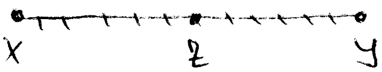
Конвексност скупа и функција и дефиниција глобалног и локалног оптимума

1



$z = \alpha \cdot x + (1-\alpha)y$ → скуп свих тачака овог облика се назива **дуж** у R^n

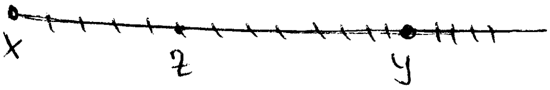
$\alpha \in [0,1]$

α – скалар

x, y – крајње тачке дужи

R^n → n-дим. простор

Свака тачка z из дужи xy се може приказати као: $z = x + \alpha(x-y)$ где је $x-y$ правац дужи



$z = x + \alpha y$ → скуп свих тачака овог облика се назива **полуправа** у R^n

$\alpha \geq 0$

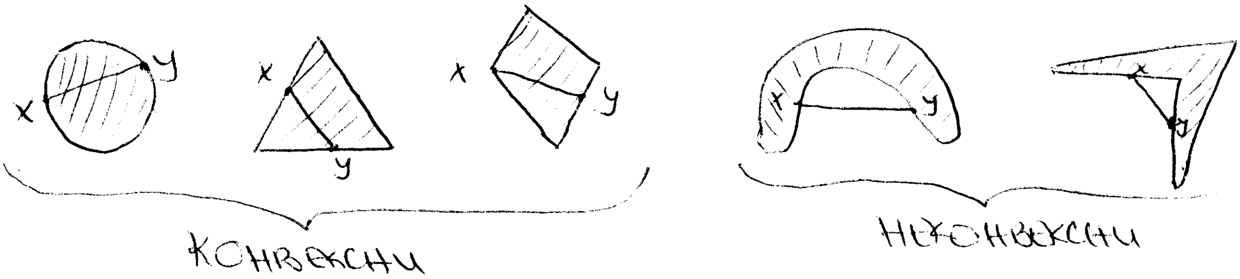
α – скалар

x – крајња тачка полуправе

y – правац полуправе

* Конвексни скуп

- Скуп $S \subseteq R^n$ је конвексан ако поред сваке две своје тачке x и y садржи и све тачке дужи xy. (Било које 2 тачке и дуж која их спаја да припадају том скупу)



- Пресек конвексних скупова је конвексан скуп.

- Конвексна комбинација. Тачка x у R^n назива се конвексном комбинацијом тачака $x_1, x_2, \dots x_m$ овог простора ако се може написати у облику

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \qquad \alpha_i \text{ – скалари} : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad , i = 1 \dots m$$

Пример: $x_1 = (0,1,1)$ $\quad x_2 = (1,3,2)$ $\quad x_3 = (4,1,1)$

$$x = \alpha_1(0,1,1) + \alpha_2(1,3,2) + \alpha_3(4,1,1) = (\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

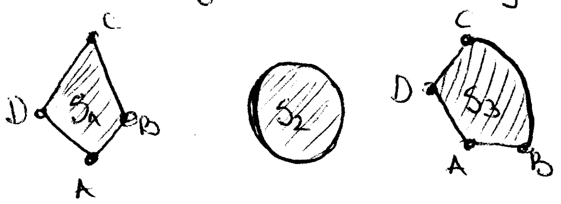
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$$

• Екстремна тачка конвексног скупа S је тачка $x \in S$ која не може бити написана у облику $x = \alpha y + (1-\alpha) z$

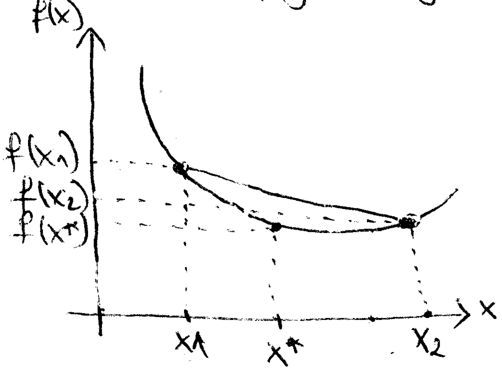
$y, z \in S$
$\alpha \in [0,1)$,
$x \neq y, z$

~ она не може припадати ни једној дужи чије се тачке налазе у S, а различите су од x

~ уколико су $\alpha = 1 \to x = y$ или $\alpha = 0 \to x = z$ $\Rightarrow$ да не важи услов $x \neq y, z$



* Конвексна функција

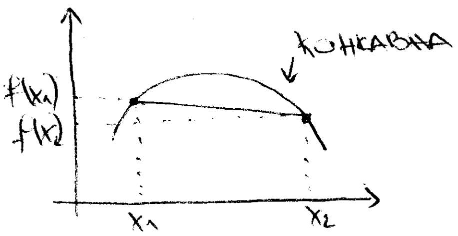


$f: R^n \to R$ конвексна на конвексном скупу C ако важи:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

$x_1, x_2 \in C$ за $\forall \alpha \in [0,1]$

Строга конвексност је када је $\alpha \in (0,1)$ тј. искључени су случајеви $x_1 = x_2, \alpha = 0, \alpha = 1$



Конкавна ако је $-f$ конвексна

* Глобални и локални оптимум.

• За тачку $x^* \in X$ кажемо да је глобални минимум функције f на скупу X, ако важи:

$$f(x^*) \le f(x) \quad \text{за све } x \in X,$$

тј. ако у њој функција f достиже своју минималну вредност на X.
Ако важи јачи услов

$$f(x^*) < f(x) \quad \text{за све } x \in X,\ x \neq x^*,$$

тада је x^* строги глобални минимум. Ако је f непрекидна, а скуп X затворен и ограничен, f достиже минималну вредност, тј. постоји (бар један) глобални минимум $x^* \in X$.

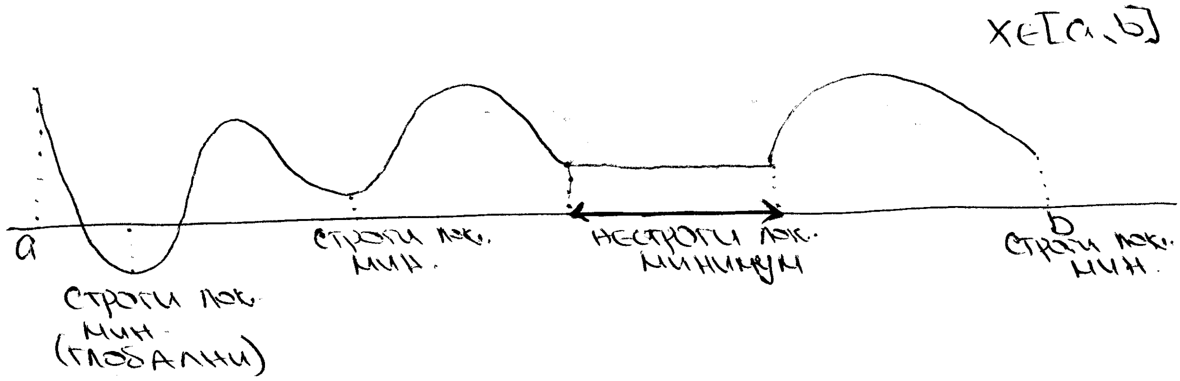
• За тачку $x^* \in X$ кажемо да је локални минимум функције f на скупу X, ако постоји $\delta > 0$ тако да је

$$f(x^*) \le f(x) \quad \text{за све } x \in X \text{ такве да је } \|x - x^*\| < \delta,$$

где је $\|x - x^*\| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2}$ растојање тачака x и x^*.
Ако постоји $\delta > 0$ тако да важи јачи услов

$$f(x^*) < f(x) \quad \text{за све } x \in X \text{ такве да је } \|x - x^*\| < \delta,\ x \neq x^*,$$

тачка x^* се назива строги локални минимум.



~ На сличан начин се уводи глобални и локални максимум

* Ово су [redacted]

Општи облик ЛП и основна својства

*Математички модел општег задатка ЛП

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}\max\\ \min\end{Bmatrix} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
&\text{п.о.} \\
&a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} b_1 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \qquad b_m \\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0
\end{aligned}\right] \Rightarrow
\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}\max\\ \min\end{Bmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
&\text{п.о.} \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \substack{<\\=\\>}\ b_i,\ i=1\dots m \\
&\underbrace{x_j \geq 0}_{\text{НЕНЕГАТИВАН!}},\ j=1\dots n
\end{aligned}$$

- Допустива област скупа ограничења : допустива област проблема ЛП, а свака тачка у њој је допустиво решење.
- Оно решење у коме ф-ја циља достиже свој максимум је оптимално решење.

- Матрица $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ - матрица ограничења

  b_i, $i=1\dots m$ - слободни члан i-тог ограничења

- Када су сва ограничења истог типа (у овом случају типа једначина) проблем ЛП се може приказати:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\max\\ \min\end{pmatrix} c^T x \\
&\text{p.o.} \\
&Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}\right\} \text{СТАНДАРДНИ ОБЛИК}$$

$c=(c_1 \dots c_n)$
$x=(x_1 \dots x_n)$
$b=(b_1 \dots b_m)$

- Симетрични облик : када су сва огр. неједначине истог типа

$$\begin{aligned}
&(\max)\ c^T x \\
&\text{p.o.} \\
&Ax \leq b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&(\min)\ c^T x \\
&\text{p.o.} \\
&Ax \geq b \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

*Својства

1. КОНАЧАН БРОЈ ТЕМЕНА

- АКО ЈЕ допустива ОБЛАСТ D НЕПРАЗАН СКУП, ТАДА D ПРЕДСТАВЉА n-ДИМЕНЗИОНАЛНИ КОНВЕКСНИ ПОЛИЕДАР, ПРИ ЧЕМУ
(а) ПОСТОЈИ БАР ЈЕДНО ТЕМЕ ОБЛАСТИ D, И
(б) БРОЈ ТЕМЕНА ОБЛАСТИ D ЈЕ КОНАЧАН

2. ЕГЗИСТЕНЦИЈА ОПТИМАЛНИХ ТЕМЕНА

- АКО ПРОБЛЕМ ИМА ОПТИМАЛНА РЕШЕЊА ТАДА ОНА ПРИПАДАЈУ ГРАНИЦИ ОБЛАСТИ D:
(а) ЈЕДИНСТВЕНО - ТЕМЕ ОБЛАСТИ D
(б) ВИШЕСТРУКО - НЕКА СТРАНА ОБЛАСТИ D КОЈА САДРЖИ БАР ЈЕДНО ТЕМЕ ОБЛАСТИ

3. КРИТЕРИЈУМ ОПТИМАЛНОСТИ ТЕМЕНА

- АКО ПРОБЛЕМ ИМА ОПТИМАЛНО РЕШЕЊЕ И ТЕМЕ x_0 ИЗ D ИСПУЊАВА УСЛОВ ДА НЕ ПОСТОЈИ ЊЕМУ СУСЕДНО ТЕМЕ У КОМЕ ЈЕ ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ ЦИЉА МАЊА/ВЕЋА ОД $f(x_0)$, ТАДА x_0 ПРЕДСТАВЉА ЈЕДНО ОПТИМАЛНО РЕШЕЊЕ

