Romberg-heildun og þríhyrningsaðferð

Sölvi Santos

17. desember 2025

Útdráttur

Romberg-heildun er öflug aðferð til að bæta nákvæmni tölulegrar heildunar með útgiskun. Í þessari greinagerð er Romberg-heildun í tveimur víddum skoðuð, bæði með hefðbundinni trapisureglu og með annari aðferð sem byggir á skiptingu svæðis í þríhyrninga. Með notkun á þeirri staðreynd að heildi línulegra falla er nákvæmt þegar það er reiknað í massamiðju, ásamt því hve auðvelt er að finna miðju þríhyrninga, má bæta bæði samleitni og nákvæmni útreikninga.

Í þessari greinagerð eru báðar aðferðir útfærðar í Python og bornar saman með hermunum á bæði línuleg og ólínuleg föll. Helstu niðurstöður sýna að þríhyrningsaðferðin skilar almennt betri nálgun með færri skiptingum. Niðurstöðurnar eru svo einnig settar fram bæði tölulega og myndrænt.

1 Stutt saga

Töluleg heildun gegnir lykilhlutverki í margskonar vísindalegum útreikningum þar sem nákvæm aðferð fyrir heildið er annaðhvort óþekkt eða óútreiknanleg með hefðbundnum aðferðum. Í slíkum tilfellum er nauðsynlegt að nota nálgunaraðferðir til að meta gildi heildisins með tilteknum skekkjumörkum. Ein öflugasta aðferðin til að bæta nákvæmni slíkrar nálgunar er Romberg-heildun.

Eins og margar aðferðir notaðar til þess að nálga heildi, þá á Romberg heildun rætur sínar að rekja til tæmingaraðferða sem þróaðar voru af Grikkjum til þess að ákvarða flatarmál svæða á tvívíðum sléttum. Aðferðin er náskyld aðferðinni sem Arkímedes beitti til þess að nálga gildið á π[2]. Þessi aðferð byggir á tvöföldunaraðferð, sem er nokkurn veginn grunnurinn að Romberg-heildun. Arkímedes byrjaði á því að taka hring, með radíus 1, og innan hans var einhver reglulegur marghyrningur með flatarmál A_{00} sem auðvelt er að reikna. Eftir að tvöfalda fjölda hliða gat hann reiknað nýtt flatarmál A_{01}, svo annað A_{02} eftir að tvöfalda aftur, og svo koll af kolli $A_{03}, \ldots, A_{0n}$ o.s.frv.

Rúmfræðilega þá stefnir þessi runa á π að neðan. Sem dæmi, ef A_{0n} er 24-hliða marghyrningur þá er:

$$A_{0n} = 3,132629, \qquad A_{0,(n+1)} = 3,139350$$

og seinni talan er jafngild π upp að 2 aukastöfum.

Töluvert seinna, eða um 1654, leiddi Christian Huygens út betrumbætta útgáfu af þessari runu Arkímedesar. Aðferðin hans snérist um að taka tvo samliggjandi liði í Arkímedesar runu, með vægi $-1/3$ og $4/3$, til að mynda nýja runu:

$$A_{1n} = \frac{4A_{0,(n+1)} - A_{0n}}{3}$$

sem Huygens sýndi að stefnir á π talsvert hraðar. Hann komst að því að A_{1n}, sem samsvarar 48-hliða marghyrningi, er:

$$A_{1n} = 3,141590$$

sem er jafngild π upp að 5 aukastöfum. Í um það bil þrjár aldir fór þessi gríðarlega sterka aðferð fram hjá allflestum en árið 1936 tók K. Kommerell við keflinu og betrumbætti þessa aðferð ennfremur með því að smíða fleiri runur. Fyrsta runan, A_{2n}, tók saman tvo samliggjandi liði í Huygen runu, sá seinni, A_{3n} tekur saman tvo samliggjandi liði í A_{2n} o.s.frv. Almenna formúlan sem Kommerell notaði fyrir k-tu rununa, sem byrjar á $k = 1$ með notkun Hugyen raðanna, var:

$$A_{Rn} = \frac{4^k A_{(R-1),(n+1)} - A_{(R-1,),n}}{4^k - 1}$$

Með þessu móti mátti búa til eins margar runur og hverjum sýndist, þar sem hver þeirra stefnir hraðar á π en forveri sinn. Sem dæmi þá er fyrsti liðurinn í hæstu rununni sem samsvarar 48-hliða marghyrningi jafngildur π upp að 9 aukastöfum.

Árið 1955 var svo komið að Romberg að beita niðurstöðum Komerell til þess að finna flatarmál undir grafi falla í tvívídd, þ.e. til að nálga heildi slíkra falla.

2 Grunnhugmynd Romberg heildunar

Í allflestum kennslubókum í tölulegri greiningu má finna Romberg-heildun. Þar er samleitnishraðinn yfirleitt sannaður með Euler-Maclaurin formúlunni, en hér sleppum við henni.

2.1 Aðferð

Romberg-heildun hefst með því að taka runu af gildum T_n þar sem T_n er útkoma samskeyttu trapisureglunar 2 með $N = 1, 2, 4, 8 \dots$ hlutbil sem eru samleitin heildinu með hraða $O(N^{-2})$. Með línulegri samantekt af gildum T_N þá búum við til nýjar runur $T_{n,1}, T_{n,2} \dots$ sem eru samleitnar heildinu með hraða $O(N^{-4}), O(N^{-6}), \dots$ fyrir $N \to \infty$. Með hverju skrefi í útgiskunni lækkar veldið á samleitnishraða um 2 og er það vegna þess að trapisureglan er samhverf.

Hefðbundna sönnunin á Romberg-heildun á einhverju bili notar Euler-Maclaurin formúluna til að fá aðfelluliðun fyrir skekkju samskeyttu trapisureglunni. Samleitnihraði Romberg-útgiskunnar fylgir því þessari liðun og að hún inniheldur einungis slétt veldi af N.

Sönnunin á Euler-Maclaurin formúlunni er einföld. Hins vegar er sönnunin byggð á ákveðnum rakningar eiginleikum Bernoulli-margliðna og er ekki augljóst hvað veldur því að Romberg-heildunin virki.

Samleitniseiginleikar Romberg-heildunar fylgja einsleitni og eiginleikum samhverfra falla. Í þessari greinagerð ætlum við að gefa einfalda sönnun á Romberg-heildun með notkun á tveimur einföldum setningum og setningu Taylor's. Við munum einungis leiða út að samleitnihraði útgiskanna með $1, 2, 4, 8, \dots$ hlutbil. Við munum ekki leiða út almenna aðfelluliðun eða formúlu fyrir fastana í nálgununum.

