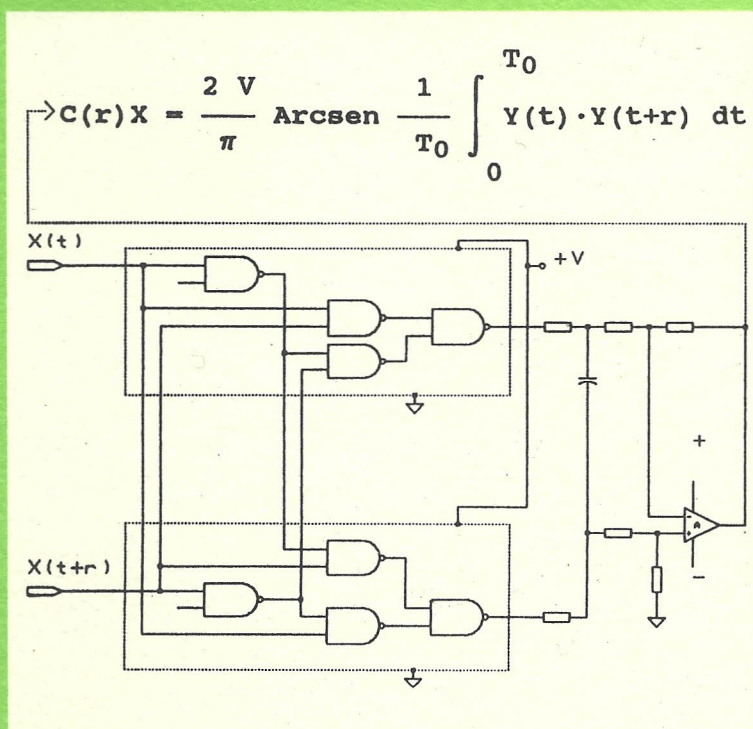


COLLANA SCIENTIFICA **EDIZIONI MODERNA**

# LA CORRELAZIONE

**Un potente algoritmo implementabile in hardware ed in software per la soluzione di innumerevoli problematiche tecniche e scientifiche**

**CESARE DEL TURCO**



Uno strumento di studio e di lavoro per:

**LAUREATI E STUDENTI IN  
INGEGNERIA - FISICA -  
INFORMATICA**

**DIPLOMATI E STUDENTI DI  
ISTITUTI TECNICI INDUSTRIALI**

**TECNICI PROGETTISTI E  
RICERCATORI**

**OPERATORI TECNICI SUL CAMPO**

100 Formule applicative con esempi di calcolo

135 Figure di testo di cui:

- 53 Diagrammi a calcolatore direttamente elaborabili
- 32 Schemi a blocchi funzionali
- 30 Schemi elettronici
- 20 disegni illustrativi

15 Progetti di sottoassiemi e di assiemi per correlazione

15 Esempi di pratico impiego dei metodi di correlazione

7 Fotografie di analisi sperimentali

# CAPITOLO 1

## SULLA CORRELAZIONE

### 1.1 CONCETTO GENERALE DI CORRELAZIONE

Il concetto generale di correlazione è comune a tutte le scienze, perchè in tutte le scienze si possono introdurre criteri statistici. Correlazione è la dipendenza reciproca fra due grandezze e il fattore di correlazione ne è la misura quantitativa. Si ha correlazione elevata quando a determinati valori di una grandezza corrispondono determinati valori dell'altra grandezza e correlazione nulla quando a determinati valori di una grandezza corrispondono valori qualsiasi dell'altra grandezza.

La interdipendenza potrà essere, nei casi più semplici, di proporzionalità diretta o inversa, ma anche assai più complessa.

Per stabilire una misura quantitativa della interdipendenza, cioè della correlazione fra le due grandezze, si parte dalla definizione matematica seguente.

Siano  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  i valori misurati discreti di una grandezza A (sia positiva che negativa) e  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$  i valori misurati discreti di un'altra grandezza B (sia positiva che negativa), dove il pedice numerico 0, 1, 2, 3, ecc. sta a significare valori corrispondenti delle due grandezze.

Si calcoli il valore medio della prima e della seconda grandezza:

$$A_m = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n + 1} \quad B_m = \frac{B_0 + B_1 + B_2 + \dots + B_n}{n + 1} \quad 1.1)$$

Si calcoli poi per ogni valore della prima grandezza,  $A_0, A_1, \dots, A_n$  la deviazione del valore stesso dal valore medio (errore rispetto al va-



lore medio) cioè:

$$a_0 = A_0 - A_m$$

$$a_1 = A_1 - A_m$$

$$a_2 = A_2 - A_m \quad 1.2/a)$$

»

»

$$a_n = A_n - A_m$$

Si calcoli anche per ogni valore della seconda grandezza  $B_0, B_1, \dots, B_n$  la deviazione del valore stesso dal valor medio:

$$b_0 = B_0 - B_m$$

$$b_1 = B_1 - B_m \quad 1.2/b)$$

$$b_2 = B_2 - B_m$$

»

»

$$b_n = B_n - B_m$$

Si calcoli poi il valore medio C del prodotto dei valori corrispondenti degli errori delle due grandezze:

$$C = (1/n) \left( a_0 \times b_0 + a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_n \times b_n \right) \quad 1.3)$$

Tale valore medio è il fattore di correlazione delle due grandezze. Se, ad esempio, tutte le volte che il valore della grandezza A è superiore al suo valore medio e lo stesso avviene per la grandezza B, il termine C sarà positivo ed elevato, perché tutti i suoi termini saranno positivi. Ma se invece per ogni valore di A superiore al valore medio  $A_m$  il valore di B è ora superiore ed ora inferiore al valore medio, i prodotti saranno ora positivi ora negativi e il valore C sarà nullo o molto piccolo sia positivo che negativo.

Nel primo caso vi è ovviamente una interdipendenza elevata e nel secondo vi potrà essere una interdipendenza nulla o molto bassa.

Può verificarsi inoltre che tutte le volte che il valore della grandezza A è superiore al suo valore medio, il valore della grandezza B sia inferiore al suo valore medio; in questo caso il termine C sarà negativo ed elevato perchè tutti i suoi termini saranno negativi.

Il coefficiente di correlazione tra due serie di grandezze può assumere pertanto valori positivi, valori negativi o valori nulli in base alla legge di interdipendenza tra le grandezze stesse.

### 1.1.1. ESEMPI ESPLICATIVI

Un semplice esempio numerico servirà a chiarire i concetti ora esposti:

Consideriamo tre coppie di numeri: in un primo caso appaiate secondo un evidente criterio di proporzionalità diretta secondo la tabella 1

TAB. 1)	A	B
	<hr/>	
	A0=10	B0= 3
	A1=20	B1= 6
	A2=40	B2=12

in un secondo caso appaiate in modo casuale secondo la tabella 2

TAB. 2)	A	B
	<hr/>	
	A0=10	B0= 3
	A1=20	B1=12
	A2=40	B2= 6

Eseguiamo il calcolo del coefficiente di correlazione nel caso di tabella 1:

Applichiamo le formule 1.1) per il calcolo delle medie:

$$A_m = \frac{A_0+A_1+A_2}{n+1} = \frac{10+20+40}{3} = 23.333$$

$$B_m = \frac{B_0+B_1+B_2}{n+1} = \frac{3+6+12}{3} = 7$$

Calcoliamo ora in base alle 1.2) le deviazioni dei valori stessi del valore medio:

$$a_0 = A_0 - A_m = 10 - 23.333 = -13.333$$

$$a_1 = A_1 - A_m = 20 - 23.333 = -3.333$$

$$a_2 = A_2 - A_m = 40 - 23.333 = +16.667$$

$$b_0 = B_0 - B_m = 3 - 7 = -4$$

$$b_1 = B_1 - B_m = 6 - 7 = -1$$

$$b_2 = B_2 - B_m = 12 - 7 = +5$$

Calcoliamo infine secondo la 1.3) il coefficiente di correlazione C1 nel caso di tabella 1:

$$C_1 = (1/n) \times (a_0 \times b_0 + a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2) = \\ = (1/3) \times [(-13.333) \times (-4) + (-3.333) \times (-1) + (+16.667) \times (+5)] \cong 46.667$$

Ripetiamo il calcolo per i dati della tabella 2 in base alla 1)

$$A_m = \frac{A_0+A_1+A_2}{n+1} = \frac{10+20+40}{3} = 23.333$$

$$B_m = \frac{B_0+B_1+B_2}{n+1} = \frac{3+12+6}{3} = 7$$

in base alle 1.2) si ha :

$$a_0 = A_0 - A_m = 10 - 23.333 = -13.333$$

$$a_1 = A_1 - A_m = 20 - 23.333 = -3.333$$

$$a_2 = A_2 - A_m = 40 - 23.333 = +16.667$$

$$b_0 = B_0 - B_m = 3 - 7 = -4$$

$$b_1 = B_1 - B_m = 12 - 7 = +5$$

$$b_2 = B_2 - B_m = 6 - 7 = -1$$

infine in base alla 1.3 calcoliamo il coefficiente di correlazione C2 nel caso di tabella 2:

$$C2 = (1/\overset{n+1}{n}) \times (a_0 \times b_0 + a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2) =$$

$$= (1/3) \times [(-13.333) \times (-4) + (-3.333) \times (+5) + (+16.667) \times (-1)] \cong + 6.667$$

Da quanto abbiamo calcolato possiamo concludere:

Nel caso di tabella 1, dove il legame tra i valori di A e B è governato da una ben determinata legge lineare di interdipendenza (dove ad ogni raddoppiamento del valore di A si ha un corrispondente raddoppiamento del valore di B) si è trovato un valore elevato di correlazione: C1 = + 46.667

Nel caso invece di tabella 2, dove il legame tra i valori di A e B non è governato da nessuna legge, abbiamo trovato naturalmente un basso valore di correlazione: C2 = +6.667

È ora necessario, dopo aver definito il fattore di correlazione, introdurre alcuni concetti complementari che ci consentono di “NORMALLIZZARE” i valori di C calcolati in precedenza.

Dalle serie di grandezze A0,A1,A2,...,An e B0,B1,B2,...,Bn si possono determinare due importanti funzioni statistiche dette di “DEVIAZIONE STANDARD”; le funzioni indicate rispettivamente con  $\beta_{An}$  e  $\beta_{Bn}$  sono date dalle seguenti espressioni:

$$\beta_{An} = \sqrt{\frac{(A_0 - A_m)^2 + (A_1 - A_m)^2 + \dots + (A_n - A_m)^2}{n+1}} \quad 1.3/a)$$

$$\beta_{Bn} = \sqrt{\frac{(B_0 - B_m)^2 + (B_1 - B_m)^2 + \dots + (B_n - B_m)^2}{n + 1}} \quad 1.3/a)$$

Con queste due funzioni si calcola il valore del coefficiente di correlazione normalizzato CN secondo l'espressione :

$$CN = \frac{C}{\beta_{An} \times \beta_{Bn}}$$

Se calcoliamo le deviazioni standard dei valori delle tabelle 1 e 2 otteniamo naturalmente che  $\beta_{An}$  e  $\beta_{Bn}$  di tabella 1 sono coincidenti con  $\beta_{An}$  e  $\beta_{Bn}$  di tabella 2, dato che le grandezze A e B che le compongono sono le stesse ma appaiate in modo diverso; abbiamo perciò :

$$\beta_{An} = \sqrt{\frac{(10-23.333)^2 + (20-23.333)^2 + (40-23.333)^2}{3}} \cong 12.472$$

$$\beta_{Bn} = \sqrt{\frac{(3-7)^2 + (6-7)^2 + (12-7)^2}{3}} \cong 3.742$$

da cui si calcolano immediatamente i valori normalizzati di C :  
per  $C_1 = 46.667$  si ha :

$$CN_1 = \frac{C_1}{\beta_{An} \times \beta_{Bn}} = \frac{46.667}{12.472 \times 3.742} \cong 1$$

per  $C_2 = 6.667$  si ha :

$$CN_2 = \frac{C_2}{\beta_{An} \times \beta_{Bn}} = \frac{6.667}{12.472 \times 3.742} \cong 0.142$$

Risultati analoghi dei coefficienti di correlazione normalizzati si possono ottenere con l'impiego di un calcolatore scientifico, ad esempio il

TI-68 della TEXAS INSTRUMENTS (Rif.bibliografico n.1); il metodo di calcolo statistico della TI-68, consente di ottenere rapidamente i coefficienti di correlazione anche quando le tabelle delle variabili contengono un numero molto elevato di elementi; in questi casi l'applicazione del calcolo diretto che abbiamo eseguito mediante le formule 1.1), 1.2), 1.3), 1.3/a) sarebbe estremamente pesante con notevoli probabilità di errore.

Vediamo quindi come si calcolano i coefficienti di correlazione C1 e C2, già in precedenza valutati e normalizzati, con la TI-68.

Per la tabella 1 abbiamo la seguente procedura di calcolo con la TI 68

TABELLA 1

A	B
10	3
20	6
40	12

TASTI PREMUTI	VISUALIZZATORE	COMMENTO
2nd CS	Clr YN ?	Inizio Clr Reg.
ENTER	Cleared	Reg. puliti
10 , 3	10 , 3	Entrano A0 e B0
Sum+	n=1.000	Elaboraz. A0;B0
20 , 6	20 , 6	Entrano A1 e B1
Sum+	n=2.000	Elaboraz. A1;B1
40 , 12	40 , 12	Entrano A2 e B2
Sum+	n=3.000	Elaboraz. A2;B2
3rd COR ENTER	1.000	Calcolo CN1



Per la tabella 2 abbiamo :

TABELLA 2

A	B
10	3
20	12
40	6

TASTI PREMUTI	VISUALIZZATORE	COMMENTO
2nd CS	Clr YN ?	Inizio Clr Reg.
ENTER	Cleared	Reg. puliti
10 , 3	10 , 3	Entrano A0 e B0
Sum+	n=1.000	Elaboraz. A0;B0
20 , 12	20 , 12	Entrano A1 e B1
Sum+	n=2.000	Elaboraz. A1;B1
40 , 6	40 , 6	Entrano A2 e B2
Sum+	n=3.000	Elaboraz. A2;B2
3rd COR ENTER	0.142	Calcolo CN2

Come si è visto i valori dei coefficienti di correlazione normalizzati calcolati con la TI 68 coincidono con quelli ricavati dalle formule.

Con un ulteriore esempio mostreremo il caso di una serie di coppie di numeri che, in base alla loro legge di interdipendenza presentano coefficiente di correlazione negativo; sia data la tabella 3:

TABELLA 3

A	B	
2	3	
3	2	
1	3	si ha:
4	3	

TASTI PREMUTI	VISUALIZZATORE	COMMENTO
2nd CS	Clr YN ?	Inizio Clr Reg.
ENTER	Cleared	Reg. puliti
2 , 3	2 , 3	Entrano A0 e B0
Sum+	n=1.000	Elaboraz. A0;B0
3 , 2	3 , 2	Entrano A1 e B1
Sum+	n=2.000	Elaboraz. A1;B1
1 , 3	1 , 3	Entrano A2 e B2
Sum+	n=3.000	Elaboraz. A2;B2
4 , 3	4 , 3	Entrano A3 e B3
Sum+	n=4.000	Elaboraz. A3;B3
3rd COR ENTER	-0.258	Calcolo CN

Per chiudere questo argomento tre esempi grafico-numeriche metteranno ulteriormente in chiaro i concetti di interdipendenza che sono alla base dei processi di correlazione che andremo ad esaminare nel prosieguo del lavoro.

#### ESEMPIO 1

Siano date in tabella X1 due serie di numeri di cui si voglia calcolare il legame di interdipendenza con la TI 68 :

TABELLA X1

A	B	
2	3	
9	10	si ha:
10	11	
3	4	

TASTI PREMUTI	VISUALIZZATORE	COMMENTO
2nd CS	Clr YN ?	Inizio Clr Reg.
ENTER	Cleared	Reg. puliti
2 , 3	2 , 3	Entrano A0 e B0
Sum+	n=1.000	Elaboraz. A0;B0
9 , 10	9 , 10	Entrano A1 e B1
Sum+	n=2.000	Elaboraz. A1;B1
10 , 11	10 , 11	Entrano A2 e B2
Sum+	n=3.000	Elaboraz. A2;B2
3 , 4	3 , 4	Entrano A3 e B3
Sum+	n=4.000	Elaboraz. A3;B3
3rd COR ENTER	+1.000	Calcolo CN

Questo risultato ci dice che le due serie di grandezze sono totalmente interdipendenti nel senso positivo, hanno cioè il massimo grado di correlazione  $CN = +1$ . Quanto sopra si spiega molto chiaramente dai grafici di figura 1.1: in essi sono tracciati per punti, rispetto allo zero, i valori delle grandezze di colonna A e di colonna di B.

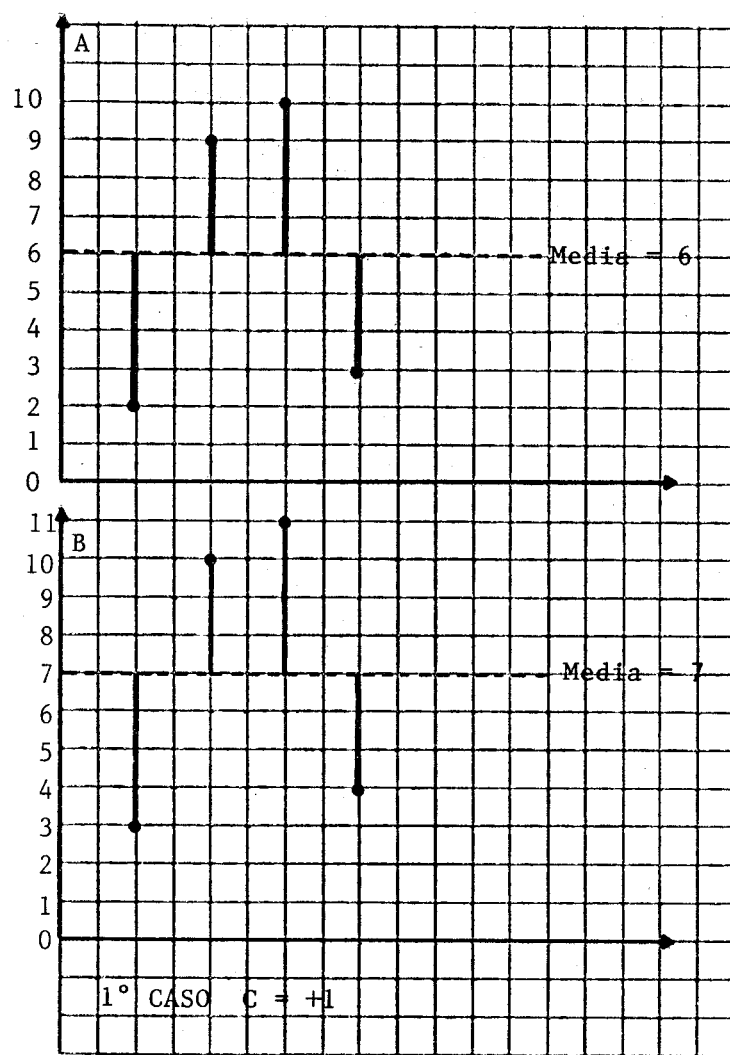


Figura 1.1 Grafici tabella X1

Confrontando i due grafici A e B si vede che ciascun valore di A) esce dalla media (uguale a 6) di tanto quanto ciascun valore corrispondente di B) esce dalla propria media (uguale a 7).

Quando la prima grandezza di A si abbassa dalla propria media di 4 unità anche la prima grandezza di B si abbassa dalla media di 4 unità.

Quando la seconda grandezza di A si alza dalla media di 3 unità anche la seconda grandezza di B si alza della propria media di 3 unità.

Quando la terza grandezza di A si alza dalla media di 4 unità anche la

terza grandezza di B si alza dalla propria media di 4 unità.

Quando la quarta grandezza di A si abbassa dalla media di 3 unità anche la quarta grandezza di B si abbassa dalla propria media di 3 unità.

Questa è la condizione di principio per cui le grandezze abbiano CORRELAZIONE al massimo valore positivo  $CN = +1$

## ESEMPIO 2

Siano date in tabella X2 due serie di numeri di cui si voglia calcolare il legame di interdipendenza con la TI 68 :

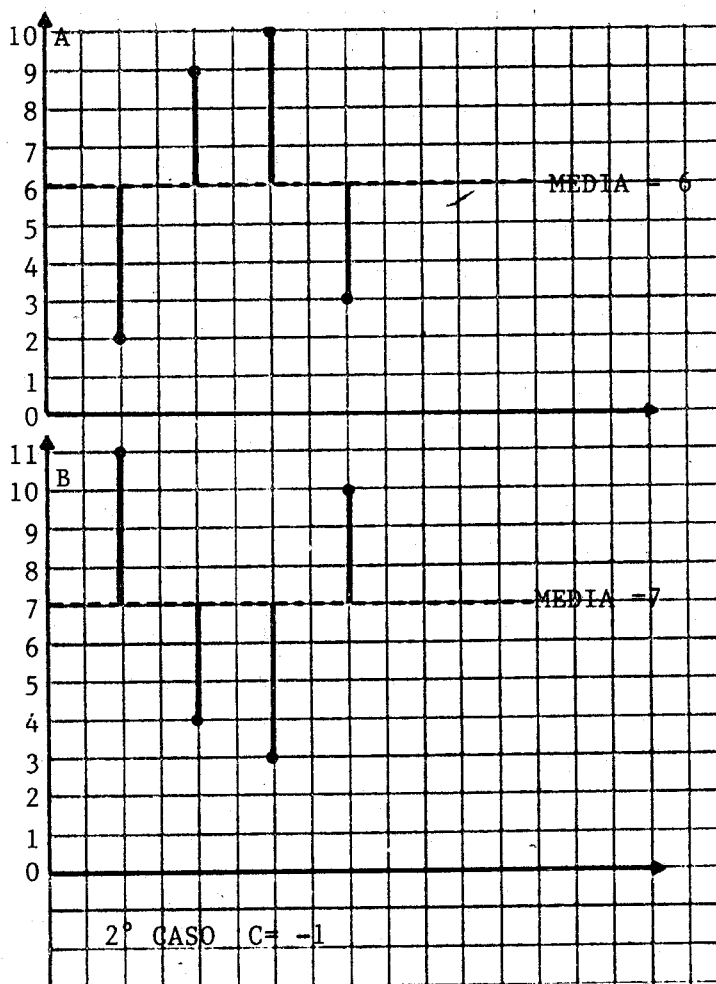
TABELLA X2

A	B	
2	11	
9	4	si ha :
10	3	
3	10	

TASTI PREMUTI	VISUALIZZATORE	COMMENTO
2nd CS	Clr YN ?	Inizio Clr Reg.
ENTER	Cleared	Reg. puliti
2 , 11	2 , 11	Entrano A0 e B0
Sum+	n=1.000	Elaboraz. A0;B0
9 , 4	9 , 4	Entrano A1 e B1
Sum+	n=2.000	Elaboraz. A1;B1
10 , 3	10 , 3	Entrano A2 e B2
Sum+	n=3.000	Elaboraz. A2;B2
3 , 10	3 , 10	Entrano A3 e B3
Sum+	n=4.000	Elaboraz. A3;B3
3rd COR ENTER	-1.000	Calcolo CN

Questo risultato ci dice che le due serie di grandezze sono totalmente interdipendenti nel senso negativo; hanno cioè il massimo grado di correlazione  $CN = -1$ .

