

# Лема В'єннота-Геселя-Ліндстерма

Зв'язок між шляхами в графі та визначниками матриць

Мартін Лешко, 2021

# Мотиваційні приклади

1. Нехай  $a_1 < \dots < a_n$  і  $b_1 < \dots < b_n$ . Тоді  $\det \left( C_{a_i}^{b_j} \right)_{i,j=1}^n \geq 0$ . Біноміальні визначники часто зустрічаються в комбінаториці.
2. Поліноми Шура.
3. Формула МакМагона для плоских розбиттів та зв'язок з замощеннями шестикутників ромбиками:  $PP(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$ .

# 1 Необхідні визначення та лема

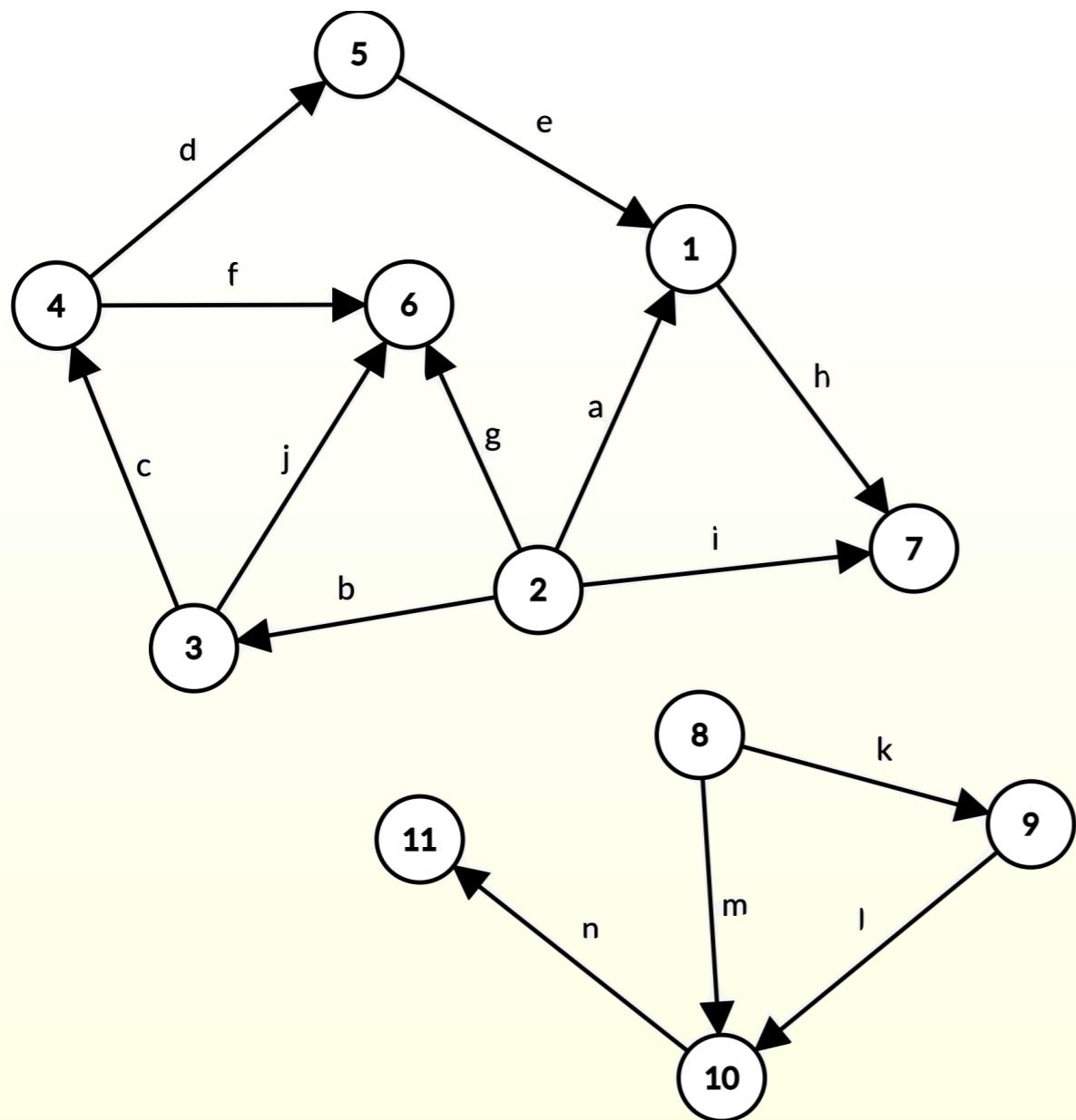
# Необхідні визначення

1. Розглянемо граф  $G = (V, E)$  з множини  $DAG(N)$  – орієнтованих ациклических графів на  $N$  вершинах.
2. Введемо функцію  $\omega : E \rightarrow \mathbb{C}$ , що кожному ребру співставляє його *вагу*  $\omega(e)$ .
3. *Вага* шляху  $P : A \rightarrow B$  є добутком ваг ребер цього шляху:  $\omega(P) = \prod_{e \in P} \omega(e)$ , причому *вага* порожнього шляху дорівнює 1.
4. Нехай  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – підмножини вершин графу причому  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = n$ . Тоді матриця  $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  шляхів визначається так:  $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})_{uv} = \sum_{P: \mathcal{A}_u \rightarrow \mathcal{B}_v} \omega(P)$ .

# Необхідні визначення – 2

1. Система шляхів  $\mathfrak{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \pi)$  – це множина з  $n$  шляхів виду  $P : \mathcal{A}_u \rightarrow \mathcal{B}_{\pi(u)}$ , де  $\pi \in \mathfrak{S}_n$ . Якщо між вершинами  $\mathcal{A}_u$  і  $\mathcal{B}_{\pi(u)}$  є декілька шляхів, то вибирається рівно один з них.
2. Вагою системи шляхів  $\mathfrak{P}$  визначається як добуток по вагам шляхів, що входять до неї:  $\omega(\mathfrak{P}) = \prod_{1 \leq u \leq n} \omega(P : \mathcal{A}_u \rightarrow \mathcal{B}_{\pi(u)})$ .
3. Будемо говорити, що  $\mathfrak{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \pi)$  – це система шляхів без спільних вершин, якщо будь-які два шляхи з  $\mathfrak{P}$  не мають спільних вершин. Множину таких систем шляхів позначається так:  $\text{Disjoint}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