2.2 Romberg-heildun og trapisuregla

Við skulum byrja á því að skoða aðeins Romberg-heildun og trapisureglu eins og hún er sett fram í eftirfarandi grein í American Mathematical Monthly eftir T. von Petersdorff, [4].

Skilgreining 2.1. Lát f vera samfellt fall á bilinu $[a, b]$ þá er trapisuregla á $[a, b]$ skilgreind sem

$$T^{[a,b]}(f) = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)) \tag{1}$$

Skoðum nú hvernig Romberg-heildun er skilgreind:

Skilgreining 2.2. Lát f vera samfellt fall á bilinu $[a, b]$ og lát $I(f) = \int_a^b f(x)$. Þá er samskeytt trapisuregla með N hlutbil á $[a, b]$ skilgreind með

$$T_N^{[a,b]}(f) = \sum_{k=1}^{N} T^{[x_{k-1},x_k]}(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{N} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) \right) \tag{2}$$

þar sem að $x_k = a + k(b-a)/N,\ k = 0, \ldots, N$. Romberg-útgiskanir eru skilgreindar á rakinn máta með:

$$T_{k,0}(f) = T_k^{[a,b]}(f), \qquad T_{2k,m+1}(f) = \frac{2^{2m+2}T_{2k,m}(f) - T_{k,m}(f)}{2^{2m+2}-1} \tag{3}$$

þar sem $k, m \in \mathbb{N}_0$.

Samleitni Romberg-útgiskunar er gefin með eftirfarandi setningu:

Setning 2.3. *Lát f vera $2m+2$-sinnum samfellt diffranlegt fall á $[a,b]$. Lát $N = 2^m n$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. Þá er:*

$$|T_{N,m}(f) - I(f)| \leq C_m(b-a)^{2m+3} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(2m+2)}(\xi)| n^{-(2m+2)} \tag{4}$$

þar sem að C_m er fasti óháður f, a, b, N.

Okkur vantar nokkrar reglur og skilgreiningar til þess að sanna (4). Við byrjum á því að gera ráð fyrir heildunarreglu á bilinu $[0,1]$ á forminu:

$$A(f) = \sum_{j=1}^{J} f(\xi_j) w_j \tag{5}$$

með punkta $\xi \in \mathbb{R}$ og vægi $w_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, J$. Samsvarandi regla á bilinu $[a,b]$ er:

$$A^{[a,b]}(f) = \frac{1}{2}(b-a)A(\tilde{f}) \tag{6}$$

þar sem $\tilde{f}(x) = f(((a+b) + (b-a)x)/2)$. Til þess að aðstoða okkur við sönnunina notum við þekkta niðurstöðu úr tölulegri greiningu eins og hún er sett fram í [4]:

Setning 2.4. *G.r.f. að heildunarreglan í (5) sé nákvæm fyrir allar margliður af stigi minna eða jöfnu og r. Lát f vera $r+1$-sinni samfellt diffranlegt fall. Þá uppfyllir samskeytta reglan $A_N^{[a,b]}(f) = \sum_{k=1}^{N} A^{[x_{k-1}, x_k]}(f)$ fyrir allar jákvæðar heiltölur N:*

$$|A_N^{[a,b]}(f) - I(f)| \leq C(b-a)^{r+2} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(r+1)}(\xi)| N^{-(r+1)} \tag{7}$$

þar sem að C er fasti óháður f, a, b, N

Við setjum nú fram eftirfarandi forsendu um $A(f)$:

Forsenda 2.5. *Látum heildunarreglu $A(f)$ á $[-1,1]$ vera samhverfa um 0, þ.e. $A(\tilde{f}) = A(f)$ þar sem $\tilde{f}(x) = f(-x)$, fyrir öll samfelld f. Enn fremur, látum regluna $A(f)$ vera nákvæma fyrir allar margliður af stigi minna eða jafnt og q, þar sem q er einhver slétt tala.*

Við höfum þá

Fullyrðing 2.6. *Heildunarreglan $A(f)$ er einnig nákvæm fyrir allar margliður af stigi $q+1$.*

Sönnun: Fallið x^{q+1} er oddstætt fall og því er $A(x^{q+1}) = 0$ og $\int_{-1}^{1} x^{q+1}dx = 0$. □

Skoðum nú samskeyttu regluna $A_2(f(x)) = \frac{1}{2}A(f((x-1)/2)) + \frac{1}{2}A(f((x+1)/2))$ með tvö hlutbil á $[-1,1]$ og skilgreinum skekkjurnar með $E(f) = A(f) - I(f)$, $E_2(f) = A_2(f) - I(f)$. Þá er

$$E_2(x^{q+2}) = \frac{1}{2}E\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^{q+2}\right) + \frac{1}{2}E\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^{q+2}\right) = 2^{-(q+2)}E(x^{q+2}) \quad (8)$$

sen fæst með noktun á fullyrðingu 3.6. Því getum við heildað x^{q+2} nákvæmlega með:

$$\tilde{A}(f) = \frac{2^{q+2}A_2(f) - A(f)}{2^{q+2}-1} \quad (9)$$

Þessu fylgir:

Fullyrðing 2.7. *Reglan $\tilde{A}(f)$ er samhverf og nákvæm fyrir allar margliður af stigi minna eða jafnt og $q+2$.*

Nú getum við klárað að sanna setningu 2.3 með þrepun. Látum $A^0(f) = T^{[-1,1]}(f)$. Þetta gildir augljóslega samkvæmt forsendu 2.5. með $q = 0$. G.r.f. að reglan $A^m(f)$ uppfylli fullyrðingu 2.6 með $q = 2m$. Skilgreinum regluna $A^{m+1}(f) = \widetilde{A^m}(f)$ með notkun (9) með $q = 2m$. Samkvæmt fullyrðingu 2.7 uppfyllir $A^{m+1}(f)$ forsendu 2.5 með $q = 2m+2$.

Samkvæmt fullyrðingu 2.6 er reglan $A^m(f)$ í raun nákvæm fyrir allar margliður af stigi minna eða jafnt of $2m+1$. Að lokum, tökum eftir að fyrir $N = 2^m n$ höfum við $T_{N,m}(f) = (A^m)_n^{[a,b]}(f)$ þar sem $(A^m)_n^{[a,b]}(f)$ er samskeytta reglan á $[a,b]$ með n hlutbil sem eru skilgreind út frá A^m. Og því leiðir setning 2.4 af sér 4 og sönnun á setningu 2.3 er lokið.

