Spis treści

1 Analiza matematyczna

1.1 Pojęcie ciągłości i różniczkowalności

Definicja 1.1.1 (Granica funkcji w punkcie - Wariant Cauchy'ego). *Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E; 0 < |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Lemat 1.1.2 (Granica funkcji w punkcie - Wariant Heinego). *Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu liczb x_n w E zbieżnego do x_0 jest*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

1.1.1 Ciągłość

Niech (X, d) i $(Y, \triangle)$ będą przestrzeniami metrycznymi.

Definicja 1.1.3 (Wariant Cauchy'ego). *Odwzorowanie $f : X \to Y$ jest ciągłe w punkcie $x \in X$, jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in X; [d(u, x) < \delta \Rightarrow \triangle(f(u), f(x)) < \varepsilon.$$

Lemat 1.1.4 (Wariant Heinego). *Odwzorowanie $f : X \to Y$ jest ciągłe w punkcie $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{u_n\}$ elementów przestrzeni X zachodzi implikacja*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(U_n) = f(x).$$

Twierdzenie 1.1.5. *Następujące warunki są równoważne:*

I *Odwzorowanie $f : X \to Y$ jest ciągłe.*

II *Przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego w Y jest zbiorem otwartym w X.*

III *Przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego w Y jest zbiorem domkniętym w X.*

Definicja 1.1.6 (Jednostajna ciągłość). *Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywa się jednostajnie ciągłe, jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X; [d(x, y) < \delta \Rightarrow \triangle(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Uwaga 1.1.7. *Odwzorowanie jednostajnie ciągłe jest ciągłe.*

Twierdzenie 1.1.8. *Odwzorowanie ciągłe o dziedzinie zwartej jest jednostajnie ciągłe.*

Definicja 1.1.9 (Wariant Cauchy'ego). *Funkcja $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ nazywa się ciągłą w punkcie $x_0 \in E$, jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E; |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Lemat 1.1.10 (Wariant Heinego). *Funkcja $f : E \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu x_n w E zbieżnego do x_0 jest*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Uwaga 1.1.11. *Przyjmuje się, że każda funkcja jest ciągła w punktach izolowanych swojej dziedziny.*

Definicja 1.1.12. *Funkcja $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ nazywa się ciągłą, jeśli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.*

Twierdzenie 1.1.13. *Suma, róznica, iloczyn i iloraz (o ile mianownik się nie zeruje) funkcji ciągłych są ciągłe.*

Definicja 1.1.14. *Funkcja $f : E \to \mathbb{R}$ jest lewostronnie ciągła w punkcie $x_0 \in E$, jeśli*

$$\forall\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E; 0 \leqslant x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

Funkcja $f : E \to \mathbb{R}$ jest prawostronnie ciągła w punkcie $x_0 \in E$, jeśli

$$\forall\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E; 0 \leqslant x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Uwaga 1.1.15.
∘ ***nieciągłość usuwalna*** - *istnieje granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ale jest różna od $f(x_0)$,*
∘ ***nieciągłość nieusuwalna*** - *nie istnieje granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$*

Twierdzenie 1.1.16. *Funkcja ciągła, odwracalna, określona na przedziale, jest monotoniczna, a funkcja do niej odwrotna jest monotoniczna i ciągła.*

Uwaga 1.1.17. *Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej nie musi być ciągła.*

Twierdzenie 1.1.18 (Weierstrassa). *Jeśli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale domkniętym, to osiąga ona w tym przedziale swoje kresy.*

Twierdzenie 1.1.19 (Cantora). *Jeżeli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale domkniętym, to jest ona również jednostajnie ciągła w tym przedziale.*

1.1.2 Różniczkowalność

Definicja 1.1.20 (Pochodna w punkcie). *Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

to nazywa się ją pochodną funkcji f w x_0 i oznacza $f'(x_0)$.

Lemat 1.1.21. *Jeśli funkcja ma w punkcie x_0 pochodną, to jest w tym punkcie ciągła.*

Definicja 1.1.22 (Funkcja pochodna). *Jeśli w punktach pewnego podzbioru dziedziny $D \subset E$ określona jest pochodna, to odwzorowanie $x \to f'(x)$ nazywamy funkcją pochodną, bądź pochodną funkcji f.*

Twierdzenie 1.1.23. *Jeśli funkcja f, określona na przedziale, jest ciągła, odwracalna i ma w punkcie x_0 pochodną różną od zera, to funkcja odwrotna ma w punkcie $y = f(x)$ pochodną i zachodzi wzór*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Definicja 1.1.24 (Różniczka funkcji). *Jeśli istnieje stała A oraz funkcja ω, że*

$$f(x + \triangle x) = f(x) + A \cdot \triangle x + \omega(\triangle x)$$

oraz zachodzi warunek

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\omega(\triangle x)}{\triangle x} = 0$$

to odwzorowanie liniowe $\triangle x \to A \cdot \triangle x$ nazywa się różniczką funkcji f w punkcie x.

Twierdzenie 1.1.25. *Funkcja f ma w punkcie x pochodną wtedy i tylko wtedy, gdy w tym punkcie istnieje różniczka. Wtedy współczynnik A różniczki jest równy pochodnej funkcji w tym punkcie.*

Twierdzenie 1.1.26 (Zasada Fermata). *Jeśli funkcja ma w wewnętrznym punkcie swojej dziedziny ekstremum lokalne i ma w tym punkcie pochodną, to ta pochodna jest równa zero.*

Twierdzenie 1.1.27 (Darboux). *Jeśli we wszystkich punktach dziedziny funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ istnieje pochodna (na końcach przedziału jednostronne), oraz $f'(a) < \lambda < f'(b)$, bądź $f'(a) > \lambda > f'(b)$, to istnieje $u \in (a, b)$ takie, że $f'(u) = \lambda$.*

Twierdzenie 1.1.28 (Rolle'a). *Jeśli $f \in C([a, b]) \cap D^1((a, b))$ oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f'(c) = 0$.*

Twierdzenie 1.1.29 (Lagrange'a). *Jeśli $f \in C([a, b]) \cap D^1((a, b))$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Uwaga 1.1.30. *1. Jeśli $f \in D^1((a, b))$ oraz $\forall x \in (a, b) f'(x) = 0$, to funkcja f jest stała na (a,b). 2. Jeśli $f \in D^1((a, b))$ oraz $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$, to funkcja f jest silnie rosnąca w (a,b). (Jeśli $f'(x) \geqslant 0$, to f jest niemalejąca.)*

Twierdzenie 1.1.31 (Cauchy'ego). *Jeśli $f, g \in C([a, b]) \cap D^1((a, b))$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że*

$$(g(b) - g(a)) \cdot f'(c) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(c).$$

Twierdzenie 1.1.32 (Wzór Taylora). *Jeśli w pewnym przedziale wokół punktu x_0 istnieją pochodne $f', ..., f^{(n-1)}$ oraz istnieje pochodna $f^{(n)}(x_0)$, to*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

$$... + \frac{f^{(n-1)(x_0)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_o)^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x).$$

Twierdzenie 1.1.33. *Załóżmy, że $f \in C^n([x_0, x]) \cap D^{n+1}((x_0, x))$ albo $f \in C^n([x, x_0]) \cap D^{n+1}((x, x_0))$. Dla każdego $p = 1, ..., n + 1$ istnieje pomiędzy liczbami x_0 i x różna od nich liczba c taka, że*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)(c)}}{n!p}(x - c)^{n+1-p}(x - x_0)^p.$$

Uwaga 1.1.34. *Dla $p = n+1$ otrzymujemy resztę w postaci Lagrange'a. a dla $p = 1$ - resztę postaci Cauchy'ego.*

Definicja 1.1.35 (Pochodna kierunkowa). *Pochodną kierunkową w kierunku wektora u nazywamy granicę*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h \cdot u) - f(a)}{h}.$$

Twierdzenie 1.1.36. *Jeśli odwzorowanie f ma w punkcie a pochodną, to istnieje pochodna kierunkowa w punkcie a w każdym kierunku i wyraża się wzorem*

$$\frac{d}{dt} f(a + tu) = gradf(a) \cdot u.$$

1.2 Pojęcie całki

1.2.1 Funkcje pierwotne, Całka nieoznaczona

Niech $U \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem.

Definicja 1.2.1 (Funkcja pierwotna). *Funkcją pierwotną funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ nazywa się każdą funkcję $F : U \to \mathbb{R}$ spełniającą dla wszystkich $x \in U$ warunek $F'(x) = f(x)$.*

Definicja 1.2.2 (całka nieoznaczona). *Rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f (o ile istnieją) nazywa się całką nieoznaczoną i oznacza przez*

$$\int f(x)dx.$$

Twierdzenie 1.2.3 (Całkowanie przez części). *Jeśli funkcje f i g są klasy C^1 na przedziale U, to zachodzi wzór*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie 1.2.4 (Całkowanie przez podstawienie). *Niech U, V będą przedziałami, $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to U$ oraz g jest różniczkowalna w V, wtedy zachodzi*

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

1.2.2 Całka Riemanna

Definicja 1.2.5 (Podział odcinka). *Podziałem odcinka $[a, b]$ nazywa się każdy skończony ciąg punktów $\triangle = (x_0, x_1, ..., x_n)$ spełniający warunek*

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_n = b.$$

Średnicą podziału $\triangle$ nazywa się liczbę

$$d(\triangle) = max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, ..., n\}.$$

Definicja 1.2.6 (Suma całkowa). *Sumą całkową funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dla podziału $\triangle = (x_0, x_1, ..., x_n)$ i odpowiadającego mu wyboru punktów $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ nazywa się sumę*

$$\sigma(f, \triangle, X) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definicja 1.2.7 (Całka Riemanna). *Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli istnieje liczba I taka, że spełniony jest warunek*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \triangle_\varepsilon, \forall \triangle; \triangle_\varepsilon \prec \triangle \Rightarrow |\sigma(f, \triangle, X_\triangle) - I| < \varepsilon,$$

gdzie $\prec$ oznacza rozdrobnienie podziału $\triangle$.

Jeśli taka liczba I istnieje, to nazywamy ją całką Riemanna funkcji f na odcinku $[a, b]$ i oznaczamy

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Lemat 1.2.8. *Funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest ograniczona.*

Definicja 1.2.9 (Suma górna i dolna). *Sumą górną dla podziału $\triangle$ nazywa się sumę*

$$S(f,\triangle) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}),$$

a sumą dolną sumę

$$s(f,\triangle) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}).$$

Lemat 1.2.10. *Zachodzą nierówności*

$$s(f,\triangle) \leqslant \sigma(f,\triangle,X_\triangle) \leqslant S(f,\triangle).$$

Twierdzenie 1.2.11. *Ograniczona funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\triangle; S(f,\triangle) - s(f,\triangle) \leqslant \varepsilon.$$

Definicja 1.2.12 (Całka górna i dolna). *Całką górną ograniczonej funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nazywa się liczbę*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,\triangle) : \triangle \text{ jest podziałem } [a,b]\},$$

a całką dolną liczbę

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,\triangle) : \triangle \text{ jest podziałem } [a,b]\}.$$

Twierdzenie 1.2.13. *Ograniczona funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jej całka górna jest równa całce dolnej (równa całce Riemanna).*

Definicja 1.2.14 (Podział normalny). *Ciąg podziałów $\triangle^n$ odcinka $[a,b]$ nazywa się normalnym, jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} d(\triangle^n) = 0,$$

czyli ciąg średnic tych podziałów jest zbieżny do zera.

Twierdzenie 1.2.15. *Ograniczona funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego normalnego ciągu podziałów $\triangle^n$ i dowolnego ciągu odpowiadających iwyborów punktów $X_{\triangle^n}$ ciąg sum całkowych $\sigma(f,\triangle^n,X_{\triangle^n})$ jest zbieżny. W przypadku całkowalności ta granica nie zależy od wyboru normalnego ciągu $\triangle^n$ i ciągu wyborów punktów $X_{\triangle^n}$ i jest równa całce tej funkcji.*

Twierdzenie 1.2.16. *Jeśli funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Wniosek 1.2.17. *Funkcja ograniczona $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mająca skończoną liczbę punktów nieciągłości jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Twierdzenie 1.2.18. *Funkcja monotoniczna $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Twierdzenie 1.2.19. *Jeśli funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$, to funkcja $|f|$ jest też całkowalna oraz prawdziwa jest nierówność*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Twierdzenie 1.2.20. *Jeśli funkcja g jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, funkcja f jest określona na tym przedziale oraz istnieje taka stała $L \geqslant 0$, że zachodzi warunek*

$$\forall x, y \in [a,b] \quad |f(x) - f(y)| \leqslant L|g(x) - g(y)|,$$

to f też jest całkowalna.

Twierdzenie 1.2.21 (Mnożenie funkcji całkowalnych). *Jeśli funkcje f i g są całkowalne na $[a,b]$, to ich iloczyn jest również funkcją całkowalną i zachodzi nierówność:*

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x)\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Twierdzenie 1.2.22. *Jeśli funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$ i dla wszystkich $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność $m \leqslant f(x) \leqslant M$, to*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Twierdzenie 1.2.23 (O wartości średniej). *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Twierdzenie 1.2.24 (Funkcja górnej granicy całkowania). *Niech funkcja f będzie całkowalna na $[a,b]$, ustalmy punkt $u \in [a,b]$ i rozważmy funkcję określoną wzorem*

$$F(x) = \int_u^x f(t)dt.$$

Funkcja F jest ciągła w $[a,b]$, a jeśli $x \in [a,b]$ jest punktem ciągłości funkcji f, to F ma w x pochodną i $F'(x) = f(x)$.

Wniosek 1.2.25. *Każda funkcja f na przedziale $[a,b]$ ma funkcję pierwotną - wystarczy wziąć dowolny punkt $u \in [a,b]$ i przyjąć*

$$F(x) = \int_u^x f(t)dt.$$

Twierdzenie 1.2.26. *Jeśli funkcja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i poza co najwyżej skończoną liczbą punktów rózniczkowalna oraz $F'(x) = f(x)$ poza tymi punktami, a f jest całkowalna na $[a,b]$ to*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Twierdzenie 1.2.27 (Uogólnienie różniczkowania względem granic całkowania). *Załóżmy, że funkcje $\phi, \psi : [a,b] \to [a,b]$ mają pochodną w punkcie $x \in [a,b]$, a funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna i ciągła w punktach $\phi(x)$ i $\psi(x)$. Wtedy funkcja*

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(y)dy$$

ma w punkcie x pochodną oraz

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(y)dy = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x).$$

1.2.3 Całki niewłaściwe

Definicja 1.2.28 (Punkty osobliwe funkcji). *Niech $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Punkt b nazywa się punktem osobliwym funkcji f jeśli zachodzi co najmniej jeden z warunków:*

1. $b = +\infty$
2. $b < +\infty$ *i f jest nieograniczona w każdym z przedziałów postaci $(b - \delta, b)$ dla $\delta > 0$.*

Analogicznie określa się osobliwości $f : (a, b] :\to \mathbb{R}$ w punkcie a.

Definicja 1.2.29 (Lokalna całkowalność). *Funkcja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ nazywa się lokalnie całkowalna, jśli dla każdego $a \leqslant u < b$ istnieje całka Riemanna $\int_a^u f(x)dx$.*

Definicja 1.2.30 (Całka niewłaściwa). *Niech $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, b jest punktem osobliwym, f jest lokalnie całkowalna. Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)dx,$$

to mówimy, że istnieje całka niewłaściwa funkcji f na przedziale $[a, b)$ i oznaczamy

$$\int_a^b = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)dx.$$

Twierdzenie 1.2.31. *Całka niewłaściwa istnieje (jest zbieżna) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{b_n\}$ monotonicznego i zbieżnego do b, zbieżny jest szereg*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{b_{i-1}}^{b_i} f(x)dx.$$

Twierdzenie 1.2.32 (Warunek Cauchy'ego zbieżności całek niewłaściwych). *Niech $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek*

a) *Dla $b < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u, v \in [b - \delta, b) : |\int_u^v f(x)dx| < \varepsilon$,*

b) *Dla $b = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \triangle \forall u, v \in [\triangle, +\infty) : |\int_u^v f(x)dx| < \epsilon$.*

Twierdzenie 1.2.33. *Niech $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$. Całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ jest ograniczona.*

Definicja 1.2.34 (Zbieżnośc bezwzględna). *Mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna bezwzględnie, gdy zbieżna jest całka $\int_a^b |f(x)|dx$.*

Twierdzenie 1.2.35. *Całka niewłaściwa zbieżna bezwzględnie jest zbieżna.*

Twierdzenie 1.2.36 (Kryterium całkowe zbieżnośći szeregów). *Niech f będzie nieujemną i nierosnącą funkcją. Całka $\int_K^\infty f(x)dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{i=K}^\infty f(i)$.*

1.2.4 Całka Riemanna-Stieltjesa

Definicja 1.2.37 (Całka Riemanna-Stieltjesa). *Niech $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, niemalejąca. Całkę Riemanna-Stieltjesa funkcji f względem funkcji g oznaczamy przez*

$$\int_a^b f(x)d(g(x)).$$

Całka Riemana-Stieltjesa na przedziale $[a, b]$ istnieje, gdy całka górna R-S jest równa całce dolnej R-S.

Twierdzenie 1.2.38. *Jeśli funkcja g jest klasy C^1, monotoniczna na $[a,b]$ oraz istnieje na $[a,b]$ całka Reimanna funkcji f, to istnieje całka Riemanna-Stieltjesa na $[a,b]$ funkcji f względem funkcji g oraz zachodzi*

$$\int_a^b f(x)d(g(x)) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

1.2.5 Twierdzenia o zbieżności dla całek

Twierdzenie 1.2.39 (Lemat Fatou). *Załóżmy, że funkcje $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ są mierzalne i nieujemne. Wtedy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k dx \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Twierdzenie 1.2.40 (Lemat Fatou). *Jeśli $X_n : \Omega \to [0,1]$, to*

$$\int_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} X_n dP \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} X_n dP.$$

Twierdzenie 1.2.41 (Twierdzenie o zbieżności monotonicznej). *Jeśli funkcje $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ są mierzalne i*

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant ... \leqslant f_k \leqslant ...,$$

to

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f_k dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Twierdzenie 1.2.42 (Twierdzenie o Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej). *Załóżmy, że unkcje $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ są całkowalne i*

$$f_k \to f \quad p.w.$$

Przypuśćmy również, że

$$|f_k| \leqslant g \quad p.w.,$$

gdzie g jest pewną funkcją całkowalną. Wtedy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Twierdzenie 1.2.43 (Twierdzenie o Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej). *Jeżli dla pewnej funkcji całkowalnej Y zachodzą nierówności $|X_n| \leqslant Y$, $n \in \mathbb{N}$, to wszystkie funkcje X_n są całkowalne, a jeśli ponadto $X_n \to^{p.n} X$, to X jest całkowalna i*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |X_n - X| dP = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Omega} X_n dP = \int_{\Omega} X dP.$$

1.3 Ciągi liczbowe

Definicja 1.3.1. *Ciągiem liczbowym nieskończonym nazywamy funkcję* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.3.2. *Jeśli* (a_n) *jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie ogólnym* $a_n = a_1 + (n-1)r$, *to*

a) (a_n) *jest rosnący, gdy* $r > 0$

b) (a_n) *jest stały, gdy* $r = 0$

c) (a_n) *jest malejący, gdy* $r < 0$

1.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n)$$

Twierdzenie 1.3.3. *Jeśli* (a_n) *jest ciągiem geometrycznym o wyrazie ogólnym* $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, *to dla*

a) $q \in \mathbb{R}_-$, *ciąg* (a_n) *jest naprzemienny*

b) $q = 1$, *ciąg* (a_n) *jest stały*

c) $q \in (0,1)$ *i* $a_1 \in \mathbb{R}_+$ *lub* $q \in (1,\infty)$ *i* $a_1 \in \mathbb{R}_-$ *to ciąg* (a_n) *jest malejący*

d) $q \in (0,1)$ *i* $a_1 \in \mathbb{R}_-$ *lub* $q \in (1,\infty)$ *i* $a_1 \in \mathbb{R}_+$ *to ciąg* (a_n) *jest rosnący*

1.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1; \\ n a_1 & \text{dla } q = 1. \end{cases}$$

Twierdzenie 1.3.4. *Ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \quad |a_m - a_n| \leqslant \varepsilon.$$

Twierdzenie 1.3.5. *Ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.*

Twierdzenie 1.3.6. *Ciąg liczbowy spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.*

Przykład 1.3.7. *Ciąg*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest zbieżny do liczby niewymiernej e.

Twierdzenie 1.3.8. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

Twierdzenie 1.3.9. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Twierdzenie 1.3.10 (Bolzano - Weierstrassa). *Z dowolnego ciągu ograniczonego można zawsze wyjąć podciąg zbieżny.*

1.4 Szeregi liczbowe

Definicja 1.4.1 (Szereg liczbowy). *Niech* (a_n) *będzie pewnym nieskończonym ciągiem liczbowym,* (S_n) *zaś ciągiem, którego n-tym wyrazem jest suma n początkowych wyrazów ciągu* (a_n). *Ciąg*

$$(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)$$

nazywamy szeregiem liczbowym nieskończonym i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicja 1.4.2 (Szereg Dirichleta). *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

nazywamy szeregiem Dirichleta (szeregiem harmonicznym rzędu α*). Dla* $\alpha = 1$ *otrzymujemy szereg harmonicznym.*

Definicja 1.4.3. *Szereg nazywamy zbieżnym, jeśli ciąg sum częściowych* (S_n) *jest zbieżny do granicy właściwej S. Liczbę S nazywamy sumą szeregu.*

Definicja 1.4.4. *Szereg nazywamy bezwzględnie zbieżnym, jeżeli zbieżny jest szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny, nazywamy zbieżnym warunkowo.

Definicja 1.4.5 (Iloczyn Cauchy'ego szeregów). *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

o wyrazach

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ *nazywamy iloczynem Cauchy'ego szeregów* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Twierdzenie 1.4.6. *Każdy szereg zbieżny do sumy S jest ograniczony, tzn.*

$$\exists A \forall n \in \mathbb{N}_+ \qquad |S_n| < A$$

Twierdzenie 1.4.7. *Szereg geometryczny o wyrazie ogólnym* $a_n = aq^{n-1}$, *gdzie* $a_n \neq 0$, *jest:*

a) zbieżny do sumy $S = \frac{a}{1-q}$ *dla* $|q| < 1$,

b) rozbieżny dla $|q| \geqslant 1$.

Twierdzenie 1.4.8. *Szereg Dirichleta jest:*

a) zbieżny dla $\alpha > 1$

b) rozbieżny dla $\alpha \leqslant 1$.

1.4.1 Warunki zbieżności szeregów

Twierdzenie 1.4.9 (Warunek Cauchy'ego). *Na to, ażeby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ był zbieżny potrzeba i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba $m \in \mathbb{N}_+$, żeby dla każdej liczby $p \in \mathbb{N}_+$ zachodziła nierówność*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+p}| < \varepsilon, \quad \textit{czyli} \quad \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 1.4.10 (Warunek konieczny zbieżności szeregu). *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Przykład 1.4.11. *Przykładem szeregu, dla którego zachodzi powyższy warunek, a który jest rozbieżny jest $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.*

Twierdzenie 1.4.12. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\dots$ jest zbieżny do sumy S wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, gdzie S_n jest tzw. ciągiem sum częściowych $S_n = a_1+a_2+\dots+a_n$.*

Twierdzenie 1.4.13. *Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to zbieżne są szeregi: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.*

Twierdzenie 1.4.14. *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.*

Definicja 1.4.15. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.*

Twierdzenie 1.4.16. *Szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.*

Twierdzenie 1.4.17 (Kryterium porównawcze). *Jeżeli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N$, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty.$$

Twierdzenie 1.4.18 (Kryterium porównawcze ilorazowe). *Jeżeli $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ oraz istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ to zachodzi teza z kryterium 1.*

Twierdzenie 1.4.19 (Kryterium d'Alambert'a). *Jeżeli $a_n > 0$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < \infty,$$

to dla $q < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a dla $q > 1$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 1.4.20 (Kryterium Cauchy'ego). *Jeżeli $a_n \geqslant 0$ oraz*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < \infty,$$

to dla $q < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a dla $q > 1$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 1.4.21 (Kryterium Leibnitz'a). *Jeżeli ciąg a_n jest malejący i zbieżny do zera, to szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

jest zbieżny.

Twierdzenie 1.4.22 (Kryterium Dirichleta). *Jeżeli ciąg a_n jest malejący i zbieżny do zera oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest szeregiem o ograniczonym ciągu sum częściowych, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

Twierdzenie 1.4.23 (Kryterium Abela). *Jeżeli ciąg a_n jest monotoniczny i ograniczony oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

Twierdzenie 1.4.24 (Kryterium całkowe zbieżnośći szeregów). *Niech f będzie nieujemną i nierosnącą funkcją. Całka $\int_K^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg*

$$\sum_{i=K}^{\infty} f(i).$$

Twierdzenie 1.4.25. *Jeśli o zbieżności szeregu rozstrzyga kryterium d'Alemberta, to rozstrzyga również kryterium Cauchy'ego.*

Pożyteczne nierówności:

- $\ln(1+x) \leqslant x$ dla$x > -1$;
- $\sin x \leqslant x$ dla $x > 0$;
- $\sin x \geqslant \frac{x}{2}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$;
- $e^x > 1$ dla $x > 0$;
- $x \leqslant \tan x \leqslant 2x$ dla $x \in [0, 1]$;
- $\arctan x \leqslant x$ dla $x \geqslant 0$;
- $0 < \sqrt[n]{n} < 2$.

1.5 Zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych

Niech $(Y, \triangle)$ będzie przestrzenią metryczną.

Definicja 1.5.1 (Zbieżność punktowa ciągu odwzorowań). *Ciąg odwzoroawań $f_n : T \to Y$ jest zbieżny punktowo do odwzorowania $f : T \to Y$, jeśli dla każdego ustalonego $t \in T$ ciąg $f_n(t)$ jest zbieżny w przestrzeni Y do elementu $f(t)$, tj.*

$$\forall t \in T, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geqslant n_\varepsilon; \triangle(f_n(t), f(t)) < \varepsilon.$$

Definicja 1.5.2 (Zbieżność jednostajna ciągów odwzorowań). *Ciąg odwzoroawań $f_n : T \to Y$ jest zbieżny jednostajnie do odwzorowania $f : T \to Y$, jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geqslant n_\varepsilon, \forall t \in T; \triangle(f_n(t), f(t)) < \varepsilon.$$

Uwaga 1.5.3. *Jeżeli ciąg odwzorowań jest zbieżny jednostajnie, to jest zbieżny punktowo, ale niekoniecznie na odwrót.*

Przykład 1.5.4. *Ciąg funkcyjny $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ zdefiniowany wzorem $f_n(t) = t^n$ jest zbieżny punktowo do funkcji*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & dla\ t \in [0,1) \\ 1 & dla\ t = 1 \end{cases}$$

natomiast nie jest do niej zbieżny jednostajnie.

Twierdzenie 1.5.5. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu odwzorowań ograniczonych $f_n : T \to Y$ jest odwzorowaniem ograniczonym.*

Uwaga 1.5.6. *Granica punktowa ciągu odwzorowań ograniczonych może nie być ograniczona.*

Przykład 1.5.7. *Niech $T = (0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ oraz*

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & dla\ t \in [\frac{1}{n}, 1] \\ n & dla\ t \in (0, \frac{1}{n}) \end{cases}.$$

Ciąg f_n jest zbieżny punktowo do funkcji $f(t) = \frac{1}{t}$.

Twierdzenie 1.5.8. *Granica jednostajna ciągu odwzorowań ciągłych $f_n : X \to Y$, gdzie (X, d) przestrzeń metryczna, jest odwzorowaniem ciągłym.*

Uwaga 1.5.9. *Granica punktowa ciągy odwzorowań ciągłych może nie być ciągła. Przykładem jest ciąg $f_n(t) = t^n$ dla $t \in [0,1]$.*

1.5.1 Ciągi liczbowe

Definicja 1.5.10 (Ogólna definicja ciągu). *Ciągiem nazywamy każde odwzorowanie za zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ w pewien ustalony zbiór X.*

Definicja 1.5.11. *Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy zbieżnym, jeśli istnieje liczba g taka, że*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_\varepsilon\ |a_n - g| \leqslant \varepsilon.$$

Liczbę g nazywa się wtedy granicą tego ciągu i zapisuje się to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Twierdzenie 1.5.12 (O trzech ciągach). *Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g$ oraz dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$, to $\lim_{n\to\infty} u_n = g$.*

Twierdzenie 1.5.13. *Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

Definicja 1.5.14 (Ciąg Cauchy'ego). *Ciąg $\{a_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall m, n \geqslant n_\varepsilon |a_m - a_n| \leqslant \varepsilon.$$

Lemat 1.5.15. *Ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.*

Lemat 1.5.16. *Ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.*

Twierdzenie 1.5.17. *Ciąg liczbowy spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.*

Definicja 1.5.18. *Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$, jeśli spełnia następujący warunek*

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists n_L, \forall n \geqslant n_L;\ a_n \geqslant L.$$

Ciąg jest rozbieżny do $-\infty$, jeśli

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists n_l, \forall n \leqslant n_l;\ a_n \leqslant l.$$

Suma i iloczyn ciągu rozbieżnego i ciągu ograniczonego jest rozbieżna.