# Приклад



1. Вага шляху  $4 \rightarrow 7$  це  $deh$ , а для шляху  $2 \rightarrow 7$  це або  $bcdeh$  або  $i$ , для шляху  $7 \rightarrow 7$  вага 1.

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h \\ a & 1 & b & bc & bcd & g + bj + bcf & i + ah + bcdeh \\ cde & 0 & 1 & c & cd & j + cf & cdeh \\ de & 0 & 0 & 1 & d & f & deh \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & eh \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Нехай  $\mathcal{A} = \{2,3,4\}$ ,  $\mathcal{B} = \{1,6,7\}$  і  $\pi = (3,2,1)$ . Тоді система шляхів може виглядати наступним чином:  
 $\mathfrak{P} = \{2-a-h-7, 3-j-6, 4-d-e-1\}$ . Вагою буде  $ah \cdot j \cdot de$ .

# Формульовання леми

*Лема (Lindström, Gessel, Viennot).* Нехай  $G \in \text{DAG}(n)$  і  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – дві підмножини вершин цього графу, тоді виконується наступна рівність:

$$\det M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{\mathfrak{P}(\pi) \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \text{sign } \pi \cdot \omega(\mathfrak{P}),$$

# Доведення – 1

Запишемо  $\det M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  у виді суми:

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot M(\mathcal{A}, \mathcal{B})_{1\pi(1)} \dots M(\mathcal{A}, \mathcal{B})_{n\pi(n)}.$$

Враховуючи визначення системи шляхів переписуємо формулу так

$$\det M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{\mathfrak{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \pi)} \operatorname{sign} \pi \cdot \omega(\mathfrak{P}).$$

Тому треба довести, що

$$\sum_{\mathfrak{P}(x) \in \operatorname{Com}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \operatorname{sign} \pi \cdot \omega(\mathfrak{P}) = 0.$$

# Доведення – 2

Наведемо інволюцію “стрілочний перевід”

$$\psi : \text{Com}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Com}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

таку, що

$$\begin{cases} \omega[\psi(\mathfrak{P}(\pi))] = \omega[\mathfrak{P}(\pi)], \\ \text{sign } \psi(\mathfrak{P}(\pi)) = - \text{sign } \pi \end{cases}$$

де  $\text{sign } \mathfrak{P}(\pi) = \text{sign } \pi$ .

