Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти і науки Закарпатської облдержадміністрації
Закарпатське територіальне відділення МАН України

Відділення: математика
Секція: математика

Навколо гіпотези Ердеша-Дьярфаша

Роботу виконав:
Лешко Мартін Володимирович
учень 10-А класу Ужгородської загальноосвітньої
спеціалізованої школи-інтернату з поглибленим
вивченням окремих предметів
Закарпатської обласної ради
Наукові керівники:
Міца Олександр Володимирович
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри інформаційних
управляючих систем та технологій
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"
Сігетій Ігор Петрович
вчитель Ужгородської загальноосвітньої
спеціалізованої школи-інтернату з
поглибленим вивченням окремих
предметів Закарпатської обласної ради,
кандидат педадогічних наук,
заслужений учитель України

Ужгород- 2021

АНОТАЦІЯ

Тема роботи: «Навколо гіпотези Ердеша-Дьярфаша»

Виконав: Лешко Мартін Володимирович, учень 10-А класу Ужгородської загальноосвітньої спеціалізованої школи-інтернату з поглибленим вивченням окремих предметів.

Наукові керівники: Міца Олександр Володимирович, Сігетій Ігор Петрович вчитель Ужгородської загальноосвітньої спеціалізованої школи-інтернату з поглибленим вивченням окремих предметів Закарпатської обласної ради

Закарпатське територіальне відділення МАН України

Мета роботи: надати додаткові обмеження на потенційні контрприклади до гіпотези, знайти графи, що обґрунтовують складність гіпотези

Завдання роботи: дослідити гіпотезу, довести її для часткових випадків графів.

Актуальність: гіпотеза Ердеша-Дьярфаша є однією з нерозв'язаних математичних проблем. Цілком можливо, що її розв'язання спричинить низку «побічних ефектів» корисних для розв'язання інших проблем теорії графів.

Об'єкт дослідження: цикли в кубічних графах

Висновки:

Ключові слова: кубічні графи, гіпотеза Ердеша-Дьярфаша

ВСТУП

Теорія графів – одна з сучасних й перспективних областей математики. Вона має серйозне прикладне значення. Щорічно проводиться дуже багато досліджень в цій галузі. Найбільшого розвитку ця галузь отримала в кінці XIX і XX столітті, а саме в роботах таких математиків, як Петерсен, Туран, Едреш, Секереш, Холл та інших. Теорія графів як окремий розділ математики почали виділяти після робіт угорського математика Кеніга в 30-х роках XX століття.

Пал Ердеш – один з найвизначніших математиків XX століття. Він написав більше 1500 статей і мав безліч співавторів. В цій роботі також буде застосовано ймовірнісний метод, автором якого вважається Ердеш. В цій роботі буде показаний результат синтезу різних розділів математики: комбінаторики, теорії ймовірності, алгебри та математичного аналізу.

РОЗДІЛ 1. Формулювання гіпотези та огляд результатів

Гіпотеза була сформульована двома угорськими математиками Палом Ердешом та Андрашом Дьярфашем в 1995 році. На диво, гіпотеза формулюється надзвичайно просто, але сама вона, на даний момент, є далекою від вирішення.

<u>Гіпотеза.</u> Будь-який простий граф, степінь кожної вершини якого принаймні три, має простий цикл, довжина якого є степінь двійки.

Комп'ютерними пошуками Royle & Markström було доведено, що будь-який кубічний контрприклад має містити принаймні 30 вершин, а взагалі будь-який контрприклад має містити принаймні 17 вершин.

Досягнуті певні результати в планарних графах та в графах без клешень. Гіпотеза доведена для планарних графів без породжених підграфів $K_{1,3}$ (Daniel & Shauger) та для графів без породжених підзірок $K_{1,m}$, степені вершин яких відповідають додатковій умові, а саме: $\min \delta(v) \geq m + 1$ або $\max \delta(v) \geq 2m - 1$ (Shauger). Гіпотеза доведена для кубічних 3-связних планарних графів (Heckman & Krakovski)

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Після аналізу існуючих статей можна прийти до висновку, що ця гіпотеза є малодослідженою. Ця гіпотеза перевірена комп'ютером для маленької кількості вершин й доведена для спеціальних графів, в тому числі і поліедральних (графів, що представляють структуру випуклих багатогранників).