Quanto sopra è giustificato dai grafici di figura 1.2: in essi sono tracciati per punti, rispetto allo zero, i valori delle grandezze di colonna A e di colonna B.



*Figura 1.2 Grafici di tabella X2*

Confrontando i due grafici A e B si vede che ciascun valore di A esce dalla media (uguale a 6) tanto quanto ciascun valore corrispondente di B esce dalla propria media (uguale a 7) ma in senso opposto.



Quando la prima grandezza di A si abbassa dalla media di 4 unità la prima grandezza di B si alza dalla propria media di 4 unità.

Quando la seconda grandezza di A si alza dalla media di 3 unità la seconda grandezza di B si abbassa dalla propria media di 3 unità.

Quando la terza grandezza di A si alza dalla media di 4 unità la terza grandezza di B si abbassa dalla propria media di 4 unità.

Quando la quarta grandezza di A si abbassa dalla media di 3 unità la quarta grandezza di B si alza dalla propria media di 3 unità.

Questa è la condizione di principio per cui le grandezze abbiano correlazione al massimo valore negativo  $CN = -1$

### ESEMPIO 3

Siano date in tabella X3 due serie di numeri di cui si voglia calcolare il legame di interdipendenza con la TI 68 :

TABELLA X3

A	B
+4	-4
-6	-6
-2	+2
+4	-4

Seguendo ancora la routine degli esempi 1 e 2 per le due serie di numeri di tabella X3 si ha:

TASTI PREMUTI	VISUALIZZATORE	COMMENTO
2nd CS	Clr YN ?	Inizio Clr Reg.
ENTER	Cleared	Reg. puliti
+4 , -4	+4 , -4	Entrano A0 e B0
Sum+	n=1.000	Elaboraz. A0;B0
-6 , -6	-6 , -6	Entrano A1 e B1
Sum+	n=2.000	Elaboraz. A1;B1
-2 , +2	-2 , +2	Entrano A2 e B2
Sum+	n=3.000	Elaboraz. A2;B2
+4 , -4	+4 , -4	Entrano A3 e B3
Sum+	n=4.000	Elaboraz. A3;B3
3rd COR ENTER	0.000	Calcolo CN

Questo risultato ci dice che le due serie di grandezze sono completamente indipendenti, hanno cioè correlazione nulla  $CN = 0$ .

Quanto sopra è giustificato dai grafici di figura 1.3:  
in essi sono tracciati per punti, rispetto allo zero, i valori delle grandezze di colonna A e di colonna B.

Confrontando i due grafici A e B si vede che ciascun valore di A esce dalla media (uguale a 0) disordinatamente rispetto ai valori con i quali B esce dalla media (uguale -3).

In questo esempio viene messa in evidenza una particolare condizione che può verificarsi, nei casi pratici, con la stessa frequenza con la quale si possono evidenziare i rapporti di interdipendenza degli esempi precedenti.

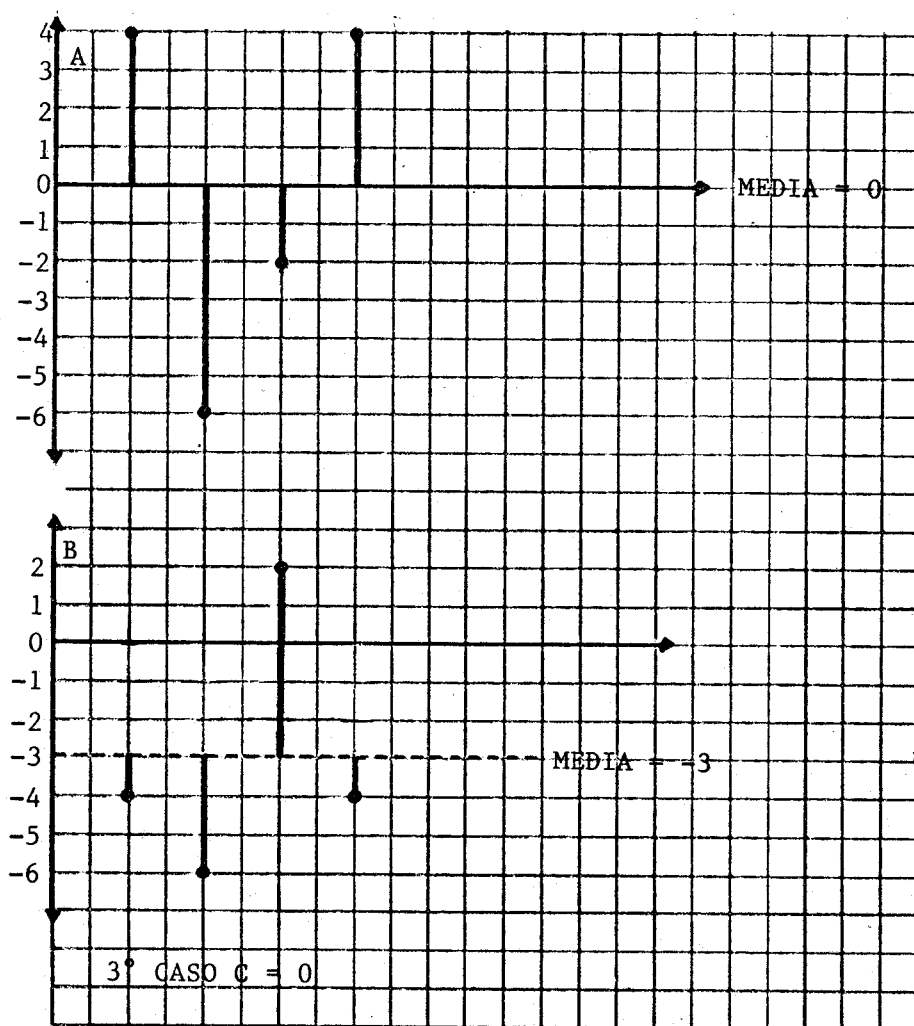


Figura 1.3 Grafici di tabella X3

Quando la prima grandezza di A si alza dalla media di 4 unità la prima grandezza di B si abbassa dalla propria media di 1 unità.

Quando la seconda grandezza di A si abbassa dalla media di 6 unità la seconda grandezza di B si abbassa dalla propria media di 3 unità.

Quando la terza grandezza di A si abbassa dalla media di 2 unità la terza grandezza di B si alza dalla propria media di 5 unità.

Quando la quarta grandezza di A si alza dalla media di 4 unità la quarta grandezza di B si abbassa dalla propria media di 1 unità.

Questa è una condizione di disordine per cui le grandezze sono completamente scorrelate  $CN = 0$  .

Con questi ultimi esempi ci siamo resi conto di avere a disposizione un importante algoritmo ed una macchina da calcolo per la valutazione del coefficiente di correlazione tra serie discontinue di dati che possono ricorrere in qualsiasi tipo di indagine scientifica.

## **1.2 ESTENSIONE DEL CONCETTO DI CORRELAZIONE PER SERIE INFINITA DI DATI**

Se invece di avere a che fare con dei valori discreti di due grandezze si vuole considerare la variazione continua delle due grandezze rispetto ad un parametro, ad esempio  $t$ , la prima grandezza sarà una funzione  $f_1(t)$  e la seconda una funzione  $f_2(t)$ .

Il parametro comune nel caso dei segnali elettrici è il tempo. Si consideri allora che l'andamento della prima grandezza nel tempo vada da 0 a  $T_0$  e si chiami con  $fm_1$  il suo valore medio: lo stesso valore medio per la seconda grandezza sia  $fm_2$  .

Per ottenere il coefficiente di correlazione, similmente a quanto già visto al paragrafo 1.1, si formeranno le differenze  $f_1(t)-fm_1$  e  $f_2(t)-fm_2$  che sono funzioni del tempo e si scriverà il loro prodotto:

$$[ f_1(t) - fm_1 ] \times [ f_2(t) - fm_2 ]$$

che è ancora funzione del tempo. La somma di tutti i prodotti, o meglio, l'integrale di tutti i prodotti diviso per il tempo  $T_0$  sarà il coefficiente di correlazione fra le due funzioni durante il tempo  $T_0$  :

$$C = 1/T_0 \int_0^{T_0} [f_1(t) - f_{m1}] \times [f_2(t) - f_{m2}] dt \quad 1.4)$$

Nella quasi totalità dei casi che interessano i segnali elettrici le funzioni hanno valore medio nullo, cioè si può scrivere:

$f_{m1} = 0$  e  $f_{m2} = 0$  perciò la 1.4) diventa :

$$C = 1/T_0 \int_0^{T_0} f_1(t) \times f_2(t) dt \quad 1.5)$$

(Per tutta la teoria sull'argomento vedi Rif.bibliografico n.2)

L'integrale al quale siamo pervenuti e i successivi integrali che andremo a definire non dovranno sconcertare il lettore; nel prosieguo di questo lavoro non sarà mai richiesto lo sviluppo analitico degli integrali stessi per giungere a risultati numerici concreti; saranno invece fornite formule risolutive direttamente applicabili ai casi pratici, curve di funzioni facilmente interpolabili per la ricerca dei valori voluti, schemi di circuiti elettronici semplici che risolvono in tempo reale gli integrali in questione.

### 1.2.1 LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE INCROCIATA

L'integrale 1.5) prevede il computo di C per infiniti valori che  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  hanno negli stessi tempi.

Una estensione del concetto ora esposto porta ad un nuovo integrale che pur rappresentando implicitamente anche la 1.5) si presta in una più ampia generalità delle applicazioni tecniche.

Molte delle funzioni con le quali si ha a che fare nel campo delle

tecniche applicate rappresentano dei segnali e le informazioni che esse contengono, dipendono dal modo col quale esse variano nel tempo.

Quindi è molto interessante determinare non solo il coefficiente di correlazione fra i valori delle funzioni presi nello stesso attimo, ma ad esempio fra i valori delle due funzioni presi uno al tempo  $t$  e l'altro non al tempo  $t$  ma al tempo  $t + r$ .

In questo caso il coefficiente di correlazione tra le due funzioni si otterrà direttamente dalla 1.5) mediante la sostituzione della variabile indipendente  $t$  di  $f_2(t)$  con la nuova variabile  $t + r$  ; cioè:

$$C = 1/T_o \int_0^{T_o} f_1(t) \times f_2(t+r) dt \quad 1.6)$$

Naturalmente con questo cambiamento di variabile il valore di  $C$  non sarà dipendente soltanto dalle caratteristiche intrinseche di  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , ma sarà variabile anche in dipendenza di  $r$ ; si potrà quindi più precisamente riscrivere la 1.6) come segue:

$$C(r) = 1/T_o \int_0^{T_o} f_1(t) \times f_2(t+r) dt \quad 1.7)$$

Dove è inteso che per ottenere i valori di  $C(r)$  bisognerà per ogni valore di  $r$  prendere le coppie di valori  $f_1(t)$  ed  $f_2(t+r)$  per tutto il tempo  $T_o$  , moltiplicarli e poi farne il valore medio durante il tempo  $T_o$  .

Per comprendere meglio il significato di  $C(r)$  è bene notare che ci sono qui tre diversi simboli del tempo:



Il parametro  $r$  che è la variabile che ci dà la differenza di tempo fra due attimi  $t$  e  $t+r$  nei quali dobbiamo misurare e moltiplicare i valori di  $f_1$  ed  $f_2$ , il parametro  $t$  che è la variabile indipendente comune alle due funzioni  $f_1(t)$  ed  $f_2(t)$  e  $T_0$  che è la durata durante la quale si osserva il fenomeno. L'integrale di  $C(r)$  espresso dalla 1.7) è definito come "FUNZIONE DI CORRELAZIONE INCROCIATA" dato che i prodotti all'interno di esso sono eseguiti tra due diverse funzioni del tempo in dipendenza di  $r$ . Per distinguere le funzioni di correlazione incrociata dalle funzioni di AUTOCORRELAZIONE, che andremo a definire in seguito, indicheremo le prime con  $C(r)_{1,2}$  e le seconde con  $C(r)$ .

### 1.2.2 LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

L'introduzione del parametro addizionale  $r$  permette di ampliare il concetto di correlazione espresso nel paragrafo 1.2.1; applicando lo stesso ragionamento alla sola funzione del tempo  $f_1(t)$  e alla sua traslata temporale  $f_1(t+r)$  si può formulare un nuovo integrale

$$C(r) = 1/T_0 \int_0^{T_0} f_1(t) \times f_1(t+r) dt \quad 1.8)$$

L'integrale 1.8) esprime cioè il valore medio del prodotto di una funzione del tempo per se stessa ritardata di un tempo  $r$ .

La funzione di correlazione espressa dalla 1.8) prende pertanto il nome di "FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE".

Anche le funzioni di autocorrelazione e di correlazione incrociata, similmente ai coefficienti di correlazione definiti in precedenza, possono

assumere valori positivi, negativi o nulli in dipendenza della legge di interdipendenza tra le grandezze in gioco. Se il valore di  $C(r)$  o  $C(r)_{1,2}$  sarà il massimo positivo si dirà che le funzioni del tempo sono CORRELATE. Se il valore di  $C(r)$  o  $C(r)_{1,2}$  sarà zero si dirà che le funzioni del tempo sono SCORRELATE.

Se il valore di  $C(r)$  o  $C(r)_{1,2}$  sarà il massimo negativo si dirà che le funzioni del tempo sono INVERSOCORRELATE.

### 1.2.3 ESEMPI ESPLICATIVI

Per non impegnare il lettore con sviluppi matematici che ci porterebbero lontano dall'obiettivo, che mira ad inquadrare rapidamente gli algoritmi per poi poterli applicare con profitto nei casi pratici, mostriamo direttamente alcune delle funzioni di correlazione più comuni e la loro rappresentazione grafica in sistemi di assi cartesiani.

In tutti gli esempi che seguiranno le formule di  $C(r)$  o  $C(r)_{1,2}$  saranno espresse in forma normalizzata; ciò perchè le  $C(r)$  o  $C(r)_{1,2}$  non normalizzate sono raramente impiegate e richiedono, in alcuni casi, sviluppi molto complessi per cui si rimanda il lettore interessato ai Rif. bibliografici n. 2;3;4;5.

Iniziamo l'esposizione delle funzioni di correlazione con la più semplice, il cui impiego pratico si presta per il controllo dei dispositivi hardware e software con i quali prenderemo confidenza nel capitolo 2.

Andiamo pertanto a calcolare la funzione di autocorrelazione relativa alla nota funzione trigonometrica  $f(t) = A \sin Wt$  che può esprimere un qualsiasi fenomeno periodico di natura elettrica, meccanica, ecc.

Applicando la 1.8), per  $T_0$  comprendente un numero molto elevato di periodi di  $f(t)$ , si ottiene la prima e più semplice FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE come segue:

$$C(r) \cong (1/T_0) \int_0^{T_0} A \text{ Sen } Wt \times A \text{ Sen } W(t+r) dt \cong (A^2 / 2) \text{ Cos } Wr$$

1.9)

La 1.9 mostra che il calcolo dell'integrale non fornisce il valore esatto di  $C(r)$  ma un valore approssimato; ciò dipende dal fatto che esso è computato per un tempo finito  $T_0$  invece che per un tempo infinito.

Questa imprecisione ha dei risvolti molto importanti che saranno trattati nel capitolo 4.

Se assumiamo per esempio  $A = 1.41$  e  $W = 6280$  rad. si ha :

$$C(r) \cong \text{Cos } (6280 r)$$

dove  $r$ , in secondi, è la variabile aggiunta che consente di mostrare quale interdipendenza esiste tra la funzione  $A \text{ Sen } Wt$  e la stessa spostata nel tempo  $A \text{ Sen } W(t+r)$  ; ciò è mostrato in figura 1.4.

La curva di figura 1.4 mostra l'andamento di  $C(r) \cong (A^2/2) \text{ Cos } Wr$  computato per un numero molto elevato di valori della variabile  $r$  in modo da consentire il tracciamento del profilo rappresentativo della funzione di correlazione con una soddisfacente continuità del tratto.

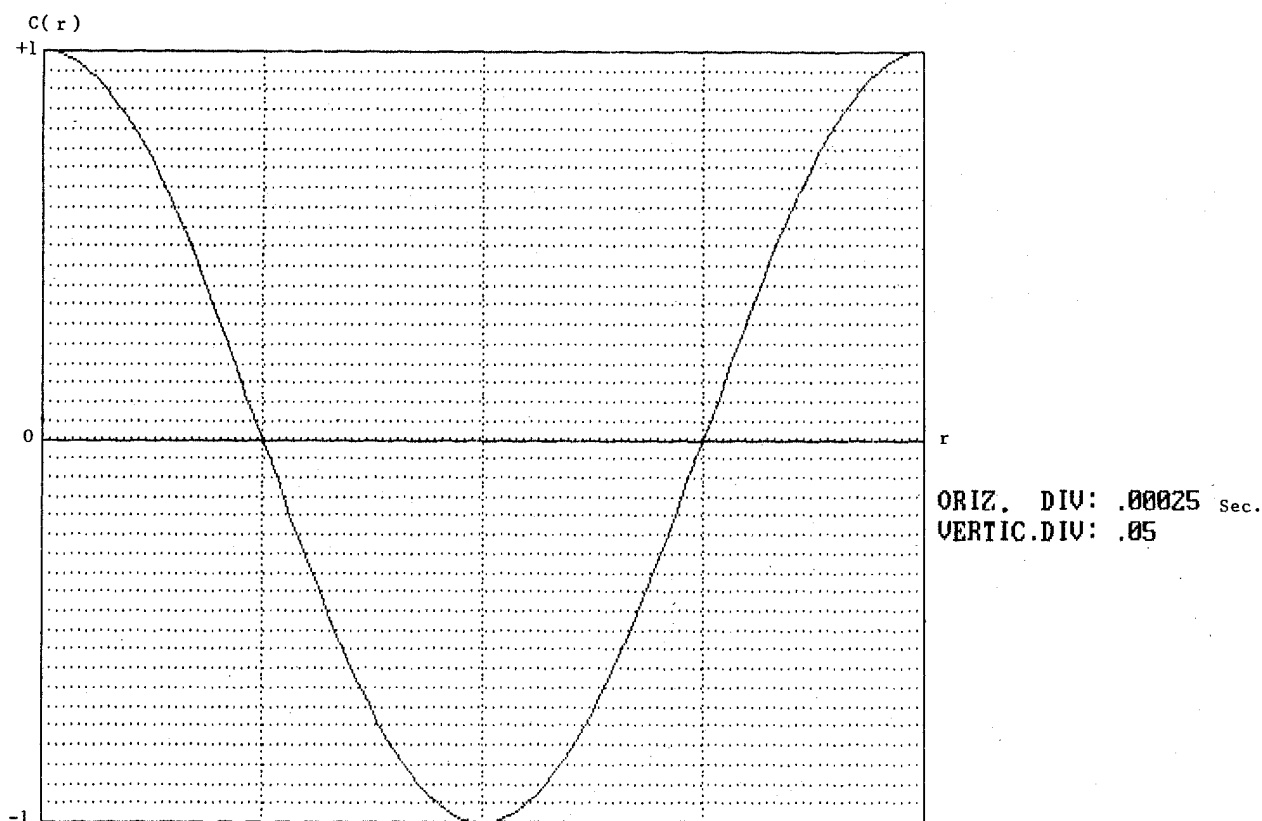


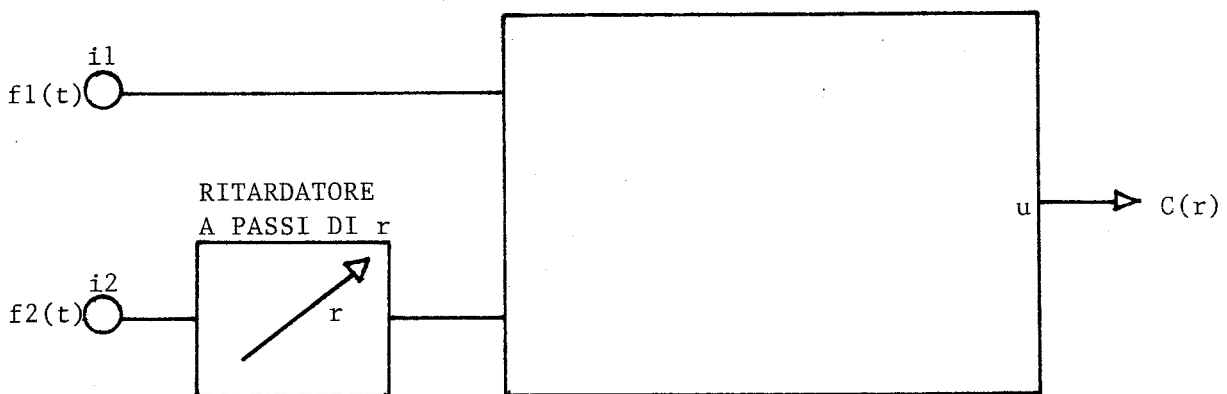
Figura 1.4  $C(r)$  della 1.9)

Dalla curva si osserva che i massimi valori positivi della funzione di autocorrelazione si ottengono per  $r=0$  ;  $r=1/1000$  Sec. ecc. secondo la legge del coseno. I massimi valori negativi si ottengono: il primo per  $r = 0.5/1000$  Sec. e gli altri secondo la legge del coseno. I valori di autocorrelazione nulla si ottengono per  $r=0.25/1000$  Sec. ;  $r=0.75/1000$  Sec. ecc. sempre secondo la legge del coseno.

