

# MATEMATIČKA LOGIKA

\*\*\*

– ISKAZNA LOGIKA –

I DEO

Počinjemo sa nekoliko primera logičke argumentacije.

## Primer 1:

1. Ako potražnja raste, onda kompanije se šire.
  2. Ako kompanije se šire, onda kompanije zapošljavaju radnike.
- 
3. Ako potražnja raste, onda kompanije zapošljavaju radnike.

U ovoj argumentaciji, 1 i 2 su **premise**, a 3 je **zaključak**.

O zaključcima se može raspravljati i eventualno tvrditi da su pogrešni.

Međutim, ukoliko su premise prihvaćene kao tačne, onda i mora biti prihvaćen zaključak.

Zaključak logički sledi iz premisa, i dakle, argumentacija je ispravna.

## Primer 2:

1. Program sadrži "bug" ili ulaz je pogrešan.
  2. Ulaz nije pogrešan.
- 
3. Program sadrži "bug".

**Složene izjave** (izjavne rečenice) sastoje se od nekoliko delova, od kojih svaki za sebe takođe predstavlja izjavu.

Primer 1: "potražnja raste" i "kompanije se šire" su proste izjave povezane veznikom **ako ... onda ...** (engleski **if ... then ...**).

Primer 2: "program sadrži "bug"" i "ulaz je pogrešan" su proste izjave povezane veznikom **ili** (engleski **or**).

Da bi jasnije video koja je argumentacija ispravna a koja nije, Aristotel je skratio proste izjave zamenivši ih slovima  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ...

- ❑ Slovo  $p$  može izraziti iskaz "potražnja raste".
- ❑ Slovo  $q$  može izraziti iskaz "kompanije se šire".
- ❑ Slovo  $r$  može izraziti iskaz "kompanije zapošljavaju radnike".

Tada dobijamo argumentaciju opšteg oblika

1. Ako  $p$  onda  $q$ .
2. Ako  $q$  onda  $r$ .

---

3. Ako  $p$  onda  $r$ .

Ovakva argumentacija naziva se  
**hipotetički silogizam**.

Argumentacija iz Primera 2 može se zapisati u sledećem opštem obliku

1.  $p$  ili  $q$ .

2. Nije  $q$ .

---

3.  $p$ .

Ovakva argumentacija naziva se  
**disjunktivni silogizam**.

Važan vid argumentacije je i argumentacija oblika

1. Ako  $p$  onda  $q$ .

2.  $p$ .

---

3.  $q$ .

Ovakva argumentacija naziva se  
**modus ponens**.

**Iskaz** se obično definiše kao izjava koja ima svojstvo da je ili **istinita (tačna)** ili **neistinita (netačna)** (samo jedno od toga).

Pri tome, iskazi se zadaju rečenicama (izjavnim rečenicama).

Na primer, rečenicom

"3 je delitelj broja 18"

zadat je jedan iskaz.

Ovakva definicija je ipak neformalna i nedovoljno operativna.

Naime, za datu rečenicu nije uvek lako odrediti da li je njome zadat iskaz ili ne.

Na primer, rečenicom

**”Izjava koju izgovaram je laž”**

nije zadat iskaz, iako na prvi pogled izgleda suprotno.

Naime, na osnovu forme ove rečenice bi se lako moglo zaključiti da se njome nešto tvrdi. Međutim, to nije tačno.

Ako je ta izjava zaista lažna, to znači da smo rekli istinu, i obratno, ako je ta izjava istinita, to znači da smo zaista rekli laž.

Prema tome, ta izjava ne može imati svojstvo da je ili istinita ili neistinita, i to samo jedno od toga.

Zbog ovoga u iskaznoj logici pojam iskaza koristimo kao osnovni pojam, pojam koji se ne definiše.



U iskaznoj logici proste iskaze označavamo slovima

$$p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$$

Ova slova nazivamo **iskazna slova** ili **iskazne promenljive**.

Iskaznim slovima mogu se pridružiti **istinitosne vrednosti**

1 – "tačno"

0 – "netačno"

Ponegde se "tačno" označava sa  $\top$ , a "netačno" sa  $\perp$ .

Međutim, mi ćemo koristiti gornje oznake 1 i 0.