Тоді

$$\sum_{\mathfrak{P}(x) \in \text{Com}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} - \text{sign } \pi \cdot \omega[\psi(\mathfrak{P})] = \sum_{\mathfrak{P}(x) \in \text{Com}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \text{sign } \pi \cdot \omega[\psi(\mathfrak{P})].$$

# **Узагальнення**

## **Формула Таляски [Tal]**

# Приклад

**Теорема.** Нехай  $a_1 < \dots < a_n$  і  $b_1 < \dots < b_n$ . Тоді  $\det \left( C_{a_i}^{b_j} \right)_{i,j=1}^n \geq 0$ .

Доведення базується на тому, факті, що  $C_{a_i}^{b_j}$  є кількість шляхів між відповідними точками на прямих  $y = x$  та  $y = 0$ .

Такий визначник також позначається як:  $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}$ .

Ще дві теореми про такого року визначник можна знайти в задачах.

## 2 Плоскі розбиття, замощення ромбиками та формула МакМагона

# Пререквізити – вандермондіан

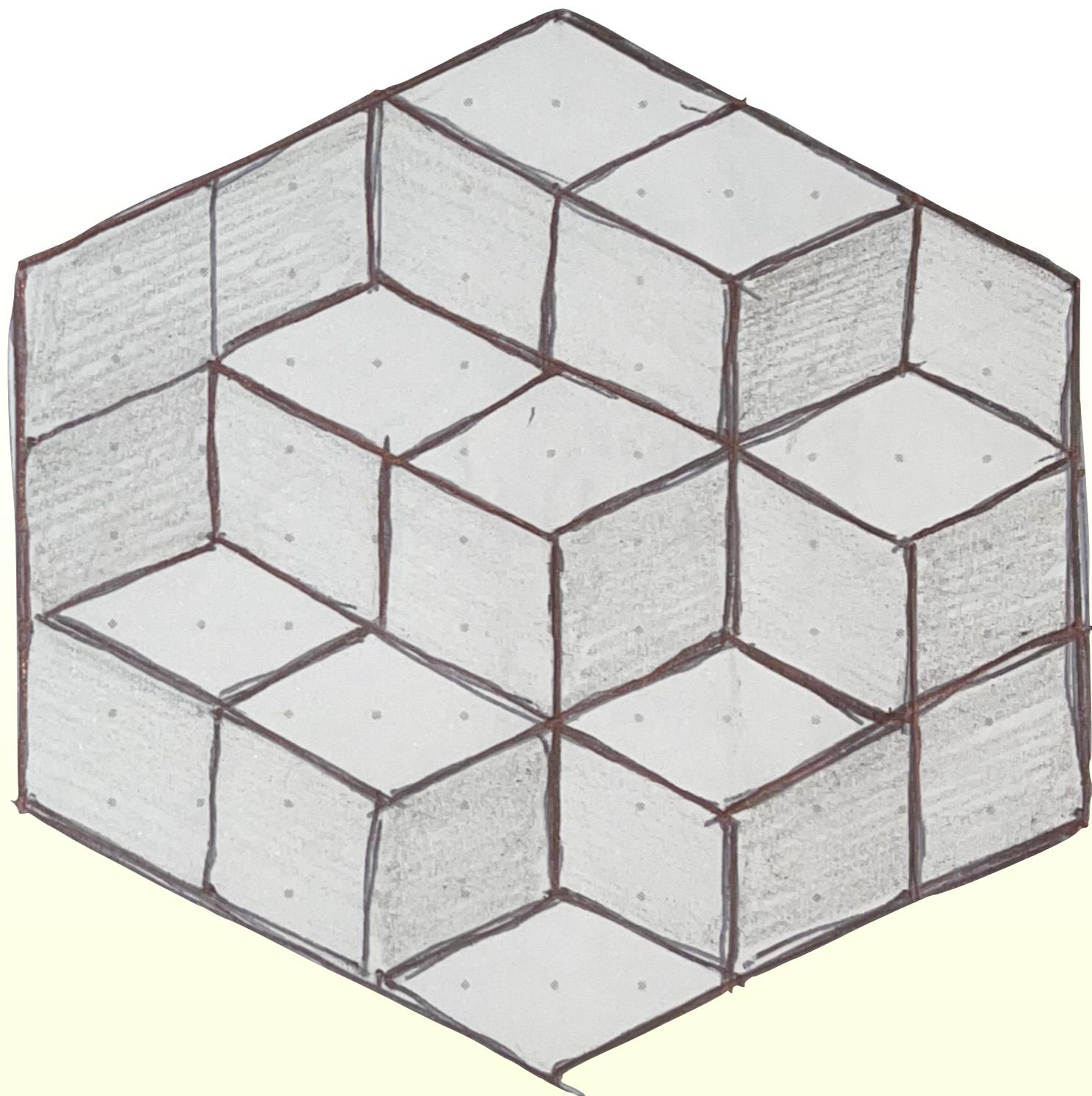
Вандермондіан – це визначник наступної матриці:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \det \left[ x_i^{j-1} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ми будемо користуватись двума фактами:

