Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

PRACA DYPLOMOWA LICENCJACKA
NA KIERUNKU MATEMATYKA

WYMIAR HAUSDORFFA ZBIORU GRANICZNEGO IFS

Autor:
Marta Sommer

Promotor:
dr Agnieszka Badeńska

Warszawa, wrzesień 2013

....

podpis promotora podpis autora

Spis treści

Streszczenie

Celem tej pracy było dowiedzenie dwóch najważniejszych twierdzeń dotyczących iterowanych układów funkcyjnych (IFS – iterated function system), czyli rodzin kontrakcji określonych na ustalonym zbiorze. Pierwsze z tych twierdzeń mówi o istnieniu atraktora dowolnego IFS-u. Drugie natomiast pozwala wyznaczyć wymiar Hausdorffa tego atraktora w przypadku, gdy dane kontrakcje są podobieństwami.

Praca zbudowana jest w następujący sposób. W rozdziale pierwszym zdefiniowałam kolejno: metrykę, miarę i wymiar Hausdorffa; znajdują się tam również niezbędne twierdzenia pomocnicze. W rozdziale drugim przytoczyłam i udowodniłam twierdzenie o istnieniu atraktora, zaś w rozdziale trzecim – twierdzenie o wymiarze atraktora. W końcowym rozdziale czwartym umieściłam trzy przykłady zastosowania twierdzenia o wymiarze fraktali. Pierwszy obrazuje sytuacje, gdy wszystkie stałe podobieństwa są takie same. Drugi, gdy są różne, lecz wymiar da się wyznaczyć metodami analitycznymi i wreszcie trzeci, w którym do obliczenia wymiaru atraktora wykorzystałam metodę bisekcji.

Wstęp

Pojęcie wymiaru jest kluczowym zagadnieniem geometrii fraktalnej — informuje nas o tym, w jakim stopniu dany fraktal zajmuje przestrzeń, w której jest osadzony. Istnieje wiele sposobów określania wymiaru zbiorów: wymiar topologiczny, pudełkowy, Hausdorffa itd. W niniejszej pracy będę skupiała się wyłącznie na wymiarze Hausdorffa, który jest najsubtelniejszym narzędziem do badania stopnia skomplikowania zbioru fraktalnego. Posiada on też jednak pewną wadę, nieco zmniejszającą jego użyteczność – w wielu przypadkach jest trudny do obliczenia. Istnieje jednak duża klasa zbiorów, dla których jest to możliwe. Są nimi na przykład atraktory (zbiory graniczne) rodzin kontrakcji, tzw. iterowanych układów funkcyjnych (IFS), zadanych podobieństwami i spełniających dodatkowo tzw. warunek zbioru otwartego. Taka konstrukcja zbioru fraktalnego wykorzystuje jego naturalną własność, jaką jest samopodobieństwo.

Kluczowym twierdzeniem w teorii IFS jest wynik mówiący o istnieniu atraktora dla dowolnych iterowanych układów funkcyjnych, nie tylko tych zadanych podobieństwami. Gdy jednak IFS jest rodziną podobieństw i założymy dodatkowo spełnienie warunku zbioru otwartego, otrzymamy twierdzenie pozwalające na łatwe obliczenie wymiaru Hausdorffa jego zbioru granicznego.

Możliwość łatwego i algorytmicznego tworzenia fraktali oraz liczenia ich wymiaru może znaleźć zastosowanie w wielu dziedzinach poza matematyką -– biologii, medycynie, ekonomii...

Rozdział 1

Podstawowe twierdzenia i własności

W tym rozdziale znajdą się używane przeze mnie w całej pracy oznaczenia oraz podstawowe definicje. Wprowadzę tu również kluczowe w dalszych rozważaniach twierdzenia i własności dotyczące kolejno metryki, miary i wymiaru Hausdorffa.

Definicja 1.1. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy kontrakcją, gdy spełnia warunek:

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \quad |f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|,$$

gdzie $c \in (0, 1)$. Liczbę c nazywamy stałą kontrakcji.

Definicja 1.2. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy podobieństwem, gdy spełnia warunek:

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \quad |f(x) - f(y)| = c|x - y|,$$

gdzie $c \in (0, +\infty)$. Liczbę c nazywamy stałą podobieństwa.

W całej pracy przez $B(x, r)$ oznaczać będę kulę otwartą o środku w x i promieniu r w metryce euklidesowej, a przez $\overline{B}(x, r)$ kulę domkniętą.

1.1. Metryka Hausdorffa

Niech D będzie niepustym i domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, a X klasą niepustych i zwartych podzbiorów D.

Definicja 1.3. Niech $\delta > 0$. δ-otoczeniem zbioru $A \subset D$ nazywamy zbiór A_δ zdefiniowany następująco:

$$A_\delta = \{x \in D : \exists_{a \in A} \ |x - a| < \delta\}.$$

Definicja 1.4. Odległością ρ między zbiorami $A, B \in X$ nazywamy:

$$\rho(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \ \text{ i } \ B \subset A_\delta\}.$$

Twierdzenie 1.1. (X, ρ) tworzą przestrzeń metryczną.

Dowód

Pokażę, że spełnione są:

1. $\forall_{A,B \in X} \;\; A = B \iff \rho(A,B) = 0$,

2. $\forall_{A,B \in X} \;\; \rho(A,B) = \rho(B,A)$,

3. $\forall_{A,B,C \in X} \;\; \rho(A,B) \leqslant \rho(A,C) + \rho(C,B)$.

Prawdziwość dwóch pierwszych warunków widać wprost z definicji. Zajmiemy się więc tylko dowodem nierówności trójkąta.

Niech $A, B, C \in X$. Ustalmy $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} &\forall_{x \in A} \;\; \exists_{y \in B} \;\; |x - y| < \rho(A,B) + \epsilon \\ &\forall_{y \in B} \;\; \exists_{z \in C} \;\; |y - z| < \rho(B,C) + \epsilon \end{aligned}$$

Zatem:

$$\forall_{x \in A} \;\; \exists_{z \in C} \;\; |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| < \rho(A,B) + \epsilon + \rho(B,C) + \epsilon = \rho(A,B) + \rho(B,C) + 2\epsilon.$$

Wynika z tego, że $A \subset C_{\rho(A,B)+\rho(B,C)+2\epsilon}$. Analogicznie $C \subset A_{\rho(A,B)+\rho(B,C)+2\epsilon}$.

