

APPUNTI DEL CORSO DI

MECCANICA
STATISTICA

E

FENOMENI CRITICI

ANNO 2018/2019
DAVIDE VENTURELLI
PROF. E. MARINARI

Per informazioni o segnalazioni:
venturelli.1591191@studenti.uniroma1.it

Ho corredato gli appunti del corso con note (ai limiti dell'irritante), approfondimenti (*Focus*, non conservo memoria del perché né di quando abbia iniziato a chiamarli così) e rimandi a paragrafi specifici di vari testi ogniqualvolta sentissi l'esigenza di leggere più a fondo per capire davvero (ma al contempo non la sentissi al punto da prendermi la briga di ricopiarli a mano). Ho cercato di limitare a questi spazi le mie ingerenze, lasciando il resto degli appunti fedeli a quanto ascoltato in classe. Mi assumo quindi la responsabilità del loro contenuto, ma non degli esiti, in sede d'esame, di un'eccessiva fiducia che doveste decidere di riporvi: tenete a mente che in questo campo sono solo un novellino!

Davide Venturelli

Bibliografia:

G. Parisi, *Statistical Field Theory*

C. Itzykson, J. Drouffe, *Statistical Field Theory*

J. J. Binney et al., *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*

M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*

M. Testa, Appunti del corso di Teoria dei Campi tenuto alla Sapienza nel 2018/2019

SOMMARIO: MECCANICA STATISTICA E FENOMENI CRITICI

I. CLASSICAL EQUILIBRIUM S.M.

- ASSUNZIONE P_{eq}
- MODELLO DI ISING, MISURA
- ENTROPIA
- LEGAME CON IL TEOREMA DI SHANNON
- DEFINIZIONE DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN
- LEGAME TRA β_{MS} E T_{CRIT}
- RELAZIONI UTILI TRA U, F, S

II. MAGNETIC SYSTEMS

- DEFINIZIONE FUNZIONALE
- SISTEMI MAGNETICI: F, M, χ
- FUNZIONE DI CORRELAZIONE CONNESSA
- TEOREMA DI FLUTTUAZIONE-DISSIPAZIONE
- ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA
- CLASSIFICAZIONE EHRENFEST DELLE TDF
- SINGOLARITÀ DELL'ENERGIA LIBERA
- CONDIZIONI AL BORDO
- STATI PURI E MISCELE STATISTICHE
- PROPRIETÀ DI CLUSTERING

III. THE ISING MODEL

- MODELLO DI ISING
- CAMPOMEDIO (P_{eq} FATTOORIZZATA SUI SITI)
- CAMPOMEDIO (UGUAGLIANZE DLA)
- UGUAGLIANZE DLA IN $D=2$
- ISING MF: $f(m), T \rightarrow T_c, T \rightarrow 0, h \neq 0$
- CAMPOMEDIO (RELATIVAZIONE DI CONNESSIONE)
- MODELLO WEAK LONG-RANGE FORCES
- FUNZIONE DI CORRELAZIONE (F_{DC})
- DENSITÀ DI ENERGIA, CALORE SPECIFICO
- F_{DC} VIANO ALLA TRANSIZIONE
- C_V AL PUNTO CRITICO
- LIMITE $D \rightarrow \infty$ (FUNZIONI DI BESSEL)
- DECADIMENTO ESPOENZIALE DELLE F_{DC}
- F_{DC} CONNESSA
- ξ DIVERGE A T_c , ARGOMENTO ENERGETICO
- ξ DIVERGE A T_c , ARGOMENTO VARIAZIONALE
- IL LIMITE DI VOLUME INFINTO

IV. THE LOW-T AND HIGH-T EXPANSIONS

- Sviluppo A BASSE T
- f_N NON DIPENDE DA N NEI SISTEMI SHORT-RANGE
- IL MODELLO GAUSSIANO
- CALCOLO DELLE F_{DC}
- APPROCCIO DIAGRAMMATICO
- F_{DC} CONNESE (DEFINIZIONE MICROSCOPICA)

- MODELLO GAUSSIANO AD ALTE T
- INTERPRETAZIONE DIAGRAMMATICA
- MODELLO DI ISING AD ALTE T
- STIMA DEI COEFFICIENTI CRITICI (CENNI)

V. THE LANDAU-GINSBURG MODEL

- DAL DISCRETO (RETIColo) AL CONTINUO
- HAMILTONIANA DEL MODELLO DI L-G
- CONSIDERAZIONI SUL PUNTO CRITICO (μ_c)
- REGOLARIZZAZIONE ULTRAVIOLETTA
- RISCALAMENTO E LIMITE GAUSSIANO $\alpha \rightarrow 0$
- ANALISI DIMENSIONALE
- ESPANSIONE PERTURBATIVA: FdC A 2 PUNTI
- CALCOLO DEGLI INTEGRALI NELLO SPAZIO P
- REGOLA DI SOMMA PER LE MOLTEPLICITA'
- RISOMMAZIONE PARZIALE DELLA SERIE 1PI ($\Sigma^1(P)$)
- FdC A 4 PUNTI (1° e 2° ORDINE, $\Gamma_1(P)$)
- PARAMETRY DI FEYNMAN, MANIPOLAZIONE DI INTEGRALI
- CLASSIFICAZIONE DEI DIAGRAMMI DIVERGENTI
- RIMOZIONE DELLE DIVERGENZE UV

VI. NEAR THE TRANSITION

- DIVERGENZE INFARROSSE
- APPROXIMAZIONE DI HARTREE-FOCK
- ESPANSIONE IN $1/m$

VII. PERTURBATIVE EVALUATION OF THE CRITICAL EXPONENTS

- GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE (GdR) NELLO SPAZIO P
- CONTO A D FISSATA
- CALCOLO DI γ A 1 LOOP

IX. NEAR FOUR DIMENSIONS

- DIMENSIONI D NON INTERE
- TEOREMA DI CARLSON
- EQUAZIONI DEL MOTO
- RINORMALIZZABILITÀ, TEOREMA BHP
- E-EXPANSION

X. ON SPONTANEOUS SYMMETRY BREAKING

- MODELLO DI L-G IN PRESENZA DI $h > 0$
- DISCONTINUITÀ DI $f(h)$
- Sviluppo PERTURBATIVO (VERTICI A 3)

SOMMARIO (CONTINUA)

- SIMMETRIE CONTINUE
- ESEMPIO: $m = 2$
- TEOREMA DI MERMIN E WEGNER
- BOSONI DI GOLDSTONE: $\chi_L \in \chi_T$
- CALCOLO DI G_L E G_T

VII. THE RENORMALIZATION GROUP

- LE LEGGI DI SCALING: $G(r)$
- IPOTESI DI HYPERSCALING
- CALORE SPECIFICO, $\alpha(v)$
- SUSCETTIVITÀ, $\gamma(v, m)$
- MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA, $\chi(p, \delta)$
- GDI NELLO SPAZIO REALE: BLOCK SPIN
- $\lambda^v f(\theta) \approx f(\theta_\lambda)$
- $f(\theta) \sim \lambda \sim \theta^{-1/\nu} \sim \theta^{-\gamma}$, FORMULA PER γ
- CASO CON $h > 0$, COEFFICIENTE γ_h
- SCALING FIELDS E PUNTI FISSI
- LEGGE DI SCALA PER LE FOLC A m PUNTI
- MODELLO DI POTTS
- MATRICE DI TRASFERIMENTO
- PROCESSO DI DECIMAZIONE ESATTA
- APPROSSIMAZIONE DI MIGDAL-KADANOFF
- M-K SUL MODELLO DI ISING
- MAJORITY RULE, RETICOLO TRIANGOLARE
- MAJORITY RULE, $\lambda = \sqrt{3}$

MS E FENOMENI CHITICA

TESTI: PAHLA, DHOUFFE-ITZYKSON, ZINN JUSTIN, AMIT-MARTIN MAYOR

RAPPORTO TRA TERMODINAMICA E MECCANICA STATISTICA

TERMODINAMICA → APPROCCIO FENOMENOLOGICO

MECCANICA STATISTICA → $H[q, p]$ → DIPENDENZA FUNZIONALE + TANTI (TLC, LGN)

DEFINIRE LE LEGGI MACROSCOPICHE DI UN SISTEMA A PARTIRE DALLE LEGGI DEL MOTO DELLE DUE COMPONENTI.

CHIAMIAMO LA PROBABILITÀ DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA

$$P_{eq}[q, p]$$

$$P_{eq}[q, p] \geq 0, \quad \int [dq dp] P_{eq}[q, p] = 1$$

IL PERCORSO SARÀ:

1. DETERMINARE $P_{eq}[q, p]$

2. DATA $P_{eq}[q, p]$, DETERMINARE LE PROPRIETÀ MACROSCOPICHE.

ASSUMIAMO INNANZITUTTO CHE P_{eq} ABbia LA FORMA DI UNA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN (CANONICA):

$$P_{eq}[q, p] = \frac{1}{Z} e^{-\beta H[q, p]}$$

$$Z = \int [dq dp] e^{-\beta H[q, p]}$$

Dove Z è la funzione di partizione. In generale si pone

$$\rho_{MS} = \frac{1}{k T_{\text{team.}}}$$

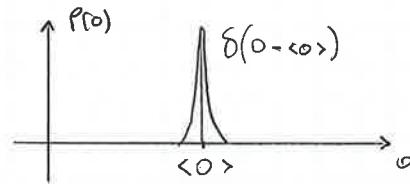
$$k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/Grado}$$

Oggi vedremo che cosa significa.

In questo corso ponremo $k=1$, i.e. $[E]=[T]$.

Sembra ci sia un problema: benché l'energia sia conservata, stiamo associando probabilità non nulla a configurazioni con energie diverse!

Sappiamo però che, nel limite di volume infinito, la distribuzione tende a una delta (il limite va fatto a densità costante).



VEDREMO ANCHE CHE

$$\langle \cdot \rangle_{\text{CAN}} = \langle \cdot \rangle_{\mu, \text{CAN}}$$

E QUESTO DA' VALORE ALLA NOSTRA ASSUNZIONE.

• ENTHOPIA

A $T=0$ IL SISTEMA STA NEL SUB STATO A ENERGIA MINIMA.

A $T>0$, STATI A ENERGIA MAGGIORE POSSONO ESSERE OCCUPATI.

INTRODUCIAMO, A TITOLO DI ESEMPIO, IL MODELLO DI ISING:

$$\sigma_i = \pm 1, \quad i = (i_x, i_y), \quad i_x \in [1, L], \quad V = L^D$$

D-PLA

ASSEGNO

$$H = -J \sum_{(i_k)} \sigma_i \sigma_k - \sum_i h_i \sigma_i$$



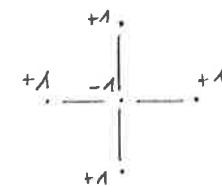
NOTA: $V = \# \text{SITI}$, $D = \# \text{LEGAMI}$
PER SITO (COME IN UN RETTANGOLO DI GRANDEZZA).

SIA $h = 0$. SE $J > 0$ IL MATERIALE E' FERROMAGNETICO E GLI SPIN TENDONO A ALLINEARSI: VI SONO DUE CONFIGURAZIONI PER CUI $H_{\min} = -JDV$, OSSIA TUTTI \uparrow O TUTTI \downarrow .

SE MUOVO UNO SPIN, PASSO DA $H_{\min} = E_0$ A

$$E_1 = E_0 + 2D(2J) = E_0 + 4DJ$$

VI SONO $O(V)$ CONFIGURAZIONI DIFFERENTI, PERATO QUESTA CONFIGURAZIONE E' PIU' PROBABILE; PER MISURARE QUESTA PROBABILITA' INTRODUCIAMO L'ENTROPIA.



NOTA: $2D = \# \text{LEGAMI}$, $\Delta E_{\text{LEGAME}} = 2J$.

* PONIAMO $L=2$, $D=2$. ALLORA PER IL SISTEMA

$$V = L^D = 4$$

E LE CONFIGURAZIONI POSSIBILI SONO $2^4 = 16$: LE INDIVIDUAIAMO CON $\{C\}$.

DEFINIAMO UNA MISURA

$$d\mu[C] = \frac{1}{2} [\delta(\sigma+1) + \delta(\sigma-1)] d\sigma$$

NOTA:
 $= \delta(1 - \sigma^2) d\sigma$

POLCHE' $\sigma_i = \pm 1$, INFATTI, MI RICONDUCA AL DISCHETTO TRAMITE

$$\int d\sigma (\delta(\sigma+1) + \delta(\sigma-1)) \stackrel{!}{=} \sum_{\sigma_i = \pm 1}$$

DEFINIAMO

$$dP_\beta[c] = \frac{e^{-\beta H[c]}}{Z_\beta} d\mu[c] \quad d\mu[c] = p_\beta[c] d\mu[c]$$

LA FUNZIONE DI PARTIZIONE VALE QUINDI

$$Z_\beta = \int d\mu[c] e^{-\beta H[c]}$$

COSÌ CHE IL VALORE DI ASPETTAZIONE DI UNA GRANDEZZA 'A' SIA

$$\langle A \rangle_\beta = \int d\mu[c] A[c] p_\beta[c]$$

DEFINIAMO IL FUNZIONALE ENTROPIA (PER UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA $p[c]$)

$$S[p] = - \int d\mu[c] p[c] \log p[c] = - \langle \log p[c] \rangle$$

PIÙ È ORDINATO IL SISTEMA (i.e. LA p_β SOMIGUA A UNA DELTA),

PIÙ PICCOLA È L'ENTROPIA. A $T=0$, p_β È UNA δ (O SOMMA DI δ).

MENO SAPPIAMO DEL SISTEMA E PIÙ $S[p]$ È GRANDE.

NEL FORMALISMO DISCRETO,

$$c_j \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (\text{CONFIGURAZIONI POSSIBILI})$$

$$p_j = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_j} \quad (\text{PROBABILITÀ DELLA CONFIGURAZIONE } j)$$

$$Z = \sum_{j=1}^M e^{-\beta H_j} \quad (\text{FUNZIONE DI PARTIZIONE})$$

$$\langle A \rangle = \sum_{j=1}^M A_j p_j \quad (\text{VALORE DI ASPETTAZIONE})$$

$$S[p] = - \sum_{j=1}^M p_j \log p_j \geq 0 \quad (\text{ENTROPIA})$$

DATA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA, POSSO PENSARE SEMPRE A UN PROCEDIMENTO CON CUI LA DISCRETIZZAZIONE È POI PRENDO UN LIMITE IN CUI LA DISCRETIZZAZIONE TENDE A ZERO.

NOTIAMO CHE $S[p] \geq 0$. NEL CASO PIÙ ORDINATO POSSIBILE,

$$p_a = 1, \quad p_{j \neq a} = 0$$

POICHÉ LO ZERO DA LUOGO A FORME INDETERMINATE, PONGO $p_{j \neq a} = \epsilon$

E OTTENGO

$$S[p] = 0 - \sum_{j \neq 0} p_j \log p_j \xrightarrow{p_j \rightarrow 0} 0$$

OSSIA $S_{\min} = 0$.

- ESEMPIO: NEL CONTINUO NON È VERO CHE $S[p] \geq 0$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} e^{-x^2/2A} \xrightarrow{A \rightarrow 0} S(x)$$

$$S = +\frac{1}{2} (1 + \log 2\pi A) \xrightarrow{A \rightarrow 0} -\infty$$

NOTA:
 $S[p] = \int \frac{e^{-x^2/2A}}{\sqrt{2\pi A}} \left(\frac{1}{2} \log 2\pi A + \frac{x^2}{2A} \right) dx$
 $\langle x^{2m} \rangle = (2m-1)!! \sigma^{2m}$

È UN PROBLEMA CHE SI PRESENTA CON DISTRIBUZIONI CONTINUE; È ANCHE PER EVITARLO CHE IN QUESTO CORSO LAVOREREMO NEL DISCHETTO.

- ESEMPIO: CONNESSIONE CON LA TEORIA DELL'INFORMAZIONE

SISTEMA CON M CONFIGURAZIONI, DI CUI SOLO $L < M$ POSSIBILI ED EQUIPROBABILI:

$$p_j = \begin{cases} \frac{1}{L} & j \leq L \\ 0 & j > L \end{cases}$$

SE $L=M$ HO IL DISORDINE COMPLETO (UNIFORME); SE $L=1$ HO ORDINE. QUANTO VALE S ? HO DI NUOVO UN PROBLEMA DI REGOLARIZZAZIONE:

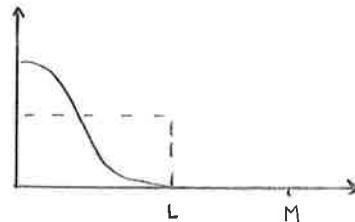
$$p_j = \begin{cases} \frac{1}{L} - \frac{M-L}{L} \varepsilon & j \leq L \\ \varepsilon & j > L \end{cases}$$

NOTA: IN QUESTO MODO È PRESERVATA LA NORMALIZZAZIONE.
PER $L=M$ DEVO RIADJUSTARE, INOLTRE, $p_j = \frac{1}{M} \forall j$.

DA QUI $S = \log L$.

SI NOTI CHE

$$e^{S[p]} = L$$



OSSIA IL NUMERO DELLE CONFIGURAZIONI IN CUI IL SISTEMA PUÒ TROVARSI. E SE ANESSI UNA DISTRIBUZIONE PIÙ COMPLICATA? $e^{S[p]}$ MI DAREBBE IL NUMERO DI CONFIGURAZIONI IN CUI IL SISTEMA PUÒ TROVARSI CON PROBABILITÀ NON TROPPO PICCOLA, COME ORA CELOCHEREMO DI CONVINCERCI.

PRENDIAMO UN SISTEMA CON 2^k CONFIGURAZIONI POSSIBILI. PER

TRASMETTERE LO STATO DEL SISTEMA DEVO DARE UN NUMERO TRA

$$0, \dots, 2^k - 1$$

IN BINARIO, AD` SIGNIFICA k BIT.

DATI N COPIE DI QUESTO SISTEMA, MI SERVONO Nk BIT.

MA SE E` NOTA p_{eq} , POSSO RISPARMIARE QUALCOSA?

SE FOSSE $p_{eq} = 0$, SAPREI DOVE SONO TUTTI AD ESEMPIO; SE FOSSE UNIFORME, NON RISPARMIEREI NULLA.

IN ALTRI TERMINI, NOTA p_{eq} , QUAL E` IL NUMERO MINIMO DI BIT B_N CHE DEVO TRASMETTERE AFFINCHÉ LA PROBABILITÀ DI INTERPRETARE MALE IL MESSAGGIO TENDA A ZERO PER $N \rightarrow \infty$?

LA RISPOSTA E` DATA DAL TEOREMA DI SHANNON:

$$\begin{matrix} B_N \\ \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \end{matrix} \frac{S[p]}{\ln 2}$$

NOTA: NEL CASO UNIFORME,
 $S[p] = \log L = \log 2^k = k \log 2 \Rightarrow \frac{B_N}{S[p]} \sim \frac{Nk}{\ln 2^k}$
 $L = \ln e^{S[p]}$

PER CONOSCERE LA CONFIGURAZIONE DI N SISTEMI A SERVONO LO STESSO NUMERO DI BIT CHE NEL CASO IN CUI SOLO $e^{S[p]}$ CONFIGURAZIONI HANNO $p \neq 0$, $p_i = p_j \forall i, j$.

DERIVAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN

SUPPONIAMO DI CONOSCERE DEL MIO SISTEMA SOLAMENTE L'ENERGIA U .

RICHIEDIAMO CHE p SIA TALE DA MASSIMIZZARE L'ENTROPIA COMPATIBILMENTE CON IL VINCOLO SU

NOTA: QUESTO VUOL DIRE ~~DEPORRE~~ LA DISTRIBUZIONE PIÙ PROBABILE.

$$E[p] = \langle H \rangle_p$$

OPVERO, CERTIAMO IL MASSIMO DI S SOTTO I VINCOLI:

$$U = E[p] = \sum_{j=1}^M p_j H_j$$

$$\sum_{j=1}^M p_j = 1$$

USIAMO I MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE: MASSIMIZZIAMO LA FUNZIONE $\psi[p]$ CON IL VINCOLO $v[p] = 0$. CONSIDERO LA FUNZIONE MODIFICATA

$$\psi_\lambda[p] = \psi[p] + \lambda v[p]$$

MASSIMIZZO QUINDI $\psi_{\lambda}[\rho]$ E SCELGO IL MOLTIPLICATORE λ t.c. $\psi_{\lambda}[\rho]$ SODDISFA IL VINCOLO SUL MASSIMO.

CHE NE SERVONO DUE:

$$v_1[\rho] = \sum_{j=1}^M p_j - 1$$

$$v_2[\rho] = \sum_{j=1}^M p_j E_j - U$$

NOTA: OCCHIO AL CAMBIO DI NOTAZIONE. ORA CHIAMO E_j QUELLA CHE PRIMA ERA H_j .

$$\psi[\rho] = S[\rho] = - \sum_k p_k \log p_k$$

PERDAO'

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2}[\rho] = - \sum_k p_k \ln p_k + \lambda_1 \left(\sum_k p_k - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_k p_k E_k - U \right)$$

CALCOLO

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_j} = - \ln p_j - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 E_j \equiv 0$$

DA QUI

$$\ln p_j = -1 + \lambda_1 + \lambda_2 E_j \Rightarrow p_j = C \cdot e^{\lambda_1 + \lambda_2 E_j}$$

HO GIÀ VINTO. ORA λ_1 SARÀ t.c.

$$\sum_j p_j = 1 \Rightarrow p_j = \frac{e^{\lambda_2 E_j}}{\sum_k e^{\lambda_2 E_k}}$$

MENTRE λ_2 SARÀ t.c.

$$\sum_k p_k E_k = U \Rightarrow U = \frac{\sum_j C e^{\lambda_2 E_j} E_j}{\sum_j e^{\lambda_2 E_j}}$$

E CHIAMO $\lambda_2 = -\beta$: CIÒ FISSA β ($\beta = \frac{1}{T}$).

QUINDI LA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN PUÒ ESSERE DEFINITA DA UN PRINCIPIO VARIAZIONALE. Sperimentalmente, se controllo U SO CHE LO STATO CHE È PIÙ PROBABILE CHE IL SISTEMA ASSUMA È PROPRIO QUELLO DI EQUILIBRIO.

DEFINIZIONE ALTERNATIVA

LA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN È QUELLA CHE MINIMIZZA L'ENERGIA LIBERA (CON $\sum_i p_i = 1$)

NOTA: PUOI VEDERLO COME UN COROLARIO DI QUANTO APPENA DIMOSTRATO.

$$\Phi[\rho] = E[\rho] - \frac{1}{\beta} S[\rho]$$

• LEGAME TRA β_{MS} E T_{TERM}

1^a LEGGE DELLA TERMODINAMICA:

$$\delta Q = dU - \delta L$$

dU DIFFERENZIALE ESATTO

2^a LEGGE DELLA TERMODINAMICA:

$$\frac{\delta Q}{T_{TERM}} = dS_{TERM}$$

NOTA: δL E δQ SONO RISPETTIVAMENTE IL LAVORO E IL CALORE FORNITI AL SISTEMA.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE IN MECCANICA STATISTICA

$$\beta_{MS} \delta Q = \beta_{MS} (dU_{MS} - \delta L_{MS}) = dS_{MS}$$

ONERO

$$\beta_{MS} \propto \frac{1}{T_{TERM}}$$

$$S_{MS} = S_{TERM}$$

CI SERVE INNANZITUTTO CAPIRE COME SI COMPIE LAVORO IN MECCANICA STATISTICA. CONSIDERIAMO UN' HAMILTONIANA

$$H = H_0 + \lambda H_1$$

FORNISCO ENERGIA AL SISTEMA VARIANDO IL PARAMETRO DI CONTROLLO λ . DATA UNA VARIAZIONE INFINTESIMA

$$\lambda \rightarrow \lambda + \delta \lambda$$

$$\beta \rightarrow \beta + \delta \beta$$

IL LAVORO DIPENDE SOLO DA λ E NON DA β :

$$\delta L = \left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle \delta \lambda$$

NOTA: VALE LA PENA DI PARTIRE DAL FONDO,
 $S = \beta(U - F) \Rightarrow dS = d(\beta U) - d(\beta F)$
 A QUEL PUNTO A UNO VIENE VOGLIA DI CALCOLARE $d(\beta F)$.

CALCOLIAMO ALLORA

$$d(\beta F) = d(-\ln Z) = \frac{d}{d\beta} (-\ln Z) d\beta + \frac{d}{d\lambda} (-\ln Z) d\lambda$$

MA VALGONO

$$\frac{d}{d\beta} (-\ln Z) = U = \langle E \rangle$$

$$\text{NOTA: } = -\frac{1}{Z} \int d\mu \frac{d}{d\beta} e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \int d\mu H e^{-\beta H}.$$

$$\frac{d}{d\lambda} (-\ln Z) = -\frac{1}{Z} \int d\mu e^{-\beta H} (-\beta) \frac{dH}{d\lambda} = \beta \left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle = \beta \langle H_1 \rangle$$

PERHAN

$$d(\beta F) = U d\beta + \beta < \frac{\partial H}{\partial \lambda} > d\lambda = U d\beta + \beta \delta L$$

IN MECANICA STATISTICA, L'ENTROPIA SI CALCOLA COME

$$S = \beta(U - F)$$

PERHAN

$$dS = \beta dU + U d\beta - d(\beta F) = \beta dU - \beta \delta L$$

SI È COSÌ DEMOSTRATO CHE

$$dS_{MS} = \beta (dU_{MS} - \delta L_{MS})$$

ALCUNE RELAZIONI UTILI

L'ENERGIA LIBERA SODDISFA

$$\Phi [p_{eq}] = F_p = U - \frac{\beta}{\beta} = -\frac{1}{\beta} \log Z_p \quad (I)$$

INFATTI

$$p_j^{eq} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_j}$$

$$F_{eq} = E - \frac{1}{\beta} S$$

$$= \sum_j p_j E_j + \frac{1}{\beta} \sum_j p_j \log p_j$$

$$= \frac{1}{Z} \left\{ \sum_j e^{-\beta E_j} E_j + \frac{1}{\beta} \sum_j e^{-\beta E_j} \log \left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_j} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{Z} \left\{ \sum_j e^{-\beta E_j} E_j - \frac{1}{\beta} \sum_j e^{-\beta E_j} (\log Z) + \frac{1}{\beta} \sum_j e^{-\beta E_j} (-\beta E_j) \right\}$$

$$= \frac{1}{Z} \left(-\frac{1}{\beta} \log Z \right) \sum_j e^{-\beta E_j}$$

$$= -\frac{1}{\beta} \log Z$$

UNA SECONDA RELAZIONE UTILE È

$$S[p_{eq}] = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (II)$$

INFATTI

$$= -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta} \log Z_p \right) = \log Z_p - \beta \frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

$$= \log Z_p + \beta U = \beta(U - F) = S$$

DOVE SI È USATA LA (I),

$$U = E[p_{eq}] = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_p = F_p + \beta \frac{\partial F_p}{\partial \beta} \quad (III)$$

DERIVAZIONE FUNZIONALE

DEF: FUNZIONALE

COME UNA FUNZIONE $f(\cdot)$ ASSOCIA UN NUMERO A UN ALTRO,

$$y = f(x)$$

COSÌ UN FUNZIONALE $F[\cdot]$ ASSOCIA A UNA FUNZIONE g UN NUMERO

$$\varphi = F[g]$$

ESEMPIO

$$F_{AB}^{(x)}[g(x)] = \int_A^B g(x) dx$$

$$F_{AB}^{(M)}[g(x)] = \max_{A \leq x \leq B} g(x)$$

$$F^{(\bar{x})}[g] = g(\bar{x})$$

$$S[g] = - \int dx g(x) \log(g(x))$$

DERIVAZIONE

CONSIDERIAMO

NOTA: QUESTA NOTAZIONE FA SCHIFO, VEDI SOTTO.
NEL SEGUITO CORREGGEREMO TUTTO BASANDOMI SULLA (Ic).

$$F[g(x) + \varepsilon h(x)] := F[g(x)] + \varepsilon \int dx \frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} h(x) + O(\varepsilon^2) \quad (I)$$

TALE RELAZIONE DEFINISCE LA DERIVATA FUNZIONALE

$$\frac{\delta F[g]}{\delta g(x)}$$

$$\frac{\delta g(y)}{\delta g(x)}$$

NOTA: IN EFFETTI UNA DEFINIZIONE ALTERNATIVA È

$$\frac{\delta F[g(x)]}{\delta g(y)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ F[g(x) + \varepsilon \delta(x-y)] - F[g(x)] \}$$

$$\frac{\delta g(y)}{\delta g(x)} = \delta(x-y)$$

ESEMPIO

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y) = 1$$

SI NOTI CHE LA DERIVATA ELIMINA NON SOLO g , MA ANCHE UN ELEMENTO DI VOLUME.