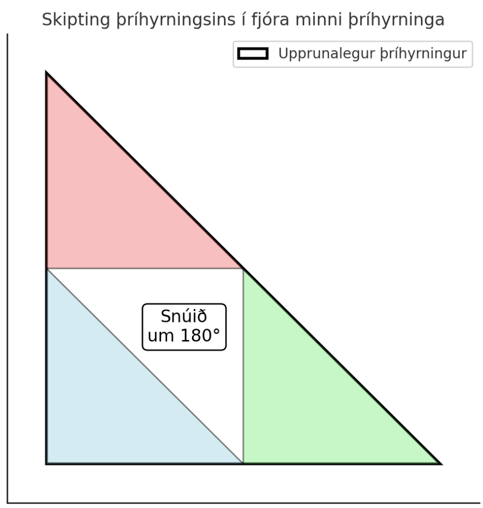
Athugum að setning 2.3 er ekki háð því að við notum trapisureglu, einungis að reglan sé samhverf.

3 Romberg heildun með þríhyrningum

Romberg heildun yfir þríhyrninga virkar á svipaðan máta og rætt var um í fyrri kafla. Við höfum einföldu regluna T sem notar fallgildi í þremur hornpunktum þríhyrningsins. Þessi regla er nákvæm fyrir margliður af stigi 1 eða minna. Fyrir reglu A á þríhyrning skilgreinum við samskeyttu regluna A_N með því að skipta þríhyrningnum í N^2 einslaga þríhyrninga og beitum svo einföldu reglunni A á hvern þeirra. Gerum ráð fyrir því að reglan A sé nákvæm fyrir allar margliður af stigi q eða minna, þar sem q er slétt. Lát E og E_2 vera skekkjur A og A_2. Ef f_{q+1} og f_{q+2} eru einliður, margliður hafandi einungis einn lið, af stigi $q+1$ og $q+2$ hvor um sig þá fáum við:

$$E_2(f_{q+1}) = 2^{-(q+2)} E(f_{q+1}), \qquad E_2(f_{q+2}) = 2^{-(q+2)} E(f_{q+2}) \tag{10}$$

Og því er reglan $\tilde{A}$ skilgreind eins og 9 nákvæm fyrir margliður af stigi $q+2$ eða minna. Til þess að sanna 10, skoðum þríhyrning með hornpunktana $(0,0), (1,0)$ og $(0,1)$. Beitum svo sömu aðferð og í 8 og tökum eftir því að einn af fjórum minni þríhyrningunum er snúið um 180 gráður. Þess vegna hefur einn af fjórum liðunum sem kemur úr $E_2(f_{q+1})$ andstætt formerki. Fyrir $E_2(f_{q+2})$ liðum við þá liði af stigi $q+2$, $q+1$, og af lægra stigi. Þá munu liðir af stigi $q+1$ styttast út við hvorn annan þar sem að minni þríhyrningurinn sem er í miðjunni hefur verið snúið um 180 gráður.



Mynd 1: Skipting þríhyrnings í fjóra minni

Þar sem að reglan $A^0 = T$ er nákvæm fyrir margliður af stigi 0 fáum við með þrepun að reglan A^m er nákvæm fyrir margliður af stigi $2m$ eða minna. Þar af leiðandi eru Romberg-útgiskanir $T_{N,m}$ samleitnar með hraða $O(N^{-(2m+1)})$. Þetta er einu stigi lægra en í einvíða tilfellinu og ekki er hægt að fá betri samleitni. Athugum samt að samhverfa er ekki skilyrði fyrir T með þessari röksemdafærslu, svo T getur verið hvaða heildunarregla sem er svo lengi sem hún er nákvæm fyrir fallið 1.

3.1 Heildun línulegra falla yfir sléttu

Við ætlum að sameina tvær aðferðir með því markmiði að flýta fyrir samleitni og auka hraða á útreikningum. Við notum eftirfarandi setningu úr bók Timothy Sauer í tölulegri greiningu [3]:

Setning 3.1. *Meðalgildi línulegs falls $L(x,y)$ yfir flöt R er $L(\overline{x},\overline{y})$, þ.e. fallgildið í massamiðjunni. M.ö.o. $\int\int_R L(x,y)dxdy = L(\overline{x},\overline{y})\cdot \text{area}(R)$.*

Sönnun: Látum $L = a + bx + cy$. Þá er:

$$\begin{aligned}
\int\int_R L(x,y)dxdy &= \int\int_R (a+bx+cy)dxdy \\
&= a\int\int_R dxdy + b\int\int_R xdxdy + +c\int\int_R ydxdy \\
&= \text{area}(R)\cdot(a+b\overline{x}+c\overline{y})
\end{aligned}$$

□

Nú er mjög einfalt að finna massamiðju þríhyrnings:

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \qquad \overline{y} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

og því getum við nú tekið þessar tvær aðferðir saman, þ.e. við munum nota Romberg-heildun úr kafla 2 en í stað trapisureglu munum við nota setningu 3.1 og beita henni á hvern minni þríhyrning sem verður til við skiptingu. Setning 3.1 segir okkur að ef við höfum línulegt fall þá er þessi aðferð nákvæm en þá er eðlilegt að spurja sig hvað gerist ef fallið er ekki línulegt. Rifjum fyrst upp miðpunktsreglu:

Setning 3.2. ***Miðpunktsregla****:*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = hf(w) + \frac{h^3}{24}f''(c) \tag{11}$$

þar sem að $h = (x_1 - x_0)$, w er miðpunkturinn $x_0 + h/2$, og c er á milli x_0 og x_1.

Nú leiðir setning 3.1 af sér alhæfingu fyrir setningu 3.2. Setning Taylor's fyrir föll í tveimur breytistærðum gefur okkur að:

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(\overline{x},\overline{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{y})(x-\overline{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})(y-\overline{y}) \\ &+ O((x-\overline{x})^2, (x-\overline{x})(y-\overline{y}), (y-\overline{y})^2) \\ &= L(x,y) + O((x-\overline{x})^2, (x-\overline{x})(y-\overline{y}), (y-\overline{y})^2) \end{aligned}$$

og því fáum við

Setning 3.3. ***Miðpunktsregla í tveimur víddum***

$$\begin{aligned} \int\int_R f(x,y)dxdy =& \int\int_R L(x,y)dxdy \\ &+ \int\int_R O((x-\overline{x})^2, (x-\overline{x})(y-\overline{y}), (y-\overline{y})^2)dxdy \\ &= \text{area}(R)\cdot L(\overline{x},\overline{y}) + O(h^4) = \text{area}(R)\cdot f(\overline{x},\overline{y}) + O(h^4) \end{aligned}$$

þetta fæst með notkun á setningu 3.1 og þar sem að h er þvermál takmarkaða svæðis R, lengsta fjarlægð milli tveggja punkta R, og $(\overline{x},\overline{y})$ er massamiðja R.