4. ЕГЗИСТЕНЦИЈА ОПТИМАЛНОГ РЕШЕЊА

(а) АКО ЈЕ ОБЛАСТ D НЕПРАЗНА И ОГРАНИЧЕНА, ТАДА ПРОБЛЕМ УВЕК ИМА ОПТИМАЛНО РЕШЕЊЕ
(б) АКО ЈЕ ОБЛАСТ D НЕПРАЗНА И НЕОГРАНИЧЕНА, ТАДА ПРОБЛЕМ У КОМЕ СЕ ВРШИ МАКС. (МИН.) ФУНКЦИЈЕ ЦИЉА ИМА ОПТИМАЛНО РЕШЕЊЕ ОНДА И САМО ОНДА АКО ЈЕ ОВА ФУНКЦИЈА ОГРАНИЧЕНА ОДОЗГО (ОДОЗДО)

→ КОМБИНАТОРНА ОПТИМИЗАЦИЈА - КАДА СЕ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦИЈЕ ТРАЖИ НА СКУПУ КОНАЧНО МНОГО ЕЛЕМЕНАТА

СТАНДАРДНИ ОБЛИК ЛП И ЊЕГОВА БАЗНА РЕШЕЊА

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} max \\ min \end{Bmatrix} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

п.о.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{Bmatrix} max \\ min \end{Bmatrix} c^T x \quad \text{п.о.} \quad Ax = b, \; x \geq 0$$

~ претпоставка: задовољена су и још 2 услова:

(1) $\forall b_i, i = 1, \ldots, m$ – ненегативни тј. $b \geq 0$

(2) $m < n$ и $rang A = m$ – све једначине система ограничења су линеарно независне

– било који задатак ЛП општег облика се може свести на стандардни са додатним условима

* Свођење на стандардни

~ Ако је неки слободни члан b_i негативан, тада се ограничење множи са -1, где $\geq$ прелази у $\leq$ и обрнуто

~ Уводе се изравнавајуће s_i: ако је $\leq$ онда $+s_i$
ако је $\geq$ онда $-s_i$

→ Ако $Ax = b$ нема решења, тада је допустива област празна

→ Ако је ранг матрице A $(r) = n$ (што се дешава када је $m \geq n$), тада је допустива област једночлан скуп (јединствено решење) или празан скуп (ако решење не задовољава услов природног ограничења)

* Базна решења

– посматрамо систем линеарних једначина (ограничења) $Ax = b$, при чему је задовољен услов $rang A = m < n$

• БАЗНО РЕШЕЊЕ – оно решење за које постоји нека $m \times n$ подматрица A_B матрице A која је регуларна ($\det A_B \neq 0$) и таква да је у овом решењу свака променљива чија се колона коефицијената не налази у A_B, једнака 0.

~ променљиве које одг. колонама подматрице A_B – базне променљиве, а преостале су небазне.

~ скуп свих базних променљивих – база, а A_B – матрица базе.

-СВАКО ОНО РЕШЕЊЕ СИСТЕМА КОЈЕ ИМА НАЈВИШЕ m ПРОМЕНЉИВИХ РАЗЛИЧИТИХ ОД 0

- БАЗНО ДОПУСТИВО РЕШЕЊЕ - АКО БАЗНО РЕШЕЊЕ ИСПУЊАВА И УСЛОВ НЕНЕГАТИВНОСТИ ; АКО ОНО НЕ ПОСТОЈИ, ТАДА ЈЕ ДОПУСТИВА ОБЛАСТ ПРАЗНА

- СУСЕДНА БАЗНА ДОПУСТИВА РЕШЕЊА - 2 БАЗНА ДОПУСТИВА РЕШЕЊА СУ СУСЕДНА АКО ИМ СЕ БАЗЕ РАЗЛИКУЈУ САМО У ЈЕДНОЈ ПРОМЕНЉИВОЈ

→ АЛГЕБАРСКА ИДЕНТИФИКАЦИЈА ТЕМЕНА - НЕКА ТАЧКА ПРЕДСТАВЉА ТЕМЕ ДОПУСТИВЕ ОБЛАСТИ СТАНДАРДНОГ ОБЛИКА АКО И САМО АКО ЈЕ ОНА ЊЕГОВО БАЗНО ДОПУСТИВО РЕШЕЊЕ

- ДЕГЕНЕРИСАНО БАЗНО ДОПУСТИВО РЕШЕЊЕ - АКО ЈЕ У НЕКОМ БАЗНОМ ДОПУСТИВОМ РЕШЕЊУ БАР ЈЕДНА ОД БАЗНИХ ПРОМЕНЉИВИХ ЈЕДНАКА НУЛИ

Основни кораци Симплекса и њене основне особине

*Кораци:

1. Почетно решење (иницијализација): почетно базно допустиво решење ($X_0 = (0,0,\dots,0,b_1,b_2,\dots,b_m)$); почетна база ($B_0 = B = (X_{n+1}, X_{n+2},\dots,X_{n+m})$) почетна вредност функције ($F_0 = 0$)
2. Итеративни корак ($k = 0,1,2,\dots$): налажење бољег суседног решења, провера оптималности (уколико је X_k оптимално, овде је крај)
3. суседно решење боље -> враћање на други корак

*Особине:

- креће из неког почетног решења
- обилази само темена (и то суседна)
- не узима у обзир број корака до оптималног решења
- коначан број итерација (коначан бр. темена)
- има оптимално решење
- експоненцијална (понаша се полиномијално)

Канонски облик и његова примена 5

$$\max f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

p.o.

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\
x_1, x_2, \dots, x_{m+n} &\geq 0
\end{aligned}\right\} (1)$$

~ претпоставимо да су сви b_i, $i=1\dots m$ ненегативни

→ (1) представља канонски облик проблема у односу на базу
$B = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$

→ канонски облик проблема у односу на неки скуп променљивих B, је екв. форма његовог стандардног облика у којој се свака базна промењива јавља у само једној једначини огр. са коефицијентом +1, а не јавља се у функцији циља

~ ако су сви чланови који су слободни ненегативни: допустива база

~ ако је симетричан облик: $\leq$ → изравнавајуће

~ $=$ или $\geq$ → вештачке

~ вредности базних промењивих = слободни чл. огр. канонског облика

~ вредност ф-је циља = слободни чл. ф-је у канонском облику

Тест оптималности допустивог базног решења

x_j^k, $j\in\{1,2\ldots n\}$ – небазна променљива решења X

Канонски облик: $\xrightarrow{\text{еквивалентан}}$ У k-тој итерацији:

$$\max f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$
р.о.
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

$$\max f(x) = c_1^k x_1^k + c_2^k x_2^k + \ldots + c_n^k x_n^k + F_k$$
р.о.
$$a_{11}^k x_1^k + a_{12}^k x_2^k + \ldots + a_{1n}^k x_n^k = b_1^k$$
$$a_{21}^k x_1^k + a_{22}^k x_2^k + \ldots + a_{2n}^k x_n^k = b_2^k$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}^k x_1^k + a_{m2}^k x_2^k + \ldots + a_{mn}^k x_n^k = b_m^k$$
$$x_1^k, x_2^k, \ldots x_n^k \geq 0$$

~имају исту допустиву област на којој им се поклапају функције циља, важи:

• Ако би x_j^k у неком допустивом решењу проблема било ε, $\varepsilon>0$, док све остале небазне променљиве остају 0, тада би нова вредност функције циља била: $F_k + c_j^k\cdot\varepsilon$. Повећање x_j^k довело би до повећања функције циља у случају $c_j^k>0$, и смањења у случају $c_j^k<0$, а не би утицало на вредност у случају $c_j^k=0$.

***Критеријум оптималности:**

• Ако је $c_j^k \leq 0$ за $\forall\, j=1\ldots n$, тада је X_k оптимално решење проблема а F_k максимална вредност функције циља.

~X_k → оптимално: ако се никаквим повећањем вредности небазних променљивих овог решења не може повећати вредност F_k функције циља.

~X_k → није оптимално: прелазак на суседну тачку у допустивом скупу и логиком у суседну базу би требало да уђе она променљива код које је c_j^k максимално.

***Критеријум уласка променљиве у базу:**

• У базу B_{k+1} улази она променљива x_s^k, $s\in\{1\ldots n\}$ за чији индекс s важи:
$$c_s^k = \max_{j\in\{1\ldots n\}}\{c_j^k : c_j^k>0\}$$

Одређивање новог канонског облика тј. налажење бољег решења

• Након што је утврђено да решење није оптимално, потребно је утврдити која пром. треба да уђе у базу, а која да изађе и након тога сформирати нови канонски облик.

***Излазак из базе:**

- За променљиву x_s^k која улази у базу B_{k+1} треба одредити колико се њена вредност може највише повећати у допустивом решењу

- У сваком решењу X променљиве x_s^k и x_{n+i}^k, $i=1\dots m$ треба да задовоље систем:

$$
\begin{aligned}
a_{1s}^k x_s^k + x_{n+1}^k &= b_1^k \\
a_{2s}^k x_s^k + x_{n+2}^k &= b_2^k \\
&\vdots \\
a_{ms}^k x_s^k + x_{n+m}^k &= b_m^k \\
x_s^k, x_{n+1}^k \dots x_{n+m}^k &\geq 0
\end{aligned}
$$

~ Ако је: $a_{is}^k > 0$, тада се x_s^k може повећати највише до $\frac{b_i^k}{a_{is}^k}$, при чему се x_s^k смањује до 0. Повећањем преко те вредности x_{n+i}^k постаје негативно, па би X било недопустиво.

$a_{is}^k = 0$, тада повећање x_s^k не утиче на x_{n+i}^k и он је увек једнак $x_{n+i}^k = b_i^k$

$a_{is}^k < 0$, тада се x_s^k може неограничено повећавати, а да при томе расте неограничено и x_{n+i}^k и остаје увек ненегативно.

→ Решење система постоји само онда ако вредност x_s^k не прелази горњу границу дефинисану са:

$$d_s^k = \min_{i \in \{1..n\}} \left\{ \frac{b_i^k}{a_{is}^k} : a_{is}^k > 0 \right\}$$

~ Решење X у коме је $x_s^k = d_s^k$ представља базно допустиво, које је суседно са X_k, јер би његова база садржала x_s^k и све променљиве из B_k, сем једне од оних које су постале 0.