Con questo esercizio abbiamo mostrato la semplicità nell'impiego dell'algoritmo di autocorrelazione e la facile manipolazione dei dati nelle fasi di calcolo e nel tracciamento del grafico di figura.1.4

Tutte le operazioni che abbiamo ora eseguito sono automaticamente svolte da un dispositivo (CORRELATORE) hardware o software; qui di seguito descriveremo la struttura funzionale hardware di un correlatore del tipo analogico il cui schema a blocchi è mostrato in figura 1.5

Il correlatore analogico riportato nella figura, è costituito da un insieme con due ingressi  $i_1$  ed  $i_2$ , da un gruppo di ritardo a passi di  $r$  variabile a comando, da un blocco di moltiplicazione ed integrazione da cui, tramite l'uscita  $u$ , si preleva la funzione  $C(r)$  voluta.



*Figura 1.5 Correlatore analogico*

Questa struttura consente il calcolo automatico di  $C(r)$  o  $C(r)_{1,2}$  al variare del ritardo  $r$ , sia della funzione  $f(t)=A\sin Wt$  che abbiamo preso ad esempio che di qualsiasi altro tipo di funzione del tempo che possa presentarsi per la soluzione dei più svariati problemi tecnici.

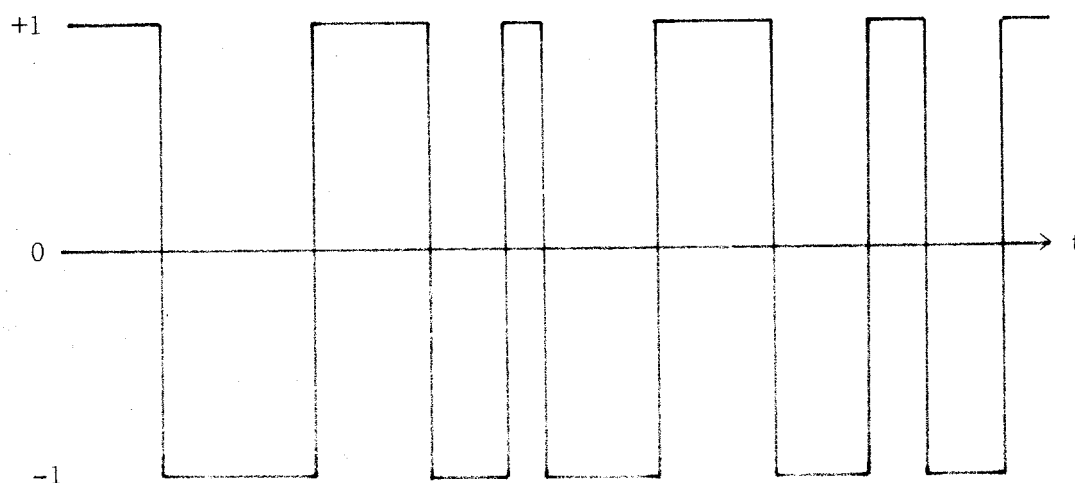
La figura 1.5 mostra chiaramente che se si deve computare la funzione di autocorrelazione il segnale applicato sarà unico e  $f_1(t)$  sarà uguale a  $f_2(t)$  e gli ingressi  $i_1$  e  $i_2$  saranno collegati tra loro a formare un solo ingresso.

Se invece si deve computare la funzione di correlazione incrociata  $f_1(t)$  sarà applicata all'ingresso  $i_1$  ed  $f_2(t)$  sarà applicata all'ingresso  $i_2$ .

In entrambi i casi l'uscita ( $u$ ) fornirà la correlazione richiesta in funzione del valore del ritardo  $r$  introdotto.

Un secondo esempio servirà ulteriormente a chiarire i concetti già esposti; andiamo pertanto a calcolare la funzione di autocorrelazione relativa ad una funzione del tempo ad andamento casuale la cui legge di distribuzione è indicata in figura 1.6; questa legge può rappresentare tanto un fenomeno elettrico che meccanico od altro.

Il segnale riportato in figura 1.6 ha ampiezza costante ora positiva ora negativa, la durata di ciascun livello di tensione è diversa dalle altre e non segue alcuna legge deterministica.



*Figura 1.6 Segnale a due stati.*

La funzione di autocorrelazione di questa particolare funzione del tempo non può essere calcolata con la formula classica 1.8) ma attraverso una serie di complesse operazioni di analisi matematica che non è utile sviluppare in questa sede.

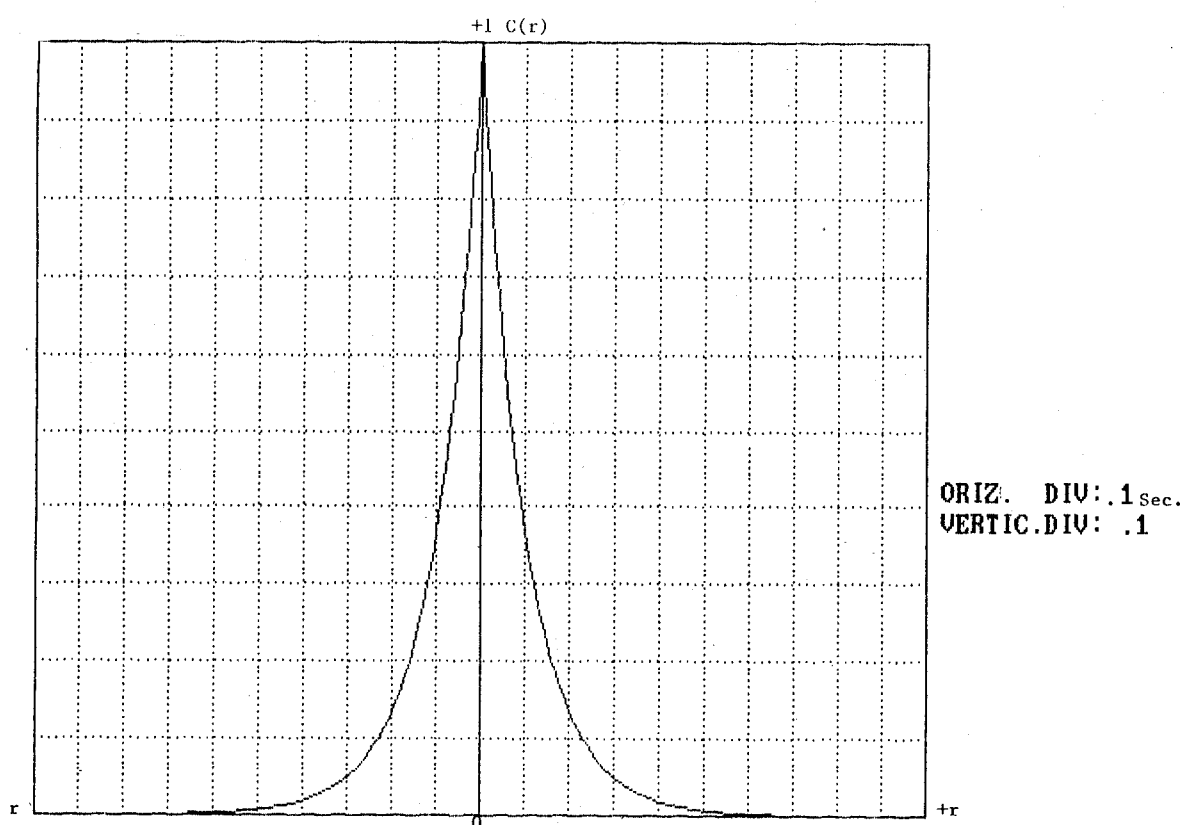
È interessante invece mostrare il risultato di queste operazioni; la funzione di autocorrelazione calcolata è:



$$C(r) = \exp (- 2K | r | ) \quad 1.10)$$

dove K è una variabile dipendente dalle caratteristiche del segnale (vedi Rif.bibliografico n.5).

L'andamento di C(r) in dipendenza della variazione di r per K=5 è riportato in figura 1.7



*Figura 1.7 C(r) della 1.10)*

Questo andamento mostra chiaramente che la funzione originale è interdipendente con se stessa ritardata del tempo r, soltanto per piccoli valori di r dopo di ch  i valori di interdipendenza (o autocorrelazione) si riducono a valori molto bassi fino ad annullarsi.

Il risultato della 1.10) mostrato in figura 1.7 si ottiene automaticamente, con una certa approssimazione, all'uscita di un correlatore del tipo di quello mostrato in figura 1.5.

Da ciò una volta di più l'interesse e l'importanza di questi dispositivi che consentono di eseguire la correlazione delle più diverse tipologie di funzioni temporali.

### **1.3 LA DIPENDENZA DELLE FUNZIONI DI AUTOCORRELAZIONE DALLA BANDA DEI SEGNALE DI INGRESSO.**

Nella maggioranza dei casi pratici, in qualsivoglia applicazione tecnica, i segnali di ingresso al correlatore sono generalmente distribuiti in ben determinate bande di frequenza.

La distribuzione spettrale nell'ambito della banda è il più delle volte di tipo rettangolare o ragionevolmente assimilabile ad essa.

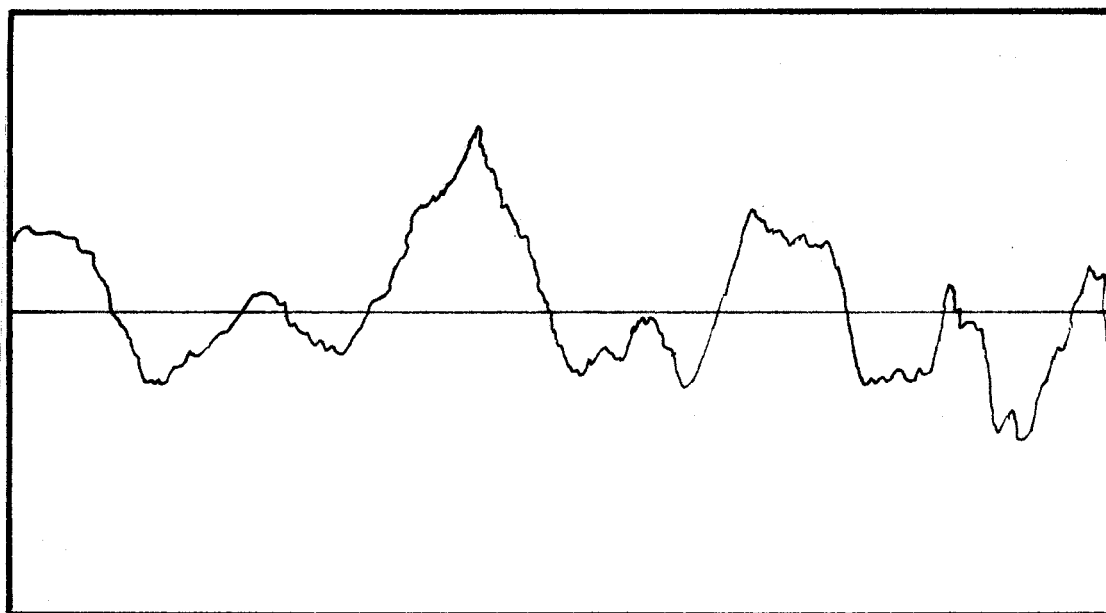
In alcuni casi particolari invece la distribuzione spettrale nell'ambito della banda può essere vincolata dalla curva di risposta di un circuito risonante che determina la selettività del sistema in esame.

In questi casi le formule riportate ai punti 1.7) e 1.8) non sono applicabili; algoritmi diversi devono essere sviluppati per il calcolo delle funzioni di autocorrelazione.

Dato però che questo lavoro si propone di fornire al tecnico gli strumenti per operare in un'ampia casistica di situazioni, e dato ancor più che il correlatore indicato in figura 1.5. in grado di eseguire il calcolo di  $C(r)$  o  $C(r)_{1,2}$  con qualsiasi tipo di segnali di ingresso sarà sufficiente riportare qui di seguito le funzioni di autocorrelazione nei diversi casi che la pratica potrà presentare.

Nei paragrafi seguenti si parlerà di generiche grandezze funzioni del tempo, e le si considereranno come segnali del tipo  $f(t)$  definiti in una determinata banda di frequenze; queste grandezze si potranno visualiz-

zare, se saranno sotto forma di tensioni elettriche, sullo schermo di un oscilloscopio ed avranno l'aspetto mostrato in figura 1.8



*Figura 1.8 Tensione ad andamento casuale*

L'andamento di queste tensioni, dette comunemente “tensioni ad andamento casuale”, mostra che l'ampiezza è variabile nel tempo disordinatamente e che la polarità istantanea è distribuita a caso tanto nel campo dei valori positivi che in quello dei valori negativi.

Le tensioni ad andamento casuale saranno chiamate, nel prosieguo del testo, “SEGNALI DI RUMORE”, ciò per uniformarsi alla terminologia corrente impiegata nei sistemi per l'elaborazione dei segnali.

Lo stesso andamento mostrato in figura 1.8 è comune anche alle tensioni relative al disturbo che in alcuni casi inquina i segnali da correlare.

### 1.3.1 DEFINIZIONE DELLE FORMULE PER IL CALCOLO DI $C(r)$ DI SEGNALE DISTRIBUITI IN BANDE RETTANGOLARI.

Come abbiamo già accennato in precedenza le formule che saranno ora definite presuppongono che la banda dei segnali di ingresso al correlatore abbia uno spettro di tipo rettangolare.

#### 1.3.1.1 Funzione di autocorrelazione di un segnale di rumore compreso tra $F1$ e $F2$ .

La funzione di autocorrelazione normalizzata di un segnale ad andamento casuale, contenuto entro la banda di frequenze compresa tra  $F1$  e  $F2$  è:

$$C(r) = \frac{\text{Sen}(6.28 DF r)}{(6.28 DF r)} \text{Cos}(6.28 Fo r) \quad 1.11)$$

dove  $DF = (F2-F1)/2$  e  $Fo = (F2+F1)/2$

L'andamento della  $C(r)$  nell'ipotesi di  $F1 = 7000$  Hz,  $F2 = 10000$  Hz è riportato nel grafico di figura 1.9

La curva mostra che la  $C(r)$  è formata da un'onda a periodo relativamente elevato modulata da un'onda a periodo più basso; la prima dovuta al termine  $\text{Cos}(6.28 Fo r)$ , la seconda dovuta al termine

$$\frac{\text{Sen}(6.28 DF r)}{(6.28 DF r)}$$

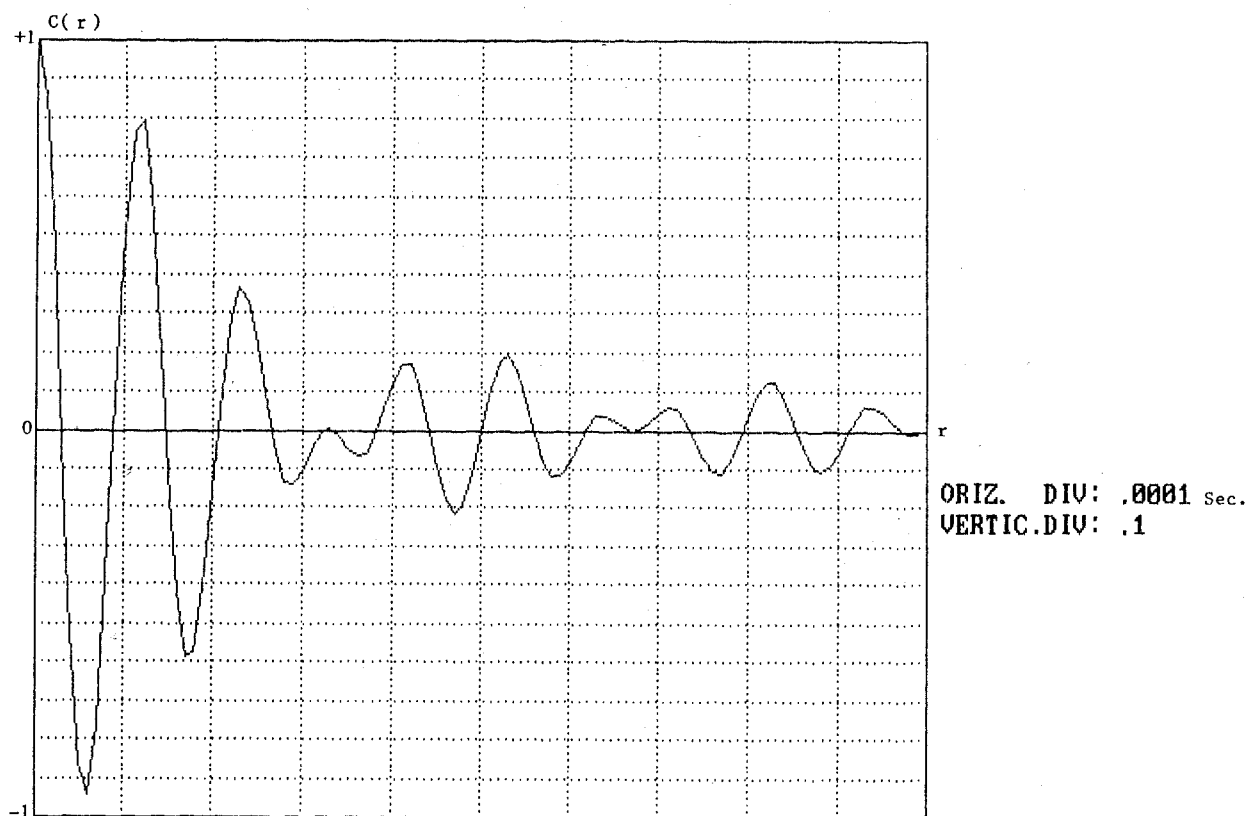


Figura 1.9  $C(r)$  della 1.11)

E' utile, per il lavoro futuro, fare alcune osservazioni in merito ad alcune caratteristiche distintive della curva di figura 1.9.

A) Dal tracciato si possono misurare i valori di  $r$  in cui si azzera la  $C(r)$  che definiscono i passaggi per l'asse delle ascisse della funzione del tempo che mostra l'oscillazione a frequenza maggiore; il primo zero si evidenzia per  $r_1 = 29.4$  microsecondi, il secondo a 88.2 microsecondi, e così via secondo la legge del coseno, la cui espressione è parte della 1.11).

Si hanno infatti gli zeri della 1.11) per tutti i valori di  $r$  che soddisfano alla relazione:  $\cos(6.28 F_0 r) = 0$ , cioè per  $(6.28 F_0 r) = n \pi$

dove  $n$  è un intero dispari; caratteristico è il primo zero che si trova per  $n = 1$  a  $r_1 = 1/4F_0 = 1/(4 \times 8500) = 29.4$  microsecondi come abbiamo rilevato nel grafico.

B) Sempre nel tracciato si possono rilevare i valori in cui si azzerava la  $C(r)$  che costituiscono la parte caratteristica del termine “modulante” della 1.11) :

$$\text{Sen}(6.28 \text{ DF } r) = 0$$

cioè per  $(6.28 \text{ DF } r) = n \cdot 3.14$  dove  $n$  è un intero; caratteristico è il primo zero che si trova per  $n = 1$   $r_2 = 1/2DF = 1/3000 = 333.333$  microsecondi.

#### 1.3.1.2. Funzione di autocorrelazione di un segnale di rumore compreso tra 0 e $F_1$

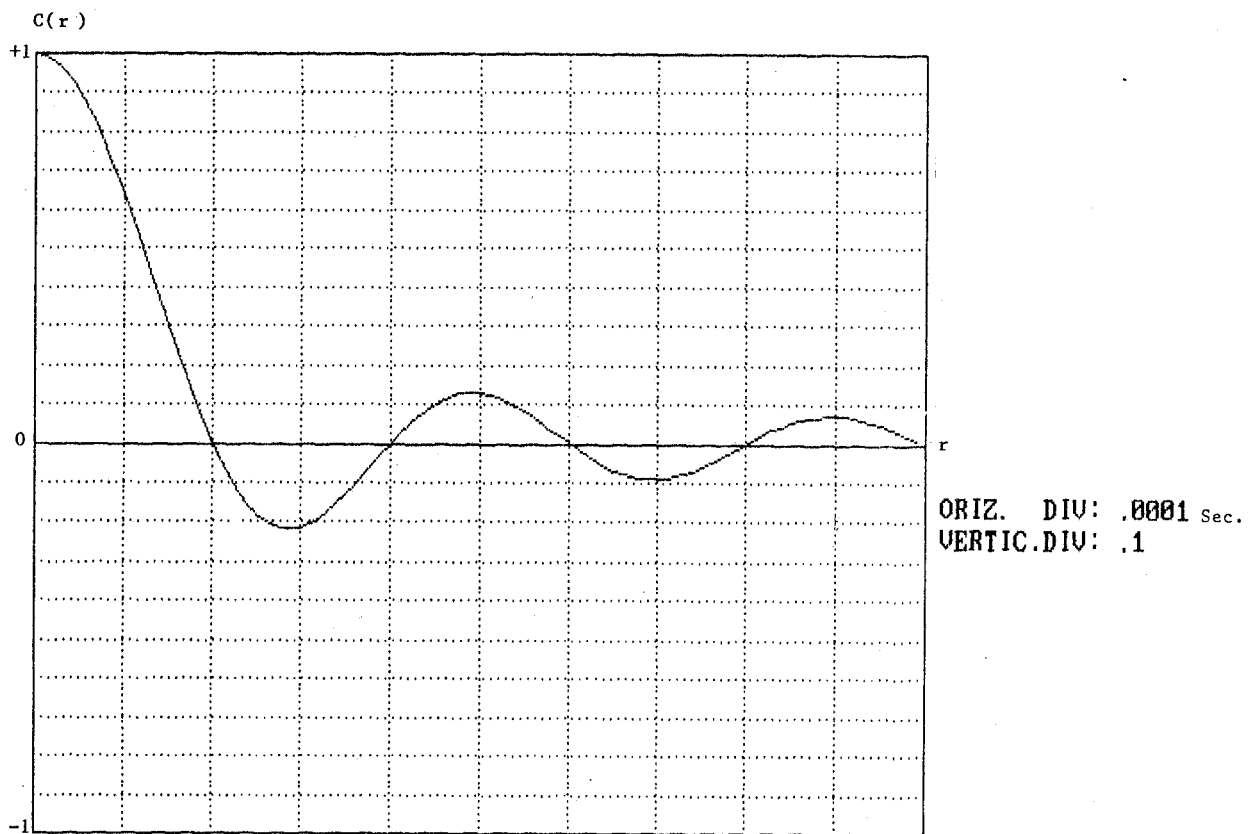
La funzione di autocorrelazione normalizzata di un segnale ad andamento casuale, contenuto entro la banda di frequenze compresa tra 0 e  $F_1$  è:

$$C(r) = \frac{\text{Sen}(6.28 F_1 r)}{(6.28 F_1 r)} \quad 1.12)$$

L'andamento della  $C(r)$  nell'ipotesi che  $F_1$  sia 2500 Hz è riportato nel grafico di figura 1.10; il profilo della curva è il classico della funzione

$$\frac{\text{Sen } x}{x}$$





*Figura 1.10  $C(r)$  della 1.12)*

Anche in questo caso si dimostrerà utile mettere in evidenza la caratteristica distintiva della  $C(r)$  che consente con facilità di definire una relazione tra il primo zero della  $C(r)$  e il limite superiore  $F1$  della banda del segnale.

