Controlo Automático - Projecto

Trabalho realizado por:

- Daniela Tavares (201603604)
- Diogo Cordeiro (201705417)
- Hugo Sales (201704178)
- Tiago Ferrero (201603370)

Introdução

Este trabalho foi-nos proposto pela Prof Teresa Mendonça e tem como objetivo pôr em prática alguns dos conhecimentos chave adquiridos ao longo desta disciplina: prática de Matlab, análise de funções de transferência e de sistemas espaço-estado e controlo com posicionamento de pólos. Aqui apresentamos as nossas soluções para o conjunto de quatro exercicios que constituem o enunciado, sendo o primeiro dedicado a uma análise inicial da base de dados fornecida, o segundo sobre análise no domínio das frequências, o terceiro sobre análise em espaços de estados e o último sobre controlo com posicionamento de pólos.

Bootstrap

```
%% Inicialização do ambiente
clear ; close all; clc

% Importamos os dados dos pacientes [1]
data = importdata('ROC_REAL_50.mat');

% Definimos uma seed estatica para o gerador de números aleatórios de forma
% a podermos repetir os experimentos com resultados determinísticos
rng(42);
```

Questão 1

a) Selecionamos 10 pacientes da base de dados:

```
rndIDX = randperm(50);
sample_size = 10
```

```
sample_size = 10
```

```
sample = data(rndIDX(1:sample_size), :)
```

```
sample = 10×2
    0.0219    1.2746
    0.0528    2.5362
    0.0352    1.5503
    0.0293    1.4728
    0.0308    1.9499
    0.0330    2.4823
    0.0282    1.2615
    0.0295    1.2390
    0.0329    2.5669
    0.0394    2.0425
```

```
t_size = 600
```

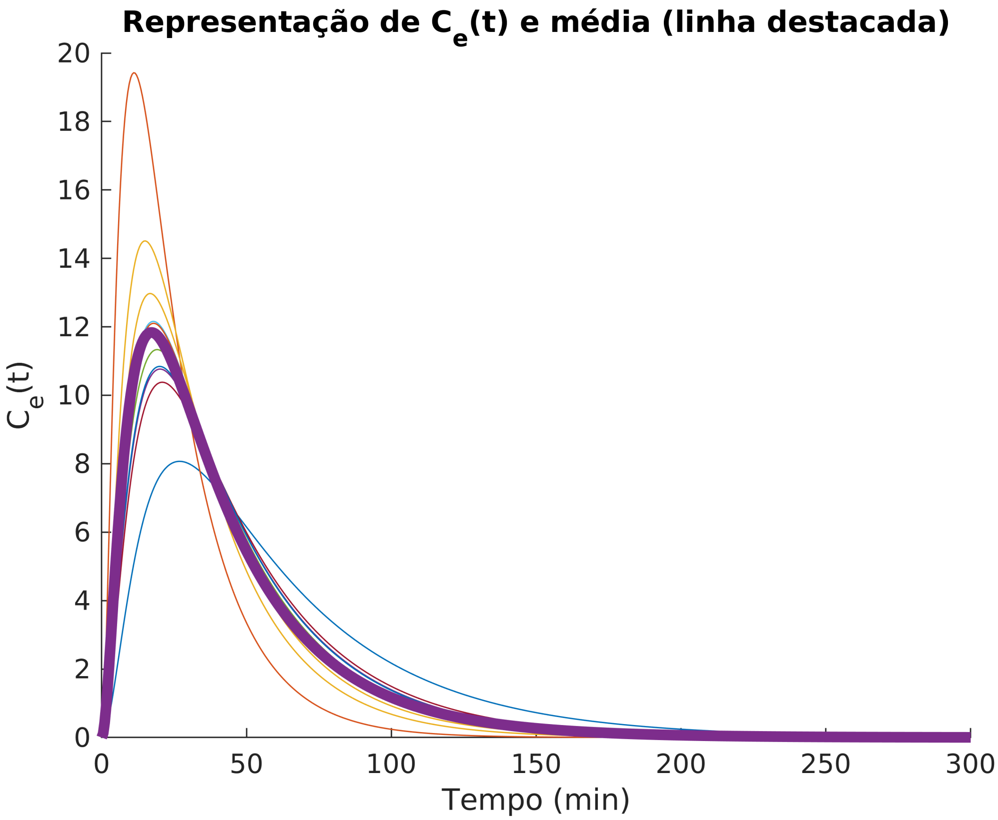
```
t_size = 600
```

b) e c)

Temos que $(s+\alpha)(s+4\alpha)(s+10\alpha) = s^3 + 15\alpha s^2 + 54\alpha^2 s + 40\alpha^3$, o que nos dá os fatores $[1 \;\; 15a \;\; 54a^2 \;\; 40a^3]$.

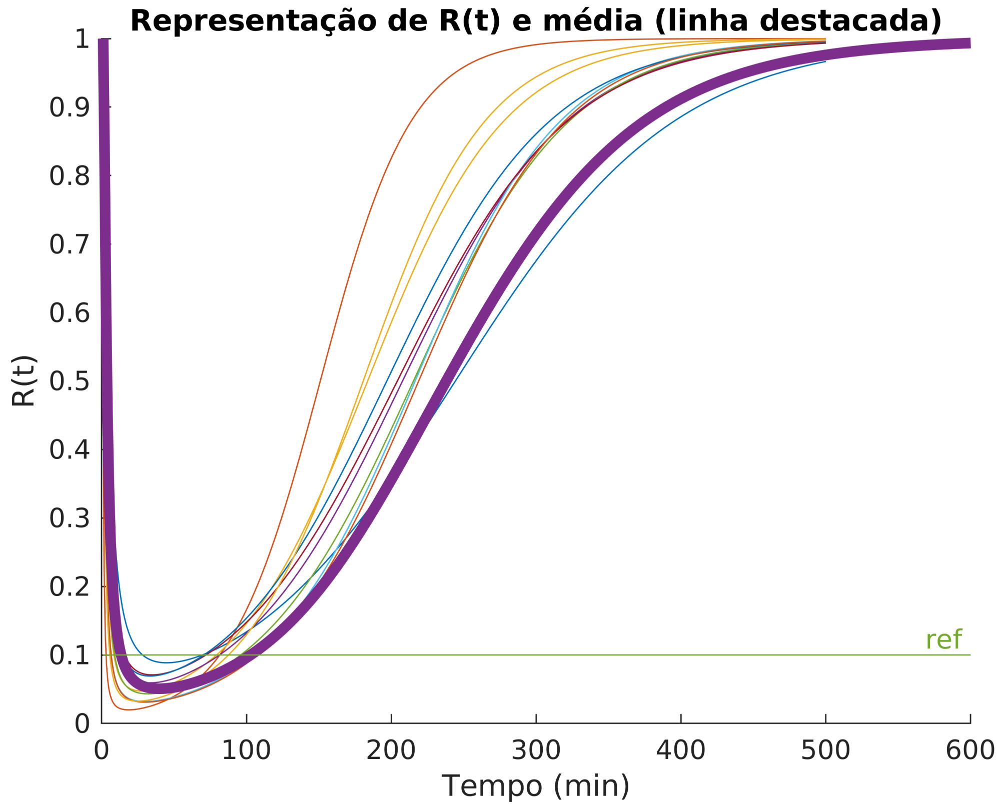
Cálculo de $c_e(t)$ e da respectiva média.

```
figure(1);
hold on
t = linspace(0, 300, t_size);
Ce = zeros(t_size, sample_size);
G = @(a) tf(40*a^3, [1 15*a 54*a^2 40*a^3]);
for idx = 1 : sample_size
    a = sample(idx, 1);
    Ce(:, idx) = impulse(G(a) * 600, t);
end
plot(t, Ce);
mean_ce = mean(Ce, 2);
plot(t, mean_ce, 'LineWidth', 4);
%fplot(@(x) 1489.2*x);
xlabel('Tempo (min)')
ylabel('C_{e}(t)')
title('Representação de C_{e}(t) e média (linha destacada)')
hold off
```