Lemat 1.5.19. *Jeśli ciąg jest zbieżny, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy.*

Lemat 1.5.20. *Jeśli każdy podciąg danego ciągu ma podciąg zbieżny do tej samej liczby g, to wyjściowy ciąg jest zbieżny do tej liczby.*

Twierdzenie 1.5.21 (Bolzano-Weierstrassa). *Każdy ograniczony ciąg liczbowy ma podciąg zbieżny.*

Definicja 1.5.22 (Granica górna ciągu). *Jeśli ciąg jest ograniczony z góry, to jego granicą górną nazywa się kres górny zbioru wszystkich granic zbieżnych podciągów tego ciągu.*
Jeśli ciąg nie jest ograniczony z góry, to jego granica górna jest równa $+\infty$. Analogicznie definiuje się granicę dolną.

Uwaga 1.5.23. *Granicę górną nazywa się też limes superior i oznacza* $\limsup a_n$. *Granicę dolną nazywa się też limes inferior i oznacza* $\liminf a_n$.

Definicja 1.5.24 (Charakterystyka granicy górnej i dolnej).

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \sup\{a_k : k \geqslant n\}, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_n \inf\{a_k : k \geqslant n\}.$$

1.5.2 Ciągi funkcyjne

Rozważamy ciągi odwzorowań $f_n : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$.

Definicja 1.5.25. *Obszaremzbieżności punktowej ciągu funkcyjnego nazywa się podzbiór dziedziny X, złożony z punktów x takich, dla których ciąg liczbowy $f_n(x)$ jest zbieżny.*

Twierdzenie 1.5.26 (Kryterium Cauchy'ego). *Ciąg funkcyjny $f_n : X \to \mathbb{R}$ jest zbieżny jednostajnie do jakiejs funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon)(\forall k, l \geqslant n_\varepsilon)(\forall x \in X)\ |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon.$$

Lemat 1.5.27. *Jeśliistnieje ciąg liczbowy a_n taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leqslant a_n$, to ciąg funkcyjny f_n jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.*

Lemat 1.5.28. *Załóżmy, że wyrazy ciągu funkcyjnego $\varphi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, nieujemnymi oraz dla wszystkich $x \in [a, b]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x)$. Jeśli w $[a, b]$ zachodzi zbieżność punktowa $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$, to ciąg φ_n jest jednostajnie zbieżny.*

Twierdzenie 1.5.29. *Jeśli monotoniczny ciąg funkcji ciągłych, określonych na przedziale zwartym, jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, to zbieżność jest jednostajna.*

Uwaga 1.5.30. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji różniczkowalnych nie musi być różniczkowalna, a nawet jeśli jest, to jej pochodna nie musi być naewt punktową granicą ciągu pochodnych tych funkcji.*

Twierdzenie 1.5.31. *Załóżmy, że funkcje $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, ciąg ich pochodnych jest jednostajnie zbieżny, a dla pewnego $x_0 \in [a,b]$ zbieżny jest ciąg liczbowy $f_n(x_0)$. Wtedy ciąg f_n jest jednostajnie zbieżny, jego granica jest funkcją różniczkowalną w $[a,b]$ i zachodzi równość*

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x).$$

1.5.3 Szeregi funkcyjne

Niech $w_k : X \to \mathbb{R}$ będzie ustalonym ciągiem funkcyjnym.

Definicja 1.5.32 (Szereg funkcyjny). *Szeregiem funkcyjnym nazywa się parę ciągów funkcyjnych $(\{w_k\}, \{S_n\})$, przy czym*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} w_k(x).$$

Uwaga 1.5.33. *Przy każdym ustalonym $x \in X$ para $(\{w_k\}, \{S_n\})$ jest zwykłym szeregiem liczbowym.*

Uwaga 1.5.34. *Obszarem zbieżności szeregu funkcyjnego jest obszar zbieżności ciągu funkcyjnego S_n. Jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego oznacza jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego S_n.*

Twierdzenie 1.5.35 (Warunek Cauchy'ego). *Szereg funkcyjny $\sum w_n$ jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall m \geqslant \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X; \left|\sum_{n=m}^{n+p} w_n(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Twierdzenie 1.5.36 (Kryterium Weierstrassa). *Jeśli istnieje zbieżny szereg liczbowy $\sum c_n$ o wyrazach nieujemnych taki, że dla każdego n zachodzi nierówność $\sup\{|w_n(x)| : x \in X\} \leqslant c_n$, to szereg funkcyjny $\sum w_n$ jest jednostajnie zbieżny.*

Twierdzenie 1.5.37. *Jeśli wyrazy w_n szeregu funkcyjnego, o dziedzinie $[a,b]$, są funkcjami różniczkowalnymi, szereg pochodnych $\sum w_n'$ jest jednostajnie zbieżny, a dla pewnego punktu $x_0 \in [a,b]$ szereg liczbowy $\sum u_n(x_0)$ jest zbieżny, to szereg $\sum u_n$ jest jednostajnie zbieżny, jego suma jest funkcją różniczkowalną w $[a,b]$ i prawdziwa jest równość*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx} w_n(x).$$

1.5.4 Szeregi potęgowe

Definicja 1.5.38 (Szereg potęgowy). *Szeregiem potęgowym nazywa się szereg funkcyjny postaci*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(u-u_0)^n.$$

Twierdzenie 1.5.39. *Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w punkcie $z \neq 0$, to jest zbieżny bezwzględnie w przedziale $(-|z|, |z|)$, a jednostajnie zbieżny w każdym przedziale postaci $[-\alpha, \alpha]$, dla dowolnego $\alpha \in (0, |z|)$.*

Wniosek 1.5.40. *Jeśli obszar zbieżnośći szeregu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *nie składa się tylko z zera, to jest całą prostą, albo jednym z przedziałów postaci* $(-r, r), [-r, r), (-r, r], [-r, r]$*. Liczbę* r *nazywa się promieniem zbieżności tego szeregu.*

Twierdzenie 1.5.41 (Cauchy-Hadamarda). *Niech*

$$\lambda = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Promień zbieżności r *szeregu potęgowego* $\sum a_n x^n$ *jest następujący*

1. $r = \frac{1}{\lambda}$, *gdy* $0 < \lambda < +\infty$*;*
2. $r = 0$, *gdy* $\lambda = +\infty$*;*
3. $r = +\infty$, *gdy* $\lambda = 0$.

Twierdzenie 1.5.42 (Abela). *Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w którymś z końców przedziału zbieżności, to jego suma jest w tym punkcie ciągła (jednostronnie).*

Twierdzenie 1.5.43. *Funkcja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

określona dla x *z obszaru zbieżności tego szeregu, ma wewnątrz przedziału zbieżności pochodną równą sumie szeregu pochodnego.*

1.6 Funkcje uwikłane

Definicja 1.6.1 (Funkcja uwikłana). *Niech $F(x,y)$ będzie funkcją ciągłą w obszarze D. Mówimy, że y jest funkcją uwikłaną x w zbiorze A, jeśli liczbie $x \in A$ przyporządkujemy te wszystkie liczby y, dla których zachodzi relacja*

$$F(x,y) = 0.$$

Uwaga 1.6.2. *Funkcja zdefiniowana przez postać uwikłaną daje się czasami zapisać w tzw. postaci jawnej $y = f(x)$.*

Twierdzenie 1.6.3 (O istnieniu funkcji uwikłanej). *Jeżeli funkcja $F(x,y)$ spełnia warunki:*

1. *$F(x_0, y_0) = 0$,*
2. *jest ciągła w otoczeniu punktu (x_0, y_0),*
3. *ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ciągłą pochodną F'_y różną od zera w punkcie (x_0, y_0),*

to w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ istnieje dokładnie jedna funkcja $y = f(x)$ ciągła, spełniejąca warunki $y_0 = f(x_0)$ oraz $F(x, f(x)) = 0$ dla każdego x z tego otoczenia.

Jeśli ponadto istnieje pochodna F'_x ciągła w otoczeniu punktu (x_0, y_0), to funkcja uwikłana $y = f(x)$ ma w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ ciągłą pochodną daną wzorem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Niech będzie dana funkcja $p+1$ zmiennych

$$F(x_1, x_2, ..., x_p, u),$$

określona w pewnym obszarze $W \in \mathbb{R}^{p+1}$, i niech punkt $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_p^{(0)}, u^{(0)}) \in W$.

Twierdzenie 1.6.4 (O istnieniu funkcji uwikłanej wielu zmiennych). *Jeżeli funkcja $F(x_1, x_2, ..., x_p, u)$ spełnia warunki:*

1. *$F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_p^{(0)}, u^{(0)}) = 0$,*
2. *jest ciągła w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_p^{(0)}, u^{(0)})$,*
3. *ma w otoczeniu punktu P_0 ciągłą pochodną F'_u różną od zera w punkcie P_0,*

to w przestrzeni $\mathbb{R}^p$ istnieje takie otoczenie punktu $Q_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_p^{(0)}, u^{(0)})$, w którym jest określona dokładnie jedna funkcja p zmiennych $u = f(x_1, ..., x_p)$, ciągła i spełniejąca w tym otoczeniu warunki:

$$F(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1, ..., x_p)) = 0, \quad f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_p^{(0)}) = u^{(0)}.$$

Jeśli ponadto istnieją ciągłe pochodne $F'_{x_1}, F'_{x_2}, ..., F'_{x_p}, F'_u$ w otoczeniu punktu P_0, to w pewnym otoczeniu punktu Q_0 funkcja $f(x_1, ..., x_p)$ ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe, przy czym pochodne te wyrażają się wzorami:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_p) = -\frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1, x_2, ..., x_p))}{F'_u(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1, x_2, ..., x_p))},$$

$$f'_{x_p}(x_1, x_2, ..., x_p) = -\frac{F'_{x_p}(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1, x_2, ..., x_p))}{F'_u(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1, x_2, ..., x_p))}.$$

1.6.1 Ekstrema funkcji uwikłanej

Niech będzie dana funkcja uwikłana $y = f(x)$ jednej zmiennej x, określona równaniem $F(x, y) = 0$, przy czym funkcja F jest klasy C^2 w pewnym obszarze D. Różniczkując stronami tożsamość $F(x, f(x)) = 0$ otrzymujemy

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0, \tag{1}$$

czyli

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \text{gdzie} \quad F'_y \neq 0.$$

Ponieważ warunkiem koniecznym istnienia ekstremum dla funkcji różniczkowalnej $f(x)$ jest $f'(x) = 0$, czyli $F'_x(x, y) = 0$, zatem możliwe punkty ekstremalne (x_e, y_e) wyznaczamy z układu

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) = 0.$$

Niech (x_e, y_e) będą punktami spełniającymi powyższy układ. Obliczamy drugą pochodną różniczkując tożsamość (1):

$$F''_{xx} + 2F''_{xy} \frac{dy}{dx} + F''_{yy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F'_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

stąd przy założeniu, że $\frac{dy}{dx} = 0$, otrzymujemy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F''_{xx}}{F'_y}, \quad \text{gdzie} \quad F'_y \neq 0.$$

Jeżeli

$$F'_y(x_e, y_e) \neq 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_e, y_e} > 0,$$

to funkcja $y = f(x)$ dla $x = x_e$ ma minimum lokalne równe y_e, a jeżeli jest

$$F'_y(x_e, y_e) \neq 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_e, y_e} < 0,$$

to funkcja $y = f(x)$ dla $x = x_e$ ma maksimum lokalne równe y_e.

1.7 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Definicja 1.7.1. *Funkcja* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *postaci*

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k,$$

gdzie $a_{ik} = a_{ki}$ *nazywamy formą kwadratową.*

Definicja 1.7.2. *O formie kwadratowej mówimy, że:*

1. *jest oznaczona dodatnio (ujemnie), gdy poza* $0 \in \mathbb{R}^n$*przyjmuje wartości dodatnie (ujemne).*
2. *jest nieoznaczona, gdy przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne.*
3. *jest półoznaczona, gdy przyjmuje stale wartości* $\geqslant 0$ *lub* $\leqslant 0$, *ale nie jest oznaczona.*

Twierdzenie 1.7.3 (Sylwester). *Niech*

$$w_k = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{k1} & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

1. *Forma kwadratowa jest określona dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy dla* $k = 1, ..., n \quad w_k > 0$.
2. *Forma kwadratowa jest określona ujemnie wtedy i tylko wtedy, gdy dla* $k = 1, ..., n \quad (-1)^k w_k > 0$.

Twierdzenie 1.7.4 (Warunek konieczny). *Znikanie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum, czyli*

$$df(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

Punkty, które to spełniają nazywamy punktami krytycznymi.

Niech funkcja $f(x_1, ..., x_n)$ będzie określona i ciągła i niech ma ciągłe pochodne pierwszego i drugiego rzędu w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego $(x^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$. Wprowadzamy oznaczenia:

$$f''_{x_i x_k}(x^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) = a_{ik}, \quad i, k = 1, 2, ..., n.$$

Twierdzenie 1.7.5 (Warunek dostateczny). *Jeżeli druga różniczka, tzn. forma kwadratowa*

$$\sum_{i,k}^{n} a_{ik} \triangle x_i \triangle x_k$$

jest określona dodatnio (ujemnie), to w badanym punkcie $(x^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ *jest minimum (maksimum) właściwe. Jeżeli forma kwadratowa jest nieokreślona, to w badanym punkcie na pewno nie ma ekstremum.*

1.7.1 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Twierdzenie 1.7.6 (Twierdzenia Schwarza). *Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu* P_0 *istnieją pochodne mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania i w punkcie* P_0 *są ciągłe, to w punkcie* P_0 *są równe.*

Wniosek 1.7.7. *Jeżeli funkcja jest klasy* C^2 *w obszarze D, to pochodne mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania są parami równe.*

1.8 Całka iterowana i twierdzenie Fubiniego

Zakładamy, że występujące funkcje są ograniczone i ciągłe w rozpatrywanych obszarach.

Definicja 1.8.1 (Całka iterowana). *Jeśli obszar D jest obszarem normalnym względem osi Ox danym nierównościami $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$ to*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Jeśli obszar D jest obszarem normalnym względem osi Oy danym nierównościami $\alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ to

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Lemat 1.8.2. *Jeżeli D jest prostokątem danym nierównościami $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ to*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

a jeżeli ponadto funkcja $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, to całka podwójna równa się iloczynowi całek pojedynczych:

$$\int\int_D \varphi(x)\psi(y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(y)dy.$$

Definicja 1.8.3 (Zamiana zmiennych w całce podwójnej). *Niech przekształcenie $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ odwzorowuje obszar regularny domknięty Δ (w płaszczyżnie zmiennych u i v) na obszar regularny domknięty D (w płaszczyżnie x i y). Jeśli*

1. *funkcje φ i ψ są ciągłe wraz z pierwszymi pochodnymi w obszarze Δ,*
2. *funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w obszarze D,*
3. *odwzorowanie wnętrza obszaru Δ w obszar D jest wzalemnie jednoznaczne,*
4. *wewnątrz obszaru D jakobian*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

to ma miejsce wzór

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u} \right| dudv.$$

Przykład 1.8.4 (Zamiana współrzędnych prostokątnych na współrzędne biegunowe). *Niech $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, wtedy*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta [f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)]\rho \, d\rho d\varphi.$$

Twierdzenie 1.8.5 (Twierdzenie Fubiniego). *Jeśli funkcja f(x,y) jest ciągła w domkniętym, ograniczonym i wypukłym podzbiorze płaszczyzny K, to równe są następujące całki*

$$\int_{x_d}^{x_g} \left[\int_{y_d(x)}^{y_g(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int_{y_d}^{y_g} \left[\int_{x_d(y)}^{x_g(y)} f(x,y)dx \right] dy.$$

1.9 Całka krzywoliniowa i powierzchniowa

Definicja 1.9.1 (Łuk gładki). *Linię daną równaniami parametrycznymi*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

nazywamy łukiem gładkim (łukiem regularnym), jeżeli:

1. *dla różnych t otrzymujemy różne punkty łuku, tzn. ówności $x(t_1) = x(t_2)$ oraz $y(t_1) = y(t_2)$ pociągają za sobą równość $t_1 = t_2$.*
2. *pochodne $x'(t)$ i $y'(t)$ są ciągłe,*
3. *pochodne $x'(t)$ i $y'(t)$ w żadnym punkcie nie są jednocześnie równe zeru.*

Uwaga 1.9.2. *Oznaczenia $M_t = (x(t), y(t))$, oraz $\widehat{AB}$ - łuk o początku w A i końcu w B.*

Definicja 1.9.3 (Krzywa regularna). *Linię $\widehat{AB}$ nazywamy krzywą regularną (krzywą częściami gładką), jeżeli:*

1. *daje się podzielić na skończoną liczbę łuków gładkich*
2. *funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są ciągłe w całym przedziale*
3. *punktów wielokrotnych (tj. takich, że $M_{t_1} \equiv M_{t_2}$ dla $t_1 \neq t_2$) jest tylko skończona ilość.*

1.9.1 Całka krzywoliniowa płaska skierowana

Niech dany będzie łuk gładki $\widehat{AB}$ i niech na tym łuku będą określone funkcje ciągłe $P(x, y)$ i $Q(x, y)$

Definicja 1.9.4. *Przez całkę krzywoliniową płaską skierowaną układu funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ wzdłuż łuku $\widehat{AB}$*

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

rozumiemy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} \left((P(x_{\theta_i}, y_{\theta_i})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) + Q(x_{\theta_i}, y_{\theta_i})(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}) \right),$$

gdy

1. $\lim_{n\to\infty} m_n = +\infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} \max_i(t_i - t_{i-1}) = 0$

Lemat 1.9.5. *Powyższa granica zawsze istnieje i jej wartość nie zależy ani od sposobu dzielenia przedziału (a, b), ani od sposobu wyboru punktów θ_i.*

Lemat 1.9.6.

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left(P(x_t, y_t)x'_t + Q(x_t, y_t)y'_t\right) dt.$$

Twierdzenie 1.9.7. *Całka krzywoliniowa płaska skierowana wzdłuż łuku regularnego zależy od kształtu i położenia łuku oraz kierunku łuku, a nie zależy od sposobu przedstawienia parametrycznego łuku.*

Definicja 1.9.8. *Całkę krzywoliniową płaską skierowaną wzdłuż krzywej regularnej L określamy jako sumę całek krzywoliniowych płaskich skierowanych wzdłuż łuków gładkich z których składa się krzywa L. Gdy $A = B$ to mamy całkę wzdłuż krzywej zamkniętej L.*

Uwaga 1.9.9. *Analogicznie definiujemy całkę krzywoliniową w przestrzeni skierowaną (3 wymiary).*

1.9.2 Całka krzywoliniowa płaska nieskierowana

Niech wzdłuż łuku L będzie określona funkcja ciągła $f(x,y)$. Dzielimy łuk L na n elementarnych części $\triangle l_i$ i oznzczmy przez $\delta_n = \max\{|\triangle l_i|\}$, gdzie $|\triangle l_i|$ oznacza długość części łuku. Ponadto niech $(\xi_i, \eta_i) \in \triangle l_i$.

Definicja 1.9.10. *Jeżeli przy $n \to \infty$ i $\delta_n \to 0$ istnieje granica wyrażenia*

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)|\triangle l_i|,$$

i granica ta jest zawsze ta sama bez względu na sposób dzielenia łuku i wybór punktów (ξ_i, η_i), to granicę tę nazywamy całką krzywoliniową płaską nieskierowaną funkcji $f(x,y)$ wzdłuż łuku L i oznaczamy

$$\int_L f(x,y)dl.$$

Lemat 1.9.11.

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt.$$

Uwaga 1.9.12. *Analogicznie definiujemy całkę krzywoliniową w przestrzeni nieskierowaną (3 wymiary).*

1.9.3 Twierdzenie Greena

Niech D będzie obszarem normalnym względem obu osi współrzędnych, a L niech będzie brzegiem D oraz na brzegu L niech będzie tak określony kierunek, że przy przesuwaniu się punktu M po L obszar będzie po lewej stronie.

Twierdzenie 1.9.13 (Wzór Greena). *Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w pewnym obszarze zawierającym D, to zachodzi*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Twierdzenie 1.9.14. *Całka krzywoliniowa*

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$$

wzdłuż krzywej $\widehat{AB}$ zawartej w obszarze jednospójnym D nie zależy od drogi całkowania, a tylko od położenia punktów A i B wtedy i tylko wtedy, gdy zzachodzi:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

1.9.4 Całka powierzchniowa niezorientowana

Niech S będzie płatem powierzchniowym o równaniu

$$z = f(x,y) \quad \text{gdzie}(x,y) \in D.$$

Zakładamy, że funkcja f jest klasy C^1 w obszarze D oraz, że dla punktów $(x,y,z) \in S$ jest określona funkcja $F(x,y,z)$. Dzielimy płat S na n częsci regularnych $\triangle s_i$ i tworzymy sumę

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)|\triangle s_i|,$$

gdzie $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \triangle s_i$, a $|\triangle s_i|$ oznacza pole części $\triangle s_i$. Niech przy $n \to \infty$ średnica δ_n podziału dąży do zera. Jeżeli istnieje granica sumy σ_n, przy czym ta granica zawsze jest ta sama bez względu na sposób dzielenia płata S i wybór punktów (ξ_i, η_i, ζ_i), to granicę tę nazywamy całką powierzchniową niezorientowaną funkcji $F(x, y, z)$ po płacie S i oznaczamy

$$\int\int_S F(x, y, x) ds.$$

Definicja 1.9.15 (Płat gładki). *Płat powierzchniowy S dany równaniami parametrycznymi*

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v),$$

gdzie punkty (u, v) należą do obszaru jednospójnego Δ, gdy

1. *pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji φ, ψ, χ są ciągłe i ograniczone w obszarze Δ i na jego brzegu,*
2. *następująca suma kwadratów jakobianów:*

$$\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2,$$

   jest dodatnia w całym obszarze Δ,

3. *różnym punktom $(u, v) \in \Delta$ opdowiadają różne punkty $(x, y, z) \in S$.*

Twierdzenie 1.9.16. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ jest ciągła i płat S jest gładki, to całka powierzchniowa istnieje i wyraża się wzrorem*

$$\int\int_S F(x, y, x) ds = \int\int_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dxdy,$$

gdzie D jest rzutem płata S na płaszczyznę Oxy.

Twierdzenie 1.9.17. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ jest ciągła i płat S jest gładki, to*

$$\int\int_S F(x, y, z) ds =$$

$$= \int\int_\Delta F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2}\, dudv.$$

1.9.5 Całka powierzchniowa zorientowana

Definicja 1.9.18 (Płat zorientowany). *Płat powierzchniowy gładki S o równaniu $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ nazywamy płatem zorientowanym, jeżeli jedną z jego stron wyróżnimy nazywając dodatnią, a drugą - ujemną.*

Uwaga 1.9.19. *Jeżeli powierzchnia jest zamknięta, to za stronę dodatnią przyjmujemy jej zewnętrzną stronę.*

Uwaga 1.9.20. *Nie dla każdej powierzchni da się ustalić orientację np. Wstęga Möbiusa.*

Definicja 1.9.21. *Całkę*

$$\int\int_S F_n dS = \int\int_S (P(x, y, z) \cos\alpha + Q(x, y, z) \cos\beta + R(x, y, z) \cos\gamma) dS,$$

lub równoważnie

$$\int\int_S F_n dS = \int\int_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$

nazywamy całką powierzchniową zorientowaną układu funkcji P, Q ,R lub strumieniem pola wektorowego $F[P, Q, R]$ przez powierzchnię S.

1.9.6 Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego. Twierdzenie Stokesa.

Twierdzenie 1.9.22 (Gaussa-Ostrogradskiego). *Strumień wektora pola* $F = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ *prza powierzchnię zamkniętą gładką* S *zorientowaną na zewnątrz, ograniczającą obszar* V *normalny względem wszystkich płaszczyzn układu współrzędnych, jest równy całce potrójnej dywergencji tego pola w obszarze* V*, tzn:*

$$\int\int_S F_n dS = \int\int_V \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

O funkcjach P*,* Q*,* R *zakładamy, że są klasy* C^1 *w obszarze domkniętym* V*.*

Twierdzenie 1.9.23 (Stokesa). *Całka krzywoliniowa skierowana wzdłuż krzywej gładkiej przestrzennej zamkniętej równa się strumieniowi rotacji przez dowolną powierzchnię gładką* S *ograniczoną krzywą* K*, przy założeniu, że zwrot obiegu po krzywej i strona powierzchni są zgodne oraz że funkcje* P*,* Q*,* R *są klacy* C^1 *w pewnym obszarze przestrzennym zawioerającym powierzchnię* S *i jej brzeg* K*:*

$$\oint_K Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

2 Algebra

2.1 Wyznaczniki i równania liniowe

Definicja 2.1.1. *Na zbiorze permutacji S_n, $n \geqslant 2$, określamy funkcję*

$$sgn\ \sigma = \begin{cases} 1, & \text{gdy premutacja jest parzysta;} \\ -1, & \text{gdy permutacja jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Definicja 2.1.2 (Wyznacznik macierzy). *Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $[a_{ji}]_{n\times n}$, $a_{ji} \in K$, nazywamy następujący element ciała K:*

$$\sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

Twierdzenie 2.1.3 (Twierdzenia o wyznacznikach).

1. $detA = detA^T$
2. $det[A_1, ..., \lambda \cdot A_i, ..., A_n] = \lambda \cdot det[A_1, ..., A_i, ..., A_n]$
3. $det[A_1, ..., A_k, ..., A_m, ..., A_n] = -det[A_1, ..., A_m, ..., A_k, ..., A_n]$
4. $det(AB) = detA \cdot detB$
5. *Jeśli do dowolnej kolumny macierzy kwadratowej dodamy dowolną kombinację liniową innych jej kolumn, to wyznacznik macierzy się nie zmieni.*

Definicja 2.1.4 (Minor). *Minorem stopnia k macierzy $A = [a_{ji}]_{m\times n}$ nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k powstalej z macierzy A przez skreślenie $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn.*

Definicja 2.1.5 (Dopełnienie algebraiczne). *Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ji} macierzy kwadratowej $A = [a_{ji}]_{n\times n}$ nazywamy minor stopnia n-1 macierzy A, pomnożony przez $(-1)^{j+i}$, który jest wyznacznikiem macierzy powstałej przez skreślenie j-tego wiersza i i-tej kolumny.Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ji} oznaczamy przez D_{ji}.*

Definicja 2.1.6 (Macierz dołączona). *Macierzą dołączoną $A = [a_{ji}]_{n\times n}$ nazywamy macierz*

$$D = [D_{ij}]_{n\times n} = [D_{ji}]^T_{n\times n}$$

Twierdzenie 2.1.7.

$$A \cdot D = D \cdot A = (det\ A) \cdot I$$

Definicja 2.1.8 (Macierz odwrotna). *Macierz B nazywamy macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A, gdy*

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Twierdzenie 2.1.9. *Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej A istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy det $A \neq 0$ i wyraża się wzorem*

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot D.$$

Twierdzenie 2.1.10 (Własności macierzy).

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(cA)^T = cA^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

2.1.1 Wartości własne i wektory własne

Definicja 2.1.11 (Wielomian charakterystyczny). *Jeśli A jest macierzą kwadratową, to wielomian $det(xI - A)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy A i oznaczamy symbolem $\chi_A(x)$.*

Definicja 2.1.12 (Wektor własny). *Wektor niezerowy $X \in K^n$ nazywamy wektorem własnym macierzy kwadratowej A stopnia n odpowiadającym wartości własnej $\lambda \in K$, gdy*

$$A \cdot X = t \cdot X$$

Lemat 2.1.13. *Wartości własne macierzy A są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego χ_A.*

2.2 Układy równań liniowych

Definicja 2.2.1 (Macierz rozszerzona układu równań).

