

Appunti del corso di Elettromagnetismo

di Davide Venturelli

Sapienza Università di Roma, anno 2015-2016
Docente S. Giagu

Per qualsiasi chiarimento contattatemi:
venturelli.1591191@studenti.uniroma1.it

ELETROSTATICA NEL VUOTO

SCHEMATIZZIAMO LA CARICA COME CONTINUA,

$$Q \in \mathbb{R}$$

IN NATURA, ESSA E' DISCRETA:

$$Q = \sum_m m |q_i| \quad |q_i| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$[\rho(\underline{r}, t)] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{c}{m^3} \quad \begin{array}{l} \text{DENSITÀ DI} \\ \text{CARICA } \rho \end{array}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE IN CUI COMPARTE LA DIVERGENZA.

UN CAMPO A DIVERGENZA NULLA HA LE LINEE DI FORZA CHE NON CONVERGONO, OVVERO SONO CHIUSE.

LE LINEE DI FORZA CONVERGONO (O DIVERGONO) NEI PUNTI IN CUI E' CONCENTRATA LA CARICA.

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

\underline{B} E' IL CAMPO DI INDUZIONE MAGNETICA. SI NOTI CHE SE ESISTESSE IL MONOPOLIO MAGNETICO SI ANHEBBE $\nabla \cdot \underline{B} = \frac{\rho_{mm}}{\mu_0}$, SIMMETRICAMENTE. L'EQUAZIONE DICE CHE \underline{B} E' SOLENOIDALE (HA LINEE DI FORZA CHIUSE).

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

LE PROPRIETÀ DI UN CAMPO SONO TOTALMENTE DEFINITE UNA VOLTA DATI DIVERGENZA E ROTORE.

IN EFFETTI SI HANNO 8 RELAZIONI SCALARI PER RICAVARE 6 INCognITE (I CAMPI E E B). SI NOTA PERO' CHE ESISTE UNA RELAZIONE TRA ρ E J CONTENUTA NELLE EQUAZIONI:

$$\nabla \cdot J = - \frac{dp}{dt}$$

ELETTROSTATICA

MODELLO ATOMICO PLANETARIO.

$$|q_e| = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

$$|q_p| = |q_e|$$

$$m_e \sim 10^{-30} \text{ Kg}$$

$$m_p \sim m_n \sim 2000 m_e \sim 10^{-27} \text{ Kg}$$

$$R_o \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$r_N \sim 1 \text{ fm} \sim 10^{-15} \text{ m} \quad ("1 \text{ FERMI}")$$



CARICARE UN CORPO SIGNIFICA FORNIRGLI O SOTTRAERGLI ELETTRONI.

COME QUESTO AVVIENE DIPENDE DAL TIPO DI MATERIA; DISTINGUEREMO:

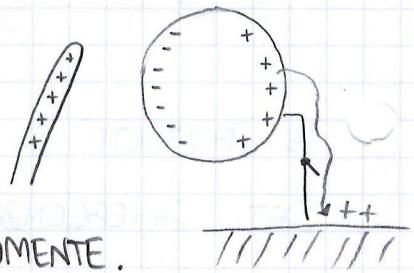
- DIELETTRICI (ISOLANTI)
- CONDUTTORI

NEI SECONDI, GLI ELETTRONI PIÙ ESTERNI SONO SOLO DEBOLMENTE LEGATI E SI SPOSTANO COME UN "GAS DI FERMI" TRA UN NUCLEO E L'ALTRO.

PER CARICARE UN CONDUTTORE MI BASTA METTERLO A CONTATTO CON UN OGGETTO CARICO. MA COME CARICO IL PRIMO?

POSso FARLO PER INDUZIONE. POI COLLEGO IL CORPO A TERRA (CONDUTTORE) COSÌ CHE LE CARICHE POSITIVE POSSANO ALLONTANARSI. CHIUDO

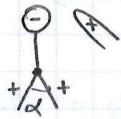
L'INTERRUTTORE E HO OTTENUTO UN CORPO CARICO NEGATIVAMENTE.



POSSO MISURARE LA CARICA CON UN ELETTROSCOPIO A FOGLIE:

CARICO UN CORPO PER INDUZIONE E LE DUE FOGLIE,

CARICHE POSITIVAMENTE, SI RESPINGONO (E' UNO STRUMENTO FORTEMENTE NON LINEARE).



USANDO LA BILANCIA DI CAVENDISH SI SCOPRE CHE

LA FORZA ELETTRICA TRA DUE CARICHE E' DI

TIPO VETTORIALE, PROPORTZIONALE A

$q_1 q_2$
 $q_1 \cdot q_2$
CARICHE PUNTIFORMI.

$$F_c \propto q_1 q_2$$

$$\propto \frac{1}{r^2}$$

$$\propto \hat{r}$$

(OVVERO DIRETTA LUNGO LA CONGIUNGENTE). LE FORZE SI SOMMANO COME VETTORI (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE).

$$F_c = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{LEGE DI COULOMB}$$

DI TIPO ATTRATTIVO SE LE CARICHE HANNO SEGNO OPPOSTO, DI TIPO REPULSIVO ALTRIMENTI.

SI NOTI L'ANALOGIA CON LA FORZA GRAVITAZIONALE

$$F_N = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

DUE DIFFERENZE, TUTTANIA. LA PRIMA E' CHE F_N E' SEMPRE ATTRATTIVA; LA SECONDA E' DATA DALLE COSTANTI,

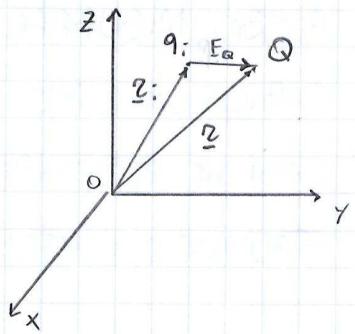
$$K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

SU Scala Atomica, la forza di gravità e' TOTALMENTE TRASCURABILE.

DATO UN SISTEMA DI N CARICHE PUNTIFORMI,
LA FORZA RISULTANTE SU Q E'

$$\underline{F}_Q = K \sum_{i=1}^N \frac{Q q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)$$



CAMPO ELETTRICO

$$E = \frac{F}{q} \quad [E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

$$E(\underline{r})$$

UNA DEFINIZIONE MATEMATICAMENTE RIGOROSA E'

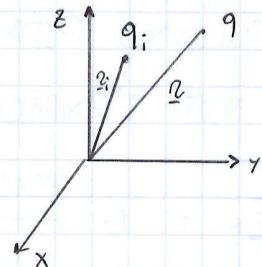
$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\underline{F}_q}{q}$$

LA CARICA DI PROVA PUO' ALTRIMENTI MODIFICARE IL CAMPO, AD ESEMPIO SPOSTANDO LE ALTRE CARICHE.

(PER UN FISICO NON VA BENE, PER GLI EFFETTI GRANULARI DOVUTI ALLA QUANTIZZAZIONE DELLA CARICA).

MISURO IL CAMPO GENERATO DA q_i IN UN PUNTO DELLO SPAZIO PONENDO UNA CARICA DI PROVA q :

$$E(\underline{r}) = K \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)$$



SI DEFINISCE SPESO

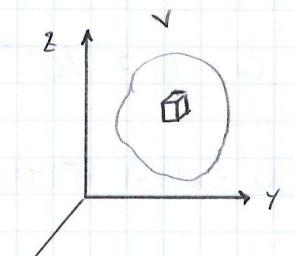
$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Allora il campo generato in un punto da una distribuzione discreta di carica E' (CARICHE FISSE!)

$$E(\underline{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)$$

NEL CASO DI UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA,

$$E(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{f(\underline{r}')(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} dV'$$



$$dq = f(\underline{r}') dV$$

$$= \sigma ds = \lambda dl$$

NOTA CHE L'APPROXIMAZIONE AL CONTINUO E' NECESSARIA OGNI VOLTA CHE HO MOLTE CARICHE ($\sim N_A \sim 10^{23}$).

DALLA CONTINUA, OTTENGO LA FORMULA DISCRETA USANDO IL S DI DIRAC (DISTRIBUZIONE PICCATA SULLE CARICHE PUNTIFORMI).

LINEE DI FORZA

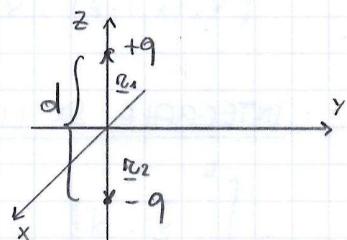
IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO METTO UNA CARICA TEST E DISEGNO IL VETTORE DEL CAMPO ELETTRICO IN QUEL PUNTO.



ESERCIZIO: CAMPO GENERATO DA UN DIPOLO ELETTRICO

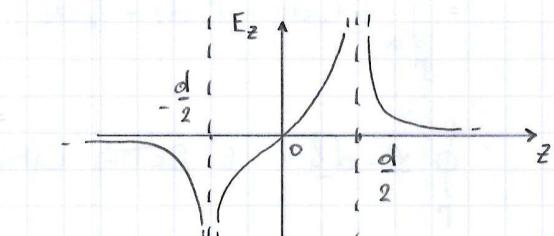
$$\underline{r}_1 = \left(0, 0, \frac{d}{2}\right) \quad \underline{r}_2 = \left(0, 0, -\frac{d}{2}\right)$$

$$E(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x, y, z - \frac{d}{2})}{[x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{3/2}} - \frac{(x, y, z + \frac{d}{2})}{[x^2 + y^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{3/2}} \right\}$$



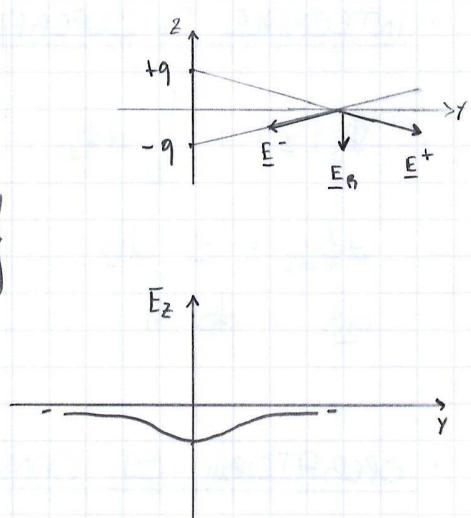
LUNGO L'ASSE Z, $x=0$ e $y=0$:

$$\begin{aligned} E(0, 0, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{z - \frac{d}{2}}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^3} - \frac{z + \frac{d}{2}}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^3} \right\} \hat{z} \\ &= \frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{\left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right)^2} \hat{z} \end{aligned}$$



LUNGO L'ASSE Y, $x=0$ e $z=0$:

$$\begin{aligned} E(0, y, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(0, y, -\frac{d}{2})}{[y^2 + \frac{d^2}{4}]^{3/2}} - \frac{(0, y, \frac{d}{2})}{[y^2 + \frac{d^2}{4}]^{3/2}} \right\} \hat{z} \\ &= -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{z}}{[y^2 + \frac{d^2}{4}]^{3/2}} \end{aligned}$$



RICHIAMI DI MATEMATICA

CAMPO SCALAR

$$f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

ESEMPI: TEMPERATURA, PRESSIONE, ENERGIE POTENZIALI.

UNA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA UTILE È QUELLA DELLE LINEE DI LIVELLO DATE DA $f = \text{cost.}$

CAMPO VETTORIALE

$$\underline{v}(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x \rightarrow \mathbb{R}^m)$$

A OGNI PUNTO DELLO SPAZIO ASSOCIO

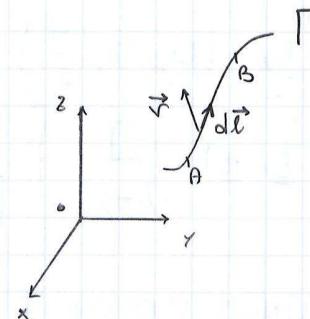
$$(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$$

INTEGRALE DI LINEA

$$\int_a^b \underline{v} \cdot d\underline{l} = \int_a^b v dl \cos\theta$$

$$= \int_a^b [v_x dx + v_y dy + v_z dz]$$

$\oint \underline{v} \cdot d\underline{l}$ È DETTA CIRCUITAZIONE.

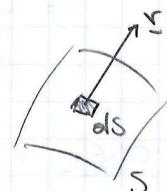


INTEGRALE DI SUPERFICIE

$$\Phi_S(\underline{v}) = \int_S d\phi_{ds} = \int_S \underline{v} \cdot \hat{\underline{m}} ds$$

$$d\phi_{ds} = \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

$$d\underline{s} = ds \cdot \hat{\underline{m}}$$



OPERATORI SUI CAMPI SCALARI

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \text{ GRADIENTE.}$$

$$P \xrightarrow{\quad} f(P) + df$$

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z)$$

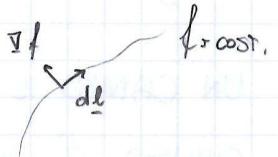
$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\underline{l}$$

DEFINIZIONE DEL GRADIENTE

$$\text{POICHE' } d\underline{l} = d\underline{l} \cdot \hat{\underline{l}},$$

$$\frac{df}{d\underline{l}} = \nabla f \cdot \hat{\underline{l}}$$

(NOTA CHE E' GIUSTA QUESTA: $\frac{\partial f}{\partial x}$ NON TORNA DIMENSIONALMENTE!)



LUNGO LE CURVE DI NIVELLO, $\nabla f \cdot d\underline{l} = 0$.

HO COSI' ESPRESSO LE PROPRIETA' DI UN CAMPO SCALARIE f TRAMITE UN CAMPO VETTORIALE

$$\underline{r} = \nabla f$$

QUANDO POSSO FAR L'OPERAZIONE INVERSA, OVVERO SCRIVERE ∇ COME

$$\underline{r} = \nabla f$$

Allora si dice che \underline{r} E' CONSERVATIVO.

SI HA IN QUESTO CASO

$$\int_A^B \underline{r} \cdot d\underline{l} = \int_A^B \nabla f \cdot d\underline{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

SE \underline{r} E' CONSERVATIVO,

$$\oint_A \underline{r} \cdot d\underline{l} = 0$$

OPERATORI SU CAMPI VETTORIALI

$$\nabla \cdot \underline{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} \text{ DIVERGENZA.}$$

FISICAMENTE, MI FA CAPIRE QUALI SONO I PUNTI DELLO SPAZIO IN CUI IL MIO CAMPO HA SORGENTI O POZZI.

LA DIVERGENZA E' UN OPERATORE LINEARE,

$$\nabla \cdot (\underline{v} + \underline{u}) = \nabla \cdot \underline{u} + \nabla \cdot \underline{v}$$

$$\nabla \cdot (\underline{f} \underline{v}) = \underline{f} \nabla \cdot \underline{v} + \underline{v} \nabla \cdot \underline{f}$$

VALE IL TEOREMA DI GAUSS-GREEN,

$$\Phi_S(\underline{v}) = \int_S \underline{v} \cdot \hat{\mathbf{m}} dS = \int_V (\nabla \cdot \underline{v}) dV$$

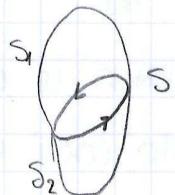
UN CAMPO IL CUI FLUSSO LUNGO QUALESiasi SUPERFICIE

CHIUSA E' NULLO SI DICE SOLENOIDALE. ALLORA

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

ALLORA IL FLUSSO ATTRAVERSO OGNI SUPERFICIE

(ANCHE NON CHIUSA) DIPENDE SOLO DAL BORDO. SI PARLA DI
FLUSSO CONCATENATO A UN CIRCUITO.



FOCUS: DIFFERENZIALE

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$df := f'(x_0)\Delta x$$

SCELTIENDO $f(x) = x$ OSSERVO CHE

$$dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \Rightarrow df = f'(x_0) dx$$

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}$$

SI HA CHE:

$$a. \Delta f = df + o(\Delta x) . \text{ INFATTI } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f - df}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{df}{\Delta x}}{\Delta x} \right) = 0$$

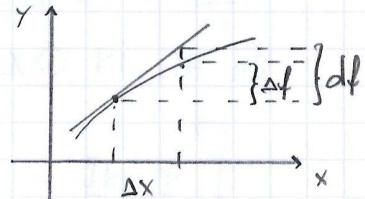
b. SCELTO $x = x(t)$,

$$f'(x) \Rightarrow f'(x(t))$$

$$dx \Rightarrow x'(t) dt \quad (\text{DALLA DEFINIZIONE})$$

$$\Rightarrow df = f'(x(t)) \cdot x'(t) dt = [f(x(t))]' dt$$

OSSERVO df E' INVARIANTE PER CAMBIAMENTO DELLA VARIABILE INDEPENDENTE.



ROTORE

$$\nabla \wedge \underline{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

IN UN FLUIDO, METTO UNA PALLINA RUVIDA. IL ROTORE E' UN VETTORE CHE HA COME ASSE L'ASSE DI ROTAZIONE DELLA PALLINA E COME MODULO $\frac{1}{2} |\underline{\omega}|$ (MOMENTO ANGOLARE).

IL ROTORE E' LINEARE:

$$\nabla \wedge (\underline{u} + \underline{v}) = \nabla \wedge \underline{u} + \nabla \wedge \underline{v}$$

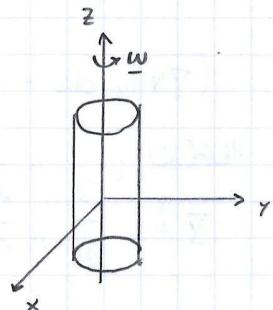
$$\nabla \wedge (\phi \underline{u}) = \phi \nabla \wedge \underline{u} + \nabla \phi \wedge \underline{u}$$

PRENDO UN CILINDRO ROTANTE. QUANTO VALE IL ROTORE DEL CAMPO DI VELOCITA' DEI PUNTI SULLA SUPERFICIE?

$$\underline{r} = \underline{\omega} \wedge \underline{z} \quad \underline{\omega} = (0, 0, \omega) \quad \underline{z} = (x, y, z)$$

$$\underline{v} = (-\omega y, \omega x, 0)$$

$$\nabla \wedge \underline{v} = (0, 0, 2\omega) = 2\omega \hat{k}$$



LA DIVERGENZA DI UN ROTORE E' SEMPRE NULLA:

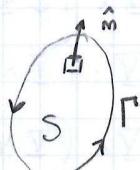
$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \underline{v}) = 0$$

SE \underline{v} E' CONSERVATIVO, (IL ROTORE DI UN GRADIENTE E' SEMPRE NULLO)

$$\nabla \wedge \underline{v} = \nabla \wedge (\nabla \phi) = (\nabla \wedge \nabla) \phi = 0$$

TEOREMA DI STOKES:

$$\oint_{\Gamma} \underline{v} \cdot d\underline{l} = \int_S (\nabla \wedge \underline{v}) \cdot \hat{n} ds$$



CON S UNA QUALESiasi SUPERFICIE CONCATENATA A Γ .

FOCUS: GRADIENTE

DEFINIZIONE DI GRADIENTE DI ∇ :

$$\nabla \cdot d\underline{l} = dV$$

IN COORDINATE CARTESIANE, $V = V(x, y, z)$ E $d\underline{l} = (dx, dy, dz)$, PERCIÒ

$$(\nabla V)_x dx + (\nabla V)_y dy + (\nabla V)_z dz = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

DA CUI

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

L'ESPRESSIONE DI ∇ DIPENDE DAL SISTEMA DI COORDINATE.

IN POLARI, $V = V(r, \theta, \varphi)$ E $d\underline{l} = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi)$, DA CUI

$$(\nabla V)_r dr + (\nabla V)_\theta r d\theta + (\nabla V)_\varphi r \sin \theta d\varphi = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} r \sin \theta d\varphi$$

PERCIÒ

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

ALCUNE RELAZIONI VETTORIALI

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \underline{b} (\underline{c} \cdot \underline{a}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b})$$

DA CUI

$$\nabla \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \underline{b} (\nabla \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\nabla \cdot \underline{b}) \quad \text{FORSE NO}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \underline{c}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\nabla \cdot \nabla) = \nabla (\nabla \cdot \underline{c}) - \nabla^2 \underline{c}$$

$$\nabla \wedge (\underline{f} \underline{r}) = \underline{f} (\nabla \wedge \underline{r}) + \nabla \underline{f} \wedge \underline{r}$$

$$\int_S \nabla \underline{f} \wedge d\underline{S} = \oint f d\underline{l}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \underline{a}) = 0 \quad \forall \underline{a}$$

$$\int_T \nabla \wedge \underline{r} d\underline{r} = - \int_S \underline{r} \wedge d\underline{S}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) &= \underline{c} \cdot (\nabla \wedge \underline{b}) - \underline{b} \cdot (\nabla \wedge \underline{c}) \\ &= -\underline{b} \cdot (\nabla \wedge \underline{c}) + \underline{c} \cdot (\nabla \wedge \underline{b}) \end{aligned}$$

$$\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{b} \wedge \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \wedge \underline{a} \cdot \underline{b}$$

ESEMPIO: DISTRIBUZIONE LINEARE DI CARICA

$$E(\underline{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(z')(z-z')dl}{|z-z'|^3}$$

IL PROBLEMA HA SIMMETRIA CILINDRICA. INOLTRE

SE IL FILO SI ESTENDE DA $+\infty$ A $-\infty$, IL CAMPO
E' NECESSARIAMENTE RADIALE (VEDI SCHEMA).

$$d\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dz}{r^2} \cos\theta \hat{y} \cdot \hat{z}$$

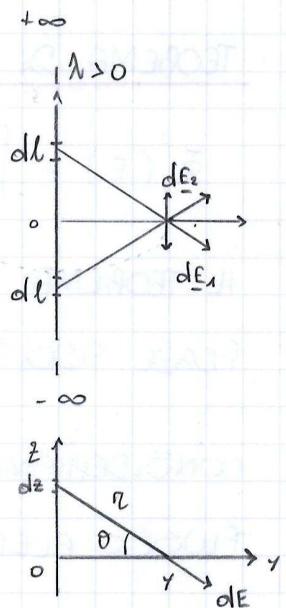
$$r \cos\theta = y \Rightarrow \operatorname{Tg}\theta = \frac{z}{y} \quad z = r \operatorname{Tg}\theta \quad dz = r \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$r = \frac{y}{\cos\theta}$$

ALLORA

$$d\underline{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{\cos^2\theta} d\theta \frac{1}{r^2} \cos\theta \hat{y} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cos\theta d\theta \hat{y}$$

$$\underline{E} = \int d\underline{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \hat{y} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \hat{y}$$

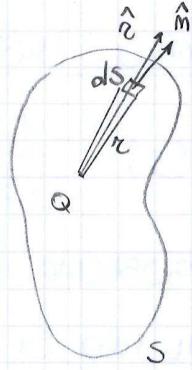


SI NOTI CHE ABBIAMO POTUTO SVOLGERE IL CALCOLO SOLTANTO PERCHE'
LE CARICHE ERANO FERME.

COSTRUANNO DELL'INVERSO DELLA CARICA IN CONVERGENZA.

TEOREMA DI GAUSS

$$\Phi_S(E) = \int_S E \cdot \hat{m} dS = \frac{Q_{\text{TOT}}^{\text{INT}}}{\epsilon_0} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \frac{q_i \cdot \text{INT}}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \end{array} \right.$$



IL TEOREMA VALE PER QUALSIASI CAMPO DI FORZE ADDITIVO CHE SIA CENTRALE E VADA COME $\frac{1}{r^2}$.

CONSIDERIAMO IL CASO DI UNA SOLA CARICA PUNTIFORME Q . IL FLUSSO ELEMENTARE ATTRANERSO dS DEL CAMPO CHE PRODUCE E

$$d\Phi_{dS} = E \cdot \hat{m} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{m}}_{\cos\theta} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_m}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Dove si è chiamata

$$dS_m = dS \cos\theta$$

LA PROIEZIONE DELL'ELEMENTO DI SUPERFICIE dS SULLA SFERA DI RAGGIO r E CENTRO Q E SI È RICONOSCIUTO

$$d\Omega = \frac{dS_m}{r^2}$$

ONDE L'ANGOLO SOLIDO DEL CONO CON VERTICE IN Q E DELIMITATO DA dS_m . ALLORA

$$\Phi(E) = \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

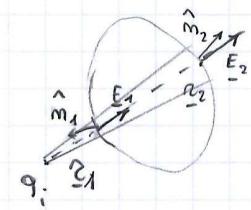
SE HO N CARICHE PUNTIFORMI, AL LIMITE INFINITO,

$$\phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad E = \sum_i E_i$$

$$\Phi = \int_S E \cdot \hat{m} dS = \int_S \sum_i E_i \cdot \hat{m} dS = \sum_i \int_S E_i \cdot \hat{m} dS = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

SE SI È AMMESSO CHE UNA CARICA ESTERNA AD S NON CONTRIBUISCA AL FLUSSO:

$$\begin{aligned} d\phi &= d\phi_1 + d\phi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dS_1 \cos\theta_1}{r_1^2} + \frac{dS_2 \cos\theta_2}{r_2^2} \right] \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} [-d\Omega + d\Omega] = 0 \end{aligned}$$



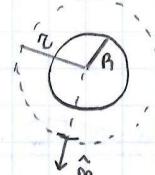
ESEMPI DI UTILIZZO

IL TEOREMA DI GAUSS NON BASTA DA SOLO A RISOLVERE UN PROBLEMA DI ELETROSTATICA (È SOLO 1 DELLE 2 EQUAZIONI DI MAXWELL); DIVENTA SUFFICIENTE SOTTO OPPORTUNE IPOTESI DI SIMMETRIA. VEDIAMO COME SI SEMPLIFICA IL CALCOLO DI

$$E(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{P(\underline{r}')(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} dV'$$

SFERA CARICA UNIFORMEMENTE

$$P = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{UNIF.}$$



SI HA UN'EVIDENTE SIMMETRIA RADIALE:

$$E(\underline{r}) = E(r) \hat{r}$$

$$\int_S E \cdot \hat{m} dS = \int_S E(r) \hat{r} \cdot \hat{m} dS = \int_S E(r) dS = E(r) \int_S dS = E(r) 4\pi r^2$$

DONDE CON S SI È INDICATA UNA QUALESiasi SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO r . SAPPIAMO CHE

$$\int_S E \cdot \hat{m} dS = \Phi_S(E) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

CHI È Q_{INT} ?

SE $r > R$,

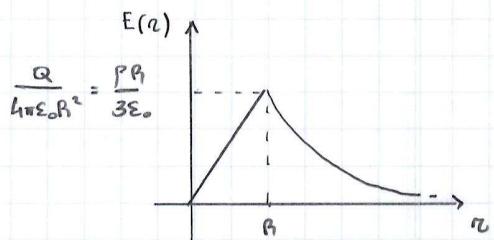
$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

SE $r \leq R$,

$$Q_{\text{INT}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V P dV = \frac{P}{\epsilon_0} \int_V dV = \frac{P}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow E(\underline{r}) = \frac{Pr}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

PERCIO'

$$E(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{Q \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \\ \frac{Pr \hat{r}}{3\epsilon_0} & r \leq R \end{cases}$$



• FILO INFINTO CARICO

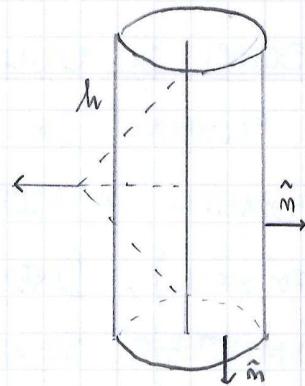
RICONOSCO LA SIMMETRIA CILINDRICA. IL FLUSSO LUNGO I DUE CERCHI È NULLO (ORTOGONALI),

$$\underline{E}(z) = E(z) \hat{z}$$

$$\Phi = E(z) 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

DA QUI

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{z}$$



• PIANO INFINTO CARICO

DIVIDO IL PIANO IN CORONE CIRCOLARI. LUNGO OGNI CORONA, LE COMPONENTI Y E Z DEL CAMPO GENERATO DA UN ELEMENTO dq SONO ANNULLATE DALL'ELEMENTO DIAMETRALMENTE OPPOSTO, PERCIO'

$$\underline{E} = E \hat{x}$$

COSTRUISCO UNA SUPERFICIE CILINDRICA CHE ATTRAVERSÀ IL PIANO: IL FLUSSO DI E CHE LA ATTRAVERSÀ SI RIDUCE A QUELLO SULLE FACCE,

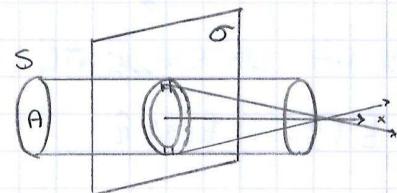
$$\Phi_s(E) = \int_S \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_S E \hat{x} \cdot \hat{m} ds = E \cdot 2A$$

USANDO IL TEOREMA DI GAUSS,

$$E \cdot 2A = \Phi_s(E) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

DA QUI

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x}$$



PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL

$$\Phi_s(E) = \int_S E \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V p dV \quad (\text{TEOREMA DI GAUSS})$$

SE E È DIFFERENZIABILE (C^1), PER IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\int_S E \cdot \hat{n} dS = \int_V (\nabla \cdot E) dV$$

DA CUI RICAVIAMO LA I^a EQUAZIONE DI MAXWELL:

$$\nabla \cdot E = \frac{p(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

SI NOTI CHE Istante per istante vale

$$\nabla \cdot E(x, y, z, t) = \frac{p(x, y, z, t)}{\epsilon_0}$$

PERCIÒ LA RELAZIONE VALE ANCHE SE LA CONFIGURAZIONE DI CARICA NON È STATICA (COSA PER NIENTE OVVIA NELLA FORMULAZIONE PRECEDENTE).

LA DIVERGENZA DA SOLA CHIARAMENTE NON INDIVIDUA UNIVOCAMENTE UN CAMPO (NON SI ACCORDA CON LE COSTANTI); PER QUESTO CI SERVIREMO DELLA 2^a EQUAZIONE DI MAXWELL PER IL CAMPO ELETTRICO.

NOTA CHE SE POTESSE SEMPRE APPLICARE LA FORMULAZIONE INTEGRALE DEL TEOREMA DI GAUSS, ORA INVECE DEVO EVITARE TUTTI I PUNTI DI DISCONTINUITÀ E DI NON DERIVABILITÀ E RACCORDARE PIÙ SOLUZIONI.

NOTA: SE LA SUPERFICIE È GRANDE, COM'È POSSIBILE CHE SI PARLINO Istantaneamente $p(z, t)$ ALL'INTERNO E $E(z, t)$ IN SUPERFICIE (QUELLO CON CUI CALCOLO IL FLUSSO)? FISICAMENTE, PERCHÉ' VARI p A NUOLO CHE DELLA CARICA ATTRAVERSÀ PROPRIO LA SUPERFICIE.

POTENZIALE ELETTRICO

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{r}')(\underline{r}-\underline{r}')}{{|\underline{r}-\underline{r}'|}^3} dV'$$

SFRUTTIAMO

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\underline{r}}{r^3} \quad \text{OVVERO} \quad \nabla \left(\frac{-1}{{|\underline{r}-\underline{r}'|}} \right) = \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{{|\underline{r}-\underline{r}'|}^3}$$

RISCHIRO ALLORA

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\underline{r}') \nabla \left(\frac{-1}{{|\underline{r}-\underline{r}'|}} \right) dx' dy' dz' \\ &= - \nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{r}') dV'}{{|\underline{r}-\underline{r}'|}} \right] \end{aligned}$$

E VERIFICO CHE

$$\nabla \times \underline{E} = - \nabla \times \nabla [\dots] = 0$$

PERCIÒ \underline{E} È CONSERVATIVO E POSSO SCRIVERE

$$\underline{E} = \nabla \phi = - \nabla V$$

DOVE V È DETTO POTENZIALE ELETTRICO E VALE

$$\begin{aligned} V(\underline{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{r}') dV'}{{|\underline{r}-\underline{r}'|}} + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{{|\underline{r}-\underline{r}'|}} + C \quad (\text{CASO DISCRETO}) \end{aligned}$$

$$[V] = \frac{[V]}{[Q]} = \frac{J}{C} = \text{VOLT}$$

$$[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{N \cdot m}{C \cdot m} = \frac{J}{C \cdot m} = \frac{V}{m}$$

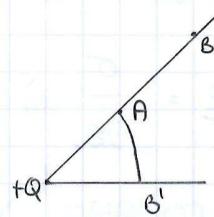
PERCIÒ

$$\underline{F} = q \underline{E} = -q \nabla V = -\nabla qV = -\nabla U_{el}$$

FORNIAMO UNA DEMOSTRAZIONE ALTERNATIVA (FEYNMAN) DEL FATTO CHE IL CAMPO ELETTRICO SIA CONSERVATIVO.

STUDIAMO IL CAMPO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME,

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



PONIAMO NELLO SPAZIO UNA CARICA q E LA SPOSTIAMO DA A A B IN DIREZIONE RADIALE.

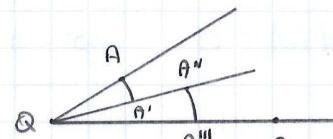
$$E_{cl} = q \underline{E}$$

$$L_{AB} = \int_A^B E_{cl} \cdot d\underline{l} = \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\underline{l} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

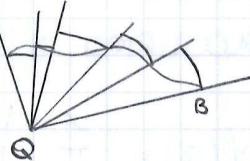
MUOVENDOCI LUNGO UN ARCO DI CIRCONFERENZA,

$$L_{AB'} = 0 \quad (\hat{r} \cdot d\underline{l} = 0)$$

ANDIAMO ALLORA DA A A B SEGUENDO LA SPEZZATA IN FIGURA:



$$L_{AB} = 0 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{A''}} - \frac{1}{r_{A'}} \right) + 0 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{A'''}} \right) = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$



APPROSSIMO ALLORA QUALSIASI PERCORSO CON SPEZZATE DI QUESTO TIPO. AL LIMITE AVRO'

$$L_{AB} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

ONVERO IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO. DEFINISCO QUINDI

$$-\Delta V = -\frac{\Delta U_{cl}}{q} = \int_A^B \frac{E_{cl}}{q} \cdot d\underline{l} = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

PERCIO' RESTA DEFINITO IL POTENZIALE COME, UNA VOLTA NOTO $\underline{E}(\underline{r})$,

$$\underline{V}(\underline{r}) = - \int_A^P \underline{E} \cdot d\underline{l} + V(A) \stackrel{"cost."}{=} \int_P^{P_0} \underline{E} \cdot d\underline{l} \quad \text{CON } V(P_0) = 0 \text{ o UN ALTRO VALORE.}$$

NOTO INVECE $V(\underline{r})$ RICAVO

$$\underline{E} = -\nabla V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

ESEMPIO

PER UN PIANO INFINITO DI CARICA UNIFORME, ABBIAMO RICAVATO

$$\underline{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\underline{n}}$$

CALCOLIAMO ∇ SPOSTANDOCI LUNGO $\hat{\underline{n}}$,

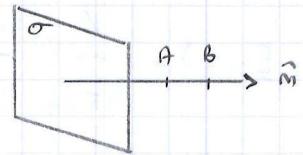
$$-\Delta V = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{l} = \int_A^B \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\underline{n}} \cdot d\underline{l} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [r_B - r_A]$$

PERCIÒ

$$V(r) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} r + \text{cost.}$$

SI NOTI CHE NON LO POSSO PORRE NULLO ALL'INFINITO (PERCHÉ IL PIANO STESSO SI ESTENDE FINO ALL'INFINITO). PONGO INVECE AD ESEMPIO

$$V(0) = 0 \quad \text{cost} = 0$$



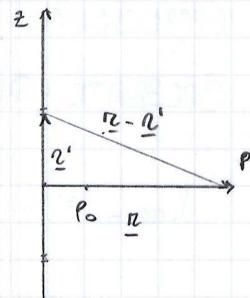
ESEMPIO

CALCOLIAMO IN MODO DIRETTO IL POTENZIALE PER IL FILO CARICO,

$$V(\underline{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{z}') d\underline{z}'}{|\underline{z} - \underline{z}'|} + C$$

$$dq = \lambda dl$$

$$|\underline{z} - \underline{z}'| = \sqrt{z^2 + r^2}$$



PERCIÒ

$$V(\underline{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(z + \sqrt{z^2 + r^2}) \right]_0^{+\infty}$$

SE LO CALCOLO, ESPLODE! IL PROBLEMA DERIVA ANCORA DALL'AVER SUPPOSTO LA DISTRIBUZIONE DI CARICA INFINTA. PONENDO $V(p_0) = 0$,

$$\begin{aligned} V(\underline{z}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \lambda dz \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r_0^2}} \right] - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \text{cost.} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(z + \sqrt{z^2 + r^2}) \Big|_0^{+\infty} - \ln(z + \sqrt{z^2 + r_0^2}) \Big|_0^{+\infty} \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z + \sqrt{z^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r_0^2}} \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

IN PRATICA, SONO PARTITO DA

$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}') d\underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + C$$

PER FAR SI CHE V FOSSE NULLO ALL'INFINITO ($|\underline{r} - \underline{r}'| \rightarrow \infty$) AVEVO MESSO A ZERO LA COSTANTE,

$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}') d\underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

PER COME ABBIAMO SCHEMATIZZATO IL PROBLEMA, QUESTO E' ASSURDO (ALL'INFINITO C'E' ANCORA CARICA); E INFATTI ESplode.

Allora metto lo zero in un punto a distanza finita, \underline{r}_0 , che individuo con \underline{r}_0 . Si ha

$$V(\underline{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}') d\underline{r}'}{|\underline{r}_0 - \underline{r}'|} + C$$

Perche' sia $V(\underline{r}_0) = 0$, deve essere

$$C = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}') d\underline{r}'}{|\underline{r}_0 - \underline{r}'|}$$

Allora risostituisco sopra e ottengo

$$\underline{V}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\underline{r}') \left[\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}_0 - \underline{r}'|} \right] d\underline{r}'$$

POTENZIALE PER DISTRIBUZIONI INFINITE DI CARICA, CON LO ZERO IN \underline{r}_0 .

Abbiamo verificato che nel nostro caso l'integrale converge e si ottiene

$$V(\underline{r}) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Lavorando in coordinate polari con $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$,

$$\begin{aligned} \underline{E} = -\nabla V &= - \frac{\partial}{\partial r} \left[- \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \hat{r} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \end{aligned}$$

DIPOLO ELETTRICO

UN DIPOLO E' UN INSIEME RIGIDO DI DUE CARICHE.

E' CARATTERIZZATO DAL SUO MOMENTO DI DIPOLO

$$P = |q| \delta \quad [\text{Cm}]$$

CALCOLIAMONE IL POTENZIALE TENENDO CONTO CHE

$$\nabla(P) = \nabla_-(P) + \nabla_+(P)$$

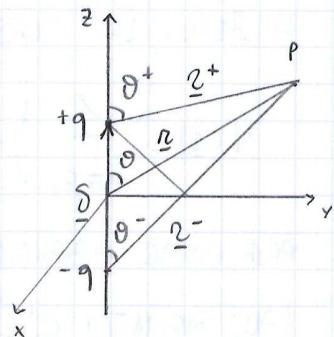
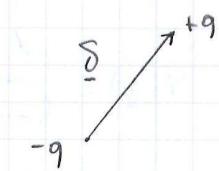
$$\nabla(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r^+} - \frac{q}{r^-} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^- - r^+}{r^+ r^-}$$

SIANO PERO' INTERESSATI A STUDIARE GLI
EFFETTI A GRANDE DISTANZA, $r \gg \delta$, DOVE

$$r^+ \sim r^- \sim r \quad \theta^+ \sim \theta^- \sim \theta \quad r^+ r^- \sim r^2$$

$$r^+ - r^- \approx \delta \cos \theta^- \approx \delta \cos \theta$$

$$\nabla(P) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta \cos \theta}{r^2} = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^2}$$



NOTA CHE INVECE PER
UNA CARICA PUNTIFORME
 $\nabla \propto \frac{1}{r^2}$

RICANO QUINDI

$$\underline{E} = - \nabla \nabla$$

Sviluppiamo il calcolo in coordinate cartesiane.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\nabla r = \hat{r}$$

COME SI VIDE FACENDO LE DERIVATE; IN EFFETTI E' ORTOGONALE
ALLE SUPERFICI DI UNELO (LE SFERE DI RAGGIO r).

$$\begin{aligned} \nabla f(r) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \nabla r = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} \end{aligned}$$

IN PARTICOLARE,

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \hat{r} = - \frac{\underline{r}}{r^3}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r^m} \right) = \frac{-m \underline{r}}{r^{m+2}}$$

NOTA: ALLO STESSO
RISULTATO SI ARRIVA
FACILMENTE CON ∇
IN POLARI.

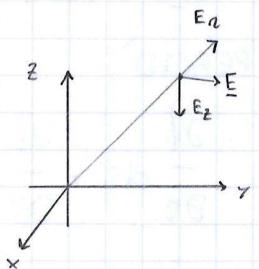
TORNIAMO AL NOSTRO PROBLEMA,

$$\nabla(V) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \cdot \underline{r}}{r^3}$$

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\rho \cdot \underline{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\rho z}{r^3} \right)$$

INFATTI
 $\underline{r} = \hat{z} \underline{r}$ $\rho \cdot \underline{r} = \rho z$

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -2 \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) - \frac{\nabla z}{r^3} \right\} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3z \underline{r}}{r^5} - \frac{\hat{z}}{r^3} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\rho \cdot \underline{r}}{r^5} \underline{r} - \frac{\rho}{r^3} \right\} \end{aligned}$$



IL CAMPO HA QUINDI UNA COMPONENTE RADIALE E

UNA LUNGO L'ASSE Z. NOTA CHE SE MI METTO SU UN ASSE ORTOGONALE A \hat{z} (E A \underline{r}), IL PRIMO ADDENDO SVANISCE.

LUNGO L'ASSE Z, INVECE, $r = z$ E

$$E_z(\hat{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\rho z^2}{r^5} - \frac{\rho}{z^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^3} (3\rho - \rho) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^3}$$

PER SVOLGERE I CONTI IN CARTESIANE, USO IL FATTO CHE $\rho \cdot \underline{r} = \rho z$ E

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\rho z}{r^5} \times$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\rho z}{r^5} y$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\rho z}{r^5} z - \frac{\rho}{z^3} \right\}$$

IN COORDINATE POLARI, CONSIDERO $\rho \cdot \underline{r} = \rho r \cos\theta$ (CON θ AZIMUTH) E

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho r \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\rho r \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

GRADIENTE IN COORDINATE POLARI

IL GRADIENTE E' DEFINITO DA

$$df = \nabla f \cdot d\ell$$

SI TRATTA DI PROIETTARE $d\ell$ NEL SISTEMA
DI RIFERIMENTO SCELTO. IN POLARI,

$$d\ell = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi)$$

PERCIO'

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} r \sin \theta d\varphi = \nabla f_r dr + \nabla f_\theta r d\theta + \nabla f_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

CONFRONTANDOLE,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

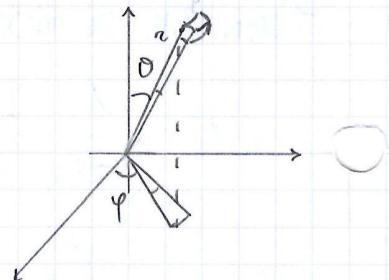
FOCUS: POTENZIALE

DISEGNO LE CURVE DI LIVELLO DI V ; PIU' SONO VICINE, PIU' E' INTENSO:

$E \propto$ VARIAZIONE DI V

$$[E] = \frac{V}{m} \quad (\text{di quanto varia } V \text{ se mi sposto di un po'})$$

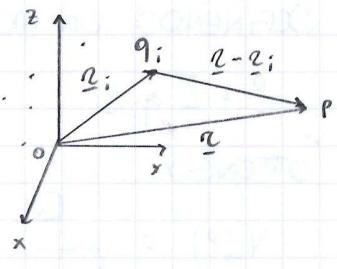
SE DUE PUNTI STANNO A ΔV , LO RIMANGONO SE IL CAMPO TRA DI LORO
NON CAMBIA (ES.: SCHERMO ELETROSTATICO); NON E' DETTO PERCIÒ CHE
NON CAMBINO I VALORI NOMINALI DI V_1 E V_2 .



