カルマンフィルタの基礎

京都大学 防災研究所
榎本 剛
eno@dpac.dpri.kyoto-u.ac.jp

2013年8月21日

講義内容

本講義では，簡単な例を用いてカルマンフィルタの基礎について学ぶ。

- 線型フィルタ
- カルマンスムーザ
- 拡張カルマンフィルタ
- アンサンブル・カルマンフィルタ

副読本

- Rodgers, Clive, D, 2000: Inverse methods for atmospheric sounding: theory and practice. World Scientific, Singapore, 240pp.
- Kalnay, Eugenia, 2003: Atmospheric modeling, data assimilation and predictability. Cambridge, UK, 341pp.
- 露木義・川畑拓矢（編）, 2008: 気象学におけるデータ同化. 気象研究ノート217, 日本気象学会, 東京, 277.

データ同化の原理

- 精度の良いデータに重く，悪いデータに軽く重みをつけて平均する。

$$x^{\mathrm{a}} = \frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} x_1 + \frac{1/\sigma_2^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} x_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sigma^{\mathrm{a}2}} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \tag{2}$$

- 予報を観測で修正する。（1: 予測 x^{f}, 誤差 η，2: 観測 y, 誤差 ε）

$$x^{\mathrm{a}} = x^{\mathrm{f}} + \frac{1/\sigma_\varepsilon^2}{1/\sigma_\eta^2 + 1/\sigma_\varepsilon^2}(y - x^{\mathrm{f}}) \tag{3}$$

カルマンフィルタ適用の前提

カルマンフィルタは，以下のような条件の下で有効である。

- 場の時間発展を記述するモデルがある。

$$\boldsymbol{x}_t = M_t(\boldsymbol{x}_{t-1}) + \boldsymbol{\eta}_t \tag{4}$$

- 連続的に観測データが得られている。

$$\boldsymbol{y}_t = H_t(\boldsymbol{x}_t) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{5}$$

線型フィルタ

基本的なカルマンフィルタは，線型問題に適用される。

$$\boldsymbol{x}_t = \mathbf{M}_t \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t \tag{6}$$

$$\boldsymbol{y}_t = \mathbf{H}_t \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{7}$$

予報

$$\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}} = \mathbf{M}_t \boldsymbol{x}_{t-1}^{\mathrm{a}} \tag{8}$$

$$\mathbf{P}_t^{\mathrm{f}} = \mathbf{M}_t \mathbf{P}_{t-1}^{\mathrm{a}} \mathbf{M}_t^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_t \tag{9}$$

解析

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^{\mathrm{f}}\mathbf{H}_t^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^{\mathrm{f}}\mathbf{H}_t^{\mathrm{T}} + \mathbf{R})^{-1} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}} + \mathbf{K}_t(\boldsymbol{y}_t - \mathbf{H}_t\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}}) \tag{11}$$

$$\mathbf{P}_t^{\mathrm{a}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)\mathbf{P}_t^{\mathrm{f}} \tag{12}$$

$\mathbf{K}_t$ は時刻 t におけるカルマンゲインである。

この定式化では，時刻 t までの観測を連続的に同化し，時刻 t における最適な推定値を与える。

カルマンゲインは最適内挿法の重みと同形であるが，予報誤差共分散が時間発展するとともに変化していく。

例: 酔歩

時間発展は次の式で与えられる。

$$x_t = x_{t-1} + \eta_t \tag{13}$$

η_tの分散は，σ_η^2で与えられる。位置は，時刻$t = 0, 1, ...$において直接観測され，欠測や不良データはないとする。

$$y_t = x_t + \varepsilon_t \tag{14}$$

ε_tの分散は，σ_ε^2とする。

予報

$$x_t^{\mathrm{f}} = x_{t-1}^{\mathrm{a}} \tag{15}$$

$${\sigma_t^{\mathrm{f}}}^2 = {\sigma_{t-1}^{\mathrm{a}}}^2 + \sigma_\eta^2 \tag{16}$$

カルマンゲイン

$$K_t = \frac{{\sigma_{t-1}^{\mathrm{a}}}^2 + \sigma_\eta^2}{{\sigma_{t-1}^{\mathrm{a}}}^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2} \tag{17}$$

解析

$$x_t^{\mathrm{a}} = x_{t-1}^{\mathrm{f}} + K_t(y_t - x_t^{\mathrm{f}}) \tag{18}$$

$$\sigma_t^{\mathrm{a}2} = (1 - K_t){\sigma_t^{\mathrm{f}}}^2 \tag{19}$$

Octave

- MATLAB® ほぼ互換。
- 配列の添字は Fortran と同じ 1 から。でも C と同じ column major。
- start:interval:stop で start から stop まで刻み幅 interval のベクトルを生成。for ループにも用いる。
- .* は要素毎の積，* は行列やベクトルの積。累乗や商も同様。
- 行末の; は出力抑制。

酔歩: 数値実験

- ηの確率密度分布は，平均0，分散$\sigma_\eta^2 = 1$の正規分布$N(0,1)$に従う。
- σ_ε^2の振幅は平均0，標準偏差2の正規分布に従い，観測毎に異なる。

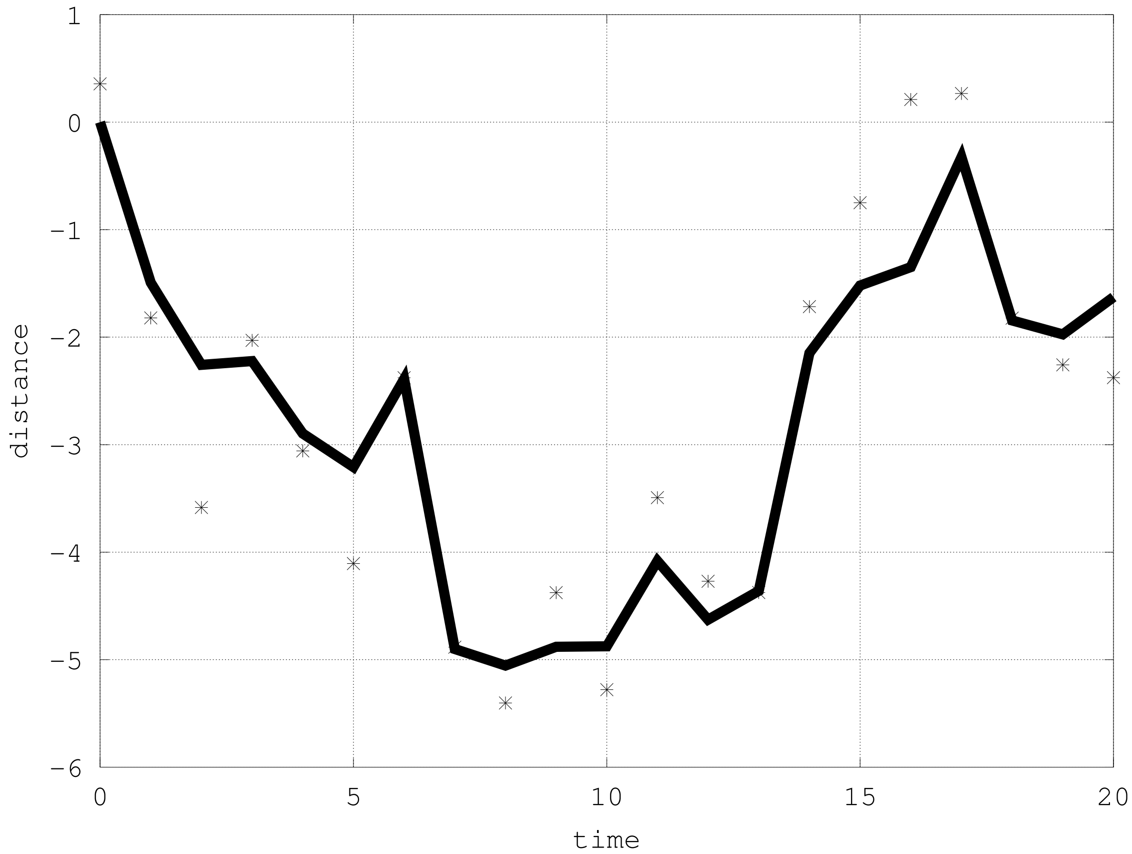
$$N(0,\sigma_\varepsilon^2) = \sigma_\varepsilon N(0,1) = \sqrt{2N(0,1)}N(0,1)$$