NOTA: TRONO LA NOTAZIONE DELLA (I) FUORVIANTE. I CASI SONO DUE: O LO SI PENSA COME UN FUNZIONALE,

$$F[g + \varepsilon h] = F[g] + \varepsilon \int dx \frac{\delta F[g]}{\delta g}(x) \cdot h(x) + O(\varepsilon^2) \quad (Ib)$$

O PERHÒ L'OGGETTO SI CAMBIA IL NOME ALLA VARIABILE MUTA DI INTEGRAZIONE (MODO PIÙ FISICO, CONFONDO FUNZIONALE E FUNZIONE),

$$F[g(x) + \varepsilon h(x)] = F[g(x)] + \varepsilon \int dy \frac{\delta F[g(y)]}{\delta g(x)} h(y) + O(\varepsilon^2) \quad (Ic)$$

DALLA (I) SI RICAVA

$$\frac{F[g(x) + \varepsilon h(x)] - F[g(x)]}{\varepsilon} = \int dy \frac{\delta F[g]}{\delta g(y)} h(y)$$

AD ESEMPIO, PER IL FUNZIONALE INTEGRALE DEFINITO,

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx (g(x) + \varepsilon h(x)) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx h(x)$$

PERCIO' (GRAZIE ALLA LINEARITA' DELL'INTEGRALE) RITROVO

$$\frac{\delta F^{(I)}[g]}{\delta g} = 1$$

DERIVATA COMPOSTA

NOTA: QUANDO CI HA PRESO LA MANO,

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(g(y)) dy = f'(g(x)) \quad \frac{\delta f(g(r))}{\delta g(x)} = f'(g(r)) \delta(x-r)$$

AD ESEMPIO

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy g^2(y) = 2g(x) \frac{\delta}{\delta g(x)} \int dy g(y) = 2g(x)$$

• FOCUS: DEMOSTRAZIONE. DALLA DEFINIZIONE (Ib), SCEGLIENDO $F[g] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(g(x)) dx$,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int dx \frac{\delta F[g]}{\delta g}(x) h(x) + O(\varepsilon^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ f(g(x) + \varepsilon h(x)) - f(g(x)) \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ f(g(x)) + \varepsilon h(x) \cdot f'(g(x)) + O(\varepsilon^2) - f(g(x)) \right\} dx = \varepsilon \int dx f'(g(x)) h(x) \end{aligned}$$

TAYLOR

SI NOTI CHE HO SVILUPPATO USANDO DERIVATE DI FUNZIONI ORDINARIE, NON DERivate FUNZIONALI.

TIENI ANCHE A MENTE CHE, DATO IL FUNZIONALE

$$F[p] = \int f(r, p(r), \nabla p(r)) dr$$

SI AVRA'

$$\frac{\delta F}{\delta p} = \frac{\partial f}{\partial p} - \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial \nabla p}$$

SISTEMI MAGNETICI

UNA CONFIGURAZIONE C E' DEFINITA DA $C = \{\sigma_i\}$, DOVE σ_i SONO VARIABILI DI SPIN.

UNA VARIABILE COME LA TEMPERATURA CRITICA T_c PUO' VARIARE DA SISTEMA A SISTEMA, MA VI SONO VARIABILI (COME GLI ESPONENTI CRITICI) UNIVERSALI. INFATTI, VIANO AI PUNTI CRITICI, LE CORRELAZIONI DIVENTANO LONG-HANGED: LE COSE IMPORTANTI ACCADONO SU GRANDI DISTANZE E I DETTAGLI DEL RETICOLO NON CONTA NO.

PRENDIAMO AD ESEMPIO UNA PROTEINA (ETEROPOLIMERO): E' UN "FILO" CHE SI PUO' APRIRE O CHIUDERE VARIANDO T . A BASSA T , ESSO SI PIAGGOMITOLA.

UNA PROTEINA E' ETEROGENEA E QUESTO LA DISTINGUE DA UN POLIMERO DI UN MAGLIOONE. IL "DISORDINE" E' RESPONSABILE DEL FATTO CHE LA PROTEINA ASSUMA SEMPRE LA STESSA FORMA. [etc.]

IL MODELLO

VARIABILI DI SPIN $\underline{S}(\underline{x})$.

POSSO SCEGLIERE \underline{x} COME UNA D-PLA E \underline{S} E' DETERMINATO DAL SINGOLO CASO (CI POTREI DESCRIVERE LA QCD). PER NOI, \underline{S} E' UNA VARIABILE $\sigma_i = \pm 1$.

L'HAMILTONIANA SI SCRIVE

$$H[C] = \underbrace{H_0[C]}_{\substack{\text{HAMILTONIANA} \\ \text{LIBERA}}} - \underbrace{\int d^Dx \underline{h}(\underline{x}) \cdot \underline{S}(\underline{x})}_{\text{TERMINI DI ACCOPPIAMENTO CON IL CAMPO MAGNETICO}}$$

DEFINISCO L'ENERGIA LIBERIA

$$F[h] : F[\underline{h}(\underline{x})] = -\frac{1}{\beta} \ln Z[h] \quad f(h) = \frac{F[h]}{V}$$

DATA UN'OSSEGNABILE, IL SUO VALORE D'ASPETTAZIONE SARÀ

$$\langle \cdot \rangle = \int (\cdot) d[C] P[C]$$

NOTA: SE $\underline{h}(\underline{x}) \equiv h$ (UNIFORME), SI HA COME SOPRA $f = f(h) = f[h] \mid_{h(x)=h}$.

AD ESEMPIO, LA MAGNETIZZAZIONE E' DEFINITA COME

$$m_\nu(\underline{x}) = \langle S_\nu(\underline{x}) \rangle$$

$$M_\nu = \langle \int_V d^3x S_\nu(\underline{x}) \rangle = \langle S_\nu^T \rangle$$

NOTA: IN S_ν^T LA T STA PER "TOTALE", NON INDICA UNA DIPENDENZA DALLA TEMPERATURA.

E SI AVRA'

$$m_\nu(\underline{x}) = - \frac{\delta F[h]}{\delta h_\nu(\underline{x})}$$

SI NOTI CHE, INFATTI,

$$-\frac{\delta}{\delta h_\nu(\underline{x})} \log Z = \frac{1}{Z} \int e^{+p} \int d\underline{x} h \cdot S(\underline{x}) - \beta H_0[c] (+\beta) S_\nu(\underline{x}) d[c]$$

SE IL CAMPO NON DIPENDE DAL SITO, AVRA' PER QUALSIASI \underline{x}

$$m_\nu = - \frac{\partial f(h)}{\partial h_\nu}$$

NOTA: SE E' VERA LA RELAZIONE PER $m_\nu(\underline{x})$, QUI HO UNA DEFINITA PARZIALE INVECE DI QUELLA FUNZIONALE CHE, COME SI E' VISTO, SI MANGIA ANCHE UN ELEMENTO DI VOLUME.

UN'ALTRA PROPRIETA' IMPORTANTE (PERCHÉ MISURABILE) E' LA SUSCETTIVITA' MAGNETICA

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{\partial m_\mu}{\partial h_\nu}$$

SE IL MATERIALE E' ISOTROPO,

$$\chi_{\mu\nu} = \chi S_{\mu\nu}$$

SE NON E' NE' ISOTROPO, NE' OMOGENEO, POSSO DEFINIRE

$$\chi_{\mu\nu}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\delta m_\mu(\underline{x})}{\delta h_\nu(\underline{y})} = - \frac{\delta^2 F[h]}{\delta h_\nu(\underline{y}) \delta h_\mu(\underline{x})}$$

IN UN SISTEMA INVARIANTE PER TRASLAZIONE,

$$\chi_{\mu\nu}(\underline{x}, \underline{y}) = \chi_{\mu\nu}(\underline{x} - \underline{y})$$

NOTA: OGNI OMOGENEO. SE FOSSE ISOTROPO,
 $\chi_{\mu\nu}(\underline{x}, \underline{y}) = \chi_{\mu\nu}(1|\underline{x} - \underline{y}|)$

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{1}{V} \int_V d^3x \chi_{\mu\nu}(\underline{x})$$

NOTA: SEGUATA, VEDI SOTTO. $\chi_{\mu\nu} = \int dx \chi_{\mu\nu}(x)$

NOTA: NEL SEGUITO DO PER ASSODATO CHE CI SIA UN ERRORE E CHE QUEL FATTORE $\frac{1}{V}$ NON CI VADA. IN EFFETTI $\chi_{\mu\nu}(\underline{x}, \underline{y})$ E' DEFINITA PER UNITA' DI $[V]^2$, QUINDI SE LA INTEGRO UNA VOLTA OTTERGO QUALCOSA CHE E' GIÀ PER UNITA' DI VOLUME, VEDI ANCHE IL FOCUS TRA UN PAIO DI PAGINE.

FUNZIONE DI CORRELAZIONE CONNESSA

$$\langle AB \rangle_c = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

DETTO V IL VOLUME DEL SISTEMA, SI OTTIENE

$$V\chi_{\mu\nu} = \beta \langle S_\mu^T S_\nu^T \rangle_c = \beta [S_\mu^T S_\nu^T - \langle S_\mu^T \rangle \langle S_\nu^T \rangle] = \beta \langle (S_\mu^T - \langle S_\mu^T \rangle)(S_\nu^T - \langle S_\nu^T \rangle) \rangle$$

MOLTORE

NOTA: ANCHE QUESTE LE SVOLGO PER ESTESO NEL FOGLIO QUA A FIANCO.

$$\chi_{\mu\nu}(x, y) = \beta \langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle_c$$

QUELLE VISTE SONO UN ESEMPIO DEL TEOREMA DI FLUTTUAZIONE-DISSIPAZIONE. IO MISUO UNA FUNZIONE RISPOSTA IN UN SISTEMA PERTURBATO E HO UNA STIMA DELLA QUANTITA' A DESTRA, CHE E' CALCOLATA SUL SISTEMA IN EQUILIBRIO* (QUESTA E' PIU' SEMPLICE DA SIMULARE NUMERICAMENTE, L'ALTRA DA MISURARE).

TEOREMA DI FLUTTUAZIONE - DISSIPAZIONE

LA RISPOSTA LINEARE DEL SISTEMA E' DATA DALLE SUE FLUTTUAZIONI ALEATORIE.

$$H = H_0 + \lambda H_1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle = \langle AH_1 \rangle_c$$

DIM:

$$\langle A \rangle = \frac{\int d[c] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} A}{\int d[c] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)}}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle = -\frac{1}{Z^2} \left(\int d[c] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} A \right) \left(\int d[c] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} (-\beta H_1) \right)$$

$$+ \frac{1}{Z} \int d[c] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} A (-\beta H_1)$$

$$= \beta (\langle A \times H_1 \rangle - \langle AH_1 \rangle) = -\beta \langle AH_1 \rangle_c$$

*NOTA: SE $P_{eq}[c]$ E' CONCENTRATA SU UNA SOLA CONFIGURAZIONE (OSSIA SE E' UNA SCIA), NON VI SONO FLUTTUAZIONI TERMODINAMICHE E LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE $\langle AB \rangle_c$ SONO NULLE.

NOTA: CAPODO BASTI CONSIDERARE CHE $e^{-\beta \lambda H_1} = 1 + O(\lambda)$ PER POTERE INTERPRETARE TALI VALORI MEDI COME CALCOLATI SULLA DISTRIBUZIONE IMPERTURBATA.

FOCUS: CONTI PER ESTESO, SISTEMI MAGNETICI

USO LE DEFINIZIONI

$$F[h] = -\frac{1}{\beta} \ln Z[h]$$

$$Z[h] = \int d[c] e^{-\beta H[c]}$$

CON

$$H[c] = H_0[c] - \int dx h(x) \cdot S(x)$$

RICORDO LA REGOLA PER LE VARIAZIONI FUNZIONALI COMPOSTE,

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int f(g(y)) dy = f'(g(x))$$

QUINDI VERIFICO CHE VALE

$$m_\nu(x) = -\frac{\delta}{\delta h_\nu(x)} F[h] = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z[h]} \frac{\delta}{\delta h_\nu(x)} Z[h]$$

$$= \frac{1}{\beta Z[h]} \int d[c] \frac{\delta}{\delta h_\nu(x)} e^{-\beta(H_0[c] - \int dx' h(x') \cdot S(x'))}$$

$$= \frac{1}{\beta Z[h]} \int d[c] e^{-\beta H[c]} \beta \frac{\delta}{\delta h_\nu(x)} \left(\int dx' h(x') \cdot S(x') \right)$$

$$= \int d[c] \rho[c] S_\nu(x) = \langle S_\nu(x) \rangle$$

SIMILMENTE,

$$\chi_{\mu\nu}(x, y) = -\frac{\delta^2 F[h]}{\delta h_\mu(x) \delta h_\nu(y)} = \frac{\delta}{\delta h_\nu(y)} m_\mu(x)$$

$$= \int d[c] S_\mu(x) \frac{\delta}{\delta h_\nu(y)} \rho[c] = \int d[c] S_\mu(x) \frac{\delta}{\delta h_\nu(y)} \frac{e^{-\beta H[c,h]}}{Z[h]}$$

$$= \int \frac{d[c]}{Z[h]} S_\mu(x) \frac{\delta}{\delta h_\nu(y)} e^{-\beta H[c,h]} - \int \frac{d[c]}{Z[h]} S_\mu(x) e^{-\beta H[c]} \frac{\delta}{\delta h_\nu(y)} Z[h]$$

$$= \beta \int d[c] \frac{e^{-\beta H[c]}}{Z[h]} S_\mu(x) S_\nu(y) - \int \frac{d[c]}{Z[h]} S_\mu(x) e^{-\beta H[c]} \int d[c'] \frac{\delta}{\delta h_\nu(y)} e^{-\beta H[c']}$$

$$= \beta \left(\langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle - \langle S_\mu(x) \rangle \langle S_\nu(y) \rangle \right) = \beta \langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle_c$$

$$= \beta \left(\langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle - \langle S_\mu(x) \rangle \langle S_\nu(y) \rangle \right) = \beta \langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle_c$$

Ora mi basta integrarla due volte:

$$\int d\mathbf{x} d\mathbf{z} \chi_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \beta \left\langle \int S_\mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int S_\nu(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right\rangle_c = \beta \langle S_\mu^T S_\nu^T \rangle_c$$

"(OMOGENEO)

$$\int d\mathbf{x} d\mathbf{z} \chi_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \stackrel{\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}}{=} \int d\mathbf{y} d\mathbf{z} \chi_{\mu\nu}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = V \int d\mathbf{z} \chi_{\mu\nu}(\mathbf{z}, \mathbf{0}) = V \cdot \chi_{\mu\nu}$$

* IN TEORIA DEI CAMPI, È STANDARD DEFINIRE IL FUNZIONALE GENERATORE (EUCLideo)

$$Z(j) = \int \delta\phi e^{-S_e(\phi) + \int d\mathbf{x} j(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})}$$

$$S_e(\phi) = \int d^4x_{\text{ED}} \mathcal{L}[\phi](\mathbf{x})$$

FOCUS:
FUNZIONALE
GENERATORE
(FONTE: PEKIN)

DAL QUALE SI RICAVANO LE FUNZIONI DI GREEN TRAMITE DERIVAZIONE FUNZIONALE:

$$\frac{\delta^m Z(j)}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_m)} \Big|_{j=0} = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \rangle$$

SI OSSERVA L'ANALOGIA CON LA FUNZIONE DI PARTIZIONE Z , DOVE IL TERMINE DI ACCOPPIAMENTO CON IL CAMPO MAGNETICO GIOCA IL RUOLO DI SOGENTE.

IL CALCOLO DI $\chi_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ESEMPLIFICA UN ALTRO RISULTATO GENERALE (VEDI AD ESEMPIO BINNEY, APPENDICE D): $F[h]$ È IL FUNZIONALE GENERATORE DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE CONNESSE. IN SOLDONI, LA PRIMA VOLTA CHE SI DERIVA $\ln Z$ COMPARTE UN FATTORE $\frac{1}{Z[h]}$ DI CUI VA TENUTO CONTO IN TUTTE LE DERivate SUCCESSIVE; I NUOVI TERMINI CHE EMERGONO (RISPETTO ALLE DERivate DI Z) SONO ESATTAMENTE QUELLI CHE SOTTRAFFOGNO A $\langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_m) \rangle$ QUANDO DEFINISCO Ricorsivamente LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE CONNESSE (COME VEDREMO PIÙ AVANTI).

PROVA, INFINE, A RIVEDERE IN QUESTI TERMINI IL TEOREMA DELLA RIPOSTA LINEARE.

AVEMMO, IN GENERALE,

$$\langle \sigma_1 \dots \sigma_m \rangle_c = \left(\frac{1}{\beta} \right)^m \frac{\partial^m}{\partial h_1 \dots \partial h_m} \ln Z[h]$$

$$\langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_m) \rangle_c = \left(\frac{1}{\beta} \right)^m \frac{\delta^m}{\delta h(x_1) \dots \delta h(x_m)} \ln Z[h]$$

ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA

I SISTEMI MAGNETICI SVILUPPANO UNA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA A BASSE TEMPERATURE. SUPPONIAMO

$$h=0, T < T_c, m > 0$$

IN ASSENZA DI PERTURBAZIONI, QUESTO E' UNO STATO STABILE DEL SISTEMA. APPLICO PER UN TEMPO BREVISSIMO UN CAMPO ESTERNO E, DOPO AVERLO SPENTO, TROVO

$$h=0, T < T_c, \tilde{m} < 0$$

$$\tilde{m} = -m$$

IL CHE SIGNIFICA CHE ESISTONO DUE STATI STABILI $|+\rangle, |-\rangle$.

DAL PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO, PER OGNI CONFIGURAZIONE C NE ESISTE UN'ALTRA, \tilde{C} , t.c.

$$E[\tilde{C}] = E[C]$$

$$S_{\text{tot}}[\tilde{C}] = -S_{\text{tot}}[C]$$

NOTA: QUESTA SIMMETRIA SI DICE TIME REVERSAL E IMPLICA L'INVERSIONE ANCHE DELLE VELOCITA' DELLE PARTICELLE CHE COMPOSTOGNO IL SISTEMA.
 S_{tot} E' LO SPIN TOTALE.

NOI SAPPIAMO CHE L' HAMILTONIANA E' INVARIANTE PER $S \rightarrow -S$.

AD ESEMPIO NEL MODELLO DI ISING

$$H = -J \sum' \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

NOTA: H E' SIMMETRICA QUANDO $h=0$.

DONDE $J > 0$ E \sum' E' LA SOMMA SUI PRIMI VICINI NEL RETTICOLO.

LA SIMMETRIA PER INVERSIONE DI SPIN E' DESCRITTA DAL GRUPPO DI SIMMETRIA DISCHETA Z_2 . SI PARLA DI ROTTURA SPONTANEA QUANDO L' HAMILTONIANA HA QUESTA SIMMETRIA, MA NON $P_{\text{eq}}[C]$.

MA

$$P_{\text{eq}}[C] = \frac{e^{-\beta H[C]}}{\int d[C] e^{-\beta H[C]}}$$

NOTA: SI PARLA INVECE DI ROTTURA ESPRESSA DI SIMMETRIA IN PRESENZA DI UN CAMPO MAGNETICO ESTERNO.

SE $H[C]$ E' INVARIANTE, COME PUO' $P_{\text{eq}}[C]$ NON ESSERLO?

VEDREMO CHE IL PROBLEMA SI RISOLVERA' SOLO NEL LIMITE $V \rightarrow \infty$.

IN EFFETTI NON ESISTONO TRANSIZIONI DI FASE SE IL VOLUME E' FINITO.

NOTA: SE $V \rightarrow \infty$ L'ESPRESSIONE DI P_{eq} E' SOLO FORMALE, PERCHÉ Z E' INFINTA.

AD ESEMPIO, IN UNA SIMULAZIONE LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE NON DIVERGE: NON PUO' SUPERARE LA DIMENSIONE DEL SISTEMA.

POSSENO INVECE NASCERE SINGOLARITA' NEL LIMITE DI VOLUME INFINTO,

SE $h=0$ E $V \rightarrow \infty$, ALLORA TROVO SEMPRE $m=0$.

SE PRENDO h PICCOLO MA FINITO, STUDIO $f(h)$ NEL LIMITE $V \rightarrow \infty$ E Poi MANDO $h \rightarrow 0$: OVVERO, CALCOLO

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} m_h$$

L'ORDINE E' IMPORTANTE!

PER SIMMETRIA DELL'HAMILTONIANA*, DONNA' ESSERE SEMPRE $f(h) = f(-h)$

OSSIA L'ENERGIA LIBERA E' UNA FUNZIONE pari di h . SEGUO CHE LA MAGNETIZZAZIONE E' UNA FUNZIONE dispari:

$$m(h) = -\frac{\partial f(h)}{\partial h} = -m(-h)$$

CIO' E' VERIFICATO IN ENTRAMBI I CASI RAFFIGURATI A FIANCO.

SI NOTI CHE LA MAGNETIZZAZIONE MEDIA

E' NULLA IN AMBEDUE I CASI; MA NEL PRIMO CASO CI' SIGNIFICA CHE GLI SPIN SONO DISALLINEATI (T ALTA), MENTRE NEL SECONDO E' NULLA SOLO LA MEDIA SU UN ENSEMBLE DI SISTEMI.

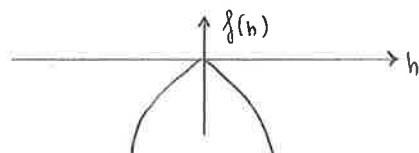
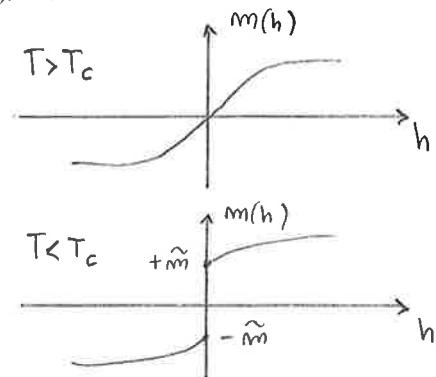
PER $T > T_c$, f E' DIFFERENZIABILE IN $h=0$ E m E' CONTINUA:

$$f(h) = f(0) + O(h^\alpha) \quad \alpha > 1$$

PER $T < T_c$, f NON E' DIFFERENZIABILE IN $h=0$ E m E' DISCONTINUA:

$$f(h) = f(0) - \tilde{m}|h| + O(h^\alpha)$$

*NOTA: NON DELL'HAMILTONIANA, MA DELLA FUNZIONE DI PARTIZIONE:
 $Z = \sum_{\{o_i=\pm 1\}} e^{-F(\dots) + h \sum_i o_i}$
 SOMMA SU CONFIGURAZIONI CON $o_i = \pm 1$
 CHE HANNO LO STESSO PESO.



A VERMO

$$m^+ \equiv \lim_{h \rightarrow 0^+} m(h) = \tilde{m}$$

$$m^- \equiv \lim_{h \rightarrow 0^-} m(h) = -\tilde{m}$$

SE $T > T_c$,

$$h=0 \Rightarrow m=0$$

$$h=\varepsilon \Rightarrow m=\varepsilon$$

SE $T < T_c$, INVECE,

$$h=\varepsilon \Rightarrow m=O(1)$$

*NOTA: IL PARAMETRO D'ORDINE E`:

- LA QUANTITA' TERMODINAMICA CHE SUBISCE UNA DISCONTINUITA' ATTRAVERSO UNA TRANSIZIONE DEL PRIMO ORDINE (PESKIN).
- LA QUANTITA' CHE IN MEDIA SVANISCE DA UN LATO DELLA TRANSIZIONE (DEL II° ORDINE), MENTRE SI ALLONTANA DA ZERO DALL'ALTRO LATO (BINNEY).

ESEMPI SONO MM PER I FERROMAGNETI

$$\phi(x) = \rho(x) - \rho_{\text{gas}}(x)$$

PER UN SISTEMA ACQUA/VAPORE.

**NOTA: LA LORO PARTICOLARITA' E' CHE HANNO UN "PRECUSOR". AD ESEMPIO, X DIVENTA SE MI AVvicino AL PUNTO CRITICO, SEGNALANDOLO.

CLASSIFICAZIONE DI EHRENFEST

SE L'ENERGIA LIBERA F E' DIFFERENZIABILE (K-1) VOLTE MA NON K VOLTE, SI PARLA DI TRANSIZIONE DI FASE DI ORDINE K.

SE K=1, IL PARAMETRO D'ORDINE* FA UN SALTO E HO UNA TRANSIZIONE DI FASE DEL I° ORDINE.

SE K=2, IL PARAMETRO D'ORDINE NON FA SALTI E HO UNA TRANSIZIONE DI FASE DEL II° ORDINE**.

NEL GRAFICO, IN 'A' SI HA UNA TRANSIZIONE DEL II° ORDINE IN T.

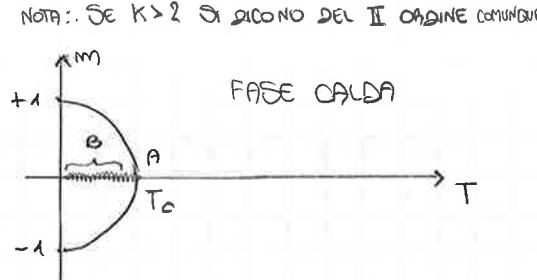
NEI PUNTI 'B' SI HANNO TRANSIZIONI DEL I° ORDINE IN h.

VEDREMO CHE PER $T=T_c$ LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE $\xi \rightarrow \infty$.

IN CASO SI ABbia UNA TRANSIZIONE DEL I° ORDINE IN T (e.g. ACQUA-GHIACCIO)

$$u^+ = \lim_{T \rightarrow T_c^+} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta f) \neq u^- = \lim_{T \rightarrow T_c^-} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta f)$$

E SI PARLA DI CALORE LATENTE.



$$\text{NOTA: } u = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z, Z = e^{-\beta F}$$

NOTA: f(β) E' SEMPRE CONTINUA PERCHÉ E' CONVessa (vedi p. 20 PARISI).

SINGOLARITA' DELL' ENERGIA LIBERA

PER DISCUTERE DI SINGOLARITA', DOBBIAMO ESTENDERLE AL PIANO COMPLESSO I VALORI CHE β PUO' ASSUMERE.

DEFINIAMO UNO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI COMPATTO. CHIAMIAMO

$$V_c = \int d[c]$$

(VOLUME DELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI)

$$|H|_{\max} = \max_{\{c\}} |H[c]|$$

Allora Z E' UNA FUNZIONE INTERA SE V E' FINITO. INFATTI

$$|Z(\beta)| = \left| \int d[c] e^{-\beta H[c]} \right| \leq V_c e^{\beta|H|_{\max}}$$

UNA FUNZIONE DI PARTIZIONE Z RAGIONEVOLE E' ANALITICA (ANCHE SE LO SPAZIO NON FOSSE COMPATTO), ALMENO NEL SEMIPIANO $\operatorname{Re}(\beta) > 0$,

ANCHE PER $V \rightarrow \infty$. ALLORA

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta V} \ln Z(\beta)$$

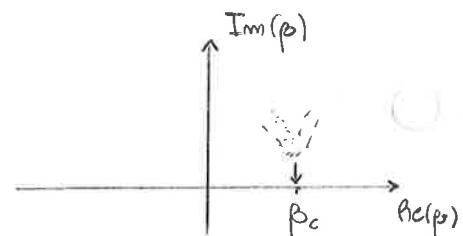
NOTA: SE $\operatorname{Re}(\beta) \leq 0$, E' OBIETTIVO CHE L'INTEGRALE CHE DEFINISCE Z DIVERGE PER $V \rightarrow \infty$.

PUO' PRESENTARE SINGOLARITA' SOLO IN CORRISPONDENZA DEGLI ZERI DELLA FUNZIONE DI PARTIZIONE.

SIANO $T, h \in \mathbb{R}^+$.

Z E' UNA SOMMA DI TERMINI POSITIVI, QUINDI NON PUO' AVERE ZERI SULL'ASSE REALE. PUO'

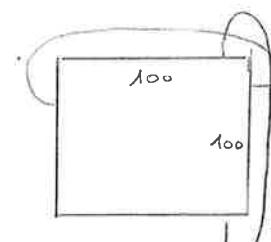
PERO' SUCCEDERE CHE GLI ZERI DI Z RAGGIUNGANO L'ASSE $\operatorname{Re}(\beta)$ SE $V \rightarrow \infty$.



