\to\infty} a_{n-1} \\
&= 2a^2 - a \\
&= a(2a-1)
\end{aligned}
$$

Entonces $(2a-1) = 1$, por tanto $a = 1$. □

- Sean (E, d) espacio métrico, (a_n) y (b_n) sucesiones en (E, d). Si $a_n = b_n$ para $n \geq m$ con $m \in \mathbb{N} y (a_n)$ es convergente, entonces (b_n) es convergente.

  Demostración. Tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_n$ para todo $n \geq m$, luego como a_n es convergente, para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > \text{máx}\{N, m\}$, entonces:

  $$|b_n - a| = |a_n - a| < \epsilon$$

  Luego b_n es convergente y además converge a a □

  Nota. Usamos el máximo ya si m es el máximo entonces a partir del punto en que $a_n = b_n$ ya tenemos convergencia, si N es el máximo entonces desde antes de tener convergencia ya teníamos que $a_n = b_n$, luego es conveniente escoger $n > \text{máx}\{N, m\}$, para que se de n en adelante tengamos tanto convergencia como que las sucesiones son iguales.

- Si la sucesión (a_n) es convergente en $(\mathbb{R}^m, d_2)$, entonces $((-1)^n a_n)$ es convergente.

  Falso: Considere $(\mathbb{R}, d_1)$, (note que en $\mathbb{R}$, $d_2 = d_1$), entonces si tomamos una sucesión constante, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n a_n$ no converge, por ejemplo: si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1$, entonces:

  $$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$$

  Vemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, para ello veamos que el límite superior no es igual al límite inferior

  Note que $\text{lím}_{n\to\infty}(\text{ínf}_{k\geq n} x_k) = \text{lím}_{n\to\infty} -a_n = \text{lím}_{n\to\infty} -1 = -1$ y por otro lado el $\text{lím}_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = \text{lím}_{n\to\infty} a_n = \text{lím}_{n\to\infty} 1 = 1$

- $\text{lím}\sup \frac{(-1)^n}{n} = 0$

  Demostración. Observe que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$, entonces si $n > N$:

  $$\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$$

  Luego:

  $$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

  Veamos entonces quien es el $\sup_{k\geq n}\frac{(-1)^n}{n}$.

$$\sup X_2 = \sup\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$
$$\sup X_3 = \sup\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\right\}$$
$$\sup X_4 = \sup\left\{\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$$
$$\sup X_5 = \sup\left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \ldots\right\}$$
$$\vdots$$

Note que si n es par entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Si n es impar:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$$

No es necesario probar este límite ya que probamos el caso general $\frac{1}{n}$ da 0.

□

- $\liminf \frac{(-1)^n n}{n+1} = 1$.

  Falso:

$$\liminf\frac{(-1)^n n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n}\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$$

Veamos entonces quién es el $\inf_{k\geq n}\frac{(-1)^n n}{n+1}$:

$$\inf X_1 = \inf\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots\right\} = -1$$
$$\inf X_2 = \inf\left\{\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\} = -1$$
$$\inf X_3 = \inf\left\{-\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots\right\} = -1$$
$$\inf X_4 = \inf\left\{\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots\right\} = -1$$
$$\inf X_5 = \inf\left\{-\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, -\frac{7}{8}, \ldots\right\} = -1$$
$$\vdots$$

Luego el $\inf_{k\geq n} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ siempre es -1, por tanto:

$$\liminf \frac{(-1)^n n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} \frac{(-1)^n n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

- $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$.

  Primero note que:

  $$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

  Demostración. Para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{4\epsilon^2}$, luego si $n > N$:

  $$\left|\frac{1}{2\sqrt{n}}\right| < \left|\frac{1}{2\sqrt{N}}\right| < \left|\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4\epsilon^2}}}\right| = \epsilon$$

  Luego en efecto $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0$ □

- Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $\overline{A+B} = \bar{A}+\bar{B}$

  Falso: Contraejemplo: Sea $A = \{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$, luego note que $\overline{B} = B$ y $\overline{A} = A$.

  $$A+B = \{(z, e^w) : z, w \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

  Luego $\overline{A+B} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\} \neq \overline{A}+\overline{B}$

- Si (a_n) es una sucesión de números reales positivos, entonces

  $$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

  Demostración. Póngale cuidado que esto es fino. Note que la desigualdad del medio es trivial, así que vamos a probar las desigualdades de los extremos.

  - Vamos a empezar con la de la derecha porque tengo problemas psicológicos. Si $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, la desigualdad de la derecha se tiene de manera trivial. Supongamos que $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = U < \infty$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que si $n > N$, entonces

    $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < U+\epsilon,$$

    Entonces, para $n > N$ y $m \in \mathbb{Z}^+$, se tiene $a_{n+m} < a_n(U+\epsilon)^m$ ¿por qué? Pues vamos a ver si me acuerdo. Dado $m \in \mathbb{Z}^+$ y $n > N$, tenemos

    $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < U+\epsilon, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < U+\epsilon, \quad \cdots \quad , \frac{a_{n+m}}{a_{n+m-1}} < U+\epsilon.$$

Entonces tenemos que

$$a_{n+1} < a_n(U+\epsilon)$$
$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < U+\epsilon,$$

Multiplicando las dos desigualdades, se obtiene

$$a_{n+2} < a_n(U+\epsilon)^2.$$

Análogamente, ahora tomamos las desigualdades

$$a_{n+1} < a_n(U+\epsilon)$$
$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < U+\epsilon,$$

multiplicando se obtiene

$$a_{n+3} < a_n(U+\epsilon)^3.$$

Realizando este proceso m veces, obtenemos que

$$a_{n+m} < a_n(U+\epsilon)^m,$$

y tomando la potencia $\dfrac{1}{n+m}$ a ambos lados se obtiene

$$(a_{n+m})^{\frac{1}{n+m}} < \left(a_n(U+\epsilon)^m\right)^{\frac{1}{n+m}} = (a_n)^{\frac{1}{n+m}}(U+\epsilon)^{\frac{m}{n+m}},$$

de esta manera

$$\limsup_{m\to\infty}(a_{n+m})^{\frac{1}{n+m}} \leq \limsup_{m\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n+m}}(U+\epsilon)^{\frac{m}{n+m}} = U+\epsilon$$

Esto último porque $a_n > 0$ para todo n y $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{a} = 1$ para todo $a > 0$ y del hecho de que $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{m}{n+m} = 1$, luego

$$\limsup_{m\to\infty}(a_{n+m})^{\frac{1}{n+m}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq U+\epsilon = \left(\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)+\epsilon,$$

como ϵ es arbitrario y hay finitos k menores que N, obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- Ahora, vamos a probar la desigualdad de la izquierda. Sea $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = u$, por definición, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n > N$, entonces

$$u-\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Nuevamente, realizando un procedimiento análogo al anterior, dados $n > N$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ tenemos

$$(u-\epsilon)^m a_n \leq a_{n+m},$$

luego

$$(u-\epsilon)^{\frac{m}{n+m}}(a_n)^{\frac{1}{n+m}} < (a_{n+m})^{\frac{1}{n+m}},$$

de manera que

$$u-\epsilon = \liminf_{m\to\infty}(u-\epsilon)^{\frac{m}{n+m}}(a_n)^{\frac{1}{n+m}} \leq \liminf_{m\to\infty}(a_{n+m})^{\frac{1}{n+m}}.$$

es decir,

$$u-\epsilon = \left(\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-\epsilon \leq \liminf_{m\to\infty}(a_{n+m})^{\frac{1}{n+m}} = \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

Nuevamente, como ϵ es arbitrario y hay finitos k menores que N, tenemos que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

□

1.4 Completez

1.4.1. Algunos ejercicios al lector

- Si (x_n) es una sucesión convergente, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy.

  Demostración. Sea (x_n) una sucesión convergente, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $d(x_n, L) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(x_m, L) < \frac{\epsilon}{2}$. Así:

  $$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, L) + d(L, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

  □

- Si (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces toda subsucesión también es de Cauchy.

  Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

  Considere (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n), luego como $n_k \geq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, en efecto si $L, M \geq k \geq N$ entonces $n_L, n_M \geq N$ y como (x_n) es de Cauchy:

  $$d(x_{n_L}, x_{n_M}) < \epsilon$$

  □

- Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \longrightarrow X$ se dice una contracción en X, si existe una constante $K \in (0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Sea $x_0 \in X$ cualquiera y $x_n = f(x_{n-1})$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Muestre que si f es una contracción, la sucesión (x_n) es de Cauchy.

