Rachunek prawdopodobieństwa II
Semestr zimowy 2008/09
MiNI PW

Egzamin 1 - zadania (3 lutego 2009)

1. Rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem Y ma gęstość postaci:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{4}{\Gamma(y+1)}(4x)^y e^{-4x} I_{(0,+\infty)}(x),$$

zaś zmienna losowa Y ma rozkład geometryczny $Y \sim g(3/4)$.
Znaleźć rozkład warunkowy Y pod warunkiem X.

2. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład o gęstość postaci:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{-\left(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2\right)}, \quad (x,y) \in R^2.$$

Znaleźć $E\left(X^2 - 2XY + 1|X\right)$.

3. Niech $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładach wykładniczych:

$$X_n \sim Exp\left(1/\sqrt{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

zaś $(Y_n)_{n=1,2,\dots}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładach postaci

$$P\left(Y_n = n^2\right) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Zakładamy, że zmienne losowe X_n i Y_n są niezależne dla $n = 1, 2, \dots$. Niech

$$Z_n = \frac{X_n}{Y_n + 1}.$$

Zbadać zbieżność ciągu (Z_n): według prawdopodobieństwa, z prawdopodobieństwem 1 oraz w L_p, $p > 0$.

4. Niech $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Poissona $X_n \sim P(1)$, $n = 1, 2, \dots$..

   (a) Wykorzystując funkcje charakterystyczne wykazać, że zmienna losowa $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ ma rozkład Poissona $P(n)$, $n = 1, 2, \dots$.

   (b) Wykorzystując funkcje charakterystyczne wykazać, że $EY_n = VarY_n = n$, $n = 1, 2, \dots$.

   (c) Niech Y_n oraz Z_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona $Y_n \sim P(n)$ oraz $Z_n \sim P(2n)$, $n = 1, 2, \dots$. Znaleźć granicę według rozkładu ciągu $(W_n)_{n=1,2,\dots}$ przy $n \to \infty$, gdzie

$$W_n = \frac{Y_n - Z_n + n}{\sqrt{Y_n + Z_n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

   Wsk. Skorzystać z tw. Słuckiego.

5. Generujemy ciąg $(X_n)_{n=1,2,...}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jednostajnym $X_n \sim U([0,\pi/2])$.

   (a) Uzasadnić, że za pomocą zmiennej losowej

   $$\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sin X_k},$$

   można oszacować wartość wartość całki

   $$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}dx.$$

   (b) Dobrać n tak, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $0,96$ dokładność takiego przybliżenia była nie gorsza niż $0,02$.

6. W urnie są dwie kule białe i dwie kule czarne. Losujemy z urny jedną kulę, zwracamy ją do urny i dokładamy jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula.
   Niech X_n oznacza liczbę kul białych po n krokach, $n = 0,1,2,....$

   (a) Dobrać ciąg liczbowy $(a_n)_{n=0,1,2,...}$ tak, żeby ciąg $(Y_n,\mathcal{F}_n)_{n=0,1,2,...}$ był martyngałem, gdzie

   $$Y_n = a_n X_n$$

   oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$, $n = 0,1,2,....$

   (b) Obliczyć EY_n.

....

Wzory, które mogą się przydać:

$$X \sim P(\lambda): \ P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,...,$$

$$X \sim g(p): \ P(X=k) = (1-p)^k p, \quad k=0,1,...,$$

$$X \sim U(a,b): \ f(x) = \frac{1}{b-a}I_{(a,b)}(x),$$

$$X \sim Exp(\lambda): \ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}I_{(0,\infty)}(x), \quad \varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it},$$

$$X \sim G(p,a): \ f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-ax}I_{(0,\infty)}(x), \quad \varphi_X(t) = \left(\frac{a}{a-it}\right)^p,$$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2): \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right),$$

Rachunek prawdopodobieństwa II
Semestr zimowy 2008/09
MiNI PW

Egzamin 1 - teoria (3 lutego 2009)

1. Podać definicję warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej losowej X względem σ - ciała.

2. Wyrazić w języku funkcji charakterystycznych warunek równoważny niezależności składowych wektora losowego $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. Udowodnić tę równoważność.

3. O czym mówią Prawa Wielkich Liczb? Podać i udowodnić SPWL Markowa.

4. Podać twierdzenie o trzech szeregach.

5. Podać centralne twierdzenie graniczne Lindeberga-Fellera.

6. Niech $(X_n)_{n=1,2,...}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $P(X_n = n) = 1, \ \ n = 1, 2, ...$ Niech F_n będzie dystrybuantą zmiennej losowej $X_n, \ \ n = 1, 2, ...$ Wykazać, że ciąg $(F_n)_{n=1,2,...}$ jest zbieżny punktowo. Czy ciąg (X_n) jest zbieżny według rozkładu? Uzasadnić odpowiedź.

7. Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,...}$. Wykazać, że $\tau \wedge n_0$ dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}$ też jest momentem stopu względem tej filtracji.

8. Rzucamy kostką do momentu wyrzucenia jedynego lub sześciu oczek. Korzystając z pewnego ważnego faktu obliczyć wartość oczekiwaną sumy wszystkich oczek wyrzuconych do tej chwili.