Лема В’єннота-Геселя-Ліндстерма

Зв’язок між шляхами в графі та визначниками матриць

Мартін Лешко, 2021

Мотиваційні приклади

1. Нехай $a_1 < \ldots < a_n$ і $b_1 < \ldots < b_n$. Тоді $\det \left(C_{a_i}^{b_j} \right)_{i,j=1}^{n} \geq 0$. Біноміальні визначники часто зустрічаються в комбінаториці.
2. Поліноми Шура.
3. Формула МакМагона для плоских розбиттів та зв'язок з замощеннями шестикутників ромбиками: $PP(a,b,c) = \prod_{i=1}^{a} \prod_{i=1}^{b} \prod_{i=1}^{c} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$.

1 Необхідні визначення та лема

Необхідні визначення

1. Розглянемо граф $G=(V,E)$ з множини $\mathrm{DAG}(N)$ – орієнтованих ациклічних графів на N вершинах.

2. Введемо функцію $\omega : E \to \mathbb{C}$, що кожному ребру співставляє його *вагу* $\omega(e)$.

3. *Вага* шляху $P : A \to B$ є добутком ваг ребер цього шляху: $\omega(P) = \prod_{e \in P} \omega(e)$, причому *вага* порожнього шляху дорівнює 1.

4. Нехай $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ – підмножини вершин графу причому $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| = n$. Тоді *матриця* $M(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *шляхів* визначається так: $M(\mathscr{A}, \mathscr{B})_{uv} = \sum_{P : \mathscr{A}_u \to \mathscr{B}_v} \omega(P)$.

