Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

PRACA DYPLOMOWA LICENCJACKA
NA KIERUNKU MATEMATYKA

IFS - ITERATED FUNCTION SYSTEMS

Autor:
Marta Sommer

Promotor:
dr Agnieszka Badeńska

Warszawa, wrzesień 2013

....

podpis promotora

....

podpis autora

Spis treści

Wstęp

Do wyjaśnienia własności iterowanych systemów funkcyjnych potrzebna jest definicja wymiaru Hausdorffa. Spróbuję ją więc w tym rozdziale wprowadzić i wyjaśnić.

Rozdział 1

Wymiar Hausdorffa

Definicja 1.1. Niech A - dowolny podzbiór $\mathbb{R}^n$, ustalmy $s > 0$. Weźmy pod uwagę dowolne przeliczalne pokrycie A tzn. zbiory $U_1, U_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $\delta > 0$. Wtedy miarą zewnętrzną Hausdorffa zbioru A nazywamy:

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = inf \sum_{i=1}^{\infty} (diam U_i)^s, \tag{1.1}$$

gdzie $diam$ - średnica zbioru, a infimum jest wzięte po wszystkich takich pokryciach $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbioru A, że $diam U_i < \delta$ dla każdego U_i.

Definicja 1.2. Miarą Hausdorffa zbioru A nazywamy:

$$\mathcal{H}^s(A) = lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A) \tag{1.2}$$

Granica z powyższej definicji istnieje dla każdego $F \subset \mathbb{R}^n$, gdyż $\mathcal{H}_\delta^s$ jest niemalejącą funkcją δ. Wynika to z tego, że zmniejszając δ zawężamy klasę dopuszczalnych pokryć, po których brane jest infimum.

Okazuje się, że istnieje taka liczba $t \geqslant 0$, że:

$$\forall_{s<t} \quad \mathcal{H}^s(A) = +\infty \tag{1.3}$$

$$\forall_{s>t} \quad \mathcal{H}^s(A) = 0 \tag{1.4}$$

Wtedy liczbę t nazywamy wymiarem Hausdorffa zbioru A i oznaczamy $dim_H(A)$.

Skąd jednak wiemy, że taka liczba istnieje? Przedstawię poniżej krótkie wyprowadzenie tego faktu.

Rozważmy równianie (1.1). Łatwo widać, że dla dowolnego zbioru $F \subset \mathbb{R}^n$ i $\delta < 1$, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ jest nierosnącą funkcją s. Wynika z tego, że $\mathcal{H}^s$ również jest nierosnącą funkcją s. Tak naprawdę prawdą jest jeszcze więcej. Otóż, jeśli $s < t$ i $\{U_i\}$ jest δ-pokryciem F, to:

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leqslant \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Zatem, biorąc infimum po pokryciach, otrzymujemy, że $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leqslant \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F)$. Gdy $\delta \to 0$ oraz $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, to $\mathcal{H}^t(F) = 0$ dla $t > s$.

Bardziej formalnie można to zapisać jako:

$$dim_H(A) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \tag{1.5}$$

Rozdział 2

Twierdzenia pomocnicze

Twierdzenie 2.1. *(Mass distribution principle)*

Niech μ będzie miarą na F i przypuśćmy, że dla pewnego s istnieją $c > 0$ i $\delta > 0$ takie, że:

$$\forall_{U \text{ takiego, że } |U| \leqslant \delta} \quad \mu(U) \leqslant c|U|^s \tag{2.1}$$

Wtedy $\mathcal{H}^s(F) \geqslant \frac{1}{c}\mu(F)$ oraz $s \leqslant dim_H F \leqslant \underline{dim_B F} \leqslant \overline{dim_B F}$

Dowód

Niech U_i - dowolne pokrycie F. Widzimy wtedy, że:

$0 \leq \mu(F) \leqslant \mu(\bigcup_i U_i) \leqslant \sum_i \mu(U_i) \leqslant \sum_i c|U_i|^s = c\sum_i |U_i|^s$

A zatem:

$\sum_i |U_i|^s \geqslant \frac{\mu(F)}{c}$

Bierzemy infimum po wszystkich pokryciach:

$\inf \sum_i |U_i|^s \geqslant \frac{\mu(F)}{c}$

$\mathcal{H}^s_\delta(F) \geqslant \frac{1}{c}\mu(F)$

Czyli przy $\delta \to 0^+$:

$\mathcal{H}^s(F) \geqslant \frac{1}{c}\mu(F)$

A skoro $\mu(F) > 0$, to $dim_H F \geqslant s$.

