Пространство подграфов

Содержание

1 Пространство графов

Для начала необходимо вспомнить такое определение графа.

Определение 1. *Пара $G = (V, E)$ называется <u>графом</u> если $E \subseteq V \times V$.*

Рассмотрим некоторое множество V и множество G_V всех графов над V. Другими словами,

$$G_V = \{(V, E) : E \subseteq V \times V\}.$$

Естественным образом можем ввести операцию сложения по модулю 2 для графов.

Определение 2. *Пусть $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ – два графа. Тогда их <u>суммой по модулю 2</u> называется граф*

$$G_1 \oplus G_2 = (V, E_1 \triangle E_2)$$

где $\triangle$ обозначает симметрическую разность множеств E_1 и E_2.

Теперь заметим, что G_V образует абелеву группу относительно операции «$\oplus$».

Лемма 1. *$(G_V, \oplus)$ является абелевой группой.*

Доказательство. Необходимо совершить непосредственную проверку всех аксиом группы. □

Договоримся называть $\varnothing_V = (V, \varnothing)$ – граф с $|V|$ изолированными вершинами.

Определение 3. *Определим умножение графа $G = (V, E)$ на скаляр из поля $\mathbb{F}_2$ следующим образом:*

$$0 \cdot G = \varnothing_V \qquad 1 \cdot G = G.$$

Одно из важнейших понятий алгебраической теории графов является следующее утверждение:

Теорема 1. *$(G_V, \mathbb{F}_2, \oplus, \cdot)$ является линейным пространством, которое называется <u>пространством графов</u>.*

Доказательство. По лемме 1 $(G_V, \oplus)$ является абелевой группой.

Ассоциативность умножения на скаляр и унитарность очевидны.

Дистрибутивность относительно сложения скаляров $(\alpha + \beta)G = \alpha G + \beta G$ доказывается рассмотрением трех случаев $\alpha = \beta = 0$, $\alpha = \beta = 1$ и $\alpha = 0, \beta = 1$.

Дистрибутивность относительно сложения векторов является очевидной, так как умножение на склаляр либо обращает вектор в нулевой, либо не изменяет его. □

2 Пространство подграфов

Рассмотрим множество остовных подграфов некоторого фиксированного графа $G \in G_V$. Очевидно, что это множество образует подпространство пространства графов. Будем обозначать его $S(G)$.

Определение 4. *$S(G)$ – подпространство пространства графов, являющееся множеством всех остовных подграфов графа G называется <u>пространством подграфов</u>.*

Естественным желанием является нахождение базиса данного пространства.

Занумеруем все ребра графа G некоторым образом: $e_1, \dots, e_{|G|}$.

Определение 5. *Пусть T_j (или T_{e_j}) – граф, содержащий единственное ребро e_j.*

Лемма 2. *Графы $\{T_1, \dots, T_{|G|}\}$ образуют базис $S(G)$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый подграф $H \in S(G)$. Очевидно, что его ребра также являются ребрами графа G. Поэтому существуют индексы $j_1, j_2, \dots, j_{|H|}$ такие, что

$$H = T_{j_1} \oplus T_{j_2} \oplus \dots \oplus T_{j_{|H|}} = \\ (0 \cdot T_1) \oplus (0 \cdot T_2) \oplus \dots \oplus (1 \cdot T_{j_1}) \oplus \dots \oplus (1 \cdot T_{j_{|H|}}) \oplus \dots \oplus (0 \cdot T_{|G|}).$$

Заметим, также, что $\{T_1, \dots, T_{|G|}\}$ являются линейно независимыми векторами. Следовательно, это множество векторов является базисом.

□

Докажем следующую теорему, объясняющую строение $S(G)$.

Теорема 2. *$S(G) \cong \mathbb{Z}_2^m$ (в смысле аддитивных групп), где m – количество ребер в графе G.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : H \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_{|G|})$, где α_j является j-той координатой подграфа H в базисе $\{T_1, \dots, T_{|G|}\}$.

Оно биективно, так как, очевидно, каждому вектору $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_2^m$ соответсвует ровно один граф.