$$1. \quad V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

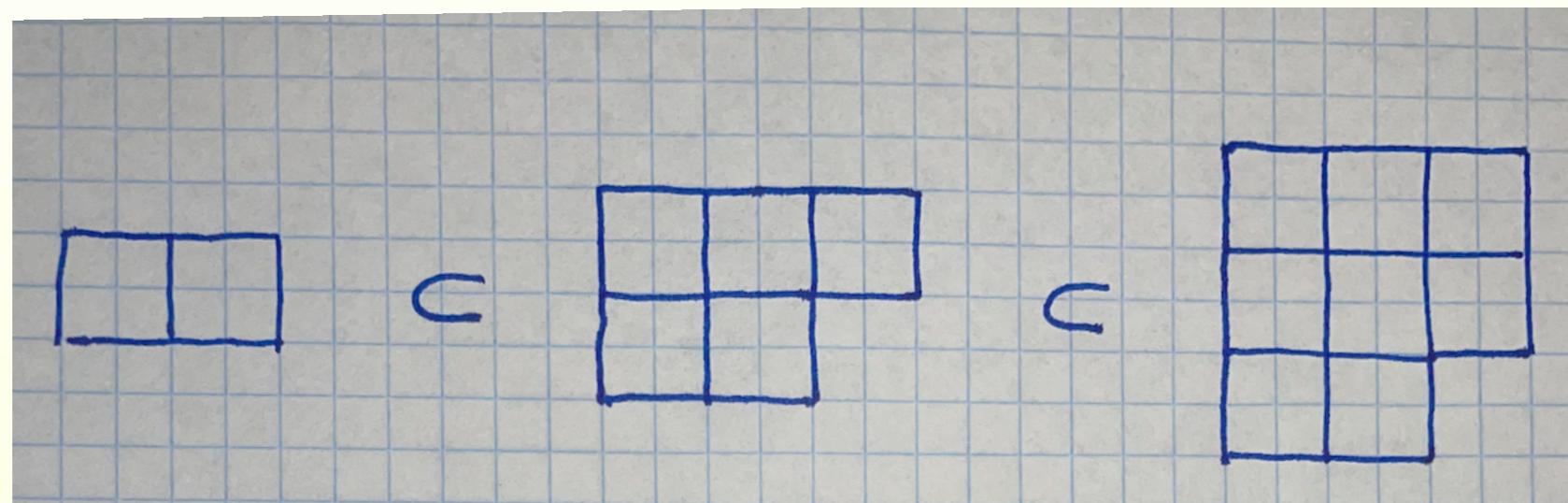
$$2. \quad V(x_1, \dots, x_n) = \det \left[ x_i^{\downarrow(j-1)} \right]_{i,j=1}^n \quad (\text{задача})$$



# Визначення

**Визначення.** Плоским розбиттям (plane partition) називається послідовність вкладених діаграм Янга:  $\mu_1 \subseteq \mu_2 \subseteq \dots \subseteq \mu_k$ .