Cálculo de $R(t)$ e da respectiva média.

```
r0 = 1;
EC50 = 1;
figure(2);
hold on
t = linspace(0, 500, t_size);
% O transposto da segunda coluna de `sample` é repetido verticalmente
% `t_size` vezes e multiplicado elemento a elemento com `Ce`
Rt = @(Ce, gamma) r0 ./ (1 + (Ce / EC50) .* gamma);
R = Rt(Ce, repmat(sample(:, 2)', t_size, 1));
plot(t, R);
gamma = mean(R, 2);
plot(gamma, 'LineWidth', 4);
% Ver label.m
label(plot(ones(t_size, 1) * 0.1), 'ref', 'location', 'right');
xlabel('Tempo (min)')
ylabel('R(t)')
title('Representação de R(t) e média (linha destacada)')
hold off
```



Questão 2

a)

Pela condição de estabilidade necessária do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, fácilmente vemos que α tem que ser não negativo, caso contrário pelo menos um dos coeficientes do polinómio do denominador seria negativo.

Aplicando o método de Routh-Hurwitz obtemos a seguinte tabela:

$$\begin{array}{c|c|c} s^3 & 1 & 54\alpha^2 \\ s^2 & 15\alpha & 40\alpha^3 \\ s^1 & \frac{15\alpha^2}{3} & 0 \\ s^0 & \frac{40\alpha^3}{3} & 0 \end{array}$$

Daqui, fácilmente vemos que os valores da primeira coluna têm todos o mesmo sinal, se $15\alpha > 0$, $\frac{154\alpha^2}{3} > 0$ e $\frac{40\alpha^3}{3} > 0$, o que acontece para todos os $\alpha > 0$, ou seja, para todos os valores estritamente positivos de α, o sistema é estável.

b)

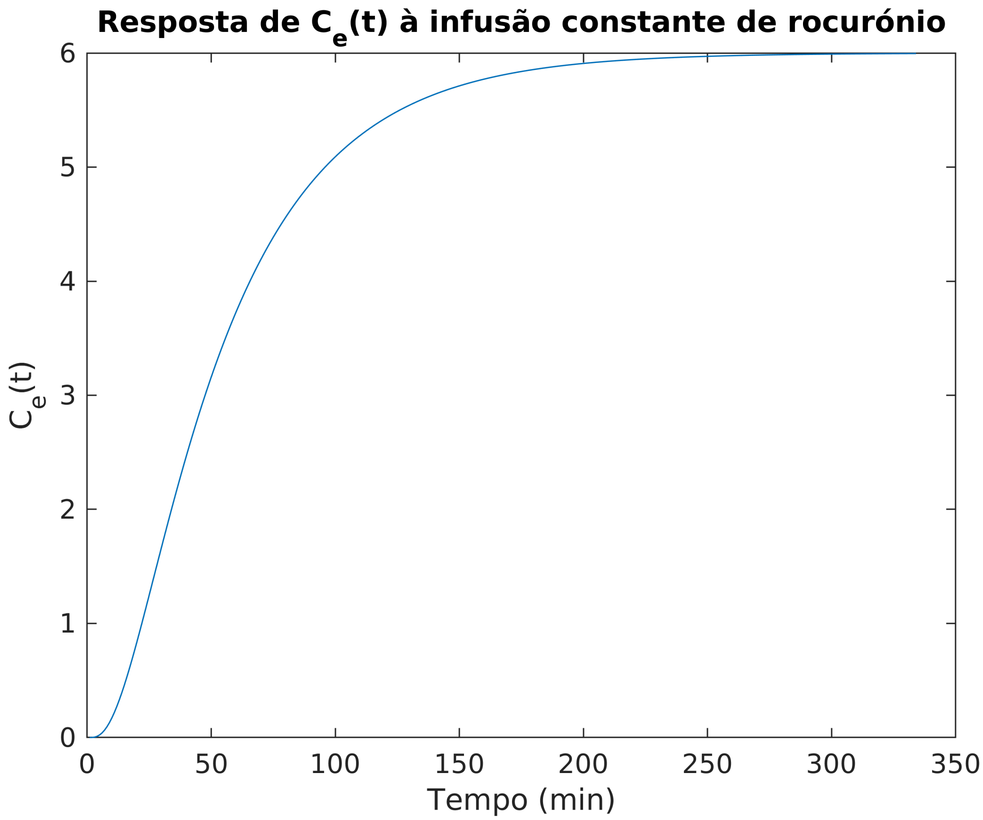
```
figure(3);
alpha = mean(sample(:, 1))
```

```
alpha = 0.0333
```

```
sys = G(alpha) * 6;
constant_infusion = step(sys);
step_info = stepinfo(constant_infusion)
```

```
step_info = struct with fields:
        RiseTime: 100.8415
    SettlingTime: 186.5193
     SettlingMin: 5.3991
     SettlingMax: 5.9958
       Overshoot: 0
      Undershoot: 0
            Peak: 5.9958
        PeakTime: 334
```

```
plot(constant_infusion);
xlabel('Tempo (min)');
ylabel('C_{e}(t)');
title('Resposta de C_{e}(t) à infusão constante de rocurónio');
```