Demostración. Sea $x_0 \in X$ cualquiera y la sucesión (x_n) definida por $x_n = f(x_{n-1})$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $n > m$. Tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) = d(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) &\leq K d(x_{m-1}, x_{n-1}), \\ &\leq K^2 d(x_{m-2}, x_{n-2}), \\ &\vdots \\ &\leq K^m d(x_0, x_{n-m}). \end{aligned}$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{n-m}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n-m}), \\ &\leq d(x_0, x_1) + K d(x_0, x_{n-m-1}), \\ &\leq d(x_0, x_1) + K d(x_0, x_1) + K d(x_1, x_{n-m-1}), \\ &\leq d(x_0, x_1) + K d(x_0, x_1) + K^2 d(x_0, x_{n-m-2}), \\ &\vdots \\ &\leq d(x_0, x_1) + K d(x_0, x_1) + K^2 d(x_0, x_1) + \cdots + K^{n-m-1} d(x_0, x_1), \\ &= (1 + K + K^2 + \cdots + K^{n-m-1}) d(x_0, x_1), \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-m-1} K^j \right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\sum_{j=0}^{N} x^j = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}, \quad x \neq 0, 1,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq K^m d(x_0, x_{n-m}), \\ &\leq K^m \left(\frac{1 - K^{n-m}}{1 - K} \right) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{K^m - K^n}{1 - K} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Ahora, como $K \in (0, 1)$, es fácil ver que la función K^x tiende a 0 cuando x tiende a infinito. Por tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $K^n < \epsilon$. Tomando $\epsilon_1 = \dfrac{1 - K}{2d(x_0, x_1)} \epsilon$, con $\epsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > M$, entonces, $K^m, K^n < \epsilon_1$. De esta manera

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \frac{K^m - K^n}{1 - K} d(x_0, x_1), \\ &\leq \frac{K^m + K^n}{1 - K} d(x_0, x_1), \\ &< \frac{2\epsilon_1}{1 - K} d(x_0, x_1), \\ &= \frac{2d(x_0, x_1)}{1 - K} \cdot \frac{1 - K}{2d(x_0, x_1)} \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Así, concluimos que la sucesión (x_n) es de Cauchy. $\square$

Nota. Cuando el espacio métrico es un espacio completo, esto implica que la sucesión anterior es convergente. Es posible mostrar que, el punto p al que converge esta sucesión, es un punto fijo de la función f (es decir, $f(p) = p$) y además, este es único. Este resultado es conocido como el Teorema del Punto Fijo de Banach, o Teorema de Contracción de Banach.

1.4.2. Quiz 7:

- $\mathbb{Z}$ es completo con la métrica usual.

  Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{Z}, d_1)$, luego para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces:

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

  Por tanto $x_n = x_m$, es decir (x_n) es eventualmente constante, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x_m$, como $x_m \in \mathbb{Z}$, acabamos. $\square$

- Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{Z}$ con la métrica discreta es convergente.

  Veamos un resultado más elegante. Sea (X, d_d) donde d_d es la métrica discreta, entonces X es completo.

  Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (X, d_d), entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, entonces:

$$d_d(x_n, x_m) < \epsilon$$

  Sea $\epsilon = \frac{1}{2}$, entonces:

$$d_d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$$

  Entonces $x_n = x_m$, luego (x_n) es eventualmente constante, por tanto converge en X. $\square$

- $\mathbb{Q}$ no es completo con la métrica usual.

  Demostración. Supongamos que $\mathbb{Q}$ es completo. Considere una sucesión (x_n) convergente definida en $\mathbb{Q}$, entonces es de Cauchy y como $\mathbb{Q}$ es completo, entonces (x_n) converge en $\mathbb{Q}$, luego $\mathbb{Q}$ es cerrado, contradicción. $\square$

- Si (a_n) es de Cauchy en $(\mathbb{R}^m, d_2)$ y (b_n) es convergente en $(\mathbb{R}^m, d_2)$, entonces $(a_n + b_n)$ es de Cauchy.

  Demostración. Sabemos que $(\mathbb{R}^m, d_2)$ es completo, luego si (a_n) es de Cauchy, entonces es convergente, tenemos que (b_n) es convergente, por tanto $(a_n + b_n)$ es convergente, y toda sucesión convergente es de Cauchy. $\square$

- $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

  Demostración. Sabemos que (R^m, d_2) es completo, luego si (x_n) es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$:

$$d_\infty(x_n, L) < \frac{\epsilon}{m}$$

Luego como $md_\infty(x,y) \geq d_2(x,y)$:

$$d_2(x_n, L) \leq md_\infty(x_n, L) < m\frac{\epsilon}{m} = \epsilon$$

i.e. $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ es completo. □

1.5 Compacidad

Aquí toca tener particular cuidado con el teorema de Bolzano y sus implicaciones, pero también con la prueba que se presenta de Heine-Borel. Es muy importante a la hora de hacer los ejercicios tener claras todas las equivalencias que se dan al final del capítulo.

1.5.1. Quiz 8:

- Sean (E,d) espacio métrico y $F \subset E$. Si todo cubrimiento por conjuntos cerrados de F admite un subcubrimiento finito, entonces F es compacto.

  Demostración. Supongamos que todo cubrimiento de F por conjuntos cerrados admite un subcubrimiento finito, entonces en particular el cubrimiento:

  $$F \subseteq \bigcup_{x \in E} \{x\}$$

  Admite un subcubrimiento finito, luego el conjunto F es finito y todo conjunto finito es compacto. □

- El conjunto $(0,1]$ no es compacto en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.

  Demostración. Considere el cubrimiento:

  $$(0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 2\right)$$

  Note que este cubrimiento abierto no admite un subcubrimiento finito.

  Note que por Heine-Borel esto es trivial. □

- Todo conjunto totalmente acotado es completo.

  Falso: Considere el intervalo $(0,1)$ en $(\mathbb{R}, d_1)$, este conjunto totalmente acotado en $\mathbb{R}$ ya que es acotado, pero no es completo porque no es cerrado.

- Todo conjunto completo es totalmente acotado.

  Falso: (R, d_1) es completo, pero no es acotado y por tanto no es totalmente acotado.

- Todo espacio métrico secuencialmente compacto es completo.

  Demostración. Sea (X,d) un espacio métrico y (x_n) una sucesión de Cauchy en (X,d), como (X,d) es secuencialmente compacto, (x_n) tiene una subsucesión convergente, como (x_n) es de Cauchy y tiene una subsucesión convegente, converge. □

- Todo espacio métrico completo es compacto.

  Falso: Note que $(\mathbb{R}, d_1)$ es completo, pero no es compacto por Heine-Borel

- Todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico es compacto.

  Falso: Sea $(\mathbb{R}, d_d)$ donde d_d es la métrica discreta, luego $\mathbb{R}$ es cerrado y acotado ya que $\mathbb{R} \subseteq B(0,2)$, note que el cubrimiento de abiertos:

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{R}} \{x\}$$

  No admite un subcubrimiento finito.

Nota. No te preocupes si no entiendes la prueba de Heine-Borel, de hecho muy pocas veces un ejercicio de parcial será tan fácil como usar ese teorema, lo que yo recomendaría sería entender bien todos los conceptos aquí plasmados, en particular el teorema de Bolzano y las equivalencias presentadas al final de la sección.

Nota. A continuación presentamos una serie de ejercicios tanto de parciales anteriores como algunos que se nos van ocurriendo junto con su solución, claramente los invitamos a pensar cómo resolverlos antes de leerlos aquí.

1.5.2. Ejercicios adicionales:

Esto es como una clase de preparación para lo que sería un segundo parcial.

Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es falso o verdadero, si es verdadero escriba la demostración y si es falso de el contraejemplo, si la afirmación dice demuestre pues esa sí demuéstrela xd:

- Sea (X,d) un espacio métrico, si $S \subseteq X$ es acotado entonces es totalmente acotado:

  Falso: Considere $(\mathbb{R}, d_d)$ los reales con la métrica discreta, luego $\mathbb{R}$ es acotado ya que $\mathbb{R} \subseteq B(0,2)$, pero $\mathbb{R}$ no es totalmente acotado ya que si $\epsilon = \frac{1}{2}$, no existe $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tal que

$$R \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{1}{2}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} = A$$

  ya que de lo contrario $\mathbb{R}$ sería finito.

- Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual, entonces $\limsup(a_n + b_n) = \limsup(a_n) + \limsup(b_n)$:

  Falso: Sean $(a_n) = (-1)^n$ y $(b_n) = -(-1)^n$, luego $\limsup(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k \geq n} 0\right) = 0$, pero $\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}(-1)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} -(-1)^n\right) = 1$, luego $\limsup(a_n) + \limsup(b_n) = 2$ y $2 \neq 0$.

- Sea (X, d) un espacio métrico y $A, C \subseteq X$, si $A \subseteq C \subseteq \overline{A}$, entonces para todo $c \in C$ y para todo $r > 0$, $B(c, r) \cap A \neq \emptyset$:

  Demostración. Sea $c \in C$, entonces $c \in \overline{A}$, luego c es un punto adherente, es decir para todo $r > 0$, $B(c, r) \cap A \neq \emptyset$. □

- Sea (X, d) un espacio métrico y $A, C \subseteq X$, entonces $(A \cup C)' = A' \cup C'$:

  Demostración.

$$\begin{aligned}(A \cup C)' &= \{x \in X : \text{para todo } r > 0, (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap (A \cup C) \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X : \text{para todo } r > 0, ((B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \cup (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap C) \neq \emptyset\} \\ &= A' \cup C'\end{aligned}$$

□

- Sea (X, d) un espacio métrico, si $S \subseteq X$, entonces $(S')' = S'$.

  Falso: Sea $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$, entonces $S' = \{0\}$ y $(S')' = \emptyset$.

- Demuestre que si (X, d) es un espacio métrico completo y $Y \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado de X, entonces (Y, d_y) es completo.

  Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy definida en Y, entonces (x_n) converge en X ya que (X, d) es completo, por tanto (x_n) es una sucesión convergente definida en Y y Y es cerrado si y solo si toda sucesión convergente definida en Y converge en Y, por tanto (x_n) converge en Y, es decir (Y, d_y) es completo. □

- Se (X, d) es un espacio métrico completo, entonces (X, d') con $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ es completo.

  Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X, entonces como (X, d) es completo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$:

$$d(x_n, L) < \epsilon$$

  Note que:

$$\frac{d(x_n, L)}{1 + d(x_n, L)} \leq d(x_n, L) < \epsilon$$

  Luego (x_n) también converge en (X, d'), por tanto (X, d') es completo. □

- Demuestre que si (X, d) es un espacio métrico y $\{x, y, u, v\} \subseteq X$, entonces:

$$|d(x, v) - d(y, u)| \leq d(x, y) + d(u, v)$$

Demostración. Supongamos que $d(x,v) - d(y,u) < 0$, luego:

$$\begin{aligned} |d(x,v) - d(y,u)| &= d(y,u) - d(x,v) \\ &\leq d(y,x) + d(x,u) - d(x,v) \\ &\leq d(y,x) + d(x,v) + d(v,u) - d(x,v) \\ &= d(x,y) + d(u,v) \end{aligned}$$

Ahora si $d(x,v) - d(y,u) \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} |d(x,v) - d(y,u)| &= d(x,v) - d(y,u) \\ &\leq d(x,y) + d(y,v) - d(y,u) \\ &: \leq d(x,y) + d(y,u) + d(u,v) - d(y,u) \\ &= d(x,y) + d(u,v) \end{aligned}$$

□

Nota. Note que esto fue aplicar desigualdad triangular varias veces pero de la forma adecuada.

1.6 Conexidad

Nota. Muchos teoremas en cálculo requieren de conexidad en su hipótesis, por eso es importante este capítulo, nos ayuda a formalizar y entender la idea de conexidad sobre al menos espacios métricos. Como bien lo dicen las notas, esto intuitivamente se puede pensar como que el conjunto es un solo pedazo en caso sea conexo, en este capítulo al menos no hay mucho que decir, pasemos a los ejercicios.

1.6.1. Quiz 9

- El espacio métrico $(\mathbb{Z}, d_1 |_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})$ es conexo:

  Falso: Sea $A = \{0\}$, note que $B(0,1) = \{0\}$, luego A es abierto, Ahora observe que A es cerrado ya que su complemento es abierto.

- $\mathbb{R}$ con la métrica discreta es conexo:

  Falso: Nuevamente $A = \{0\}$ es abierto y cerrado al tiempo.

- Si A es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_2)$, entonces A es conexo en $(\mathbb{R}_n, d_1)$

  Demostración. Sabemos que d_1 y d_2 son métricas equivalentes en $\mathbb{R}^n$, es decir, que un conjunto es abierto en $(\mathbb{R}^n, d_2)$ si y sólo si es abierto en $(\mathbb{R}^n, d_1)$. Supongamos que A es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_2)$ y no es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_1)$. Como A no es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_1)$, existen X, Y abiertos en $(\mathbb{R}^n, d_1)$ tales que $X \cup Y = A$ y $X \cap Y = \emptyset$. Como X, Y son abiertos en $(\mathbb{R}^n, d_1)$, también lo son en $(\mathbb{R}^n, d_2)$, luego, A no es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Contradicción. □

- Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es conexo con la métrico usual entonces $\mathbb{R} \setminus X$ es conexo con la métrica usual:

  Falso: Obviamente los singleton son conexos, por ejemplo $\{0\}$ es conexo, pero $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ya no lo es, note que:

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

  Dos abiertos y disyuntos distintos de vacío.

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo con la métrica usual, entonces $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ donde $a_i \in A$ para todo i es conexo.

  Falso: Considere $A = (-1, 1)$ conexo en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, y considere $A - \{0\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$, luego $A - \{0\}$ es unión de abiertos disyuntos en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, por lo tanto no es conexo

- Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$, si A es conexo, entonces $int(A)$ es conexo.

  Falso: Considere $(E, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$ y sea $A = B[-1; 1] \cup B[1; 1]$ conexo. Note que $int(A) = B(-1, 1) \cup B(1, 1)$, luego $int(A)$ es unión de abiertos disyuntos en $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y por lo tanto no es conexo

- Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$, si $int(A)$ es conexo entonces A es conexo.

  Falso: Sea $(\mathbb{R}, d_1)$, recuerde que $int(\mathbb{N}) = \emptyset$, que es conexo, pero $\mathbb{N}$ no es conexo ya que no es un intervalo.

1.7 Ejercicios 3:

- Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

  se denomina norma si:

  (1) Para todo $x \in V$, $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
  (2) Para todo $\in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
  (3) Para todo $x, y \in V$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

  Demuestre que si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces (V, d) es un espacio métrico con

$$\begin{aligned} d : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\|. \end{aligned}$$

  a) A fin de que una métrica de un espacio vectorial real V provenga de una norma es necesario y suficiente que dados $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ y $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.
  b) Demuestre que todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, es decir, dadas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas en $\mathbb{R}^n$, existen $c, d > 0$ tales que $c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Solución: Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y $d(x,y) := ||x-y||$ para $x, y \in V$.

- Si $d(x,y) = 0$, por definición $||x-y|| = 0$, por tanto $x-y=0$, es decir, $x=y$, recíprocamente, si $x=y$, $d(x,y) = ||x-y|| = ||0|| = 0$.
- $d(x,y) = ||x-y|| = ||-(y-x)|| = |-1|\cdot||y-x|| = ||y-x|| = d(y,x)$.
- Sean $x,y,z \in V$, entonces

$$d(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+(z-y)|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,x).$$

de esta manera, d define una métrica en V

(a) Supongamos que d es una métrica en V que proviene de una norma, es decir, existe $||\cdot||$ norma en V tal que $d(x,y) = ||x-y||$ para todo $x,y \in V$. Sean $x,y,z \in V$, entonces

$$d(x+z, y+z) = ||(x+z)-(y+z)|| = ||x-y|| = d(x,y).$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$d(\lambda x, \lambda y) = ||\lambda x - \lambda y|| = ||\lambda(x-y)|| = |\lambda|\cdot||x-y|| = |\lambda| d(x,y).$$

De manera recíproca, supongamos que d es una métrica en V tal que para todo $x,y,z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene $d(x+z,y+z) = d(x,y)$ y $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$. Para $x \in V$, definimos $||x|| := d(x,0)$ (0 el elemento neutro de la suma en el espacio vectorial V). Veamos que $||\cdot||$ define una norma en V.