酔歩: 真値

```
nstep = 20;
xt = zeros(nstep+1, 1);     % truth
vq = 1;                     % model error variance
q = randn(nstep+1, 1);      % model error
for n=2:nstep+1
  xt(n) = xt(n-1) + q(n);  % truth
endfor
```

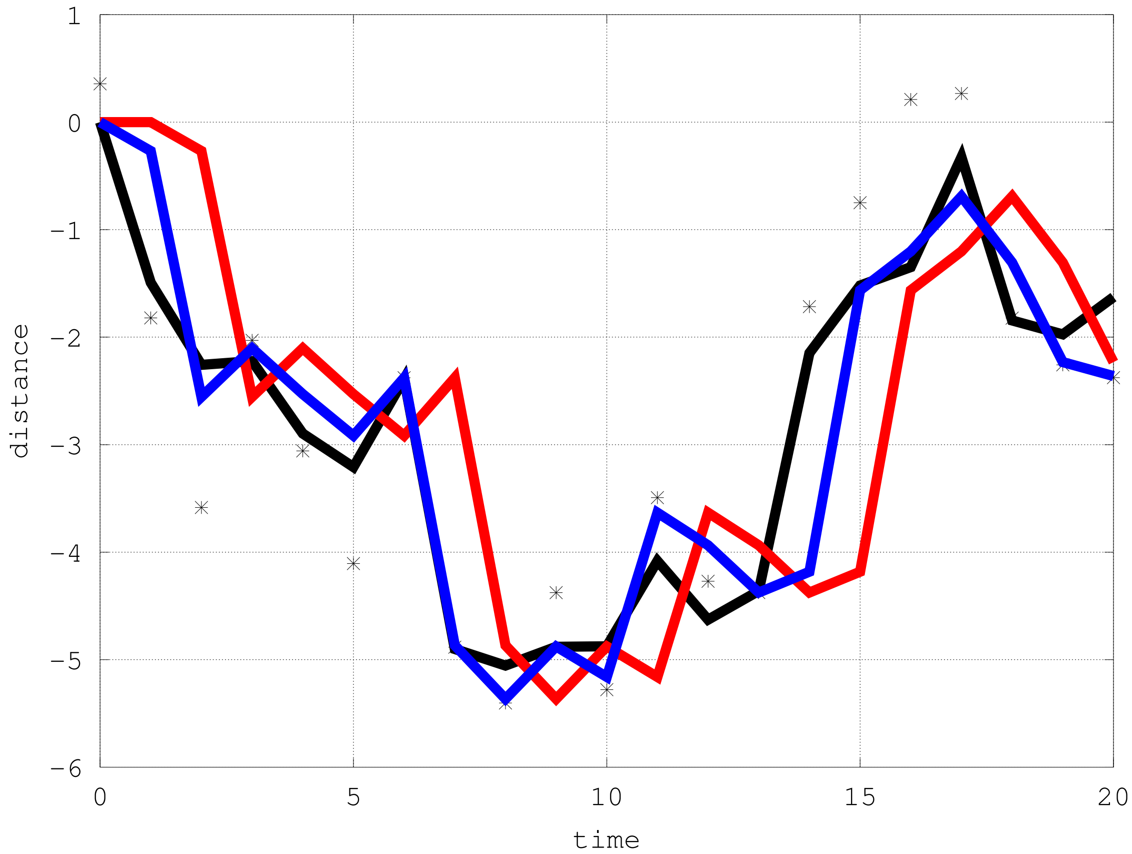
酔歩: 観測

```
vr = 2*randn(nstep+1,1).^2;               % obs error variance
r = sqrt(vr) .* randn(nstep+1, 1);        % obs error
y = xt + r;                               % observation
```


1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
distance
0
5
10
15
20
time

酔歩: カルマンフィルタ

```
xf(1) = xt(1);
vf(1) = vq;
for n=2:nstep+1
  xf(n) = xa(n-1);                          % forecast NB. M=1
  vf(n) = va(n-1) + vq;
  kg(n) = vf(n) / (vf(n) + vr(n));          % Kalman gain
  xa(n) = xf(n) + kg(n)*(y(n) - xf(n));     % analysis
  va(n) = (1 - kg(n)) * vf(n);
endfor
```


distance
time
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
0
5
10
15
20

課題1

モデル誤差分散σ_η^2だけでなく，観測誤差分散σ_ε^2も一定であるとき，解析誤差分散$\sigma_t^{\mathrm{a}2}$は時刻$t \to \infty$でどのようになるか述べよ。また，数値実験でも確認せよ。

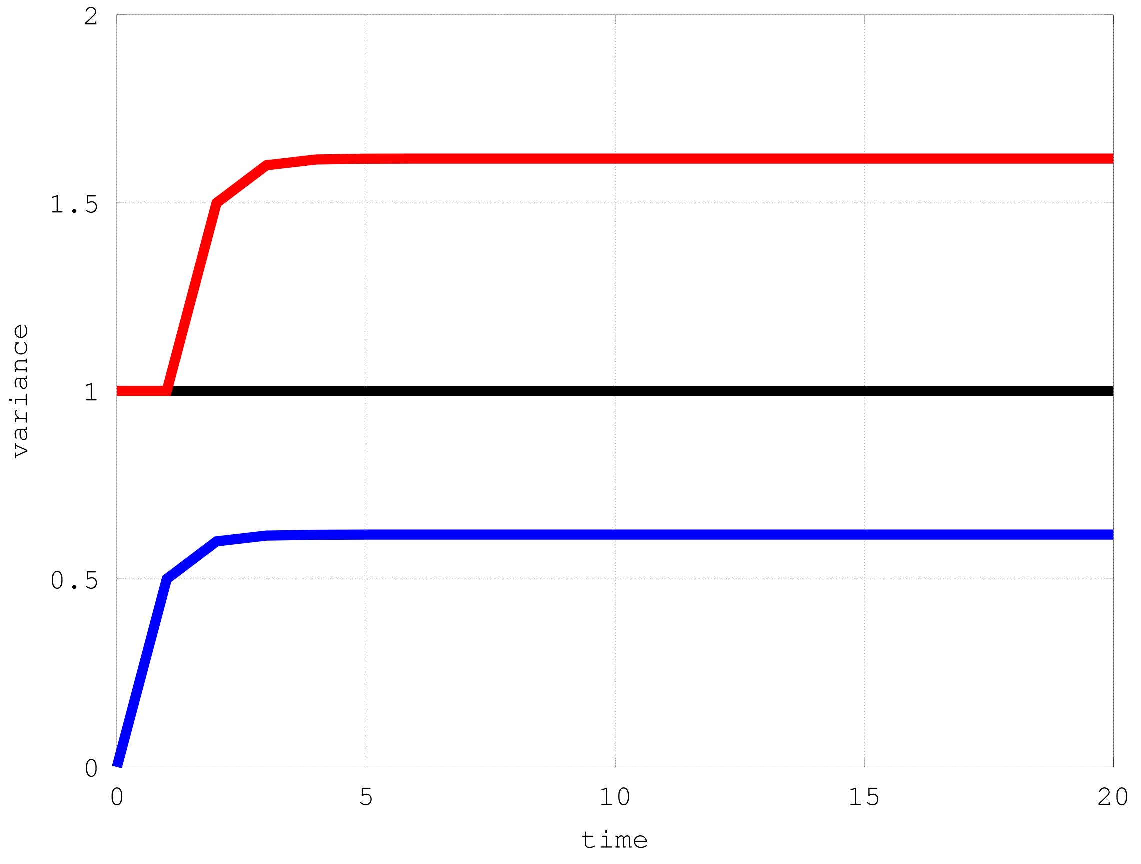
課題1 解答

$\sigma^{\mathrm{a}2}$ は一定になると考えられる。このとき,

$$\sigma^{\mathrm{a}2} = (1 - K_t)\left(\sigma^{\mathrm{a}2} + \sigma_\eta^2\right) = \frac{\sigma_\varepsilon^2\left(\sigma^{\mathrm{a}2} + \sigma_\eta^2\right)}{\sigma^{\mathrm{a}2} + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2} \tag{20}$$

