Modelowanie matematyczne

Niestandardowe modele

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Szeroka stosowalność programowania całkowitoliczbowego jest nieoczywista i mało znana.

Do czego tak naprawdę potrzebne są zmienne całkowite.

- żeby nie uniknąć zaokrąglenia
- do problemu przepływu
- do zmiennych binarnych i programowania logicznego - TAK

Przykład:

Niech $x \in \mathbb{R}$ oznacz ilość produkcji pewnego produktu. Wprowadzamy zmienną binarną δ, która ma oznaczać, czy ten produkt jest wytwarzany (czyli $x > 0 \Leftrightarrow \delta = 1$).

$x \leq M \cdot \delta$ oznacza $x > 0 \rightarrow \delta = 1$
$\epsilon \cdot \delta \leq x$ oznacza $\delta = 1 \Rightarrow x > \epsilon > 0$

Dzięki zmiennej δ możemy zamodelować sytuacje gdy pojawiają się dodatkowe koszty związane z produkcja danego produktu nie zależne od wytwarzanej ilości. Wtedy kosz produktu wynosi $C_1 \cdot \delta + C_2 \cdot x$

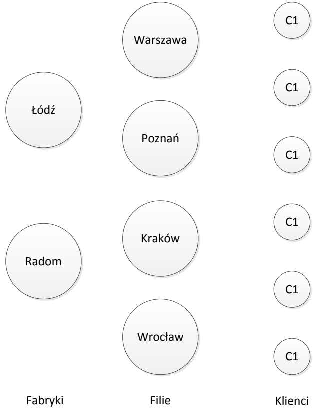
Uwaga nieliniowość a nawet nie ciągłość !!!
Warto zwrócić uwagę ze ograniczenie $\epsilon \cdot \delta \leq x$ jest zbędne.

Przykłady zastosowań zmiennych binarnych

1. Wybudowanie fabryki w danym miejscu (jeśli nie jest zbudowana to nie można wysyłać z tego miejsca produktów)
2. Jeśli biblioteka rezygnuje z prenumeraty czasopisma musi podtrzymać zamówienia jakieś czasopisma z określonej grupy czasopism.
3. Jeśli wytwarzamy produkt A musimy też produkować B i przynajmniej jeden z C lub D.
4. Jeśli lotnisko jest zamknięte żaden samolot nie może mieć na nim międzylądowania.
5. Najwyżej pięć surowców może być użytych.
6. Zadanie A musi być skończone zanim rozpoczniemy zadanie B lub odwrotnie.

A, B - zdania logiczne, δ_A, δ_B - zmienne im odpowiadające
$A \vee B$ jest równoważne $\delta_A + \delta_B \geq 1$
$A \wedge B$ jest równoważne $\delta_A = \delta_B = 1$
$\sim A$ jest równoważne $\delta_A = 0$
$A \Rightarrow B$ jest równoważne $\delta_A \leq \delta_B$
$A \Leftrightarrow B$ jest równoważne $\delta_A = \delta_B$
Jak zamodelować $A \vee B \Rightarrow C \vee D \vee E$?
$\delta_A \leq \delta_X$,
$\delta_B \leq \delta_X$,
$\delta_X \leq \delta_A + \delta_B$
$\delta_X \leq \delta_C + \delta_D + \delta_E$.

- Pewna firma ma dwie fabryki – jedną w Łodzi i jedną w Radomiu.
- Ponadto posiada cztery filie – w Warszawie, Poznaniu, Krakowie i Wrocławiu.
- Filie służą jako pośrednicy pomiędzy fabrykami a klientami.
- Firma dostarcza towar sześciu klientom $C1, C2, \dots, C6$.
- Klient może być zaopatrywany przez filię lub bezpośrednio przez fabrykę.



Problem dystrybucji

Koszty dystrybucji jednostki (1 tony) towaru przedstawione są w poniższej tabeli.