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}$$

Definicja 2.2.2 (Układ jednorodny). *Układ w którym $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$ nazywa się układem jednorodnym.*

Definicja 2.2.3 (Układ Cramera). *Układ, w którym $m = n$ i $det[\alpha_{ij}] \neq 0$ nazywa się układem Cramera.*

Twierdzenie 2.2.4 (Cramera). *Układ cramerowski równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami $x_j = \frac{D_j}{D}$, gdzie D jest wyznacznikiem macierzy układu, a D_j jest wyznacznikiem macierzy otrzymanej z macierzy układu przez zastąpinie w niej j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.*

Wniosek 2.2.5. *Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu cramerowskiego jest rozwiązanie zerowe.*

Twierdzenie 2.2.6 (O rzędzie macierzy). *Rząd macierzy A jest równy największemu stopniowi jej niezanikajacych minorów.*

Twierdzenie 2.2.7 (Kroneckera-Capellego). *Układ równań liniowych ma co najmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej.*

Twierdzenie 2.2.8. *Jeśli układ ma rozwiązanie, to ma on dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy układu jest równy liczbie niewiadomych.*

Twierdzenie 2.2.9. *Zbiór S rozwiązań układu jednorodnego jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ (dim S = n- r, gdzie r=rz A).*

2.3 Liczby zespolone i Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Definicja 2.3.1 (Ciało liczb zespolonych). *Rozważmy zbiór* $\mathbf{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *W* $\mathbf{C}$ *określamy dwa działania* $+$ *i* $\star$, *które będziemy nazywali dadawaniem i mnożewniem:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \star (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

gdzie działania po prawych stronach są zwykłymi działaniami na liczbach rzeczywistych.

Lemat 2.3.2 (Własności liczb zespolonych).

1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
2. $|z_1 + z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
4. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$
5. $|Re\ z| \leqslant |z| \qquad |Im\ z| \leqslant |z|$
6. $|z| \leqslant |Re\ z| + |Im\ z|$

Definicja 2.3.3 (Wzór de Moivre'a).

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Definicja 2.3.4.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Twierdzenie 2.3.5. *Płaszczyzna* $\bar{\mathbb{C}}$ *jest przestrzenią metryczną zwartą.*

Twierdzenie 2.3.6 (Zasadnicze Twierdzenie Algebry). *Każdy wielomian stopnia* $n \geqslant 1$ *o współczynnikach zaspolonych ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych. Czyli ciało liczb zespolonych jest algebraicznie zamknięte.*

Definicja 2.3.7. *Ciało mające tę własność, że każdy wielomian stopnia dodatniego o współczynnikach z tego ciała ma w tym ciele co najmniej jeden pierwiastek, nazywa się ciałem algebraicznie zamkniętym.*

2.4 Przestrzenie wektorowe (liniowe)

Definicja 2.4.1 (Przestrzeń liniowa nad ciałem K (V(K))). *Niepusty zbiór V nazywa się przestrzenią liniową nad ciałem K, jeśli*

1. *V jest grupą abelową względem działania +;*

2. *określone jest odwzorowanie $f : K \times V \to V$ (mnożenie wektora przez skalar), przyporządkowujące każdemu $\alpha \in K$ i $x \in V$ element $f(\alpha, x) \in V$, który będziemy oznaczali przez αx spełniające dla każdego $\alpha, \beta \in K$ i każdego $x, y \in V$ warunki:*

   a) $1x = x$ *(1 - jedność ciała K)*

   b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

   c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

   d) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

Przykład 2.4.2. *Przykłady przestrzeni liniowych:*

1. *zbiór wektorów swobodnych płaszczyzny*

2. *zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach z danego ciała*

Twierdzenie 2.4.3. *Niech będzie dana przestrzeń liniowa V(K). Wówczas*

$$\forall\alpha \in K \forall x \in V \qquad \alpha x = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee x = \mathbf{0}).$$

Twierdzenie 2.4.4. *Niech będzie dana przestrzeń liniowa V(K). Wówczas*

$$\forall\alpha \in K \forall x \in V \qquad \alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x.$$

Twierdzenie 2.4.5. *Niech będzie dana przestrzeń liniowa V(K). Wówczas*

$$\forall\alpha \in K \forall x, y \in V \qquad \alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y \qquad \forall\alpha, \beta \in K \forall x, y \in V \qquad (\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x.$$

Definicja 2.4.6 (Podprzestrzeń przestrzeni liniowej V). *Niepusty zbiór W przestrzeni liniowej V(K) będący przestrzenią liniową względem dodawania wektorów w V i ich mnożenia przez skalary z K, nazywa się podprzestrzenią przestrzeni liniowej V.*

Twierdzenie 2.4.7. *Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych podukładów układu elementów zbioru V jest podprzestrzenią przestrzeni V(K).*

Definicja 2.4.8 (Liniowa zależność). *Układ wektorów jest liniowo zależny, jeśli istnieje nietrywialna kombinacja liniowa wektorów tego układu równa* $\mathbf{0}$.

Wniosek 2.4.9. *Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.*

Definicja 2.4.10. *Część wspólna podprzestrzeni liniowych przestrzeni V jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.*

Definicja 2.4.11 (Baza przestrzeni). *Układ generatorów M przestrzeni liniwej V(K) nazywa się jej bazą, jeśli każdy skończony podukład układu M jest liniwo niezależny.*

Definicja 2.4.12 (Homomorfizm przestrzeni liniowych (odwzorowanie liniowe)). *Niech V i V' będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem K. Odwzorowanie $F : V \to V'$ nazywa się homomorfizmem (odwzorowaniem liniowym), jeśli:*

1) $\forall x, y \in V \quad F(x + y) = F(x) + F(y)$,

2) $\forall\lambda \in K \forall x \in V \quad F(\lambda x) = \lambda F(x)$.

Definicja 2.4.13. *Niech V i V' będą przestrzeniami wektorowymi nad K i niech F będzie odwzorowaniem z V do V'. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1) F jest odwzorowaniem liniowym,

2) $\forall \lambda, \beta \in K \forall x, y \in V \quad F(\lambda x + \beta y) = \lambda F(x) + \beta F(y)$,

3) $\forall \lambda \in K \forall x, y \in V \quad F(\lambda x + y) = \lambda F(x) + F(y)$.

Definicja 2.4.14. *Odwzorowanie liniowe odwracalne nazywa się* ***izomorfizmem przestrzeni wektorowych*** *lub* ***izomorfizmem liniowym****. Mówimy, że przestrzenie wektorowe V iV' są* ***izomorficzne****, jeśli istnieje izomorfizm liniowy przestrzeni V na przestrzeń V'. Izomorfizm przestrzeni wektorowej V na siebie nazywa się* ***automorfizmem liniowym****.*

Definicja 2.4.15 (Jądro odwzorowania). *Niech $F \in Hom(V, V')$. Zbiór*

$$F^{-1}(0) = \{v \in V : F(v) = 0\}$$

nazywamy jędrem odwzorowania F i oznaczamy $KerF$.

Twierdzenie 2.4.16.

$$dim(V) = dim(KerF) + dim(ImF)$$

Twierdzenie 2.4.17. *Niech $F \in Hom(V, V')$ i $dimV = dimV' = n$ to następujące warunki są równoważne:*

1. *F jest izomorfizmem*
2. *Ker F = 0*
3. *Defekt F (def F = dim(Ker F)) równa się zero*
4. *Obraz odwzorowania Im F = V'*
5. *Rząd F (rz F = dim(Im F)) równa się n.*

Twierdzenie 2.4.18. *Dwie skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe nad tym samym ciałem, mające ten sam wymiar, są izomorficzne.*

2.5 Przestrzenie afiniczne

Definicja 2.5.1 (Przestrzeń afiniczna). *Niepusty zbiór* $\mathfrak{U}$ *nazywamy przestrzenią afiniczną związaną z przestrzenią liniową V(K), jeśli określona jest funkcja* $f : \mathfrak{U} \times V \to \mathfrak{U}$, *przyporządkowująca każdemu* $M \in \mathfrak{U}$ *i każdemu* $x \in V$ *element* $f(M, x) \in \mathfrak{U}$, *który oznaczamy przez* $M\sharp x$, *spełniająca następujące warunki:*

1) $\forall M \in \mathfrak{U} \quad \forall x, y \in V \qquad M\sharp(x + y) = (M\sharp x)\sharp y,$

2) $\forall M, N \in \mathfrak{U} \quad \exists x \in V \qquad M\sharp x = N$, *przy czym wektor x określony jest jednoznacznie.*

Uwaga 2.5.2. *Elementy przestrzeni afinicznej nazywamy punktami. Dalej piszemy, że* $M\sharp x$ *to* $M + x$ *pamiętając, że nie jest to dodawanie wektorów. Afiniczną przestrzeń rzeczywistą oznaczamy* $\mathfrak{U}[V(\mathbb{R})]$. *Podadto jeśli wektor x spełnia równość* $M\sharp x = N$, *to oznaczamy go przez* $\overrightarrow{MN}$. *Wymiarem przestrzeni* $\mathfrak{U}[V]$ *nazywamy wymiar przestrzeni liniowej V.*

Twierdzenie 2.5.3.

$$\forall M \in \mathfrak{U} \qquad M + \boldsymbol{0} = M$$

Twierdzenie 2.5.4.

$$\forall M \in \mathfrak{U} \qquad \overrightarrow{MM} = \boldsymbol{0}$$

Wniosek 2.5.5.

$$\forall M, N \in \mathfrak{U} \qquad \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$$

Wniosek 2.5.6. *Dla dowolnych* $M_1, M_2, ..., M_n \in \mathfrak{U}$ *zachodzi*

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + ... + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} + \overrightarrow{M_nM_1} = \boldsymbol{0},$$

oraz

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + ... + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \overrightarrow{M_1M_n}.$$

Definicja 2.5.7 (Wektor wodzący). *Niech będzie dana przestrzeń afiniczna* $\mathfrak{U}[V]$. *Wybierzmy w niej dowolny punkt O. Jeśli* $M \in \mathfrak{U}$, *to wektor* $\overrightarrow{OM}$ *będziemy nazywali wektorem wodzącym punktu M przy ustalonym punkcie O.*

Twierdzenie 2.5.8. *Jeśli O jest ustalonym punktem przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{U}[V]$, *to zbiór* $\left\{\overrightarrow{OM} : M \in \mathfrak{U}\right\} = V$.

Wniosek 2.5.9. *Zbiory* $\mathfrak{U}$ *i V są równoliczne.*

Definicja 2.5.10 (Układ współrzędny przestrzeni afinicznej). *Niech będzie dana n-wymiarowa przestrzeń afiniczna* $\mathfrak{U}[V]$. *Układem współrzędnych przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{U}[V]$ *nazywamy parę uporządkowaną* (O, ϵ), *gdzie O jest punktem przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{U}$, *a* ϵ *bazą przestrzeni linowej V. Punkt O naywa się początkim układu współrzędnych.*

Definicja 2.5.11. *Współrzędnymi afinicznymi punktu M w układzie współrzędnych* (O, ϵ) *nazywamy współrzędne wektora wodzącego* $\overrightarrow{OM}$ *tego punktu w bazie* ϵ.

Twierdzenie 2.5.12. *Niech* $\mathfrak{U}[V]$ *będzie n-wymiarową przestrzenią afiniczną i* (O, ϵ) *jej układem współrzędnych. Jeśli punkty* $M, N \in \mathfrak{U}$ *mają w tym układzie współrzędne* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *i* $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$, *to wektor* $\overrightarrow{MN} \in V$ *ma w bazie* ϵ *współrzędne* $\eta_1 - \xi_1, \eta_2 - \xi_2, ..., \eta_n - \xi_n$.

Definicja 2.5.13. *Niech E będzie przestrzenią euklidesową (skończenie wymiarową), wtedy* $\mathfrak{U}[E]$ *będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową punktów. Układ współrzędnych* (O, ϵ) *nazywamy układem ortogonalnym (ortonormalnym) jesli* ϵ *jest bazą ortogonalną (ortonormalną) przestrzeni E.*

Definicja 2.5.14. *Odległością między dwoma pinktami M i N przestrzeni euklidesowej punktów nazywamy liczbę*

$$\rho(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MN})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \xi_i)^2}.$$

Definicja 2.5.15 (Odwzorowanie afiniczne). *Niech będą dane dwie przestrzenie afiniczne $\mathfrak{U}[V(K)]$ i $\mathfrak{U}'[V'(K')]$. Funkcja $\varphi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ nazywa się odwzorowaniem afinicznym przestrzeni $\mathfrak{U}$ w przestrzeń $\mathfrak{U}'$, jeśli istnieje homomorfizm A przestrzeni V w przestrzeń V' taki, że dla każdego punktu $M \in \mathfrak{U}$ i każdego wektora $x \in V$*

$$\varphi(M + x) = \varphi(M) + Ax.$$

Homomorfizm A nazywa się częścią jednorodną odwzorowania afinicznego φ i jest określona jednoznacznie.

3 Funkcje zespolone

3.1 Funkcje holomorficzne

3.1.1 Pochodna funkcji zmiennej zespolonej. Równania Cauchy-Riemanna

Definicja 3.1.1. *Niech $F(z) = F_1(x, y) + F_2(x, y)i$, wtedy określamy*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y},$$

oraz

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Twierdzenie 3.1.2 (Twierdzenie Cauchy-Riemanna). *Jeżeli F(z) posiada pochodną w punkcie z_0, to istnieją $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ oraz*

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z_0) = F'(z_0).$$

Twierdzenie 3.1.3 (Równania Cauchy-Riemanna). *Jeżeli funkcja $F(z) = F_1(x, y) + F_2(x, y)i$ jest różniczkowalna w punkcie $z_0 = x_0 + y_0 i$, to funkcje F_1 i F_2 mają pierwsze pochodne w punkcie (x_0, y_0) i pochodne te spełnią tzw. równania Cauchy-Riemanna:*

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0 \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0 = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0.$$

Twierdzenie 3.1.4. *Jeżeli dla funkcji $F_1(x, y)$ i $F_2(x, y)$ istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego ciągłe w obszarze D, które w każdym punkcie obszaru D spełniają równania Cauchy-Riemanna, to funkcja $F(z) = F_1(x, y) + F_2(x, y)i$ jest różniczkowalna w obszarze D.*

Twierdzenie 3.1.5. *Jeżeli funkcja $F(z) = F_1(x, y)+F_2(x, y)i$ jest różniczkowalna w obszarze D, to w każdeym punkcie tego obszaru ma pochodną ciągłą dowolnie wysokiego rzędu.*

3.1.2 Funkcje holomorficzne

Definicja 3.1.6. *Funkcję F zmiennej zespolonej z nazywamy holomorficzną (analiztyczną) w obszarze D zawartym w dziedzinie F, jeżeli jest różniczkowalną w D.*

Definicja 3.1.7. *Funkcję F zmiennej zespolonej z nazywamy holomorficzną (analiztyczną) w punkcie z_0, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu z_0, w którym funkcja F jest holomorficzna.*

Własności funkcji zmiennej zespolonej zależą od własności topologicznych zbioru, w którym jest ona pkreślona.

Definicja 3.1.8 (Zbiór spójny). *Zbiór, który nie można przedstawić jako sumy mnogościowej dwóch jego podzbiorów niepustych, rozłącznych i takich, że żaden z nich nie zawiera punktów skunienia drugiego nazywamy zbiorem spójnym.*

Przykłady: łuk okręgu, łamana, wnętrze prostokąta.

Uwaga 3.1.9. *Suma mnogościowa dwóch zbiorów spójnych posiadających chociażby jeden punkt wspólny jest zbiorem spójnym.*

Definicja 3.1.10 (Składowa). *Podzbiór S zbioru A nazywa się jego składową, jężeli jest spójny i jeżeli kązdy inny spójny podzbiór S' zbioru A zawierający S pokrywa się z S, czyli składowa zbioru jest maksymalnym podzbiorem spójnym. Każde dwie składowe zbioru A są albo identyczne albo rozłączne.*

Definicja 3.1.11 (Obszar). *Obszarem nazywamy zbiór otwarty i spójny.*

Definicja 3.1.12 (Obszar jednospójny i n-spójny). *Obszar nazywamy jednospójnym, jeżeli jego dopełnienie do płaszczyzny zaspolonej jest zbiorem spójnym (np. koło). Obszar nazywamy n-spójnym, jeżeli jego dopełnienie składa się dokładnie z n składowych (np. pireścień - obszar dwuspójny).*

Twierdzenie 3.1.13 (Cauchy'ego). *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pewnym obszarze jednospójnym D, to całka krzywoliniowa wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej zawartej w D równa się zaru.*

Twierdzenie 3.1.14. *Całka krzywoloniowa funkcji holomorficznej w obszarze jednospójnym nie zależy od drogi całkowania, a tylko od punktu początkowego i końcowego tej drogi (czyli też od kierunku).*

Twierdzenie 3.1.15 (O funkcji pierwotnej). *Jeśli F jest funkcją holomorficzną na G i ma ciągłą pochodną F' na G, a γ jest krzywą zamkniętą, $\gamma^* \subset G$, to*

$$\int_\gamma F'(z)dz = 0.$$

Twierdzenie 3.1.16 (Cauchy'ego dla zbioru wypukłego). *Niech G będzie otwarytm i wypukłym podzbiorem $\mathbb{C}$, f - funkcją ciągłą na G i holomorficzną na $G \setminus \{p\}$. Wtedy*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

dla każdej krzywej zamknięjej γ, gdzie $\gamma^* \subset G$.

Twierdzenie 3.1.17 (Uogólnienie twierdzenia Cauchy'ego). *Jeżeli funkcja f(z) jest holomorficzna w obszarze n-spójnym D, którego brzeg składa się z n+1 krzywych regularnych zamkniętych $C_0, C_1, ..., C_n$, przy czym funkcja f(z) jest ciągła na domknięciu obszaru D, to*

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{C_i} f(z) = 0,$$

przy czym kierunek wzrostu parametru na C_n jest tak obrany, aby przy poruszaniu się punktu po krzywej C_i w kierunku wzrastania parametru t obszar D pozostał o stronie lewej.

Definicja 3.1.18 (Indeks punktu a względem krzywej γ). *Jeśli γ jest krzywą zamkniętą, $G = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, to*

$$Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Twierdzenie 3.1.19. *Funkcja Int_γ przyjmuje wartości całkowite, jest stała na każdej składowej zbioru G i równa się zeru na składowej nieograniczonej.*

3.1.3 Wzór całkowy Cauchy'ego

Twierdzenie 3.1.20 (Wzór całkowy Cauchy'ego). *Jeżeli funkcja f(z) jest holomorficzna wewnątrz i na brzegu K jednospójnego obszaru D, $z_0 \in D$, to pochodna $f^{(n)}(z_0)$ istnieje i wyraża się wzorem*

$$\forall z \in D \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_K \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Twierdzenie 3.1.21 (Wzór całkowy Cauchy'ego w zbiorze wypukłym). *Niech γ będzie krzywą zamkniętą w otwartym i wypukłym zbiorze $G \subset \mathbb{C}$, f niech będzie funkcją holomorficzną w G. Wtedy*

$$f(z) \cdot Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{(u-z})du \qquad z \in G, z \notin \gamma^*.$$

Twierdzenie 3.1.22 (O wartości średniej funkcji holomorficznej). *Jeżeli f(z) jest funkcją holomorficzną w D, $z \in D$ to*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt,$$

czyli wartości funkcji holomorficznej w każdeym punkcie jesr równa jej wartości średniej na dowolnym okręgu zawartym w D o środku w punkcie z.

Twierdzenie 3.1.23. *Jeżeli funkcja f(z) jest holomorficzna w obszarze D, to jest rozwijalna w otoczeniu każdego punktu $z_0 \in D$ w szereg potęgowy*

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du,$$

przy czym promień zbieżności szeregu jest nie mniejszy niż odległość punktu z_0 od brzegu obszaru D.

Twierdzenie 3.1.24 (Nierówność Cauchy'ego). *Jeżeli funkcja f(z) jest w kole $|z| < R$ holomorficzna i ograniczona liczbą M, to współczynniki a_n jej rozwinięcia w szereg potęgowy spełniją nierówność*

$$|a_n| \leqslant MR_{-n}.$$

Definicja 3.1.25 (Funkcja całkowita). *Funkcją całkowitą nazywamy sumę szeregu potęgowego*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

w przypadku gdy promień zbieżności tego szeregu $R = \infty$.

Uwaga 3.1.26. *Funkcja całkowita jest określona na całej płaszczyźnie zespolonej i w każdym punkcie ma pochodne dowolnie wysokiego rzędu.*

Wniosek 3.1.27. *Funkcja holomorficzna na całej płaszczyżnie jest funkcją całkowitą.*

Definicja 3.1.28. *Liczbę z_0 nazywamy punktem zerowym (zerem) p-krotnym funkcji f(z), jeżeli w jej rozwinięciu $a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = 0$, natomiast $a_p \neq 0$.*

Twierdzenie 3.1.29 (Twierdzenie Liouville'a). *Każda funkcja całkowita i ograniczona równa się stałej.*

Twierdzenie 3.1.30 (Twierdzenie Morery). *Jeżeli f(z) jest funkcją ciągłą w obszarze D, a całka krzywoliniowa funkcji f(z) wzdłuż obwodu każdego prostokąta zawartego w D równa się zeru, to funkcja f(z) jest holomorficzna w obszarze D.*

Wniosek 3.1.31. *Funkcja f(z) jest holomrficzna w punkcie z_0, jeżli istniej otoczenie tego punktu, w którym daje się przedstawić w postaci sumy szeregu potęgowego.*

3.1.4 Zasada maksimum dla modułu funkcji harmonicznej

Twierdzenie 3.1.32 (Zasada maksimum dla modułu funkcji harmonicznej). *Jeżeli funkcja f(z) różna od stałej jest holomorficzna w obszarze D, to jej moduł $|f(z)|$ nie osiąga maksimum w obszarze D (może go osiągnąć tylko na brzegu obszaru D, jeżeli na min funkcja f(z) jest również określona).*

Twierdzenie 3.1.33 (Twierdzenie Rouche'go). *Jeżeli funkcje f i g są hlomorficzne w obszarze D, ciągłe w obszarze D i na jego brzegu oraz dla każdego z na brzegu obszaru D ma miejsce nirówność*

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

to suma krotności miejsc zerowych sumy $f(z) + g(z)$ w obszarze D jest dokładnie ta sam co suma krotności miejsc zerowych funkcji f(z) w obszarze D.

Wniosek 3.1.34. *Jewżeli dwie funkcje f i g są holomorficzne w obszarze D oraz przyjmują wartości równe w zbiorze punktów mających punkt skupienia leżący w obszarze D, to funkcje f i g są identyczne w obszrze D.*

3.1.5 Szeregi Laurenta

Definicja 3.1.35 (Szereg Laurenta). *Szeregiem Laurenta o środku w punkcie $z_0 \neq \infty$ i współczynnikach a_n nazywamy szereg postaci*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

nazywamy odpowiednio częścią regularną i częścią główną szeregu.

Twierdzenie 3.1.36. *Jeśli r i R są odpowiednio promieniami zbieżności części głównej i regularnej oraz $r < R$, to szereg Laurenata jest bezwzględenie i niemal jednostajnie zbieżny w pierścieniu $P = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, jego suma jest funkcją holomorficzną w P. Szereg ten natomiast nie jest zbieżny dla $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{P}$.*

3.1.6 Punkty osobliwe

Definicja 3.1.37. *Jeśli funkcja f jest holomorficzna w sąsiedztwie punktu z_0, to punkt ten będziemy nazywać punktem osobliwym odosobnionym tej funkcji. Wyróżniamy trzy typy punktów osobliwych odosobnionych:*

1. *Jeżeli część główna rozwinięcia Laurenta zanika, to punkt z_0 nazywamy punktem pozornie osobliwym funkcji f.*

2. *Jeżeli część główna rozwinięcia ma postać*

   $$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad a_{-k} \neq 0,$$

   to punkt z_0 nazywamy biegunem k-krotnym funkcji f.

3. *Jeżeli część główna rozwinięcia ma nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera, to z_0 nazywamy punktem istotnie osobliwym funkcji f.*

Definicja 3.1.38 (Funkcja meromorficzna). *Mówimy, że funkcja f jest meromorficzna w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, gdy jest holomorficzna w sąsiedztwie tego punktu i punkt z_0 jest punktem pozornie osobliwym.*

Definicja 3.1.39 (Zero k-krotne funkcji). *Jeśli f jest holomorficzna w punkcie* z_0 *i nie zanika tożsamościowo w żadnym sąsiedztwie tego punktu oraz* $f(z_0) = 0$ *oraz jeśli*

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

to z_0 *nazywamy k-krotnym zerem funkcji f.*

Lemat 3.1.40. *Jeśli punkt* z_0 *jest k-krotnym zerem funkcji f, to jest k-krotnym biegunem funkcji* $\frac{1}{f}$ *i odwrotnie.*

3.1.7 Residua

Definicja 3.1.41 (Residuum). *Jeśli funkcja f ma w punkcie* z_0 *biegun to współczynnik* a_{-1} *części głównej nazywamy residuum funkcji w punkcie* z_0 *i oznaczamy* $res_{z_0} f$.

Twierdzenie 3.1.42 (O residuach). *Niech G będzie wypukły i otwarty, niech* $f \in H(G \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\})$, *gdzie* a_i *są różnymi punktami G, w których funkcja ma bieguny. Niech* γ *będzie krzywą zamkniętą,* $\gamma^* \subset G$ *i niech* $\gamma^* \cap \{a_1, ..., a_n\} = \emptyset$. *Wtedy*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f \cdot Ind_{\gamma}(a_k).$$

Twierdzenie 3.1.43. *Jeśli a jest biegunem jednokrotnym funkcji f, to*

$$res_a f = \lim_{z \to a} (z - a) f(z).$$

Twierdzenie 3.1.44. *Jeśli a jest biegunem k-krotnym funkcji f, to*

$$res_a f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} f^{(k-1)}(z).$$

4 Równania różniczkowe

4.1 Równania różniczkowe zwyczajne liniowe.

Niech I,J oznaczają dowolne przedziały w R.

Definicja 4.1.1 (Równanie różniczkowe zwyczajne n-tego rzędu). *Równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu nazywamy równanie postaci*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Definicja 4.1.2 (Zagadnienie Cauchy'ego). *Układ równań*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \quad y(t_0) = y_0$$

nazywamy zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego.

Definicja 4.1.3 (Krzywa całkowa). *Krzywą całkową równania różniczkowego nazywamy wykes rozwiązań tego równania.*

Definicja 4.1.4 (Rozwiązanie wysycone). *Rozwiązaniem wysyconym nazywamy takie rozwiązanie równania różniczkowego, ża każde jego rozszerzenie pokrywa się z nim.*

Twierdzenie 4.1.5. *Każde rozwiązanie można przedłużyć do rozwiązania wysyconego.*

4.1.1 Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe pierwszego rzędu

Definicja 4.1.6 (Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe pierwszego rzędu). *Równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym piewrszego rzędu nazywamy równanie postaci*

$$y' + a(t)y = f(t),$$

gdzie $a : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Równanie nazywamy liniowych jednorodnym, gdy $f \equiv 0$. W przeciwnym przypadku mamy równanie liniowe niejednorodne.

Twierdzenie 4.1.7 (Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania różniczkowego zwyczajnego liniowego). *Jeżeli funkcje a i f są ciągłe, to dla każdego punktu $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Rozwiązanie to jest określone na całym przedziale I.

Twierdzenie 4.1.8. *Każde rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu*

$$y' + a(t)y = f(t),$$

gdzie $a : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, można jednoznacznie zapisać w postaci

$$\varphi(\cdot, C) = C\varphi_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot),$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest stałą, $\varphi_1(\cdot)$ jest rozwiązaniem równania liniowego niejednorodnego, zaś $\varphi_0(\cdot)$ jest ustalonym niezerowym rozwiązaniem równania liniowego jednorodnego.

Definicja 4.1.9 (Równanie różniczkowe Bernoulliego). *Równaniem różniczkowym Bernoulliego nazywamy równanie postaci*

$$y' + a(t)y = f(t)y^p, \quad p \neq 0, p \neq 1.$$

Uwaga 4.1.10. *Przy pomocy podstawienie $u := y^{1-p}$ równanie różniczkowe Bernoulliego sprowadza się do równiania różniczkowego liniowego niejednorodnego.*

Twierdzenie 4.1.11. *Zbiór wszystkich rozwiązań równania różniczkowego liniowego jednorodnego pierwszego rzędu*

$$y' + a(t)y = 0,$$

gdzie $a : I \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, tworzy przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$ wymiaru 1.