$\sigma^{\mathrm{a}2} > 0$ となる解より次を得る。

$$\sigma^{\mathrm{a}2} = \frac{-\sigma_\eta^2 + \sqrt{\sigma_\eta^4 + 4\sigma_\varepsilon^2\sigma_\eta^2}}{2} \tag{21}$$


2
1.5
1
0.5
0
variance
0
5
10
15
20
time

カルマンスムーザ

既に取得されている観測すべてを使ってデータ同化を行う場合は，解析時刻の前だけでなく後の観測も利用することができる。これをカルマンスムーザという。

- 前方にカルマンフィルタを適用し，予報値（アプリオリ）と解析値（推定値）を得る。
- 後方にカルマンフィルタを適用し，アプリオリと推定値を得る。
- 観測は一度だけ用いるという条件があるので，前方のアプリオリと後方の推定値，または前方の推定値と後方のアプリオリとの重み付き平均をとる。

後方推定を下線で表すと以下のようになる。

$$\underline{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{f}} = \underline{\mathbf{M}}_t \underline{\boldsymbol{x}}_{t+1}^{\mathrm{a}} \tag{22}$$

$$\underline{\mathbf{P}}_t^{\mathrm{f}} = \underline{\mathbf{M}}_t \underline{\mathbf{P}}_{t+1}^{\mathrm{a}} \underline{\mathbf{M}}_t^{\mathrm{T}} + \underline{\mathbf{Q}}_t \tag{23}$$

$$\underline{\mathbf{K}}_t = \underline{\mathbf{P}}_t^{\mathrm{f}} \mathbf{H}_t^{\mathrm{T}} (\mathbf{H}_t \underline{\mathbf{P}}_t^{\mathrm{f}} \mathbf{H}_t^{\mathrm{T}} + \mathbf{R})^{-1} \tag{24}$$

$$\underline{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{a}} = \underline{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{f}} + \underline{\mathbf{K}}_t (\boldsymbol{y}_t - \mathbf{H}_t \underline{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{f}}) \tag{25}$$

$$\underline{\mathbf{P}}_t^{\mathrm{a}} = (\mathbf{I} - \underline{\mathbf{K}}_t \mathbf{H}_t) \underline{\mathbf{P}}_t^{\mathrm{f}} \tag{26}$$

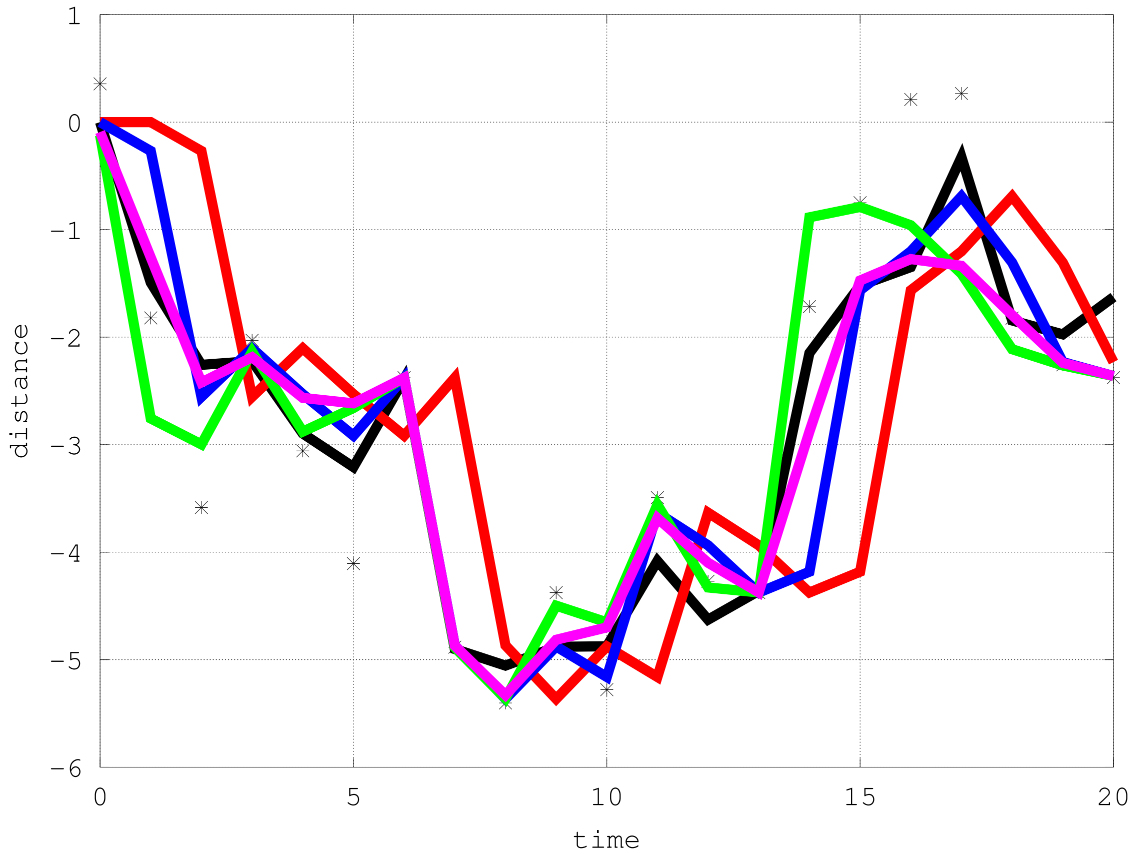
前方のアプリオリ $\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}}$ と後方の推定値 $\underline{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{a}}$ を以下のように組み合せる。

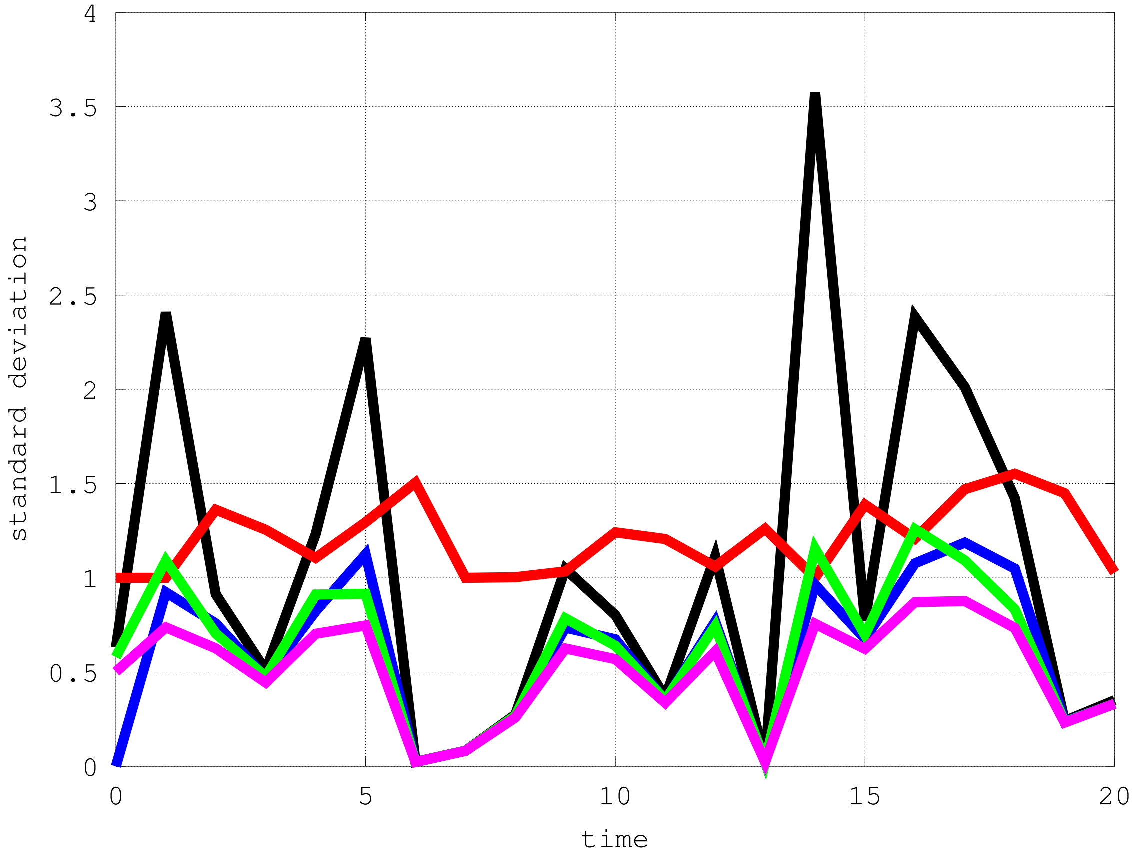
$$\tilde{\mathbf{P}}_t^{-1} = \left(\mathbf{P}_t^{\mathrm{f}\,-1} + \underline{\mathbf{P}}_t^{\mathrm{a}\,-1} \right) \tag{27}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_t = \tilde{\mathbf{P}}_t (\mathbf{P}_t^{\mathrm{f}\,-1} \boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}} + \underline{\mathbf{P}}_t^{\mathrm{a}\,-1} \underline{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{a}}) \tag{28}$$

