

1 Pytanie 3 Kresy w zbiorach uporządkowanych. Lemat Kuratowskiego - Zorna z zastosowaniami.

Definicja 1.1 *Porządkiem* (w wielu podręcznikach jest używana jest również nazwa poset, pochodząca od angielskiego skrótu partially ordered set) nazywamy parę (X, R) , gdzie X jest zbiorem, a $R \subset X^2$ jest relacją:

- zwrotną,
- przechodnią,
- antysymetryczną, to znaczy jeżeli $(x, y) \in R$ oraz $(y, x) \in R$, to $x = y$.

Jeżeli dodatkowo relacja R jest spójna (to znaczy taka, że $\forall_{x, y \in X} (x, y) \in R$ lub $(y, x) \in R$), to porządek nazywamy liniowym.

Często oznaczamy relacje porządkującą jako \leq . Oznaczamy też $x < y$, gdy $x \leq y$ oraz $x \neq y$.

Definicja 1.2

Element a nazywamy **maksymalnym** w porządku (X, \leq) , gdy $\forall_{x \in X} a \leq x \Rightarrow a = x$.

Element a nazywamy **minimalnym** w porządku (X, \leq) , gdy $\forall_{x \in X} x \leq a \Rightarrow a = x$.

Element a nazywamy **największym** w porządku (X, \leq) , gdy $\forall_{x \in X} x \leq a$.

Element a nazywamy **najmniejszym** w porządku (X, \leq) , gdy $\forall_{x \in X} a \leq x$.

Definicja 1.3 $A \subset X$. Element $a_0 \in X$ nazywamy **supremum** zbioru A , gdy:

- $\forall_{a \in A} a \leq a_0$,
- $(\forall_{a \in A} a \leq b) \Rightarrow a_0 \leq b$.

Definicja 1.4 $A \subset X$. Element $b_0 \in X$ nazywamy **infimum** zbioru A , gdy:

- $\forall_{a \in A} b_0 \leq a$
- $(\forall_{a \in A} b \leq a) \Rightarrow b \leq b_0$

Przykład 1.5 Podaj przykład przeliczalnego porządku, w którym istnieje element najmniejszy i największy.

Wystarczy wziąć zbiór $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ uporządkowany naturalną relacją mniejszości na liczbach wymiernych. $0 \in \mathbb{Q}$ jest więc elementem najmniejszym, $1 \in \mathbb{Q}$ jest więc elementem największym. Zbiór X jest nieskończonym podzbiorem zbioru przeliczalnego, więc jest przeliczalny.

Przykład 1.6 Podaj przykład zbioru liniowo uporządkowanego (X, \leq) , w którym istnieje podzbiór niemający supremum.

Takim zbiorem jest \mathbb{N} uporządkowany naturalną relacją \leq . Wtedy cały zbiór \mathbb{N} nie ma supremum, gdyż takie supremum musiałoby być największą liczbą naturalną, a taka nie istnieje.

Definicja 1.7 $L \subset X$ jest łańcuchem w porządku (X, \leq) , gdy każde dwa elementy L są porównywalne w sensie \leq . Oznacza to, że porządek indukowany na zbiorze L , czyli $(L, R \cap L \times L)$ jest porządkiem liniowym.

Definicja 1.8 Zbiór $A \subset X$ jest antyłańcuchem w porządku (X, \leq) , gdy żadne dwa różne elementy A nie są porównywalne w sensie \leq . Formalnie, jeśli następująca formuła jest prawdziwa:

$$\forall_{a,b \in A} (a \leq b \Rightarrow a = b).$$

Definicja 1.9 Częściowy porządek (A, \sqsubseteq) jest dobrym porządkiem, jeśli

- jest porządkiem liniowym,
- każdy niepusty podzbiór A zawiera element najmniejszy względem \sqsubseteq .

Mówimy wtedy, że zbiór A jest dobrze uporządkowany przez \sqsubseteq .

Twierdzenie 1.10 LEMAT KURATOWSKIEGO - ZORNA

Jeśli w pewnym zbiorze częściowo uporządkowanym, każdy łańcuch jest ograniczony od góry, to istnieje w nim element maksymalny.