- $||x|| \geq 0$ por definición de métrica. Supongamos que $||x|| = 0$, esto quiere decir que $||x|| = d(x,0) = 0$, como d es métrica, esto quiere decir que $x=0$. De manera recíproca, si $x=0$, $||x|| = d(x,0) = d(0,0) = 0$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$||\lambda x|| = d(\lambda x, 0) = d(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda| d(x,0) = |\lambda|\cdot||x||.$$

- Si $x,y \in V$, tenemos

$$||x+y|| = d(x+y,0) \leq d(x+y,y) + d(y,0) = d(x,0) + d(y,0) = ||x|| + ||y||.$$

es decir, $||\cdot||$ define una norma en V. Sólo resta ver que $d(x,y) = ||x-y||$ para todo $x,y \in V$, pero esto es inmediato ya que

$$d(x,y) = d((x-y)+y, y) = d(x-y, 0) = ||x-y||.$$

(b) Considere $A = \{||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty) : ||\cdot|| \text{ es una norma en } \mathbb{R}^n\}$ y definimos la relación en A dada por

$$||\cdot||_1 \sim ||\cdot||_2 \iff \text{existen } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ tales que } c_1||x||_2 \leq ||x||_1 \leq c_2||x||_2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

veamos que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en A.

- **Reflexividad:** Sea $||\cdot|| \in A$, entonces $||x|| \leq ||x|| \leq ||x||$, es decir, tomando $c_1 = c_2 = 1$, se tiene que $||\cdot|| \sim ||\cdot||$.

- **Simetría:** Sean $||\cdot||_1, ||\cdot||_2 \in A$ tal que $||\cdot||_1 \sim ||\cdot||_2$, por definición, existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $c_1||x||_2 \leq ||x||_1 \leq c_2||x||_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $c_1||x||_2 \leq ||x||_1$, como $c_1 > 0$, $||x||_2 \leq \dfrac{1}{c_1}||x||_1$. Análogamente, como $||x||_1 \leq c_2||x||_2$, tenemos $\dfrac{1}{c_2}||x||_1 \leq ||x||_2$. Entonces definiendo $C_1 := \dfrac{1}{c_2}$ y $C_2 := \dfrac{1}{c_1}$, tenemos

$$C_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C_2||x||_2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, es decir, $||\cdot||_2 \sim ||\cdot||_1$.
- **Transitividad:** Sean $||\cdot||_1, ||\cdot||_2, ||\cdot||_3 \in A$ tales que $||\cdot||_1 \sim ||\cdot||_2$ y $||\cdot||_2 \sim ||\cdot||_3$. Por definición, existen $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\begin{gathered} c_1||x||_2 \leq ||x||_1 \leq c_2||x||_2 \\ c_3||x||_3 \leq ||x||_2 \leq c_4||x||_3, \end{gathered}$$

la segunda cadena de desigualdades se escribe como

$$c_3||x||_3 \leq ||x||_2 \qquad \text{y} \qquad ||x||_2 \leq c_4||x||_3$$

dado que c_1, c_2 son positivos, multiplicando cada una de estas desigualdades, se obtiene

$$\begin{gathered} c_1c_3||x||_3 \leq c_1||x||_2 \\ c_2||x||_2 \leq c_2c_4||x||_3, \end{gathered}$$

por tanto, si definimos $C_1 := c_1c_3$ y $C_2 := c_2c_4$, tenemos

$$C_1||x||_3 \leq c_1||x||_2 \leq ||x||_1 \leq c_2||x||_2 \leq C_2||x||_3,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y por tanto, $||\cdot||_1 \sim ||\cdot||_3$.

de esta manera, tenemos que $\sim$ es una relación de equivalencia en A. Ahora, es claro que

$$\begin{aligned} ||\cdot||_t : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto ||x||_t := \sum_{k=1}^{n} |x_k| \end{aligned}$$

define una norma en $\mathbb{R}^n$. Sea $||\cdot|| \in A$ cualquiera y $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la expresión como combinación lineal en la base $\mathscr{B}$ es

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = \sum_{k=1}^{n} x_ke_k,$$

de manera que, al ser $||\cdot||$ una norma

$$||x|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{n} x_ke_k\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{n} ||x_ke_k|| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\cdot||e_k||$$

Si tomamos $C_2 = \max_{1\leq k\leq n} ||e_k||$, tenemos

$$||x|| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot ||e_k|| \leq C_2 \sum_{k=1}^{n} |x_k| = C_2 ||x||_t.$$

Ahora, queremos mostrar que existe una constante positiva C_1 tal que $C_1||x||_t \leq ||x||$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y así concluir que $||\cdot|| \sim ||\cdot||_t$. Note que esto es equivalente a que exista $C_1 > 0$ tal que $||x|| \geq C_1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $||x||_t = 1$. En efecto, si existe $C_1 > 0$ tal que $C_1||x||_t \leq ||x||$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, si $||x||_t = 1$, esto es $C_1 \leq ||x||$. Recíprocamente, si $||x|| \geq C_1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $||x||_t = 1$, con $C_1 > 0$, tomemos $y \in \mathbb{R}^n$ con $y \neq 0$, entonces $x = \dfrac{y}{||y||_t}$ cumple que $||x||_t = 1$, por tanto $||x|| \geq C_1$, pero siendo $||\cdot||$ una norma

$$\begin{aligned} ||x|| = \left|\left|\frac{y}{||y||_t}\right|\right| &= \frac{1}{||y||_t} \cdot ||y|| \geq C_1 \\ &\Rightarrow ||y|| \geq C_1 ||y||_t. \end{aligned}$$

Entonces, si tomamos $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_t = 1\}$, por la continuidad de las normas (ejercicio), la función $||\cdot|| : S \to \mathbb{R}$ es continua y además, S es compacto, entonces la función $||\cdot||$ alcanza mínimo en el conjunto S, es decir, existe $z \in S$ tal que $||x|| \geq ||z||$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como $||z||_t = 1$, $z \neq 0$ y por tanto $||z|| > 0$, entonces tomando $C_1 = |z|$, se obtiene el resultado. De esta manera, una norma arbitraria $||\cdot||$ está relacionada con la norma $||\cdot||_t$, pero al ser $\sim$ una relación de equivalencia, quiere decir que la clase de equivalencia de $||\cdot||_t$ es todo A, por tanto, cualesquiera dos normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

- Si (E, d) es un espacio métrico, defina

$$\begin{aligned} d' :& E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(x, y) \longmapsto d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}. \end{aligned}$$

Demuestre que (E, d') es un espacio métrico.

Demostración. Verifiquemos las condiciones para que d' sea una métrica.

- Veamos que $d'(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. En efecto, supongamos que $d'(x, y) = 0$, por definición, $\dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0$, de donde se deduce que $d(x, y) = 0$. Como por hipótesis d es métrica, entonces $x = y$. Si $x = y$, es trivial que $d'(x, y) = 0$.
- Ahora, veamos que $d'(x, y) = d'(y, x)$ para todo $x, y \in E$. Como d es métrica, tenemos que $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$. esto implica que dados $x, y \in E$

  $$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d'(y, x),$$

  lo cual prueba la propiedad.
- Veamos que para todo $x, y, z \in E$, se tiene que $d'(x, y) \leq d'(x, z) + d'(z, y)$. Para esto, primero

veamos que, dados $a, b \geq 0$, si $a \leq b$, entonces $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$, en efecto

$$\begin{aligned} &a \leq b \\ &\Rightarrow a + ab \leq b + ab, \\ &\Rightarrow a(1+b) \leq b(1+a), \\ &\Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}. \end{aligned}$$

Ahora, como d es métrica, sabemos que para todo $x, y, z \in E$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, usando el resultado anterior, tenemos que para todo $x, y, z \in E$

$$\begin{aligned} d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}. \end{aligned}$$

Como $d(x, z), d(z, y) \geq 0$, es claro que

$$\begin{aligned} 1 + d(x, z) &\leq 1 + d(x, z) + d(z, y), \\ 1 + d(z, y) &\leq 1 + d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)}, \\ \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} &\leq \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)}. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}, \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = d'(x, z) + d'(z, y), \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración.

□

- Pruebe que en $(\mathbb{R}, d_1)$:

  a) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

  Demostración. Note que si $n \geq 1$, entonces $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$, luego:

$$\begin{aligned} n = (1 + a_n)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} a_n^i, \\ &= 1 + n a_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + \ldots + a_n^n, \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

De esto se sigue que $0 \leq \dfrac{n(n-1)}{2} a_n^2 \leq n$, es decir $0 \leq a_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, sabemos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} = 0$, luego:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} = 0.$$

Luego como a_n tiende a 0, es claro que el límite es 1.

$\square$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\nu(n)}{n} = 0$, donde $\nu(n)$ es el número de divisores primos de n.