CONDIZIONI AL BORDO

UN SISTEMA A VOLUME FINITO $V < \infty$ E' SPECIFICATO DANDO L'HAMILTONIANA H E LE CONDIZIONI AL BORDO* (BC).

IN GENERE SI SCELGONO CONDIZIONI PERIODICHE (PBC); IN ALTERNATIVA POSSO INSERIRE UN BORDO FATTO DI SPIN +1 (0 -1) FISSI.



* NOTA: cioe' il valore di $H[c]$ sulla SUPERFICIE.

SE NON SONO SU UNA TRANSIZIONE DI FASE AL PRIMO ORDINE, ALLORA $p_{eq}^{V=\infty}$ NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLE CONDIZIONI AL BORDO.

IN EFFETTI GLI SPIN SUL BORDO SONO UNA FRAZIONE $\frac{1}{l}$ DEL TOTALE. SE SONO PERO' SU UNA TRANSIZIONE DEL I° ORDINE*, BASTA UNA PICCOLA VARIAZIONE PER FARLAIRE L'UNA O L'ALTRA CONFIGURAZIONE.

LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE ξ MISURA QUANTO DISTANTE PUO' AFFRANCARE L'INFLUENZA DI UNA VARIAZIONE IN UN PUNTO. IN GENERE

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \sim e^{-|i-j|/\xi}$$

*NOTA: INFATTI LI ($T < T_c$) HO PIU' DI UNA CONFIGURAZIONE STABILE.

MA SU UNA TRANSIZIONE AL II° ORDINE ξ DIVERGE**.

NORMALMENTE, DATA UNA SCATOLA DI LATO L , GLI EFFETTI DELLE CONDIZIONI AL BORDO DECRESCONO COME

$$e^{-L/\xi}$$

SU UNA TRANSIZIONE DEL II° ORDINE, SI HA INVECE UN DECAIMENTO A POTENZA,

$$L^{-\alpha}$$

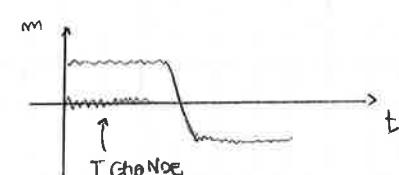
** NOTA: E SOTTO T_c ? VERREBBE A DIRE CHE LA CORRELAZIONE RESTA GROSSA. IN REALTA' VEDEMO CHE SI USA PIU' QUESTO $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c$ (CONNESSA)

* PRESO UN SISTEMA MAGNETICO A $T < T_c$ CON CONDIZIONI (+BC), DI FATTO HO IMPOSTO UN GRANDE CAMPO MAGNETICO SU POCHI SPIN IN UN VOLUME GRANDE MA FINITO; L'EFFETTO E' ANALOGO ALL'AVER APPLICATO UN PICCOLO CAMPO MAGNETICO QUANDO $V = \infty$. ANCHE
 $m = +\tilde{m}$

SCELTE INVECE (-BC), ANALOGAMENTE

$$m = -\tilde{m}$$

SE AL CONTRARIO SCELGO (BC), ESISTERA' (SE $V < \infty$) UN TEMPO AL QUALE IL SISTEMA TRANSISCE:



QUESTO TEMPO CRESCE PERO' AL CRESCERE DELLA TAGLIA DEL SISTEMA. COMUNQUE

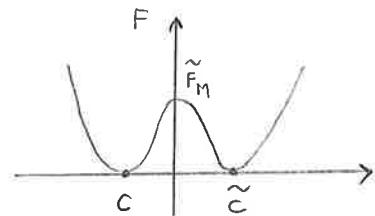
$$\bar{m}(t) \Big|_{PBC} = 0$$

MA E' UNO ZERO MOLTO DISTORSO DA QUELLO CHE TROVO A ALTE T.

IN UN SISTEMA CON TRANSIZIONE AL I° ORDINE (ISING, ACQUA E GHIACCIO) SI AVRANNO TRANSIZIONI SPONTANEE OGNI

$$t_w \propto e^{L^{D-1}}$$

$$\tau \propto e^{\beta (\tilde{F}_M - F_c)}$$



(SONO DUE STIME EQUIVALENTI DELLO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA). LO INTERPRETIAMO QUINDI COME IL TEMPO NECESSARIO A SUPERARE LA BARRIERA DI ENERGIA LIBERA (CHE CRESCHE COME L^{D-1}).

NOTA: VEDREMO PIU' IN LATERALI PERCHÉ È VERO (MA A CHE FAIRE CON L'ENERGIA DELLA SUPERFICIE DI UN DOMINIO). PER T SI È USATA LA LEGGE DI ARRHENIUS.

STATI PURI E MISCELE STATISTICHE

PARTENDO DA UNO STATO INIZIALE OMOGENEO*, $T < T_c$, DEFINISCO

$$\langle \cdot \rangle_{\pm} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \langle \cdot \rangle_h$$

*NOTA: VOGLIAMO DIRE EVITARE IL CASO IN CUI PARLO CON CONDIZIONI INIZIALI MISCELE.

$$\langle \cdot \rangle_0 = \frac{1}{2} (\langle \cdot \rangle_+ + \langle \cdot \rangle_-)$$

NOTA: QUESTA È LA MEDIA SULLE POSSIBILI CONDIZIONI INIZIALI. DEVO USARE $\langle \cdot \rangle_+$ O $\langle \cdot \rangle_-$ SE VOGLIO DESCRIVERE UN SINGOLO SISTEMA.

CON $\langle \cdot \rangle_0$ DESCRIVO UNA MISCELA STATISTICA, NON UNO STATO PURO.

LA MEDIA CONNESSA SU DUE STATI PURI SI SCRIVE

$$\langle \cdot \rangle_p = p \langle \cdot \rangle_+ + (1-p) \langle \cdot \rangle_-$$

E' INVECE UNO STATO PURO UNO CHE NON PUO' ESSERE DECOMPOSTO:

$$\langle \cdot \rangle_a = \alpha \langle \cdot \rangle_b + (1-\alpha) \langle \cdot \rangle_c \Rightarrow \langle \cdot \rangle_a = \langle \cdot \rangle_b = \langle \cdot \rangle_c$$

OGNI STATO PUO' ESSERE DECOMPOSTO IN MODO UNICO COME LA COMBINAZIONE CONNESSA DI STATI PURI.

SI DICE CHE UN GRUPPO DI SIMMETRIA G E' ROTTO SPONTANEALEMENTE SE LO STATO SIMMETRICO NON E' PURO E PUO' ESSERE DECOMPOSTO COME COMBINAZIONE LINEARE CONNESSA DI STATI PUHI CHE SI TRASFORMANO COME UNA RAPPRESENTAZIONE NON BANALE DI G .

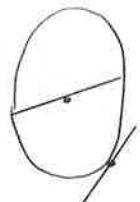
RICAPITOLANDO

CONSIDERIAMO L'INSIEME DI TUTTI GLI STATI INVARIANTI PER TRASLAZIONE. E' UN INSIEME CONNESSO, cioe'

$$\langle \cdot \rangle_p = p \langle \cdot \rangle_+ + (1-p) \langle \cdot \rangle_- \quad 0 < p < 1$$

UNO STATO E' PURO SE NON PUO' ESSERE DECOMPOSTO COME SOMMA DI ALTRI STATI (E', COME SI DICE, UNO STATO SUL BOHOO). QUINDI

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_a &= \alpha \langle \cdot \rangle_b + (1-\alpha) \langle \cdot \rangle_c \\ \Rightarrow \langle \cdot \rangle_a &= \langle \cdot \rangle_b = \langle \cdot \rangle_c \end{aligned}$$



OGNI STATO PUO' ESSERE DECOMPOSTO IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE CONNESSA DI STATI PUHI.

(DEFINIZIONE DI ROTTURA SPONTANEA, COME SOPRA).

NON BANALE \rightarrow SULLA QUALE L'AZIONE DI G HA UN RUOLO.

STATO DEL SISTEMA \rightarrow PROBABILITA' DELLE CONFIGURAZIONI.

*NOTA: SE $H_0 \rightarrow H_0 + \lambda H_1$,
 $-\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle = \langle H_1 A \rangle_c$

PROPRIETA' DI CUSTERING

MODIFICO L'HA MILTONIANA VIANO AL PUNTO x ,

$$H \rightarrow H' = H + \delta H$$

$$\delta H = B(x)$$



MI ASPETTO ALLORA CHE $\langle A(\gamma) \rangle$ NON CAMBI PER $|x - \gamma| \rightarrow \infty$.

DAL TH. DELLA RISPOSTA LINEARE*, DEDUCO CHE AO' E' VERO SE

$$\langle B(x) A(\gamma) \rangle_c \xrightarrow{|x - \gamma| \rightarrow \infty} 0$$

(PROPRIETA' DI CUSTERING)

SI DICE "STATO CLUSTERING" UNO CHE GODE DI QUESTA PROPRIETÀ.

PER ESEMPIO PER NOI, A $T < T_c$ (FASE FREDDA),

$$\oplus \rightarrow \oplus \rightarrow \oplus \quad \langle \cdot \rangle_+$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \xrightarrow[i-j \rightarrow \infty]{} 0$$

E LO STESSO VALE PER LO STATO PURO $|-\rangle$,

$$\ominus \rightarrow \ominus \rightarrow \ominus \quad \langle \cdot \rangle_-$$

INVECE PER $\langle \cdot \rangle_0^{T < T_c}$ (STATO NON PURO),

$$\oplus \rightarrow \ominus \rightarrow \oplus$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \sim \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \neq 0$$

$\begin{cases} \sim +1 \\ \sim -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sim 0 \\ \sim 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (-1)(-1) = 1 \\ (+1)(+1) = 1 \end{cases}$

cioè, è pari per scambio $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$.

PER $T > T_c$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \xrightarrow[i-j \rightarrow \infty]{} 0$$

NOTA: QUESTA SECONDO ME L'HA BUTTATA UN PO' LI'. SO GIÀ CHE $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \rightarrow 0$ E COMUNQUE NON MI INTERESSA IL CASO $T > T_c$ AI FINI DELLA ROTTURA DI SIMMETRIA.

LA ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA PUÒ QUINDI ESSERE
PENSATA COME IL FALLIMENTO DELLA PROPRIETÀ DI CLUSTERING,
QUANDO $T < T_c$, PER LO STATO $\langle \cdot \rangle_0$.

MODELLO DI ISING

MODELLO → SEMPLIFICA LA SITUAZIONE REALE

PONENDO $\sigma_i = \pm 1$ STO FACENDO UN COARSE GRAINING DELLA HAMILTONIANA REALE,

$$H \rightarrow H_{\text{eff}}$$

$$\{c\}, \{s(x)\}$$

DEFINISCO H_{eff} TRAMITE

$$e^{-\beta H_p^{\text{eff}}[s(x)]} = \int d[c] e^{-\beta H[c]} \delta[s(x) - \tilde{s}[c]]$$

RACCHIUDO DUE' IN $S(x)$ TUTTI QUEI GRADI DI LIBERTA' ELEMENTARI (GUONI, QUARK...) CHE DANNO LO stesso VALORE A CONFIGURAZIONI $\tilde{s}[c]$ CHE HANNO LO STESSO VALORE DI $S(x)$. UN MAGNETINO $S(x)$ SOSTITUISCE MIGLIAIA DI GRADI DI LIBERTA' "REALI".

SUPPONENDO NOTA L' HAMILTONIANA ESATTA,

$$\int d[c] e^{-\beta H[c]} g[\tilde{s}[c]] = \int d[s] e^{-\beta H_p^{\text{eff}}[s]} g[s]$$

E QUESTO E' VERO PER QUALSIASI OSSERVABILE g .

NEL MODELLO DI ISING, PONIAMO

$$H_{\text{ISING}} = -J \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i$$

APPROSSIMAZIONE DI CAMPO MEDIO

IL MODELLO DI ISING SI SA RISOLVERE IN $D=1, 2$ (SOLUZIONE DI ONSAGER) MA NON $D=3$: ABBIAMO BISOGNO DI UNA APPROSSIMAZIONE

RICORDIAMO CHE SI ERA RICAVATA, DA UN PRINCIPIO DI MINIMO, F_{eq} :

$$F[\rho] = E[\rho] - \frac{1}{\rho} S[\rho]$$

$$S[\rho] = - \int d[\sigma] \rho[\sigma] \log \rho[\sigma] = \langle -\log \rho \rangle$$

LA CONFIGURAZIONE ALL'EQUILIBRIO E' QUELLA CHE MINIMIZZA $F[P]$ E
 $E[P] = \langle H[\sigma] \rangle$

SO CHE

$$p_{eq} \sim e^{-\beta H}$$

MA NOI IPOTIZZIAMO CHE LA p_{eq} SIA FATTOORIZZATA SUI SITI, OSSIA

$$P[\sigma] = \prod_i p_i(\sigma_i)$$

$$p_i(\sigma_i) = \delta_{\sigma_i, +1} \frac{1+m_i}{2} + \delta_{\sigma_i, -1} \frac{1-m_i}{2}$$

E' NORMALIZZATA?

NOTA: L'IDEA E' CONSIDERARE $\beta \sum_i \sigma_i \equiv H_i$ COME UN CAMPO CHE AGISCE SU σ_i . AL CRESCERE DI D , CRESCHE IL NUMERO DI VINKI CHE CONTRIBUISCONO AL CAMPO SU σ_i : SI PUO' PENSARE DI IGNORARE LE FLUTTUAZIONI (AL VARIARE DI i) E DI SOSTITUIRLO CON IL SUO VALORE MEDIO.

TRAVO PIU' PULITO POSTULARE

$$p_i(\sigma_i) = a_i \delta_{\sigma_i, +1} + b_i \delta_{\sigma_i, -1}$$

ED IMPORTE LA (I) E LA (II) PER FISSARE a_i, b_i .

$$\sum_{\sigma_i = \pm 1} p_i(\sigma_i) = \frac{1+m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} = 1 \quad (I)$$

QUINDI, SOMMANDO SU TUTTE LE CONFIGURAZIONI $\{\sigma\}$ (Sono 2^N CON N SITI),

$$\sum_{\{\sigma = \pm 1\}} P_{\text{FATT}}[\sigma] = \sum_{\{\sigma = \pm 1\}} \prod_i p_i(\sigma_i) = \prod_i \left(\sum_{\sigma_i = \pm 1} p_i(\sigma_i) \right) = 1$$

CALCOLIAMO

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \rangle &= \sum_{\{\sigma\}} \left(\prod_{k \neq i} p_k(\sigma_k) \right) (\sigma_i p_i(\sigma_i)) \\ &= \sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i p_i(\sigma_i) = (+1) \frac{1+m_i}{2} + (-1) \frac{1-m_i}{2} = m_i \end{aligned} \quad (II)$$

NOTA: NUOVA TECNICA CHIAMATA $\prod_i \left(\sum_{\sigma_i = \pm 1} p_i(\sigma_i) \right)$. COME SEMPRE, HO UN PRODOTTO SU UN VINKOLO E POI SOMMO SU TUTTI I VINKOLI, PERCHÉ ESPLORO TUTTO LO SPAZIO. VALE LO STESSO QUI (INVERTI PRIMA DI SPREZZARE).

IN GENERALE, PER UNA FUNZIONE $g(\sigma_i)$ DELLO SPIN σ_i ,

$$\langle g(\sigma_i) \rangle_{P_{\text{FATT}}} = g(+1) \left(\frac{1+m_i}{2} \right) + g(-1) \left(\frac{1-m_i}{2} \right) = \sum_{\sigma_i = \pm 1} p_i(\sigma_i) g(\sigma_i) \quad (III)$$

* VOGLIAMO ORA MINIMIZZARE

$$F = U - \frac{1}{\beta} S$$

SI NOTI CHE, INVECE DI MINIMIZZARE FUNZIONI, MI SONO RIDOTTO A MINIMIZZARE RISPETTO AL PARAMETRO m_i . ABBIAMO

$$U = \langle H \rangle = -J \left\langle \sum_{(i, k)} \sigma_i \sigma_k \right\rangle - \left\langle \sum_i h_i \sigma_i \right\rangle$$

POICHÉ LA DISTRIBUZIONE È FATTOHIZZATA, $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \langle \sigma_i \rangle \times \langle \sigma_k \rangle$ E

$$U = -J \sum_{(ik)}^1 \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_k \rangle = \sum_i h_i \langle \sigma_i \rangle$$

$$= -J \sum_{(ik)}^1 m_i m_k - \sum_i h_i m_i$$

$$\text{NOTA: } J \sum_{(ik)}^1 m_i m_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} J_{ik} m_i m_k$$

CON J_{ik} DEFINITO COME SOTTO. DEMINATO IN ∂m_i :

INVECE L'ENTROPIA VALE

$$S = -\langle \log p_{\text{att}} \rangle = -\sum_i \langle \log P_i(\sigma_i) \rangle \stackrel{(III)}{=} -\sum_i \sum_{\sigma_i=\pm 1} P_i(\sigma_i) \log P_i(\sigma_i)$$

$$= -\sum_i \left[\frac{1+m_i}{2} \log \frac{1+m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} \log \frac{1-m_i}{2} \right]$$

E CEHCHIAMO IL MINIMO DI F CALCOLANDO

$$\frac{\partial F}{\partial m_i} = 0$$

$$F = U - \frac{S}{\beta}$$

$$-\sum_k J_{ik} m_k - h_i - \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial m_i} = 0$$

$$J_{ik} = \begin{cases} J & \text{SE } |i-k|=1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI HA

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial m_i} &= \frac{1}{2} \log \frac{1+m_i}{2} + \frac{1+m_i}{2} \frac{2}{1+m_i} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1-m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} \frac{2}{1-m_i} \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1+m_i}{1-m_i} = \text{ATANH}(m_i) \end{aligned}$$

INFATTI

$$y = \text{TANH}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad z = e^x$$

$$\left(z + \frac{1}{z} \right) y = z - \frac{1}{z}$$

$$(z^2 + 1) y = z^2 - 1$$

$$z^2 = \frac{1+y}{1-y} = e^{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$$

PER CO'

$$-\sum_k J_{ik} m_k - h_i + \frac{1}{\beta} \text{ATANH}(m_i) = 0$$

OSSIA

$$m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right]$$

DETTE EQUAZIONI DI CAMPO MEDIO.

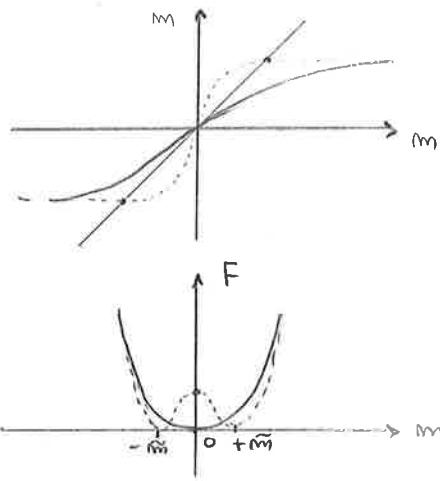
LA MAGNETIZZAZIONE DIPENDE, ODE, SIA DA h CHE DAI SITI VICINI.

SE $h=0$, TROVO

$$m_i = \tanh \left(\beta \sum_k J_{ik} m_k \right)$$

AL VARIARE DI β PUO' CAMBIARE IL
NUMERO DI INTERSEZIONI CON LA
BISSETRICE: CAMBIA QUINDI IL
RUOLO DELL'ORIGINE PER L'ENERGIA
LIBERA: AD ALTA T E' UN MINIMO, MA NON A BASSE T .

NOTA: SI PUO' PENSARE $h_i + J_{ik} S^k$
COME IL CAMPO MAGNETICO EFFETTIVO
SENTITO DA OGNI SPIN S_i .
QUELLA MOSTRATA E' UNA SOLUZIONE
GRAFICA NEL CASO IN CUI $m_i = m_1 \neq 0$,
PIAGIONEVOLE SE $h_i = h \neq 0$.



DERIVAZIONE ALTERNATIVA

NEL MODELLO NON APROSSIMATO, CALCOLO

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i e^{-\beta H[\sigma]}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]}}$$

CHIAMIAMO

NOTA: E' MEGLIO SE TI CONVIENE IL PRIMA
POSSIBILE CHE

$$\sum_{\{\sigma_1=\pm 1, \sigma_2=\pm 1\}} f(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} f(\sigma_1, \sigma_2)$$

CON IL SEGNO '-' E NON '+' (SE LA f
IN QUESTONE FATTORIZZA, DIVENTA IMPORTANTE).

$H[\sigma^-] \rightarrow$ PARTE DI H CHE NON CONTIENE σ_i ;

$H[\sigma_i] \rightarrow$ PARTE DI H CHE CONTIENE σ_i : $H[\sigma_i] = - \sum_k J_{ik} \sigma_i \sigma_k - h_i \sigma_i$

Allora

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma^-\}} e^{-\beta H[\sigma^-]} \cdot \frac{\sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i e^{-\beta H[\sigma_i]}}{\sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{-\beta H[\sigma_i]}} \cdot \frac{\sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{-\beta H[\sigma_i]}}{\sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{-\beta H[\sigma_i]}} \quad (*)$$

$$(*) = \frac{2 \sinh(\beta \left(\sum_n J_{in} \sigma_n + h_i \right))}{2 \cosh(\beta \left(\sum_n J_{in} \sigma_n + h_i \right))} = \tanh(\beta \left(\sum_n J_{in} \sigma_n + h_i \right))$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]} \tanh \left[\beta \left(\sum_n J_{in} \sigma_n + h_i \right) \right] \quad (\text{UGUAGLIANZE DLR})$$

EFFECTIVE FIELD ACTING ON σ_i

SE ANO SPIN O; SOSTITUISCO* IL SUO VALOR MEDIO m_i ; RITHOVO LE EQUAZIONI DI CAMPO MEDIO; MA LE UGUAGLIANZE DUE SONO EDATTE E LA LORO VALIDITA' E' PIU' GENERALE.

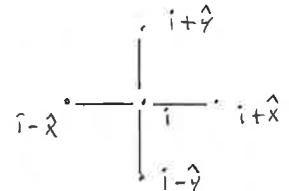
*NOTA: VUOL DIRE $\langle \tanh(h_i + J_{ik}\sigma^k) \rangle \rightarrow \tanh(h_i + J_{ik}m^k)$.

ESEMPIO: ISING IN D=2

$$h_i = 0 \quad \forall i$$

$$J = 1$$

$$\sigma_0 = \sigma_i$$



$$\sigma_1 = \sigma_{i+\hat{x}}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{i+\hat{y}}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{i-\hat{x}}$$

$$\sigma_4 = \sigma_{i-\hat{y}}$$

LE UGUAGLIANZE DUE DANNO

$$\langle \sigma_0 \rangle = \langle \tanh [\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)] \rangle$$

NOTIAMO CHE TUTTI I POLINOMI DI VARIABILE BOOLEANA SONO LINEARI
DI GRADO 1,

$$P(\sigma) = A + B\sigma$$

CHIAMANDO

$$C = \cosh \beta$$

$$S = \sinh \beta$$

$$t = \tanh \beta$$

ARRHO' AD ESEMPIO

$$e^{\beta\sigma} = C(1+t\sigma)$$

$$\frac{1}{1+A\sigma} = \frac{1-A\sigma}{1-A^2}$$

NOTA: IL PUNTO E' CHE $\sigma^m = \{ \sigma_i \}_{i=1}^m$, QUINDI

$$= 1 + \beta\sigma + \frac{(\beta\sigma)^2}{2} + \frac{(\beta\sigma)^3}{3!} \dots = \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{4!} \dots \right) + \sigma \left(\beta + \frac{\beta^3}{3!} \dots \right) = C + \sigma S$$

$$= 1 - A\sigma + (A\sigma)^2 \dots = (1 + A^2 + A^4 \dots) - A\sigma(1 + A^2 + A^4 \dots) = \frac{1 - A\sigma}{1 - A^2}$$

SIAMO INTERESSATI A CALCOLARE

$$\langle f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \rangle$$

$$\{ \sigma_i = \pm 1 \}_{i=1,2,3,4}$$

→

- 1 cost.
- 4 σ_i
- 6 $\sigma_i \sigma_j$, $i \neq j$
- 4 $\sigma_i \sigma_j \sigma_m$, $i \neq j \neq m$
- 1 $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$

Dove si sono sommati tutti i termini possibili per un polinomio di grado 1 in oascuna delle sue variabili.

HICORDANDO CHE TANH E' DISPARA (SOTTO $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i \forall i$),

$$\text{TANH}(\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)) = A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) + B(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_4 + \sigma_1\sigma_3\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4)$$

I COEFFICIENTI A, B SI POSSONO FISSARE SCEGUENDO, AD ESEMPIO,

$$\cdot \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$$

$$4A + 4B = \text{TANH}(4\beta) = t_4$$

$$\cdot \sigma_1 = -1, \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = +1$$

$$2A - 2B = \text{TANH}(2\beta) = t_2$$

QUINDI

$$\begin{cases} A+B = \frac{t_4}{4} \\ A-B = \frac{t_2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8}(t_4 + 2t_2) \\ B &= \frac{1}{8}(t_4 - 2t_2) \end{aligned}$$

PERCIO', SU UN RETICOLO 2×2 ,

*NOTA: SE PER SE $\sigma_i \rightarrow m_i$, E' IL CAMPO MEDIO, MA SE $h_i = h \forall i$: SI ANIMA $m_i = m \forall i$.

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle \text{TANH}(\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)) \rangle = A \langle \sigma_1 + \sigma_2 \dots \rangle + B \langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \dots \rangle$$

DA QUI, SOSTITUENDO $m = \langle \sigma_i \rangle$ (CAMPO MEDIO)* A σ_i ,

$$m = 4A \cdot m + 4B \langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \rangle$$

ANCHE QUESTA E' UNA RELAZIONE ESATTA, CHE METTE IN CONTATTO m CON $\langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \rangle$,

IN APPROXIMAZIONE DI CAMPO MEDIO, PERCIO',

$$\sigma_i \rightarrow m \Rightarrow m = 4Am + 4Bm^3$$

CHE HA SOLUZIONI $m=0$ E

$$1 = 4A + 4Bm^2 \Rightarrow m = \pm \left(\frac{1-4A}{4B} \right)^{1/2}$$

DOE' HO UNA SOLUZIONE MOLTO POCHE

$$A \leq A_c = \frac{1}{4}$$

PER CUI SI TROVA $\beta_c \sim 0.32$ (TEMPERATURA CRITICA).

FOCUS: DALLA DEFINIZIONE $X = \frac{\partial m}{\partial h} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial h^2}$,

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial h}{\partial m} \frac{\partial}{\partial h} = X^{-1} \frac{\partial}{\partial h}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} = (X^{-1})^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \left(\frac{\partial}{\partial m} X^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial h} = X^{-2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} + X^{-1} (\frac{\partial}{\partial h} X^{-1}) \frac{\partial}{\partial h} = X^{-2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} + X^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial h}$$

$$= X^{-2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} + X^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial m} 1 \right) \frac{\partial}{\partial h} = X^{-2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m^2} = X^{-2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} \Psi = X^{-2} \cdot X = X^{-1}$$

MODELLO DI ISING: SOLUZIONE DI CAMPO MEDIO

IN UN SISTEMA OMOGENEO CON h COSTANTE, SOBRA LE E.C.M., COME

$$m = \tanh(\beta(2Dm + h))$$

NOTA: "OMOGENEO" NEL SENSO CHE HO POSTO $J=1$. OGNI SITO HA 2D PRIMI VICINI.

VOGO MINIMIZZARE L'ENERGIA LIBERA ψ PER UNITÀ DI VOLUME, ODE'

$$\frac{d\psi}{dm} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} > 0.$$

NOTA: SI ERA CALCOLATA

$$\frac{d\psi}{dm_i} = - \sum_k J_{ik} m_k - h_i + \frac{1}{\beta} \text{ATANH}(m_i)$$

POSTO $h=0$,

$$m = \tanh(\beta 2Dm)$$

$$\text{E SI RICORDI CHE} \quad \text{ATANH}(m) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+m}{1-m} = \int_0^m \frac{1}{1-\tilde{m}^2} d\tilde{m}$$

$m=0$ È SEMPRE SOLUZIONE DI $\frac{\partial \psi}{\partial m} = 0$, CALCOLIAMO INVECE

$$\psi' = -2Dm + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+m}{1-m}$$

NOTA: NEL FOGLIO UNA PAGINA INDIETRO
MOSTRA CHE $\frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} = \chi^{-1}$.

$$\psi'' = -2D + \frac{1}{\beta(1-m^2)} = \chi^{-1}$$

(SUSCETTIVITÀ INVERSA)

QUESTO CI DICE ANCHE CHE, PER $T < T_c$, QUANDO m CRESCHE DECRESCHE LA SUSCETTIVITÀ.