SVILUPPO IN SERIE DI MULTIPOLI

INSIEME DISCRETO DI CARICHE q_i .

VOGLIAMO CALCOLARE IL POTENZIALE CHE PRODUCE
A GRANDE DISTANZA DALL'ORIGINE.



$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|r - r_i|}$$

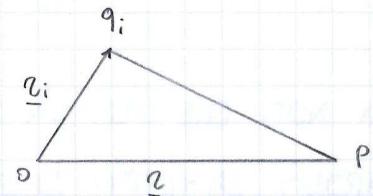
$$r \gg r_i \quad |r - r_i| \sim r$$

$$V(P) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

IN PRIMA APPROSSIMAZIONE, IMMAGINO TUTTA LA CARICA
CONCENTRATA NELL'ORIGINE (PUNTIFORME).

QUESTO FUNZIONA BENE, MA CHE COSA SUCCIDE SE IL SISTEMA È
GLOBALMENTE NEUTRO? LA PRATICA MOSTRA CHE UNA CARICA TEST
SUBISCE UNA FORZA E QUESTO È INCOMPATIBILE CON UN POTENZIALE
NULLO.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r - r_i|} &= \frac{1}{[(r - r_i) \cdot (r - r_i)]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{[r^2 + r_i^2 - 2r \cdot r_i]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - 2\frac{r \cdot r_i}{r^2}\right]^{1/2}} \\ &\approx \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\left[1 - 2\frac{r \cdot r_i}{r^2}\right]^{1/2}} \right\} \\ &\approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r \cdot r_i}{r^2} \right] \end{aligned}$$



(TEOREMA DI CARNOT)

$$r_i \ll r$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}} \Bigg|_{x=0} \quad x+... \approx 1 + \frac{x}{2}$$

ALLORA

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|r - r_i|} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sum_i q_i r_i \cdot r}{r^3}$$

DEFINENDO UN MOMENTO DI DIPOLI ELETTRICO COME

$$P = \sum_i q_i \underline{r}_i; \quad Q = \sum_i q_i$$

OTTENGO

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot \underline{r}}{R^3}$$

TERMINE DI
MONOPOLIO TERMINE DI
DIPOLO

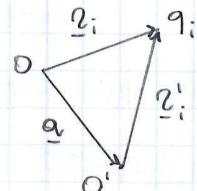
POTENZIALE GENERATO A
GRANDE DISTANZA DA UNA
GENERICA DISTRIBUZIONE DI
CARICA.

SI NOTI CHE \underline{P} PER COME L'HO DEFINITO NON E' INVARIANTE

SE CAMBIO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO. SE PERO' IL SISTEMA
E' GLOBALMENTE NEUTRO,

$$\underline{P}' = \sum_i q_i \underline{r}'_i = \sum_i q_i (\underline{r}_i - \underline{a}) = \sum_i q_i \underline{r}_i - \underline{a} Q$$

E POICHÉ $Q=0$ RITROVO $\underline{P} = \underline{P}'$.



SI GENERALIZZA AL CASO CONTINUO TRAMITE

$$Q = \sum_i q_i \rightarrow \int_V p dV \quad P = \sum_i q_i \underline{r}_i \rightarrow \int_V p(\underline{r}') \underline{r}' dV'$$

SI NOTI CHE PER UN SISTEMA GLOBALMENTE NEUTRO IL TERMINE DI
DIPOLI DIVENTA QUELLO DOMINANTE, MENTRE IN GENERALE E'
TRASCHIABILE IN QUANTO VA COME $\frac{1}{2^2}$ (IL POTENZIALE DELLA
CARICA PUNTIFORME VA INVECE COME $\frac{1}{2}$).

SI PUO' DEMONSTRARE CHE E' POSSIBILE OTTENERE LO SVILUPPO

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(K_i)}{R^i}$$

NOTA CHE NEL CASO DI UN DIPOLO RITROVO

$$P = \sum_i q_i \underline{r}_i = q \underline{r}^+ - q \underline{r}^- = q (\underline{r}^+ - \underline{r}^-) = q \underline{S}$$

$$V(P) = \frac{q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot \underline{r}}{R^3} = \frac{P \cdot \underline{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

AZIONI MECCANICHE SU UN DIPOLO IN UN CAMPO ELETTRICO

PONIAMO UN DIPOLO IN UNA REGIONE DI SPAZIO

IN CUI E' PRESENTE UN CAMPO ELETTRICO.

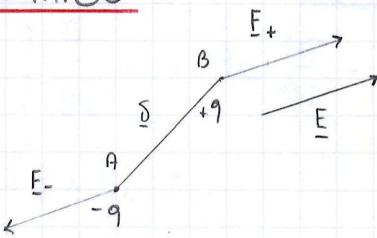
SUPPONENDO INIZIALMENTE E COSTANTE,

$$\underline{F}_+(B) = q \underline{E}(B)$$

$$\underline{F}_-(A) = -q \underline{E}(A)$$

$$\underline{F} = \underline{F}_+ + \underline{F}_- = q\underline{E} - q\underline{E} = 0$$

$$\underline{M} = \underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{\delta} \wedge q\underline{E} = q \underline{\delta} \wedge \underline{E} = \underline{p} \wedge \underline{E}$$



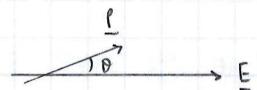
HO SCELTO COME POLO IL PUNTO A.

OVVERO HO UNA COPPIA DI FORZE DI BRACCIO NON NULLO.

IL MOTO RISULTANTE E' SEMPLICEMENTE

$$p \epsilon \sin \theta \sim p \epsilon \dot{\theta} = \tilde{I} \ddot{\theta}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\frac{p \epsilon}{I}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$



STUDIAMO ORA IL CASO IN CUI E' NON SIA COSTANTE.

CERCHIAMO L'ENERGIA POTENZIALE DEL DIPOLO:

$$U = U_- + U_+$$

$$= -q \sqrt{(\underline{\delta})} + q \sqrt{(\underline{\delta} + \underline{\delta})}$$

$$\sqrt{(\underline{\delta} + \underline{\delta})} \approx \sqrt{(\underline{\delta})} + dV = \sqrt{(\underline{\delta})} + \nabla V \cdot \underline{\delta}$$

$$U \approx -q \sqrt{(\underline{\delta})} + q \sqrt{(\underline{\delta})} + q \nabla V \cdot \underline{\delta}$$

$$= \nabla V \cdot q \underline{\delta} = \nabla V \cdot \underline{p} = -\underline{E} \cdot \underline{p}$$

ABBIAMO QUINDI RIOTRATO

$$U_d = -\underline{p} \cdot \underline{E}$$

IMMAGINO DEGLI SPOSTAMENTI VIRTUALI

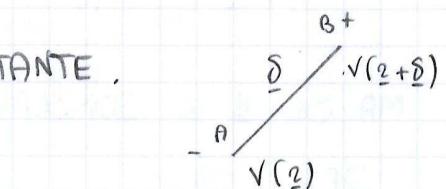
NE DERIVA UN LAVORO VIRTUALE:

$$dL = \underline{F} \cdot d\underline{l} + \underline{M} \cdot d\underline{\theta}$$

"

$$-dU = -\frac{\partial U}{\partial \underline{l}} d\underline{l} - \frac{\partial U}{\partial \underline{\theta}} d\underline{\theta}$$

\uparrow
(VEDI NOTA DOPO)



(SE $\underline{\delta}$ E' PICCOLO, $\underline{\delta} \ll dV$, DISTANZA SPAZIALE ENTRO CUI CALCOLO dV . NOTA CHE BASTA SIA PICCOLO SE VISTO DA LONTANO, OVVERO ENTRO I LIMITI DI VALIDITA' DELLA APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO).

$d\underline{l}$ TRASLAZIONE

$d\underline{\theta}$ ROTAZIONE ($= \hat{\alpha} d\theta$, $\hat{\alpha}$ E' L'ASSE)

$$\begin{cases} \underline{F} \cdot d\underline{l} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{l}} d\underline{l} \\ \underline{M} \cdot d\underline{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{\theta}} d\underline{\theta} \end{cases}$$

ALLORA

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta &= -\frac{\partial}{\partial \theta} [-P E \cos \theta] d\theta = -P E \sin \theta d\theta = -(E \wedge P) \cdot d\theta \\&= (P \wedge E) \cdot d\theta\end{aligned}$$

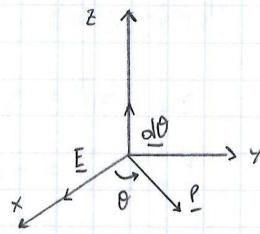
$$M \cdot d\theta = (P \wedge E) \cdot d\theta \Rightarrow \underline{M} = P \wedge E$$

E

$$-\frac{\partial U}{\partial l} dl = -dU \Big|_{\theta=\text{cost.}} = -\nabla U \cdot d\underline{l}$$

$$= \nabla(P \cdot E) \cdot d\underline{l}$$

$$F \cdot d\underline{l} = \nabla(P \cdot E) \cdot d\underline{l} \Rightarrow \underline{F} = \nabla(P \cdot E)$$



CHE SI PUO' ESPANDERE IN

$$\underline{F} = \nabla(P \cdot E) = \nabla(P_x E_x + P_y E_y + P_z E_z)$$

$$= \left(P_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + P_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + P_z \frac{\partial E_x}{\partial z}, P_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + \dots \right)$$

INFATTI $P = \text{cost.}$,
F LO FA SOLO TRASLARE
E NON RUOTARE.

MA SE E E' CONSERVATIVO,

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \text{INFATTI} \quad \frac{\partial}{\partial y}(E_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(E_y)$$

PERCIO'

$$\begin{aligned}F &= \left(P_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + P_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + P_z \frac{\partial E_x}{\partial z}, \dots \right) \\&= (P \cdot \nabla E_x, P \cdot \nabla E_y, P \cdot \nabla E_z)\end{aligned}$$

DA CUI SI VIDE CHE IL RISULTANTE DELLE FORZE E' NON NULLO SOLO SE E' DIPENDE DA ALMENO UNA DELLE TRE COORDINATE. IN CASO CONTRARIO, SUL DIPOLO AGISCE SOLO LA COPPIA DI MOMENTO $M = P \wedge E$.

NOTA: SI E' VISTO CHE

$$U(\underline{x}, \theta) = -E \cdot P = -E(\underline{x}) P \cos \theta$$

IL CHE GARANTISCE CHE IO POSSA SCRIVERE dU IN TERMINI DI $d\theta$ E DI $dl = |\underline{dl}| = |(dx, dy, dz)|$ oppure $|(\underline{dz}, r d\theta, r \sin \theta dy)|$

IL PROBLEMA GENERALE DELL'ELETROSTATICA NEL VUOTO

ABBIAMO CARATTERIZZATO COMPLETAMENTE E TRAMITE

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \frac{P}{\epsilon_0} \\ \nabla \times E = 0 \end{cases}$$

POICHÉ E È CONSERVATIVO,

$$E = -\nabla V(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{P(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

DEFINIAMO QUINDI L'OPERATORE LAPLACIANO

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

PERCÒ POSSIAMO SCRIVERE

$$\nabla^2 V = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

EQUAZIONE DI POISSON

$$\nabla^2 V = 0$$

EQUAZIONE DI LAPLACE

(IN ASSENZA DI CARICA, LOCALMENTE)

RISOLVENDO LA PRIMA PER P LOCALIZZATA IN UNA REGIONE FINITA DI SPAZIO, TROVO

$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{regione}} \frac{P(\underline{r}') dV'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \text{cost.}$$

CHE GIÀ CONOSCEVAMO; L'EQUAZIONE DI POISSON DIVENTA INVECE FONDAMENTALE QUANDO PER QUALCHE RAGIONE NON CONOSCO $P(x, y, z)$.

IL TEOREMA DI ESISTENZA E UNIITÀ SI APPLICA QUI OGNI VOLTA CHE LA DISTRIBUZIONE DI CARICA P NON SI ESTENDE ALL'INFINTO. DIMOSTRIAMO L'UNIITÀ:

TEOREMA

SE $\exists V$ SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI POISSON, ALLORA È UNICO.

DI MOSTRAZIONE

PER ASSURDO, SUPPONIAMO ESISTANO f_1, f_2 t.c.

$$\begin{cases} \nabla^2 f_1 = P & f_1 = f_S \text{ SU } S \\ \nabla^2 f_2 = P & f_2 = f_S \text{ SU } S \end{cases}$$

Dove S è la superficie, ovvero ho imposto le stesse condizioni al contorno.

CON $f_1 \neq f_2$.



REGIONE FINITA E
DELIMITATA DA S .

ALLOMA PER LINEARITÀ

$$\nabla^2(f_1 - f_2) = \rho - \rho = 0$$

E LA FUNZIONE

$$f = f_1 - f_2$$

DEVE ESSERE ARMONICA, OSSIA SODDISFARE L'EQUAZIONE DI LAPLACE

$$\nabla^2 f = 0 \quad \text{CON CONDIZIONI AL CONTORNO} \quad f = f_S - f_{\bar{S}} = 0 \quad \text{SU } S.$$

DIMOSTRIAMO CHE DEVE ESSERE $f = 0$. COSTRUISCO

$$\nabla \cdot (\vec{f} \nabla f)$$

E LO INTEGRO SUL VOLUME τ (S È LA SUPERFICIE):

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\vec{f} \nabla f) d\tau = \int_S \vec{f} \nabla f \cdot d\vec{s} = 0$$

L'INTEGRALE A DESTRA È NULLO PERCHÉ SU TUTTA S SI HA

$$f = f_1 - f_2 = f_S - f_{\bar{S}} = 0$$

Sviluppando l'integrale a sinistra,

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\vec{f} \nabla f) d\tau = \int_{\tau} (\nabla f)^2 d\tau + \int_{\tau} f (\nabla^2 f) d\tau = 0$$

VERO SSE

$$\nabla f = 0 \Rightarrow f = \text{cost.}, \text{ MA } f=0 \text{ SUL CONTORNO, PERTOPO' } f=0.$$

FUNZIONI ARMONICHE

f è ARMONICA SE È C^2 , FINITA SU τ E SODDISFA $\nabla^2 f = 0$, SI DIMOSTRA CHE

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S f dS = f(c).$$

(IL VALORE MEDIO DI f SU UNA SUPERFICIE SFERICA È $f(c)$).

UNA CONSEGUENZA È CHE IL POTENZIALE V NON AMMETTE

MASSIMI E MINIMI NELLO SPAZIO CHE SEPARA LE CARICHE SORGENTI ($\rho = 0$, $\nabla^2 V = 0$):

PRESA COMUNQUE UNA SFERA CENTRATA NELL'ESTREMO, LA MEDIA NON POTREBBE

ESSERE PARI A f NEL CENTRO. UNA CARICA ISOLATA NEL VUOTO NON HA PUNTI

DI EQUILIBRIO STABILE, PERCHÉ QUESTI CORRISPONDONO AI MINIMI DI V O NEGLI

MASSIMI O MINIMI DI V (A SECONDA DEL SEGNO DELLA CARICA).



ELETROSTATICA NEI CONDUTTORI

ABBIAMO FINORA STUDIATO IL CAMPO ELETTRICO NEL VUOTO; NE VEDIANO ORA GLI EFFETTI SU UN CONDUTTORE.

SOTTOPONIAMO UN OGGETTO NEUTRO A UN

CAMPIONE ELETTRICO; LE CARICHE AL SUO INTERNO
POSSENO SPOSTARSI PER EFFETTO DEL CAMPO
E QUINDI MODIFICARE IL CAMPO STESSO.

+Q.

+2Q

-Q

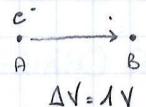
$$V = V_0 + V_{-q} + V_{+q} \neq V_0$$



VEDREMO CHE LA CARICA INDotta SUL CONDUTTORE DIPENDE DA "QUANTE" LINEE DI CAMPO GENERATE DALLA CARICA FISSA INTERCETTANO IL CONDUTTORE STESSO.

RESTRINGIAMO IL NOSTRO STUDIO AI SOLI CONDUTTORI METALLICI, DONDE GLI ELETTRONI PIÙ ESTERNI SONO TALMENTE POCO LEGATI DA POTERSI MUOVERE ALL'INTERNO DEL RETICOLO DI NUCLEI.

IL LAVORO DI ESTRAZIONE DI UN ELETTRONE È $\approx 10 \text{ eV}$, MENTRE L'AGITAZIONE TERMICA È MEDIANTE $K_T \sim \frac{1}{10} \text{ eV}$ CON $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV}$



OGNI CARICA NEL CONDUTTORE SUBISCE

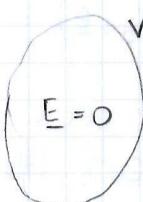
$$\underline{F} = q \underline{E}$$

NEL PROBLEMA DI ELETROSTATICA NON CI POSSONO ESSERE CORRENTI; SI RAGGIUNGE PERCIO' UNA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO IN CUI

$$\underline{F} = \underline{0}$$

Allora ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE $\underline{E} = \underline{0}$, SICCHE'

$$V_A - V_B = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0 \quad \forall A, B \in \mathcal{T}$$



STUDIAMO ORA IL CAMPO LUNGO LA SUPERFICIE

DI SEPARAZIONE DI DUE MEZZI. LA

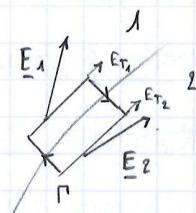
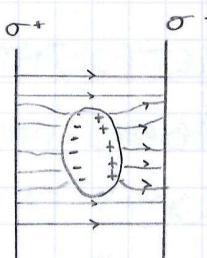
CONSERVATIVITÀ DEI CAMPI IMPLICA CHE

$E_{T_1} = E_{T_2}$ LUNGO L'INTERFACCIA: INFATTI, SU

UN CIRCUITO INFINITESIMO (TRASCURSO I LATI CORTI)

$$\oint_E \cdot d\ell = (E_{T_1} - E_{T_2}) l = 0$$

CONTINUITÀ DELLA
COMPONENTE TANGENZIALE
DEL CAMPO ELETROSTATICO.



LUNGO LA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE E_1 NON È

VINCOLATO A ESSERE NULLO, MA CERTAMENTE È

ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE: $E_2 = 0 \Rightarrow E_{T_2} = 0 \Rightarrow E_{T_1} = 0$

APPENA FUORI DAL CONDUTTORE, POICHÉ'

$$E = -\nabla V$$

E IL GRADIENTE È ORTOGONALE ALLE SUPERFICI DI LIVELLO,

ABBIAMO UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE (CON POTENZIALE V_e).

IL LAVORO DI ESTRAZIONE DI UN ELETTRONE DA UN MEZZO METALLICO È

$$\Delta V = V_i - V_e \neq 0 \quad \left(= -\frac{e}{-q} \right)$$

IL VOLUME INTERNO AI CONDUTTORI È EQUIPOTENZIALE ED HA POTENZIALE V_i .

IL CONDUTTORE È INIZIALMENTE NEUTRO. SE LO CARICO, ALL'EQUILIBRIO

LA CARICA SI DISTRIBUISCE SOLAMENTE SULLA SUPERFICIE

E NON ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE, IN MODO CHE È

AL SUO INTERNO RESTA NULLO.

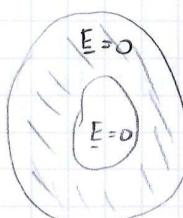
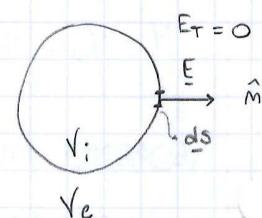
PRENDIAMO INFATTI UNA SUPERFICIE S ALL'INTERNO

E APPLICHIAMO IL TEOREMA DI GAUSS:

$$\Phi_S(E) = \int_S E \cdot \hat{m} ds = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

PERCIÒ ALL'INTERNO DI S $Q_{int} = 0$.

CONSIDERO UN CONDUTTORE CON UNA CAVITÀ: NELLA
CAVITÀ IL CAMPO È NULLO.

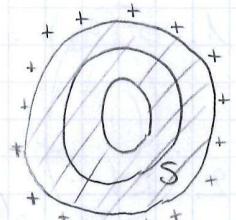


QUESTO SI PUÒ DEMONSTRARE RISOLVENDO L'EQUAZIONE DI LAPLACE DI CONDIZIONI AL CONTORNO $V = V_0$. A LIVELLO PURAMENTE TEORICO, PER IL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ, $V = V_0$ COST., PERCÒ $E = 0$.

PRENDIAMO UN CONDUTTORE CAVO E CARICHIALO CON Q^+ .

SCELTA S E POICHÉ $E = 0$, DENTRO S DEVE ESSERE $Q_{\text{TOT}} = 0$. SE IPOTIZZO UN CAMPO NELLA CAVITÀ, SAREBBE CAUSATO DAL DISTRIBUIRSI DELLA CARICA IN MODO ASIMMETRICO ATTORNO ALLA CAVITÀ; MA QUESTO NON È POSSIBILE: BASTA SEGUIRE PER INTERO UNA LINEA DI CAMPO CHIUSA PER RENDERSI CONTO CHE SI ANREBBE

$$\oint_S E \cdot d\ell \neq 0$$



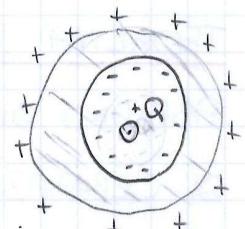
IMMAGINIAMO ORA DI METTERE UNA CARICA NELLA CAVITÀ.

Allora lungo la superficie interna si distribuisce carica negativa in modo che continui a valere il teorema di GAUSS ($Q_{\text{int}} = 0$). SEMPRE PER IL TEOREMA DI GAUSS, CARICHE POSITIVE CHE SOMMATE DANNO Q SI DISTRIBUISCONO LUNGO LA SUPERFICIE ESTERNA.

IL CAMPO NELLA CAVITÀ È QUELLO DI $+Q$. DA FUORI VEDO, A MENO DI DIFFERENZE DOVUTE ALLA FORMA DEL CONDUTTORE, IL CAMPO DONUTO ALLA CARICA $+Q$. CIÒ CHE C'È FUORI NON HA EFFETTO NELLA CAVITÀ.

SE ORA FACCIO TOCCARE $+Q$ CON IL BORDO INTERNO DELLA CAVITÀ (CARICO CON $-Q$), LE DUE SI NEUTRALIZZANO: MI RIMANE IL CONDUTTORE CON CARICA $+Q$ DISTRIBUITA LUNGO LA SUPERFICIE ESTERNA.

INFINE, SI PUÒ OSSERVARE CHE IN PRESENZA DI UNA CARICA q ESTERNA AL CONDUTTORE, IL CAMPO NELLA CAVITÀ RESTA NULLO (SCHERMO ELETROSTATICO): CAMBIA V_{int} , MA NON E_{int} E $\Delta V_{\text{int-ext}}$.



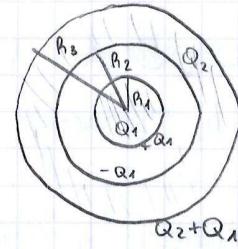
ESEMPIO

$$R_1 = 5 \text{ cm} \quad R_2 = 10 \text{ cm} \quad R_3 = 12 \text{ cm}$$

$$Q_2 = 10 \quad Q_1 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

TRAVA

$$1. \sigma(R_2) = \frac{Q}{\text{Vol}} = \frac{-Q_1}{4\pi R_2^2} \sim -10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$



$$2. \Delta V \quad \text{TRA } 1 \in 2$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E \cdot d\ell \quad (\text{IL CONDUTTORE ESTERNO HA EFFETTO SOLO ALL'ESTERNO})$$

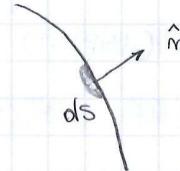
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

TEOREMA DI COULOMB

ABBIAMO DEMONSTRATO CHE LUNGO LA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE IL CAMPO ELETTRICO HA DIREZIONE NORMALE ALLA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE.

IL TEOREMA DI COULOMB AFFERMA CHE

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{m}$$

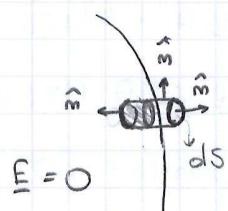


OVVERO IL CAMPO DIPENDE SOLO DA σ IN QUEL PUNTO, NON DA TUTTE LE ALTRE CARICHE DISTRIBUITE ATTORNO.

SCELTO UN VOLUMETTO CILINDRICO, APPLICO IL TEOREMA DI GAUSS (TENENDO CONTO CHE DENTRO $\epsilon = 0$):

$$E ds = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

E HO LA TESI ($E = E \hat{m}$).



NOTA CHE UNO STRATO CARICO PRODUCEVA $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{m}$; INFATTI NON È UN CONDUTTORE (NON HA SPESORE).

POTERE DELLE PUNTE

CONSIDERIAMO DUE SFERE ABBASTANZA

LONTANE DA NON PERTURBARSI A

VICENDA. COLLEGHIAMOLE CON UN FILO

CONDUTTORE (LA SUA σ E' TRASCURABILE). CARICO IL TUTTO CON

$$Q_0 = Q + q$$

ALLORA

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \frac{R}{2}}$$

ALL'EQUILIBRIO, ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE

$$V_1 = V_2$$

(EQUIPOTENZIALE), QUINDI

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r} \quad \frac{Q}{q} = \frac{R}{r}$$

$$\sigma_Q = \frac{Q}{4\pi R^2} \Rightarrow \sigma_q = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \sigma_q = \frac{r^2}{R^2} \frac{Q}{q} = \frac{r}{R}$$

LA DENSITA' DI CARICA E' INVERSALEMENTE PROPORZIONALE AL RAGGIO DELLE DUE SFERE E SI PUO' DEMONSTRARE CHE IN GENERALE QUESTO VALE PER IL RAGGIO DI CURVATURA: IL CAMPO ELETTRICO E' TANTO PIU' INTENSO QUANTO PIU' QUESTO E' PICCOLO.

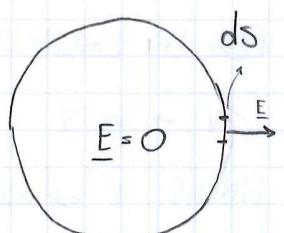
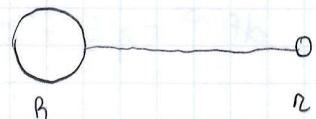
PRESSIONE ELETTROSTATICA

$$\underline{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{m} \text{ ALL'ESTERNO} \quad \underline{E} = 0 \text{ ALL'INTERNO}$$

SCHEMATIZZIAMO dS COME UN PEZZETTO

DI STRATO CARICO. PER IL PRINC. DI SOVRAPP.,

$$\underline{E}^{(S-dS)} = \underline{E} - \underline{E}^{(dS)} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{m} & \text{FUORI} \\ 0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{m} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{m} & \text{DENTRO} \end{cases}$$



$$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{m} \longleftrightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{m}$$

QUINDI L'ELEMENTO dS SUBISCE DA PARTE DEI RESTANTI ($S - dS$)

$$dF^{(dS)} = q E^{(S-dS)} \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{m} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \hat{m}$$

CHIAMO PRESSIONE ELETROSTATICA

$$P_{ES} = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

CAPACITÀ ELETTRICA

CONSIDERO UN CONDUTTORE NEL VUOTO SU CUI METTO UNA CARICA Q . IL CONDUTTORE ACQUISTA UN POTENZIALE V_0 . E GENERA UN POTENZIALE

$$V \propto Q$$

CHE ESPLIATO RISOLVENDO L'EQUAZIONE DI LAPLACE

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{CON CONDIZ. AL CONTORNO} \quad \begin{cases} V = V_0 & \text{SU } S \\ V = 0 & \text{ALL'INFINITO.} \end{cases}$$

RICAVO QUINDI

$$E = -\nabla V = -\frac{dV}{dm} \hat{m} \quad (\text{INFATTI } \frac{dV}{dm} = \nabla V \cdot \hat{m} = -E \cdot \hat{m} = -E \hat{m} \cdot \hat{m} = -E)$$

E INFINE

$$\sigma = \epsilon_0 E \Rightarrow Q = \int_S \sigma dS$$

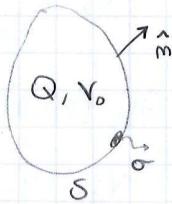
IL TEOREMA DI UNIITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI LAPLACE CI DICE CHE ESISTE UNA SOLA σ CHE SODDISFA QUESTE CONDIZIONI. PER LA LINEARITÀ DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE, SCALANDO

$$V \rightarrow \alpha V \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ COST.}$$

ANCHE IL CAMPO E LA CARICA SONO SCALATI ALLO STESSO MODO;

$$\frac{Q}{V} = \text{COST.} = \text{CAPACITÀ ELETTRICA}$$

RAGIONANDO AL CONTRARIO, SE METTO SUL CONDUTTORE UNA CARICA Q QUESTA SI DISTRIBUISCE SULLA SUPERFICIE INDEPENDENTEMENTE DAL FATTO CHE GA' A FOSSE CARICA O MENO. ALLORA $\sigma \propto Q$, PERCHÉ LO È ANCHE È PRODOTTO DA OGNI ELEMENTO (PRINC. SOTTRAZIONE) E V (LINEARITÀ INTEGRALE). HO SCOPERTO CHE $V \propto Q$.



CONDUTTORE
ISOLATO IDEALE

SI NOTI CHE QUI LA CAPACITÀ ELETTRICA DI PENE UNICAMENTE DALLA GEOMETRIA DEL CONDUTTORE.

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} \doteq \frac{c}{r} = F \quad (\text{FARAD})$$

LA CAPACITÀ DELLO STESSO CONDUTTORE IMMERSO IN UN MEZZO ISOLANTE (NON NEL VUOTO) DI PENE DAL MEZZO.

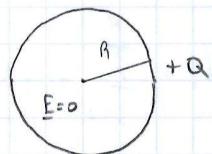
ESEMPIO

CONDUTTORE SFERICO CARICATO CON $+Q$.

$$\underline{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$V(R) - V_\infty = \int_R^\infty \underline{E} \cdot d\underline{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

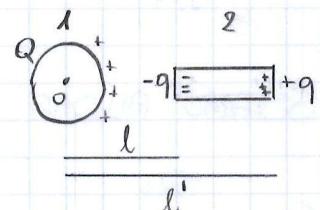


SE $R \sim 1 \text{ m}$, $C \sim 10^{-10} \text{ F} = 100 \text{ pF}$

- SI NOTI CHE NEL CASO REALE (IN PRESENZA DI PIÙ CORPI), LA CAPACITÀ DI UN CORPO PUÒ ESSERE MODIFICATA DA EFFETTI DI INDUZIONE TOTALE:

$$V(0) = V_0 + V^{-q}(l) + V^{+q}(l') < V_0$$

$$C = \frac{Q}{V_0} \quad C' = \frac{Q}{V(0)} > C$$



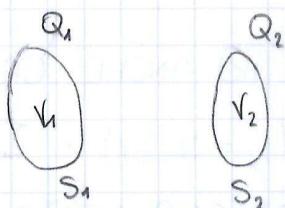
LA PRESENZA DI ② AUMENTA LA CAPACITÀ DI ①.

- CONSIDERIAMO DUE CONDUTTORI; SUL PRIMO PONGO

$$Q_1 = Q \quad Q_2 = 0$$

IL POTENZIALE SI TROVA RI SOLVENDO

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{CON} \quad \begin{cases} Q_1 = Q & \text{SU } 1 \\ Q_2 = 0 & \text{SU } 2 \end{cases}$$



NOI CERCHEREMO LA SOLUZIONE CON UN METODO ALTERNATIVO, PROPRIO IN VIRTÙ DELL'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DI $\nabla^2 V = 0$.

V_1 E V_2 SONO PROPORZIONALI A Q_1 (PERCHE' LO SONO σ_1 E σ_2):

$$\begin{cases} V_1 = \rho_{11} Q_1 \\ V_2 = \rho_{21} Q_1 \end{cases}$$

SPOSTANDO LA CARICA Q SU ②, ANALOGAMENTE

$$\begin{cases} V_1 = \rho_{12} Q_2 \\ V_2 = \rho_{22} Q_2 \end{cases}$$

Allora nel caso generale vale il principio di sovrapposizione,

$$\begin{cases} V_1 = \rho_{11} Q_1 + \rho_{12} Q_2 \\ V_2 = \rho_{21} Q_1 + \rho_{22} Q_2 \end{cases} \quad \rho_{ij} \text{ COEFFICIENTI DI POTENZIALE}$$

ESTENDENDO A N CONDUTTORI,

$$V_i = \sum_{j=1}^N \rho_{ij} Q_j \quad i = 1 \dots N \quad \text{PROBLEMA DI NEUMANN}$$

OVVERO HO UN SISTEMA LINEARE DI MATRICE (SIMMETRICA)

$$\{\rho_{ij}\} = P$$

BESTA DEFINITA LA MATRICE INVERSA (MATRICE DI CAPACITA')

$$C = P^{-1} = \{c_{ij}\} \quad c_{ij} \text{ COEFFICIENTI DI INDUZIONE}, i \neq j$$

DA CUI OTTENGO IL SISTEMA DI MATRICE C (SIMMETRICA)

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} V_j \quad i = 1 \dots N \quad \text{PROBLEMA DI DIRICHLET}$$

POSSIAMO ALLORA DEFINIRE LA CAPACITA' ELETTRICA DEL CONDUTTORE i -ESIMO

$$C_i = \frac{Q_i}{V_i} \quad \text{CON } V_j = 0 \quad j \neq i \quad (\text{SI HA } C_i = c_{ii}, \text{ COEFFICIENTI DI CAPACITA'})$$

OVVERO AVENDO MESSO A TERRA ($V=0$) TUTTI GLI ALTRI CONDUTTORI.

SE HO ANCHE CARICHE LOCALIZZATE,

$$V_i = V_i(p) + \sum p_{ij} V_j$$

PROBLEMA MOLTO PIU' COMPLICATO CHE SI RISOLVE NUMERICAMENTE
TESTANDO POTENZIALI DI PROVA.

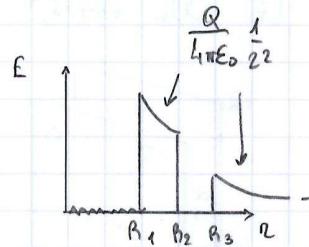
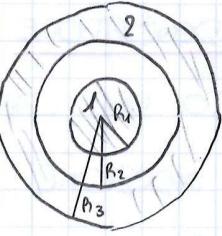
ESEMPIO

TIRO LA MATEMATICA DEI COEFFICIENTI DI
POTENZIALE E DI INDUZIONE: P , C .

PONGO $\begin{cases} Q_1 = +Q \\ Q_2 = 0 \end{cases}$

DA CUI $\begin{cases} V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 \\ V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 \end{cases}$

$$V_2 = V_\infty + \int_{R_3}^{\infty} \frac{E \cdot dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$



POSSO SCEGLIERE UNA QUALSIASI DIREZIONE, ANCHE RADIALE

$$P_{21} = \frac{V_2}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

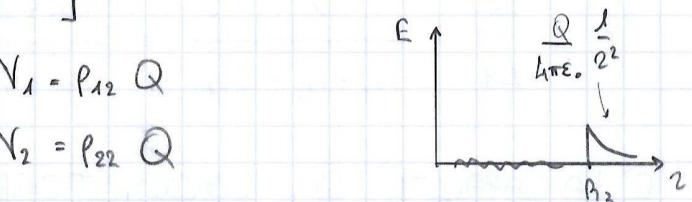
$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right]$$

$$P_{11} = \frac{V_1}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R_2R_3 - R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3} \right]$$

ADESSO PONGO $\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = Q \end{cases}$ $\begin{cases} V_1 = P_{12}Q \\ V_2 = P_{22}Q \end{cases}$

$$P_{22} = \frac{V_2}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

$$P_{12} = \frac{V_1}{Q} = \frac{V_2}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$



$$\Rightarrow P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{R_2R_3 - R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3} & \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{pmatrix}$$

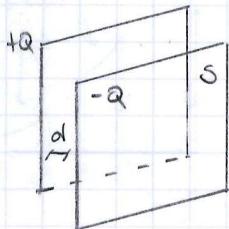
CONDENSATORE

METTO UNA CARICA NELLA SFERA INTERNA;

PER INDUZIONE, SI FORMA $-Q$ SULL'ALTRA

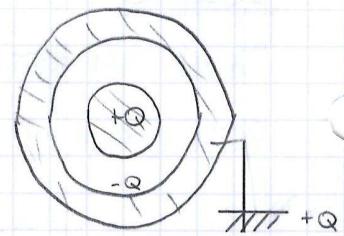
PARETE DELLA CAVITÀ: HO INDUZIONE COMPLETA.*

LE DUE PARETI CARICHE SI CHIAMANO ARMATURE.

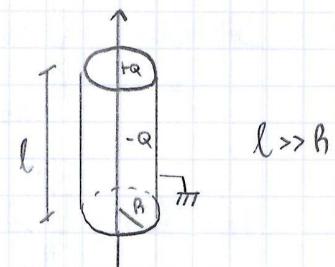


$$d \ll \sqrt{S}$$

PIANO



SFERICO



CILINDRICO

* TUTTE LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO PRODOTTO DAL PRIMO CONDUTTORE TERMINANO SUL SECONDO CONDUTTORE.

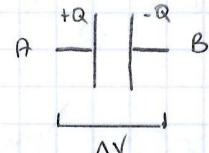
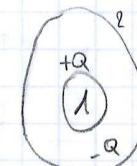
CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE

IMMAGINO DI AVERE INDUZIONE COMPLETA

$$\begin{cases} V_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 = (p_{11} - p_{12}) Q \\ V_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 = (p_{21} - p_{22}) Q \end{cases}$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12}) Q \quad (p_{12} = p_{21})$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} - 2C_{12}}$$



E' LA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE.

SCHEMATIZZAZIONE

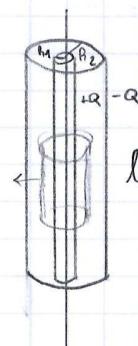
ESEMPIO: CAPACITÀ DEL CONDENSATORE CILINDRICO

$$\Delta V = \int E \cdot d\ell \quad E = E(r) \hat{r}$$

$$\Phi_S(E) = \int_S E(r) \hat{r} \cdot \hat{n} ds = E(r) 2\pi r^2 l = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

PERCIÒ

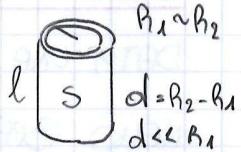
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{Q}{r} \hat{r}$$



Allora

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \approx \frac{2\pi\epsilon_0 l}{d} \frac{R_1}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$



QUELLA RICAVATA E' LA CAPACITA' DI UN COND. PIANO; VALE LA STESSA APPROSSIMAZIONE PER LO SFERICO (P. 76)

INFATTI

$$\ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\left(\frac{d+R_1}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \underset{\ll 1}{\approx} \frac{d}{R_1}$$

PER UN CONDENSATORE PIANO, $V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times E$

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{d}{S} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

CONFIGURAZIONI DI PIU' CONDENSATORI

PARALLELO:

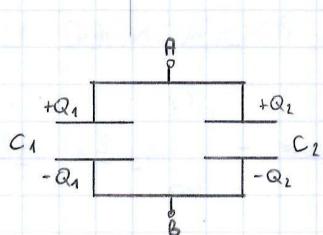
LA CAPACITA' DEL NUOVO CONDENSATORE E'

$$C_p = \sum_i C_i$$

INFATTI

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 \Delta V_1 \\ Q_2 = C_2 \Delta V_2 \end{cases}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2 = (C_1 + C_2) \Delta V = C_p \Delta V$$

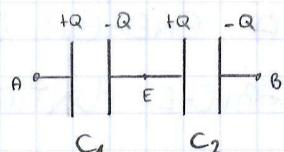


SERIE:

$$V_A - V_B = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q$$

PERCIÒ

$$\frac{1}{C_s} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$



ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

DATA UNA CONFIGURAZIONE DI CARICHE

NELLO SPAZIO, HO UN'ENERGIA ELETTROSTATICA

ASSOCIATA, DONUTA ALLE STESSE CARICHE.

TALE ENERGIA È PARI AL LAVORO NECESSARIO PER REALIZZARLA PARTENDO DALLE CARICHE POSTE A DISTANZA INFINTA.

INIZIO CON LA PRIMA CARICA (PUNIFORME),

$$L_1 = 0$$

(ESSENDO PUNIFORME, NON DEVO NEPPURE FARE LAVORO PER "COSTRUIRE" LA CARICA). HO ORA UN CAMPO

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|\underline{r} - \underline{r}_1|^3} (\underline{z} - \underline{z}_1)$$

PER POSIZIONARE LA SECONDA CARICA ($L = -L_E$),

$$L_2 = - \int_{\infty}^{r_2} q_2 E_1 \cdot d\underline{l} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} \quad \left(V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \right)$$

$$L_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{23}}$$

CONTINUANDO IN QUESTO MODO,

V_i : È IL POTENZIALE GENERATO IN \underline{z}_i DA TUTTE LE ALTRE CARICHE (NON q_i)

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{(i \neq j)} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

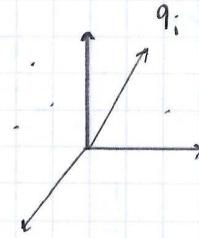
DETTA ENERGIA ELETTROSTATICA DI INTERAZIONE DEL SISTEMA DI CARICHE PUNIFORMI.