~ Вредност функције би била: $F_k + c_s^k \cdot d_s^k$

• Критеријум изласка променљиве из базе

Из базе B_{k+1} излази она променљива x^k_{n+r}, $r \in \{1,2,\dots,m\}$, за чији индекс r важи: $\frac{b_r^k}{a_{rs}^k} = \min_{i\in\{1..n\}} \left\{ \frac{b_i^k}{a_{is}^k} : a_{is}^k > 0 \right\}$

* Нови канонски облик:

- применом једног корака Гаус-Жордановe методе елиминације
- r-ту једначину у систему ограничења: $a_{11}^k x_1^k + \dots + a_{1n}^k x_n^k + x_{n+1}^k = b_1$

$a_{m1}^k x_1^k + \dots + a_{mn}^k x_n^k + x_{n+m}^k = b_m$

треба решити по x_s^k, чиме се x_s^k изражава преко нових небазних променљивих, па се на осн. тога елиминише из свих осталих једн. и функције циља: $\max f(x) = c_{11}^k x_1^k + c_{12}^k x_2^k + \dots + c_n^k x_n^k + F_k$

- оваква трансформација се може добити:

(a) множењем (дељењем) i-те једначине са ненултом константом $i \in \{1,2,\dots,m\}$

(б) сабирањем i-те једначине са j-том $i,j \in \{1\dots m\}$, $i \neq j$

• Добијање канонског облика у односу на базу B_{k+1}

(1) r-то ограничење се дели са a_{rs}^k

(2) Ако је $a_{is}^k \neq 0$, тада се r-то (трансформисано), множи са $-a_{is}^k$ и додаје i-том ограничењу за свако $i \in \{1\dots m\}$, $i \neq r$

(3) Ако је $c_s^k \neq 0$, тада се r-то (трансформисано), множи са $-c_s^k$, па се његова лева стр. додаје функцији циља, а десна одузима

~ добијени канонски облик:

$$\begin{cases} \max f(x) = c_1^{k+1} x_1^{k+1} + \dots + c_n^{k+1} x_n^{k+1} + F_{k+1} \\ \text{p.o.} \\ a_{11}^{k+1} x_1^{k+1} + \dots + a_{1n}^{k+1} x_n^{k+1} + x_{n+1}^{k+1} = b_1^{k+1} \\ a_{m1}^{k+1} x_1^{k+1} + \dots + a_{mn}^{k+1} x_n^{k+1} + x_{n+m}^{k+1} = b_m^{k+1} \\ x_1^{k+1} \geq 0, \; x_2^{k+1} \geq 0 \dots x_{n+m}^{k+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$F_{k+1} = F_k + c_s^k \cdot \frac{b_r^k}{a_{rs}^k}$$

$$b_i^{k+1} = \begin{cases} b_i - \frac{b_r^k}{a_{rs}^k} \cdot a_{is}^k & i \in \{1..m\},\ i \neq r \\ \frac{b_r^k}{a_{rs}^k} & \text{, за } i = r \end{cases}$$

$b_i^{k+1} \geq 0$ за $\forall\, i \in \{1..m\}$

* Проширени критеријум уласка у базу.

• У базу B_{k+1} улази она променљива x_s^k, $s \in \{1,2,\dots,n\}$, за чији индекс s важи

$$c_s^k \cdot d_s^k = \max_{j\in\{1..n\}} \{ c_j^k \cdot d_j^k : c_j^k > 0 \},$$

где је $d_j^k = \min_{i\in\{1..m\}} \left\{ \frac{b_i^k}{a_{ij}^k} : a_{ij}^k > 0 \right\}$

Одређивање почетног канонског облика и одг. базног решења

$\max f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ (max) $c^T x$

p.o. p.o

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$ $Ax_N + x_B = b$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$ $x_B \geq 0, x_N \geq 0$ $\forall b_i \geq 0$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

$c = (c_1 \dots c_n)$

$x_N = (x_1 \dots x_n)$

$x_B = (x_{n+1} \dots x_{n+m})$

$\downarrow$

КАНОНСКИ ОБЛИК:

→ базна промењива: само у једној једначини ограничења ~~у функцији~~ циља коефицијент +1, не јавља се у функцији циља

→ Ако су сви $b_i \geq 0$ - база је допустива

→ Ако је проблем у симетричном облику: изравнавајуће

• Почетно базно допустиво решење X_0 једнако је базном решењу система једначина ограничења које одговара бази B почетног канонског облика, док је $F_0 = 0$ тј.

- почетно базно допустиво решење: $X_0 = (0, 0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$
- почетна база: $B_0 = B = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$
- почетна вредност функције циља: $F_0 = 0$

Могући исходи симплекса: јединствено оптимално решење и неограничена функција циља

* Неограничена функција циља:

• Ако за неку небазну променљиву x_s^k важи да је $c_s^k > 0$ и $a_{is}^k \le 0$, за свако $i=1,\dots,m$, тада функција циља неограничено расте дуж неограничене ивице допустиве области са крајњом тачком у X_k и правцем једнаким p_s^k, тј. у свим оним тачкама X облика

$$X = X_k + \alpha p_s^k$$

)

При неограниченом повећању ненегативног параметра α. У том случају проблем нема решења, а симплекс стаје.

Пр. $\max f(x) = 5x_1 + 2x_2$

p.o.

$p_1: \; x_1 \ge 6$

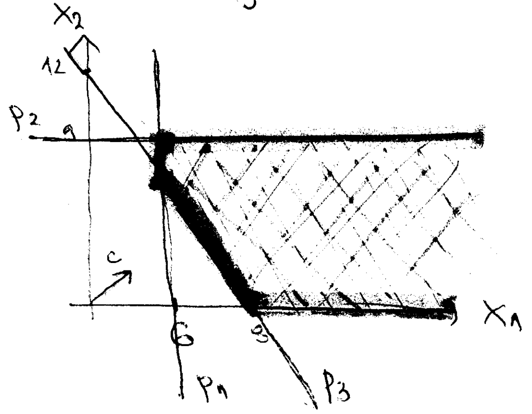
$p_2: \; 2x_2 \le 18$

$p_3: \; 3x_1 + 2x_2 \ge 24$

$p_4: \; x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0$

$3x_1 + 2x_2 = 24$

x_1	0	8
x_2	12	0



* Јединствено оптимално решење:

• Нека је симплекс метода у последњој k-тој итерацији дошла до неког базног допустивог решења X_k са максималном вредношћу F_k функције циља тј. $c_j^k \le 0$, за све $j = 1 \dots n$.

~ Ако је за свако $s \in \{1 \dots n\}$, $c_s^k < 0$ тада је дато оптимално решење уједно и једино тј. јединствено.

$\max f(x) = 5x_1 + 2x_2$

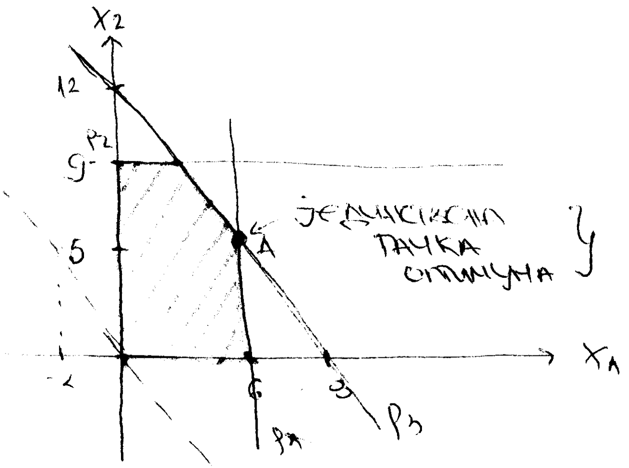
$p_1: \; x_1 \ge 6$

$p_2: \; 2x_2 \le 18$

$p_3: \; 3x_1 + 2x_2 \le 24$

$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0$

$5x_1 + 2x_2 = 0 \quad x_1 = -2, \; x_2 = 5$



$x_1 = 6$

$3x_1 + 2x_2 = 24$

$x_1 = 6$

$x_2 =$

$A(6,3)$

Могући исходи симплекса: вишеструко оптимално решење и празна допустива област

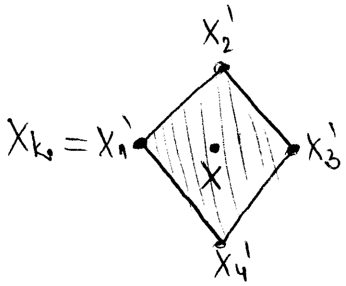
• Нека је симплекс метода у својој последњој k-тој итерацији дошла до неког базног допустивог решења X_k, са максималном вредношћу F_k функције циља тј. $c_j^k \le 0$, $j=1\ldots n$.

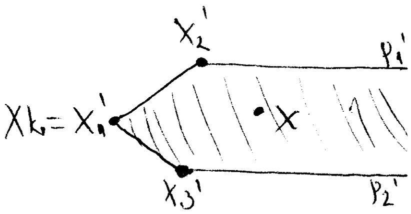
~ Ако је за бар неко $s\in\{1,\ldots,n\} \rightarrow c_s^k=0$, тада никакво повећање вредности небазне променљиве x_s^k (при чему су све остале небазне променљиве једнаке нули), не би променило вредност функције циља (остала би F_k). ⇒ осим X_k, постоји још оптималних решења која чине једну страну допустиве области. Та страна се може приказати: – за $\forall s\in\{1..n\}$ за које $c_s^k=0$ $\underline{\text{ивица}}$ са крајњом тачком у X_k и правцем p_s^k $(X=X_k+\alpha p_s^k)$ представља ивицу оптималне стране. Ако је ивица ограничена, може се доћи до свих темена оптималне стране.

~ Обележимо: $X_1', X_2', \ldots, X_i'$ -> сва темена оптималне стране
$p_1', p_2', \ldots, p_i'$ -> сви добијени правци неограничених ивица (ако постоје)

-> X се може приказати:
$$X=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i' + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j p_j' \qquad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\ \lambda_i\ge 0,\ i=1..m$$
$$\alpha_j\ge 0,\ j=1\ldots n$$

*када је страна ограничена: $X=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i'$ $\quad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, $\lambda_i\ge 0$, $i=1..m$



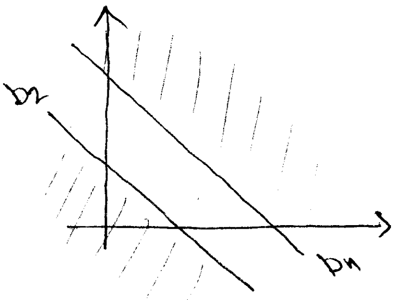


↑

Вишеструко оптимално решење.

*. Празна допустива област.

• У случају када стандардни облик проблема ЛП није истовремено и канонски (методом М треба увести вештачку у базу), може се десити да је допустива област празна. Тада се симплекс зауставља у некој итерацији k, у којој су сви $g_j^k \le 0$ $j=1..n$, а база B_k садржи вештачку променљиву која је у базном допустивом решењу X_k већа од нуле.



$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \end{aligned}\right\} \text{ немају заједничку област}$$

Коначност и рачунска сложеност симплекса

*Коначност

→ Ако за свако базно допустиво решење x_k, $k=0,1,\dots$, генерисано током примене симплекса, важи да је оно недегенерисано тј. $b_i^k > 0$, $i=1,2\dots m$, тада се вредност ф-је циља строго повећава у свакој итерацији, па зато сва решења морају бити различита

~ укупан бр. базних допустивих решења је коначан ⇒ Симплекс ће кроз коначно много итерација доћи до оптималног решења или закључка да проблем нема решења (неограничена ф-је циља или празна допустива област)

→ Ако је симплекс примењен на дегенерисани проблем, може се десити да метода у следећих неколико итерација, и поред тога што генерише нове базе, све време остане у овом решењу

~ најгори случај је кад се може „заглавити" у дегенерисаном темену, што онемогућава завршетак методе – циклирање (ретко се појављује у пракси)

~ развијен је читав низ техника за отклањање циклирања, а једна од њих је тзв. Блендово правило → ако су све променљиве уређене у низ $x_1, x_2, \dots$, тада у свакој итерацији у базу улази прва небазна променљива x_s^k из овог низа за коју је $c_s^k > 0$, а из базе излази прва базна променљива x_{n+r}^k из овог низа за коју је $b_r^s / a_{rs}^k = \min\{b_i^k / a_{is}^k : a_{is}^k > 0\}$ → довољно је користити га само у дегенерисаним теменима

*Рачунска сложеност {алгоритма}

→ укупан број елементарних корака које треба реализовати током овог алгоритма да би се дошло до решења проблема, а бр. корака зависи од обима улазних података проблема тј. дужине/димензије проблема

~ код Симплекса: ел. корак – нека алгебарска операција над два реална броја (+, −, *, ...)