Demostración. Sea $\tau(n) = \sum\limits_{j|n} 1$, en efecto $0 \leq \nu(n) \leq \tau(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, ahora note que $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$, ya que para cada divisor de n menor igual que $\sqrt{n}$ hay exactamente un divisor mayor igual que $\sqrt{n}$, es decir, si $j \mid n$ y $j \leq \sqrt{n}$, entonces $\dfrac{n}{j} \geq \sqrt{n}$ y además $\dfrac{n}{j} \mid n$. Luego:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0$$

$\square$

c) La sucesión

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \ldots \right)$$

es convergente.

Demostración. Esta demostración es fina, pero sólo se le ocurre a uno después de estar en un estado de desesperación considerable.
Note que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} \tag{1.1}$$

Aplicando nuevamente la identidad (1.1) en el $\sqrt{2}$ que aparece en el denominador, tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} \end{aligned}$$

Realizando repetidamente este proceso, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}-1 &= \frac{1}{\sqrt{2}+1},\\
&= \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}},\\
&= \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}},\\
&\vdots\\
&= \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots 2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}}},
\end{aligned}$$

que asintóticamente, es la misma sucesión que estamos considerando. Luego, la sucesión original converge y lo hace a $\sqrt{2}-1$.

□

Demostración. **Alternativa** Esta demostración no es tan fina, pero es más aterrizada.

Note que la sucesión, se puede escribir de manera recursiva como $a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$, con $a_1 = \frac{1}{2}$. Es claro que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $2+a_n \geq 2$ y así $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+a_n}$. Esto acaba de probar que $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, en otras palabras, la sucesión está contenida en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Ahora, considere $\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], d_1\right)$ como subespacio métrico de $\mathbb{R}$ y considere la función f definida en $\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], d_1\right)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2+x}.$$

Es claro que la sucesión (a_n) se puede escribir como $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_{n+1} = f(a_n)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Note además que la función f es decreciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, por lo tanto, para todo $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se tiene $\frac{2}{5} = f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0) = \frac{1}{2}$. Esto quiere decir que $Im(f) = \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Esto está un poquito enredado, pero esperen que es importante.

Ahora, note que dados $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, tenemos que

$$d_1(f(x), f(y)) = \left|\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2+y}\right| = \left|\frac{y-x}{(2+x)(2+y)}\right|.$$

Por lo que probamos antes, $f(x) = \frac{1}{2+x} \leq \frac{1}{2}$, y lo mismo sucede con $f(y) = \frac{1}{2+y}$, entonces

$$d_1(f(x), f(y)) = \left|\frac{y-x}{(2+x)(2+y)}\right| \leq \frac{1}{4}|x-y| = \frac{1}{4}d_1(x, y).$$

En resumen

$$f : \left(\left[0, \frac{1}{2}\right], d_1\right) \longrightarrow \left(\left[0, \frac{1}{2}\right], d_1\right)$$

es tal que $d_1(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{4}d_1(x, y)$ para todo $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, es decir, dado que $\frac{1}{4} \in (0, 1)$, f es una contracción en $\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], d_1\right)$. Por el tercer ejercicio de la **Sección 1.4.1**, tenemos que la sucesión $a_{n+1} = f(a_n)$ es de Cauchy. Además, como $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ es compacto, entonces $\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], d_1\right)$ es completo y por tanto, la sucesión (a_n) converge. $\square$

- Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas en $(\mathbb{R}, d_1)$, y tomemos $a = \liminf x_n$, $A = \limsup x_n$, $b = \liminf y_n$ y $B = \limsup y_n$. Demuestre que

  a) $\limsup(x_n + y_n) \leq A + B$.
  b) $\limsup(-x_n) = -a$.
  c) $\liminf(x_n + y_n) \geq a + b$.
  d) $\liminf(-x_n) = -A$.
  e) $\liminf(x_n \cdot y_n) \geq ab$.

- Encuentre el interior, la clausura, la frontera, los puntos de acumulación en $(\mathbb{R}, d1)$ de los siguientes conjuntos:

  a) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$.

Solución.

- **Interior.** Note que en $(\mathbb{R}, d_1)$, los conjuntos abiertos deben ser no contables o ser vacío, por tanto, dado que A es contable, no puede contener un conjunto abierto no vacío, es decir, $Int(A) = \emptyset$.
- **Puntos de Acumulación**. Note que $A \subseteq (0, 1]$ y que además, todos los puntos de A son aislados, es decir, $A \cap A' = \emptyset$. Ahora, haciendo uso de la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, sabemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Esto quiere decir que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = d\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \epsilon$, luego $0 \in A'$. Sabiendo que para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, la distancia a A es siempre mayor que 0, se tiene que $x \notin A'$. Así, $A' = \{0\}$.
- **Clausura.** Usando el hecho de que $\overline{A} = A \cup A'$, tenemos que $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

- **Frontera.** Usando el hecho de que $\overline{A} = Int(A) \cup \partial A$, como $Int(A) = \emptyset$, entonces $\partial A = \overline{A} = A \cup \{0\}$.

b) $B = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{Z}^+ \right\}$.

Solución.
- **Interior.** Nuevamente, dado que B es un conjunto contable, tenemos que $Int(B) = \emptyset$.

c) $\mathbb{Q}$.

d) $\mathbb{I}$.

e) $[a, b)$.

f) $\{2^{-n} + 5^{-m} : n, m \in \mathbb{Z}^+\}$.

- Dados S, T subconjuntos de un espacio métrico (E, d), pruebe que

a) $Int(S \cap T) = Int(S) \cap Int(T)$.

Demostración. El caso en que $Int(S \cap T)$ o $Int(S) \cap Int(T)$ son vacíos, verifican la propiedad de manera relativamente fácil.

Sea $x \in Int(S \cap T)$, por definición, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq S \cap T$. Como $S \cap T \subseteq S$ y $S \cap T \subseteq T$, entonces $B(x; r) \subseteq S$ y $B(x; r) \subseteq T$, es decir, $x \in Int(S)$ y $x \in Int(T)$, o lo que es lo mismo $x \in Int(S) \cap Int(T)$. Así, hemos probado que $Int(S \cap T) \subseteq Int(S) \cap Int(T)$.

Ahora, sea $y \in Int(S) \cap Int(T)$, por definición, $y \in Int(S)$ y $y \in Int(T)$, de esta manera, existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $B(y; r_1) \subseteq S$ y $B(y; r_2) \subseteq T$. Considere $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$, luego $B(y; r) \subseteq B(y; r_1)$ y $B(y; r) \subseteq B(y; r_2)$. De esta manera, $B(y; r) \subseteq S \cap T$, es decir, $y \in Int(S \cap T)$. Hemos probado, entonces, que $Int(S) \cap Int(T) \subseteq Int(S \cap T)$, lo cual completa la demostración. □

b) $Int(S) \cup Int(T) \subseteq Int(S \cup T)$.

Demostración. Igual que antes, dejamos al lector verificar el caso cuando es vacío.

Sea $x \in Int(S) \cup Int(T)$, por definición, $x \in Int(S)$ o $x \in Int(T)$. Veremos solamente el caso en el que $x \in Int(S)$, ya que el otro caso es análogo y lo puede desarrollar el lector con la idea que prosigue.

Si $x \in Int(S)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq S$. Como $S \subseteq S \cup T$, entonces $B(x; r) \subseteq S \cup T$, es decir, $x \in Int(S \cup T)$. Luego $Int(S) \cup Int(T) \subseteq Int(S \cup T)$. □

c) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$.

Demostración. Tomemos $x \in \overline{S \cap T}$, por definición, para todo $r > 0$, $B(x; r) \cap (S \cap T) \neq \emptyset$. Usando la conmutatividad y asociatividad de la intersección entre conjuntos, tenemos que $(B(x; r) \cap S) \cap T \neq \emptyset$ y $(B(x; r) \cap T) \cap S \neq \emptyset$, esto implica que $B(x; r) \cap S \neq \emptyset \neq \emptyset$ y $B(x : r) \cap T \neq \emptyset$ y como r es arbitrario, concluimos que $x \in \overline{S}$ y $x \in \overline{T}$. □

d) S' es cerrado.

Demostración. Esta demostración está en la sección 3.3 de las notas, sin embargo, vamos a realizar una prueba alternativa que, si se comprende bien, deja muy claro el concepto de derivado. Denotamos por $B^*(x; r) = B(x; r) \setminus \{x\}$. Vamos a mostrar que $(S')^c = E \setminus S'$ es un conjunto abierto. Tomemos $y \in (S')^c$, por definición, existe $r > 0$ tal que $B^*(y; r) \cap S = \emptyset$, o lo que es lo mismo, $B(y; r) \cap S \subseteq \{y\}$. Veamos que $B(y; r) \subseteq (S')^c$.