PER UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA,

$$U_E = \frac{1}{2} \int_T \rho(\underline{z}) V(\underline{z}) d\underline{z}$$

ENERGIA ELETTROSTATICA TOTALE
(ENERGIA DI INTERAZIONE + AUTOENERGIA)

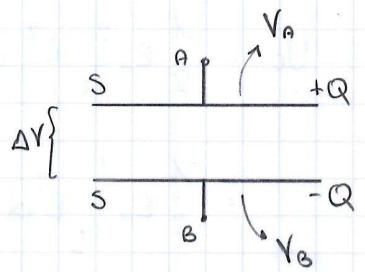
SI NOTI CHE SOPRA SOMMANO SU $i \neq j$ PERCHÉ IL POTENZIALE DI q_i DIVERGE IN $\underline{z}=0$ (NON POSSO METTERE UNA CARICA NEL PUNTO STESSO DOVE HA ORIGINE IL POTENZIALE: LA FORZA È INFINTA).



TALE PROBLEMA NON SI PONE NEL CONTINUO, PERCIO' L'ESPRESSIONE TIENE CONTO DELL'ENERGIA DI COSTRUZIONE DELLE CARICHE SORGENTI (AUTOENERGIA).

• ESEMPIO : CONDENSATORE PIANO

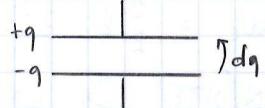
$$\begin{aligned}
 U_E &= \frac{1}{2} \int_S \sigma(2) V(2) dS \\
 &= \frac{1}{2} \int_{S_A} V_A \sigma dS + \frac{1}{2} \int_{S_B} V_B \sigma dS \\
 &= \frac{V_A Q}{2} + \frac{V_B (-Q)}{2} = \frac{(V_A - V_B) Q}{2} = \frac{\Delta V Q}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2
 \end{aligned}$$



(ENERGIA ELETROSTATICA ASSOCIATA A UN CONDENSATORE).

USANDO CONSIDERAZIONI ENERGETICHE,

$$\begin{aligned}
 V(q) &= \frac{q}{C} \quad dL = dq \cdot V(q) \\
 U_E &= \int_0^Q dL = \int_0^Q dq V(q) = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}
 \end{aligned}$$



• ESPRESSIONE LOCALE DI U_E

SIAMO ADESSO UN'ESPRESSIONE LOCALE DELL'ENERGIA ELETROSTATICA PER POTERLA INTERPRETARE COME ENERGIA ASSOCIATA AL CAMPO ELETTRICO.

RICORDIAMO

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \quad P = \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E}$$

$$U_E = \frac{1}{2} \int_C p V dC = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_C (\nabla \cdot \underline{E}) V dC$$

NOTO CHE

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (V \underline{E}) &= \nabla V \cdot \underline{E} + V \cdot \nabla \cdot \underline{E} \\
 &= -\underline{E} \cdot \underline{E} + V \cdot \nabla \cdot \underline{E} = -E^2 + V \cdot \nabla \cdot \underline{E}
 \end{aligned}$$

Allora

$$\nabla \cdot \vec{E} = E^2 + \vec{\nabla} \cdot (\nabla E)$$

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot (\nabla E) dV$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_S \nabla E \cdot \hat{n} dS \quad (\text{TH. GREEN})$$

All'aumentare di V , il primo integrale continua a crescere fino a quando ho racchiuso tutta la regione di spazio in cui c'è campo elettrico. A quel punto, $E = 0$ e il secondo integrale sarà nullo. La loro somma resta costante, perciò

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\substack{\text{TUTTO} \\ \text{IL VOLUME}}} E^2 dV = \int_V u_E dV$$

con

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [u_E] = [\text{ENERGIA}] [\text{VOLUME}]^{-1}$$

Densità di energia del campo elettrostatico.

L'energia si distribuisce nello spazio proporzionalmente a E^2 .

Ad esempio, in un condensatore piano E è costante.

L'energia è localizzata tra le due facce in modo uniforme

$$\text{e vale } U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Esercizi Guida

① CALCOLA E , V RISOLVENDO L'EQUAZIONE DI POISSON.

POICHÉ C'È SIMMETRIA TRASLAZIONALE LUNGO $y \in z$,

DENE ESSERE $V = V(x)$. ALLORA

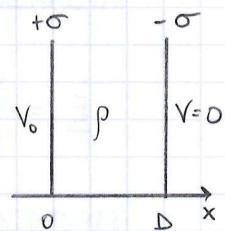
$$\nabla^2 V = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{P}{\epsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{Px^2}{2\epsilon_0} + C_1 x + C_2$$

IMPONENDO $V(0) = V_0$, $V(D) = 0$,

$$V(x) = V_0 + \frac{P}{2\epsilon_0} (Dx - x^2)$$

$$E = -\nabla V = \frac{P}{2\epsilon_0} (2x - D) \hat{x} = \frac{P}{\epsilon_0} x - \frac{PD}{2\epsilon_0} \hat{x}$$



② CALCOLA U_E ALL'INTERNO DI UN CONDENSATORE PIANO.

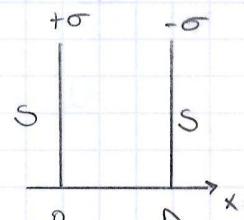
RICORDIAMO CHE

$$U_E = \int_{T_0} U_E d\tau \quad \text{CON} \quad U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

NEL CONDENSATORE

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x}$$

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$$



ALLORA

$$U_E = \int_{T_0} U_E d\tau = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \int_{T_{\text{COND}}} d\tau = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} SD$$

POICHÉ E

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{D}$$

SEGUE

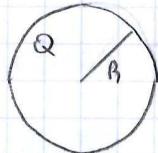
$$U_E = \frac{\sigma^2}{2C} S^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

③ CALCOLA U_E PER UNA SFERA CONDUTTRICE CARICA (Q).

RICORDIAMO CHE PER UNA SFERA

$$\underline{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r} & R > R \\ 0 & R \leq R \end{cases}$$

$$\underline{V} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & R > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & R \leq R \end{cases}$$



USANDO

$$U_E = \frac{1}{2} \int_S \sigma V dS = \frac{1}{2} \sigma V(R) \int_S dS = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} 4\pi R^2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

ALTERNATIVAMENTE,

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{C_0} E^2 d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{C_0} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} d\tau \\ &= \frac{Q^2}{32\epsilon_0 \pi^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^\infty \frac{r^2}{r^4} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

SE ANESSIMO USATO UNA SFERA CON ρ UNIFORME AVREMMO OTTENUTO

$$U_E = \frac{4}{15} \frac{\rho^2}{\epsilon_0} R^5 = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R}$$

④ RICARICA IL RAGGIO CLASSICO DI UN ELETTRONE ASSIMILANDOLO A UN CONDUTTORE SFERICO.

L'ENERGIA A RIPOSO DI UN ELETTRONE È $511 \text{ keV} = E_e$, LA SUA CARICA $Q = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. ALLORA

$$\begin{aligned} R &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 E_e} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 511 \text{ keV}} = \frac{e}{8\pi \left(8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\sqrt{\text{m}}} \right) 5.11 \cdot 10^5 \text{ V}} \\ &= \frac{1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{8\pi \left(8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\sqrt{\text{m}}} \right) 5.11 \cdot 10^5 \text{ V}} = 1.4078 \cdot 10^{-15} \text{ m} \end{aligned}$$

PRESSIONE ELETTROSTATICA (REVISITED)

SI ERA RICAVATA, PER LA PRESSIONE ELETTROSTATICA,

$$P_{ES} = \frac{dF^{ES}}{dS} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \mu_E$$

dS

INFATTI

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

DIMOSTRIAMOLO INDIPENDENTEMENTE DALLE APPROXIMAZIONI FATTE

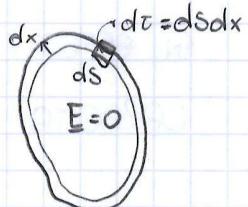
PARLANDO DI PRESSIONE ELETTROSTATICA.

CONSIDERIAMO UN GENERICO CONDUTTORE;

ESPANDIAMONE LA SUPERFICIE IN SENSO ORTOGONALE

ABbastanza lentamente perche' istante per istante

non si abbiano variazioni di energia cinetica.



$$dL^{EST} = -dL^E = dU^E$$

$$dU^{(i)} = \mu_E d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dS dx = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} dS dx$$



Dopo lo spostamento virtuale della superficie, il mio

volumetto è inglobato nel conduttore:

$$dU^{(f)} = \mu_E^f d\tau = 0 \quad (E=0)$$



$$dU^E = dU^{(f)} - dU^{(i)} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dS dx = -\mu_E dS dx$$

LUNGO x ,

$$F_x = -\frac{dU^E}{dx} = \mu_E dS$$

$$P_{ES} = \frac{F_x}{dS} = \mu_E = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

ESEMPIO

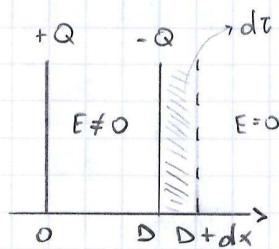
SPOSTO UN'ARMATURA DI dx . QUANTO VARIA U_E ?

$$U_E^i = u_E^i dC = 0$$

$$U_E^f = u_E^f S dx = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S dx \quad (E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0})$$

$$F_x = - \frac{dU_E}{dx} = - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S < 0$$

$$= - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$



IN EFFETTI ALLONTANANDO LE ARMATURE HO DIMINUITO LA CAPACITÀ ($C = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$):

$$U_E(x) = \frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{C(x)} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{x}{\varepsilon_0 S}$$

$$F_x = - \frac{dU_E}{dx} = - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$$

POTREI VOLER USARE

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

$$F_x = - \frac{dU_E}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} C \Delta V^2 \right) = - \frac{1}{2} \Delta V^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{C}{x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\Delta V \varepsilon_0 S}{x^2} > 0$$

COM'E' POSSIBILE? HO ERRONEAMENTE SUPPOSTO ΔV COSTANTE.

IMMAGNIAMO ALLORA DI MANTENERE ΔV COST. CON UN GENERATORE:

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{\Delta V \varepsilon_0 S}{x^2} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} > 0$$



MI ASPETTO CHE LE ARMATURE SI RESPINGANO; MA SE CI PROVO Sperimentalmente, SI ATTRAGGONO.

IL PROBLEMA E' CHE DRA LO SPOSTAMENTO VIRTUALE PROVOCÀ VARIAZIONE ANCHE DELL'ENERGIA DEL GENERATORE: SE SCENDE C, DIMINUISCE Q SUL CAPACITORE E SI CARICA G (MA $L < 0$).

SI HA ALLORA

$$dU_E = d\left(\frac{1}{2} C \Delta V^2\right) = \frac{1}{2} \Delta V^2 dC$$

$$dU_G = -\Delta V dQ = -(\Delta V)^2 dC = -2 dU_E$$

$$U = U_E + U_G$$

$$dU = dU_G + dU_E = -2dU_E + dU_E = -dU_E$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = +\frac{dU_E}{dx}$$

CHE RISOLVE IL PROBLEMA NEL CASO IN CUI, COME ADESSO,
IL CONDENSATORE NON E' ISOLATO.

NOTA RIASSUNTIVA

(VEDI ANCHE MENCUCCHINI P. 303-304)

SE IL SISTEMA E' ISOLATO, L'UNICO CHE PUO' FARE LAVORO E' IL CAMPO.

$$L_e = -\Delta U_E = -\Delta U \quad (\text{DOVE, AD ESEMPIO, } U_E = \frac{1}{2} C \Delta V^2)$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{dU_E}{dx} \quad U E' SOLO U_E.$$

NEL SECONDO CASO IL SISTEMA NON E' ISOLATO, PERCHE' AGISCE IL GENERATORE DI TENSIONE FACENDO LAVORO NEGATIVO ($Q = C \Delta V$, QUINDI A PARITA' DI ΔV SE ALLONTANO LE ARMATURE CALA C, OVVERO Q).

$$\begin{aligned} L_g &= - \int \Delta V dq \quad \text{con } dq = d(C \Delta V) = \Delta V dC + \underbrace{Cd(\Delta V)}_{} = 0 \\ &= - \int_{C_i}^{C_f} \Delta V^2 dC = -(C_f \Delta V^2 - C_i \Delta V^2) = -(2U_E^{(f)} - 2U_E^{(i)}) \\ &= -2 \Delta U_E \end{aligned}$$

$$\Delta U = -(L_e + L_g) = +\Delta U_E - 2\Delta U_E = -\Delta U_E \quad \begin{pmatrix} L^{(\text{est})} = +\Delta U \\ L^{(\text{int})} = -\Delta U \end{pmatrix}$$

(SE IL GENERATORE FA LAVORO, ALLORA IL SISTEMA LO SUBISCE).

ALLORA

$$"L_e" = -\Delta U = \Delta U_E \quad F = -\frac{dU}{dx} = \frac{dU_E}{dx}$$

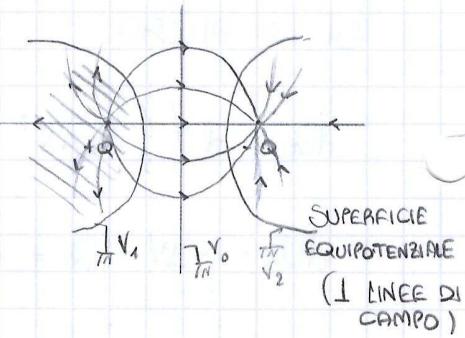
LAVORO CHE FA IL SISTEMA

METODO DELLE CARICHE IMMAGINI

CONSIDERIAMO UN DIPOLO,

$$E(p) = E_+(p) + E_-(p)$$

(NON POSSO USARE L'APPROXIMAZIONE NELLO SPAZIO TRA LE DUE CARICHE).



COSTRUIAMO UN CONDUTTORE CON LA FORMA DI UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE. LE CONDIZIONI AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE NON SONO CAMBIATE: ∇ NELLO SPAZIO (FUORI) È INVARIATO.

SE SONO INTERESSATO A COME SI DISTRIBUISCE Q SU UN CONDUTTORE

(σ) PER EFFETTO DELL'INDUZIONE COMPLETA DI UNA CARICA ESTERNA,

IMMAGINO UNA CARICA VIRTUALE CHE GENERI INSIEME ALL'ALTRA UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE IN CORRISPONDENZA DEL CONDUTTORE.

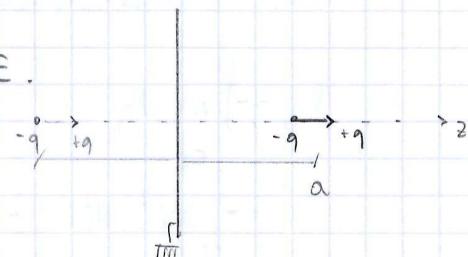
(SE IL CONDUTTORE ANGIA GIÀ CARICA q , ESSENDO $q \approx V_{\text{SUPERF}}$, C'È SOLO DIFFERENZA DI UNA COSTANTE; CAMBIA LA SITUAZIONE DEL CAMPO ENTRO LA SUPERFICIE MA NON IN CORRISPONDENZA DI ESSA - SCHEMOMA ELETTROSTATICO). OCCHIO NEL CALCOLARE L'ENERGIA ELETTROSTATICA: IN INDUZIONE COMPLETA, $E=0$ DA UN LATO DEL CONDUTTORE.

ESEMPIO

UN DIPOLO INDUCE σ SUL PIANO EQUIPOTENZIALE.

① E SUL DIPOLO DA PARTE DEL PIANO

② σ, Q



$$1. F = \nabla (\underline{P} \cdot \underline{E}) = \nabla \left(\sum_i P_i E_i \right) = \nabla (P_1 E_1 + P_2 E_2) = \nabla (P E_2)$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{P}{2^3}$$

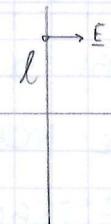
$$F_2 = P \frac{d}{dz} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{P}{2^3} = - \frac{3P^2}{2\pi\epsilon_0 2^4} \Big|_{z=2a} = - \frac{3P^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{16a^4}$$

$$\textcircled{2} \quad E(P) = E_A(p) + E_I(p)$$

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{[x^2 + y^2 + z^2]^{5/2}}$$

$$E(z=0) = \frac{3\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2 - l^2}{[\alpha^2 + l^2]^{5/2}} \quad \sigma = \epsilon_0 E$$

$$Q = \int_S \sigma dS = 0$$



ELETTROSTATICA IN PRESENZA DI DIELETTRICO

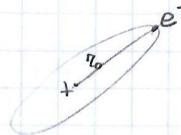
I PORTATORI DI CARICA NON SONO LIBERI DI MUOVERSI.

TUTTANIA LE MOLECOLE SI DEFORMANO AD OPERA DI CAMPI ELETTRICI ESTERNI E GENERANO QUINDI MOMENTI DI DIPOLI.

STUDIAMO IL PROBLEMA SU SPAZI PIÙ GRANDI DI QUELLI ATOMICI (SEPPURE INFINTESIMI) E LO STESSO VALE PER I TEMPI,

$$1 \text{ \AA} \sim 10^{-10} \text{ m} \Rightarrow dt \gg 2_0^3$$

$$T_e = \frac{2\pi r_0}{c} \sim \frac{2\pi \cdot 10^{-10} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}} \sim 10^{-18} \text{ s} \Rightarrow dt \gg T_e$$



CONSIDERIAMO UN CONDENSATORE PIANO.

SPERIMENTALMENTE, SE METTO UN DIELETTRICO TRA LE ARMATURE ΔV CAMBIA,

$$\Delta V < \Delta V_0$$

$$E < E_0$$

$$\begin{matrix} +Q \\ -Q \end{matrix} \quad | \quad s$$



$$C_0 = \epsilon_0 \frac{s}{d}$$

$$\frac{Q}{\Delta V_0} = C_0$$

PER CONSERVAZIONE DELLA COMPONENTE TANGENZIALE

DI E ALL'INTERFACCIA (C'E' SEMPRE UNO STRATO D'ARIA),

E RESTA ORTOGONALE AL PIANO DENTRO IL DIELETTRICO.



VEDREMO CHE E_T SI CONSERVA ANCHE ALL'INTERFACCIA TRA DUE DIELETTRICI.

$$\Delta V = \int E \cdot d\ell = Ed$$

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r}$$

$$C = \epsilon_0 C_0$$

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

$$(E < E_0)$$

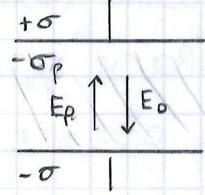
$$\epsilon_r \geq 1$$

ϵ_r E' DETTA COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA E DIPENDE SOLO DAL MATERIALE.

$$C = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{s}{d} = \epsilon \frac{s}{d}$$

CON ϵ COSTANTE DIELETTRICA ASSOLUTA.

IMMAGINO CHE IL DIELETTRICO SI POLARIZZI, OVVERO ASSUMA UNA σ_p DI SEGNO OPPOSTO A σ CHE GENERI UN CAMPO E_p , COSÌ CHE $E = E_0 + E_p$.

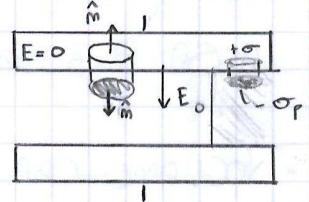


QUESTO È GIUSTIFICATO DAL TEOREMA DI GAUSS, ATTRaverso LA SUPERFICIE IN FIGURA,

$$E_0 = \frac{\Delta V_0}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_S(E_0) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E_0 \Sigma = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0}$$



INSERIAMO ORA IL DIELETTRICO E IL CAMPO E RESTA ORTOGONALE.

$$E \Sigma' = \frac{\sigma' \Sigma'}{\epsilon_0}$$

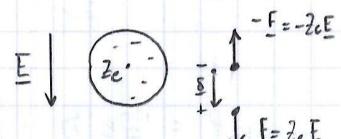
SE Sperimentalmente risulta $E < E_0$, deve essere $\sigma' < \sigma$:

$$E = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{|\sigma| - |\sigma_p|}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_2}$$

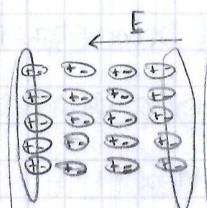
POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE

MODELLO CLASSICO DI UN ATOMO.

GLOBALMENTE NEUTRO (E SENZA DIPOLO, POICHÉ I BARICENTRI DI $+e^-$ COINCIDONO). SE LO IMMERSO IN UN CAMPO ELETTRICO, DUE FORZE OPPoste TENDONO AD ALLONTANARE LE CARICHE; ALL'EQUILIBRIO SI È FORMATO UN DIPOLO (POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE).



IN UN MATERIALE OMogeneo IMMERSO IN E NULLO, ALL'INTERNO DEL MATERIALE LA CARICA RESTA (IN MEDIA) NULLA; OSSERVO UNA CARICA SOLTANTO AI LATI.



ALCUNE MOLECOLE HANNO DI PER SE' UN MOMENTO DI DIPOLO. OLTRE ALLA DEFORMAZIONE, ALLA POLARIZZAZIONE

SI AGGIUNGE L'EFFETTO DEI DIPOLI CHE SI ALLINEANO AL CAMPO.

NEI MATERIALI POLARI, LA POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO PESA 2-3 ORDINI DI GRANDEZZA PIÙ DELL'ALTRA.

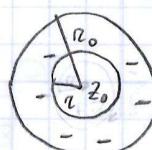
- VOGLIAMO ORA DEMONSTRARE CHE $P \propto E$.

IN UN DATO PUNTO OSSERVO UN CAMPO ELETTRICO LOCALE E_l , OVVERO IL CAMPO GENERATO DA TUTTE LE MOLECOLE (SE MAI PIÙ È ESTERNO, DIPENDE DA QUANTO SCHERMA IL MATERIALE) THANNE QUELLA CONSIDERATA.

TALE CAMPO ESENTOA SUL NUCLEO LA \downarrow DI COULOMB

$$f_c^{(N)} = Ze E_l \quad (\text{sulla nuvola}, f_c^{(c)} = -Ze E_l)$$

$$E \approx E_l$$



$$\begin{array}{l} \uparrow -F = -Ze E \\ \downarrow F = Ze E \end{array}$$

PER LA FORZA DI ATTRAZIONE TRA NUCLEO E NUVOLA,

$$k\pi r^2 E' = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{P \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \quad P = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \quad \text{CON } z \text{ NUMERO ATOMICO.}$$

$$E' = \frac{P}{3\epsilon_0} r = \frac{Ze r}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}$$

CAMPO GENERATO DALLA NUVOLA

NOTA CHE $f' \propto k r$ (FORZA ELASTICA)

$$\text{ALL'EQUILIBRIO, } f_c = f' \Rightarrow Ze E_l = Ze E'$$

$$\delta = \frac{k\pi\epsilon_0 r_0^3}{Ze} E_l$$

DI STANZA TRA NUCLEO E BERICENTRO DELLA CARICA NEGATIVA.

$$P = Ze \delta = k\pi\epsilon_0 r_0^3 E_l = \alpha_p E_l$$

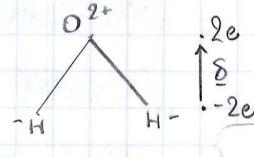
CON α_p POLARIZZABILITÀ ELETTRONICA.

(DEMOSTRAZIONE CLASSICA DELLA POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE).

PER L'ELIO, $r_0 \sim 0.5 \text{ \AA} = 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$$\alpha_p = \frac{r_0^3}{K} = \frac{1/8 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}} = 10^{-41} \frac{\text{C}^2 \text{m}}{\text{N}} = 10^{-41} \text{ Fm}^2$$

(Sperimentalmente,
 $\alpha_p = 2.2 \cdot 10^{-41} \text{ Fm}^2$)



POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO

$$U = -\underline{P} \cdot \underline{E} = -P_0 E_L \cos\theta$$

$$U_T = kT$$

$$P(U) = A e^{-\frac{U}{kT}} = A e^{\frac{P_0 E_L \cos\theta}{kT}}$$

COSTANTE DI NORMALIZZAZIONE : $\int dP = 1, dP = A e^{\frac{P_0 E_L \cos\theta}{kT}} \frac{d\cos\theta}{2\pi \sin\theta d\theta}$

$$\langle \underline{P} \rangle = \int \underline{P} P(U) d\Omega = \int \underline{P} A e^{\frac{P_0 E_L \cos\theta}{kT}} \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{2\pi \sin\theta d\theta}$$

CONSIDERO SOLO LA COMPONENTE PARALLELA (P_0 HA SIMMETRIA CILINDRICA ATTORNO A E_L) :

$$\langle \underline{P} \rangle = P_0 \langle \cos\theta \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_0 A \cos\theta \sin\theta e^{\frac{P_0 E_L \cos\theta}{kT}} d\theta d\phi$$

SENZA CONOSCERE A,

$$\langle \underline{P} \rangle = P_0 \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta \cos\theta \sin\theta e^{\frac{P_0 E_L \cos\theta}{kT}}}{2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{\frac{P_0 E_L \cos\theta}{kT}}}$$

$$x = \cos\theta \quad dx = -\sin\theta d\theta$$

$$A = \frac{1}{\int dP}$$

$$= P_0 \frac{\int_{-1}^1 x e^{\alpha x} dx}{\int_{-1}^1 e^{\alpha x} dx} = P_0 L(\alpha)$$

CON $L(\alpha)$ FUNZIONE DI LANGEVIN.

$$L(\alpha) = \text{COTANH}(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \quad \alpha = \frac{P_0 E_L}{kT}$$

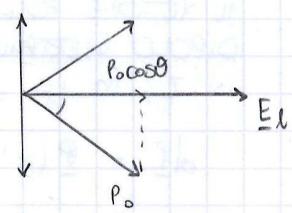
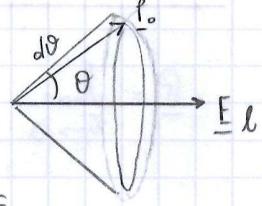
$$\underset{\alpha \ll 1}{\approx} \frac{\alpha}{3}$$

IN GENERE, A T LONTANE DALLO ZERO ASSOLUTO

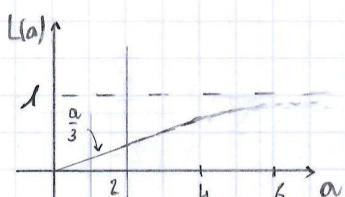
$$\langle \underline{P} \rangle = P_0 L(\alpha) \underset{\downarrow}{\approx} P_0 \frac{\alpha}{3} = \frac{P_0^2}{3kT} E_L = \alpha_p E_L$$

CON α_p CHE STANOLTA DIPENDE DALLA TEMPERATURA.

I DIPOLI SONO DISPOSTI A CASO NELLA MATERIA, COSÌ CHE IN GEN. DI L. SI HA $\langle \underline{P} \rangle = 0$. IN PRESENZA DI UN CAMPO ESTERNO I DIPOLI TENDONO AD ALLINEARSI A E ($\underline{M} = P_0 \wedge \underline{E}$), MA L'AGITAZIONE TERMICA SI OPPONE.



MATERIALI
OMOGENEI E
ISOTROPICI



INTENSITÀ DI POLARIZZAZIONE

$$\underline{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_i \underline{p}_i}{T}$$

$$[\underline{P}] = \frac{C}{m^2}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N \langle \underline{P} \rangle}{T} = m \langle \underline{P} \rangle \quad \langle \underline{P} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \underline{p}_i$$

IL VETTORE POLARIZZAZIONE ELETTRICA \underline{P} È IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO PER UNITÀ DI VOLUME. N SONO LE PARTICELLE IN T , M LA DENSITÀ NUMERICA; $d\underline{r}'$ POSSIEDE ALLORA

$$d\underline{P} = \underline{P}(x', y', z') d\underline{r}'$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{P} \cdot \underline{r}}{r^3} \quad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\underline{P} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

POTENZIALE GENERATO DA UN DIPOLO

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \frac{\underline{P}(x', y', z') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d\underline{r}'$$

CALCOLIAMO IL POTENZIALE GENERATO DA UN DIELETTRICO DOTATO DI POLARIZZAZIONE $\underline{P}(x, y, z)$ E CHE OCCUPA UN VOLUME T .

SOLGIAMO LO STESSO CALCOLO SUPPONENDO UNA DENSITÀ DI CARICA $\rho_p(x, y, z)$,

INSIEME A UNA DENSITÀ SUPERFICIALE $\sigma_p(x, y, z)$:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \frac{\rho_p(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d\underline{r}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d\underline{s}'$$

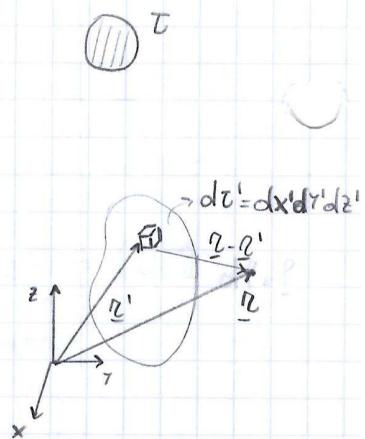
RICORDIAMO CHE

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\underline{r}}{r^3} \quad \nabla' \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad \text{CON } \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right)$$

$$\nabla' \cdot (\underline{f} \cdot \underline{r}) = \nabla' \underline{f} \cdot \underline{r} + \underline{f} \nabla' \cdot \underline{r}$$

$$\nabla' \left(\frac{\underline{P}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = \nabla' \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) \cdot \underline{P} + \frac{\nabla' \cdot \underline{P}}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) \cdot \underline{P} = \nabla' \cdot \left(\frac{\underline{P}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \underline{P}}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$



Allora

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\underline{P}(x', y', z') \cdot (\underline{z} - \underline{z}')}{|z - z'|^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \cdot \underline{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|z - z'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\nabla' \cdot \underline{P} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\underline{P}}{|z - z'|} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\nabla' \cdot \underline{P} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\underline{P} \cdot \hat{n} dS'}{|z - z'|} \end{aligned}$$

da cui riconosciamo

$$P_p = -\nabla \cdot \underline{P}$$

$$\sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{n}$$

IN UN DIELETTRICO, QUINDI,

$$\underline{P} = m < \underline{P} > = m(\alpha_d + \alpha_p) E_l$$

SE LA SOSTANZA NON È POLARE, $\alpha_p = 0$.
SE LA È CI SONO ENTRAMBI, MA $\alpha_p \gg \alpha_d$.

IN UN GAS O IN SOSTANZE RAREFATTE, LE INTERAZIONI SONO TRASCURABILI:

$$E_l \approx E^*$$

$$\underline{P} = m \alpha E$$

$$= \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$$

CON χ LA SUSCETTIVITÀ ELETTRICA DEL MATERIALE,

$$\chi = \frac{|\underline{P}|}{\epsilon_0 |E|} = \epsilon_r - 1$$

(DEFINIZIONE DI χ).

* OCCHIO! NON VUOL DIRE CHE È MISURATO COINCIDE CON E_l .

VUOL DIRE CHE E_l È TRASCURABILE, QUINDI LE MOLECOLE VEDONO DIRETTAMENTE E (CHE QUI COINCIDE CON IL CAMPO APPLICATO DALL'ESTERNO).

SE LA SOSTANZA NON E' RAREFATTA,

$$\underline{E} \neq \underline{E}_d$$

SE PERO' E' OMogenea E ISOTROPA CON

POLARIZZAZIONE UNIFORME (ONDE CON CARICHE SOLO IN SUPERFICIE,
POICHÉ $\underline{P}_p = -\nabla \cdot \underline{P} = 0$), IL CAMPO IN GENERALE DIPENDE DALLA
FORMA DEL BUO; IN PARTICOLARE SE FACCI FESSURE STRETE E PARALLELE
O ORTOGONALI ALLE LINEE DI FORZA MISURA E O \underline{D} (VEDI DOPO).

PER VALUTARE E IN UN PUNTO, IMMAGINO DI PRATICARE
NEL DIELETTRICO UN BUO SFERICO.

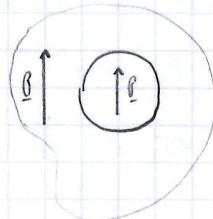
$$\underline{E}_{buco} = \underline{E} - \underline{E}_{s+} \quad \text{CON} \quad \underline{E}_{s+} = -\frac{\underline{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\underline{E}_d$$

(VERO SE \underline{P} E' UNIFORME)

PERCIO'

$$\underline{E}_d = \underline{E} + \frac{\underline{P}}{3\varepsilon_0}$$



VEDI DEMOSTRAZIONE
PAGINA A FIANCO E
FOCUS PIU' AVANTI.

DETTA RELAZIONE DI LORENTZ.

$$\underline{P} = m\alpha \left[\underline{E} + \frac{\underline{P}}{3\varepsilon_0} \right]$$

$$\underline{P} \left[1 - \frac{m\alpha}{3\varepsilon_0} \right] = m\alpha \underline{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{P} = \left[\frac{m\alpha}{1 - \frac{m\alpha}{3\varepsilon_0}} \right] \underline{E}$$

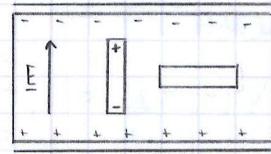
IL VETTORE POLARIZZAZIONE ELETTRICA E' ANCORA PROPORTZIONALE A \underline{E} ,

$$\underline{P} = \varepsilon_0 \chi \underline{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \underline{E}$$

CAMBIA SOLO L'ESPRESSIONE DI χ . RITORNO AL CASO $\underline{P} = m\alpha \underline{E}$
PER $m\alpha$ PICCOLO.

SE IL MATERIALE NON E' OMogeneo E ISOTROPO, IN GENERALE
HO IL TENSORE (MATRICE)

$$\underline{P} = m \parallel \alpha \parallel \underline{E}$$



ESEMPIO: CAMPO NELLA CAVITÀ SFERICA

SFERA CON POLARIZZAZIONE COSTANTE AL SUL
INTERNO. TRONA E' IN TUTTI I PUNTI.

SE \underline{P} E' UNIFORME,

$$P_r = -\nabla \cdot \underline{P} = 0$$

$$\sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{m} = P \cos \theta$$

THONO IL POTENZIALE:

$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p dS}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

DA CUI RIDANO IL CAMPO.

ALTERNATIVAMENTE RAGIONO COSÌ:

$$\underline{P} = q \Delta \underline{x}$$

$$\underline{P} = \frac{\underline{P}}{\text{Vol.}} = \frac{q}{\text{Vol.}} \Delta \underline{x} = p_c \Delta \underline{x}$$

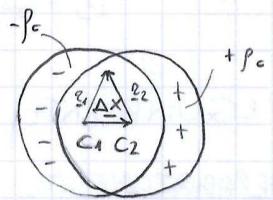
$$\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2$$

IN UN PUNTO INTERNO,

$$\underline{E} = -\frac{p_c}{3\epsilon_0} \underline{r}_1 + \frac{p_c}{3\epsilon_0} \underline{r}_2 = \frac{p_c}{3\epsilon_0} [\underline{r}_2 - \underline{r}_1] = \frac{-p_c}{3\epsilon_0} \Delta \underline{x} = -\frac{\underline{P}}{3\epsilon_0}$$

FUORI, THONO \underline{P} :

$$\underline{P} = q \Delta \underline{x} = \frac{4}{3}\pi R^3 p_c \Delta \underline{x} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\underline{P}}{\Delta \underline{x}} \Delta \underline{x} = \frac{4}{3}\pi R^3 \underline{P}$$



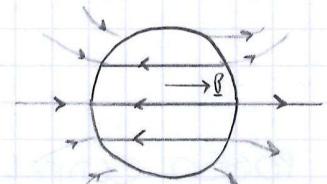
Allora

$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{P} \cdot \underline{r}}{r^3} = \frac{R^3 P_x}{3\epsilon_0 r^3}$$

SI NOTI CHE

$$V(R) = \frac{P_x}{3\epsilon_0}$$

(MA E' UN CASO FORTUNATO, TUTTI I TERMINI SUCCESSIVI DELLO SVILUPPO A MULTIPOLI SONO NULLI).



FOCUS: MOMENTO DI DIPOLO

① SIMILITUDINE CON IL BARICENTRO

$$\underline{r}_g = \int \underline{r} dm = \int_T \underline{r} \rho d\tau \quad \rho \text{ DENSITÀ DI MASSA (SE } \int_T \rho d\tau = 1)$$

$$\underline{r} = \int \underline{r} dq = \int_T \underline{r} \rho d\tau \quad \rho \text{ DENSITÀ DI CARICA}$$

② DIFFERENZE

$$\underline{F} = m \ddot{\underline{x}}_g \quad (\text{TEOREMA DEL MOTO DEL BARICENTRO})$$

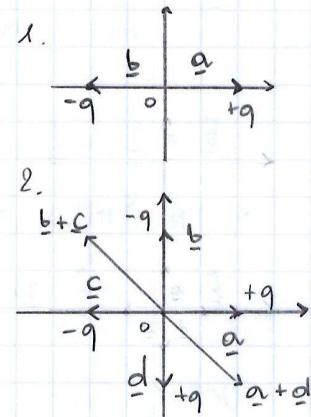
$$\underline{E}_g = G \frac{m}{|\underline{r} - \underline{r}_g|^3} (\underline{r} - \underline{r}_g)$$

L'EQUIVALENTE PER CARICHE NON ESISTE A MENO CHE NON CONSIDERI SEPARATAMENTE CARICHE POSITIVE E NEGATIVE. AD ESEMPIO, SE $Q_{TOT} = 0$, ANCHE $\underline{E} = 0$ (CHE SO ESSERE FALSO).

③ ESEMPI.

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \sum_i \underline{r}_i q_i = \underline{a} q + \underline{b} (-q) \\ &= (\underline{a} - \underline{b}) q = q \underline{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_2 &= \sum_i \underline{r}_i q_i = \underline{a} q + \underline{b} (-q) + \underline{c} (-q) + \underline{d} q \\ &= q (\underline{a} + \underline{d}) - q (\underline{b} + \underline{c}) \end{aligned}$$

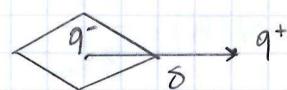


POSso SEMPRE DIVIDERE IN DUE IL CALCOLO, CONSIDERANDO SEPARATAMENTE LE CARICHE POSITIVE E NEGATIVE.

FATTA QUESTA DISTINZIONE, HA SENSO PARLARE DI "BARICENTRO" DELLE CARICHE POSITIVE E DI QUELLE NEGATIVE COSÌ DA RIPORTARMI AL CASO DI UN DIPOLO SEMPLICE.

IN FIGURA,

$$\underline{r} = \underline{r}_{B^-} (-q) + \underline{r}_{B^+} (+q) = q \underline{d}$$



NOTA CHE L'ESPEDIENTE FUNZIONA SOLO PER CORPI CON SIMMETRIA CENTRALE, PERCHÉ A DIFFERENZA DI \underline{r}_g QUI NON DAVIDO PER $\int p d\tau$.

RICAPITOLANDO

$$\underline{E}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

$$\underline{E}_B = \sum_i \underline{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)$$

$$\underline{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\underline{F}}{q}$$

OGGETTO ↴ SORGENTI
CHE SUBISCE \underline{F}

$$\underline{E} = q \underline{E}$$

① TH. DI GAUSS

$$\Phi_S(\underline{E}) = \int_S \underline{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

② NEL CASO STATICO, \underline{E} È CONSERVATIVO

$$\oint_P \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0 \quad \forall P \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \underline{E} = 0$$

$$\underline{E} = - \nabla V$$

\underline{E} È ✓ SI CALCOLANO TRAMITE

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{r}') (\underline{r} - \underline{r}') dV'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{r}') dV'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + C$$

DIPOLI

$$P = q \underline{d} \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot \underline{r}}{r^3} \quad \underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3P \cdot \underline{r}}{r^5} \underline{r} - \frac{P}{r^3} \right]$$

$$\underline{E} = \nabla(P \cdot \underline{E}) = (P_x \nabla E_x, P_y \nabla E_y, P_z \nabla E_z)$$

$$\underline{M} = P \wedge \underline{E}$$

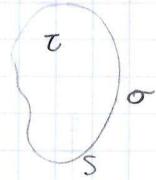
EQUAZIONE DI POISSON

$$\nabla^2 V = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

CONDUTTORI

$$V_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j \quad i=1 \dots N \quad P$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j \quad i=1 \dots N \quad C = P^{-1}$$



ENERGIA ELETROSTATICA

$$U_E' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (\text{ENERGIA DI INTERAZIONE})$$

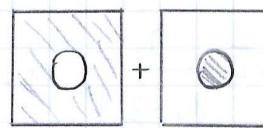
$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\tau_0} \rho(x, y, z) V(x, y, z) d\tau \quad (\text{COMPRENDE } U_E' + \text{AUTOENERGIA})$$

$$= \int_{\tau_0} u_E d\tau \quad (\tau_0 : \text{SPAZIO ENTRO CUI } E \neq 0)$$

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

FOCUS: RELAZIONE DI LORENTZ

$$E_L = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

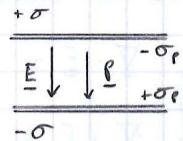


IL CAMPO E NON È IL CAMPO ESTERNO, MA SOLAMENTE IL CAMPO ELETTRICO COME MISURATO IN UN PUNTO DEL DIELETTRICO.

- ① UN CAMPO $E^{(est)}$ COLPISCE IL DIELETTRICO E LO POLARIZZA.
- ② TOLGO UN VOLUMETTO SFERICO AL DIELETTRICO. TUTTE LE ALTRE MOLECOLE GENERANO NEL SUO CENTRO IL CAMPO E_L IN VIRTÙ DEL FATTO CHE SONO POLARIZZATE (MA NON VEDO PIÙ $E^{(est)}$).
- ③ SE NELLA SFERETTA P È UNIFORME, HO $E^{(sf)} = -\frac{P}{3\epsilon_0}$.
- ④ PER SOVRAPPOSIZIONE, $E = E_L + E^{(sf)}$.

EQUAZIONI DELL'ELETROSTATICA IN PRESENZA DI DIELETTRICI

$$\underline{P} = m \alpha \underline{E} = \epsilon_0 \chi \underline{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}$$



$$\sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{m} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E} \cdot \hat{m} \quad p_p = -\nabla \cdot \underline{P}$$

RICORDIAMO CHE NEL VUOTO

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \\ \nabla \wedge \underline{E} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{TEOREMA DI GAUSS} \\ \text{CONSERVATIVITÀ DI } \underline{E} \end{array}$$

FISSATE LE CONDIZIONI AL CONTORNO, LA SOLUZIONE È UNICA (TEOREMA DI UNICITÀ)

LA SECONDA RIMANE VERA ANCHE NEL CASO DI UN DIELETTRICO;
LA PRIMA DIVENTA

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{P + p_p}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \underline{P}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot [\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}] = p$$

DEFINISCO IL VETTORE DI SPOSTAMENTO ELETTRICO

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \quad [\underline{D}] = [\underline{P}]$$

GENERALIZZO QUINDI LE EQUAZIONI DI MAXWELL CON

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{D} = p \\ \nabla \wedge \underline{E} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \\ \underline{P} = m \parallel \alpha \parallel \underline{E} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{LA SOLUZIONE NON È UN'UNICA} \\ \text{SENZA CHE SIA NOTA LA RELAZIONE} \\ \text{TRA } \underline{D} \text{ E } \underline{E}. \end{array}$$

Dove non compaiono esplicitamente le cariche di polarizzazione.