Дужина проблема – бр. битова потребних за памћење свих његових улазних нум. података у бинарном запису (коефиц. матрице A и вектора b и c)

→ Ако за сваки низ улазних података проблема произвољне дужине L и за неки алгоритам који га решава, важи да је

Укупан бр. ел. корака $\leq Cf(L)$ реална функција

позитивна константа

Тада се каже да алг. има рачунску сложеност $O(f(L))$

~ Ако $f(L)$ представља полином по L - полиномијални алгоритам; у супротном је експоненцијалан

→ Код Симплекса примењеног на проблем ЛП са m огр. и n пром., може се лако доказати да свака итерација захтева $O(mn)$ аритм. операција, пошто ук. бр. базних решења не прелази $\binom{n}{m}$, тада ук. бр. итерација (+ процедуре против циклирања) такође не може да пређе овај број → горња граница рачунске сложености Симплекса је $O(mn\binom{n}{m})$ - експоненцијална сложеност

- веома успешна метода приликом решавања практичних проблема, чему је посебно допринео развој ефикасних комп. имплементација методе

- пол. 90-их - развој унутрашњих метода које имају полиномијалну сложеност

Структура математичких модела и њихова веза са реалним системом

→ Управљачке одлуке у реалним системима се увек доносе у односу на неки постављени критеријум и уз поштовање ограничавајућих фактора који у систему постоје

→ Општи облик мат. модела неког реалног проблема се састоји из:

- функције циља: њоме се моделира критеријум управљања (одлучивања)
- ограничења: моделирају огр. факторе система, односно простор у коме се могу тражити решења проблема

→ Мат. модел ЛП – мат. запис реалног проблема у коме су функција циља и ограничења представљени линеарним функцијама

<u>Реални систем</u>		<u>Математички модел</u>
Управљачке одлуке	→	управљачке променљиве
Критеријум управљања	→	критеријумска функција
Циљ	→	функција циља
Ограничавајући фактори	→	скуп ограничења тј. допустиви скуп ↓
Оптималне управљачке одлуке	→	оптимално решење

Најбоље могуће у датим условима

* Критеријум: приход; циљ: макс. прихода!

* природно ограничење: $x \neq -$; $\underline{x \geq 0}$

* мат. модел = слика реалног решења

п.о. → при ограничењима!

Општи модел:

$$\left\{\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\right\} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

п.о.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \left\{\begin{matrix}\leq\\ =\\ \geq\end{matrix}\right\} b_1$$ ← слободни чланови

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \left\{\begin{matrix}\leq\\ =\\ \geq\end{matrix}\right\} b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \left\{\begin{matrix}\leq\\ =\\ \geq\end{matrix}\right\} b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \dots x_n \geq 0$$

Скуп ограничења

x_j – управљачка пром. $j = 1, \dots, n$

a_{ij}, c_j, b_i – параметри модела који су задати, $i = 1, \dots, m$

c → коефицијент уз пром. у ф-ји циља

n → бр. променљивих

m → бр. ограничења

a → коефицијент уз пром. у ограничењима

Сажет облик:

$$\left\{\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\right\} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \left\{\begin{matrix}\leq\\ =\\ \geq\end{matrix}\right\} b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Матрични:

$$\left\{\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\right\} f(x) = c^T x$$

п.о.

$$Ax \left\{\begin{matrix}\leq\\ =\\ \geq\end{matrix}\right\} b$$

$$x \geq 0$$

*КОНСТРУИСАЊЕ МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА:

→ КОРЕКТНО МОДЕЛИРАЊЕ ПОСТИЋИ: ДА МОДЕЛ БУДЕ ВАЛИДНА ПРЕДСТАВА ПРОБЛЕМА, ДА ГА ЈЕ МОГУЋЕ РЕШИТИ, ДА СЕ МОДЕЛИРА УНУТАР ТРОШКОВНИХ И ВРЕМЕНСКИХ ОГРАНИЧЕЊА И ДА СЕ МОЖЕ ЕФИКАСНО ПРИМЕЊИВАТИ

→ ФАЗЕ:

1. ДЕФИНИЦИЈА ЦИЉЕВА – УТВРДИТИ ПРОБЛЕМ КОЈИ ЖЕЛИМО РЕШИТИ
2. ПЛАНИРАЊЕ ИСТРАЖИВАЊА – ВРЕМЕНСКИ ПЛАН, ПЛАНИРАЊЕ КАДРОВА И ПЛАН ТРОШКОВА; РЕЗУЛТАТ: ПРУЖИТИ ПОДАТКЕ О НЕОПХОДНИМ РЕСУРСИМА И ВРЕМЕНУ ЗА ПРОЈЕКАТ МОДЕЛИРАЊА
3. ФОРМУЛАЦИЈА ПРОБЛЕМА – ОДРЕЂИВАЊЕ ПОДАТАКА И СМЕРНИЦА ЗА РАД; 1 - ДА ЛИ ЈЕ ПОТРЕБНО ДЕКОМПОНОВАТИ ПРОБЛ. НА МАЊЕ; 2 - УТВРЂИВАЊЕ ДЕТАЉА; 3 - КРИТЕРИЈУМИ НА ОСН. КОЈИХ ЋЕ СЕ МЕРИТИ ЕФЕКТИВНОСТ РЕШЕЊА
4. ФОРМИРАЊЕ МОДЕЛА – 3 КЛАСЕ: ЛИНЕАРНО, НЕЛИНЕАРНО, ЦЕЛОБРОЈНО ПРОГРАМИРАЊЕ
5. ИЗБОР МЕТОДЕ РЕШАВАЊА – ОДРЕЂИВАЊЕ НУМЕРИЧКОГ/АНАЛИТИЧКОГ НАЧИНА РЕШАВАЊА МОДЕЛА
6. ПРОГРАМИРАЊЕ И ТЕСТИРАЊЕ – ФОРМАЛНА ВЕРИФИКАЦИЈА ИСПРАВНОГ ПРОГРАМА MS Office, MS Project
7. ПРИКУПЉАЊЕ ПОДАТАКА – ЗА ТЕСТИРАЊЕ ПРОГРАМА И ПРАКТИЧНУ ПРИМЕНУ
8. ВАЛИДАЦИЈА – ПРОВЕРАВАЊЕ СЛАГАЊА РЕЗУЛТАТА СА РЕАЛНИМ СИСТЕМОМ; КОНЗИСТЕНТНОСТ, ОСЕТЉИВОСТ И ПРИМЕНЉИВОСТ
9. ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА – ДОКУМЕНТАЦИЈА, УВОЂЕЊЕ У ПРИМЕНУ
   ↳ ЗБОГ ОДРЖАВАЊА ДАЉЕ

ПЛАНИРАЊЕ ИСХРАНЕ

• Задовољити потребе исхране код људи, уз минимизацију трошкова. Главни циљ јесте да се издвојена средства за исхрану утроше на најбољи начин.

$$\boxed{\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j} \rightarrow \text{мин. трошкова}$$

p.o.

$$\underline{b_i} \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \overline{b_i} \quad , i = 1 \ldots m \rightarrow$$ огр. везано за мин./макс. кол. хранљивог састојка

$$\underline{d_j} \le x_j \le \overline{d_j} \quad , j = 1 \ldots n \rightarrow$$ огр. везано за количину производа

$$x_j \ge 0 \quad , j = 1 \ldots n \rightarrow$$ природно ограничење

$c_j \rightarrow$ цена j-тог производа

$x_j \rightarrow$ кол. j-тог производа

$n \rightarrow$ бр. врсти производа

$\underline{b_i}, \overline{b_i} \rightarrow$ доња/горња граница кол. хранљивог састојка (i-тог)

$a_{ij} \rightarrow$ кол. i-тог хран. састојка у j-тој врсти производа

$m \rightarrow$ бр. врсти хран. састојака

$\underline{d_j}, \overline{d_j} \rightarrow$ доња/горња граница кол. j-тог производа

$\boxed{\text{Број ограничења:}}$ $m+m+n+n+n$

Подела обрадиве површине на културе

- На укупној површини треба засејати одређени број култура на одређеној површини да би се остварила максимална добит.

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j$$ -> макс добити

р.о.

$\underline{g_j} \le x_j \le \overline{g_j}$, $j=1 \ldots n$ -> огр. везано за мин./макс. кол. култура

$\sum_{j=1}^{n} x_j \le P$ ⟶ огр. везано за ук. површину којом располажемо

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i=1 \ldots m$ -> огр. везано за број радника

$\sum_{j=1}^{n} r_{ilj} \cdot x_j \le g_{il}$, $i=1 \ldots m$, $l=1 \ldots o$ -> огр. везано за капацитет машина

g_j -> принос/приход j-те културе

x_j -> површина засејана j-том културом

n -> бр. потенцијалних култура

$\underline{g_j}, \overline{g_j}$ -> доња/горња граница површине коју треба засејати j-том културом

P -> укупна површина којом располажемо

a_{ij} -> бр. радника потребних у i-том периоду за j-ту културу

b_i -> укупан бр. радника у i-том периоду

m -> бр. периода

r_{ilj} -> потребно ангажовање l-тог средства у i-том периоду за j-ту културу

o -> бр. врста машина

g_{il} -> капацитет l-тог средства механизације у i-том периоду

Број ограничења: $n+n+1+m+m+o$

Оптималан план сетве на дислоцираним њивама

- Обрадива површина је на више дислоцираних њива које су различитог квалитета и доносе различите приносе. Циљ је макс. добит.

$$\boxed{\max f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} g_{jk} x_{jk}} \rightarrow$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} x_{jk}\right) \le b_i \quad , i=1\ldots m$$ → огр. везано за број радника

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ilj} \left(\sum_{k=1}^{s} x_{jk}\right) \le g_{il} \quad , i=1\ldots m, \; l=1\ldots o$$ → огр. везано за капацитет машина

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jk} \le P \quad , k=1\ldots s$$ → огр. везано за ук. расположиву површину

$$\underline{g_j} \le \sum_{k=1}^{s} x_{jk} \le \overline{g_j} \quad , j=1\ldots n$$ → огр. везано за мин./макс. кол. култура

$$u_{jk} \le x_{jk} \le v_{jk} \quad j=1\ldots n, \; k=1\ldots s$$ → огр. везано за мин./макс. површину на одр. њиви коју треба засејати одр. културом

g_{jk} → добит од j-те културе са k-те њиве

x_{jk} → површина коју треба засејати j-том културом на k-тој њиви

n → бр. врсти култура (s → бр. врсти њива)

a_{ij} → бр. радника потребних у i-том периоду за j-ту културу

b_i → ук. бр. радника у i-том периоду

m → бр. периода

r_{ilj} → потребно ангажовање l-тог средства у i-том периоду за j-ту културу

o → бр. врсти машина

g_{il} → капацитет l-тог средства у i-том периоду

P → ук. расположива површина

$\underline{g_j}$, $\overline{g_j}$ → доња/горња граница површине на целој њиви коју треба засејати j-том културом

u_{jk}, v_{jk} → доња/горња граница површине на k-тој њиви коју треба засејати j-том културом

$\boxed{\text{Број ограничења: } m + m\cdot o + s + \cancel{s}^{\,n} + \cancel{s}^{\,n} + n + s}$

Оптимизација производње крмних смеша

• Минимизација укупних трошкова производње крмних смеша, уз поштовање услова датих за одређену количину протеина, масти, енергије, витамина...

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{k=1}^{s} q_k x_{jk} \right)$$ → [redacted]

р.о.