NOTA: ORVIAMENTE $m^2 \in [0,1]$.

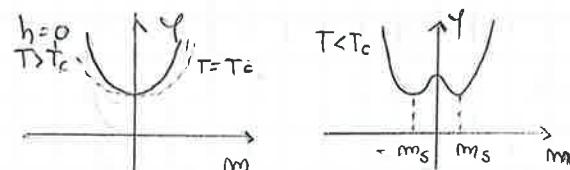
* STUDIO LA SOLUZIONE $m=0$:

NOTA: $T > T_c = 2D$.

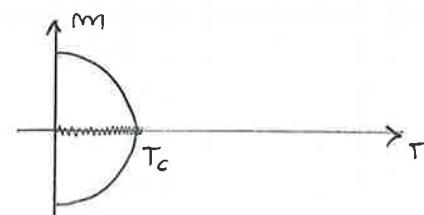
$$\psi''(m=0) = -2D + \frac{1}{\beta} > 0 \Rightarrow$$

$$\beta < \frac{1}{2D} = \beta_c$$

PER $\beta = \beta_c$ IL PUNTO $m=0$ PERDE LA SUA STABILITÀ E NASCONO DUE NUOVI MINIMI $m = \pm m_s$.



A DESTRA È MOSTRATO IL MECCANISMO DI TRANSIZIONE.



- LIMITE $T \rightarrow T_c$

COME NASCE LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA?

NOTA: ESPANDI FINO ALL'ORDINE m^3 I TERMINI CHE COMPARONO IN ψ' .

SIANO $2D\beta \sim 1 \rightarrow m \sim 0$. ESPANDENDO SUBITO SOTTO IL PUNTO CRITICO,

$$(1-m)^{-1} \approx 1 + m + m^2 + m^3 + O(m^4)$$

$$\frac{1+m}{1-m} \approx (1+m)(1+m+m^2+m^3) + O(m^4) = 1 + 2m + 2m^2 + 2m^3 + O(m^4)$$

USANDO $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, TROVO

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right) &\approx 2(m+m^2+m^3) - \frac{1}{2}(2m+2m^2)^2 + \frac{1}{3}(2m)^3 + O(m^4) \\ &\approx 2m + \left(2m^2 - \frac{1}{2}4m^2\right) + \left(2m^3 - \frac{1}{2}8m^3 + \frac{8}{3}m^3\right) + O(m^4) \\ &\approx 2m + \frac{1}{6}(12-24+16)m^3 + O(m^4) = 2m + \frac{2}{3}m^3 + O(m^4)\end{aligned}$$

PERA' RICHIEDO

$$y' \approx -2Dm + \frac{1}{\beta}m + \frac{1}{3\beta}m^3 = 0$$

ESANDENDO $m=0$, DIVIDO PER m ED HO

$$-2D + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{3\beta}m^2 = 0$$

$$m^2 \approx 3(2D\beta - 1) \Rightarrow m \approx \pm \sqrt{3}(2D\beta - 1)^{1/2}$$

RICONOSCO

$$m \approx \pm \sqrt{3} \left(\frac{\beta}{\beta_c} - 1 \right)^{1/2} \sim C \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right)^{1/2} \sim C \left(\frac{T_c - T}{T} \right)^{1/2} \sim \tilde{C} (T_c - T)^{1/2}$$

SI NOTI CHE IL PUNTO DEL DATO E' IL NUMERATORE: INFATTI, \sqrt{x} E' SINGOLARE PER $x=0$. SI E' TROVATO

$$\underline{m \sim \tilde{C} (T_c - T)^{1/2}}$$

$$T \rightarrow T_c$$

• LIMITE $T \rightarrow 0$

$$2D\beta \rightarrow \infty, \frac{\beta}{\beta_c} \rightarrow \infty.$$

NOTA: QUI LO SI E' VISTO ARRIVANDO A T_c DA SOTTO, MA MI DICONO CHE SIA SIMMETRICO.

$$m \sim \pm 1 \quad \text{E PREndo } m \sim 1.$$

RISOLVO LA CONDIZIONE $\frac{dy}{dm} = 0$ COME

$$-4D\beta m + \ln \frac{1+m}{1-m} = 0$$

$$-4D\beta m + \ln(1+m) - \ln(1-m) = 0$$

POSSO $m \approx +1$,

$$-4D\beta + \ln 2 - \ln(1-m) = 0$$

$$-4D\beta - \ln(1-m) = -\ln 2$$

ESponenziandola si trova infine

$$\frac{e^{-4D\beta}}{1-m} \sim \frac{1}{2}; \quad 1-m \sim 2e^{-4D\beta} \Rightarrow m \sim 1 - 2e^{-4D\beta} \quad T \rightarrow 0$$

Come si è detto, il primo passo è quello in cui cambiano 2 legami quando si gira un solo spin.

CASE $h \neq 0$

Sia $|h|$ piccolo, $T < T_c^{(h=0)}$.

Se accendo h mi aspetto che ψ cambi come in figura: apro' un solo stato stabile e l'altro metastabile.

Al crescere di h (o quando $T > T_c$) scomparso lo stato metastabile.

In campo medio si è trovato, se $h=0$,

$$T_c = \frac{1}{\beta c} = 2D$$

per $T > T_c$ (e sempre $h=0$),

$$m=0, u=0 \quad (\text{u energia interna per unità di } V)$$

per $T < T_c$,

$$m \sim (T_c - T)^\beta$$

dove β è un esponente critico e $\beta_{MF} = \frac{1}{2}$ (mean field).

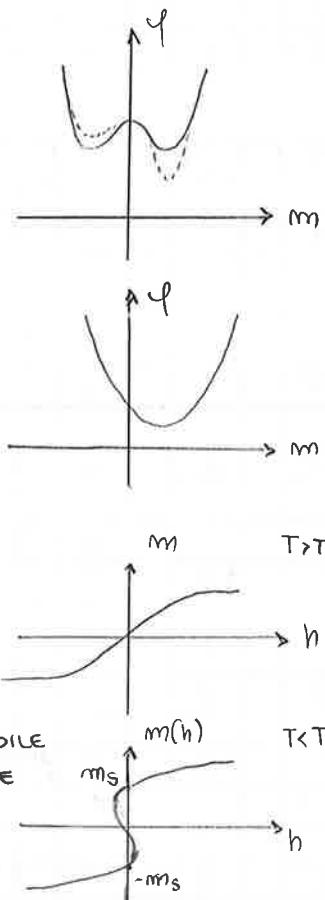
Grandezze come β sono dette universali, mentre non lo è T_c (né il coefficiente davanti a $(T_c - T)^\beta$), che dipende dalle caratteristiche del sistema in esame.

Similmente (introducendo l'esponente critico γ)

$$u \sim -m^2 \sim (T - T_c)$$

$$\chi \sim (T_c - T)^{-\gamma}$$

$$\gamma_{MF} = 1$$



NOTA: ricorda che $u = \langle H \rangle = -Dm^2 - hm$.
E' vero solo in campo medio!

INFATTI SI ERA THOMATO

$$\chi^{-1} = -2D + \frac{1}{\beta(1-m^2)}$$

NOTA:

$$= -T_c + \frac{T}{1-D(T_c-T)} = -T_c + T(1+O(T_c-T)) = O(T, T_c)$$

PER $T=T_c$, $h \neq 0$ POTREMO CALCOLARE (MA NON LO FAREMO)

$$m \propto h^{1/2}$$

$$S_{MF} = 3$$

MOLTORE C_v E' DISCONTINUO A T_c : HO UNA TDF DEL II° ORDINE.

SE $h \neq 0$ SCOMPIONO LE SINGOLARITA', PERONÉ SI SELEZIONA LO STATO $+ \circ -$.

NOTA: NON C'E' CALORE LATENTE A $T=T_c$, OSSIA IL NON E' DISCONTINUA.

OTTIAMO CHE LA SOLUZIONE DI CAMPO MEDIO E' ESATTA PER $D \geq 4$, BUONA PER $D=2,3$. A $D=1$ NON C'E' TRANSIZIONE.

CAMPO MEDIO, 3° MODO

DIMOSTRIAMO INNANZITUTTO CHE, DATE $H_0 \in H_1$,

$$\int d[\sigma] e^{-\beta H_1[\sigma]} \geq \int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma] - \beta \langle H_1 - H_0 \rangle_{H_0}}$$

DOVE

$$\langle \cdot \rangle_{H_0} = \frac{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma]} (\cdot)}{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma]}}$$

* NOTA: IN REALTA' SAI GIÀ CHE F , DEFINITA COME
 $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$, $Z = \int d[\sigma] e^{-\beta H}$, $H = H_0 - \int dx h(x) \cdot \sigma(x)$
E' IL FUNZIONALE GENERATORE DELLE FUNZIONI DI
COMPLEMENTAZIONE CONNESSE. SI AVEVA
 $\frac{\delta}{\delta h(x)} \frac{\delta}{\delta h(y)} F = \beta \langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle$,
QUI NON C'E' IL $-1/\beta$ E IL TERMINE DI SORGENTE E' $\lambda(H_1 - H_0)$.

PER FARLO, DEFINIAMO LA FUNZIONE GENERATRICE

$$g(\lambda) = \ln \int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma] - \beta \lambda (H_1[\sigma] - H_0[\sigma])} \quad (= \ln \int d[\sigma] e^{-\beta [H_0 + \lambda (H_1 - H_0)]})$$

DERIVIAMOLA DUE VOLTE:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g(\lambda)}{d\lambda^2} &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H_1 - H_0)} (-\beta (H_1 - H_0))}{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H_1 - H_0)}} \right\} \quad \left(= -\beta \frac{d}{d\lambda} \langle (H_1 - H_0) \rangle \right) \\ &= \beta^2 \left(\langle (H_1 - H_0)^2 \rangle - \langle (H_1 - H_0) \rangle^2 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

NOTA: SONO MEDIE PENSATE SU $H = H_0 + \lambda (H_1 - H_0)$.

QUESTO CI DICE CHE

$$g(\lambda) \geq g(0) + \lambda \left(\frac{dg}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

OSSIA CHE $g(\lambda)$ STA SOPRA LA SUA APPROSSIMAZIONE LINEARE (È CONVESSA). CALCOLANDOLA IN $\lambda=1$,

$$\ln \int d[\sigma] e^{-\beta H_1[\sigma]} \geq \ln \int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma]} - \beta \langle H_1 - H_0 \rangle_{H_0} \quad (I)$$

ESPOENZIANDO RITROVO LA (I).

* SCEGLIAMO ORA

$$H_1 = \text{ISING A } (h=0) = - \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

$$H_0 = -r \sum_i \sigma_i$$

NOTA: H_0 DESCRIVE IN EFFETTO UN CAMPO COSTANTE CHE SI APPLICA SU σ_i :

CHIAMANDO f LA ψ DI PRIMA (DENSITÀ DI ENERGIA LIBERA), DALLA (I)

$$f_{\text{ISING}} \leq -\frac{1}{\beta r} \ln \underbrace{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0}}_{\sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} e^{\beta r \sum_i \sigma_i}} + \frac{1}{\sqrt{r}} \langle H_1 - H_0 \rangle_{H_0}$$

$$\text{NOTA: } = \prod_{i=1}^V \sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{\beta r \sigma_i} = (\cosh(\beta r))^V$$

$$\text{INOLTRE SI È USATA } f = -\frac{1}{\beta} \ln Z.$$

PERATO'

$$f_{\text{ISING}} \leq -\frac{1}{\beta} \ln [\cosh(\beta r)] + \frac{1}{\sqrt{r}} \langle H_1 - H_0 \rangle_{H_0}$$

POICHÉ LA P_{eq} PER H_0 FATTOORIZZA,

$$\langle -H_0 \rangle_{H_0} = \sqrt{r} \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} \sigma e^{\beta r \sigma}}{\sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta r \sigma}} = \sqrt{r} \tanh(\beta r)$$

$$\text{NOTA: } Z_0 = (\cosh(\beta r))^V. \text{ QUINDI} \\ P_{eq} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_0) = \prod_i \frac{1}{Z} \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{e^{-\beta r \sigma_i}}{\cosh(\beta r)} = P_i(\sigma_i)$$

$$\langle H_1 \rangle_{H_0} = -\sqrt{r} \tanh^2(\beta r)$$

$$\text{NOTA: } \langle -H_0 \rangle_{H_0} = -r \sum_i \langle \sigma_i \rangle = -r \sqrt{r} \langle \sigma \rangle. \\ \text{INVECE}$$

$$\langle H_1 \rangle_{H_0} = - \sum_{ij} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = - \sum_{ij} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \\ = -\Delta V \langle \sigma \rangle^2$$

\uparrow PRIMI VICINI \uparrow NUMERO DI SPIN PRESENTI
PER SPIN

$$m = \langle \sigma \rangle = \tanh(\beta r)$$

IN CONCLUSIONE, VI È UN VALORE DI f LIMITE

$$f_{\text{ISING}} \leq -\frac{1}{\beta} \ln [\cosh(\beta r)] - \Delta \tanh^2(\beta r) + r \tanh(\beta r) = \tilde{f}$$

USANDO \hat{f} PER CALCOLARE

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial m} = 0$$

MOVETEVI IL CAMPO MEDIO, DOPO AVER SOSTITUITO IL RISULTATO Trovato

$$r = \frac{1}{\beta} \operatorname{ATANH}(m)$$

NOTA: COME MI ASPETTANO, VISTO CHE SI È VISTO COME LA PEG FATTORIZZI IN $P = T_1 P_1$.

• FOCUS: FACIAMOLO.

$$\frac{d\hat{f}}{dm} = \frac{d}{dm} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta r)] - Dm^2 + \frac{m}{\beta} \operatorname{ATANH}(m) \right\}$$

$$= \frac{dr}{dm} \frac{d}{dr} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta r)] \right\} - 2Dm + \frac{1}{\beta} \operatorname{ATANH}(m) + \frac{m}{\beta} \frac{d}{dm} \operatorname{ATANH}(m)$$

$$= -\operatorname{TANH}(\beta r) \frac{dr}{dm} - 2Dm + \frac{1}{\beta} \operatorname{ATANH}(m) + \frac{m}{\beta} \frac{d}{dm} \operatorname{ATANH}(m)$$

$$= -m \frac{dr}{dm} - 2Dm + \frac{1}{\beta} \operatorname{ATANH}(m) + m \frac{dr}{dm} = -2Dm + \frac{1}{\beta} \operatorname{ATANH}(m)$$

• FOCUS: SUL MODELLO A INTERAZIONI DEBOU A LUNGO RAGGIO (VEDI OLTRA)

RESTA DA MOSTRARE CHE $\lambda = m$. POSSO USARE

$$m = -\frac{\partial \hat{f}}{\partial h} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} \ln \left\{ \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int d\lambda e^{-N\beta F(\lambda)} \right\}$$

OPPURE, PIÙ SEMPLICEMENTE,

$$m = -\frac{\partial \hat{f}}{\partial h} = -\frac{\partial A}{\partial h} - \frac{\partial \lambda}{\partial h} \cdot \frac{\partial A}{\partial \lambda}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial h} \left\{ \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta(\lambda+h))] \right\} - \frac{\partial \lambda}{\partial h} \underbrace{\left\{ \lambda - \operatorname{TANH}(\beta(\lambda+h)) \right\}}_{=0 \text{ (CONDIZIONE DI MINIMO)}}$$

$$= \operatorname{TANH}(\beta(\lambda+h)) = \lambda$$

MODELLO MISOLUBILE (INTERAZIONI DEBOLI A LUNGO RAGGIO)
 QUANDO FUNZIONA IL CAMPO MEDIO? QUANDO LE CORRELAZIONI SONO DEBOLI. COME ABBIAMO DETTO, LA SOLUZIONE DIVENTA ESATTA PER $D \geq 4$; AL CRESCERE DI D CRESCE INFATTI IL NUMERO DI VISIONI E QUINDI CALA IL FEEDBACK CHE GLI POSSO DARE.

THATTIAMO ORA UN MODELLO CON FORZE DEBOLI E A LUNGO RAGGIO:

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k - h \sum_i \sigma_i \quad i, k = 1, \dots, N$$

LA SOMMA E' SULLE COPPIE (IL TERMINE DIAGONALE NON CONTA, E' UNA COSTANTE); L'ACCOPLIAMENTO E' $J = \frac{1}{N}$. IN EFFETTI IL NUMERO DI COPPIE (i, k) E' $\binom{N}{2} \sim N^2$ E A SI ASPETTA $H = O(N)$ (ESTENSIVA).

USIAMO LA RELAZIONE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2 \pm Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}$$

PER RISCRIVERE $\frac{B^2}{4A}$, CON $B = \beta \sum_i \sigma_i$: LUI HANNE COM'E'

$$e^{-\beta H} = \exp \left\{ \frac{\beta}{2N} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k + \beta h \sum_i \sigma_i \right\} = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2} + \sum_i (\beta\lambda + \beta h)\sigma_i}$$

QUESTO FUNZIONA PERCHE' L'INTERAZIONE E' NON LOCALE, QUINDI

$$\sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k = \left(\sum_i \sigma_i \right) \left(\sum_k \sigma_k \right) = \left(\sum_i \sigma_i \right)^2$$

CALCOLIAMO PERTO

$$Z = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{-\beta H[\sigma]} = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2}} \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{\sum_i \beta(\lambda + h)\sigma_i}$$

CHE CI PIACE PERCHE' LA SOMMA E' FATTOORIZZABILE:

$$Z = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2}} \left(2 \cosh(\beta(\lambda + h)) \right)^N$$

$$= \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N\beta\lambda^2} d\lambda$$

NOTA: RISPETTO AL MODELLO DI PRIMA IN CUI J'ERA GARANTITA UN'INTERAZIONE LOCALE, QUI TUTTI INTERAGISCONO CON TUTTI.

NOTA: E' SUFFICIENTE COMPLETARE IL QUADRATO $(\sqrt{\lambda}x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}})^2$

NOTA: SI VOGLIE TROVARE $f = -\frac{1}{N\beta} \ln Z$.

(I)

DOVE SI È DEFINITA

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta(\lambda + h))]$$

NOTA: RISCALANDO I CAMPI IN H COME $\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{N}}$,
 $H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j - (h\sqrt{N}) \sum_i \tilde{\sigma}_i$.
% SI TROVA DERIVANDO 2 VOLTE RISPETTO A h, MENTRE ADESSO $\langle \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j \rangle_c$ SI CALCOLA DERIVANDO RISPETTO A $\tilde{h} = h\sqrt{N}$, DA QUI IL FATTORIE $\frac{1}{N}$.

LA (I) SI PRESTA AD ESSERE APPROSSIMATA CON METODO DEL PUNTO DI SELLA PER N GRANDE:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \int dx e^{Ng(x)} = \max_x g(x)$$

QUESTO CI DICE CHE

$$f = \min_{\lambda} A(\lambda) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

NOTA: MANDARE N → ∞ SIGNIFICA METTERSI NEL LIMITE TERMODINAMICO (V → ∞ A DENSITÀ COSTANTE).

PER IL CALCOLO DI f VEDI FOCUS QUI SOTTO.

PER DETERMINARE QUESTO MINIMO, CALCOLIAMO

$$\frac{dA}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \tanh(\beta(\lambda + h))$$

CHE SONO PROPRIO LE EQUAZIONI DI CAMPO MEDIO, SE NON CHE IN QUESTO CASO LE ABBIAMO OTTENUTE SENZA APPROSSIMAZIONI. FUNZIONA PERCHÉ

NOTA: SI PUÒ VEDERE, CON IL TH. DELLA DISUSCIA LINEARE, CHE $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \frac{1}{N} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$. ALLORA $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \rightarrow \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$.

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = O\left(\frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

SI PUÒ MOSTRARE CHE λ SI RICONDUCE ALLA MAGNETIZZAZIONE m: BASTA CALCOLARSI IL VALORE DI ASPETTAZIONE DELLO SPIN SULL'INTEGRALE E VERIFICARNE CHE SI RITROVA λ.

NOTA: VEDI FOCUS DUE PAGINE INDIETRO.

FOCUS: PUNTO DI SELLA

$$\int_a^b dx e^{Ng(x)} = \sqrt{\frac{2\pi}{1g''(x_M)N}} e^{Ng(x_M)} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

CON $x_M \in [a, b]$ (METODO DI LAPLACE). QUINDI PER N GRANDE

$$\frac{1}{N} \ln \int dx e^{Ng(x)} = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{1g''(x_M)N} \right) + Ng(x_M) + \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \right\} = g(x_M) - \frac{1}{2N} \ln N + O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

E SI RITROVA QUANTO VOLUTO PRENDENDO IL LIMITE PER N → ∞.

USIAMOLO PER CALCOLARE LA DENSITÀ DI ENERGIA LIBERA:

$$f = -\frac{1}{N\beta} \ln Z = -\frac{1}{N\beta} \ln \left\{ \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N\beta E(x)} dx \right\} = -\frac{1}{N\beta} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N\beta E(x)} dx + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \max_x (-\beta E(x)) = \min_{\lambda} f(\lambda)$$

LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE

SAPPiamo che in campo medio

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^{MF} = 0$$

NOTA: E' proprio l'assunzione iniziale grazie a cui fattorizziamo P_{eq} .

MA A ME INTERESSANO PROPRIO $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{ISING}$: COME LE STIMO?

USO IL TEOREMA DELLA RISPOSTA LINEARE:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{h=0}^{ISING} = -\frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial}{\partial h_i} \frac{\partial}{\partial h_j} F^{ISING}[h] \right|_{h=0} = \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \right|_{h=0} \quad (I)$$

VALIDA QUANDO USO LA $F[h]$ ESATTA, NON APROSSIMATA.

POSso PERo' USARE

$$\frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial m_i}{\partial h_n} \right|_{MF} \neq 0$$

NOTA: INFATTI L'UGUAGLIANZA (I) ^(*) VALE SOLO SE USO LA P_{eq} ESATTA. IN M.F., LA FUNZIONE RISPOSTA NON COINCIDE CON QUELLA DI CORRELAZIONE (CHE E' NULLA). RICORDA CHE $\left. \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} \langle A \rangle_c = \langle H_1 A \rangle_c^{MF} \right|_{H=H_0 + \lambda H_1}$ SE $H = H_0 + \lambda H_1$ (QUI $\lambda = h_k$).

COME ESTIMATORE (A MELO DI CORREZIONI).

CHIAMIAMO

$$\delta P = |P_{eq} - P_{app.}| = O(\varepsilon)$$

NOTA: L'OBBIETTIVO E' MOSTRARE CHE L'ERRORE NELLA FUNZIONE RISPOSTA E' PIU' PICCOLO DI QUELLO DELLA FUNZIONE DI CORRELAZIONE.

E IPOTIZZIAMO CHE QUESTA DISTANZA SIA PICCOLA (ALTRIMENTI HO GA' PERSO IN PARTENZA). ALLORA

$$\langle \sigma_i \sigma_m \rangle_{P_{eq}} = \langle \sigma_i \sigma_m \rangle_{P_{app.}} + O(\varepsilon)$$

$$\int P_{eq} \sigma_i \sigma_m - \int P_{app.} \sigma_i \sigma_m = O(\varepsilon)$$

NOTA:
 $P_{app.} \propto e^{-\beta(H_0 + \lambda \varepsilon)} = e^{-\beta H_0} (1 + O(\varepsilon))$

RICORDIAMO CHE SI ERA TRONATA F USANDO UN PRINCIPIO DI MINIMO, PER CI

$$\left. \frac{\delta F}{\delta P} \right|_{P=P_{eq}} = 0$$

TRONANDOMI SUL MINIMO, L' $O(\varepsilon)$ E' ASSENTE E

$$F[P_{app.}] = F[P_{eq}] + O(\varepsilon^2)$$

PERO' LA STIMA E' BUONA IN LINEA DI PRINCIPIO.

L'UNICO RISCHIO E' CHE SI TROVI UNA CORREZIONE INFINTA

("IN GENERE IN FISICA LE CASE NON FUNZIONANO QUANDO NON DEVONO FUNZIONARE")

METTIAMO A SOTTO LE IPOTESI

$$\left. \begin{array}{l} h=0 \\ T > T_c \end{array} \right\} \rightarrow m_s = 0 \quad (\text{MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA NULLA})$$

$T \rightarrow T_c^+$

ACCENDENDO $h=0(\epsilon)$ E TROVANDOMI NELLA FASE CALDA, TRASCURO L' $\alpha(m^2)$ PERCHÉ SO CHE LA MAGNETIZZAZIONE È PICCOLA; TROVO

$$m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right]$$

$$\approx \beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right)$$

ONVERO

$$\sum_k \left(\frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik} \right) m_k = h_i \quad \Rightarrow$$

Dove si è definita

$$B_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik}$$

Allora, definendo la matrice inversa A_{ik} ,

$$m_i = \sum_k A_{ik} h_k$$

$$J_{ik} = \begin{cases} \beta & |i-k|=1 \\ 0 & \text{ELSEWHERE} \end{cases}$$

NOTA: COME ANNUNCIATO, STO USANDO IL CAMPO MEDIO. IL CAMPO h CHE INSERISCO È "POINT-DEPENDENT".

$$B_{ik} m_k = h_i$$

*NOTA: HISOLVERE COSA? ALLA FINE NORRÖ

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_k} = \frac{1}{\beta} A_{ik}.$$

$$A_{ik} = (B^{-1})_{ik}$$

PER HISOLVERLA*, PASSIAMO ALLO SPAZIO DI FOURIER.

DATO UN RETICOLO IPERCUBICO IN D-DIMENSIONI, PASSO A UNA ZONA DI Brillouin

$$-\pi \leq p_\alpha \leq \pi$$

$$\alpha = 1, \dots, D$$

QUINDI, DATA

$$B_{k,l} = \left(\frac{\delta_{k,l}}{\beta} - J_{k,l} \right) = B(|k-l|)$$

$$\tilde{B}(p) = \frac{1}{\beta} \sum_{k-l} \left(\delta_{k,l} - \beta J_{k,l} \right) e^{-i(k-l) \cdot p}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left(1 - 2\beta \sum_{d=1}^D \cos p_d \right)$$

NOTA: PER INVARIANZA TRASLATORIALE, IN REALTA' $B(k, l) = B(k-l) = B(r)$ E POTREI FARLE LE TRANSFORMATE IN $e^{i k \cdot r}$. LO STESSO DISCORSO SI APPLICA AL CALCOLO DI U (COSÌ ETITI u_k). BASTA DEFINIRE

$$\delta_{k,l} \rightarrow \delta(r), \quad J_{k,l} \rightarrow \delta(|r|-1)$$

NOTA: PER CONVINCERTE, PENSA AD ESEMPIO CHE IN 2D I VETTORI $(k-l) = \alpha$ DI modulo 1 SONO $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$ E FATI I CONTI PER ESPLICATO.

DEFINIAMO LA FUNZIONE DI GREEN (PROPAGATORE LIBERO)

$$\tilde{G}_o(p) = \beta^{-1} \tilde{B}(p)^{-1} = \left(1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha \right)^{-1}$$

Allora

$$A_{\underline{k}, \underline{l}} = (B^{-1})_{\underline{k}, \underline{l}} = A(\underline{k} - \underline{l})$$

$$= (2\pi)^{-D} \int_{BZ} d^D p \tilde{B}(p)^{-1} e^{i(\underline{k}-\underline{l}) \cdot \underline{p}}$$

$$= \frac{\beta}{(2\pi)^D} \int_{BZ} d^D p \tilde{G}_o(p) e^{i(\underline{k}-\underline{l}) \cdot \underline{p}} = \beta G_o(\underline{k} - \underline{l})$$

$$\text{NOTA: IN GENERALE, } \sqrt{\sum_p f(p)} \rightarrow \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(p)$$

QUI IL FATTORE $\sqrt{\cdot}$ NON LO SI METTE PER ESPlicito, MA SI RICORDI CHE $A_{\underline{k}, \underline{l}}$ COSÌ TROVATA È INTENSIVA. LO SI Vede ANCHE DA COME LA SI USA QUI SOTTO PER CALCOLARE LA DENSITÀ DI ENERGIA u

Dove G_o è la funzione di Green nello spazio x .

Si è così trovata una stima per la generica funzione di correlazione

$$\langle \sigma_i \sigma_n \rangle_{h=0}^{\text{ISING}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_n} \Big|_{h=0}^{\text{ISING}} \approx \frac{A_{ik}}{\beta}$$

* Cosa succede all' $O(\epsilon^2)$?

