PRACA DOMOWA 1
ASC - 04 maja 2014r.
MARTA SOMMER – BSMAD – 237503

Zadanie 4.

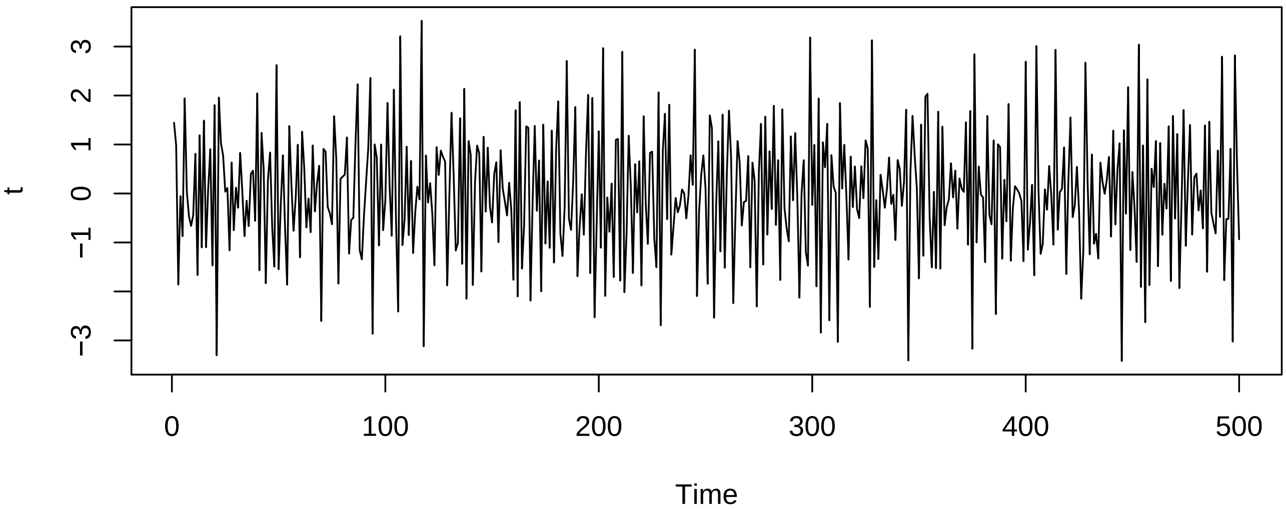
a)

Generuję 500 liczb z modelu $MA(1)$:

$$X_t = Z_t - 0,8 \cdot Z_{t-1},$$

gdzie Z_t - biały szum o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$.

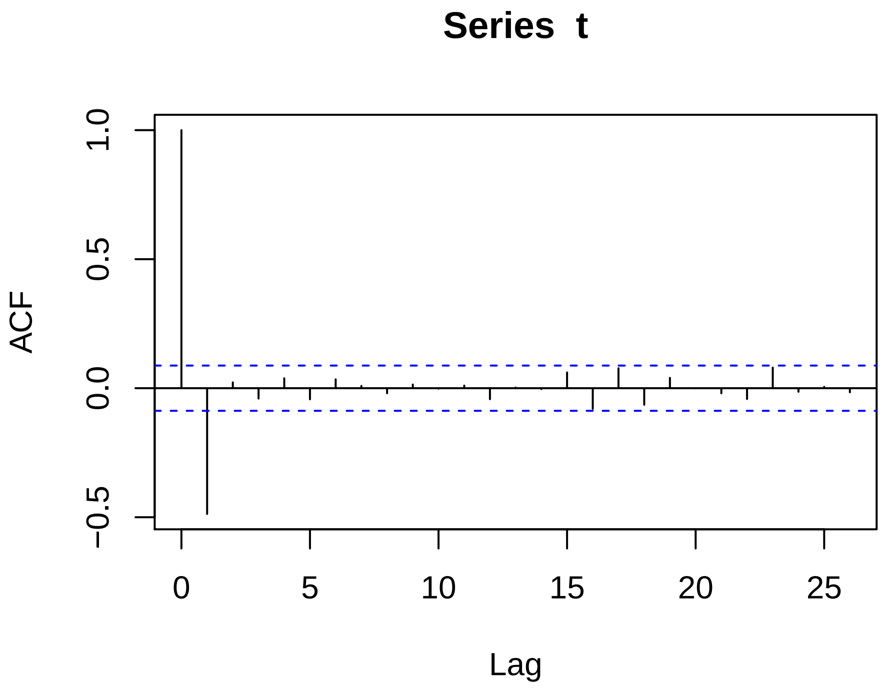
```
set.seed(400)
zt <- rnorm(501)
xt <- numeric(500)

for (i in 1:500) {
    xt[i] <- zt[i + 1] - 0.8 * zt[i]
}

t <- ts(xt)
plot(t)
```