$\underline{b_{ik}} \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jk} \le \overline{b_{ik}}$, $i=1\ldots m$, $k=1\ldots s$ → огр. везано за учешће хран. мат. у смеши

! • $\sum_{j=1}^{n} x_{jk} = 1$, $k=1\ldots s$ → огр. везано за процентуално учешће хранива у смеши

$\sum_{k=1}^{s} q_k x_{jk} \le z_j$, $j=1\ldots$ → огр. везано за залихе хранива

$\underline{v_{jk}} \le x_{jk} \le \overline{v_{jk}}$, $j=1\ldots n$, $k=1\ldots s$ → огр. везано за мин./макс. кол. хранива у смеши

c_j → цена j-тог хранива n → бр. врста хранива

q_k → планирана производња k-те смеше s → бр. врста смеша

x_{jk} → проценат j-тог хранива у јединици k-те смеше

$\underline{b_{ik}}, \overline{b_{ik}}$ → доња/горња граница учешћа i-тог хранљивог састојка у

m → бр. врста хранљивих састојака

a_{ij} → кол. i-тог хранљивог састојка у j-том хранива

q_k → планирана производња k-те смеше

z_j → залихе j-тог хранива

$\underline{v_{jk}}, \overline{v_{jk}}$ → мин./макс. процентуално учешће j-тог хранива у k-тој смеши

$\boxed{\text{Број ограничења:}}$ $m \times s + m \times s + s + n + n \times s$

Избор оптималног асортимана

- Одабир асортимана који ће обезбедити макс. укупну добит од целокупне производње.

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ → [redacted]

p.o.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = 1 \dots m$ → огр. везано за капацитет машина

$\sum_{j=1}^{n} d_{rj} x_j \le D_r$, $r = 1 \dots R$ → огр. везано за расположиво време радника

$\sum_{j=1}^{n} s_{kj} x_j \le S_k$, $k = 1 \dots K$ → огр. везано за расположиву сировину

$\underline{g_j} \le x_j \le \overline{g_j}$, $j = 1 \dots n$ → огр. везано за кол. производа

c_j → продајна цена j-тог производа (јединична)

x_j → кол. j-те врсте производа

n → бр. врсти производа m → бр. врсти машина

a_{ij} → време потребно i-тој машини за производњу ком. j-тог производа

b_i → укупни капацитет i-те машине

d_{rj} → време потребно r-том раднику за производњу ком. j-тог производа

R → бр. категорија радника

D_r → расположиво укупно време радника r-те категорије

S_{kj} → кол. k-те сировине потребне за израду ком. j-тог производа

S_k → расположива количина k-те врсте материјала

K → бр. врсти материјала

$\underline{g_j}$, $\overline{g_j}$ → доња и горња граница количине производа (j-тог)

Оптимизација утрошка материјала

- Такво искоришћење материјала да губитак буде минималан тј. минимизација отпадака.

$$\boxed{\min f(x) = \sum_{v=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} g_v x_{jv}} \rightarrow \text{мин. отпадака}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jv} \leq z_v \quad , v=1 \ldots s \rightarrow \text{огр. везано за залихе материјала}$$

$$\sum_{v=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_{ijv} x_{jv} = b_i \quad , i=1 \ldots m \rightarrow \text{огр. везано за обезбеђивање укупне количине делова}$$

$$0 \leq x_{jv} \leq e_{jv} \quad , \begin{matrix} j=1 \ldots n \\ v=1 \ldots s \end{matrix} \rightarrow \text{огр. везано за макс. кол. материјала}$$

$g_v \rightarrow$ кол. отпадака мат. v-те димензије када је искројен по j-тој варијанти

$x_{jv} \rightarrow$ кол. мат. који ће бити искројен по j-тој варијанти v-те димензије

$s \rightarrow$ бр. врста мат. од кот се секу делови (димензије)

$n \rightarrow$ бр. начина кројења материјала (варијанте)

$m \rightarrow$ бр. врста делова који се морају добити

$z_v \rightarrow$ ук. кол. залиха v-те врсте материјала од којих се секу делови

$a_{ijv} \rightarrow$ бр. делова i-тог типа који се добијају од мат. v-те димензије када је искројен по j-тој варијанти

$b_i \rightarrow$ ук. кол. делова i-тог типа који треба обезбедити кројењем

$e_{jv} \rightarrow$ макс. кол. материјала v-те димензије која може бити искројена по j-тој варијанти

$\boxed{\text{Број ограничења}}$: $s+m+(n \cdot s) \cdot 2$

Управљање залихама

• Планирање производње у зависности од потреба тржишта, како би трошкови складиштења били минимални.

$$\boxed{\min f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} c_{jk}\left[\sum_{v=1}^{k}(x_{jv}-p_{jv})\right]}$$ → мин. трошкови складиштења

р.о.

$$\sum_{v=1}^{k}(x_{jv}-p_{jv}) \geq 0 \qquad j=1\ldots n,\; k=1\ldots s$$ → огр. везано за немогућност постојања негативних залиха

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jk} \leq b_{ik} \qquad i=1\ldots m,\; k=1\ldots s$$ → огр. везано за капацитет машине

$$x_{jk} \geq 0 \qquad j=1\ldots n,\; k=1\ldots s$$ → природно ограничење

c_{jk} → трошкови складиштења j-тог производа у k-том временском периоду

n → бр. врсти производа s → бр. једнаких временских интервала (укупни)

x_{jv} → кол. j-тог производа у v-том вр. периоду

p_{jv} → потражња за j-тим производом у v-том вр. периоду

k → тренутни период који посматрамо

$(x_{jv}-p_{jv})$ → оно што складиштимо

a_{ij} → време потребно i-тој машини за производњу j-тог производа

m → бр. врсти машина

x_{jk} → кол. j-тог производа која треба да се произведе у k-том вр. периоду

b_{ik} → капацитет машине i-те у k-том вр. периоду

Број ограничења: $n+s+m+s+\overset{\text{природно}}{n+s}$

• Удруживање неколико предузећа и усклађивање програма производње n артикала ради остваривања максималне добити.

$$\boxed{\max f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk} \cdot x_{jk}} \longrightarrow \text{макс. добити}$$

р.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{jk} \le a_{ik} \quad , \; i=1\ldots m, \; k=1\ldots p \longrightarrow$$ огр. везано за расположивост капацитета

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} b_{jkv} x_{jk} \le b_v \quad , \; v=1\ldots s \longrightarrow$$ огр. везано за ук. расположиву кол. материјала

$$\sum_{k=1}^{p} x_{jk} \le c_j \quad , \; j=1\ldots n \longrightarrow$$ тржишно ограничење

$$\forall x_{jk} \ge 0 \quad , \; j=1\ldots n, \; k=1\ldots p \longrightarrow$$ природно ограничење

c_{jk} → продајна цена j-тог производа у k-том предузећу
x_{jk} → кол. j-тог производа у k-том предузећу
n → бр. врсти производа m → бр. врсти машина
p → бр. предузећа
a_{ijk} → потребно време i-тој машини за израду j-тог производа у k-том предузећу
a_{ik} → расположиви капацитет i-те машине у k-том предузећу
b_{jkv} → кол. v-тог материјала потребног за израду j-тог производа у k-том предузећу s → бр. врсти материјала
b_v → расположива количина v-тог материјала
c_j → укупна количина j-тог производа која се може продати на тржишту

Број ограничења: $m+p+s+n+n+p$ → природна

Оптимално проширење капацитета

• У случају када радна снага, сировине и материјал нису ограничени може се појавити оптимално искоришћење капацитета машина. Поред ограничења инвестиционих средстава, може се појавити и фактор ограничења простора. Може се увести известан број машина за рад, које су идентичне или сличне са постојећим машинама.

$$\boxed{\max f(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} g_i y_i} \rightarrow \text{макс. добити}$$

р.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + y_i \cdot z_i \quad i=1\ldots m \rightarrow$$ огр. везано за капацитет машине

$$\sum_{i=1}^{m} \check{z}_i \cdot y_i \le \check{Z} \longrightarrow$$ огр. везано за ук. буџет за набавку машина

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot y_i \le P \longrightarrow$$ огр. везано за површину потребну за смештај нових машина

$$\underline{d_j} \le x_j \le \overline{d_j} \quad j=1\ldots n \longrightarrow$$ огр. везано за количину производа

$$\forall x_j \ge 0 \quad , j=1\ldots n \rightarrow$$ природно ограничење

$c_j \rightarrow$ цена j-тог производа (јединична)

$x_j \rightarrow$ кол. j-тог производа ; $n \rightarrow$ бр. врсти производа

$g_i \rightarrow$ амортизација, трошак за набавку i-те врсте ашине

$y_i \rightarrow$ бр. i-те врсте машине коју треба докупити ; $m \rightarrow$ бр. врсти машина које треба набавити

$a_{ij} \rightarrow$ време потребно i-тој машини да произведе кол. j-тог производа

$b_i \rightarrow$ ук. капацитет i-те машине

$y_i \cdot z_i \rightarrow$ ук. капацитет i-те машине коју треба докупити ; (z_i - капацитет једне)

$\check{z}_i \rightarrow$ наб. цена i-те врсте машине ; $\check{Z} \rightarrow$ укупан буџет

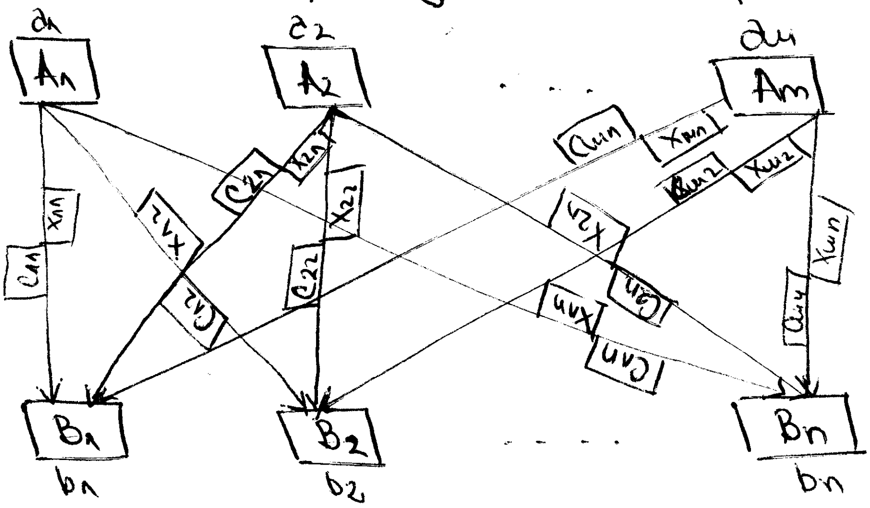
$p_i \rightarrow$ површина потребна за i-ту врсту машине ; $P \rightarrow$ ук. површина

$\underline{d_j}, \overline{d_j} \rightarrow$ доња и горња граница кол. производа

$\boxed{\text{Број ограничења:}}$ $m + 1 + 1 + n + n$ →природна

Затворени и отворени ТП

- Изналажење најекономичнијег плана превоза једне врсте робе из места производње у места потрошње



$a_1 \dots a_m \rightarrow$ кол. робе на исходишти.
$b_1 \dots b_n \rightarrow$ кол. робе на одредишт.
$A_1 \dots A_m \rightarrow$ исходишта
$B_1 \dots B_n \rightarrow$ одредишта
$c_{ij} \rightarrow$ трошак од i-тог исх. до j-тог одр.
$x_{ij} \rightarrow$ кол. робе од i-тог исх. до j-тог одр.

