

Інтерполяція

Мартін Лешко, leshko.martin@gmail.com

Теорема 1. *Існує єдиний многочлен степені не більше n , який приймає задані значення y_1, \dots, y_{n+1} в заданих точках x_1, \dots, x_{n+1} .*

Доведення: Розглянемо лінійні простори $\mathcal{U}_1 = \mathbb{R}^{\leq n}[x]$ (простір многочленів з дійсними коефіцієнтами степені не більше n) і $\mathcal{U}_2 = \mathbb{R}^{n+1}$. Зрозуміло, що $\dim \mathcal{U}_1 = \dim \mathcal{U}_2 = n + 1$ (бо на першому просторі базис вводиться значеннями $1, x, x^2, \dots, x^n$; друге очевидно). Задамо лінійне відображення L так:

$$P \mapsto \begin{pmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ \vdots \\ P(x_{n+1}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Легко переконатись, що воно лінійне.

Воно ін'єктивне, бо якщо $P \in \text{Ker } L$, то P дорівнює нулю в $n + 1$ точці, отже $P \equiv 0$.

Отже, є ін'єктивне лінійне перетворення між двома просторами однакової розмірності. Отже, воно бієктивне (це очевидно слідує з відомої формули: $\dim L + \dim \text{Im } L = \dim \mathcal{U}_2$).

□