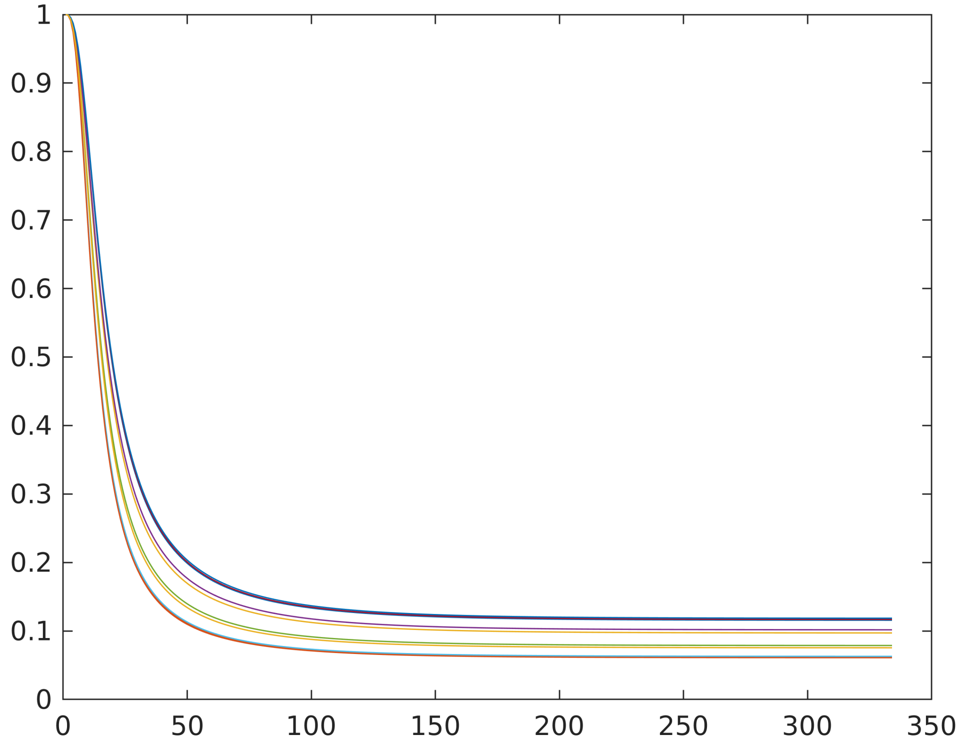
c)

```
[Z, gain] = zero(sys);
gain
```

```
gain = 0.0089
```

d)

```
figure(4);
plot(Rt(constant_infusion, repmat(sample(:, 2)', length(constant_infusion), 1)));
```

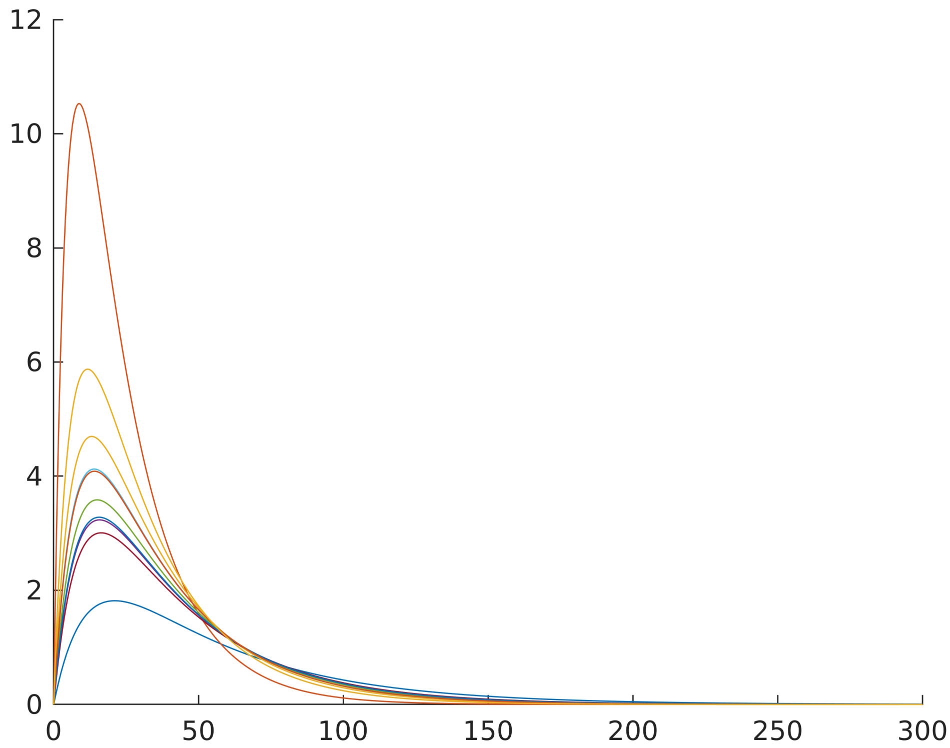


e)

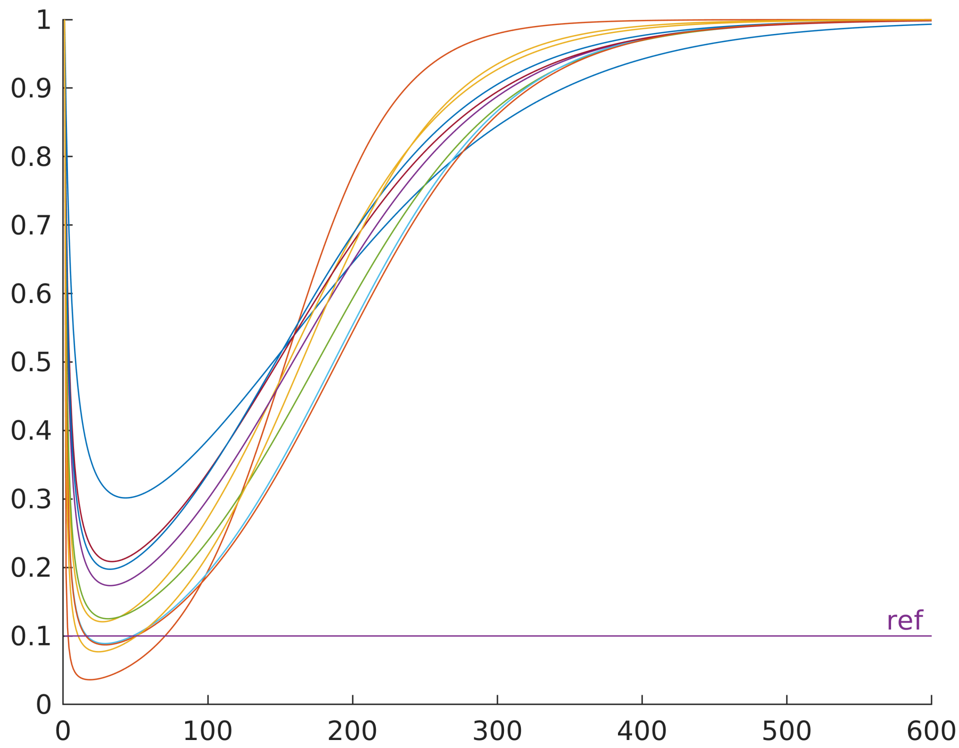
Os polos são $-\alpha$ e -4α.