■

Twierdzenie 2.2. *(O jabłkach w koszyku)*

Niech $\{V_i\}$ będzie rodziną rozłącznych i otwartych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ takich, że każdy V_i zawiera kulę o promieniu $a_1 r$ i jest zawarty w kuli o promieniu $a_2 r$, gdzie $a_1, a_2 > 0$ i $r > 0$.

Wtedy dowolna kula B o promieniu r przecina co najwyżej $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ domknięć $\overline{V_i}$.

Dowód

Jeśli $\overline{V_i}$ przecina B, wtedy $\overline{V_i}$ jest zawarte w kuli współśrodkowej z B o promieniu $(1+2a_2)r$. Wynika to z prostego rachunku:

$r + 2a_2 r = r(1 + 2a_2)$

Przypuśćmy, że q zbiorów $\overline{V_i}$ przecina B. Wtedy, sumując objętości odpowiednich wewnętrznych kul o promieniach $a_1 r$, otrzymujemy:

$q(a_1 r)^n \leqslant (1 + 2a_2)^n r^n$

Czyli: $q \leqslant (1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$

■

Twierdzenie 2.3. *(Banacha o punkcie stałym)*

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną zupełną a funkcja $f : X \longrightarrow X$ kontrakcją. Wtedy:

1. f ma dokładnie jeden punkt stały x_0, tzn. $\exists!_{x_0} \quad f(x_0) = x_0$
2. Dla każdego $x \in X$ ciąg $(x, f(x, f(f(x))), \ldots)$ jest zbieżny do x_0.

Rozdział 3

Twierdzenie o istnieniu atraktora

Twierdzenie 3.1. Rozważmy iterowany układ funkcyjny (IFS) określony na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^n$ kontrakcjami $\{S_1, \ldots, S_m\}$ tzn. funkcjami takimi, że $S_i : \ D \longrightarrow D$ oraz

$$\forall_{x,y \in D} \ \forall_{i=1,\ldots,m} \quad |S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x-y|, \tag{3.1}$$

gdzie $c_i < 1$.

Wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczony atraktor F, tj. niepusty i zwarty zbiór taki, że:

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F) \tag{3.2}$$

Jeśli dodatkowo zdefiniujemy przekształcenie S na klasie X niepustych i zwartych podzbiorów D jako:

$$\forall_{E \in X} \quad S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E) \tag{3.3}$$

oraz oznaczymy przez S^k - k-tą iterację S tzn.

$S^0(E) = E,$

$S^k(E) = S(S^{k-1}(E)) \quad \text{dla} \ \ k \geq 1.$

Wtedy:

$$\forall_{E \in X \ \text{ takiego, że } \ \forall_{i=1,\ldots,m} \ S_i(E) \subset E} \quad F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E) \tag{3.4}$$

Dowód pierwszy

Zauważmy, że S przekształca zbiory z X na zbiory z X. Do dowodu wykorzystamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.2. Przekształcenie $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i\colon\ X \longrightarrow X$ jest kontrakcją w metryce Hausdorffa, jeśli wszystkie przekształcenia $S_1, \dots, S_m\colon D \longrightarrow D$ są kontrakcjami.

Dowód

Niech $S_1, \dots, S_m$ - kontrakcje.

Zatem istnieje liczba $c < 1$ ($c = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i$) taka, że:

$$\forall_{p,q \in D}\ \forall_{i=1,\dots,m} \quad |S_i(p) - S_i(q)| \leqslant |p - q|$$

Niech $A, B \in X$. Wtedy:

$$\forall_{p \in A}\ \exists_{q \in B} \quad |p - q| \leqslant d(A, B),$$

gdzie d - metryka Hausdorffa. Oznaczmy $d(A, B)$ jako δ.

Zatem:

$$\forall_{i=1,\dots,m} \quad |S_i(p) - S_i(q)| \leqslant c|p - q| \leqslant cd(A, B) = c\delta$$

Czyli $S_i(A) \subset (S_i(B))_{c\delta}$.