Наприклад, для ілюстрації:



# Формульовання задачі

**Задача.** Знайти кількість плоских розбиттів, що містяться в паралелепіпеді  $\mathcal{B}(a, b, c)$ .

Відповідь на це запитання дає формула МакМагона:

$$PP(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

# План доведення – комбінаторна частина

1. Замітимо, що діаграмам Янга затиснутих в прямокутнику  $a \times b$  відповідають шляхи з лівого верхнього кута до правого НИЖНЬОГО.
2. Тому кількість ланцюжків  $\mu_1 \subseteq \dots \subseteq \mu_k$  це кількість наборів з  $k$  шляхів таких, що  $i$  тий шлях знаходиться нище  $(i - 1)$ -го.
3. Зробимо здиги для того, щоб шляхи не перетиналися.
4. На утворених множинах вершин застосуємо LGV лему:  
$$P_{nc}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = \det M(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$
5. Матриця  $M$  записується явно: 
$$\left[ \binom{a+b}{a+i-j} \right]_{i,j=1}^c$$

# План доведення – алгебраїчна частина

З комбінаторної частини отримали:

$$PP(a, b, c) = \det \left[ \binom{a+b}{a+i-j} \right]_{i,j=1}^n.$$

Легко показати, що

$$PP(a, b, c) = \det \left[ \binom{a+b+i-1}{a+i-j} \right]_{i,j=1}^n.$$

Розпишемо  $\binom{a+b+i-1}{a+i-j} = \frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-j)! (b+j-1)!}$  і повиносимо з

визначника все, що зможемо.

# План доведення – алгебраїчна частина

Отримаємо, що:

$$PP(a, b, c) = \prod_{c=1}^c \frac{(a + b + i - 1)^{\downarrow b}}{(b + j - 1)!} \cdot \det [(a + i - 1)^{\downarrow(j-1)}]_{i,j=1}^c$$

Замітимо, що другий множник це вандермондіан по спадним степеням:

$$\det [(a + i - 1)^{\downarrow(j-1)}]_{i,j=1}^c = V(a, \dots, a + c - 1) = \prod_{i>j} (i - j) = 1! \cdot \dots \cdot (c - 1)!$$

Після простих перетворень отримаємо, що

$$PP(a, b, c) = \prod_{j=1}^c \frac{(a + b + j - 1)^{\downarrow b}}{(b + j - 1)^{\downarrow b}} = \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^c \frac{a + i + j - 1}{i + j - 1}.$$

Залишається записати  $\frac{a + i + j - 1}{i + j - 1}$  через добуток  $a$  множників.

### 3 Задачі для самостійного розв'язання

# Задачі

- 0.** Доведіть формулу для спадного визначника Вандермонда  $\det \left( x_i^{\downarrow(j-1)} \right)_{i,j=1}^n = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$ .
- 1.** Доведіть, що  $\det \left[ \binom{m+i-1}{j-1} \right]_{i,j=1}^n = 1$ .
- 2.** Доведіть, що шестикутник можна замостили ромбиками лише коли його протилежні сторони рівні.
- 3.** Доведіть формулу  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  і її узагальнення – формулу Коші-Біне.
- 4.** Назведемо множиною спадання перестановки  $\sigma$  наступну множину:  $\text{Des}(\sigma) = \{k : \sigma(k) > \sigma(k+1)\}$ .  
Доведіть, що кількість перестановок із заданою множиною спадання  $\in \binom{\text{Des}, n}{0, \text{Des}}$ .
- 5.** (Поліноми Шура) Нехай  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_T \omega(T)$ , де сума  $T$  проходить по всім неспадним таблицям Янга, а  $\omega(T)$  це моном  $x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$ , де  $\alpha_i$  – кількість разів, яке  $i$  зустрічається в таблиці. Доведіть, що  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \det \left[ h_{\lambda_i+j-i}(x_1, \dots, x_n) \right]_{i,j=1}^r$ , де  $h_t(x_1, \dots, x_n)$  – повний симетричний многочлен степені  $t$ .
- 6.** Представте у виді визначника кількість піддіаграм всередині довільної двувимірної діаграми Янга.

# Список використаної літератури

[GV] I. Gessel, G. Viennot, Binomial determinants, paths, and hook length formulae – Advances in mathematics 58, 1985

[Tal] K. Talaska, DETERMINANTS OF WEIGHTED PATH MATRICES, 2012

[Ai] Айгнер М. Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. — Мир, 2006.

[Lid] E. Lidan, Lindström-Gessel-Viennot theorem as a common point of linear algebra and combinatorics, – DOI, 2018

[Smi] Е. Смирнов. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы, – МЦНМО, 2014.

Дякую за увагу!