4.1.2 Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 4.1.12 (Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych).

$$y' = g(t)h(y)$$

Lemat 4.1.13 (Całka równania o zmiennych rozdzielonych). *Jeżeli funkcje g(t) i h(y) są ciągłe, przy czym $h(y) \neq 0$ dla każdego y, to całka równania rózniczkowego o zmiennych rozdzielonych dana jest wzorem*

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + C.$$

Definicja 4.1.14 (Równanie różniczkowe jednorodne). *Równaniem różniczkowym jednorodnym nazywamy równanie postaci*

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right).$$

Uwaga 4.1.15. *Przy pomocy podstawienie $u := \frac{y}{t}$ równanie różniczkowe jednorodne sprowadza się do równiania różniczkowego o rozdzielonych zmiennych.*

Twierdzenie 4.1.16 (Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania równania o zmiennych rozdzielonych). *Jeżeli funkcje g(t) i h(y) są ciągłe odpowiednio na przedziałach (a,b) i (c,d), przy czym $h(y) \neq 0$ dla każdego $y \in (c,d)$ oraz $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, to zagadnienie początkowe*

$$y' = g(t)h(y) \quad y(t_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

4.2 Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różnoczkowych zwyczajnych

Przez P będziemy oznaczać prostokąt $[t_0-\delta, t_0+\delta]\times[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$, gdzie $\varepsilon, \delta > 0$.

Definicja 4.2.1 (Warunek Lipschitza). *Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ spełnie warunke Lipschitza względem y, jeżeli istnieje $L > 0$ takie, że*

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|,$$

dla wszystkich $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ i wszystkich $y_1, y_2 \in [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$.

Twierdzenie 4.2.2 (Twierdzenie Picarda-Lindelöfa dla prostokąta). *Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą na P warunek Lipschitza względem y ze stałą L. Wówczas istnieje rozwiązanie $y : [t_0-\eta, t_0+\eta] \to \mathbb{R}$ zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

gdzie $\eta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{M}\}$, $M = \sup\{|f(t,y)| : (t,y) \in P\}$. Rozwiązanie to jest lokalnie jednoznaczne w następującym sensie: jeżeli $\tilde{x} : I \to \mathbb{R}$, ($t_0 \in I \subset [t_0-\eta, t_0+\eta]$), jest rozwiązaniem zagadnienia, to $x \equiv \tilde{x}$ na I.

Twierdzenie 4.2.3 (Twierdzenie Peano dla prostokąta). *Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas istnieje rozwiązanie $y : [t_0-\eta, t_0+\eta] \to \mathbb{R}$ zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

gdzie $\eta \leqslant \delta$ jest pewną liczbą dodatnią.

Uwaga 4.2.4. *W twierdzeniu Peano nie mówi się o jednoznaczności.*

Twierdzenie 4.2.5 (Twierdzenie Picarda-Lindelöfa w kuli). *Niech B - przestrzeń Banacha, $I = [a,b]$, $u_0 \in B$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\bar{K} = \bar{K}(u_0, r)$ oraz $f \in C(I \times \bar{K}, B)$ i niech funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze względu na 2 współrzędną ze stałą L. Niech $x_0 \in I$ oraz $y_0 \in K(u_0, r)$ (otwarta), wtedy zagadnienie*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno wysycone rozwiązanie y określone na przedziale domkniętym $[\alpha, \beta]$ o wartościach w B: $y : [\alpha,\beta] \to B$ przy czym $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ ale gdy $\alpha > a$, to $\|y(\alpha)-u_0\| = r$, a gdy $\beta < b$, to $\|y(\beta)-u_0\| = r$.

Twierdzenie 4.2.6 (O istnieniu jednoznacznych rozwiązań w dowolnych zbiorach). *Założenia: $f \in C(D,B)$, $f \in Lip_{2,LOC}$, $(x_0,y_0) \in D$.Istnieje jedno wysycone rozwiązanie y dla $x \in I$ zagadnienia*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

przy czym jeśli:

1. *Gdy $D = \mathbb{R} \times B$ lub $D = (-\infty, b] \times B$ lub $D = [a, +\infty) \times B$ to*

   $$I = \mathbb{R} \quad lub \quad I = (-\infty, b) \quad lub \quad I = (a, +\infty)$$

   oraz

   $$\lim_{x \to a^+} \|y(x)\| = \infty \quad i \quad \lim_{x \to b^-} \|y(x)\| = \infty.$$

2. *Gdy* $D = \mathbb{R} \times K(u_0, r) \subset B$, $y_0 \in Int K(u_0, r)$ *to*

$$I = \mathbb{R} \quad lub \quad I = (-\infty, b] \quad lub \quad I = [a, +\infty)$$

gdzie

$$\|y(a) - u_0\| = r \quad i \quad \|y(b) - u_0\| = r.$$

3. *Gdy* D *- spójny, domknięty, ograniczony oraz* $(x_0, y_o) \notin \partial D$ *to*

$$I = [a, b] \quad oraz \quad (a, y(a)) \wedge (b, y(b)) \in \partial D.$$

4. *Gdy* D *- obszar ograniczony to* $I = (\alpha, \beta)$, *gdzie:*

$$\lim_{x \to \alpha^+} \varrho((x, y(x)), \partial D) = 0$$

oraz

$$\lim_{x \to \beta^-} \varrho((x, y(x)), \partial D) = 0.$$

5. *Gdy* D *- obszar nieograniczony to* $I = (\alpha, \beta)$, *gdzie:*

$$\lim_{x \to \alpha^+} \varrho((x, y(x)), \partial D) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x \to \alpha^+} \|y(x)\| = \infty$$

oraz

$$\lim_{x \to \beta^-} \varrho((x, y(x)), \partial D) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x \to \beta^-} \|y(x)\| = \infty.$$

4.3 Równania różniczkowe liniowe - własności rozwiązań

Twierdzenie 4.3.1. *Własności rozwiązań równania jednorodnego (RJ) $y' = a(t)y$:*

1. *ma rozwiązanie zerowe*
2. *kombinacja liniowa rozwiązań jest rozwiązaniem*

Twierdzenie 4.3.2. *Własności rozwiązań równania niejednorodnego (RNJ) $y' = a(t)y+g(t)$:*

1. *jeśli y jest rozwiązaniem RJ, a x rozwiązaniem RNJ, to $x + y$ jest rozwiązaniem RNJ*
2. *jeśli x_1, x_2 są rozwiązaniami RNJ, to $x_1 - x_2$jest rozwiązaniem RJ.*
3. *$\tilde{x}$ - dane rozwiązanie RNJ. Wtedy dla każdego rozwiązania x RNJ, istnieje rozwiązanie y RJ, takie, że: $x = \tilde{x} + y$.*

Twierdzenie 4.3.3. *Własności rozwiązań równań n-tego rzędu:*

1. *są klasy C^{n-1}*
2. *mają n-tą pochodną*

4.4 Rozmaitości różniczkowe

5 Metody numeryczne

5.1 Metody numeryczne rozwiązywania układów równań

1. Metody bezpośrednie
   a) metoda eliminacji Gaussa
   b) metoda Banachiewicza (Cholesky'ego) dla macierzy symetrycznych i dodatnio określonych
2. Metody iteracyjne

5.2 Metody aproksymacji i interpolacji

5.2.1 Aproksymacja

Zagadnienie aproksymacji: Niech będą dane wartości tej funkcji f w punktach $x_0, x_1, ..., x_m$ (węzły aproksymacji). Szukamy funkcji aproksymacji $f^*(x)$, która będzie najlepiej przybliżać funkcję f(x) w sensie normy błędu przybliużenia ($E(f) = f(x) - f^*(x)$).

Najczęściej stosuje się normy:

- Norma średniokwadratowa

$$\|E(f)\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{m} f(x_i - f^*(x_1))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Norma maksymalna

$$\|E(f)\|_{max} = \max|f(x_i) - f^*(x_i)|$$

Funkcję aproksymującą $f^*(x)$ zapisujemy w postaci liniowej kombinacji n funkcji bazowych, tj.

$$f^*(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1 + ... + c_n\phi_n(x),$$

gdzie $\phi_0(x), \phi_1(x), ..., \phi_n(x)$ są ustalonymi funkcjami bazowymi, a $c_0, ..., c_n$ są poszukiwanymi współczynnikami.

Przykład 5.2.1 (Aproksymacja jednomianami). *Jeśli funkcje bazowe są w postaci $\phi_k(x) = x^k$ to mamy aproksymację jednomianami.*

Przykład 5.2.2 (Aproksymacja trygonometryczna). *Jeśli funkcje bazowe są w postaci $\phi_k(x) = \sin(kx)$ lub $\phi_k(x) = \cos(kx)$ to mamy aproksymację trygonometryczną.*

Przykład 5.2.3 (Aproksymacja wykładnicza). *Jeśli funkcje bazowe są w postaci $\phi_k(x) = e^{kx}$ to mamy aproksymację wykładniczą.*

5.2.2 Interpolacja

Zagadnienie interpolacji:
Niech f(x) bedzie funkcją określoną w przedziale $[a, b]$. Niech będą dane wartości tej funkcji w punktach $x_0, x_1, ..., x_m$ (węzły interpolacji) . Na podstawie tych wartości chcemy obliczyć wartość f(x) dla jakiejś nowej wartości argumentu x.

Aby to rozwiązać, trzeba znaleść wielomian L(x) najniższego stopnia, który w węzłach ma te same wartości co funkcja f(x), wtedy przyjmujemy, że

$$f(x) \approx L(x).$$

Przykład 5.2.4 (Wzór Lagrange'a). *Niech*

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_m)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_m)} \qquad k = 0, 1, 2, ..., m$$

wtedy $l_k(x_k) = 1$ *oraz* $l_k(x_i) = 0$ *dla* $i \neq k$. *Definiujemy wielomian*

$$L(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) l_k(x),$$

który przyjmuje w węzłach te same wartości co funkcja f(x).

Uwaga 5.2.5. *Niech*

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_m),$$

wtedy

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} \qquad \text{oraz } L(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} f(x_k).$$

Przykład 5.2.6 (Wzór interpolacyjny Lagrange'a z resztą). *Niech* f *będzie funkcją klasy* C^{m+1}, *wtedy*

$$f(x) = L(x) + \frac{f^{(m+1)(\xi)}}{(m+1)!}\omega(x) \qquad a < \xi < b.$$

Twierdzenie 5.2.7. *Jeśli w przedziale [a,b] zachodzi*

$$\max |f^{(m+1)}(z)| = M_{m+1} < \infty,$$

to

$$|f(x) - L(x)| \leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.$$

Przykład 5.2.8 (Interpolacja z krotnymi węzłami. Wzór Hermite'a z resztą). *Zakładamy, że mamy dane oprócz wartości funkcji w węzłach również wartości kolejnych pochodnych*

$$\begin{array}{cccc} f(x_0) & f'(x_0) & ... & f^{(n_0)}(x_0) \\ f(x_1) & f'(x_1) & ... & f^{(n_1)}(x_1) \\ ... & ... & ... & ... \\ f(x_m) & f'(x_m) & ... & f^{(n_m)}(x_m) \end{array}$$

gdzie $(n_0+1)+(n_1+1)+...+(n_m+1) = N$. *Węzły* x_i *nazywają się węzłami interpolacyjnymi o krotności odpowiednio* n_i+1. *Szukamy wielomianu H(z), który w węzłach będzie przyjmował te same wartości co funkcja f.*

Zachodzi

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\Omega(x),$$

gdzie

$$\Omega(z) = (z-x_0)^{n_0+1}...(z-x_m)^{n_m+1}.$$

6 Statystyka matematyczna

6.1 Wnioskowanie statystyczne

Definicja 6.1.1 (Przestrzeń statystyczna). *Przestrzenią statystyczną (modelem statystycznym) nazywamy trójkę obiektów:*

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathcal{P}_\theta : \theta \in \Theta\}),$$

gdzie $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ *- przestrzeń próby,* $\mathcal{P}_\theta$ *- rozkład prawdopodobieństwa na* $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$*,* $\theta \in \Theta$ *- zbiór parametrów.*

Definicja 6.1.2 (Statystyka).

a) *Niech* $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathcal{P}_\theta : \theta \in \Theta\})$*, wtedy odwzorowanie*

$$T : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{C})$$

nazywamy statystyką. Przestrzeń statystyczną indukowaną przez statystykę T *nazywamy przestrzeń*

$$(\mathcal{T}, \mathcal{C}, \{\mathcal{P}_\theta^T : \theta \in \Theta\}),$$

gdzie

$$\forall C \in \mathcal{C} \quad \mathcal{P}_\theta^T(C) = P_\theta(T^{-1}(C)).$$

b) *Niech* $(X_1, ..., X_n)$ *- próba losowa o dystrybuancie* $F_\theta(t)$*,* $t \in \mathbb{R}$*. Zmienną losową* $T = t(X_1, ..., X_n)$ *gdzie* $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *- funkcja borelowska, nazywamy statystyką.*

Przykład 6.1.3 (Statystyki położenia).

1. *średnia próbkowa*
2. *mediana*
3. *kwartyle z próby*
4. *średnia ucięta*
5. *średnia winsorowska*
6. *moda*

Przykład 6.1.4 (Parametry rozproszenia).

1. *rozstęp*
2. *wariancja próbkowa*
3. *odchylenie standardowe*
4. *odchylenia przeciętne od mediany*
5. *odchylenia przeciętne od średniej*
6. *rozstęp międzykwartylowy*

Definicja 6.1.5 (Dystrybuanta empiryczna). *Niech* $X_1, ..., X_n$ *będzie próbą losową, wtedy funkcję*

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad F_n(t; x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,t]}(x_k)$$

(będącą częstością elementów $\leqslant t$*) nazywamy dystrybuantą empiryczną.*

Twierdzenie 6.1.6 (Własności dystrybunaty empirycznej).

1. $\forall t \in \mathbb{R} \quad F_n(t, \underline{X}) \xrightarrow{1} F(t)$
2. $\forall n \, \forall t \in \mathbb{R} \quad E_F F_n(t, \underline{X}) = F(t)$
3. $\sqrt{n} \frac{F_n(t,\underline{X}) - F(t)}{\sqrt{F(t)[1-F(t)]}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Definicja 6.1.7 (Moment zwykły rzędu k). *Momentem zwykłym rzędu k z próby losowej $\underline{X}$ nazywamy statystykę*

$$\hat{m}_k(\underline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

Definicja 6.1.8 (Moment centralny rzędu k). *Momentem centralnym rzędu k z próby losowej $\underline{X}$ nazywamy statystykę*

$$\hat{\mu}_k(\underline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k.$$

Definicja 6.1.9 (Kwantyl rzędu p). *Niech zmienna losowa X ma dystrybuantę F. Kwantylem rzędu p zmiennej losowej X nazywamy liczbę q_p taką, że*

$$q_p = \inf\{x : F(x) \geqslant p\} \quad (= F^{-1}(p) \text{ gdy } F \text{ ciągła})$$

6.1.1 Statystyki dostateczne

Definicja 6.1.10 (Statystyka dostateczne). *Statystyka T jest dostateczne dla parametru θ, jeżeli rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem $T = t$ nie zależy od θ dl każdego t.*

Twierdzenie 6.1.11 (Kryterium faktoryzacji). *Statystyka $T = T(X)$ jest dostateczna dla θ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f_\theta(x) = g_\theta[T(x)]h(x),$$

gdzie h nie zależy od θ, h i g_θ - funkcje mierzalne.

6.1.2 Estymatory

Definicja 6.1.12 (Estymator). *Każdą statystykę $T(X_1, X_2, ..., X_n)$, któerj rozkład zależy od pewnego parametru θ rozkładu populacji, nazywamy estymatorem tego parametru. Dla konkretnych wartości próby $(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$, liczbę $T(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazywamy wartością estymatora.*

Definicja 6.1.13 (Estymator zgodny). *Estymator $U_n(\omega, \theta) = f(X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n; \theta)$ parametru θ nazywamy zgodnym, jeśli jest on zbieżny według prawdopodobieństwa do parametru θ, tzn. gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |U_n(\omega; \theta) - \theta| > \varepsilon\}) = 0.$$

Definicja 6.1.14 (Estymator nieobciążony). *Estymator U_n nazywamy nieobciążonym estymatorem parametru θ, jeśli jest spełniony warunek*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad E(U_n) = \theta.$$

Definicja 6.1.15 (Estymator asymptotycznie nieobciążony). *Estymator U_n nazywamy asymptotycznie nieobciążonym estymatorem parametru θ, jeśli jest spełniony warunek*

$$\lim_{n\to\infty} E(U_n) = \theta$$

Definicja 6.1.16 (Obciążenie estymatora). *Różnicę* $E(U_n) - \theta$ *nazywamy obciążeniem estymatora* θ.

Definicja 6.1.17 (Estymator NMW). *Estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji parametru* θ *nazywamy ten spośród nieobciążonych estymatorów tego parametru, który ma najmniejszą wariancję.*

Lemat 6.1.18. *Dla dowolnego estymatora* $\hat{\theta}$ *jego błąd średniokwadratowy jest sumą jego wariancji i kwadratu obciążenia, tj.*

$$E(\hat{\theta} - \theta)^2 = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Definicja 6.1.19 (Funkcja informacji Fishera).

$$I(\theta) = E_\theta \left(\frac{\partial lnf(X, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 = n \cdot E_\theta \left(\frac{\partial lnf_i(X_i, \theta)}{\partial \theta} \right)^2$$

Twierdzenie 6.1.20 (Nierówność Rao-Cramera). *Wariancja dowolnego nieobciążonego estymatora* $\hat{\theta}_n$ *spełnia nierówność*

$$Var\ \hat{\theta}_n \geqslant \frac{1}{I(\theta)}.$$

Definicja 6.1.21 (Efektywność estymatora). *Efektywnością estymatora* $\hat{\theta}$ *nazywamy funkcję*

$$ef_\theta(\hat{\theta}) = \left(\frac{Var_\theta(\hat{\theta})}{\frac{1}{I(\theta)}} \right)^{-1} = \frac{1}{Var_\theta(\hat{\theta}) \cdot I(\theta)}.$$

Definicja 6.1.22 (Estymator najefektywniejszy). *Estymator* $\hat{\theta}$ *nazywamy najefektywniejszy, jeśli* $ef_\theta(\hat{\theta}) = 1$ *dla każdego* θ.

Lemat 6.1.23. *Jeśli estymator jest estymatorem najefektywniejszym to jest on również ENMW. (Implikacja odwtotna jest nieprawdziwa)*

Definicja 6.1.24 (Błąd standardowy estymatora). *Błędem standardowym estymatora* $\hat{\theta}$ *parametru* θ *nazywamy dowolny estymator jego odchylenia standardowego* $\sigma(\hat{\theta})$ *i oznaczamy go* $SE(\hat{\theta})$.

Definicja 6.1.25 (Estymator studentyzowany). *Niech* $\hat{\theta}$ *będzie nieobciążonym estymatorem parametru* θ. *Wówczas studentyzowanym estymatorem* θ *nazywamy wielkość*

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{SE(\hat{\theta})}.$$

6.1.3 Estymacja punktowa

Definicja 6.1.26 (Funkcja wiarogodności). *Niech* f *będzie funkcją gęstości (funkcją prawdopodobieństwa) zmiennej losowej o rozkładzie zależnym od* m *nieznanych parametrów* $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$, *wtedy funkcję*

$$L(X; \theta) := f(x_1; \theta_1, ..., \theta_m)...f(x_n; \theta_1, ..., \theta_m)$$

nazywamy funkcją wiarogodności.

Definicja 6.1.27 (Estymator największej wiarogodności NW). *Te wartości parametrów* $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$, *dla których funkcja* L *osiąga maksimum, będziemy przyjmować za oszacowanie nieznanych parametrów - estymatory największej wiarogodności.*

Lemat 6.1.28. *Wraz ze wzrostem liczebności próby obciążenie estymatora NW dąży do zera.*

Definicja 6.1.29 (Metoda momentów). *Metoda momentów polega na przyjmowaniu za oszacowanie nieznanych parametrów momentów cechy* X *elementów populacji, zaobserowowanych wartości momentów empirycznych.*

6.1.4 Estymacja przedziałowa

Definicja 6.1.30 (Przedział ufności). *Para statystyk* $L(X), U(X)$ *określa przedział ufności na poziomie ufności* $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ *- ustalone.*

1) *Jeżeli* $P_\theta[L(X) \leqslant \theta \leqslant U(X)] \geqslant 1-\alpha$ *to* $[L(X), U(X)]$ *- przedział ufności dla* θ *na poziomie ufności* $1-\alpha$

2) *Jeżeli* $P_\theta[L(X) \leqslant \theta] \geqslant 1-\alpha$ *to* $[L(X), +\infty]$ *- przedział ufności dla* θ *na poziomie ufności* $1-\alpha$

3) *Jeżeli* $P_\theta[\theta \leqslant U(X)] \geqslant 1-\alpha$ *to* $[-\infty, U(X)]$ *- przedział ufności dla* θ *na poziomie ufności* $1-\alpha$

Definicja 6.1.31 (Asymptotyczny przedział ufności). *Niech* $\hat{\theta}$ *- ENW* θ *oraz*

$$\hat{\theta}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{d} \quad \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{n \cdot i(\theta)}}\right), \qquad \hat{\theta}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{P} \quad \theta$$

gdzie $i(\theta)$ *- ciągła funkcja* θ*. Wówczas*

$$\left[\hat{\theta} - \frac{\xi_{\alpha/2}}{\sqrt{n \cdot i(\hat{\theta})}}, \hat{\theta} + \frac{\xi_{\alpha/2}}{\sqrt{n \cdot i(\hat{\theta})}}\right]$$

jest asymptotycznym przedziałem ufności dla θ *na poziomie* $1-\alpha$.

6.1.5 Testowanie hipotez

Definicja 6.1.32 (Hipoteza). *Hipotezą statystyczną nazywamy każde przypuszczenie dotyczące nieznanego rozkładu obserwowanej zmiennej losowej* X.

$$H: \ \theta \in \Theta_0, \ \Theta_0 \subsetneq \Theta$$

Definicja 6.1.33 (Test statysytczny). *Testem statystycznym hipotezy* H_0 *przeciw* H_1 *nazywamy regułę decyzyjną* δ.

Definicja 6.1.34 (Rodzaje testów).

1. ***Parametryczne testy istotności.*** *Niech* $X_1, ..., X_n$ *- próba losowa o dystrybuancie* F_θ, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$

$$H_0 : g(\theta) = g(\theta_0) \qquad H_1 : g(\theta) \neq g(\theta_0),$$

gdzie $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

2. ***Testy zgodności.*** *Niech* $X_1, ..., X_n$ *- próba losowa o dystrybuancie* $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$H_0 : F = F_0 \qquad H_1 : F \neq F_0.$$

Definicja 6.1.35 (Zbiór krytyczny).

$$C = \{x \in X : \delta(x) - H_1 \text{ prawdziwe } \}$$

Definicja 6.1.36 (Błędy statystyczne).

(1) *Błąd I rodzaju: przyjęcie* H_1 *podczas, gdy* H_0 *jest prawdziwa*

$$\alpha_C(\theta) = P_\theta(X \in C) = P_\theta(C)$$

(2) Błąd II rodzaju: przyjęcie (nieodrzucenie) H_0 podczas, gdy H_1 jest prawdziwa

$$\beta_C(\theta) = P_\theta(X \notin C) = 1 - P_\theta(C)$$

Uwaga 6.1.37. *Na ogół niemożliwa jest minimalizacja obu prawdopodobieństw błędów.*

Definicja 6.1.38 (Funkcja mocy testu). *Niech $\alpha_C : \Theta \to [0,1]$ będzie zadana wzorem $\alpha_C(\theta) = P_\theta(X \in C) = P_\theta(C)$. Funkcję α_C nazywamy funkcją mocy testu. Liczbę $\sup_{\theta\in\Theta_0} \alpha_C(\theta)$ nazywamy rozmiarem testu C.*

Definicja 6.1.39. *Test C hipotez:*

$$H_0 : \theta = \theta_0; \qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

jest najmocniejszym testem na poziomie istotności α, jeśli:

(a) $\alpha_C(\theta_0) = P_{\theta_0}(X \in C) \leqslant \alpha$

(b) $\alpha_C(\theta_1) \geqslant \alpha_{C_1}(\theta_1), \quad \forall C_1$ *takiego, że:* $\alpha_{C_1}(\theta_0) \leqslant \alpha$

7 Rachunek Prawdopodobieństwa

7.1 Teoria miary i całki Lebesgue'a

7.1.1 Ciało i σ - ciało zbiorów

Definicja 7.1.1 (Ciało zbiorów). *Ciałem zbiorów w przestrzeni X nazywa się każdy rodzaj rodziny zbiorów $\mathfrak{J} \subset \mathcal{P}(X)$ taki, że:*

1. $\emptyset \in \mathfrak{J}$
2. $A, B \in \mathfrak{J}$ *to* $A \cup B \in \mathfrak{J}$
3. $A \in \mathfrak{J}$ *to* $A' \in \mathfrak{J}$

Definicja 7.1.2 (σ - ciało zbiorów). *σ - ciałem zbiorów w przestrzeni X nazywa się każdy rodzaj rodziny zbiorów $\mathfrak{J} \subset \mathcal{P}(X)$ taki, że:*

1. $\emptyset \in \mathfrak{J}$
2. $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{J}$ *to* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{J}$
3. $A \in \mathfrak{J}$ *to* $A' \in \mathfrak{J}$

Definicja 7.1.3 (σ - ciało Borela). *σ - ciało Borela w przestrzeni topologicznej $(X, \mathfrak{J})$ to najmniejsze σ - ciało zawierające X i oznaczamy je $\mathfrak{B}_X$.*

7.1.2 Miara

Definicja 7.1.4 (Miara). *Miarą w σ - ciele $\mathcal{F}$ w X nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ spełniającą warunki:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *Jeśli $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne, to*
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Przykład 7.1.5 (Miara Diraca). *Niech $a \in X$ - ustalony punkt, $\mathcal{F}$ - dowolne σ-ciało w X, wtedy miarę Diracka określamy następująco*

$$\mu(a) = \begin{cases} 1, & gdy\ a \in A \\ 0, & gdy\ a \notin A \end{cases}$$

Lemat 7.1.6 (Własności miary).

1. $\forall U, V \in \mathcal{F} \quad U \subset V \quad \Rightarrow \quad \mu(U) \leqslant \mu(V)$
2. *Jeśli $U \subset V$ i $\mu(U) < +\infty$, to $\mu(V \setminus U) = \mu(V) - \mu(U)$*
3. *Jeśli $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, to $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$*
4. *Jeśli $A_1 \subset A_2 \subset ...$, to $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$*
5. *Jeśli $B_1 \supset B_2 \supset ...$ oraz $\mu(B_1) < +\infty$, to $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$*

Definicja 7.1.7 (Miara zupełna). *Miarę nazywa się zupełną jeżeli każdy podzbiór każdego zbioru miary zero jest mierzalny, tj. $(B \subset A, \quad \mu(A) = 0) \quad \Rightarrow B - mierzalny \mu(B) = 0$*

Twierdzenie 7.1.8 (Miara regularna). *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ - przestrzeń z miarą. Jeśli $\forall A \in \mathcal{F} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U, C \in \mathcal{F}$, takie że*

1. *U - otwary, C - domknięty*
2. $C \subset A \subset U$
3. $\mu(A \setminus C) \leqslant \varepsilon$, $\mu(U \setminus A) \leqslant \varepsilon$

7.1.3 Miara zewnętrzna

Definicja 7.1.9 (Miara zewnętrzna w sensie Carathéodory'ego). *Miarą zewnętrzną nazywamy funkcję $\mu^* : P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ spełniającą warunki*

1. $\mu^* = 0$
2. $\forall A_1, A_2, ... \in P(X) \qquad \mu * (\bigcup_{n=1}^{\infty}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Twierdzenie 7.1.10 (Carathéodory'ego). *Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną w przestrzeni X i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów E spełniających warunek Carathéodory'ego*

$$\forall Z \subset X \quad \mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \setminus E).$$

Wówczas $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zbiorów przestrzeni X, a funkcja zbioru $\mu = \mu^*|\mathcal{F}$ jest miarą zupełną. Ponadto jeśli $\mu^*(E) = 0$, to $E \in \mathcal{F}$ i $\mu(E) = 0$.