Stąd $\ S(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A) \subset \bigcup_{i=1}^{m} (S_i(B))_{c\delta} = (\bigcup_{i=1}^{m} S_i(B))_{c\delta} = (S(B))_{c\delta}$.

Analogicznie $S(B) \subset (S(A))_{c\delta}$.

Czyli $d(S(A), S(B)) \leqslant c\delta = cd(A, B)$.

■

Wróćmy teraz do dowodu naszego twierdzenia.

Wiemy zatem, że S jest kontrakcją na (X, d).

Można pokazać, że d jest zupełną metryką na X. Spełnione są więc założenia tw. Banacha o punkcie stałym - tw. (2.3). Zatem, jako wniosek z tego twierdzenia, otrzymujemy, że S ma jednoznacznie wyznaczony punkt stały F. Czyli $S(F) = F$, co dowodzi (3.2).

Co więcej, $S^k(E) \longrightarrow F$, gdy $k \longrightarrow \infty$. W szczególności, jeśli $S_i(E) \subset E$ dla każdego i, wtedy $S(E) \subset E$ i $\{S^k(E)\}_{k=1}^{\infty}$ jest zstępującą rodziną zbiorów niepustych i zwartych. Czyli $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$, co dowodzi (3.4).

■

Dowód drugi

Niech $E \in X$ będzie zbiorem takim, że $S_i(E) \subset E$ dla każdego $i = 1, \dots, m$. Taki zbiór istnieje. Weźmy na przykład $E = D \cap \overline{B}(0, r)$ dla odpowiednio dużego $r > 0$, gdzie $\overline{B}(0, r)$ oznacza kulę domkniętą o promieniu r i środku w 0. Uzasadnię, że nasz zbiór E spełnia żądany warunek.

Wiemy, że $S_i(D) \subset D$ (z definicji S_i). Jeśli znajdziemy takie $r > 0$, dla którego $S_i(\overline{B}(0, r)) \subset \overline{B}(0, r)$, wtedy będziemy mieć, że $S_i(D \cap \overline{B}(0, r)) \subset D \cap \overline{B}(0, r)$.

Niech $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$.

$S_i(x) = c_i x + y_i$

Zatem,

$S_i(\overline{B}(0,r)) = \overline{B}(y_i, c_i r) \subset \overline{B}(0,r)$

r szacujemy więc w następujący sposób:

$r > |y| + c_i r$

$r(1 - c_i) > |y|$

$r > \frac{|y|}{1-c_i}$, bo $c_i < 1$

Zatem dla odpowiednio dużego r wybrane E spełnia warunek $S_i(E) \subset E$.

Wtedy $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$.

Czyli $\{S^k(E)\}_{k=0}^{\infty}$ jest zstępującą rodziną zbiorów niepustych i zwartych (bo E jest domknięty - jako domknięcie zbiorów domkniętych - i ograniczony), czyli istnieje niepuste i zwarte przecięcie $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$. Wynika to z twierdzenia, że zstępująca rodzina zbiorów domkniętych ma domknięte przecięcie.

Wtedy:

$S(F) = S(\bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S(S^k(E)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^{k+1}(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n(E) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S^n(E) = F$

Czyli F spełnia (3.3), czyli jest atraktorem IFS. Ale czy wyznaczonym jednoznacznie?

Niech A, B - atraktory IFS. Zatem:

$S(A) = A$ oraz $S(B) = B$.

Ponieważ S jest kontrakcją ze stałą $c = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i$, $0 < c < 1$, patrz (tw. 3.2), więc:

$d(S(A), S(B)) \leqslant cd(A, B)$

$d(A, B) \leqslant cd(A, B)$

$d(A, B) - cd(A, B) \leqslant 0$

$d(A, B)(1 - c) \leqslant 0$

$d(A, B) \leqslant 0 \Longrightarrow d(A, B) = 0 \vee c \leqslant 1$, co jest sprzeczne z założeniem.

Zatem $d(A, B) = 0$. A z definicji metryki wiemy, że wtedy $A = B$.

■

Rozdział 4

Twierdzenie o wymiarze fraktali

Definicja 4.1. Funkcje $S_1, \ldots, S_m$ takie, że $S_i : D \longrightarrow D$ spełniają warunek zbioru otwartego ("open set condition"), jeśli istnieje niepusty, ograniczony i otwarty zbiór V taki, że:

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \subset V \tag{4.1}$$

oraz $S_i(V)$ są parami rozłączne dla $i = 1, \ldots, m$.