	Łódź	Radom	Warszawa	Poznań	Kraków	Wrocław
Filie						
Warszawa	0.5	–				
Poznań	0.5	0.3				
Kraków	1.0	0.5				
Wrocław	0.2	0.2				
Klienci						
C1	1.0	2.0	–	1.0	–	–
C2	–	–	1.5	0.5	1.5	–
C3	1.5	–	0.5	0.5	2.0	0.2
C4	2.0	–	1.5	1.0	–	1.5
C5	–	–	–	0.5	0.5	0.5
C6	1.0	–	1.0	–	1.5	1.5

"–" oznacza, że dany dostawca nie może obsługiwać wskazanego klienta.

Problem dystrybucji

Niektórzy z klientów wolą zaopatrywać się u dostawców (fabryk lub filii), których już znają:

- $C1$: Łódź
- $C2$: Warszawa
- $C3$: brak preferencji
- $C4$: brak preferencji
- $C5$: Poznań
- $C6$: Kraków lub Wrocław

- Każda fabryka ma miesięczny limit produkcji, który nie może zostać przekroczony
  - Łódź: 150 000 ton
  - Radom: 200 000 ton
- Każda filia również ma miesięczny limit na ilość towaru, która przez nią przepływa (przepustowość)
  - Warszawa: 70 000 ton
  - Poznań: 50 000 ton
  - Kraków: 100 000 ton
  - Wrocław: 40 000 ton
- Każdy z klientów ma określone miesięczne zapotrzebowanie
  - $C1$: 50 000 ton
  - $C2$: 10 000 ton
  - $C3$: 40 000 ton
  - $C4$: 35 000 ton
  - $C5$: 60 000 ton
  - $C6$: 20 000 ton

Pytania

1. Jak należy zaplanować dystrybucję, by zminimalizować całkowity koszt?
2. Jaki wpływ na na koszty dystrybucji będzie miało zwiększenie przepustowości fabryk i filii?
3. Jaki wpływ na na optymalne zaplanowanie dystrybucji mają małe zmiany kosztów, przepustowości i zapotrzebowania?
4. Czy da się zaplanować produkcję tak, by każdy klient był zaopatrywany przez preferowanego dostawcę? Jak wpłynie to na koszt?

Rozwiązanie

- Problem ten może być sprowadzony do problemu znalezienia najtańszego przepływu w sieci.
- Znane są algorytmy rozwiązujące problem przepływu, np. Edmondsa-Karpa czy Dinica.
- Można też zapisać problem jako zagadnienie programowania liniowego i rozwiązać za pomocą solvera liniowego.
- Wprowadźmy następującą numerację fabryk ...
  - 1 Łódź
  - 2 Radom
- ... i filii
  - 1 Warszawa
  - 2 Poznań
  - 3 Kraków
  - 4 Wrocław

Zmienne

- Wprowadźmy następujące zmienne.
    - $x_{i,j}$ = ilość towaru wysyłana z fabryki i do filii j ($i = 1, 2$ i $j = 1, 2, 3, 4$)
    - $y_{i,j}$ = ilość towaru wysyłana z fabryki i do klienta j ($i = 1, 2$ i $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)
    - $z_{i,j}$ = ilość towaru wysyłana z filii i do klienta j ($i = 1, 2, 3, 4$ i $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)
- Razem mamy 44 zmienne.

Ograniczenia

- Limity produkcji fabryk.
  - $\sum_{j=1}^{2} x_{i,j} + \sum_{j=1}^{6} y_{i,j} \leq$ limit produkcji $(i = 1, 2)$
- Przepustowości filii
  - $\sum_{i=1}^{2} x_{i,j} \leq$ przepustowość $(j = 1, 2, 3, 4)$
- Filie wydają tyle towaru, ile do nich wpływa.
  - $\sum_{k=1}^{6} z_{j,k} = \sum_{i=1}^{2} x_{i,j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$
- Zapotrzebowanie klientów.
  - $\sum_{i=1}^{2} y_{i,k} + \sum_{j=1}^{2} z_{j,k} =$ zapotrzebowanie $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$
- Razem mamy 16 ograniczeń.