Definicja 7.1.11 (Miara zewnętrzna Lebesgu'a). *Niech $P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : a_k < x_k < b_k, k = 1, 2, ..., n\}$ będzie n-wymiarowym przedziałem otwrtym, wówczas $|P| = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$. Miarę zewętrzną μ^* określoną dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ za pomocą wzoru*

$$\mu^* = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|P_i|; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right\},$$

gdzie P_i są n-wymiarowymi przedziałami otwartymi, nazywamy miarą zewnętrzną Lebesgue'a. Miarę μ zdefiniowaną wzorem $\mu = \mu^*|\mathcal{F}$ nazywamy miarą Lebesgue'a.

7.1.4 Funkcje mierzalne

Definicja 7.1.12 (Funkcja mierzalna). *Funkcja f jest mierzalna, jeśli*

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$$

Lemat 7.1.13. *Następujące warunki są równoważne:*

1. $$\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$$
2. $$\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : f(x) \geqslant a\} \in \mathcal{F}$$
3. $$\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F}$$
4. $$\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : f(x) \leqslant a\} \in \mathcal{F}$$

Twierdzenie 7.1.14. *Przeciwobraz każdego zbioru Borelowskiego prez funkcję mierzalną jest mierzalny.*

Twierdzenie 7.1.15. *Suma, iloczyn, supremum, infimum, liminf, limsup, granica funkcji mierzalnych jest funkcją miarzalną.*

Definicja 7.1.16 (Funkcja prosta). *Funkcją prostą nazywa się taką funkcję, która przyjmuje skończoną liczbę wartości.*

Lemat 7.1.17.

$$\chi_A \text{ jest mierzalna } \Leftrightarrow A - \text{ mierzalny}$$

7.1.5 Całka Lebesgue'a

Definicja 7.1.18 (Całka z funkcji prostej nieujemnej). *Niech* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, A_i *- mierzalne,* $\bigcup A_i = A$ *oraz* $\alpha_i > 0$ *wtedy*

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Lemat 7.1.19 (Własności Całki Lebesgue'a).

1. $\int_A 0 d\mu = 0$, $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$
2. $\forall c \geqslant 0 \qquad \int_A c \cdot f d\mu = c \cdot \int_A f d\mu$
3. $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$
4. $f \leqslant g \Rightarrow \int_A f d\mu \leqslant \int_A g d\mu$
5. *Jeśli ciąg funkcji prostych* f_n *mierzalnych jest niemalejący i zbieżny (punktowo) to:*
$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$
6. *Jeśli* $A \cap B = \emptyset$*, to*
$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$
7. *Jeśli* $B \subset A$*, to*
$$\int_B f d\mu = \int_A f \cdot \chi_B d\mu$$
8. *Jeśli* $A_1, A_2, \ldots$ *są mierzalne i parami rozłączne, to:*
$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f d\mu$$

Twierdzenie 7.1.20. *Jeśli* f_n *i* $\tilde{f}_n$ *są dwoma monotonicznymi ciągami funkcji prostych mierzalnych nieujemnych zbieżnymi punktowo do tej samej granicy f, to:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A \tilde{f}_n d\mu.$$

Definicja 7.1.21 (Całka z funkcji mierzalnej nieujemnej). *Niech* f_n *będzie ciągiem funkcji prostych mierzalnych zbieżnym do f, wtedy*

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Definicja 7.1.22 (Całka z dowolnej funkcji). *Jeśli* $\int_A f^+ d\mu$ *i* $\int_A f^- d\mu$ *są skończone to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a*

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Lemat 7.1.23. *Funkcja mierzalna f jest całkowalna na A wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja* $|f|$ *jest całkowalna. Wtedy:*

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leqslant \int_A |f| d\mu.$$

Twierdzenie 7.1.24. *Jeśli istnieje całka Riemanna to istnieje całka Lebesgue'a i są równe.*

Przykład 7.1.25. $\chi_{\mathbf{Q}}(x)$ *- nie istnieje całka Riemanna, Lebesgue'a istnieje, ale jest równa 0.*

7.2 Przestrzeń probabilistyczna, prawdopodobieństwo

Zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia nazwyamy zbiorem zdarzeń elementarnych i zazwyczaj oznaczamy literą Ω.

Definicja 7.2.1 (σ-ciało). *Rodzinę $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ nazywamy σ-ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy*

a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

b) $A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathcal{F}$,

c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Przykład 7.2.2. *Przykłady σ-ciał:*

1) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$,

2) $A \subset \Omega,\ \mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$,

3) $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$,

4) $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Zdarzeniami nazywamy wyłącznie te podzbiory Ω, które należą do $\mathcal{F}$. Nie należy mylić zdarzenia elementarnego $\omega \in \Omega$ ze zbiorem $\{\omega\}$, który nie musi być nawet zdarzeniem.

Definicja 7.2.3 (Prawdopodobieństwo). *Prawdopodobieństwem nazywamy dowolną funkcję rzeczywistą $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ taką, że*

1) $P(\Omega) = 1$,

2) Jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ oraz $A_i \cap A_j,\ i \neq j$, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definicja 7.2.4 (Przestrzeń probabilistyczna). *Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie P jest przeliczalnie addytywną miarą unormowaną, określoną na σ-ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru zdarzeń elementarnych Ω.*

Przykład 7.2.5. *Przykłady przestrzeni probabilistycznych:*

1) $\#\Omega < \infty$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ *(schemat klasyczny),*

2) $\#\Omega = N < \infty, \mathcal{F} = 2^{\Omega}, p_i = P(\{\omega_i\}) \geqslant 0, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1, P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$ *(uogólnienie schematu klasycznego),*

3) j.w. dla $p_i = \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-1}$, $i = 0, \ldots, N$, $p \in [0, 1]$ *(schemat Bernouliego),*

4) Ω *- przeliczalny,* $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $p_i = P(\{\omega_i\}) \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$,

5) $\Omega = V \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda(V) < \infty$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(V)$, $P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(V)}$ *(schemat geometryczny).*

Twierdzenie 7.2.6 (Własności prawdopodobieństwa). *Niech P będzie dowolnym prawdopodobieństwem. Wówczas:*

1) $P(\emptyset) = 0$,

2) $P(A) = 1 - P(A^c)$,

3) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leqslant P(B)$,

4) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_j\leqslant n} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_j})$ *(wzór włączeń i wyłączeń),*

5) *Jeżeli* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, *to* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *(podaddytywność),*

6) *Jeżeli* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, *to* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ *(ciągłość z dołu),*

6) *Jeżeli* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, *to* $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ *(ciągłość z góry).*

Twierdzenie 7.2.7 (O przedłużaniu miary). *Jeżeli P jest skończenie addytywną i nieujemną funkcją na pewnym ciele $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$, przy czym $P(\Omega) = 1$ oraz spełniony jest jeden z równoważnych warunków*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots, \quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

lub

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0,$$

to P przedłuża się jednoznacznie do prawdopodobieństwa na $\sigma(\mathcal{A})$, czyli na σ-ciele generowanym przez $\mathcal{A}$.

Uwaga 7.2.8. *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest dowolną rodziną zbiorów, to $\sigma(\mathcal{A})$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym $\mathcal{A}$, tj. częścią wspólną wszystkich σ-ciał zawierających $\mathcal{A}$.*

7.3 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 7.3.1 (Prawdopodobieństwo warunkowe). *Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$, nazywamy liczbę*

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Uwaga 7.3.2. *Przy ustalonym B takim, że $P(B) > 0$, trójka $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ jest przestrzenią probabilistyczną.*

Uwaga 7.3.3. *Przy ustalonym B takim, że $P(B) > 0$, trójka $(\Omega, \mathcal{F}_B, P_B)$, gdzie $\mathcal{F}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ jest przestrzenią probabilistyczną.*

Twierdzenie 7.3.4 (Wzór łańcuchowy). *Jeżeli $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$ oraz $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, to*

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{i=n}^{1} P(A_i|A_{i-1} \cap \ldots \cap A_1).$$

Definicja 7.3.5 (Rozbicie przestrzeni Ω). *Rozbiciem przestrzeni Ω nazywamy rodzinę zdarzeń $\{H_i\}_{i \in I}$, które się wzajemnie wykluczają, zaś ich suma jest równa Ω.*

Rozbicie nazywamy przeliczalnym, jeżeli zbiór wskaźników I jest przeliczalny; skończonym, jeśli jest skończony. Zbiór przeliczalny może być skończony lub nie.

Poniższy wzór pozwala obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń, które mogą zajść w wyniku realizacji innych zdarzeń, na przykład w doświadczeniach wieloetapowych.

Twierdzenie 7.3.6 (Wzór na prawdopodobieństwo całkowite). *Jeżeli $\{B_i\}_{i \in I}$ jest przeliczalnym rozbiciem Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla dowolnego zdarzenia A*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i).$$

Znając wynik doświadczenia, możemy zapytać o jego przebieg. Na to pytanie odpowiada wzór Bayesa.

Twierdzenie 7.3.7 (Wzór Bayesa). *Jeżeli $\{B_i\}_{i \in I}$ jest przeliczalnym rozbiciem Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie oraz $P(A) > 0$, to dla dowolnego $j \in I$*

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

7.4 Rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuanta zmiennej losowej jednowymiarowej

Definicja 7.4.1 (Zmienna losowa jednowymiarowa). *Odwzorowanie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}$, jeżeli dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Krótko mówiąc, X jest zmienną losową, jeśli jest odwzorowaniem mierzalnym $(\Omega, \mathcal{F})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Definicja gwarantuje, że prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń związanych ze zmienną losową, czyli zdarzeń postaci $X^{-1}(A)$, gdzie $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, są dobrze określone.

Uwaga 7.4.2. *X jest zmienną losową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}$*

$$X^{-1}\left((-\infty, x]\right) = \{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}.$$

Definicja 7.4.3 (Rozkład prawdopodobieństwa). *Rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$ nazywamy każdą miarę probabilistyczną μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Niech X będzie zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicja 7.4.4 (Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej). *Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X nazywamy funkcję rzeczywistą $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\omega : X(\omega) \in B).$$

Zdefiniowana w ten sposób miara P_X zawiera wszystkie interesujące informacje o zmiennej losowej X: o jej zbiorze wartości i tym, jak prawdopodobieństwo jest na tym zbiorze rozłożone.

Uwaga 7.4.5. *Przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ jest przestrzenią probabilistyczną.*

Dodatkowy zysk jest taki, że zamiast abstrakcyjnej przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pracujemy w konkretnej przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$.

Definicja 7.4.6 (Dystrybuanta). *Funkcję rzeczywistą $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy dystrybuantą, jeżeli jest niemalejąca, prawostronnie ciągła oraz*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Twierdzenie 7.4.7. *Zbiór punktów nieciągłości dystrybuanty jest co najwyżej przeliczalny.*

Twierdzenie 7.4.8. *Jeżeli Q jest prawdopodobieństwem na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, to istnieje dystrybuanta taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$*

$$F(x) = Q\left((-\infty, x]\right).$$

Jeżeli dana jest dystrybuanta F, to istnieje dokładnie jedno prawdopodobieństwo Q na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dla którego zachodzi $F(x) = Q\left((-\infty, x]\right)$.

Definicja 7.4.9 (Dystrybuanta zmiennej losowej). *Funkcję $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$*

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P\left(X^{-1}\left((-\infty, x]\right)\right) = P_X\left((-\infty, x]\right)$$

nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej X.

Uwaga 7.4.10. *1) Dystrybuanta zmiennej losowej jest dystrybuantą,*

2) Jeżeli F jest dystrybuantą, to istnieje zmienna losowa X na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ taka, że $F = F_X$.

3) $P_X = P_Y \quad \Leftrightarrow \quad F_X = F_Y$.

Definicja 7.4.11 (Dystrybuanta typu dyskretnego). *Mówimy, że dystrybuanta F jest typu dyskretnego, jeżeli istnieje zbiór przeliczalny $E \subset \mathbb{R}$ taki, że $Q(E) = 1$, gdzie Q jest prawdopodobieństwem generowanym przez F na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Punkty zbioru E o dodatnim prawdopodobieństwie są punktami skoku dystrybuanty F, a ich prawdopodobieństwa wielkościami skoku.

$$p_i = Q(\{x_i\}) = Q((-\infty, x_i]) - Q((-\infty, x_i)) = F(x_i) - F(x_i^-) = \Delta F(x_i)$$

Lemat 7.4.12. *Zbiór punktów wzrostu*[1] *dystrybuanty typu dyskretnego jest równy zbiorowi punktów skoku.*

Uwaga 7.4.13. *Dystrybuanta typu dyskretnego jest funkcją schodkową.*

Definicja 7.4.14 (Dystrybuanta typu dyskretnego zmiennej losowej). *Mówimy, że dystrybuanta F_X zmiennej losowej X określonej na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest typu dyskretnego, jeżeli istnieje zbiór przeliczalny $E \subset \mathbb{R}$ taki, że $P(X \in E) = 1$.*

Definicja 7.4.15 (Dyskretny rozkład prawdopodobieństwa). *Ciąg par (x_i, p_i) takich, że $x_i \in \mathbb{R}$, $p_i \in [0,1]$, $\sum p_i = 1$, nazywamy dyskretnym rozkładem prawdopodobieństwa na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Ciąg (p_i) nazywamy dyskretną gęstością prawdopodobieństwa.

$$F(x) = \sum_{i:x_i \leqslant x} p_i$$

Przykłady dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa:

Definicja 7.4.16 (Rozkład dwumianowy).
Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy $b(n,p)$ jeżeli

$$P\{X = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, ..., n.$$

Definicja 7.4.17 (Rozkład Poissona).
Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$ z intensywnością (średnią) $\lambda > 0$, jeżeli

$$P\{X = i\} = p_i(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \ , \ i = 0, 1, 2, ... \ .$$

Definicja 7.4.18 (Rozkład geometryczny).
Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny $\mathcal{G}(p)$ jeżeli

$$P\{X = i\} = (1-p)p^i, \ i = 0, 1, 2, ... \ .$$

Definicja 7.4.19 (Absolutnie ciągły rozkład prawdopodobieństwa).

Przykłady ciągłych rozkładów prawdopodobieństwa:

Definicja 7.4.20 (Rozkład jednostajny).
Rozkład jednostajny $\mathcal{U}(a,b)$ jest zdefiniowany przez funkcję estości postaci

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathcal{I}_{(a,b)}(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

[1] x - punkt wzrostu funkcji f jeżeli $\forall \varepsilon > 0 : \ f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) > 0$.

Definicja 7.4.21 (Rozkład wykładniczy).
Rozkład wykładniczy $\mathcal{W}(\lambda)$ z parametrem intensywności $\lambda > 0$ definiuje dystrybuanta postaci

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathcal{I}_{[0,\infty)}(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

Definicja 7.4.22 (Rozkład normalny).
Rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ jest zdefiniowany przez funkcję gęstości postaci

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}), \; x \in \mathbb{R}.$$

Definicja 7.4.23 (Rozkład gamma).
Zmienna losowa X ma rozkład gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$ jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}, \; 0 < x < \infty, \; \alpha, \beta > 0.$$

Definicja 7.4.24 (Rozkład beta).
Zmienna losowa X ma rozkład beta $\mathcal{B}(a, b)$ jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \; 0 \leqslant x \leqslant 1, \; a, b > 0.$$

Definicja 7.4.25 (Rozkład Cauchy'ego).
Rozkład Cauchy'ego $\mathcal{C}(\mu, \sigma)$ definiuje funkcja gęstości postaci

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

7.4.1 Rozkłady absolutnie ciągłe

Definicja 7.4.26 (Absoluntna ciągłość). *Mówimy, że miara ν jest absolutnie ciągła względem miary μ jeśli*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Oznaczamy $\nu \ll \mu$.

Definicja 7.4.27. *Miarę μ nazywamy σ-skończoną jeśli istnieje rozbicie miarzalne (B_n) Ω-gi takie, że:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mu(B_n) < \infty$$

Twierdzenie 7.4.28 (Radona - Nikodyma). *Niech μ i ν będą miarami σ-skończonymi na $(\Omega, \mathcal{F})$. Jeśli $\nu \ll \mu$, to istnieje nieujemna funkcja f na Ω zwana gęstością miary ν względem miary μ (pochodna R-N), taka że*

$$\forall A \in \mathcal{F} \qquad \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Dla dwóch takich gęstości f i g mamy

$$\mu(\{\omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0.$$

Definicja 7.4.29. *Miary μ i ν na $(\Omega, \mathcal{F})$ są osobliwe względem siebie, jeśli istnieją zbiory rozłączne $S_\mu \in \mathcal{F}$ i $S_\nu \in \mathcal{F}$ takie, że*

$$\mu(S'_\mu) = 0 \qquad \nu(S'_\nu) = 0.$$

Definicja 7.4.30 (Osobliwy rozkład prawdopodobieństwa). *Miarę probabilistyczną na $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ nazywamy osobliwą, jeśli jest generowana przez ciągłą dystrybuante F, której zbiór punktów wzrasta tak, że*

$$\{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0\}$$

ma miarę Lebesgue'a równą zero.

Twierdzenie 7.4.31. *Jeśli F jest dystrybuantą, to istniej dokładnie jedno przedstawienie*

$$F = c_1 F_d + c_2 F_{ac} + c_3 F_s,$$

gdzie $c_i > 0$ oraz $c_1 + c_2 + c_3 = 1$. F_d - dystrybuanta typu dyskretnego, F_{ac} - dystrybuanta typu absolutnie ciągłego, F_s - dystrybuanta typu skokowego.

7.5 Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja 7.5.1 (Wwo pod warunkiem zdarzenia). *Niech X będzie zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej oraz niech $P(A) > 0$. Wtedy*

$$E(X|A) = \int_\Omega X dP_A,$$

gdzie $P_A(\,\cdot\,) = P(\,\cdot\,|A)$.

Twierdzenie 7.5.2. *Niech X będzie zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej oraz niech $P(A) > 0$. Wtedy*

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A X dP.$$

Twierdzenie 7.5.3. *Niech zdarzenia A_i stanowią przeliczalne rozbicie przestrzeni Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie. Jeżeli zmienna losowa X jest całkowalna, to*

$$EX = \sum_i E(X|A_i)P(A_i).$$

Definicja 7.5.4 (WWO pod warunkiem rozbicia przeliczalnego). *Niech zdarzenia A_i stanowią przeliczalne rozbicie przestrzeni Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie oraz niech $\mathcal{F} = \sigma(A_i : i \in I)$. Jeżeli zmienna losowa X jest całkowalna, to*

$$E(X|\mathcal{F})(\omega) = \sum_{j \in I} E(X|A_j) 1_{A_j}(\omega).$$

Twierdzenie 7.5.5. *WWO $E(X|\mathcal{F})$ spełnia następujące warunki:*

a) $E(X|\mathcal{F})$ jest $\mathcal{F}$-mierzalna,

b) Dla każdego $B \in \mathcal{F}$: $\int_B X dP = \int_B E(X|\mathcal{F}) dP$.

Definicja 7.5.6 (Definicja ogólna). *Niech $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem, a X zmienną losową całkowalną. WWO X pod warunkiem $\mathcal{F}$ nazywamy zmienną losową $E(X|\mathcal{F})$ spełniającą następujące warunki:*

a) $E(X|\mathcal{F})$ jest $\mathcal{F}$-mierzalna,

b) Dla każdego $B \in \mathcal{F}$: $\int_B X dP = \int_B E(X|\mathcal{F}) dP$.

Przykład 7.5.7. *Jeżeli $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$, to*

$$E(X|\mathcal{F}) = \begin{cases} E(X|A_j) & , \omega \in A_j,\ P(A_j) > 0 \\ a_j & ,\omega \in A_j,\ P(A_j) = 0 \end{cases}.$$

Twierdzenie 7.5.8. *Dla dowolnego σ-ciała $\mathcal{F}$ i całkowalnej zmiennej losowej X istnieje warunkowa wartość oczekiwana. Jest ona wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zdarzeń o prawdopodobieństwie zero, tj. jeżeli zmienne losowe Y_1 i Y_2 spełniają warunki definicji, to $P(Y_1 \neq Y_2) = 0$.*

Twierdzenie 7.5.9 (Własności WWO). *WWO $E(X|\mathcal{F})$ ma następujące własności:*

1) Jeżeli X jest $\mathcal{F}$-mierzalna, to $E(X|\mathcal{F}) = X$,

2) Jeżeli $X \geqslant 0$, to $E(X|\mathcal{F}) \geqslant 0$,

3) $|E(X|\mathcal{F})| \leqslant E(|X||\mathcal{F})$,

4) WWO jest operatorem liniowym,

5) *Jeżeli* $X_n \uparrow X$, *to* $E(X_n|\mathcal{F}) \uparrow E(X|\mathcal{F})$,

6) *Jeżeli* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, *to*

$$E(X|\mathcal{F}_1) = E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2),$$

7) $EX = E(E(X|\mathcal{F}))$,

8) *Jeżeli zmienna losowa* X *jest niezależna od* σ*-ciała* $\mathcal{F}$, *to* $E(X|\mathcal{F}) = EX$.

9) *Jeżeli* Y *jest ograniczoną zmienną losową* $\mathcal{F}$*-mierzalną, to* $E(XY|\mathcal{F} = YE(X|\mathcal{F})$.

10) *Jeżeli* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, *to WWO* $E(\,\cdot\,|\mathcal{G})$ *jest operatorem ciągłym z* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *w* $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$,

11) *Jeżeli* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *oraz* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, *to* $E(X|\mathcal{G})$ *jest rzutem ortogonalnym* X *na* $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$,

12) *Jeżeli funkcja* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest wypukła oraz zmienne losowe* X *i* $\phi(X)$ *są całkowalne, to*

$$\phi(E(X|\mathcal{F})) \leqslant E(\phi(X)|\mathcal{F}),$$

13) *Jeżeli zmienne losowe* X *i* Y *są niezależne, to*

$$E(g(X,Y)|Y = y) = E(g(X,y)).$$

Twierdzenie 7.5.10. *Jeżeli* X *jest zmienną losową całkowalną oraz* Y *jest zmienną losową o wartościach w* $\mathbb{R}^n$, *to istnieje funkcja borelowska* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *taka, że*

$$E(X|Y) := E(X|\sigma(Y)) = h(Y).$$

Definicja 7.5.11. *Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej* X *pod warunkiem* $\{Y = y\}$, *którą oznaczamy* $E(X|Y = y)$, *nazywamy liczbę* $h(y)$, *gdzie* h *jest funkcją określoną w poprzednim twierdzeniu.*

Twierdzenie 7.5.12. *Jeżeli* $EY^2 < \infty$, *to prognoza optymalna* ϕ^*, *tzn.*

$$E[Y - \phi^*(X)]^2 = \inf E[Y - \phi(X)]^2$$

istnieje oraz $\phi^*(x) = E(Y|X = x)$. *(Zmienną losową* $\phi(X)$ *nazywamy prognozą* Y *przy pomocy* X*)*

Definicja 7.5.13. *Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia* A *pod warunkiem* $Y = y$ *nazywamy wielkość*

$$P(A|Y = y) = E(1_A|Y = y).$$

Twierdzenie 7.5.14. *Jeżeli* (X, Y) *ma rozkład ciągły z gęstością* f, *to*

$$E(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x,y)dx = h(y),$$

gdzie

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & , \ f_Y(y) \neq 0 \\ g(x) & , \ f_Y(y) = 0 \end{cases},$$

g *jest dowolną ustaloną gęstością oraz* $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$.

Twierdzenie 7.5.15. *Jeżeli* (X, Y) *ma rozkład dyskretny, to*

$$E(X|Y = y) = \sum_i x_i P(X = x_i|Y = y).$$

Twierdzenie 7.5.16. *Jeżeli* $(X, Y) \sim \mathcal{N}((\mu_1, \mu_2), \Sigma)$, *to*

$$E(X|Y) = \mu_1 + \rho(X,Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - \mu_2).$$

7.6 Zbieżności probabilistyczne

Definicja 7.6.1. *Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zmiennej losowej X:*

a) prawie na pewno, jeżeli

$$P\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1,$$

co oznaczamy $X_n \xrightarrow{1} X$,

b) według prawdopodobieństwa, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0,$$

co oznaczamy $X_n \xrightarrow{P} X$,

b) według p-tego momentu (w L^p), $0 < p < \infty$, jeżeli $E|X|^p < \infty$, $E|X_n|^p < \infty$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^p = 0,$$

co oznaczamy $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Twierdzenie 7.6.2. *Granica według prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.*

Twierdzenie 7.6.3 (Warunek równoważny zbieżności prawie na pewno).

$$X_n \xrightarrow{1} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{k\geqslant N} |X_k - X| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Twierdzenie 7.6.4. *Jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right) < \infty$, to $X_n \xrightarrow{1} X$.*

Twierdzenie 7.6.5. *Jeżeli $EX_n^2 < \infty$, $EX^2 < \infty$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n - X)^2 < \infty$,to $X_n \xrightarrow{1} X$.*

Twierdzenie 7.6.6 (Twierdzenie o dwóch szeregach). *Jeśli $(X)_n)$ - niezależne zmienne losowe oraz*

$$\sum EX_n < \infty \qquad \sum VaR\, X_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum X_n \text{ zb. p.n.}$$

Twierdzenie 7.6.7 (Warunki Cauchy'ego). *Zachodzą następujące warunki Cauchy'ego:*

a)

$$X_n \xrightarrow{1} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n,m\geqslant N} |X_n - X_m| < \varepsilon\right) = 1,$$

b)

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \lim_{n,m\to\infty} P\left(|X_n - X_m| > \varepsilon\right) = 0.$$

Twierdzenie 7.6.8. *Zachodzą następujące implikacje:*

a) Jeżeli $X_n \xrightarrow{1} X$, to $X_n \xrightarrow{P} X$,

b) Jeżeli $X_n \xrightarrow{L^p} X$, to $X_n \xrightarrow{P} X$,

c) Jeżeli $X_n \xrightarrow{L^p} X$, $p \geqslant q$ to $X_n \xrightarrow{L^q} X$,

d) Jeżeli $X_n \xrightarrow{1} X$, $EX_n \to EX$ to $X_n \xrightarrow{L^1} X$, *e) Jeżeli $X_n \xrightarrow{P} X$, to istnieje podciąg (X_{n_k}) taki, że $X_{n_k} \xrightarrow{1} X$.*

Przykład 7.6.9. *Niech $\Omega = (0,1]$, $A_n = (0, \frac{1}{n}]$ oraz $X_n = 2^n \cdot I_{A_n}$. Wtedy*

$$X_n(\omega) = 0 \quad dla \quad \frac{1}{n} < \omega.$$

Wtedy $X_n \xrightarrow{1} 0$. Ponieważ dla każdego $p > 0$

$$E|X_n|^p = 2^{np} \cdot \frac{1}{n} \to \infty,$$

więc X_n nie jest zbieżny według p-tego momentu.

Twierdzenie 7.6.10. *Jeżeli P jest rozkładem dyskretnym, to dla zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zachodzi równoważność:*

$$X_n \xrightarrow{1} X \quad \Leftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X.$$

Definicja 7.6.11. *Rodzinę zmiennych losowych $\{X_t : t \in T\}$ nazywamy jednostajnie całkowalną, jeżeli*

$$\lim_{C\to\infty} \sup_{t\in T} E\left(|X_t| \cdot I_{\{|X_t|>C\}}\right) = 0.$$

Lemat 7.6.12. *Jeżeli $|X_t| \leqslant Y$ dla $t \in T$, $EY < \infty$, to rodzina zmiennych losowych $\{X_t : t \in T\}$ jest jednostajnie całkowalna.*

Twierdzenie 7.6.13. *$X_n \xrightarrow{L^p} X$ dla $p \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

i) $X_n \xrightarrow{P} X$,

ii) Rodzina $\{|X_n|^p\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Definicja 7.6.14. *Niech $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem rozkładów prawdopodobieństwa na $(E, \mathcal{B}(E))$. Mówimy, że jest on słabo zbieżny do rozkładu μ jeżeli dla każdej funkcji ciągłej i ograniczonej $f : E \to \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f d\mu_n = \int_E f d\mu.$$

Definicja 7.6.15. *Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi o rozkładach $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ odpowiednio. Mówimy, że ciąg (X_n) jest zbieżny według rozkładu do X, jeżeli ciąg (μ_n) słabo zbiega do μ, co zapisujemy $X_n \xrightarrow{d} X$.*

Wniosek 7.6.16. *$X_n \xrightarrow{d} X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji f ciągłej i ograniczonej*

$$Ef(X_n) \to Ef(X).$$

Twierdzenie 7.6.17. *Następujące warunki są równoważne:*

a) Ciąg (μ_n) słabo zbiega do μ,

b) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$ dla każdego domkniętego zbioru F,

c) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$ dla każdego otwartego zbioru G,

d) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ dla każdego zbioru B takiego, że $\mu(\partial B) = 0$.