Tak więc:

$$\rho(A,C) = \inf\{\delta : A \subset C_\delta \;\text{ i }\; C \subset A_\delta\} \leqslant \rho(A,B) + \rho(B,C) + 2\epsilon.$$

Czyli z dowolności $\epsilon > 0$:

$$\rho(A,C) \leqslant \rho(A,B) + \rho(B,C).$$

■

Tak zdefiniowaną metrykę ρ nazywamy metryką Hausdorffa.

Twierdzenie 1.2. (X, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną.

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w [1].

1.2. Miara Hausdorffa

Definicja 1.5. Niech $\delta > 0$. δ-pokryciem zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy rodzinę zbiorów otwartych $U_1, U_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ taką, że $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ oraz $|U_i| < \delta$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots$, gdzie $|\cdot|$ jest średnicą zbioru.

Definicja 1.6. Niech A będzie dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, ustalmy $s > 0$ oraz $\delta > 0$. Wprowadźmy oznaczenie:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,$$

gdzie infimum jest wzięte po wszystkich δ-pokryciach $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ zbioru A.

Wtedy s-wymiarową miarą Hausdorffa zbioru A nazywamy:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Granica z powyższej definicji istnieje dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$, gdyż $\mathcal{H}^s_\delta$ jest niemalejącą funkcją δ. Wynika to z tego, że zmniejszając δ zawężamy klasę dopuszczalnych pokryć, po których brane jest infimum.

Twierdzenie 1.3. s-wymiarowa miara Hausdorffa $\mathcal{H}^s$ jest miarą zewnętrzną.

Dowód

Trzeba wykazać, że spełnione są:

1. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$,
2. $\forall_{A,B \subset \mathbb{R}^n} \ A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{H}^s(A) \leqslant \mathcal{H}^s(B)$,
3. $\forall_{A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n} \ \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i)$.

Dwa pierwsze warunki są oczywiste. Wystarczy więc, że wykażemy przeliczalną addytywność. Ustalmy dowolne $\delta, \eta > 0$. Niech $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i) < \infty$ (w przeciwnym przypadku przeliczalna addytywność jest oczywista). Zdefiniujmy $(A_{i,j})_{j=1,2,\ldots}$ jako δ-pokrycie zbioru A_i takie, że:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A_i) > \sum_{j=1}^{\infty} |A_{i,j}|^s - \frac{\eta}{2^i}. \tag{1.1}$$

Stąd:

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |A_{i,j}|^s \overset{(1.1)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \frac{\eta}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \eta.$$

Z dowolności $\eta > 0$ oraz korzystając z monotoniczności $\mathcal{H}^s_\delta$ otrzymujemy:

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

Przechodząc z $\delta \longrightarrow 0^+$, dostajemy ostatecznie:

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

■

1.3. Wymiar Hausdorffa

Lemat 1.1. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy:

1. $\mathcal{H}^s(A) < \infty \implies \forall_{t>s}\ \mathcal{H}^t(A) = 0$,

2. $\mathcal{H}^s(A) > 0 \implies \forall_{t<s}\ \mathcal{H}^t(A) = \infty$.

Dowód

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \delta < 1$, a $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ będzie δ-pokryciem A.

Niech $s < t$ oraz $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Ponieważ $\mathcal{H}^t_\delta$ jest infimum po wszystkich δ-pokryciach zbioru A, więc:

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leqslant \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Czyli dla dowolnego δ-pokrycia $(U_i)_{i=1}^{\infty}$:

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leqslant \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Prawdziwe jest zatem:

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leqslant \delta^{t-s} \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Tak więc przy $\delta \longrightarrow 0^+$:

$$\mathcal{H}^t(A) \leqslant 0 \implies \mathcal{H}^t(A) = 0.$$

Udowodniliśmy więc pierwszą część lematu. Niech teraz $t < s$ oraz $\mathcal{H}^s(A) > 0$. Wtedy:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{s-t}|U_i|^t \leqslant \delta^{s-t} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t.$$

Czyli dla dowolnego δ-pokrycia $(U_i)_{i=1}^{\infty}$:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leqslant \delta^{s-t} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t.$$

Prawdziwe jest zatem:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leqslant \delta^{s-t} \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \delta^{s-t}\mathcal{H}^t_\delta(A).$$

Tak więc:

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \geqslant \frac{1}{\delta^{s-t}}\mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Zatem przy $\delta \longrightarrow 0^+$:

$$\mathcal{H}^t(A) \geqslant \infty \implies \mathcal{H}^t(A) = \infty.$$

■

Z powyższego lematu wynika, że istnieje taka liczba $s \geqslant 0$, że:

$$\begin{array}{lccc} \forall_{t>s} & \mathcal{H}^t(A) & = & 0 \\ \forall_{t<s} & \mathcal{H}^t(A) & = & \infty. \end{array}$$

Wtedy liczbę s nazywamy wymiarem Hausdorffa zbioru A i oznaczamy $\dim_H(A)$.

Równoważnie można $\dim_H(A)$ zapisać jako:

$$\dim_H(A) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

1.4. Twierdzenia pomocnicze

Poniżej zaprezentuję trzy twierdzenia, które niezbędne są do zrozumienia dowodów twierdzeń z następnych rozdziałów.

Twierdzenie 1.4. *(Mass distribution principle)* Niech μ będzie miarą borelowską na F taką, że $0 < \mu(F) < \infty$. Przypuśćmy, że dla pewnego s istnieją stałe $c > 0$ i $\delta > 0$ takie, że:

$$\forall_{U \text{ takiego, że } |U| \leqslant \delta} \quad \mu(U) \leqslant c|U|^s. \tag{1.2}$$

Wtedy $\mathcal{H}^s(F) \geqslant \frac{1}{c}\mu(F)$ oraz $s \leqslant \dim_H F$.

Dowód

Niech U_i będzie dowolnym δ-pokryciem F. Wtedy:

$$0 \leq \mu(F) \leqslant \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leqslant \sum_i \mu(U_i) \leqslant \sum_i c|U_i|^s = c\sum_i |U_i|^s.$$

A zatem:

$$\sum_i |U_i|^s \geqslant \frac{\mu(F)}{c}.$$

Bierzemy infimum po wszystkich pokryciach:

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \sum_i |U_i|^s \geqslant \frac{\mu(F)}{c}.$$

Czyli przy $\delta \to 0^+$:

$$\mathcal{H}^s(F) \geqslant \frac{1}{c}\mu(F).$$

A skoro $\mu(F) > 0$, to $\dim_H F = \sup\{t : \mathcal{H}^t(A) = \infty\} \geqslant s$.