b)

Wyznaczam funkcję autokorelacji:

```
acf(t)
```



Z wykresu wyraźnie widać, że jest to proces MA(1).

c)

Wyznaczam zależność $x \sim lag1 + lag2$:

```
library("quantmod")

lag1 <- Lag(xt)
lag2 <- Lag(xt, k = 2)

l2 <- lm(xt ~ lag1 + lag2)

summary(l2)

##
## Call:
## lm(formula = xt ~ lag1 + lag2)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -2.976 -0.704 -0.049  0.665  3.494
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.00535    0.04835   -0.11     0.91
## lag1        -0.62963    0.04300  -14.64  < 2e-16 ***
## lag2        -0.28424    0.04295   -6.62  9.5e-11 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.08 on 495 degrees of freedom
##   (2 observations deleted due to missingness)
```

```
## Multiple R-squared:  0.303,Adjusted R-squared:   0.3
## F-statistic:  107 on 2 and 495 DF,  p-value: <2e-16
```

Z $summary()$ możemy odczytać, że wartość współczynnika kierunkowego przy $lag1$ to $-0,62963$, a przy $lag2$ to $-0,28424$, a odpowiadające im $p - value$ to $< 2e - 16$ oraz $9,5e - 11$.

d)

Buduję model $x \sim lag1$:

```
l1 <- lm(xt ~ lag1)
summary(l1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = xt ~ lag1)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -3.022 -0.757 -0.006  0.758  3.469
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -0.0020     0.0504   -0.04     0.97
## lag1         -0.4879     0.0391  -12.47   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.13 on 497 degrees of freedom
##   (1 observation deleted due to missingness)
## Multiple R-squared:  0.238,Adjusted R-squared:  0.237
## F-statistic:  156 on 1 and 497 DF,  p-value: <2e-16
```

Współczynnik kierunkowy przy $lag1$ (-0.4879) jest to teoretyczny współczynnik $pacf(1) = \alpha(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}$. Policzmy to:

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= < X_t, X_t >=< Z_t - 0,8 \cdot Z_{t-1}, Z_t - 0,8 \cdot Z_{t-1} >= 1 + (0,8)^2 = 1,64 \\
\gamma(1) &= < X_t, X_{t-1} >=< Z_t - 0,8 \cdot Z_{t-1}, Z_{t-1} - 0,8 \cdot Z_{t-2} >= -0,8 \\
\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} &= \frac{-0,8}{1,64} \approx -0,49
\end{aligned}
$$

Nasza wartość teoretyczna mieści się w granicach błędu empirycznej, więc wynik wyszedł nam sensowny.

Zadanie 5.

a)

Generuję 500 liczb z modelu $AR(1)$:

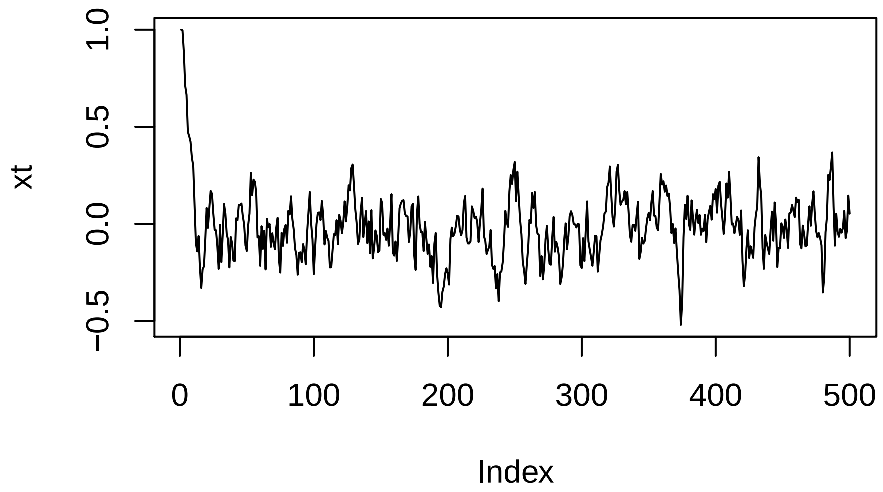
$$X_t = 0,8 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

gdzie $X_0 = 1$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$.

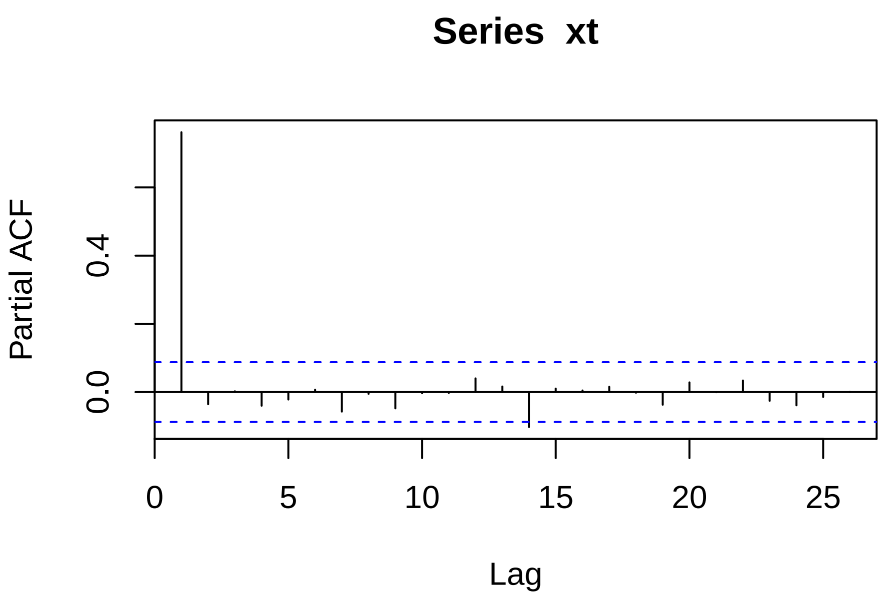
```r
set.seed(500)
x0 <- 1
eps <- rnorm(500, 0, 0.1)
xt <- numeric(500)
xt[1] <- x0
for (i in 2:500) {
    xt[i] <- xt[i - 1] * 0.8 + eps[i]
}
```

b)

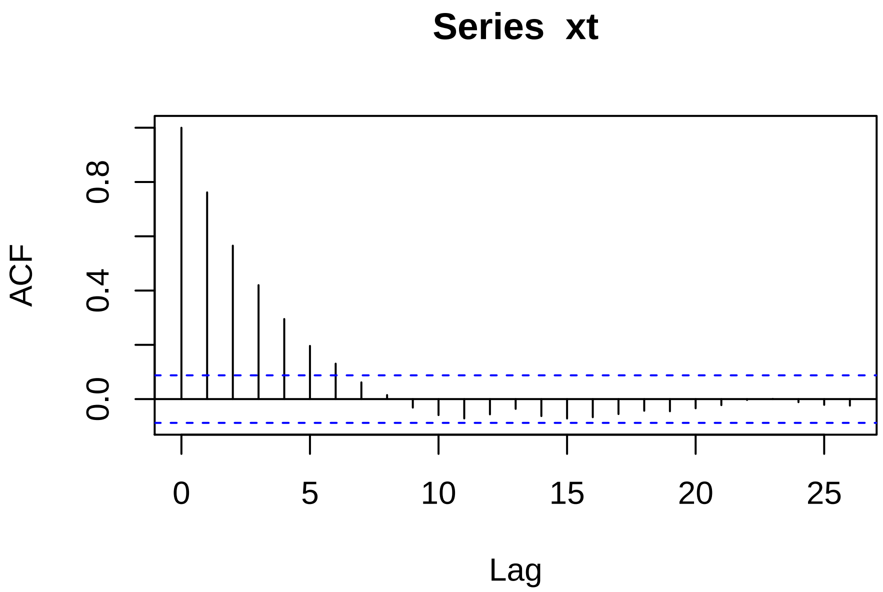
```r
plot(xt, type = "l")
```




```r
pacf(xt)
```



```r
acf(xt)
```