Come si vede dal grafico di figura 1.10 il primo zero della  $C(r)$  si ha per  $r_1 = 200$  microsecondi; si hanno infatti gli zeri della 1.12) per tutti i valori di  $r$  che soddisfano la relazione:

$$\text{Sen}(6.28 F1 r) = 0 \quad \text{cioè per} \quad (6.28 F1 r) = n 3.14$$

dove  $n$  è un intero ; il primo zero si ha infatti per  $n=1$

$$r_1 = 1/2F1 = 1/(2 \times 2500) = 200 \text{ microsecondi}$$

### **1.3.2 DEFINIZIONE DELLA FORMULA PER IL CALCOLO DI $C(r)$ PER SEGNALI DEFINITI IN BANDA NON RETTANGOLARE.**

La funzione di autocorrelazione normalizzata di un segnale di rumore il cui spettro è determinato dalla selettività di un circuito risonante con date caratteristiche elettriche è:

$$C(r) = [\cos W_0 r - (1/2Q) \sin(W_0 |r|)] \times \exp(-W_0 |r|/2Q) \quad 1.13)$$

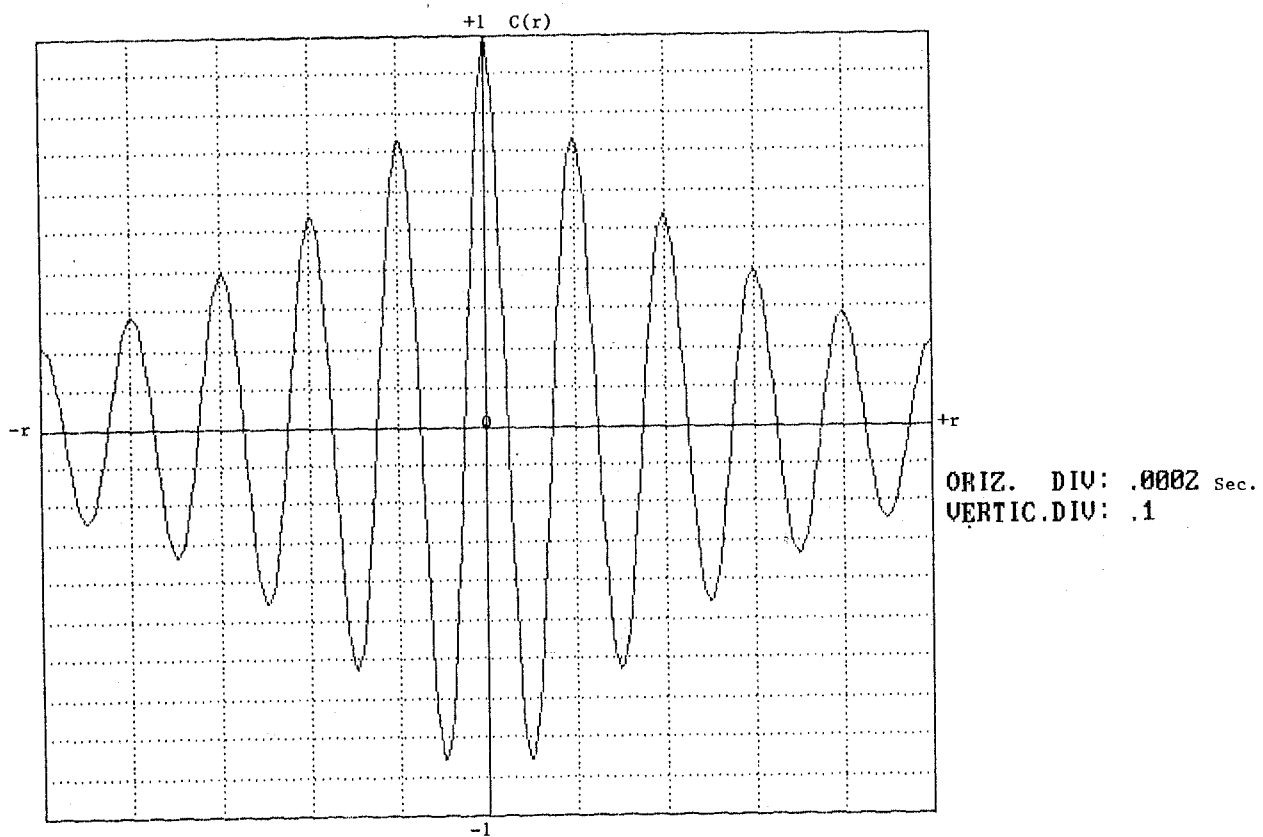
dove le caratteristiche del circuito risonante sono:

$Q$  = coefficiente di merito

$W_0$  = pulsazione di risonanza

L'andamento della  $C(r)$  per  $Q = 10$  ed  $W_0=31416$  è riportato in figura 1.11 in funzione di  $r$ .

In questo esempio il profilo della curva mostra un'onda a periodo relativamente elevato modulata da un'onda a periodo più basso; la prima dovuta al termine trigonometrico, la seconda dovuta al termine esponenziale.



*Figura 1.11  $C(r)$  della 1.13)*

### 1.3.3 OSSERVAZIONI SUL CALCOLO DELLE FUNZIONI DI AUTOCORRELAZIONE IN GENERALE.

Per il calcolo e il successivo tracciamento grafico delle funzioni di autocorrelazione che sono state prese in esame nei paragrafi precedenti è sufficiente disporre di un calcolatore tascabile programmabile nel quale sviluppare le formule che definiscono le diverse funzioni di  $C(r)$ , quali la 1.9), la 1.10), la 1.11), la 1.12) e la 1.13) e ponendo opportunamente le variabili si potranno calcolare, per diversi valori di esse, i corrispondenti valori di  $C(r)$  da riportare poi in diagrammi cartesiani.

Elenchiamo le variabili per le cinque funzioni normalizzate già citate:

1.9)  $C(r) = \cos Wr$  Si fissa il valore di  $W=6.28 F$ , si fa variare il valore di  $r$  da 0 a crescere sino ad ottenere il grafico desiderato.

1.10)  $C(r) = \exp(-2k|r|)$  Si fissa il valore di  $K$ , si fa variare  $r$  da 0 a crescere, o a decrescere, fino ad ottenere il grafico desiderato.

1.11)  $C(r) = \frac{\sin(6.28 DF r)}{(6.28 DF r)} \cos(6.28 Fo r)$   
Si fissano i valori di  $F1$  e  $F2$  da cui si ricavano :  $DF=(F2-F1)/2$  e  $Fo=(F2+F1)/2$ ; si fa variare  $r$  da 0 a crescere fino ad ottenere il grafico desiderato.

1.12)  $C(r) = \frac{\sin(6.28 F1 r)}{(6.28 F1 r)}$  Si fissa il valore di  $F1$ ; si fa variare  $r$  da 0 a crescere fino ad ottenere il grafico desiderato.

1.13)  $C(r) = [\cos(Wo r) - (1/2Q) \sin(Wo |r|)] \times \exp(-Wo |r|/2Q)$

Si fissano i valori di  $Wo$  e  $Q$ ; si fa variare  $r$  da 0 a crescere o a decrescere fino ad ottenere il grafico desiderato.

## 1.4 ESTENSIONE DEL CONCETTO DI AUTOCORRELAZIONE PER SERIE INFINITE DI GRANDEZZE A DUE STATI

### 1.4.1 SULLE GRANDEZZE A DUE STATI

Nel paragrafo 1.2 abbiamo introdotto le grandezze funzioni del tempo, genericamente definite con il simbolo  $f(t)$ ; una grandezza di questo tipo è caratterizzata, per ogni istante del tempo  $t$ , sia da un valore di ampiezza che dalla polarità, positiva o negativa, del valore stesso.

Le grandezze a due stati hanno invece una diversa struttura; per ogni istante del tempo  $t$  hanno sempre ampiezza costante con polarità positiva o negativa.

La legge di durata nel tempo degli intervalli positivi o negativi definisce il tipo della grandezza, che indicheremo con  $X(t)$ .

E' facile trasformare, se necessario, le grandezze  $f(t)$  in  $X(t)$  mediante sistemi di limitazione di ampiezza.

Un caso semplice si ottiene partendo dalla  $f(t) = A \text{ Sen } wt$  che dopo limitazione in ampiezza si trasforma nella corrispondente  $X(t)$ , come è chiaramente mostrato in figura 1.12.

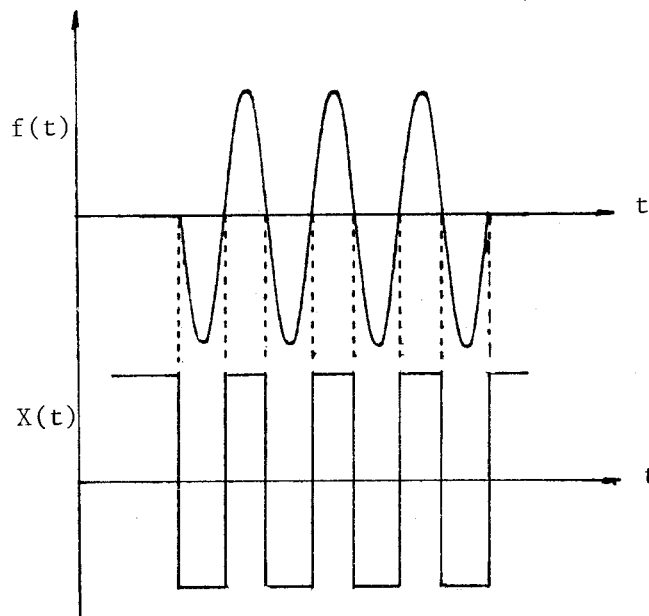


Figura 1.12 Trasformazione di  $f(t)$  in  $X(t)$

### 1.4.2 LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER LE GRANDEZZE A DUE STATI

Gli algoritmi che definiscono le funzioni di autocorrelazione per le grandezze  $X(t)$  di dati continui a due stati discendono dalle omologhe per i dati  $f(t)$  secondo la teoria esposta da VAN VLECK per le grandezze del tempo a distribuzione gaussiana.

Anche in questo caso non entreremo nell'area delle dimostrazioni analitiche, ma riporteremo, caso per caso, le diverse formule per il calcolo delle funzioni di autocorrelazione che definiremo  $C(r)_x$  per differenzialle dalle corrispondenti  $C(r)$ .

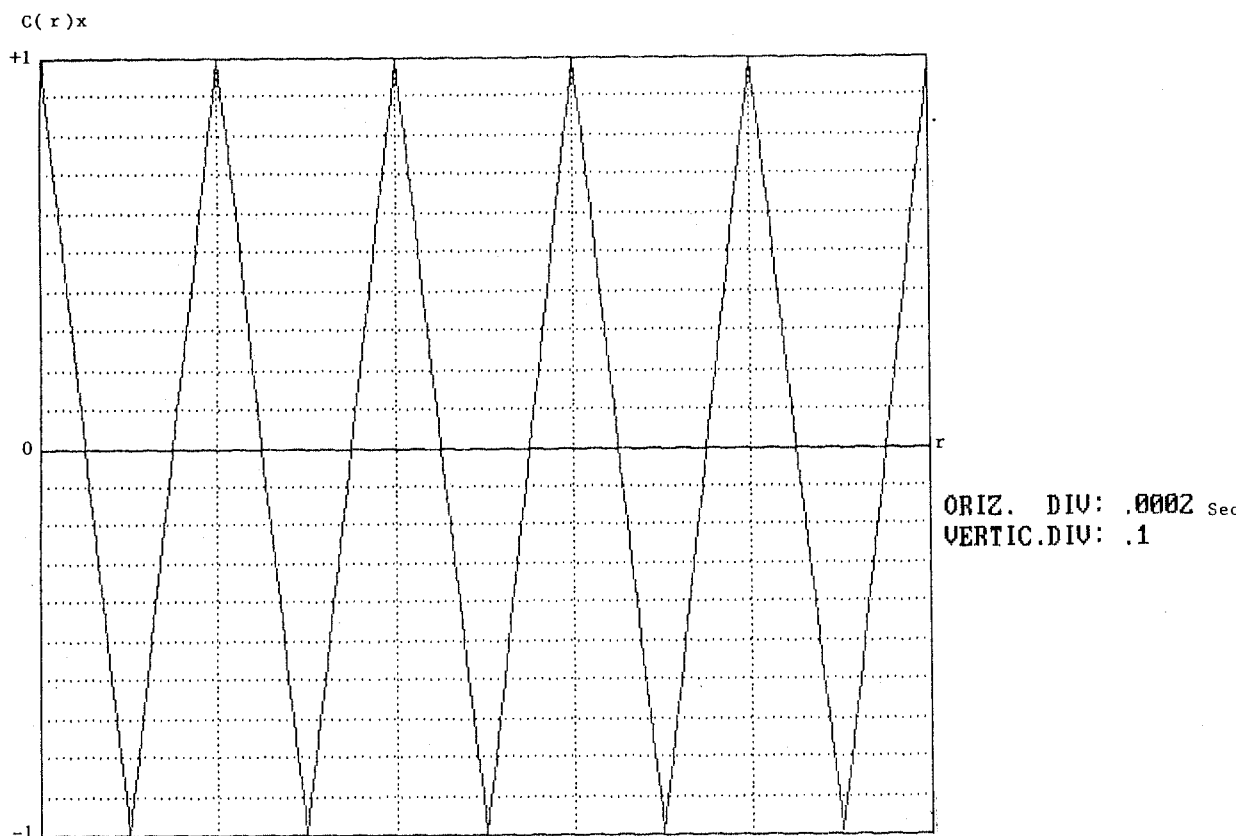
#### 1.4.2.1 La funzione di autocorrelazione $C(r)_x$ per la grandezza $X(t)$ mostrata in figura 1.12.

La funzione di autocorrelazione normalizzata per una grandezza  $X(t)$  del tipo di quella riportata in figura 1.12 (onda rettangolare) è definita come segue:

$$C(r)_x = (2/3.14) \text{ Arcsen } (\text{Cos } W r) \quad 1.14)$$

dove  $W = 6.28 F$

L'andamento della  $C(r)_x$  per  $W = 31415 \text{ rad.}$  è mostrato in figura 1.13. Il profilo della curva è rappresentato da un'onda triangolare ad ampiezza costante in tutto il campo di variabilità di  $r$ .



*Figura 1.13  $C(r)x$  della 1.14)*

Le osservazioni fatte per gli zeri caratteristici delle  $C(r)$  valgono anche nei casi delle  $C(r)x$ .

Per la migliore comprensione di quanto andremo in seguito ad esporre è utile conoscere la relazione fondamentale che trasforma le  $C(r)$  nelle  $C(r)x$  ; questa è definita, secondo VAN VLECK, dall'espressione:

$$C(r)x = (2/3.14) \text{ Arcsen } C(r) \quad 1.15)$$

#### 1.4.2.2 Le funzioni di autocorrelazione per le grandezze $X(t)$ definite in banda di rumore.

In questo caso si deve supporre che le grandezze  $f(t)$ , da cui discendono le  $X(t)$ , abbiano uno spettro di tipo rettangolare limitato nella banda compresa tra 0 e  $F1$  o tra  $F1$  e  $F2$ .

Nel caso di banda compresa tra 0 e  $F1$ , per la 1.15), la  $C(r)_x$  sarà:

$$C(r)_x = (2/3.14) \operatorname{Arcsen} \left[ \frac{\operatorname{Sen}(6.28 F1 r)}{(6.28 F1 r)} \right] \quad 1.16)$$

il cui andamento grafico, per  $F1 = 2500$  Hz, è riportato in figura 1.14.

Dalla figura 1.14 si nota la differenza tra la  $C(r)_x$  e la  $C(r)$  di figura 1.10: la prima presenta una cuspide per  $r=0$ , mentre la seconda mostra un profilo arrotondato caratteristico delle funzioni  $\operatorname{Sen}x/x$ .

La cuspide di  $C(r)_x$  è dovuta alla funzione:

$$\operatorname{Arcsen} \left[ \frac{\operatorname{Sen}(6.28 F1 r)}{(6.28 F1 r)} \right]$$

che nel piccolo intorno di  $r = 0$  altro non è che l'arco  $(6.28 F1 r)$  variabile linearmente con  $r$ . Con il crescere di  $r$  la dipendenza lineare viene a mancare e la 1.16) riprende l'andamento caratteristico simile alla funzione espressa dalla 1.12).



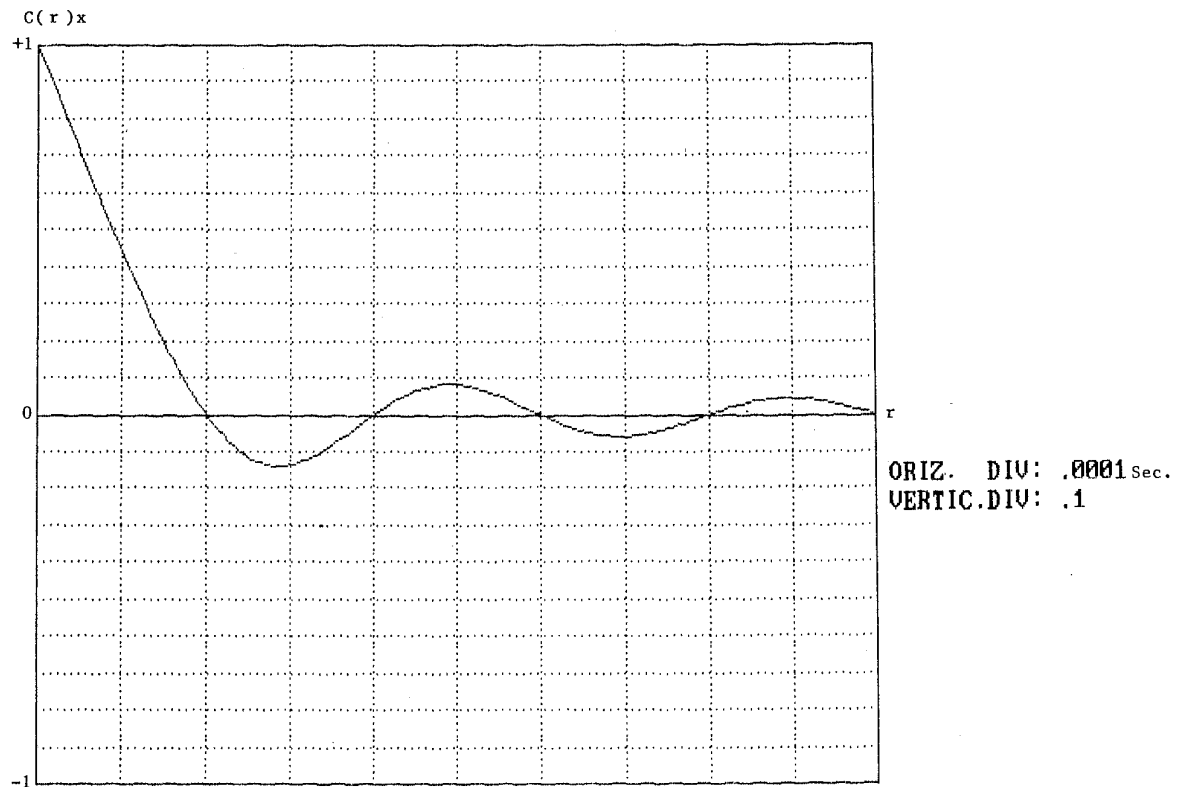


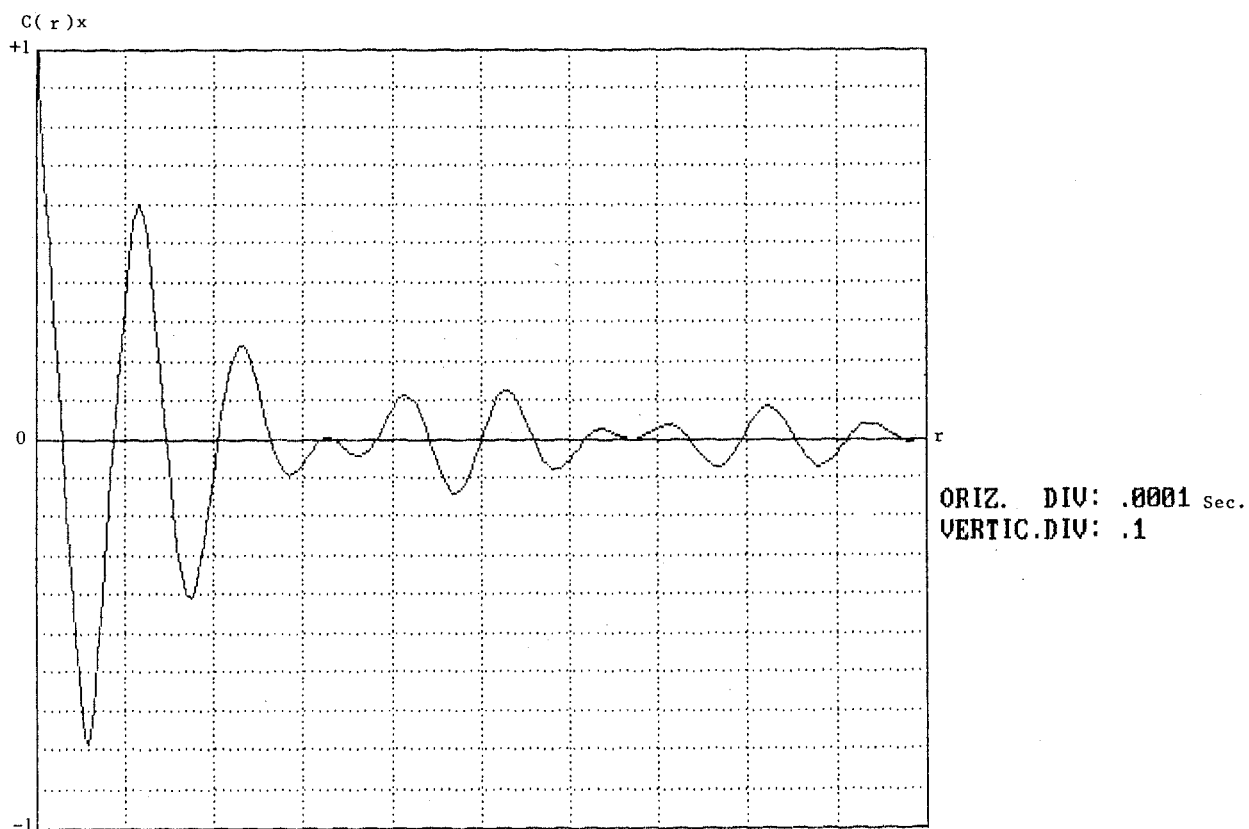
Figura 1.14  $C(r)x$  della 1.16)

Nel caso di banda compresa tra  $F1$  e  $F2$  la  $C(r)x$  sarà:

$$C(r)x = (2/3.14) \text{ Arcsen } \left[ \frac{\text{Sen}(6.28 \text{ DF } r)}{(6.28 \text{ DF } r)} \text{ Cos } (6.28 \text{ Fo } r) \right] \quad 1.17)$$

L'andamento della  $C(r)x$  nell'ipotesi di  $F1=7000 \text{ Hz}$ ,  $F2 = 10000 \text{ Hz}$  è riportato nel grafico di figura 1.15.