РОЗДІЛ 2. Огляд гіпотези

Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Твердження 2.1. Якщо в графі для будь-якої вершини v її степінь більше ніж d то в графі буде принаймні $\frac{dn}{2}$ ребер, де n – кількість вершин в графі.

Доведення. Замітимо, що за лемою про рукостискання $\sum\delta(v) = 2m$. Тому можемо записати $dn \leq \sum\delta(v) = 2m$, отже, $m \geq \frac{dn}{2}$.

Доведемо важливу теорему, що дає оцінку на кількість ребер в контрприкладі.

Теорема 2.1. Нехай m – кількість ребер в графі G, що не містить в собі жодного з циклів $C_4, C_8, \dots, C_{2^k}$. Тоді маємо, що

$$m \leq \frac{n\left(1 + \sqrt{4n+3}\right)}{4}.$$

Доведення. Розіб'ємо доведення задачі на комбінаторний та алгебраїчний крок.

Комбінаторний крок. Підрахуємо число A – кількість трійок вершин (u, v, w) таких, що є ребра (uv) та (wv).

З одної сторони, це число дорівнюватиме $A = \sum_v \delta(v) \cdot (\delta(v) - 1)$. Дійсно, для кожної вершини маємо обрати пару сусідніх. Це можна зробити $\delta(v) \cdot (\delta(v) - 1)$ способами.

З другої сторони, в графі немає C_4. Оскільки $C_4 \cong K_{2,2}$ то для будь-якої фіксованої пари вершин (u, w) існує щонайбільше одна вершина v, така, що є ребра (vu) та (vw). Тому, $A \leq n(n-1)$.

Алгебраїчний крок. Запишемо точне значення A:

$$\sum_v \delta(v)[\delta(v)-1] \le n(n-1)$$
$$\sum_v \delta^2(v) - \sum_v \delta(v) - n(n-1) \le 0$$

Користуємось лемою про рукостискання $\sum_v \delta(v) = 2m$. Використаємо нерівність Коші-Буняковського-Шварца:

$$\sum_v \delta^2(v) \cdot \sum_v 1 \ge \left(\sum_v \delta(v)\right)^2$$
$$\sum_v \delta^2(v) \ge \frac{4m^2}{n}$$

Тепер користуємось цією оцінкою:

$$\frac{4m^2}{n} - 2m - n(n-1) \le 0$$

Розв'язуючи це як квадратичну нерівність відносно m отримуємо твердження теореми.

Зауваження 2.1.1. Насправді це майже оптимальна оцінка, тому досить важко покращити. А все, тому що існує граф, в якому $O(n^{1,5})$ ребер і в ньому немає циклів довжини 4, але виконується гіпотеза Ердьоша-Д'ярфаша. Такий граф можна побудувати таким чином. Візьмемо набір вершин у виді $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ без тривіальної $(0{,}0)$. Тоді в такому графі $n = p^2 - 1$ вершина. З'єднаємо дві вершини (a, b) та (x, y) з'єднаємо ребрами якщо $ax + by \equiv 1$. Будь-яка система двох рівнянь має щонайбільше один розв'язок, отже, в такому графі немає підграфу, ізоморфного $K_{2,2}$, який, в свою чергу, ізоморфний C_4. Зрозуміло, що степінь кожної вершини принаймні $(p-1)$. Дійсно для вершини (a, b) є ребро

$$(a, b) \to \left(x, \frac{1-ax}{b}\right).$$

Дійсно, підставивши отримаємо: $ax + b \cdot \frac{1-ax}{b} = ax + 1 - ax = 1$. Отже, в такому графі $m = \frac{\sum \delta(v)}{2} = \frac{(p^2-1)(p-1)}{2} = O(p^3) = O(n^{1,5})$ ребер. Наприклад, в такому графі для $n = 5$ буде цикл довжиною 8. Він зображений на рисунку нижче:

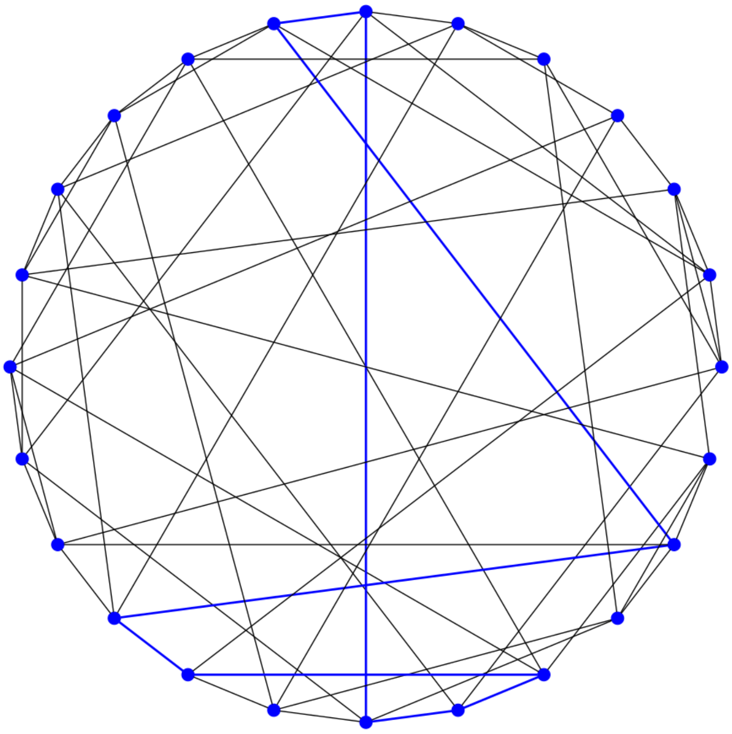

Рис 2.1. Граф на 24 вершинах та 58 ребрах, який не має циклів довжини 4, але має цикл довжини 8. Оцінка говорить, що графи, що не мають цикл довжини чотири містять не більше 65 ребер.

Зауваження 2.1.2. В комп'ютерних пошуках Royle & Markström знайшли планарний кубічний граф на 24 вершинах без циклів довжини 4 та 8.

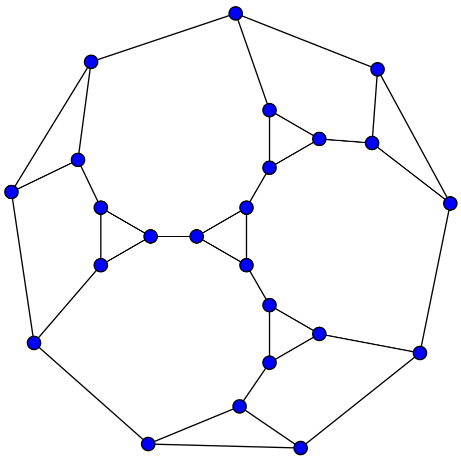

Рис 2.2. Граф Маркстрема з 24 вершинами та 36 ребрами, що не має циклів довжини 4 та 8, але має цикл довжини 16.

Доведемо наступне твердження.

<u>Твердження 2.4.</u> Для будь-якого s існує граф (степінь будь-якої вершини якого принаймні 3) з достатньо великою кількістю вершин, що не має циклів, довжини яких є степенями двійки $2^k < 2^s$.

<u>Доведення.</u>

Доведення це твердження індукцією по s. Для $2^s = 4$ існує чимало графів – наприклад граф Маркстрема.

Нехай існує граф, що не містить циклів довжиною $2^k < 2^s$, але містить цикл довжиною 2^s. Побудуємо на цьому циклі граф платонового тіла, що складається з правильних 2^s-кутників. Виділимо в цьому поліедрі гамільтоновий цикл і видалимо ребра, що не входять в нього. На бувших гранях побудуємо правильні поліедри, всі грані якого це 2^{s+1}-кутники, крім однієї. Ми знищили всі цикли довжини 2^s, але при цьому в нас є багато циклів довжиною 2^{s+1}.

Зауваження 2.4.1. На жаль, в даній конструкції кількість вершин росте експоненційно.