$40 * a^3/((s + a) * (s + 4 * a)) = 40 * a^3/(s^2 + 5 * a * s + 4 * a^2)$

```
figure(5);
hold on;
H = @(a) tf(40*a^3, [1 5*a 4*a^2]);
t = linspace(0, 300, t_size);
Ce_h = zeros(t_size, sample_size);
for idx = 1 : sample_size
    a = sample(idx, 1);
    Ce_h(:, idx) = impulse(H(a) * 600, t);
end
plot(t, Ce_h);
hold off;
```




```
figure(6);
hold on;
plot(Rt(Ce_h, repmat(sample(:, 2)', t_size, 1)));
label(plot(ones(t_size, 1) * 0.1), 'ref', 'location', 'right');
hold off;
```



f)

Como podemos observar pelos dois gráficos apresentados em cima, estes têm comportamentos semelhantes aos correspondentes à função de transferência exata, exceto que apresentam uma magnitude diferente. Verificamos que com esta aproximação, o modelo não tem o desempenho pretendido já que muito poucos pacientes atingem o nível de NBM de referência com a administração do bólus inicial.

Questão 3

a)

Obtenção do modelo (A,B,C,D) para o sistema input/output através da Função de Transferência.

$$G(s) = \frac{40\,\alpha^{3}}{s^3 + 15\,\alpha\,s^2 + 54\,\alpha^2\,s + 40\,\alpha^3} \iff$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{40\,\alpha^{3}}{s^3 + 15\,\alpha\,s^2 + 54\,\alpha^2\,s + 40\,\alpha^3} \iff$$

$$Y(s)\cdot(s^3 + 15\,\alpha\,s^2 + 54\,\alpha^2\,s + 40\,\alpha^{3}) = 40\,\alpha\,U(t)$$

No domínio do tempo, pela $\mathscr{L}^{-1}$: $\dddot{y}(t) + 15\alpha\ddot{y} + 54\alpha^2\dot{y}(t) + 40\alpha^3 y(t) = 40\alpha u(t)$

Ora, temos que:

$y(t) = y \ = x_1$

$\dot{y}(t) = x_2 = \ \dot{x}_1$

$\ddot{y}(t) = x_3 = \ \dot{x}_2$

$\dddot{y}(t) = \dot{x_3}$

$u(t) = u$

Portanto,

$$\dot{x_3} + 15\,\alpha\,x_3 + 54\,\alpha^2\,x_2 + 40\,\alpha^3\,x_1 = 40\,\alpha^3\,u \Longleftrightarrow$$
$$\dot{x_3} = -40\,\alpha^3\,x_1 - 54\,\alpha^2\,x_2 - 15\,\alpha\,x_3 + 40\,\alpha^3\,u$$

Chegamos assim ao seguinte modelo de espaço de estados na forma canonica controlável em representação matricial:

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40\alpha^3 & -54\alpha^2 & -15\alpha \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40\alpha^3 \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ [1 & 0 & 0] \end{array}}_{C} x + \underbrace{[0]}_{D} u$$

b)

```
%[num, den] = tfdata(G(alpha), 'v');
%[A, B, C, D] = tf2ss(num, den)
A    = @(alpha) [0 1 0; 0 0 1; -40*alpha^3 -54*alpha^2 -15*alpha];
B    = @(alpha) [0 0 40*alpha^3]';
C    = @(alpha) [1 0 0];
D    = @(alpha) [0];
G_ss = @(alpha, delay) ss(A(alpha), B(alpha), C(alpha), D(alpha), 'InputDelay', delay);

alpha = mean(sample(:, 1))
```

```
alpha = 0.0333
```

```
Co = ctrb(G_ss(alpha, 0))
```

```
Co = 3×3
         0         0    0.0015
         0    0.0015   -0.0007
    0.0015   -0.0007    0.0003
```

Número de estados não controláveis:

```
unco = 3 - rank(Co) % A é uma matriz três por três
```

```
unco = 0
```

Concluímos assim, pelo teste de Kalman, que o sistema é controlável.

Por meio do MATLAB, conseguimos também testar a estabilidade do sistema da seguinte forma:

```
is_B_stable = isstable(G_ss(alpha, 0))
```

```
is_B_stable = logical
   1
```