Z wykresu PACF widać wyraźnie, że jest to proces $AR(1)$.

c)

```r
sr <- mean(xt)
gamma0 <- (sum((xt - sr)^2))/500
gamma1 <- (sum((xt[1:499] - sr) * (xt[2:500] - sr)))/500
gamma2 <- (sum((xt[1:498] - sr) * (xt[3:500] - sr)))/500
gamma3 <- (sum((xt[1:497] - sr) * (xt[4:500] - sr)))/500

ro0 <- 1
ro1 <- gamma1/gamma0
ro2 <- gamma2/gamma0
ro3 <- gamma3/gamma0

ro1/ro0

## [1] 0.7618

ro2/ro1

## [1] 0.7422

ro3/ro2

## [1] 0.7427
```

Stosunek kolejnych współczynników korelacji jest praktycznie identyczny. Wskazuje na to, że funkcja autokorelacji w każdym kroku maleje tyle samo razy.

d)

```r
lag1 <- Lag(xt)
l <- lm(xt ~ lag1)
summary(l)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = xt ~ lag1)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.26354 -0.06522 -0.00031  0.07164  0.28113
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.00530    0.00456   -1.16     0.25
## lag1         0.76206    0.02651   28.74   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.102 on 497 degrees of freedom
##   (1 observation deleted due to missingness)
## Multiple R-squared:  0.624,Adjusted R-squared:  0.624
## F-statistic:  826 on 1 and 497 DF,  p-value: <2e-16
```

Współczynnik kierunkowy prostej wynosi $0,76206$. Teoretycznie powinniśmy otrzymać: $pacf(1) = \alpha(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}$. Policzmy to:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= < X_t, X_t >=< 0.8 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t, X_t >= 0.8 \cdot \gamma(1) + < \varepsilon_t, 0.8 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t >= 0.8 \cdot \gamma(1) + \sigma^2 \\
\gamma(1) &= < X_t, X_{t-1} >=< 0.8 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t, X_{t-1} >= 0.8 \cdot \gamma(0) \\
\gamma(0) &= (0.8)^2 \cdot \gamma(0) + \sigma^2 \\
\gamma(0) &= \frac{\sigma^2}{0.36} \\
\gamma(1) &= 0.8 \cdot \frac{\sigma^2}{0.36} \\
\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} &= \frac{0.8 \cdot \sigma^2}{0.36} \cdot \frac{0.36}{\sigma^2} = 0.8
\end{aligned}$$

Teoretycznie wyszło $0,8$, a empirycznie $0,76206$. Tak więc podobnie, w granicy błędu.

e)

