

Modelowanie matematyczne

wykład 5

Niestandardowe modele



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

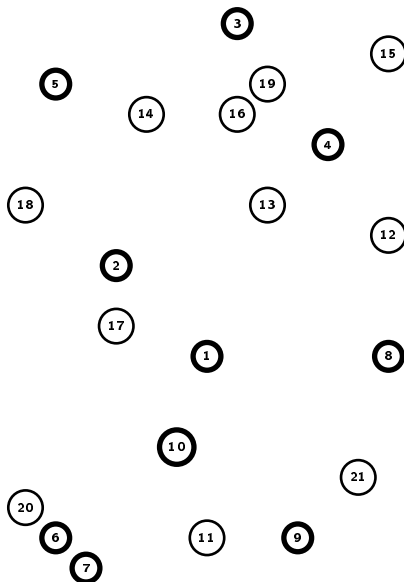
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



- Mała firma skupuje mleko z 20 gospodarstw, a następnie przewozi je do mleczarni w celu przetworzenia.
- Firma ma jedną ciężarówkę z cysterną o pojemności 80 000 litrów.
- 11 gospodarstw jest małych i trzeba je odwiedzać tylko co drugi dzień.
- Z pozostałych 9 gospodarstw mleko musi być odbierane codziennie.
- Tabela pokazuje położenie gospodarstw względem mleczarni, wielkość ich produkcji oraz wymaganą częstotliwość odwiedzania.

Tabela pokazuje położenie gospodarstw względem mleczarni, wielkość ich produkcji oraz wymaganą częstotliwość odwiedzania.

Gospodarstwo	Położenie (*10 km)		Częstotliwość	Wielkość produkcji (w 1000 l)
	Wschód	Północ		
mleczarnia 1	0	0	–	–
2	-3	3	codziennie	5
3	1	11	codziennie	4
4	4	7	codziennie	3
5	-5	9	codziennie	6
6	-5	-2	codziennie	7
7	-4	-7	codziennie	3
8	6	0	codziennie	4
9	3	-6	codziennie	6
10	-1	-3	codziennie	5
11	0	-6	co drugi dzień	4
12	6	4	co drugi dzień	7
13	2	5	co drugi dzień	3
14	-2	8	co drugi dzień	4
15	6	10	co drugi dzień	5
16	1	8	co drugi dzień	6
17	-3	1	co drugi dzień	8
18	-6	5	co drugi dzień	5
19	2	9	co drugi dzień	7
20	-6	-5	co drugi dzień	6
21	5	-4	co drugi dzień	6



Pogrubione gospodarstwa muszą być odwiedzane codziennie.

- Znajdź optymalną drogę dla ciężarówki każdego dnia.
- Ciężarówka nie może przekroczyć swojej pojemności.
- Każdego dnia ciężarówka musi odwiedzić każde gospodarstwo spośród 2–10 i część gospodarstw 11–21.
- Następnego dnia ciężarówka musimy odwiedzić każde gospodarstwo spośród 2–10 i wszystkie pozostałe gospodarstwa spośród 11–21.

- Problem dostaw mleka jest modyfikacją znanego problemu komiwojażera.
- Algorytmy dedykowane dla problemu komiwojażera nie zadziałają tutaj bez daleko idących modyfikacji.
- Sformułujemy problem jako zagadnienie programowania matematycznego (całkowitoliczbowe).
- Zauważmy rozważyć dwa dni – nieparzysty "1" i parzysty "2".

- Wprowadzamy następujące zmienne:

- $$x_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w dniu } k \text{ łączymy bezpośrednio } i \text{ i } j \text{ (w dowolnym kierunku)} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

dla $i < j$ i $k = 1, 2$.

- $$y_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli farma } i \text{ jest odwiedzona w dniu } k \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

dla $i = 11, \dots, 21$ i $k = 1, 2$.

- Razem mamy 442 zmiennych (wszystkie binarne).

- Pojemność cysterny jest ograniczona.
 - $\sum_i K_i \cdot y_{i,k} \leq C$ dla $k = 1, 2$
gdzie K_i jest produkcją gospodarstwa i , a C pojemnością cysterny
- Niektóre gospodarstwa muszą być odwiedzane co drugi dzień.
 - $y_{i,1} + y_{i,2} = 1$ dla $i = 11, \dots, 21$
- Konieczność odwiedzenia wszystkich gospodarstw 2–10 dokładnie raz daje ograniczenie:
 - $\sum_{j:j>i} x_{i,j,k} + \sum_{j:j<i} x_{j,i,k} = 2$ dla $i = 2, \dots, 11$ i $k = 1, 2$
- Podobnie postępujemy dla gospodarstw 11–21, pamiętając które są odwiedzane którego dnia.
 - $\sum_{j:j>i} x_{i,j,k} + \sum_{j:j<i} x_{j,i,k} - 2 \cdot y_{i,k} = 0$ dla $i = 11, \dots, 21$ i $k = 1, 2$

- Zauważmy, że jeśli gospodarstwo nie jest odwiedzane danego dnia, nie jest też połączone z żadnym innym.
 - $x_{i,j,k} - y_{i,k} \leq 0$ dla $i = 11, \dots, 21, j = 1, \dots, 21, j > i, k = 1, 2$
 - $x_{j,i,k} - y_{i,k} \leq 0$ dla $i = 11, \dots, 21, j = 1, \dots, 21, j > i, k = 1, 2$
- Dodanie tych ograniczeń przyspieszy obliczenia (i nie zmieni ich wyniku).
- Ponadto możemy założyć, że gospodarstwo 11 jest odwiedzane pierwszego dnia.
 - $y_{11,1} = 1$
- Pozwoli to uniknąć rozważania rozwiązań symetrycznych i przyspieszy obliczenia.
- Razem mamy 65 ograniczeń.