Þetta gerir okkur kleift að nota bæði línuleg föll og ólínuleg föll með þríhyrningsaðferðinni okkar, með villu sem minnkar með hverri ítrun.

4 Forritun og útfærsla

4.1 Forritun Trapisureglu

Útfærslan sem ég notaði fyrir trapisureglu í tveimur víddum fylgir forminu sem sett var fram í *Numerical Analysis* eftir Burden og Faires [1]. Við byrjum á því að reikna samskeytta trapisureglu með $N = 1, 2, 4\dots$ hlutbil í báðum víddum, þ.e. reiti. Fallið er metið í hornpunktum og er hverju fallgildi gefið vægi eftir því í hversu mörgum reitum sá punktur er. Svo var beitt Romberg-útgiskunum eins og þær voru settar fram í kafla 2 3. En fyrir trapisureglu í tveimur víddum notum við eftirfarandi formúlu sem hægt er að smíða eftir niðurstöðum úr *Numerical Analysis*:

$$\int\int_{[a,b][c,d]} f(x,y)dxdy \approx \frac{h_x h_y}{4}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} w_{ij} f(x_i, y_i)$$

þar sem að $w_{ij} \in \{1, 2, 4\}$ er vigtarstuðullinn, $h_x = \frac{b-a}{2}$ og $h_y = \frac{d-c}{2}$.

4.2 Forritun þríhyrningsreglu

Útfærslan á Romberg-heildun með þríhyrningsaðferð byggir á því að skipta hverjum reit í tvo samliggjandi þríhyrninga og reikna massamiðju hvers þeirra. Svipað og með trapisureglu, þá skiptum við í hverri ítrun Romberg-útgiskanna þríhyrningunum tveimur í fjóra minni og nálgum heildið í þeim, og svo koll af kolli. Þannig í N ítrunum fáum við N^2 minni þríhyrninga. Til þess að meta heildið í hverjum þeirra notum við niðurstöðuna úr kafla 3 og reiknum:

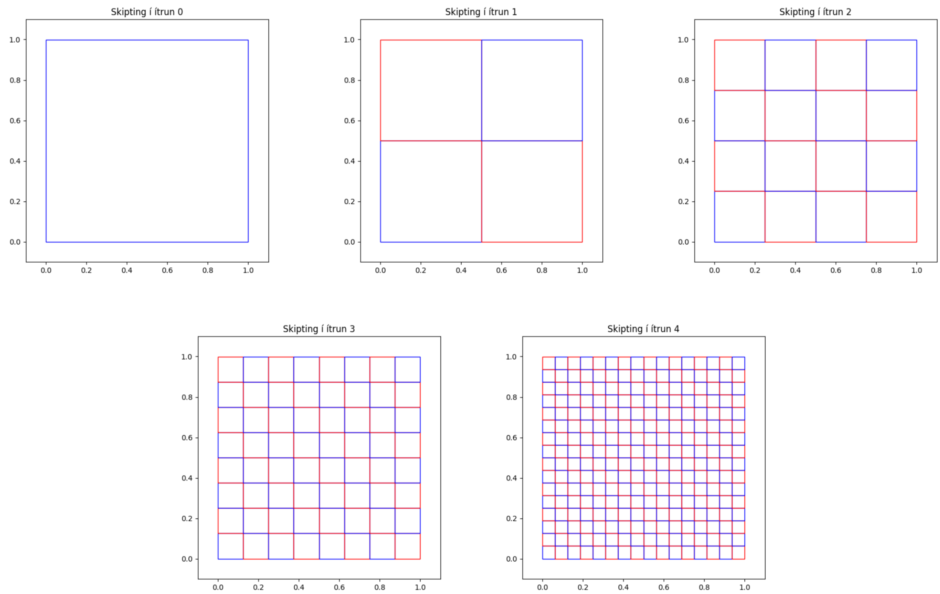
$$\text{area}(T_i) \cdot f(\overline{x_i}, \overline{y_i})$$

þar sem að T_i er minni þríhyrningur og $\overline{x_i}, \overline{y_i}$ er massamiðja hans. Auðvelt er að reikna massamiðju þríhyrnings og flatarmál hans er einfaldlega:

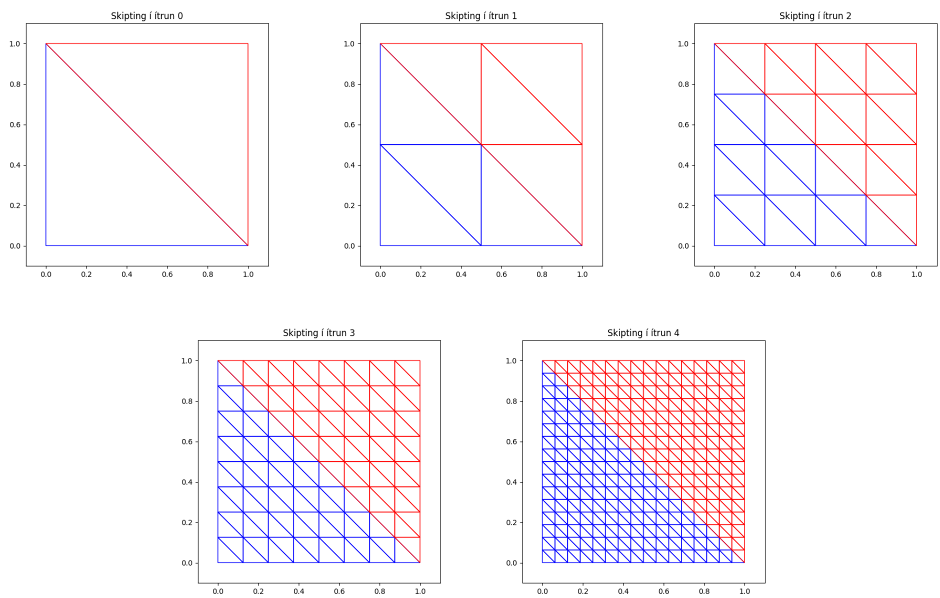
$$\text{area} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