Definicja 4.2. Funkcje $S_1, \ldots, S_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy podobieństwami, gdy spełniają warunek:

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \quad |S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y|, \tag{4.2}$$

gdzie $c_i \in (0, 1)$.

Twierdzenie 4.1. Przypuśćmy, że podobieństwa $S_1, \ldots, S_m$ określone na $\mathbb{R}^n$ ze stałymi $c_i \in (0, 1)$ dla $i = 1, \ldots, m$ spełniają warunek zbioru otwartego.

Jeśli F jest atraktorem IFS $\{S_1, \ldots, S_m\}$ tzn.

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{4.3}$$

wtedy $dim_H F = dim_B F = s$, gdzie s jest rozwiązaniem równania:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{4.4}$$

Co więcej, dla tej wartości s, $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Dowód

Niech s spełnia (4.4) tzn. $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.

Niech I_k będzie zbiorem zawierającym ciągi długości k o elementach ze zbioru $\{1,\ldots,m\}$.

Dla dowolnego zbioru A i dla każdego ciągu $(i_1,\ldots,i_k)\in I_k$ definiujemy
$A_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_k}(A) = S_{i_1}(\ldots(Si_k(A))\ldots)$

Zauważmy, że wtedy: $F=\bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k}$. Wynika to z tego, że:

$F=\bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(F) = \bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{I_k} S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_k}(F) = \bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k}$

Czyli $F=\bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k}$ dla każdego k.

Otrzymujemy więc pewne pokrycia F. Dzięki nim dostaniemy górne ograniczenie miary Hausdorffa atraktora.

Tak więc zauważmy najpierw, że $S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_k}$ jest podobieństwem o stałej $c_{i_1},\ldots,c_{i_k}$.

Wtedy mamy, że:

$\sum_{I_k}|F_{i_1,\ldots,i_k}|^s = \sum_{I_k}|S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_k}(F)|^s = \sum_{I_k}(c_{i_1},\ldots,c_{i_k}|F|)^s = \sum_{I_k}(c_{i_1},\ldots,c_{i_k})^s|F|^s = (\sum_{i_1} c_{i_1}^s)\ldots(\sum_{i_k} c_{i_k}^s)|F|^s = 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot|F|^s = |F|^s$

Tak więc pokazaliśmy, że $\sum_{I_k}|F_{i_1,\ldots,i_k}|^s = |F|^s$, gdzie $F_{i_1,\ldots,i_k}$ są pokryciami F. Dla każdej $\delta>0$ możemy zatem wybrać k takie, że: $|F_{i_1,\ldots,i_k}|\leqslant c^k|F|\leqslant\delta$. Wynika to z poniższego rachunku:

$|F_{i_1,\ldots,i_k}| = S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_k}(F) = c_{i_1},\ldots,c_{i_k}|F| \leqslant (\max_{1\leqslant i\leqslant m} c_i)^k|F| \leqslant c^k|F|\leqslant\delta$, gdyż $c\in(0,1)$, czyli przy $k\to\infty$, $c^k\longrightarrow 0$.

W takim razie:

$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\sum_{i=1}^{\infty}|F_{i_1,\ldots,i_k}|^s \leqslant |F|^s$

Zatem $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0^+}\mathcal{H}^s_\delta(F)\leqslant|F|^s$.

Dolne ograniczenie będzie trochę bardziej skomplikowane.

Zdefiniuję zbiór I, jako $I=\{(i_1,i_2,\ldots): 1\leqslant i_j\leqslant m\}$, czyli zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach z $\{1,\ldots,m\}$. Zdefiniuję również zbiór $J_{i_1,\ldots,i_k}$, jako $J_{i_1,\ldots,i_k}=\{(i_1,\ldots,i_k,q_{k+1},q_{k+2},\ldots): 1\leqslant i_j\leqslant m, 1\leqslant q_j\leqslant m\}$, czyli zbiór ciągów o ustalonych k pierwszych wyrazach (tzw. cylinder długości k).