*Затворени

- целокупна количина производње једнака је укупној количини потрошње : $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

- минимизација трошкова приликом транспорта

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , i=1 \dots m \quad \rightarrow \text{огр. везано за понуду}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , j=1 \dots n \quad \rightarrow \text{огр. везано за тражњу}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i=1 \dots m \ , j=1 \dots n$$

-> бр. ограничења : m+n+природна
-> бр. непознатих : m·n
-> бр. базних : m+n-1 (уколико их је мање -> дегенерисано)

* Отворени

- када понуда и тражња нису једнаке

① производња већа од потрошње $\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j}$

- не може се транспортовати целокупна роба. тј. остаје роба на складишту

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

р.о.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad , i=1 \ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , j=1 \ldots n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , i=1 \ldots m, \ j=1 \ldots n$$

- одређују се и резерве које остају
- Отворени ТП се може свести на затворен увођењем допунске фиктивне променљиве тј. одредишта b_{n+1} чије су потребе:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- цена транспорта је једнака нули (не транспортује се ништа!)

② производња мања од потрошње $\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j}$

- потребе нису у потпуности задовољене

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

р.о.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , i=1 \ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad , j=1 \ldots n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , i=1 \ldots m, \ j=1 \ldots n$$

- увођење фиктивног исходишта A_{m+1} чија је понуда:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

- цена транспорта једнака нули

МЕТОДЕ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ПОЧЕТНОГ БАЗНОГ ДОПУСТИВОГ РЕШЕЊА (28)

1. Метода „северозападног угла": (дијагонална метода)

→ базичне променљиве распоређујемо дуж дијагонале која се креће од горњег левог угла тј. поља (1,1) табеле, па до доњег десног угла тј. поља (m,n) табеле

→ не узима у обзир вредности c_{ij} па се сматра најједноставнијом али и најнеефикаснијом методом

2. Метода најмањег ел. у матрици цена транспорта:

→ базичне променљиве распоређујемо на поља са најмањим вредностима c_{ij}

→ методе засноване на истој идеји: м. најмањег ел. у врсти и м. најмањег ел. у колони матрице цена

3. Вогелова апроксимативна метода:

→ израчунавање највеће разлике између два најмања коефицијента цена у сваком реду и у свакој колони матрице цена

→ постоји и модификација Вогелове методе - математичар Корда

Дуални задатак ТП, утврђивање оптималности

*Примал

- укупан бр. непознатих: mn
- укупан бр. ограничења: $m+n$ + природна

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , i=1\dots m \qquad \longleftarrow u_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , j=1\dots n \qquad \longleftarrow v_j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , i=1\dots m, j=1\dots n$$

– Свака x_{ij} се у систему ограничења примала јавља 2 пута $\Rightarrow$ огр. дуала ће се састојати из 2 сабирка са по једном дуалном пром. u_i и v_j са коефицијентом 1

*Дуал

- укупан бр. непознатих u_i и v_j: $m+n$
- укупан бр. ограничења: $m \cdot n$

$$\max f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot v_j$$

p.o.

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad , i=1\dots m, j=1\dots n$$

u_i, v_j – неограничени по знаку

– Ако су x_{ij}^* оптималне вредности примала, а u_i^* и v_j^* оптималне вредности дуала, тада, $\underline{x_{ij}^* \cdot (c_{ij} - (u_i^* + v_j^*)) = 0} \Rightarrow$

- Ако је $x_{ij}^* > 0$: $c_{ij} - (u_i^* + v_j^*) = 0$
- Ако је $x_{ij}^* = 0$: $c_{ij} - (u_i^* + v_j^*) \geq 0$

– Провера да ли је X_k оптимално:

~ x_{ij}^k базне: $c_{ij} - u_i - v_j = 0$

~ x_{ij}^k небазне: $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$

Транспортни задаци са ограниченим пропусним способностима

→ постоје допунска ограничења за количину транспортоване робе

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

р.о.

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1..m$ → огр. везано за понуду

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j=1..n$ → огр. везано за тражњу

$0 \le x_{ij} \le d_{ij} \;;\; i=1..m, \; j=1..n$ → огр. везано за ограничене пропусне способности

x_{ij} → кол. робе из i-тог исходишта у j-то одредиште
c_{ij} → јединични трошкови од i-тог исходишта до j-тог одред.
m → бр. исходишта
n → бр. одредишта
a_i → кол. у одредишту i
b_j → кол. у исходишту j

d_{ij} → ограничење робе; неопходно је да буду испуњени следећи услови:

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \ge a_i \quad , i=1..m$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq b_j \quad , j=1..n$$

Минимизација времена транспорта

→ Квалитет организације транспорта мери се утрошеним временом на његово спровођење

$$\min t(x) = \max \{ t_{ij} \mid x_{ij} > 0 \;, i=1\ldots m \;, j=1\ldots n \}$$

р.о.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad , i=1\ldots m$$ → огр. везано за понуду

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , j=1\ldots n$$ → огр. везано за тражњу

$$x_{ij} \geq 0 \quad , i=1\ldots m \;, j=1\ldots n$$

→ минимизација макс. времена из скупа времена t_{ij}

t_{ij} → време утрошено на транспорт из i-тог исходишта у j-то одредиште

a_i → кол. робе у i-том исходишту

b_j → тражња у j-том одредишту

x_{ij} → кол. робе из i-тог исходишта у j-то одредиште

Транспорт производње

→Избор транспортних средстава за реализацију транспорта одр. врсте робе на појединим релацијама. Средство иде од гараже до исходишта, од исходишта до одредишта и затим поново до гараже.

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}(d_{ik}+p_{jk}+t_{ijk})\cdot x_{ijk}$$ → мин. трошкова транспорта

р.о.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} q_k x_{ijk} \le a_i, \quad i=1\dots m$$ → огр. везано за кол. робе која ће се транспортовати из исходишта

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} q_k x_{ijk} = b_j, \quad j=1\dots n$$ → огр. везано за кол. робе која ће се транспортовати у одредишта

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \le g_k, \quad k=1\dots s$$ → огр. везано за укупан број трансп. средстава

$$x_{ijk} \ge 0, \quad i=1\dots m,\; j=1\dots n,\; k=1\dots s$$ → природно ограничење

d_{ik} → трошкови k-тог прев. средства у i-то исходиште (из гараже)
p_{jk} → трошкови k-тог прев. средства из j-тог одредишта (у гаражу)
t_{ijk} → трошкови k-тог прев. средства из i-тог исходишта у j-то одред.
m → бр. типова исходишта n → бр. типова одредишта s → бр. типова тран. средст.
x_{ijk} → бр. превозних средстава k-тог типа из исходишта i у одредиште j
q_k → капацитет k-тог превозног средства
a_i → понуда i-тог исходишта
b_j → тражња j-тог одредишта
g_k → ук. бр. средстава k-тог типа

Избор извршилаца активности

→ Уколико имамо одређени пројекат са различитим активностима, треба изабрати распоред људи тако да се максимизира успешност њиховог спровођења активности.

$x_{ij}=1$ → извршилац је изабран

$x_{ij}=0$ → извршилац није изабран

$$\max f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$ → макс. корисности

p.o.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \quad , j=1\ldots n$$ → огр. везано за то да сваки извршилац може бити на само једној активности запослен

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad , i=1\ldots n$$ → на једној активности може радити само један извршилац

$$x_{ij}\geq 0 \quad , \begin{matrix} i=1\ldots n \\ j=1\ldots n\end{matrix}$$

~ Ако је бр. извршилаца већи од бр. активности:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leq 1 \quad , i=1\ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1 \quad , j=1\ldots n$$

c_{ij} → ефикасност i-тог извршиоца на j-тој активности

n → бр. активности

m → бр. извршилаца

Основни кораци алгоритма за решавање ТП и његове особине (27)

* Кораци:

1. Иницијализација – налажење почетног базног допустивог решења које се посматра као текуће

2. Тест оптималности – провера да ли је текуће базно допустиво решење оптимално, ако јесте – крај

3. Налажење „бољег" базног решења – наћи суседно базно допустиво решење за које је вредност ф-је циља мања и усвојим као текуће; корак 2

* Особине:

1. Независност ограничења – затворен ТП има m+n ограничења; једно је линеарно зависно од осталих те постоји m+n-1 лин. независних огр.; m+n-1 → ранг матрице огр. и број базних променљивих

2. Слободни чланови целобројни – решење целобројно

3. MoDi метода се заснива на дуалности; служи за проверу оптималности, налажење суседног бољег решења

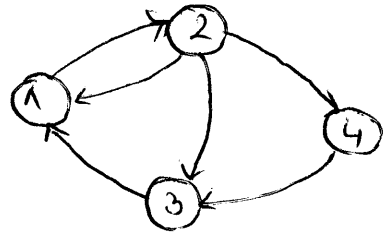
Дефиниције графа и мреже и врсте графова

→ Граф је формалан, свестран алат математичког моделирања; велики бр. реалних система се могу моделирати помоћу графова

→ Граф је уређен пар (V,E) где су:

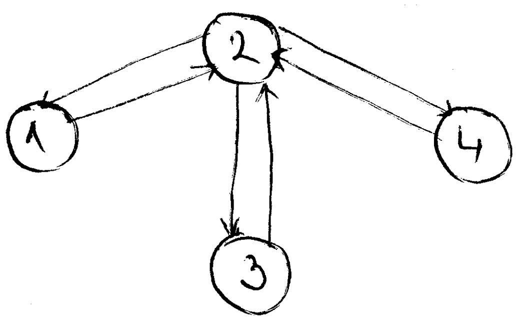
V - скуп чворова ($V=\{1,2,\dots,|V|\}$)

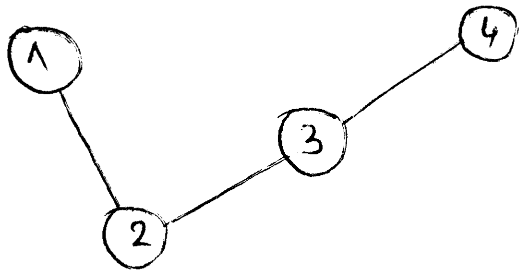
$E \subseteq \{(i,j) \mid i,j \in V\}$ - скуп грана



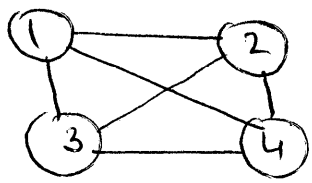
→ Ако за неки граф $G=(V,E)$, за сваку грану $(i,j)\in E$ важи да постоји и грана $(j,i)\in E$, тада се такви графови зову неусмерени. Скуп грана: $E \subseteq \{\{i,j\} \mid i\in V, j\in V\}$

→ У супротном су усмерени.





→ За граф $G=(V,E)$ се каже да је потпун ако за свако $i,j\in V$, $i\neq j$, постоји грана $(i,j)\in E$.



*Повезан граф

→ Неусмерен граф је повезан ако за свака два чвора $i,j\in V$ постоји пут који их повезује.

→ Усмерен граф је повезан ако за свака два чвора $i,j\in V$ постоји пут који их повезује, при чему се усмерења грана занемарују.

→ У случају да није повезан, за граф кажемо да је неповезан.

→ Када се елементима графа (чворовима и/или гранама) доделе неке вредности, он се назива технички граф. Повезан технички граф се назива мрежа.