Przykład 1.11 Każdy częściowy porządek da się rozszerzyć do porządku liniowego. To znaczy, że dla każdego zbioru częściowo uporządkowanego (A, \sqsubseteq) istnieje liniowy porządek \preccurlyeq na A taki, że

$$x \sqsubseteq y \Rightarrow x \preccurlyeq y.$$

dla dowolnych x i y w A .

Przykład 1.12 W każdym zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje antyłańcuch maksymalny pod względem inkluzji.

1.1 Zastosowania lematu Kuratowskiego - Zorna

Przykład 1.13 Zbiór $B \subset V$ jest bazą przestrzeni $V \Leftrightarrow B$ jest maksymalnym (w sensie zawierania) podzbiorem liniowo niezależnym tej przestrzeni.

Przykład 1.14 Dla dwóch dowolnych zbiorów A i B zachodzi conajmniej jedna z dwóch nierówności $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$

Przykład 1.15 Każdy ideał właściwy I w pierścieniu \mathbb{P} jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym.

2 Definicja dyfeomorfizmu. Twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie.

Definicja 2.1 Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi oraz D niepustym podzbiorem X . Przekształcenie $F: D \rightarrow Y$ nazywamy dyfeomorfizmem, jeśli

- D oraz jego obraz $F(D)$ są zbiorami otwartymi (czyli F jest odwzorowaniem otwartym),
- F jest funkcją odwracalną,
- F i F^{-1} są klasy C^1 .

Z powyższej definicji wynika, że jeśli F jest dyfeomorfizmem, to F i F^{-1} są odwzorowaniami regularnymi. Inaczej, każde odwracalne odwzorowanie regularne jest dyfeomorfizmem. Każdy dyfeomorfizm jest homeomorfizmem.

W szczególnym przypadku, gdy $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^k$, dyfeomorfizm to po prostu homeomorfizm klasy C^1 o różniczkę maksymalnego rzędu, którego funkcja odwrotna jest klasy C^1 w $F(D)$.

Przykład 2.2 Dyfeomorfizm biegunowy

Niech $B = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2$. Funkcja określona wzorem $b(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ przeprowadza B na obszar $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$. Ten dyfeomorfizm wprowadza współrzędne biegunowe. Jakobian tego przekształcenia $J_B = r$.

Przykład 2.3 Dyfeomorfizm sferyczny

Niech $S = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^3$. Funkcja określona wzorem $s(r, \sigma, \tau) = (r \cos \tau \cos \sigma, r \cos \tau \sin \sigma, r \sin \tau)$ przeprowadza zbiór S na obszar $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y = 0\}$. Dyfeomorfizm ten wprowadza współrzędne sferyczne. Jakobian tego przekształcenia wynosi $J_S = r^2 \cos \sigma$.

Przykład 2.4 Dyfeomorfizm walcowy

Niech $W = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Funkcja określona wzorem $w(r, \tau, z) = (r \cos \tau, r \sin \tau, z)$ przeprowadza W na obszar $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y = 0\}$. Ten dyfeomorfizm wprowadza współrzędne walcowe. Jakobian tego przekształcenia również wynosi $J_W = r$.

Twierdzenie 2.5 Twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie

Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, D będzie niepustym, otwartym podzbiorem X oraz będzie dane odwzorowanie $F: D \rightarrow Y$. Jeśli F jest regularne, to dla każdego $x \in D$ istnieje jego otoczenie U_x , że odwzorowanie $F|_{U_x}$ jest dyfeomorfizmem.

Prostym wnioskiem z twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie jest fakt, iż odwzorowanie regularne przestrzeni Banacha jest odwzorowaniem otwartym. Twierdzenie to wykorzystywane jest także dla dowodu twierdzenia o funkcji uwikłanej.