CHIAMIAMO u la DENSITÀ DI ENERGIA

$$u = \frac{U}{V} = u_i = -\frac{1}{2} \sum_n J_{in} \langle \sigma_i \sigma_n \rangle$$

VERO SE $h=0$. USANDO QUANTO TROVATO,

$$u = -\frac{1}{2\beta} \sum_n J_{in} A_{in} = -\frac{1}{2\beta} \frac{\beta}{(2\pi)^D} \sum_k \int_{BZ} d^D p \frac{e^{i(\underline{i}-\underline{n}) \cdot \underline{p}}}{1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha} J_{i,n}$$

DOVE RICORDIAMO CHE

$$\int_{BZ} d^D p = \prod_{\alpha=1}^D \int_{-\pi}^{\pi} dp_\alpha$$

ORA CONSIDERIAMO CHE, POICHÉ J CONNETTE SOLO SPIN VIANI,

$$\sum_k e^{i(\underline{i}-\underline{n}) \cdot \underline{p}} J_{i,n} = 2 \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha$$

$$u = -\frac{1}{(2\pi)^D} \int_{BZ} d^D p \frac{\sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha}{1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha}$$

$$\text{NOTA: IN MF SI AVENNA } u=0 \text{ PER } T>T_c$$

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} J_{ik} \sigma_i \sigma_k \quad (h=0)$$

$$u = \langle H \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} J_{ik} \langle \sigma_i \sigma_k \rangle$$

SECONDO ME VA SOMMATO ANCHE SU i (TANTOPIÙ CHE LA NOSTRA $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle$ È INTENSIVA)

LA U E` DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE ADDITIVA
POTENZIALMENTE PROBLEMATICA; CONSIDERO QUINDI

$$C_V = \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} = -\beta^2 \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$= \frac{2\beta^2}{(2\pi)^D} \int_{B^D} d^D p \frac{\left(\sum_{\alpha} \cos p_{\alpha}\right)^2}{\left(1 - 2\beta \sum_{\alpha} \cos p_{\alpha}\right)^2}$$

* STUDIAMO $\tilde{G}_o(p)$ VIANO ALLA TRANSIZIONE, PER $p \sim p_c = \frac{1}{2D}$:

$$\left(1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_{\alpha}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{D} \sum_{\alpha=1}^D \cos p_{\alpha}\right)^{-1}$$

DA QUI SI VIDE CHE, PER $p \sim 0$, $\tilde{G}_o(p)$ SVILUPPA UN POLO SE SONO VIANO A p_c .

$$\tilde{G}_o(p) \approx \left(1 - 2D\beta + \beta \sum_{\alpha=1}^D p_{\alpha}^2 + O(p^4)\right)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\beta p^2 + (1 - 2D\beta)}_{\sim m^2} + O(p^4)} = \frac{1}{\frac{1-2D\beta}{p}}$$

ANALOGO AL PROPAGATORE DI UN

CAMPO SCALARE. LA MASSA $m \rightarrow 0$ VIANO AL PUNTO CRITICO, IL CHE SIGNIFICA CHE DIVENTA LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE:

$$\xi \sim \frac{1}{m} \xrightarrow{T \rightarrow T_c^+} \infty$$

NOTA: IN $D=3$ E $D=1$,
 $G_o^{(3)}(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-mr}$, $G_o^{(1)}(x) = \frac{\pi}{m} e^{-mx}$. SI CALCOLANO
CHIUDENDO, PER $p \geq 0$, IL COMBINATO SOPRA/SOTTO.

SI SA CHE**

NOTA: OVVERO UN IMPULSO p , SE $c=\hbar=1$.

$$\tilde{G}_o(p) \sim \frac{1}{p^2 + m^2} \Rightarrow G_o(x) \sim e^{-mx} = e^{-\left(\frac{x}{\xi}\right)}$$

(IN FISICA UNA MASSA* E` L'INVERSO DI UNA LUNGHEZZA).

AL PUNTO CRITICO $\xi = \infty$; IL DECADIMENTO ESPOENZIALE SPARISCE E HO UN DECADIMENTO A POTENZA, INDICE DI UNA CORRELAZIONE A LUNGO RANGE (NON LOCALE). INFATTI,

SE $p = p_c = \frac{1}{2D}$ AVRO'

NOTA: $A_{1,0} = \beta \langle \sigma_1 \sigma_0 \rangle_{h=0}$.

$$\tilde{G}_o(p) \sim \frac{1}{p^2} \Rightarrow A_{1,0} \sim \int_{B^D} \frac{d^D p}{p^2} \sim p^{D-2} \sim l^{2-D}$$

* IL CALORE SPECIFICO (CHE STUDIO PER P PICCOLI, OSSIA GRANDI LUNGHEZZE) VALE

$$C_V \sim \int_{\beta z}^{\infty} \frac{(\Delta - \rho^2/2)^2}{(\rho \rho^2 + (1-2\rho\Delta))^2} d^D \rho$$

$$[\rho \rho^2] = [1-2\rho\Delta]$$

COME SI COMPORTA C_V PER $\rho \rightarrow 0$?

SE $D > 4$,

$$\int_{\beta z}^{\infty} \frac{d^D \rho}{\rho^4} \sim \text{cost.}$$

SE $D < 4$, INVECE*

$$C_V \sim \rho^{D-4} \sim (1-2\rho\Delta)^{\frac{D}{2}-2}$$

OSSIA DIVERGE, SUL PUNTO CRITICO T_c , PER $\rho \rightarrow 0$ (PICCOLI MOMENTI); LA SECONDA FORMA MI DICE CHE DIVERGE PER $m^2 \rightarrow 0$ E OLOE' PER $T \rightarrow T_c$.

IL CASO $D=4$ SI DICE DIMENSIONE CRITICA SUPERIORE (D_c^+), CON

$$C_V \sim \ln(1-2\rho\Delta)$$

INFINE SI E' VISTO CHE

$$\alpha_{L,0} \propto \rho^{-1/\xi}$$

$$\xi \sim (1-2\rho\Delta)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \text{ESPOLENTE CRITICO } (\gamma_{MF})$$

NOTA: SE PENSI $\tilde{G}_0(r) \sim \frac{1}{r^{D+m^2}}$, CON $m^2 = (1-2\rho\Delta)/\rho$

IN EFFETTI $G_0(x) \sim e^{-mx} = e^{-x/\xi}$

$$\text{DA QUI } \xi = 1/m = \left(\frac{1-2\rho\Delta}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

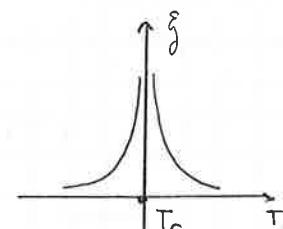
$$\rho \rightarrow \rho_c$$

IN SINTESI, C_V E' PICCOLO A GRANDI T (VA COME T^{-2}) E DIVERGE PER $T \rightarrow T_c$ IN $D \leq 4$.

SEMPRA QUINDI CHE, SE $D \leq 4$, LA TEORIA DI CAMPO MEDIO NON DEBBA FUNZIONARE vicino a T_c .

ANTICAPIAMO ANCHE CHE, SE CALCOLO $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c$ A $T < T_c$,
TROVO $\xi < \infty$.

NOTA: TROVO $\xi^2 = \frac{\beta(1-\tilde{m}^2)}{1-2\rho\beta(1-\tilde{m}^2)}$, DOVE \tilde{m} E' LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA (BINNET).



NOTA: SI TRATTA DI INTEGRALI SU DI UNA REGIONE FINITA (LA ZONA DI BAILLOUIN), QUINDI IL PROBLEMA DELLA CONVERGENZA ALL'INFINITO NON SI PONE.

NOTA: COM'E' POSSIBILE? $k_B \equiv 1$. QUINDI $(1-2\rho\Delta)/\rho \equiv m^2$
HA LE DIMENSIONI DI P^2 .

NOTA: E VICINO AL PUNTO CRITICO, $m=0$.

* NOTA: IN TEORIA DEI CAMPI QUESTO SI DICE POWER COUNTING; PER ANALISI DIMENSIONALE, IL GRADO DI DIVERGENZA IN P E' LO STESSO CHE IN m . SI GIUSTIFICA COSI': AD ESEMPIO,

$$\int_0^{\infty} \frac{dp}{p+\alpha} = \ln(p+\alpha) \Big|_0^{\infty} \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} -\ln \alpha$$

$$\int \frac{dp}{(p+\alpha)^2} \sim \frac{1}{(p+\alpha)}, \quad \int \frac{dp}{(p+\alpha)^3} \sim (p+\alpha)$$

* SE MANDASSI $D \rightarrow \infty$ TENENDO FISSO

$$\tilde{\beta} = \beta/\beta_0 = 2D\beta$$

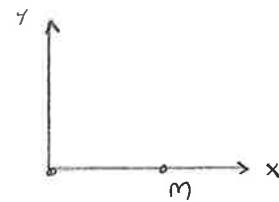
NOTA: SE NE PERCHÉ ALTRIMENTI
 $\beta_0 \xrightarrow{D \rightarrow \infty} 0$

AUORA M.F. E' ESATTO (NON LO DIMOSTREREMO). LA SPIEGAZIONE
 EUPHISTICA E' CHE DIVENTANO MOLTI I PRIMI VIONI (E' COME PARLARE
 A UNA FOLLA).

NOTA: NON DISTINGUE I SINGOLI INDIVIDUI.

MOSTRIAMO SOLO CHE PER $T > T_c$

$$\frac{\langle \sigma_l \sigma_r \rangle_{\tilde{\beta} \text{ fissa}}}{D \rightarrow \infty} \xrightarrow{D \rightarrow \infty} 0$$



COME UNA POTENZA DI D^{-1} .

SCEGUONO UNA GEOMETRIA PARTICOLARE: DUE PUNTI A DISTANZA
 m LUNGO L'ASSE X,

$$l_x - k_x = m$$

$$l_\alpha - k_\alpha = 0, \quad \alpha \neq x.$$

A QUESTA DISTANZA IL PROPAGATORE VALE

$$\begin{aligned} G_0(m) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{B^2} d^D p \tilde{G}_0(p) e^{ip_x m} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{B^2} d^D p \frac{e^{im p_x}}{1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha} \end{aligned}$$

NOTIAMO CHE, IN GENERALE,

$$\Gamma^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty dz z^{\gamma-1} e^{-\Gamma z}$$

NOTA: SI RICORDI CHE

$$A_{k_x, l_x} = \beta G_0(k_x - l_x)$$

CON

$$G_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{B^2} d^D p \tilde{G}_0(p) e^{ip \cdot x}$$

$$\tilde{G}_0(p) = \left(1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha \right)^{-1}$$

Dove Γ E' LA FUNZIONE GAMMA DI EULER. INFATTI

$$\gamma = 2\Gamma$$

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty dy \frac{y^{\gamma-1}}{A^{Y-1}} e^{-y} = \frac{1}{A^\gamma} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \overbrace{\int_0^\infty dy y^{\gamma-1} e^{-y}}^{\Gamma(\gamma)} = \frac{1}{A^\gamma}$$

SCELTO $\gamma = 1$ ($\Gamma(1) = 1$ POICHÉ $\Gamma(m+1) = m!$), IN PARTICOLARE

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty dz e^{-\Gamma z}$$

NOTA: VABBÈ DAI, E' IL SOUTO

$$\int_0^\infty e^{-t/z} dt = z.$$

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE

$$G_0(m) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{B^2} d^D p \int_0^\infty d\mu e^{-\mu \left(1 - \frac{\tilde{p}}{D} \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha\right)} + i m p_x \quad (I)$$

PER CONTINUARE IL NOSTRO CONTO A SERVONO LE FUNZIONI DI BESSEL MODIFICATE DI ORDINE INTEGO

$$\begin{aligned} I_m(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(m\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{z \cos \theta} \cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{z \cos \theta + im\theta} d\theta \end{aligned} \quad (II)$$

Dove si è usata

$$\cos(m\theta) = \frac{1}{2} (e^{im\theta} + e^{-im\theta})$$

NOTA: MANDA $\theta \rightarrow -\theta$ NEW INTEGRALE CON $e^{-im\theta}$.

GUARDANDO LA (I), PER $\alpha \neq x$ HO DELLE FUNZIONI $I_m(z)$ CON $m=0$; HO PERTOPO' I DUE CONTRIBUTI (AVENDO RICONOSCIUTO NELLA (II) LA BZ)

$$G_0(m) = \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} I_0\left(\frac{\mu \tilde{p}}{D}\right)^{D-1} I_m\left(\frac{\mu \tilde{p}}{D}\right) \quad (III)$$

POSSIAMO USARE LE ESPANSIONI IN SERIE DELLE FUNZIONI DI BESSEL

$$I_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(z^2/4)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \right\}$$

NOTA: AI FINI DELLA DEMOSTRAZIONE
BASTA RICORDARE L'ORDINE
DOMINANTE, $I_m(z) \sim z^m$ SE $z \ll 1$
IN EFFETTI L'INTEGRALE (III) CONTIENE
 $e^{-\mu}$, QUINDI È DOMINATO DAI
VALORI DI $\mu \ll 1$.

IN PARTICOLARE, USANDO $\Gamma(m+1) = m!$,

$$I_0(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{z^2}{4} \frac{1}{\Gamma(2)} + O(z^3) = 1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(z^4)$$

$$I_m(z) = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^m + O(z^{m+2})$$

ABBIAMO PERTOPO' LA TESI SE NOTIAMO CHE, APPROXIMANDO,

$$\begin{aligned} G_0(m) &\sim \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} 1^{D-1} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\mu \tilde{p}}{2D}\right)^m \\ &= \left(\frac{\tilde{p}}{2D}\right)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \mu^m = \left(\frac{\tilde{p}}{2D}\right)^m \sim D^{-m} \end{aligned}$$

DECADIMENTO ESPONENZIALE DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE ($\beta \neq \beta_c$)

INVECE DI AFFRONTARE IL CONTO USANDO NUOVAMENTE LE FUNZIONI DI BESSSEL, CI RIFACCIAMO A UN TEOREMA SUL COMPORTAMENTO DELLE FUNZIONI ANALITICHE (VEDI AD ES. MÖLSE AND FESTBACH 4.8) :

SE $g(p)$ E' UNA FUNZIONE ANALITICA (SU \mathbb{R}) DI PERIODO 2π , LA CUI SINGOLARITA' PIU' VIANA ALL' ASSE REALE E' IN $p = i p_s$, ALLORA

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp \ g(p) e^{ipm} \underset{m \rightarrow \infty}{\approx} e^{-mp_s}$$

ESPRIMIAMO

$$G_0(m) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d\mathbf{p}_x e^{i\mathbf{p}_x m} \int \left(\prod_{\mu=2}^D d\mathbf{p}_\mu \right) \left[1 - 2\beta \left(\cos p_x + \sum_{\mu=2}^D \cos p_\mu \right) \right]^{-1}$$

$$= (2\pi)^{-D} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p} m} g(\mathbf{p})$$

DOVE SI E' DETTO $p_x = p$ E SI E' DEFINITA

$$g(\mathbf{p}) = \int \left(\prod_{\mu=2}^D d\mathbf{p}_\mu \right) \left[1 - 2\beta \left(\cos p + \sum_{\mu=2}^D \cos p_\mu \right) \right]^{-1}$$

LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE ξ E' QUELLA PER CUI

$$p_s = \xi^{-1}$$

E SI TRATTA ORA DI INDIVIDUARE IL PUNTO p_s DI SINGOLARITA' DI $g(p)$.

SE $p_\mu \approx 0$, $\mu = 2, \dots, D$, TROVO QUELLO PIU' VIANO ALL' ASSE REALE * :

$$1 - 2\beta \cos(i p_s) - 2\beta(D-1) = 0$$

$$\cos(ip_s) = \frac{1}{2\beta} - D + 1 = 1 + \frac{1-2D\beta}{2\beta}$$

E USANDO

$$\cos(1+x) \underset{x \approx 0}{\approx} i\sqrt{2x}$$

* NOTA : IN REALTA' STAREI INTEGRANDO NELLE p_μ , QUINDI MI ASPETTO CHE $g(p)$ ABbia UN CONTINUO DI PUNTI DI SINGOLARITA'. SI DIMOSTRA PERO' CHE, SUPPONENDO ALCUNI $p_\mu \neq 0$, IL PUNTO p_s SI ALLONTANA DALL' ASSE REALE. VEDI CONTO ESPAULTO TRA QUALCHE PAGINA (APPENDICE).

POICHÉ IN PROSSIMITÀ DELLA TEMPERATURA CRITICA

$$2D\beta \sim 1$$

NOTA: DI NUOVO, STIAMO VEDENDOLO PER $T \rightarrow T_c^+$, MA L'ARGOMENTO SI APPLICA ANCHE A $T \rightarrow T_c^-$.

AFFERMO

$$\rho_s = A \cos \left(1 + \frac{1 - 2D\beta}{2\beta} \right) \sim i \sqrt{\frac{1 - 2D\beta}{\beta}}$$

QUINDI

$$\rho_s = f^{-1} \approx \sqrt{\frac{1 - 2D\beta}{\beta}} \quad (= m) \quad \text{PER } 2D\beta \sim 1$$

QO' DEFINISCE UN ALTRO ESponente CRITICO. INFATTI

$$\beta \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \beta_c = \text{cost.}$$

QUINDI

$$f \sim |\beta_c - \beta|^{-1/2}$$

ABBIAMO COSÌ SCOPERTO CHE IN MEAN FIELD

$$\gamma_{MF} = \frac{1}{2}$$

AVREI TRONATO LO STESSO RISULTATO SCEGLIENDO
UN CAMMINO PIÙ COMPLICATO.

* CITIAMO CHE VEDUTO AL PUNTO CRITICO È RIPRISTINATA
L'INVARIANZA ROTAZIONALE:

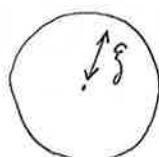
$$A_{0,\infty} \underset{T=T_c}{\approx} A(l^2), \quad l^2 \rightarrow \infty$$

NOTA: OVVERO SI PERDE LA DIPENDENZA DALLA DIREZIONE.

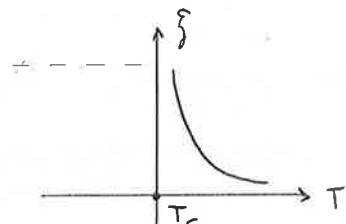
$$l^2 = \sum_i l_i^2$$

* PER $T \neq T_c$ POSSO IMMAGINARE UN CERCHIO DI RAGGIO ξ ENTRO
CUI LA CORRELAZIONE È IMPORTANTE:

$$G_0 \sim e^{-m/\xi}$$



PER $T \rightarrow T_c$ ξ CRESCHE, FINO A CHE TROVO UN
DECADIMENTO A POTENZA.



* ABBIAMO VISTO CHE (PER $T > T_c$)

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \sim e^{-|i-j|/\xi}$$

QUESTA MI DA SEMPRE UN VALORE COSTANTE NELLA
FASE FREDDA ($T < T_c$):

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \xrightarrow[T \rightarrow T_c]{|i-j| \rightarrow \infty} \tilde{m}^2 = \text{cost.}$$

SE CONSIDERO INVECE

NOTA: SE $T < T_c$,

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \approx \frac{\tilde{m}^2 + e^{-\frac{T}{T_c}}}{2\tilde{m}} \approx \frac{\tilde{m}^2}{2\tilde{m}} = \frac{\tilde{m}}{2}$$

NELLA FASE CALDA NON CAMBIA NULLA, MA NELLA FASE FREDDA STO SOTTRAENDO IL BACKGROUND $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ E OTTENGO UN ANDAMENTO SIMMETRICO.

* RICORDIAMO CHE PER $T \rightarrow T_c^-$, $h = 0$ SI

HA UN ANDAMENTO COME A FIANCO: A $T = T_c$

TERMINA UNA LINEA DI TRANSIZIONE DEL I° ORDINE

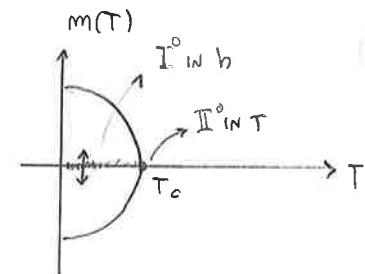
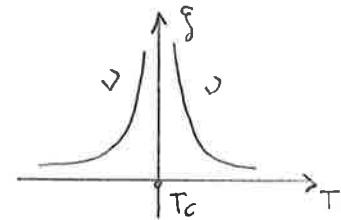
IN h E SI HA UN PUNTO DI TRANSIZIONE DEL II° ORDINE IN T .

PER $T < T_c$, $h = \pm \varepsilon \rightarrow m$ SALTA DA $-\tilde{m}$ A $+\tilde{m}$.

AMO' DUE POSSIBILI STATI:

$|+\rangle$, $\tilde{m} > 0$

$|-\rangle$, $-\tilde{m} < 0$



CHIAMIAMO ALORA IL GAP DI MAGNETIZZAZIONE

$$\delta m = m_{|+\rangle} - m_{|-\rangle} = 2\tilde{m} \xrightarrow{T \rightarrow T_c^-} 0$$

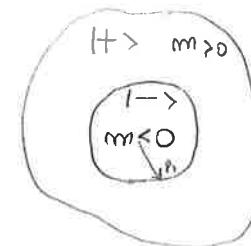
* NOTA: SIGNIFICA "TUTTI +" SOLTANTO A $T=0$, ALTRIMENTI AVRO' UNA PREVALENZA DI +.

MOSTRIAMO CHE, SE SUCCIDE QUESTO, ALORA NECESSARIAMENTE

$$\int_{T \rightarrow T_c} \vec{f} \cdot \vec{r} \propto \quad (\text{SE } \tilde{m} \rightarrow 0)$$

PRENDIAMO UN SISTEMA ALLINEATO IN MEDIA* CON $|+\rangle$ E CONSIDERIAMO UNA BOLLA DI MAGNETIZZAZIONE $|-\rangle$. LA DIFFERENZA DI F CAUSATA DA QUESTA BOLLA E' LEGATA ALLA PARETE (DENTRO LA BOLLA UNO SPIN NON SA DI ESSERE FUORI POSTO): L'INTERFACCIA CONTRIBUISCE A F CON

$$\Delta F \propto R_c^{D-1} \tilde{m}^\alpha \quad \alpha > 0$$



POSso FARARE UN CERTO PREZZO ΔF E AIOR DETERMINA LA DIMENSIONE MASSIMA DELLA BOLLA CHE POSSO CREARE,

$$R_c^{D-1} \tilde{m}^\alpha = \text{cost.}$$

$R_c =$ Raggio critico

SE PAGANDO LO STESSO VOGLIO FARARE UNA BOLLA PIU' GRANDE,

$$R_c \propto \tilde{m}^{-\frac{1}{D-1}}$$

$R_c \propto \xi \propto \text{dim. cluster tipico.}$

* UN ALTRO MODO PER VEDERLO E' IL SEGUENTE. SIA m SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI STABILITÀ

$$\psi'(m, T) = h$$

PER $T < T_c$ HO DUE SOLUZIONI DISTINTE m_1, m_2 .

PER $T \rightarrow T_c$, I PUNTI TENDONO ENTRAMBI A $m_1, m_2 \rightarrow m=0$.

IN QUEL PUNTO, BISOGNA NECESSARIAMENTE CHE

$$\psi''(m, T_c) = 0$$

MA ALLORA LA SUSCETTIVITÀ MAGNETICA

$$\chi \sim (\psi'')^{-1} \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \infty$$

DEVE DIVERGIRE (QUINDI DIVERGE LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE)*.

QUI LE FLUTTUAZIONI SONO CORRELATE SU LUNGA SCALA E DA' DA' LUOGO AL DECADIMENTO A POTENZA.

* NOTA:
 $\chi = \beta \int_0^\infty G(x) dx = \beta \tilde{G}_0(0) = \frac{\beta}{(1-2\alpha)}$

BICAPITOLIAMO

$$f(T) \underset{T \rightarrow T_c}{\simeq} |T - T_c|^{-\nu}$$

$$\gamma_{MF} = \frac{1}{2}$$

$$G(m) \Big|_{\substack{h=0 \\ T=T_c}} \simeq m^{-(D-2+\eta)} \quad \text{DIMENSIONE ANOMALA}$$

$$\eta_{MF} = 0$$

$$m(T) \Big|_{h=0} \underset{T \rightarrow T_c}{\simeq} |T - T_c|^p$$

$$\beta_{MF} = \frac{1}{2}$$

$$\chi(T) \Big|_{h=0} \simeq |T - T_c|^{-\gamma}$$

$$\gamma_{MF} = 1$$

$$C(T) \Big|_{h=0} \simeq |T - T_c|^{-\alpha}$$

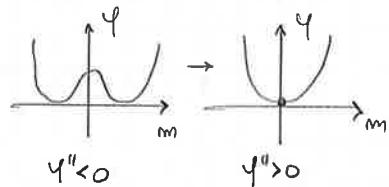
$$\alpha_{MF} = 4-D$$

$$m(h) \Big|_{T=T_c} \simeq |h|^{1/\delta}$$

$$\delta_{MF} = 3$$

(LE ULTIME DUE NON LE ABBIAMO DIMOSTRATO).

NOTA: SI STA CHIAMANDO $\psi(m, T)$
 L'ENERGIA LIBERA DEL CASO $h=0$.
 ψ' E' UNA DERIVATA RISpetto A m



IL LIMITE DI VOLUME INFINITO

LA NOSTRA TEORIA È BEN DEFINITA PER $V \rightarrow \infty$?

PRENDIAMO LA GRANDEZZA INTENSIVA f_N E STUDIAMOLA NEL LIMITE $V \rightarrow \infty$ (SU DI UN RETICOLO CENTERED CUBIC).

NEL MODELLO DI ISING, $h=0$, L'ENERGIA È LIMITATA:

$-ND \leq E \leq ND \rightarrow$ STATO FONDAMENTALE DI UN ANTIFERROMAGNETE (STAGGERED), $\sigma_{xyz} = (-1)^{x+y+z}$

VI SONO IN TOTALE 2^N CONFIGURAZIONI. POICHÉ

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]}$$

NOTA: CLASCUO DEGLI N SPIN HA $2D$ PRIMI VIZI E ALLA FINE DIVIDO PER 2 COSÌ DA CONTARE OGNI COPPIA UNA SOLO VOLTA.

Allora

$$2^N e^{-\beta ND} \leq Z_N \leq 2^N e^{\beta ND}$$

PRENDENDO IL \ln E DIVIDENDO PER N ,

$$\frac{1}{\beta} \ln 2 - D \leq \frac{1}{\beta N} \ln Z_N \leq \frac{1}{\beta} \ln 2 + D$$

$$-\Delta + \frac{1}{\beta} \ln 2 \leq -f_N \leq \Delta + \frac{1}{\beta} \ln 2$$

QUINDI f_N NON DIVERGE CON N .

MODI DI AFFETTARE SUPERFICIE DI SEPARAZIONE (INTERNA)
 * NOTA: $D(2L)^{D-1}$ SONO IL NUMERO MASSIMO DI SPIN CHE POSSONO CAMBIARE. IN $D=2$ SI HA $2 \cdot (2L)$; IN $D=3$, $3 \cdot (2L)^2$. PROVA A VISUALIZZARLI (È LA CROCE NEL QUADRATO).

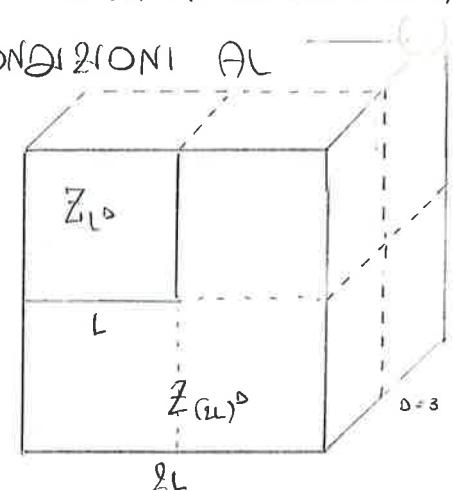
SIA ALLORA $N=L^D$ (IPERCUBO) E SCEGLIAMO CONDIZIONI AL BORDO LIBERE (FBC, NO INTERAZIONI SUI BORDI).