Зауваження 2.4.2. Це твердження насправді показує складність гіпотези. Воно говорить, що є граф, в якому можуть бути маленькі цикли, що не є степенями двійки, але водночас є цикли, довжини яких виражаються великими степенями двійки. Другими словами, для будь-якого s існує відносно багато графів, бо в базу індукції можна взяти будь-який граф в якому немає маленьких циклів довжина яких є степінню двійки.

Зауваження 2.4.3. При дослідженні гіпотези автор застосовував ймовірнісний метод й відмітив те, що перші моменти є занадто неточними для доведення цього твердження, що непрямо говорить про те, що кількість таких графів маленька.

Зауваження 2.4.4. Для деяких $s = 4, 8$ ми вже навели явні приклади таких графів.

k	Приклади графів
4	Граф Маркстрема, узагальнені графи Маркстрема, узагальнені графи Петерсена, деякі P_8 вільні графи [?], граф з зауваження 2.1.1
8	Граф Маркстрема

Замітимо, що можна неконструктивно знайти граф, що не містить циклів довжинами $3, 4, \ldots, k$, але при цьому є циклічним. Оскільки ациклічний граф є лісом, що має хроматичне число 2, то достатньо знайти граф з хроматичним числом принаймні 3 й не мати циклів довжиною $\leq k$. Доведемо існування такого графу.

<u>Твердження 2.5.</u> Для будь-якого $k \geq 3$ існує таке $n(k)$, що існує граф G на $n(k)$ вершинах, такий, що в ньому немає циклів довжиною $\leq k$ й $\chi(G) > 2$.
<u>*Доведення.*</u>

Розглянемо випадковий граф $G(n, p(n))$, де $p(n) = \frac{\ln^2 x}{x}$, ребра якого будуються схемою випробувань Бернуллі з ймовірністю проведення ребра $p(n)$.

Нехай ξ – кількість циклів довжиною, що не перевищує k. Оцінимо математичне сподівання цієї величини. Нехай ξ_{C_j} – індикатор наявності C_j-того циклу. Замітимо, що $M\xi_{C_j} = P(C_j)$. В графі менше ніж n^ℓ циклів довжиною ℓ, кожен з яких буде циклом з ймовірністю p^ℓ, тому справедлива наступна оцінка:

$$M\xi = M\xi_{C_1} + \cdots + M\xi_{C_w} \leq \sum_{\ell=3}^{k} n^\ell p^\ell = \ln^6 n + \cdots + \ln^{2k} n.$$

Застосуємо нерівність Маркова для оцінки ймовірності того, що

$$P\left(\xi \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2M\xi}{n} = 2\left(\frac{\ln^6 n}{n} + \cdots + \frac{\ln^{2k} n}{n}\right)$$

Замітимо, що m разів застосувавши правило Лопіталя отримуємо

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^m x}{x} = 0$$

Тому,

$$P\left(\xi \geq \frac{n}{2}\right) \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow +\infty$$

Оцінимо ймовірність того, що число незалежності α буде більшою ніж задане число $x = \frac{3}{p}\ln n$. Дійсно, число незалежності буде принаймні t якщо будь-яка підмножина з t вершин буде незалежною, тому

$$P(\alpha \geq x) \leq \binom{n}{x}(1-p)^{(x\ 2)}$$

Замітимо, що $(n\ \ x) = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} \leq n^x$. Також $1 - x \leq e^{-x}$ тому:

$$P(\alpha \geq x) \leq n^x e^{-px\frac{(x-1)}{2}} = n^x e^{-p\frac{3}{p}\ln x\cdot\frac{x-1}{2}} = n^{x-\frac{3}{2}(x-1)} = n^{\frac{3-x}{2}}$$

$$= n^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{3}{p}\ln n\right)} = n^{\frac{3}{2}\left(1-\frac{n}{\ln n}\right)} \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow +\infty$$

Отже,

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists N_1(\varepsilon): \forall n \geq N_1, P\left(\xi \geq \frac{n}{2}\right) < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists N_2(\varepsilon): \forall n \geq N_2, P(\alpha \geq x) < \varepsilon_2$$