3 Grafy planarne i twierdzenie Kuratowskiego

Definicja 3.1 *Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć - tzn. tak by żadne dwie krawędzie nie przecinały się (poza wierzchołkami, które są dla nich wspólne). Każdy taki rysunek nazywamy rysunkiem płaskim. W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko grafy bez pętli i wielokrotnych krawędzi.*

Przykład 3.2 *Planarność grafu nie pociąga za sobą tego, że każdy jego rysunek płaski nie ma krawędzi, które się nie przecinają.*

np. Koperta

Graf planarny można narysować na wiele sposobów (tak aby rysunki uzasadniały jego planarność).

Twierdzenie 3.3 *Podgraf grafu planarnego jest planarny. Jeśli graf posiada podgraf nieplanarny, to sam jest nieplanarny.*

WZÓR EULERA

Definicja 3.4 *Jeśli G jest grafem planarnym, to każdy rysunek płaski grafu G dzieli płaszczyznę na obszary zwane ścianami. (Jedna z nich jest nieograniczona).*

Definicja 3.5 *Niech G będzie rysunkiem płaskim spójnego grafu płaskiego i niech v ; e ; f oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków krawędzi i ścian grafu G . Wtedy $v - e + f = 2$.*

Wniosek 3.6 *Liczba ścian nie zależy od sposobu narysowania grafu.*

Wniosek 3.7 *Jeśli G jest grafem płaskim o v wierzchołkach, e krawędziach, f ścianach i k składowych spójności. Wtedy $v - e + f = k + 1$*

Wniosek 3.8 *Jeśli G jest spójnym grafem planarnym mającym $v \geq 3$ wierzchołków, e krawędzi, to $e \leq 3v - 6$. Jeśli ponadto G nie ma trójkątów, to $e \leq 3v - 6$.*

Przykład 3.9 *Grafy K_5 $K_{3,3}$ są nieplanarne*

Dowód Gdyby graf K_5 był planarny, to z poprzedniego wniosku, mielibyśmy nierówność $10 \leq 9$. Gdyby graf $K_{3,3}$ był planarny to z drugiej ostatniego wniosku mielibyśmy $9 \leq 8$. Obie nierówności nie są prawdziwe.

Wniosek 3.10 *Każdy graf planarny posiada wierzchołek stopnia co najwyżej 5.*

Testowanie planarności

Metoda polega na poszukiwaniu cyklu w grafie (jeżeli to możliwe to hamiltonowskiego). Staramy się podzielić krawędzie spoza cyklu na dwa rozłączne podzbiory: takie, które możemy narysować na zewnątrz lub wewnątrz cyklu. Jeżeli takie zbiory istnieją to graf jest planarny. Jeżeli nie to graf jest nieplanarny.

Opiszemy teraz kolejne metody pozwalające na sprawdzanie planarności grafu. Rozważmy dowolny graf G . Umieszczenie w nim nowych wierzchołków na istniejących krawędziach nie wpływa na jego planarność. Mówimy, że grafy G, H są homeomorficzne jeżeli graf H został utworzony z G przez taką operację. Z tego wynika, że następujące grafy są nieplanarne (jako homeomorficzne z K_5 $K_{3,3}$)

Twierdzenie 3.11 *Twierdzenie Kuratowskiego*

Graf G jest planarny dokładnie wtedy gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 lub $K_{3;3}$

Zastosowania

- Planowanie sieci dróg dla samochodów.
- Opracowywanie planów lotów dla samolotów.
- Rozmieszczanie elementów sieci gazowej, elektrycznej, wodnej
- Telekomunikacja (The Spanning Tree Protocol (STP)). Podstawowe funkcje STP to zapobieganie powstawaniu pętli i zapobieganie przerywaniu transmisji danych.
- Tworzenie układów scalonych (Very-large-scale integration (VLSI)). VLSI jest procesem tworzenia układów scalonych, który polega na łączeniu tysięcy tranzystorów w jednym chipie (Zaczęto go stosować ok. 1970). Termin ten jest obecnie rzadziej stosowany. Współczesne chipy składają się z miliardów tranzystorów.