PRENDIAMO DUE SISTEMI DI TAGLIA LINEARE L E $2L$:

$$Z_{(2L)^D} = (Z_{L^D})^{2^D} + O(L^{D-1})$$

TERMINI DI BORDO

COME QUANTIACCHIAMO IL CONTRIBUTO* DEL BORDO?



$$D(2L)^{D-1}$$

oò SIGNIFICA CHE (F STA PER "FREE")

$$(Z_{L^D}^{(F)})^{2^D} e^{-D(2L)^{D-1}\beta} \leq Z_{(2L)^D}^{(F)} \leq (Z_{L^D}^{(F)})^{2^D} e^{D(2L)^{D-1}\beta}$$

$$2^D \ln Z_{L^D}^{(F)} - D(2L)^{D-1}\beta \leq \ln Z_{(2L)^D}^{(F)} \leq 2^D \ln Z_{L^D}^{(F)} + D(2L)^{D-1}\beta$$

E QUINDI, RACCOGLIENDO I TERMINI IDENTICI E DIVIDENDO PER $(2L)^D$,

$$-\Delta(2L)^{D-1} \leq \frac{1}{\beta} \left(\ln Z_{(2L)^D}^{(F)} - 2^D \ln Z_L^{(F)} \right) \leq \Delta(2L)^{D-1}$$

$$-\frac{\Delta}{2L} \leq -\frac{1}{\beta(2L)^D} \ln Z_{(2L)^D}^{(F)} + \frac{1}{\beta L^D} \ln Z_L^{(F)} \leq \frac{\Delta}{2L} \Rightarrow |f_{(2L)^D} - f_L| \leq \frac{C}{L}$$

I TEOREMI STANDARD MI ASSICURANO CHE QUESTA SEQUENZA CONVERGA: QO' IMPLICA CHE f AMMETTA UN BUON LIMITE, PER ISING, QUANDO $V \rightarrow \infty$ (LIMITE TERMODINAMICO).

NOTA: HO MOSTRATO, INSOMMA, CHE SE PRENDO UN SISTEMA 2^D VOLTE PIÙ GRANDE DEL PRIMO f NON CAMBIA SE NON PER TERMINI TRASOGLIBILI NEL LIMITE TERMODINAMICO.

APPENDICE: SUL DECADIMENTO ESPONENZIALE DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE.

NEL CERCARE IL PUNTO SINGOLARE p_s DI $\phi(p)$ PIÙ VIANO ALL'ASSE p , SI ERANO SUPPOSTI

$$p_\mu \approx 0 \quad \text{se } \mu = 2, \dots, D.$$

PER MOSTRARE CHE È CORRETTO, SCEGLIAMO UN ALTRO DEI p_μ NON NULLO,

$$p_\alpha = O(\varepsilon), \quad \alpha \neq 1$$

$$\cos p_\alpha \approx 1 - \frac{p_\alpha^2}{2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

E RIPETIAMO I CONTI: AVENDO CHIAMATO $p_x \equiv p$,

$$1 - 2p \left(\cos p + \sum_{\mu=2}^D \cos p_\mu \right) = 0$$

$$1 - 2p \cos(i\tilde{p}_s) - 2p(D-1) + 2p \frac{\varepsilon^2}{2}(D-1) = 0$$

$$\tilde{p}_s = \arccos \left[1 + \frac{1 - p/p_0}{2p} + \frac{\varepsilon^2}{2}(D-1) \right] \approx i \sqrt{\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \frac{1}{2p} + \frac{\varepsilon^2}{2}(D-1)} > p_s = i \sqrt{\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \frac{1}{2p}}$$

QUINDI IN EFFETTI L'ASSUNZIONE È GIUSTIFICATA.

SI NOTI CHE SI STA DANDO UN RUOLO PRIVILEGIATO A $p = p_x$, RISPETTO A TUTTI GLI ALTRI, PERCHÉ STIAMO STUDIANDO $G(m)$ NELL'IPOTESI SEMPLIFICATIVA IN CUI SI CONSIDERANO DUE PUNTI A DISTANZA m LUNGO L'ASSE x .

ESPANSIONI AD ALTE E BASSE T

LO STUDIO DEL MODELLO DI ISING CHE ABBIAMO INTRODOTTO PROSEGUE ATTRAVERSO ESPERIMENTI, SOLUZIONI NUMERI CHE O LA RICERCA DI SOLUZIONI ESATTE O APPROSSIMATE.

NOTO IL COMPORTAMENTO A $T=0$, STUDIEREMO CHE COSA SUCCIDE A BASSE T; SIMILMENTE CI METTEREMO NEL LIMITE $T \rightarrow \infty$ PER TROVARE UN'ESPANSIONE PER PICCOLI β .

ANDREMO INCONTRO A UNA "CATASTROFE": LE NOSTRE ESPANSIONI PERTURBATIVE PRESENTANO DELLE DIVERGENZE. PROPRIAMENTE PER ELIMINARE LE DIVERGENZE DELLA TEORIA INTRODURREMO IL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE. L'IDEA È QUESTA: SE CONOSCO QUALcosa DELLA FISICA DEL MODELLO (AD ESEMPIO SE SO CHE CERTE QUANTITA' DEVONO RESTARE BEN DEFINITE VIANO AL PUNTO CRITICO) E RIESCO A INSERIRLO NELLA TRATTAZIONE MATEMATICA, ARRINO MOLTO PIÙ LONTANO.

CI RIFAREMO COME SEMPRE AL MODELLO DI ISING. GIA' IN $D=3$ ESSO NON AMMETTE SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA; INTRODURREMO PERATO' IL MODELLO GAUSSIANO, CHE È LOCALE E CHE RESTITUISCE LA SOLUZIONE DI CAMPO MEDIO NEL LIMITE DI PICCOLI β (o T GRANDI) CHIARAMENTE, SE NON FOSSE PER LA PRESENZA DELLE TRANSAZIONI. LO STUDIO A $T=0$ CI DIREBBE GIA' TUTTO SUL SISTEMA.

ESPANSIONE A BASSE T

SO CHE A $T=0$ TUTTI GLI SPIN SONO ALLINEATI ($\uparrow\uparrow$ oppure $\downarrow\downarrow$).

A PICCOLE T, ALCUNI SPIN INIZIANO A RIGRANSI: INFATTI IN

$$F = U - \frac{S}{\beta}$$

COMPETONO IL TERMINE ENERGETICO E IL TERMINE ENTROPICO. QUEST'ULTIMO INIZIA A CONTARE NON APPENA ACCENDO T E

DA' PEGO AL FATTO CHE LA CONFIGURAZIONE CON TUTTI GLI SPIN ALLINEATI E' UNA SOLA (MENTRE AD ESEMPIO NE NE SONO N CON UNO SPIN ROvesciato).

SENZA PERDERE DI GENERALITA', SCEGLIAMO UNO STATO INIZIALE $|+\rangle$ TALE CHE TUTTI GLI SPIN VALGANO $+1$ A $T=0$.

CI CHIEDIAMO QUANTO VALGA $P(1 \text{ SPIN GIRATO})$: QUESTA, UNITA A $P(\text{tutti } +)$, DOREBEBBE BASTARE A DARE UNA DESCRIZIONE ACCURATA DEL SISTEMA SE $T \ll 1$. QUANDO T CRESCHE, DIVERRANNO IMPORTANTI LE CONFIGURAZIONI CON 2 SPIN GIRATI.

CHIAMIAMO IN GENERALE

$$k = \# \text{ SPIN GIRATI}$$

PER $k=0$ HO IL COSIDDETTO GROUND STATE.

CONSIDERIAMO UN SISTEMA CON N SPIN IN D DIMENSIONI, CON $N = L^D$

SCEGLIAMO UN RETICOLO SEMPLICE (SCATOLA CUBICA) CON P.B.C..

SIA L FINITO (SOLO ALLA FINE MANDEREMO $L \rightarrow \infty$), MA $L > k$.

CONTIAMO LE CONFIGURAZIONI CON:

TUTTI $+1$:

1

1 SPIN -1 :

N

2 SPIN -1 :

$$\frac{1}{2} N(N-1) = \binom{N}{2}$$

2 SPIN -1 , VICINI:

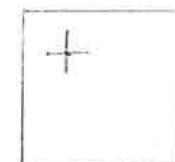
$$N \cdot (2D) \cdot \frac{1}{2} = ND \quad (\text{TANTE QUANTE LEGAMI})$$

CALCOLIAMO L'ENERGIA DI

QUESTE CONFIGURAZIONI USANDO

$$E = - \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

$$\begin{array}{c} \text{SPIN} \\ \uparrow \\ \text{PRIMI} \\ \uparrow \\ \text{VICINI} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{CINTO UNA VOLTA} \\ \uparrow \\ \text{OGNI COPPIA} \end{array}$$

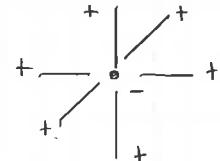


AVENDO SCELTO CONDIZIONI PERIODICHE AL BORDO, HO ND TERMINI DIVERSI E PERCIO' L'ENERGIA DELLO STATO FONDAMENTALE E'

$$E_0 = -ND$$

QUANDO UNO SPIN È GIRATO,

$$E_1 = E_0 + 4D$$

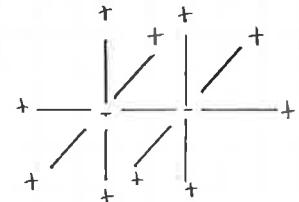


INFATTI SI AFRANNO 2D LEGAMI ROTTI E CIASCUANO FA CRESCERE DI 2 L'ENERGIA. SIMILMENTE, 2 SPIN GIRATI NON ADIACENTI DARANNO

$$E_{2\text{N.A.}} = E_0 + 8D$$

MENTRE SE NE GRO 2 VIANI

$$E_{2\text{N.N.}} = E_0 + 8D - 4$$



AD ESEMPIO, NEL CASO D=3 MOSTRATO A FRANCO

SONO ROTTI SOLO 10 DEI 12 LEGAMI PRESENTI, SE LI CONTASSI COME PER IL CASO A SPIN NON ADIACENTI.

SORIVAMO QUINDI UN'APPROSSIMAZIONE DELLA FUNZIONE DI PARTIZIONE INCUDENDO K=0, 1, 2. AVEMMO

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]}$$

$$\approx 1 \cdot e^{-\beta E_0} + N \cdot e^{-\beta(E_0+4D)} + ND \cdot e^{-\beta(E_0+8D-4)} + \frac{N^2-N-2ND}{2} \cdot e^{-\beta(E_0+8D)}$$

K=0

K=1

K=2, VIANI

K=2, LONTANI

DEFINIAMO

$$t = e^{-4\beta}$$

IL PARAMETRO DELLO SVILUPPO PERTURBATIVO, IN TERMINI DEL QUALE

$$Z \underset{\text{pert}}{\approx} e^{-\beta E_0} \left(1 + Nt^D + ND t^{2D-1} + \frac{N(N-1-2D)}{2} t^{2D} + \dots \right)$$

Allora

$$f = -\frac{1}{\beta N} \ln Z = -\frac{1}{\beta N} \ln \left\{ e^{\beta ND} \left(1 + Nt^D + \dots \right) \right\}$$

$$= -D - \frac{1}{\beta N} \ln \left(1 + \sum_{j=1}^K c_j \right)$$

DONDE -D È IL CONTRIBUTO DEL GROUND STATE, MENTRE

c_j = CONTRIBUTO DI j SPIN (-1)

$$c_j = O(N^j)$$

SE PRENDO SUBITO

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f = 0$$

OTTENGO BANALMENTE ZERO: NON È L'APPROCCIO CORRETTO. INVECE:

i) ESPANDO f IN T NEL VOLUME FINITO (OÈ A N ASSATO);

ii) PRENDO IL $\lim_{N \rightarrow \infty} f$, CHE È COSÌ BEN DEFINITO.

USANDO $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$, ESPANDIAMO FINO A $K=3$

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \sum_{j=1}^K C_j\right) &\approx (C_1 + C_2 + C_3) - \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3)^2 + \frac{1}{3}(C_1 + C_2 + C_3)^3 \\ &\approx C_1 + C_2 + C_3 - \frac{1}{2}(C_1^2 + 2C_1C_2) + \frac{C_1^3}{3} \\ &\approx C_1 + \left(C_2 - \frac{C_1^2}{2}\right) + \left(C_3 - C_1C_2 + \frac{C_1^3}{3}\right)\end{aligned}$$

DONE SI È RACCOLTO, NELL'ULTIMO PASSAGGIO, IN POTENZE DI N .

SI È PERÒ TRONATA

$$f \approx -D - \frac{1}{\beta N} \left[C_1 + \left(C_2 - \frac{C_1^2}{2} \right) + \left(C_3 - C_1C_2 + \frac{C_1^3}{3} \right) \right]$$

I TERMINI RILEVANTI (FINO A $K=2$) SONO

$$\begin{cases} C_1 = Nt^\alpha \\ C_2 = \left(\frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} - ND\right)t^{2\alpha} + NDt^{2\alpha-1} \\ \frac{C_1^2}{2} = \frac{N^2}{2}t^{2\alpha} \end{cases}$$

PERÒ

$$f_{K=2} = -D - \frac{1}{\beta N} \left[C_1 + \left(C_2 - \frac{C_1^2}{2} \right) \right]$$

$$= -D - \frac{1}{\beta} \left[t^\alpha + \left(\frac{N}{2} - \frac{1}{2} - D\right)t^{2\alpha} + Dt^{2\alpha-1} - \frac{N}{2}t^{2\alpha} \right]$$

$$= -D - \frac{1}{\beta} \left[t^\alpha - \frac{1}{2}t^{2\alpha} + D(t^{2\alpha-1} - t^{2\alpha}) \right]$$

NOTIAMO CHE SI SONO CANCELLATI TUTTI I TERMINI IN N^2 , cioé' QUELLI CHE RENDEVANO f DIVERGENTE NEL LIMITE $N \rightarrow \infty$: LA f_{2n} COSÌ TROVATA NON DIPENDE DA N . QUESTA E' UNA PROPRIETÀ GENERALE, SE L'INTERAZIONE E' A CORTO RAGGIO, E RIPECCONIA IL FATTO CHE IL SISTEMA SIA BEN DEFINITO:

$\forall k, l > k, f_n^{(k)}$ NON DIPENDE DA N (E' INTENSIVA).

SI RICONOSCONO IN $f_{k=2}$ I CONTRIBUTI DI 1 o 2 SPIN RUOTATI.

L'ANALISI PUO' ESSERE ESTESA PER GRANDI k (FINO A $\sim t^0$) PER AVVIANANDI AL PUNTO CRITICO E STIMARE I COEFFICIENTI CRITICI.

ESEMPIO

CALCOLA $f_{k=3}$ E $M_{n=2} = \langle O \rangle$.

NOTA: E' SVOLTO NELL'"FOCUS" TRA UN PAIO DI PAGINE.

CONSEGUENZE DELL'INDIPENDENZA DA N DI f_n NEI SISTEMI SHORT-RANGED

SE FACCIAVAMO LE COSE BENE, AD OGNI ORDINE PERTURBATIVO I TERMINI PIÙ CHE LINEARI IN N SI CANCELLANO.

CONSIDERHIAMO UN CLUSTER DI SPIN E ASSUMIAMO CHE ESSO DIA UN CONTRIBUTO NA ALLA FUNZIONE DI PARTIZIONE. PRENDIAMO M COPIE BEN SEPARATE DI QUESTO CLUSTER; QUESTE DARANNO UN CONTRIBUTO

$$\frac{(NA)^m}{m!}$$

NOTA: NELLA PROSSIMA PAGINA SI SPIEGA PERCHÉ.

(SI È TENUTO CONTO DELLE PERMUTAZIONI). LA SOMMA DI QUESTI CONTRIBUTI AL VARIANTE DI m DA'

$$\sum_m \frac{(NA)^m}{m!} \sim e^{NA}$$

QUINDI L'ENERGIA LIBERA VALE

$$F \sim -\frac{1}{\beta} \ln Z \sim -\frac{1}{\beta} (NA)$$

* NOTA: INTENDE I TERMINI CHE VANNO COME N^2 MA ESSI VENGONO DA EFFETTI DI VOLUME ESCLUSO E DALLA DIFFERENZA DI ENERGIA TRA SPIN SEPARATI O A CONTATTO

LA SOMMA DEGLI EFFETTI DI CLUSTER INDIPENDENTI DA' QUINDI UN RISULTATO BANALE. L'EFFETTO ASICO INTERESSANTE* VIENE DAL

FATTO CHE I CLUSTER POSSONO ENTRARE IN CONTATTO.

NEL CALCOLO DI $f_{N=2}$, IL TERMINE N² VENIVA DAL CASO IN CUI I DUE SPIN NON SI TOCCANO.

TUTTAVIA, SULLA BASE DI RAGIONI GENERALI, IN UNO SVILUPPO PERTURBAZIONE DI QUESTO TIPO POSSO TROVARE IL COEFFICIENTE GIUSTO GUARDANDO AL SOLO CONTRIBUTO LINEARE* IN N: SO CHE, POICHÉ LA TEORIA È DEFINITA BENE NEL LIMITE N → ∞, GLI ALTRI TERMINI SI DEVONO ESSERE A PIOMBI.

* NOTA: OVVERO AI CLUSTER CONNESSI. SI Vede MEGLIO NEL CONTO CON K=3 (VEGLI FOCUS).

RICAPITOLANDO

AL ORDINE N, UN CLUSTER CONTRIBUISCE CON

$$f \sim \frac{1}{\beta^N} \log(A^N)$$

CON A COSTANTE. SE HO 2, 3 ..., m CLUSTER, ANNO' UN CONTRIBUTO A Z

$$\frac{(AN)^m}{m!}$$

COME CON LE FUNZIONI DI PARTIZIONE: SE NON SI TOCCANO, NE FACCO IL PRODOTTO,

$$(\sum_s) (\sum_s) \dots$$

SOMMANDO I CONTRIBUTI DI m COPIE AL VARIARE DI m,

$$f \sim \frac{1}{\beta^N} \ln \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(AN)^m}{m!} \right) = \frac{1}{\beta^N} NA = \frac{1}{\beta} A$$

NOTA: IN EFFETTI SE SCAMBIO DUE CLUSTER UGUALI IN POSIZIONI DIVERSE TROVO LA STESSA CONFIG.

L' m! SERVE A NON CONTARE PIÙ VOLTE LE CONFIGURAZIONI UGUALI.

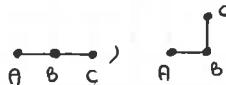
LA f così trovata non è ESTENSIVA CON N; IN TEORIA DELLE PERTURBAZIONI, CIO'E DEVE ESSERE VERIFICATO A TUTTI GLI ORDINI.

FOCUS: CALCOLO DELL'ENERGIA LIBERA $\sum_{k=3} f_k$ (BASSE T)

DOBBIAMO CONTARE INNANZITUTTO LE CONFIGURAZIONI CON 3 SPIN GIRATI.

. . . QUALSIASI

$$\binom{N}{3} = \frac{1}{6} N(N-1)(N-2) \quad (1)$$



. . . DISTANTI

$$(ND)(N - 2D - 2D) = ND(N - 4D) \quad (2)$$

$$N(2D)(2D-1) \cdot \frac{1}{2} = ND(2D-1) \quad (3)$$

$$(1) - (2) - (3) = N \left[\frac{1}{6}(N^2 - 3N + 2) + D(2D+1) - ND \right] \quad (4)$$

ANALOGAMENTE A QUANTO FATTO CON LE CONFIGURAZIONI A 2 SPIN GIRATI, OHA NE CALCOLIAMO LE ENERGIE. OTTENIAMO

$$E_0 = -ND$$

1

$$E_1 = E_0 + 4D$$

N

$$E_2^L = E_0 + 8D$$

$$\binom{N}{2} - ND$$

$$E_2^{UV} = E_0 + 8D - 4$$

ND

$$E_3^L = E_0 + 3 \cdot (2D) \cdot 2 = E_0 + 12D$$

$$N \left[\frac{1}{6}(N^2 - 3N + 2) + D(2D-1) - ND \right] = A(N)$$

$$E_3^{UV} = E_0 + 12D - 4$$

$$ND(N - 4D)$$

$$E_3^{3V} = E_0 + 12D - 8$$

$$ND(2D-1)$$

LO SVILUPPO A BASSE T DELLA FUNZIONE DI PARTIZIONE DA'

$$Z \approx e^{\beta E_0} \left\{ 1 + NT^D + ND t^{2D-1} + \left[\binom{N}{2} - ND \right] t^{2D} + ND(2D-1) t^{3D-2} + ND(N-4D) t^{3D-1} + A(N) t^{3D} \right\}$$

SI EHA DERIVATA QUINDI

$$\sum_{k=3} f_k = -\frac{1}{\beta N} \ln Z = -D - \frac{1}{\beta N} \ln \left\{ 1 + \sum_{j=1}^3 C_j \right\} = -D - \frac{1}{\beta N} \left\{ C_1 + \left(C_2 - \frac{C_1^2}{2} \right) + \left(C_3 - C_1 C_2 + \frac{C_1^3}{3} \right) \right\}$$

DONE RICONOSCIAMO

$$\begin{cases} C_1 = NT^D \\ C_2 = \left[\binom{N}{2} - ND \right] t^{2D} + ND t^{2D-1} \\ C_3 = A(N) t^{3D} + ND(N-4D) t^{3D-1} + ND(2D-1) t^{3D-2} \end{cases}$$

SOSTITUENDO NELL'ESPRESSIONE PER $\int_{n=3}$ SI TROVA

$$\int_{n=3} = -D - \frac{1}{\beta} \left\{ t^D + Dt^{2D-1} - \left(D + \frac{1}{2}\right)t^{2D} + D(2D-1)t^{3D-2} \right. \\ \left. - 4D^2t^{3D-1} + \left(\frac{1}{3} + 2D^2 + D\right)t^{3D} \right\}$$

OSSERVIAMO CHE SI SONO CANCELLATI, IN $\log Z$, TUTTI I CONTRIBUTI PIÙ CHE LINEARI IN N : DAI CALCOLI COMBINATORI SVOLTI SI Vede COME ESSI PROVENISSERO SOLAMENTE DAI CLUSTER DISCONNESSI.

FOCUS: CALCOLO DELLA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA (BASSE T)

STANOLTA L'HAMILTONIANA COMPLETA SI SCRIVE

$$H = - \sum_{ij} \sigma_i J_{ij} \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i$$

IL TERMINE MAGNETICO CONTRIBUISCE CON

$$E_0 = -Nh$$

$$E_1 = -(N-2)h$$

$$E_2 = -(N-4)h$$

NEL CASO IN CUI TUTTI GLI SPIN SIANO ALLINEATI CON IL CAMPO h O VE NE SIANO 1 O 2 RUOTATI. ALCORA

$$Z = e^{\beta ND - \beta Nh} [1 + Ne^{\beta 2h} t^D + Nd e^{\beta 4h} t^{2D-1} + \frac{N(N-1-2D)}{2} e^{\beta 6h} t^{2D} + \dots]$$

IL CALCOLO PROCEDE IN MODO DEL TUTTO ANALOGO A PRIMA, SE NON CHE ORA I CONTRIBUTI C_k DI k SPIN RUOTATI CHE USEREMO SONO

$$\begin{cases} C_1 = Ne^{\beta 2h} t^D \\ C_2 = \left[\left(\frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} - ND \right) t^{2D} + Nd t^{2D-1} \right] e^{\beta 4h} \\ \frac{C_1^2}{2} = \frac{N^2}{2} t^{2D} \end{cases}$$

ALCORA

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{\beta N} \ln Z \\ &= -D + h - \frac{1}{\beta N} \left[C_1 + C_2 - \frac{C_1^2}{2} \right] \end{aligned}$$

E POSSIAMO CALCOLARE

$$m(h) = \frac{df}{dh}$$

INFINE LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA VALE

$$m^+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} m(h) = 1 - 2t^D + 2t^{2D} [2D(1-t^{-1}) + 1] + \dots$$

FOCUS: MATEICE DI COVARIANZA DI UNA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

$$P(\underline{z}) = C_N e^{-\frac{1}{2}(\underline{z}-\underline{m}), \hat{A}(\underline{z}-\underline{m})}$$

$$\underline{z} \in \mathbb{R}^N$$

DONDE \hat{A} E` UNA FORMA BILINEARE (MATEICE SIMMETRICA). CAMBIO DI VARIABILI A

$$\underline{x} \equiv \underline{z} - \underline{m} \Rightarrow P(\underline{x}) = C_N e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}, \hat{A}\underline{x})}$$

POICHÉ \hat{A} E` SIMMETRICA, E` DIAGONALIZZATA DA \hat{S} ORTOGONALE ($\hat{S}^T = \hat{S}^{-1}$) :

$$(\underline{x}, \hat{A}\underline{x}) = (\hat{S}\underline{z}, \hat{A}\hat{S}\underline{z}) = (\hat{S}^T\hat{S}\underline{z}, \hat{S}^T\hat{A}\hat{S}\underline{z}) = (\underline{y}, \hat{\Lambda}\underline{y})$$

$$\underline{x} \equiv \hat{S}\underline{y}, \quad \hat{\Lambda} \equiv \hat{S}^T\hat{A}\hat{S} \Rightarrow P(\underline{y}) = C_N e^{-\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i y_i^2} = C_N \prod_{i=1}^N e^{-\frac{\lambda_i}{2} y_i^2}$$

PERCHE` $P(\underline{y})$ SIA NORMALIZZABILE, RICHIEDO

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \Rightarrow \hat{A} \text{ DEFINITA POSITIVA}$$

$$\int d^n y \, P(\underline{y}) = 1 \Rightarrow C_N = \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\lambda_i}{2\pi}} = (2\pi)^{-N/2} \sqrt{\det \hat{A}}$$

INOLTRE

$$\langle y_i \rangle = 0 \quad \forall i \Rightarrow \langle z_i \rangle = m_i$$

DEFINIAMO INFINE LA MATEICE DI COVARIANZA

$$(\hat{C})_{ij} = \langle (z_i - m_i)(z_j - m_j) \rangle = \langle z_i z_j \rangle - m_i m_j$$

USANDO I PRODOTTI DI RADICI,

$$\hat{C} = \langle \underline{x} \otimes \underline{x} \rangle = \langle (\hat{S}\underline{y}) \otimes (\hat{S}\underline{y}) \rangle = \hat{S} \langle \underline{y} \otimes \underline{y} \rangle \hat{S}^T$$

CHE SI VIDE MEGLIO UTILIZZANDO IL FORMALISMO BRAKET,

$$\underline{x} \otimes \underline{x} \equiv |\underline{x}\rangle \langle \underline{x}| = |\hat{S}\underline{y}\rangle \langle \hat{S}\underline{y}| = \hat{S} |\underline{y}\rangle \langle \underline{y}| \hat{S}^T$$

MA LA $P(\underline{y})$ FATTORIZZA, QUINDI

$$\langle y_i y_j \rangle = \delta_{ij} \lambda_j^{-1} \Rightarrow \langle \underline{y} \otimes \underline{y} \rangle = \hat{\Lambda}^{-1}$$

INFINE, NOTANDO CHE

$$\hat{\Lambda} = \hat{S}^T \hat{A} \hat{S} \Rightarrow \hat{\Lambda}^{-1} = \hat{S}^T \hat{A}^{-1} \hat{S}$$

CONCLUDIAMO CHE

$$\hat{C} = \hat{S} \langle \underline{y} \otimes \underline{y} \rangle \hat{S}^T = \hat{S} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{S}^T = \hat{A}^{-1}$$

* IN ALTERNATIVA, SI PUO` USARE IL TEOREMA DI FLUTTUAZIONE-DISSIPAZIONE :

$$Z[h] = (\det A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{ij} h_i A_{ij}^{-1} h_j} \quad \hat{A} = -\beta \hat{J} + A$$

$$\langle \sigma_\mu \sigma_\nu \rangle_c = \frac{V}{\beta} X_{\mu\nu} = -\frac{V}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial h_\mu \partial h_\nu} f(h) = \left(+\frac{1}{\beta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial h_\mu \partial h_\nu} \ln Z[h] = (A^{-1})_{\mu\nu}$$

MODELLO GAUSSIANO

INTRODUZIONE AL MODELLO GAUSSIANO: SI TRATTA DI UN MODELLO LOCALE CHE AMMETTE COME SOLUZIONE QUELLA DI CAMPO MEDIO PER ALTE T (MA CI PERMETTE DI ANDARE OLTRE IL CAMPO MEDIO).