IL TEOREMA DI GAUSS SI SCRIVE

$$\Phi_S(\underline{D}) = \int_S p \, d\underline{c} = Q,$$

CARICHE CONTENUTE IN S, SENZA QUELLE DI POLARIZZAZIONE.

IN UN DIELETTRICO PERFETTO ISOTROPICO, $\parallel \alpha \parallel$ È UNA MATERICE DIAGONALE CON GLI $\alpha_{ii} = \alpha$. SCRIVO ALLORA

$$\underline{P} = m \alpha \underline{E} = \epsilon_0 \chi \underline{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \epsilon_0 \chi \underline{E} = \epsilon_0 (\chi + 1) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E} = \epsilon \underline{E}$$

OTTENGO ALLORA

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \\ \nabla \wedge \underline{E} = 0 \end{array} \right.$$

ONVERO

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{D} = \rho \\ \nabla \wedge \underline{D} = 0 \end{array} \right.$$

CHE SONO LE STESSE LEGGI, DOME APPARE ϵ IN LUOGO DI ϵ_0 .

SE VOGLIO LE CARICHE DI POLARIZZAZIONE,

$$\underline{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}$$

$$\rho_p = - \nabla \cdot \underline{P} = ^* - \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \nabla \cdot \underline{E} = - \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{\nabla \cdot \underline{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \rho$$

SE $\rho = 0$, E' NULLO ANCHE ρ_p . INOLTRE $\epsilon_r > 1 \Rightarrow \text{sgn}(\rho_p) \neq \text{sgn}(\rho)$.

$$\underline{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \underline{D}$$

* SE ϵ_r NON FOSSE COSTANTE
QUESTO PASSAGGIO NON
E' LEGATO.

$$\sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{m} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \underline{D} \cdot \hat{m}$$

NELLA REGIONE A CONTATTO CON UN CONDUTTORE,

$$\underline{D} = \sigma \hat{m} \quad (\text{TEOREMA DI COULOMB})$$

$$-\sigma_p = -\left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right)\sigma$$

SE HO PIU' DIELETTRICI, LE EQUAZIONI DI MAXWELL

VALGONO SOLO ALL'INTERNO DI CIASUNO DI ESSI; ABBIAMO
BISOGNO DI RACCORDARLE I CAMPI SULLE INTERFAZIE.

USANDO IL TEOREMA DI GAUSS E LA CIRCUITAZIONE NULLA DI \underline{E} ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_s(\underline{D}) = \int_{\Sigma} \underline{P} \cdot d\underline{l} \\ \oint_{\Gamma} \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{D} = \rho \\ \nabla \wedge \underline{E} = 0 \end{array} \right.$$

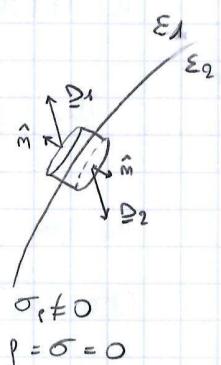
VALGONO SENZA
IPOTESI AGGIUNTIVE.

SI HANNO, IN UNA REGIONE PIANA DI CARICHE LOCALIZZATE,

$$\Phi_s(\underline{D}) = 0$$

$$dS \underline{D}_1 \cdot \hat{m}_1 + dS \underline{D}_2 \cdot \hat{m}_2 = dS \hat{m}_1 \cdot (\underline{D}_1 - \underline{D}_2) = 0 \Rightarrow \underline{D}_{1N} = \underline{D}_{2N}$$

$$\underline{\epsilon}_1 \underline{E}_{1N} = \underline{\epsilon}_2 \underline{E}_{2N} \quad \text{DISCONTINUO.}$$



IN UN CONDENSATORE, GIUSTIFICHIAMO CHE $E \propto E_0$:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_2}$$

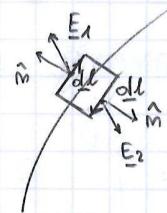
$$\frac{\downarrow E_0}{\downarrow E}$$

INFATTI, STUDIANDO LA COMPONENTE TANGENZIALE,

$$\oint E \cdot d\underline{l} = E_1 \cdot d\underline{l} - E_2 \cdot d\underline{l} = 0$$

$$\underline{E_{T_1} = E_{T_2}}$$

$$\frac{D_{T_1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{T_2}}{\epsilon_2}$$



LEGGE DI RIFRAZIONE DELLE LINEE DI FORZA

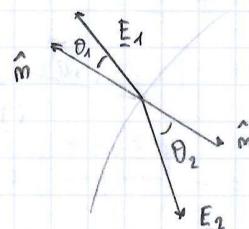
$$E_{T_1} = E_{T_2}$$

$$\epsilon_1 E_{N_1} = \epsilon_2 E_{N_2}$$

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$E_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$



O ANCHE, DALLE ESPRESSIONI RICAVATE PRIMA,

$$\frac{E_{T_1}}{\epsilon_1 E_{N_1}} = \frac{E_{T_2}}{\epsilon_2 E_{N_2}}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{E_{T_1}}{E_{N_1}} \quad \tan \theta_2 = \frac{E_{T_2}}{E_{N_2}}$$

CHE DANNO LO STESSO RISULTATO.

ESEMPIO

SFERA CARICA IMMERSA IN UN DIELETTRICO.

TIROVA IN TUTTI I PUNTI E , \underline{P} , σ_p , p_p .

(LA SFERA È CONDUTTRICE).

IL CAMPO E DATO DA

$$\underline{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{r} & r > R \end{cases}$$

INVECE

$$\underline{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \underline{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{\hat{r}}{r^3} & r > R \end{cases}$$

$$p_p = -\nabla \cdot \underline{P} = 0$$

(INFATTI $p = 0$ NEL DIELETTRICO). SULLA SUPERFICIE DEL DIELETTRICO,

$$\sigma_p = -\left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right) \sigma \quad \sigma + \sigma_p = \frac{\sigma}{\epsilon_r}$$

INFATTI A CONTATTO CON IL CONDUTTORE IL TEOREMA DI COULOMB

SI SCRIVE

$$\underline{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{m}$$

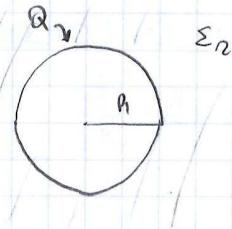
ED È

$$\sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{m}_d = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \underline{E} \cdot \hat{m} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \underbrace{\frac{\sigma}{\epsilon} \hat{m} \cdot \hat{m}_d}_{= -1} = -\left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right) \sigma$$

NORMALE USCENTE
DAL DIELETTRICO

NOTA CHE \underline{E} EQUIVALE A QUELLO GENERATO NELL'VUOTO DA $\sigma + \sigma_p$:

$$\underline{E} = \frac{(\sigma + \sigma_p)}{\epsilon_0} \hat{m} = \frac{\sigma}{\epsilon_r} \frac{1}{\epsilon_0} \hat{m} = \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{m}$$



• ESERCIZIO

UN DIELETTRICO E' RISUCCHIATO IN UN CONDENSATORE, CALCOLA C DIMOSTRANDO CHE

$$C = C_1 + C_2$$

E F ($x = \frac{l}{2}$), L CON CUI CIÒ ACCADE.

ANDEMOS

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} \quad F_x = - \frac{dU_E}{dx} \Big|_{Q=\text{cost.}}$$

NEI DUE MEZZI,

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = E_2 \\ \Delta V_1 = E_1 h \\ \Delta V_2 = E_2 h \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

APPLICANDO IL TEOREMA DI COULOMB,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \\ \sigma_1 &= \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 \frac{\Delta V}{h} \end{aligned} \quad \begin{aligned} E_2 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_p}{\epsilon_0} \\ \sigma_2 &= \epsilon_0 E_2 + \sigma_p = \epsilon_0 \frac{\Delta V}{h} + \sigma_p \end{aligned}$$

$$\sigma_p = P \cdot \hat{m} = P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_2 = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{\Delta V}{h}$$

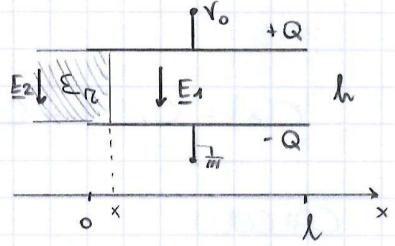
$$\sigma_2 = \epsilon_0 \frac{\Delta V}{h} + \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{\Delta V}{h} = \epsilon_0 \frac{\Delta V}{h} (1 + \epsilon_r - 1) = \epsilon \frac{\Delta V}{h}$$

ALLORA

$$Q = \sigma_2 S_2 + \sigma_1 S_1 = \sigma_2 l x + \sigma_1 l (l - x)$$

$$= \epsilon \frac{\Delta V}{h} l x + \epsilon_0 \frac{\Delta V}{h} l (l - x) = \frac{\Delta V}{h} l \epsilon_0 [l - (\epsilon_r - 1)x]$$

$$C(x) = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{l \epsilon_0}{h} [l + (\epsilon_r - 1)x]$$



NOTA:

IL DIELETTRICO E' ATTRATTATO SOLO IN VIRTU' DEGLI EFFETTI DI BORDO.



$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \varepsilon_0 \frac{l(l-x)}{h} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{lx}{h}$$

CALCOLO

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{h}{\varepsilon_0 l} \frac{1}{[l+(\varepsilon_2-1)x]}$$

$$F_x = - \left. \frac{d}{dx} U_E \right|_{Q=\text{cost}} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{h}{\varepsilon_0 l} \frac{(\varepsilon_2-1)}{[l+(\varepsilon_2-1)x]^2}$$

ESEMPIO

CALCOLA C E σ_p ALL'INTERFACCIA.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

DEVO CALCOLARE ΔV .

$$\underline{D} = \sigma \hat{m} \quad D = \sigma = \frac{Q}{S}$$

Dove σ è quello del conduttore (ma si è visto che \underline{D} rimane costante).

$$E = \frac{\underline{D}}{\epsilon} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_1} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_1 S} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_2} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_2 S} \end{cases}$$

$$\Delta V = \int_A^B E \cdot d\underline{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \left[\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right] = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{d_1 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 S}{d_1 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1}$$

CHE EQUIVALE ESATTAMENTE A DUE CAPACITORI IN SERIE,

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad C_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 \frac{S}{d_1} \quad C_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 \frac{S}{d_2}$$

IL SISTEMA A DESTRA È INVECE EQUIVALENTE AL PARALLELO TRA C_1 E C_2 .

CALCOLIAMO

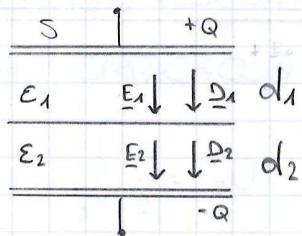
$$\sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{m}$$

$$\underline{P} = \epsilon_0 (\epsilon_2 - 1) \underline{E} = \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2} \underline{D}$$

$$\sigma_p = \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2} \underline{D} \cdot \hat{m}$$

$$\sigma_{p1} = \mp \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1} \sigma \quad \sigma_{p2} = \mp \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2} \sigma$$

$$\sigma_p^{(\text{INTERFACCIA})} = \sigma_{p1} - \sigma_{p2} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{Q}{S} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{d_1 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1} \Delta V$$



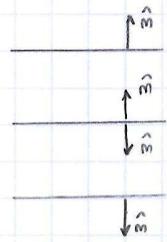
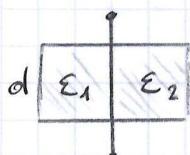
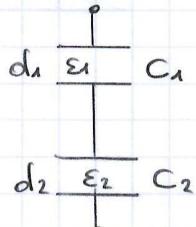
$\downarrow E_0$

$$E_{0T} = 0 \Rightarrow E_{1T} = 0$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} \quad \text{MA} \quad D_{N1} = D_{N2},$$

$$\Rightarrow \underline{D}_1 = \underline{D}_2 = \underline{D}$$

$$\Rightarrow E_1 \neq E_2, \parallel \hat{m}$$



ENERGIA ELETROSTATICA IN PRESENZA DI DIELETTRICI

RICORDIAMO CHE SI ANEVANO, NEL VUOTO,

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V p(x, y, z) V(x, y, z) dx dy dz$$

CHE NON CAMBIA (P E' PERO' LA SOLUZIONE DI $\nabla \cdot D = p$); *

$$U_E = \int_{\substack{\text{TUTTO IL VOLUME} \\ E \neq 0}} u_E^0 dV \quad u_E^0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E$$

L'ESPRESSIONE SI MODIFICA IN UN DIELETTRICO COME

$$u_E = \frac{1}{2} \underline{D} \cdot \underline{E}$$

SE $\underline{D} = \epsilon \underline{E}$,

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

* NOTA: V E' PERO' LA SOLUZIONE DI $\nabla^2 V = -\frac{p}{\epsilon}$ IN PRESENZA DI DIELETTRICI.

CORRENTE ELETTRICA STAZIONARIA

GLI ELETTRONI IN UN METALLO SI COMPORTANO COME UN "GAS":

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \quad (\text{PRINCIPIO DI EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA})$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \left[\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 3 \cdot 10^2 \text{ K}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \right]^{\frac{1}{2}} \sim 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

CARICHE FERME NON ESISTONO.

TUTTAVIA, UN SEGNALE NON SI PROPAGA CON QUESTA VELOCITÀ,

MA CON QUELLA DELL'ONDA. (SE NO DOVREI ASPETTARE ANNI PER VEDERE ACCENDERE LA LUCE DOPO AVER PREMUTO L'INTERRUTTORE).

$v = v_{\text{SUONO}}$
NEL MEZZO

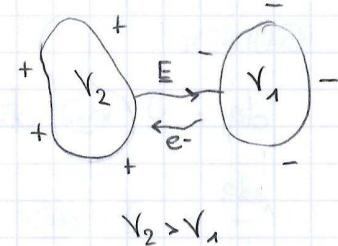
COLLEGHI DUE OGGETTI A V DIVERSO CON UN FILO DI CAPACITÀ ELETTRICA VARIABILE, MA CONDUTTORE (FILO DI SETA BAGNATO IN ACQUA E SALE).

Dopo il transiente, $V_2 = V_1$.

SI DEFINISCE CORRENTE ELETTRICA LA MIGRAZIONE DI PORTATORI DI CARICA CHE LO PERMETTE, OSSIA

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{C}{s} = A \quad (\text{AMPÈRE})$$

MA ABBASTANZA GRANDE
PERCHE' PASSINO ALCUNI ELETTRONI



CONVENTIONALMENTE, È POSITIVA LA CORRENTE DA V+ A V-.

IL MOTO ORDINATO DI PORTATORI DI CARICA CHE COSTITUISCE LA CORRENTE AVVIENE ALLA VELOCITÀ DI DERIVA

$$v_d \sim 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

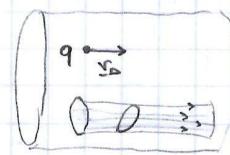
A ESSO SI SOVRAPPONE UN MOTO DISORDINATO A

$$v_t \sim 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

DENSITÀ DI CORRENTE

$$\underline{J}(\underline{r}, t)$$

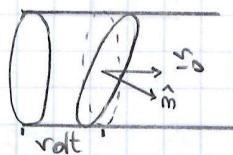
QUANTITÀ DI CORRENTE PER UNITÀ DI SUPERFICIE.



CONSIDERIAMO UN TUBO DI FLUSSO* CON AL

SUO INTERNO UNA SUPERFICIE ORIENTATA $d\underline{S}$.

Allora nel tempo dt passa in $d\underline{S}$ la carica



$$dq = m \cdot q \cdot d\underline{S} \cdot v_d \cdot dt$$

DENSITÀ
NUMERICA ($\frac{N}{m^2}$)

CHIAMO

$$\underline{J} = m q v_d$$

$$[\underline{J}] = \frac{[Q]}{[L]^3} \cdot \frac{[L]}{[t]} = \frac{A}{m^2}$$

PARALLELO A E
PERCHE' LO E' v_d .

QUINDI

$$dq = \underline{J} \cdot d\underline{S} dt$$

$$\underline{dq} = \underline{J} \cdot d\underline{S}$$

NOTA CHE LE DIMENSIONI
SONO QUELLE DI UNA
DENSITÀ SUPERFICIALE.

LA CORRENTE ELETTRICA È IL FLUSSO DI \underline{J} ATTRAVERSO LA SUPERFICIE S:

$$I = \Phi_s(\underline{J}) = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{S}$$

SE MIGRANO INSIEME PORTATORI DI CARICA POSITIVA E NEGATIVA,

$$\underline{J} = \underline{J}^+ + \underline{J}^- = m_+ q_+ v_d^+ + m_- q_- v_d^-$$

SI NOTI CHE I DUE CONTRIBUTI SONO CONCORDI (v_d^+ E v_d^- SONO OPPoste).

* NOTA: SE IL PROBLEMA È STAZIONARIO (AUTONOMO), IL TUBO DI FLUSSO È COSTITUITO DALLE TRAIETTORIE DELLE SOLUZIONI DELLE EQ. DIFFERENZIALI CHE REGOLANO IL MOTO DELLE SINGOLE q_i . TALI TRAIETTORIE NON SI POSSONO INTERSECARSI: SE LO FANNO, DA LÌ IN POI PROCEDONO INSIEME (UNICITÀ P. CAUCHY).

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA CORRENTE

SUPPONIAMO CHE IN UN CORPO LA CARICA DIMINUISCA
DI $-dQ$ NEL TEMPO dt . OSSERVIAMO UN FLUSSO
DI CARICA ATTRAVERSO LA SUA SUPERFICIE S ,

$$-dQ = I_{\text{tot}} dt = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{S} dt$$

$$Q = \int_T p(x, y, z, t) dt$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_T p dt = \int_T \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

PRINCIPIO DI
CONSERVAZIONE
DELLA CARICA
ELETTRICA.

LA SUPERFICIE È
FERMA, QUINDI NON
DIPENDE DA t .

SEGUE

$$\int_S \underline{J} \cdot d\underline{S} = - \int_T \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

$$\int_T (\nabla \cdot \underline{J}) dt = - \int_T \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

DEVE VALERE SU
QUALSIASI VOLUME
 T IO SOGLIA.

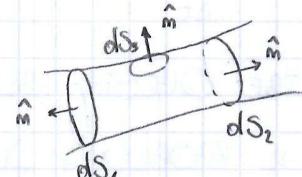
E OTTENIAMO L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$\nabla \cdot \underline{J} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

ESPRIME IN FORMA
LOCALE IL PRINCIPIO
DI CONSERVAZIONE.

CASO STAZIONARIO: GRANDEZZE INDIPENDENTI DA t .

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$



PERCIÒ \underline{J} È SOLENOIDALE : $\nabla \cdot \underline{J} = 0$

ALLORA, PRESE COMUNQUE DUE SEZIONI DI UN TUBO DI FLUSSO,

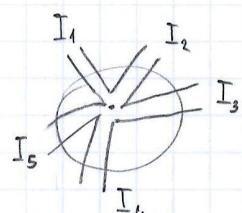
$$\Phi_{\text{tot}}(\underline{J}) = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} \quad (\text{ORTOGONALE A } dS_3)$$

$$= \int_{S_1} \underline{J} \cdot d\underline{S} + \int_{S_2} \underline{J} \cdot d\underline{S} = I_1 + I_2 = 0$$

PERCIÒ IN UN NODO DI UN CIRCUITO SI HA SIMILMENTE

$$\sum_i I_i = 0$$

1° TEOREMA DI KIRCHHOFF

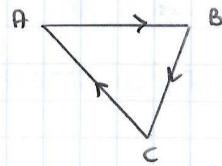


IL CAMPO ELETTRICO RESTA CONSERVATIVO: $\nabla \cdot \underline{E} = 0$.

$$\oint_{\Gamma} \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0$$

SU OGNI CIRCUITO (MAGLIA),

$$\int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{l} + \int_B^C \underline{E} \cdot d\underline{l} + \int_C^A \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0$$



$$= (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_A) = 0$$

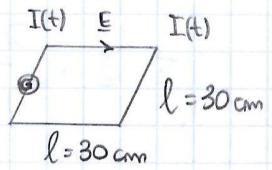
DA QUI

$$\sum_i \Delta V_i = 0$$

LE STESSSE LEGGI SI APPLICANO AI CASI QUASI-STAZIONARI (IN CUI LA CORRENTE CAMBIA ABBASTANZA LENTAMENTE, IN MODO CHE RESTI LA STESSA IN TUTTI I PUNTI DEL CIRCUITO). È IL MOTIVO PER CUI POSSIAMO USARE QUESTE LEGGI PER RISOLVERE UN CIRCUITO RC.

$$\Delta t = \frac{l}{c} \sim \frac{30 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \sim 10^9 \text{ s}$$

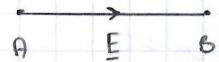
$$\nu = \frac{1}{\Delta t} \sim 10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$$



OLTRE QUESTA FREQUENZA, NON VALGONO PIÙ LE LEGGI DI KIRCHHOFF:
E' IL PROBLEMA DEI PROCESSORI NEI COMPUTER.

RESISTENZA ELETTRICA E LEGGE DI OHM

$$\Delta V = V_A - V_B > 0$$

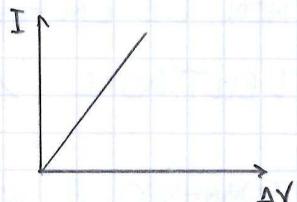


CERCO LA RELAZIONE TRA ΔV E I (CARATTERISTICA).

PER LA CLASSE DEI MATERIALI OHMICI, LA RELAZIONE E' LINEARE:

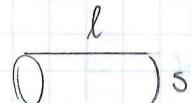
$$\Delta V = R I$$

CON R LA RESISTENZA ELETTRICA.



PER UN CONDUTTORE A SEZIONE COSTANTE,

$$R = \rho \frac{l}{s} = \frac{l}{\sigma s}$$



DOVE ρ E' LA RESISTINITA',

$$[\rho] = [R][l] = \Omega \text{ m}$$

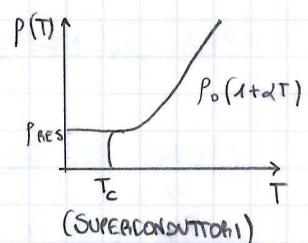
OPPURE σ E' LA CONDUABILITA' O CONDUTTIVITA' ELETTRICA,

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad [\sigma] = \frac{1}{\Omega \text{ m}} = \frac{S \text{ m}}{\text{m}}$$

IN GENERALE,

$$\rho = \rho(T)$$

E LA RELAZIONE E' DI TIPO LINEARE A TEMPERATURE PROSSIME A QUELLA AMBIENTE. A TEMPERATURE BASSE RIMANE ρ_{RES} LEGATO AI DIFETTI RETICOLARI.



IN UN SUPERCONDUTTORE ρ VA A ZERO A T FINITE (OGGI ATTORNO A 70-138 K, E L'AZOTO LIQUIDO STA A 77 K ED E' FACILE DA PRODURRE). L'IDEA DI BASE DELLA TEORIA BCS E' CHE SI CREINO LEGAMI TRA COPPIE DI ELETTRONI DI CONDUZIONE E LA COPPIA SI COMPORTA COME UN BOSONE PIUTTOSTO CHE UN FERMIONE (COPPIA DI COOPER).

I DUE ELETTRONI DELLA COPPIA SONO LONTANI ($\sim \text{mm}$) .

$$V_{\text{cm}} = 0$$

$$2 \cdot \xrightarrow{V_{\text{cm}}} \cdot 1$$

▼ DIFETTO RETTICOLARE

SE 1 INTERAGISCE CON UN DIFETTO, P_1 CAMBIA; MA

NON E' POSSIBILE (NELLA COPPIA $P_{\text{TOT}} = \text{cost.}$), NON SUCCIDE PERCHÉ

NON C'E' ENERGIA TERMICA SUFFICIENTE A ROMPERE LA COPPIA, QUINDI

L'ELETTRONE 1 PASSA OLTRE SENZA INTERAGIRE.

TORNANDO A NOI, AI CAPI DEL CONDUTTORE

$$\begin{aligned} dV &= R dI \\ \downarrow & \\ E dl &= \rho \frac{dl}{ds} J ds \end{aligned}$$

$$E dl = \rho \frac{dl}{ds} J ds$$

NELLA LEGGE DI OHM,
QUELLO CHE HO CHIAMATO
 dV SAREBBE $V_{\text{in}} - V_f$,
A RIGORE QUINDI $-dV$.

DA CUI OTTIENIAMO LA LEGGE DI OHM IN FORMA LOCALE:

$$E = \rho J$$

$$J = \sigma E$$

VALIDE PER UN CONDUTTORE OHMICO ISOTROPO. SE NON LO FOSSE,

$$J = ||\sigma|| E \quad ||\sigma|| \text{ TENSORE DI CONDUCIBILITÀ ELETTRICA.}$$

(CONDUTTORI OHMICI LINEARI, IN QUANTO J E E SONO ANCORA
UNA COMBINAZIONE LINEARE DELL'ALTRO). INFINE,

$$J = f(E)$$

PER UN MATERIALE GENERICO.

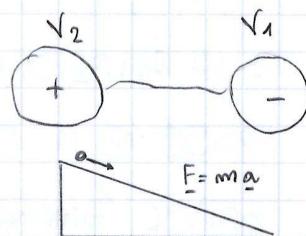
C'ERA DA ASPETTARSELLO?

$$E = q E \propto J \propto r$$

LA FORZA DI CUI RISENTE L'ELETTRONE E'

PROPORTIONALE ALLA VELOCITÀ: IL MOTO NON E' UNIFORMEMENTE
ACCELERATO. GLI URTI CONTRO IL RETICOLO CRYSTALLINO
DANNO UN EFFETTO ANALOGO ALL'ATTITO VISCOSE; AD OGNI
URTO, LA VELOCITÀ SI RIDUCE DRASTICAMENTE.

DETTO t IL TEMPO TRA DUE IMPATTI, APPLICO IL TEOREMA
DELL'IMPULSO:



$$\underline{\Delta P} = \underline{E} \underline{T}$$

$$m < \underline{v_f} > - m < \underline{v_i} > = \underline{E} \underline{T}$$

SE AD UNO URTO SI AZZERA LA VELOCITÀ (ANELASTICITÀ)

$$\underline{J} = m q < \underline{v} > = m q \frac{\underline{T} F}{2m} = \frac{m q \underline{T} q E}{2m} = \frac{m q^2 \underline{T}}{2m} E$$

$$\underline{J} = \sigma E$$

IL PARAMETRO \underline{T} DA' UNA STIMA DELLA DENSITÀ DEI DIFETTI RETTICOLARI; INVECE m RESTA COSTANTE (COSA CHE NON È VERA IN UN GAS, DOVE GLI URTI "SPACCANO" LE MOLECOLE).

EFFETTO JOULE

$$dL = \Delta V dq = \Delta V I dt$$

$$W = \frac{dL}{dt} = \Delta V \cdot I$$

$$= R I^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (\text{CONDUTTORI OHMICI})$$

$$dq = m q dt$$

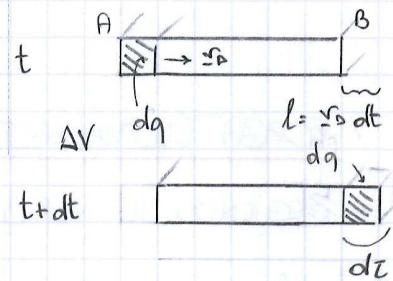
$$dL = dV dq = dV \cdot m \cdot q \cdot dt$$

MA

$$dV = E \cdot d\underline{l} = E \cdot \underline{v}_0 dt$$

QUINDI

$$\begin{aligned} dL &= m q \underline{v}_0 \cdot E dt \\ &= E \cdot \underline{J} dt \end{aligned}$$



CERCHIAMO UN'ESPRESSIONE LOCALE DELLA LEGGE DI JOULE STUDIANO LA POTENZA DISSIPATA IN UN VOLUME INFINITESIMO dt .

w È LA DENSITÀ DI POTENZA.

$$W = E \cdot \underline{J} dt \quad \text{E LOCALMENTE} \quad w = \frac{dL}{dt dt} = E \cdot \underline{J}$$

IN UN MATERIALE OHMICO E E \underline{J} SONO CONCORDI, QUINDI

$$w = \rho J^2 = \sigma E^2 = EJ$$

CARICHE SU CONDUTTORI PERCORSI DA CORRENTE

IN UN CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE,

✓ NON UNIFORME, $E_{int} \neq 0$

$E \neq 0$ (INFATTI LA SUPERFICIE NON E' EQUIPOTENZIALE)

E' VERO CHE LA DENSITA' DI CARICA RESTA IN SUPERFICIE?

DALL'EQUAZIONE DI MAXWELL

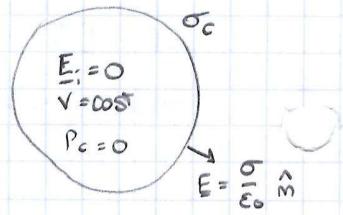
$$\nabla \cdot E_{int} = \frac{P_c}{\epsilon_0} \quad (\text{OPPURE } E \text{ IN LUOGO DI } E_0)$$

$$P_c = \epsilon_0 \nabla \cdot E_i = \underset{\text{OHMICO}}{\epsilon_0} \nabla \left(\rho \underline{J} \right) = \underset{\text{RESISTIVITA'}}{\epsilon_0} \rho \nabla \cdot \underline{J} = \underset{\text{OMOGENEO}}{\epsilon_0}$$

PER QUANTO SI E' VISTO, NEL CASO STAZIONARIO

$$P_c = \epsilon_0 \rho \nabla \cdot \underline{J} = 0 \quad (\text{NON VOL DIRE CHE LA CORRENTE NON ESCURA ANCHE DENTRO})$$

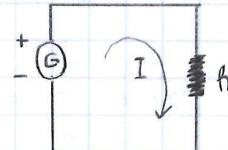
PER UN CONDUTTORE OHMICO E OMOGENEO (P_c CARICA DI VOLUME).



FORZA ELETTROMOTRICE

SEGUENDO IL VERSO DI \underline{J} NEL CIRCUITO IN FIGURA,

$$\oint \underline{J} \cdot d\underline{l} > 0$$



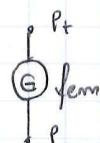
SE IL MATERIALE E' OHMICO E OMOGENEO,

$$\underline{J} = \sigma \underline{E}$$

$$\sigma \oint \underline{E} \cdot d\underline{l} > 0$$

MA QUESTO E' IMPOSSIBILE; CI DEVE ESSERE UN TRATTO NEL CIRCUITO IN CUI NON VALE $\underline{J} = \sigma \underline{E}$. CHIAMO QUESTO TRATTO GENERATORE DI FORZA ELETTROMOTRICE:

$$\int_{p_-}^{p_+} f_{emm} = \int_{p_-}^{p_+} \frac{F}{q} \cdot d\underline{l} = \int_{p_-}^{p_+} E_e \cdot d\underline{l} = \int E_e \cdot d\underline{l}$$



NON E' NECESSARIAMENTE UN CAMPO A SOSTARE LA CARICA, MA AVENDO LE DIMENSIONI DI UN CAMPO LO POSSO SCHEMATIZZARE CON E_e .

IL CAMPO E_c NON È CONSERVATIVO, MA VALE

$$E_c = -E_s \quad (\text{CON } E_s \text{ CONSERVATIVO})$$

$$\text{femm} = \int_{P_-}^{P_+} E_c \cdot d\ell = - \int_{P_-}^{P_+} E_s \cdot d\ell = \int_B^A E_s \cdot d\ell = \Delta V$$



(IN UN GENERATORE IDEALE; ALTRIMENTI DEVO TENERE CONTO DELL'ENERGIA DISSIPATA INTERNALEMENTE AL GENERATORE).

E_e SI DICE CAMPO ELETROMOTORIO ED È NULLO AL DI FUORI DEL GENERATORE.

CONDUTTORI NON OHMICI

LA CURVA CARATTERISTICA $V(I)$ DI UN GAS NON È MAI APPROSSIMABILE CON UNA RETTA.

LE MOLECOLE DI GAS SI ASSOCIANO E DISSOCIANO; POLARIZZANDO IL GAS, MODIFICO IL RITMO CON CUI I DUE FENOMENI AVVENGONO.

IN I, $m(E)$ È COSTANTE E Ø PICCOLO.

IN II, HO UN MECCANISMO A OSCILLAZIONE

DI MOLTIPLICAZIONE IONICA E $m(E)$ CRESCHE.

IN III, ELETTRONI STABILI SONO ECCITATI E Poi DECADONO;

$$\Delta V = R I$$

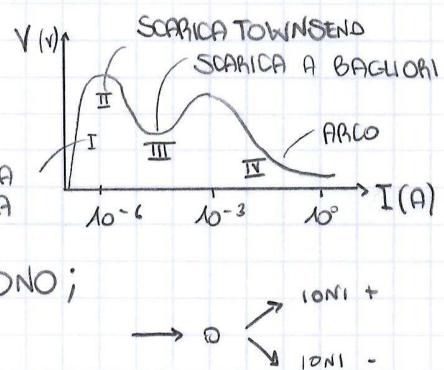
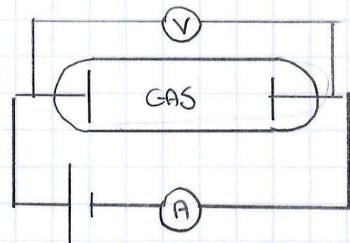
↳ DECRESCHE PIÙ VELOCEMENTE DI QUANTO CRESCA I (OVVERO Ø AUMENTA).

IL GAS DIVENTA LUMINOSO (COME NEI TUBI AL NEON).

QUANDO TUTTE LE COPPIE SONO IONIZZATE, ΔV RIPRENDE A

CRESCERE. GLI IONI ACQUISTANO UNA TALE ENERGIA CINETICA DA ESTRAIRE ELETTRONI DAL CATODO (EFFETTO TERMOIONICO);

QUESTI ELETTRONI CONDUcono CORRENTE E, IN QUANTO ACCELERATI, EMETTONO LUCE.



I LIQUIDI SONO IN GENERE NON CONDUTTORI.

$$\rho_{H_2O \text{ DISTILLATA}} \sim 10^{13} \text{ S/m}$$

SE AGGIUNGO UN ELETROLITA (SALE, ACIDO) SI HA DISSOCIAZIONE DELLE MOLECOLE; SE COMPLETAMENTE DISSOCIAZO, IL LIQUIDO ASSUME UN COMPORTAMENTO DI TIPO OHMICO.

$$m_{\text{IONE}} \gg m_{e^-} \quad \text{MOBILITÀ} = \frac{v_d}{E} \quad \begin{matrix} \text{VELOCITÀ DI DERIVA} \\ \text{INTENSITÀ DEL CAMPO} \end{matrix} \quad m_{e^-} \sim 10^{3-4} m_{\text{IONE}}$$

FENOMENI MAGNETICI STAZIONARI NEL NUOTO

SI ERA OSSERVATO

S	N	N	S
---	---	---	---

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

DEL TUTTO FITTIZIO: NON POSSO ISOLARE UN MONOPOLIO MAGNETICO.

INIZIAMO DEFINENDO IN QUALCHE MODO UN CAMPO DI INDUZIONE MAGNETICA $\underline{B}(z, t)$. PER FARLO, STUDIAMO IL MOTO DI UNA CARICA DI PROVA q SOTTOPOSTA AL CAMPO: Sperimentalmente, osserviamo che se LA CARICA E' FERMA ($v=0$) NON SUBISCE ALCUNA FORZA.

$$\underline{F} = \underline{F}(z)$$

$$\underline{F}_L = q \underline{v} \wedge \underline{B} \quad \text{FORZA DI LORENTZ}$$

IN PRESENZA DI ENTRAMBI I CAMPI E E \underline{B} ,

$$\underline{F} = q(E + \underline{v} \wedge \underline{B})$$

LE DIMENSIONI DEL CAMPO DI INDUZIONE MAGNETICA SONO

$$[B] = \frac{[F]}{[c]} \frac{1}{[r]} = \frac{N \cdot S}{C \cdot m} = \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{\text{Weber}}{m^2} = T \quad (\text{TESLA})$$

A VOLTE SI USA IL "GAUSS",

$$1 G = 10^{-4} T$$

INNANZI TUTTO NOTIAMO CHE

$$\underline{F}_L \perp \underline{v}$$

$$\Delta K = L = \int_a^b \underline{F}_L \cdot d\underline{l} = \int q(\underline{v} \wedge \underline{B}) \cdot \underline{v} dt = 0$$

LA FORZA DI LORENTZ NON COMPIE LA LORO, QUINDI NON MODIFICA L'ENERGIA CINETICA DI UN CORPO.

E' LINEARE E DI CONSEGUENZA VALE, COME PER E , IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE.

SE CONSIDERIAMO UN TRATTO INFINITESIMO
DI CIRCUITO PERCORSO DA CORRENTE, IL
SINGOLO PORTATORE DI CARICA SUBISCE

$$\underline{F}_l = q \underline{v}_0 \wedge \underline{B}$$

NEL VOLUME ELEMENTARE Sdl , SE TUTTI I PORTATORI DI CARICA
SI MUOVONO CON LA STESSA VELOCITÀ,

$$d\underline{F} = Sdl \cdot m \cdot q \underline{v}_0 \wedge \underline{B}$$

$$= S dl \underline{J} \wedge \underline{B}$$

$$= \underbrace{S J}_{\text{Flusso di } J \text{ attraverso } S} dl \wedge \underline{B} = I dl \wedge \underline{B}$$

FLUSSO DI J ATTRAVERSO S

DETTA II LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE. POSSO ALLORA CALCOLARE

$$\underline{E} = I \oint_r (dl \wedge \underline{B})$$

$$\underline{M}_n = I \oint_r [\underline{r} \wedge (dl \wedge \underline{B})]$$

$$dl = dl \hat{j}$$

$$\underline{J} = J \hat{dl}$$

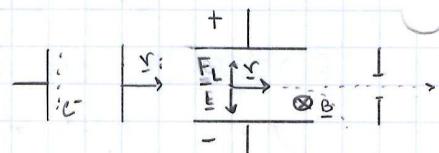


ESEMPIO: SELETTORE DI VELOCITÀ

STUDIAMO IL MOTO DI UNA CARICA IMMERSA IN UN CAMPO $\underline{E} + \underline{B}$.

AD ESEMPIO, VOGLIO SELEZIONARE LE PARTICELLE
CON UNA DATA VELOCITÀ v_0 . INCROCIANDO UN
CAMPO ELETTRICO E UNO MAGNETICO,

$$v_0 = \frac{E}{B} \quad (\text{SELETTORE DI VELOCITÀ})$$



SI OTTIENE LO STESSO RISULTATO CON DUE CONDENSATORI
(OSCULOSCOPIO).

ESEMPIO: MOTO DI UNA CARICA IMMERSA IN \underline{B}

INIECTO UN ELETTRONE CON $\underline{v}(0) \perp \underline{B}$.

IL MOTO RISULTANTE È CIRCOLARE UNIFORME
SUL PIANO XY.

IL RAGGIO DELL'ORBITA ("DI ACLOTRONE")
SI CALCOLA COME

$$r_c = \frac{q r B}{m} = \frac{r^2}{B_c} \Rightarrow R_c = \frac{m r}{q B} = \frac{p}{q B}$$

$$\omega_c = \frac{r}{R_c} = \frac{q B}{m} \quad T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

LA PULSAZIONE NON DIPENDE DA R_c .

SE $\underline{v}(0)$ NON È ORTOGONALE A \underline{B} , LA POSSO COMUNQUE
SCOMPOSIRE IN

$$v_\perp = v \sin \theta \quad v_\parallel = v \cos \theta$$

$$R_c = \frac{m v \sin \theta}{q B}$$

E LA PARTICELLA SPIRALEGGIA CON

$$d = v_\parallel T_c = v \cos \theta \frac{2\pi m}{q B}$$

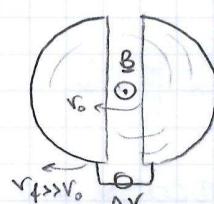
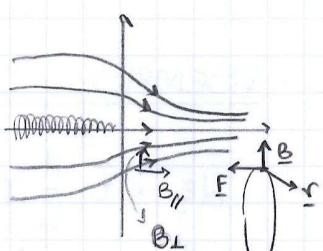
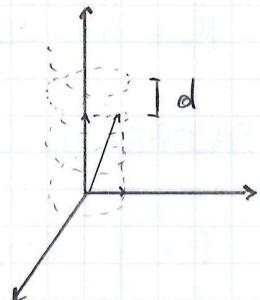
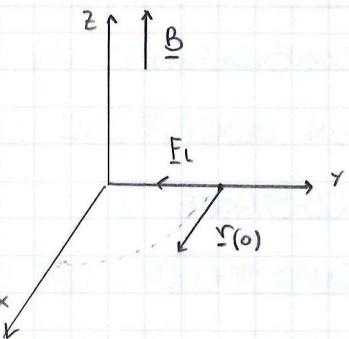
UN FENOMENO SIMILE SPIEGA L'AURORA BOREALE.

SULLA SINCHRONIA DELLE ORBITE SI BASA
IL CICLOTRONE. SI INVERTE OGNI SEMI PERIODO
LA POLARITÀ DEL GENERATORE (COME UN
CONDENSATORE PIANO NELLA FESSURA), COSÌ CHE
AD OGNI GRO LA PARTICELLA ACQUISTA E_c :

$$\frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V \quad \frac{1}{2} m v_f^2 = 2q \Delta V \quad v_f = \frac{q B R}{m}$$

$$K_{\max} = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

FUNZIONA PER IONI PESANTI, MA
NON PER ELETTRONI (CHE DIVENTANO
SUBITO RELATIVISTICI)



CAMPO GENERATO DA CORRENTI STAZIONARIE NEL VUOTO

CONSIDERIAMO UN CIRCUITO GENERICO CON UN GENERATORE DI TENSIONE CHE MANTIENE COSTANTE I .

DIMOSTEREMO CHE OGNI ELEMENTO DI CIRCUITO GENERA

$$d\underline{B}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl' \wedge \Delta\underline{z}}{|\Delta\underline{z}|^3}$$

(PRIMA FORMULA, O FORMULA ELEMENTARE, DI LAPLACE). INTEGRANDO,

$$\underline{B}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} I \frac{dl' \wedge \Delta\underline{z}}{|\Delta\underline{z}|^3}$$

DOVE μ_0 E' LA PERMEABILITA' MAGNETICA DEL VUOTO,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad [\mu_0] = \frac{[B]}{[I]} [l] = \frac{T_m}{A}$$

ANCORA PIU' IN GENERALE, SE IL CIRCUITO NON E' FILOFORME,

$$I = \int_{S'} \underline{J}(\underline{z}') \cdot d\underline{s}'$$

$$\underline{B}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\underline{J}(\underline{z}') \wedge \Delta\underline{z}}{|\Delta\underline{z}|^3} d\tau'$$

INFATTI $\underline{J} = J \hat{l} \wedge l$ E
 $\oint_{\Gamma} \int_{S'} = \int_{\tau'} d\underline{s}' \frac{\partial \underline{z}}{\partial z}$

DOVE τ' CONTIENE TUTTO IL CIRCUITO.