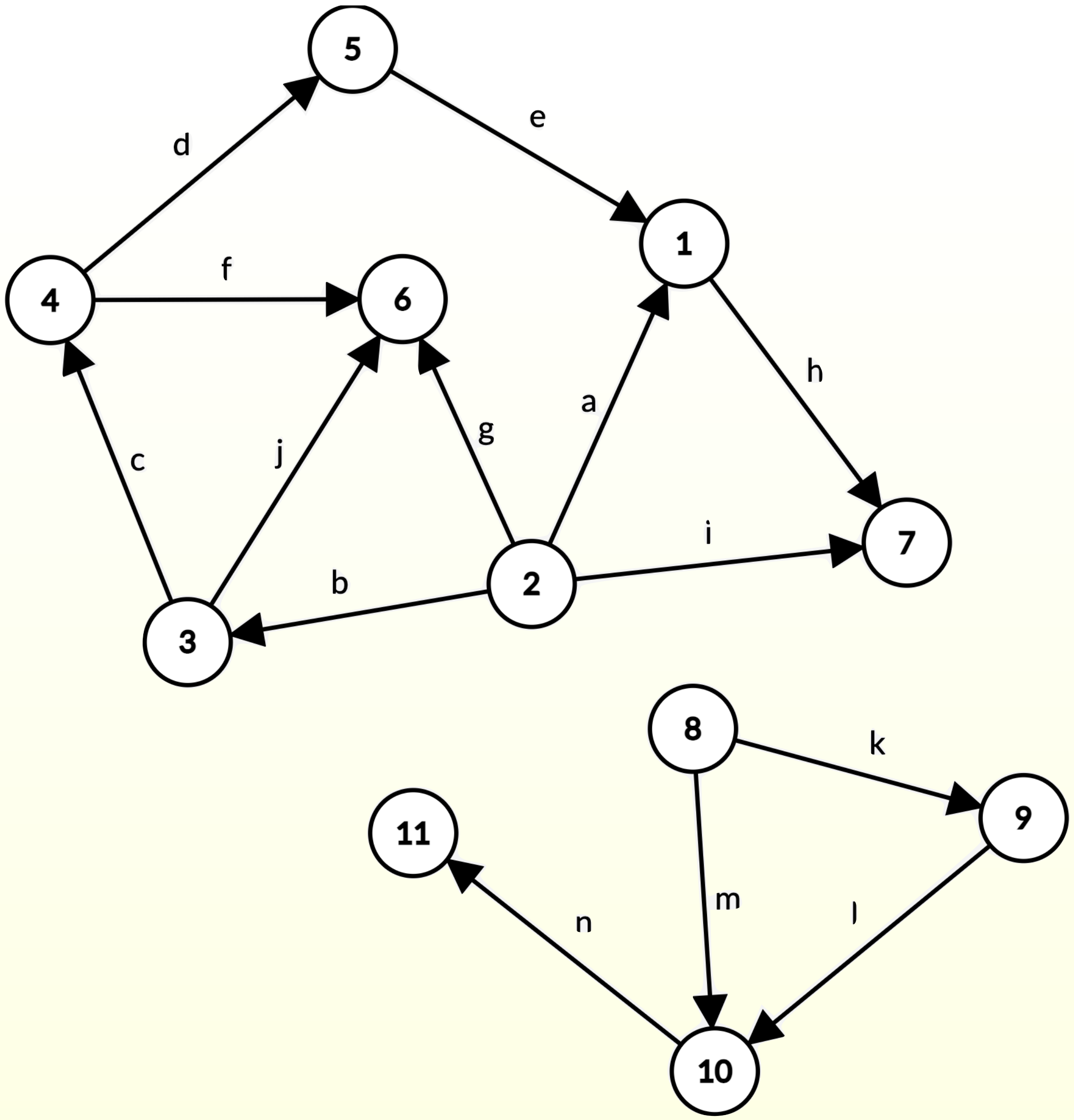
Необхідні визначення – 2

1. *Система шляхів* $\mathfrak{P}(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \pi)$ – це множина з n шляхів виду $P : \mathscr{A}_u \to \mathscr{B}_{\pi(u)}$, де $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Якщо між вершинами $\mathscr{A}_u$ і $\mathscr{B}_{\pi(u)}$ є декілька шляхів, то вибирається рівно один з них.

2. *Вагою* системи шляхів $\mathfrak{P}$ визначається як добуток по вагам шляхів, що входять до неї: $\omega(\mathfrak{P}) = \prod\limits_{1 \leqslant u \leqslant n} \omega\left(P : \mathscr{A}_u \to \mathscr{B}_{\pi(u)}\right)$.

3. Будемо говорити, що $\mathfrak{P}(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \pi)$ – це *система шляхів без спільних вершин*, якщо будь-які два шляхи з $\mathfrak{P}$ не мають спільних вершин. Множину таких систем шляхів позначається так: $\mathsf{Disjoint}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

Приклад



1. Вага шляху $4 \to 7$ це deh, а для шляху $2 \to 7$ це або $bcdeh$ або i, для шляху $7 \to 7$ вага 1.

2. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h \\ a & 1 & b & bc & bcd & g+bj+bcf & i+ah+bcdeh \\ cde & 0 & 1 & c & cd & j+cf & cdeh \\ de & 0 & 0 & 1 & d & f & deh \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & eh \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Нехай $\mathscr{A} = \{2,3,4\}$, $\mathscr{B} = \{1,6,7\}$ і $\pi = (3,2,1)$. Тоді система шляхів може виглядати наступним чином: $\mathfrak{P} = \{2–a–h–7, 3–j–6, 4–d–e–1\}$. Вагою буде $ah \cdot j \cdot de$.

Формулювання леми

Лема (Lindström, Gessel, Viennot). Нехай $G \in \mathrm{DAG}(n)$ і $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ – дві підмножини вершин цього графу, тоді виконується наступна рівність:

$$\det M(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \sum_{\mathfrak{P}(\pi) \in \mathsf{Disjoint}(\mathscr{A}, \mathscr{B})} \operatorname{sign} \pi \cdot \omega(\mathfrak{P}),$$

Доведення – 1

Запишемо $\det M(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ у виді суми:

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot M(\mathscr{A}, \mathscr{B})_{1\pi(1)} \ldots M(\mathscr{A}, \mathscr{B})_{n\pi(n)}.$$

Враховуючи визначення системи шляхів переписуємо формулу так

$$\det M(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \sum_{\mathfrak{P}(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \pi)} \operatorname{sign} \pi \cdot \omega(\mathfrak{P}).$$

Тому треба довести, що

$$\sum_{\mathfrak{P}(x) \in \mathsf{Com}(\mathscr{A}, \mathscr{B})} \operatorname{sign} \pi \cdot \omega(\mathfrak{P}) = 0.$$

Доведення – 2

Наведемо інволюцію “стрілочний перевід”

$$\psi : \mathsf{Com}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \to \mathsf{Com}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$$

таку, що

$$\begin{cases} \omega[\psi(\mathfrak{P}(\pi))] = \omega[\mathfrak{P}(\pi)], \\ \operatorname{sign} \psi(\mathfrak{P}(\pi)) = -\operatorname{sign} \pi \end{cases}$$

де $\operatorname{sign} \mathfrak{P}(\pi) = \operatorname{sign} \pi$.

