Определители

Содержание

1 Определитель при помощи перестановок

1.1 Определение определителя

Определение 1. *Определителем квадратной матрицы* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *будем называть число*

$$\det A := \sum_{\pi} \operatorname{sign} \pi a_{1\pi_1} \dots a_{n\pi_n}$$

Скажем, что матрица является вектор-строкой вектор-стоблцов. Другими словами,

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$

где

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

Поэтому определитель матрицы A будет ещё обозначать как

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n)$$

Нетрудно заметить несколько свойств которые очевидным образом следуют из определения:

Свойство 1.

$$\det(a_1, \dots, 0, \dots, a_n) = 0.$$

Свойство 2. *Определитель треугольной матрицы является произведением чисел на главной диагонали.*

Так как транспозиция изменяет чётность перестановки, то определитель является кососимметричной функцией по столбцам.

Свойство 3.

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Из этого свойства следует следующее:

Свойство 4.

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0.$$

Доказательство.

$$\det(a_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{a_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{a_i}, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{a_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{a_i}, \dots, a_n)$$

То есть $\det A = -\det A$, а следовательно он равен нулю. $\square$

1.2 Линейность определителя

Определение 2. *Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется* <u>*полилинейной*</u> *тогда и только тогда, когда*

$$f(x_1, \dots, x_i^{'} + x_i^{''}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j^{'}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j^{''}, \dots, x_n).$$

Определение 3. *Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется* <u>*однородной*</u> *тогда и только тогда, когда*

$$f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Определение 4. *Функция $f(x_1, \dots, x_k)$ полилинейная и однородная одновременно называется* <u>*линейной*</u>.

Теорема 1. *Определитель является линейной функцией по столбцам.*

Доказательство. Доказательство данной теоремы состоит из двух шагов: доказательство полилинейности и однородности.

1. Однородность определителя как функции по столбцам является практически очевидной. Действительно,

$$\det(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\pi} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{1\pi_1} \dots a_{n\pi_n}.$$

   Ровно одно $\pi_j = i$, поэтому:

$$\sum_{\pi} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{1\pi_1} \dots (ca_{ji}) \dots a_{n\pi_n} =$$
$$c \sum_{pi} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{1\pi_1} \dots a_{j\pi_j} \dots a_{n\pi_n} = c \det A.$$

2. Доказать полилинейность тоже очень просто:

$$\det(a_1, \dots, a_i^{'} + a_i^{''}, \dots, a_n) = \sum_{\pi} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{1\pi_1} \dots (a_{xi}^{'} + a_{xi}^{''}) \dots a_{n\pi_n} =$$
$$\sum_{\pi} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{1\pi_1} \dots a_{xi}^{'} \dots a_{n\pi_n} + \sum_{\pi} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{1\pi_1} \dots a_{xi}^{''} \dots a_{n\pi_n}.$$

   Но последний два слагаемых это $\det(a_1, \dots, a_i^{'}, \dots, a_n)$ и $\det(a_1, \dots, a_i^{''}, \dots, a_n)$ соответственно.

□

Из линейности определителя как функции по столбцам следует очень важное свойство определителя:

Теорема 2. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной ее строки прибавить соответствующие элементы другой сторки, умноженные на одно и то же произвольное число.*

Доказательство. Необходимо доказать, что

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_n).$$

Это в общем не трудно:

$$\det(a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) =$$
$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \lambda \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det A.$$

так как определитель, представляемый вторым слагаемым имеет два одинаковых столбца и следовательно равен нулю. □

1.3 Определитель сохраняется при транспонировании

Определение 5. *Транспонированной матрицей называется матрица, строки и столбцы которой обменяны местами. Другими словами $A^T = (a_{ji})_{i,j=1}^n$ если $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.*

Свойство 5. $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Рассмотрим слагаемое $P = a_{1\pi_1} \dots a_{n\pi_n}$ входящее в определитель матрицы A. Переставим слагаемые в этом произведении таким образом, чтобы возрастал второй индекс:

$$P = a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \dots a_{\sigma_n n}.$$

