Modelowanie matematyczne

Typowe modele

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

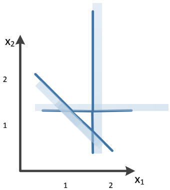
Ograniczenia

Ograniczenia w naturalny sposób związane są z problemem:

- Materiały – produkcja wymaga użycia materiałów, które występują w ograniczonych ilościach.
- Moce przerobowe – firma na ogół dysponuje ograniczonymi zasobami pracowników i maszyn.
- Rynkowe – jakiś produkt musi być produkowany przynajmniej w pewnej ilości aby był zauważalny na rynku. Z drugiej strony wiadomo, że zapotrzebowanie rynku dany produkt jest ograniczone.
- Zasady zachowania ilości – na przykład waga produktu końcowego jest równa sumie wag jego składników.
- Wymagania jakości – na przykład wymagane jest, aby finalny produkt spełniał odpowiednie parametry jakości.

Zdarza się czasem, że problem zawiera ograniczenia, które nie mogą być spełnione jednocześnie.

W konwencjonalnym podejściu po prostu stwierdzilibyśmy, że rozwiązanie nie może być znalezione.



Jednak możemy znaleźć rozwiązanie w którym ograniczenia są niespełnione najmniej na ile jest to możliwe. W literaturze takie podejście nazywa się czasem **programowaniem celowym**.

Zastępujemy wszystkie ograniczenia zgodnie ze schematem:

- $\sum_i a_i x_i \leq b$ jest zastępowane przez $\sum_i a_i x_i \leq b + u$
- $\sum_i a_i x_i = b$ jest zastępowane przez $\sum_i a_i x_i = b + u - v$

Zatem dla każdego z m ograniczeń programu liniowego dodajemy nową zmienną u_j, a dla każdego ograniczenia równościowego dodajemy jedną zmienną v_j.

- Są dwie możliwości wyboru funkcji celu.
  - Zminimalizuj sumę odchyleń lewych stron ograniczeń w stosunku do ich prawych stron:

$$\min \sum_{j=1}^{m} (u_j + v_j)$$

  - Zminimalizuj największe takie odchylenie.
    Wprowadzamy nową zmienną z i ograniczenia:

$$\begin{aligned} u_j &\leq z \text{ dla } j \in \{1, \ldots, m\} \\ v_j &\leq z \text{ dla } j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

    Funkcją celu jest po prostu

$$\min z$$

- Niech $S = \{S_1, s_2, S_3\}$ oznacza zbiór producentów, $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ zbiór klientów.
- Każdy producent ma pewną moc produkcyjną.

S_1	S_2	S_3
135	56	93

- Każdy z klientów ma określone zapotrzebowanie na towar.

T_1	T_2	T_3	T_4
62	83	39	91

- Koszty transportu towaru od producentów do klientów przedstawia tabela.

	T_1	T_2	T_3	T_4
S_1	132	∞	97	103
S_2	85	91	∞	∞
S_3	106	89	100	98

- Wartość ∞ oznacza, że nie jest możliwy transport od danego producenta do klienta.
- Wszyscy klienci muszą zostać zaopatrzeni w wymaganą ilość towaru.
- Żaden producent nie może przekroczyć swej mocy produkcyjnej.
- Celem jest minimalizacja łącznych kosztów transportu.

- $G = (S, T, E, c)$ – ważony graf dwudzielny pełny, gdzie $c_{i,j}$ jest kosztem transportu z S_i do T_j.
- Zmienne $x_{i,j}$ oznaczają ilość towaru przewożonego z S_i do T_j (jak na razie nieznaną).
- Żaden z producentów nie może przekroczyć mocy produkcyjnej.

$$\forall i \in S \quad \sum_{j \in T} x_{i,j} \leq S_i$$

- Zapotrzebowanie każdego klienta musi być spełnione.

$$\forall j \in T \quad \sum_{i \in S} x_{i,j} = T_j$$

- Minimalizujemy łączny koszt transportu.

$$\min \sum_{i \in S, j \in T} c_{i,j} x_{i,j}$$

Zagadnienie spedycji w planowaniu produkcji

- Firma pracuje na dwie zmiany. Tabela przedstawia moce produkcyjne poszczególnych zmian i zapotrzebowanie na towar.

	styczeń	luty	marzec	kwiecień
dzienna zmiana	100	150	140	160
nocna zmiana	50	75	70	80
zapotrzebowanie	80	200	300	200

- Wyprodukowanie jednostki towaru na zwykłej zmianie kosztuje 1 zł, a na nocnej 1.5 zł.
- Towar może być przechowywany w magazynie – koszt przechowywania jednej jednostki przez miesiąc wynosi 0.30 zł.
- Chcemy zaplanować produkcję, by spełnić wymagania na aktualny i przyszłe miesiące.
- Oczywiście chcemy to zrobić jak najmniejszym kosztem.