■

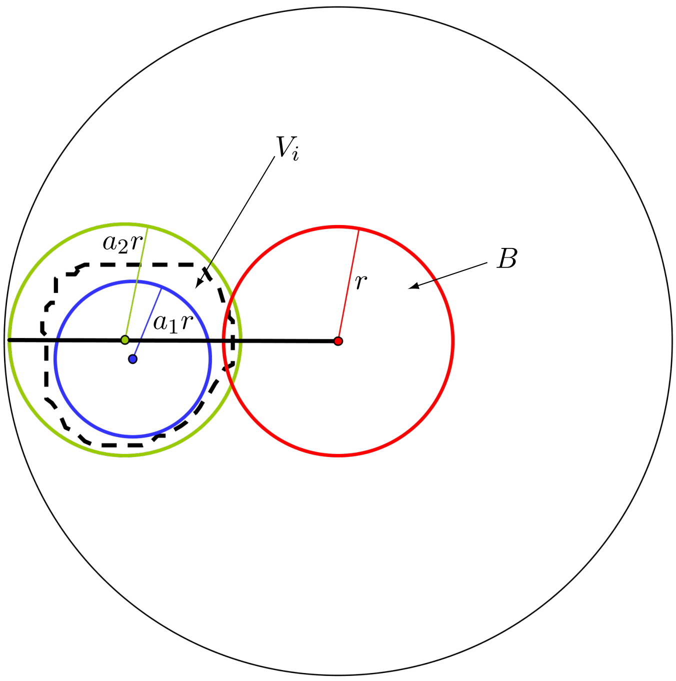
Twierdzenie 1.5. *(O jabłkach w koszyku)*

Niech $\{V_i\}$ będzie rodziną parami rozłącznych i otwartych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ takich, że każdy V_i zawiera kulę o promieniu $a_1 r$ i jest zawarty w kuli o promieniu $a_2 r$, gdzie $a_1, a_2 > 0$ i $r > 0$.

Wtedy dowolna kula B o promieniu r przecina co najwyżej $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ domknięć $\overline{V_i}$.

Dowód

Jeśli $\overline{V_i}$ przecina B, wtedy $\overline{V_i}$ jest zawarte w kuli współśrodkowej z B o promieniu $(1+2a_2)r$. Widać to na Rysunku 1.1.



Rysunek 1.1

Przypuśćmy, że q zbiorów $\overline{V_i}$ przecina B. Sumując objętości odpowiednich wewnętrznych kul o promieniach $a_1 r$, otrzymujemy wtedy:

$$q(a_1 r)^n \leqslant (1 + 2a_2)^n r^n.$$

Czyli:

$$q \leqslant (1 + 2a_2)^n a_1^{-n}.$$

■

Kluczowym twierdzeniem, potrzebnym w dalszych rozważaniach, jest twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Twierdzenie 1.6. *(Banacha o punkcie stałym)*

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną zupełną a funkcja $f : X \longrightarrow X$ kontrakcją. Wtedy:

1. f ma dokładnie jeden punkt stały x_0, tzn. istnieje dokładnie jeden punkt $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = x_0$,

2. dla każdego $x \in X$, ciąg $(x, f(x), f(f(x)), \ldots)$ jest zbieżny do x_0.

Rozdział 2

Iterowane układy funkcyjne

Definicja 2.1. Iterowanym układem funkcyjnym (IFS - *iterated function system*) nazywamy rodzinę kontrakcji $\{S_1, \ldots, S_m\}$ taką, że $S_i : D \longrightarrow D$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 2.1. Rozważmy IFS określony na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^n$ kontrakcjami $\{S_1, \ldots, S_m\}$. Wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczony atraktor F, tj. niepusty i zwarty zbiór taki, że:

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F) \tag{2.1}$$

Jeśli dodatkowo zdefiniujemy przekształcenie S na klasie X niepustych i zwartych podzbiorów D jako:

$$\forall_{E \in X} \quad S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E) \tag{2.2}$$

oraz oznaczymy przez S^k k-tą iterację S tzn.

$$\begin{cases} S^0(E) = E, \\ S^k(E) = S\left(S^{k-1}(E)\right) \quad \text{dla } \ k \geq 1, \end{cases}$$

wtedy:

$$\forall_{E \in X \ \text{ takiego, że } \ \forall_{i=1,\ldots,m} \ S_i(E) \subset E} \quad F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E). \tag{2.3}$$

Przedstawimy dwa dowody powyższego twierdzenia.

Dowód pierwszy

Niech $S_1, \ldots, S_m$ będą kontrakcjami. Oznaczmy ich stałe kontrakcji odpowiednio przez $c_1, \ldots, c_m$. Zauważmy, że S przekształca zbiory z X na zbiory z X. Do dowodu wykorzystamy poniższy fakt.

Lemat 2.1. Jeśli wszystkie przekształcenia $S_1, \ldots, S_m \colon D \longrightarrow D$ są kontrakcjami, to przekształcenie $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i \colon X \longrightarrow X$ też jest kontrakcją w metryce Hausdorffa.

Dowód

Przypomnijmy, że D jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, a X jest klasą niepustych i zwartych podzbiorów D.

Istnieje liczba $c = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i < 1$ taka, że:

$$\forall_{p,q \in D} \ \forall_{i=1,\ldots,m} \quad |S_i(p) - S_i(q)| \leqslant c|p-q|.$$

Niech $A, B \in X$ i ustalmy dowolny $\epsilon > 0$. Wtedy:

$$\forall_{p \in A} \ \exists_{q \in B} \quad |p-q| \leqslant \rho(A,B) + \epsilon,$$

gdzie ρ jest metryką Hausdorffa. Oznaczmy $\rho(A,B)$ jako δ. Przykładowym punktem q będzie należący do B środek koła o promieniu $\delta + \epsilon$, które zawiera punkt p.