При этом данное отображение является гомоморфизмом из определения 2. □

3 Пространство циклов

3.1 Эйлеровые подграфы

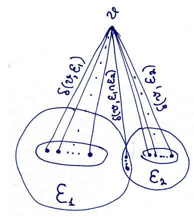
Определение 6. *Граф называется <u>эйлеровым</u> тогда и только тогда, когда степени всех его вершин чётны.*

Свойство 1. *Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in V_G$ являются эйлеровыми графами. Тогда $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ также является эйлеровым графом.*

Доказательство. Заметим, что для произвольной вершины $v \in V$ справедливо следующее:

$$\delta(v, \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) = \delta(v, \mathcal{E}_1) + \delta(v, \mathcal{E}_2) - 2\delta(v, \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2).$$

Данное тождество изображено на пояснительном рисунке ниже



Так как все слагаемые в правой части являются чётными, то и правая часть является чётным числом, а ровно это и нужно было доказать. □

Свойство 2. *Пусть непустой граф $\mathcal{E} \in V_G$ является эйлеровым. Тогда $\mathcal{E}$ является дизъюнктным (по ребрам) объединением простых циклов и изолированных вершин.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую непустую компоненту связности $\mathcal{E}$. Степень каждой её вершины составляет по крайней мере 2, следовательно, данная компонента содержит цикл (ациклический связный граф является деревом, а оно содержит висячую вершину). Удалив рёбра этого цикла опять получим эйлеровый граф. Повторим рассуждения. Согласно принципу бесконечного спуска этот процес конечен. □

3.2 Непосредственно пространство циклов

Рассмотрим некоторый граф $G \in G_V$. В нем, возможно, есть циклы.

Определение 7. *$C(G)$ – подпространство $S(G)$ натянутое на циклах графа G.*

На самом деле $C(G)$ содержит все линейные комбинации циклов, то есть все их суммы (так как коэффициенти равны нулю либо единице).

Теорема 3. *Граф $H \in C(G)$ тогда и только тогда, когда H – эйлеров.*

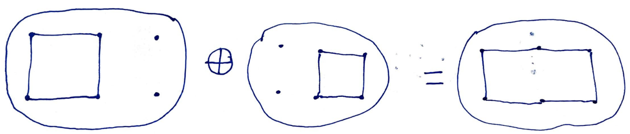
Доказательство. Необходимость. Любой цикл является эйлеровым графом. Сумма циклов, согласно свойству 1 является эйлеровым графом.

Достаточность. По свойству 2 любой эйлеров граф является объединением циклов, не имеющих общих ребер, что в свою очередь является суммой циклов. $\square$

3.3 Базис пространства циклов

Найти базис пространства подграфов было довольно просто, в отличии от задачи нахождения базиса *пространства циклов*. Одним из способом построения такого базиса являются *фундаментальные циклы*.

Заметим, что базисом простраства циклов не является набор его простых циклов. Контрпример изображен ниже:



Определение 8. *Рассмотрим остовный лес Q графа $G \in G_V$ и ребра $e_1, \ldots, e_k$, не преднадлежащие ему. Рассмотрим графы (всп. опр. 5)*

$$Q \oplus T_{e_1},\ Q \oplus T_{e_2},\ \ldots,\ Q \oplus T_{e_k}.$$

Каждый из этих графов содержит не более одного цикла. Образованные циклы Q_1 (или Q_{e_1}), ..., Q_s (или Q_{e_s}) называются фундаментальными циклами относительно остовного леса Q.

Теорема 4. *Фундаментальные циклы относительного любого остовного леса образуют базис линейного пространства $C(G)$.*

Доказательство. Зафиксируем остовный лес Q и, соответственно, фундаментальные циклы $Q_1, \ldots, Q_s$.

Докажем, что любой граф H является линейной комбинацией фундаментальных циклов. Пусть $e_1, \ldots, e_t$ – ребра графа H, не преднадлежащие Q. Рассмотрим граф

$$X = H \oplus Q_{e_1} \oplus \cdots \oplus Q_{e_t}.$$

Достаточно доказать, что $X = \varnothing_V$. Каждое ребро e_j преднадлежит ровно двум слагаемым в этой сумме: H и Q_{e_j}, следовательно, оно уничтожается. Поэтому X не содержит ребер, которые не содержатся в Q. Поэтому X является подграфом Q. Так как H, Q_{e_1}, ..., Q_{e_t} – эйлеровы графы, поэтому по лемме 1 X – эйлеров. Но при этом Q – ациклический граф, поэтому по лемме 2 $X = \varnothing_V$.

Но при этом $Q_{e_1}, \ldots, Q_{e_t}$ – линейно независимы, так как каждый этот граф содержит уникальное ребро e_t, поэтому их линейная комбинация не является тривиальной. $\square$

Из теоремы 4 следует следующее определение.

Определение 9. *Цикломатическое число графа $\nu(G)$ равно размерности пространства циклов $\dim C(G)$ и чисельно $m - n + k$, где m – количество ребер в графе G, n – количество вершин в графе G и k – количество связных компонент.*