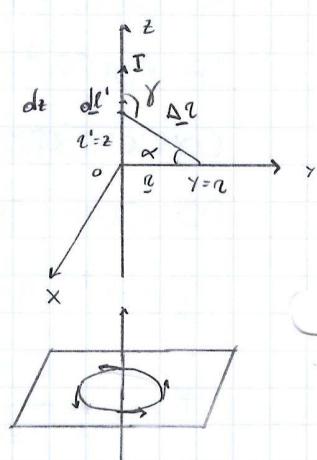
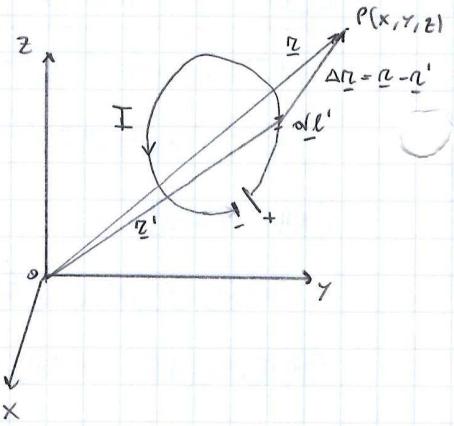
ESEMPIO : CAMPO DI UN FILO PERCORSO DA CORRENTE

$$d\underline{B} = \hat{t} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \cdot \Delta z \cdot \sin\gamma}{|\Delta z|^3}$$

$$\underline{B}(y) = \hat{t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \sin\gamma}{\Delta z^2}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha \quad \sin\gamma = \cos\alpha$$

$$\Delta z \cos\alpha = y \quad \Delta z \sin\alpha = z$$



ALLORA ESPRIMO

$$\Delta z = \frac{y}{\cos \alpha} \quad Z = T_0 \alpha \quad dz = y \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

DA QUI

$$\underline{B}(y) = \hat{t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{y} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{t}$$

VISTA LA SIMMETRIA DEL PROBLEMA, POSSIAMO SCRIVERE LA LEGGE DI BIOT-SAVART

$$\underline{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{z} \hat{t}$$

ESEMPIO: CAMPO DI UNA SPIRA SUL SUB ASSE

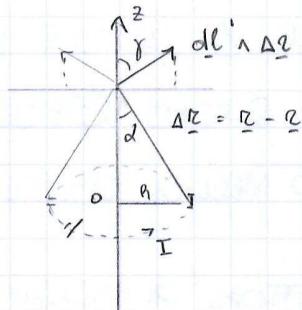
$$dl' \wedge \Delta \underline{z} = dl' \Delta z$$

$$\underline{B}(z) = \hat{z} I \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{dl'}{\Delta z^2} \cos \gamma$$

$$= \hat{z} I \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\cos \gamma}{\Delta z^2} \oint dl' = \hat{z} \frac{\mu_0}{2\Delta z^2} \cos \gamma \cdot R$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\pi R^2}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$



$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \cos \gamma = \sin \alpha$$

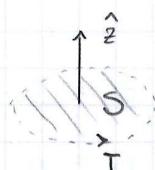
$$\Delta z \sin \alpha = R$$

$$\Delta z = [R^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

DEFINISCO MOMENTO DI DIPOL MAGNETICO

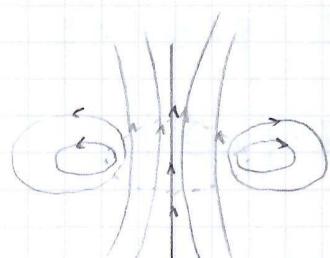
$$\underline{m} = IS \hat{z}$$

$$[m] = [I][l]^2 \doteq A m^2$$



ALLORA

$$\underline{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\underline{m}}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$



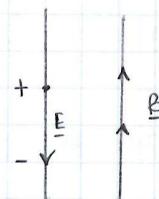
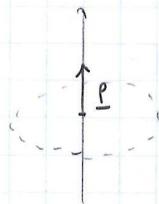
NOTO CHE, A GRANDE DISTANZA,

$$\underline{B}(z) \approx 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{\underline{m}}{z^3} = 2 \alpha_m \frac{\underline{m}}{z^3}$$

CONFRONTANDOLO CON IL CAMPO DI UN DIPOLO ELETTRICO,

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\underline{r} \cdot \underline{l})}{r^5} \underline{l} - \frac{\underline{l}}{r^3} \right]$$

$$\underline{E}(z) = 2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\underline{l}}{z^3} = 2 \alpha_e \frac{\underline{l}}{z^3}$$



SI PUÒ VERIFICARE CHE VALE ANCHE NELLE ALTRE DIREZIONI.

QUESTO È VERO A GRANDE DISTANZA, MA NON VIGANO ALLE SORGENTI DEL CAMPO: NON ESISTONO UN POZZO E UNA SORGENTE PER \underline{B} (LE SUE LINEE DI CAMPO SONO CHIUSE); LA SORGENTE È IL DIPOLO STESSO. NON ESISTE UNO SVILUPPO A MULTIPOLI DI \underline{B} (O MEGLIO, ESISTE MA MANCA IL TERMINE DI MONOPOLIO).

VETTORE DI INDUZIONE MAGNETICA E SUE PROPRIETÀ

SI ANEVANO

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \underline{E} = 0 \end{cases}$$

INVECE

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} \end{cases}$$

LA SECONDA VALE SOLO NEL CASO STAZIONARIO. INFATTI

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{B}) = 0 \quad (\text{DIVERGENZA DI UN ROTORE})$$

"

$$\nabla \cdot (\mu_0 \underline{J}) = \quad \text{CHE DA' } \nabla \cdot \underline{J} = 0 \quad (\text{EQUAZIONE CONTINUITÀ}).$$

SI NOTI CHE

$$\nabla \cdot \underline{B} = \mu_0 \underline{\mathcal{E}}$$

DA SOLO NON DETERMINA \underline{B} UNIVOCAMENTE. SIA INFATTI \underline{B}_1 , SOLUZIONE; SCEGLIO

$$\underline{B}' = \underline{B}_1 + \nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \underline{B}' = \nabla \cdot \underline{B}_1 + (\nabla \cdot \nabla \phi)$$

SERVE SALIRE CHE \underline{B} E' SOLENOIDALE PERCHE' LA SOL. SIA UNICA.

DIMOSTRIAMO LA PRIMA DELLE DUE EQUAZIONI.

$$\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \underline{I} \frac{d\underline{l}' \wedge \Delta \underline{r}}{\Delta \underline{r}^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \nabla \cdot \left(\frac{d\underline{l}' \wedge \Delta \underline{r}}{\Delta \underline{r}^3} \right)$$

I E' UNIFORME

∇ DIPENDE DA x, y, z , $d\underline{l}'$ DA x', y', z' (E COSÌ $\Delta \underline{r} = (x - x')$, INTEGRO IN $d\underline{l}'$)

USO IL FATTO CHE

$$\nabla \cdot (\underline{u} \wedge \underline{v}) = (\nabla \cdot \underline{u}) \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot (\nabla \cdot \underline{v})$$

QUINDI

$$\nabla \cdot \underline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left[(\nabla \cdot d\underline{l}') \cdot \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta \underline{r}^3} + d\underline{l}' \cdot \left(\nabla \cdot \frac{-\Delta \underline{r}}{\Delta \underline{r}^3} \right) \right] = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right) = 0$$

RICAVIAMONE UNA RELAZIONE INTEGRALE (EQUIVALENTEMENTE A QUANTO FATTO CON IL TEOREMA DI GAUSS PER E).

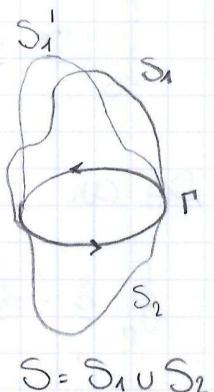
$$\Phi_s(\underline{B}) = \int_s \underline{B} \cdot \hat{\underline{m}} d\underline{s} = \int_{\Gamma} (\nabla \cdot \underline{B}) d\underline{z} = 0$$

(TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO).

PERSA COMUNQUE UNA SUPERFICIE CONCATENATA A Γ ,

$$\Phi_s = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0 = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} \Rightarrow \Phi_{S_1} = \Phi_{S_1}$$

SI PARLA QUINDI DI $\Phi(\underline{B})$ CONCERNATO AL CONTORNO Γ .

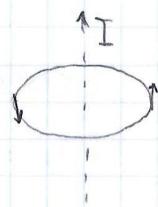


TEOREMA DELLA CIRCUITAZIONE DI AMPÈRE

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J}$$

CONSIDERO UN FILO PERCORSO DA CORRENTE:

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{t}$$

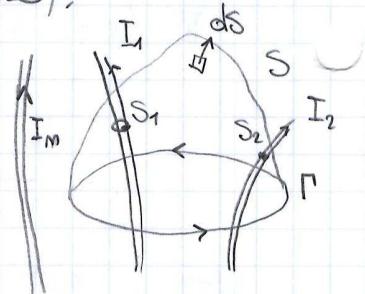


$$\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \underline{J} \cdot d\underline{s}$$

$$\int_S (\nabla \times \underline{B}) \cdot d\underline{s} \Rightarrow \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J}$$

(SI PUÒ DEMONSTRARE CHE NON DIPENDE DALLA FORMA DEL FILO).

CHIAMO CORRENTE CONCATENATA I SE IL CAMMINO Γ LA CIRCONDA (IL NUMERO DI VOLTE m IN CUI ACCADE E' DETTO GRADO DI CONCATENAZIONE). ALLORA



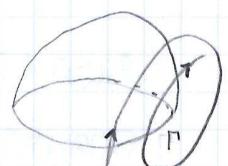
TUBI CHE INDIVIDUANO SULLA CALOTTA LE SUPERFICI S_1 E S_2 . INTERSECANO S SOLO SE PASSANO DENTRO IL CAMMINO Γ .

$$\Phi_S (\nabla \times \underline{B}) = \int_S (\nabla \times \underline{B}) \cdot \hat{m} d\underline{s} = \int_S \mu_0 \underline{J} \cdot \hat{m} d\underline{s}$$

$$= \mu_0 \left[\int_{S_1} \underline{J} \cdot d\underline{s} + \int_{S_2} \underline{J} \cdot d\underline{s} \right]$$

SE UN TUBO INTERSECA S DUE VOLTE, I CONTRIBUTI SI ANNULLANO. SE NON LA INTERSECA, NON DÀ CONTRIBUTO AL FLUSSO.

$$\Phi_S (\nabla \times \underline{B}) = \mu_0 \sum_{i=1}^m I_i \stackrel{\text{CONCATENATE}}{\cdot} m; \quad \downarrow \text{GRADO DI CONCATENAZIONE}$$



SI, STOKES SI PUÒ USARE ANCHE SU SUPERFICI APERTE.

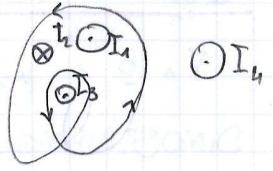
DA CUI

$$\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 \sum_i I_i \stackrel{\text{conc.}}{\cdot} m;$$

DETTO TEOREMA DELLA CIRCUITAZIONE DI AMPÈRE.

AD ESEMPIO,

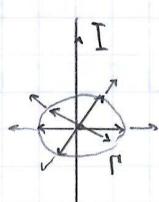
$$C = \oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 [I_1 - I_2 + 2I_3]$$



VICEVERSA, SE SO CALCOLARE $C = f(B)$, $B = f^{-1}(C)$.

ESEMPIO: CAMPO DI UN FILO PERCORSO DA CORRENTE

HO SIMMETRIA CILINDRICA, TRE POSSIBILITÀ:



NEI PRIMI DUE, $\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = 0$;
MA NON È POSSIBILE (I È CONCATENATA).
 $B(r) 2\pi r = \mu_0 I$

ESEMPIO: CAMPO DI UN SOLENOIDE

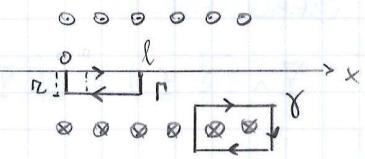
LUNGO Γ , PER SIMMETRIA È $\underline{B} = B(r)\hat{x}$:

$$\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = 0$$

$$B(0)l - B(r)l \Rightarrow B(0) = B(r) = B_{\text{int}}$$

LUNGO γ ,

$$\oint_{\gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = B_{\text{int}}l - B_{\text{ext}}l = \mu_0 m l I$$



$$m = \frac{N}{L}$$

IL CAMPO ESTERNO B_{ext} SI ANNULLA AL LIMITE PER L INFINITO.*

Allora

$$\underline{B} = \mu_0 m I \hat{x}$$

LE LINEE DI CAMPO SONO CHIUSE; AL LIMITE DI $l \rightarrow \infty$, SI CHIUDONO ALL'INFINITO.

*SI NOTI CHE, AMMESSO $\underline{B} = B(r)\hat{x}$, SE COSTRUISCO UN PERCORSO ANALOGO A Γ MA FUORI DAL SOLENOIDE SCOPRO CHE ANCHE LÌ DEVE ESSERE $B = \text{cost.}$: MA QUESTA COSTANTE NON PUÒ CHE VALERE ZERO, VISTO CHE POSSO ALLONTANARE Γ FINO ALL'INFINITO.

QUARTA EQUAZIONE DI MAXWELL (CASO STATICO)

$$\nabla \wedge \underline{B} = \mu_0 \underline{J}$$

DIMOSTRIAMOLA.

$$\underline{B}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\underline{J}(\underline{z}') \wedge \Delta \underline{r}}{|\Delta \underline{r}|^3} d\underline{r}'$$

VOGLIAMO SCRIVERE

$$\underline{B} = \nabla \wedge \underline{A}$$

POSSIAMO TROVARE \underline{A} CON QUESTA PROPRIETÀ (POTENZIALE VETTORE) OGNI VOLTA CHE \underline{B} È, COME IN QUESTO CASO, SOLENOIDALE.

$$\underline{B}(\underline{z}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \left[\underline{J}(\underline{z}') \wedge \nabla \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right) \right] d\underline{r}' \quad \Delta \underline{r} = |\Delta \underline{r}|$$

SFRUTTANDO

$$\nabla \wedge (\underline{f} \wedge \underline{v}) = \underline{f} \nabla \wedge \underline{v} + \nabla \underline{f} \wedge \underline{v} \quad \text{CON } \underline{f} = \frac{1}{\Delta \underline{r}}, \underline{v} = \underline{J}(\underline{z}')$$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \left(\frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} \right) &= \frac{\nabla \wedge \underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} + \nabla \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right) \wedge \underline{J}(\underline{z}') \\ &\stackrel{\text{"O'}}{=} \left(\text{DERIVO SECONDO LE dl, NON dl}' \right) \\ &= -\underline{J}(\underline{z}') \wedge \nabla \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{B}(\underline{z}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \left[\nabla \wedge \left(\frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} \right) \right] d\underline{r}' \\ &= \nabla \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} d\underline{r}' \right] \\ &= \nabla \wedge \underline{A}(\underline{z}) \end{aligned}$$

CON $\underline{A}(\underline{z})$ POTENZIALE VETTORE DATO DA

$$\underline{A}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\underline{J}(\underline{z}')}{|\Delta \underline{r}|} d\underline{r}'$$

SI TRATTA ORA DI VERIFICARE CHI E'

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{B} &= \nabla \cdot \nabla \times \underline{A} \\ &= -\nabla^2 \underline{A} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{A})\end{aligned}$$

INNANZITUTTO, DIMOSTRIAMO CHE NEL CASO STAZIONARIO

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{A} &= \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} d\underline{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \nabla \cdot \left(\frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} \right) d\underline{r}'\end{aligned}$$

QUESTA SCELTA PARTICOLARE
DI \underline{A} , NOTA CHE DEVO FARNE
UN'ALTRA SE NON SONO NEL
CASO STAZIONARIO.

SFRUTTIAMO

$$\nabla \cdot (\underline{f} \cdot \underline{r}) = \underline{f} \cdot \nabla \cdot \underline{r} + \nabla \cdot \underline{f} \cdot \underline{r}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} \right) = \frac{\nabla \cdot \underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} + \underline{J}(\underline{z}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right)$$

MA

" 0 (VARIABILI)

$$\nabla \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} \right) = -\underline{J}(\underline{z}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right)$$

INOLTRE

$$\nabla' (\underline{f} \cdot \underline{r}) = \underline{f} \cdot \nabla' \cdot \underline{r} + \nabla' \cdot \underline{f} \cdot \underline{r}$$

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} \right) = \frac{\nabla' \cdot \underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} + \underline{J}(\underline{z}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right)$$

" 0 (EQUAZIONE DI CONTINUITÀ)

Allora

$$\nabla \cdot \underline{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \nabla' \cdot \left(\frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} \right) d\underline{r}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\underline{J}(\underline{z}')}{\Delta \underline{r}} \cdot \hat{n} dS' = 0$$

INFATTI MI BASTA AVER SCELTO τ' GRANDE ABBASTANZA DA
CONTENERE TUTTI I CIRCUITI; S' NON E' INTERSECATA MAI DA \underline{J} .

SI E' OTTENUTO

$$\nabla \cdot \underline{B} = -\nabla^2 \underline{A}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \mathcal{J}(\underline{\tau}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{\tau} - \underline{\tau}'|} \right) d\tau'$$

$\mathcal{J}(\underline{\tau}')$ E' UNA COSTANTE
PER L'OPERATORE ∇^2
(APPLICA SU SCALARI O VETTORI)

$$\Delta \underline{\tau} = \underline{\tau} - \underline{\tau}'$$

MA

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\Delta \underline{\tau}} \right) = 0 \quad \text{SE} \quad p(x, y, z) \neq p'(x', y', z') \quad \text{INFATTI}$$

$$\Delta \underline{\tau} = |\Delta \underline{\tau}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Delta \underline{\tau}} = -\frac{(x-x')}{\Delta \underline{\tau}^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\Delta \underline{\tau}} = -\frac{1}{\Delta \underline{\tau}^3} + \frac{3(x-x')^2}{\Delta \underline{\tau}^5}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\Delta \underline{\tau}} \right) = -\frac{3}{\Delta \underline{\tau}^3} + \frac{3\Delta \underline{\tau}^2}{\Delta \underline{\tau}^5} = 0$$

DETTO ALLORA w IL VOLUME SU CUI $\underline{\tau} \sim \underline{\tau}'$, $\Delta \underline{\tau} = 0$,

$$\nabla \cdot \underline{B} \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{J}(\underline{\tau}) \int_w \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Delta \underline{\tau}} \right) d\tau'$$

A MENO DI INFINITESIMI
DI ORDINE SUPERIORE

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{J}(\underline{\tau}) \int_{\Sigma} \nabla \left(\frac{1}{\Delta \underline{\tau}} \right) \cdot \hat{m} d\Sigma$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{J}(\underline{\tau}) \int_{\Sigma} \frac{\Delta \underline{\tau} \cdot \hat{m} d\Sigma}{\Delta \underline{\tau}^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{J}(\underline{\tau}) \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_m}{\Delta \underline{\tau}^2} = \mu_0 \mathcal{J}(\underline{\tau})$$

NOTA: SUL JACKSON IL FINALE E' INVECE

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{\tau} - \underline{\tau}'|} \right) = -4\pi \delta(\underline{\tau} - \underline{\tau}')$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \mathcal{J}(\underline{\tau}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{\tau} - \underline{\tau}'|} \right) d\tau' = \mu_0 \mathcal{J}$$

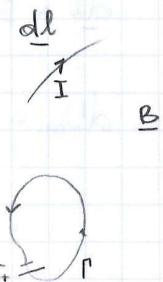
AZIONI MECCANICHE SU UN CIRCUITO IMMERSO IN \underline{B}

CONSIDERO UN CIRCUITO RIGIDO PERCORSO DA CORRENTE.

$$d\underline{F} = I d\underline{l} \wedge \underline{B}$$

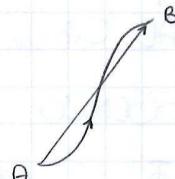
$$\underline{F} = I \oint_r d\underline{l} \wedge \underline{B} \stackrel{\underline{B} = \text{cost}}{\rightarrow} I (\oint_r d\underline{l}) \wedge \underline{B} = 0$$

$$\underline{M} = I \oint_r [\underline{l} \wedge (d\underline{l} \wedge \underline{B})]$$



SUL TRATTO AB, SE \underline{B} E' COSTANTE,

$$\underline{F} = I \left(\int_A^B d\underline{l} \right) \wedge \underline{B} = I \vec{AB} \wedge \vec{B}$$



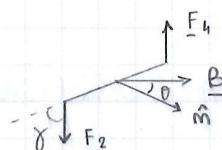
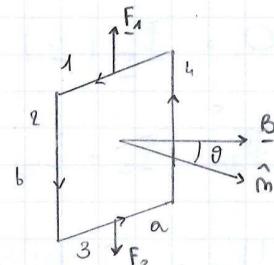
ESEMPIO: MOMENTO DI UNA SPIRA DORATO A \underline{B}

$$F_2 = F_4 = I b B$$

$$\underline{M} = I b B \cdot a \cdot \sin \theta \hat{m}$$

$$= I S B \sin \theta \hat{m}$$

$$= \underline{m} \wedge \underline{B}$$



SE SI E' DEFINITO IL MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO

$$\underline{m} = I S \hat{m}$$

SI NOTI L'ANALOGIA CON IL MOMENTO MECCANICO DI UN DIPOLO

ELETTRICO IMMERSO NEL CAMPO \underline{E} ,

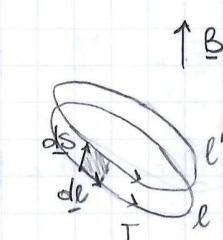
$$\underline{M} = \underline{P} \wedge \underline{E}$$

DIMOSTRIAMO QUESTO RISULTATO IN GENERALE UTILIZZANDO IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI.

PRESO UN CIRCUITO, TRASLUIAMO DI $d\underline{s}$ OGNI SUO ELEMENTO SENZA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA (TRANSFORMAZIONE VIRTUALE). SI DEVE APPLICARE

$$d\underline{f} = -d\underline{F} = -I d\underline{l} \wedge \underline{B}$$

$$dU_m = d\underline{l} = \int d\underline{f} \cdot d\underline{s} = - \int d\underline{F} \cdot d\underline{s} = - I \int d\underline{l} \wedge \underline{B} \cdot d\underline{s}$$



$d\underline{s}$ IN GENERALE DIVERSI

$$d\mathbf{l} \wedge \underline{\mathbf{B}} \cdot d\underline{S} = d\underline{S} \wedge d\mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{B}} = - d\mathbf{l} \wedge d\underline{S} \cdot \underline{\mathbf{B}}$$

$$\begin{aligned} dU_m &= I \int d\mathbf{l} \wedge d\underline{S} \cdot \underline{\mathbf{B}} = I \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ELEMENTO DI AREA}}}{d^2A} \cdot \underline{\mathbf{B}} \\ &= I \cdot \Phi_{da}(\underline{\mathbf{B}}) \end{aligned}$$



ONDE IL FLUSSO DI $\underline{\mathbf{B}}$ ATTRAVERSO LA SUPERFICIE SPAZZATA DAL CIRCUITO DURANTE LA TRASLAZIONE.

ESSENDO $\underline{\mathbf{B}}$ SOLENOIDALE,

$$\Phi_{\text{area}}(\underline{\mathbf{B}}) = 0$$

AORA

$$0 = \Phi_{\sum}(\underline{\mathbf{B}}) = -\Phi_S + \Phi_{S'} + \Phi_{da}$$

$$\Phi_{da} = \Phi_S - \Phi_{S'} = -(\Phi_{S'} - \Phi_S) = -d\Phi(\underline{\mathbf{B}})$$

$$U_m = -I \Phi(\underline{\mathbf{B}})$$

(HO CHIUSO A CON I "TAPPPI" E I SEGNI DIPENDONO DAL FATTO CHE LA NORMALE USCENTE SIA O MENO CONCORDE AL VERSO DELLA SPIRA, IN BASE A I).

FLUSSO DI $\underline{\mathbf{B}}$ CONCATENATO ALLA SPIRA (NON DIPENDE DA CHI E' Σ)

SE LA SUPERFICIE E' PICCOLA, IMMAGINO $\underline{\mathbf{B}}$ COSTANTE SU DI ESSA:

$$\Phi(\underline{\mathbf{B}}) \approx \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{S}$$

$$U_m = -IS \cdot \underline{\mathbf{B}} = -m \cdot \underline{\mathbf{B}}$$

QUESTO E' VERO IN GENERALE SE IL CAMPO $\underline{\mathbf{B}}$ E' UNIFORME SULLA SUPERFICIE \underline{S} .

SI NOTI L'ANALOGIA CON IL DIPOLO ELETTRICO, PER CUI

$$U_m = -P \cdot E$$

CON PASSAGGI ANALOGHI (LAVORI VIRTUALI) SI RICAVANO

$$\underline{E} = \nabla(m \cdot \underline{\mathbf{B}}) = (m \cdot \nabla B_x, m \cdot \nabla B_y, m \cdot \nabla B_z)$$

$$\underline{M} = \underline{m} \wedge \underline{\mathbf{B}}$$

EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA MAGNETOSTATICA

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} \end{cases}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

CON \underline{A} POTENZIALE VETTORE; LO POSSO SEMPRE DEFINIRE IN VIRTÙ DEL FATTO CHE \underline{B} È SOLENOIDALE.

$$[A] = [B][L] = T_m$$

SI NOTI CHE \underline{A} NON È DEFINITO UNIVOCAMENTE, MA È INVARIANTE PER AGGIUNTA DEL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE SCALARÉ (COME IL POTENZIALE SCALARÉ ERA INVARIANTE PER TRASLAZIONI).

$$\underline{A} \quad \underline{A}'$$

$$\nabla \times \underline{A} = \nabla \times \underline{A}' \quad \text{TRASFORMAZIONE DI GAUGE}$$

$$\nabla \times (\underline{A} - \underline{A}') = 0 \Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla f$$

QUESTA PROPRIETÀ È DETTA INVARIANZA PER TRASFORMAZIONI DI GAUGE.

QUESTO MI DÀ LIBERTÀ DI SCEGLIERE \underline{A}' IN MODO CHE SIA SOLENOIDALE (SCELTA DI GAUGE STATICÀ):

$$\nabla \cdot \underline{A}' = 0 = \nabla \cdot \underline{A} + \nabla^2 f \Rightarrow \nabla^2 f = - \nabla \cdot \underline{A}$$

CON QUESTA SCELTA,

$$\mu_0 \underline{J} = \nabla \times \underline{B} = \nabla \times \nabla \times \underline{A} = - \nabla^2 \underline{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \underline{A} \right)$$

$$\nabla^2 \underline{A} = - \mu_0 \underline{J}$$

DETTA EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA MAGNETOSTATICA.

SI NOTI L'ANALOGIA CON

$$\nabla^2 V = - \frac{P}{\epsilon_0}$$

(EQUAZIONE DI POISSON).

LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE ERA

$$\underline{V}(\underline{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\underline{J}(\underline{z}')}{|\underline{z} - \underline{z}'|} d\underline{z}' + C$$

SIMILMENTE

$$\underline{A}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\underline{J}(\underline{z}')}{|\underline{z} - \underline{z}'|} d\underline{z}' + C$$

PERCÒ UN MODO PER TROVARE \underline{B} È QUELLO DI CALCOLARE \underline{A} E PRENDERNE IL ROTORE.

TORNA UTILE IL FATTO CHE, USANDO LA SCELTA STATICA DI GAUGE,

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0 \Rightarrow \underline{\Phi}_{S \text{ CHIUSA}}(\underline{A}) = 0$$

$$\underline{\Phi}_S(\underline{B}) = \int_S \underline{B} \cdot \hat{n} dS = \int_S (\nabla \times \underline{A}) \cdot \hat{n} dS = \oint_{\Gamma} \underline{A} \cdot d\underline{l}$$

FORMULA ELEMENTARE DI LAPLACE

$$\underline{J} d\underline{z}' = \underline{J}(d\underline{S}' \cdot d\underline{l}') = I d\underline{l}'$$

SE \underline{J} È COSTANTE SULLA SEZIONE DI UN CIRCUITO FILIFORME. ALLORA

$$\underline{A}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\underline{l}'}{|\underline{z} - \underline{z}'|} \quad \text{CON } \Delta \underline{z} = \underline{z} \quad (\text{HO POSTO } d\underline{l}' \text{ NELL'ORIGINE})$$

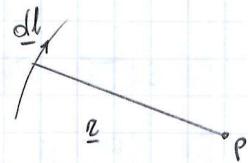
$$d\underline{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\underline{l}'}{r}$$

$$d\underline{B} = \nabla \times d\underline{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{d\underline{l}'}{r} \right)$$

SFRUTTIAMO

$$\nabla \times (\underline{f} \underline{z}) = \underline{f} \nabla \times \underline{z} + \nabla \underline{f} \times \underline{z}$$

$$\nabla \times \left(\frac{d\underline{l}'}{r} \right) = \frac{(\nabla \times d\underline{l}') = 0}{r} + \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\underline{l}' = -\frac{\underline{z}}{r^3} \times d\underline{l}' = \frac{d\underline{l}' \times \underline{z}}{r^3}$$



ALLORA

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl' \wedge \underline{z}}{r^3}$$

TEOREMA DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE

SE MI METTO IN UN PUNTO DELLO SPAZIO SENZA CORRENTI,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = -\nabla \varphi$$



p

ALLORA A GRANDE DISTANZA DA UNA SPIRA

$$\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \cdot \underline{z}}{r^3}$$

DETTO POTENZIALE MAGNETOSTATICO (POCO ELEGANTE).

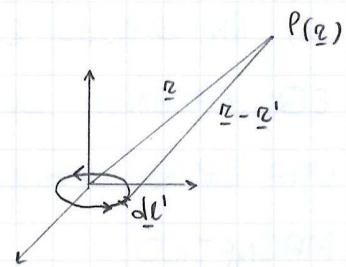
CALCOLIAMO INVECE IL POTENZIALE VETTORE

$$\mathbf{A}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Idl'}{r}$$

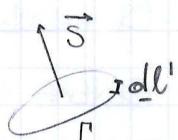
(VALIDO SE $\underline{z} \sim (\underline{z} - \underline{z}')$).

USIAMO IL FATTO CHE

$$\int_S \nabla f \wedge \hat{n} dS = \oint_P f dl'$$



$$\int_S \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \hat{n} dS = \oint_P \frac{dl'}{r}$$



ALLORA

$$\mathbf{A}(\underline{z}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \hat{n} dS$$

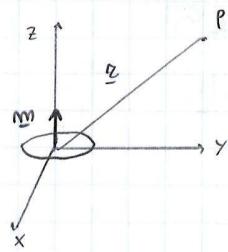
$$\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \underline{z}$$

SE LA SPIRA È PICCOLA, $\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$ SI PUÒ CONSIDERARE COSTANTE SU DI ESSA.

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{-\underline{z} \wedge \underline{z}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m \wedge \underline{z}}{r^3}$$

$$\underline{m} = (0, 0, m) \quad \underline{r} = (x, y, z)$$

$$\underline{m} \wedge \underline{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & m \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-my, mx, 0)$$



$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0 \right)$$

$$\underline{B} = \nabla \wedge \underline{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{y}{r^3} & \frac{x}{r^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{2}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2)}{r^5} \right)$$

IN ANALOGIA CON LE COMPONENTI DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN DIPOLO ELETTRICO A GRANDE DISTANZA, IL TEOREMA DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE AFFERMA QUINDI CHE, A GRANDE DISTANZA, UNA SPIRA PERCORSO DA CORRENTE SI COMPORTA COME UN DIPOLO MAGNETICO:

- SUBISCE ANALOGHE AZIONI MECCANICHE, SE IMMERSO IN UN CAMPO DI INDUZIONE MAGNETICA, DI UN DIPOLO ELETTRICO IMMERSO IN \mathbf{E} ;
- GENERA UN CAMPO \underline{B} CHE È L'ANALOGO DEL CAMPO \mathbf{E} GENERATO DA UN DIPOLO ELETTRICO.

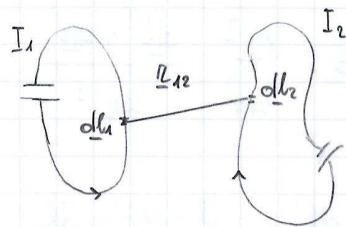
INTERAZIONE TRA CIRCUITI PERCORSI DA CORRENTE

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l}_2 \wedge \mathbf{B}_1 (\mathbf{r})$$

$$= I_2 d\mathbf{l}_2 \wedge \oint \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \wedge d\mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\mathbf{F}_1$$

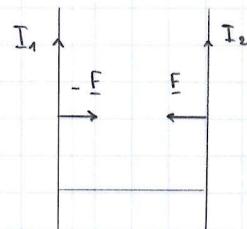
COME SI PUÒ DEMONSTRARE.



ESEMPIO: FORZA TRA DUE FILI PARALLELI

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l}_2 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl_2} = I_1 I_2 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \quad \text{FORZA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA.}$$



SU QUESTO FATTO SI BASA LA DEFINIZIONE DELL'AMPÈRE:

SCORRE NEI DUE FILI UNA CORRENTE DI 1 A SE POSTI ALLA DISTANZA DI 1 m SI SCAMBIANO UNA FORZA PARI A

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

PER METRO DI FILO.

FOCUS: CAMPO GENERATO DA UNA CARICA IN MOTO

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl' \wedge \Delta r}{\Delta r^3}$$

$$I dl' = J \cdot dS' \cdot dl' = J \cdot d\tau' = m q \cdot v \cdot d\tau' = \frac{dN}{d\tau'} q \cdot v \cdot d\tau' = dN \cdot q \cdot v$$

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dN \frac{q \cdot v \wedge \Delta r}{\Delta r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v \wedge \Delta r}{\Delta r^3}$$

SINGOLA
CARICA

• TRASFORMAZIONI RELATIVISTICHE DI E E B

$$F = g(E + r \wedge B)$$

\uparrow
NON E' UN INVARIANTE, NE' UN COVARIANTE RELATIVISTICO.

PERCHÉ SIA CONVARIANTE F , CI DEVE ESSERE UN LEGAME TRA E E B .

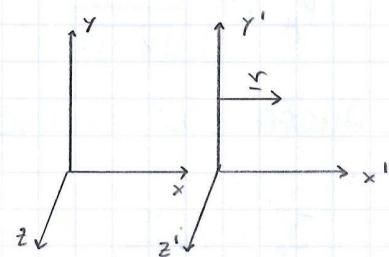
$$\left. \begin{array}{l} P \\ J = mg \Sigma r = p \Sigma \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E \\ B \end{array} \right.$$

SORGENTI CAM

COME SI TRASFORMANO LE SORGENTI TRA DIVERSI SISTEMI DI RIFERIMENTO?

SIA (SR) FERMO E (SR)' SALDALE A UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh} & p & J = p \cong \\ \text{Sh}' & p_0 & J_0 = 0 \end{array}$$



PARTIAMO DAL PRESUPPOSTO CHE LA CARICA Q SIA UN INVARIANTE RELATIVISTICO (LO VEDIAMO DAL FATTO CHE GLI ATOMI SONO NEUTRI).

$$H_2 \quad K_C \sim K_F \sim eV \quad r_c \sim r_p \sim 10^{-3} cm \ll c$$

$$\text{He} \quad K_e \sim \text{eV} \quad K_p \sim \text{MeV} \quad v_e \sim 10^{-3} c \quad v_p \sim 10\% \cdot c \quad \text{E QUI SONO VEDERE CAMPI ENORMI (CHE NON VEDO).}$$

$$\Delta q = q_e - q_p = 0$$

SE q È INVARIANTE NON LO PUÒ ESSERE P (INFATTI LE LUNGHEZZE VARIANO).

$$P_0 = \frac{dQ}{dt_0} \quad J_0 = 0 \quad (P_0 \text{ DENSITÀ DI CARICA A RIPOSO})$$

$$d\zeta_0 = dx_0 dy_0 dz_0$$

$$P = \frac{dQ}{dT}$$

$$d\tau = dx dy dz = \frac{dy}{y} dz$$

$$= \frac{dt_0}{\gamma}$$

$$\text{CON} \quad \beta = \frac{r}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

PERCIO', NEL SISTEMA DEL LABORATORIO,

$$\begin{cases} p = \frac{dQ}{dt} = \gamma p_0 \\ J = p \gamma = \gamma p_0 \gamma \end{cases}$$

CHIAMO

$$J_\mu = (J, p_c) = \left(\frac{p_0 \gamma}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{p_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

LA QUADRICORRENTE.

CAPISCO CHE E' UN QUADRINETTORE PER CONFRONTO CON IL QUADRIMPULSO

$$P_\mu = \left(\frac{m_0 \gamma}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

ALLORA J_μ SI ENTRA TRA SISTEMI DI RIFERIMENTO COME

$$J_\mu' = \Lambda J_\mu \quad J^2 = J_\mu J^\mu = |J|^2 - J^2 = -p^2 c^2$$

NEL NOSTRO CASO (VEGI FOCUS DOPO)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \begin{cases} J_x' = \gamma [J_x - \beta p_c] = \gamma [J_x - p \gamma] \\ J_y' = J_y \\ J_z' = J_z \\ p' c = \gamma [-\beta J_x + p_c] \Rightarrow p' = \gamma \left[-\left(\frac{\gamma}{c^2}\right) J_x + p \right] \end{cases}$$

ESEMPIO

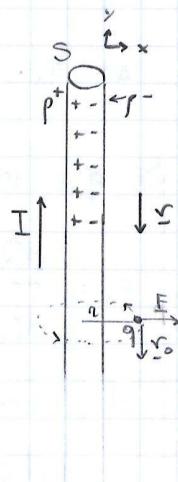
$$p^+ = p^-$$

$$E_0 = 0$$

METTO UNA CARICA q A DISTANZA r DAL FILO IN

MOTO CON γ . SAPPIAMO CHE SUBISCE LA FORZA
DI LORENTZ (RADIALE)

$$F_L = q \gamma v \times B_0 \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \hat{u}_x$$



OSSERVIAMO LO STESSO FENOMENO DAL PUNTO DI VISTA DI q . POICHÉ

$$v_0 = 0$$

LA FORZA SUBITA DA q NON PUO' ESSERE DOVUTA A UN CAMPO MAGNETICO, MA A UN CAMPO ELETTRICO (PRINCIPIO DI RELATIVITÀ).

CONSIDERIAMO LE QUADRICORRENTI \underline{J}_μ^+ , \underline{J}_μ^- .

LA COMPONENTE TRASVERSALE DELLA FORZA (TRASVERSALE A Σ)

SI TRASFORMA COME $F' = F \gamma$. INFATTI,

$$\frac{\Delta p}{n} = \underline{F} dt \quad \Rightarrow \quad F dt = F' dt'$$

$$\Delta p' = \underline{F}' dt'$$

dt' E' IL TEMPO PROPRIO

(SE IL BOOST E' ORTOGONALE A Σ , Δp VETTORE NON CAMBIA).

TORNANDO A NOI, NEL FILO SCORRE UNA CORRENTE

$$\underline{J} = \underline{J}_+ + \underline{J}_- \neq 0$$

$$\underline{E}_0 = 0$$

$$\underline{V} \wedge \underline{B} = \mu_0 \underline{J} \quad \underline{B}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{I}{c} \hat{u}_r \quad \underline{F}_L = q \underline{v}_0 \wedge \underline{B}_0 = q v_0 B_0 \hat{u}_r \quad (\text{RADIALE})$$

$$\underline{F}_L = \frac{\mu_0}{2\pi r} q v_0 I = \frac{\mu_0}{2\pi r} q v_0 J S = \frac{\mu_0 m q^2 r_0 r S}{2\pi r}$$

$$q^2 = q q' \leftarrow \begin{array}{l} \text{TEST} \\ \text{PORTATORE} \end{array}$$

NEL SISTEMA DEL LABORATORIO,

$$P = P^+ + P^- = 0 = mq_c - mq_c$$

$$\underline{J}^+ = (0, mq_c)$$

$$\underline{J}^- = (-mq \gamma, m(-q)c)$$

γ VELOCITA' DI DERIVA

COME SI TRASFORMANO PASSANDO AL SISTEMA DELLA CARICA CON γ ?

$$\left\{ \begin{array}{l} J_x^{+'} = \gamma \left[J_x^+ - \beta p_+ c \right] \\ \quad = -\gamma \beta m q c = -\gamma m q r_0 \\ \quad \beta = \frac{r_0}{c} \\ p_+^{'} = \gamma \left[-\beta \frac{J_x^+}{c} + p_+ \right] = \gamma m q \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_x^{-'} = \gamma \left[-mqr - \beta (-mqc) \right] \\ p_-^{'} = \gamma \left[-\frac{r_0}{c^2} (-mqr) - mq \right] \end{array} \right.$$

COMPARA QUINDI

$$\underline{B}_0' \neq \underline{B}_0 \quad (\underline{J}' \neq \underline{J})$$

SI NOTI PERO' CHE B_0 NON HA EFFETTO SULLA CARICA q , CHE IN SR' E' FERMA. NOTIAMO INVECE CHE

$$P' = P'_+ + P'_- = \gamma m q - \gamma m q + \gamma \frac{m q r r_0}{c^2} = \gamma \frac{m q r r_0}{c^2} \neq 0$$

IN SR' IL FILO E' CARICO. PRODUCE QUINDI UN CAMPO ELETTRICO RADIALE, RICAVABILE CON IL TH. DI GAUSS, CHE VALE

$$E'_0 = \frac{P' S}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\gamma m q r r_0 S}{c^2 2\pi \epsilon_0 r}$$

LA CARICA TEST SUBISCE

$$F' = q E'_0 = \frac{\gamma m q^2 r r_0 S}{c^2 2\pi \epsilon_0 r}$$

PER CONFRONTO CON LA FORZA IN SR,

$$\frac{F'}{F} = \frac{\gamma}{\mu_0 \epsilon_0 c^2}$$

SE IMPONIAMO CHE L'ELETROMAGNETISMO SIA CONVARIANTE,

$$F' = \gamma F$$

$$\Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

VEDREMO CHE QUESTA CONDIZIONE ESCE SENZA IMPORLA DALLA TRATTAZIONE DELLE Onde ELETROMAGNETICHE.

FOCUS: TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \gamma \left[x - \frac{v}{c}(ct) \right] \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma \left[ct - \frac{v}{c}x \right] \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

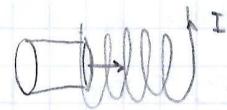
$$\underline{\alpha}' = A \underline{\alpha}$$

SE $\underline{\alpha}$ SI TRASFORMA IN QUESTO MODO PASSANDO DA UN SISTEMA INERZIALE A UN ALTRO, ALLORA $\underline{\alpha}$ E' UN QUADRINETTORE.