Wówczas:

$$\forall_{i=1,\ldots,m} \quad |S_i(p) - S_i(q)| \leqslant c|p-q| \leqslant c(\rho(A,B)+\epsilon) = c(\delta+\epsilon).$$

Czyli:

$$S_i(A) \subset (S_i(B))_{c(\delta+\epsilon)}\,.$$

Stąd:

$$S(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A) \subset \bigcup_{i=1}^{m} (S_i(B))_{c(\delta+\epsilon)} \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(B) \right)_{c(\delta+\epsilon)} = (S(B))_{c(\delta+\epsilon)}\,.$$

Analogicznie $S(B) \subset (S(A))_{c(\delta+\epsilon)}$.

Zatem:

$$\rho\left(S(A), S(B)\right) \leqslant c(\delta+\epsilon) = c(\rho(A,B)+\epsilon).$$

A ponieważ $\epsilon > 0$ był dowolny, więc $\rho\left(S(A), S(B)\right) \leqslant c\rho(A,B)$. S jest więc rzeczywiście kontrakcją.

■

Wróćmy teraz do dowodu naszego twierdzenia. Wiemy już, że S jest kontrakcją na (X, ρ), natomiast ρ jest zupełną metryką na X (patrz Twierdzenie 1.2). Spełnione są więc założenia Twierdzenia 1.6 – twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Zatem, jako wniosek z tego twierdzenia, otrzymujemy, że S ma jednoznacznie wyznaczony punkt stały F. Czyli $S(F) = F$, co dowodzi równości (2.1).

Co więcej, $S^k(E) \longrightarrow F$, gdy $k \longrightarrow \infty$, dla dowolnego zbioru $E \in X$. W szczególności, jeśli $S_i(E) \subset E$ dla każdego i, wtedy $S(E) \subset E$ i $\{S^k(E)\}_{k=1}^{\infty}$ jest zstępującą rodziną zbiorów niepustych i zwartych. Czyli $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$, co dowodzi równości (2.3).

■

Dowód drugi

Niech $E \in X$ będzie zbiorem takim, że $S_i(E) \subset E$ dla każdego $i = 1, \dots, m$. Taki zbiór istnieje – weźmy na przykład $E = D \cap \overline{B}(0, r)$ dla odpowiednio dużego $r > 0$. Uzasadnimy, że da się tak dobrać r, aby zbiór E spełniał żądany warunek.

Wiemy, że $S_i(D) \subset D$ (z definicji S_i). Jeśli znajdziemy takie $r > 0$, dla którego $S_i(\overline{B}(0, r)) \subset \overline{B}(0, r)$, wtedy będziemy mieć, że $S_i(D \cap \overline{B}(0, r)) \subset D \cap \overline{B}(0, r)$.

Jeśli przyjmiemy, że $y_i := S_i(0)$, wtedy:

$$S_i(\overline{B}(0, r)) \subset \overline{B}(y_i, c_i r).$$

Wynika to z poniższej nierówności:

$$|y_i - S_i(x)| = |S_i(0) - S_i(x)| \leqslant c_i|0 - x| = c_i|x| \leqslant c_i r,$$

gdzie $x \in \overline{B}(0, r)$.

Chcemy, żeby $S_i(\overline{B}(0, r)) \subset \overline{B}(y_i, c_i r) \subset \overline{B}(0, r)$. Szacujemy więc r w następujący sposób:

$$\begin{aligned} r &> |y_i| + c_i r \\ r(1 - c_i) &> |y_i| \\ r &> \frac{|y_i|}{1 - c_i}, \text{ bo } c_i < 1 \end{aligned}$$

Zatem dla odpowiednio dużego r wybrany zbiór $E = D \cap \overline{B}(0, r)$ spełnia warunek $S_i(E) \subset E$.

Wtedy $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$ dla dowolnego $k \geqslant 1$.

Czyli $\{S^k(E)\}_{k=0}^{\infty}$ jest zstępującą rodziną zbiorów niepustych i zwartych (bo E jest domknięty – jako przecięcie zbiorów domkniętych – i ograniczony), więc przecięcie $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$ jest niepuste i zwarte. Wynika to z twierdzenia, że zstępująca rodzina zbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie.

Wtedy:

$$S(F) = S\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)\right) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S(S^k(E)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^{k+1}(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n(E) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S^n(E) = F.$$

Tak więc F spełnia równość (2.2), czyli jest atraktorem IFS. Sprawdźmy, czy jest atraktorem wyznaczonym jednoznacznie.

Niech A, B będą atraktorami IFS, w szczególności: $S(A) = A$ oraz $S(B) = B$.

Ponieważ S jest kontrakcją ze stałą $c = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i$, $0 < c < 1$ (patrz Lemat 2.1), więc:

$$\begin{aligned} \rho(S(A), S(B)) &\leqslant c\rho(A, B) \\ \rho(A, B) &\leqslant c\rho(A, B) \\ \rho(A, B) - c\rho(A, B) &\leqslant 0 \\ \rho(A, B)(1 - c) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Ponieważ $c < 1$, to $\rho(A, B) \leqslant 0$. Zatem $\rho(A, B) = 0$. Z definicji metryki wiemy zaś, że wtedy $A = B$.

■

Rozdział 3

Twierdzenie o wymiarze fraktali

Definicja 3.1. Funkcje $S_1, \ldots, S_m$ takie, że $S_i : D \longrightarrow D$, spełniają warunek zbioru otwartego (*open set condition*), jeśli istnieje niepusty, ograniczony i otwarty zbiór V taki, że:

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \subset V$$

oraz $S_i(V)$ są parami rozłączne dla $i = 1, \ldots, m$.

Twierdzenie 3.1. Przypuśćmy, że podobieństwa $S_1, \ldots, S_m$ określone na $\mathbb{R}^n$ ze stałymi $c_i \in (0, 1)$ dla $i = 1, \ldots, m$, spełniają warunek zbioru otwartego.

Jeśli F jest atraktorem IFS $\{S_1, \ldots, S_m\}$ tzn.

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

wtedy $\dim_H F = s$, gdzie s jest rozwiązaniem równania:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1. \tag{3.1}$$

Co więcej, dla tej wartości s, $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Dowód

Niech s spełnia (3.1) tzn. $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.

Niech I_k będzie zbiorem zawierającym ciągi długości k o elementach ze zbioru $\{1, \ldots, m\}$.