Możemy teraz zdefiniować miarę μ na podzbiorach I. Żeby to zrobić definiujemy najpierw miarę μ na cylindrach $J_{i_1,\ldots,i_k}$, a następnie rozszerzymy ją na 2^I. Tak więc:

$\mu(J_{i_1,\ldots,i_k}) = (c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k})^s$

Zauważmy, że $(c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m(c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k}\cdot c_i)^s$ Wynika to z tego, że:

$\sum_{i=1}^m(c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k}\cdot c_i)^s = (c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k})^s\sum_{i=1}^m c_i^s = (c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k})^s\cdot 1 = (c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k})^s$

A zatem:

$\mu(J_{i_1,\ldots,i_k}) = (c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m(c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k}\cdot c_i)^s = \sum_{i=1}^m\mu(J_{i_1,\ldots,i_k,i})$

Czyli $\mu(J_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{i=1}^m\mu(J_{i_1,\ldots,i_k,i})$

Wynika z tego, że w takim razie μ jest właściwie miarą na podzbiorach I, gdyż cylindry generują 2^I. Można również zauważyć, że:

$\mu(I) = \sum_{I_k}\mu(J_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{I_k}\sum_{i=1}^m\mu(J_{i_1,\ldots,i_k,i}) = \sum_{I_k}\sum_{i=1}^m(c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k}\cdot c_i)^s = (\sum_{i_1} c_{i_1}^s)\cdot\ldots\cdot(\sum_{i_k} c_{i_k}^s)\cdot(\sum_{i=1}^m c_i^s) = 1\cdot\ldots\cdot 1 = 1$

Zatem $\mu(I) = 1$.

Możemy więc w naturalny sposób przekształcić miarę μ zdefiniowaną na 2^I na miarę $\tilde{\mu}$ zdefiniowaną na podzbiorach F w następujący sposób:

$\forall_{A \subset F} \quad \tilde{\mu} = \mu\{(i_1, i_2, \ldots) : x_{i_1, i_2, \ldots} \in A\}$,

gdzie: $\{x_{i_1, i_2, \ldots}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, \ldots, i_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F)$.

Tak więc miara $\tilde{\mu}$ zbioru jest miarą μ kodów elementów należących do tego zbioru. Widać zatem, że $\tilde{\mu}(F) = 1$.

Pokażemy teraz, że $\tilde{\mu}$ spełnia założenia twierdzenia (2.1).

Niech V będzie zbiorem z definicji warunku zbioru otwartego, czyli $S(V) \subset V$, V - niepusty, ograniczony i otwarty oraz $S_i(V)$ są parami rozłączne.

Z ciągłości podobieństw S_i wiemy, że:

$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(\overline{V}) = S(\overline{V}) \subset \overline{V}$, więc:

$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(\overline{V})$ - bo $S(\overline{V}) \subset \overline{V}$ oraz $\overline{V}$ jest niepusty, domknięty i ograniczony, czyli niepusty i zwarty w $\mathbb{R}^n$.

W szczególności $F \subset \overline{V}$ oraz

$$F_{i_1, \ldots, i_k} \subset \overline{V}_{i_1, \ldots, i_k}, \tag{4.5}$$

gdyż $S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F) \subset S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(\overline{V})$ dla każdego ciągu $(i_1 \ldots, i_k)$.

Niech B - kula o promieniu $r < 1$.

Szacujemy $\tilde{\mu}(B)$ rozważając zbiory $V_{i_1, \ldots, i_k}$ o średnicach porównywalnych z $diam(B)$ i z domknięciami przecinającymi $F \cap B$.

Obcinamy każdy nieskończony ciąg $(i_1, i_2, \ldots) \in I$ po pierwszym wyrazie i_k, dla którego:

$$(min_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i) \cdot r \leqslant c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k} \leqslant r \tag{4.6}$$

Takie i_k będzie istniało dla każdego ciągu. Wynika to z poniższej konstrukcji:

Weźmy dowolny ciąg $(i_1, i_2, \ldots) \in I$. Niech k będzie najmniejszym indeksem, dla którego: $c_{i_1} \ldots c_{i_k} \leqslant r$.

Wtedy dla $k > 1$:

$c_{i_1} \ldots c_{i_{k-1}} > r \quad | \cdot c_{i_k}$

$c_{i_1} \ldots c_{i_{k-1}} \cdot c_{i_k} > r \cdot c_{i_k} \leqslant r \cdot (min_i c_i)$

Niech Q stanowi skończony zbiór wszystkich skończonych ciągów otrzymanych w ten sposób. Q jest skończony, bo:

$0 < r < 1$

$\exists_K \quad (max_i c_i)^K \leqslant r$

Czyli dla dowolnego ciągu $(i_1, i_2, \ldots), \quad k \leqslant K$.