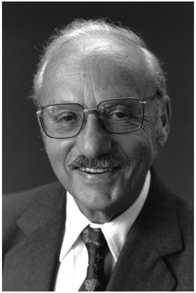
- Zagadnienie można sprowadzić do poprzedniego modelu z następującymi danymi.

	sty	lut	mar	kwi
sty (dzień)	1.0	1.3	1.6	1.9
sty (noc)	1.5	1.8	2.1	2.4
lut (dzień)	∞	1.0	1.3	1.6
lut (noc)	∞	1.5	1.8	2.1
mar (dzień)	∞	∞	1.0	1.3
mar (noc)	∞	∞	1.5	1.8
kwi (dzień)	∞	∞	∞	1.0
kwi (noc)	∞	∞	∞	1.5

- Wartość ∞ wynika z faktu, że w miesiącu k nie możemy produkować na potrzeby miesiąca $k-1$.
- Pozostałe wartości wynikają ze złożenia kosztów produkcji i kosztów składowania towaru.

- Dany jest zbiór miast $\{1, 2, \ldots, n\}$ wraz z odległościami pomiędzy nimi $(c_{i,j})$.
- Naszym celem jest znalezienie najkrótszej trasy odwiedzającej każde miasto dokładnie raz i wracającej do punktu startowego.
- Problem komiwojażera jest NP-zupełny, czyli nie znamy wielomianowego algorytmu, który go rozwiązuje.
- Zastosowanie programowania liniowego pozwoliło w 1954 roku rozwiązać problem dla 42 miast (Dantzig, Fulkerson i Johnson).

- Opisanie problemu jako zagadnienia programowania linowego.
- Znalezienie dolnego ograniczenia za pomocą algorytmu sympleks.
- Poprawienie ograniczenia przez dodawanie kolejnych ograniczeń (by otrzymać całkowitoliczbowe rozwiązanie).



- Dla każdej krawędzi wprowadzamy binarną zmienną decyzyjną $x_{i,j} \in \{0, 1\}$.
  - $x_{i,j} = 1$ jeśli krawędź $\{i, j\}$ należy do rozwiązania.
  - $x_{i,j} = 0$ jeśli krawędź $\{i, j\}$ nie należy do rozwiązania.
- Ograniczenia:
  - Trywialne ograniczenia: $0 \leq x_{i,j} \leq 1$ dla każdego $\{i, j\} \in E(G)$.
  - Ograniczenia związane ze stopniami: $\sum_{j:\ \{i,j\} \in E(G)} x_{i,j} = 2$ dla każdego $i \in V$
- Minimalizujemy łączną długość trasy $z = \min \sum_{\{i,j\} \in E(G)} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$.
- Tak sformułowany problem możemy rozwiązać algorytmem sympleks.
- Jest to jednak model niekompletny.

Problem komiwojażera

- Model nasz dopuszcza przypadek, kiedy trasa komiwojażera składa się z wielu rozłącznych cykli.
- Możemy temu zapobiec za pomocą następujących ograniczeń:

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G):\ i \in U, j \notin U} x_{i,j} \geq 2 \text{ dla każdego niepustego } U \subset V(G)$$

- Z każdego niepustego, właściwego podzbioru wierzchołków wychodzą co najmniej dwie krawędzie.
- Zwróćmy uwagę, że takich ograniczeń jest wykładniczo wiele.
- Zamiast od razu dodawać je wszystkie do modelu, rozwiązujemy problem iteracyjnie.
- W kolejnych rozwiązaniach znajdujemy rozłączne cykle i dodajemy ograniczenia związane z ich zbiorami wierzchołków.