Dalla figura 1.15 si nota la differenza tra la  $C(r)x$  e la  $C(r)$  di figura 1.9: la prima presenta una cuspide per  $r=0$ , mentre la seconda mostra un profilo arrotondato.



*Figura 1.15  $C(r)x$  della 1.17)*

### 1.4.2.3 Osservazioni sulle grandezze $X(t)$

Data la facilità con la quale si può trasformare una grandezza del tipo  $f(t)$  in  $X(t)$ , mediante l'impiego di un circuito di limitazione d'ampiezza, nel prosieguo di questo lavoro, quando si tratterà della correlazione dei segnali a due stati tipo  $X(t)$ , si menzioneranno sempre le  $f(t)$  nel presupposto che, nelle applicazioni circuitali, queste grandezze siano sempre seguite da dispositivi di limitazione. La ragione di ciò risiede nel fatto che le misure delle ampiezze dei segnali e dei rumori che li inquinano non si possono eseguire direttamente altro che su gran-

dezze del tipo  $f(t)$ ; i rapporti tra i segnali ed i disturbi misurati prima dei limitatori sono applicabili a tutte le forme di calcolo che interessano le  $C(r)x$ .

#### **1.4.2.4 Osservazioni sulle funzioni $C(r)x$**

Questo tipo di funzioni è utile sia per calcolare a priori il risultato dell'autocorrelazione di segnali aventi le caratteristiche indicate nel paragrafo 1.4.1, sia per eseguire con hardware di tipo logico autocorrelazioni del tipo  $C(r)$ , che normalmente richiedono hardware di tipo analogico; vedremo in seguito che ciò è fattibile pagando un modesto scotto in termini di prestazioni che però sono bilanciate dai costi di realizzazione notevolmente inferiori.

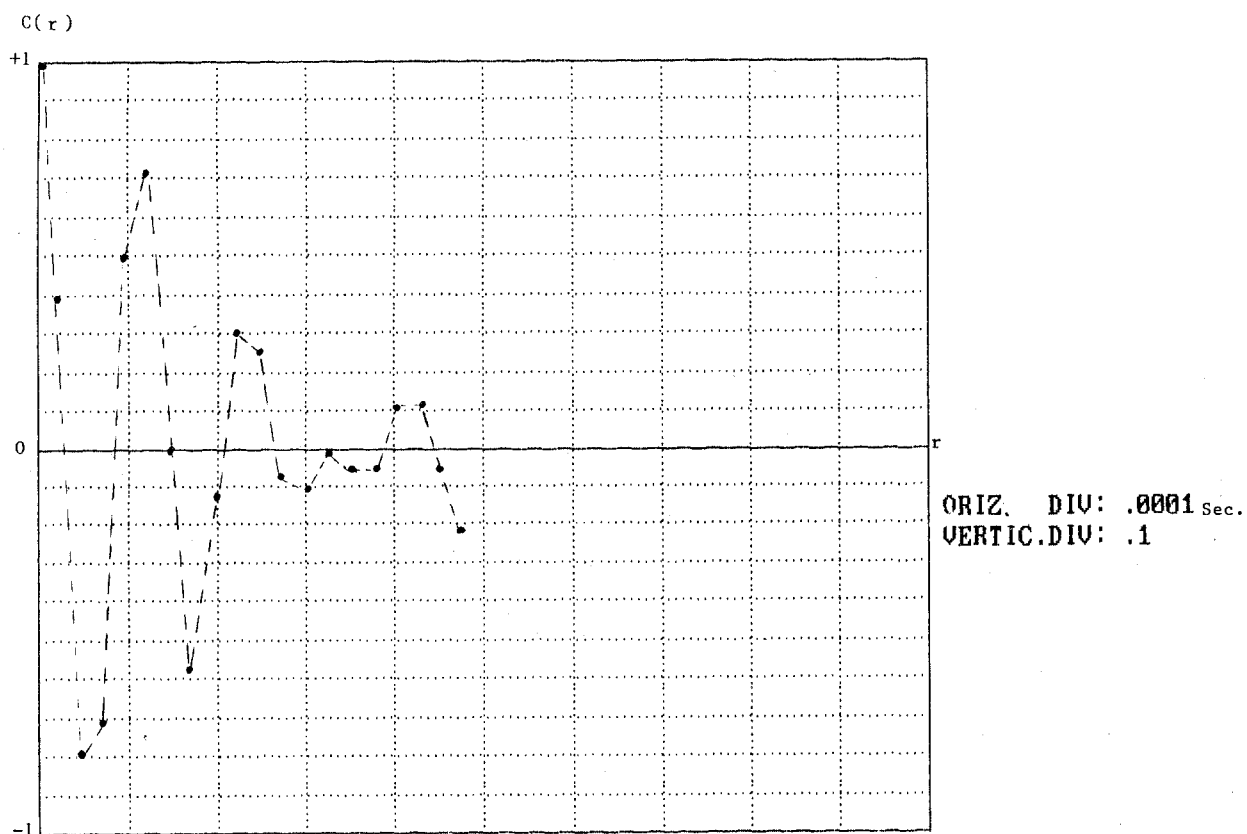
### **1.5 OSSERVAZIONI SUI GRAFICI $C(r)$ E $C(r)x$ .**

I grafici di  $C(r)$  e  $C(r)x$  mostrati rispettivamente nelle figure 1.4;1.7;1.9;1.10;1.11;1.13;1.14;1.15 sono stati calcolati per innumerevoli valori della variabile  $r$ , e inoltre le curve sono frutto di un'accurata interpolazione tra i valori contigui di  $C(r)$  o  $C(r)x$ , in modo che esse si presentino con andamenti praticamente continui.

In realtà quando si andranno a ricavare sperimentalmente, con idonei dispositivi di correlazione, le funzioni menzionate, i valori dei ritardi  $r$  saranno in numero ragionevolmente limitato e pertanto si ricaveranno dei valori discreti delle  $C(r)$  o  $C(r)x$ , che, riportati in assi cartesiani, forniranno dei profili a punti delle funzioni di autocorrelazione elaborate.

Il tipo di rappresentazione grafica citato può essere mostrato ad esempio pensando di ottenere con un correlatore la  $C(r)$  della formula

1.11) con un numero di passi di ritardo  $n=20$  (un passo ogni 25 microsecondi) ; in questo modo la fig. 1.9 si trasformerà nella seguente figura 1.16.



*Figura 1.16  $C(r)$  ricavata per punti*

Naturalmente più numerosi saranno i passi di ritardo, tanto più il grafico sarà vicino al profilo della funzione di autocorrelazione teorica. Ciò però non deve dare l'impressione che il metodo non sia valido; infatti prima di eseguire le misure discrete si avrà l'accortezza di tracciare,

con un calcolatore programmabile, la curva che ci si attende, similmente a quelle già mostrate nei paragrafi precedenti, dopo di che si andranno a sovrapporre i singoli valori misurati all'uscita del correlatore sulla curva stessa; dalla posizione di ciascun valore si potrà giudicare se i dati sono attendibili o meno.

Naturalmente non ci si potrà aspettare una coincidenza perfetta tra valori misurati e valori calcolati dato che molti fattori influenzano le misure; ci si dovrà ritenere ragionevolmente soddisfatti se la serie di valori ricavati seguirà la curva teorica con errori entro il  $\pm 10\%$ .

Potrà accadere che non conoscendo le leggi che governano i segnali non si potranno avere i riscontri teorici con le curve di  $C(r)$  o  $C(r)x$  precalcolate; in questo caso una volta certi del corretto funzionamento del correlatore, si cercherà di aumentare al massimo il numero dei passi di ritardo  $r$  per poi raccordare a mano i valori discreti della funzione di correlazione e tracciarne il grafico rappresentativo. Giova a questo punto tenere presente che difficilmente si creano evidenti discontinuità tra i dati e pertanto si dovrà essere attenti di fronte a brusche variazioni dei grafici che non consentono un ragionevole raccordo tra i punti delle curve.

## 1.6 CHIARIMENTI IN MERITO ALLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE INCROCIATA.

Nell'esposizione delle diverse formule per il calcolo di  $C(r)$  e  $C(r)x$  abbiamo sempre osservato che il valore massimo della funzione di autocorrelazione corrisponde con il valore di  $r=0$ .

Questa condizione dipende dal fatto che la  $f(t)$  o la  $X(t)$  presa in esame, viene correlata, per  $r=0$ , con se stessa negli stessi istanti, per cui si ha il massimo grado di interdipendenza.

Appena i valori temporali del confronto cambiano, con il crescere di  $r$  le funzioni di autocorrelazione decrescono mostrando i caratteristici andamenti riportati nei paragrafi precedenti.

Nel caso delle funzioni di correlazione incrociata possono verificarsi due casi diversi nei quali le  $C(r)_{1,2}$  o  $C(r)x_{1,2}$  normalizzate raggiungono il massimo valore uguale a 1 :

A) Le  $C(r)_{1,2}$  o  $C(r)x_{1,2}$  hanno il massimo valore di correlazione incrociata per  $r=0$ ; ciò significa che  $f_1(t)$  ed  $f_2(t)$  sono interdipendenti per  $r=0$  e che il loro grado di interdipendenza decresce con il crescere di  $r$  così come per le funzioni di autocorrelazione.

In questo caso le formule 1.9); 1.10); 1.11); 1.12); 1.13); 1.14); 1.16); 1.17) impiegate per il calcolo della  $C(r)$  o  $C(r)x$  sono applicabili direttamente anche per il calcolo della  $C(r)_{1,2}$  o  $C(r)x_{1,2}$  e valgono per queste ultime tutte le osservazioni fatte per le funzioni di autocorrelazione.

B) Le  $C(r)_{1,2}$  o  $C(r)x_{1,2}$  hanno il massimo valore di correlazione incrociata per  $r=r^*$  ; ciò significa che  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  sono interdipendenti per  $r=r^*$  e che il loro grado di interdipendenza decresce quando  $r$  aumenta o diminuisce rispetto al valore di  $r^*$ .

Una tra le tante possibili giustificazioni fisiche di questo comportamento può essere ad esempio attribuita al caso di un'unica sorgente di segnale che emette  $f(t)$  e che questo segnale si presenta poi al correlatore, tramite due sensori che lo ricevono da percorsi diversi rispetto alla sorgente; la  $f(t)$  si sarà trasformata temporalmente in  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ .

La  $f(t)$  si trasformerà in  $f_2(t)$  dopo aver subito un ritardo  $r_p$  dovuto al percorso così da poter scrivere:  $f_2(t) = f(t+r_p)$ .

La  $f(t)$  si trasformerà invece in  $f_1(t)$  dopo aver subito un ritardo  $(r_p + r^*)$ , maggiore del precedente, così da poter scrivere:

$$f_1(t) = f(t+r_p+r^*)$$

A questo punto l'interdipendenza massima si avrà quando la  $f_1(t)$  già ritardata per il maggior percorso di  $r^*$  sarà correlata con la  $f_2(t)$  ritardata di  $r^*$  dalla catena di ritardo del correlatore.

### 1.6.1 ESEMPI DI FUNZIONI DI CORRELAZIONE INCROCIATA

Riportiamo in questo paragrafo alcuni esempi di funzioni di correlazione incrociata che mostrano la condizione di interdipendenza di cui al punto B) del paragrafo precedente.

Il grafico della funzione di correlazione incrociata, per grandezze definite in bande di frequenze comprese tra 0 e  $F_1$  sarà simile a quello di figura 1.10, ma traslato nell'asse di  $r$  con il massimo per  $r^*$  e un profilo simmetrico per valori rispettivamente inferiori e superiore di  $r^*$ , così come mostrato nella seguente figura 1.17 per  $r^* = 500$  microsecondi e  $F_1 = 2500$  Hz.

Questo tipo di funzione è talvolta ricorrente nelle applicazioni tecniche dato che numerosi problemi comportano che il massimo della  $C(r)$  non coincida con  $r = 0$  ma generalmente con valori di  $r^*$  diversi da 0.

Molte volte, con la ricerca e la successiva determinazione di  $r^*$ , si possono risolvere importanti problemi di varia natura.

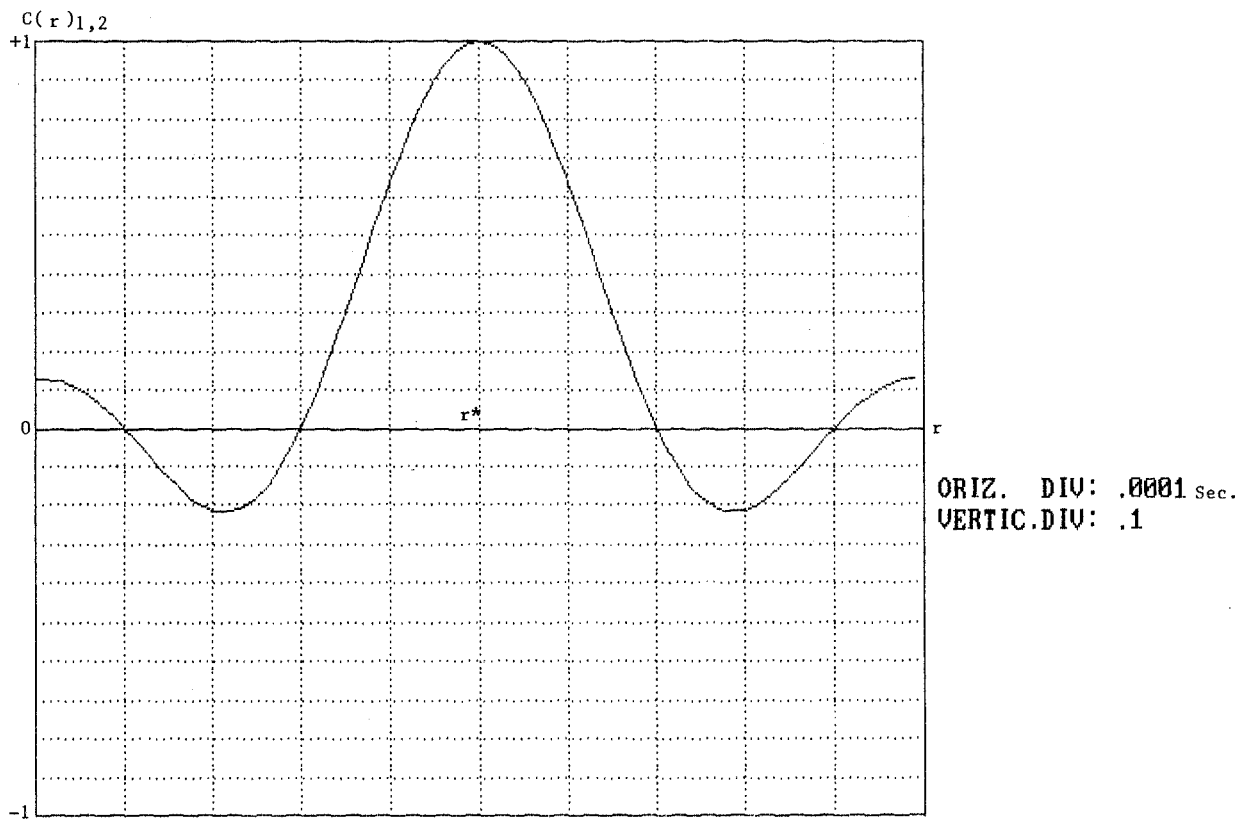


Figura 1.17  $C(r)_{1,2}$  per  $f_2(t)$  ritardata di  $r^*$

In questo caso la funzione di autocorrelazione  $C(r)$  si trasforma nella relazione:

$$C(r)_{1,2} = \frac{\text{Sen}[6.28 F_1 (r - r^*)]}{[6.28 F_1 (r - r^*)]} \quad 1.18)$$

Come per i grafici delle funzioni di autocorrelazione anche i grafici delle funzioni di correlazione incrociata, che hanno il massimo per  $r=r^*$ , si prestano ad alcune osservazioni caratteristiche :



Nel grafico di figura 1.17 si individuano due valori di  $r$ ,  $r_1$  e  $r_2$ , simmetrici rispetto ad  $r^*$ , per i quali la  $C(r)_{1,2}$  è zero ;  $r_1=300$  microsecondi  $r_2=700$  microsecondi; questi valori si ricavano semplicemente risolvendo l'equazione :

$$\text{Sen} [6.28 F_1 (r - r^*)] = 0$$

dalla quale si ha immediatamente  $| [6.28 F_1 (r - r^*)] | = n 3.14$  dove  $n$  è un intero. Nel caso di  $n = 1$  si ha  $|r - r^*| = 1/2F_1$  e i due valori di  $r_1$  ed  $r_2$  si ottengono come segue :

$$r_1 = [ r^* + ( 1/2F_1 ) ] = [ 0.0005 + (1/2 \times 2500) ] = 700 \text{ microsecondi}$$

$$r_2 = [ r^* - ( 1/2F_1 ) ] = [ 0.0005 - (1/2 \times 2500) ] = 300 \text{ microsecondi}$$

In modo analogo si può calcolare la funzione di correlazione incrociata per grandezze del tempo definite in bande di frequenze comprese fra  $F_1$  ed  $F_2$  che hanno il massimo grado di interdipendenza per  $r=r^*$  ; essa sarà simile a quella di figura 1.9, ma traslata nell'asse  $r$  con il valore massimo per  $r^*$  secondo la seguente espressione :

$$C(r)_{1,2} = \frac{\text{Sen} [ 6.28 DF (r - r^*) ]}{[ 6.28 DF (r - r^*) ]} \text{Cos} [ 6.28 Fo (r - r^*) ] \quad 1.19)$$

Lo sviluppo della 1.19) per:

$F1=7000$  Hz ;  $F2=10000$  Hz ;  $r^* = 500$  microsecondi dove  $DF=(F2-F1)/2$  e  $Fo=(F2+F1)/2$  è mostrato in figura 1.18.

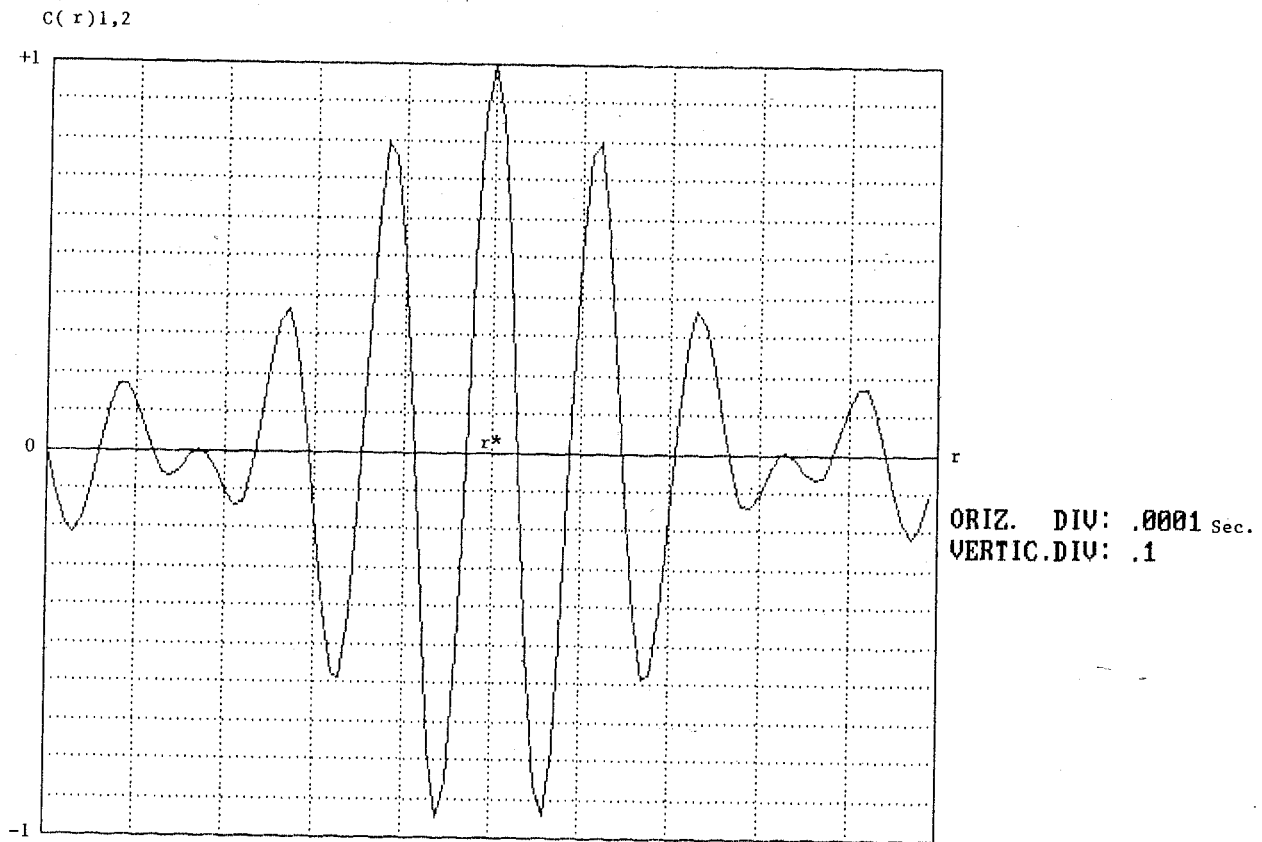


Figura 1.18  $C(r)_{1,2}$  secondo la 1.19)

Gli stessi criteri di calcolo per la  $C(r)_{1,2}$  si possono applicare anche per le funzioni di correlazione incrociata nel caso di correlazione digitale; un esempio per tutti renderà chiaro il concetto. Se prendiamo ad esempio la  $C(r)_x$  espressa dalla 1.16) nel caso di correlazione incrociata diventerà:

$$C(r)_{x1,2} = (2/3.14) \operatorname{Arcsen} \frac{\operatorname{Sen}[6.28 F1 (r - r^*)]}{[6.28 F1 (r - r^*)]} \quad 1.20)$$

che per  $F_1 = 2500$  Hz e  $r^* = 500$  microsecondi sarà rappresentata dal grafico di figura 1.19.