酔歩: カルマンスムーザ

```
vqb = 1;                             % model error variance
xab(nstep+1) = xa(nstep+1);          % start from forward analysis
vab(nstep+1) = va(nstep+1);
xac(nstep+1) = xa(nstep+1);
vac(nstep+1) = va(nstep+1);
for n=nstep:-1:1
  xfb(n) = xab(n+1);                 % backward forecast NB. M''= 1
  vfb(n) = vab(n+1) + vqb;
  kgb(n) = vfb(n) / (vfb(n) + vr(n));
  xab(n) = xfb(n) + kgb(n) * (y(n) - xfb(n));
  vab(n) = (1 - kgb(n)) * vfb(n);
  vac(n) = vf(n)*vab(n) / (vf(n) + vab(n));
  xac(n) = vac(n)*(xf(n)/vf(n) + xab(n)/vab(n));
endfor
```


distance
time
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
0
5
10
15
20



standard deviation
time
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
5
10
15
20

課題2

モデル$\mathbf{M}$が時刻tに依存しないとき，前方及び後方過程は次のように書ける。

$$\boldsymbol{x}_t = \mathbf{M}\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t \tag{29}$$

$$\boldsymbol{x}_{t-1} = \underline{\mathbf{M}}\boldsymbol{x}_t + \underline{\boldsymbol{\eta}}_{t-1} \tag{30}$$

$\boldsymbol{\eta}_t$と$\boldsymbol{x}_{t-1}$，$\underline{\boldsymbol{\eta}}_{t-1}$と$\boldsymbol{x}_t$はそれぞれ無相関であるとき，$\boldsymbol{x}_t$と$\boldsymbol{x}_{t-1}$とのラグ共分散を二つの方法で表記し，後方モデル$\underline{\mathbf{M}}$を前方モデル$\mathbf{M}$で表せ。

課題2 解答

$$\boldsymbol{L} \equiv E(\boldsymbol{x}_t \boldsymbol{x}_{t-1}^{\mathrm{T}}) = E(\mathbf{M}\boldsymbol{x}_{t-1}\boldsymbol{x}_{t-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{x}_{t-1}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{M}\mathbf{P}^{\mathrm{f}} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \equiv E(\boldsymbol{x}_{t-1} \boldsymbol{x}_{t}^{\mathrm{T}}) = E(\underline{\mathbf{M}}\boldsymbol{x}_{t}\boldsymbol{x}_{t}^{\mathrm{T}} + \underline{\boldsymbol{\eta}}_{t-1} \boldsymbol{x}_{t}^{\mathrm{T}}) = \underline{\mathbf{M}}\mathbf{P}^{\mathrm{f}} \tag{32}$$

従って

$$\underline{\mathbf{M}} = \mathbf{P}^{\mathrm{f}}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}{\mathbf{P}^{\mathrm{f}}}^{-1} \tag{33}$$

接線型モデル

基本解$\boldsymbol{x}$に対する擾乱$\delta\boldsymbol{x}$について，時刻$t-1$からtまでの非線型モデルによる時間発展を考える。

$$\boldsymbol{x}_t = M_t(\boldsymbol{x}_{t-1}) \tag{34}$$

$\boldsymbol{x}_{t-1}$の周りでTaylor展開を施すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_t + \delta\boldsymbol{x}_t &= M_t(\boldsymbol{x}_{t-1} + \delta\boldsymbol{x}_{t-1}) \\ &= M_t(\boldsymbol{x}_{t-1}) + \mathbf{M}_t\delta\boldsymbol{x}_{t-1} + O(|\delta\boldsymbol{x}|^2)\end{aligned} \tag{35}$$

ここで

$$\mathbf{M}_t \equiv \frac{\partial M(\boldsymbol{x}_t)}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{36}$$

である。

従って，線型性が成り立つ場合，擾乱 $\delta\boldsymbol{x}$ の時間発展は

$$\delta\boldsymbol{x}_t = \mathbf{M}_t \delta\boldsymbol{x}_{t-1} \tag{37}$$

で記述される。

接線型モデルの随伴（adjoint）$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ を随伴モデルという。

拡張カルマンフィルタ

モデルまたは観測演算子が非線型のときは，拡張カルマンフィルタが用いられる。予報値は，非線型モデルを用いて計算する。

$$\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}} = M_t(\boldsymbol{x}_{t-1}^{\mathrm{a}}) \tag{38}$$

予報誤差共分散は，$\boldsymbol{x}_{t-1}^{\mathrm{a}}$ のまわりに線型化したモデルを用いて計算する。

$$\mathbf{M}_t = \frac{\partial M(\boldsymbol{x}_{t-1}^{\mathrm{a}})}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{39}$$

$$\mathbf{P}_t^{\mathrm{f}} = \mathbf{M}_t \mathbf{P}_{t-1}^{\mathrm{a}} \mathbf{M}_t^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_t \tag{40}$$

カルマンゲインは, 線型化された観測演算子を用いて計算する。

$$\mathbf{H}_t = \frac{\partial H(\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}})}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{41}$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^{\mathrm{f}}\mathbf{H}_t^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^{\mathrm{f}}\mathbf{H}_t^{\mathrm{T}} + \mathbf{R})^{-1} \tag{42}$$

解析値の計算には，非線型の観測演算子を用いる。

$$\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}} + \mathbf{K}_t\left[\boldsymbol{y}_t - H(\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}})\right] \tag{43}$$

$$\mathbf{P}_t^{\mathrm{a}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)\mathbf{P}_t^{\mathrm{f}} \tag{44}$$

アンサンブル・カルマンフィルタ

- アンサンブル平均からのずれ$\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{f}} - \overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{f}}}$を誤差の標本とみなして，予報誤差共分散を推定。

$$\mathbf{P}^{\mathrm{f}} \approx \frac{1}{K-1}\sum_{k=1} K\delta\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{f}}\delta\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{f}\,\mathrm{T}} \tag{45}$$

- 摂動観測法では，観測に摂動を与えて各メンバー独立に観測を同化。
- 平方根フィルタは，観測をアンサンブル平均に同化する。解析の摂動は予報の摂動の線型結合で表す。

$$\delta\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{a}} = \delta\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{f}}\boldsymbol{T} \tag{46}$$

アンサンブル・カルマンフィルタの利点

- 拡張カルマンフィルタよりも計算コストが低い。
- 接線型モデル，随伴モデルが不要。
- 時間発展する予報誤差共分散が陽に得られる。
- データ同化と同時にアンサンブル予報の初期擾乱を作成できる。