Problem komiwojażera - rekordy

stany.pdf

- Dantzig, Fulkerson, Johnson (1954): 42 cities in the USA
- Grotschel (1977): 120 cities in (West-) Germany
- Padberg, Rinaldi (1987): 532 AT&T switch stations in the USA
- Grotschel, Holland (1987): 666 points-of-interest in the world
- Padberg, Rinaldi (1987): 2.392 drilling holes in a circuit board
- Applegate, Bixby, Chvatal, Cook (1998): 13.509 cities in the USA with >500 inhabitants

Problem komiwojażera - rekordy

- Applegate, Bixby, Chvatal, Cook (2001): 15.112 cities in Germany
- Applegate, Bixby, Chvátal, Cook, Helsgaun (2004): 24.978 cities in Sweden
- 85,900 Locations in a VLSI Application

szwecja.pdf

Problem komiwojażera - rekordy

swiat.pdf

Problem otwarty 1.904.711 miast na świecie

- Nguyen, Yoshihara, Yamamori, Yasunaga (2003): 7.518.425.642
- Helsgaun (2003): 7,517,285,610 (obrazek)
- Helsgaun (2007): 7,515,964,553 - ograniczenie dolne 7,512,218,268 czyli rozwiązanie jest najwyjżej o 0,04987% gorsze od optymalnego

Dane: Graf skierowany $D = (V, E)$, wyróżnione wierzchołki s - źródło, t-ujście, $c_{u,v}$ - górne ograniczenie na przepływ krawędzią (u, v).
Szukane przepływ czyli funkcja $f : E \to [0, \infty)$, taka, że:

1. $\forall_{(u,v)\in E} f(u, v) \leq c(u, v)$
2. $\forall_{v\in V} \sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v, u)$
3. $\sum_{(s,v)\in E} f(s, v) \to \max$

Jak zamodelować:

1. najliczniejsze skojarzenie
2. najcięższe skojarzenie
3. najlżejsze skojarzenie doskonałe
4. skojarzenie doskonałe, którego najlżejsza krawędź jest najcięższa
5. skojarzenie doskonałe, którego k-ta co do wagi krawędź jest najcięższa.
6. najmniej liczny zbiór dominujący w grafie
7. najliczniejszy/ najcięższy zbiór niezależny w grafie/klikę

Najtańszy przepływ

Dane: Graf skierowany $D = (V, E)$, $p_{u,v}$ - koszt przesyłu jednostki przepływu krawędzią (u, v), $c_{u,v}$ - górne ograniczenie na przepływ krawędzią (u, v), s_v - wartość produkcji przepływu w wierzchołku v.
Szukane przepływ czyli funkcja $f : E \to [0, \infty)$, taka, że:

1. $\forall_{(u,v)\in E} f(u, v) \leq c(u, v)$
2. $\forall_{v\in V} \sum_{(u,v)\in E} f(u, v) + s_v = \sum_{(v,u)\in E} f(v, u)$
3. $\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) \cdot p_{u,v} \to \min$

Szczególnym przypadkiem najtańszego przepływu jest problem znajdowania najkrótszej ścieżki.

Zastosowania:

- w znajdowanie najkrótszej ścieżki - np nawigacja samochodowa
- aproksymacja funkcji przy pomocy funkcji kawałkami liniową
- planowanie kontroli linii produkcyjnej

Dane: Zbiór stacji radiowych nadawczo-odbiorczych wraz z lokalizacją i zasięgiem.
Cel: Komunikacja między każdą parą stacji - czyli synchronizacja nadawania.
Ograniczenia:

- żadna stacja nie może nadawać i odbierać jednocześnie.
- stacja może nadawać tylko do stacji które są w jej zasięgu.
- stacja nie może odbierać od dwóch innych stacji jednocześnie.

Model:
Stacje utożsamiamy z punktami na płaszczyźnie i przyjmujemy że mogą się komunikować wtedy i tylko wtedy gdy ich euklidesowa odległość jest mniejsza niż zasięg.

- Tworzymy graf G, którego wierzchołkami są stacje, a krawędź łączy stacje które są wzajemnie w swoim zasięgu (po cichu przyjęliśmy założenie, że wszystkie stacje mają ten sam zasięg).
- Tworzymy graf G^2, który powstaje z G przez połączenie każdej pary wierzchołków o wspólnym sąsiedzie.
- Znajdujemy właściwe kolorowanie G^2.
- Wierzchołkom w różnych kolorach przydzielamy różne:
  - częstotliwości
  - przedziały czasowe
  - kody ortogonalne.
- korzystając z innych technik (np losowych) można zapewnić, że wierzchołki sąsiednie same w krótkim czasie ustalą między sobą, który z nich nadaje, wtedy można kolorować graf $G^2 - E(G)$.

$\rightarrow$ Jak sprowadzić problem kolorowania grafu jako zagadnienie programowania całkowitoliczbowego ?