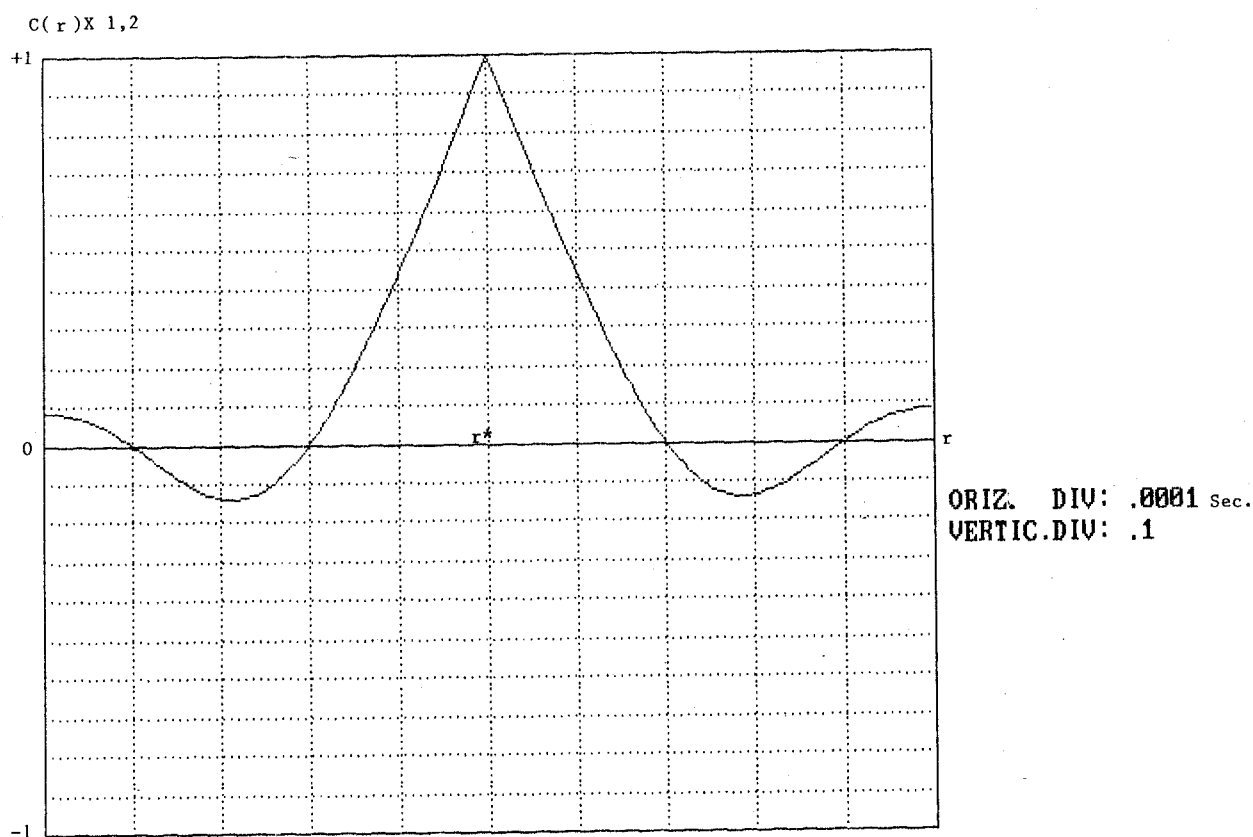


Figura 1.19  $C(r)x_{1,2}$  secondo la 1.20).

### 1.7 L'INFLUENZA DELLA BANDA DEI SEGNALE NELLA CORRELAZIONE

L'influenza della banda dei segnali nella correlazione è di notevole interesse da un punto di vista applicativo perchè il contenuto frequenziale dei segnali stessi modifica notevolmente l'andamento delle funzioni  $C(r)$  e  $C(r)x$  e ciò può influire sulle soluzioni dei più diversi problemi tecnici.

La possibilità di variare la banda dei segnali da correlare è di fatto un notevole ampliamento delle capacità di adattamento dell'algoritmo della correlazione.

Può essere infatti necessario che il profilo della  $C(r)$  o della  $C(r)x$  debba essere opportunamente adattato per soddisfare particolari esigenze funzionali; ciò si può realizzare, entro certi limiti, dimensionando opportunamente la banda di ingresso dei segnali da correlare.

Nella correlazione analogica la banda dei segnali individua il contenuto frequenziale delle variabili del tipo  $f(t)$ ; nella correlazione digitale la banda dei segnali individua il contenuto frequenziale delle variabili  $f(t)$  che, tramite limitazione d'ampiezza, vengono trasformate nel tipo  $X(t)$ .

Per mostrare come variano le  $C(r)$  e le  $C(r)x$  in funzione della banda dei segnali di ingresso proponiamo qui di seguito quattro interessanti esempi grafici che mettono ben in evidenza questa particolare dipendenza:

#### A) Caso della $C(r)$ definita tra $F1$ ed $F2$

Nel paragrafo 1.3.1.1 abbiamo calcolato tramite la 1.11) l'andamento della  $C(r)$  per segnale nella banda compresa tra ( $F1=7000$  Hz e  $F2=10000$  Hz) ottenendo il grafico che ora riproponiamo in figura 1.20 per un confronto con altri due grafici che andremo sempre a determinare secondo la 1.11).

Se si estende la banda dei segnali di ingresso al correlatore da ( $F1=7000$  Hz ;  $F2=10000$  Hz) a ( $F1=1000$  Hz ;  $F2 = 30000$  Hz) la  $C(r)$  si smorza molto più rapidamente al crescere di  $r$  rispetto alla  $C(r)$  di figura 1.20, così come mostrato chiaramente in Figura 1.21.

In questo modo, mediante una semplice variazione della banda dei segnali da correlare, abbiamo costretto la  $C(r)$  a seguire un profilo diverso dall'originale; si vedrà più avanti che ciò rappresenta un interessante metodo per affrontare e risolvere alcuni problemi applicativi che si presentano di sovente al tecnico.

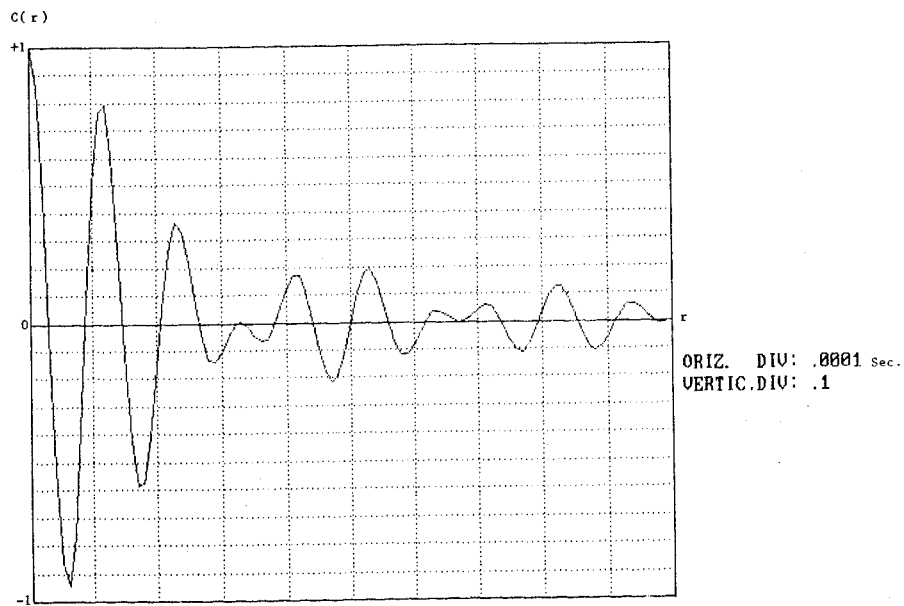


Figura 1.20  $C(r)$  secondo la 1.11) ;banda 7000 - 10000 Hz

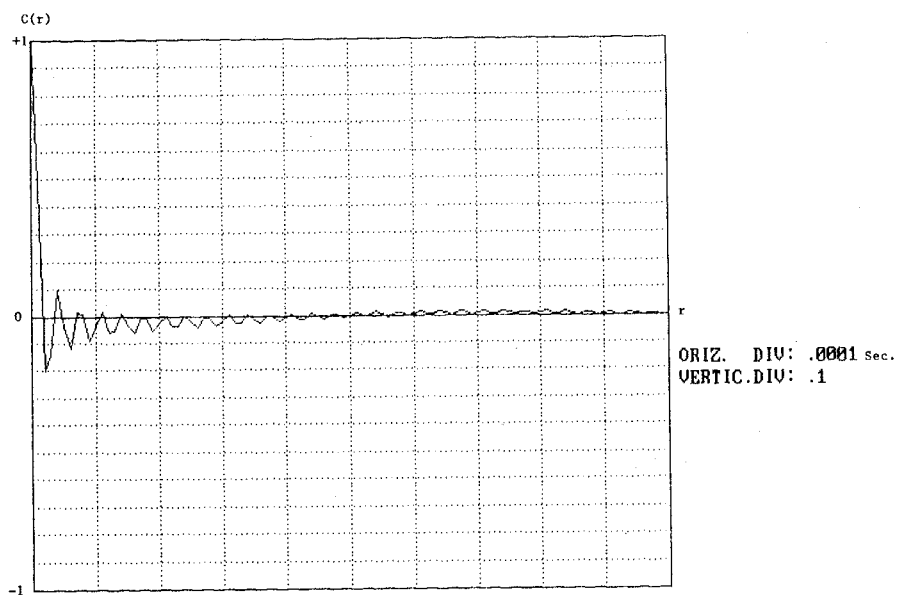
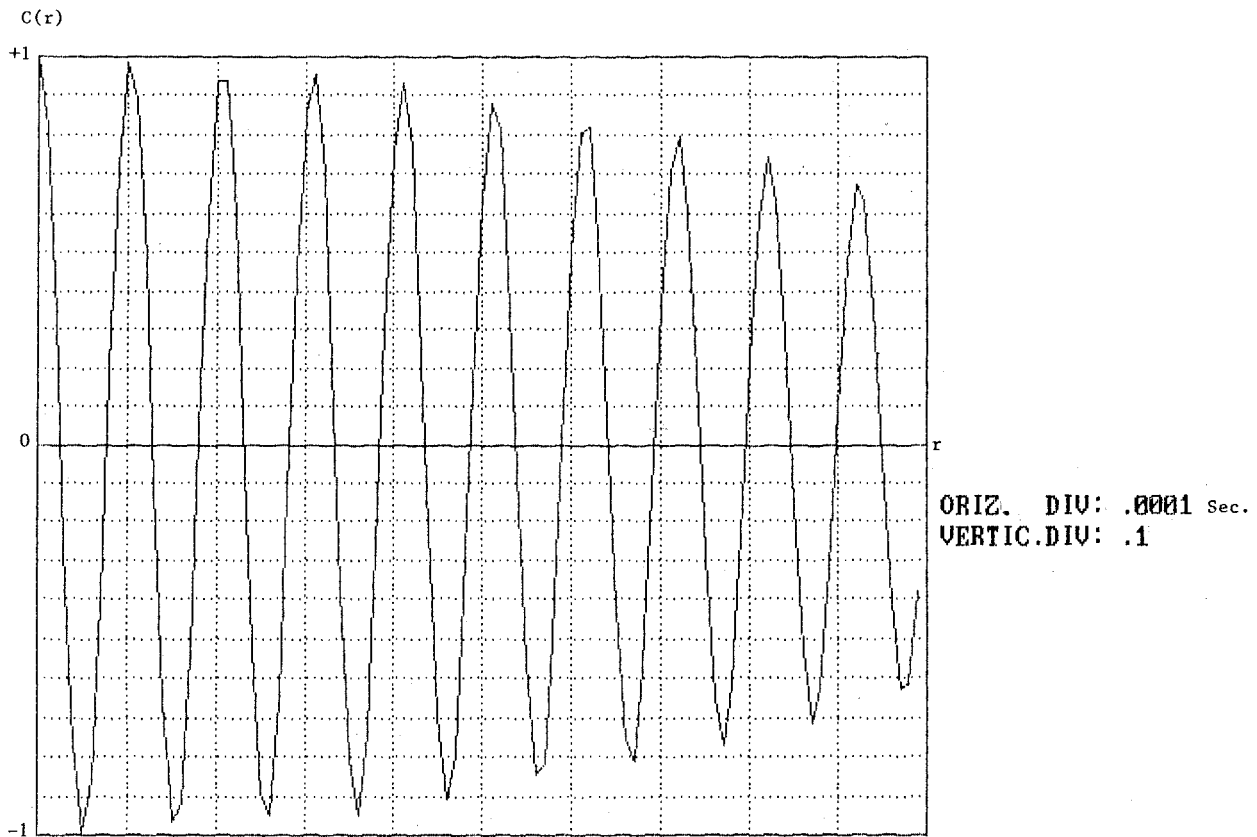


Figura 1.21  $C(r)$  secondo la 1.11) banda 1000-30000 Hz

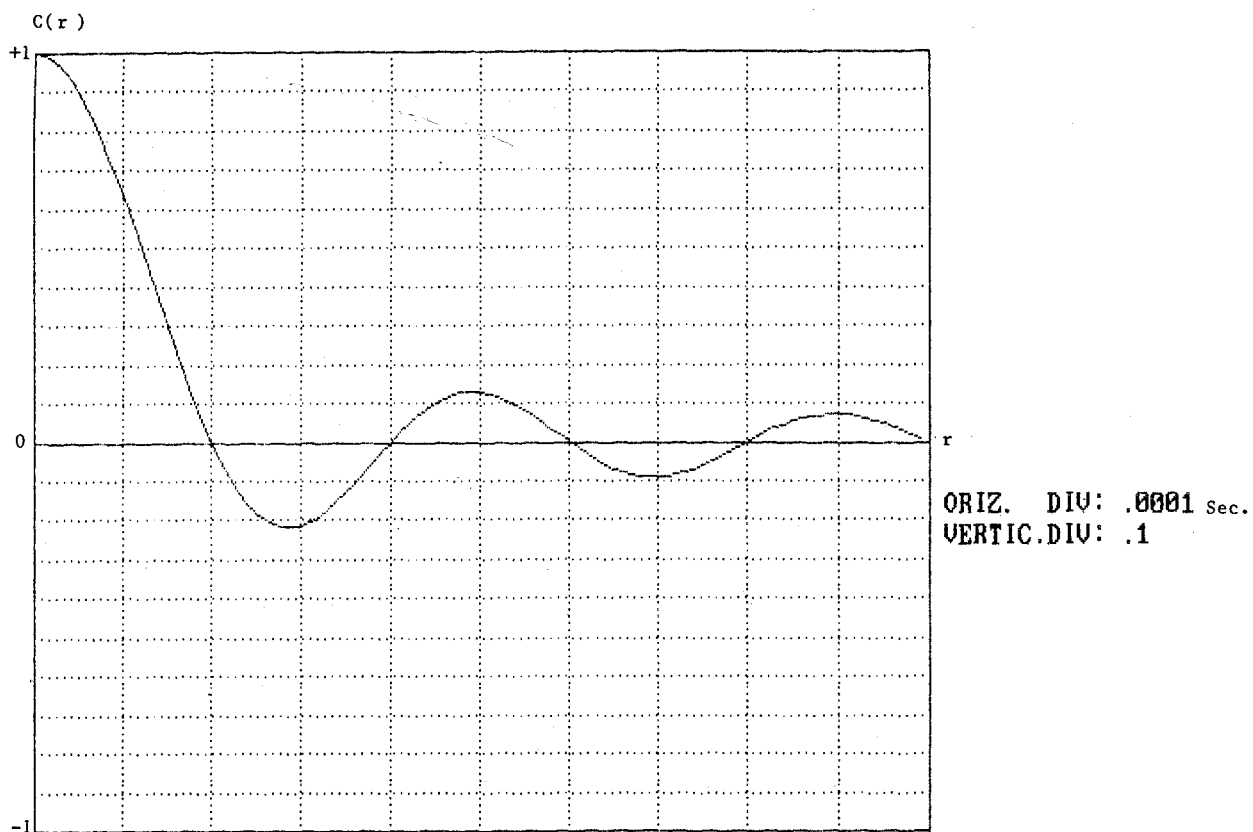
Se invece si stringe la banda dei segnali da ( $F1=7000$  Hz;  $F2=10000$  Hz) a ( $F1=9500$  Hz;  $F2=10000$  Hz) la  $C(r)$  oscilla al crescere di  $r$  con basso smorzamento, così come mostra la figura 1.22.



*Figura 1.22  $C(r)$  secondo la 1.11)  
banda 9500-10000 Hz*

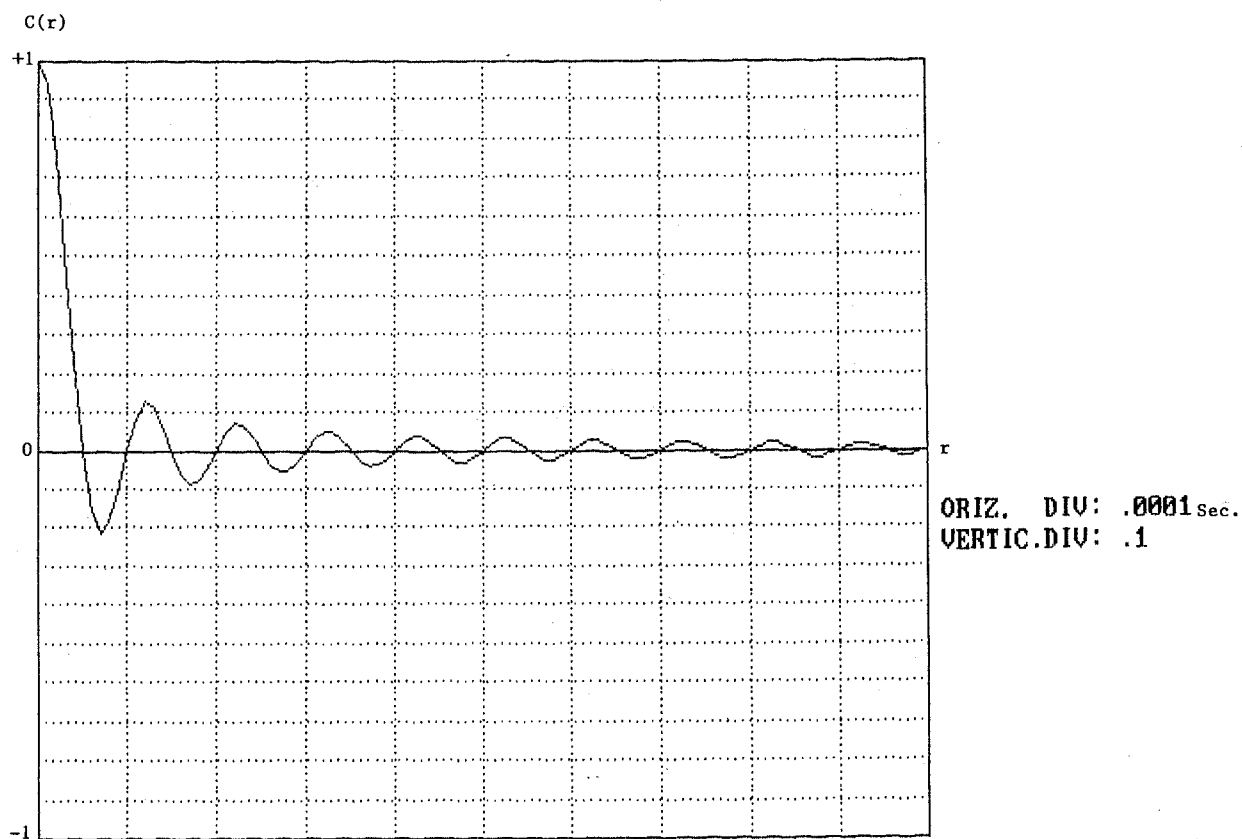
#### B) Caso della $C(r)$ definita tra 0 ed $F1$

Nel paragrafo 1.3.1.2 abbiamo calcolato secondo la 1.12) la curva di  $C(r)$  per segnali in banda compresa tra 0 ed  $F1=2500$  Hz ottenendo il grafico che riportiamo in figura 1.23 per un confronto con altri due grafici dimostrativi:



*Figura 1.23  $C(r)$  secondo la 1.12)  
banda 0-2500 Hz*

Se si estende la banda del segnale da ( 0;F1=2500 Hz) a (0;F1=10000 Hz), sempre secondo la 1.12), si ha una  $C(r)$  che non decresce dolcemente come quella di figura 1.23 ma ha un andamento decrescente molto marcato al crescere di  $r$  così come mostrato in figura 1.24.