4.3 Útfærsla

Við munu skoða nákvæmni og reikni tíma en til að auðvelda skilning á aðferðunum munum við einnig setja þær sjónrænt fram. Til einföldunar munum við alltaf heilda yfir svæðið $[0,1] \times [0,1]$. Skiptingin í svæðinu er alltaf eins í tveimur víddum. Skoðum hana myndrænt á næstu síðu:



Mynd 2: Skipting svæðis í tvívídd með hefðbundinni trapisureglu



Mynd 3: Skipting svæðis í tvívídd með þríhyrningsaðferð

Romberg-heildunin er framkvæmd með endurteknum reikningum á trapisureglunni eða þríhyrningsaðferðinni 3. Fyrir hvert fall munum við skoða skekkju í hverri ítrun á Romberg-heiluninni. Þar að auki munum við skoða hvernig hvor aðferðin skiptir svæðinu í þremur víddum. Við keyrum báðar aðferðir með fimm ítrunum, þar sem hver viðbótarítrun eykur keyrslutímann verulega. Mismunur milli aðferðanna verður sýnilegur þegar þær hafa verið keyrðar fimm sinnum.

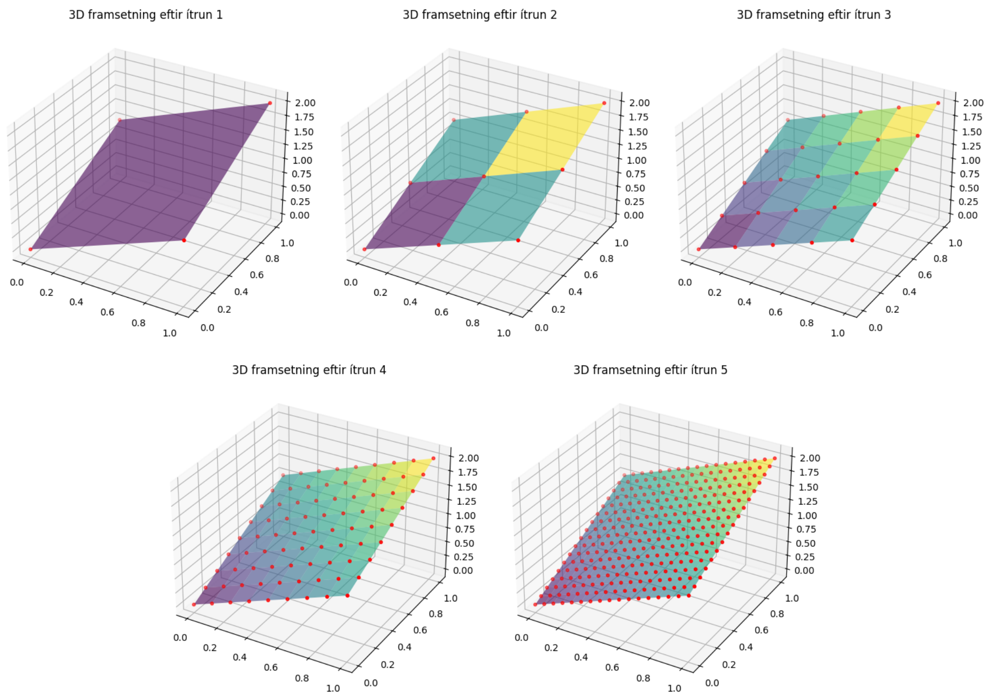
4.4 Línuleg föll

Til að kanna hegðun Romberg-heildunar byrjum við á því að athuga einfalt línulegt fall. Í báðum tilfellum, þ.e.a.s. með bæði trapisureglu og þríhyrningsaðferð, má búast við niðurstaðan sé nákvæm. Við sýndum í kafla 3) að þetta gildi fyrir þríhyrninga og hægt er að sýna að sama gildi um trapisuregluna. Fallið sem við skoðum er $f(x, y) = x + y$. Fyrst keyrum við Romberg-aðferð með hefðbundinni trapisureglu:

Ítrun	**Nálgun**	**Skekkja**
1	1,000000	0,000000e+00
2	1,000000	0,000000e+00
3	1,000000	0,000000e+00
4	1,000000	0,000000e+00
5	1,000000	0,000000e+00

Tafla 1: Niðurstöður Romberg-heildunar fyrir $f(x, y) = x + y$ (Trapisuregla). Rétt gildi: 1,000000.

Kemur í ljós að trapisureglan er einning nákvæm fyrir þetta línulega fall og mátti búast við þessu. Hægt er að sýna að trapisureglan í tvídídd eins og hún var sett fram í kafla 4.1 sé nákvæm fyrir línuleg föll. Hér má svo sjá hvernig hefðbundin Romberg-heildun með trapisureglu skiptir svæðinu upp:



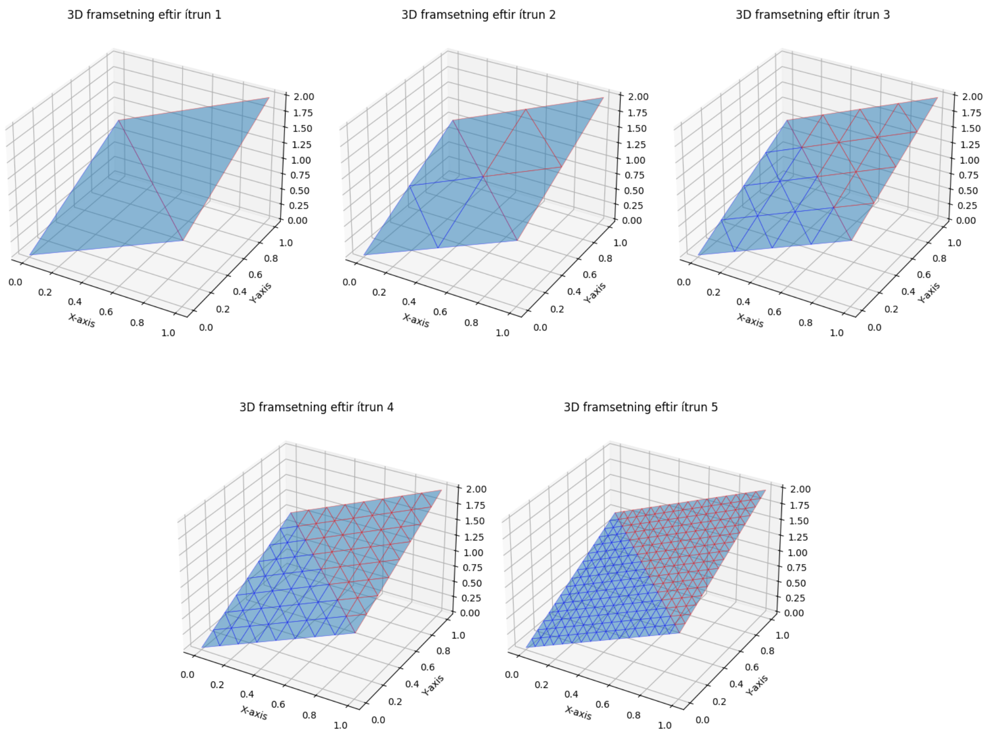
Mynd 4: Skipting svæðis í þrívídd með trapisureglu