Od prostih iskaza grade se složeniji iskazi, upotrebom **logičkih veznika**, koji se označavaju posebnim simbolima.

logički veznik	oznaka
nije	$\neg$
i	$\wedge$
ili	$\vee$
ako ... onda ...	$\Rightarrow$
ako i samo ako	$\Leftrightarrow$

Značenje ovih veznika precizira se u nastavku.

**Negacija** iskaza  $p$  je iskaz "**nije**  $p$ ".

Ovaj iskaz označava se sa  $\neg p$ , što se izgovara i "**ne**  $p$ ".

Negacija tačnog iskaza je netačan iskaz i obratno, negacija netačnog je tačan iskaz.

Istinitosna vrednost negacije iskaza može se prikazati i takozvanom **istinitosnom tablicom**:

$p$	$\neg p$
1	0
0	1

**Konjunkcija** iskaza  $p$  i  $q$  je iskaz " $p$  i  $q$ ", u oznaci  $p \wedge q$ .

Iskaz  $p \wedge q$  je tačan samo u slučaju kada su i  $p$  i  $q$  tačni iskazi.

U ostalim slučajevima konjunkcija je netačan iskaz.

To se može prikazati sledećom istinitosnom tablicom

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**Disjunkcija** iskaza  $p$  i  $q$  je iskaz " $p$  ili  $q$ ", u oznaci  $p \vee q$ .

Iskaz  $p \vee q$  je tačan ako je bar jedan od iskaza  $p$  i  $q$  tačan, a netačan je samo ako su oba iskaza  $p$  i  $q$  netačni.

To se može prikazati na sledeći način:

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

# Isključiva disjunkcija

U svakodnevnom životu veznik "ili" često ima **isključivi smisao** – iskaz " $p$  ili  $q$ " je tačan ako je tačan iskaz  $p$  ili  $q$ , i to samo jedan od njih.

Takva disjunkcija se naziva **ekskluzivna disjunkcija** ili **isključiva disjunkcija**, i piše se "ili  $p$  ili  $q$ ", u oznaci  $p \text{ XOR } q$  ili  $p \oplus q$ .

Isključiva disjunkcija zadata je sledećom istinitosnom tablicom

$p$	$q$	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

**Primer 3:** Neka su iskazi  $p$  i  $q$  zadati sa

$p$  : "  $\sqrt{2}$  je racionalan broj",

$q$  : "  $\sqrt{2}$  je broj koji je veći od nule".

Iskaz  $\neg p$  je zadat sa

$\sqrt{2}$  nije racionalan broj

i on je tačan (jer je  $p$  netačan iskaz).

Iskaz  $\neg q$  je zadat sa

$\sqrt{2}$  nije broj koji je veći od nule

i on je netačan.

Prema gornjim definicijama,  $p \wedge q$  je netačan, a  $p \vee q$  tačan iskaz.

**Implikacija** iskaza  $p$  i  $q$  je iskaz **ako  $p$  onda  $q$** , u oznaci  $p \Rightarrow q$ .

Ovaj iskaz je neistinit jedino u slučaju kada je  $p$  tačan, a  $q$  netačan iskaz. U svim ostalim slučajevima ovaj iskaz je tačan.

Istinitosne vrednosti implikacije zadate su sledećom tablicom:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



U implikaciji  $p \Rightarrow q$

- ❑ Iskaz  $p$  se naziva **premisa**, **pretpostavka** ili **antecedent**.
- ❑ Iskaz  $q$  se naziva **zaključak** ili **konsekvent**.

Izraz  $p \Rightarrow q$  čita se još i kao

*iz  $p$  sledi  $q$ ;*

*$q$  ako  $p$ ;*

*$p$  povlači (implicira)  $q$ ;*

*$p$  je dovoljno za  $q$ ;*

*$p$  samo ako  $q$ ;*

*$q$  je potrebno za  $p$ .*

**Primer 4:** Neka su iskazi  $p$  i  $q$  zadati sa

$p$  : "Broj  $n$  je deljiv sa 21"

$q$  : "Broj  $n$  je deljiv sa 7"

Implikacija  $p \Rightarrow q$  je tačan iskaz, bilo koji prirodan broj  $n$  da smo izabrali, čak i u slučaju da je, na primer,  $n = 5$ .

Prema definiciji implikacije, ako je iskaz  $p$  netačan, onda je iskaz  $p \Rightarrow q$  tačan, nezavisno od tačnosti iskaza  $q$ .