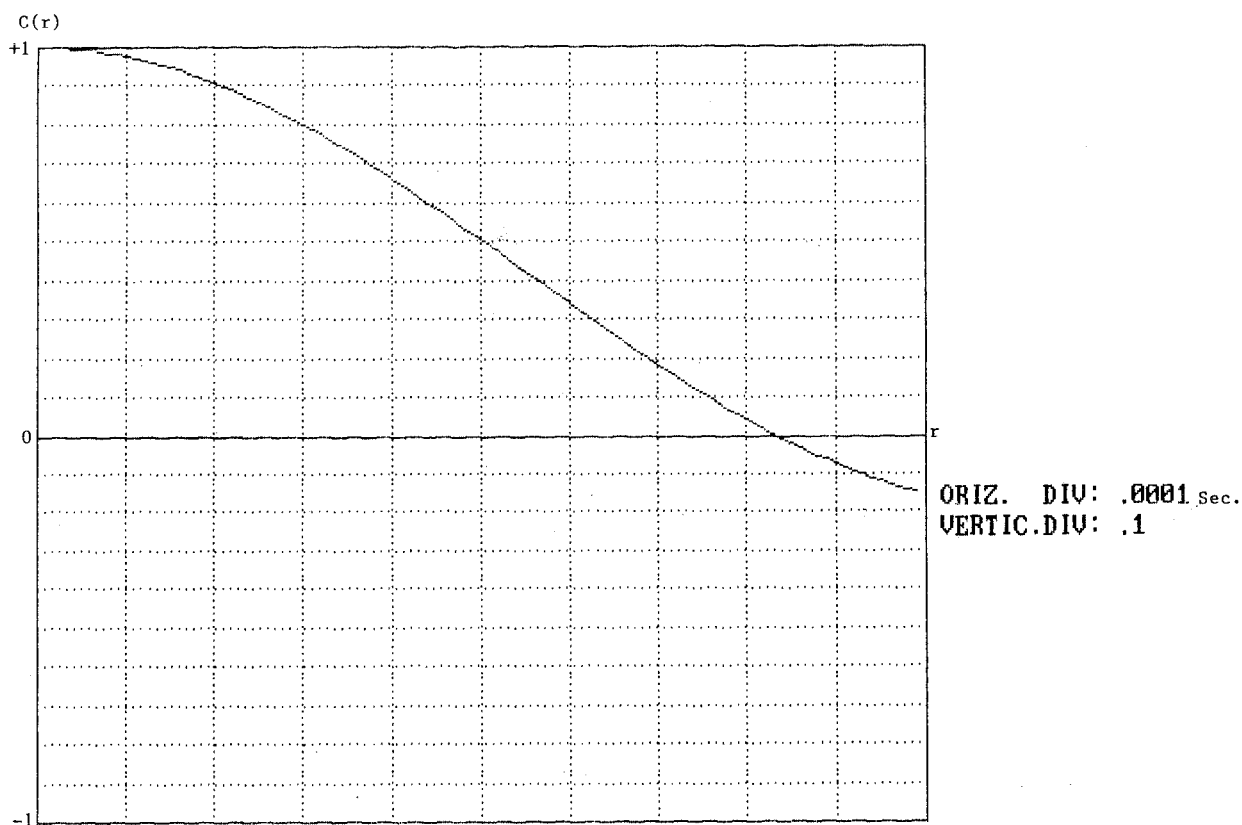


*Figura 1.24  $C(r)$  secondo la 1.12)  
banda 0-10000 Hz*

Se invece si restringe la banda del segnale da (0;F1=2500 Hz) a (0;F1=600 Hz) il profilo della  $C(r)$  si modifica secondo il grafico di figura 1.25 che mostra una curva che decresce poco al crescere di  $r$ .

Con quest'ultimo esempio riteniamo di aver indicato al lettore le modalità da seguire per adattare i profili delle funzioni di correlazione alle diverse esigenze operative.



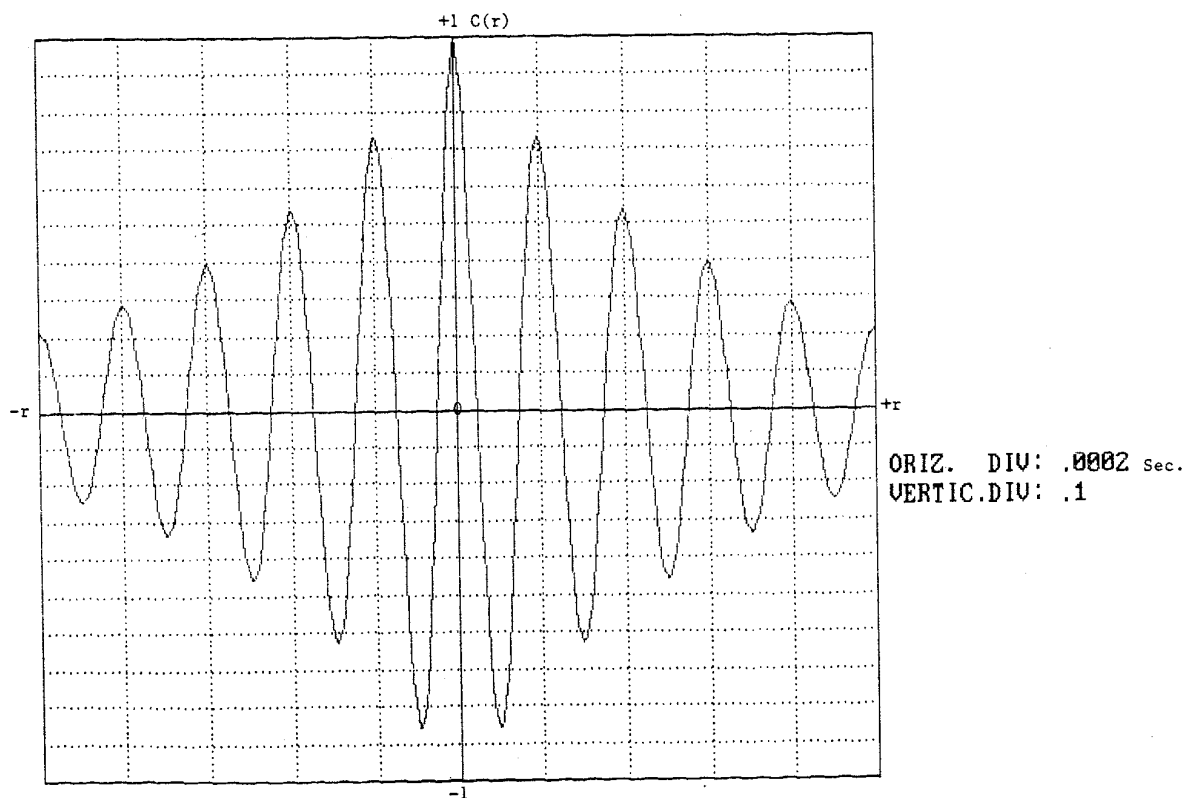


*Figura 1.25  $C(r)$  secondo la 1.12)  
banda 0-600 Hz*

C) Caso della  $C(r)$  definita per segnale in banda non rettangolare

Nel paragrafo 1.3.2 abbiamo calcolato l'andamento della  $C(r)$  nella banda del segnale definita da un circuito risonante avente  $F_0 = 5000$  Hz e  $Q = 10$  ottenendo il grafico che ora riportiamo in figura 1.26 per il confronto con i nuovi casi che si andranno ad esaminare:

Se si aumenta la banda del segnale riducendo il valore di  $Q$  da 10 a 3 si ottiene, sempre secondo la 1.13), un andamento della  $C(r)$  sensibilmente smorzato così come mostrato in figura 1.27.



*Figura 1.26  $C(r)$  secondo la 1.13)*

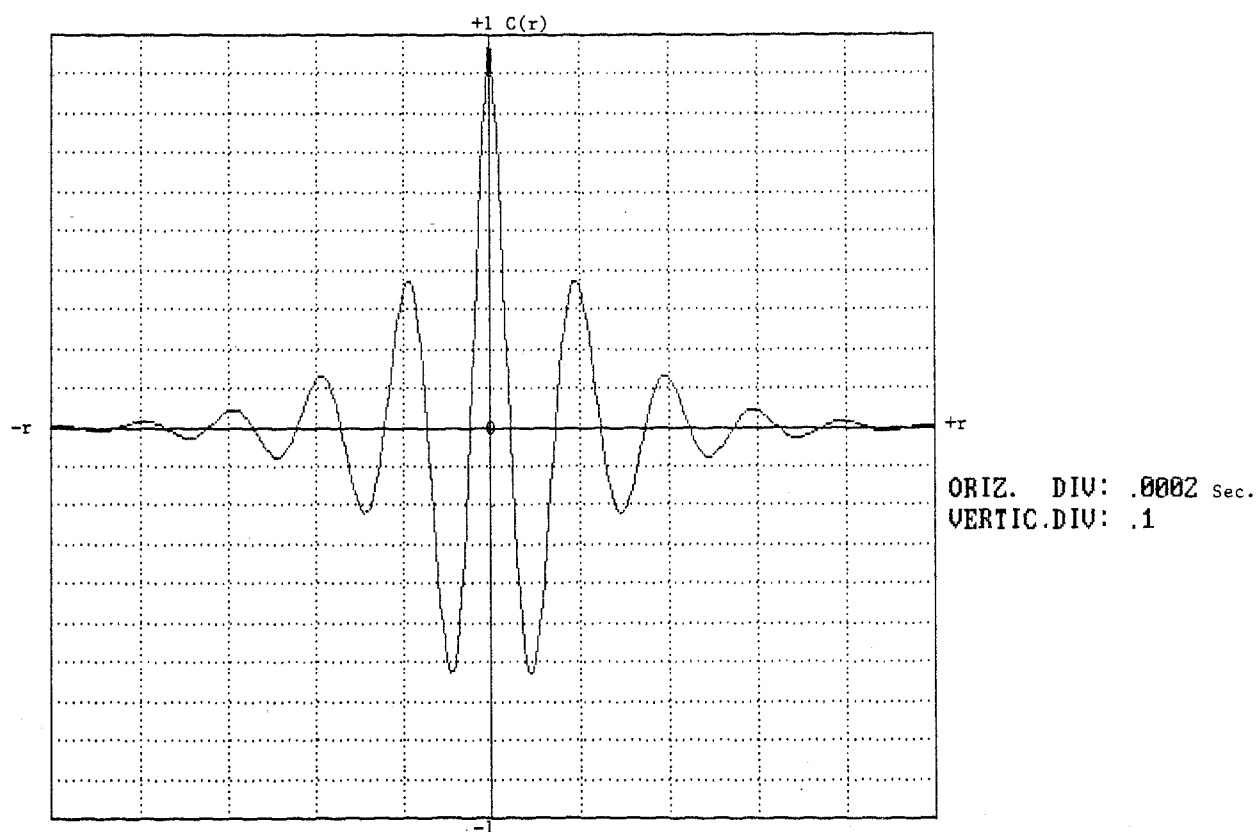
*con  $Q=10$*

*$F_0=5000$  Hz*

La riduzione del coefficiente di merito  $Q$  del circuito risonante agisce prevalentemente sul termine esponenziale:

$$\exp (-\omega_0 |r| / 2 Q)$$

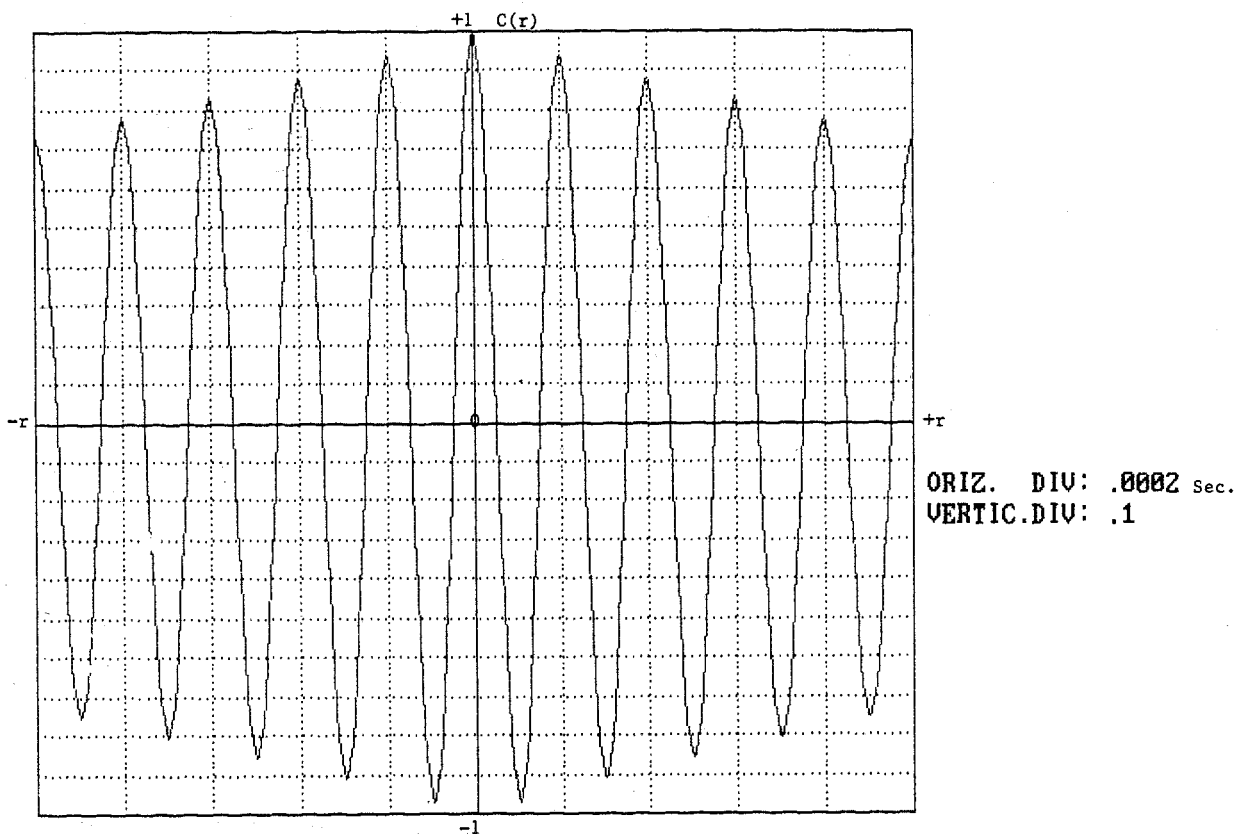
facente parte della 1.13) costringendo la funzione di correlazione  $C(r)$  a decrescere più rapidamente con l'aumentare del valore della variabile indipendente  $r$ .



*Figura 1.27  $C(r)$  secondo la 1.13  
con  $Q=3$   
 $F_0=5000$  Hz*

Se invece si stringe la banda del segnale aumentando il valore di  $Q$  da 10 a 50 si ottiene il grafico della  $C(r)$  di figura 1.28 che mette in evidenza un profilo poco smorzato rispetto a quello di figura 1.26.

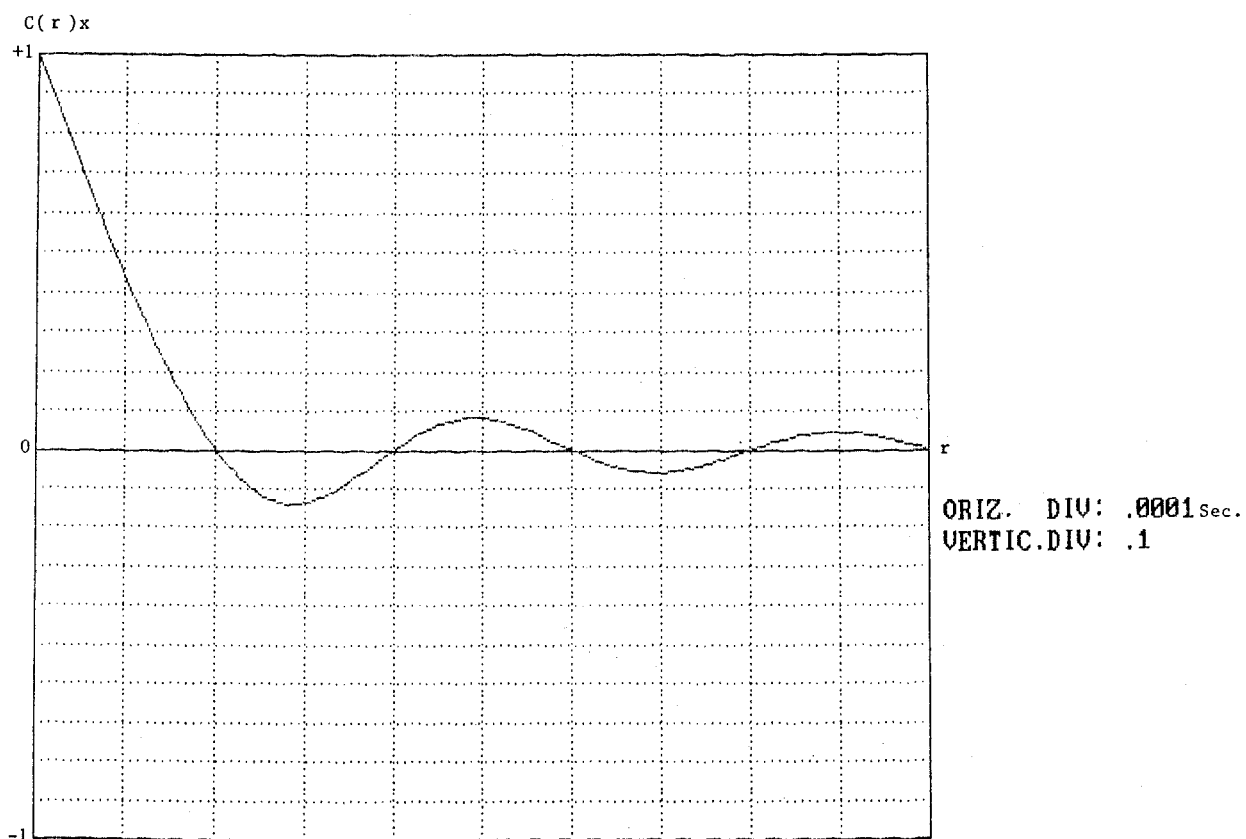
Anche in questo caso la variazione del  $Q$  agisce prevalentemente sul termine esponenziale della 1.13) costringendo la funzione  $C(r)$  a decrescere più dolcemente con l'aumentare di  $r$ .



*Figura 1.28  $C(r)$  secondo la 1.13)  
con  $Q=50$ ;  $F_0=5000$  Hz*

#### D) Caso della $C(r)x$ definita per segnale in banda 0-F1

Anche in questo caso la  $C(r)x$  risente della variazione della banda del segnale  $f(t)$  trasformato in  $X(t)$ ; possiamo infatti osservare dalla curva di  $C(r)x$ , calcolata nel paragrafo 1.4.2.2 nella banda tra 0 e 2500 Hz, che riportiamo in figura 1.29 per confronto con le nuove curve, come l'ampiezza della banda incida sulla  $C(r)x$ .

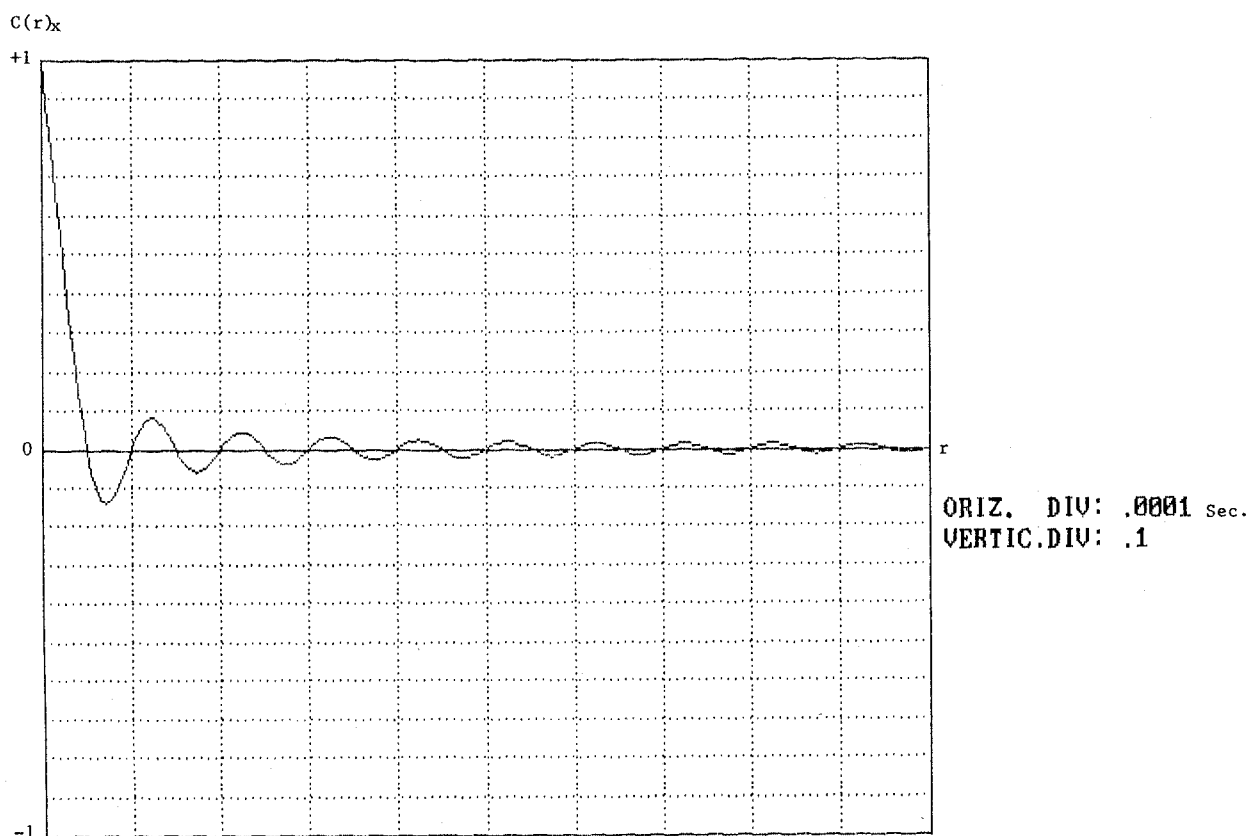


*Figura 1.29  $C(r)x$  secondo la 1.16)  
banda 0-2500 Hz*

Se estendiamo la banda del segnale da (0;F1=2500 Hz) a (0;F1=10000 Hz) otteniamo sempre in base alla 1.16) il grafico di Figura 1.30 che mostra come la nuova  $C(r)x$  non decresca più dolcemente come quella di figura 1.29, ma mostra un profilo molto più ripido con l'aumentare di  $r$ .