Mamy wtedy, że skończonych ciągów długości nie większej niż K o wyrazach z $\{1, \dots, m\}$ jest nie więcej niż m^k, czyli skończenie wiele.

Zatem, przy tak zdefiniowanym Q, dla każdego nieskończonego ciągu $(i_1, i_2, \dots) \in I$ istnieje dokładnie jedna wartość k, dla której $(i_1, \dots, i_k) \in Q$.

Ponieważ $V_1, \dots, V_m$, gdzie $V_j = S_j(V)$ są rozłączne (wynika to z def. (4.1)), więc $V_{i_1,\dots,i_k,1}, \dots, V_{i_1,\dots,i_k,m}$ też są rozłączne dla każdego $(i_1, \dots, i_k) \in Q$.

A zatem zbiory otwarte $V_{i_1,\dots,i_k}$ dla $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ są parami rozłączne.

Podobnie $F \subset \bigcup_Q F_{i_1,\dots,i_k} \subset \bigcup_Q \overline{V}_{i_1,\dots,i_k}$.

Drugie zawieranie otrzymujemy natychmiast z (4.5). Pierwsze natomiast można łatwo pokazać:

Niech $x \in F$. Wtedy x ma przypisany kod $(i_1, i_2, i_3, \dots)$, dzięki któremu możemy do F trafić. Gdy go obetniemy, to otrzymamy, że $x \in F_{i_1,\dots,i_k}$, gdzie $(i_1, \dots, i_k) \in Q$.

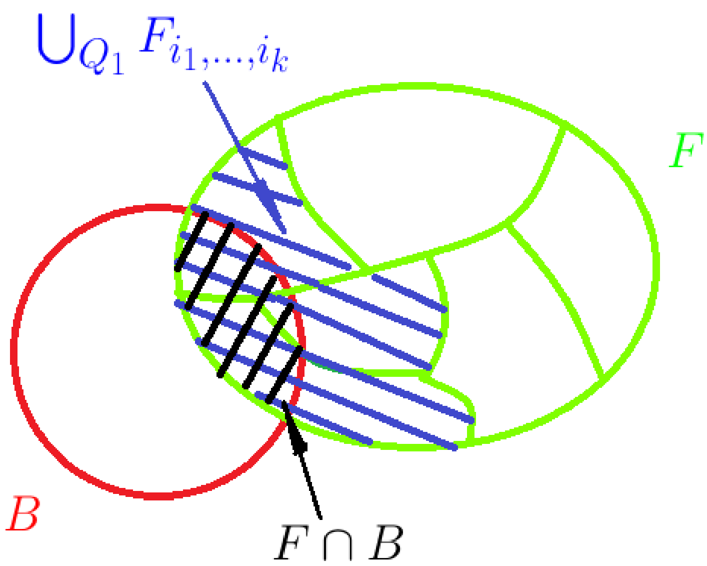
Wybieramy teraz $a_1 > 0$ i $a_2 > 0$ takie, że V zawiera kulę o promieniu a_1 (może, bo jest otwarty) oraz jest zawarty w kuli o promieniu a_2 (może, bo jest ograniczony).

Wtedy dla każdego $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ zbiór $V_{i_1,\dots,i_k}$ zawiera kulę o promieniu $c_{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i_k} \cdot a_1$, a zatem również kulę o promieniu $a_1 \cdot r \cdot min_{1 \leqslant i \leqslant m} c_i$ - z (4.6) - oraz jest zawarty w kuli o promieniu $c_{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i_k} \cdot a_2$, a zatem również w kuli o promieniu $a_2 r$.

Niech Q_1 będzie zbiorem tych ciągów $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, dla których B przecina $\overline{V}_{i_1,\dots,i_k}$. Korzystając z tw. (2.2), mamy co najwyżej $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (min_i c_i)^{-n}$ ciągów w Q_1.

Wtedy :

$\tilde{\mu}(B) := \tilde{\mu}(F \cap B) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1,i_2,\dots} \in F \cap B\}) \leqslant \mu(\bigcup_{Q_1} I_{i_1,\dots,i_k})$



Rysunek 4.1: Rysunek wyjaśniający nierówność: $\tilde{\mu}(B) \leqslant \mu(\bigcup_{Q_1} I_{i_1,\dots,i_k})$. Łatwo widać, że $F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} F_{i_1,\dots,i_k}$.