IN QUESTO MODELLO GLI SPIN $\sigma_i \in \mathbb{R}$ (NON PIÙ ± 1); COME AL SOTTO SONO POSIZIONATI SU DI UN RETICOLATO

$$\lambda^d \in \mathbb{Z}^d$$

GLI SPIN SONO DISTRIBUITI SECONDO

$$dP(\sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma_i^2/2} d\sigma_i$$

*NOTA: IN GENERALE

$$Z[n] = \int \prod_i dP_0(\sigma_i) e^{-\beta H[\sigma]}$$

RICORDIAMO CHE

$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{\int P(\sigma) \sigma^2 d\sigma}{\int P(\sigma) d\sigma} = 1$$

$$\langle \sigma^4 \rangle = 3$$

$$\langle \sigma^{2m} \rangle = (2m-1)!!$$

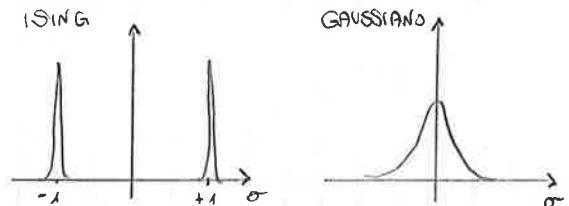
IN ASSENZA DI INTERAZIONI SPIN-SPIN, OSSIA PER $\beta=0$, LA PROBABILITÀ CHE $\sigma < 0$; $<\sigma> = 0$ E' $P_0(\sigma) d\sigma = dP_0(\sigma)$
HO IL MODELLO DI ISING PER
 $P_0(\sigma) = \delta(1-\sigma^2) = \frac{1}{2} [\delta(\sigma+1) + \delta(\sigma-1)]$
QUI INVECE LA SCEGLIO GAUSSIANA.

NOTA: $\langle \sigma^{2m} \rangle = (2m-1)!! \cdot (\text{Var}[\sigma])^m$

L'HAMILTONIANA È COME QUELLA DI ISING:

$$H[\sigma] = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq r} \sigma_i J_{ir} \sigma_r - \sum_i h_i \sigma_i$$

$$J_{ir} = \begin{cases} 1 & \text{SE } |i-r|=1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$



NOTA CHE ANCHE IN ISING SI USAVA, OLTRE A $e^{-\beta H[\sigma]}$, UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ A PRIORI* DEGLI SPIN NELLA MISURA: ERA UNA SOMMA DI DUE δ. ORA INVECE LA FUNZIONE DI PARTIZIONE È

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \left\{ \left(\prod_{i=1}^N d\sigma_i \right) \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \sum_{i \neq r} \sigma_i J_{ir} \sigma_r + \beta \sum_i h_i \sigma_i - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^2 \right\} \right\} = \int d\mu$$

LA FUNZIONE DI CORRRELAZIONE SI CALCOLA COME

$$\langle \sigma_i \sigma_r \rangle = \frac{\int d\mu \sigma_i \sigma_r}{\int d\mu}$$

MOSTRIAMO ORA CHE $\langle \sigma_i \sigma_r \rangle$ CALCOLATA IN QUESTO MODELLO CONCIDE CON IL RISULTATO MF-ISING. AFFRONTEREMO IL CALCOLO PRIMA IN MODO ALGEBRICO E Poi IN MODO DIAGRAMMATICO.

ANBREMO BISOGNO DEGLI INTEGRALI GAUSSIANI.

$$\int dx e^{-Ax^2 \pm Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}$$

$$I = \int \left(\prod_{i=1}^n dx_i \right) e^{-\left[\frac{1}{2} \sum_{ir} x_i A_{ir} x_r + \sum_i b_i x_i \right]} = ? \quad (Ia)$$

CON A_{ir} MATRICE $N \times N$, x_i E b_i VETTORI A N COMPONENTI (b SI DICE "SORGENTE"). SIA A_{ik} SIMMETRICA, REALE E DEFINITA POSITIVA, $A_{ik} \in \mathbb{R}$, $A_{ik} = A_{ki}$

AUORA A_{ik} È DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI $\alpha_i > 0$. NE SEGUE

$$I = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik} b_i A_{ik}^{-1} b_k \right\} \quad \text{NOTA: VEDI FOCUS TRA 7 PAGINE.} \quad (Ib)$$

IL $\det A$ CONTIENE IL CONTRIBUTO DEGLI AUTOVALORI,

$$\det A = \prod_i \alpha_i$$

LA MATRICE INVERSA È t.c.

$$\sum_j A_{ik}^{-1} A_{rj} = \delta_{ir}$$

* VALGONO LE RELAZIONI

$$\underline{\det A = e^{\text{Tr}(\ln A)}} \quad \Leftrightarrow$$

NOTA: DIMOSTRO QUESTA E LA (I) IN UN FOCUS PIÙ AVANTI.

$$\text{Tr}(\ln A) = \ln(\det A)$$

INOLTRE, DATO $z \in \mathbb{R}$, A MATRICE,

$$\ln(A+zI) = \ln \left(1 + (A+z-1) \right) = (A+z-1) - \frac{1}{2}(A+z-1)^2 + \frac{1}{3}(A+z-1)^3 - \dots$$

$$\frac{d}{dz} \ln(A+z) = 1 - (A+z-1) + (A+z-1)^2 + \dots \stackrel{*}{=} 1 + (1-A-2) + (1-A-2)^2 \dots$$

RICONOSCENDO LO SVILUPPO

$$\frac{1}{1-x} \sim 1+x+x^2+x^3$$

*NOTA: ANCHE SE NON LO NOTI, PROSEGUI TRANQUILLAMENTE RICOSTRUENDO $\frac{1}{1+x}$.

OTTENIAMO

$$\frac{d}{dz} \ln(A+z) = \frac{1}{A+z}$$

* POSSIAMO QUINDI TORNARE AL MODELLO GAUSSIANO E CALCOLARE Z.

$$h=0$$

$$Z = \int d\mu = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int (\prod_i d\sigma_i) e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{ik} \sigma_i J_{ik} \sigma_k - \sum_i \frac{\sigma_i^2}{2}}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int (\prod_i d\sigma_i) e^{-\frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_i A_{ik} \sigma_k} = (\det A)^{-\frac{1}{2}}$$

Dove si è definita

$$A_{ik} = -\beta J_{ik} + \delta_{ik}$$

NOTA: NEL MODELLO DI ISING, SI ERA CHIAMATA
 $\tilde{A}_{ik} = (\frac{1}{\beta} - J)^{-1}_{ik} \rightarrow \langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \frac{1}{\beta} \tilde{A}_{ik}$

QUI SI È DEFINITA

$$A_{ik} = \beta \left(\frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik} \right) = \beta \tilde{A}_{ik}^{-1}$$

QUINDI I RISULTATI PER $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle$ SONO COERENTI.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI VALE

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = A_{ik}^{-1}$$

NOTA: HOVYO QUESTA DEMOSTRAZIONE
 INGUAZIPIAMENTE BRUTTA. NE RIPORTO
 ALTRE DUE (CANONICHE) IN UN FOCUS 3 PAGINE
 INDIETRO.

NOTA: BASTA APPLICARE LA (I). f è UN
 NOME GENERICO, NON È L'ENERGIA LIBERA.

$$\text{INOLTRE } d[\sigma] \equiv (2\pi)^{-N/2} (\prod_i d\sigma_i)$$

CHIAMANDO, NEL CASO $h \neq 0$,

$$f_i = -\beta h_i$$

$$Z[f] = \int d[\sigma] e^{-\frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_i A_{ik} \sigma_k - \sum_i f_i \sigma_i}$$

$$= Z[f=0] \cdot e^{\frac{1}{2} \sum_{ik} f_i A_{ik}^{-1} f_k}$$

$$\text{NOTA: } = (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{ik} h_i A_{ik}^{-1} h_k}$$

CONSIDERO UNA SITUAZIONE IN CUI ACCENDO IL CAMPO IN SOI DUE SITI,

$$\begin{cases} f_l = x, & f_m = y \\ f_i = 0 & \text{per } i \neq l, i \neq m \end{cases}$$

QUINDI

$$Z_{(x,y)} = \int d[\sigma] e^{-\frac{\sigma_A \sigma}{2} - x \sigma_l - y \sigma_m}$$

$$= Z[0] e^{\frac{1}{2} (x^2 A_{ll}^{-1} + y^2 A_{mm}^{-1} + 2xy A_{lm}^{-1})}$$

(IIa)

SI RICORDI, INFATTI, CHE

$$A_{lm}^{-1} = A_{ml}^{-1}$$

SE IL CAMPO MAGNETICO È PICCOLO, LO SONO ANCHE X E Y.

Sviluppando in serie l'argomento dell'integrale in $x \in y$,

$$\begin{aligned} Z(x,y) &\approx \int d[\sigma] e^{-\frac{1}{2} \sigma A \sigma} (1 - x\sigma_x + \frac{1}{2} x^2 \sigma_x^2 + \dots)(1 - y\sigma_m + \frac{1}{2} y^2 \sigma_m^2 + \dots) \\ &= \int d[\sigma] e^{-\frac{1}{2} \sigma A \sigma} (1 - x\sigma_x - y\sigma_m + xy\sigma_x \sigma_m + \frac{x^2 \sigma_x^2}{2} + \frac{y^2 \sigma_m^2}{2} + \dots) \end{aligned} \quad (\text{IIb})$$

CONFRONTANDO NELLE (IIa) E (IIb) I TERMINI IN XY, TROVIAMO

$$\int d[\sigma] e^{-\frac{1}{2} \sigma A \sigma} \sigma_x \sigma_m = Z[0] A_{lm}^{-1}$$

OSSIA, COME VOLEVAMO,

$$\langle \sigma_x \sigma_m \rangle = A_{lm}^{-1}$$

NOTA: $\hat{A} = \mathbf{1} - \beta \hat{\mathbf{J}}$.

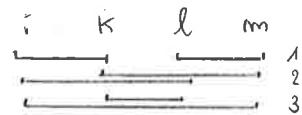
★ LO STESSO CALCOLO PUÒ ESSERE SVOLTO, IN MODO PIÙ COMPLETO,
VALUTANDO PER INTERO

$$Z[h] \rightarrow f = -\frac{1}{\beta \nu} \ln Z + \text{TH. FLUTTUAZIONE E DISSIPAZIONE}$$

NOTA: VEDI FOGLIO,
 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial h_i \partial h_j} \ln Z[h]$.

SI POTREBBE DEMONSTRARE CHE VALE, PER LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE
A PIÙ PUNTI,

$$\langle \sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m \rangle = A_{ir}^{-1} A_{km}^{-1} + A_{il}^{-1} A_{rm}^{-1} + A_{im}^{-1} A_{rl}^{-1}$$



QUINDI, NEL MODELLO GAUSSIANO, LE POSSO RICONDURRE ALLE
FUNZIONI DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI. SIMILMENTE

$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \sigma_m \sigma_n \rangle = A_{ij}^{-1} A_{kl}^{-1} A_{mn}^{-1} + 14 \text{ PERMUTAZIONI}$$

NOTA: SONO IN TUTTO
 $(6-1)!! = 15$.
VEDI NOTA PROSSIMA PAGINA.

I TERMINI CHE CONTANO SONO QUELLI IN CUI I CAMPI FIGURANO AL QUADRATO NELL'INTEGRALE GAUSSIANO (CHE ALTRIMENTI È NULLO).

I CONTRIBUTI NON NULLI PER LA FDC A K PUNTI SONO

$$(k-1)!!$$

POSso ANCHE VEDERLO COME CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI WICK.

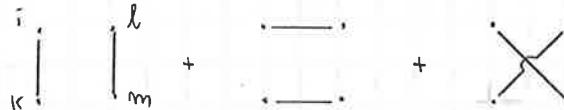
METODO DIAGRAMMATICO

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle$$

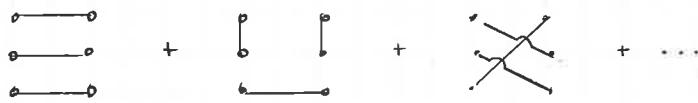


NOTA: QUELLI CON M DISPARI
FANNO SEMPRE ZERO PERCHÉ HO
SEMPRE UN σ "SCOPPIATO".

$$\langle \sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m \rangle$$



$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \sigma_m \sigma_n \rangle$$



PER INTEGRALI GAUSSIANI, LE F.D.C. A MOLTI PUNTI SI POSSONO
ESPRIMERE IN TERMINI DI QUELLE A 2 PUNTI.

TUTTI I DIAGRAMMI PER LE F.D.C. CON $m > 2$ SONO DISCONNESSI E
LE UNICHE PARTI CONNESSE SONO LE F.D.C. A 2 SPIN. QUESTO
E' VERO NEL MODELLO GAUSSIANO, MA FALSO QUANDO C'E'
INTERAZIONE.

NEL MODELLO GAUSSIANO LE F.D.C. CON $m > 2$ SONO BANALI.

IL MODELLO GAUSSIANO RIPRODURRA' IL CAMPO MEDIO PROPRIO
PERCHÉ E' UNA TEORIA LIBERA.

NOTA: LIBERA = SENZA INTERAZIONE.

FUNZIONI DI CORRELAZIONE CONNESSE A PIU' PUNTI (DEF. RICORSIVA)

VOGLIAMO DARNE UNA DEFINIZIONE RICORSIVA.

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_i \rangle_c$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c + \langle \sigma_i \rangle_c \langle \sigma_j \rangle_c$$

OSSIA, COME NELLA SOUTA DEFINIZIONE,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c &= \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle_c \langle \sigma_j \rangle_c \\ &= \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \end{aligned}$$

PROSEGUENDO,

$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle_c + \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \langle \sigma_k \rangle_c + (\text{2 PERM.}) + \langle \sigma_i \rangle_c \langle \sigma_j \rangle_c \langle \sigma_k \rangle_c$$

E COSÌ' VIA.

NOTA: $(m-1)!!$ SONO I MODI IN CUI m OGGETTI POSSONO ESSERE DIVISI IN $k = \frac{m}{2}$ COPPIE (m E' PARI). INFATI $(m!! = 2^k \cdot k!)$

$$\frac{1}{(\frac{m}{2})!} \cdot \binom{m}{2} \cdot \binom{m-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{0}{2} = \frac{1}{k!} \frac{m!}{2(m-2)!} \cdot \frac{(m-2)!}{2(m-4)!} \cdot \dots = \frac{m!}{2^k k!} = \frac{m!}{m!!} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots}{m(m-2)(m-4)\dots} = (m-1)!!$$

PERMUTAZIONI TRA LE COPPIE

LE FDC CONNESSE SONO IMPORTANTI PERCHÉ:

1) PROPRIETÀ DI CLUSTERING

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \xrightarrow{i=j} 0 \quad (\text{PERO' PER STATI PURI})$$

2) NEGLI APPROXIMATI DIAGRAMMATICI, SONO QUELLE LEGATE AI DIAGRAMMI CONNESSI.

3) SONO DIRETTAMENTE LEGATE A β :

$$\langle \prod_{a=1}^m \sigma_{i_a} \rangle_c = \beta^{-m} \prod_{a=1}^m \frac{\partial}{\partial h_{i_a}} \ln Z[h] = -\beta^{-(m-1)} \prod_{a=1}^m \frac{\partial}{\partial h_{i_a}} F[h]$$

PUNTO DELLA SITUAZIONE

IL MODELLO GAUSSIANO È SEMPLICE E RISOLVIBILE IN MODO ESATTO, MA SOLO PER TEMPERATURE ALTE:

$$\beta < \beta_c = (2D)^{-1}$$

NOTA: EUMISTICOAMENTE, A $T=T_c$ GLI SPIN NON SI LIMITANO AD ALLINEARSI, MA IL LORO MODULO DIVENTA: INFATTI $\sigma \in \mathbb{R}$ (BINNEY).

PER $\beta > \beta_c$ NON ESISTE, PERCHÉ \hat{A} NON È PIÙ POSITIVAMENTE DEFINITA.

PER QUANTO RIGUARDA LE FDC,

NOTA: QUINDI LA DISTRIBUZIONE NON È PIÙ NORMALIZZABILE.

GAUSSIANO LOCALE

\leftrightarrow

MF (ISING)

SI NOTI CHE PERO' NON ABBIAMO APPLICATO L'APPROXIMAZIONE DI CAMPO MEDIO (FATTORIZZAZIONE DELLE $p(\sigma_i)$).

Sviluppo ad alte temperature (Modello Gaussiano)

PER $\beta=0, T=\infty$ GLI SPIN SONO COMPLETAMENTE SCOPRELATI E GLI INTEGRALI FATTORIZZANO.

ESPANDIAMO QUINDI L'INTEGRANDO PER β PICCOLI. ESAMINIAMO

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = \frac{\int (\prod_i d\sigma_i) \sigma_a \sigma_b e^{-\sum_i \frac{\sigma_i^2}{2} + \beta \sum_{i,k} \sigma_i j_{ik} \sigma_k}}{\int (\prod_i d\sigma_i) e^{-\sum_i \frac{\sigma_i^2}{2} + \beta \sum_{i,k} \sigma_i j_{ik} \sigma_k}}$$

DOBBIAMO ESPANDERE NUMERATORE E DENOMINATORE IN POTENZE DI β .

IL DENOMINATORE DA'

$$e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \sigma_i^2} \left[1 + \beta \sum_{i,k} \frac{1}{2} \sigma_i J_{ik} \sigma_k + \frac{\beta^2}{2!} \frac{1}{4} \sum_{i,k} \sum_{i',k'} \sigma_i \sigma_k \sigma_{i'} \sigma_{k'} J_{ik} J_{i'k'} + \dots \right]$$

NOTIAMO CHE TUTTI I TERMINI CON UN NUMERO DISPARI DI σ SONO NULLI:

$$\int d\sigma e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \sigma_i^2} \sigma = 0$$

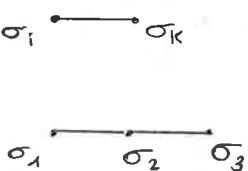
GLI UNICI PEZZI CHE POSSONO CONTRIBUIRE, QUINDI, SONO THOSE IN CUI LA STESSA σ_i COMPARIS DUE VOLTE. IDENTIFICHIAMO OGNI $\sigma_i J_{ik} \sigma_k$

CON UN LINK; CIASCUN LINK È UN PASSO IN UN CAMMINO. SIMILMENTE

$$\sigma_1 J_{12} \sigma_2 \sigma_2 J_{23} \sigma_3$$

SONO DUE PASSI; QUI σ_2 FIGURA DUE VOLTE, QUINDI DA' UN CONTRIBUTO NON NULLO. NEL TERMINE β^2 , AD ESEMPIO, HO

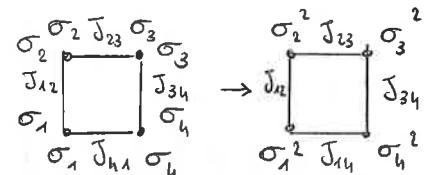
$$\sum_i \sum_{i'k'}$$



$$\frac{i}{\sigma_1} \cdot \frac{k \cdot i'}{\sigma_2 \sigma_2} \cdot \frac{k'}{\sigma_3}$$

IL TERMINE IN β^4 AVRA'

$$\begin{aligned} & \beta^4 \sigma_1 \sigma_{j_1} \sigma_{i_2} \sigma_{i_2} \sigma_{i_3} \sigma_{i_3} \sigma_{i_4} \sigma_{i_4} J_{i_1 j_1} J_{i_2 j_2} J_{i_3 j_3} J_{i_4 j_4} \\ & \sim \frac{\beta^4}{4!} \left(\sum_{i'k'} \frac{1}{2} \sigma_i J_{ik} \sigma_k \right)^4 \end{aligned}$$

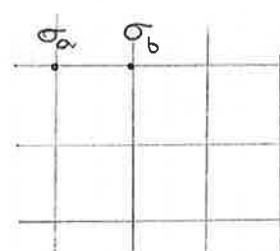


CONTERRANNO SOLO I CAMMINI CHIUSI NEL DENOMINATORE E SOLO I CAMMINI APERTI IN ijk NEL NUMERATORE IN CUI COMPARIS $\sigma_i \sigma_k$. HO UN FATTORE β PER CIASCUN LEGAME CHE SCENDE NUOVO SVILUPPO PERTURBATIVO PER PICCOLI β .

FUNZIONI DI CORRELAZIONE A 2 PUNTI

AL PRIMO ORDINE IN β , NEL NUMERATORE

$$\int d\sigma_1 \dots d\sigma_n e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{ik} \sigma_i^2} \left[\sigma_a \sigma_b \frac{\beta}{2} \sum_{ik} \sigma_i J_{ik} \sigma_k \right]$$



CI SONO DUE CONTRIBUTI CHE DANNO UN APPORTO NON NULLO.

ESSI SONO

$\delta_{\alpha i} \delta_{b k}, \delta_{\alpha m} \delta_{b l}$

TUTTI GLI ALTRI CONTRIBUTI DANNO ZERO NELL'INTEGRALE GAUSSIANO.

I DUE CONTRIBUTI CANCELLANO IL FATTORE $\frac{1}{2}$.

* AL SECONDO ORDINE IN β , CHIAMANDO

$$\int d\mu = \int d[\sigma] e^{-\sum_i \frac{\sigma_i^2}{2}}$$

GUARDANDO IL DENOMINATORE,

$$\int d\mu \left[1 + \frac{\beta}{2} \sum_{i m} \sigma_i J_{im} \sigma_m + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{4} \sum_{i k} \sum_{i' m'} (\sigma_i J_{im} \sigma_k) (\sigma_{i'} J_{i'm'} \sigma_{m'}) + \dots \right]$$

$$\textcircled{A} = 1$$

$$\textcircled{B} = 0$$

$$\textcircled{C} = \frac{\beta^2}{2!} \frac{1}{4} \int d\mu \sum_{i m} \sigma_i \sigma_m \sigma_{i'} \sigma_{m'} J_{ik} J_{i'm'} = \frac{\beta^2}{4} \sum_{im} J_{im}^2$$

NOTA: $\textcircled{B} = 0$ PERCHÉ IN
EFFETTUO SONO SOLO SPIN
SCOPPIATTI ($i=k$ NON C'E' NELLA SOMMA!).

SO CHE I TERMINI NON NULLI SONO QUELLI PER CUI

$$|i-k|=1, |i'-k'|=1$$

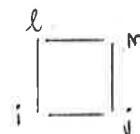
QUINDI VI SONO ANCHE QUI DUE CONTRIBUTI (CHE CANCELLANO L' $\frac{1}{2!}$)

$$\delta_{ii'} \delta_{mm'} + \delta_{im} \delta_{i'm'}$$



AL QUADRATO β^4 AVRA' VARI CONTRIBUTI, TRA CUI

$$\sum_{ijkl} J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} = \text{Tr}(J^4)$$



QUESTO E' IL PRIMO CAMMINO CHIUSO NON BANALE.

NOTA: E' LA SOMMA SU TUTTI I QUADRATI.

* GUARDANDO ORA AL NUMERATORE, IL PRIMO CONTRIBUTO NON NUOVO

E' DI ORDINE β^3 SE SCEGLIO σ_a E σ_b COME A FIANCO (INFATTI IL NUMERATORE DIPENDE DA CHI SONO σ_a E σ_b !); CI VOGLIONO ALMENO 3 LEGAMI.

I TERMINI SUCCESSIVI SARANNO DI $O(\beta^5), O(\beta^9)...$

SI NOTI NEL VERTICE E' UN FATTORE DI MOLTEPLUOTTA $(L-1)!! = 3$

DOVUTO AL FATTO CHE CI SONO PASSATO 4 VOLTE.

$$\sigma_a \underline{\quad} \underline{\quad} O(\beta^3)$$

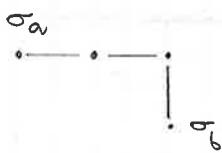
$$\int \sigma^4 e^{-\frac{\sigma^2}{2}} d\sigma = 3$$

$$\sigma_a \underline{\quad} \sigma_b \quad O(\beta^9)$$

$$\sigma_a \underline{\quad} \quad \square \quad O(\beta^9)$$

DISCONNESSO

IN SINTESI, PER VALUTARE $\langle \sigma_a \sigma_b \rangle$ (IN QUESTA SPECIFICA GEOMETRIA) AVRO'



$$\frac{\overbrace{\square \beta^3 + \square \beta^5 + \dots + \square \beta^9} + \square \beta^9}{1 + \square \beta^4 + \dots}$$

(IL TERMINE β^2 NON CONTRIBUISCE*: LO VEDREMO PIU' AVANTI). USANDO

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 \dots$$

$$\frac{1}{1 + \square \beta^4} \sim 1 - \square \beta^4 + O(\beta^8)$$

TOVO

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = (\square \beta^3 + \square \beta^5 + \dots)(1 - \beta^4 \square)$$

All' $O(\beta^7)$ i contributi sono perciò, ad esempio,

$\frac{\beta^3}{\square}$	$\square \beta^4$	$+ \frac{\beta^7}{\square}$	$- \frac{\beta^3}{\square} \beta^4$
DISCONNESSO (NUM)	CONNESSO (NUM)	SENZA CONDIZIONI DI ESCUSIONE (NUM x DEN)	
NON SI TOCCANO		LO CONSIDERO SIA SE SI TOCCANO, SIA SE NON SI TOCCANO	

NOTA: DI FATTO OGNI DIAGRAMMA DATA' UN NUMERO. SI TRATTERA' DI CALCOLARLI E VALUTARNE LA MOLTEPLICITA'.

QUINDI IN EFFETTI SARANNO SOLO I DIAGRAMMI CONNESSI A CONTARE, PERCHÉ GLI ALTRI SI CANCELLERANNO.

FOCUS: CONTI (GAUSSIANO)

$$\begin{aligned} I &= \int d^n x e^{-\frac{1}{2}(x_i \hat{A} x) + (b, x)} = \int d^n z e^{-\frac{1}{2}((z_i \hat{A} z) + (b, z + z))} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(z_i \hat{A} z) + (b, z)} \int d^z e^{-\frac{1}{2}[(z_i \hat{A} z) + (z, b) + (z, \hat{A} z)] + (b, z)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(b, z)} \int d^z e^{-\frac{1}{2}(z_i \hat{A} z)} = e^{\frac{1}{2}(b, \hat{A}^{-1} b)} \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \end{aligned}$$

$$\hat{A} z = b, \quad z = \hat{A}^{-1} b$$

$$\begin{aligned} \hat{A} z &= b \\ z &= z + z \\ z &= \hat{A}^{-1} b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A} z &= b \\ z &= z + z \\ z &= \hat{A}^{-1} b \end{aligned}$$

SE $A = M^{-1}AM$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ (λ_i ; AUTORVALORI DI A), USANDO LA PROPRIETA' CICLICA DELLA TRACCIA $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$ E IL FATTO CHE M DIAGONALIZZI ANCHE LE FUNZIONI ANALITICHE DI A (TRAMITE POLINOMIO DI TAYLOR, e.g., $M^{-1}A^2M = M^{-1}AMM^{-1}AM$)

$$e^{\text{Tr}(\ln A)} = e^{\text{Tr}(M \ln A M^{-1})} = e^{\text{Tr}(\ln \Lambda)} = e^{\sum_i \ln \lambda_i} = \prod_i e^{\ln \lambda_i} = \prod_i \lambda_i = \det A$$

VALGUE ANCHE SE A NON E' HERMITIANA, MA PER MOSTRARLO SERVE LA SUA FORMA DI JORDAN.

ISING AD ALTE T

IL PESO NON E' PIU' GAUSSIANO, MA

$$\delta_{\sigma_i+1} + \delta_{\sigma_i-1}$$

$$\sigma_i = \pm 1, \quad \sigma_i \sigma_j = \pm 1$$

I CONTI SI BASANO SU UN'ALGEBRA BOOLEANA; QUI UN POLINOMIO GENERICO DI σ SI SCRIVE SEMPRE

$$POL(\sigma) = A + B\sigma$$

QUINDI

$$\underline{e^{\beta \sigma_i \sigma_j}} = c(1 + t \sigma_i \sigma_j) \quad (I)$$

Dove

$$c = \cosh(\beta)$$

$$S = \sinh(\beta)$$

$$t = \tanh(\beta)$$

INFATI $e^{\beta \sigma_i \sigma_j}$ E' UN POLINOMIO DEL I° ORDINE IN σ_i E IN σ_j , QUINDI

$$e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = a + b\sigma_i + c\sigma_j + d\sigma_i \sigma_j$$

SCELTO $\sigma_i \sigma_j = 1$, VERIFICHIAMO CHE

$$e^\beta = c(1 + \frac{S}{c}) = c + S = \frac{1}{2}(c^\beta + c^{-\beta} + c^\beta - c^{-\beta}) = e^\beta$$

SCELTO $\sigma_i \sigma_j = -1$,

$$c(1 - t) = e^{-\beta}$$

QUINDI FUNZIONA.

UN'ALTRA RELAZIONE UTILE E'

$$\frac{1}{A + B\sigma} = \frac{A - B\sigma}{A^2 - B^2} \quad (II)$$

NOTA: UN MODO PIU' PULITO PER DEMOSTRARE E' TRAMITE GLI SVILUPPI DI TAYLOR.