MAGNETISMO NEI MATERIALI

TRE CLASSI DI MATERIALI:

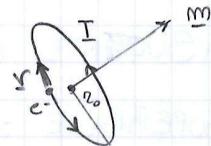
- FERROMAGNETICHE $F \sim F_p$ (FORZA PESO)
- PARAMAGNETICHE $F \ll F_p$
- DIAMAGNETICHE $F \ll F_p$, REPULSIVA



A LIVELLO ATOMICO, HO "CORRENTI AMPERIANE"

$$\underline{m} = I_0 \pi r_0^2 \hat{m}$$

$$U_m = - \underline{m} \cdot \underline{B} \quad \text{SE IMMERSO IN } \underline{B} \text{ UN MATERIALE.}$$



LE EQUAZIONI DI MAXWELL ASSUMERANNO LA FORMA

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \wedge \underline{B} = \mu_0 (\underline{J} + \underline{J}_m) \end{cases}$$

CHE ENTITÀ HA LA CORRENTE IN UN ATOMO DI IDROGENO?

MISURO QUANTA ENERGIA MI SERVE A STRAPPARE UN ELETTRONE,

$$L_i = -E_{\text{TOT}} = -(\kappa + U) = -\left(\frac{1}{2} m_e r_0^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}\right)$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = F = m_e a = m_e \omega_0^2 r_0 \Rightarrow \omega_0 = \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_0^3} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{h\pi}{e} \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r_0^3}$$

$$\frac{1}{2} m_e r_0^2 = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_0^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \Rightarrow L_i = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}$$

L_i È DETTO LAVORO DI PRIMA IONIZZAZIONE E VALE 13.6 eV.

$$D_0 = \frac{c^2}{8\pi\epsilon_0 L_i} = 0.5 \text{ Å} = 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$T_0 = 0.15 \text{ fs} = 1.5 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

$$I_0 = \frac{e}{T_0} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{1.5 \cdot 10^{-16} \text{ s}} \sim 1 \text{ mA}$$

IL MOMENTO MAGNETICO VALE TIPICAMENTE

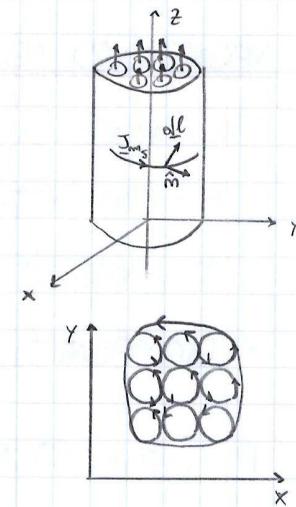
$$|\underline{m}| = I_0 \pi r_0^2 = 10^{-3} \text{ A} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \sim 10^{-23} \text{ Am}^2$$

CORRENTI AMPERIANE

IMMAGINIAMO UN MATERIALE ISOTROPO IN CUI HO ORIENTATO TUTTI I DIPOLINI PARALLELAMENTE ALL'ASSE \hat{z} . IN UN PUNTO QUALSIASI INTERNO A UNA FETTA $x-y$ DEL MATERIALE, LA CORRENTE ASSULTANTE È NULLA; HO INVECE UNA CORRENTE DI SUPERFICIE NON NULLA DI DENSITÀ J_{ms} .

IN GENERALE HO QUINDI CORRENTE AMPERIANA

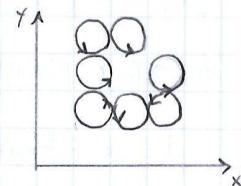
$$\frac{dQ_m}{dt} = dI_{ms} = J_{ms} \cdot \hat{m} dl \quad [J_{ms}] = \frac{[I]}{[L]} = \frac{A}{m}$$



QUI È NEL DISEGNO,
M GLACE SULLA
SUPERFICIE.

SE IL MATERIALE NON È PIÙ OMOGENEO (LO VISUALIZZO TOGLIENDO SFERETTE) O SE NON È MAGNETIZZATO UNIFORMEMENTE, VEDO ANCHE UNA CORRENTE DI VOLUME

$$\frac{dQ_m}{dt} = dI_{mv} = J_{mv} \cdot \hat{m} dS \quad [J_{mv}] = \frac{[I]}{[L]^2} = \frac{A}{m^2}$$



VETTORE DI POLARIZZAZIONE MAGNETICA

DEFINISCO

$$\underline{M}(x, y, z) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\sum m_i}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{N \langle m \rangle}{\Delta T} = M \langle m \rangle$$

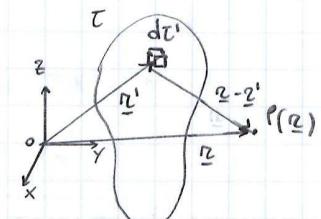
$$[M] = \frac{[m]}{[L]^3} = \frac{[I][L]}{[L]^3} = \frac{A}{m}$$

CALCOLO IN UN GENERICO PUNTO $P(\underline{z})$

$$d\underline{m} = \underline{M}(\underline{z}') d\underline{l}'$$

$$d\underline{A}(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\underline{m} \wedge (\underline{z} - \underline{z}')}{|z - z'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{M}(\underline{z}') \wedge \Delta \underline{z}}{\Delta \underline{z}^3} d\underline{l}'$$

$$A(\underline{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_T \left[\underline{M}(\underline{z}') \wedge \frac{\Delta \underline{z}}{\Delta \underline{z}^3} \right] d\underline{l}'$$



TEOREMA DI
EQUIVALENZA DI
AMPÈRE

USO LE RELAZIONI

$$\frac{\Delta \underline{M}}{\Delta \underline{r}^3} = \nabla' \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right) \quad \nabla' \wedge (\frac{1}{\Delta \underline{r}}) = \downarrow \nabla' \wedge \underline{r} + \nabla' \frac{1}{\Delta \underline{r}} \wedge \underline{r}$$

$$\nabla' \wedge \left(\frac{\underline{M}}{\Delta \underline{r}} \right) = \frac{\nabla' \wedge \underline{M}}{\Delta \underline{r}} + \nabla' \left(\frac{1}{\Delta \underline{r}} \right) \wedge \underline{M}$$

Allora

$$A(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla' \wedge \underline{M}(\underline{r}')}{\Delta \underline{r}} d\underline{r}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \left[\nabla' \wedge \left(\frac{\underline{M}(\underline{r}')}{\Delta \underline{r}} \right) \right] d\underline{r}' \quad (I)$$

D'ALTRIO CANTO, L'EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA MAGNETOSTATICA SA'

$$A(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\underline{J}_{m.v}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d\underline{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\underline{J}_{m.v}(\underline{r}') d\underline{r}'}{\Delta \underline{r}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\underline{J}_{m.s}(\underline{r}') d\underline{s}'}{\Delta \underline{r}} \quad (II)$$

↑
CONTORNO DI τ

USIAMO ALLORA LA SECONDA IDENTITÀ DI GREENE,

$$\int_{\tau} (\nabla \wedge \underline{v}) d\underline{r} = - \int_{S=\partial\tau} (\underline{v} \wedge \hat{\underline{m}}) d\underline{s}$$

$$\Gamma \quad \nabla \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = - \underline{v} \cdot (\nabla \wedge \underline{w}) + \underline{w} \cdot (\nabla \wedge \underline{v})$$

SE \underline{w} È UNIFORME,

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) d\underline{r} = + \underline{w} \cdot \int_{\tau} (\nabla \wedge \underline{v}) d\underline{r}$$

E OTTENGO LA RELAZIONE COME CONSEGUENZA DEL TH. DIVERGENZA.

CONTINUANDO LA (I),

$$A(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla' \wedge \underline{M}(\underline{r}')}{\Delta \underline{r}} d\underline{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\underline{M}(\underline{r}') \wedge \hat{\underline{m}'}}{\Delta \underline{r}} d\underline{s}'$$

DA QUI OTTENGO, PER IDENTIFICAZIONE CON LA (II),

$$\begin{cases} \underline{J}_{m.v} = \nabla' \wedge \underline{M} \\ \underline{J}_{m.s} = \underline{M} \wedge \hat{\underline{m}} \end{cases}$$

EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA MAGNETOSTATICA IN PRESENZA DI MATERIA

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{B} = \mu_0 (\underline{J} + \underline{J}_m) = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \underline{J}_{m_v} = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \nabla \times \underline{M} \end{array} \right.$$

DALLA SECONDA HO

INFATTI POSSO SCRIVERE SOLO ALL'INTERNO DEL MEZZO, DOVE $\underline{J}_{m_v} = 0$.

$$\nabla \times \left[\frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} \right] = \underline{J}$$

DEFINENDO IL VETTORE CAMPO MAGNETICO

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}$$

OTTENGO

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{H} = \underline{J} \end{array} \right.$$

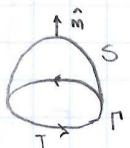
CHE RISOLVO UNIVOCAMENTE SE CONOSCO LA RELAZIONE CHE LEGA \underline{H} A \underline{B} , OVVERO $\underline{H} = \underline{H}(\underline{B})$.

NE SEGUE

$$\oint_L \underline{H} \cdot d\underline{l} = \sum_i I_i^{\text{conc.}}$$

$$[\underline{H}] = \frac{[I]}{[L]} \doteq \frac{A}{m} \quad (\text{NON IN TESLA})$$

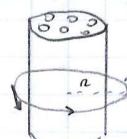
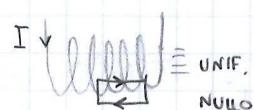
$$\int_S \underline{J} \cdot d\underline{s} = \oint_L \underline{H} \cdot d\underline{l}$$



ESEMPIO

$$\oint_L \underline{H} \cdot d\underline{l} = NI \quad H = \frac{N}{L} I = mI$$

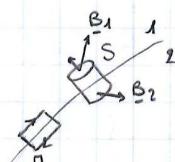
$$H \frac{L}{2\pi r} = NI \quad H = \frac{NI}{2\pi r} \hat{y}$$



CONDIZIONI DI RACCORDO

$$\Phi_s(\underline{B}) = 0 \Rightarrow B_{1N} = B_{2N}$$

$$\oint_L \underline{H} \cdot d\underline{l} = 0 \Rightarrow H_{1T} = H_{2T}$$



TROVEREMO CHE, PER MATERIALI DI- E PARAMAGNETICI,

$$\underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

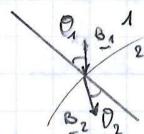
Allora

$$\mu_1 H_{1N} = \mu_2 H_{2N}$$

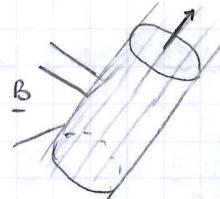
$$\frac{B_{1T}}{\mu_1} = \frac{B_{2T}}{\mu_2}$$

E HO LA LEGGE DI RIFRAZIONE

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$



IN UN MATERIALE FERROMAGNETICO, LE LINEE DI FORZA DIVENTANO ALL'INTERNO PRATICAMENTE PARALLELE ALLA SUPERFICIE. IL FLUSSO DI \underline{B} NEL MATERIALE ATTRAVERSO OGNI SEZIONE SI CONSERVA: HO OTTENUTO UN CIRCUITO MAGNETICO.



NOTA: COM'E' POSSIBILE, SE SI DEVE CONSERVARE B_m , CHE \underline{B} DIVENTI PARALLELO ALLA SUPERFICIE? DEVE ESSERE $B_t \gg B_m$.

PROPRIETA' MICROSCOPICHE DEI MATERIALI

DIA - PARA - MAGNETICI

$$\underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

$$\underline{M} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{H} = \mu_r \underline{H} - \underline{H} = (\mu_r - 1) \underline{H} = \chi_m \underline{H}$$

CON χ_m SUSCETTIVITA' MAGNETICA.

ESSENDО $\mu_r \sim 1$, AVREMO $\chi_m \sim 0$ (EFFETTO DI MAGNETIZZAZIONE PICCOLO); IN PARTICOLARE

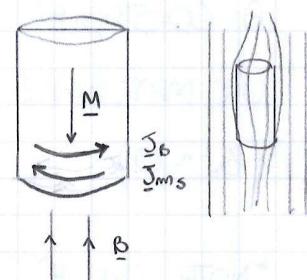
$\sim -3 \cdot 10^{-5}$ DIAM. $\underline{M}, \underline{H}$ HANNO VERSO OPPOSTO

$\sim 2 \cdot 10^{-6}$ PARAM. $\underline{M}, \underline{H}$ HANNO LO STESSO VERSO

IN UN MATERIALE OMOGENEO,

$$\underline{J}_{m,v} = \nabla \times \underline{M} = \chi_m \nabla \times \underline{H} = \chi_m \underline{J}$$

PER AVERE UNA DENSITA' DI CORRENTE DI VOLUME DOVUTA ALLA MAGNETIZZAZIONE CI DEVE GA' ESSERE UNA \underline{J} NELLA MATERIA.



LE LINEE DI FORZA TENDONO A ESSERE ESPULSE.

FERROMAGNETI

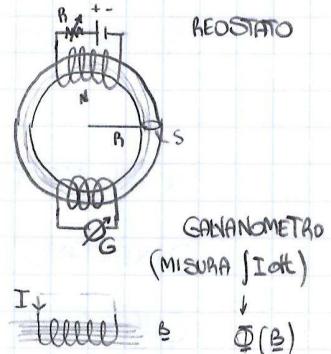
$$B = \mu_0 H$$

LA CURVA DIPIENDE IN GENERALE DALLA STORIA DEL MATERIALE; LA DEVO QUINDI CERCARE Sperimentalmente (CURVA DI ISTERESI).

$$\mu_r \sim 10^3 - 10^5$$

L'INDUTTORE GENERA B CHE IN VIRTÙ DI μ_r RESTA ALL'INTERNO DEL MATERIALE.

$$\frac{\mu_r H \cdot d\ell}{r} = \sum_i I \quad H \cdot 2\pi R = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi R}$$



VARIANDO CON UN POTENZIOMETRO LA CORRENTE I ,

OTTENGO VALORI DIVERSI DI H . CON IL GALVANOMETRO BALISTICO HO $\Phi(B)$:

$$\Phi(B) = BS \quad \Phi(H) = HS$$

$$B = \frac{\Phi(B)}{S}$$

QUANDO H RAGGIUNGE UN VALORE CRITICO,

TUTTI I DIPOLINI SONO ORIENTATI E M_s

RESTA COSTANTE*. TORNANDO INDIETRO NON STO SULLA STESSA

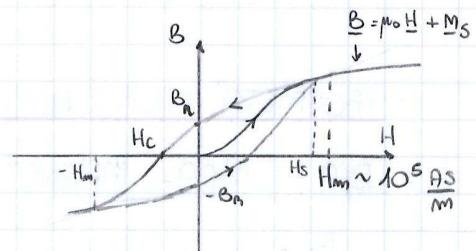
CURVA; IN PARTICOLARE PER $H=0$ HO $B \neq 0$: HO CREATO UNA CALAMITA. ENTRÒ IN UN CICLO CHE SI RIPETE SEMPRE UGUALE.

COME SPENGO LA CALAMITA? CON CIRCOLI SEMPRE PIÙ PICCOLI.

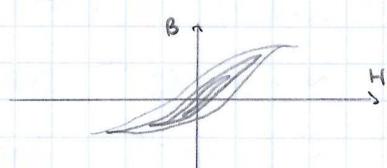
UN MATERIALE A CICLO LARGO È PIÙ ADATTO

A COSTRUIRE MAGNETI PERMANENTI (HA CAMPO RESIDUO GRANDE).

UN MATERIALE A CICLO STRETTO È INVECE UN BUON ELETTROMAGNETE ($B_m \approx 0$).



B_r INDUZIONE MAGNETICA RESIDUA
 H_c CAMPO MAGNETICO DI COERCIZIONE



*NOTA CHE E' $B = \mu_0 M + \mu_0 H$, QUINDI QUANDO M È ARRIVATO A SATURAZIONE B CONTINUA A CRESCERE CON H .

INTERPRETAZIONE MICROSCOPICA DEI FENOMENI DI MAGNETIZZAZIONE

FACCIO UN BUOLO ATTORNO A UN PUNTO NELLA MATERIA.

Allora

$$\sum_{\text{int}} H_i + H_{\text{sfera}} = \underline{H}_e$$

$$\underline{H}_e = H_{\text{sfera}} = H + \frac{\underline{M}}{3}$$



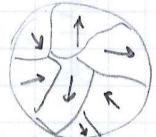
$$\underline{B}_e = \mu_0 \underline{H}_e$$

NON $\mu_0 \underline{M}$

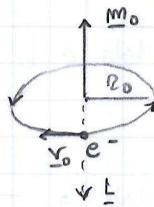
(RELAZIONE DI LORENTZ). M È TRASCURABILE, QUINDI $\underline{H}_e \approx \underline{H}$.

PER UN FERROMAGNETE, INVECE (VEDI DOMINI DI WEISS)

$$\underline{H}_e = \underline{H} + \gamma \underline{M} \quad \gamma \sim 10^{3-5} \text{ COSTANTE DI WEISS}$$



NON È PIÙ VERO CHE $\underline{H}_e \approx \underline{H}$ PERCHE' L'EFFETTO DI M È DOMINANTE.



PRECESIONE DI LARMOR

$$M_0 = I_0 S \hat{m} = \frac{e}{T_0} \pi r_0^2 \hat{m} \sim 10^{-23} \text{ Am}^2 \text{ (MAGNETONE DI BOHR)}$$

IL MOMENTO ANGOLARE ORBITALE VALE

$$\underline{L} = \underline{r}_0 \wedge M_0 \underline{v}_0$$

$$= r_0 m_e v_0 (-\hat{m})$$

$$|M_0| = \frac{e \pi r_0^2}{\frac{2 \pi r_0}{v_0}} = \frac{e r_0 r_0 m_e}{2 m_e} = \frac{e}{2 m_e} \underline{L} \quad M_0 = -\frac{e}{2 m_e} \underline{L}$$

ANCHE IN MECCANICA QUANTISTICA,

$$g = \frac{M_0}{L} = \frac{e}{2 m_e}$$

E' DETTO
FATORE (RAPPORTO)
GIA MAGNETICO.

$$M_0 = - \left(\frac{e}{2 m_e} \right) \underline{t} \underline{l} = - m_B \underline{l}$$

$$|\underline{S}| = \frac{\hbar}{2} \quad (\text{SPIN}) \quad M_S = - \frac{2e}{2 m_e} \underline{S}$$

NOI IGNOREREMO IL MOMENTO DI SPIN, IL CHE PRODURRA' ERRORE.

NEI DIAMAGNETI M È NULLO SE MEDIATO SU PIÙ ATOMI, QUINDI IN ESSI LA POLARIZZAZIONE È DONATA SOLO ALLA PRECESIONE; AL CONTRARIO L'EFFETTO È TRASCURABILE NEI PARA- E FERROMAGNETI.

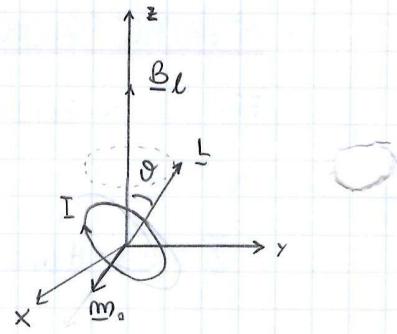
SE \underline{B}_l PRODUCE UNA PICCOLA PERTURBAZIONE SU \underline{L} ,

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{M} = m_0 \wedge \underline{B}_l = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) \underline{L} \wedge \underline{B}_l$$

(INFATTI NELL'EQUAZIONE NON HO MESSO \underline{L} PERTURBATO, INTRODUCENDO COSÌ UNA APPROSSIMAZIONE). *

DAL TEOREMA DI POISSON,

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \frac{dL}{dt} \wedge \underline{L} + L \frac{d\underline{L}}{dt} = \omega_L \wedge \underline{L}$$



* SE SCOPRISSIMO CHE A OPERA DI \underline{B}_l IL MOMENTO \underline{L} CAMBIA DI MOLTO MODULO E DIREZIONE, CAMBIEREBBE L'EQUAZIONE.

LA COMPONENTE L_z NON CAMBIA E NON LO FA NEHMENO $|L|$; ALLORA IL VETTORE \underline{L} PRECIDE ATTORNO A \underline{B}_l (PRECESSIONE DI LARMOR):

$$\omega_L \wedge \underline{L} = -\frac{e}{2m_e} \underline{L} \wedge \underline{B}_l = \frac{e}{2m_e} \underline{B}_l \wedge \underline{L}$$

INFATTI $\underline{L} \perp \underline{L}$ E $\underline{L} \perp \underline{B}$.

$$\omega_L = \frac{e}{2m_e} \underline{B}_l \quad \omega_L = g \underline{B}_l \text{ DI L'ARMOR}$$

$$I_L = \frac{e}{T_L} = \frac{e \omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B_l}{4\pi m_e}$$

QUEST'ULTIMA DETTA CORRENTE DI LARMOR.

AVRÒ ALLORA

$$\begin{aligned} \underline{m}_L &= -I_L S_z \hat{\underline{B}}_l \\ &= -\frac{e^2 \pi R_0^2 B_l}{h \pi m_e \cdot 3} \\ &= -\frac{e^2 R_0^2}{6m_e} \underline{B}_l \end{aligned}$$

$$S_z = \pi (\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle) = \pi \frac{2}{3} R_0^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{R_0^2}{3}$$

(MEDIATE SU TUTTI GLI ATOMI SOTTO L'HIPOTESI DI ISOTROPIA)

PROIEZIONE DI S
LUNGO \hat{z} (ossia SU XY)

PIÙ IN GENERALE, PER UN ATOMO CON PIÙ ELETTRONI,

$$\underline{m}_L = \frac{-e^2 Z R^2 \mu_0}{6m_e} \underline{H}_l \quad \text{CON } Z \text{ NUMERO ATOMICO, } R \text{ QUADRATICO MEDIO DEI RAGGI DELLE VARIE ORBITE}$$

$$\underline{M} = m \langle \underline{m} \rangle = m \underline{m}_L = \left(-\frac{m e^2 Z R^2 \mu_0}{6m_e} \right) \underline{H}_l = \alpha_d \underline{H}_l$$

$$= \alpha_d \underline{H} + \frac{\alpha_d}{3} \underline{M} \quad \text{NOTA } \underline{M} \text{ OPPOSTO A } \underline{H}_l$$

Dove si è usata per un diamagnete la relazione

$$\underline{H}_l = \underline{H} + \frac{\underline{M}}{3}$$

$$\underline{M} = \frac{3\alpha_d}{3-\alpha_d} \underline{H} = \chi_m \underline{H} \Rightarrow \chi_m = \frac{3\alpha_d}{3-\alpha_d} \sim \alpha_d \quad (|\alpha_d| \ll 1, \alpha_d < 0)$$

Si può osservare che $\omega_L \ll \omega_e$ di risoluzione di e. ciò non è più vero quando $B_l > 10^5 T$, che è però un campo enorme.

Polarizzazione per orientamento

$$m_0, B_l = \mu_0 H_l$$

Se è libero di orientarsi, l'atomo minimizza

$$U_m = -m_0 \cdot B_l$$

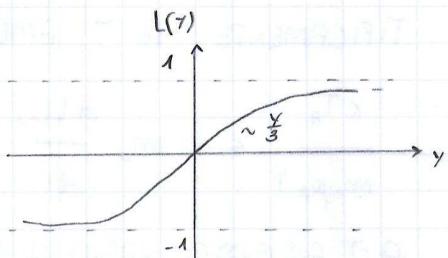
Questo è vero a pochi Kelvin, ma in generale questo effetto compete con quello dell'agitazione termica. All'equilibrio,

$$\langle \underline{m} \rangle = \langle \underline{m} \rangle_{B_l} = m_0 L(\gamma)$$

con $L(\gamma)$ funzione di Langevin

$$L(\gamma) = \cot \gamma - \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{m_0 B_l}{kT}$$



Per valori piccoli di γ , $L(\gamma)$ ha un andamento lineare ($\sim \frac{\gamma}{3}$);

un paramagnete si trova praticamente sempre in questa zona, un ferromagnete può arrivare alla saturazione.

La struttura di un paramagnete limita la crescita di B_l ; si ha

$$\langle \underline{m} \rangle = \frac{m_0 \gamma}{3}$$

$$\underline{M} = M \langle \underline{m} \rangle = \frac{M m_0 \gamma}{3} = \frac{M m_0^2}{3kT} \underline{B}_l = \underbrace{\frac{M m_0^2 \mu_0}{3kT} \underline{H}_l}_{d_p}$$

$$\underline{M} = \frac{3d_p}{3-d_p} \underline{H} = \chi_m \underline{H} \quad (\text{HO RISOLTO IN } \underline{H}_l = \underline{H} + \frac{\underline{M}}{3})$$

TIPICAMENTE $\chi_m \sim d_p$.

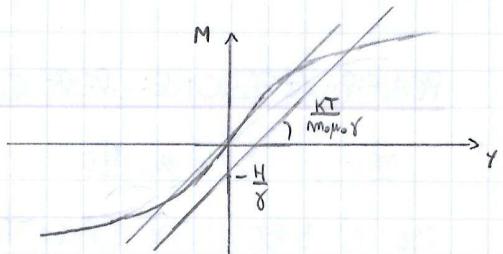
A TEMPERATURE SUFFICIENTEMENTE ALTE, $\alpha_p \rightarrow 0$ E COSÌ UN PARAMAGNETE SI COMPORTA COME UN DIAMAGNETE (MENTRE IN GENERE $\alpha_p \gg \alpha_d$).

PER UN FERROMAGNETE,

$$\underline{M} = m < \underline{m} > = m m_0 L(\gamma)$$

INTERSECA NELLA GRAFICOAMENTE CON

$$\begin{aligned} \underline{H}_L &= \underline{H} + \gamma \underline{M} \\ \underline{M} &= \frac{\underline{H}_L - \underline{H}}{\gamma} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \underline{M} = m m_0 (\cot \gamma - \frac{1}{\gamma}) \\ \underline{M} = \frac{K T}{m_0 \mu_0 \gamma} \gamma - \frac{H}{\gamma} \end{cases}$$

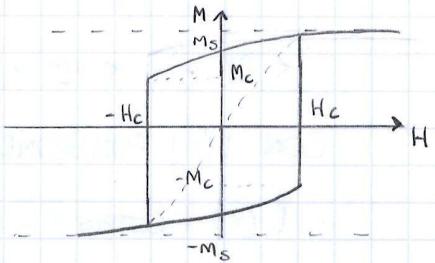


$$\gamma = \frac{m_0 B_L}{K T} = \frac{m_0 \mu_0 H_L}{K T} \Rightarrow H_L = \frac{K T}{m_0 \mu_0} \gamma$$

$$M = \frac{K T}{m_0 \mu_0 \gamma} \gamma - \frac{H}{\gamma} \quad \text{FASCIO DI RETTE AL VARIARE DI } H$$

TIPICAMENTE, A T AMBIENTE E AL VARIARE DI \underline{H}

$$\frac{K T_A}{m_0 \mu_0 \gamma} < m m_0 \left| \frac{d L(\gamma)}{d \gamma} \right|_{\gamma=0} = \frac{m m_0}{3} = \frac{M_s}{3}$$



A T FISSATA, VARIO \underline{H} FINO A CHE HO 2,3 SOLUZIONI INVECE DI UNA; RIPRODUO LA CURVA DI ISTERESI (CON M_s VALORE DI SATURAZIONE).

SE FISSO \underline{H} E VARIO T, CAMBIA LA PENDENZA DELLA RETTA. RAGGIUNTO IL VALORE CRITICO A CUI LA PENDENZA COINCIDE CON QUELLA DI $L(\gamma)$,

$$T_c = \frac{\gamma \mu_0 m_0 M_s}{3k}$$

HO SEMPRE SOLTANTO UN'INTERSEZIONE TRA LE DUE CURVE. PER $T \geq T_c$ NON HO PIÙ COMPORTAMENTO FERROMAGNETICO E RITROVO, IN ANALOGIA CON IL CASO DEI PARAMAGNETI,

$$\chi_m = \frac{C_p}{T - T_c} \quad \alpha_p \propto \frac{1}{T - T_c}$$

RICAPITOLANDO: MAGNETISMO NEI MATERIALI

$$\underline{M} = m < \underline{m} >$$

$$\begin{cases} \underline{J}_{m_r} = \nabla \wedge \underline{M} \\ \underline{J}_{m_s} = \underline{M} \wedge \hat{\underline{m}} \end{cases}$$

$$\underline{P} = m < \underline{p} >$$

$$\begin{cases} \underline{P}_p = - \nabla \cdot \underline{P} \\ \sigma_p = \underline{P} \cdot \hat{\underline{m}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \\ \underline{P} &= \epsilon_0 \chi \underline{E} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \Phi_s(\underline{B}) = 0$$

$$\nabla \wedge \underline{B} = \mu_0 (\underline{J} + \underline{J}_m)$$

$$\oint_p \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 \sum_i (I_i^{\text{conc}} + I_m)$$

$$\nabla \wedge \underline{H} = \underline{J}$$

$$\oint_p \underline{H} \cdot d\underline{l} = \sum_i I_i^{\text{conc}}$$

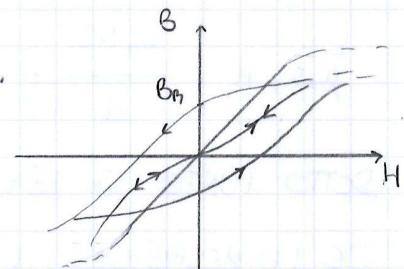
$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} \quad \text{CHE SI PUO' RIDURRE A} \quad \underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

$$\underline{M} = \chi_m \underline{H} \quad \chi_m = \mu_r - 1 \quad \underline{B}(\underline{H})$$

ELETTROMAGNETI

SI OSSERVANO NEL GRAFICO I DIVERSI ANDAMENTI $B(H)$.

$$\mu_r = \frac{dB}{dH} = \text{cost}$$



DA' LUOGO A UN COMPORTAMENTO LINEARE

(FINCHE' NON VA IN SATURAZIONE).

SCELGO μ_r GRANDE E CICLO STRETTO SE VOGLIO UN ELETTROMAGNETE (NO CAMPO RESIDUO B_r).

COME MI SUTO IL CAMPO IN UN FERROMAGNETE?

PRATICO UN TAGLIO ("TRAFERRO") SOTTILE,

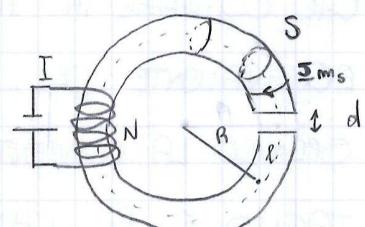
COSÌ DA POTER SUPPORRE IL FLUSSO DI \underline{B}

DI SPERSO NULLO, SE LA SEZIONE S E'

COSTANTE,

$$\Phi(B) = \text{cost.} = BS$$

$$\frac{\Phi}{S} = B;$$



$$\sqrt{S} \ll R \quad d \ll l$$

$$\frac{Tg\theta_1}{Tg\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \mu_2 \gg \mu_1$$

ACCENDO IL CIRCUITO: CHE VALORI DI B E H SI INSTAURANO? (PUNTO DI LAVORO)

LE LINEE DI FORZA NELL'INDUTTORE ANTE SONO
SEGUENDONE LA FORMA DEL FERROMAGNETE.

USANDO IL TH. DELLA CIRCUITAZIONE DI AMPÈRE,

$$\oint_r H \cdot d\ell = NI$$

$$\oint_r H \cdot d\ell = Hl + H_0 d$$

↑ ↑
SONO PARALLELI NEL VUOTO

SPESSEZZE DEL TRAFERRO

$$= Hl + \frac{B_0}{\mu_0} d$$

$$= Hl + \frac{B}{\mu_0} d$$

OTTENGO LA RETTA

$$B = \frac{\mu_0 NI}{d} - \frac{\mu_0 l}{d} H$$

SE LA RELAZIONE TRA B E H È LINEARE,

$$B = \mu_0 \mu_2 H$$

$$\mu_0 \mu_2 H = \frac{\mu_0 NI}{d} - \frac{\mu_0 l}{d} H \Rightarrow H^* = \frac{NI}{l + \mu_0 d} \quad B^* = \frac{\mu_0 \mu_2 NI}{l + \mu_0 d}$$

DETTO PUNTO DI LAVORO NEL CASO LINEARE.

SE LA RELAZIONE È PIÙ COMPLICATA (ISTERESI),

IL PROBLEMA VA RISOLTO GRAFICAMENTE.

SI NOTI CHE LA GRANDEZZA

$$\mu_0 d$$

CHE COMPARTE IN H^* , B^* È INTERPRETABILE COME LUNGHEZZA

EQUIVALENTE DEL TRAFERRO. SE QUEST'ULTIMO NON A FOSSE,

SPENGO LA CORRENTE E RIMANE UN CAMPO RESIDUA; ORA FACCIO IL

TAGLIO E B_2 CAMBIA PERCHÉ CONTINUI A VALERE IL TH. DELLA

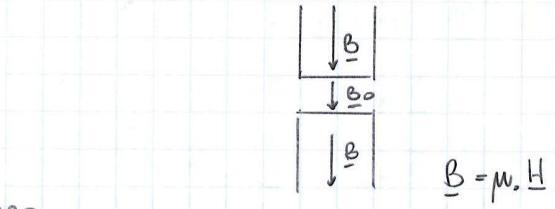
CIRCUITAZIONE. QUINDI RIMANE

$$B = -\frac{\mu_0 l}{d} H \quad (\text{HO IMPOSTO } \oint_r H \cdot d\ell = NI = 0)$$

OPPURE $I = 0$ NELLA RETTA.

E UN PUNTO DI LAVORO DIVERSO.

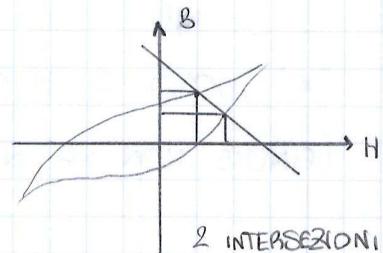
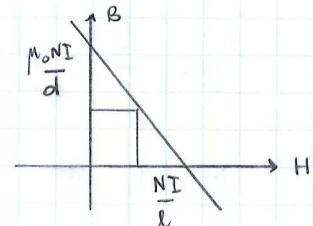
SI NOTI CHE ALL'INTERFAZIA H INVERTE DIREZIONE: DEVE VALERE



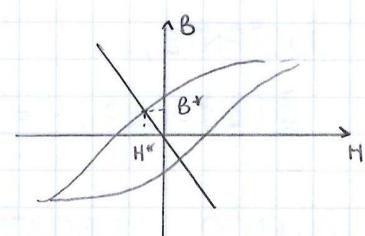
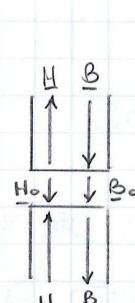
$$B = \mu_0 H$$

$$\text{INFATTI } E' \quad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$$

INFATTI $B_{1N} = B_{2N} \Rightarrow B_0 = B$
(TRASCURSO GLI EFFETTI DI BORDO)



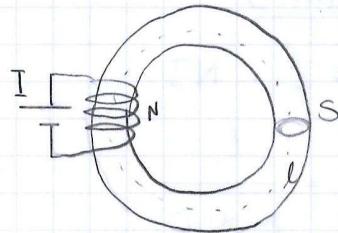
2 INTERSEZIONI



EQUIVALENZA TRA CIRCUITI ELETTRICI E MAGNETICI

$$\oint_B \underline{H} \cdot d\underline{l} = NI$$

$$B = \mu_0 \mu_r H^*$$



$$\oint_B \frac{\underline{B} \cdot d\underline{l}}{\mu_0 \mu_r} = \oint_B \frac{B d\underline{l}}{\mu_0 \mu_r}$$

$$\Phi(B) = \text{cost} = BS$$

$$= \oint_B \frac{\Phi d\underline{l}}{\mu_0 \mu_r S} = \Phi \oint_B \frac{d\underline{l}}{\mu_0 \mu_r S}$$

μ_r COST. E GRANDE, COSÌ CHE SI POSSA IPOTIZZARE NULLO IL FLUSSO DISPERSO.

* VERO PER MATERIALI A CYCLO STRETTO O ANDAMENTO LINEARE, SE NO DEVO CERCARE IL VALORE GIUSTO DI μ_r .

DEFINISCO RIUTTANZA

$$R_h := \oint \frac{d\underline{l}}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$[R_h] = \frac{[\text{CIRC. DI } H]}{[\Phi(B)]} = \frac{A}{W_b} = H^{-1} \text{ (HENRI)}$$

E FORZA MAGNETOMOTRICE

$$F = \oint_B \underline{H} \cdot d\underline{l}$$

ALLORA SOPRA LEGGO

$$F = R_h \Phi$$

LEGGE DI HOPKINSON

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{F/R_h}{S}$$

SI NOTI L'ANALOGIA CON LA LEGGE DI OHM

$$f = R I$$

$$F = R_h \Phi$$

$$f = \oint E \cdot d\underline{l}^*$$

$$F = \oint B \underline{H} \cdot d\underline{l}$$

$$I = \Phi(\underline{J}) = \text{cost.}$$

$$\Phi(\underline{B}) = \text{cost.}$$

$$\nabla \cdot \underline{J} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$R_h = \int \frac{d\underline{l}}{\sigma S}$$

$$R_h = \int \frac{d\underline{l}}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$\underline{J} = \sigma \underline{E} \quad (\sigma \text{ CONDUCIBILITÀ})$$

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

* SI NOTI CHE ERA $\underline{E} = \underline{E}_{el} + \underline{E}_{em}$, DI CUI IL CAMPO ELETTRICO CONSERVATIVO ($\oint \underline{E}_{el} \cdot d\underline{l} = 0$) PERATO' $f = \int_a^b \underline{E}_{em} \cdot d\underline{l}$ (CAMPO ELETTROMOTORE).

ESEMPIO

$$F = f = NI$$

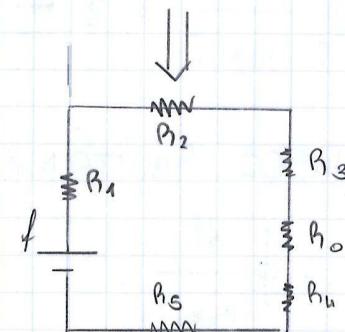
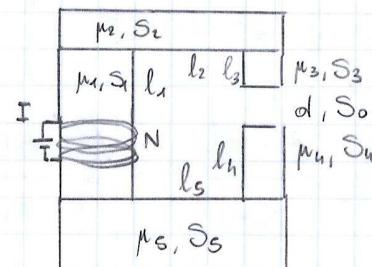
$$R_i = \frac{l_i}{\mu_0 \mu_i S_i}$$

$$I = \Phi$$

$$I = \frac{f}{R_{TOT}} = \frac{f}{\sum_i R_i}$$

$$\Phi = \frac{F}{R_{TOT}} = \frac{NI}{\sum_i R_i}$$

$$B_o = \frac{\Phi}{S_o} = \frac{NI}{(\sum_i R_i) S_o}$$



FOCUS: EFFETTO HALL

UN CONDUTTORE E' ATTRAVERSATO DA UNA CORRENTE I DI DENSITA'

$$J = mq v_d \quad \text{INDIPENDENTE DA CHI SONO I PORTATORI (PENSAI)}$$

SE IL CONDUTTORE E' IMMERSO IN \underline{B} , I PORTATORI SUBISCONO LA FORZA

$$F_L = q v_d B$$

L'ACCUMULO DI CARICHE DA WOGO AL CAMPO E_S ; ALL'EQUILIBRIO,

$$q E_S = q v_d B \Rightarrow E_S = v_d B$$

TRA LE DUE FACCE SI GENERA QUINDI UNA DDP

$$\Delta V_H = E_S b = v_d B b$$

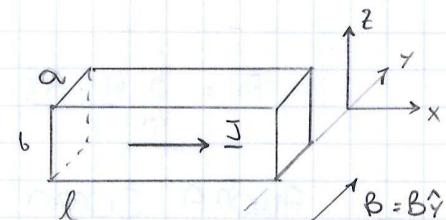
INOLTRE, POICHE' E'

$$I = J ab = mq v_d ab \Rightarrow v_d = \frac{I}{mqab}$$

$$\Delta V_H = \frac{1}{mq} \frac{IB}{a} = R_H \frac{IB}{a}$$

CON R_H COSTANTE DI HALL, IL SEGNO DI ΔV_H DIPENDE DA CHI

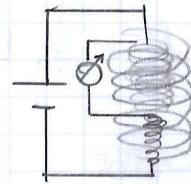
SONO I PORTATORI; VICEVERSA, MISURE ΔV_H PER CAPIRE CHI SONO I PORTATORI.



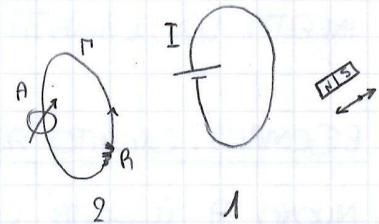
$$\frac{F_L}{q} = \frac{+}{-} \frac{E_S}{I E_S}$$

CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO

ESPERIMENTO DI FARADAY: DUE SOLENOIDI UNO DENTRO L'ALTRÒ. NON MISURAVANO CORRENTE IN QUELLO ESTERNO SE NON MENTRE ACCENDeva O SPENGEva QUELLO INTERNO.



USA ALLORA DUE CIRCUITI; MISURA CORRENTI IN 2 SE LO MUOVE NELLO SPAZIO, LO DEFORMA, O VARIA LA CORRENTE IN 1. SUCCIDE LO STESSO SE LA FONTE DI \underline{B} È UN MAGNETE.



CIO' CHE ACCOMUNA I VARI CASI E'

$$\Delta \Phi_s(\underline{B})$$

DATI

$$f_i = \oint_r E_i \cdot d\underline{l} \quad \text{FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA}$$

$$\Phi = \int_S \underline{B} \cdot \hat{n} dS \quad \text{FLUSSO CONCATENATO ALLA LINEA } r$$

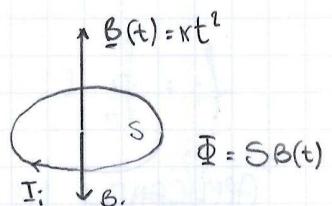
SI HA LA LEGGE DI FARADAY - NEUMANN

$$f_i = - \frac{d\Phi(\underline{B})}{dt}$$

E' INDOTTA QUINDI UNA CORRENTE

$$I_i = \frac{f_i}{R}$$

E QUINDI UN CAMPO \underline{B}_i OPPOSTO A \underline{B} CHE L'HA GENERATO.



ESPRIMIAMO

$$f_i = \oint_r E_i \cdot d\underline{l} = \oint_r \underline{E} \cdot d\underline{l} = \oint_r (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\underline{l}$$

$$= \oint_r \underline{E} \cdot d\underline{l} + \oint_r (\underline{v}_d \times \underline{B}) \cdot d\underline{l} + \oint_r (\underline{v}_t \times \underline{B}) \cdot d\underline{l}$$

$$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$$

VELOCITÀ DI DERIVAZIONE VELOCITÀ DI TRASINAMENTO
 $\underline{v}_d \parallel d\underline{l} \Rightarrow (\underline{v}_d \times \underline{B}) \perp d\underline{l}$

OSSERVO UNA FORZA SUI PORTATORI DI CARICA; LA PENSO DOVUTA A UN QUALCHE \underline{B} o \underline{E} (NON NECESSARIAMENTE CONSERVATIVO).