Por contradicción, supongamos que $B(y,r)\cap S' \neq \emptyset$, entonces existe $x \in B(y,r)\cap S'$. Como $x \in S'$, para todo $r' > 0$, $B^*(x;r') \cap S \neq \emptyset$, además, como $x \in B(y;r)$ y las bolas abiertas son conjuntos abiertos, existe $r_1 > 0$ tal que $B(x;r_1) \subseteq B(y;r)$. Ahora, como $y \notin S'$, entonces $x \neq y$, por tanto, $r_2 = d(x,y) > 0$ y sea $R = \min\{r_1, r_2\}$. Es claro que $B^*(x;R) \subseteq B(x;R) \subseteq B(y;r)$, entonces $B^*(x;R)\cap S \subseteq B(y;r)\cap S \subseteq \{y\}$, esto es una contradicción, ya que $y \notin B^*(x;R)$, lo cual implicaría que $B^*(x;R)\cap S = \emptyset$, lo que contradice el hecho de que $x \in S'$. De esta manera $B(y;r) \subseteq (S')^c$ y, dado que fue y fue tomado de manera arbitraria, concluimos que $(S')^c$ es un conjunto abierto, es decir, S' es cerrado. □

e) $(S \cup T)' = S' \cup T'$.

f) $(\overline{S})' = S'$

- Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es no contable muestre que $X \cap X' \neq \phi$ y X' es no contable

- Un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, si dados $u, v \in V$, entonces $tu + (1-t)v \in V$ para todo $t \in [0,1]$. Considerando $(\mathbb{R}^n, d_2)$ demuestre que:

  - Las bolas abiertas de (R^n, d_2) son convexos de $\mathbb{R}^n$.
  - El interior de un convexo, es convexo.
  - La clausura de un convexo, es convexo.

- Sea (M,d) espacio métrico. Si $S, A \subset M$ son tales que $A \subset S \subset \bar{A}$, decimos que A es denso en S.

  - Considerando $(\mathbb{R}^n, d_2)$, pruebe que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.
  - Si A es denso en S y B es abierto en S, muestre que $B \subset \overline{A \cap B}$.

- Sea (E,d) un espacio métrico.Si todo conjunto infinito de E tiene un punto de acumulación en (E,d) muestre que existe $B \subseteq E$ contable y $\bar{B} = E$ (es decir E es separable). Sugerencia:muestre que para $\delta_n = \frac{1}{n}$ existen $x_1^{(n)} \cdots, x_l^{(n)} \in E$ tales que $d\left(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}\right) > \frac{1}{n}$ si $i \neq j$ y que $E = \cup B\left[x_i^{(n)}, \frac{1}{n}\right]$

- Consideremos $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es perfecto si $S' = S$. Pruebe que si S es perfecto, entonces S no es enumerable. Sugerencia: use el teorema de Baire

- Demuestre que el conjunto de Cantor es perfecto en $(\mathbb{R}, d_1)$.

- Sean $(\mathbb{R}^n, d_2)$ y $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Muestre que todo cubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento contable (Lindelöf).Sugerencia considere el conjunto $\{B(q,r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\}$

- Sean U abierto en (E,d) y $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de compactos de (E,d) tales que $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$. Si $K = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset U$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $K_i \subset U$.

- Sean (E,d) espacio métrico, $S, T \subset E$ tales que S es cerrado y T es compacto. Demuestre que $S \cap T$ es compacto.

  Demostración. Como T es compacto, entonces T es cerrado, y como S también lo es $S \cap T$ es cerrado. Ahora, como $S \cap T \subseteq T$, y T es compacto, entonces $S \cap T$ también es compacto, por ser un subconjunto cerrado de un compacto. □

- Sean (E,d) espacio métrico y $X,Y\subset E$. Si X es conexo y $X\subset Y\subset\bar{X}$, entonces Y es conexo. Concluya en particular que la adherencia de un conjunto conexo es conexo.

  Demostración. Por contradicción, supongamos que Y no es conexo, entonces, por definición, existen A y B abiertos no vacíos en Y, tales que $A\cap B=\emptyset$ y $A\cup B=Y$. Como X es conexo y $X\subseteq Y$, entonces se debe tener que $X\subset A$ o $X\subset B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $X\subset A$. Como B es abierto, para todo $b\in B$, existe $r>0$ tal que $B(b;r)\subset B$, esto quiere decir que $B(b;r)\cap A=\emptyset$ y por tanto, $B(b;r)\cap X=\emptyset$. Así, para todo $b\in B$, se tiene que $b\notin\overline{X}$, lo cuál contradice que $Y\subset\overline{X}$. Así, Y debe ser conexo.

  En particular, note que si X es un conjunto conexo, es trivial que $X\subset\overline{X}\subset\overline{X}$. Por el resultado anterior, se puede concluir que $\overline{X}$ es conexo. □

- Describa todos los conjuntos conexos y enumerables de $(\mathbb{R}^n,d_2)$.

- Sean C,X subconjuntos de un espacio métrico (E,d). Si C es conexo y tiene puntos en común con X y con $E\backslash X$, entonces muestre que algún punto de C pertenece a la frontera de X.

Funciones entre espacios métricos

2.1 Funciones continuas sobre espacios métricos

A lo largo de este capítulo se notará un uso recurrente de todo lo que se ha visto en el curso... diría que este capítulo es el que coneptualmente es más complejo por esto mismo, en este punto es necesario tener claros todos los conceptos para no perderse.

Nota. Para este capítulo es importante saberse todas las propiedades que se presentan al inicio ya que serán usadas en muchas demostraciones posteriores,también es importante tener claras las definiciones equivalentes de continuidad...

2.1.1. Quiz 10

- Consideremos $(\mathbb{N}, d_1)$ y (E, d) espacio métrico. Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$, entonces f es continua.

  Demostración. Note que todos los puntos en $(\mathbb{N}, d_1)$ son aislados, puesto que, visto $\mathbb{N}$ como subespacio de $(\mathbb{R}, d_1)$, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $B(n; \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = \{n\}$, por lo tanto, $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ es continua, ya que cualquier función entre espacios métricos es continua en puntos aislados $\square$

- Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ es continua, entonces f envía conjuntos abiertos de E_1 en conjuntos abiertos de E_2.

  Falso: Considere $(E_1, d_1) = (E_2, d_2) = (\mathbb{R}, d_1)$ y

  $$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto 1 \end{aligned}$$

  Esta función es continua, sin embargo, podemos tomar por ejemplo $A = (0, 1)$ abierto de $(\mathbb{R}, d_1)$, sin embargo, $f(A) = \{1\}$ que no es abierto en $(\mathbb{R}, d_1)$

- Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ es continua, entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en E_1 si B es cerrado en E_2.

  Demostración. Considere B cerrado en E_2, luego, B^c es abierto en E_2. Como f es continua, entonces $f^{-1}(B^c)$ es abierto en E_1, además tenemos la relación $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ y por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es cerrado en E_1. $\square$

- En $(\mathbb{R}, d_1)$ la función

  $$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{Q}} :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

  es continua.

Falso: Considere $A = (0,2)$ abierto en $(\mathbb{R}, d_1)$. Tenemos que $\chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(A) = \mathbb{Q}$ que no es abierto en $(\mathbb{R}, d_1)$, luego $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es continua.

- Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ es continua, entonces f envía conjuntos acotados de E_1 en conjuntos acotados de E_2.

  Falso: Considere $(E_1, d_1) = (\mathbb{R}^+, d_1)$,$(E_2, d_2) = (\mathbb{R}, d_1)$ y la función

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ln(x) \end{aligned}$$

  Esta función es continua. Sea $A = (0,1)$ acotado en $(\mathbb{R}^+, d_1)$, sin embargo $f(A) = (-\infty, 0)$ que es no acotado en $(\mathbb{R}, d_1)$.

2.2 Funciones entre espacios métricos compactos

Este capítulo de las notas contiene ya uno de los acercamientos a lo que conocimos en cálculo diferencial, en particular el teorema del valor intermedio, aquí se puede intuir geométricamente la importancia de la conexidad para este resultado y muchos más a lo largo del capítulo

2.2.1. Quiz 11:

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ entonces f es uniformemente continua.

