Zadania z Metod Monte Carlo

Maciej Romaniuk*

29 lipca 2014

1 Igła Buffona

Zadanie 1.1. Rzucamy dwa razy monetą. Znajdź dystrybuantę rozkładu liczby wyrzuconych orłów, wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych orłów i wariancję. Oblicz wariancję średniej liczby wyrzuconych orłów w n rzutach.

Zadanie 1.2. Oblicz prawdopodobieństwo, iż igła przetnie szparę w problemie igły Buffona. Znajdź wariancję estymatora prawdopodobieństwa przecięcia szpary w tym doświadczeniu.

Zadanie 1.3. Przeanalizuj zadanie analogiczne do 1.2 (problem igły Buffona), ale z rzucaniem krzyżem zrobionym z dwóch igieł oraz z niezależnymi rzutami przy pomocy dwóch igieł. Który z tych sposobów jest lepszy, tzn. odpowiedni estymator ma mniejszy błąd?

2 Wprowadzenie i przykłady zastosowań

Zadanie 2.1. Stwórz „naiwny" estymator losowy dla całki postaci

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} \tag{1}$$

i oblicz jego wariancję.

Zadanie 2.2. Załóżmy, że dysponujemy generatorem, który losuje liczby z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0;1]$ wywoływanym funkcją `GenerujU`. Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej, którą otrzymamy za pomocą poniższego algorytmu?

```
for i=1 to 12 do
 X(i)=GenerujU
return X(1)+X(2)+...+X(12)-6
```

* *e-mail: mroman@ibspan.waw.pl*

3 Generatory liniowe

Zadanie 3.1. Dla generatora liniowego postaci

$$X_n = (2X_{n-1} + 3) \mod 11 \tag{2}$$

i $X_0 = 1$, znajdź początkowe generowane liczby. Znajdź jego okres.

Zadanie 3.2. Czy generator multiplikatywny o parametrach $m = 2^{17}, X_0 = 3, a = 13$ osiąga swój pełny okres? Dlaczego?

Zadanie 3.3. Czy generator mieszany o parametrach $m = 2^{15}, c = 3, a = 9$ osiąga swój pełny okres? Dlaczego?

Zadanie 3.4. Przeanalizuj generatory oparte na rejestrach przesuwnych. Rozpatrz następujący generator

$$b_i = (b_{i-1} + b_{i-3}) \mod 2 \tag{3}$$

dla $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1$. Sprawdź jego okres. Za pomocą wzoru

$$U_i = \sum_{j=1}^{3} 2^{-j} b_{i+j} \tag{4}$$

zmień otrzymane bity na liczby rzeczywiste.

Zadanie 3.5. Rozpatrz ogólną postać generatorów opartych na rejestrach przesuwnych

$$b_i = b_{i-j_1} \operatorname{xor} b_{i-j_2} \operatorname{xor} b_{i-j_3} \operatorname{xor} \ldots \operatorname{xor} b_{i-j_l} \tag{5}$$

oraz wzoru na zamianę bitów na liczby rzeczywiste postaci

$$U_i = \sum_{j=1}^{L} 2^{-j} b_{is+j} \tag{6}$$

dla pewnego $s \leqslant L$. Jaką rolę pełnią parametry s i L?

Zadanie 3.6. Dla podanego generatora ALFG

$$X_n = (X_{n-1} + X_{n-3}) \mod 8 \tag{7}$$

i $X_0 = X_1 = X_2 = 1$, znajdź początkowe generowane liczby i policz maksymalny okres.

4 Generatory nieliniowe

Zadanie 4.1. Dla podanego generatora nieliniowego (odwrotność modulo)

$$X_n = (3\check{X}_{n-1}^{-1} + 1) \mod 11 \tag{8}$$

i $X_0 = 1$, znajdź generowane liczby i okres.

5 Kombinowanie algorytmów

Zadanie 5.1. Dokonaj kombinacji generatorów, wykorzystując: generator Fibonacciego postaci

$$X_n = (X_{n-1} + X_{n-3}) \mod 8 \tag{9}$$

inicjowany przez $X_0 = 1, X_1 = X_2 = 2$, oraz generator liniowy postaci

$$Y_n = (3Y_{n-1} + 1) \mod 8 \tag{10}$$

dla $Y_0 = 3$. Kombinacji dokonaj poprzez wykorzystanie formuły

$$Z_n = (X_n + Y_n) \mod 8\ . \tag{11}$$

Znajdź początkowe generowane elementy.

6 Metoda odwracania dystrybuanty

Zadanie 6.1. Stwórz generatory metodą odwracania dystrybuanty dla

1. uogólnionego rozkładu wykładniczego o gęstości $f(t) = \lambda \exp(-\lambda(t-\theta))$
2. rozkładu Weibulla o dystrybuancie $F(x) = 1 - \exp(-x^{\beta})$ (dla $\beta > 0$)
3. rozkładu dyskretnego $p_1, p_2, \ldots, p_k$

Zadanie 6.2. Omów algorytm ALIAS. Rozpatrz przykłady:

1. $p_1 = 0.6, p_2 = 0.2, p_3 = p_4 = 0.1$
2. $p_1 = 0.1, p_2 = 0.3, p_3 = 0.1, p_4 = 0.4, p_5 = 0.1$

Zadanie 6.3. Omów i wyjaśnij algorytmy kombinatoryczne.