Drugim rečima, iz netačne pretpostavke može da sledi bilo koji iskaz.

## Primer 5:

Neka su iskazi  $p$  i  $q$  zadati sa

$p$  : "Boca sadrži kiselinu"

$q$  : "Boca nosi oznaku za opasnost"

Implikacija  $p \Rightarrow q$  odgovara složenom iskazu

"Ako boca sadrži kiselinu, onda boca nosi oznaku za opasnost"

Šta se dešava ako boca ne sadrži kiselinu, tj. iskaz  $p$  je netačan?

Može se desiti da boca nosi oznaku za opasnost jer ne sadrži kiselinu već jak otrov, i tada je  $q$  tačan iskaz.

Može se desiti i da boca ne sadrži oznaku jer sadrži sok od narandže, i tada je  $q$  netačan iskaz.

U oba slučaja, tačnost iskaza  $p \Rightarrow q$  nije dovedena u pitanje.

Ovakvo matematičko shvatanje implikacije odudara od upotrebe veznika "ako ... onda ..." u svakodnevnom životu.

Naime, bilo je rasprava oko toga da li implikacija  $p \Rightarrow q$  uopšte ima smisla ako između iskaza  $p$  i  $q$  nema neke suštinske veze.

Na primer, neka je

$p$  : voda mrzne na  $100^{\circ}\text{C}$

$q$  : Bombaj je glavni grad Argentine

Sa matematičke tačke gledišta,  $p \Rightarrow q$  je istinit iskaz.

Međutim, neki bi smatrali da implikacija  $p \Rightarrow q$  uopšte nema smisla, jer između iskaza  $p$  i  $q$  ne postoji nikakva veza.

Matematička tačka gledišta je pobedila iz dva razloga:

1. Zato što matematičku logiku ne interesuje značenje iskaza  $p$  i  $q$ , već samo njihova istinitost.

Preciznije, matematičku logiku interesuju samo uslovi pod kojima istinitost iskaza  $p$  povlači istinitost iskaza  $q$ .

Drugim rečima, u matematičkoj logici istinitost implikacije  $p \Rightarrow q$  ne zavisi od značenja iskaza  $p$  i  $q$ , već samo od njihove istinitosti.

2. Drugi razlog što je prihvaćena ovakva implikacija je to što se ovakvo gledište pokazalo veoma korisnim za primenu u nauci.

Naime, u nauci se često srećemo sa nekim hipotezama koje je nemoguće eksperimentalno proveriti, ali bi se mogle proveriti neke posledice koje se mogu izvući iz tih hipoteza.

Ovakvo gledište dozvoljava da iz tih hipoteza izvode posledice bez obzira na to što ne znamo da li su te hipoteze istinite ili ne.

Ovo se naziva **hipotetički karakter naučnih teorija**.

U svakodnevnom životu veznik "ako ... onda ..." ima još jednu primenu koja je drugačija od one u matematici.

Naime, veznik "ako ... onda ..." se često koristi da naznači da ne verujemo da premisa može da bude istinita.

Na primer,

**Ako položiš taj ispit, onda sam ja rimski papa.**

znači sumnju da će student o kome se radi položiti ispit, a ne implikaciju dva iskaza.

Onome ko je dao ovu izjavu je jasno da on nije rimski papa – on ovom izjavom zapravo kaže da je siguran da taj student neće položiti ispit.

**Ekvivalencija** iskaza  $p$  i  $q$  je iskaz " **$p$  ako i samo ako  $q$** ", u oznaci  $p \Leftrightarrow q$ .

Ekvivalencija je tačan iskaz ako su  $p$  i  $q$  ili oba tačna ili oba netačna.

U preostalim slučajevima ekvivalencija je netačan iskaz.

Istinitosne vrednosti ekvivalencije su zadate sledećom tablicom:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



Ekvivalencija  $p \Leftrightarrow q$  po istinitosti odgovara iskazu

”ako  $p$  onda  $q$  i ako  $q$  onda  $p$ ”,

odnosno iskazu

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Ekvivalencija  $p \Leftrightarrow q$  se formuliše i kao

” $p$  je ekvivalentno sa  $q$ ”.

Takođe, s obzirom na uočenu vezu između implikacije i ekvivalencije, iskaz  $p \Leftrightarrow q$  formuliše se i na sledeći način:

” $p$  je potrebno i dovoljno za  $q$ ”.