アンサンブル・カルマンフィルタの欠点

- モデルの自由度に比べてアンサンブル数が少ないため，サンプリング誤差が生じる。
- 偽りの相関による影響を取り除くため，局所化が必要。
- アンサンブル・スプレッドの過小評価を補うため，人工的なインフレーションが必要。
- 観測演算子やシステムには線型性，解析変数にはガウス分布を仮定している。

局所アンサンブル変換カルマンフィルタ

local ensemble transform Kalman filter (Hunt et al. 2007)

- 平方根フィルタの一つ。
- モデルの一部の領域で解析を行う。
- 領域毎に異なる線型結合をとることができるので，サンプリング誤差が軽減される。
- 並列計算機に適している。

LETKF: 解析

$$\overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}} = \overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{f}}} + \boldsymbol{X}^{\mathrm{f}}\overline{\boldsymbol{w}^{\mathrm{a}}} \tag{47}$$

$\boldsymbol{X}^{\mathrm{f}}$ の第 k 列は予報の摂動 $\delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{f}}$ 重みは次のように求める。

$$\overline{\boldsymbol{w}^{\mathrm{a}}} = \mathbf{P}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{f}^{\mathrm{T}}}\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{f}}) \tag{48}$$

ここで $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{f}}$ は観測空間における予報摂動行列で，その第 k 列は

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{f}}_k - \overline{\boldsymbol{y}^{\mathrm{f}}},\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{f}}_k = H(\boldsymbol{x}^{\mathrm{f}}_k) \tag{49}$$

である。解析誤差共分散は

$$\mathbf{P}^{\mathrm{a}} = [(K-1)\mathbf{I} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{f}^{\mathrm{T}}}R^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{f}}]^{-1} \tag{50}$$

となる。

LETKF: アンサンブル更新

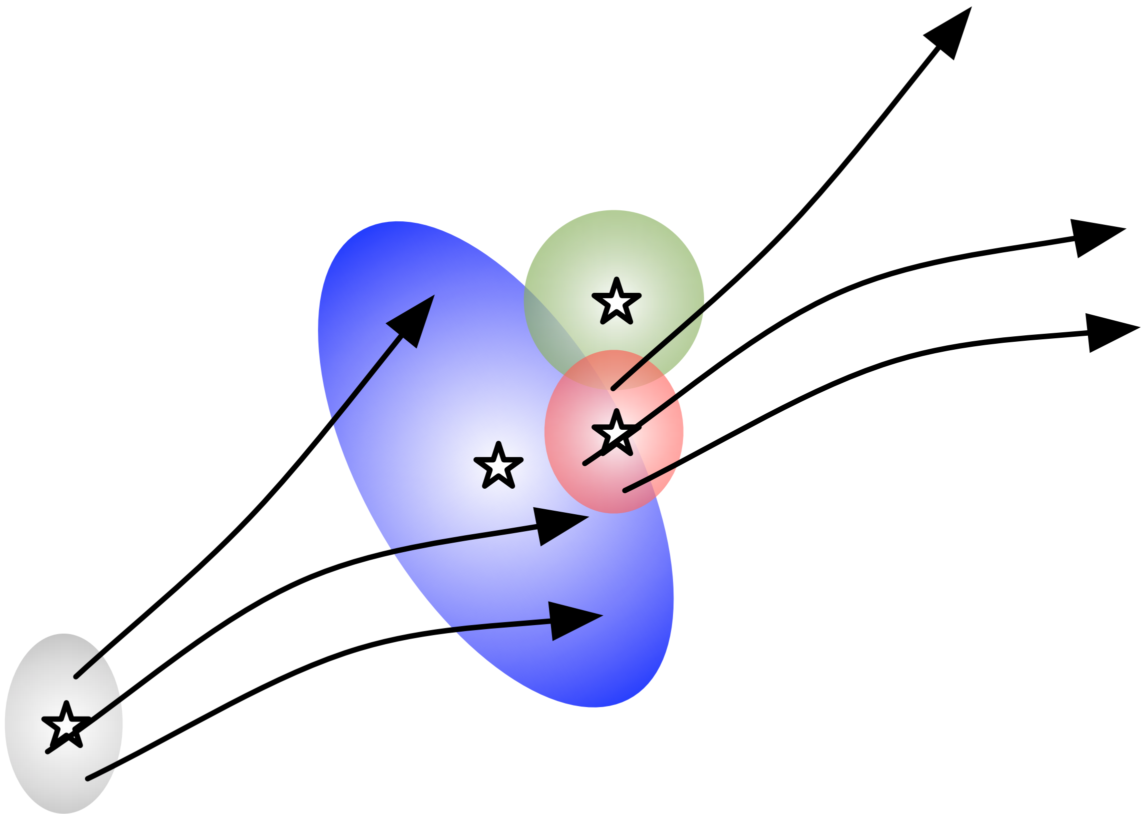
アンサンブルの更新は，解析誤差共分散行列を用いて

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{f}}\boldsymbol{T} \tag{51}$$

$$\boldsymbol{T} = \sqrt{(K-1)\mathbf{P}^{\mathrm{a}}} \tag{52}$$

のように行う。

アンサンブル・カルマンフィルタの予報解析サイクル

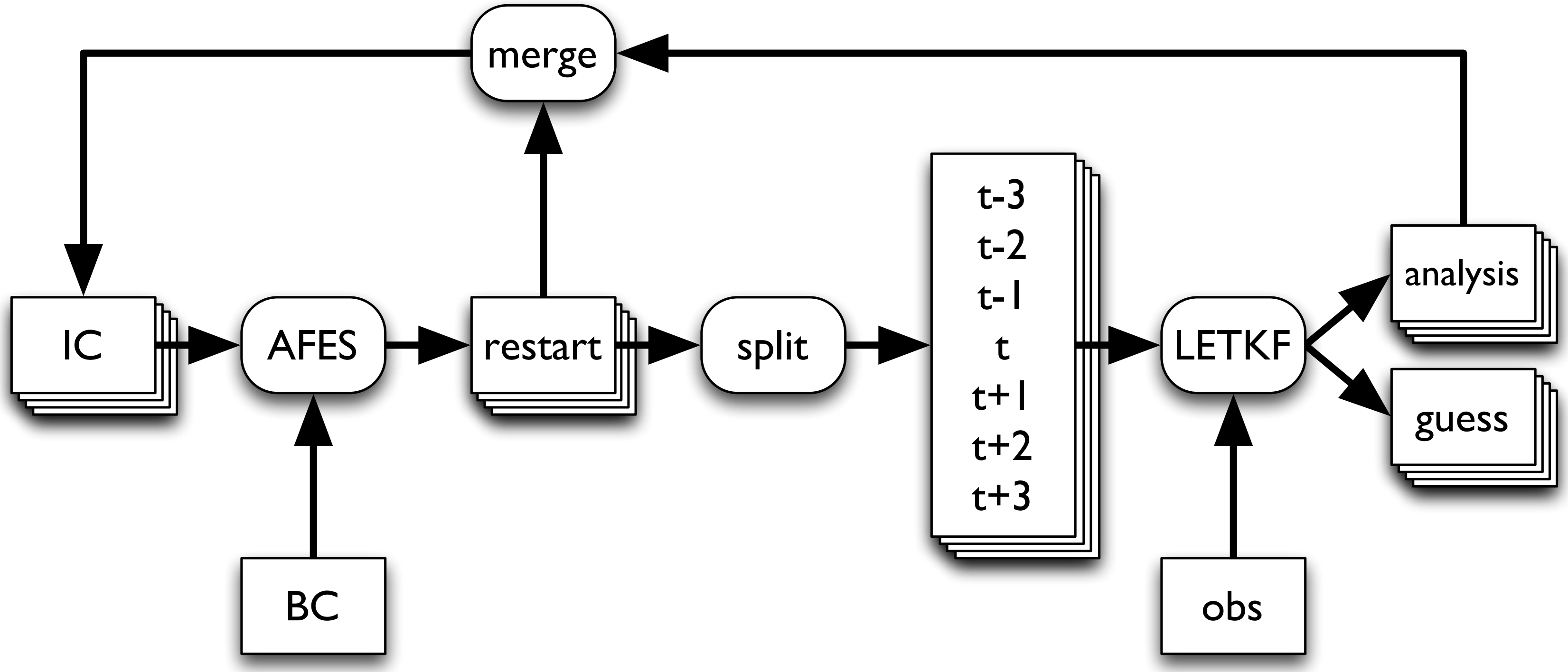


ALERA/ALERA2

AFES–LETKF experimental ensemble reanalysis

- 地球シミュレータ用大気大循環モデルAFESにLETKFを適用し，数値天気予報に用いられる全球大気観測データ（放射輝度を除く）を同化。
- ALERA (2005/5〜2007/1): Miyoshi et al. 2007
- ALERA2 (2008/1〜2010/8, 2010/8〜2013/1): Enomoto et al. 2013
- 地球シミュレータセンターから入手可能（ALERA2は準備中）。