Dla dowolnego zbioru A i dla każdego ciągu $(i_1, \ldots, i_k) \in I_k$ definiujemy:

$$A_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(A) = S_{i_1}(\ldots(Si_k(A))\ldots).$$

Zauważmy, że wtedy:

$$F = \bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Poniżej przedstawię krótkie uzasadnienie tego faktu.

$$F \overset{(2.3)}{=} \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(F) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{I_k} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k},$$

czyli $F \subset \bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k}$. A ponieważ $F_{i_1,\ldots,i_k} \subset F$, więc $\bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k} \subset F$, czyli ostatecznie $F = \bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k}$ dla każdego k.

Otrzymujemy więc pewne pokrycie F. Dzięki niemu dostaniemy górne ograniczenie miary i wymiaru Hausdorffa atraktora.

Zauważmy najpierw, że $S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}$ jest podobieństwem o stałej $c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$.

Wtedy mamy, że:

$$\sum_{I_k} |F_{i_1,\ldots,i_k}|^s = \sum_{I_k} |S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F)|^s = \sum_{I_k} (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}|F|)^s = \sum_{I_k} (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s |F|^s =$$

$$= \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) |F|^s = 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot |F|^s = |F|^s.$$

Tak więc pokazaliśmy, że:

$$\sum_{I_k} |F_{i_1,\ldots,i_k}|^s = |F|^s,$$

gdzie $\{F_{i_1,\ldots,i_k}\}$ jest pokryciem F. Dla każdej $\delta > 0$ możemy wybrać k takie, że:

$$|F_{i_1,\ldots,i_k}| \leqslant c^k |F| \leqslant \delta,$$

gdzie $c = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i$.

Wynika to z poniższego rachunku:

$$|F_{i_1,\ldots,i_k}| = |S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F)| = c_{i_1} \ldots c_{i_k} |F| \leqslant \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i \right)^k |F| \leqslant c^k |F| \leqslant \delta$$

dla odpowiednio dużego k, gdyż $c \in (0, 1)$.

Ponieważ $\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \sum_i |U_i|^s$, gdzie infimum jest jest wzięte po wszystkich δ-pokryciach F, a $\{F_{i_1,\ldots,i_k}\}$ jest δ-pokryciem F, więc:

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) \leqslant \sum_{I_k} |F_{i_1,\ldots,i_k}|^s = |F|^s.$$

Zatem $\mathcal{H}^s(F) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(F) \leqslant |F|^s < \infty$ oraz $\dim_H(F) = \inf\{t : \mathcal{H}^t(F) = 0\} \leqslant s$.

Uzyskanie dolnego ograniczenia będzie trochę bardziej skomplikowane.

Zdefiniujemy zbiór $I = \{(i_1, i_2, \ldots) : 1 \leqslant i_j \leqslant m\}$, czyli zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach z $\{1, \ldots, m\}$ oraz zbiór $J_{i_1,\ldots,i_k} = \{(i_1, \ldots, i_k, q_{k+1}, q_{k+2} \ldots) : \; 1 \leqslant i_j \leqslant m, \; 1 \leqslant q_j \leqslant m\}$, czyli zbiór ciągów nieskończonych o ustalonych k pierwszych wyrazach (tzw. cylinder długości k).

Możemy teraz zdefiniować miarę μ na pewnych podzbiorach I. Żeby to zrobić definiujemy najpierw funkcję μ na cylindrach $J_{i_1,\ldots,i_k}$, a następnie rozszerzymy ją na σ-ciało generowane przez cylindry. Niech więc:

$$\mu(J_{i_1,\ldots,i_k}) := (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s.$$

Zauważmy, że:

$$(c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^{m} (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} \cdot c_i)^s.$$

Wynika to z poniższych równości:

$$\sum_{i=1}^{m} (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} \cdot c_i)^s = (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s \sum_{i=1}^{m} c_i^s = (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s \cdot 1 = (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s$$

A zatem:

$$\mu(J_{i_1,\ldots,i_k}) = (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^{m} (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} \cdot c_i)^s = \sum_{i=1}^{m} \mu(J_{i_1,\ldots,i_k,i}).$$

Czyli:

$$\mu(J_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{i=1}^{m} \mu(J_{i_1,\ldots,i_k,i}).$$

Wynika z tego, że μ jest funkcją σ-addytywną na ciele zbiorów zawierających cylindry. Można również zauważyć, że:

$$\mu(I) = \sum_{I_k} \mu(J_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{I_k} \sum_{i=1}^{m} \mu(J_{i_1,\ldots,i_k,i}) = \sum_{I_k} \sum_{i=1}^{m} (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} \cdot c_i)^s =$$
$$= \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} c_i^s \right) = 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1.$$

Zatem $\mu(I) = 1$.

Następnym krokiem jest zdefiniowanie miary zewnętrznej μ^* na 2^I:

$$\mu^*(C) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A_i - \text{cylindry oraz } C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Na mocy twierdzenia Carathéodory'ego obcięcie μ^* do σ-ciała zbiorów mierzalnych (generowanego przez cylindry) jest miarą. Będziemy ją oznaczali μ.

Niech E będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Jeśli $S_i(E) \subset E$ dla każdego $i = 1, \ldots, m$, a $x \in F$, to z (2.3) wynika, że istnieje ciąg $(i_1, i_2, \ldots)$, niekoniecznie jedyny, taki, że $x \in S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(E)$ dla każdego k. Ten ciąg pozwala zdefiniować pewne naturalne kodowanie dla x. Mianowicie $\{x\} = \{x_{i_1,i_2,\ldots}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(E)$. Wtedy $F = \bigcup_I \{x_{i_1,i_2,\ldots}\}$. Dzięki temu kodowaniu, możemy w naturalny sposób przekształcić miarę μ zdefiniowaną na σ-ciele generowanym przez cylindry na miarę $\tilde{\mu}$ zdefiniowaną na podzbiorach F w sposób opisany poniżej.

Zdefiniujmy rzutowanie $\Pi : I \longrightarrow F$ w następujący sposób:

$$\Pi(i_1, i_2, \ldots) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Zauważmy, że Π jest "na", ale niekoniecznie "1-1".