7 Metoda akceptacji

Zadanie 7.1. Korzystając z metody akceptacji stwórz odpowiedni algorytm dla gęstości Raara-Greena: $f(t) = 1 + \cos t$, $|t| \leqslant \pi$ (postać nieunormowana), podaj przy tym czynnik normujący.

Zadanie 7.2. Korzystając z metody akceptacji stwórz odpowiedni algorytm dla gęstości ogona rozkładu normalnego

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2(1-\phi(z))} \tag{12}$$

dla $t \geqslant z$, wykorzystując przy tym nierówność

$$e^{-t^2/2} \leqslant \frac{t}{z} e^{-t^2/2}\ . \tag{13}$$

Zadanie 7.3. Korzystając z metody akceptacji stwórz odpowiedni algorytm dla gęstości ogona rozkładu normalnego, wykorzystując przy tym uogólniony rozkład wykładniczy.

8 Metoda ROU

Zadanie 8.1. Omów generowanie rozkładu normalnego standardowego metodą ROU.

Zadanie 8.2. Zaproponuj generowanie rozkładu Couchy'ego o gęstości

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2} \tag{14}$$

metodą ROU.

Zadanie 8.3. Zastosuj metodę ROU dla funkcji postaci

$$f(t) = t^2 e^{2t} \tag{15}$$

dla $|t| \leqslant 4$.

9 Metoda szeregów i superpozycji

Zadanie 9.1. Omów rozszerzenia metody szeregów. Zastosuj metodę szeregów naprzemiennych dla gęstości Raara-Greena rozwiniętej w szereg Taylora wokół zera.

Zadanie 9.2. Zastosuj metodę szeregów naprzemiennych dla gęstości rozkładu granicznego Kołmogorowa określonego dystrybuantą

$$K(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 2t^2} \tag{16}$$

dla $t \geqslant 0$.

Zadanie 9.3. Dla podanej funkcji

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ e^{-(t-1)} & \text{dla } t > 1 \end{cases} \tag{17}$$

podaj stałą normującą i stwórz odpowiedni algorytm za pomocą metody superpozycji.

Zadanie 9.4. Podaj algorytm generowania z rozkładu wykładniczego za pomocą metody superpozycji.

Zadanie 9.5. Dla podanej gęstości

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{dla } -2 \leqslant t \leqslant 0 \\ e^{2t} - 1 & \text{dla } 0 < t \leqslant 1 \end{cases} \tag{18}$$

podaj stałą normującą i stwórz odpowiedni algorytm za pomocą metody superpozycji.

Zadanie 9.6. Omów generowanie rozkładów o gęstościach wielomianowych. Podaj sposób generowania dla nieunormowanej gęstości postaci

$$f(t) = t^2 + t + 2 \tag{19}$$

dla $t \in [0; 1]$.

10 Metody wielowymiarowe

Zadanie 10.1. Zbadaj zależność oczekiwanej liczby rzutów od wymiaru przestrzeni dla „naiwnego" algorytmu losowania jednorodnego z kuli p wymiarowej. Przeanalizuj zastosowanie współrzędnych biegunowych.

Zadanie 10.2. Korzystając z dekompozycji Cholesky'ego zaproponuj algorytm dla generacji wielowymiarowego rozkładu normalnego o macierzy kowariancji

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{20}$$

oraz

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

11 Metody Monte Carlo

Zadanie 11.1. Omów metody redukcji wariancji na przykładzie estymatora całki

$$\int_2^\infty \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx \tag{22}$$

dla metody MC.

Zadanie 11.2. Stwórz estymatory metody MC dla następujących całek:

$$\int_{-1}^6 \frac{\sin x}{1+x^2} dx \ , \ \int_2^\infty \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{x^2-4x+6}{2}\right) dx \tag{23}$$

Zadanie 11.3. Omów zastosowanie estymatora typu próbkowania ważonego dla całki postaci

$$\int_1^2 \left(x^{10}-1\right) dx \ . \tag{24}$$

Wykorzystaj przy tym funkcję $g(x) \propto x^{10}$.

12 Łańcuchy Markowa

Zadanie 12.1. Znajdź rozkład stacjonarny dla dwustanowego łańcucha Markowa.

Zadanie 12.2. Dla podanych macierzy przejść

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

określ klasyfikację stanów (na stany osiągalne, komunikujące się i pochłaniające) oraz znajdź okres łańcucha.

Zadanie 12.3. Wielorybnik w chwili n znajduje się w chwili n w odległości n od brzegu i wykonuje rzut na odległość W_n, gdzie $W_1, W_2, \ldots$ są *iid* dodatnimi zmiennymi losowymi. Jeśli $X_n = n$ i $W_n \geqslant n$, to $X_{n+1} = 0$, jeśli zaś $W_n < n$, to $X_{n+1} = n + 1$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znajdziemy się w zerze (czyli, że wielorybnik przybije do wyspy)? Określ klasyfikację stanów w tym ŁM.

Zadanie 12.4. (Urna Ehrenfestów) W pojemniku rozdzielonym na dwie połowy przepierzeniem z otworem znajduje się w sumie r cząstek. Zakładając, że cząstki mogą pojedynczo w losowy sposób przechodzić pomiędzy połowami, znajdź macierz przejścia i rozkład stacjonarny dla takiego ŁM.

13 Generowanie procesów stochastycznych

Zadanie 13.1. Omów metody generowania niejednorodnych procesów Poissona. Wyjaśnij algorytm generowania dla niejednorodnego procesu Poissona o funkcji intensywności

$$\lambda(t) = at + b \tag{26}$$

dla odpowiednio dobranych parametrów a i b.