Tak więc:

$\tilde{\mu}(B) \leqslant \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \ldots c_{i_k})^s \leqslant \sum_{Q_1} r^s \leqslant qr^s$

Ponieważ dowolny zbiór U jest zawarty w kuli o promieniu $|U|$, wiemy, że:

$\tilde{\mu}(U) \leqslant |U|^s q$

Tak więc z tw. (2.1) mamy: $\mathcal{H}^s(F) \geqslant \frac{1}{q} > 0$ oraz $dim_H F \geqslant s$.

Czyli ostatecznie: $dim_H F = s$.

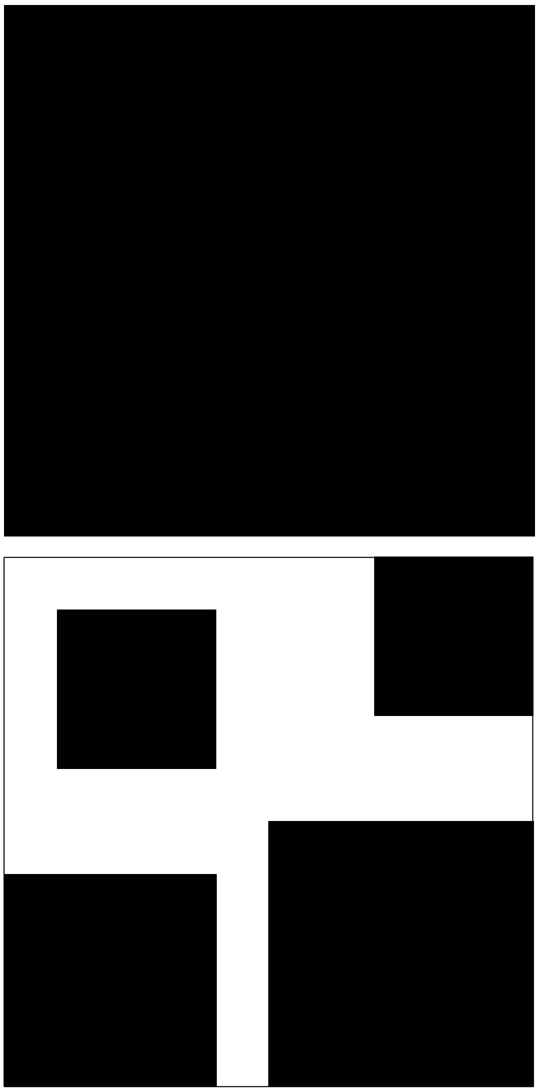
■

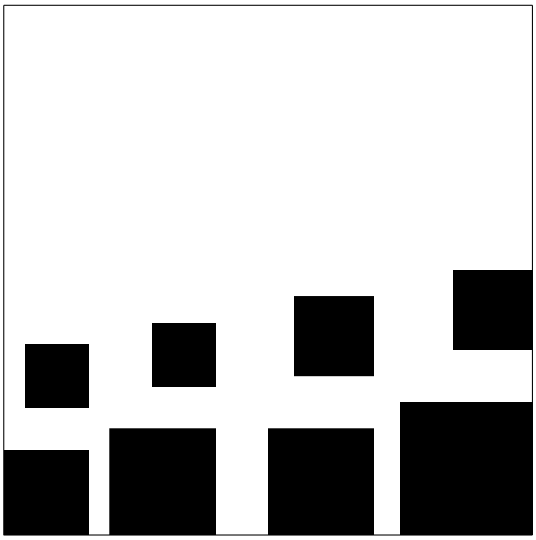
Rozdział 5

Przykłady

W tym rozdziale przytoczę trzy przykłady zastosowania twierdzenia 4.1.

5.1. Przykład 1.





Marta Sommer
Nr albumu 237503

Warszawa, 15 sierpnia 2013

Oświadczenie

Oświadczam, że pracę licencjacką pod tytułem „IFS - iterated function systems”, której promotorem jest dr Agnieszka Badeńska wykonałam samodzielnie, co poświadczam własnoręcznym podpisem.

....
Marta Sommer