Утверждается, что перестановки π и σ имеют одинаковое количество инверсий. Действительно, пусть пара $i < j$ была инверсией в π.

$$\begin{gathered} 1 < \dots < i < \dots < j < \dots < n \\ \dots\ \pi_i \quad > \quad \pi_j\ \dots \end{gathered}$$

Тогда в σ она также ею будет:

$$\begin{gathered} \dots\ j \qquad > \qquad i\ \dots \\ 1 < \dots < \pi_j < \dots < \pi_i < \dots < n \end{gathered}$$

Аналогично, если $i < j$ инверсией не была, то и не станет:

$$\begin{gathered} 1 < \dots < i < \dots < j < \dots < n \\ \dots\ \pi_i \quad < \quad \pi_j\ \dots \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \dots\ i \qquad < \qquad j\ \dots \\ 1 < \dots < \pi_i \dots < \pi_j < \dots < n \end{gathered}$$

Поэтому P не изменилось. Поэтому и определитель остался таким же. $\square$

1.4 Алгебраические дополнения

Определение 6. *Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется определитель матрицы A из которой вычеркнули i-ю строку и j-й столбец и обозначается Δ_{ij}.*

На самом деле, понятие минора можно обобщить следующим образом.

Определение 7. *Минором $\Delta_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется определитель матрицы A из которой вычеркнули строки $i_1,\dots,i_k$ и $j_1,\dots,j_k$.*

Для начала докажем следующее утверждение.

Лемма 1.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\Delta_{11}$$

Доказательство. Запишем определитель транспонированной матрицы:

$$\det A = \sum_\pi \operatorname{sign} a_{\pi_1 1} a_{\pi_2 2} \dots a_{\pi_n n}.$$

При $\pi_1 > 1$ соответствующее слагаемое будет равнятся нулю, поэтому

$$\det A = \sum_{\pi'} \operatorname{sign} \pi' a_{11} a_{k_1' 2} \dots a_{k_{n-1}' n} = a_{11}\Delta_{11}.$$

где π' – это сдвинутая перестановка π. $\square$

Определим важнейшее понятие алгебраического дополнения.

Определение 8. *Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется число $(-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$.*

Докажем ещё одну лемму.

Лемма 2.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_{ij} a_{ij}.$$

Доказательство. Обменивая соседние столбцы $j-1$ раз получаем матрицу:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{j-1}\det\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ясно что относительный порядок всех остальных столбцов не изменился. Теперь обменяем местами $i-1$ соседнюю строку.

$$(-1)^{j-1}\det\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{j-1}(-1)^{i-1}\det\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Но последнее в свою очередь равно $\Delta_{ij}a_{ij}$. Итого получаем, что

$$\det A = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\Delta_{11}a_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}a_{ij} = A_{ij}a_{ij}.$$

Что, в общем то, и требовалось доказать. □

Докажем теперь одну из важнейших формул в теории определителей.

Теорема 3 (Правило разложения определителя по столбцу)**.** *Определитель матрицы A можно вычислить с помощью следующей суммы:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Назвем соответствующие вектора-столбцы e_i:

$$a_j = e_1 + e_2 + \dots + e_n.$$

И воспользуемся линейностью определителя как функции по столбцам:

$$\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, e_1 + \dots + e_n, \dots, a_n) =$$
$$\sum_{k=1}^{n}\det(a_1, \dots, e_k, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}a_{kj}.$$

□

Следствием данной теоремы является весьма любопытный факт:

Теорема 4. *Для произвольных $i \neq j$ имеет место тождество:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0.$$

Доказательство. Запишем следующий определитель:

$$0 = \det(a_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{a_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{a_i}, \dots, a_n)$$

Но с другой стороны откроем этот определитель при помощи правила разложения по столбцу:

$$0 = \det(a_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{a_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{a_i}, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}.$$

□

2 Примеры вычисления опредилителей матриц

2.1 Определитель Вандермонда

Определение 9. *Определителем Вандермонда называется определитель матрицы следующего вида:*

$$V(x_1,\dots,x_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Определители Вандермонда находят применение в самых различных областях математики.