## a) Rečenice

”Trouglovi  $\mathcal{T}_1$  i  $\mathcal{T}_2$  su podudarni”

”Trouglovi  $\mathcal{T}_1$  i  $\mathcal{T}_2$  imaju podudarne po dve stranice i njima zahvaćen ugao”

zadaju ekvivalentne iskaze.

Ta činjenica se formuliše i kao jedan od opštih stavova o podudarnosti trouglova

”Dva trougla su podudarna ako i samo ako imaju podudarne po dve stranice i njima zahvaćeni ugao”

b) Ekvivalencijom se u matematici često definišu novi termini, polazeći od već poznatih.

”Prirodan broj različit od jedinice je **prost** ako i samo ako je deljiv samo sa sobom i sa jedinicom.”

Ovom rečenicom definisan je **prost broj** poznatim pojmovima koji čine sadržaj drugog iskaza ekvivalencije.

Dakle, iako ova rečenica ima formu iskaza, njome nije zadat iskaz, već definicija.

Ako je jasno da je u pitanju definicija, u odgovarajućoj rečenici se često izostavlja deo ”**samo ako**”, iako se podrazumeva da i taj pravac važi.

- c) U običnom jeziku nije uvek sasvim jasno da li je u rečenici korišćena implikacija ili ekvivalencija.

Na primer,

”Nositi bundu ekvivalentno je učestvovati u uništavanju retkih životinja”.

Ova rečenica izgleda kao ekvivalencija, ali nije to.

Ako izokrenemo redosled rečenica koje je čine, videćemo da nešto nije u redu:

”Učestvovati u uništavanju retkih životinja ekvivalentno je nositi bundu”.

Ova rečenica zapravo treba da bude implikacija:

”Ako se nosi bunda onda se učestvuje u uništavanju retkih životinja”.

Uloga logike je i da razjasni značenje rečenica.

Rečenice u prirodnom jeziku mogu biti **višesmislene** i **neprecizne**.

- ❑ **Višesmislena** rečenica je ona koja ima više značenja.
- ❑ **Neprecizna** ili **nejasna** rečenica je ona koja ima samo jedno značenje, ali, kada se razmatra kao izjava, ne može se napraviti jasna razlika između okolnosti pod kojima je ona tačna, a pod kojima nije.

Višesmislenost najčešće eliminišemo pitajući autora rečenice ili utvrđujući smisao iz konteksta.

Nejasnost se najčešće javlja zbog korišćenja **kvalitativnih opisa**, a može se ukloniti njihovom zamenom **kvantitativnim opisima**.

a) "Petar i Marko iz Novog Sada nam dolaze u posetu".

Ko je iz Novog Sada? Marko ili obojica?

To nije moguće utvrditi bez dodatnih informacija.

b) "Ja znam mnogo lepšu devojkicu od Ane".

Ovo može imati dva značenja:

"Ja znam mnogo lepšu devojkicu nego što Ana zna", i

"Ja znam mnogo lepšu devojkicu nego što je Ana".

a) "Dejan je visok".

Ovde ne znamo tačno šta znači "visok", pa ne možemo utvrditi da li je ovo tačno ili nije.

Preciznije bi bilo da se gornji kvalitativni opis zameni kvantitativnim: "Dejan je visok preko 2 metra".

b) "Ovaj računar je brz".

Značenje reči "brz" je nejasno – brz u poređenju sa čim?

Preciznija formulacija bi bila: "Ovaj računar izvodi 2 miliona instrukcija u sekundi".

- ❑ Negacija je jedini **unarni** veznik, a svi ostali veznici su **binarni**.
- ❑ Binarni veznici  $\wedge$ ,  $\vee$  i  $\Leftrightarrow$  su **simetrični**, pod čime podrazumevamo da  $p * q$  ima istu istinitosnu vrednost kao i  $q * p$ , gde je  $*$  bilo koji od veznika  $\wedge$ ,  $\vee$  i  $\Leftrightarrow$ .
- ❑ Veznik  $\Rightarrow$  nije simetričan:  $p \Rightarrow q$  i  $q \Rightarrow p$  imaju različite istinitosne vrednosti.



