Навколо гіпотези Ердеша-Дьярфаша

Мартін Лешко

17 січня 2022 р.

Анотація

- Тема роботи: «Навколо гіпотези Ердеша-Дьярфаша»

Анотація

- Тема роботи: «Навколо гіпотези Ердеша-Дьярфаша»
- Мета роботи: надати додаткові обмеження на потенційні контрприклади до гіпотези, знайти графи, що обґрунтовують складність гіпотези

Анотація

- Тема роботи: «Навколо гіпотези Ердеша-Дьярфаша»
- Мета роботи: надати додаткові обмеження на потенційні контрприклади до гіпотези, знайти графи, що обґрунтовують складність гіпотези
- Завдання роботи: дослідити гіпотезу, довести її для часткових випадків графів.

Анотація

- Тема роботи: «Навколо гіпотези Ердеша-Дьярфаша»
- Мета роботи: надати додаткові обмеження на потенційні контрприклади до гіпотези, знайти графи, що обґрунтовують складність гіпотези
- Завдання роботи: дослідити гіпотезу, довести її для часткових випадків графів.
- Актуальність: гіпотеза Ердеша-Дьярфаша є однією з нерозв'язаних математичних проблем.

Формулювання гіпотези

- Гіпотеза була сформульована двома угорськими математиками Палом Ердешом та Андрашом Дьярфашем в 1995 році.

Формулювання гіпотези

- Гіпотеза була сформульована двома угорськими математиками Палом Ердешом та Андрашом Дьярфашем в 1995 році.
- **Гіпотеза.** Будь-який простий граф, степінь кожної вершини якого принаймні три, має простий цикл, довжина якого є степінь двійки.

Поточні результати

- Royle & Markström – комп'ютерні пошуки.
  - кількість вершин в кубічному контрприкладі ≥ 30,
  - кількість вершин в будь-якому контрприкладі ≥ 17.

Поточні результати

- Royle & Markström – комп'ютерні пошуки.
  - кількість вершин в кубічному контрприкладі ≥ 30,
  - кількість вершин в будь-якому контрприкладі ≥ 17.
- Результати в планарних графах:

Поточні результати

- Royle & Markström – комп'ютерні пошуки.
  - кількість вершин в кубічному контрприкладі ≥ 30,
  - кількість вершин в будь-якому контрприкладі ≥ 17.
- Результати в планарних графах:
  - Daniel & Shauger – без породжених підграфів $K_{1,3}$;

Поточні результати

- Royle & Markström – комп'ютерні пошуки.
  - кількість вершин в кубічному контрприкладі ≥ 30,
  - кількість вершин в будь-якому контрприкладі ≥ 17.
- Результати в планарних графах:
  - Daniel & Shauger – без породжених підграфів $K_{1,3}$;
  - Heckman & Krakovski – поліедральні (кубічні 3-связні планарні) графи.

Формулювання

Теорема

Нехай m – кількість ребер в графі на n вершинах, що не містить в собі циклів C_4, C_8, ..., C_{2^k}. Тоді

$$m = O\left(n\sqrt{n}\right)$$

або більш точно,

$$m \leq \frac{n(1 + \sqrt{4n+3}}{4}.$$

Доведення I

- Комбінаторний крок:
  1. A – кількість вилок;
  2. $$A = \sum_v \delta(v)\left(\delta(v) - 1\right)$$
  3. $A \leq n(n-1)$.
- Алгебраїчний крок:
  1. $$\sum_v \delta(v)\left(\delta(v) - 1\right) \leq n(n-1)$$
  2. $$\sum_v \delta^2(v) - \sum_v \delta(v) - n(n-1) \leq 0$$

Доведення II

3. КБШ:

$$\sum_v \delta_2(v) \geq \frac{4m^2}{n}$$

4.

$$\frac{4}{n}m^2 - 2m - n(n-1) \leq 0$$

Оцінка досяжна

Побудуємо граф:

1. $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \setminus (0,0)$, де p – просте число.

Оцінка досяжна

Побудуємо граф:

1. $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \setminus (0,0)$, де p – просте число.
2. $|V| = p^2 - 1$.

Оцінка досяжна

Побудуємо граф:

1. $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \setminus (0,0)$, де p – просте число.
2. $|V| = p^2 - 1$.
3. $E = \{((a,b);(x,y)) : ax + by \equiv 1 \pmod{p}\}$.

Оцінка досяжна

Побудуємо граф:

1. $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \setminus (0,0)$, де p – просте число.
2. $|V| = p^2 - 1$.
3. $E = \{((a,b);(x,y)) : ax + by \equiv 1 \pmod p\}$.
4. Система має щонайбільше один розв'язок, отже, немає $K_{2,2} \cong C_4$.