- Firma z poprzedniego zadania rozważa zmiany w strukturze filii.
- Istnieje możliwość otwarcia nowych filii w Gdańsku i Szczecinie, a także rozbudowy filii w Poznaniu.
- Firma nie chce mieć więcej niż cztery filie. Jeśli to konieczne filie w Krakowie i Wrocławiu mogą zostać zamknięte.
- Koszt budowy nowych filii (lub rozbudowy filii w Poznaniu) oraz ich przepustowość przedstawia poniższa tabela.

	Koszt	Przepustowość
Gdańsk	12 000	30 000
Szczecin	4 000	25 000
Poznań (rozbudowa)	3 000	70 000

- Oszczędności wynikające z zamknięcia filii w Krakowie i Wrocławiu przedstawia poniższa tabela.

	Oszczędności
Kraków	10 000
Wrocław	5 000

- Koszty dystrybucji dotyczące nowych filii są następujące:

	Łódź	Radom	Gdańsk	Szczecin
Nowe filie				
Gdańsk	0.6	0.4		
Szczecin	0.4	0.3		
Klienci				
C1			1.2	–
C2			0.6	0.4
C3			0.5	–
C4			–	0.5
C5			0.3	0.6
C6			0.8	0.9

- Pozostałe koszty nie zmieniają się.

Problem dystrybucji – c.d.

1. Które filie powinny zostać wybudowane?
2. Czy filia w Poznaniu powinna zostać rozbudowana?
3. Czy filie w Krakowie i Wrocławiu powinny zostać zamknięte?
4. Jak teraz wygląda optymalny system dystrybucji?

- Zagadnienie liniowe dla problemu dystrybucji może zostać rozszerzone do problemu typu *mixed integer programming*.
- Do poprzedniego modelu dodamy nowe zmienne binarne, które reprezentują decyzje, czy dana filia powinna być wybudowana lub zamknięta.
  - $\delta_2 = \begin{cases} 1 & \text{filia w Poznaniu zostaje rozbudowana} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$
  - $\delta_3 = \begin{cases} 1 & \text{filia w Krakowie zostaje zachowana} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$
  - $\delta_4 = \begin{cases} 1 & \text{filia we Wrocławiu zostaje zachowana} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$
  - $\delta_5 = \begin{cases} 1 & \text{filia w Gdańsku zostaje zbudowana} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$
  - $\delta_6 = \begin{cases} 1 & \text{filia w Szczecinie zostaje zbudowana} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$
- Ponadto dodajemy ciągłe zmienne $x_{i,5}$, $x_{i,6}$, $z_{5,k}$ oraz $z_{6,k}$, reprezentujące przepływ towaru przez nowe filie.
- W modelu mamy teraz 65 zmiennych (w tym pięć decyzyjnych).

Ograniczenia

- Do modelu musimy też dodać nowe ograniczenia.
- Jeśli filia jest zamknięta lub nie jest zbudowana, żadne towary nie przepływają przez nią.
  - $\sum_{i=1}^{2} x_{i,j} \leq \delta_j \cdot T_j$, gdzie T_j jest przepustowością filii j
- Przepływ towaru przez filię w Poznaniu może być większy, jeśli zostanie ona rozbudowana.
  - $\sum_{i=1}^{2} x_{i,2} \leq 50 + 20\delta_2$.
- Mogą istnieć co najwyżej cztery filie (wliczając w to Warszawę i Poznań)
  - $\delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 \leq 2$.
- Razem mamy 21 ograniczeń.

Funkcja celu

- W funkcji celu należy uwzględnić odpowiednie koszty zmiennych $x_{i,5}$, $x_{i,6}$, $z_{5,k}$ i $z_{6,k}$.
- Ponadto należy też dodać składnik reprezentujący koszty i oszczędności wynikające z budowy i zamykania filii.
    - $3\delta_2 + 10\delta_3 + 5\delta_4 + 12\delta_5 + 4\delta_6 - 15$