Теорема 5. *Определитель Вандермонда можно представить в виде следующего произведения:*

$$V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

Доказательство. Данное доказательство основано на сравнении степеней и восходит к Коши.

Заметим, что $V(x_1,\dots,x_n)$ является многочленом.

Отнимем от i-го столбца j-й и получим:

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_j & \dots & x_i - x_j & \dots & x_n \\ x_1^2 & \dots & x_j^2 & \dots & x_i^2 - x_j^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_j^{n-1} & \dots & x_i^{n-1} - x_j^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Заметим, что i-й столбец теперь делиться на $x_i - x_j$ поэтому

$$V(x_1,\dots,x_n) \,\vdots\, (x_i - x_j).$$

Так как i, j выбирались произвольно, то

$$V(x_1,\dots,x_n) \,\vdots\, \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

Также заметим, что степень определителя равна $n(n-1)/2$ из определения, так как в сумме будет слагаемое вида $P = 1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 \cdot \dots \cdot x_n^{n-1}$. Но с другой стороны

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = \binom{n}{2} = n(n-1)/2.$$

Так как количество таких i, j равно $\binom{n}{2}$, а степень каждой скобки в точности равна единице. $\square$

Будем пользоватся нотацией убывающих степеней $a^{\downarrow b} = a(a-1)\dots(a-b+1)$.

Следствие. $V(x_1,\dots,x_n) = \det\left[x_i^{\downarrow(j-1)}\right]_{i,j=1}^n$.

При помощи определителя Вандермонда можно вычислять более трудные определители. К примеру следующий определитель возникает при доказательстве формулы МакМагона для количества плоских разбиений $PP(a,b,c)$.

Пример. *Доказать, что:*

$$\det\left[\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right]_{i,j=1}^c = \prod_{i=1}^a\prod_{j=1}^b\prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Доказательство. Распишем:

$$\binom{a+b+i-1}{a+i-j} = \frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-j)!\,(b+j-1)!}$$

Тогда:

$$PP(a,b,c) = \prod_{c=1}^c \frac{(a+b+i-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)!} \cdot \det\left[(a+i-1)^{\downarrow(j-1)}\right]_{i,j=1}^c$$

Заметим, что второй множитель является определителем Вандермонда по убывающим степеням:

$$\det\left[(a+i-1)^{\downarrow(j-1)}\right]_{i,j=1}^{c} = V(a,\dots,a+c-1) = \prod_{i>j}(i-j) = 1!\cdot\ldots\cdot(c-1)!$$

Поэтому после сокращения получаем:

$$PP(a,b,c) = \prod_{j=1}^{c}\frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)^{\downarrow b}} = \prod_{i=1}^{b}\prod_{j=1}^{c}\frac{a+i+j-1}{i+j-1}$$

Запишем $\frac{a+i+j-1}{i+j-1}$ при помощи произведения a множетелей.

$$\frac{a+i+j-1}{i+j-1} = \frac{i+j}{i+j-1}\cdot\frac{i+j+1}{i+j}\cdot\frac{i+j+2}{i+j+1}\cdot\ldots\cdot\frac{i+j+a-1}{i+j+a-2} = \prod_{k=1}^{a}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Остается записать в виде произведения и переобозначить переменные.

□

2.2 Тридиагональная матрица

Тридиагональной матрицей (или, иногда, матрицей Якоби) называется матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}$$

Обозначим определитель данной матрицы за Δ_n.

Разложим даную матрицу по первой строке. Получим:

$$\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a & b \\ & & & c & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} c & b & & & \\ & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$$

Раскладывая определитель во втором слагаемом по первому столбцу получаем, что

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}.$$

Это линейная рекуррента второго порядка. Подсчитаем начальные условия:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc.$$

Итого решение данной линейной рекурренты будет являтся значением опредилителя:

$$\begin{cases} \Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}, \\ \Delta_1 = a, \\ \Delta_2 = a^2 - bc. \end{cases}$$