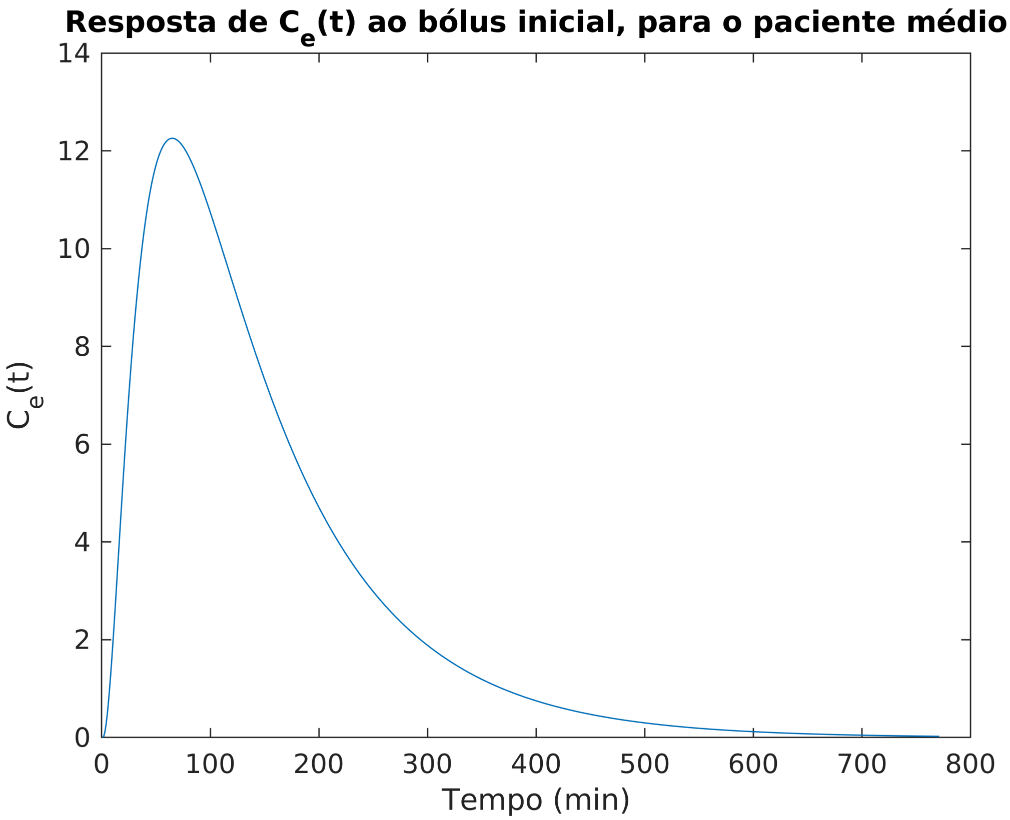
Sendo este um sistema de tempo contínuo, deduzimos que todos os polos se localizam na metade esquerda aberta do plano complexo.

c)

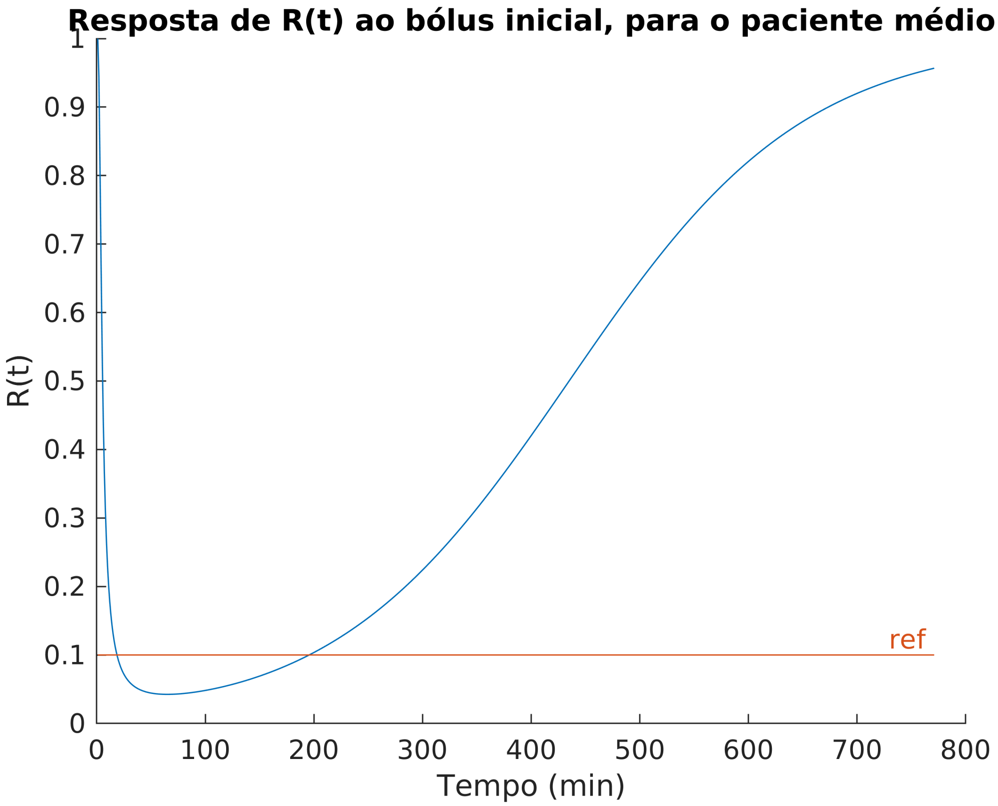
```
alpha = mean(sample(:, 1));
gamma = mean(sample(:, 2))
```

```
gamma = 1.8376
```

```

figure(7);
ce = impulse(G_ss(alpha, 0)*600);
plot(ce);
xlabel('Tempo (min)');
ylabel('C_{e}(t)');
title('Resposta de C_{e}(t) ao bólus inicial, para o paciente médio');
```




```
figure(8);
hold on;
plot(Rt(ce, gamma));
xlabel('Tempo (min)');
ylabel('R(t)');
title('Resposta de R(t) ao bólus inicial, para o paciente médio');
label(plot(ones(length(ce), 1) * 0.1), 'ref', 'location', 'right');
hold off;
```