  Demostración. Note que $[a,b]$ es compacto porque es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, además x^3 es continua, por tanto x^3 es uniformemente continua en $[a,b]$. □

- Si $f : (1,2) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ entonces f es uniformemente continua

  Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, considere $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$. Sean $x, y \in (1,2)$, note que si $|x - y| < \delta$:

$$\begin{aligned} |x^3 - y^3| &= |x-y||x^2 + xy + y^2| \\ &< \delta|x^2 + xy + y^2| \\ &< \delta|4+4+4| \\ &= \frac{\varepsilon}{12}(12) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

  □

- Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ función continua. Si K es compacto en E_2, entonces $f^{-1}(K)$ es compacto en E_1.

  Falso: Considere:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

  Claramente f es continua y $\{1\}$ es compacto en $(\mathbb{R}, d_1)$, pero $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$, que no es compacto en $(\mathbb{R}, d_1)$

- Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ función continua. Si K es compacto en E_1, entonces $f(K)$ es cerrado y acotado en E_2.

  Demostración. En efecto como f es continua y K es compacto, $f(K)$ es compacto, por tanto es cerrado y acotado. □

- Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ función continua. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_1, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_2.

  Falso: Sean $(E_1, d_1) = (E_2, d_2) = (\mathbb{R}^+, d_1)$, considere la sucesión de Cauchy $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y la función continua $f(x) = \frac{1}{x}$, note que $\{f(\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no es de cauchy porque no es acotada.

- Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ función continua. Si E_1 es compacto $y \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_1, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en E_2

  Demostración. Note que E_1 es compacto y por tanto completo, luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L \in E_1$, además:

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

  Por tanto $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge □

- El conjunto $B(0,1)\backslash\{0\}$ es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_2)$ para $n \geq 2$.

  Demostración. Tenemos que $B(0,1)$ es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_2)$, luego como $B(0,1)$ es abierto, en particular es arcoconexo, veamos que $B(0,1) \setminus \{0\}$ es arcoconexo en $(\mathbb{R}^n, d_2)$.
  Sean $x, y \in B(0,1)$, note que como $B(0,1)$ es arcoconexo, existe $z \in B(0,1) \setminus \{0\}$ tal que $\alpha : [a,b] \mapsto B(0,1) \setminus \{0\}$ tal que $\alpha(a) = x$ y $\alpha(b) = z$ y $\beta : [a,b] \mapsto B(0,1) \setminus \{0\}$ tal que $\alpha(a) = z$ y $\alpha(b) = y$, luego como composición de funciones continuas es continua $\alpha \circ \beta : [a,b] \mapsto B(0,1) \setminus \{0\}$ es un camino tal que $\beta \circ \alpha(a) = x$ y $\beta \circ \alpha(b) = y$, así $B(0,1) \setminus \{0\}$ es arcoconexo y por tanto conexo. □

- Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ una función. Si f envía conjuntos compactos en conjuntos compactos entonces f es continua

  Falso: Sean $(E_1, d_1) = (E_2, d_2) = (\mathbb{R}, d_1)$, considere la función:

  $$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{Q}} : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

  Esta función mapea compactos en compactos ya que todo conjunto finito en $(\mathbb{R}, d_1)$ es compacto, en particular $\{0,1\}, \{0\}$ y $\{1\}$, pero sabemos que $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es continua.

2.3 Homeomorfismos

Intuitivamente podemos pensar que los homeomorfismos nos permiten ver cuando dos espacios métricos tienen las mismas propiedades topológicas, esto ocurre ya que en muchas de las propiedades que se vieron en la sección anterior se probó que si f es continua entonces mapea compactos en compactos, devuelve abiertos en abiertos, también toda sucesión convergente la mapea a una sucesión convergente, mapea conexos en conexos, etc. Note que el homeomorfismo pide que f sea biyectiva y que f^{-1} sea continua también, es decir que la inversa también cumple todas las propiedades antes mencionadas, esto nos da una correspondencia explícita entre cada conjunto que cumple una de las propiedades mencionadas en el espacio de salida con uno en el de llegada y viceversa, por tanto preservan la información topológica que nos interesa en este contexto.

2.3.1. Quiz 12

- Dados $r_1, r_2 > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}^n$, existe $f : B(a, r_1) \to B[b, r_2]$ homeomorfismo.

  Falso: Tome $(\mathbb{R}, d_1)$ y $r_1, r_2 = 1$ y $a, b = 0$, entonces $[-1,1]$ es compacto, como f^{-1} es continua y biyectiva, $f^{-1}([-1,1]) = (-1,1)$, luego $(-1,1)$ es compacto como subespacio de $(\mathbb{R}, d_1)$, contradicción ya que $(-1,1) \cong \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ no es compacto.

- Existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$

  Falso: Note que $\mathbb{R}^n \cong B(0,1)$ (la bola en $\mathbb{R}^n$), luego tome $(\mathbb{R}, d_1)$ y el argumento es igual al del punto anterior.

- El conjunto $B[a, r] - \{a\}$ es homeomorfo a $B[a, r]$.

  Falso: Sea $(\mathbb{R}, d_1)$, note que $([-1,1] \setminus \{0\}) = [-1,0) \cup (0,1]$ que no es homeomorfo a $[-1,1]$ ya que $[-1,1]$ es conexo.

- $\mathbb{N}$ es homeomorfo a $\mathbb{Z}$.

  Demostración. Considere la función:

  $$f(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
  $$n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n-2}{2} & \text{si n es par} \\[2ex] -\dfrac{n+1}{2} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

  Claramente es continua ya que todos los puntos de $(\mathbb{N}, d_1)$ son aislados, no es difícil ver que es biyectiva (ejercicio), también en $(\mathbb{Z}, d_1)$ todos los puntos son aislados luego la inversa también es continua y claramente biyectiva.

  □

- (a, b) es homeomorfo con $B(p, r)$ (bola en $\mathbb{R}^2$).

  Falso: Sean $(0,1)$ y $B(0,1)$, tenemos que $B(0,1) \cong (\mathbb{R}^2, d_2)$ (la bola en $\mathbb{R}^2$).

  Supongamos que existe $f : B(0,1) \mapsto (0,1)$ tales que f es un homeomorfismo, luego como f es continua $f(B(0,1) \setminus \{0\})$ debe ser conexo en $(\mathbb{R}, d_1)$ ya que f mapea conexos en conexos. Además como f es biyectiva:

  $$f(B(0,1) \setminus \{0\}) = (0,1) \setminus f(\{0\})$$

  $f(\{0\}) = \{k\}$ con $k \in (0,1)$, luego $(0,1) \setminus f(\{0\}) = (0,1) \setminus \{k\} = (0,k) \cup (k,1)$ y como $(0,k)$ y $(k,1)$ son abiertos disyuntos, luego $f(B(0,1) \setminus \{0\})$ no es conexo en $(\mathbb{R}, d_1)$, contradicción ya que f es continua.

- $(0,1) \cong B(0,1)$ (bola en $\mathbb{R}^2$).

  Falso: Note que esto es equivalente a ver que $(0,1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, luego considere el contraejemplo del punto anterior.

2.3.2. Quiz 13

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

- La sucesión $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  converge uniformemente.

- La sucesión $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, definida por $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x$, converge uniformemente.

- Si $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ son tales que $f_n(x) = x^n$, entonces $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente.

- La sucesión $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge uniformemente en subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$.

- Si las sucesiones de funciones reales f_n y g_n convergen uniformemente, entonces $f_n + g_n$ converge uniformemente.

2.4 Ejercicios 4:

- Muestre que en $(\mathbb{R}, d_2)$, métrica usual:

  - $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_0}$; donde $x_0 \neq 0$.
  - $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x}{x^2+1} = \dfrac{3}{2}$ (Usando la definición)
  - $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} = 0$ (Usando la definición)

- Sean U un abierto de $\mathbb{R}$, $a \in U$ y (E_2, d_2) un espacio métrico. Considere una función $f : U \backslash \{a\} \to E_2$. Sea f_+la restricción de f al conjunto $U \cap \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. Si existe $\lim_{x \to a^+} f_+(x)$, se le denomina límite lateral derecho de f en a, y se denota $\lim_{x \to a^+} f(x)$. Similarmente, sea f_-la restricción de f a $U \cap \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$. Si existe $\lim_{x \to a^-} f_-(x)$, se le denomina límite lateral izquierdo de f en a, y se denota $\lim_{x \to a^-} f(x)$. Prueba que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si y solo si existen $\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to a^-} f(x) y \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

- Sea $U = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ par algún $a \in \mathbb{R}^+$y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos $g : \left(0, \frac{1}{a}\right) \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$. Si $\lim_{y\to 0} g(y)$ existe diremos que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe $y \lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Pruebe que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{R}^+$tal que si $x, y > M$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

- Estudie la continuidad de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cuando:

  a)
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

  b)
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

  c)
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Discuta la continuidad de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuando:

  a)
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  b)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q} \quad (p, q) = 1, p \neq 0, q > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Dada
$$\begin{aligned} f : (0, 1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

  Demuestre que:

  a) f es continua pero no uniformemente continua en $(0, 1)$.
  b) $\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1)\right\} \cup \{(0, x) : -1 \leq x \leq 1\}$ es conexo.
  c) $\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1)\right\} \cup \{(0, 0)\}$ no es conexo por caminos.