Обравши $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ й $N = \max\{N_1, N_2\}$ отримуємо, що

$$\forall n \geq N, P\left(\xi \geq \frac{n}{2}\right), P(\alpha \geq t) < \frac{1}{2}$$

Тоді, оскільки $\mathrm{P}(A_1 \ \vee \ A_2) < P(A_1) + P(A_2)$ отримуємо, що

$$P\big(\neg(A_1 \vee A_2)\big) = P(\neg A_1 \wedge \neg A_2) > 0$$

Якщо A_1, A_2 це події $P\left(\xi \geq \frac{n}{2}\right)$ та $P(\alpha \geq t)$ то існує ненульова ймовірність, що вони не відбудуться при достатньо великих n. Отже, за визначенням ймовірності, отримуємо, що існує такий граф, в якому обидві події не виконуються. Назвемо цей граф G.

Нехай граф розфарбовано в $\chi(G)$ кольорів. Тоді множина вершин фіксованого кольору утворює незалежну множину. Отже, отримуємо нерівність

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$$

Видалимо з графу G по одній вершині з кожного циклу, довжина якого не перевищує k. За властивостями графу G ми видалили не більше $\frac{n}{2}$ вершин. Отримали граф G^* в якому $\alpha(G^*) \leq \alpha(G)$. Тому,

$$\chi(G') \geq \frac{n}{2\alpha(G')} \geq \frac{n}{2 \cdot \frac{3}{p} \ln n} = \frac{n}{\frac{6n}{\ln n}} = \frac{\ln n}{6}$$

Зрозуміло, що для достатньо великих n число $\frac{\ln n}{6}$ буде більшим ніж 2. Твердження доведено.

Зауваження 2.5.1. Математичне сподівання величини ξ з доведення теореми можна обчислити явно. Замітимо, що

$$M\xi = M\sum_C \xi_C = \sum_C M\xi_C = \sum_{\ell=3}^{k} \#_\ell p^\ell$$

Де $\#_\ell$ позначає кількість циклів довжини ℓ в повному графі K_n. Очевидно, що ця кількість дорівнює кількості підмножин з ℓ вершин з урахуванням автоморфізмів:

$$\#_\ell = \binom{n}{\ell} |\mathrm{Aut}(C_\ell)|$$

Скласти цикл на ℓ вершинах можна $\ell!$ способами, але треба врахувати те, що його можна циклічно зсувати і проходити у будь-якому напрямі. Тому,

$$|\mathrm{Aut}(C_\ell)| = \frac{(\ell-1)!}{2}$$

Отже,

$$M\xi = \sum_{\ell=3}^{k} \binom{n}{\ell} \cdot \frac{(\ell-1)!}{2} \cdot p^\ell$$

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

В цьому розділі подвійним підрахунком було доведено, що кількість ребер в графі, що не задовольняє умову не більш ніж $O(n\sqrt{n})$. Алгебраїчно було побудовано граф, на якому така оцінка досягається й доведено, що гіпотеза там виконується. Автором сформульовано й конструктивно доведено факт про існування графів, в яких немає малих циклів, довжини яких є степінню двійки. Застосовано ймовірнісний метод Неконструктивно знайдено граф, що відповідає посиленому твердженню – відсутність будь-яких циклів довжиною, що не перевищує k.

РОЗДІЛ 3. Гіпотеза Ердьоша-Д’ярфаша для деяких видів графів

В цьому розділі гіпотеза буде доведена для двох видів графів: узагальнених графів Петерсена та узагальнених графів Маркстрема.

<u>Визначення 3.1.</u> Узагальнений граф Петерсена $GP(n, s)$ (від англійського **G**eneralized **P**etersen Graph) визначається набором вершин $V = \{u_0, u_2, \dots, u_{n-1}, v_0, \dots, v_{n-1}\}$ та набором ребер:

$$E = \{u_0u_1, \dots, u_{n-1}u_0, u_0v_0, \dots, u_{n-1}v_{n-1}, v_0v_s, v_1v_{s+1}, \dots, v_{n-1}v_{n-1+s}\}$$

Причому індекси беруться по модулю n.