Keyrum svo þríhyrningsaðferðina á sama fall:

Ítrun	**Nálgun**	**Skekkja**
1	1,000000	0,000000e+00
2	1,000000	0,000000e+00
3	1,000000	0,000000e+00
4	1,000000	0,000000e+00
5	1,000000	0,000000e+00

Tafla 2: Niðurstöður Romberg-heildunar fyrir $f(x, y) = x + y$ (Þríhyrningsaðferð). Rétt gildi: 1,000000.

Hér má svo sjá hvernig Romberg-heildun með þríhyrningsaðferð skiptir svæðinu upp:



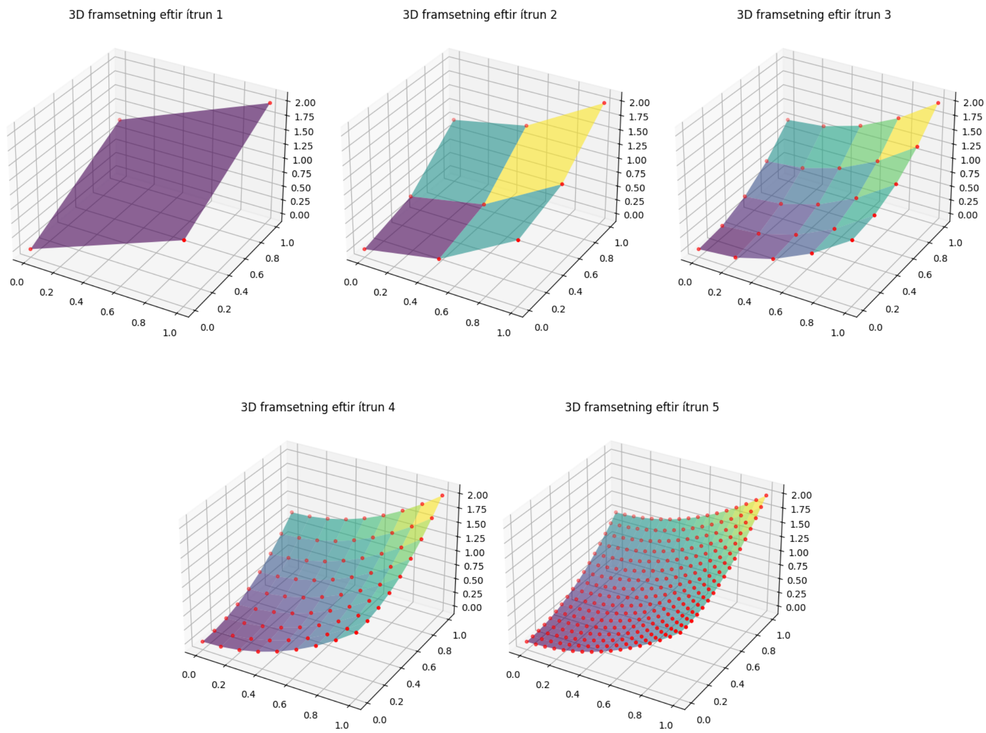
Mynd 5: Skipting svæðis í þrívídd með þríhyrningsaðferð

4.5 Ólínuleg föll

Við skoðum nú ólínulegt fall. Þegar Romberg-heildun er notuð á ólínuleg föll sjáum við betur muninn á aðferðunum tveimur vegna þess að þríhyrningsaðferðin er ekki nákvæm fyrir þau. Fallið sem við skoðum er $f(x, y) = x^2 + y^2$ Fyrst keyrum við Romberg-heildun með hefðbundinni trapisureglu:

Ítrun	**Nálgun**	**Skekkja**
1	1,000000	3,333333e-01
2	0,750000	8,333333e-02
3	0,687500	2,083333e-02
4	0,671875	5,208333e-03
5	0,667969	1,302083e-03

Tafla 3: Niðurstöður Romberg-heildunar fyrir $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Trapisuregla). Rétt gildi: 0,666667.

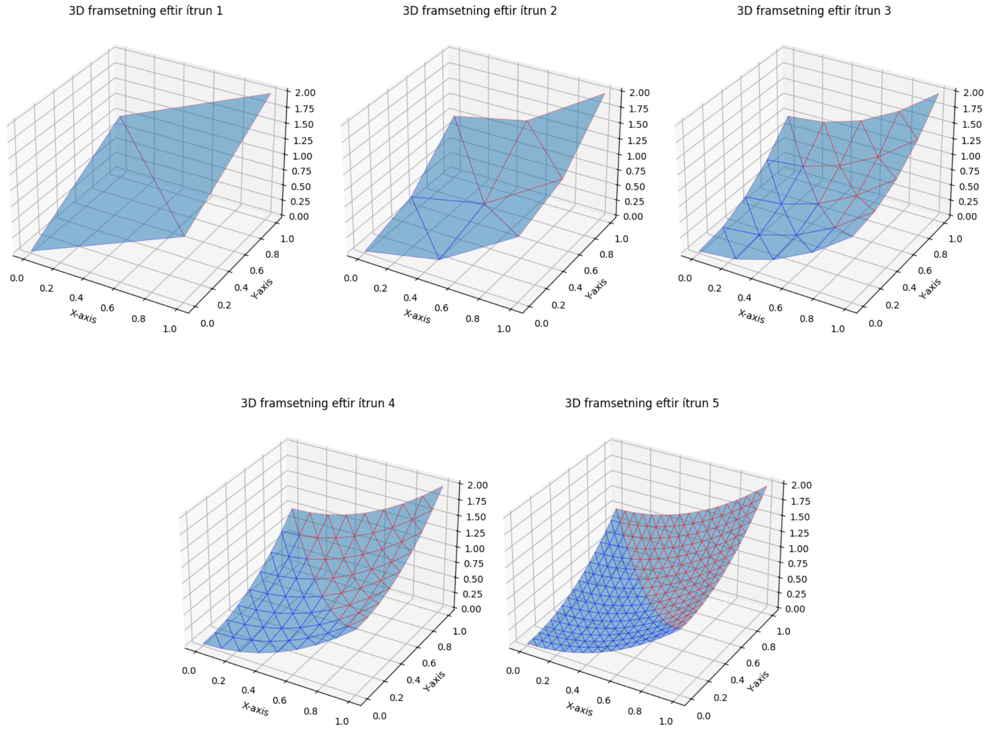


Mynd 6: Skipting svæðis í þrívídd með trapisureglu

Skoðum nú aðferðina sem nýtir sér þríhyrninga og setningu 3.1:

Ítrun	**Nálgun**	**Skekkja**
1	0,555556	1,111111e-01
2	0,666667	1,110223e-16
3	0,666667	2,220446e-16
4	0,666667	2,220446e-16
5	0,666667	2,220446e-16

Tafla 4: Niðurstöður Romberg-heildunar fyrir $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Þríhyrningsaðferð). Rétt gildi: 0,666667.



Mynd 7: Skipting svæðis í þrívídd með þríhyrningsaðferð

Við sjáum í fljótu bragði að fyrir einföld föll, bæði línuleg og ólínuleg eru báðar aðferðir afar nákvæmar. Hins vegar sýnir þríhyrningsreglan betir niðurstöður en trapisureglan. En þessu mátti búast við miðað við niðurstöður úr kafla 3.

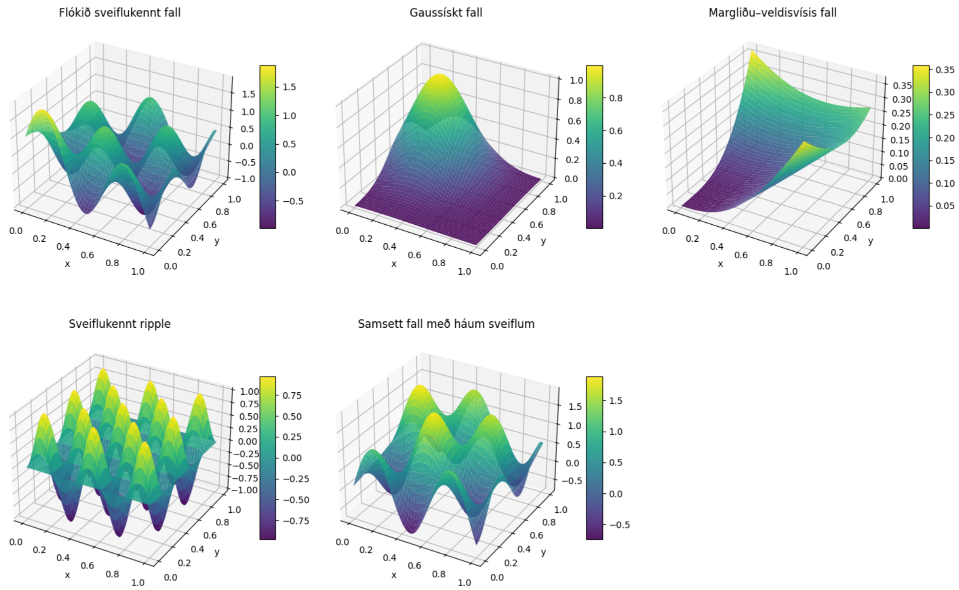
5 Niðurstöður

Í þessari greinargerð beittum við tveimur nálgunum fyrir Romberg-heildun í tveimur víddum: hefðbundinni trapisureglu og aðferð sem byggir á skiptingu svæðisins í þríhyrninga. Hér að ofan sáum við einföld föll og hvernig aðferðirnar verka á þau en nú að lokum athugum við hversu vel þær virka á flóknari föll. Til samanburðar voru nokkur föll með ólíkum eiginleikum prófuð:

- **Flókið sveiflukennt fall:** $f(x, y) = \sin(10x)\cos(10y) + e^{-5(x^2+y^2)}$. Þetta er fall sem sameinar hátíðni sveiflur og hratt minnkandi þætti.

- **Gaussískt fall:** $f(x, y) = e^{-10((x-0,3)^2+(y-0,7)^2)}$. Þetta er fall sem lýsir einum skörpum gaussískum topp.
- **Margliðu–veldisvíss fall:** $f(x, y) = (x^3 + y^4)e^{-x-y}$. Þetta er fall þar sem margliðu þættir eru margfaldaðir með hratt minnkandi veldisvísisfalli.
- **Sveiflukennt fall með gárum:** $f(x, y) = \sin(5\pi x)\sin(5\pi y)$. Þetta er fall þar sem reglulegar sveiflur eru til staðar sem mynda gárur.
- **Samsett fall með háum sveiflum:** $f(x, y) = \sin(10x)\cos(10y) + e^{-5((x-0,5)^2+(y-0,5)^2)} + 0,5e^{-10((x-0,2)^2+(y-0,8)^2)}$ Þetta er fall sem sameinar bæði sveiflur og veldisvísisföll til að mynda flókið mynstur.

Hér má svo sjá föllin:

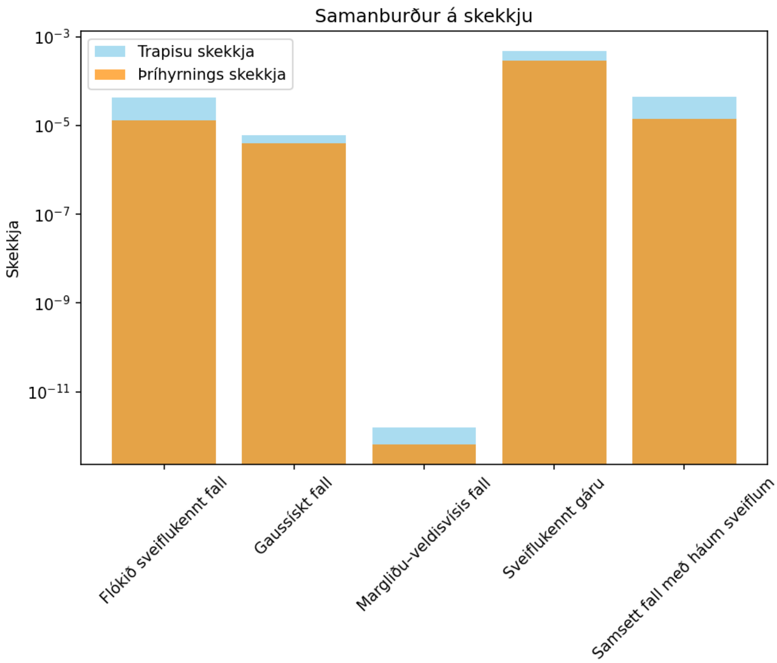


Mynd 8: Flóknari föll sem notuð eru í hermanir

Við keyrum báðar aðferðir með 5 ítrunum á hvert fall með þeim tilgangi að rannsaka mismun á skekkju og keyrslutíma. Til að gefa skýrt yfirlit af mælingum okkar er niðurstaðan sýnd í töflu 5.