Dla zbiorów A takich, że przeciwobraz $\Pi^{-1}(A)$ jest μ-mierzalny, możemy zdefiniować:

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(\Pi^{-1}(A)).$$

Tak więc miara $\tilde{\mu}$ zbioru jest miarą μ kodów elementów należących do tego zbioru. Widać zatem, że $\tilde{\mu}(F) = 1$.

Wprowadźmy topologię na I jako najmniejszą topologię zawierającą wszystkie cylindry. Można pokazać, że wtedy Π jest ciągłe. A z tego wynika, że $\tilde{\mu}$ jest miarą borelowską.

Pokażemy teraz, że $\tilde{\mu}$ spełnia założenia Twierdzenia 1.4.

Niech V będzie zbiorem z definicji warunku zbioru otwartego, czyli $S(V) \subset V$, V – niepusty, ograniczony i otwarty oraz $S_i(V)$ są parami rozłączne.

Z ciągłości podobieństw S_i wiemy, że:

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i\left(\overline{V}\right) = S\left(\overline{V}\right) \subset \overline{V}.$$

Na mocy (2.3), $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(\overline{V})$, bo $S(\overline{V}) \subset \overline{V}$ oraz $\overline{V}$ jest niepusty, domknięty i ograniczony, czyli niepusty i zwarty w $\mathbb{R}^n$.

W szczególności $F \subset \overline{V}$ oraz

$$F_{i_1,\ldots,i_k} \subset \overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}, \tag{3.2}$$

gdyż $F_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F) \subset S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(\overline{V}) = \overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}$ dla każdego ciągu $(i_1 \ldots, i_k)$.

Niech B będzie kulą o ustalonym promieniu $0 < r < 1$.

Szacujemy $\tilde{\mu}(B)$ rozważając zbiory $V_{i_1,\ldots,i_k}$ o średnicach porównywalnych z $|B|$ i z domknięciami przecinającymi $F \cap B$.

Obcinamy każdy nieskończony ciąg $(i_1, i_2, \ldots) \in I$ po pierwszym wyrazie i_k, dla którego:

$$\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i\right) \cdot r \leqslant c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k} \leqslant r \tag{3.3}$$

Takie i_k będzie istniało dla każdego ciągu. Wynika to z poniższej konstrukcji.

Weźmy dowolny ciąg $(i_1, i_2, \ldots) \in I$. Niech k będzie najmniejszym indeksem, dla którego $c_{i_1} \ldots c_{i_k} \leqslant r$.

Dla $k > 1$ mamy wtedy $c_{i_1} \ldots c_{i_{k-1}} > r$, zatem:

$$c_{i_1} \ldots c_{i_{k-1}} \cdot c_{i_k} > r \cdot c_{i_k} \geqslant r \cdot \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i\right)$$

Niech Q stanowi zbiór wszystkich skończonych ciągów otrzymanych w ten sposób. Q jest skończony, bo dla $0 < r < 1$:

$$\exists_{K>0} \quad \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i\right)^K \leqslant r.$$

Czyli długość ciągów z Q nie przekracza K. Skończonych ciągów długości nie większej niż K o wyrazach z $\{1, \ldots, m\}$ jest nie więcej niż m^k, czyli skończenie wiele.

Zatem, przy tak zdefiniowanym Q, dla każdego nieskończonego ciągu $(i_1, i_2, \ldots) \in I$ istnieje dokładnie jedna wartość k, dla której $(i_1, \ldots, i_k) \in Q$.

Ponieważ zbiory $V_1, \ldots, V_m$, gdzie $V_j = S_j(V)$, są parami rozłączne (patrz Definicja 3.1), więc $V_{i_1,\ldots,i_k,1}, \ldots, V_{i_1,\ldots,i_k,m}$ też są parami rozłączne dla każdego $(i_1, \ldots, i_k) \in Q$.

A zatem zbiory otwarte $V_{i_1,\ldots,i_k}$ dla $(i_1, \ldots, i_k) \in Q$ są parami rozłączne.

Zatem:

$$F \subset \bigcup_{Q} F_{i_1,\ldots,i_k} \subset \bigcup_{Q} \overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Drugie zawieranie otrzymujemy natychmiast z (3.2). Pierwsze natomiast krótko wyjaśnimy poniżej.

Niech $x \in F$. Wtedy punktowi x można przypisać kod $(i_1, i_2, i_3, \ldots)$ taki, że $x \in F_{i_1,\ldots,i_k}$ dla każdego k. Gdy go obetniemy po pierwszym i_k spełniającym (3.3), to otrzymamy, że $x \in F_{i_1,\ldots,i_k}$, gdzie $(i_1, \ldots, i_k) \in Q$.

Wybieramy teraz $a_1 > 0$ i $a_2 > 0$ takie, że V zawiera kulę o promieniu a_1 (to jest możliwe, bo V jest otwarty) oraz jest zawarty w kuli o promieniu a_2 (to jest możliwe, bo V jest ograniczony).

Wtedy dla każdego $(i_1, \ldots, i_k) \in Q$, zbiór $V_{i_1,\ldots,i_k}$ zawiera kulę o promieniu $c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} \cdot a_1$, a zatem również kulę o promieniu $a_1 \cdot r \cdot \min_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i$ – na mocy (3.3) – oraz jest zawarty w kuli o promieniu $c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} \cdot a_2$, a zatem również w kuli o promieniu $a_2 r$.

Niech Q_1 będzie zbiorem tych ciągów $(i_1, \ldots, i_k) \in Q$, dla których B przecina $\overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}$. Korzystając z Twierdzenia 1.5, mamy co najwyżej $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ ciągów w Q_1. Wtedy:

$$\tilde{\mu}(B) := \tilde{\mu}(F \cap B) = \mu(\{(i_1, i_2, \ldots) : x_{i_1,i_2,\ldots} \in F \cap B\}) \leqslant \mu\left(\bigcup_{Q_1} I_{i_1,\ldots,i_k}\right).$$

Na Rysunku 3.1 łatwo widać, dlaczego $F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} F_{i_1,\ldots,i_k}$.