Questo comportamento è determinato dalla funzione 1.16) in cui il termine  $\frac{\text{Sen } x}{x}$  risente dell'aumento dell'argomento (6.28 F1  $r$ ),

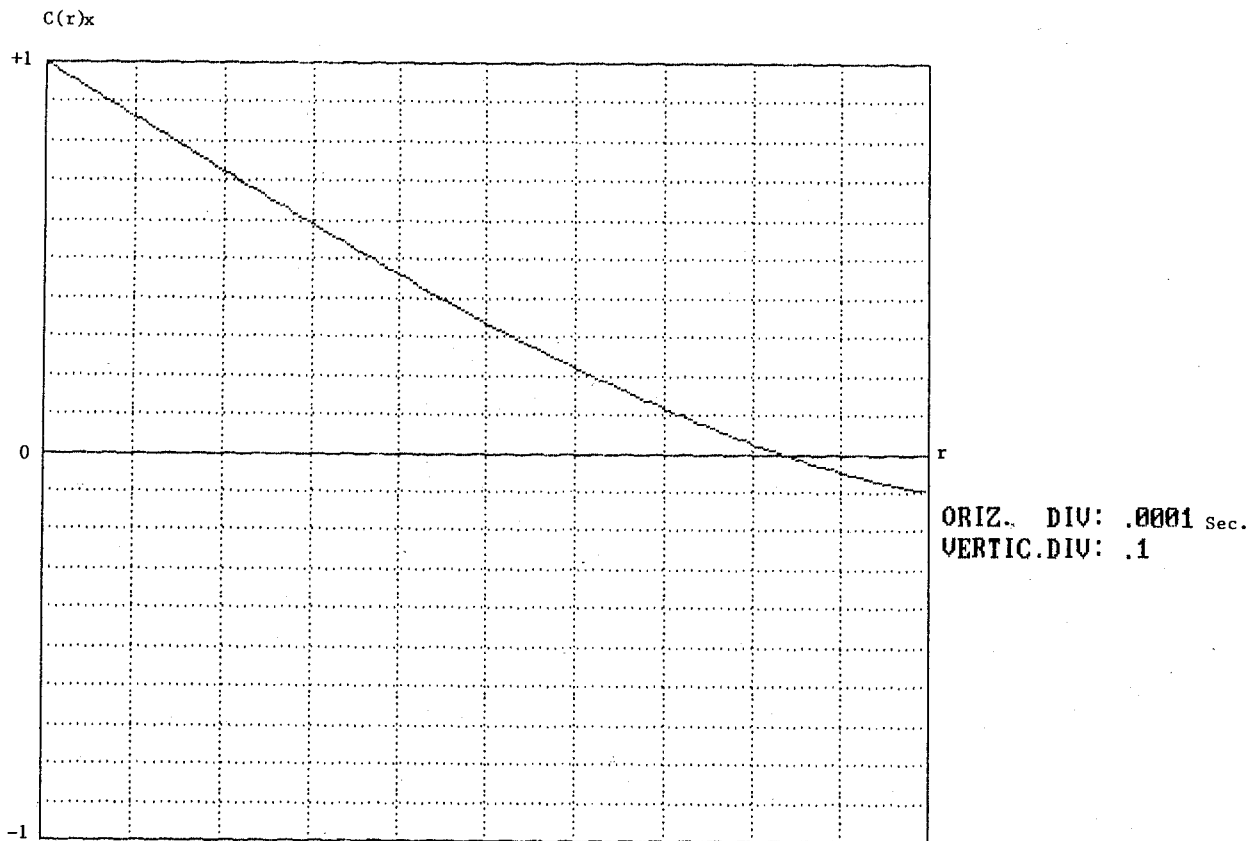
dovuto all'incremento del valore di F1, che costringe la funzione di correlazione  $C(r)x$  a decrescere più rapidamente al crescere di  $r$ .



*Figura 1.30 ;  $C(r)x$  secondo la 1.16  
banda 0-10000 Hz*

Se invece la banda del segnale  $f(t)$  si riduce da  $(0; F1=2500 \text{ Hz})$  a  $(0; F1=600 \text{ Hz})$  il profilo della  $C(r)x$  si modifica come riportato in Figura 1.31.

In questo caso invece il comportamento della funzione 1.16) risente della riduzione dell'argomento  $(6.28 F1 r)$  dovuto alla riduzione del valore di  $F1$  che costringe la  $C(r)x$  a decrescere più dolcemente al crescere di  $r$ .



*Figura 1.31 ;  $C(r)x$  secondo la 1.16)  
banda 0-600 Hz*

D) Caso della  $C(r)x$  definita per segnale in banda compresa tra  $F_1$  ed  $F_2$

L'andamento della  $C(r)x$  mostrato in figura 1.15 del paragrafo 1,4.2.2, che è qui riportato in figura 1.32 per un confronto con le altre  $C(r)x$  che andremo a calcolare è stato ricavato in banda ( $F_1=7000$  Hz ;  $F_2=10000$  Hz); se si aumenta la larghezza di banda a ( $F_1=1000$  Hz; $F_2=20000$  Hz), sempre secondo la 1.17) si ha il grafico della  $C(r)x$  di figura 1.33

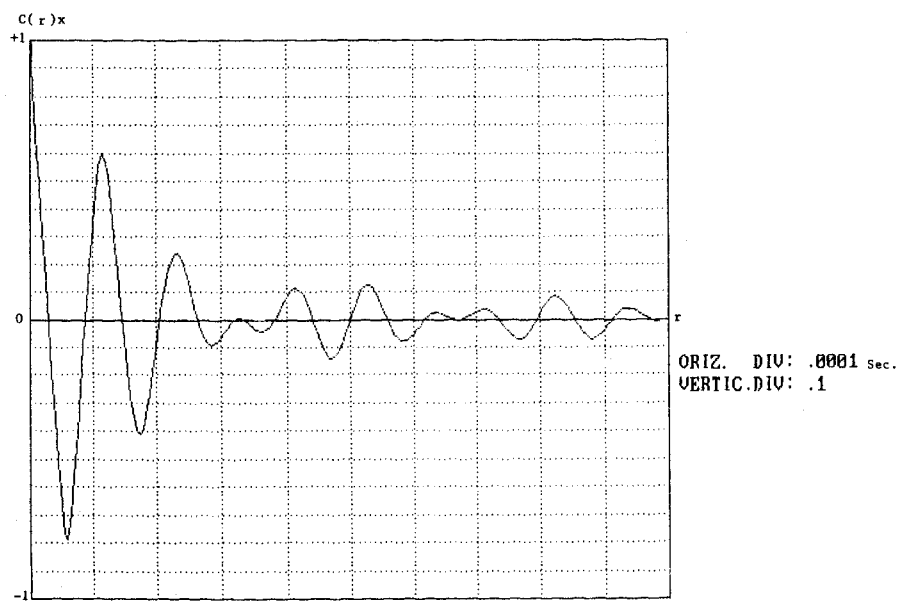


Figura 1.32 ;  $C(r)x$  secondo la 1.17); banda 7000-10000 Hz

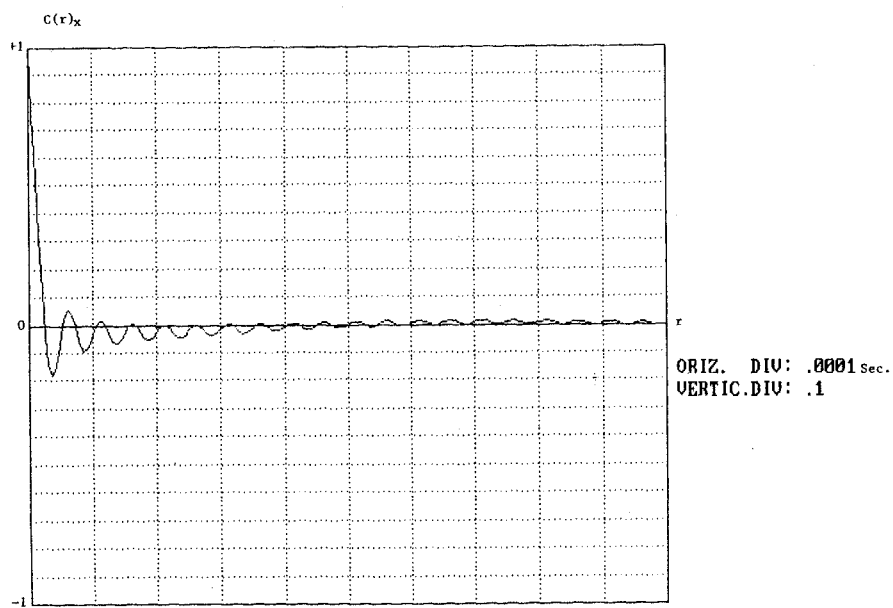
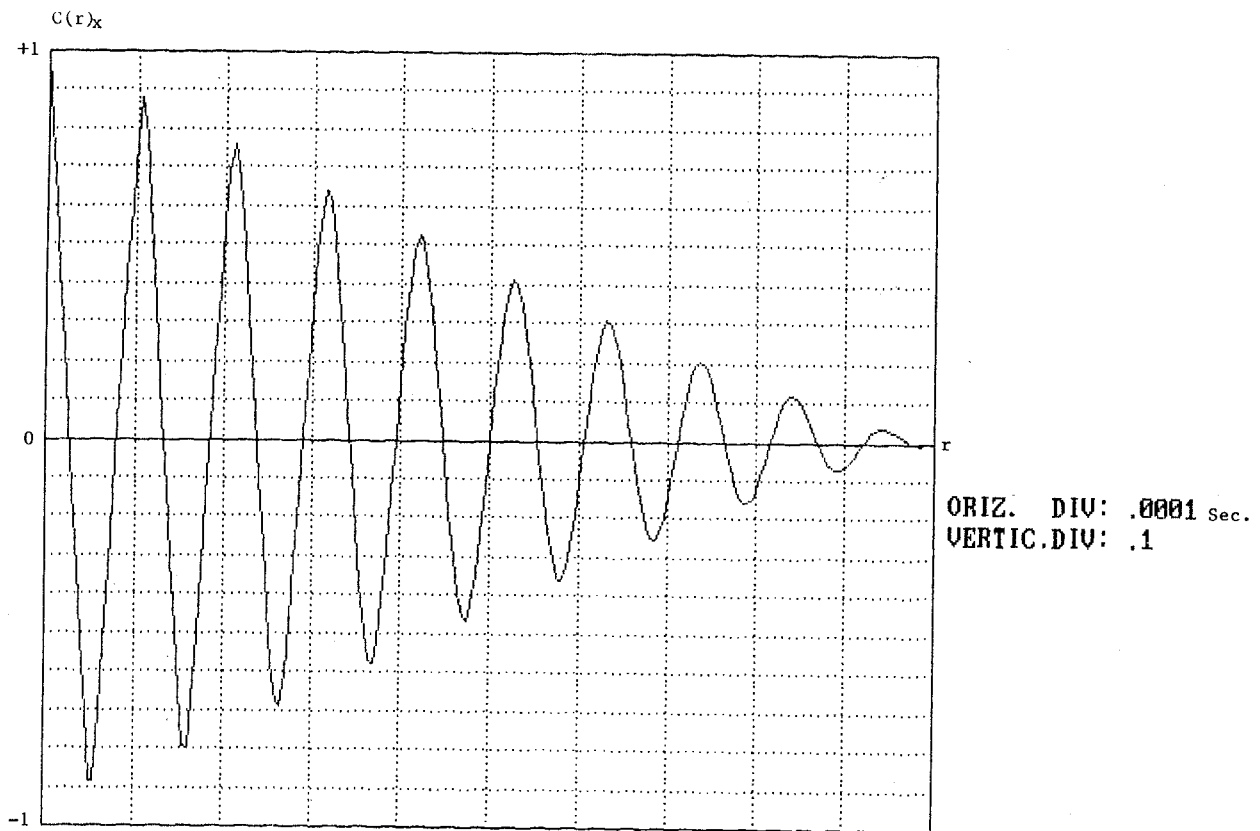


Figura 1.33 ;  $C(r)x$  secondo la 1.17) ; banda 1000-20000 Hz



Se invece si riduce la larghezza di banda del segnale a ( $F_1=9000$  Hz; $F_2=10000$  Hz) si ottiene una  $C(r)_x$  che ondula molto marcatamente così come si vede dal tracciato di figura 1.34.



*Figura 1.34 ;  $C(r)_x$  secondo la 1.17)  
banda 9000-10000 Hz*

Per concludere l'argomento di questo importante paragrafo è necessario evidenziarne due fondamentali aspetti:

### 1° ASPETTO

Tutte le osservazioni che ora sono state fatte per le funzioni di auto-correlazione,  $C(r)$  e  $C(r)_x$ , valgono naturalmente anche per le funzioni di correlazione incrociata,  $C(r)_{1,2}$  e  $C(r)_{x1,2}$  che subiscono l'effetto

della variazione della banda dei segnali di ingresso nell'identico modo in cui lo subiscono le  $C(r)$  e  $C(r)x$  sopra menzionate.

## 2° ASPETTO

Dall'esame comparativo che abbiamo condotto tra le diverse funzioni  $C(r)$  e  $C(r)x$  è emersa la marcata dipendenza delle funzioni stesse dalla banda del segnale da correlare; giova pertanto mettere in evidenza alcune situazioni e/o vantaggi pratici che ne possono derivare :

A) Se l'indagine sull'interdipendenza tra i segnali del tipo  $f(t)$  o  $X(t)$  deve essere sviluppata obbligatoriamente su di una banda di frequenze, fissata a priori dalle caratteristiche dei segnali, si dovranno accettare gli andamenti conseguenti delle funzioni di correlazione limitandoci a controllarli mediante confronto con le stesse precedentemente calcolate.

B) Se l'indagine sull'interdipendenza tra i segnali del tipo  $f(t)$  o  $X(t)$  non sarà vincolata dalla banda naturale dei segnali si potrà scegliere una banda di analisi che più si adatta, in base al conseguente profilo delle  $C(r)$  o  $C(r)x$ , alle necessità dell'indagine stessa.

È utile a questo punto illustrare tre esempi caratteristici che mostrano come scegliere la banda dei segnali da correlare in base a particolari esigenze tecniche tra le innumerevoli che i metodi di correlazione possono soddisfare; sarà poi il lettore, in base alle proprie necessità ed alla propria fantasia ad escogitare nuovi ed originali adattamenti per risolvere al meglio le problematiche contingenti.

## ESEMPIO 1

Supponiamo di dover analizzare con molta accuratezza il profilo di una  $C(r)$  per segnale definito in banda  $(0; F1)$  nel tratto in cui la  $C(r)$  passa dal suo valore massimo ad  $1/3$  del massimo; sarà questo il caso in cui si dovrà ridurre sensibilmente la banda del segnale di ingresso al correlatore, abbassando il valore di  $F1$  in modo che con tutti gli  $n$  passi di ritardo disponibili nel correlatore di misura si potrà analizzare il tratto di  $C(r)$  la cui ampiezza varia da 1 a 0.333; ciò grazie al fatto che l'abbassamento di  $F1$  porta il profilo della  $C(r)$  a decrescere molto lentamente al crescere di  $r$ .

## ESEMPIO 2

Consideriamo il caso in cui si debba misurare con elevata precisione il valore del ritardo  $r^*$  per il quale la  $C(r)_{1,2}$ , per segnali definiti nella banda tra  $F1$  ed  $F2$ , ha il massimo valore; per risolvere al meglio questo problema sarà utile avere una funzione di correlazione incrociata con un profilo il più pendente possibile; ciò si ottiene come sappiamo allargando al massimo la banda dei segnali da correlare. In questo modo disponendo di una variazione fine di  $r$  si potrà rilevare con buona precisione, grazie alla elevata pendenza della  $C(r)_{1,2}$  il valore di  $r^*$ .

## ESEMPIO 3

Sia dato il caso in cui si debbano misurare con precisione i primi quat-

tro valori, consecutivi, di  $r$  ( $r_1, r_2, r_3, r_4$ ) per i quali una certa  $C(r)$ , per segnale definito tra  $F1$  ed  $F2$ , raggiunge il massimo dell'ampiezza; ciò si ottiene più facilmente "costringendo" la  $C(r)$  ad oscillare con basso smorzamento in modo tale che i valori massimi che si ottengono per le  $C(r_1), C(r_2), C(r_3), C(r_4)$  siano i più elevati possibile; questo risultato si ottiene, come sappiamo, restringendo al massimo la banda del segnale da correlare.

## 1.8 UN TEOREMA DI IMPORTANZA FONDAMENTALE

Per concludere questo capitolo è necessario citare un teorema fondamentale che, anche se ci porterà fuori dalla linea fino ad ora seguita in fase di esposizione dei concetti di correlazione, è di importanza essenziale in tutti i processi che abbiamo esaminato nei paragrafi precedenti.

Si deve al matematico Wiener un algoritmo basilare che consente di calcolare la funzione di autocorrelazione dei segnali mediante l'impiego della funzione di densità spettrale di potenza  $G(W)$  degli stessi; egli ha dimostrato infatti che:

$$C(r) = \int_0^{\infty} G(W) \cos W r \, dW \quad 1.21)$$

Con la 1.21) si dimostra cioè che la funzione di autocorrelazione  $C(r)$  altro non è che la trasformata di Fourier secondo il coseno della  $G(W)$ .

Quanto abbiamo ora mostrato è alla base delle trasformazioni analitiche che ci hanno consentito di scrivere le formule 1.10), 1.11), 1.12), 1.13) e che altrimenti non sarebbero state calcolabili.

L'importanza del teorema di Wiener non si esaurisce però soltanto in questi termini dato che anche la  $G(W)$  è la trasformata di Fourier secondo il coseno della  $C(r)$ , cioè si può scrivere:

$$G(W) = (1/3.14) \int_0^{\infty} C(r) \cos W r \, dr \quad 1.22)$$

questo nuovo integrale ha una grande importanza; consente infatti di risalire alla funzione di densità spettrale di potenza  $G(W)$  di un segnale partendo dalla funzione di autocorrelazione dello stesso.

Ciò significa che se all'uscita di un correlatore si può disporre di un sistema in grado di risolvere la 1.22) si ha automaticamente l'andamento dello spettro dei segnali elaborati.

Si può in conclusione scrivere quanto segue:

$$C(r) \Leftrightarrow G(W) \quad 1.23)$$

e tracciare alcune coppie di curve molto significative in figura 1.35.

Ciò che abbiamo accennato sarà ripreso e sviluppato, da un punto di vista strettamente applicativo, nel capitolo 8 dedicato al legame esistente tra la correlazione e l'analisi frequenziale.

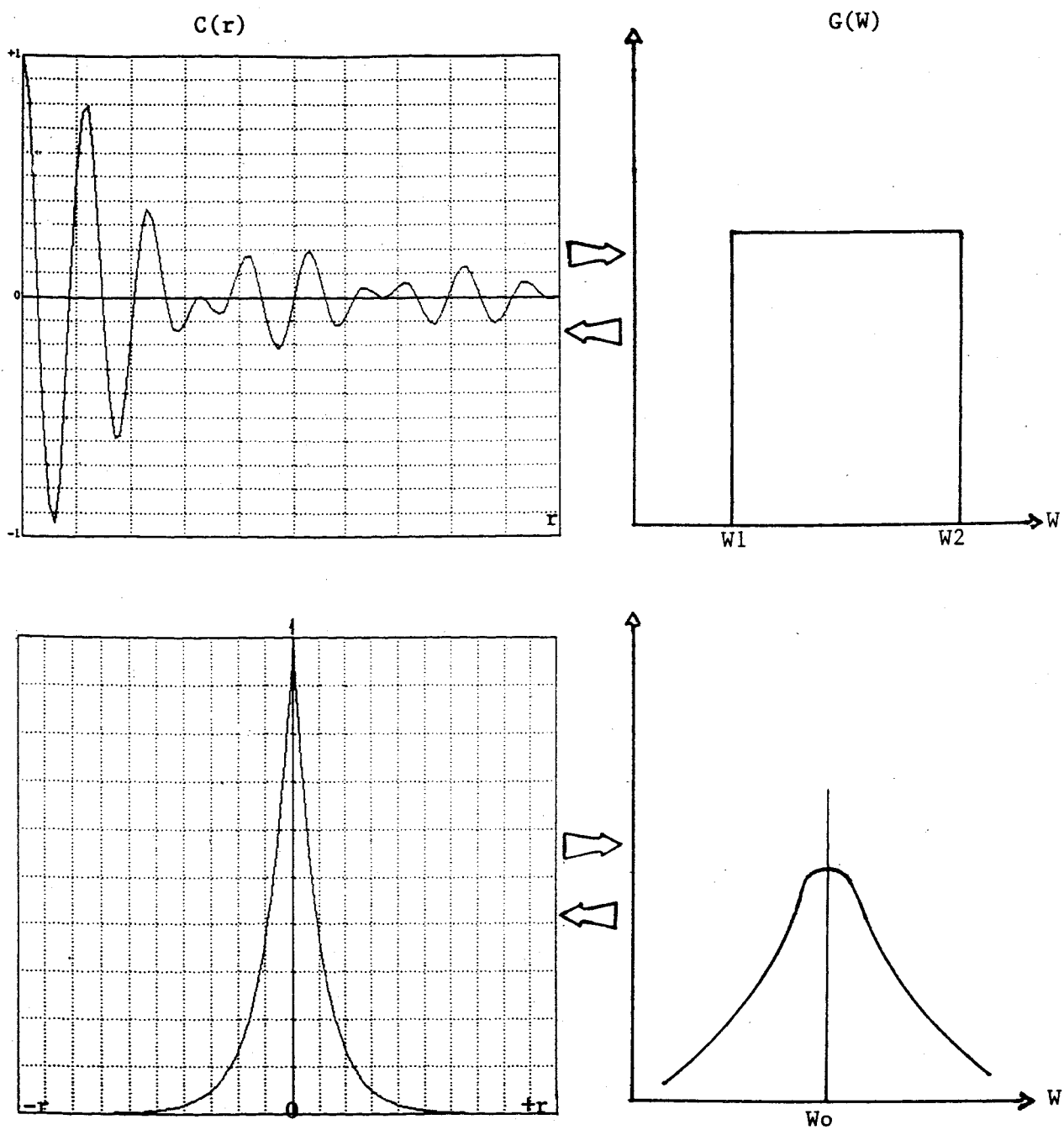


Figura 1.35 Dipendenza tra  $C(r)$  e  $G(W)$

Le curve mostrano il legame esistente, secondo la trasformata di Fourier 1.23), tra la  $C(r)$  e lo spettro del segnale che ha determinato la funzione di autocorrelazione.

## 1.9 SULL'UTILIZZO DEI METODI DI CORRELAZIONE

La correlazione consente sia il calcolo di  $C(r)$ ;  $C(r)_{1,2}$ ;  $C(r)_x$ ;  $C(r)_{x1,2}$ , sia la valutazione precisa del valore di  $r^*$  per il quale le funzioni ora menzionate assumono il massimo livello.

Questi elementi, presi nel loro insieme o separatamente, sono i cardini delle varie applicazioni tecniche che si basano sui metodi di correlazione. Vedremo infatti che alcuni problemi si possono risolvere con il solo calcolo della funzione di correlazione, altri si possono risolvere con la sola conoscenza di  $r^*$ , altri ancora con l'abbinamento di entrambi i dati.