Тоді

$$\sum_{\mathfrak{P}(x) \in \mathsf{Com}(\mathscr{A}, \mathscr{B})} -\operatorname{sign} \pi \cdot \omega[\psi(\mathfrak{P})] = \sum_{\mathfrak{P}(x) \in \mathsf{Com}(\mathscr{A}, \mathscr{B})} \operatorname{sign} \pi \cdot \omega[\psi(\mathfrak{P})].$$

Узагальнення

Формула Таляски [Tal]

Приклад

Теорема. Нехай $a_1 < \ldots < a_n$ і $b_1 < \ldots < b_n$. Тоді $\det \left(C_{a_i}^{b_j} \right)_{i,j=1}^{n} \geq 0$.

Доведення базується на тому, факті, що $C_{a_i}^{b_j}$ є кількість шляхів між відповідними точками на прямих $y = x$ та $y = 0$.

Такий визначник також позначається як: $\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{pmatrix}$.

Ще дві теореми про такого року визначник можна знайти в задачах.

2 Плоскі розбиття, замощення ромбиками та формула МакМагона

Пререквізити – вандермондіан

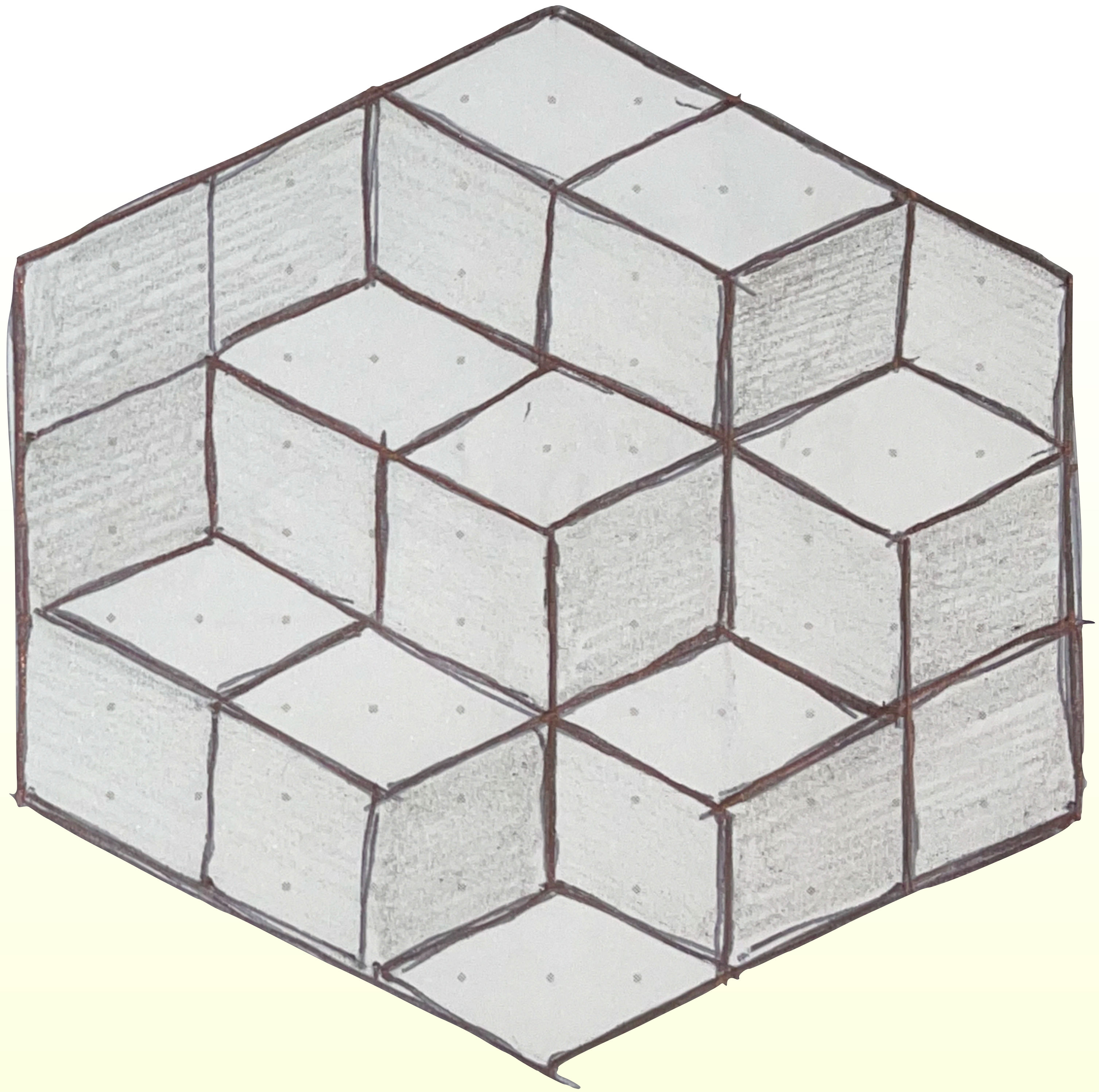
Вандермондіан – це визначник наступної матриці:

$$V(x_1,\ldots,x_n) = \det\left[x_i^{j-1}\right]_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ми будемо користуватись двума фактами:

1. $$V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

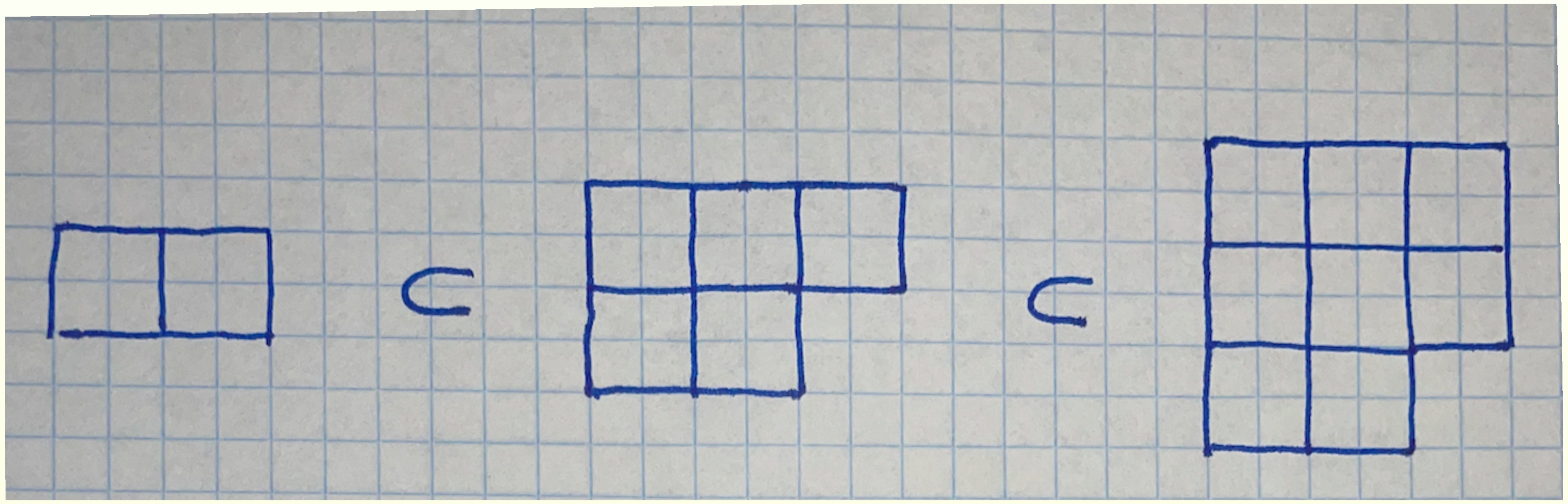
2. $$V(x_1,\ldots,x_n) = \det\left[x_i^{\downarrow(j-1)}\right]_{i,j=1}^{n} \quad \text{(задача)}$$



Визначення

Визначення. Плоским розбиттям (plane partition) називаєтсья послідовність вкладених діаграм Янга: $\mu_1 \subseteq \mu_2 \subseteq \ldots \subseteq \mu_k$.