Tak więc:

$$\tilde{\mu}(B) \leqslant \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \ldots c_{i_k})^s \leqslant \sum_{Q_1} r^s \leqslant q r^s.$$

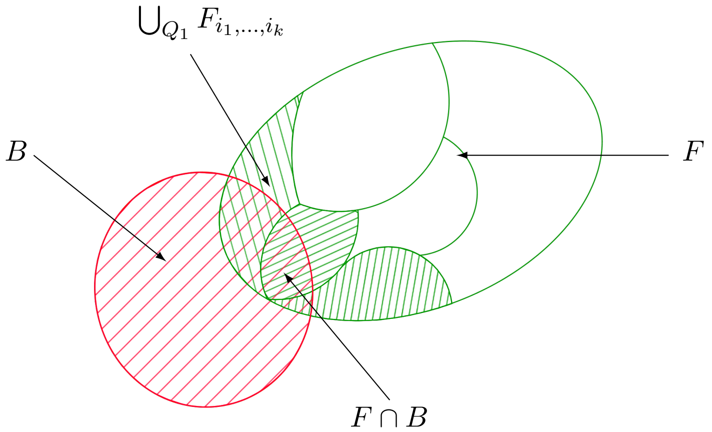
Ponieważ dowolny zbiór U jest zawarty w kuli o promieniu $|U|$, zatem:

$$\tilde{\mu}(U) \leqslant |U|^s q.$$

Tak więc z Twierdzenia 1.4 mamy: $\mathcal{H}^s(F) \geqslant \frac{1}{q} > 0$ oraz $\dim_H F \geqslant s$.

Czyli ostatecznie $\dim_H F = s$ oraz $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

■



Rysunek 3.1

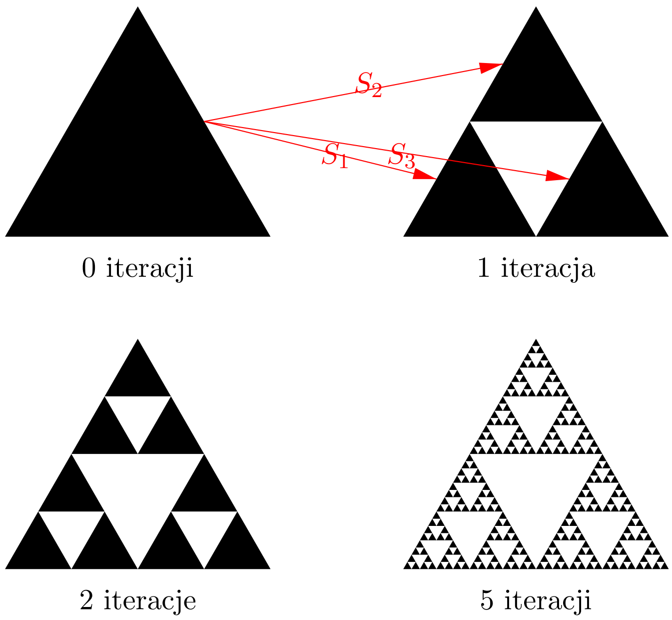
Rozdział 4

Przykłady

W tym rozdziale przytoczę trzy przykłady zastosowania Twierdzenia 3.1.

4.1. Przykład 1.

Pierwszy przykład obrazuje sytuację, gdy wszystkie stałe podobieństwa są takie same. Przeanalizujmy fraktal zwany trójkątem Sierpińskiego – Rysunek 4.1.



Rysunek 4.1

Iterowany układ funkcyjny składa się tu z trzech funkcji opisanych poniższymi wzorami:

$$\begin{aligned} S_1(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), \\ S_2(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \\ S_3(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right). \end{aligned}$$

Są one podobieństwami odpowiednio o stałych $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2} < 1$.

W oczywisty sposób spełniony jest tu też warunek zbioru otwartego.

Możemy zatem skorzystać z Twierdzenia 3.1. Wymiar atraktora F tego IFS-u wynosi $\dim_H F = s$, gdzie s jest rozwiązaniem równania:

$$\sum_{i=1}^{3} c_i^s = 1.$$

Wyznaczmy s:

$$\begin{aligned} c_1^s + c_2^s + c_3^s &= 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s &= 1 \\ 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s &= 1 \\ 2^s &= 3 \\ s &= \log_2 3 = 1.58496\ldots \end{aligned}$$

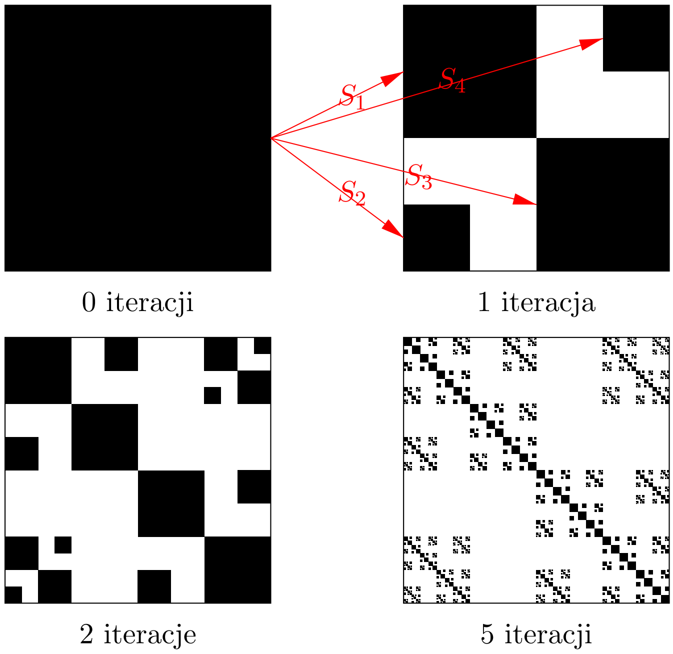
Wymiar Hausdorffa trójkąta Sierpińskiego jest więc równy $\log_2 3 \approx 1.58$.

4.2. Przykład 2.

Fraktal na Rysunku 4.2 otrzymujemy przy pomocy IFS-u zadanego funkcjami:

$$\begin{aligned} S_1(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right), \\ S_2(x,y) &= \left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{4}y\right), \\ S_3(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right), \\ S_4(x,y) &= \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}, \frac{3}{4}y + \frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Stałe podobieństwa wynoszą więc odpowiednio: $c_1 = c_3 = \frac{1}{4}$, $c_2 = c_4 = \frac{1}{2}$.