Дефиниције степена чвора и пресека графа (35)

→ Ако постоји грана $e=(i,j) \in E$ усмереног графа $G=(V,E)$ тада кажемо:

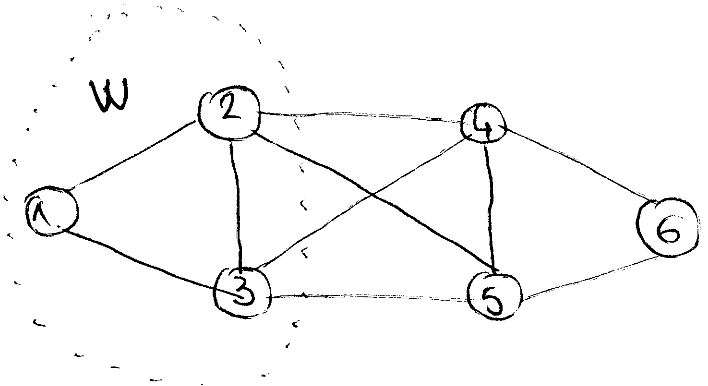
- број грана које завршавају у неком чвору i зове се улазни степен чвора i
- број грана које полазе из неког чвора i зове се излазни степен чвора i.

→ Ако постоји грана $e=\{i,j\} \in E$ неусмереног графа $G=(V,E)$, тада кажемо:

- чвор i и грана e су инцидентни ако $i \in e$
- две гране e_1 и e_2 су суседне ако су инцидентне са истим чвором
- број грана које су инцидентне неком чвору i зове се степен чвора i.

→ За неусмерен граф $G=(V,E)$ и задати подскуп чворова $W \subset V$, пресек графа $\delta(W)$ је подскуп грана таквих да им један чвор припада скупу W, а други скупу $V \setminus W$ тј.

$$\delta(W) = \{\{i,j\} \in E \mid i \in W, j \in V \setminus W\}$$



$$\delta(W) = \{\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\}\}$$

Дефиниције степена чвора и пресека графа

→ Ако постоји грана $e=(i,j) \in E$ усмереног графа $G=(V,E)$ тада кажемо:

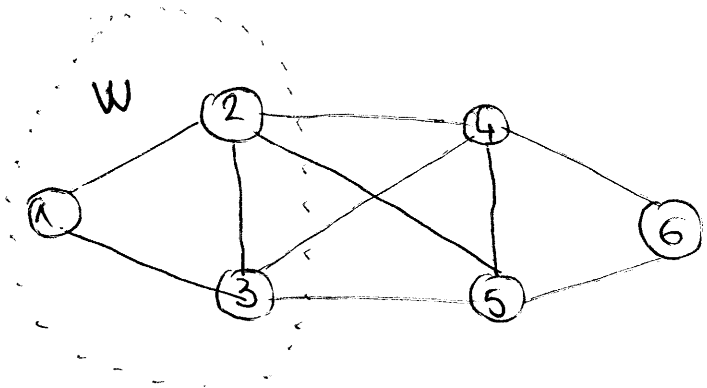
- број грана које завршавају у неком чвору i зове се улазни степен чвора i
- број грана које полазе из неког чвора i зове се излазни степен чвора i.

→ Ако постоји грана $e=\{i,j\} \in E$ неусмереног графа $G=(V,E)$, тада кажемо:

- чвор i и грана e су инцидентни ако $i \in e$
- две гране e_1 и e_2 су суседне ако су инцидентне са истим чвором
- број грана које су инцидентне неком чвору i зове се степен чвора i.

→ За неусмерен граф $G=(V,E)$ и задати подскуп чворова $W \subset V$, пресек графа $\delta(W)$ је подскуп грана таквих да им један чвор припада скупу W, а други скупу $V \setminus W$ тј.

$$\delta(W) = \{\{i,j\} \in E \mid i \in W, j \in V \setminus W\}$$



$$\delta(W) = \{\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\}\}$$

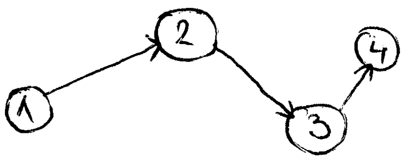
Пут, елементарни пут и дужина пута

→ **Пут** између два задата чвора s и t, $s,t \in V$ је низ грана за које важи:

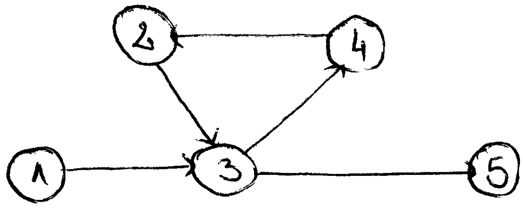
- прва грана излази из чвора s
- свака сл. грана следи претходну грану
- последња грана завршава у чвору t

~ Пример: $((s,1),(1,4),(4,8),(8,t))$ тј. $s,1,4,8,t$

→ **Елементарни пут** је онај који кроз све чворове пролази највише једном.



елементарни



није елементаран

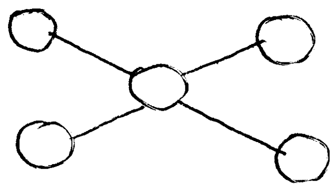
→ **Дужина пута** једнака је збиру дужина грана које том путу припадају:

$$P = ((s,i_1),(i_1,i_2),\dots,(i_r,t))$$

$$L(P) = \sum_{p \in P} c_p$$ дужина грана

Стабло, разапињуће стабло и дужина стабла

→ Неусмерен граф $G=(V,E)$ је **стабло** ако важе бар две од следећих тврдњи:



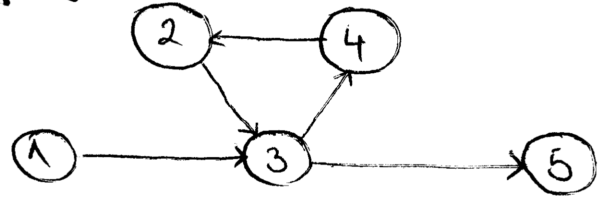
- граф G не садржи ни једну контуру
- граф G садржи тачно $|V|-1$ грана
- граф G је повезан

~ особине:
- ▲ додавањем гране у стабло добија се контура
- ▲ уклањањем гране добија се неповезан граф
- ! ▲ између свака 2 чвора постоји тачно један ел. пут

~~~ Задат је неусмерени граф $G=(V,E)$ и скуп вредности (тежина, дужина) које одговарају свакој грани $C=\{(C_{ij}) \mid (i,j) \in E\}$~~

→ Разапињуће стабло: графа $G=(V,E)$ је подграф тог графа који садржи све чворове V тог графа и стабло је. Не садржи ни једну контуру. Број грана: $n-1$ где је $n=|V|$ - број чворова

~ $S=(V,E')$ је разапињуће стабло графа $G=(V,E)$ ако и само ако $E' \subseteq E$ и S је стабло.

→ Дужина (тежина): је једнака збиру дужина/тежина грана које том стаблу припадају.

$$S=(V,E')$$

$$L(S)=\sum_{l \in L} c_l$$
~~~

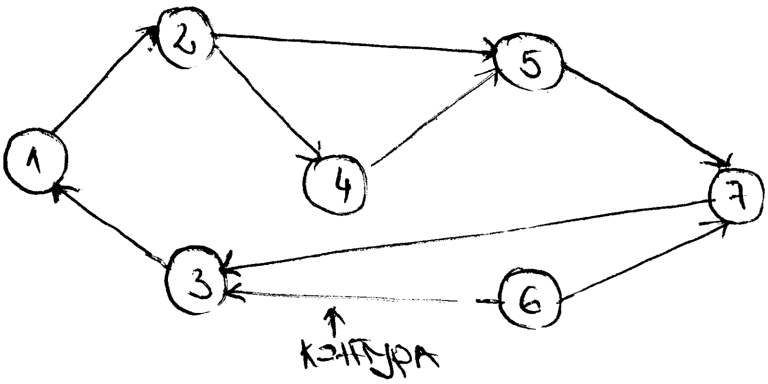
Контура, Хамилтонова контура и дужина

→ **Контура:** је елементарни пут који почиње и завршава у истом чвору.

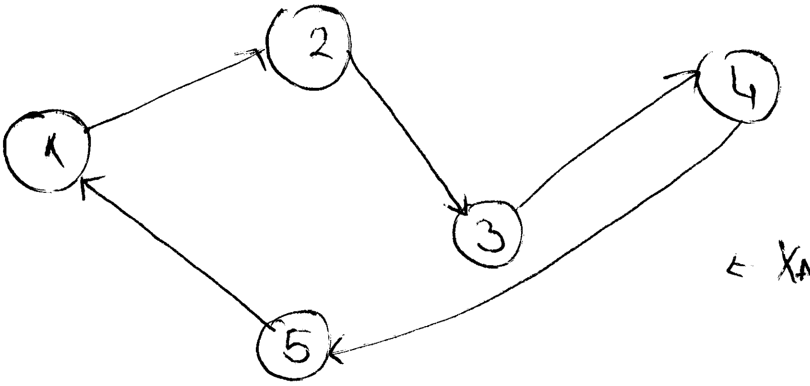


(3,4,2,3) – контура

→ **Хамилтонова контура:** је контура која пролази кроз све чворове неког задатог графа.



→ **Дужина:** контуре једнака је збиру дужина грана које тој контури припадају.



← Хамилтонова контура

Најкраћи пут - модел и сложеност решавања

- Дат је граф $G=(V,E)$ и гранама су придружене вредности c_{ij}, $(i,j)\in E$

дужина, тежина, цена, ...

- Потребно је наћи најкраћи пут између задатих чворова s и t, $s,t\in V$

→ Најкраћи пут је пут најмање дужине.

$x_{ij}=1$ → грана (i,j) припада путу (најкраћем)

$x_{ij}=0$ → грана (i,j) не припада најкраћем путу

$(i,j)\in E$

- Од интереса су само елементарни путеви

$$\min f(x)=\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\cdot x_{ij}$$ → минимизација укупне дужине пута

р.о.

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij}-\sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji}=\begin{cases}1 & , i=s\\ 0 & , i\neq s, i\neq t\\ -1 & , i=t\end{cases} \qquad i\in V$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}, \ (i,j)\in E$$

- Ограничење има 3 могућа слободна члана:
  1. обезбеђује се да пут почиње у s $\boxed{(1)}$
  2. уколико пут улази у чвор, мора и да изађе $\boxed{(0)}$
  3. да се пут заврши у t $\boxed{(-1)}$

→ Овај проблем има експоненцијалну сложеност.

Минимално разапињуће стабло - модел и сложеност решавања (40)

→ Налажење оног разапињућег стабла графа G чија је дужина минимална.

- Дата је неусмерена мрежа $G=(V,E)$ и тежине грана c_{ij}, $(i,j)\in E$ и $c_{ij}=c_{ji}$

~ $x_{ij}=1$ → грана (i,j) припада р. стаблу
$x_{ij}=0$ → грана (i,j) не припада р. стаблу $(i,j)\in E$

~ $A(S)$ - скуп грана подграфа S графа $G=(V,E)$ одређеног скупом $S\subseteq V$, тј. $A(S)$ је скуп грана чија оба чвора припадају S.

$$\min f(x)=\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\cdot x_{ij}$$ → мин. ук. тежине разапињућег стабла

p.o.

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij}=n-1$$ → обезбеђује да укупан број грана у р. стаблу буде једнак $n-1$

$$\sum_{(i,j)\in A(S)} x_{ij}\le |S|-1,\ \forall S\subseteq V$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\ (i,j)\in E$$

→ спречавају појављивање циклуса тј. обезбеђују да ће подграф бити стабло

→ Број ограничења експоненцијално расте са порастом броја чворова. Зато се мин. р. стабло одређује помоћу одр. алгоритама: Примов, Краскалов, Борувкин...