Наприклад, для ілюстрації:



Формулювання задачі

Задача. Знайти кількість плоских розбиттів, що містяться в паралелепіпеді $\mathscr{B}(a, b, c)$.

Відповідь на це запитання дає формула МакМагона:

$$PP(a,b,c) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

План доведення – комбінаторна частина

1. Замітимо, що діаграмам Янга затиснутих в прямокутнику $a \times b$ відповідають шляхи з лівого верхнього кута до правого нижнього.

2. Тому кількість ланцюжків $\mu_1 \subseteq \ldots \subseteq \mu_k$ це кількість наборів з k шляхів таких, що i тий шлях знаходиться нище $(i-1)$-го.

3. Зробимо здвиги для того, щоб шляхи не перетинались.

4. На утворених множинах вершин застосуємо LGV лему: $P_{nc}(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = \det M(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

5. Матриця M записується явно: $\left[\binom{a+b}{a+i-j}\right]_{i,j=1}^{c}$

План доведення – алгебраїчна частина

З комбінаторної частини отримали:

$$PP(a,b,c) = \det\left[\binom{a+b}{a+i-j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Легко показати, що

$$PP(a,b,c) = \det\left[\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Розпишемо $\binom{a+b+i-1}{a+i-j} = \frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-j)!\,(b+j-1)!}$ і повиносимо з визначника все, що зможемо.

План доведення – алгебраїчна частина

Отримаємо, що:

$$PP(a,b,c) = \prod_{c=1}^{c} \frac{(a+b+i-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)!} \cdot \det\left[(a+i-1)^{\downarrow(j-1)}\right]_{i,j=1}^{c}$$

Замітимо, що другий множник це вандермондіан по спадним степеням:

$$\det\left[(a+i-1)^{\downarrow(j-1)}\right]_{i,j=1}^{c} = V(a,\ldots,a+c-1) = \prod_{i>j}(i-j) = 1!\cdot\ldots\cdot(c-1)!$$

Після простих перетворень отримаємо, що

$$PP(a,b,c) = \prod_{j=1}^{c} \frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)^{\downarrow b}} = \prod_{i=1}^{b}\prod_{j=1}^{c} \frac{a+i+j-1}{i+j-1}.$$

Залишається записати $\dfrac{a+i+j-1}{i+j-1}$ через добуток a множників.

3 Задачі для самостійного розв’язання

Задачі

0. Доведіть формулу для спадного визначника Вандермонда $\det\left(x_i^{\downarrow(j-1)}\right)_{i,j=1}^{n} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$.

1. Доведіть, що $\det\left[\binom{m+i-1}{j-1}\right]_{i,j=1}^{n} = 1$.

2. Доведіть, що шестикутник можна замостити ромбиками лише коли його протилежні сторони рівні.

3. Доведіть формулу $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ і її узагальнення – формулу Коші-Біне.

4. Назвемо *множиною спадання* перестановки σ наступну множину: $\mathrm{Des}(\sigma) = \{k : \sigma(k) > \sigma(k+1)\}$.
Доведіть, що кількість перестановок із заданою *множиною спадання* є $\binom{\mathrm{Des}, n}{0, \mathrm{Des}}$.

5. (Поліноми Шура) Нехай $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_T \omega(T)$, де сума T проходить по всім неспадним таблицям Янга, а $\omega(T)$ це моном $x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r}$, де α_i – кількість разів, яке i зустрічається в таблиці. Доведіть, що
$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \det\left[h_{\lambda_i+j-i}(x_1, \ldots, x_n)\right]_{i,j=1}^{r}$, де $h_t(x_1, \ldots, x_n)$ – повний симетричний многочлен степені t.

6. Представте у виді визначника кількість піддіаграм всередині довільної двувимірної діаграми Янга.

Список використаної літератури

[GV] I. Gessel, G. Viennot, Binomial determinants, paths, and hook length formulae – Advances in mathematics 58, 1985

[Tal] K. Talaska, DETERMINANTS OF WEIGHTED PATH MATRICES, 2012

[Ai] *А*йгнер М. Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. — Мир, 2006.

[Lid] E. Lidan, Lindström-Gessel-Vieenot theorem as a common pint of linear algebra and combinatorics, – DOI, 2018

[Smi] Е. Смирнов. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знако-чередующиеся матрицы, – МЦНМО, 2014.

Дякую за увагу!