- Sean (E, d) espacio métrico, $S \subset E$ compacto y $S \neq \emptyset$. Si $p \in E$, entonces existe el mínimo de $\{d(p, x) : x \in E\}$.

- En todo espacio métrico compacto, existe $\max\{d(p,q); p,q \in E\}$.

- Sea $f:(E_1,d_1) \to (E_2,d_2)$ un función continua. Si E_1 es compacto y f es biyectiva, entonces f^{-1} es continua.

- Sea S un subconjunto denso en (E_1,d_1). Si (E_2,d_2) es compacto y $f:S \to E_2$ es uniformemente continua, entonces f tiene una extensión a una función de E_1 en E_2 uniformemente continua y dicha extensión es única.

- Sean $(E_1,d_1),(E_2,d_2)$ espacios métricos y $f:E_1 \to E_2$ una función muestre que: f es continua si y solo si para cada $X \subseteq E_1 f(\bar{X}), \subseteq \overline{f(X)}$

- Consideremos $\mathbb{R}$ con la métrica usual y $X \subseteq \mathbb{R}$. Si toda función $f:X \to \mathbb{R}$ continua es uniformemente continua muestre que X es cerrado mas no necesariamente es compacto.

- Considenemos $\mathbb{R}$ con la métrica usual y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \max_{x\in[a,x]} f(x)$ es continua.

- Sea $F \neq \emptyset$ un subconjunto cerrado en (E,d). Definamos

$$\begin{aligned} \rho_F : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \rho_F(x) = \inf\{d(x,y) : y \in F\} \end{aligned}$$

  Demuestre que:

  a) $\rho_F(x) = 0$ si y solo si $x \in F$.
  b) ρ_F es uniformemente continua.
  c) Dados A,B subconjuntos cerrados y no vacios de E, con $A \cap B = \emptyset$, defina

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x)+\rho_B(x)}. \end{aligned}$$

     Entonces f es continua en E e $\mathrm{Im}(f) \subset [0,1]$. Además, $f(x) = 0$ si y solo si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si y solo si $x \in B$.

- Sean V, V' espacios vectoriales normados y $f:V \to V'$ transformación lineal.

  a) Si f es continua en un punto, entonces f es continua en V y f es uniformemente continua.
  b) f es continua si y solo si $\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, x \neq 0\right\}$ es acotado.
  c) Si V es de dimensión finita, entonces f es continua.

- Sea $f:X \times K \to \mathbb{R}^n$ continua, K compacto en $\mathbb{R}^n$ y $X \subset \mathbb{R}^n$. Dado $x_0 \in X$, demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $\left|f(x,\alpha) - f(x_0,\alpha)\right| < \varepsilon$, para todo $\alpha \in K$.

- Considere los subconjuntos del plano:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2x^2 + b^2y^2 = 1, a, b \neq 0\}$$
$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$
$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\}$$

¿Cuáles de estos conjuntos son homeomorfos?

- Con la métrica Euclidiana, muestre que $[a,b]$ no es homeomorfo a la bola abierta $B(c,r)$ de $\mathbb{R}^2$.

- Dado $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, definimos la componente conexa C_x de x en X, como la unzón de todos los conexos de X que contienen a x. Demuestre que:

  a) C_z es conexo.
  b) C_x es cerrado en X.
  c) Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo y $h(x) = y$, entonces $h(C_x) = D_y$, con D_y componente conexa de y en Y.
  d) Verifique que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ no es homeomorfo a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \ x^2\}$.

- Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demuestre que existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

- Sea $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$. Pruebe que

$$\begin{aligned} f_n : [0,a] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) = x^n \end{aligned}$$

converge uniformemente, ¿El resultado es válido si $a = 1$?

- Dada una función real f continua, considere la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) = f(x + 1/n) \end{aligned}$$

¿Esta sucesión converge uniformemente?

- Sea $f_n : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ una sucesión de funciones acotadas. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ en E_1 , $f : E_1 \to E_2$, demuestre que f es acotada.

- Pruebe que el conjunto de las matrices de tamaño $n \times n$ con determinante 1 es cerrado y no acotado en $\mathbb{R}^{n^2}$, además tiene interior vacío.

- Sea $f_n[a,b] \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones; donde cada f_n es una función creciente. Si $f_n \to f$ en $[a,b]$ muestre que f es creciente y que si f es continua entonces $f_n \xrightarrow{u} f$.

  Sugerencia: Para probar la convergencia uniforme dado $\epsilon > 0$ usar la continuidad uniforme de f en $[a,b]$ y que existen $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b$ tales que $|x_{j-1} - x_j| < \delta$; además existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \quad |f_n(x_j) - f(x_j)| < \frac{\epsilon}{5}, j = 0, 1, \cdots, m$.

- Sean $f_n : E \to \mathbb{R}$ para $n = 1, \cdots$ una sucesión de funciones continuas de valor real definidas en un espacio métrico compacto. Si f es continua, $f_n \to f$ y $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ entonces muestre que $f_n \xrightarrow{u} f$.

  Sugerencia : dado $\epsilon > 0$ defina $K_n = \{x \in E : f(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$, muestre que K_n es compacto y use un teorema de encaje.

- El cono $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 - z = 0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$?

- ¿El conjunto de las matrices invertibles $n \times n$ es abierto en $\mathbb{R}^{n^2}$?

  Verdadero: Sabemos que una matriz A en invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$ y además, la función determinante es continua (ejercicio). Es decir, si $L = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} : A \text{ es invertible}\}$, entonces $L = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (imagen inversa) es abierto, dado que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es abierto en $\mathbb{R}$.

- Sea (X,d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función con la siguiente propiedad: $\{x \in X : f(x) \leq t\}$ y $\{x \in X : f(x) > t\}$ son abiertos para todo $t \in \mathbb{Q}$. Pruebe que f es continua.

  Demostración. Primero, note que

$$\{x \in X : f(x) \leq t\} = f^{-1}((-\infty, t]), \qquad \{x \in X : f(x) > t\} = f^{-1}((t, \infty)).$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$.

Usando la densidad de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $a_1 \in (a, a+1)$. Sea $\delta_1 = |a_1 - a|$, que es mayor que 0 por la elección que tomamos. De la misma manera, existe $a_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $a_2 \in (a, a+\delta_1)$, de la misma manera, definimos $\delta_2 = |a_2 - a| > 0$ y tomamos $a_3 \in \mathbb{Q}$ con $a_3 \left(a, a + \dfrac{\delta_2}{2}\right)$. En general, si tenemos $\delta_n = |a - a_n|$, tomamos a_{n+1} un racional tal que $a_{n+1} \in \left(a, a + \dfrac{\delta_n}{n}\right)$. Por esta construcción, la sucesión de racionales (a_n) es estrictamente decreciente, $a_n \to a$ y $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

De la misma manera, es posible construir una sucesión de números racionales (b_n) estrictamente creciente, tal que $b_n \to b$ y $b_n \neq b$ para todo $b \in \mathbb{Z}^+$. Por tanto

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (-\infty, b_n]$$
$$(a, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (a_n, \infty),$$

de manera que

$$f^{-1}((-\infty, b)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (-\infty, b_n]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} f^{-1}((-\infty, b_n]),$$

por hipótesis, $f^{-1}(-\infty, b_n]$ es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $f(-\infty, b)$ es abierto, al ser unión de abiertos. De la misma manera

$$f^{-1}((a, \infty)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (a_n, \infty)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} f^{-1}((a_n, \infty)),$$

y nuevamente por la hipótesis, $f^{-1}((a, \infty))$ resulta ser abierto en (X,d). De esta manera $f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((-\infty, b) \cap (a, \infty)) = f^{-1}((-\infty, b)) \cap f^{-1}((a, \infty))$ es abierto, al ser intersección finita de abiertos. De esta manera, la imagen inversa de cualquier intervalo abierto, es abierta, y como todo abierto es unión de intervalos, la función f “devuelve” abiertos de $\mathbb{R}$ en abiertos de (X,d), es decir, f es continua. □