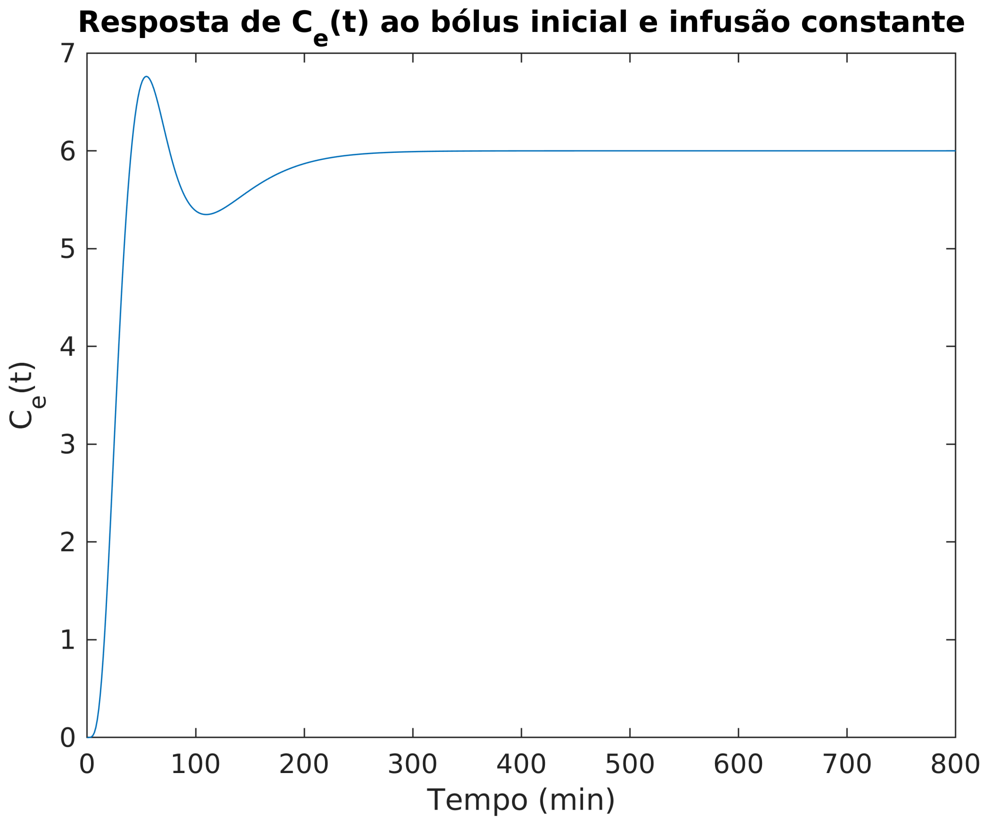


Questão 4

a)

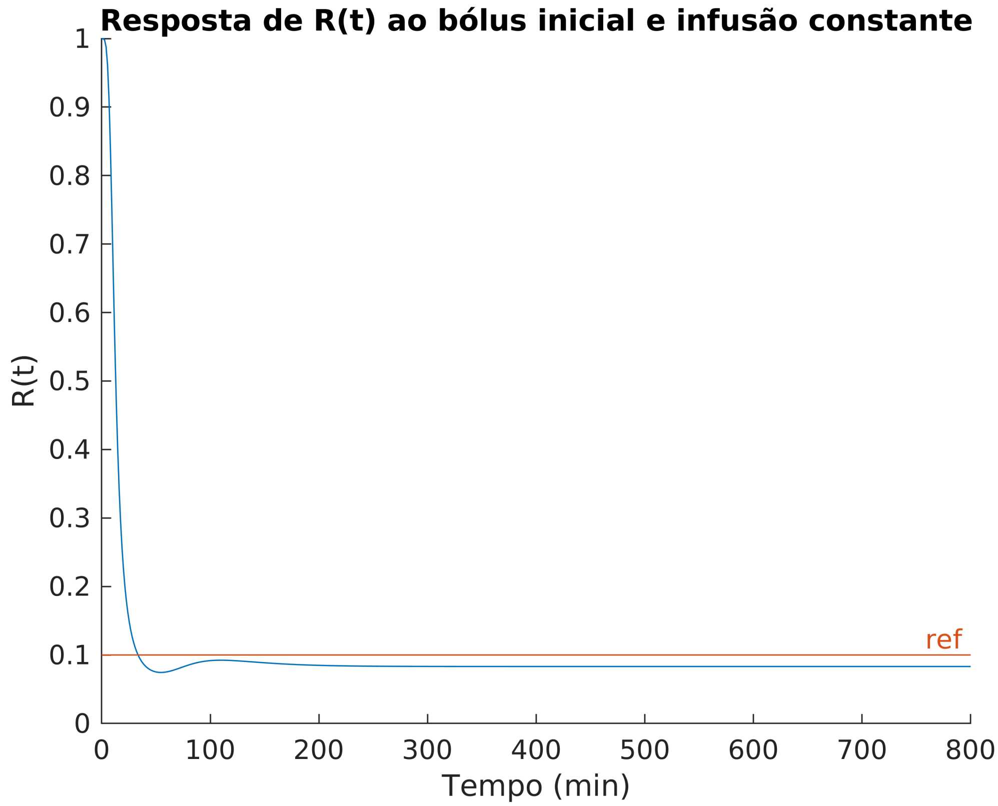
Pela análise do gráfico de $R(t)$ apresentado em 3.c, uma escolha apropriada de T é $50s$, já que este é um ponto no qual o efeito do bólus inicial está a começar a diminuir tal que o nível de NBM se aproxima do valor de referência.

```
figure(9);
T = 50;
t = linspace(0, 800, 600);
%t2 = linspace(T, 800, length(t));
u = impulse(G_ss(alpha, 0) * 600, t) + step(G_ss(alpha, T) * 6, t);
ce = lsim(G_ss(alpha, 0), u, t);
plot(t, ce);
xlabel('Tempo (min)');
ylabel('C_{e}(t)');
title('Resposta de C_{e}(t) ao bólus inicial e infusão constante');
```



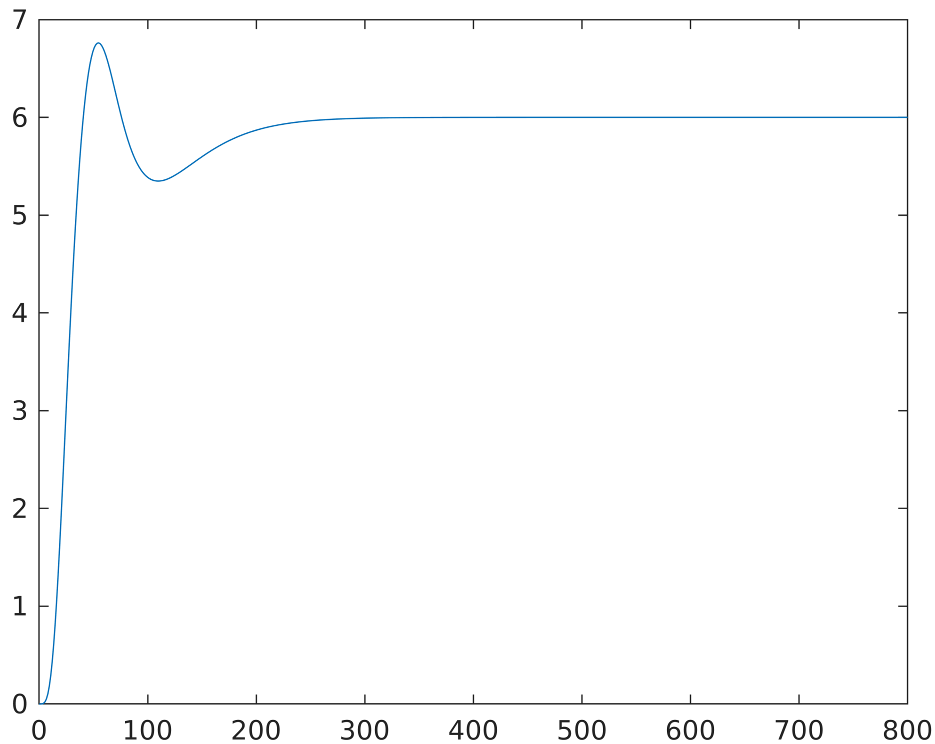
Como confirmação da validade da escolha de T, apresentamos a resposta $R(t)$:

```
figure(10);
hold on;
plot(t, Rt(ce, gamma));
xlabel('Tempo (min)');
ylabel('R(t)');
title('Resposta de R(t) ao bólus inicial e infusão constante');
label(plot(t, ones(length(t), 1) * 0.1), 'ref', 'location', 'right');
hold off;
```