Rysunek 4.2

Korzystając z Twierdzenia 3.1, musimy więc rozwiązać równanie:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{s} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{s} = 1$$
$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{s} = 1$$

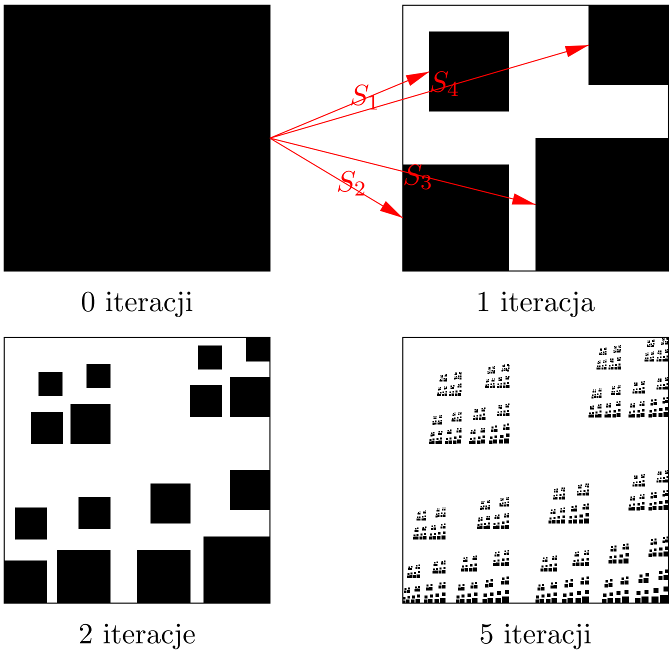
Wykonajmy podstawienie: $\left(\frac{1}{2}\right)^s = x$. Otrzymujemy wtedy równanie kwadratowe $2x^2 + 2x - 1 = 0$, którego pierwiastkami są $x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ oraz $x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < 0$. Zatem:

$$(\frac{1}{2})^s = x_1$$
$$2^s = \frac{1}{x_1}$$
$$s = \log_2 \frac{1}{x_1} = \log_2 \frac{2}{-1+\sqrt{3}} = 1.449984\ldots$$

Wymiar Hausdorffa tak utworzonego fraktala jest więc równy $\log_2 \frac{2}{-1+\sqrt{3}} \approx 1.45$.

4.3. Przykład 3.

W poprzednich przykładach mogliśmy obliczyć wymiar Hausdorffa atraktora IFS analitycznie. Teraz zaprezentuję przykład – Rysunek 4.3 – który prowadzi do równania bardziej skomplikowanego.



Rysunek 4.3

Niech IFS dany będzie funkcjami:

$$\begin{aligned} S_1(x,y) &= (0.3x+0.1, 0.3y+0.6),\\ S_2(x,y) &= (0.4x, 0.4y),\\ S_3(x,y) &= (0.5x+0.5, 0.5y),\\ S_4(x,y) &= (0.3x+0.7, 0.3y+0.7). \end{aligned}$$

Stałe podobieństwa wynoszą odpowiednio: $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.4$, $c_3 = 0.5$, $c_4 = 0.3$.

Otrzymujemy więc równanie: $\sum\limits_{i=1}^{4} c_i^s = 1$.

$$\begin{aligned} 0.4^s + 0.5^s + 0.3^s + 0.3^s &= 1\\ 0.4^s + 0.5^s + 2 \cdot 0.3^s &= 1 \end{aligned}$$

Jako, że nie da się wyznaczyć s analitycznie, oszacuję rozwiązanie przy pomocy numerycznej metody bisekcji dla funkcji $f(x) = 0.4^s + 0.5^s + 2 \cdot 0.3^s - 1$ na przedziale $[1, 2]$.

Zanim jednak przejdę do obliczenia wymiaru atraktora, opiszę krótko, na czym polega metoda bisekcji.

Celem tej metody jest znalezienie miejsca zerowego funkcji $f(x)$ na zadanym przedziale $[a, b]$. Funkcja ta musi spełniać dwa założenia:

- na krańcach przedziału musi mieć przeciwne znaki tzn. $f(a)f(b) < 0$,

- musi być ciągła na przedziale $[a, b]$.

Metoda ta opiera się na poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 4.3.1. Jeśli $f(a) < 0 < f(b)$ lub $f(a) > 0 > f(b)$ oraz f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f(x_0) = 0$.

Algorytm przedstawia się następująco:

1. Dzielimy przedział na dwie równe części. Punkt środkowy będzie średnią arytmetyczną krańców przedziału tzn. $x_{sr} = \frac{a+b}{2}$.

2. Jeśli wartość funkcji w punkcie x_{sr} jest równa lub dostatecznie bliska zeru, to kończymy algorytm, a punkt x_{sr} traktujemy jako nasze szukane miejsce zerowe. W tym celu ustalamy zadowalającą nas stałą $\epsilon > 0$ tak, aby algorytm mógł się zakończyć wtedy, gdy $|f(x_{sr})| < \epsilon$. Alternatywnym warunkiem stopu jest wykonywanie algorytmu dopóki długość przedziału nie będzie mniejsza niż narzucona przez nas stała δ tzn. do momentu, gdy $|b - a| < \delta$.

3. W przeciwnym przypadku $f(x_{sr})$ jest mniejsza lub większa od zera. Wybieramy zatem przedział, na którego krańcach wartość funkcji ma przeciwne znaki. Powtarzamy algorytm dla tak otrzymanego przedziału.

Algorytm kończymy, gdy spełniony będzie wreszcie warunek z podpunktu drugiego.

Korzystając z tej metody, po czterdziestu iteracjach uzyskałam $s \simeq 1.428292002903$. Błąd będzie zatem wynosił $\max\{2^{-40}, 10^{-12}\} = 10^{-12}$, gdzie $\delta = 2^{-40}$ to dokładność metody bisekcji dla czterdziestu iteracji, a 10^{-12} jest dokładnością obliczeń komputera.

Wymiar Hausdorffa atraktora tego fraktala jest więc równy w przybliżeniu 1.43.

Literatura

[1] G. Edgar: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, Columbus, 2000

[2] K. Falconer: *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 2003

Marta Sommer
Nr albumu 237503

Warszawa, 30 listopada 2013

Oświadczenie

Oświadczam, że pracę licencjacką pod tytułem „Wymiar Hausdorffa zbioru granicznego IFS", której promotorem jest dr Agnieszka Badeńska wykonałam samodzielnie, co poświadczam własnoręcznym podpisem.

....
Marta Sommer