Оцінка досяжна

Побудуємо граф:

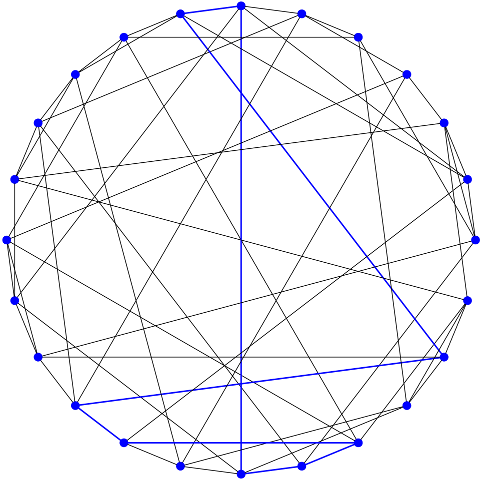
1. $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \setminus (0,0)$, де p – просте число.
2. $|V| = p^2 - 1$.
3. $E = \{((a,b);(x,y)) : ax + by \equiv 1 \pmod{p}\}$.
4. Система має щонайбільше один розв'язок, отже, немає $K_{2,2} \cong C_4$.
5. $\forall v, \delta(v) \geq p - 1$: $(a,b) \to \left(x, \frac{1-ax}{b}\right)$.

Оцінка досяжна

Побудуємо граф:

1. $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \setminus (0,0)$, де p – просте число.
2. $|V| = p^2 - 1$.
3. $E = \{((a,b);(x,y)) : ax + by \equiv 1 \pmod{p}\}$.
4. Система має щонайбільше один розв'язок, отже, немає $K_{2,2} \cong C_4$.
5. $\forall v, \delta(v) \geq p - 1$: $(a,b) \to \left(x, \frac{1-ax}{b}\right)$.
6. $2m = \sum_v \delta(v) \leq n(p-1) = (p^2-1)(p-1) = O\left(n\sqrt{n}\right)$.

Побудований граф



Основні твердження

Твердження 1

Для будь-якого s існєу граф (степінь будь-якої вершини якого принаймні 3) з достатньо великою кількістю вершин, що не має циклів, довжини яких є степенями двійки $2^k < 2^s$.

Твердження 2

Для будь-якого $k \geq 3$ існує таке $n(k)$, що існує граф G на $n(k)$ вершинах, такий, що в ньому немає циклів довжиною $\leq k$ й $\chi(G) > 2$.

Доведення твердження 2 – I

Розглянемо граф $G(n, p(n))$ за моделлю Ердеша-Рені.

Доведення твердження 2 – I

Розглянемо граф $G(n, p(n))$ за моделлю Ердеша-Рені. Поставимо $p(n) = \ln^2 n/n$.

Доведення твердження 2 – I

Розглянемо граф $G(n, p(n))$ за моделлю Ердеша-Рені.
Поставимо $p(n) = \ln^2 n/n$.
Нехай ξ – кількість циклів довжиною $\leq k$.

Доведення твердження 2 – I

Розглянемо граф $G(n, p(n))$ за моделлю Ердеша-Рені.
Поставимо $p(n) = \ln^2 n/n$.
Нехай ξ – кількість циклів довжиною $\leq k$.

$$M\xi = M\xi_{C_1} + \cdots + M\xi_{C_w} \leq \sum_{\ell=3}^{k} n^\ell p^\ell = \ln^6 n + \cdots + \ln^{2k} n$$

Доведення твердження 2 – I

Розглянемо граф $G(n, p(n))$ за моделлю Ердеша-Рені.
Поставимо $p(n) = \ln^2 n / n$.
Нехай ξ – кількість циклів довжиною $\leq k$.

$$M\xi = M\xi_{C_1} + \cdots + M\xi_{C_w} \leq \sum_{\ell=3}^{k} n^\ell p^\ell = \ln^6 n + \cdots + \ln^{2k} n$$

За нерівністю Маркова:

$$P(\xi \geq n/2) \leq \frac{2M\xi}{n} = 2\left(\frac{\ln^6}{n} + \cdots + \frac{\ln^{2k} n}{n}\right) \longrightarrow 0$$

Доведення твердження 2 – II

Нехай α – число незалежності G.

Доведення твердження 2 – II

Нехай α – число незалежності G.
Ймовірність того, що $\alpha \leq x$, де $x = \frac{3}{p(n)} \ln n$:

Доведення твердження 2 – II

Нехай α – число незалежності G.
Ймовірність того, що $\alpha \leq x$, де $x = \frac{3}{p(n)} \ln n$:

$$P(\alpha \geq x) \leq \binom{n}{x} (1 - p)^{(x\ \ 2)}.$$

Доведення твердження 2 – II

Нехай α – число незалежності G.
Ймовірність того, що $\alpha \leq x$, де $x = \frac{3}{p(n)} \ln n$:

$$P(\alpha \geq x) \leq \binom{n}{x} (1-p)^{(x\ 2)}.$$

$$\binom{n}{x} \leq n^x \qquad 1 - x \leq e^{-x}.$$

Доведення твердження 2 – II

Нехай α – число незалежності G.
Ймовірність того, що $\alpha \leq x$, де $x = \frac{3}{p(n)} \ln n$:

$$P(\alpha \geq x) \leq \binom{n}{x} (1-p)^{(x\ 2)}.$$

$$\binom{n}{x} \leq n^x \qquad 1 - x \leq e^{-x}.$$

$$P(\alpha \geq x) \leq n^x e^{-px(x-1)/2} = n^x e^{-p\frac{3}{p}\ln x \cdot \frac{x-1}{2}} =$$

$$n^{x-\frac{3}{2}(x-1)} = n^{\frac{3-x}{2}} = n^{\frac{3}{2}\left(1-\frac{n}{\ln n}\right)} \to 0$$

Для достатньо великих n:

$$P(\xi \geq n/2) < \frac{1}{2} \qquad P(\alpha \geq x) < \frac{1}{2}$$

Отже, існує ненульова ймовірність того, що жодна з подій не відбудеться, тобто існує такий граф G, для якого обидві події не виконуються.

Доведення твердження 2 – IV

Видалимо з графа G по вершині з кожного циклу й отримуємо G'
Отже, користуючись нерівністю $\chi(G') \geq n/\alpha(G')$ маємо, що

$$\chi(G') \geq \frac{n/2}{\alpha(G')} \geq \frac{n}{2\frac{3}{p}\ln n} = \frac{\ln n}{6} \to \infty.$$

Гіпотеза конструктивно доведена для узагальнених графів Петерсена.

Означення

Узагальнений граф Петерсена $GP(n, s)$ визначається набором вершин

$$V = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{n-1}\}$$

та набором ребер:

$$E = \{u_0 u_1, \ldots, u_{n-1} u_0, u_0 v_0, \ldots, u_{n-1} v_{n-1}, \\ v_0 v_s, v_1 v_{s+1}, \ldots, v_{n-1} v_{n-1+s}\}$$

Причому індекси беруться по модулю n.

Гіпотеза вірна

Доведення.

Випадок 1. При $s = 1$. В такому випадку існує цикл C_4, довжиною 4, що виражається наступною послідовністю вершин:

$$u_0 \to v_0 \to v_1 \to u_1 \to u_0$$

Випадок 2. При $s \geq 3$ існує цикл на восьми вершинах який виражається наступною послідовністю вершин:

$$u_0 \to u_1 \to v_1 \to v_{1+s} \to u_{1+s} \to u_s \to v_s \to v_0 \to u_0$$

$\square$

Узагальнення графів Маркстрема I

Узагальнений граф Маркстрема $GM(n)$ (від англійського Generalized Markström Graph) визначається за допомогою наступного процесу:

1. Спочатку будується граф цикл на n вершинах C_n, які ми називаємо $A_1, \ldots, A_n$.
2. Для кожної вершини A_j будуємо ребро $A_j B_1^{(j)}$. Потім будуємо цикли довжини n з $B^{(j)}$:

$$B_1^{(j)} \to B_2^{(j)} \to \cdots \to B_n^{(j)} \to B_1^{(j)}.$$

Узагальнення графів Маркстрема II

3. З усіх вершин таких додаткових циклів будуємо «хвости» наступним чином: $B_i^{(j)} \to C_i^{(j)}$ для всіх $i = \overline{2, n-1}$ й $B_n^{(j)} \to D_{2n-1}^{(j)}$. Для всіх $C_i^{(j)}$ проводимо ще $C_i^{(j)} \to D_{2i-3}^{(j)}$ та $C_i^{(j)} \to D_{2i-2}^{(j)}$.
4. Замикаємо всі D:

$$D_1^{(1)} \to D_2^{(1)} \to \cdots \to D_{2n-1}^{(1)} \to D_1^{(2)} \to \ldots \to D_{2n-1}^{(n)} \to D_1^{(1)}$$

Доведення для $GM(n)$

$$B_5^{(j)} \to D_9^{(j)} \to D_8^{(j)} \to D_7^{(j)} \to D_6^{(j)} \to C_3^{(j)} \to$$
$$B_3^{(j)} \to B_4^{(j)} \to B_5^{(j)}$$

Висновки

Автором було доведено гіпотеза для часткових випадків графів, а зокрема узагальнених графів Петерсена та введених автором узагальнених графів Маркстрема.

Автор запропонував конструкцію циклічних графів, що не містять малих циклів, довжини яких є степінню двійки.

Застосовано ймовірнісний метод для пошуку циклічних графів, що не містять жодних циклів довжиною s, де $s = \overline{3, k}$. Наведена верхня оцінка на кількість ребер в можливих контрприкладах: $m = O(n\sqrt{n})$ й показано, що оцінка досяжна.