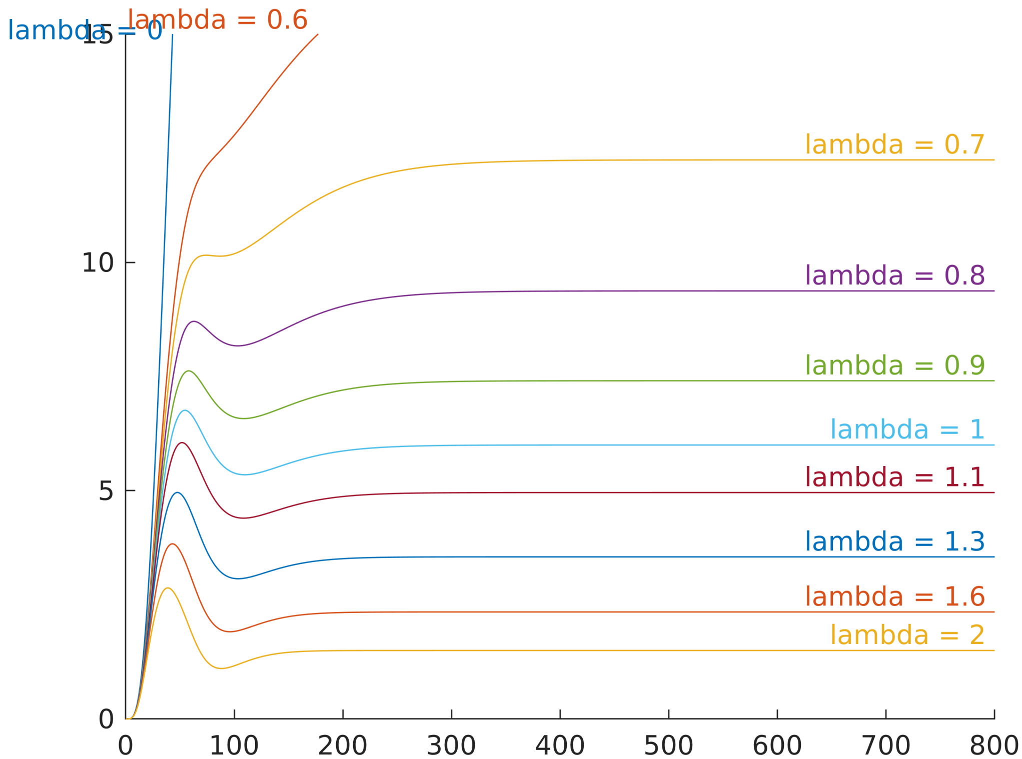
b)

```
figure(11);

% Conforme definido na secção 3 do artigo base deste projecto [2]
A_cl = @(lambda, alpha) [0, 1, 0; 0, 0, 1; -40*lambda*alpha^3, -(40+14*lambda)*alpha^2, -(14+la
G_cl = @(lambda, alpha, delay) ss(A_cl(lambda, alpha), B(alpha), C(alpha), D(alpha), 'InputDela
K    = @(lambda, alpha) [40*(lambda-1)*alpha^3 14*(lambda-1)*alpha^2 (lambda-1)*alpha];

sys = feedback(G_cl(1, alpha, 0), tf(K(1, alpha), 1));
u = impulse(G_cl(1, alpha, 0) * 600, t) + step(G_cl(1, alpha, T) * 6, t);
ce = lsim(G_cl(1, alpha, 0), u, t);
plot(t, ce);
```



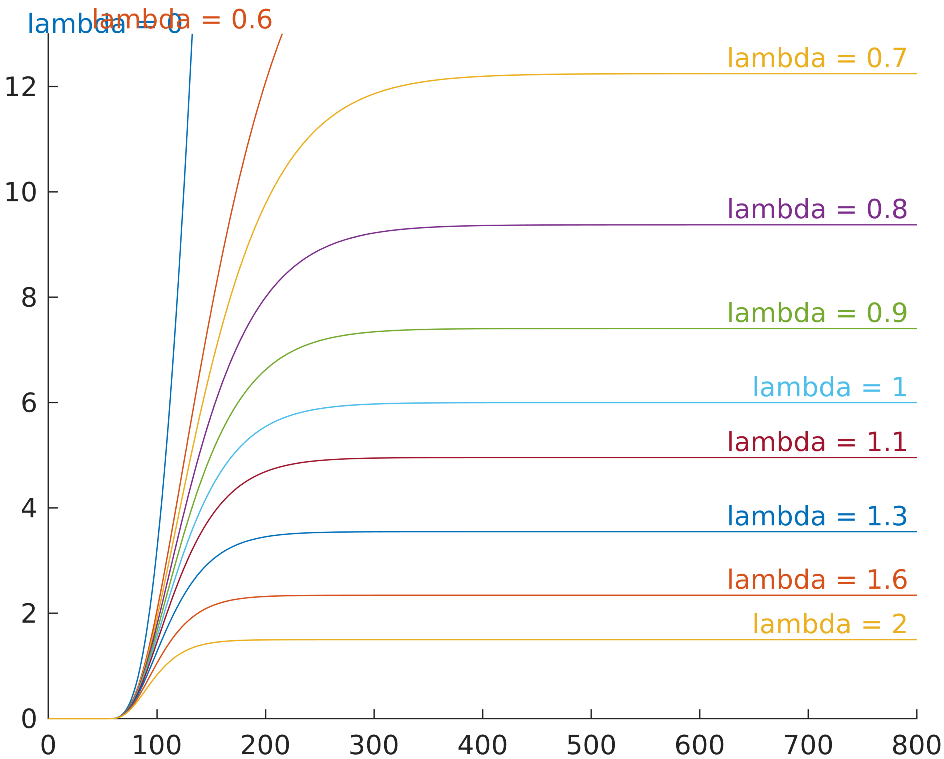
c)

```
figure(12);
hold on;
lambdas = [0 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.3 1.6 2];
Ce_lambda = zeros(length(t), length(lambdas));
ax = gca;
ax.YLim = [0, 15];
for idx = 1:length(lambdas)
    lb = lambdas(idx);
    sys = feedback(G_cl(lb, alpha, 0), tf(K(lb, alpha), 1));
    u = impulse(G_cl(lb, alpha, 0) * 600, t) + step(G_cl(lb, alpha, T) * 6, t);
    Ce_lambda(:, idx) = lsim(G_cl(lb, alpha, 0), u, t);
    label(plot(ax, t, Ce_lambda(:, idx)), ['lambda = ', num2str(lb)], 'location', 'right')
end
hold off;
```