<u>Твердження 3.1.</u> Будь-який узагальнений граф Петерсена є кубічним.
Доведення. З будь-якої вершини u_j виходить рівно три ребра: u_ju_{j-1}, u_ju_{j+1}, u_jv_j, а з вершини v_j також три ребра: $v_jv_{j-s}, v_ju_j, v_jv_{j+s}$.

Теорема 3.1. Гіпотеза Ердьоша-Д’ярфаша виконується для узагальнених графів Петерсена.
Доведення. Розіб’ємо доведення на випадки чотири випадки в залежності від значення параметра s.
Випадок 1. При $s = 1$. В такому випадку існує цикл C_4, довжиною 4, що виражається наступною послідовністю вершин:

$$u_0 \to v_0 \to v_1 \to u_1 \to u_0$$

Випадок 2. При $s \geq 3$ існує цикл на восьми вершинах який виражається наступною послідовністю вершин:

$$u_0 \to u_1 \to v_1 \to v_{1+s} \to u_{1+s} \to u_s \to v_s \to v_0 \to u_0$$

Зауваження 3.1.1. Насправді в узагальнених графах Петерсена існують цикли, довжина яких також є степінь двійки. Наприклад, при $s \geq 5$ можна знайти цикл довжини 16:

$$u_0 \to u_1 \to u_2 \to v_2 \to v_{2+s} \to v_{2+2s} \to u_{2+2s} \to u_{1+2s} \to u_{2s} \to u_{2s-1}$$
$$\to u_{2s-2} \to v_{2s-2} \to v_{s-2} \to v_{-2} \to u_{-2} \to u_{-1} \to u_0.$$

На жаль, граф Маркстрема, який було наведено в другому розділі погано узагальнюється. Дослідивши структуру цього графу можна прийти до його прямого узагальнення, а саме замінивши центральний трикутник та його трикутні відгалуження на C_n.

Визначення 3.2. Узагальнений граф Маркстрема $GM(n)$ (від англійського **G**eneralized **M**arkström Graph) визначається за допомогою наступного процесу:

A. Спочатку будується граф цикл на n вершинах C_n, які ми називаємо $A_1, \dots, A_n$.
B. Для кожної вершини A_j будуємо ребро $A_j B_1^{(j)}$. Потім будуємо цикли довжини n з $B^{(j)}$: $B_1^{(j)} \to B_2^{(j)} \to \dots \to B_n^{(j)} \to B_1^{(j)}$.
C. З усіх вершин таких додаткових циклів будуємо «хвости» наступним чином: $B_i^{(j)} \to C_i^{(j)}$ для всіх $i = \overline{2, n-1}$ й $B_n^{(j)} \to D_{2n-1}^{(j)}$. Для всіх $C_i^{(j)}$ проводимо ще $C_i^{(j)} \to D_{2i-3}^{(j)}$ та $C_i^{(j)} \to D_{2i-2}^{(j)}$.
D. Замикаємо всі D: $D_1^{(1)} \to D_2^{(1)} \to \cdots \to D_{2n-1}^{(1)} \to D_1^{(2)} \to \cdots \to D_{2n-1}^{(n)} \to D_1^{(1)}$.

Наприклад, граф $GM(3)$ – граф Маркстрема з другого розділу.

Наведемо приклад графу $GM(5)$.

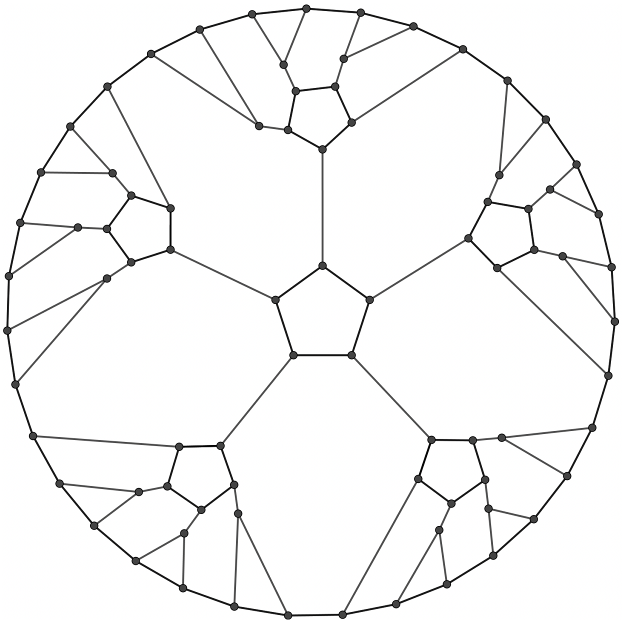

Рис 2.3. Узагальнений граф Маркстрема $GM(5)$.