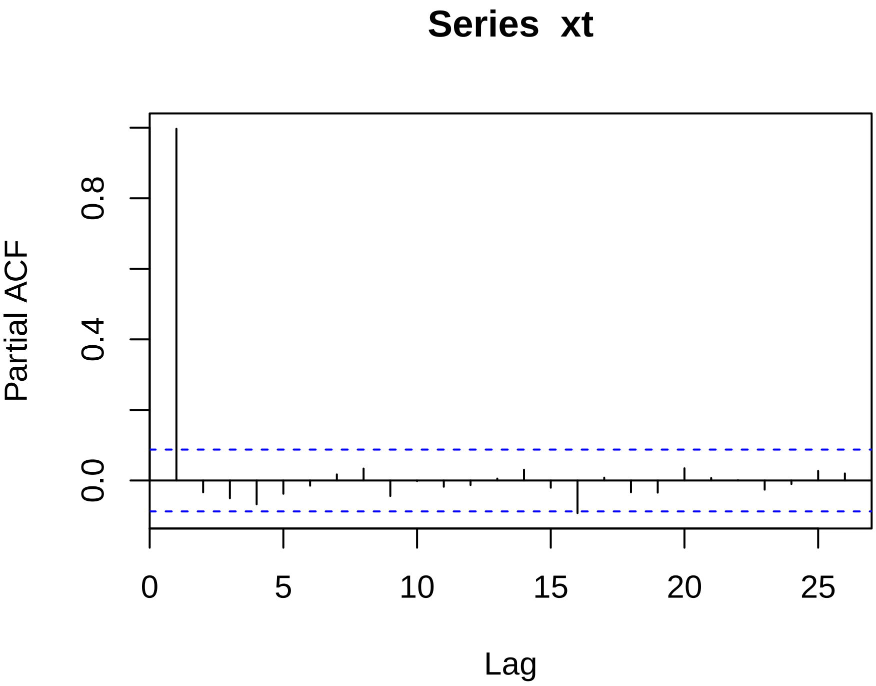
Zmienimy model na:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

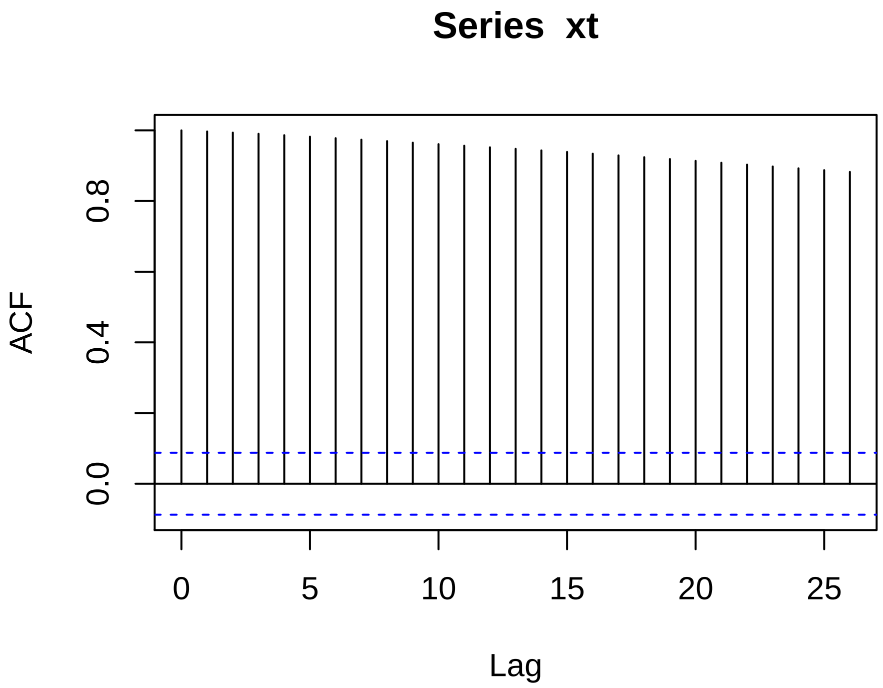
gdzie $X_0 = 1$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$.

```r
x0 <- 1
eps <- rnorm(500, 0, 0.1)
xt <- numeric(500)
xt[1] <- x0
for (i in 2:500) {
    xt[i] <- xt[i - 1] + eps[i]
}

plot(xt, type = "l")
```


```r
pacf(xt)
```




```r
acf(xt)
```



Z wykresów wyraźnie widać, że jest to zwykłe błądzenie losowe.