Twierdzenie 7.6.18 (Scheffe). *Niech μ będzie miarą σ-skończoną oraz funkcje f_n i f będą nieujemne i takie, że miary*

$$\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu, \quad \nu(A) = \int_A f d\mu$$

są miarami probabilistycznymi. Niech ponadto $f_n \to f$ p.n. względem miary μ. Wówczas

$$\sup_A |\nu_n(A) - \nu(A)| \to 0.$$

Mówimy wtedy, że miary ν_n zbiegają do miary ν w normie całkowitej wariancji.

Twierdzenie 7.6.19. *Niech μ_n, μ będą rozkładami ciągłymi o gęstościach f_n, f odpowiednio. Jeżeli $f_n \to f$ p.n. względem miary Lebesgue'a, to ciąg rozkładów (μ_n) słabo zbiega do rozkładu μ.*

7.7 Prawa wielkich liczb

7.7.1 Słabe prawa wielkich liczb

Definicja 7.7.1 (Słabe prawo mocnych liczb SPWL). *Mówimy, że ciąg (X_n) spełnia słabe prawo wilkich liczb, jeżeli ciąg zmiennych losowych $(\frac{1}{n}(S_n - ES_n))$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa do zera, tzn. dla kazdego $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$$

Twierdzenie 7.7.2 (Prawo wielkich liczb Bernoulliego). *Jeżeli $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ ma rozkład dwumianowy $Bin(n,p)$, to dla każdego $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$$

Twierdzenie 7.7.3 (SPWL Markowa). *Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{VaRS_n}{n^2} = 0,$$

wtedy (X_n) spełnia SPWL.

Twierdzenie 7.7.4 (Prawo wielkich liczb Czebyszewa lub Markowa). *Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych niezależnych o skończonych wariancjach $\sigma_n^2 = VaRX_n$, n=1,2,... . Jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = 0,$$

to ciąg (X_n) spełnia SPWL.

Twierdzenie 7.7.5 (SPWL Czebyszewa). *Jeśli X_n są niezależne lub parami nieskorelowane i mają wspólnie ograniczone wariancję, tj.*

$$\exists K \quad VaR\, X_i < K \quad i = 1, 2, ...$$

to ciąg (X_n) spełnia SPWL.

Twierdzenie 7.7.6 (Nierówność Czebyszewa). *Jeżeli zmienna losowa X ma wartość oczekiwaną μ i wariancję σ^2, to dla każdego $\varepsilon > 0$*

$$P(|X - \mu| \geqslant \varepsilon\sigma) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Twierdzenie 7.7.7 (Prawo wielkich liczb Chinczyna). *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej μ. Wtedy ciąg (X_n) spełnia SPWL, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$$

Uwaga 7.7.8. *Słabe prawa wielkich liczb są szczególnym przypadkiem twierdzeń granicznych i dotyczą zbieżności według prawdopodobieństwa sum niezależnych zmiennych losowych do liczby.*

7.7.2 Mocne prawa wielkich liczb

Definicja 7.7.9 (Mocne prawo wielkich liczb MPWL). *Mówimy, że ciąg (X_n) spełnia mocne prawo wilkich liczb, jeżeli ciąg zmiennych losowych $(\frac{1}{n}(S_n - ES_n))$ jest zbieżny do zera z prawdopodobieństwem 1, tzn. dla kazdego $\varepsilon > 0$*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - ES_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Twierdzenie 7.7.10 (MPWL Bernoulliego). *Oznaczmy przez S_n liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{k\geqslant n}\left|\frac{S_k}{k} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$$

Twierdzenie 7.7.11 (Twierdzenie Kołomogorowa). *Jeśli $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $VaRX_n < \infty$, n=1,2,..., przy czym*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{VaRX_n}{n^2} < \infty,$$

to z prawdopodobieństwem 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - ES_n}{n} = 0.$$

Twierdzenie 7.7.12 (MPWL Kołomogorowa). *Jeżeli $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, $E|X_1| < \infty$, to (X_n) spełnia MPWL, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = EX_1$$

z prawdopodobieństwem 1.

Wniosek 7.7.13.

$$(X_n) \text{ spełnia MPWL} \quad \Rightarrow \quad (X_n) \text{ spełnia SPWL}$$

Lemat 7.7.14. *Jeśli $X_1, X_2, ...$ takie, że $EX_n = \mu$ dla $n = 1, 2, ...$ to jeśli*

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mu} = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{MPWL nie zachodzi}$$

7.8 Centralne Twierdzenia Graniczne

Twierdzenie 7.8.1 (CTG). *Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie oraz niech $EX = 0$ i $VarX = 1$. Wtedy*

$$\frac{X_1, \ldots, X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Twierdzenie 7.8.2. *Niech $X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, niech $EX_1 = \mu$ i $VaRX_1 = \sigma^2$. Wtedy dla każdego ε*

$$P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon\right) \to_{n\to\infty} \Phi(\varepsilon).$$

Twierdzenie 7.8.3 (Lindeberga-Levy'ego). *Jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ są niezależne o jednakowych rozkładach z parametrami $EX_k = \mu$, $VaRX_k = \sigma^2$ dla k=1,2,..., to*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Oznacza to, że suma S_n ma rozkład asymptotycznie normalny $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

Twierdzenie 7.8.4 (de Moivre'a-Laplace'a). *Jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ są niezależne o jednakowych rozkładach dwupunktowych $Bern(p)$, to*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Oznacza to, że suma S_n ma rozkład asymptotycznie normalny $N(np, \sqrt{npq})$.

Twierdzenie 7.8.5 (Berry-Esséen). *Jeżeli (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i $E|X_1|^3 < \infty$ to,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{VaRS_n}} \leqslant t\right) - \Phi(t)\right| \leqslant C\frac{E|X_1 - EX_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

gdzie $\sigma = \sqrt{VaRX_1}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqslant C < 0,8$.

Twierdzenie 7.8.6 (Poissona). *Jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ są niezależne o rozkładach dwumianowych $Bin(n, p_n)$ i jeśli $np_n = \lambda$ dla n=1,2,..., to*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Definicja 7.8.7 (Warunek Lindeberga). *Ciąg zmiennych losowych (X_n) spełnia warunek Lindeberga, jeśli dla każedo $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} E[(X_k - EX_k)^2 \mathbf{1}_{\{|X_k - EX_k| > \varepsilon s_n\}}] \to_{n\to\infty} 0,$$

gdzie $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} VaRX_k$.

Definicja 7.8.8 (Warunek Lapunowa). *Ciąg zmiennych losowych (X_n) spełnia warunek Lapunowa, jeśli dla wszystkich k naturalnych i dla pewnego $\delta > 0$ jest $E|X_k|^{2+\delta} < \infty$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E|X_k - EX_k|^{2+\delta} = 0.$$

Lemat 7.8.9. *Warunek Lapunowa pociąga za sobą warunek Lindeberga.*

Twierdzenie 7.8.10. *Jeśli ciąg niezależnych zmiennych losowych* (X_n) *spełnia warunek Lindeberga, to*

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{s_n} \leqslant a\right) \to_{n\to\infty} \Phi(a)$$

jednostajnie względem a*.*

7.9 Nierówności związane z momentami

Twierdzenie 7.9.1 (Schwarza). *Jeśli* $EX^2 < \infty$ *i* $EY^2 < \infty$*, to*

$$E(|XY|) \leqslant \sqrt{EX^2} \cdot \sqrt{EY^2},$$

ponadto równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X *i* Y *są liniowo zależne.*

Twierdzenie 7.9.2 (Jensena). *Niech* $E|X| < \infty$ *oraz* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wypukła, taka że* $E|g(X)| < \infty$*, wtedy*

$$g(EX) \leqslant Eg(X).$$

Twierdzenie 7.9.3 (Nierówność Czebyszewa). *Niech* X *będzie nieujemną zmienną losową. Wtedy dla każdego* $\varepsilon > 0$

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{EX}{\varepsilon}.$$

Twierdzenie 7.9.4 (Czebyszewa). *Niech* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *borelowska, niemalejące i dodatnia, wtedy*

$$P(|X| > a) \leqslant \frac{Eg(|X|)}{g(a)}$$

Przykład 7.9.5. *Dla* $g(x) = x^2$ *i* $X := X - EX$ *otrzymujemy*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X - EX| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{Var\, X}{\varepsilon^2}.$$

Twierdzenie 7.9.6 (Höldera). *Niech* $p, q > 1$ *oraz* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *i* $E|X|^p < \infty$*,* $E|Y|^q < \infty$*, wtedy* $E|XY| < \infty$ *oraz*

$$E|XY| \leqslant (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} (E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Twierdzenie 7.9.7 (Minkowskiego). *Niech* $p \geqslant 1$ *wtedy*

$$(E|X+Y|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|Y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Twierdzenie 7.9.8 (Nierówność Kołomogorowa). *Niech* $X_1, ..., X_n$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że* $EX_i = 0$ *i* $EX_i^2 < \infty$ $i = 1, ..., n$*. Jeśli* $\exists c > 0$*, że* $P(|X_i| \leqslant c) = 1, \quad i = 1, ..., n$ *to*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{(c+\varepsilon)^2}{ES_n^2},$$

gdzie $S_n = X_1 + ... + X_n$*.*

7.10 Funkcje tworzące

Definicja 7.10.1 (Funkcja tworząca rozkład). *Funkcję g zdefiniowaną równością*

$$g(s) = E(s^X)$$

nazywamy funkcją tworzącą rozkład.

Definicja 7.10.2 (Funkcja tworząca momenty). *Niech $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : Ee^{\theta X} < \infty\}$. Jeśli $int\Theta \neq \emptyset$, to funkcję $L_X : \Theta \to (0, \infty)$ zdefiniowaną równością*

$$L_X(\theta) = Ee^{\theta X}$$

nazywamy transformatą Laplace'a rozkładu P_X. Jeśli Θ zawiera otoczenie zera, to L_x nazywamy funkcją tworzącą momenty.

Przykład 7.10.3.

1. $X \sim Exp(\lambda) \qquad Ee^{\theta X} = \frac{\lambda}{\lambda - \theta}$
2. $X \sim P(\lambda) \qquad Ee^{\theta X} = e^{\lambda(e^\theta - 1)}$

Twierdzenie 7.10.4. *Niech X ma funkcję generującą momenty M_x oraz $(-\theta_0, \theta_0) \subset \Theta$, to*

1. $E(|X|^k) < \infty$
2. $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) \qquad |t| < \theta_0$
3. $EX^k = M_X^{(k)}(0) \qquad k = 1, 2, ...$

Twierdzenie 7.10.5. *Jeśli funkcje tworzące momenty zmiennych losowych X i Y są sobie równe w otoczeniu zera, to $P_X = P_Y$.*

7.11 Funkcje charakterystyczne

Definicja 7.11.1 (Funkcja charakterystyczna). *Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, daną wzorem*

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 7.11.2 (Własności funkcji charakterystytcznych). *Niech φ_X będzie funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X. Wtedy*

1. $\varphi_X(0) = 1$
2. $|\varphi_X(t)| \leqslant 1$
3. $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(-t)}$
4. $\varphi_X(t)$ *jest jednostajnie ciągła*

Definicja 7.11.3. *Funkcję $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazywamy dodatnio określoną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego naturalnego n, dla każdego ciągu $t_1, ..., t_n$ liczb rzeczywistych i zespolonych $z_1, ..., z_n$ mamy*

$$\sum_{k,l \leqslant n} \varphi(t_k - t_l) z_k \overline{z_l} \geqslant 0.$$

Twierdzenie 7.11.4 (Bochnera). *Funkcja φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła, dodatnio określona i $\varphi(0) = 1$.*

Twierdzenie 7.11.5. *Jeśli $E|X|^n < \infty$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$, to n-ta pochodna funkcji charakterystycznej $\varphi_X^{(n)}$ istnieje i jest jednostajnie ciągła, a ponadto*

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n EX^n.$$

Twierdzenie 7.11.6. *Jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, to*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Twierdzenie 7.11.7. *Jeśli rozkłady prawdopodobieństwa μ i ν na $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ mają równe funkcje charakterystyczne, czyli $\varphi_\mu(t) = \varphi_\nu(t)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, to $\mu = \nu$.*

Twierdzenie 7.11.8 (Lévy'ego-Craméra). *Niech (μ_n) będzie ciągiem rozkładów prawdopodobieństwa na $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ i niech (φ_n) będzie ciągiem ich funkcji charakterystycznych. Jeśli $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ i funkcja φ jest ciągła w zerze, to φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu μ i $\mu_n \xrightarrow{\text{sł.}} \mu$.*

Twierdzenie 7.11.9 (Tożsamość Parsevala). *Niech φ i ψ będą funkcjami charakterystycznymi rozkładów prawdopodobieństwa μ i ν. Wtedy*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}\varphi(s)\nu(ds) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t)\mu(dx).$$

Twierdzenie 7.11.10 (O odwrotnym przekształceniu Fouriera). *Rozkład prawdopodobieństwa μ, który ma całkowalną funkcję charakterystyczną φ, ma także ograniczoną i ciągłą gęstość f, daną wzorem*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\varphi(s)ds.$$

Twierdzenie 7.11.11. *Jeżeli funkcja charakterystyczna φ zmiennej losowej X jest okresowa o okresie 2π, to X jest zmienną losową typu dyskretnego, przyjmującą tylko wartości całkowite*

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} e^{-itk}\varphi(t)dt.$$

Twierdzenie 7.11.12 (Tożsamość Plancherela). *Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa μ ma gęstość f i funkcję charakterystyczną φ, to $|\varphi|^2$ jest całkowalna wetdy i tylko wtedy, gdy f^2 jest całkowalna. W tym przypadku*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt.$$

7.12 Niezależność zmiennych losowych

Definicja 7.12.1. *Zmienne losowe $X_1, ..., X_n$ określone na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ są niezależne, jeśli $\forall B_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$*

$$P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot ...P(X_n \in B_n).$$

Twierdzenie 7.12.2. *Zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dystrybuanta F wektora losowego $(X_1, ..., X_n)$ ma postać*

$$F(X) = F_1(X_1) \cdot ... \cdot F_n(X_n),$$

gdzie F_i - dystrybuanta i-tej współrzędnej.

Twierdzenie 7.12.3. *Zmienne losowe $X_1, ..., X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\varphi_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = \varphi_{X_1}(t_1) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}(t_n).$$

Definicja 7.12.4. *Mówimy, że σ-ciała $G_1, ..., G_k$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$P(A_1 \cap ... \cap A_k) = P(A_1) \cdot ...P(A_k).$$

Definicja 7.12.5. *Niech X będzie zmienną losową, $\sigma(X) = \{X_-(B) : B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}$ nazywamy σ-ciałem generowanym przez zmienną losową X.*

Twierdzenie 7.12.6. *$X_1, ..., X_n$ są niezależne $\iff \sigma(X_1), ..., \sigma(X_n)$ są niezależne*

Twierdzenie 7.12.7. *Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, które mają wartość oczekiwaną, wtedy*

$$E(X_1 X_2 \cdot ... \cdot X_n) = EX_1 \cdot E(X_2) \cdot ... \cdot E(X_n).$$

7.13 Funkcje zmiennych losowych

Twierdzenie 7.13.1. *Jeżeli zmienna losowa $X : \Omega \to (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ ma rozkład o gęstości f_X oraz $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest klacy C^1 oraz $\varphi \neq 0$. to zmienna losowa $Y = \varphi(X)$ ma rozkład o gęstości*

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)|I_{\varphi(a,b)}(y),$$

gdzie $h = \varphi^{-1}$.

Twierdzenie 7.13.2. *Załóżmy, że znamy gęstość $f_{X,Y}$ wektora dwuwymiarowego (X, Y) oraz, że dany jest wektor $(U, W) = (\varphi_1(X, Y), \varphi_2(X, Y))$. Zatem mamy*

$$\begin{array}{ll} u = \varphi_1(x, y) & x = \phi_1(u, w) \\ w = \varphi_2(x, y) & y = \phi_2(u, w) \end{array}$$

wtedy Jakobian J wyraża się wzorem

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial w} \\ \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial w} \end{vmatrix}$$

natomiast funkcja gęstości wektora losowego (U, W) wygląda następująco

$$f_{U,W}(u, w) = |J| \cdot f_{X,Y}(\phi_1(u, w), \phi_2(u, w)).$$

7.14 Rozkłady brzegowe, rozkłady warunkowe

Definicja 7.14.1 (Gęstość rozkładu warunkowego). *Gęstością rozkładu warunkowego X pod warunkiem $Y = y$ nazywamy funkcję określoną dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem*

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & \text{o ile } f_Y(y) > 0; \\ g(x), & \text{w p.p.} \end{cases}$$

gdzie $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ jest gęstością rozkładu brzegowego Y, a g dowolną ustaloną gęstością.

Twierdzenie 7.14.2. *Jeżeli F jest dystrybuantą zmiennej losowej dwuwymiarowej (X,Y), to funkcja*

$$F_X(x) = F(x, \infty) \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

jest dystrybuantą zmiennej losowej X, zaś funkcja

$$F_Y(y) = F(\infty, y) \qquad \text{dla } y \in \mathbb{R}$$

jest dystrybuantą zmiennej losowej Y.

8 Logika matematyczna

8.1 Podstawowe tautologie rachunku zdań i kwantyfikatorów

Definicja 8.1.1 (Zdanie). *Zdaniem nazwywamy wyrażenie, któremu możemy przypisać wartość logiczną (1 - prawda, 0 - fałsz). Zdanie nie zawiera zmiennych wolnych.*

Definicja 8.1.2 (Funktory (spójniki zdaniowe)).

1. $p \vee q$ - *alternatywa*
2. $p \wedge q$ - *koniunkcja*
3. $p \Rightarrow q$ - *implikacja*
4. $p \Leftrightarrow q$ - *równoważność*
5. $\sim p$ - *negacja*

Definicja 8.1.3 (Tautologia). *Tautologią rachunku zdań nazywamy zdanie α takie, że $v(\alpha) = 1$ dla dowolnego wartościowania v.*

Definicja 8.1.4 (Podstawowe tautologie rachunku zdań).

1. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *(prawo przemienności)*
2. $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ *(prawo łączności)*
3. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(prawo rozdzielności)*
4. $p \Rightarrow p \vee q$
5. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ *(prawo de Morgana)*
6. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ *(prawo kontrapozycji)*
7. $p \vee \sim p$ *(prawo wyłączonego środka)*
8. $\sim (p \wedge \sim p)$ *(prawo sprzeczności)*
9. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ *(prawo Dunsa Scotosa)*
10. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Definicja 8.1.5 (Funkcje zdaniowe). *Wyrażenia zawierające zmienne wolne nazywamy funkcjami zdaniowymi.*

Definicja 8.1.6. *Tautologia rachunku kwantyfikatorów to formuła, która przy wszystkich interpretacjach i podstawieniach staje się zdaniem prawdziwym.*

Definicja 8.1.7 (Tautologie rachunku kwantyfikatorów).

1. $(\exists x)(\forall y) \quad \alpha(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x) \quad \alpha(x, y)$
2. $(\exists x)(\exists y) \quad \alpha(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x) \quad \alpha(x, y)$ *i dla* $\forall$
3. $\sim (\exists x) \quad \alpha(x) \Leftrightarrow (\forall x) \quad \sim (\alpha(x))$ *(prawo de Morgana)*
4. $(\forall x) \quad [\alpha(x) \wedge \beta(x)] \Leftrightarrow [(\forall x) \quad \alpha(x)] \wedge [(\forall x)\beta(x)]$
5. $[(\forall x) \quad \alpha(x)] \vee [(\forall x)\beta(x)] \Rightarrow (\forall x) \quad [\alpha(x) \vee \beta(x)]$
6. $(\forall x)[\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)] \Rightarrow [(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x)]$

8.2 Działania na zbiorach

Definicja 8.2.1.

1. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
2. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
3. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Definicja 8.2.2 (Zbiór potęgowy).

$$2^X = \{A : A \subseteq X\}$$

Lemat 8.2.3.

1. $\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} \quad A_{ij} \subseteq \bigcap_{j\in J} \bigcup_{i\in I} \quad A_{ij}$

8.3 Relacje

Niech dane będą zbiory $X_1, \ldots, X_n$.

Definicja 8.3.1 (Relacja n-argumentowa). *Relacją n-argumentową nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego zbiorów $X_1, \ldots, X_n$*

$$R \subset X_1 \times \ldots \times X_n.$$

Rozważać będziemy jedynie relacje 2-argumentowe.

Definicja 8.3.2 (Dziedzina relacji). *Zbiór*

$$d_R = \{x \in X : \ \exists y \in Y : \ xRy\}$$

nazywamy dziedziną relacji R. Analogicznie zbiór

$$d_R^{-1} = \{y \in Y : \ \exists x \in X : \ xRy\}$$

nazywamy przeciwdziedziną relacji R. Sumę tych zbiorów $d_R \cup d_R^{-1}$ nazywamy polem relacji R.

Definicja 8.3.3 (Własności relacji). *Relacja $R \subset X \times X$ jest*

a) *zwrotna, jeżeli*
$$\forall x \in X : \ xRx.$$
Przykłady: $=, \leqslant,$

b) *symetryczna, jeżeli*
$$\forall x, y \in X : \ xRy \ \Rightarrow \ yRx.$$
Przykłady: $=, ||,$

c) *przechodnia, jeżeli*
$$\forall x, y, z \in X : \ (xRy \ \wedge \ yRz) \ \Rightarrow \ xRz.$$
Przykłady: $=, <,$

d) *antysymetryczna, jeżeli*
$$\forall x, y \in X : \ (xRy \ \wedge \ yRx) \ \Rightarrow \ x = y.$$
Przykłady: $\leqslant, <,$

e) *przeciwzwrotna, jeżeli*
$$\forall x \in X : \sim xRx.$$
Przykłady: $\neq, <,$

f) *przeciwsymetryczna, jeżeli*
$$\forall x, y \in X : \ xRy \ \Rightarrow \sim yRx.$$
Przykłady: $<,$

g) *spójna, jeżeli*
$$\forall x, y \in X : \ xRy \ \vee \ yRx \ \vee \ x = y.$$
Przykłady: $<, \subseteq$ *nie jest spójna,*

h) *pusta, jeżeli*
$$R = \emptyset,$$

i) pełna, jeżeli

$$R = X \times X.$$

Definicja 8.3.4 (Relacja odwrotna). *Niech* $R \subset X \times Y$*. Wówczas relację* $R^{-1} \subset Y \times X$ *taką, że*

$$yR^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad xRy,$$

nazywamy relacją odwrotną do R*.*

Definicja 8.3.5 (Złożenie relacji). *Niech* $R \subset X \times Y$ *i* $S \subset Y \times Z$*. Wówczas relację* $S \circ R \subset X \times Z$ *taką, że*

$$x(S \circ R)z \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in Y : \; xRy \; \wedge \; ySz,$$

nazywamy złożeniem relacji R *i* S*.*

8.4 Relacje równoważności

Definicja 8.4.1 (Relacja równoważności). *Relację $R \subset X \times X$ nazywamy relacją równoważności, jeżeli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

Przykład 8.4.2. *Przykłady relacji równoważności:*

1) $=$,

2) relacja pełna,

3) relacja kongruencji modulo n w zbiorze $\mathbb{Z}$

$$x \sim_n y \quad \Leftrightarrow \quad {}^{n}|_{x-y},$$

4) $||$ *w zbiorze linii prostych,*

5) $A, B \subset X$, $R \subset 2^X \times 2^X$

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad (A-B) \cup (B-A) \text{ jest zbiorem skończonym},$$

6) α, β*-zdania*

$$\alpha \sim \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \Rightarrow \beta \text{ i } \beta \Rightarrow \alpha \text{ są tautologiami},$$

7) G-grupa, $H \subset G$

$$x \sim_H y \quad \Leftrightarrow \quad xy^{-1} \in H,$$

8) w zbiorze $\mathbb{R}$

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Definicja 8.4.3 (Klasa abstrakcji). *Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w zbiorze X, $a \in X$. Wówczas klasą abstrakcji elementu a nazywamy zbiór*

$$[a]_\sim = \{x \in X : \ x \sim a\}.$$

Twierdzenie 8.4.4 (Własności klas abstrakcji). *Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w zbiorze X, $a, b \in X$. Wówczas:*

1) $b \in [a]_\sim \quad \Leftrightarrow \quad a \in [b]_\sim$,

2) $b \in [a]_\sim \quad \Leftrightarrow \quad [b]_\sim = [a]_\sim$,

3) $[a]_\sim = [b]_\sim \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b$,

4) $[a]_\sim = [b]_\sim \quad \vee \quad [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$,

5) $\bigcup_{a \in X} [a]_\sim = X$,

6) $a \in [a]_\sim$.

Twierdzenie 8.4.5. *Jeżeli rodzina $\chi = \{A_t : \ t \in T\}$ jest podziałem[2] zbioru X, to istnieje relacja równoważności $\sim$ w zbiorze X taka, że*

$$\chi = \{[a]_\sim : \ a \in X\}.$$

Definicja 8.4.6 (Zbiór ilorazowy). *Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w zbiorze X. Wówczas zbiorem ilorazowym relacji $\sim$ nazywamy zbiór*

$$X|_\sim = \{[a]_\sim : a \in X\}.$$

[2] $A_t \neq \emptyset$, $A_t \cap A_s = \emptyset, t \neq s$ oraz $\bigcup_{t \in T} A_t = X$

8.5 Funkcje

Definicja 8.5.1 (Relacja jednoznaczna - funkcja). *Relację $R \subset X \times Y$ nazywamy jednoznaczną (funkcją) jeżeli*

$$\forall x \in X \ \forall y_1, y_2 \in Y : \ (xRy_1 \ \wedge \ xRy_2) \ \Rightarrow \ y_1 = y_2.$$

Piszemy wtedy $y = R(x)$.

Funkcje będziemy oznaczać literami $f, g, h, \ldots$. Jeżeli $d_f = X$, to piszemy $f : X \to Y$.

Definicja 8.5.2 (Funkcja 'na'). *Jeżeli $d_f = X$ oraz $d_f^{-1} = Y$, to funkcję nazywamy funkcją 'na'.*

Definicja 8.5.3 (Funkcja różnowartościowa). *Funkcję f nazywamy różnowartościową, jeżeli*

$$\forall x_1, x_2 \in d_f : \ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2.$$

Twierdzenie 8.5.4. *Relacja odwrotna do funkcji różnowartościowej jest funkcją*

Uwaga 8.5.5. *Sposoby definiowania funkcji:*

1) *złożenie,*

2) *odwracanie,*

3) *obcięcie, $f : X \to Y$, $A \subset X$,*

$$g = f|_A, \ g = f \cap (A \times Y) \subset A \times Y, \ g(x) = f(x) \text{ dla } x \in A,$$

4) *rozszerzenie,*

5) *definicja warunkowa, $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$, $f_i : X_i \to Y_i$*

$$f = f_1 \cup \ldots \cup f_n \subset X \times Y.$$

Definicja 8.5.6 (Obraz i przeciwobraz). *Niech $f : X \to Y$ oraz $A \subset X$, $B \subset Y$. Wtedy obrazem zbioru A przez funkcję f nazywamy zbiór*

$$f(A) = \{y \in Y : \ \exists x \in A : \ f(x) = y\},$$

a przeciwobrazem zbioru B nazywamy

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \ f(x) \in B\}.$$

Twierdzenie 8.5.7. *Własności obrazu i przeciwobrazu:*

1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$,

2) *Jeżeli $B_1 \subset B_2$, to $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,*

3) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$,

4) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$,

5) $f(\emptyset) = \emptyset$,

6) *Jeżeli $A_1 \subset A_2$, to $f(A_1) \subset f(A_2)$,*

7) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$,

8) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f^{(}A_i)$,

9) *Jeżeli f jest różnowartościowa, to* $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^(A_i)$,

10) $f(f^{-1}(B)) \subset B$,

11) *Jeżeli f jest 'na', to* $f(f^{-1}(B)) = B$,

12) $A \subset f^{-1}(f(A))$,

13) *Jeżeli f jest różnowartościowa, to* $A = f^{-1}(f(A))$,

Definicja 8.5.8. *Niech będą dane zbiory z n-argumentowymi działaniami* $(A, \circ_A)$ *i* $(B, \circ_B)$ *Funkcję* $f : A \to B$ *nazywamy:*

1. *homomorfizmem jeśli :*

$$f(\circ_A(x_1, x_2, ..., x_n)) = \circ_B(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$$

2. *monomorfizmem (złożenie) jesli jest homomorfizmem* $1-1$
3. *epimorfizmem jesli jest homomorfizmem "na"*
4. *izomorfizmem jesli jest homomorfizmem* $1-1$ *i "na", oraz* f^{-1} *jest homomorfizmem*

8.6 Relacje częściowego porządku i Lemat Kuratowskiego-Zorna

Definicja 8.6.1 (Relacja częściowego porządku). *Niech $\mathfrak{R}$ będzie zbiorem niepustym. Relację $\prec$ między elementami zbioru $\mathfrak{R}$ nazywamy częściowo porządkującą, gdy spełnia następujące warunki:*

1) $a \prec a$ (zwrotność)

2) jeżeli $a \prec b$ i $b \prec c$, to $a \prec c$ (przechodniość)

3) jeżeli $a \prec b$ i $b \prec a$, to $a = b$ (antysymetryczność)

dla dowlonych $a, b, c \in \mathfrak{R}$. Zbiór $\mathfrak{R}$ wraz z relacją $\prec$, czyli parę $(\mathfrak{R}, \prec)$ nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym. Niepusty podzbiór $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$ nazywamy całkowicie uporządkowanym (lub uporządkowanym linowo), gdy dla dowolnych dwóch elementów $a, b \in \mathfrak{R}_0$ zachodzi $a \prec b$ lub $b \prec a$.