DA QUI

$$\oint_i \underline{E}_i \cdot d\underline{l} = \oint_r (\underline{E} + \nabla \times \underline{B}) \cdot d\underline{l}$$

INOLTRE

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \underline{B} \cdot \hat{\underline{n}} dS = \int_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot \hat{\underline{n}} dS$$

Solo se S è ferma

INFATTI LA DERIVATA TOTALE DEVE TENER CONTO DELLE VARIAZIONI DI $S(t)$.

• ESEMPIO: CIRCUITO AD AREA VARIABILE

MUOVO A VELOCITÀ COSTANTE LA SBARRETTA

AB IN MODO DA VARIARE L'AREA DEL CIRCUITO

IMMERSO IN $\underline{B} = \text{cost.}$

E_L SPINGE IN ALTO LE CARICHE NEGATIVE FINO
A QUANDO IL CAMPO È CHE SI GENERA LO
CONTROBILANCIO. SI È STABILITA UNA ΔV CHE
SI TRADUCE IN UNA CORRENTE SE CHIUDO IL
CIRCUITO.

IL CAMPO ELETROMOTORIO È PROPRIO QUESTO CAMPO È INDOTTO:

$$\oint_i \underline{E}_i \cdot d\underline{l} = \oint_r (\underline{r} \times \underline{B}) \cdot d\underline{l} = -vBl$$

APPLICANDO LA LEGGE DI FARADAY- NEUMANN,

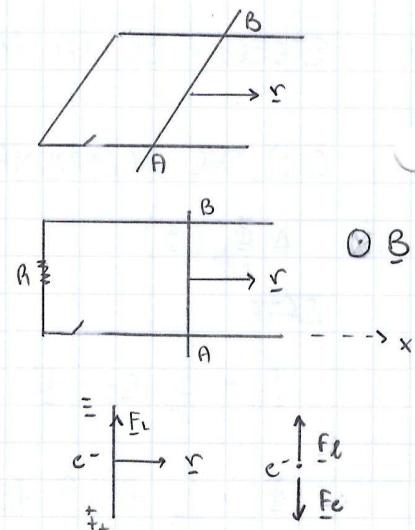
$$\oint_i \underline{E}_i \cdot d\underline{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{dBS(t)}{dt} = -B \frac{d}{dt} (l \cdot r) = -Blr$$

SI NOTI CHE

$$\oint_r (\underline{r} \times \underline{B}) \cdot d\underline{l} \neq 0$$

MA LA FORZA DI LORENTZ NON PUÒ FARE L'ANNO; CIOÈ SI SPIEGA CON IL FATTO CHE, SE NON SPINGO LA SBARRETTA, QUELLA SI FERMA PERCHE' SUBISCE LA FORZA

$$df = I \underline{dl} \times \underline{B}$$



CHE SI OPPONE A Σ ($\Sigma \neq \Sigma_d$, E' QUELLA DOLUTA ALLA MIA SPINTA).

LA POTENZA CHE DEVO FORNIRE E' QUELLA DISSIPATA DALLA RESISTENZA DEL CIRCUITO.

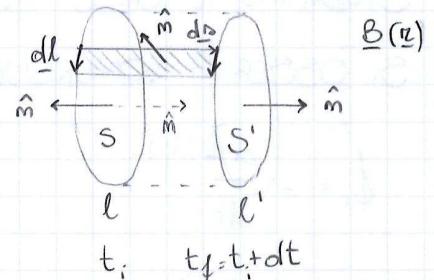
SE NE DEDUCE CHE IL CAMPO ELETTROMOTORE INDOTTO NON E' CONSERVATIVO.

INTERPRETAZIONE FISICA DELL'INDUZIONE

TRASANIAMO UN CIRCUITO NELLO SPAZIO CON VELOCITA' Σ IN UN CAMPO B STAZIONARIO.

L'ELEMENTO GENERICO $d\ell$ SPAZZA

$$d^2S = d\ell \wedge d\sigma = d\ell \wedge \Sigma dt$$



CIRCUITO RIGIDO, B STAZIONARIO

$$\Phi_i = \Phi_s \quad \Phi_f = \Phi_{s'} \quad \Phi_{s+s'+ds} = 0 = -\Phi_i + \Phi_f + \Phi_{ds}$$

IL FLUSSO CONCATENATO AL CIRCUITO VARIA DI

$$d\Phi = \Phi_f - \Phi_i = -\Phi_{ds}$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{ds} B \cdot d^2S = - \oint_L B \cdot (d\ell \wedge \Sigma dt) \\ &= - dt \oint_L B \cdot d\ell \wedge \Sigma = - dt \oint_L (\Sigma \wedge B) \cdot d\ell \end{aligned}$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L (\Sigma \wedge B) \cdot d\ell$$

$$f_i = \oint_L E_i \cdot d\ell$$

FLUSSO TAGLIATO
DAL CIRCUITO

ABBIAMO RICAVATO, PER IL CAMPO ELETTROMOTORE INDOTTO,

$$E_i = \Sigma \wedge B$$

(CASO DI PURO FLUSSO TAGLIATO,
CIOÈ CON B COSTANTE NEL TEMPO)

SE B E' UNIFORME E IL MOTO E' TRASLATORIO ($\Sigma = \text{cost.}$),

$$\int_A^B (\Sigma \wedge B) \cdot d\ell + \int_B^A (\Sigma \wedge B) \cdot d\ell = 0 \quad (= (\Sigma \wedge B) \oint d\ell)$$

FALSO NEL CASO GENERALE.



SI NOTI CHE, ANCORA, $(\nabla \times \underline{B})$ PER DEFINIZIONE NON PUO' FARE LAVORO: E' SOLTANTO UN TRAMITE ATTRAVERSO CUI SI TRASMETTE LA FORZA CON CUI MUOVO IL CIRCUITO.

SI INTERPRETA ALLO STESSO MODO IL CASO IN CUI A MUOVERSI SONO LE SORGENTI DEL CAMPO (CON CONSIDERAZIONI RELATIVISTICHE).

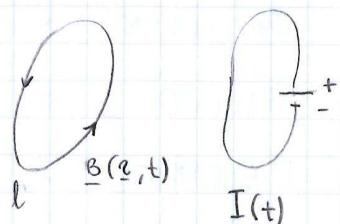
STUDIAMO IL CASO IN CUI ENTRAMBI SONO FERMI E $\underline{B} = \underline{B}(z, t)$.

SI OSSERVA COMUNQUE

$$f_i = - \frac{d\Phi(\underline{B})}{dt}$$

CHE NON PUO' ESSERE DONATA ALLA FORZA DI LORENTZ (NESSUNO SI MUOVE, NON CI SONO VELOCITA' RELATIVE NE ASSOLUTE). *

$$f_i = \oint_l \underline{E} \cdot d\underline{l} = \oint_l \underline{E} \cdot d\underline{l} = \int_s (\nabla \times \underline{E}) \cdot d\underline{s}$$



S SUPERFICIE QUALSIASI CONCATENATA A l

$$- \frac{d}{dt} \int_s \underline{B} \cdot d\underline{s} = \int_s - \frac{\partial \underline{B}(z, t)}{\partial t} \cdot d\underline{s}$$

LA III EQUAZIONE DI MAXWELL SI MODIFICA COME

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

NEL CASO GENERALE E' NON E' CONSERVATIVO.

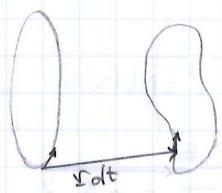
$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{E} = P_{E_0}, \\ \nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \end{cases}$$

OLTRÉ ALLE CARICHE P SORGENTI DI UN CAMPO CONSERVATIVO, SI HANNO DELLE NUOVE SORGENTI DI UN CAMPO N.C. (LA VARIAZIONE DI \underline{B}).

* MI ASPIETTO COMUNQUE UNA f_i , PERCHE' IL CIRCUITO NON SA CHE A GENERARE LA VARIAZIONE DI \underline{B} NON E' STATO IL MOTO DELLE SORGENTI.

CIRCUITO NON RIGIDO IN MOTO IN \underline{B} UNIFORME E NON COSTANTE

$$\oint_l \underline{E}_i \cdot d\underline{l} = - \frac{d}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \underline{B}(t+dt) \cdot d\underline{s} - \int_{S(t)} \underline{B}(t) \cdot d\underline{s} \right]$$



$\underline{B}(t)$

Sviluppando in serie

$$\underline{B}(t+dt) = \underline{B}(t) + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} dt$$

Si ha

$$\oint_l \underline{E}_i \cdot d\underline{l} = - \frac{d}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \underline{B}(t) \cdot d\underline{s} - \int_{S(t)} \underline{B}(t) \cdot d\underline{s} \right] - \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s}$$

$\overbrace{d\underline{E} = -(\text{FLUSSO TAGLIATO PURO})}$

$$= \oint_l (\underline{r} \wedge \underline{B}) \cdot d\underline{l} - \int_{S(t)} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s}$$

$t+dt \text{ con } dt \rightarrow 0$

NEL SISTEMA (Sh) VEDO

$$\underline{E} = q \left(\underline{E} + \underline{r} \wedge \underline{B} \right) \quad \Rightarrow \quad \underline{E}_i - \underline{r} \wedge \underline{B} = \underline{E}$$

$q \underline{E}_i$

DA CUI

$$\oint_l \underline{E}_i \cdot d\underline{l} = - \int_{S(t)} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s}$$

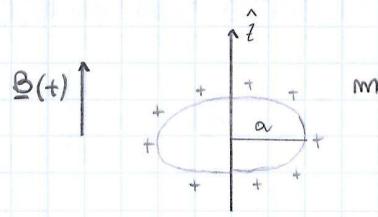
$$\left(\oint_l (\underline{E}_i - \underline{r} \wedge \underline{B}) \cdot d\underline{l} = - \int_{S(t)} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s} \right)$$

E OTTENGO COME PRIMA LA III EQUAZIONE DI MAXWELL NEL CASO NON STAZIONARIO.

ESEMPIO

$$B(t) = \kappa t$$

CALCOLIAMO L'ENERGIA CINETICA $K(t)$.

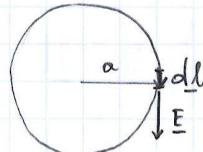


$$\nabla \cdot E = - \frac{\partial B}{\partial t} = -\kappa \hat{z} \quad (\text{CONFRONTA CON } \nabla \cdot B = \mu_0 J = \mu_0 J \hat{z})$$

LE LINEE DI FORZA DI E SONO, PER ANALOGIA, CIRCONFERENZE PERCORSE IN SENSO ORARIO.

$$dF = d\varphi E = N_E dl$$

$$dM = \alpha \cdot dF = \alpha N_E dl$$



$$\int_S (\nabla \cdot E) \cdot dS = -\kappa \int_S \hat{z} \cdot dS = -\kappa \pi a^2$$

$$\oint_L E \cdot dl = E(a) 2\pi a \Rightarrow E(a) = -\frac{\alpha \kappa}{2}$$

$$M = \oint L \cdot dM = \oint \frac{\alpha N \kappa a}{2} dl = -\frac{\alpha^2 \kappa}{2} 2\pi a = -\pi \kappa N a^3$$

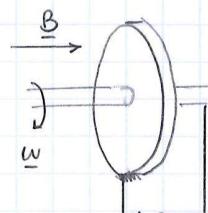
$$M = I \dot{\omega} = \alpha^2 m \frac{dw}{dt} = -\frac{N \kappa \pi a^3}{m}$$

$$(w(t) = w(0) - \frac{N \kappa \pi}{m} t)$$

$$K(t) = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 m \kappa t^2$$

ESEMPIO: DISCO DI BARLOW

IL FLUSSO DI B NON VARIA: MI ASPETTO $\oint_B = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$.



INVECE MISURÒ UNA ΔV : NON VALE LA REGOLA DEL FLUSSO.

$$v(r) = \omega r$$

$$E_L = q \nabla \cdot B = qr B \hat{i} = q \omega r B \hat{i}$$

$$\oint_L E \cdot dl = \int_0^R qr B dr = \frac{1}{2} \omega B R^2 \neq 0$$



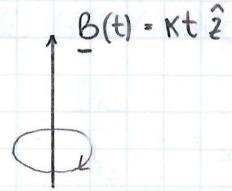
$$dS = \frac{R R dr}{2}$$

$$d\Phi = B dS \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{B}{2} \frac{dr}{dt}$$

ESEMPIO : ACCELERATORE

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad (P=0)$$

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

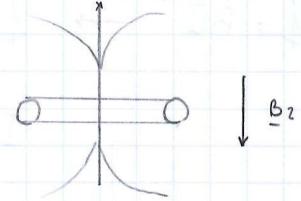


PERO' HO LINEE DI FLUSSO CIRCOLARI. SE METTO UN TORO ATTORNO ALL' "ASSE", AL SUO INTERNO UNA CARICA RISENTE DI

$$E 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow E = \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$qE = F = \frac{dP(t)}{dt}$$

$$q \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow P(t) = \frac{qr}{2} \langle B(t) \rangle$$



E POSSO ACCELERARE PARTICELLE. ORA HO SOLO IL PROBLEMA DI CONFINARNE L'ORBITA:

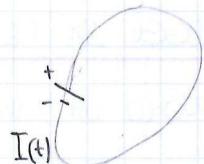
$$\frac{P_r}{r} = \frac{mv^2}{r} = m\alpha_c = qvB_2 \quad B_2 = \frac{P}{qv}$$

AUTOINDUZIONE

CIRCUITO PERCORSO DA $I(t)$ QUASI-STAZIONARIA.

ESSO GENERA

$$\underline{B}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L I(t) \frac{dl' \wedge \Delta r}{\Delta r^3}$$



IL FLUSSO SUL CIRCUITO STESSO VALE (SE I E' LA STESSA IN TUTTI I PUNTI!)

$$\Phi(B) = I(t) \int_S \left(\oint_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl' \wedge \Delta r}{\Delta r^3} \right) \cdot d\underline{S} = L I(t)$$

CON L COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE (O INDUTTANZA), CHE DIPENDE SOLO DALLA GEOMETRIA DEL CIRCUITO.

$$[L] = \frac{[\Phi(B)]}{[I]} = \frac{Wb}{A} = \frac{V \cdot S}{A} = \Omega \cdot S = H \quad (\text{HENRY})$$

A SUA VOLTA QUESTO FLUSSO DÀ ORIGINE A

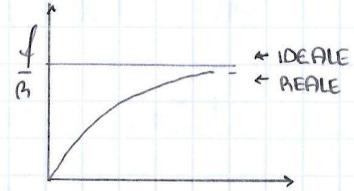
$$f_a = - \frac{d\Phi}{dt} = - L \frac{dI}{dt}$$

TUTTE LE LEGGI IN UN CIRCUITO IDEALE VANNO MODIFICATE PER TENERE CONTO DELL' AUTOINDUZIONE.

$$f = RI \rightarrow f + f_a = RI \quad f - L \frac{dI}{dt} = RI$$

$$I(t) = I_{\infty} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$



ESEMPIO : INDUTTANZA DI UN SOLENOIDE

$$B = \mu_0 m I$$

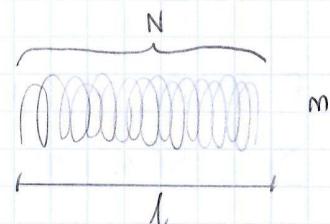
$$\Phi(B) = N \mu_0 m S$$

$$L = \frac{\Phi(B)}{I} = N \mu_0 m S = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

1. TRORO B

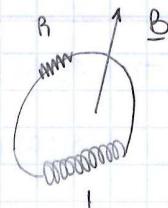
2. CALCOLO IL FLUSSO AUTOINDOTTO

3. RICARO L



LEGGE DI FELICI

MUOVO UN CIRCUITO NELLO SPAZIO (B IN GENERALE VARIABILE), PARTENDO E TORNANDO FERMO.



$$f_i + f_a = RI$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} - L \frac{dI}{dt} = RI$$

$$-\int_{\Phi_i}^{\Phi_f} d\Phi = \int_{t_1}^{t_2} RI dt + \int_{I_1}^{I_f} L dI$$

$$\Phi_f - \Phi_i = R \Delta Q + L \Delta I$$

IL SECONDO TERMINE E' NULLO SE L E' TRASCRIBBIBILE O SE B E' COSTANTE NEL TEMPO, COSÌ CHE SE AL TEMPO t_1, t_2 SONO FERMO NON C'E' CORRENTE INDOTTA. ALLORA

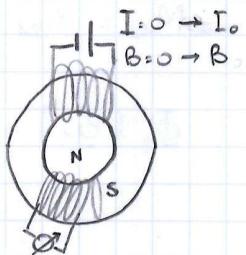
$$Q = \frac{\Phi_f - \Phi_i}{R}$$

LEGGE DI FELICI

POSSO MISURARE Q CON UN GALVANOMETRO BALISTICO.

$$\Phi_i = 0 \quad \Phi = BNS \quad Q = \frac{-BNS}{R} \Rightarrow B = \frac{RQ}{NS}$$

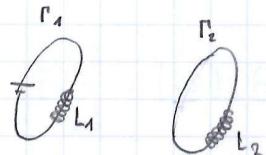
E' QUINDI UN MODO PER MISURARE B IN UN MATERIALIE.



MUTUA INDUZIONE

SUL PRIMO CIRCUITO SCORRE I_1 : SI GENERA

$$B_1 \propto I_1$$



POSSO CONSIDERARE IL FLUSSO DI B_1 SUL SECONDO CIRCUITO:

$$\Phi_2(B_1) = M_{21} I_1$$

COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE

SE METTO UNA CORRENTE I_2 SU L_2 ,

$$I_2 \rightarrow B_2 \propto I_2$$

$$\Phi_1(B_2) = M_{12} I_2$$

$$f_{1m} = - \frac{d\Phi_1(B_2)}{dt} = - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

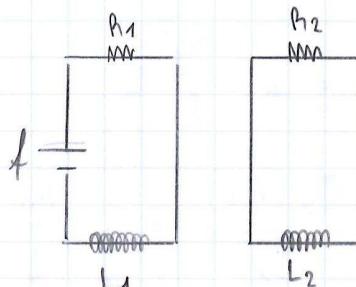
$$f_{2m} = - \frac{d\Phi_2(B_1)}{dt} = - M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

SI PUO' DEMOSTRARE CHE

$$M_{12} = M_{21} \equiv M$$

ESEMPIO

$$\left\{ \begin{array}{l} f - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = R_1 I_1 \\ 0 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = R_2 I_2 \end{array} \right.$$



DIMOSTRIAMO CHE

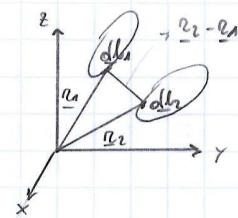
$$M_{12} = M_{21} \equiv M$$

$$\Phi_2(\underline{B}_1) = \int_{S_2} \underline{B}_1 \cdot d\underline{S}_2 = \int_{S_2} (\nabla \wedge \underline{A}_1) \cdot d\underline{S}_2$$

$$= \oint_{l_2} \underline{A}_1(\underline{r}_2) \cdot d\underline{l}_2$$

$$A_1(\underline{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1 d\underline{l}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|}$$

$$\Phi_2(\underline{B}_1) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\underline{l}_1 \cdot d\underline{l}_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|} = M_{21} I_1$$



SIMMETRICA PER SCAMBIO DI INDICI.

SI NOTA ANCHE CHE M DIPENDE DALLA GEOMETRIA RELATIVA DEI DUE CIRCUITI E DALLA LORO FORMA.

COME CALCOLO M?

$$M = \frac{\Phi_2(\underline{B}_1)}{I_1} = \frac{\Phi_1(\underline{B}_2)}{I_2}$$

ESEMPIO

DUE SOLENOIDI ANNOLTI L'UNO CON L'ALTRO.

$$N_1, N_2, l \quad \sqrt{S} \ll l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S \\ L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} S \end{array} \right. \quad B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$$

$$M = \frac{\Phi_2(\underline{B}_1)}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1}{l} \frac{I_1 S N_2}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} = \sqrt{L_1 L_2}$$

SE RIEMPIO IL TUTTO CON UN MATERIALE (μ_r),

$$B' = \mu_r B \quad L' = \mu_r L \quad M' = \mu_r M$$

ESEMPIO

FILO INFINITO E SOLENOIDE TOROIDALE

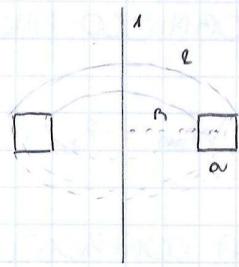
A SEZIONE QUADRATA.

QUI E' QUASI NECESSARIO USARE

$$M = \frac{\Phi_2(B_1)}{I_1}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} a_y \quad \Phi_2(B_1) = \int_{R}^{R+a} B_1 \cdot dS_2 = \int_{R}^{R+a} B_1 a dr = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

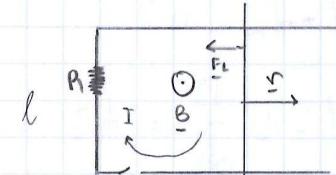
$$M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right)$$



CONSIDERAZIONI ENERGETICHE

SI E' VISTO CHE, SE LA BARRA SI MUOVE CON r ,

$$f_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (Blr) = - Blr$$



FINCHE' L'INTERRUTTORE E' APERTO, LA BARRA SI MUOVE SENZA INTERVENTO ESTERNO; SI GENERA AI SUOI CAPI LA ddP f_i.

SE CHIUDO IL CIRCUITO,

$$I_i = \frac{f_i}{R} = - \frac{Blr}{R}$$

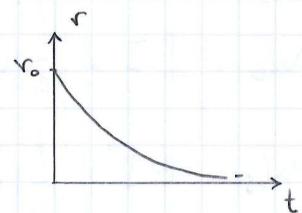
POICHÉ' LA RESISTENZA DISSIPÀ ENERGIA, MI ASPETTO CHE LA BARRA SI FERMI. IN EFFETTI, ESSA SUBISCE

$$dF_L = I_i dl \times B$$

$$F_L = I_i l B = - \frac{B^2 l^2}{R} r := - \beta r$$

COME UN ATTRITO VISCOSO:

$$m \frac{dr}{dt} = - \beta r \Rightarrow r(t) = r_0 e^{-\frac{\beta}{m} t}$$



PER MANTENERE IN MOTO LA BARRA, DEVO APPLICARE UNA FORZA OPPOSTA A F_L.

FORNISCO ALLORA AL SISTEMA LA POTENZA MECCANICA

$$W_m = -F_L v = +\beta v^2 = + \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

DA CONFRONTARSI CON QUELLA DISSIPATA PER EFFETTO SOULE

$$W_j = R I^2 = R \frac{B^2 l^2 v^2}{R^2}$$

SE NON APPLICO ALCUNA FORZA, LA RESISTENZA DISSIPA IN TOTALE

$$U_j = \int_0^\infty W_j dt = \frac{B^2 l^2}{R} \int_0^\infty v_0^2 e^{-2\frac{\beta}{m}t} dt = \frac{1}{2} m v_0^2$$

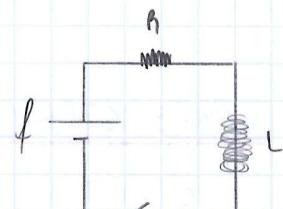
ANALISI ENERGETICA DI UN CIRCUITO RL

$$\dot{f} + f_a = R I$$

$$\dot{f} - L \frac{dI}{dt} = R I \Rightarrow I(t) = \frac{f}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

CONSIDERO INNECE



$$\dot{f} = R I + L \frac{dI}{dt}$$

E MOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI PER $dq = I dt$:

$$\dot{f} dq = R I^2 dt + L I dI$$

$$W_G dt = W_j dt + W_L dt$$

ENERGIA PER "CARICARE" L'INDUTTORE (EN. DEL CAMPO B)

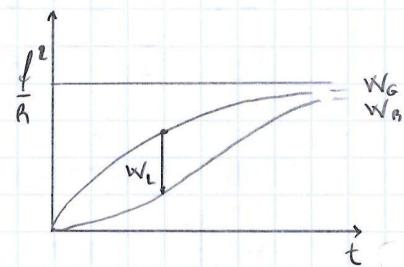
$$W_L = \int_0^I L I dI = \frac{1}{2} L I^2$$

OSSENDO

$$W_G = \dot{f} I = \frac{f}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$W_j = R I^2 = \frac{f^2}{R} \left(1 + e^{-\frac{2t}{\tau}} - 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$W_L = L I \frac{dI}{dt} = L \frac{f}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \left[-\frac{f}{R} \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = \frac{f^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = W_G - W_j$$

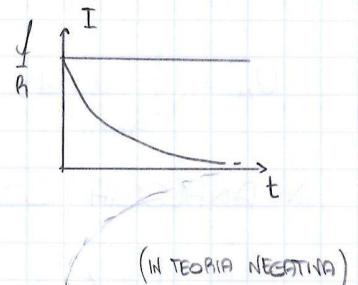


SE ORA ELIMINO DAL CIRCUITO IL GENERATORE,

$$f_a = RI \quad -L \frac{dI}{dt} = RI$$

$$I(t) = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{L}}$$

$$U_J = \int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty R \frac{f^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{L}} dt = \frac{1}{2} L I^2$$



ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO IN FIGURA. NEL SOLENOIDE,

$$\underline{B} = \mu_0 m I \hat{x} = \mu_0 \frac{N}{l} I \hat{x}$$

DALLA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN,

$$\underbrace{f - L \frac{dI}{dt}}_{\text{"}} = RI \rightarrow f = RI + \frac{d\Phi}{dt} = RI + \frac{d}{dt}(BNS) = RI + NS \frac{dB}{dt}$$

$\frac{d\Phi(B)}{dt}$ L'UNICO Φ E' QUELLO DI B DEL SOLENOIDE
PERCIO' LA LEGGE DI F-N MI DA' FA AUTOINDOTTA.

MOLTIPLICANDO I DUE MEMBRI PER $dq = I dt$,

$$f dq = RI^2 dt + NSI dB$$

$$dU_G = dU_J + dU_L$$

$$dU_L = NSI dB = \frac{B dB}{\mu_0} l S$$

$$(B = \mu_0 m I = \mu_0 \frac{N}{l} I)$$

DEFINISCO DENSITA' DI ENERGIA ASSOCIATA AL CAMPO MAGNETICO

$$dU_L = \frac{dU_L}{lS} = \frac{B dB}{\mu_0} = H dB$$

INTEGRATA NON DA' HB,
PERCHE' E' H(B) dB

$$u_L = \int_0^B dU_L = \int_0^B \frac{B dB}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH$$

$$U_M = \int_{B=H=0} u_L dI = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} l S$$

DIMOSTREREMO CHE IN GENERALE

$$U_M = \int_{B,H=0} u_M d\tau \quad u_M = \frac{1}{2} \underline{B} \cdot \underline{H}$$

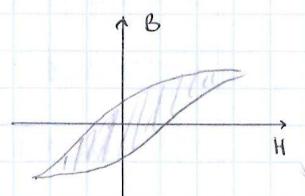
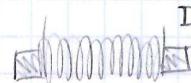
IN ANALOGA CON L'ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO

$$U_E = \int \left(\frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D} \right) d\tau$$

• ESEMPIO: CICLO DI ISTERESI

VARIANDO LA CORRENTE, IL FERROMAGNETE NEL SOLENOIDE SEGUE UN CICLO DI ISTERESI.

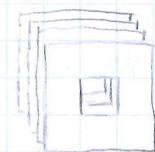
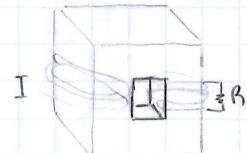
L'AREA RACCHIUSA DAL CICLO È NIENT' ALTRO CHE L'ENERGIA ($\int H d\phi B$) CHE DEVO UTILIZZARE PER FAR COMPIERE IL CICLO AL MATERIALE (ENERGIA CHE VIENE DISSIPATA NEL PROCESSO).



• ESEMPIO: TRASFORMATORE

UN TRASFORMATORE È DI FATTO UN CIRCUITO MAGNETICO; PER EVITARE CHE SI SURRISCALDI MI SERVE UN MATERIALE A CICLO STRETTO.

IL SECONDO PROBLEMA SONO LE CORRENTI DI FOCault CHE PERCORREBBERO IL CIRCUITO; PER EVITARLO METTO STRATI DI FERROMAGNETE SEPARATI DA FOGLI ISOLANTI. (INFATTI SE B È VARIABILE ANCHE I CORRENTI INDOTTI, CHE DISSIPANO).



• ENERGIA MAGNETICA E AZIONI MECCANICHE

UN FERROMAGNETE È RIACCIAZZATO NEL SOLENOIDE.

$$U_M^i = \frac{1}{2} L_0 I^2 \quad L_0 = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

$$U_M^f = \frac{1}{2} L I^2 \quad L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} S$$



PERCHE' U_M E' AUMENTATA? IL GENERATORE HA FORNITO ENERGIA:

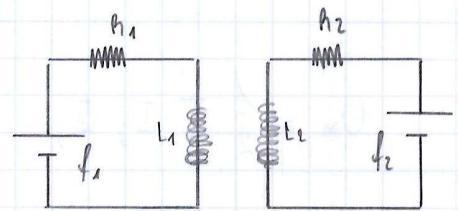
$$dU = dU_M + dU_G = - dU_M$$

$$E = - \nabla U = + \nabla U_M \Big|_{I=\text{cost.}}$$

IN ANALOGIA AL CASO DEL CAMPO ELETTRICO, COME DIMOSTREREMO.

ENERGIA MAGNETICA DI CIRCUITI ACCOPPIATI

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = R_1 I_1 \\ f_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = R_2 I_2 \end{array} \right.$$



$$(f_1 I_1 + f_2 I_2) dt = (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) dt \quad dU_j = W_j dt$$

$$\begin{aligned} dU_G = W_G dt &= + L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 \\ &\quad + M_{12} I_1 dI_2 + M_{21} I_2 dI_1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} dU_M$$

$$dU_M = d \left[\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \right]$$

$$U_M = \int_0^{I_1, I_2} dU_M = \underbrace{\frac{1}{2} L_1 I_1^2}_{M_{11}} + \underbrace{\frac{1}{2} L_2 I_2^2}_{M_{22}} + \underbrace{\frac{1}{2} M_{12} I_2 I_1 + \frac{1}{2} M_{21} I_1 I_2}_{\text{ENERGIA MAGNETICA DI INTERAZIONE}}$$

IN GENERALE, PER PIU' SISTEMI ACCOPPIATI,

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j$$

MA

$$\underbrace{M_{12} I_2 I_1}_{\Phi_1(B_2)} = \Phi_1(B_2) I_1 = \Phi_2(B_1) I_2$$

$$\underbrace{M_{11} I_1 I_1}_{\Phi_1(B_1)} = \Phi_1(B_1) I_1$$

POSSO RISCRIVERE

$$U_M = \frac{1}{2} I_1 [M_{11} I_1 + M_{12} I_2] + \frac{1}{2} I_2 [M_{22} I_2 + M_{21} I_1]$$

$$= \frac{1}{2} I_1 [\underbrace{\Phi_1(B_1) + \Phi_1(B_2)}_{\Phi_1}] + \frac{1}{2} I_2 [\Phi_2(B_2) + \Phi_2(B_1)]$$

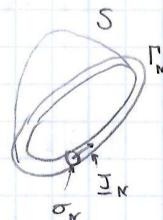
$$U_M = \frac{1}{2} \sum_j I_j \Phi_j$$

DA CONFRONTARSI CON $U_E = \frac{1}{2} \sum_k q_k V_k$.

ESPRESSIONE LOCALE DELL'ENERGIA MAGNETICA

OSSERVIAMO IL K-ESIMO CIRCUITO, SU CUI SCORRE

$$I_K = \int_{\sigma_K} \underline{J}_K \cdot d\underline{\sigma}_K$$



$$\underline{J}_K \parallel d\underline{\sigma}_K \parallel d\underline{l}_K$$

USANDO QUESTA SIMBOLOGIA,

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_K \left[\int_{\sigma_K} \underline{J}_K \cdot d\underline{\sigma}_K \int_{S_K} \underline{B} \cdot d\underline{S}_K \right]$$

S_K SUPERFICIE CHE SI APPOGGIA A Γ_K .

$$= \frac{1}{2} \sum_K \left[\int_{\sigma_K} \underline{J}_K d\underline{\sigma}_K \oint_{l_K} \underline{A} \cdot d\underline{l}_K \right]$$

$$\underline{B} = \nabla \wedge \underline{A}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_K \int_{\sigma_K} \oint_{l_K} (\underline{J}_K \cdot \underline{A}) d\underline{\sigma}_K d\underline{l}_K$$

$$= \frac{1}{2} \sum_K \int_{l_K} \underline{J}_K \cdot \underline{A} d\underline{l}_K$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\underline{J} \cdot \underline{A}) d\underline{l}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\nabla \wedge \underline{H}) \cdot \underline{A} d\underline{l}$$

Γ CONTIENE TUTTI I CIRCUITI.
 \underline{J} VALE \underline{J}_K SUL CIRCUITO Γ_K , VALE ZERO DOVE NON HO CIRCUITI.

$$\nabla \wedge \underline{H} = \underline{J}$$

DA QUI $u_m = \frac{1}{2} \underline{J} \cdot \underline{A}$ (RELAZIONE LOCALE, ESSENDO $\underline{J} \in \underline{A}$

CALCOLATI NELLO STESSO PUNTO DELLO SPAZIO).

OSSERVO CHE

$$\nabla \cdot (\underline{H} \wedge \underline{A}) = (\nabla \wedge \underline{H}) \cdot \underline{A} - \underline{H} \cdot (\nabla \wedge \underline{A})$$

PERCIAO'

NEL CASO NON STATICO E'
 $\underline{u}_m = \underline{A} \cdot (\underline{J} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t})$, PERCIAO'
 CONTINUA A VALERE
 $\underline{u}_m = \underline{A} \cdot \nabla \wedge \underline{H}$.

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla \wedge \underline{H}) \cdot \underline{A}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\tau} \nabla \cdot (\underline{H} \wedge \underline{A}) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \underline{H} \cdot \underline{B} d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S=\partial\tau} (\underline{H} \wedge \underline{A}) \cdot d\underline{S} + \frac{1}{2} \int_{\text{TUTTO}} \underline{H} \cdot \underline{B} d\tau$$

SI ANNULLA AL LIMITE PER R → ∞*

E POSSO SCRIVERE

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} u_m d\tau \quad \text{CON} \quad u_m = \frac{1}{2} \underline{H} \cdot \underline{B}$$

* INFATTI VANNO A ZERO SIA
 \underline{A} CHE \underline{H} (SOLO NEL CASO
 STAZIONARIO!)

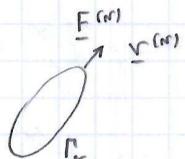
FORZE SUI CIRCUITI (I MANTENUTA COSTANTE)

MUOVO NELLO SPAZIO IL CIRCUITO n -ESIMO APPLICANDO $\underline{F}^{(n)}$.

$$\frac{dL_{F_{\text{est}}}}{dt} + \frac{dL_g}{dt} = \frac{dL_j}{dt} + \frac{dU_m}{dt} + \frac{dK}{dt}$$

"o, Q.S.

$$\frac{dL_{F_{\text{est}}}}{dt} = \underline{F}^{(n)} \cdot \underline{v}^{(n)}$$



$$\frac{dL_g}{dt} = \sum_j f_j I_j$$

MUOVENDO IL CIRCUITO CAMBIA Φ_B
 PERCIAO' G DEVE PRODURRE UNA FORZA
 CHE SI OPPONGA A $f_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

$$\frac{dL_j}{dt} = + \sum_j R_j I_j^2$$

$$\frac{dU_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_j I_j \Phi_j \right] = \frac{1}{2} \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt}$$

SE IL TUTTO AVVIENE
 A I COSTANTI NEI
 VARI CIRCUITI,

PERCIAO'

$$\underline{F}^{(n)} \cdot \underline{v}^{(n)} = - \sum_j f_j I_j + \sum_j R_j I_j^2 + \frac{1}{2} \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt}$$

INFINE PER IL GENERICO CIRCUITO

$$\oint_j = R_j I_j + \frac{d\Phi_j}{dt}$$

CONTRIBUTO DEI GENERATORI DI $\Phi_{j,n}$, PARI IN
MODULO AL DOPPIO DELL' ENERGIA MAGNETICA MA
DI SEGNO OPPOSTO (COME PER U_E ELETROSTATICA)

DA QUI

$$\begin{aligned} \underline{F}^{(n)} \cdot \underline{v}^{(n)} &= - \sum_j R_j I_j^2 - \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt} + \sum_j R_j I_j^2 + \frac{1}{2} \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt} \\ &= - \frac{1}{2} \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt} = - \frac{dU_M}{dt} \end{aligned}$$

LA MIA FORZA E' UGUALE E OPPosta A $\underline{\oint}_M^{(n)}$ DEL CAMPO:

$$\underline{\oint}_M^{(n)} \cdot \underline{v}^{(n)} = - \underline{F}^{(n)} \cdot \underline{v}^{(n)} = - \frac{dU_M}{dt}$$

$$\oint_x^{(n)} v_x^{(n)} + \oint_y^{(n)} v_y^{(n)} + \oint_z^{(n)} v_z^{(n)} = \frac{\partial U_M}{\partial x^{(n)}} \frac{\partial x^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial U_M}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial U_M}{\partial z^{(n)}} \frac{\partial z^{(n)}}{\partial t}$$

CHE IMPUCA

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_x^{(n)} = + \frac{\partial U_M}{\partial x^{(n)}} \\ \oint_y^{(n)} = + \frac{\partial U_M}{\partial y^{(n)}} \\ \oint_z^{(n)} = + \frac{\partial U_M}{\partial z^{(n)}} \end{array} \right. \Rightarrow \quad \underline{\oint}_M^{(n)} = + \nabla U_M \Big|_{I=\text{cost.}}$$

SI NOTI CHE

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_j I_j \Phi_j = \frac{1}{2} \sum_j M_{jj} I_j I_j$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \dots}_{\text{AUTOENERGIA}} + \underbrace{M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \dots}_{\text{ENERGIA DI INTERAZIONE}}$$

L'AUTOENERGIA NON CAMBIA SE MUOVO IL CIRCUITO (LA SUA DEFINITA
E SEMPRE NULLA). INOLTRE SI HA PER IL SECONDO TERMINE

$$U_{M_n}^{int} = \sum_{j \neq n} M_{jn} I_j I_n = I_n \sum_{j \neq n} M_{jn} I_j = I_n \Phi_n (\underline{B}^*)$$

CAMPO \underline{B} TOTALE ESTERNO,
ESCLUSO IL CAMPO \underline{B}_n
STESMO.

ESEMPIO

DUE SPIRE ARCOLARI, QUELLA INTERNA PUÒ RUOTARE ATTORNO ALL'ASSE \hat{x} .

TROVARE LE SOLLECITAZIONI MECCANICHE (E, M).

USANDO IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI, SCRIVIAMO

$$U_M^{int} = M_{12} I_1 I_2$$

$$M_{12} = \frac{\Phi_1(\underline{B}_2)}{I_2} = \frac{\Phi_2(\underline{B}_1)}{I_1}$$

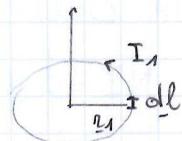
USAMO LA SECONDA FORMULA CON L'APPROXIMAZIONE DI \underline{B}_1 UNIFORME SU S_2 .

$$\Phi_2(\underline{B}_1) = \int_{S_2} \underline{B}_1 \cdot \hat{m}_2 dS \approx B_1(0) S_2 \sin\alpha$$

TRAMITE LA FORMULA DI LAPLACE,

$$dB = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{dl \wedge \underline{dz}}{d^2 z^3} \quad dB(0) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \frac{dl}{r_1^2}$$

$$B_1(0) = \frac{\mu_0 I_1}{2r_1} \hat{z}$$



PERCÒ

$$M_{21} = \frac{\Phi_2(\underline{B}_1)}{I_1} = \frac{\mu_0}{2r_1} \pi r_2^2 \sin\alpha$$

$$U_M^{int} = M_{12} I_1 I_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \pi r_2^2}{2r_1} \sin\alpha$$

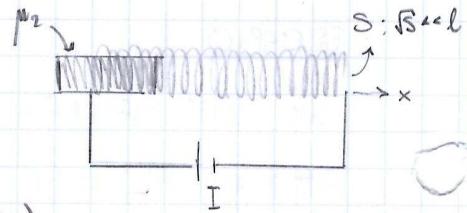
$$M_x = \frac{\partial U_M}{\partial \alpha} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \pi r_2^2}{2r_1} \cos\alpha \quad (M = m \wedge B)$$

PER RAGIONI DI SIMMETRIA B_1 HA UN MASSIMO NELL'ORIGINE

(QUINDI ANCHE $\Phi_2(\underline{B}_1)$ E U_M^{int}), PERCÒ $F=0$. ($F = \nabla(U \cdot B)$)

ESEMPIO

$$U_M = \frac{1}{2} L I^2$$



$$L(x) = L_1 + L_2 \quad (\text{LE INDUCTANZE IN SERIE SI SOMMANO})$$

$$= \mu_0 \mu_2 m^2 S + \mu_0 m^2 (l - x) S$$

$$\rightarrow f - L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} = R I$$

$$U_M(x) = \frac{1}{2} \mu_0 m^2 S I^2 [\mu_2 + (l - x)] = \frac{1}{2} \mu_0 m^2 S I^2 [l - x(\mu_2 - 1)]$$

$$F_x = + \left. \frac{\partial U_M}{\partial x} \right|_{I=\text{cost.}} = \frac{1}{2} \mu_0 S I^2 m^2 \chi_m$$

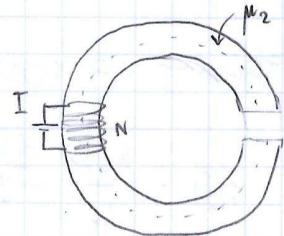
SE AGGIUNGO UNA MOLLA ($F = kx$), POSSO MISURARE

$$\chi_m = \frac{2k\Delta x}{\mu_0 S I^2 m^2}$$

ESEMPIO: FORZA CON CUI SI ATTRAGGONO LE FACCCE

TH. CIRCUITAZIONE,

$$NI = \oint H \cdot d\ell = Hl + H_0 x = Hl + \frac{B}{\mu_0} x = - \frac{B}{\mu_0 \mu_2} l + \frac{B}{\mu_0} x$$



$$B = \frac{\mu_0 \mu_2 N I}{[l + \mu_2 x]}$$

$$U_M = \int_{TF} U_M^T d\tau + \int_F U_M^F d\tau$$

$$= \int_{TF} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau + \int_F \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_2} d\tau = \int \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 \mu_2^2 N^2 I^2}{[l + \mu_2 x]^2} dt + \int \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 \mu_2^2 N^2 I^2}{[l + \mu_2 x]^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_2 N^2 I^2 S}{[l + \mu_2 x]}$$

$$F_x = + \left. \frac{\partial U_M}{\partial x} \right|_{I=\text{cost.}} = - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_2 N^2 I^2 S}{[l + \mu_2 x]^2} < 0$$

IV EQUAZIONE DI MAXWELL NEL CASO NON STAZIONARIO

SI ERANO VISTE (IV EQUAZIONE, EQUAZIONE DI CONTINUITÀ) :

$$\nabla \cdot \underline{B} = \mu_0 \underline{J}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \underline{J} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{J} + \cancel{\frac{\partial \underline{P}}{\partial t}} = 0$$

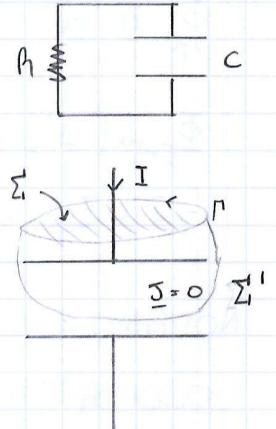
VALIDA QUINDI SOLO
NEL CASO STAZIONARIO.