Cilj iskazne logike je da se upotrebom matematičke simbolike prevaziđu problemi koji mogu da nastanu

- ❑ zbog nemogućnosti da na zadovoljavajući način definišemo pojam iskaza;
- ❑ zbog nepreciznosti i višesmislenosti koje se mogu javiti ako se u logici koristi prirodni jezik.

To znači da složeni iskazi, u kojima se javlja više jednostavnijih iskaza i više veznika, treba da se formiraju prema jasno i precizno utvrđenim pravilima.

Pri utvrđivanju tih pravila najpre se određuje **jezik** koji čine

- ❑ simboli  $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$  kojima se označavaju iskazi.  
Kao što smo rekli, oni se zovu **iskazna slova**;
- ❑ simboli  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$  i  $\Leftrightarrow$  kojima se označavaju logički veznici.  
Sećamo se da se oni zovu **znaci logičkih operacija**;
- ❑ znaci  $($  i  $)$  (zagrade), koje nazivamo **pomoćni znaci**.

Za znak  $\neg$  kažemo da je **unaran**, a za ostale znake logičkih operacija da su **binarni** znaci.

Uz pomoć iskaznih slova, veznika i pomoćnih znaka mogu se obrazovati **izrazi**, pod čime podrazumevamo konačne nizove tih simbola.

Neke od tih izraza, koje smatramo pravilno formiranim, nazivamo iskaznim formulama.

Naime, **iskazne formule** definišu se induktivno, pomoću sledećih pravila:

1. Iskazna slova su iskazne formule.
2. Ako su  $A$  i  $B$  iskazne formule, onda su iskazne formule i izrazi  $\neg A$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \Rightarrow B)$ ,  $(A \Leftrightarrow B)$ .
3. Iskazne formule su samo oni izrazi koji se mogu formirati primenom pravila 1. i 2. konačan broj puta.

Na primer, izrazi

$$p, \quad \neg\neg r, \quad (p \wedge q), \quad (\neg p \Rightarrow q), \quad ((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge \neg p))$$

su iskazne formule, dok sledeći izrazi nisu iskazne formule:

$$(p \wedge), \quad (\Rightarrow p \Rightarrow).$$

Svaku podreč, odnosno podniz, iskazne formule koji je i sam iskazna formula nazivamo njenom **podformulom**.

Na primer,  $\neg r$  i  $(p \Rightarrow \neg q)$  su podformule iskazne formule

$$((p \wedge \neg r) \vee \neg(p \Rightarrow \neg q)).$$

# Konvencija o brisanju zagrada

Prema definiciji, izraz oblika  $A \Rightarrow B$ , gde su  $A$  i  $B$  formule, nije formula, jer nema spoljnih zagrada oko tog iskaza.

Međutim, mi uvodimo konvenciju o brisanju zagrada koja obezbeđuje da i takvi izrazi budu formule i olakšava nam rad sa formulama.

**Konvenciju o brisanju zagrada** čine sledeća pravila:

1. **Izostavljaju se spoljne zagrade**, kao na primer u izrazima

$$(p \wedge q), \quad ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$$

i slično.

2. **Uklanjanje zagrada u odnosu na asocijativnost u desno:** Ako su  $A_1, A_2, \dots, A_n$  iskazne formule, onda se umesto

$$(\dots ((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n$$

piše

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_{n-1} \wedge A_n$$

i slično za veznik  $\vee$ .

3. Uvodi se **dogovor o redosledu veznika**, prema kome su  $\wedge$  i  $\vee$  ispred  $\Rightarrow$  i  $\Leftrightarrow$ .

Na osnovu toga se veznici  $\wedge$  i  $\vee$  odnose na najmanju formulu koja ih okružuje, pa se, imajući to u vidu, određuju formule na koje se odnose veznici  $\Rightarrow$  i  $\Leftrightarrow$ .

Na primer, umesto  $p \Rightarrow (q \wedge r)$  pišemo  $p \Rightarrow q \wedge r$ , a umesto

$$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee r)$$

pišemo

$$p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg p \vee r.$$

Kaže se još i da veznici  $\Rightarrow$  i  $\Leftrightarrow$  "jače razdvajaju" od veznika  $\wedge$  i  $\vee$ .

Napomenimo i to da se definicija podformule odnosi samo na iskaznu formulu kod koje nisu uklonjene zagrade.

Na primer,  $p \Rightarrow q$  nije podformula formule  $p \Rightarrow q \wedge r$ .