4 Metody aproksymacji i interpolacji

Definicja 4.1 Aproksymacja jest to przybliżanie, zastępowanie jednych wielkości drugimi. Aproksymacja może dotyczyć dowolnych wielkości matematycznych - liczb, funkcji, krzywych, obszarów, wektorów, macierzy.

Zastępowanie danej wielkości inną obarczone jest pewnym błędem. Oszacowanie wielkości błędu pozwala na ocenę, czy dane przybliżenie jest zadowalające, czy też nie.

Niech poszukiwana jest krzywa $y = F(x)$ dla zadanej liczby punktów: (x_i, y_i) jest opisana równaniem:

$$F(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

Aproksymacja stosowana jest wówczas, gdy ilość zadanych punktów m jest mniejsza od ilości nieznanymi współczynników n krzywej $F(x)$. Zwykle nie można przeprowadzić krzywej przez wszystkie punkty. Poszukiwana jest wówczas najbliższa krzywa w sensie **minimum kwadratu błędu**.

METODY APROKSYMACJI

- **Regresja liniowa**

Najbardziej podstawową i najprostszą metodą aproksymacji średniokwadratowej jest aproksymacja funkcją liniową czyli regresja liniowa. Wówczas:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = 1$$

Pozostałe funkcje: $f_j(x) = 1$ Dla kolejnych punktów otrzymujemy:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 = y_1 \\ c_1 x_2 + c_2 = y_2 \\ M \\ c_n x_m + c_2 = y_m \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ M \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ M \\ y_m \end{bmatrix}$$

co można zapisać w postaci macierzowej $Ac = y$. Równanie to dla $m > n$ nie ma dokładnego rozwiązania, stąd: $r = y - Ac$ gdzie: r wektor pionowych odległości pomiędzy poszukiwaną krzywą a zadanymi punktami. Szukane jest takie rozwiązanie, dla którego: $\sum_{i=1}^m r_i^2$ lub macierzowo $r^T r$ osiąga minimum.

Stąd: $r^T r = (y - Ac)^T (y - Ac) = y^T y - 2y^T Ac + c^T A^T Ac$ Iloczyn ten osiągnie minimum jeśli:

$$\frac{d}{dc} (r^T r) = 0 \Rightarrow -A^T y + A^T Ac = 0$$

stąd:

$$(A^T A) c = A^T y$$

Powyższe równanie nazywane jest równaniem aproksymacji.

- **Aproksymacja wielomianem**

Aproksymacja funkcją liniową może okazać się nie wystarczająca wówczas, gdy między danymi występuje bardziej złożona zależność. Stosuje się wówczas zazwyczaj **aproksymację wielomianem**:

$$W(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

którą w programie MATLAB można zrealizować przy pomocy funkcji polyfit: **a=polyfit(x,y,r)** dla danych wektorów x i y wyznaczającej współczynniki wielomianu stopnia r przybliżającego najlepiej w sensie średniokwadratowym zależność między serią danych x a y .

Definicja 4.2 *Interpolacja polega na poszukiwaniu funkcji pomiędzy znanymi punktami (podobnie jak aproksymacja). W odróżnieniu jednak od aproksymacji funkcja ta przechodzi przez te punkty. Jeżeli poszukiwana jest funkcja poza zakresem zadanych punktów mamy do czynienia z ekstrapolacją.*

METODY INTERPOLACJI

- interpolacja wielomianem:

$$P_{n-1}(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + K + c_{n-1}x + c_n$$

- interpolacja wielomianem Lagrange’a:

$$P_{n-1}(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + K + y_nL_n(x),$$

$$\text{gdzie } L_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

- interpolacja wielomianem Newtona:

$$P_{n-1}(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + K + c_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

- Interpolacja wielomianami sklejanymi

W interpolacji wielomianami sklejanymi zamiast stosowania jednego wielomianu dla wszystkich danych punktów stosowane jest wiele wielomianów niskiego poziomu $P_i(x)$ dla danego przedziału danych: $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Punkty łączenia wielomianów nazywamy węzłami. We węzłach sprawdzane są warunki ciągłości (np. ciągłość pochodnych).