Твердження 2.2. В графі рівно $4n(n-1)$ вершин.

Доведення. На кроці (А) маємо n вершин. На кроці (И) додається n^2 вершин. На кроці (С) для одного циклу $B^{(j)}$ додається $3(n-2)+1$ вершин. Тобто $3n-5$. Отже, сумарно $n(3n-5)=3n^2-5n$. На останньому кроці не додається нічого. Отже, сумарна кількість вершин: $n+n^2+3n^2-5n=4n^2-4n=4n(n-1)$.

Наслідок 3.2.1. Оскільки граф 3-регулярний (кубічний) маємо, що кількість ребер в графі $\frac{3v}{2}=6n(n-1)$, де v – це кількість вершин в графі.

Твердження 2.3. Гіпотеза Ердеша-Д'ярфаша виконується для узагальнених графів Маркстрема.

Доведення.

Такий шлях можна знайти явним чином:

$$B_5^{(j)} \to D_9^{(j)} \to D_8^{(j)} \to D_7^{(j)} \to D_6^{(j)} \to C_3^{(j)} \to B_3^{(j)} \to B_4^{(j)} \to B_5^{(j)}$$

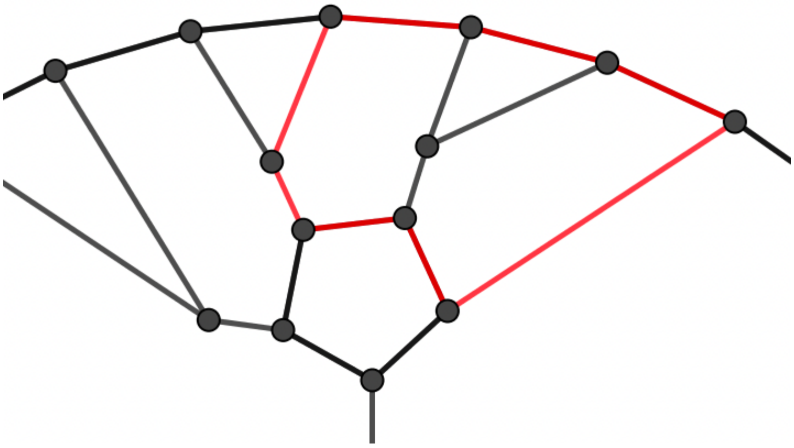

Рис 2.4. Ілюстрація до доведення: приклад циклу

У такому циклі рівно 8 ребер.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

Наведено явні приклади циклів для узагальнених графів Петерсена та Маркстрема. Ці графи цікаві тим, що є кубічними.

ВИСНОВКИ

В даній роботі автором проведено певні дослідження гіпотези Ердеша-Д'ярфаша. Автором було доведено гіпотеза для часткових випадків графів, а зокрема узагальнених графів Петерсена та введених автором узагальнених графів Маркстрема.

Автор запропонував конструкцію циклічних графів, що не містять малих циклів, довжини яких є степінню двійки. Застосовано ймовірнісний метод для пошуку циклічних графів, що не містять жодних циклів довжиною s, де $s = \overline{3, k}$. Наведена верхня оцінка на кількість ребер в можливих контрприкладах: $m = O\left(n\sqrt{n}\right)$ й показано, що оцінка досяжна.

Судячи по кількості наукових публікацій, пов'язаних з цією гіпотезою, а також з її більш ніж 25 річною історією можемо зробити висновок, що вона є досить важкою, тому, ймовірно, її доведення буде кориснішим самого результати.