Fall	Nákvæmt heildi	Trapisuregla	Trapisu skekkja	Þríhyrningsaðferð	Þríhyrnings skekkja
Flókið sveiflukennt fall	0,146583	0,146626	4,252084e-05	0,146570	1,331497e-05
Gaussískt fall	0,259739	0,259745	5,986498e-06	0,259735	3,928822e-06
Margliðu-veldisvísis fall	0,127540	0,127540	1,586925e-12	0,127540	6,540324e-13
Sveiflukennt gáru	0,016211	0,016693	4,817084e-04	0,016503	2,912048e-04
Samsett fall með háum sveiflum	0,587546	0,587590	4,419721e-05	0,587531	1,430453e-05

Tafla 5: Samanburður á nákvæmni Romberg heildunar með hefðbundinni trapisureglu og þríhyrningsaðferð.

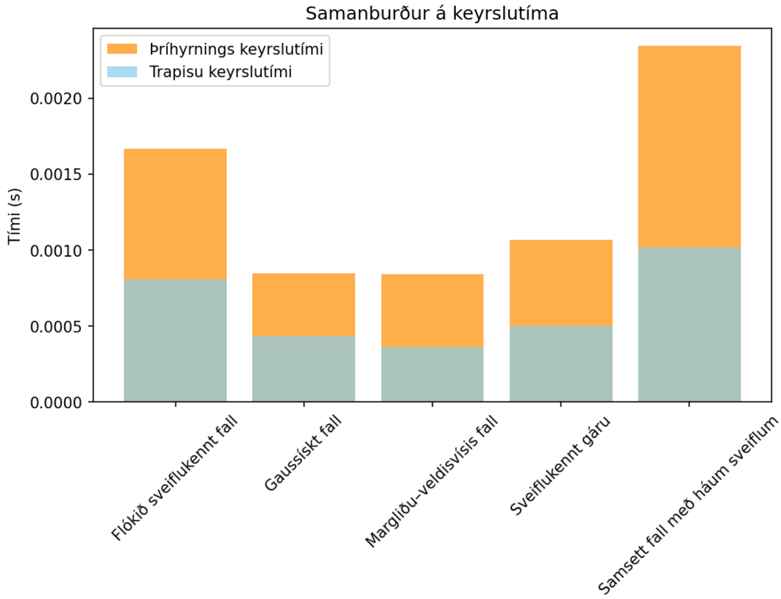


Mynd 9: Samanburður á skekkju milli aðferða

Tafla 5 sýnir að þríhyrningsaðferð og trapisuregla skila sambærilegri skekkju en þó er skekkjan fyrir trapsireglu í öllum tilfellum örlítið hærri. Mynd 9 sýnir svo samanburð á skekkju fyrir hvert fall (með log-skala) og þrátt fyrir að þríhyrningsaðferðin nái oftast virkilega góðum niðurstöðum þá er merkilegt að hefðbundna trapisureglan stendur sig sérstaklega vel á ólínulegum föllum og nær mikilli nákvæmni. Athugum nú keyrslutímann:

Fall	Trapisu keyrslutími	Þríhyrnings keyrslutími
Flókið sveiflukennt fall	0.000790	0.001546
Gaussískt fall	0.000420	0.000856
Margliðu-veldisvísis fall	0.000362	0.000933
Sveiflukennt gáru	0.000541	0.001065
Samsett fall með háum sveiflum	0.001057	0.002505

Tafla 6: Samanburður á keyrslutíma Romberg heildunar með hefðbundinni trapisureglu og þríhyrningsaðferð



Mynd 10: Samanburður á keyrslutíma milli aðferða

Niðurstöður hermanna sýna að þótt þríhyrningsaðferðin sé nákvæm, þá er hefðbundna trapisureglan keppnisfær og hefur lægri keyrslutíma í öllum tilfellum. Tafla 5 sýnir að fyrir öll prófuð föll eru skekkjur nálgunanna með þríhyrningsaðferðinni og trapisureglu ansi svipaðar. En tafla 5 og mynd 10 sýna að hefðbundna trapisuregla er hagnýtari. Keyrslutími fyrir aðferðina sem byggir á þríhyrningum er í öllum tilraunum hærri, oft tvöfalt eða meira. Þetta kemur til vegna þess að þríhyrningsaðferðin krefst flóknari skiptinga, útreikninga á massamiðju og flatarmáli.

Ef há nákvæmni er nauðsynleg, til dæmis þegar fallið hefur flókið eða sveiflukennt form, þá hefur þríhyrningsaðferðin sýnt fram á hraðari samleitni og minni skekkju í flestum tilvikum. Þetta á einnig við um tiltölulega einföld ólínuleg föll, þar sem aðferðin nær réttu gildi með færri ítrunum. Þrátt fyrir að hún hafi hærri keyrslutíma, getur minni fjöldi ítrana vegið upp á móti. Sé tími eða úrræði takmörkuð og ef næg nákvæmni næst með trapisureglu, þá er hún þó mjög hagkvæmur kostur. Munurinn á skekkju er þó það lítill að telja má að aukinn keyrslutími sé ekki þess virði og því sé trapisuregla hentugri í mörgum tilfellum.

6 Github

Hér er linkurinn á kóðann: https://github.com/solvisantos22/Romberg

Heimildir

[1] F. J. Burden R.L., *Numerical analysis*, Brooks Cole, 9ed. ed., 2010.

[2] W. J. Halpin, *An Examination of the Romberg Method for Numerical Integration*, electronic thesis and dissertation (etd), University of New Mexico, November 1967.

[3] T. Sauer, *Numerical Analysis*, Pearson, 2 ed., 2017.

[4] T. von Petersdorff, *A short proof for romberg integration*, The American Mathematical Monthly, 100 (1993), pp. 783–785.