Definicja 8.6.2 (Relacja liniowego porządku). *Relację dwuczłonową $\leqslant$ w X porządkującą zbiór X nazywamy liniowo porządkującą, jeśli spełnia warunek spójności:*

$$x \leqslant y \qquad \text{lub} \qquad y \leqslant x \qquad \text{dla każdego} \quad x, y \in X.$$

Definicja 8.6.3 (Łańcuch). *Niepusty całkowicie uporządkowany (uporządkowany linowo) podzbiór $\mathfrak{R}_0$ zbioru częściowo uporządkowanego $\mathfrak{R}$ nazywamy łańcuchem w $\mathfrak{R}$.*

Przykład 8.6.4.

1. *Rodzina $\mathfrak{R}$ wszystkich podzbiorów danego zbioru niepustego X stanowi zbiór częściowo uporządkowany relacją zawirania $\subset$ lub $\supset$*

2. *Zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest całkowicie uporządkowany relacją nierówności $\leqslant$ lub $\geqslant$*

Definicja 8.6.5 (Ograniczenie górne). *Niech $\mathfrak{R}_0$ będzie niepustym podzbiorem zbioru częściowo uporządkowanego $(\mathfrak{R}, \prec)$. Element $a \in \mathfrak{R}$ nazywamy elementem górującym lub ograniczeniem górnym zbioru $\mathfrak{R}$, gdy $b \prec a$ dla każdego $b \in \mathfrak{R}_0$.*

Definicja 8.6.6 (Kres górny). *Element górujący $a_0 \in \mathfrak{R}$ zbioru $\mathfrak{R}_0$ nazywamy kresem górnym zbioru $\mathfrak{R}_0$, gdy dla każdego elementu górującego $a \in \mathfrak{R}$ zbioru $\mathfrak{R}_0$ zachodzi $a_0 \prec a$.*

Definicja 8.6.7 (Element najmniejszy). *Element a nazywamy elementem najmniejszym w X jeśli*

$$(\forall x \in X) \quad a \leqslant x.$$

Definicja 8.6.8 (Element minimalny). *Element a nazywamy elementem minimalnym w X jeśli*

$$\sim (\exists x \in X) \quad x < a.$$

Definicja 8.6.9 (Element największy). *Element a nazywamy elementem największym w X jeśli*

$$(\forall x \in X) \quad x \leqslant a.$$

Definicja 8.6.10 (Element maksymalny). *Element a nazywamy elementem maksymalnym w X jeśli*

$$\sim (\exists x \in X) \quad a < x.$$

Twierdzenie 8.6.11. *W zbiorze uporządkowanym istnieje co najwyżej jeden element największy. Element największy jest maksymalny.*

Twierdzenie 8.6.12. *W zbiorze uporządkowanym istnieje co najwyżej jeden element najmniejszy. Element najmniejszy jest minimalny.*

Twierdzenie 8.6.13 (Lemat Kuratowskiego-Zorna). *Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Jeżeli w zbiorze X dla każdego łańcucha $A \subset X$ istnieje ograniczenie górne, to w X istnieje element maksymalny. Dokładniej, dla każdego $x_0 \in X$ istnieje element maksymalny x taki, że $x_0 \leqslant x$.*

8.7 Równoliczność i przeliczalność

Definicja 8.7.1 (Równoliczność).

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad \exists f: \ f: X \overset{1-1,na}{\longrightarrow} Y$$

Przykład 8.7.2. *Przykłady zbiorów równolicznych:*

a) $\mathbb{N} \sim Parz,\ f(n) = 2n,$

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N},\ f(n,m) = 2^n \cdot (2m+1) - 1,$

c) $\mathbb{N}^{*3} \sim \mathbb{N},\ f(x_1, \ldots, x_k) = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_{k-1}^{x_{k-1}} \cdot p_k^{x_k+1} - 2,$

d) $(a,b) \sim (c,d),$

e) $[a,b) \sim (c,d),\ f: (a,b) \to [a,b),\ f(x) = \begin{cases} x & x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \\ x_{n-1} & x = x_n,\ n > 0 \\ a & x = x_0 \end{cases}$ *, gdzie* $x_n \in (a,b)$ *jest danym dowolnym ciągiem nieskończonym,*

f) $\mathbb{R} \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ f(x) = \tan(x),$

g) $\mathbb{R} \sim (0, +\infty),\ f(x) = 2^x,$

h) $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}.$

Definicja 8.7.3.

$$X \preceq Y \quad \Leftrightarrow \quad \exists f: \ f: X \overset{1-1}{\longrightarrow} Y$$

Definicja 8.7.4.

$$X \prec Y \quad \Leftrightarrow \quad X \preceq Y \quad \wedge \quad X \nsim Y$$

Twierdzenie 8.7.5. *Zachodzą następujące zależności:*

1) $X \sim X,$

2) $X \sim Y \quad \Rightarrow \quad Y \sim X,$

3) $X \sim Y \sim Z \quad \Rightarrow \quad X \sim Z,$

4) $X \subset Y \quad \Rightarrow \quad X \preceq Y,$

5) $X \preceq Y \preceq Z \quad \Rightarrow \quad X \preceq Z,$

6) $X \preceq Y \sim Z \quad \Rightarrow \quad X \preceq Z,$

7) $Z \sim X \preceq Y \quad \Rightarrow \quad Z \preceq Y,$

8) $X \prec Y \sim Z \quad \Rightarrow \quad X \prec Z,$

9) $Z \sim X \prec Y \quad \Rightarrow \quad Z \prec Y,$

Twierdzenie 8.7.6 (Cantora-Bernsteina).

$$(X \preceq Y \ \wedge \ Y \preceq X) \quad \Rightarrow \quad X \sim Y$$

Twierdzenie 8.7.7 (Cantora).

$$X \prec 2^X$$

[3] $\mathbb{N}^* = \{x_1, x_2, \ldots, x_k : x_i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} - \{0\}\}$

Definicja 8.7.8 (Przeliczalność). *Zbiór X nazywamy przeliczalnym, jeżeli jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$.*

Zbiór X nazywamy nieprzeliczalnym, jeżeli nie jest przeliczalny i nie jest skończony.

Przykład 8.7.9. *Zbiory przliczalne: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$.*
Zbiory nieprzeliczalne: $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 8.7.10. *Zachodzą następujące zależności:*

1) *Jeżeli X jest zbiorem przeliczalnym i $Y \subset X$, to Y jest zbiorem przeliczalnym,*

2) *Jeżeli X jest zbiorem przeliczalnym lub skończonym, to X^* jest zbiorem przeliczalnym,*

3) *Jeżeli X jest zbiorem przeliczalnym oraz istnieje funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$, to zbiór Y jest przeliczalny lub skończony,*

4) *Jeżeli X jest zbiorem przeliczalnym, a Y przeliczalnym lub skończonym, to $X \cup Y$ jest zbiorem przeliczalnym,*

5) *Jeżeli X jest zbiorem przeliczalnym, a Y przeliczalnym lub skończonym niepustym, to $X \times Y$ jest zbiorem przeliczalnym.*

9 Topologia

9.1 Przestrzenie metryczne

Definicja 9.1.1 (Metryka). *Metryką d w zbiorze X nazywamy funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$, spełniającą dla każdych $x, y, z \in X$ warunki:*

1) $d(x, y) \geqslant 0$,

2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

3) $d(x, y) = d(y, x)$,

4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Definicja 9.1.2 (Przestrzeń metryczna). *Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, d), gdzie X jest dowolnym zbiorem, a d metryką w zbiorze X.*

Przykład 9.1.3. *Przykłady przestrzeni metrycznych:*

1) X *z metryką dyskretną* $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$,

2) $\mathbb{R}^n$ *z metryką euklidesową* $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$,

3) $\mathbb{R}^n$ *z metryką taksówkową* $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,

4) $\mathbb{R}^n$ *z metryką maksimum* $d(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$,

5) $C[a, b]$ *z metryką* $d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$,

Definicja 9.1.4 (Zbiór borelowski). *Rodziną zbiorów borelowskichw przestrzeni metrycznej X nazywamy najmniejszą rodzinę $\mathfrak{F}$ spełniającą nasepujące warunki:*

1. *rodzina $\mathfrak{F}$ zawiera wszystkie zbiory otwarte w X*

2. *jeżeli $A \in \mathfrak{F}$, to $A' \in \mathfrak{F}$*

3. *jeżeli $A_n \in \mathfrak{F}$ dla $n = 1, 2, ...$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$*

Definicja 9.1.5 (Funkcja ciągła). *Funkcję $f : X \to Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami metrycznymi, nazywamy ciągłą, jeżeli*

$$\forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \ d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Definicja 9.1.6 (Kula otwarta). *Kulą otwartą o środku w x_0 i promieniu r nazywamy zbiór*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Definicja 9.1.7 (Zbiór otwarty). *Zbiór $E \subset X$ nazywamy otwartym, jeżeli*

$$\forall x \in E \exists r > 0 : \ B(x, r) \subset E.$$

Twierdzenie 9.1.8. *Rodzina $\mathfrak{T}$ wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni metrycznej ma następujące własności:*

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

2. *Suma dowlonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym*

3. *Przekrój dowolnej skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

Twierdzenie 9.1.9. *Rodzina $\mathfrak{T}$ wszystkich zbiorów domkniętych przestrzeni metrycznej ma następujące własności:*

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

2. *Suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym*

3. *Przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.*

Twierdzenie 9.1.10. *Zbiór A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy należy do niego granica każdego zbieżnego ciągu jego elementów.*

Definicja 9.1.11 (Punkt skupienia). *Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru $E \subset X$, jeżeli*

$$\forall r > 0: \; E \cap [B(X_0, r) - \{x_0\}] \neq \emptyset.$$

Przykład 9.1.12. *Jedynym punktem skupienia zbioru $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ jest $x_0 = 0$.*

Definicja 9.1.13. *Zbiór $D \subset X$ nazywamy domkniętym, jeżeli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia*

Twierdzenie 9.1.14. *Zbiór $D \subset X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jego uzupełnienie jest otwarte.*

9.2 Przestrzenie topologiczne

Definicja 9.2.1 (Przestrzeń topologiczna). *Zbiór X wraz z rodziną podzbiorów $\mathcal{T}$ nazywamy przestrzenią topologiczną, jeżeli:*

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,

2) $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,

3) $\{U_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{T} \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$,

Elementy rodziny $\mathcal{T}$ nazywamy zbiorami otwartymi.

Przykład 9.2.2. *Topologia dyskretna na X: $\mathcal{T} = 2^X$.*

Twierdzenie 9.2.3. *Każda przestrzeń metryczna X jest przestrzenią topologiczną, jeżeli za $\mathcal{T}$ przyjmiemy rodzinę zbiorów otwartych w X.*

Definicja 9.2.4 (Otoczenie punktu). *Otoczeniem punktu $x_0 \in X$ nazywamy każdy zbiór otwarty U taki, że $x_0 \in U$.*

Definicja 9.2.5 (Przestrzeń Hausdorffa). *Przestrzeń topologiczną nazywamy przestrzenią Hausdorffa, jeżeli dla każdych dwóch różnych punktów należących do tej przestrzeni, istnieją ich rozłączne otoczenia.*

Twierdzenie 9.2.6 (Podprzestrzeń topologiczna). *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X z topologią*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : \; U \in \mathcal{T}\}$$

jest przestrzenią topologiczną (podprzestrzeń przestrzeni X).

Definicja 9.2.7 (Punkt skupienia). *Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru $A \subset X$, jeżeli dla każdego otoczenia U pnktu x_0 zachodzi*

$$A \cap [U - \{x_0\}] \neq \emptyset.$$

Definicja 9.2.8 (Wnętrze zbioru). *Wnętrzem zbioru $A \subset X$ nazywamy sumę wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A i oznaczamy int$A$.*

Definicja 9.2.9 (Zbiór domknięty). *Zbiór $A \subset X$ nazywamy domkniętym, jeżeli jego uzupełnienie jest otwarte.*

Definicja 9.2.10 (Domknięcie zbioru). *Domknięciem zbioru $A \subset X$ nazywamy przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A i oznaczamy $\overline{A}$.*

Przykład 9.2.11. *int$\mathbb{Q}$ $= \emptyset$ (dowolnie blisko liczby wymiernej znajduje się liczba niewymierna), $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (dla dowolnej liczby rzeczywistej x istnieje ciąg liczb wymiernych zbieżny do x).*

Twierdzenie 9.2.12. *Domknięcie zbioru A jest zbiorem domkniętym i jest to najmniejszy zbiór domknięty zawierający A.*

Definicja 9.2.13 (Brzeg zbioru). *Brzegiem zbioru $A \subset X$ nazywamy zbiór*

$$bdA = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

Twierdzenie 9.2.14. *1)* $intA \cap bdA = \emptyset$,

2) $\overline{A} = intA \cup bdA$,

3) $bdA = \emptyset$ *wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zarówno otwarty i domknięty.*

Definicja 9.2.15 (Baza topologii). *Rodzinę $\mathcal{B}$ nazywamy bazą topologi na X jeżeli:*

1) $\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B} : \; x \in B,$

2) $\forall x \in B_1 \cap B_2,\ B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *istnieje* $B \in \mathcal{B}$ *taki, że* $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Twierdzenie 9.2.16. *Baza topologii generuje topologię na* X. U *jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall x \in U \exists B \in \mathcal{B} : \; x \in B \subset U.$$

Twierdzenie 9.2.17. *Jeżeli* X *i* Y *są przestrzeniami topologicznymi z bazami topologii* $\mathcal{B}_X$ *i* $\mathcal{B}_Y$*, to iloczyn* $X \times Y$ *jest przestrzenią topologiczną z bazą*

$$\{U \times V : U \in \mathcal{B}_X,\ V \in \mathcal{B}_Y\}.$$

9.3 Przekształcenia ciągłe

Definicja 9.3.1 (Przekształcenie ciągłe). *Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywamy ciągłym, jeżeli dla każdego zbioru otwartego $U \subset Y$ zbiór $f^{-1}(U)$ jest otwarty w X.*

Twierdzenie 9.3.2. *Dla przestrzeni metrycznych dwie możliwe definicje ciągłości są równoważne.*

Twierdzenie 9.3.3. *Zachodząnastępujące twierdzenia:*

1) Każde przekształcenie $f : X \to \bigstar$ jest ciągłe, gdzie $\bigstar$ oznacza przestrzeń złożoną z jednego punktu.

2) Przekształcenie identycznościowe $id : X \to X$ jest ciągłe.

3) Złożenie dwóch przekształceń ciągłych jest ciągłe.

4) Jeżeli $f : X \to Y$ jest ciągłe, to $f|_A$ jest ciągłe dla dowolnego zbioru $A \subset X$.

Twierdzenie 9.3.4. *Następujące warunki są równoważne:*

1) $f : X \to Y$ jest ciągłe,

2) Dla każdego zbioru domkniętego $D \subset Y$, zbiór $f^{-1}(D)$ jest domknięty w X,

3) Dla każdego zbioru $A \subset X$ zachodzi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Definicja 9.3.5 (Homeomorfizm). *Przestrzenie X i Y nazywamy homeomorficznymi, jeżeli istnieją przekształcenia ciągłe $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ takie, że*

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y.$$

Funkcje f i g nazywamy homeomorfizmami.

Przykład 9.3.6. *Przestrzeń $\mathbb{R}$ jest homeomorficzna z odcinkiem $(-1, 1)$.*

Definicja 9.3.7 (Przekształcenie ilorazowe). *Przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ nazywamy ilorazowym, jeżeli jest 'na' oraz*

$$U \text{ - otwarty w } Y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(U) \text{ - otwarty w } X.$$

Przykład 9.3.8. *Przekształcenie ilorazowe walca na okrąg $f : S^1 \times I \to S^1$ dane wzorem*

$$(\cos t, \sin t, s) \mapsto (\cos t, \sin t),$$

gdzie $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, a I oznacza odcinek.

Definicja 9.3.9 (Przekształcenie otwarte). *Przekształcenie, które przekształca zbiory otwarte w zbiory otwarte, nazywamy otwartym.*

Twierdzenie 9.3.10. *Jeżeli przekształcenie f ciągłe, 'na' i otwarte (domknięte), to f jest przekształceniem ilorazowym.*

Twierdzenie 9.3.11. *Niech $p : X \to Y$ będzie przekształceniem ilorazowym oraz $g : X \to Z$ będzie stałe na $p^{-1}(y)$ dla każdego $y \in Y$. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie ciągłe $f : Y \to Z$ takie, że $f \circ p = g$.*

9.4 Przestrzenie spójne

Definicja 9.4.1 (Przestrzeń spójna). *Przestrzeń X nazywamy spójną wtedy i tylko wtedy, gdy nie da się rozłożyć na sumę dwóch podprzestrzeni niepustych, rozłącznych i otwartych.*

Przykład 9.4.2. *Odcinek $[a,b]$ jest spójny, $\mathbb{R} - \{0\}$ nie jest przestrzenią spójną.*

Twierdzenie 9.4.3. *Obraz przestrzeni spójnej przy przekształceniu ciągłym jest przestrzenią spójną.*

Twierdzenie 9.4.4. *Jeżeli Y i Z są rozłącznymi przestrzeniami spójnymi, to $X = Y \cup Z$ jest przestrzenią spójną.*

Twierdzenie 9.4.5. *Niech Y będzie spójną podprzestrzenią przestrzeni X. Jeżeli podprzestrzeń Z spełnia $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, to jest przestrzenią spójną.*

Definicja 9.4.6 (Łukowa spójność). *Przestrzeń X nazywamy łukowo spójną, jeżeli dla każdych $a, b \in X$ istnieje łuk $\alpha : [0,1] \to X$ taki, że $\alpha(0) = a$ i $\alpha(1) = b$.*

Twierdzenie 9.4.7. *Przestrzeń łukowo spójna jest spójna.*

Przykład 9.4.8. *Rozważmy przestrzeń*

$$Z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1,1] \text{ lub } x \in (0,1], y = \sin\frac{1}{x}\right\}.$$

Przestrzeń Z jest przestrzenią spójną, jako domknięcie przestrzeni łukowo spójnej. Nie jest natomiast przestrzenią łukowo spójną ($a = (0,1)$, $b = (\frac{2}{\pi}, 1)$).

Lemat 9.4.9. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Relacja*

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{istnieje spójny podzbiór } X \text{ zawierający } x \text{ i } y$$

jest relacją równoważności.

Definicja 9.4.10 (Składowe). *Klasy abstrakcji powyższej relacji nazywamy składowymi.*

Lemat 9.4.11. *Składowe są maksymalnymi zbiorami spójnymi.*

Twierdzenie 9.4.12 (Jordana). *Każda krzywa zamknięta bez samoprzecięć rozcina płaszczyznę na 2 składowe, których jest wspólnym brzegiem.*

Twierdzenie 9.4.13. *Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Jeżeli istnieje punkt x_0 taki, że $X - \{x_0\}$ ma $n \geqslant 1$ składowych, zaś nie istnieje punkt o analogicznej własności w Y, to X i Y nie są homeomorficzne.*

Przykład 9.4.14. $\mathbb{R}^2 \not\approx \mathbb{R}$, *Okrąg* $\not\approx \mathbb{R}$.

9.5 Przestrzenie zwarte

Definicja 9.5.1. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg (x_n) jest zbieżny do punktu $p \in X$ jeżeli*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N : \ d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Definicja 9.5.2 (Przestrzeń metryczna ciągowo zwarta). *Przestrzeń metryczną nazywamy ciągowo zwartą, jeżeli każdy ciąg (x_n) posiada podciąg zbieżny do pewnego punktu $p \in X$.*

Przykład 9.5.3. *Odcinek $X = [0, 1]$ jest przestrzenią ciągowo zwartą, natomiast $Y = (0, 1]$ oraz $Z = \mathbb{R}$ nie są ciągowo zwarte, gdyż ciągi $y_n = \frac{1}{n}$ i $z_n = n$ nie mają podciągów zbieżnych.*

Lemat 9.5.4. *Każda ciągowo zwarta przestrzeń metryczna jest ograniczona.*

Twierdzenie 9.5.5 (Heine-Borela). *Podzbiór X przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest ciągowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Lemat 9.5.6 (O liczbie Lebesguea). *Jeżeli X jest przestrzenią metryczną ciągowo zwartą, to dla każdego pokrycia otwartego $\{U_i\}_{i \in I}$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że każdy zbiór o średnicy mniejszej niż δ jest zawarty w pewnym elemencie pokrycia U.*

Definicja 9.5.7 (Przestrzeń zwarta). *Przestrzeń Hausdorffa X nazywamy przestrzenią zwartą, jeżeli z każdego pokrycia $\{U_i\}_{i \in I}$ można wybrać podpokrycie skończone.*

Przykład 9.5.8. *Odcinek $X = [0, 1]$ jest zwarty, natomiast odcinek $Y = (0, 1)$ nie jest zwarty, gdyż z pokrycia $\{U_i = \left(\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right)_{i \geqslant 3}$ nie można wybrać podpokrycia skończonego.*

Lemat 9.5.9. *Każdy zwarty podzbiór przestrzeni Hausdorffa jest domknięty.*

Lemat 9.5.10. *Domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty.*

Lemat 9.5.11. *Obraz przestrzeni zwartej przy przekształceniu ciągłym jest zwarty.*

Lemat 9.5.12. *Każde przekształcenie ciągłe, 1-1 i 'na' przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa jest homeomorfizmem.*

Lemat 9.5.13. *Iloczyn $X_1 \times \ldots \times X_n$ skończonej ilości przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą.*

Twierdzenie 9.5.14. *Przestrzeń metryczna jest ciągowo zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarta.*

Definicja 9.5.15 (Scentrowana rodzina zbiorów). *Rodziną $\{F_i\}_{i \in I}$ przestrzeni topologicznej X nazywamy scentrowaną, jeżeli dla każdego skończonego ciągu indeksów $i_1, \ldots, i_n$ przecięcie $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}$ jest zbiorem niepustym.*

Lemat 9.5.16. *Przestrzeń Hausdorffa X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda scentrowana rodzina zbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie.*

Twierdzenie 9.5.17 (Kuratowski). *Przestrzeń Hausdorffa X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej przestrzeni topologicznej Y rzutowanie $p : X \times Y \to Y$ jest przekształceniem domkniętym.*

Twierdzenie 9.5.18. *Przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna.*

Twierdzenie 9.5.19. *Podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty.*

Twierdzenie 9.5.20. *Odwzorowanie ciągłe o dziedzinie zwartej jest jednopstajnie ciągłe.*

Twierdzenie 9.5.21 (Twierdzenie Tichonowa). *Iloczyn topologiczny dowlonej rodziny przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą.*

9.6 Przestrzenie metryczne zupełne

Definicja 9.6.1 (Ciąg Cauchy'ego). *Ciąg (x_n) punktów przestrzeni metrycznej X nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeżeli*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geqslant N: \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definicja 9.6.2 (Przestrzeń metryczna zupełna). *Przestrzeń metryczną X nazywamy zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny do punktu w X.*

Przykład 9.6.3. *Przestrzeń $\mathbb{R}$ jest zupełna, natomiast przestrzenie $\mathbb{R} - \{0\}$ i $(0,1)$ nie są zupełne, gdyż granica ciągu $x_n = \frac{1}{n}$ nie należy do tych przestrzeni. Przestrzeń $\mathbb{Q}$ również nie jest zupełna.*

Uwaga 9.6.4. *Zupełność nie jest niezmiennikiem homeomorfizmu. Przestrzenie $\mathbb{R}$ i $(0,1)$ są homeomorficzne, mimo to $\mathbb{R}$ jest zupełna, a $(0,1)$ nie.*

Twierdzenie 9.6.5. *Każdą przestrzeń metryczną X można zanurzyć w przestrzeń zupełną Y w sposób izometryczny (zachowując odległość) tak, że $\overline{X} = Y$.*

Lemat 9.6.6 (Metryka jednostajna). *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y przestrzenią metryczną. W zbiorze funkcji ciągłych $C(X,Y)$ można określić następującą metrykę*

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in X} \{\min(d(f(x), g(x)), 1)\},$$

gdzie d jest metryką na Y.

Twierdzenie 9.6.7. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y przestrzenią metryczną. $C(X,Y)$ z metryką jednostajną jest zupełną przestrzenią metryczną.*

Definicja 9.6.8 (Przestrzeń całkowicie ograniczona). *Przestrzeń metryczną X nazywamy całkowicie ograniczoną, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona liczba punktów $x_1, \ldots, x_n$ takich, że*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Lemat 9.6.9. *Przestrzeń metryczna X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna i całkowicie ograniczona.*

Definicja 9.6.10. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y przestrzenią metryczną. Mówimy, że rodzina funkcji $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ jest jednakowo ciągła w punkcie x_0, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że*

$$x \in U \quad \Rightarrow \quad \forall f \in \mathcal{F}: \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Lemat 9.6.11. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną zwartą, a Y przestrzenią metryczną zwartą. Rodzina $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ jest całkowicie ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednakowo ciągła.*

Definicja 9.6.12 (Metryka jednorodna). *Metryką jednorodną w zbiorze $C(X, \mathbb{R}^n)$, gdzie X jest przestrzenią topologiczną zwartą, nazywamy*

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

gdzie d jest metryką euklidesową.