VEDIAMOLO IN FORMA INTEGRALE STUDIANDO UN RC:

$$-\frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \begin{cases} Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \\ I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau} \end{cases}$$

SCEGLIENDO Γ COME IN FIGURA,

$$\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 \sum_i I_i^{\text{conc.}} = \mu_0 \int_{\Sigma} \underline{J} \cdot d\underline{s} = \mu_0 I$$



MA L'UGUAGLIANZA DEVE VALERE PER UNA QUALSIASI SUPERFICIE CONCATENATA E, SCEGLIENDO Σ' ,

$$\mu_0 \int_{\Sigma'} \underline{J} \cdot d\underline{s} = 0$$

INFATTI \underline{J} È NULLA NEL CONDENSATORE.

LA QUARTA EQUAZIONE DI MAXWELL DEVE ESSERE MODIFICATA.

DALLA PRIMA EQ. DI MAXWELL,

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \quad P = \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E}$$

PER LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA (EQUAZIONE DI CONTINUITÀ)

$$\nabla \cdot \underline{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E}) = 0$$

POSso INVERTIRE L'ORDINE DI DERIVAZIONE (TH. DI SCHWARTZ)

$$\nabla \cdot \underline{J} + \nabla \cdot \left[\epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right] = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left[\underline{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right] = 0$$

DONDE POSSO ESPRIMERE

$$\underline{J}' = \underline{J} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DENSITÀ DI CORRENTE DI SPOSTAMENTO}}}{\underline{J}_s} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{J}' = 0$$

RISOLVONO L'EQUAZIONE DI MAXWELL COME

$$\nabla \cdot \underline{B} = \mu_0 \underline{J}' = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

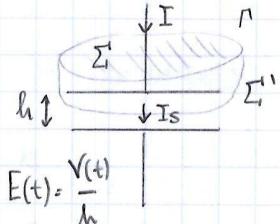
NOTA COME IL CAMPO E' SMETTE DI VARIARE SOLO QUANDO LA CORRENTE I SMETTE DI SCOMMERRE.

IL PROBLEMA DI PRIMA SI TRATTA QUINDI COSÌ:

$$\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 (I^{\text{conc}} + I^{\text{spost}})$$

$$\Phi_{\Sigma + \Sigma'} (\underline{J}') = 0$$

$$-I + I_s = 0 \Rightarrow I = I_s$$



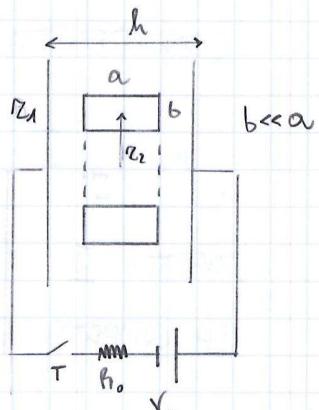
NOTIAMO CHE L'EQUAZIONE DI MAXWELL SAHEBBE COMUNQUE SODDISFATTÀ AGGIUNGENDO TERMINI SOLENODALI: COME SO CHE CI VA PROPRIO IL CAMPO E? LO MISURO Sperimentalmente.

PRENDO UN CONDENSATORE A FACCE CIRCOLARI.

$$f - \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q(t) = Q(\infty) (1 - e^{-t/\tau}) \xrightarrow{\text{V}_0 C}$$

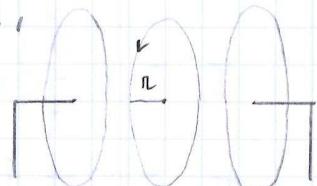
$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

$$E(t) = \frac{V(t)}{h} = \frac{V_0}{h} (1 - e^{-t/\tau})$$



METTO UN SOLENOIDE A SEZIONE RETTANGOLARE TRA LE FACCE DEL CONDENSATORE. MISURO CON UN GALVANOMETRO BALISTICO LA CARICA CHE LO ATTRAVERSA E, CON LA LEGGE DI FELICI,

$$q = \frac{1}{R} (\Phi; - \Phi_f)$$



$$\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = B(r) 2\pi r \equiv \mu_0 I_s = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \pi r^2 \Rightarrow B(r) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{r}{2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Phi(B) = N ab \epsilon_0 \mu_0 \frac{r_c}{2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$I_s = \int_{\Sigma} \underline{J}_s \cdot d\underline{\Sigma}$$

AVENDO SUPPOSTO b PICCOLO (N SPIRE DEL SOLENOIDE TOROIDALE).

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{V_0}{L} \frac{1}{R_o C} e^{-t/T}$$

$$q = \frac{1}{R} N_{ab} \epsilon_0 \mu_0 \frac{n_2}{2} \left[\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \Big|_{IN} - \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \Big|_{FIN} \right] = \frac{N_{ab} \epsilon_0 \mu_0 n_2 V_0}{2 R L R_o C} \Rightarrow \frac{N_{ab} \epsilon_0 \mu_0 n_2}{2 R L R_o C^2} = \frac{q}{q_{\infty}}$$

↑
DEL SOLENOIDE

$(q_{\infty} = V_0 C)$

CAMPO ELETROMAGNETICO E EQUAZIONI DI MAXWELL

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

SE CI METTIAMO NEL VUOTO, IN ASSENZA DI CARICHE O CORRENTI,

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

SI NOTI CHE HO 8 EQUAZIONI E SOLTANTO 6 GRADI DI LIBERTÀ;

INFATTI HO USATO LE PRIME DUE EQUAZIONI PER DEMONSTRARLE (INSIEME A EQ. CONTINUITÀ). AD ESEMPIO POSSO DEDURRE LA II DALLA III COME

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{E}) = - \nabla \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{B}) \Rightarrow \nabla \cdot \underline{B} = \text{cost.}$$

PRESTA VERO SE MODIFICO LE SORGENTI.

POICHÉ PER $t=0$ ERA $\underline{B}=0$, $\nabla \cdot \underline{B}=0$, QUESTO RIMANE VERO.

COMPLETO LA DINAMICA CON

$$\underline{E} = q (\underline{E} + \nabla \times \underline{B}) \quad \nabla \cdot \underline{J} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial t} = 0$$

IN PRESENZA DI CARICHE ρ O CORRENTI \underline{J} DI POLARIZZAZIONE,
ESSE VANNO INCLUSE NELLE LEGGI. ALTRIMENTI DEFINISCO

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$\underline{P} = m < \underline{P} >$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}$$

$$\underline{M} = m < \underline{M} >$$

VALIDE ALL'INTERNO DI CIASCUN MEZZO, ALL'INTERFACCIA

$$B_{1N} = B_{2N} \quad H_{1T} = H_{2T}$$

$$D_{1N} = D_{2N} \quad E_{1T} = E_{2T}$$

E SI HANNO

$$\nabla \cdot \underline{D} = P \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

EQUAZIONE DELLE Onde Elettromagnetiche

METTIAMOCI NEL VUOTO; LE ULTIME DUE EQ. DI MAXWELL SONO ACCOPPIATE.

LE DISACCOPPIO:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \underline{E}) &= - \nabla \times \left(\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{B}) = - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} \\ " & \\ - \nabla^2 \underline{E} + \nabla (\nabla \cdot \underline{E}) &= 0 \end{aligned}$$

AGENDO ALLO STESSO MODO SULL'ULTIMA OTTENGO LE EQUAZIONI DI D'ALMBERT:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \underline{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \underline{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \square \underline{E} = 0 \\ \square \underline{B} = 0 \end{array} \right.$$

SI NOTI CHE APPLICANDO IL ROTORE HO PERSO I DUE GRADI DI LIBERTÀ RIDONDANTI (QUESTE AMMETTONO $\underline{E}' = \underline{E} + \underline{E}_2$ CON $\nabla \times \underline{E}_2 = 0$).

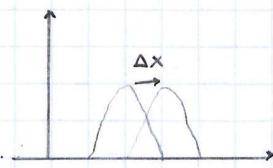
SI È INTRODOTTO L'OPERATORE D'ALMBERTIANO $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

LA SOLUZIONE GENERALE DI

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad r = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

E' DATA DA

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(x \pm ct) \\ &= f(\hat{m} \cdot \hat{n} \mp ct) \end{aligned}$$



INFATTI DEVE RESTARE INVARIATA LA FORMA DELL' ONDA:

$$x' \mp vt' = x + \Delta x \mp v(t \pm \Delta t) = x \mp vt + (\Delta x \mp v\Delta t)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \pm v$$

USIAMO LA SOLUZIONE (CON CUI COSTRUISCO LE ALTRE - FOURIER)

$$f(x, t) = A \sin(x \mp vt + \varphi)$$

$$= A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt) + \varphi\right) \quad \lambda = T v$$

$$= A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{T v} \mp \frac{t}{T}\right) + \varphi\right)$$

$$= A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \mp \frac{2\pi}{T} t + \varphi\right) = A \sin(kx \mp wt + \varphi)$$

NOTIAMO CHE NEL VUOTO

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

MENTRE IN UN MEZZO GENERICO

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\mu_r}}$$

SI DICE INDICE DI RIFRAZIONE DI UN MATERIALE

$$m = \frac{c}{v}$$

CHE E' IN GENERALE UN NUMERO COMPLESSO: IN ALCUNI MEZZI
POSSO QUINDI AVERE EFFETTI DI SMORZAMENTO.

ONDE ELETROMAGNETICHE MONOCHROMATICHE E PIANE

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = E_0 \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t + \varphi)$$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = B_0 \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t + \varphi)$$

SONO ONDE CHE SI PROPAGANO NELLA DIREZIONE DEL VETTORE

D'ONDA $\underline{k} = k \hat{v}$.

IN NOTAZIONE COMPLESSA,

$$\underline{E} = E_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

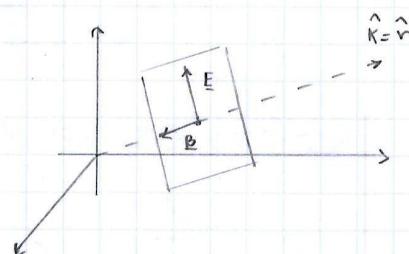
$$\underline{B} = B_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

VOGLIAMO VERIFICARE CHE

$$\hat{E}, \hat{B} \perp \hat{v}$$

$$\underline{E} \perp \underline{B}$$

$$\frac{\underline{E}}{\underline{B}} = \frac{E_0}{B_0} = v$$



VEDIAMO COME CALCOLARE (METODO SIMBOLICO)

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -i\omega \underline{E}$$

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -i\omega \underline{B}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = i\underline{k} \cdot \underline{E}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = i\underline{k} \cdot \underline{B}$$

$$\nabla \times \underline{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i \underline{k} \times \underline{E} \quad \nabla \times \underline{B} = i \underline{k} \times \underline{B}$$

CON $\underline{k} = (k_x, k_y, k_z)$.

Ora osserviamo che

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{k} \cdot \underline{E} = 0 \\ \underline{k} \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{E} \perp \hat{k} \\ \underline{B} \perp \hat{k} \end{array} \right.$$

INOLTRE

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \Rightarrow i(\underline{k} \times \underline{E}) = i\omega \underline{B} \quad \underline{B} = \frac{\underline{k} \times \underline{E}}{\omega} \quad \underline{B} \perp \underline{E}$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \Rightarrow i(\underline{k} \times \underline{B}) = -i\omega \mu_0 \epsilon_0 \underline{E} \quad \underline{E} \perp \underline{B}$$

NOTIAMO CHE

$$\underline{B} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{E}}{\omega} = \frac{\underline{k}}{\omega} \wedge \underline{E} = \frac{\underline{\tau} \wedge \underline{E}}{r^2} \quad \circ \quad \underline{E} = \underline{B} \wedge \underline{\tau}, \quad \underline{\tau} = \frac{\omega}{\kappa}$$

ESSENDO \underline{E} E \underline{B} ORTOGONALI,

$$\underline{B} = \frac{1}{\tau} \underline{E}$$

$$\frac{\underline{E}}{\underline{B}} = \frac{E_0}{B_0} = \tau = c$$

↑
NEL VUOTO

ENERGIA DI UN'ONDA

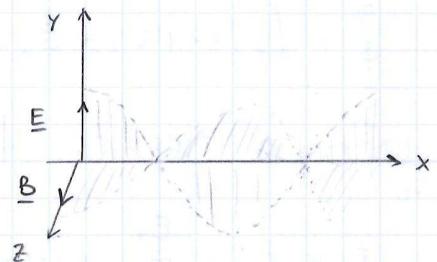
$$\underline{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y}$$

ONDE
POLARIZZATE

$$\underline{B} = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

$$u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{\mu r^2} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{\mu \frac{1}{\epsilon \mu}} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = u_E$$



NOTIAMO CHE $\frac{E}{B} = \tau$, MA QUESTO RAPPORTO NON CI DICE NULLA IN QUANTO τ NON È ADIMENSIONALE. SI È MOSTRATO INVECE CHE IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIOTEMPO LE DENSITÀ DI ENERGIA ASSOCIATE AI DUE CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO SONO UGUALI.

SI NOTI CHE UN'ONDA PIANA NON CONSERVA L'ENERGIA, COSA CHE FA INVECE UN'ONDA SFERICA.

DATA LA SIMMETRIA SFERICA DEL PROBLEMA,

$$\nabla_\varphi^2 = \nabla_\theta^2 = 0$$

SI DIMOSTRA INVECE CHE

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r F)$$

L'EQUAZIONE DI D'ALEMBERT ASSUME LA FORMA

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (zf) - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c} \frac{\partial^2 (zf)}{\partial t^2} = 0$$

$$\tilde{f} := zf(z, t)$$

E' SOLUZIONE:

$$\square \tilde{f} = 0$$

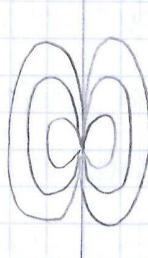
$$\tilde{f} = f_+(x - vt) + f_-(x - vt)$$

UN'ONDA SFERICA SI SCRIVE ALLORA COME

$$E(z, t) = \frac{E_0}{r} \sin(kz - wt + \phi)$$

CHE CONSERVA IL FUSSO DI ENERGIA SU UNA QUAISIASI SUPERFICIE CHE CONTIENE LA SORGENTE.

IN REALTA' NEMMENO UN'ONDA SFERICA ESISTE (MI SERVE UN DIPOLO OSCILLANTE PER PRODURRE UN'ONDA).

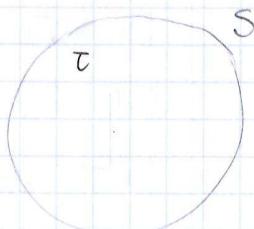


TEOREMA DI POYNTING

IN UN VOLUME τ E' PRESENTE UN CAMPO ELETTROMAGNETICO INSIEME A MATERIA. L'ENERGIA POSSEDUTA DAL CAMPO ELETTROMAGNETICO VALE

$$U = U_E + U_M = \int_{\tau} u_E dz + \int_{\tau} u_M dz$$

$$= \int_{\tau} \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D} dz + \int_{\tau} \frac{1}{2} \underline{B} \cdot \underline{H} dz$$



CALCOLIAMO LA VARIAZIONE DI U NEL TEMPO:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{\tau} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \cdot \underline{D} + \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right] dz + \int_{\tau} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \cdot \underline{B} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right] dz$$

IN UN MATERIALE OMOGENEO E ISOTROPO

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{B} = \mu \underline{H} \\ \underline{D} = \epsilon \underline{E} \end{array} \right.$$

CIO' CHE ANDIAMO A DEMONSTRARE
HA PERO' VALIDITA' GENERALE;
QUESTA IPOTESI SEMPLIFICA I
CONTI.

SI HA AD ESEMPIO

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot \underline{H} = \mu \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \cdot \underline{E} = \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \cdot \underline{B}$$

PERDAO'

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{\tau} (\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}) d\tau + \int_{\tau} (\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}) d\tau$$

DALLE EQUAZIONI DI MAXWELL,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

DA CUI

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{\tau} \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H}) d\tau - \int_{\tau} \underline{E} \cdot \underline{J} d\tau - \int_{\tau} \underline{H} \cdot (\nabla \times \underline{E}) d\tau$$

RICORDANDO

$$\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) = \underline{H} \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int_{\tau} \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) d\tau - \int_{\tau} \underline{E} \cdot \underline{J} d\tau$$

$$- \frac{\partial U}{\partial t} = \int_S (\underline{E} \times \underline{H}) \cdot d\underline{S} + \int_{\tau} \underline{E} \cdot \underline{J} d\tau$$

SI DICE VETTORE DI POYNTING

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

RICORDIAMO INOLTRE LA POTENZA DISSIPATA PER EFFETTO JOULE

$$m = \frac{dN}{d\tau} \quad dE = m q d\tau \quad (\underline{E} + \cancel{\nabla \times \underline{B}}) \\ \text{NON FA LAVORO}$$

FORZA ISTANTANEA ESERCITATA
DAL CAMPO SUL VOLUME $d\tau$.

$$dW = dE \cdot \underline{v}_d = (m q \underline{v}_d \cdot \underline{E}) d\tau = (\underline{J} \cdot \underline{E}) d\tau$$

CI POSSO ANCHE METTERE $\nabla \times \underline{B}$,
SI ANNULLA.

ENUNCIAMO QUINDI IL TEOREMA DI POYNTING:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \underline{\Phi}(\underline{S}) + \int_{\Gamma} \underline{J} \cdot \underline{E} \, d\underline{l}$$

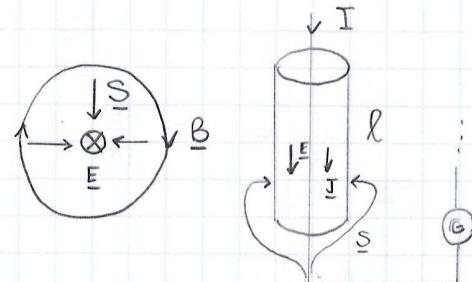
$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{S} + \underline{J} \cdot \underline{E}$$

DA QUI RICONOSCIAMO CHE $\underline{\Phi}(\underline{S})$ RAPPRESENTA L'ENERGIA USCENTE PER UNITÀ DI TEMPO ATTRAVERSO S IN QUANTO TRASPORTATA DALLE Onde ELETTROMAGNETICHE.

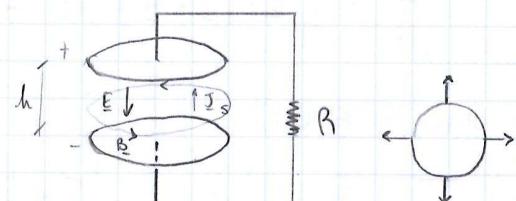
$$[S] = \frac{[E]}{[t][l]^2} \doteq \frac{\underline{J}}{S \cdot m^2} = \frac{W}{m^2}$$

ESEMPIO

IN UN CONDUTTORE SI HA UN FLUSSO ENTRAANTE DEL VETTORE \underline{S} PRODOTTO DAL GENERATORE.



ABBIAMO INOLTRE STUDIATO IL CASO DI UN CONDENSATORE A FACCE CIRCOLARI. IN QUESTO CASO \underline{S} ESCE DAI LATI DELLE ARMATURE E VA A FINIRE SUL RESISTORE (E SUL GENERATORE SE CE N'E' UNO).



$$E(t) = \frac{V(t)}{h} \quad \underline{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J}_s \quad \oint \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 I_s$$

$$-\frac{Q}{C} = R_0 \frac{dQ}{dt} \quad V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{T}} \quad I(t) = -\frac{V_0}{R_0} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$B(R) 2\pi R = \mu_0 J_s \pi R^2 \Rightarrow B(R) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 h}{2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$|S| = \left| \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{\mu_0} \right| = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{\epsilon_0 h}{4} \frac{\partial}{\partial t} (E^2)$$

$$\underline{\Phi}(\underline{S}) = \frac{\epsilon_0 B}{4} \frac{\partial}{\partial t} (E^2) 2\pi R h = W$$

CALCOLO

$$U = \int_0^\infty w dt = \frac{\epsilon_0 R^2 2\pi h}{4} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (E^2) dt = \frac{\epsilon_0 h^2 2\pi h}{4} \left[E^2(\infty) - E^2(0) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{h} \tau = -u_E \tau$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{h} V_o^2 = -\frac{1}{2} C V_o^2$$

ONNIAMENTE

$$U_J = \int_0^\infty R I^2(t) dt = \frac{1}{2} C V_o^2$$

L'ENERGIA FUORIUSCITA DAL CAPACITORE
(CALCOLATA CON IL TEOREMA DI POYNTING)
E' PARIGA A QUELLA DISSIPATA SUL
RESISTORE.

RISULTATI COERENTI CON QUELLI OTTENUTI TEMPO ADDIETRO.

ESEMPIO : ONDA MONOCHROMATICA

$$\underline{E} \perp \underline{B} \perp \hat{r} \quad \underline{E} = \underline{B} \wedge \underline{r}$$

PERATO'

$$\underline{S} = \underline{E} \wedge \underline{H} = \frac{\underline{E} \wedge \underline{B}}{\mu} = \frac{EB}{\mu} \hat{r} = \frac{B^2}{\mu} \underline{r} = \epsilon E^2 \hat{r} = \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \right) \underline{r}$$

$$= (u_E + u_M) \underline{r} = u \underline{r}$$

INOLTRE

$$\frac{E}{H} = r \mu = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} := 2$$

DONDE 2 E' DETTA IMPEDENZA CARATTERISTICA. QUELLA DEL VUOTO VALE

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

POSso ESPRIMERE

$$\underline{S} = \underline{E} \wedge \underline{H} = EH \hat{r} = \frac{E^2}{2} \hat{r}$$

ESEMPIO: ONDA PIANA

$$\underline{E} = E_0 \cos(\underline{n} \cdot \underline{z} - wt)$$

SCRIVO

$$\underline{S}(\underline{z}, t) = \frac{E_0^2}{2} \cos^2(\underline{n} \cdot \underline{z} - wt) \hat{v}$$

L'INTENSITÀ DELL'ONDA VALE

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(z, t) dt = \frac{E_0^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\underline{n} \cdot \underline{z} - wt) dt = \frac{E_0^2}{2Z} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{2}$$

ESEMPIO: ONDA SFERICA

COME PRIMA, MA CAMBIA L'ESPRESSIONE DELL'ONDA

$$\underline{E} = \frac{E_0}{r} \cos(\underline{n} \cdot \underline{z} - wt)$$

$$\underline{S}(\underline{z}, t) = \frac{E_0^2}{2r^2} \cos^2(\underline{n} \cdot \underline{z} - wt) \hat{v}$$

$$\langle S \rangle = \frac{E_{\text{eff}}^2}{2r^2}$$

CHE CONSERVA L'ENERGIA ($\Phi_1(S) = \Phi_2(S) \Rightarrow h\pi r_1^2 S_1 = h\pi r_2^2 S_2$)

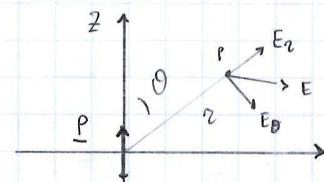
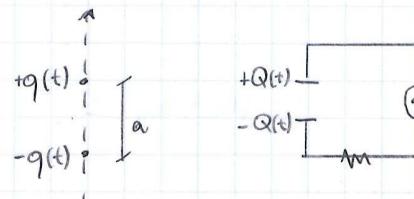
ESEMPIO: DIPOLO OSCILLANTE

OSCILLATORE DI HERTZ

$$q(t) = q_0 \sin(wt)$$

$$I(t) = q_0 w \cos(wt)$$

$$P(t) = q(t) a \hat{z} = q_0 a \sin(wt) \hat{z}$$



PER $cT \gg a$,

$$E_x = \frac{2P \sin \theta}{h\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{2P_0 \sin \theta}{h\pi \epsilon_0 r^3} \sin(wt)$$

$$E_y = \frac{P \cos \theta}{h\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{P_0 \cos \theta}{h\pi \epsilon_0 r^3} \sin(wt)$$



MA A DISTANZA TROPPO GRANDE DAL DIPOLO RISENTO DEGLI EFFETTI DELLA VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE FINITA DEL SEGNALE.

L'INVILUPPO DI CAMPI CHE NE DERIVA SI PUO' CALCOLARE E VALE

$$\underline{E} \propto -\frac{\sin\theta}{r} \omega^2 \sin(\omega r - \omega t)$$

$$\underline{B} \propto \underline{E}_0$$

$$S = \frac{1}{2} \omega^2 f(\theta) \omega^4$$

LA POTENZA IRRAZIATA VALE

$$P = \int S \cdot ds \propto \omega^4$$

VALE LO STESSO SE A OSCILLARE E' UNA PARTICELLA:

$$z(t) = z_0 \sin(\omega t)$$

$$\ddot{a} = \ddot{z} = -z_0 \omega^2 \sin(\omega t) \quad P \propto a^2 \propto \omega^4$$

PRESSIONE DI RADIAZIONE

UN'ONDA ELETTROMAGNETICA INCONTRA

UN PIANO CARICO E VI APPLICA LA

FORZA PER UNITA' DI SUPERFICIE

$$f = \sigma (\underline{E} + \underline{v}_d \wedge \underline{B})$$

$$w = f \cdot \underline{v}_d = \sigma \underline{v}_d \cdot \underline{E}$$

SE IL MATERIALE E' OHMICO,

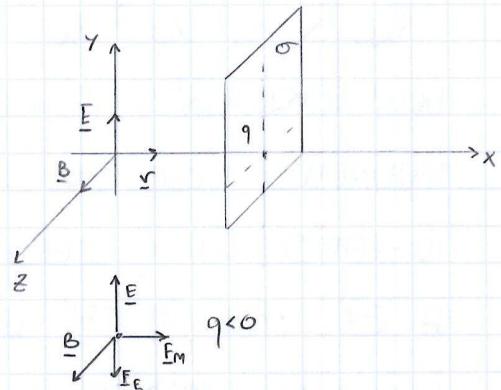
$$\underline{J} = \sigma' \underline{E} = m \rho \underline{v}_d \Rightarrow \underline{v}_d \parallel \underline{E}$$

CONDENSITÀ

PERCIO'

$$w = \sigma \underline{v}_d \cdot \underline{E} \propto E^2$$

(SI PUO' DEMOSTRARE CHE QUESTO E' VERO IN GENERALE PER UN MATERIALE OMogeneo E ISOTROPO, ANCHE SENZA USARE LA LEGGE DI OHM).



All'ENERGIA TRASFERITA DALL'ONDA
CONTRIBUISCE SOLO IL CAMPO
ELETTRICO (QUELLO MAGNETICO NON
FA L'ANNO).

PER QUEL CHE RIGUARDA IL TERMINE MAGNETICO,

*

$$\underline{f}_M = \sigma (\underline{\gamma}_d \times \underline{B}) = \sigma v_d B \hat{r} = \frac{\sigma v_d E}{c} \hat{r} \quad (v = \frac{E}{B})$$
$$= - \frac{w}{r} \hat{r}$$

SE IL MATERIALE E' OPACO E IL PIANO PERFETTAMENTE ASSORBENTE.

$$\underline{f}_M = \frac{s}{r} \hat{r} = p_{RAD}$$

NOTA CHE E' ANCHE L'IMPULSO TRASFERITO PER UNITA' DI TEMPO E DI SUPERFICIE.

DETTA PRESSIONE DI RADIAZIONE.

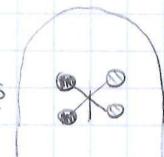
SI NOTI CHE SE IL PIANO E' TRASPARENTE LA VARIAZIONE DI QUANTITA' DI MOTO E' NULLA; E' INVECE DOPPIA SE LA SUPERFICIE E' PERFETTAMENTE RIFLETTENTE (QUINDI E' DOPPIA p_{RAD}).

SI NOTI CHE

$$p_{RAD} \sim w \cdot 10^{-8} \text{ Pa}$$

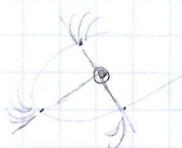
$$P = \frac{S}{c}$$

$$P = \frac{2S}{c}$$



NELL'ESPERIMENTO A FIANCO NON E' QUESTA A FAR GIRARE IL MULINELLO (CHE TRA L'ALTRIO GIRA AL CONTRARIO!), MA PIUTTOSTO IL FATTO CHE IL CORPO NERO SI SCALDI E SCALDI L'ARIA ATTORNO A SE'. PER VEDERE GLI EFFETTI DI p_{RAD} DEVO METTERMI NEL VUOTO E CON UNA BILANCIARSI F_g E p_{RAD} IN BASE ALLA MASSA DEI CORPUSCOLI CHE LA FORMANO.

L'EFFETTO DI p_{RAD} E' QUELLO DOMINANTE NELLE SUPERGIGANTI ROSSE E NELLE CODE DELLE COMETE (DOVE DEVONO BILANCIARSI F_g E p_{RAD} IN BASE ALLA MASSA DEI CORPUSCOLI CHE LA FORMANO).



* NOTA: ANCHE IL CAMPO E' DA' QUANTITA' DI MOTO ALLE PARTICELLE, MA LO FA IN SENSO ORTOGONALE ALLA DIREZIONE DELL'ONDA E SOPRATTUTTO CON MEDIA NULLA.

POTENZIALI ELETTRODINAMICI

NEL CASO ELETROSTATICO AVEMMO SCRITTO

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{E} &= 0 & \underline{E} &= -\nabla V & \nabla^2 V &= -\frac{P}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 & \underline{B} &= \nabla \times \underline{A} & \nabla^2 \underline{A} &= -\mu_0 \underline{J} \quad (2) \end{aligned}$$

(LE ULTIME SONO EQUIVALENTI ALLE EQUAZIONI DI MAXWELL PERCHE' POSSO SCRIVERE V E \underline{A} SOLO SE SONO SODDISFATTE LE CONDIZIONI SOPRA). QUESTE ULTIME HANNO SOLUZIONE (PARTICOLARE)

$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{P(\underline{r}') d\underline{r}'}{|\Delta \underline{r}|}$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}'}{|\Delta \underline{r}|}$$

GENERALIZZIAMO QUESTI RISULTATI AL CASO NON STATICO.

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \left[\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right] = 0$$

ABBIAMO COSÌ COSTRUITO UN NUOVO CAMPO IRROTATORIALE:

$$\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

NON E' LO STESSO V DI PRIMA:
SI DICE POTENZIALE SCALARE.

$$\underline{E} = -\nabla V - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

SI VERIFICA CHE SONO COSÌ SODDISFATTE LE EQUAZIONI DI MAXWELL OMOGENEE II E III (QUELLE CHE NON CONTENGONO P, J).

SOSTITUIAMO NELLA 1^a E 4^a (EQUAZIONI DELLA DINAMICA DEI POTENZIALI):

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A}$$

$$-\nabla^2 \underline{A} + \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right)$$

$$-\nabla^2 \underline{A} + \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) = \mu_0 \underline{J} - \epsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \underline{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \underline{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \underline{J} \quad (\text{I})$$

CERCHEREMO DI OTTENERE

$$\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{J} \quad \text{CHE GENERALIZZA} \quad \nabla^2 \underline{A} = -\mu_0 \underline{J} \quad \text{NEL CASO STATICO.}$$

SOSTITUIAMO NELLA PRIMA DI MAXWELL,

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \Rightarrow -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{A}) = \frac{P}{\epsilon_0} \quad (\text{II})$$

E ABBIAMO OTTENUTO UNA SECONDA EQUAZIONE DIFFERENZIALE
IN \underline{A} E V . LE DISACCOPPIAMO MEDIANTE LA TRASFORMAZIONE
DI GAUGE GENERALIZZATA

$$\begin{cases} \underline{A}' = \underline{A} + \nabla \psi \\ V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

$$\underline{E}' = -\nabla V' - \frac{\partial \underline{A}'}{\partial t} = -\nabla V + \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi = \underline{E}$$

$$\underline{B}' = \nabla \times \underline{A}' = \nabla \times \underline{A} + \nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \underline{A} = \underline{B}$$

DA CUI OSSERVIAMO CHE I CAMPI RESTANO INVARIATI SOTTO
TALE TRASFORMAZIONE. SCEGLIO ALLORA ψ T.C. (GAUGE DI LORENTZ)

$$\nabla \cdot \underline{A}' + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = 0$$

CONDIZIONE CHE
VOGLIO OTTENERE.

$$\nabla \cdot \underline{A} + \nabla^2 \psi + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

EQUAZIONE CHE RISOLVO
PER OTTENERLA.

SI PUO' DEMONSTRARE CHE ESISTE UN ψ CHE E' SOLUZIONE
DI QUESTA EQUAZIONE (ORA NON MI INTERESSA CONOSCERLO).

CON TALE SCELTA (\underline{A}, ∇ APPARTENENTI ALLA GAUGE DI LORENTZ) *

$$-\nabla^2 \nabla + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \nabla}{\partial t^2} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\square \nabla = - \frac{P}{\epsilon_0}$$

\Rightarrow

$$\nabla^2 \underline{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \underline{J}$$

$$\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{J}$$

NEL VUOTO (ONDE IN ASSenza DI SORGENTI, $P = J = 0$)

∇ E \underline{A} SI PROPAGANO COME ONDE.

IN PRESENZA DI SORGENTI, A QUESTA SOLUZIONE SI SOMMA
QUELLA PARTICOLARE:

$$\nabla(\underline{z}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{T}} \frac{P(\underline{z}', t - \frac{\Delta z}{c}) d\underline{z}'}{\Delta z}$$

$$\underline{A}(\underline{z}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{T}} \frac{J(\underline{z}', t - \frac{\Delta z}{c}) d\underline{z}'}{\Delta z}$$

DETTI POTENZIALI RITARDATI; QUESTI TENGONO CONTO DEL TEMPO
IMPIEGATO DAL POTENZIALE A PROPAGARSI (NOI NON VEDIAMO LA
SORGENTE AL TEMPO t , MA L'INFORMAZIONE CI ARRIVA DOPO).

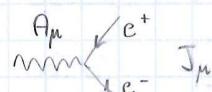
OSSERVO CHE POSSO SCRIVERE

$$A_\mu = \left(A, \frac{\nabla}{c} \right)$$

CHE E' UN QUADRIVETTORE PER ANALOGA FORMALE CON IL
QUADRIMPULSO (VERO OGNI VOLTA CHE HO (r, s))
(VETTORE, SCALARE)

$$P_\mu = \left(P, \frac{E}{c} \right)$$

IL QUADRIVETTORE A_μ E' UN FOTONE.



*NOTA CHE NEL CASO STATICO RITROVO $\nabla^2 \nabla = -\frac{P}{\epsilon_0}$, $\nabla^2 \underline{A} = -\mu_0 \underline{J}$ E
 ∇ SI IDENTIFICA CON L'UGUALE POTENZIALE.

COVARIANZA RELATIVISTICA

INVECE DI OPERARE SUI CAMPI, CONSIDERO I LORO POTENZIALI.

$$\left\{ \begin{array}{l} \square V = -\frac{P}{\epsilon_0} \\ \square A = -\mu_0 J \end{array} \right. \rightarrow \square \frac{V}{c} = -\mu_0 P_c$$

CONSIDERIAMO LA QUADRICORRENTE E IL QUADRIPOLENIALE

$$J_\mu = (J, P_c)$$

$$A_\mu = (A, \frac{V}{c})$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta \gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

DETTO ∂_μ IL QUADRIGRAIENTE,

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \xrightarrow{\frac{\partial^2}{\partial(xt)^2}}$$

E' IL QUADRICALMBERTIANO (SI NOTI L'USO DELLA METRICA DI MINKOWSKI).

I QUADRIVETTORI A_μ E J_μ SI TRASFORMANO COME

$$\left\{ \begin{array}{l} J'_\mu = \Lambda J_\mu \\ A'_\mu = \Lambda A_\mu \end{array} \right.$$

INVECE \square E' INVARIANTE, COSÌ COME LO E' ∇^2 IN \mathbb{R}^3 (E' UN PRODOTTO SCALARE, INVARIANTE PER ISOMETRIE).

Allora l'EQUAZIONE

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\mu = -\mu_0 J_\mu \quad \square A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

E' COVARIANTE A VISTA.

E' POSSIBILE DEFINIRE ANCHE IL TENSORE ELETTROMAGNETICO

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$$

CHE E' SIMMETRICO E TRIANGOLARE:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y & \frac{E_x}{c} \\ 0 & 0 & -B_x & \frac{E_y}{c} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_z}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad F_{\mu\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\alpha} \Lambda_{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

ONDE ELETROMAGNETICHE NEI CONDUTTORI (CENNI)

METTIAMO IN UN MATERIALE QUALSIASI (OMOGENEO E ISOTROPO)

$$\nabla \cdot \underline{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

RICAVO

$$-\nabla^2 \underline{E} + \nabla(\nabla \cdot \underline{E}) = \dots$$

PER ONDE PIANE E MONOCROMATICHE E SODDISFACENTI

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi(\omega) \underline{E}$$

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\underline{P} = \underline{P}_0 e^{i(kz - \omega t + \delta)}$$

E SOSTITUENDOLE SOPRA, OTTENGO LA CONDIZIONE

$$m = \sqrt{\epsilon_0}$$

DALLA RELAZIONE GENERALE

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad \underline{J} = \sigma \underline{E}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \sigma \underline{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

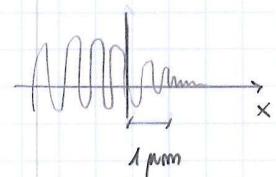
$$-\nabla^2 \underline{H} - \nabla(\nabla \cdot \underline{H}) = \sigma(\nabla \times \underline{E}) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{E})$$

$$\square \underline{H} - \sigma \mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = 0$$

CHE HA SOLUZIONE DEL TIPO

$$\Phi(x, t) = A e^{-\gamma x} e^{i(\beta x - \omega t)}$$

$$\frac{1}{r} = \Lambda = \sqrt{\frac{2}{\sigma \omega \mu}}$$



ONDE - FORMULARIO

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(x, t) = f(x \pm vt)$$

$$f(x, t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) + \varphi \right] = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} x \mp \frac{2\pi}{T} vt + \varphi \right]$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad M = \frac{c}{v}$$

ONDE MONOCHROMATICHE

$$\underline{E}(z, t) = E_0 \sin(\omega z - vt + \varphi) \quad K = K \hat{z}$$

$$\underline{B}(z, t) = B_0 \sin(\omega z - vt + \varphi)$$

$$\underline{B} = \frac{K \wedge \underline{E}}{v} \quad \underline{E} = \underline{B} \wedge \underline{v} \quad B = \frac{E}{v}$$

ONDE POLARIZZATE

$$\underline{E} = E_0 \cos(\omega z - vt) \hat{y}$$

$$\underline{B} = \frac{E_0}{v} \cos(\omega z - vt) \hat{x}$$

$$\underline{v} = \frac{\underline{E}}{B} \hat{x} = \frac{E_0}{B_0} \hat{x}$$

TEOREMA DI POYNTING

$$\underline{S} = \underline{E} \wedge \underline{H}$$

$$[S] = \frac{W}{m^2}$$

$$-\frac{\partial \underline{S}}{\partial t} = \int_{\Sigma} \underline{S} \cdot d\underline{\Sigma} + \int_{\Gamma} \underline{J} \cdot \underline{E} d\underline{l}$$

ENERGIA

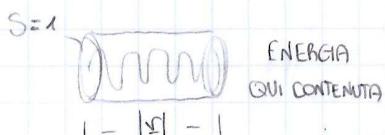
$$\frac{E}{H} = v \mu = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} := Z \quad \text{IMPEDENZA CARATTERISTICA}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

$$\underline{S} = \underline{E} \wedge \underline{H} = EH \hat{v} = \frac{E^2}{Z} \hat{v}$$

$$= \frac{B^2}{\mu} \hat{v} = \epsilon E^2 \hat{v} = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) \hat{v} = (u_E + u_M) \hat{v} = u \hat{v}$$

(ONDA PIANA)



PER UN'ONDA PIANA,

$$\underline{E} = E_0 \cos(\underline{n} \cdot \underline{z} - wt)$$

$$\underline{S}(\underline{z}, t) = \frac{E_0^2}{2} \cos^2(\underline{n} \cdot \underline{z} - wt) \hat{\wedge} \quad |\underline{S}| = I$$

INTENSITÀ ISTANTANEA

$$\langle S \rangle \equiv I = \frac{1}{T} \int_0^T S(z, t) dt = \frac{E_0^2}{22} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{2}$$

INTENSITÀ MEDIA

POTENZA E IMPULSO

SU UN VOLUME dV ,

$$\underline{f} = \frac{d\underline{F}}{d\underline{z}} = m \underline{v} (\underline{E} + \underline{r}_d \wedge \underline{B})$$

L'UNITÀ DI VOLUME ASSORBE LA POTENZA

$$W = \underline{f} \cdot \underline{r}_d = \underline{E} \cdot \underline{J}$$

CONTRIBUISCE SOLO \underline{E}

E LA QUANTITÀ DI MOTO (PER UNITÀ DI TEMPO)

$$\underline{\dot{q}} = \underline{m} \underline{v} \underline{r}_d \wedge \underline{B} = \underline{J} \wedge \underline{B} = \underline{J} \underline{B} \hat{\wedge} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{J}}$$

SOLO \underline{B}

VALE LA RELAZIONE

$$\underline{\dot{q}} = \frac{\underline{W}}{\underline{v}}$$

SE L'ONDA COMUNICA TUTTA L'ENERGIA AL MATERIALE USIAMO L'ENERGIA INCIDENTE NELL'UNITÀ DI TEMPO SULL'UNITÀ DI SUPERFICIE. ABBIAMO

$$\underline{I} = \underline{E} \wedge \underline{H}$$

INTENSITÀ, ODE' POTENZA INCIDENTE SULL'UNITÀ DI AREA.

$$P = \frac{\underline{I}}{v} = \frac{I}{v} \hat{\wedge}$$

PRESSESIONE DI RADIAZIONE, ODE' QUANTITÀ DI MOTO PER UNITÀ DI TEMPO E DI SUPERFICIE.