Wymiar Hausdorffa zbioru granicznego IFS

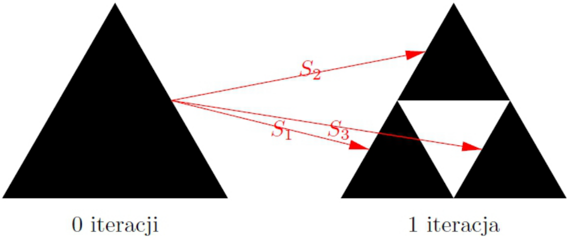
Marta Sommer

23 września 2013

Definicja

Iterowanym układem funkcyjnym (IFS - *iterated function system*) nazywamy rodzinę kontrakcji $\{S_1, \ldots, S_m\}$ taką, że $S_i: \ D \longrightarrow D$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$.

Trójkąt Sierpińskiego



$$S_1(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right),$$
$$S_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$
$$S_3(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right).$$

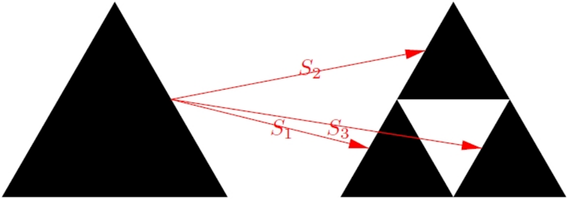
Twierdzenie o istnieniu atraktora

Twierdzenie

Rozważmy IFS określony na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^n$ kontrakcjami $\{S_1, \ldots, S_m\}$. Wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczony atraktor F, tj. niepusty i zwarty zbiór taki, że:

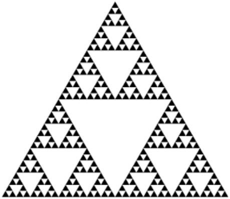
$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Trójkąt Sierpińskiego



0 iteracji 1 iteracja

2 iteracje



5 iteracji

Twierdzenie o istnieniu atraktora cd.

Twierdzenie cd.

Zdefiniujmy dodatkowo przekształcenie S na klasie X niepustych i zwartych podzbiorów D jako:

$$\forall_{E \in X} \quad S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)$$

oraz oznaczymy przez S^k k-tą iterację S tzn.

$$\begin{cases} S^0(E) = E, \\ S^k(E) = S\left(S^{k-1}(E)\right) \quad dla \;\; k \geqslant 1, \end{cases}$$

wtedy:

$$\forall_{E \in X} \;\; takiego, \; \dot{z}e \;\; \forall_{i=1,\dots,m} \;\; S_i(E) \subset E \qquad F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E).$$

Warunek zbioru otwartego

Definicja

Funkcje $S_1, \ldots, S_m$ takie, że $S_i : D \longrightarrow D$, spełniają warunek zbioru otwartego (*open set condition*), jeśli istnieje niepusty, ograniczony i otwarty zbiór V taki, że:

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \subset V$$

oraz $S_i(V)$ są parami rozłączne dla $i = 1, \ldots, m$.

Twierdzenie o wymiarze fraktali

Twierdzenie

Przypuśćmy, że podobieństwa $S_1, \dots, S_m$ *określone na* $\mathbb{R}^n$ *ze stałymi* $c_i \in (0,1)$ *dla* $i = 1, \dots, m$*, spełniają warunek zbioru otwartego.*
Jeśli F *jest atraktorem IFS* $\{S_1, \dots, S_m\}$ *tzn.*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

wtedy $\dim_H F = s$*, gdzie* s *jest rozwiązaniem równania:*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1.$$

Co więcej, dla tej wartości s*,* $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$*.*

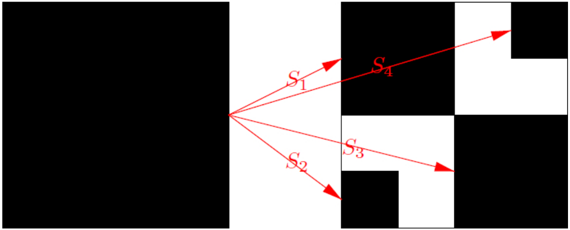
Wymiar Hausdorffa trójkąta Sierpińskiego

$$c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$$

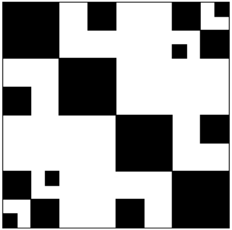
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} c_i^s &= 1 \\ c_1^s + c_2^s + c_3^s &= 1 \\ 2^s &= 3 \\ s &= \log_2 3 = 1.58496\ldots \end{aligned}$$

Wymiar Hausdorffa trójkąta Sierpińskiego jest więc równy $\log_2 3 \approx 1.58$.

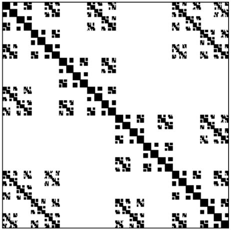
Fraktal 1



0 iteracji   1 iteracja



2 iteracje



5 iteracji

Wymiar Hausdorffa atraktora

$$c_1 = c_3 = \frac{1}{4}, \;\; c_2 = c_4 = \frac{1}{2}$$

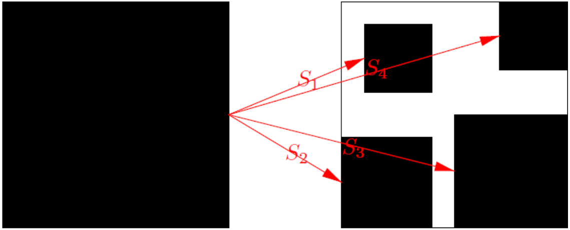
$$\sum_{i=1}^{4} c_i^s = 1$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^s + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$$

$$s = \log_2 \frac{2}{-1+\sqrt{3}} = 1.449984\ldots$$

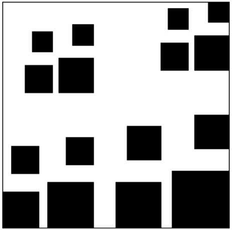
Wymiar Hausdorffa tak utworzonego fraktala jest więc równy $\log_2 \frac{2}{-1+\sqrt{3}} \approx 1.45$.

Fraktal 2

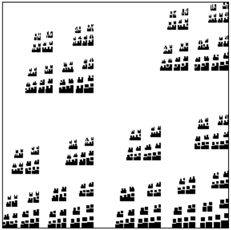


0 iteracji

1 iteracja



2 iteracje



5 iteracji

Wymiar Hausdorffa atraktora

$$c_1 = 0.3, \;\; c_2 = 0.4, \;\; c_3 = 0.5, \;\; c_4 = 0.3$$

$$\sum_{i=1}^{4} c_i^s = 1$$

$$0.4^s + 0.5^s + 2 \cdot 0.3^s = 1$$

Nie da się wyznaczyć s analitycznie. Z numerycznej metody bisekcji otrzymujemy, że:

$$s \simeq 1.428292002903.$$

Wymiar Hausdorffa atraktora tego fraktala jest więc równy w przybliżeniu 1.43.

Dziękuję za uwagę