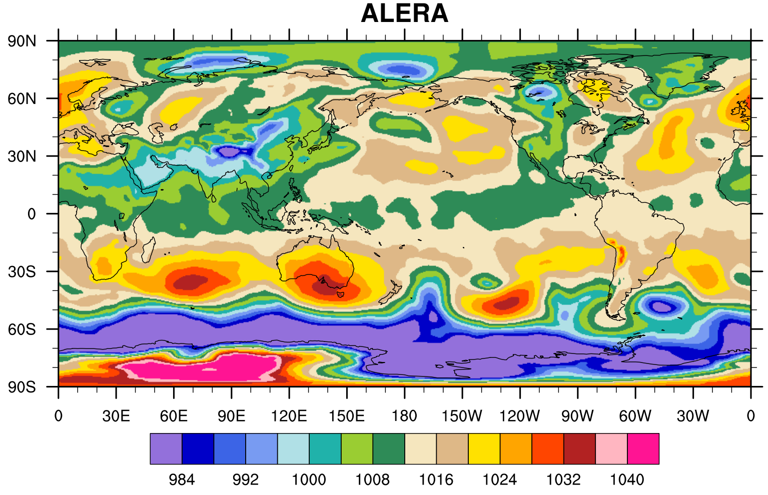
ALEDAS/ALEDAS2のデータフロー



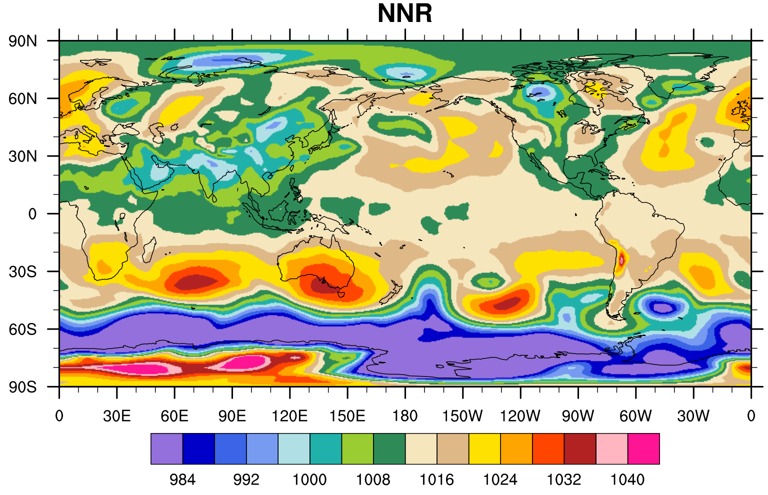
Enomoto et al. 2013

海面気圧のスナップショット

ALERA

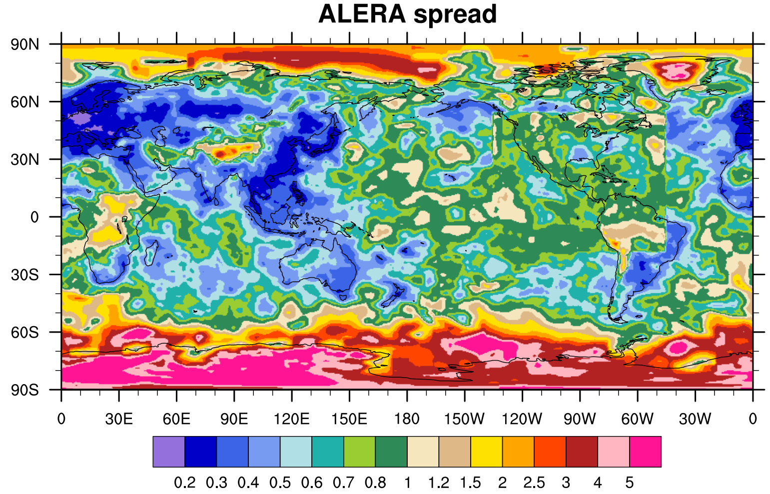


CDAS

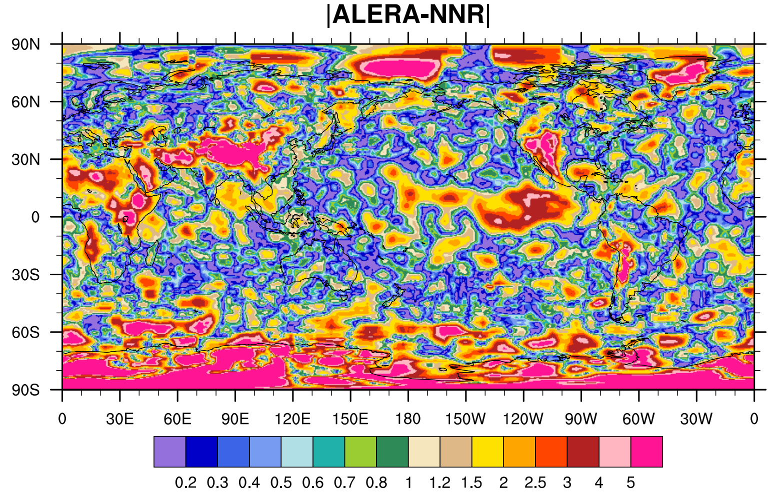


Miyoshi et al. 2007

ALERA スプレッド

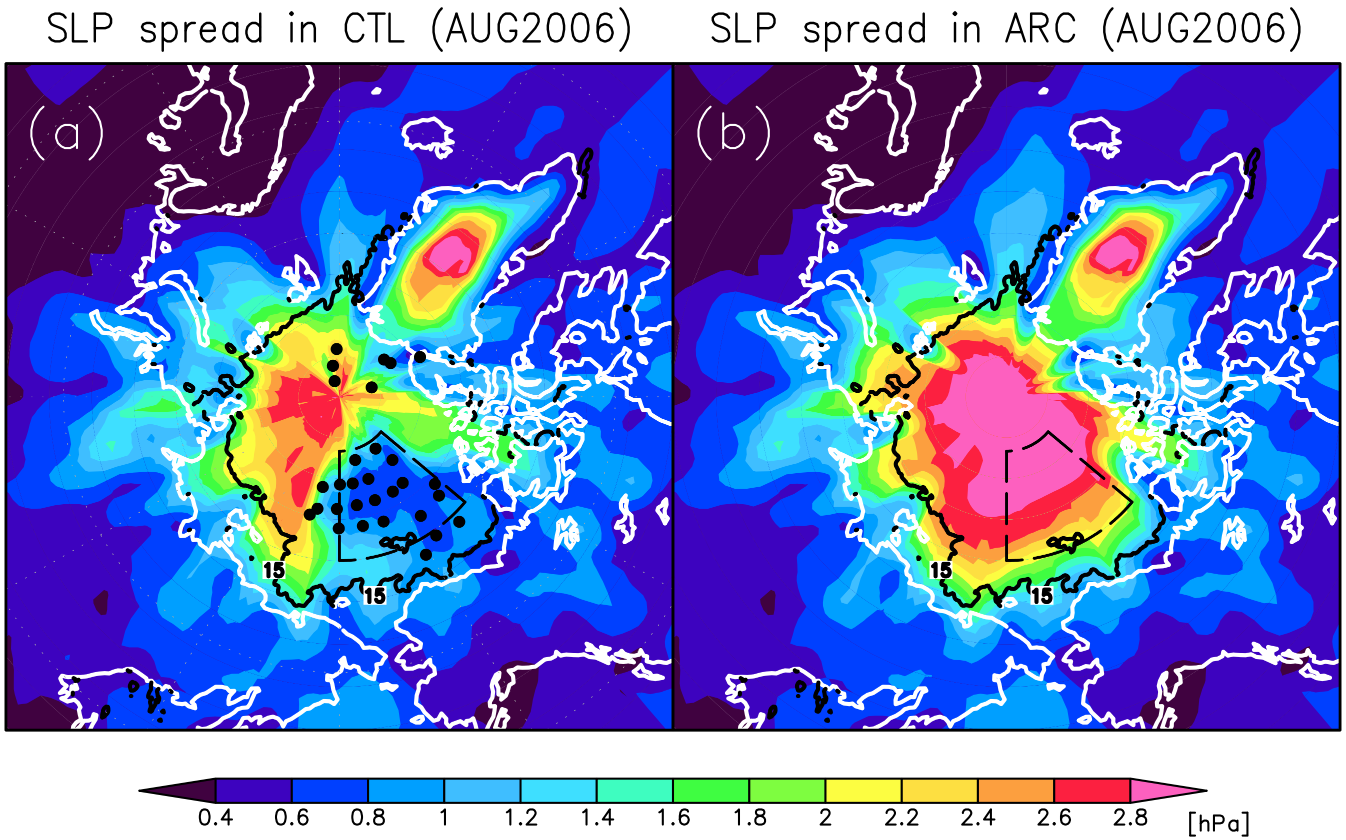


ALERA−CDAS



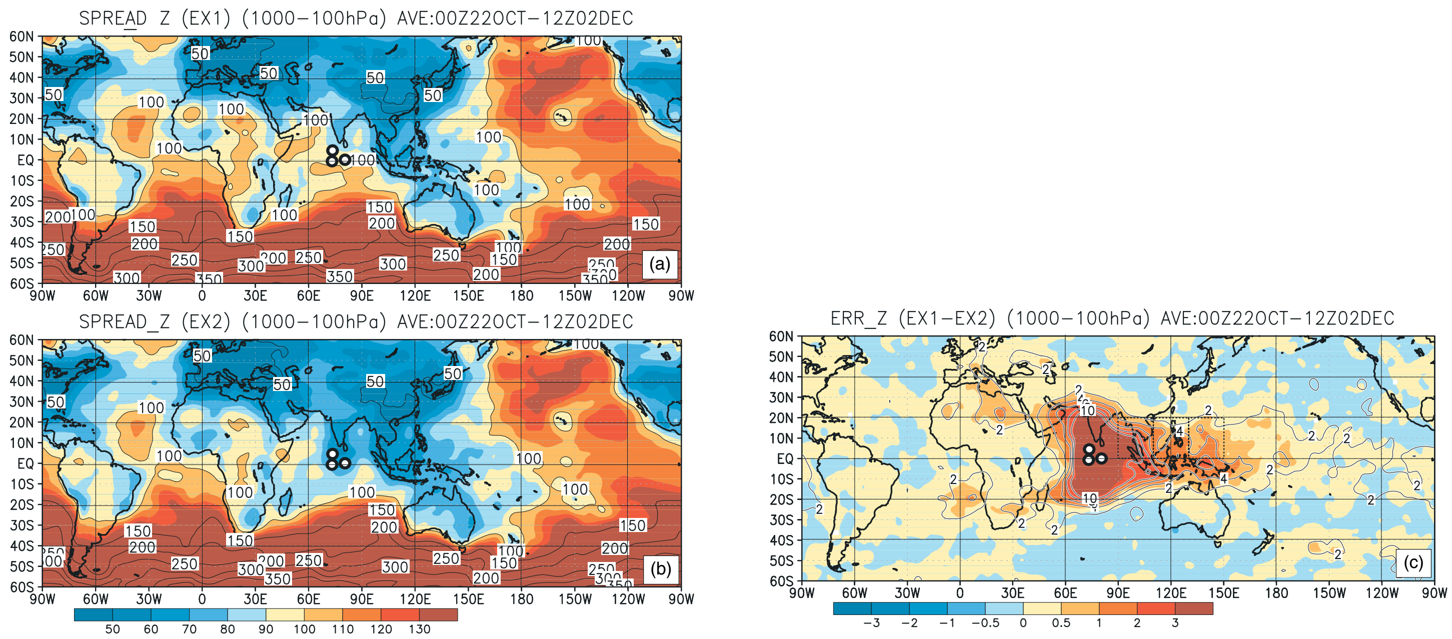
Miyoshi et al. 2007

観測システム実験: 氷上ブイによる気圧観測



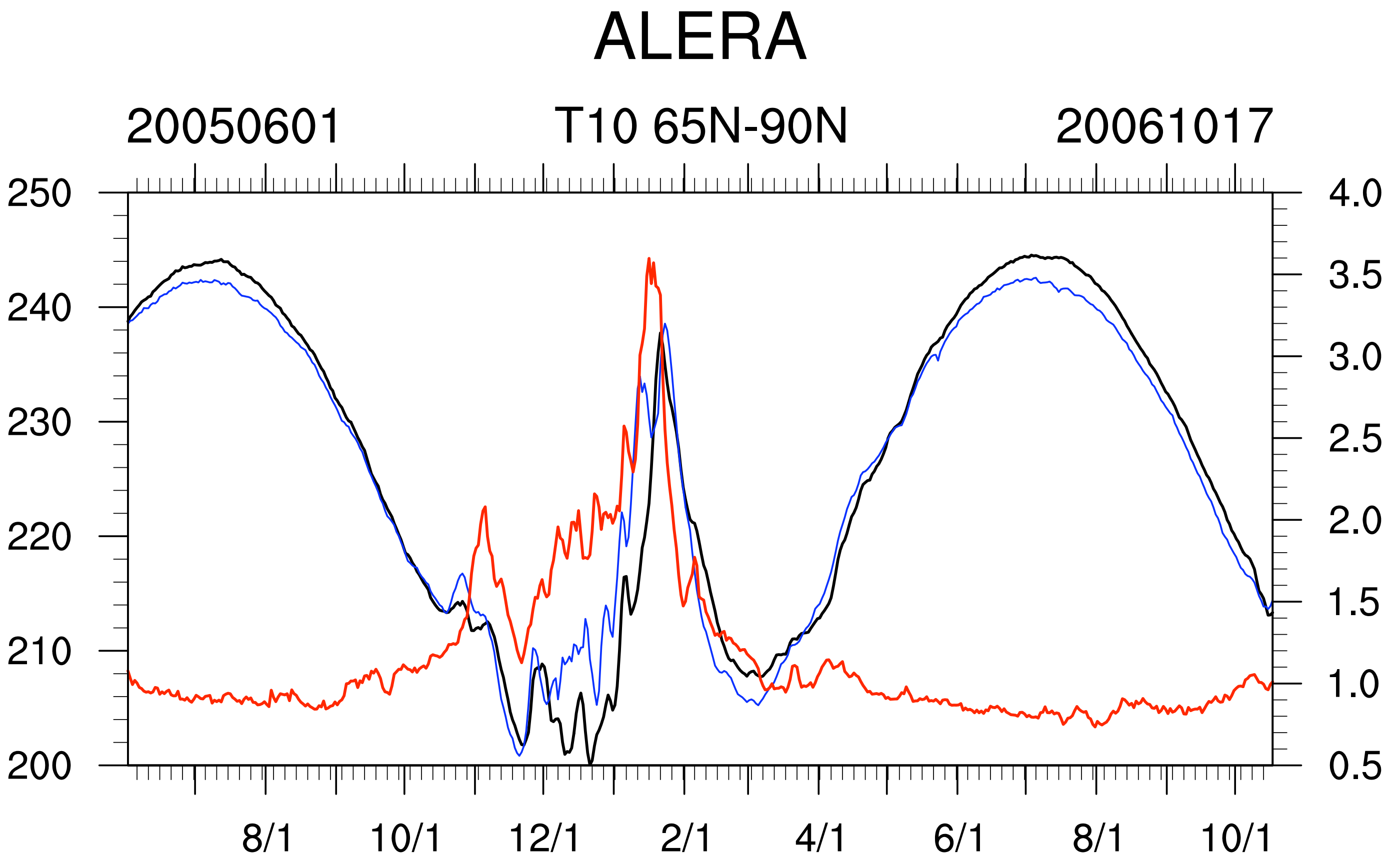
Inoue et al. 2009

観測システム実験: インド洋でのゾンデ観測



Moteki et al. 2011

解析アンサンブルスプレッドが示す予兆



Enomoto et al. 2010

ランダム誤差を考慮した弱拘束随伴法

ランダム誤差を考慮する場合は，次の予報方程式を用いる。

$$\boldsymbol{x}_t = M_{t-1}(\boldsymbol{x}_{t-1}) + \boldsymbol{\eta}_{t-1} \tag{53}$$

評価函数は次のようになり，初期値$\boldsymbol{x}_0$及びランダム誤差$\boldsymbol{\eta}_t$を推定する。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{b}}) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}(H_t\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_t)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_t^{-1}(H_t\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_t) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\boldsymbol{\eta}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_t^{-1}\boldsymbol{\eta}_t \end{aligned} \tag{54}$$

ラグランジュ函数