Sem bólus inicial

```
figure(13);
hold on;
ax = gca;
ax.YLim = [0, 13];
for lb = lambdas
    sys = feedback(G_cl(lb, alpha, 0), tf(K(lb, alpha), 1));
    u = step(G_cl(lb, alpha, T) * 6, t);
    ce = lsim(G_cl(lb, alpha, 0), u, t);
    label(plot(ax, t, ce), ['lambda = ', num2str(lb)], 'location', 'right')
end
hold off;
```



d)

$$a(s) = \det(s\mathrm{I} - A) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -40\,\alpha^3 & 54\,\alpha^3 & s + 15\alpha \end{bmatrix}\right)$$
$$= s^3 + 15\,\alpha\,s^2 - 54\,\alpha^3\,s + 40\,\alpha^3$$

$$a(s) = s^3 + a_1\,s^2 + a_2 s + a_3$$
$$= s^3 + \underset{a_1}{15\,\alpha}\,s^2 - \underset{a_2}{54\,\alpha^3}\,s + \underset{a_3}{40\,\alpha^3}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15\,\alpha & 1 & 0 \\ -54\,\alpha^3 & 15\,\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-T} = (M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -15\,\alpha & -54\,\alpha^3 + 225\,\alpha^2 \\ 0 & 1 & -15\,\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

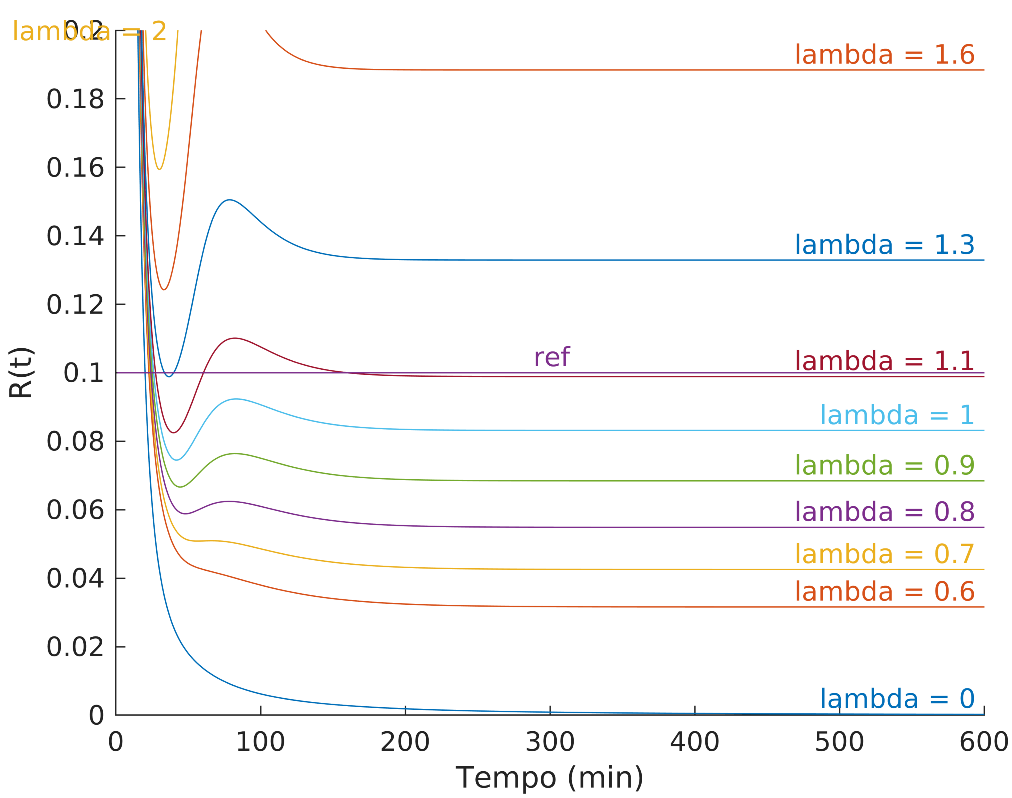
$$C = C(A, B) = (B\ \mathrm{AB}\ A^2B)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40\,\alpha^3 \\ 0 & 40\,\alpha^3 & -600\,\alpha^4 \\ 40\,\alpha^3 & -600\,\alpha^4 & 6840\,\alpha^5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ C^{-1}(A,B) = \begin{bmatrix} \frac{103}{80\,\alpha} & \frac{3}{8\alpha^2} & \frac{1}{40\alpha^3} \\ \frac{3}{8\alpha^2} & \frac{1}{40\alpha^3} & 0 \\ \frac{1}{40\alpha^3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ K = (\alpha - a)\, M^{-T}\, C^{-1}$$

e)

```
figure(14);
hold on;
ax = gca;
ax.YLim = [0, 0.2];
for idx = 1 : length(lambdas)
    ce = Ce_lambda(:, idx);
    lb = lambdas(idx);
    label(plot(ax, Rt(ce, gamma)), ['lambda = ', num2str(lb)], 'location', 'right')
    xlabel('Tempo (min)');
    ylabel('R(t)');
end
label(plot(ones(length(t), 1) * 0.1), 'ref', 'location', 'middle');
hold off;
```



Pela análise dos gráficos supra apresentados, vemos que o valor de $\lambda = 1.1$ é o valors que fica mais próximo do nível de referência, oscilando em apenas 2%.

Conclusão

Neste trabalho foram realizados quatro exercícios com recurso a métodos computacionais e a uma análise analítica manual. Agora, temos uma melhor compreensão prática dos conhecimentos adquiridos nesta disciplina bem como o seu alcance. Acreditamos assim que os objetivos foram alcançados.

Referências

[1] ROC REAL.mat

[2] Silva, J, Mendonça, T and Rocha, P., Pole placement based on model identification for automatic delivery of Rocuronium. 2019 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Bari, October 2019.