Twierdzenie 9.6.13 (Ascolli). *Niech X będzie przestrzenią topologiczną zwartą. Rodzina $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ z mertyką jednorodną jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięta, ograniczona i jednakowo ciągła.*

Definicja 9.6.14 (Odwzorowanie zwężające). *Odwzorowanie $f : X \to X$ nazywa się zwężające, jeśli*

$$\exists \alpha \in [0,1]\ \forall x, y \in X : \qquad d(T(x), T(y)) \leqslant \alpha \cdot d(x, y).$$

Definicja 9.6.15 (Punkt stały). *Element $x \in X$ nazywa się punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$ jeśli $f(x) = x$.*

Twierdzenie 9.6.16 (Banacha). *Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną, $T : X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym, wtedy istnieje dokładnie jedan punkt stały $x_0 \in X$ taki, że $T(x_0) = x_0$.*

Twierdzenie 9.6.17. *Przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna.*

9.7 Przestrzenie normalne, twierdzenie Tiezego

Definicja 9.7.1 (Przestrzeń normalna). *Przestrzeń Hausdorfffa X nazywamy przestrzenią normalną, jeżeli dla każdych domkniętych i rozłącznych podzbiorów A i B istnieją zbiory otwarte U i V takie, że $A \subset U$, $B \subset V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Lemat 9.7.2. *Każda przestrzeń metryczna jest normalna.*

Lemat 9.7.3. *Każda przestrzeń zwarta jest normalna.*

Lemat 9.7.4 (Urysohna). *Niech A i B będą niepustymi i rozłącznymi domkniętymi podzbiorami przestrzeni normalnej X. Wtedy istnieje ciągłe odwzorowanie $f : X \to [0,1]$ takie, że $f|_A = 0$ i $f|_B = 1$.*

Lemat 9.7.5. *Każda przestrzeń normalna o przeliczalnej bazie jest metryzowalna.*

Twierdzenie 9.7.6 (Tiezego). *Niech X będzie przestrzenią normalną, a $A \subset X$ będzie podzbiorem domkniętym. Wówczas każda funkcja ciągła $f : A \to [-1,1]$ ma przedłużenie na X (tzn. istnieje $g : X \to [-1,1]$ takie, że $g|_A = f$).*

10 Analiza funkcjonalna

10.1 Przestrzeń unormowana

Definicja 10.1.1 (Przestrzeń unormowana). *X jest przestrzenią unormowaną, jeżeli*

i) jest liniowa nad $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$,

ii) Dla każdego $x \in X$ *określona jest norma* $\|x\| \in \mathbb{R}$ *taka, że dla każdych* $x, y \in X$ *oraz* $\alpha \in \mathbb{K}$

a) $\|x\| \geqslant 0$ *i* $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$,

b) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,

c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Twierdzenie 10.1.2 (Metryka w przestrzeni unormowanej). *W przestrzeni unormowanej możemy wprowadzić metrykę*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Wtedy (X, ρ) *jest przestrzenią metryczną.*

Definicja 10.1.3 (Zbieżność w przestrzeni unormowanej).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Twierdzenie 10.1.4 (Własności normy). *Zachodzą następujące własności normy:*

1) $\|x_1 + \ldots + x_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$,

2) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$,

3) Norma jest funkcjonałem ciągłym,

4) Działania algebraiczne (dodawanie i mnożenie przez skalar) są ciągłe,

5) Kule $K(a, r) = \{x : \|x - a\| < r\}$ *i* $\overline{K}(a, r) = \{x : \|x - a\| \leqslant r\}$ *są zbiorami wypukłymi w* X *(Zbiór* A *jest wypukły w* X *jeżeli dla dowolnych* $x_1, x_2 \in A \subset X$ *zachodzi*

$$\forall t \in [0, 1] : \; tx_1 + (1 - t)x_2 \in A),$$

5) Każdy zbiór wypukły w przestrzeni unormowanej jest spójny (łukowo),

Definicja 10.1.5 (Produkt kartezjański). *Niech* $(X_i, \| \cdot \|_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *będą przestrzeniami unormowanymi. Wtedy*

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n$$

z normą

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i^2}$$

jest przestrzenią unormowaną. Określamy metrykę

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(x_i, y_i)}.$$

Przykład 10.1.6 (Przykłady przestrzeni unormowanych). *Następujące przestrzenie są przestrzeniami unormowanymi:*

1) $E_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}\}$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

2) $m = \{(\xi_k) : \ \sup_k |\xi_k| < \infty\}$ *- zbiór ciągów nieskończonych, ograniczonych*

$$\|(\xi_k)\| = \sup_k |\xi_k|,$$

3) $l = \{(\xi_k) : \ \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty\}$

$$\|(\xi_k)\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|,$$

4) $l_n^p = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}\}, \ p > 1$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

5) $l^p = \{(\xi_k) : \ \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}, \ p > 1$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

6) $S \subset \mathbb{R}^n$, $C(S) = \{f : \ f : S \to \mathbb{R}, \ f$ *- ciągła*$\}$

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|,$$

$$f_n \to f \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in S : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

Zbieżność w $C(S)$ jest jednostajna. (Dzięki zwartości f oraz $|f|$ przyjmują swoje kresy na zbiorze S),

7) X *- przestrzeń metryczna zwarta,* Y *- przestrzeń unormowana* $C(X,Y) = \{f : \ f : X \to Y, \ f$ *- ciągła*$\}$

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y,$$

8) $\Omega \subset E_m$, $|\Omega| > 0$, $L(\Omega) = \left\{f : \ f : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), \ \int_\Omega |f(x)| dx < \infty\right\}$

$$\|f\| = \int_\Omega |f(x)| dx,$$

$$f_n \to f \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

Ze zbieżności w $L(\Omega)$ nie wynika zbieżność punktowa. Granica w $L(\Omega)$ jest wyznaczona jednoznacznie,

9) $L^p(\Omega)$, $p > 1$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

Nierówność Minkowskiego

$$\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

10.2 Przestrzeń Banacha

Definicja 10.2.1 (Przestrzeń Banacha). *Przestrzeń X unormowaną i zupełną nazywamy przestrzenią Banacha.*

Przykład 10.2.2 (Przykłady przestrzeni Banacha). E_n, m, l, $\mathbb{R}^n$ *z normą* $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, l^p, $C(S)$, $C(X,Y)$, $L^p(\Omega)$

10.3 Przestrzeń $L^\infty(\Omega)$

Definicja 10.3.1 (Przestrzeń $L^\infty(\Omega)$).

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ f:\ f:\Omega \to \mathbb{R},\ \|f\|_\infty = \inf_M \{|f(x)| \leqslant M \textit{prawie wszędzie}\} < \infty \Big\}$$

Twierdzenie 10.3.2. *Zachodzą następujące własności:*

1) $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ *prawie wszędzie,*

2) *W* $L^\infty(\Omega)$ *utożsamiamy funkcje równe prawie wszędzie,*

3) $L^\infty(\Omega)$ *jest przestrzenią unormowaną,*

4) $L^\infty(\Omega)$ *jest przestrzenią Banacha,*

5) *Jeżeli* $1 \leqslant p < r < \infty$, $|\Omega| < \infty$, *to*

$$L^\infty(\Omega) \subset L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

   Jeżeli $|\Omega| = \infty$, *to teza tego twierdzenia nie jest prawdziwa, np.* $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\Omega = [0, \infty)$,

6) *Jeżeli* $f \in L^\infty(\Omega)$, $|\Omega| < \infty$ *to*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

10.4 Przestrzeń ośrodkowa

Definicja 10.4.1 (Przestrzeń ośrodkowa). *Przestrzeń metryczna X jest ośrodkowa, jeżeli istnieje podzbiór Z gęsty w X ($\overline{Z} = X$) i co najwyżej przeliczalny.*

Przykład 10.4.2. *1) E_n - ośrodkowa*

$$Z = \{x : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}\},$$

2) m - nie jest ośrodkowa,

3) l - ośrodkowa

$$Z = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) : \ x_i \in \mathbb{Q}\},$$

4) l^p - ośrodkowa,

5) $C(\Omega)$, $L(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ - ośrodkowe

Z - zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych,

6) $L^\infty(\Omega)$ - nie jest ośrodkowa.

10.5 Twierdzenie Banacha

Definicja 10.5.1 (Odwzorowanie zwężające). *$F : X \to X$ nazywamy odwzorowaniem zwężającym, jeżeli*

$$\exists \alpha \in [0,1] \forall x, y \in X : \ \rho(F(x), F(y)) \leqslant \alpha \cdot \rho(x, y).$$

Twierdzenie 10.5.2 (Banacha). *Jeżeli X jest przestrzenią metryczną zupełną, $F : X \to X$ jest odwzorowaniem zwężającym, to w przestrzeni X istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x^* równania $F(x) = x$. Ponadto x^* jest granicą tzw. ciągu kolejnych przybliżeń, określonego następująco:*

$$x_0 \in X, \quad x_n = F(x_{n-1}).$$

Ponadto

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, x_1).$$

10.6 Przestrzenie unormowane skończenie wymiarowe

Lemat 10.6.1. *W przestrzeni skończenie wymiarowej każde dwie normy są równoważne (dają to samo pojęcie zbieżności).*

Lemat 10.6.2. *Każda przestrzeń unormowana skończenie wymiarowa jest przestrzenią Banacha.*

Lemat 10.6.3. *Każda podprzestrzeń skończenie wymiarowa przestrzeni unormowanej X jest domknięta.*

Twierdzenie 10.6.4. *Zbiór $Z \subset X$, (X - skończenie wymiarowa) jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

Twierdzenie 10.6.5. *W każdej przestrzeni nieskończenie wymiarowej istnieją zbiory ograniczone, które nie są zwarte. Przykładem takiego zbioru jest dowolna kula.*

10.7 Zbiory zwarte w $C(S)$, $S \subset \mathbb{R}^n$

Definicja 10.7.1. *Funkcje z rodziny $Z \subset C(S)$ są wspólnie ograniczone, jeżeli*

$$\exists M \forall x \in S \forall f \in Z: \ |f(x)| \leqslant M.$$

Definicja 10.7.2. *Funkcje z rodziny $Z \subset C(S)$ są jednakowo ciągłe, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$*

$$\exists \delta \forall f \in Z \forall x, y \in S: \ \|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(δ jest wspólna dla całej rodziny.)

Twierdzenie 10.7.3 (Asscoli). *Rodzina $Z \subset C(S)$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest wspólnie ograniczona i jednakowo ciągła.*

10.8 Przestrzeń Hilberta

Definicja 10.8.1 (Iloczyn skalarny). *Niech X przestrzeń liniowa. Wówczas $(x, y) \in \mathbb{R}((C)$ nazywamy iloczynem skalarnym, jeżeli dla każdych $x, y, z \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$*

a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

b) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,

d) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.

Twierdzenie 10.8.2 (Nierówność Schwarza).

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x) \cdot (y, y)$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są liniowo zależne.

Lemat 10.8.3. *Wzór $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ określa normę w przestrzeni X.*

Definicja 10.8.4 (Przestrzeń unitarna). *Przestrzeń liniową X nazywamy przestrzenią unitarną, jeżeli jest w niej określony iloczyn skalarny oraz norma $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.*

Definicja 10.8.5 (Przestrzeń Hilberta). *Przestrzeń unitarną zupełną nazywamy przestrzenią Hilberta.*

Przykład 10.8.6 (Przykłady przestrzeni Hilberta). *1)* $X = E_n$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

2) $X = l^2$

$$(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k},$$

3) $X = L^2(\Omega)$

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

10.9 Ortogonalność

Definicja 10.9.1. *Niech X będzie przestrzenią unitarną. Elementy $x, y \in X$ są ortogonalne, jeżeli $(x, y) = 0$.*

Definicja 10.9.2. *Niech X_1, X_2 będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni X. $X_1 \perp X_2$ jeżeli dla dowolnych $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ zachodzi $(x_1, x_2) = 0$.*

Twierdzenie 10.9.3 (Rzut ortogonalny). *Niech X będzie przestrzenią Hilberta, a X_0 jest jej domkniętą podprzestrzenią. Wówczas każdy element $x \in X$ można przedstawić w postaci*

$$x = x_0 + z,$$

gdzie $x_0 \in X_0$, $z \perp X_0$. Rozkład ten jest jednoznaczny. Ponadto dla każdego $y \in X_0$

$$\|x - x_0\| \leqslant \|x - y\|.$$

Twierdzenie 10.9.4. *Podprzestrzeń domknięta $X_0 \subset X$ przestrzeni Hilberta jest gęsta wtedy i tylko wtedy, gdy jedynym elementem ortogonalnym do X_0 jest $x = 0$.*

Definicja 10.9.5. *Zbiór $\{a_1, a_2, \ldots\}$ generuje przestrzeń X, jeżeli zbiór kombinacji liniowych elementów $\{a_1, a_2, \ldots\}$ jest gęsty w X.*

Lemat 10.9.6. *Zbiór $\{a_1, a_2, \ldots\}$ generuje przestrzeń X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n*

$$(x, a_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Definicja 10.9.7 (Układ ortogonalny). *Układ $\{a_1, a_2, \ldots\}$ nazywamy ortogonalnym, jeżeli dla każdych $n \neq k$*

$$(a_k, a_n) = 0.$$

Definicja 10.9.8 (Układ ortonormalny). *Układ ortogonalny $\{a_1, a_2, \ldots\}$ nazywamy ortonormalnym, jeżeli dla każdego k*

$$(a_k, a_k) = 1.$$

Przykład 10.9.9 (Przykłady układów ortonormalnych). *1) $X = l^2$*

$$e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

2) $X = L^2([0, 2\pi])$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin kx, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Twierdzenie 10.9.10. *Dla dowolnego układu liniowo niezależnego istnieje układ ortonormalny rozpinający tę samą przestrzeń.*

Dowód.

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|},$$

$$x_2 = a_2 - (a_2, e_1)e_1, \ e_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|},$$

$$x_3 = a_3 - (a_3, e_1)e_1 - (a_3, e_2)e_2, \ e_3 = \frac{x_3}{\|x_3\|},$$

□

Twierdzenie 10.9.11 (Szereg Fouriera). *Niech $\{e_1, e_2, \ldots\}$ będzie układem ortonormalnym w X. Jeżeli $(\alpha_k) \in l^2$, to szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

jest zbieżny i zachodzi

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

Jeżeli $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, to $\alpha_k = (x, e_k)$. Szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$ nazywamy szeregiem Fouriera elementu x względem $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Ponadto szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ jest zbieżny dla każdego $x \in X$ oraz zachodzi nierówność Bessela

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Twierdzenie 10.9.12. *Niech $\{e_1, e_2, \ldots\}$ będzie układem ortonormalnym w X. Wtedy dla każdego $x \in X$ oraz dla dowolnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$*

$$\|x - \sum_{k=1}^{m}(x, e_k)e_k\| \leqslant |x - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k|.$$

(Jeżeli rzutuję x na podprzestrzeń rozpiętą przez pierwsze m wektorów, to najlepsze przybliżenie dają współczynniki Fouriera.

Definicja 10.9.13 (Układ zupełny). *Układ ortonormalny $\{e_1, e_2, \ldots\}$ nazywamy zupełnym, jeżeli dla każdego k*

$$(x, e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Twierdzenie 10.9.14. *Niech $\{e_1, e_2, \ldots\}$ będzie układem ortonormalnym w X. Następujące warunki są równoważne:*

1) *Układ $\{e_1, e_2, \ldots\}$ jest zupełny,*
2) *Ciąg $\{e_1, e_2, \ldots\}$ generuje przestrzeń X,*
3) *Każdy element $x \in X$ jest sumą swojego szeregu Fouriera.*

Lemat 10.9.15. *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Wówczas istnieje przeliczalny układ $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ortonormalny w X. (X może być skończenie lub nieskończenie wymiarowa. W przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowej poddaję ortonormalizacji układ $a_1, a_{n_1} \notin Lin(a_1), a_{n_2} \notin Lin(a_1, a_{n_1}, \ldots)$, gdzie $Z = \{a_1, a_2, \ldots\}$ gęsty i przeliczalny w X.)*

Twierdzenie 10.9.16 (Zbiory zwarte w przestrzeni Hilberta). *Niech X będzie przestrzenią Hilberta oraz układ $\{e_1, e_2, \ldots\}$ będzie układem ortonormalnym zupełnym w X. Wtedy zbiór $Z \subset X$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony oraz szereg Fouriera $\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$ jest zbieżny jednostajnie do elementu x na zbiorze Z, tzn.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in Z : \ \|\sum_{k=n+1}^{\infty}(x, e_k)e_k\| < \varepsilon.$$

10.10 Operatory liniowe

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi.

Definicja 10.10.1 (Operator liniowy). *Operator $A : X \to Y$ nazywamy liniowym, jeżeli dla każdych $x, y \in D(X)$ oraz $\alpha \in \mathbb{K}$*

$$A(x + y) = Ax + Ay, \quad A(\alpha x) = \alpha Ax.$$

Przykład 10.10.2. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $[a_{ik}]_{n\times n}$,

$$Ax = y, \quad y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k.$$

Definicja 10.10.3 (Operator ograniczony). *Operator liniowy A jest ograniczony, jeżeli istnieje stała μ taka, że dla każdego $x \in D(A)$*

$$\|Ax\|_Y \leqslant \mu\|x\|_X.$$

Twierdzenie 10.10.4. *Operator liniowy A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły.*

Twierdzenie 10.10.5. *Operator liniowy A jest ciągły w x wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły w 0.*

Definicja 10.10.6 (Norma operatora). *Niech A będzie operatorem liniowym i ograniczonym. Normą operatora A nazywamy kres dolny zbioru liczb μ takich, że $\|Ax\| \leqslant \mu\|x\|$.*

Twierdzenie 10.10.7.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$$

Definicja 10.10.8 (Operator całkowy). *Niech $\Omega \in \mathbb{R}^n$ oraz X, Y będą przestrzeniami funkcji określonych na Ω. Niech ponadto $\mathcal{A}(x, y)$ będzie funkcją określoną na $\Omega \times \Omega$. Operator $A : X \to Y$ dany wzorem*

$$(Au)(x) = v(x) = \int_\Omega \mathcal{A}(x, y)u(y)dy$$

nazywamy operatorem całkowym; $\mathcal{A}$ - jądro operatora. (Operator całkowy jest operatorem liniowym.)

Przykład 10.10.9. $X = Y = C(\Omega)$, $\mathcal{A} \in C(\Omega \times \Omega)$, $A : C(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$(Au)(x) = \int_\Omega \mathcal{A}(x, y)u(y)dy$$

(Jądra słabo osobliwe, Jądra iterowane)

10.11 Przestrzeń $B(X,Y)$ operatorów liniowych i ograniczonych

Lemat 10.11.1. *$B(X,Y)$ jest przestrzenią liniową, unormowaną.*

Definicja 10.11.2 (Przestrzeń sprzężona).

$$X^* = B(X,\mathbb{R})$$

nazywamy przestrzenią sprzężoną z X.

Twierdzenie 10.11.3. *Jeżeli $A_n \in B(X,Y)$, $A \in B(X,Y)$, $A_n \to A$, to dla każdego $x \in A$*

$$A_n x \to Ax.$$

Twierdzenie 10.11.4. *Jeżeli Y jest przestrzenią Banacha, to $B(X,Y)$ jest przestrzenią Banacha. W szczególności X^* jest przestrzenią Banacha.*

10.12 Ciągi operatorów liniowych i ograniczonych

Twierdzenie 10.12.1 (Banacha-Steinhausa). *Niech X - przestrzeń Banacha, Y - przestrzeń unormowana, $A_n : X \to Y$. Jeżeli dla każdego $x \in X$ ciąg $(A_n(x))$ jest ograniczony w Y, to ciąg norm $(\|A_n\|)$ jest ograniczony.*

Twierdzenie 10.12.2. *Niech X - przestrzeń Banacha, Y - przestrzeń unormowana, $A_n : X \to Y$ - liniowy, ograniczony. Jeżeli dla każdego $x \in X$ ciąg $(A_n(x))$ jest zbieżny, to operator A taki, że $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ jest operatorem liniowym i ograniczonym.*

Twierdzenie 10.12.3. *Niech X, Y - przestrzeń Banacha, $A_n : X \to Y$ - liniowy, ograniczony, istnieje M, że dla każdego n $\|A_n\| \leqslant M$, $Z \subset X$ - gęsty. Jeżeli dla każdego $z \in Z$ ciąg $(A_n(z))$ jest zbieżny, to dla każdego $x \in X$ ciąg $(A_n(x))$ jest zbieżny.*

10.13 Operatory odwrotne

Twierdzenie 10.13.1 (Banacha). *Jeżeli $A : X \to Y$ - liniowy, ograniczony i wzajemnie jednoznaczny, X, Y - przestrzenie Banacha, to $A^{-1} : Y \to X$ jest ograniczony.*

Przykład 10.13.2. *$X = Y = C[0, 1]$, $(Au)(x) = \int_0^x u(t)dt$ - ograniczony, $(A^{-1}v)(x) = \frac{dv}{dx}$ - nie jest ograniczony.*

Twierdzenie 10.13.3. *Jeżeli $A : X \to Y$ (X, Y - przestrzenie Banacha), A - odwracalny, to następujące warunki są równoważne:*

1) operator A^{-1} jest ograniczony,

2) $\exists \gamma > 0 \forall x : \ \|Ax\| \geqslant \gamma \|x\|$,

3) $A(X)$ jest domknięty w Y.

10.14 Rozszerzanie operatorów liniowych

Twierdzenie 10.14.1. *Niech X - przestrzeń unormowana, Y - przestrzeń Banacha, $A_0 : D(A_0) \subset X \to Y$. Jeżeli $\overline{D(A_0)} = X$, to istnieje $A : X \to Y$ liniowy i ograniczony taki, że*

$$Ax = Ax_0, \ x \in D(A_0); \quad \|A\| = \|A_0\|.$$

Twierdzenie 10.14.2 (Hahna-Banacha). *Niech X - przestrzeń unormowana. Dla każdego funkcjonału $f_0 : D(f_0) \subset X \to \mathbb{R}$ istnieje funkcjonał liniowy i ograniczony $f : X \to \mathbb{R}$ taki, że*

$$f(x) = f(x_0), \ x \in D(f_0); \quad \|f\| = \|f_0\|.$$

10.15 Przestrzeń sprzężona do przestrzeni Hilberta

Twierdzenie 10.15.1 (Riesza). *Jeżeli f jest funkcjonałem liniowym i ograniczonym na przestrzeni Hilberta X, to istnieje dokładnie jeden element $a \in X$ taki, że dla każdego $x \in X$*

$$f(x) = (x, a), \quad \|a\| = \|f\|.$$

Przykład 10.15.2. *1) $X = l^2$, $x = (\xi_k)$, $f \in (l^2)^*$. Wtedy*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k,$$

gdzie $(\alpha_k) \in l^2$, $\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2}$,

2) $X = L^2(\Omega)$, $f \in (L^2(\Omega))^*$. Wtedy

$$f(u) = \int_\Omega a(x)u(x)dx,$$

gdzie $a \in L^2(\Omega)$, $\|f\| = \sqrt{\int_\Omega |a(x)|^2 dx}$,

3)

$$(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p \geqslant 1.$$

Definicja 10.15.3 (Operator sprzężony). *A^* - operator sprzężony do A, jeżeli dla każdych $x, y \in X$*

$$(Ax, y) = (x, A^* y).$$

Twierdzenie 10.15.4 (Własności operatora sprzężonego). *1) Jeżeli A jest liniowy i ograniczony, to A^* również oraz $\|A^*\| = \|A\|$,*

2) $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$,

3) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}(A^*)$,

4) $(A_1 \circ A_2)^* = A_2^* \circ A_1^*$.

Definicja 10.15.5 (Operator samosprzężony). *Operator $A : X \to X$ jest samosprzężony, jeżeli $A^* = A$.*

Lemat 10.15.6. *Jeżeli A jest samosprzężony, to dla każdego $x \in X$*

$$(Ax, x) \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 10.15.7. *Jeżeli A jest samosprzężony, to*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Przykład 10.15.8. *1) $X = \mathbb{R}^m$, $A(x) = [a_{ik}] \cdot x$, A - samosprzężony, gdy macierz $[a_{ik}]$ jest symetryczna,*

2) $X = L^2(\Omega)$, $(Au)(x) = \int_\Omega \mathcal{A}(x, y)u(y)dy$, A - samosprzężony, gdy $\mathcal{A}(x, y) = \overline{\mathcal{A}(y, x)}$.

Definicja 10.15.9 (Operator pełnociągły). *Niech X, Y - unormowane, $A : X \to Y$ - liniowy. A jest pełnociągły, jeżeli dla każdego ograniczonego zbioru $Z \subset X$, zbiór $A(Z)$ jest zwarty w Y.*

Lemat 10.15.10. *1) Każdy operator pełnociągły jest ograniczony,* *2) Każdy operator skończenie wymiarowy w dowolnej przestrzeni X jest pełnociągły,*

3) Jeżeli A_1 i A_2 są pełnociągłe, $\alpha \in \mathbb{R}$, to $A_1 + A_2$ i αA_1 są pełnociągłe,

4) Operatory pełnociągłe tworzą podprzestrzeń liniową w $B(X, Y)$,

5) Jeżeli $A_n, A \in B(X, Y)$, Y - Banacha, A_n - pełnociągłe, $\|A_n - A\| \to 0$, to A jest pełnociągły,

6) Granica ciągu operatorów skończenie wymiarowych jest operatorem pełnociągłym,

7) Jeżeli X - unormowana, Y - ośrodkowa, Hilberta, to każdy operator pełnociągły jest granicą ciągu operatorów skończenie wymiarowych,

8) Jeżeli $A : X \to X$, X - Hilberta, jest pełnociągły, to $A^* : X \to X$ również.

Przykład 10.15.11 (Przykłady operatorów pełnociągłych). *Operatory całkowe $\mathcal{A}$ - ciągłe na $\Omega \times \Omega$, $\mathcal{A} \in L^2(\Omega \times \Omega)$.*

10.16 Widmo operatora

Definicja 10.16.1 (Wartość własna). *Liczbę λ nazywamy wartością własną operatora A, jeżeli istnieje niezerowy element x taki, że $Ax - \lambda x = 0$.*

Definicja 10.16.2 (Wartość regularna). *Liczbę λ nazywamy wartością regularną operatora A, jeżeli równanie $Ax - \lambda x = y$ ma dla dowolnego $y \in X$ dokładnie jedno rozwiązanie.*

Definicja 10.16.3 (Widmo). *Zbiór wszystkich wartości λ, które nie są wartościami regularnymi, nazywamy spektrum operatora A.*

Lemat 10.16.4. *Podprzestrzeń $X_\lambda(A) = \{x : \ Ax - \lambda x = 0\}$ jest liniowa i domknięta w X.*

Twierdzenie 10.16.5. *Każda wartość własna operatora A należy do jego widma.*

Twierdzenie 10.16.6. *Jeżeli X jest przestrzenią Banacha i $\lambda \in K$ oraz $|\lambda| > \|A\|$, gdzie $A : X \to X$ jest operatorem liniowym i ciągłym, to λ jest wartością regularną operatora A.*

Twierdzenie 10.16.7. *Jeżeli λ jest wartością regularną oraz*

$$\lambda^0 \in \mathbb{R} \ i \ |\lambda^0| < \frac{1}{\|(A - \lambda I)^{-1}\|}$$

to $\lambda^0 + \lambda$ jest wartością regularną operatora A.

Wniosek 10.16.8. *Widmo - jako dopełnienie zbioru wartości regularnych jest zbiorem domkniętym.*

11 Procesy stochastyczne

11.1 Pochodna i całka śr.kw. procesu stochastycznego

Definicja 11.1.1 (Granica średniokwadratowa). *Zmienna losowa X_0 jest granicą średniokwadratową procesu stochastycznego X, gdy $t \to t_0$, jeśli*

$$\lim_{t \to t_0} E(|X_t - X_0|^2) = 0.$$

Oznaczenie: $l.i.m_{t \to t_0} X_t = X_0$.

Definicja 11.1.2 (Średniokwadratowa ciągłość). *Proces stochastyczny X jest ciągły średniokwadratowo w punkcie $t = t_0$, jeśli*

$$l.i.m_{t \to t_0} X_t = X_{t_0}.$$

Definicja 11.1.3 (Pochodna średniokwadratowa). *Niech proces X będzie ciągły śr.kw. w punkcie $t = t_0$. Jeśli istnieje funkcja $\dot{X}_{t_0}$, taka że*

$$\lim_{\triangle t \to 0} E\left(\left|\frac{X_{t_0+\triangle t} - X_{t_0}}{\triangle t} - \dot{X}_{t_0}\right|^2\right) = 0,$$

to $\dot{X}_{t_0}$ nazywamy pochodną średniokwadratową procesu X w punkcie t_0.

Definicja 11.1.4 (Całka średniokwadratowa). *Funkcję $Y : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy całką średniokwadratową procesu stochastycznego X, jeśli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\{t_n\}$ przedziału (t_0, t) i dowolnych punktów θ_k takich, że $t_{k-1} \leqslant \theta_k \leqslant t_k$, jest*

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_{\theta_k}(t_k - t_{k-1}) - Y_t\right|^2\right) = 0.$$

Piszemy wówczas $Y_t = \int_{t_0}^{t} X_s ds$.

Twierdzenie 11.1.5. *Jeśli proces stochastczny X jest ciągły śr.w. w punkcie t_0, to wartość przeciętna tego procesu jest funkcją ciągłą w punkcie t_0 oraz*

$$\lim_{t \to t_0} E(X_t) = E(X_{t_0}) = E(l.i.m_{t \to t_0} X_t).$$

Jeśli prosec stochastyczny X jest różniczkowalny śr.kw. w punkcie t, to wartość przeciętna tego procesu jest funkcją różniczkowalną w punkcie t oraz

$$E(\dot{X}_t) = \frac{d}{dt} E(X_t).$$

Twierdzenie 11.1.6. *Prosec stochastyczny X ma granicę śr.kw. dla $t \to t_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{t_1 \to t_0, t_2 \to t_0} E(|X_{t_2} - X_{t_1}|^2) = 0.$$

Definicja 11.1.7.

$$R(t_1, t_2) = E(X_{t_1}, \overline{X}_{t_2})$$

Definicja 11.1.8 (Uogólniona pochodna mieszana funkcji R).

$$\frac{\partial^2 R(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}|_{t_1=t, t_2=t} = \lim_{h \to 0, k \to 0} \frac{1}{hk}(R(t+h, t+k) - R(t+h, t) - R(t, t+k) + R(t, t)).$$

Twierdzenie 11.1.9. *Proces stochastyczny X jest różniczkowalny śr.kw. w punkcie t wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w punkcie t uogólniona pochodna mieszana funkcji R tego procesu.*