Проблем трговачког путника – графовска интерпретација

→ Задат је комплетан граф $G=(V,E)$; $(i,j) \in E$

→ Свакој грани је придружена вредност $c_{ij} \in N_0$

→ Најједноставнија <u>графовска интерпретација</u>:

- Одредити Хамилтонову контуру у задатом графу која има најмању дужину.

*Термини:

- контура је ел. пут који почиње и завршава се у истом чвору.
- Хамилтонова контура је контура која пролази кроз све чворове задатог графа; број Х. контура у потпуном графу је $(n-1)!/2$
- Хамилтонов граф је граф у коме постоји Х. контура.
- потпун граф $G=(V,E)$: ако за свако $i,j \in V$ где је $i \neq j$ постоји грана $(i,j) \in E$.

→ проблем је <u>затворен</u> – путник мора да се врати у град из ког је пошао

→ проблем је <u>симетричан</u> – цена пута од града i до града j је иста у оба смера

→ <u>Да ли</u> је граф Хамилтонов: недетерминистички полиномни проблем:

- алгоритми су углавном детерминистички, али за ове проблеме не постоји алг. који гарантује да ће решење бити нађено у полиномијалном времену
- за познато решење је у полиномијалном времену могуће проверити да ли је оно оптимално

Проблем трговачког путника - математички модел

• Трговачки путник треба да обиђе n градова. Наћи редослед обиласка тако да трошкови пута буду минимални.

тура - затворен пут који обилази све градове; бр. различитих тура је $(n-1)!/2$

$$\min f(x) = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij} \quad \to \text{мин. пута}$$

p.o.

$$\sum_{i\in V} x_{ij} = 1 \quad , \forall j \in V$$

$$\sum_{j\in V} x_{ij} = 1 \quad , \forall i \in V$$

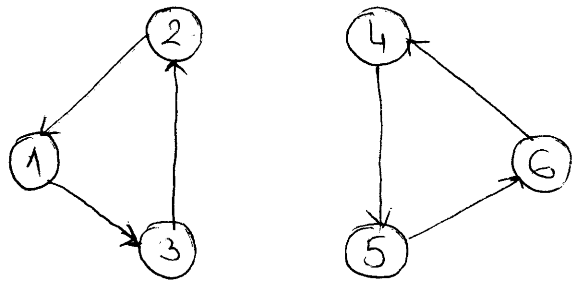
по једна грана завршава у сваком чвору и по једна грана полази из сваког чвора

$x_{ij} \in \{0,1\}$ - индикатор да ли грана (i,j) припада путу или не

+ додатно ограничење за избегавање подтура тј. обезбеђивање да контура буде Хамилтонова:

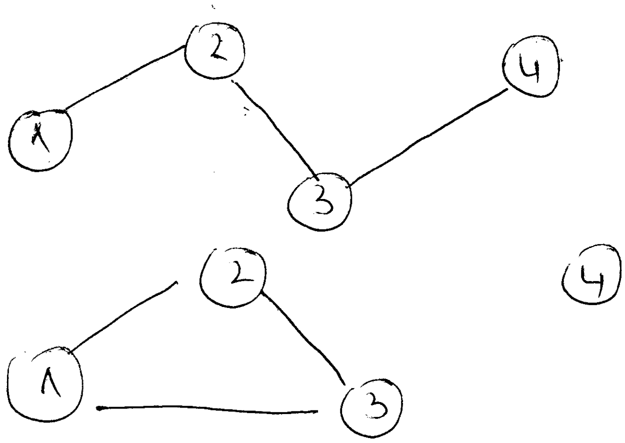
1 Данцинг Фалкерсон Џонсон (ДФЈ):

$$\sum_{i,j\in S} x_{ij} \le |S| - 1 \quad , \forall S \subset V \ , \ 2 \le |S| \le \frac{n}{2}$$



за $S = \{1,2,3\} \subset V$

$x_{21} + x_{13} + x_{32} + \ldots \le 2$!

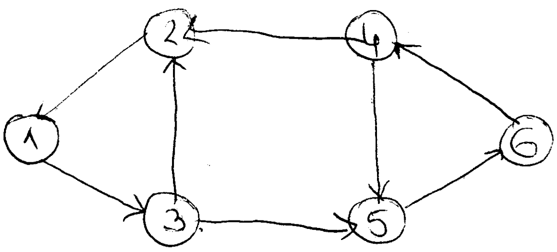


$*\ n = |V|$ - број чворова

11 <u>Милер, Такер, Землин</u> (МТЗ):

$$u_i - u_j + n\cdot x_{ij} \le n-1 \quad , \forall (i,j) \in E \quad , i,j \ne 1$$

u_i – помоћне променљиве, додељене сваком чвору (осим првог) и представљају редни бр. чвора у контури



За $i,j \in \{4,5,6\}$

$$u_4 - u_5 + n\cdot x_{45} \le n-1$$
$$u_5 - u_6 + n\cdot x_{56} \le n-1$$
$$\underline{u_6 - u_4 + n\cdot x_{64} \le n-1}$$
$$3n \le 3\cdot(n-1)$$

Проблем рутирања – графовска интерпретација

→ Први пут су га поставили Данцинг и Рамсер, а усавршили тј. побољшали су га Рајт и Кларк

→ Разматрају се само проблеми који се тичу дистрибуције робе између депоа и крајњих корисника; дистрибуција подразумева услугу пружену скупу корисника скупом возила, а у датом временском периоду (возила су у једном или више депоа, а за пружање услуге користи се постојећа мрежа путева)

→ Циљ тј. решење проблема се заснива на одређивању скупа рута, где сваком рутом иде само једно возило које полази и враћа се у исти депо, уз услов да су све потребе корисника задовољене и да су сва ограничења испуњена, а да укупни транспортни трошкови буду минимални (возила, горива, возача,...)

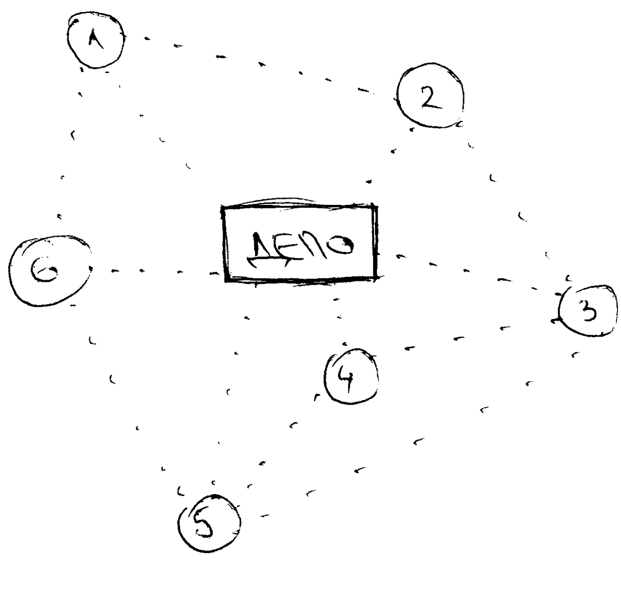
→ Путна мрежа која се користи за транспорт робе описана је помоћу графа; гране су путеви, а чворови корисници и депои

→ Гране могу бити усмерене и неусмерене (пр. једносмерна улица)

→ Свакој грани се придружују трошкови и време (зависи од типа возила или од временског периода...) и растојање

→ 2 чвора се повезују граном ако се директно може стићи из једног у други

→ Усмерене гране се представљају стрелицама, а неусмерене линијама



Проблем рутирања - математички модел

→ Уколико постоји ограничење капацитета возила, тада је то проблем рутирања са ограниченим капацитетом

→ Предуслови за решавање проблема:

1. Туре морају укључити све чворове корисника
2. Сваки чвор се може посетити само једном
3. Свака тура мора почети и завршити се у депоу

$$\min f(x) = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

п.о.

$$\sum_{\forall i\in C} x_{ij} = 1 \quad , \forall j \in C$$

$$\sum_{\forall j\in C} x_{ij} = 1 \quad , \forall i \in C$$

Само једна грана улази и само једна излази из чвора

$$u_i - u_j + Q x_{ij} \leq Q - q_j^{*} \quad , \forall (i,j) \in E \quad , i,j \in C$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad , \forall (i,j) \in E$$

$x_{ij} = 1$ → грана (i,j) укључена у руту

$x_{ij} = 0$ → грана (i,j) није укључена у руту

$G = (V,E)$, $V = \{0,1,2,\dots,n\}$ → комплетан граф; $V=0$ → депо

$C = V \setminus \{0\}$ - скуп чворова без депоа

c_{ij} - дужина/тежина гране $(i,j) \in E$

q_i - потражња чвора i

Q - задати капацитет возила

u_i - укупна потражња свих корисника који се налазе на истој тури до корисника i

* обезбеђује елиминацију подконтура које не садрже депо

Проблеми целобројног програмирања. Проблем ранца

I Проблем распоређивања (асигнације)

~ Распоредити n људи на n послова, сваког на по један посао, тако да продуктивност буде највећа.

II Транспортни проблем

~ Транспорт робе из одређених складишта (исходишта) до одређених купаца (одредишта) тако да он буде најекономичнији (уштеда новца или времена.).

III Проблем трговачког путника

~ Т. путник треба да обиђе n градова. Наћи редослед обиласка тако да трошкови буду минимални. (или време)

IV Проблем ранца

~ Из буџета величине b треба финансирати n пројеката. Позната је цена a_j и корист c_j истраживања једног истраживача на j-том пројекту за свако $j=1\ldots n$. Одредити број истраживача тако да укупна корист буде највећа.

x_j – бр. истраживача на j-том пројекту, $j=1\ldots n$

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \rightarrow \text{макс користности}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \quad \rightarrow \text{огр. везано за буџет}$$

$$x \geq 0,\ x \in Z^n$$

~ Зове се проблем ранца јер је формиран на примеру где планинар треба да напуни ранац конзервама хране

Метода гранања и ограничавања

→ Претражује само оне „интересантне" делове допустивог скупа. Рачунска сложеност остаје експоненцијална.

→ Основна идеја је „деоба и освајање". Почетни проблем се дели на све мање и мање потпроблеме све док они не буду разрешени. Деоба (гранање) се врши разбијањем допустивог скупа на подскупове, коме одговара разбијање почетног проблема на потпроблеме. Потпроблем се сматра разрешеним ако је његово оптимално решење целобројно или ако се процени да његов допустиви скуп не садржи опт. реш. полазног проблема. Разрешени потпроблеми се бришу из скупа потпроблема и по њима се не врши даље гранање.

→ 3 ситуације у којима се, у општем случају проблема максимизације, потпроблем може сматрати разрешеним:

(а) допустиви скуп потпроблема је празан

(б) опт. вр. ф-је циља потпроблема је $\leq$ од тренутне вредности ДГ (доње границе)

(в) потпроблем има целобројно решење

→ Алгоритам:

• Иницијализација: ставити $ДГ = -\infty$; ако је добијено целобројно решење или је допустиви скуп празан – проблем је решен

• Кораци на свакој итерацији:

1. Изабрати један неразрешен потпроблем и гранати по некој од променљивих које немају целобројну вредност → гранање

2. Наћи оптималну вредност сваког од новонасталих потпроблема (произвести горњу границу за вредност ф-је циља) → ограничавање

3. Ажурирати листу неразрешених потпроблема применом (а), (б) и (в) на нове потпроблеме. → разрешавање

• Тест оптималности: Алгоритам се зауставља ако нема неразрешених потпроблема. Тренутни кандидат је оптимално решење. Ако није нађен ни један кандидат, допустиви скуп је празан.