$$L = J + \sum_{t=1}^{T} [M_{t-1}(\boldsymbol{x}_{t-1}) + \boldsymbol{\eta}_{t-1} - \boldsymbol{x}_t]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_t \quad (55)$$

評価函数の勾配は

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_0} J = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}_0} + \sum_{t=1}^{T} \mathbf{M}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_1^{\mathrm{T}} \cdots \mathbf{M}_{t-1}^{\mathrm{T}} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}_t} \quad (56)$$

と表されることから，$\boldsymbol{\lambda}_t$ は以下を満たす。

$$\boldsymbol{\lambda}_{t+1} = 0 \quad (57)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t = \mathbf{M}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_{t+1} + \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}_t} \; (t = T, T-1, ..., 0) \quad (58)$$

ここで

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}_0} = \mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_0^{-1}[H_0(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{y}_0] + \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{b}}) \tag{59}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}_t} = \mathbf{H}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_t^{-1}[H_t(\boldsymbol{x}_t) - \boldsymbol{y}_t] \tag{60}$$

このとき$\delta L = \delta J$となり次を得る。

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_0} J = \boldsymbol{\lambda}_0 \tag{61}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} J = \mathbf{Q}_t^{-1}\boldsymbol{\eta}_t + \boldsymbol{\lambda}_{i+1}\ (t = 0, 1, ..., T-1) \tag{62}$$

例: 酔歩

評価函数

$$J = \frac{(x_0 - x_\mathrm{b})^2}{2\sigma_\mathrm{b}^2} + \sum_{t=0}^{T} \frac{(x_t - y_t)^2}{2\sigma_{rt}^2} + \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\eta_t^2}{2\sigma_\eta^2} \tag{63}$$

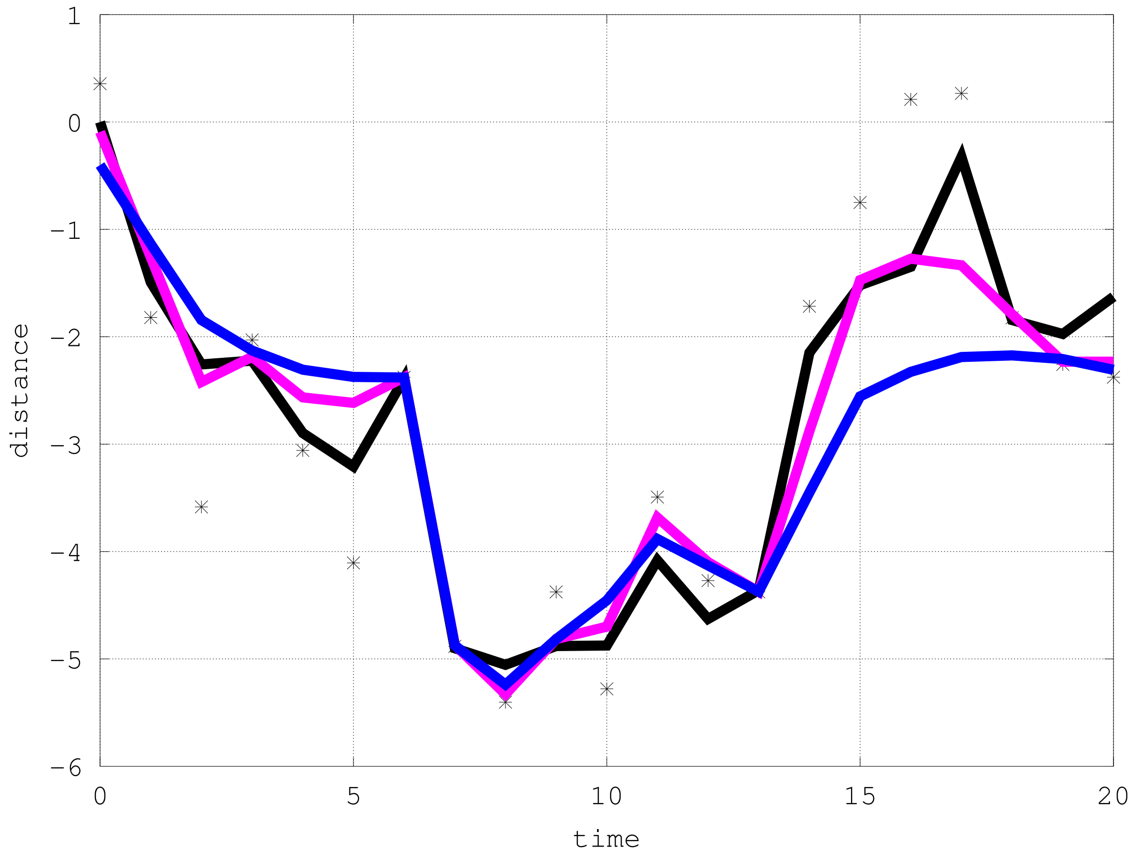
勾配

$$\nabla_{x_0} J = \frac{x_0 - x_\mathrm{b}}{\sigma_\mathrm{b}^2} + \sum_{t=0}^{T} \frac{x_t - y_t}{\sigma_{rt}^2} \tag{64}$$

$$\nabla \eta_t J = \frac{\eta_t}{\sigma_\eta^2} + \sum_{t=t+1}^{T} \frac{x_t - y_t}{\sigma_{rt}^2} \tag{65}$$

酔歩: 随伴法

- 初期値 $\boldsymbol{x}_0$ とモデルのランダム誤差 q を推定。
- $\boldsymbol{x}$ $(t \neq 0)$ はモデルで予測。
- コスト函数，勾配を計算。
- 線型探索をして降下法，共役勾配法の刻み幅を決定。
- ソースは長いので省略。
- 収束が遅い。ランダムだから?


1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
distance
0
5
10
15
20
time

まとめ

- カルマンフィルタ: 解析時刻まで得られた連続的な観測を逐次的に同化。重みは最適内挿法と同形，誤差の少ないデータに大きな重み。
- カルマンスムーザ: 解析時刻より先のデータも利用できる場合，カルマンフィルタを後方にも適用，前方の予報と組み合わせ誤差をより減少。
- 拡張カルマンフィルタ: モデルと観測演算子を線型化することで非線型問題にも適用可。
- アンサンブル・カルマンフィルタ: アンサンブル予報を使って予報誤差共分散を近似。