- Minimalizujemy łączną trasę przebytą przez ciężarówkę podczas obu dni.

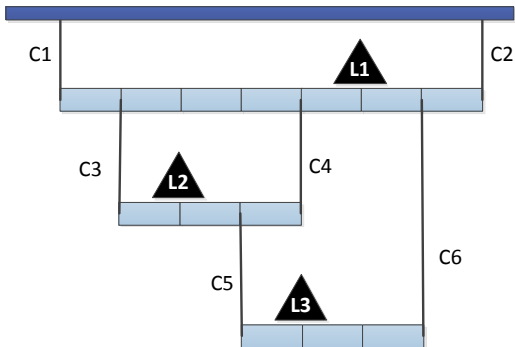
- $$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{21} \sum_{j=1}^{i-1} c_{i,j} \cdot x_{i,j,k}$$

$c_{i,j}$ jest odległością między punktami i, j

Uwagi końcowe:

- Omówiony model dopuszcza możliwość, że trasa składa się z wielu rozłącznych cykli.
- Jest on zatem *relaksacją* prawdziwego modelu.
- Aby rozwiązać problem, należy dodać ograniczenia wykluczające taką możliwość.
- Dodajemy je w miarę potrzeb, tak jak było to omówione przy rozwiązywaniu problemu komiwojażera.

- Rozważmy wiszące rusztowanie jak na schemacie poniżej.



- Liny C1 i C2 mogą wytrzymać obciążenie po 300 kg.
- Liny C3 i C4 mogą wytrzymać obciążenie po 100 kg.
- Liny C5 i C6 mogą wytrzymać obciążenie po 50 kg.
- Każdy z odważników L1, L2, L3 waży co najmniej 50 kg.
- Jakie największe łączne obciążenie może utrzymać rusztowanie ($L1 + L2 + L3$)?

```

set A := {1 to 3}; # ciężary
set C := { read " capacity.txt" as " <1n>" comment "#"};
param capacity[C] := read " capacity.txt" as " <1n> 2n" comment "#";
var L[A] >= 50;
var c[C];
param capacity[<i> in C] := if i <= 2 then 300 else if i <= 4 then 100 else 50 end end;
subto c1: c[1] == 6/7 * c[3] + 3/7 * c[4] + 2/7 * L[1] + 1/7 * c[6];
subto c2: c[2] == 1/7 * c[3] + 4/7 * c[4] + 5/7 * L[1] + 6/7 * c[6];
subto c3: c[3] == 2/3 * L[2] + 1/3 * c[5];
subto c4: c[4] == 1/3 * L[2] + 2/3 * c[5];
subto c5: c[5] == 2/3 * L[3];
subto c6: c[6] == 1/3 * L[3];
subto constr : forall <j> in C do
c[j] <= capacity[j];
maximize load : sum<i> in A: L[i];

```

Pewien produkt wytwarzany jest przed **trzy fabryki**. Następnie **czterech dostawców** dostarcza produkt z fabryk do **pięciu klientów**.

Każda fabryka ma ograniczenie na ilość wyprodukowanego towaru (jednostka to 1000 ton):

Fabryka	Maksymalna produkcja
1	100
2	150
3	200

Ponadto fabryka 1 z powodów technologicznych musi produkować co najmniej 50 tys. ton towaru.

Każdy z dostawców ma określoną maksymalny i minimalny obrót, czyli ilość towaru odebranego z fabryk i dostarczonego klientom.

Dostawca	Minimalny obrót	Maksymalny obrót
1	25	70
2	20	50
3	15	30
4	50	120

Każdy z klientów ma określone zapotrzebowanie na towar.

Klient	Zapotrzebowanie
1	100
2	50
3	40
4	30
5	20

Koszt dostawy jednej jednostki towaru z fabryk do dostawców przedstawia tabela (zależy on tylko od fabryki, a nie od dostawcy).

Fabryka	Koszt
1	2
2	1.8
3	1.7

Koszt dostawy jednej jednostki towaru od dostawców do klientów przedstawia tabela (zależy on tylko od dostawcy, a nie od klienta).

Dostawca	Koszt
1	2.1
2	1.9
3	2.2
4	2.3

Zakładamy, że dostawcy nie magazynują towaru, czyli całość towaru odebranego z fabryk przekazują klientom.

Zadanie

Zaplanuj dostawy tak, żeby wszystkie ograniczenia były spełnione i całkowity koszt był minimalny.

Dane: Zbiór elementów oraz ich wagi.

Szukane: Podział zbioru na 3-elementowe podzbiory, maksymalizujący minimalną sumę wag podzbioru.