* NOTA: IN UN'ESPANSIONE PERTURBATIVA IN β .

SU OGNI LINK, LA (I) CI DICE CHE HO UN FATTORE* $c(1 + t \sigma_i \sigma_j)$.

SI PUO' USARE ANCORA UN'ESPANSIONE DIAGRAMMATICA, MA I

DIAGRAMMI CHE CONTANO SONO DIVERSI ($\sigma_i^2 = 1$ E POSSONO CAMBIARE I PESI).

FORMALMENTE, DEFINIAMO LA VARIABILE DI LINK (VUOTO, PIENO)

$$m_{ij} = 0, 1$$

CALCOLIAMO

$$Z_{\text{ISING}} = \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j} = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \prod_{ij} e^{\beta \sigma_i \sigma_j}$$

$$= C^{ND} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{ij} (1 + t \sigma_i \sigma_j)$$

** NOTA: NON SI CAPISE CHE FINE FACCIA L'1 DELLA PRODOTTO DAI QUI SOTTO, MANCA IL FATTORE 2^N (DA \sum_{ij} QUANDO IL CONTENUTO È NON NULLO) ED È DIFFICILE DA LEGGERE. TUTTO SOMMATO USEREI LA FORMA $Z_{\text{ISING}}^{(\beta)}$ (VEI NOTA SOTTO).

NOTA: IL NUMERO TOTALE DI COPPIE È ND.

QUEST'ULTIMA SU DI UN RETICOLO CUBICO SEMPLICE. AVRO' TERMINI

$$\sum_{\{\sigma\}} ((1 + t \sigma_1 \sigma_2)(1 + t \sigma_3 \sigma_4) \dots)$$

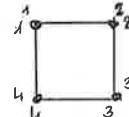
$$= \sum_{\{\sigma\}} (1 + t \sigma_1 \sigma_2 + t \sigma_3 \sigma_4 + \dots + O(t^2))$$

NOTA: È UN PRODOTTO DI FATTOPI DIVERSI, QUINDI NON POSSO PASSARE MAI PIÙ VOLTE SULLA STESSA LINEA.

MA TUTTI I TERMINI LINEARI DANNO ZERO QUANDO SI SOMMA SU $\sigma_i = \pm 1$.

I PRIMI TERMINI CHE CONTANO SONO QUELLI DI $O(t^4)$:

$$\dots + t^2 \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}_{\dots} + t^2 \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_3}_{\dots} + \dots + t^3 + \dots + t^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_4 \sigma_1 + \dots$$



Dopo aver sommato sulle $\{\sigma\}$, posso scrivere**

$$Z_{\text{ISING}} = (\cosh(\beta))^N \sum_{\{m_{ik}=0,1\}} t^{\sum_{ik} m_{ik}}$$

NOTA: BINNEY CHIAMA $g(l)$ IL NUMERO DI LOOP CHE POSSO COSTRUIRE CON l LINEE ($g(0)=1$, $g(l>N)=0$)
 $Z_{\text{ISING}}^{(\beta)} = C^N 2^N \sum_{l=0}^N g(l) t^l$

OGNI COPPIA DI PRIMI VEDI PUO' APPARIRE O NON APPARIRE IN QUESTO PRODOTTO: SE VI APPARE, $m_{ik} = 1$. PER EVITARE DI CONTARE CAMMINI NON CHIUSI, AGGIUNGIAMO LA PRESCRIZIONE

$$m_i = \sum_j m_{ij} \quad \text{SIA PARI A:}$$

INFATTI, SE UN CAMMINO È CHIUSO, ENTRANO IN OGNI SITO UN NUMERO PARI DI LEGAMI.

NOTA: AD ESEMPIO,

$$\begin{aligned} t \sigma_1 \sigma_2 &\rightarrow m_{12} = 1, \text{ TUTTI GLI ALTRI 0.} \\ t \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_3 &\rightarrow m_{12}, m_{23} = 1; m_{ik} = 0. \\ t \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_4 \sigma_1 &\rightarrow m_{12}, m_{23}, m_{34}, m_{41} = 1. \end{aligned}$$

SI NOTI CHE STIAMO ESPANDENDO IN

$$t = \tanh \beta$$

NOTA: SI DICE "CHARACTER EXPANSION".

E NON IN β : I DIAGRAMMI IN TAL CASO SAHEBBERO DIVERSI.

QUI IL PRIMO DIAGRAMMA CHE CONTA È IL QUADRATO. SIA

$$f_D(\beta) = -\frac{1}{\beta N} \ln Z_D = -\frac{D}{\beta} \ln(\cosh \beta) + \tilde{f}(\beta)$$

CHE MOLTEPIU' C'È ASSOCIA AL DIAGRAMMA QUADRATO?

SCELGO IL PRIMO LEGAME* IN D MODI, IL SECONDO

IN $(D-1)$ MODI E Poi IL QUADRATO SI CHIUSA DA SÉ.

Poiché la stessa plaqette la si trova ruotando nell'altro senso, aggiungo un fattore $\frac{1}{2}$. Allora

$$\tilde{f}_D(\beta) = -\frac{1}{\beta} \frac{D(D-1)}{2} t^4$$

E POSSO SCRIVERE

$$f_D(\beta) = -\frac{1}{\beta} \left[D \ln(\cosh \beta) + \frac{D(D-1)}{2} \tanh(\beta)^4 \right]$$

Si noti, di nuovo, che l'espansione in t (più semplice di quella in β) è possibile solo sul modello di Ising.

* NOTA: SI È SEMPLIFICATO UN FATTORE N, PERCHÉ POSSO COSTRUIRE UN QUADRATO IN OGNI DEI SITI,
 $\hat{f}_D(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln \left[1 + \frac{D(D-1)}{2} t^4 + O(t^5) \right] \approx -\frac{1}{\beta} \frac{D(D-1)}{2} t^4 + O(t^5)$

1 È IL CONTRIBUTO ALL'ORDINE t^0 (C'È ANCHE SE NEWA $\tilde{\chi}^{(PESIS)}$ NON SI CAPISCE).

STIMA DEI COEFFICIENTI CRITICI

POSSIAMO USARE QUANTO VISTO PER STIMARE t_c E I COEFFICIENTI CRITICI. PARTIAMO DALLE SEGUENTI ASSUNZIONI:

1) t_c È LA PARTE REALE DELLA SINGOLARITÀ DI f PIÙ VICINA ALL'ORIGINE DEL PIANO COMPLESSO $t^2 \in \mathbb{C}$ ($t = \tanh \beta$).

2) L'ENERGIA LIBERA PRESENTA UNA SINGOLARITÀ IN $t^2 = t_c^2$

CHE HA LA FORMA (A POTENZA)

$$(t_c^2 - t^2)^\omega$$

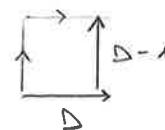
ESPANDENDO $f(t^2)$ IN SERIE,

$$f(t^2) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cdot (t^2)^m$$

AVEREMO

$$t_c^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_m}{f_{m+1}}$$

NOTA: t_c^2 NON È ALTRO CHE IL RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE. ω NON L'HO TUTTORA CAPITA.



NOTA: UN TEOREMA DEL CONFRONTO ATTRIBUITO A APOLLONIO ENUNCIA CHE, SE f E g SONO ANALITICHE DENTRO UN DISCHIO DI RAGGIO r , CON UN UNICO POLO DELLO STESSO ORDINE SUL BORDO, $f(z), g(z) \sim (r e^{iz} - 2)^{-1}$

Allora i coefficienti del loro sviluppo di TAYLOR SONO ASINTOTICAMENTE UGUALI, I.E. $f_m \sim g_m$, $m \rightarrow \infty$. PER NOI $g(z)$ È L'ENERGIA LIBERA (IGNOTA), CHE HA UN POLO IN t_c , MENTRE $f(z)$ È LO SVILUPPO PERTURBATIVO DA NOI COSTRUITO.

$$\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-m^2 \left(\frac{f_m}{f_{m+1}} - \frac{f_{m-1}}{f_m} \right) \right] t_c^{-2} - 1$$

* SE $D=3$, ALL'ORDINE 18 SU DI UN RETICOLO SEMPLICE CUBICO

$$t_c \approx 0.2181$$

$$\omega \approx 1.9$$

* NOTA: SI Vede BENE USANDO $Z_{\text{ISING}}^{(8)}$.
GLI UNICI LOOP IN $D=1$ SONO $h=0$ E
 $l=N$ (TUTTA LA CATENA). MA
 $t^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ($t \in [-1, 1]$)
E RIMANE SOLO $t^0 = 1$.

* SE $D=1$, RIMANE IL SOLO TERMINE*

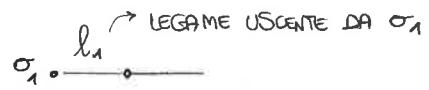
$$f = -\frac{1}{\beta} \ln(\cosh \beta)$$

NOTA: QUESTA E` LA SOLUZIONE
ESATTA DEL MODELLO DI ISING
CON $D=1$ E $h=0$.

NON ESISTE, INFATTI, UNO SVILUPPO PERTURBATIVO IN DIAGRAMMI CHIUSI
(POSSE SOLO ANDARE AVANTI E INDIETRO).

IN 1D A OGNI SITO POSSE FAR CORRISPONDERE UN LINK; E`
SEMPLICE SOSTITUIRE

$$\sum_{\{\sigma\}} \rightarrow \sum_{\{h=\pm 1\}}$$



$$e^{\beta \sum_i h_i}$$

NON VI E` TRANSIZIONE DI FASE: LA LOWER CRITICAL DIMENSION E`

$$D_L^c = 2$$

TUTTANIA $T=0$ HA QUALCOSA IN COMUNE CON T_c , PERCHÉ

$$\int \xrightarrow{T \rightarrow 0} \infty$$

IL PUNTO E` CHE, PER ROMPERE UN DOMINIO, IL PREZZO DA PAGARE E`
PROPORTZIONALE ALL'INTERFACCIA (PARLIAMO DI RHIMI VIANI, MA
L'ARGOMENTO SI ESTENDE ANCHE INTERAZIONI A RANGE FINITO). AL
CRESCERE DEI DOMINI, NON CRESCHE L'INTERFACCIA: BASTA SPEZZARE
UNO SPIN E L'HO GIÀ ROTTA.. NON PUO' PIÙ COSTRUIRE DOMINI
STABILI, PER CIÒ CHE DÀ VERO DIFFICILE ROMPERE L'INTERFACCIA.

* SE $D=2$, IL MODELLO E` RISOLVIBILE (SOLUZIONE DI ONSAGER,
PUOI GUARDARLA SUL FEYNMAN).

DAL DISCHETTO (RETICOLO) AL CONTINUO

ABBIANO VISTO CHE, NEL MODELLO DI ISING RETICOLARE,

$$\langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle = C \int d^D k \frac{e^{-i(\vec{i}-\vec{\ell}) \cdot \vec{k}}}{1 - 2\beta J (\cos p_x + \dots)}$$

NOTA: $C = (2\pi)^{-D}$ E TRA PARENTESI HO
 $\sum_{j=1}^D \cos p_j$
NOI AVEMMO USATO $J=1$.

ESPLANDENDO PER PICCOLI MOMENTI (E' IL LIMITE DI GRANDI DISTANZE,
O DI SPAZIATURA RETICOLARE $a \rightarrow 0$),

$$\langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle \sim C \int d^D k \frac{e^{-i(\vec{i}-\vec{\ell}) \cdot \vec{k}}}{(1 - 2D\beta J) + \beta J \vec{k}^2 + O(\vec{k}^4)}$$

→ TERMINE DI MASSA (KLEIN-GORDON)

PER $p \rightarrow p_0$, HO IL LIMITE $m^2 \rightarrow 0$ NELLA TEORIA.

NEL MODELLO GAUSSIANO,

NOTA: E LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE SONO LE STESE CHE NEL CAMPO MEDIO.

$$Z = \int \left(\prod_i d\sigma_i \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^2 + \frac{\beta}{2} \sum_{i,k} \sigma_i J_{ik} \sigma_k \right\}$$

SE ASSUMO CHE LE σ_i SIANO "DOLCEMENTE VARIABILI" (OSSIA CON FLUTTUAZIONI PICCOLE SULLA SCALA DELLA SPAZIATURA RETICOLARE),
POSso PENSARE DI SOSTITUIRE IL TERMINE GAUSSIANO CON
 $\sum_i \sigma_i^2 \rightarrow \int d\gamma \sigma^2(\gamma)$

COSSA POSSO DIRE SUL TERMINE DINAMICO? SCEGUENDO $D=2$, $\underline{\Omega}=(0,0)$,

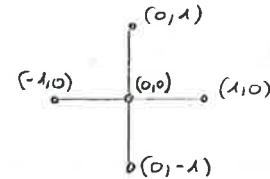
$$\sigma_{00} \cdot (\sigma_{01} + \sigma_{0,-1} + \sigma_{1,0} + \sigma_{-1,0}) \rightarrow 4\sigma_{00} \cdot \sigma_{00}$$

$$-\frac{\beta}{2} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k \rightarrow \frac{\beta}{2} \int d\gamma \sigma(\gamma)^2$$

NOTA: sto approssimando σ_{ij} con $i,j \approx 0$ A σ_{00} . CI STA SE LE σ FLUTTUANO LENTAMENTE, MA UNNAMENTE SI TRATTÀ DI UNA STIMA ROZZA. STA DERIVANDO LE σ (L'INCREMENTO VALE ± 1).

MA SE ESPANDO IN SERIE DI TAYLOR

$$\sigma_{0,1} = \sigma_{0,0} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \sigma_{0,0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \sigma_{0,0} + \dots$$



$$\sigma_{0,-1} = \sigma_{0,0} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \sigma_{0,0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \sigma_{0,0} + \dots$$

POSso DARE UNA STIMA MIGLIORE DELLA SOMMA SUI PRIMI VIANI.

ANNO', SOTTRAENDO $4\sigma_0^2$ (PER RIASSUMERLO TUTTO POCO),

$$\sigma_{0,1} + \sigma_{0,-1} + \sigma_{1,0} + \sigma_{-1,0} - 4\sigma_{0,0}$$

NOTA: IN $D \neq 2$, \hbar DIVENTA $2D$.

NON TOGLIE $-4\sigma_{0,0}$, ESCE DA SOLO $4\sigma_{0,0}$.

$$= (\sigma_{0,1} - \sigma_{0,0}) + (\sigma_{0,-1} - \sigma_{0,0}) + (\sigma_{1,0} - \sigma_{0,0}) + (\sigma_{-1,0} - \sigma_{0,0})$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_{0,0} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sigma_{0,0} \right) = \nabla^2 \sigma_{0,0}$$

PASSIAMO COSÌ A UN MODELLO CONTINUO IN CUI

$$Z = \int d[\sigma] \exp \left\{ \int d^D x \left[-(1-2D\beta) \frac{\sigma^2(x)}{2} + \frac{\beta}{2} \sigma(x) \nabla^2 \sigma(x) \right] \right\}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI $\rightarrow -\frac{\beta}{2} |\nabla \sigma(x)|^2$

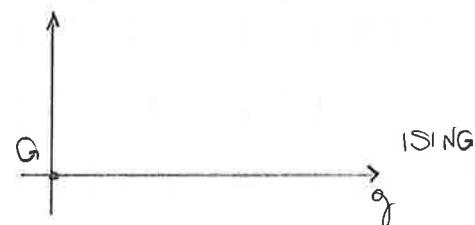
* INTRODUZIAMO IL MODELLO DI LANDAU-GINSBURG, IN CUI IL PESO DEGLI SPIN NON È PIÙ GAUSSIANO MA

$$We^{-\alpha \frac{\sigma^2(x)}{2} - \beta \sigma^4(x)}$$

NOTA: SUL PIANO $P_0(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{2} - \beta(\sigma^2-1)^2}$.
BASTA RISPARMARE W E OVR DI CONSEGUENZA.
SI NOTI CHE SONO PROBABILITÀ A PRIORI.

DONDE:

- $\alpha = 0$: MODELLO GAUSSIANO
- $\beta \rightarrow \infty$: $N e^{-\beta(\sigma^2-1)^2} \rightarrow \delta(\sigma^2-1)$



VEDREMO CHE C'E' UN PARTICOLARE VALORE

DI α CHE DESCRIVE ISING AL PUNTO CRITICO.

CHIAMIAMO DA QUI IN AVANTI $\psi(x)$ I CAMPI FONDAMENTALI. PONIAMO

$$dP[\psi] = e^{-\beta H_{eff}[\psi]} d[\psi]$$

NOTA: DA CONFRONTARE CON \mathcal{W}^μ IN QFT,

$$S = \int d^D x \left[\frac{m^2}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} (\partial \psi)^2 + \frac{g}{4!} \psi^4 + \frac{1}{2\Lambda^2} (\square \psi)^2 \right]$$

DONDE

$$\begin{aligned} \beta H_{eff}[\psi(x)] &= \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \psi^2(x) + \frac{1}{2} \sum_{\Delta} \left(\partial_\Delta \psi(x) \right)^2 + \frac{g}{4!} \psi^4(x) \right. \\ &\quad \left. + h(x) \psi(x) + \frac{1}{2\Lambda^2} (\Delta \psi(x))^2 \right\} \end{aligned} \tag{I}$$

È UN MODELLO CONTINUO: NON HO PIÙ SPAZIATURA RETTICOLARE, CI È UN CUTOFF DI PICCOLE DISTANZE (PUÒ CONSEGUIRNE LA "CATASTROFE ULTRAVIOLETTA").

β È RIASSORBITO IN μ : VADO AL PUNTO CRITICO PER $\mu \rightarrow 0$.

NEL SECONDO TERMINE HO LE DERIVATE DEI CAMPI (TERMINE DI INTERAZIONE). IL TERMINE IN ϕ^4 (PARAMETRO PICCOLO) RIGUARDA ANCORA LA MISURA DELLA PROBABILITÀ A PRIORI DEI CAMPI.

IL QUARTO È IL TERMINE DI CAMPO MAGNETICO.

L'ULTIMO È UN TERMINE DI CUTOFF, CHE IMPedisce di avere problemi quando mi metto a distanze troppo piccole; impedisce al campo di fluttuare troppo a piccole distanze.

IL PROPAGATORE AVRA' UNA FACCIA COME

$$\frac{1}{m^2 + p^2 + \epsilon p^4}$$

(OGNI DERIVATA DA' UN CONTRIBUTO p). IN ALCUNI CASI QUESTO TERMINE DI CUTOFF È NECESSARIO PER IMPEDIRE DIVERGENZE DI CORTE DISTANZE.

NOTIAMO CHE, NEL TERMINE DI MASSA $\frac{\mu}{2}\psi^2(x)$, SE

$$\mu > 0 \rightarrow 1 \text{ MINIMO DI } H_{eff} \text{ IN } \psi = 0$$

$$\mu < 0 \rightarrow 2 \text{ MINIMI DI } H_{eff} \text{ IN } \psi = \pm \left(-\frac{6\mu}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

NOTA: LO VEDREMO MEGLIO VERSO LA FINE, TRATTANDO LA ROTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA. COMUNQUE BASTA MINIMIZZARE $\frac{1}{2}\mu\psi^2 + \frac{3}{6!}\psi^4$

INOLTRE IL TERMINE DI CUTOFF $\frac{1}{2\Lambda^2}(\Delta\psi(x))^2$ SOSTITUISCE LA DISCRETIZZAZIONE ($a \neq 0$): AVENDO ELIMINATO IL RETICOLO NEL PASSARE AL CONTINUO, NON Siamo PIÙ PROTETTI CONTRO DIVERGENZE A PICCOLE DISTANZE.

ANCHE IL TERMINE CON LE DERivate CONTRASTA CHI FLUTTUA A PICCOLE DISTANZE, MA IL TERMINE DI CUTOFF È PIÙ FEROCIE.

SE CALCOLO, A LIVELLO CLASSICO, L'APPROSSIMAZIONE

$$\beta F \sim \min_{\{\psi\}} \beta H_{eff}[\psi]$$

NOTA: IL CHE HA SENSO A T BASSE, ESSENDO $F = \min_e (E - TS(e))$

PER $\mu < 0$ HO MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA*: HO LA T_c PER $\mu = 0$.

IN GENERALE, AVREMO INVECE

* NOTA: LO VEDI DA $\psi_{min} = \pm \sqrt{-\frac{6\mu}{g}}$.

$$\mu = C(T - T_c) + O((T - T_c)^2)$$

(FUORI DAL MODELLO GAUSSIANO, IL PUNTO CRITICO SI SPOSTERA' DA $\mu = 0$).

* PER $\beta < 0$, L'INTEGRALE (I) DIVERGE.

PER $\beta = 0$ HO IL MODELLO GAUSSIANO, DEFINITO SOLO PER $T > T_c$.

IL NOSTRO MODELLO DI INTERAZIONE E' FERROMAGNETICO, PERCIO' IL COEFFICIENTE DEL TERMINE

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^D (\partial_j \psi(x))^2$$

E' POSITIVO (GLI SPIN TENDONO AD ALLINEARSI).

NOTA: INFATTI H_{eff} CHIUSO (E QUINDI LA PROBABILITA' DECRESCHE) SE $\psi(x)$ CAMIA CON X (OSSIA SE GLI SPIN SONO DISALLINEATI).

LE CONFIGURAZIONI IN CUI $\psi(x)$ VARIA MOLTO SONO COSÌ SOPPRESSE. TALVOLTA NON BASTA: SI OSSERVA CHE, SE $D \geq 2$ (E $\lambda = \infty$), LA QUANTITA' $\langle \psi^2 \rangle$ DIVERGE.* E' NECESSARIO (ALMENO COME STEP INTERMEDIO) INSERIRE $\frac{1}{2\Lambda^2} (\Delta \psi)^2$.

* PERCHÉ NON AGGIUNGO ALTRI TERMINI, COME

$$\mu \psi^2 + g \psi^4 + \eta \psi^6 \dots$$

* NOTA: E' L'ENERGIA INTERNA. VEDI NOTA PROSSIMA PAG.

DI ORDINE PIÙ ALTO? DIMOSTEREMO CHE TALI TERMINI SONO IRRELEVANTI, OVVERO NON CAMBIANO GLI ESPOVENTI CRITICI.

* CONSIDEREREMO UNA TEORIA IN CUI

$$\beta, g, \lambda$$

SONO COSTANTI; NEL MODELLO DI LANDAU-GINSBURG, LA DIPENDENZA DALLA TEMPERATURA E' IN μ :

$$T_{\text{ISING}} \sim \mu$$

NEL MODELLO GAUSSIANO, $\mu_c = 0$.

IN QUESTA TEORIA PIÙ GENERALE,

$$\mu_c = \mu_c(g, \lambda) \neq 0$$

*** NOTA: DI FATTO β NON C'E' IN L_{ISG} . NON E' "ISING NEL CONTINUO", E' UN ALTRO MODELLO A TUTTI GLI EFFETTI. NELLA NOSTRA COSTRUZIONE $\mu = \frac{1}{\beta} (1 - 2D\beta)$
MA NON E' IMPORTANTE LA CORRISPONDENZA ESISTENTE.

TRA IL PUNTO FISSO GAUSSIANO $\beta = 0$ E IL MODELLO DI ISING

A $g = \infty$, VEDREMO CHE ESISTE UN VALORE DI β IL CUI LIMITE CRITICO E' LO STESSO CHE NEL MODELLO DI ISING.

SORVIVAMO, IN GENERALE,

$$\mu - \mu_c(g, \lambda) = c(T - T_c) + \dots$$

NOTA: OCCHIO, LE STA SOLO RIASSORBENDO NELLE ALTRE COSTANTI, NON E' UN'AFFERMAZIONE SUUE LORE DIMENSIONI FISICHE. VEDI ***.

PORREMO** IN GENERE $\beta = 1, c = 1$.

REGOLARIZZAZIONE ULTRAVIOLETTA (A CORTE DISTANZE)

METTIAMOLO NEL MODELLO GAUSSIANO ($\gamma = 0$).

DATO UN RETICOLO DI SPAZIATURA α , SI VERIFICA CHE

$$\tilde{G}_L(p) = \frac{1}{\mu + \sum_j \frac{1}{\alpha^2} (2 - 2 \cos p_j \cdot \alpha)}$$

DA CUI

$$G_L(j) = (2\pi)^{-D} \int_{B^D} d^D p e^{i \alpha p \cdot j} \tilde{G}_L(p)$$

SE $\hbar = 0$, SI ANTRA'

$$f = \frac{1}{2N\beta} \text{Tr} \ln A$$

$$f_L \approx \frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p \ln \tilde{G}_L(p) - \frac{1}{2} \alpha^2 \sum_{lk} h_l G_L(l-k) h_k$$

SE L'ANNO NEL CONTINUO E INSERISCO UN CUTOFF $\Lambda \sim \frac{1}{\alpha}$, TRONO INVECE

$$\tilde{G}_\Lambda(p) = \left(\mu + p^2 + \frac{(p^2)^2}{\Lambda^2} \right)^{-1} \quad (\text{I})$$

POSSO CALCOLARE

$$f_\Lambda \approx \frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p \ln \tilde{G}_\Lambda(p) - \frac{1}{2} \int d^D x d^D y h(x) G(x-y) h(y) \quad (\text{II})$$

QUINDI ANCHE IN QUESTO CASO HO UNA CORREZIONE CHE VAI COME p^4 .

NOTA: OSSERVANDO CHE $\frac{d}{dp} \tilde{G}_\Lambda(p) = -\tilde{G}_\Lambda^2(p)$,

$$U(\mu) = -\frac{d}{d\mu} f(\mu) = -\frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p \tilde{G}_\Lambda(p)$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{p^2 + \mu + \frac{p^4}{\Lambda^2}} \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\sim} p^{D-2} \quad (\text{III})$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p e^{ipx} \tilde{G}_\Lambda(p) \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2} \langle p(0)^2 \rangle$$

DOVE HO USATO (I) E (II). DAWA (III) SI LEGGONO I GRADI DI DIVERGENZA DI U AL VARIARIE DI D (POWER COUNTING). SIMILMENTE,

$$C_V(\mu) = \frac{du}{d\mu} = \frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p \tilde{G}_\Lambda^2(p) \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\sim} p^{D-4}$$

$$D=2 \quad U \sim \ln \Lambda$$

$$D=3 \quad U \sim \Lambda$$

NOTA: IL CALCOLO DI $\tilde{G}_L(p), G_L(j)$ E' ANALOGO A QUELLO SVOLTO TEMPO FA, A MENO DELLA SCALA α CHE QUI QUI E' ESPONZIATA. SI NOTI CHE $\cos(p\alpha) \sim 1 - \frac{1}{2} p^2 \alpha^2$ NELL'UMITE DI P PICCOLI, OSSIA DISTANZE GRANDI, MA ANCHE SE $\alpha \rightarrow 0$ (INFATTI NELLA (I) IL COSC() NON C'E' PIU').

NOTA: QUI LI PRENDIAMO PER BUONI, SONO CONTI UN PO' OLTRE GLI SCOPI DEL CORSO.

IN UN FOCUS IN FONDO AGLI APPUNTI HICANO LA (I) E LA (II), OSSIA I RISULTATI NELL'MODELLO CONTINUO (funzione di partizione del modello gaussiano).

MA LA NORMALIZZAZIONE DI U NON E' IMPORTANTE (PUO' ESSERE DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE INFINTA); BASTA GUARDARE CHE A $g=0$, $D < 4$ MANDO $\lambda \rightarrow \infty$ SENZA PROBLEMI.

SE $g \neq 0$ APPAIONO NUOVE DIVERGENZE. AVAEMO BISOGNO DEL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE, CHE PUO' ESSERE INTESO NELLO SPAZIO DEI MOMENTI O IN QUELLO REALE.

- * SI NOTI CHE POSSO MANDARE $\alpha \rightarrow 0$ TENENDO FISSA LA DISTANZA ξ TRA DUE PUNTI, O AL CONTRARIO MANDARE $\xi \rightarrow \infty$ CON $\alpha = \text{cost}$. SE USO PARAMETRI ADIMENSIONALI, COME $(\xi/\alpha)^m$, NON CAMBIA NULLA; INVECE GRANDEZZE DIMENSIONALI POSSONO COMPORTARSI IN MODO MOLTO DIVERSO SE MISURATE IN UNITA' DI α O DI ξ .

SU DI UN RETICOLO CON SPACING α , L'HAMILTONIANA SI SCRIVE

$$H_{\text{eff}}[\varphi] = \alpha^D \left[\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{ik} J_{ik} (\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_i \left(\frac{M}{2} \dot{\varphi}_i^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi_i^4 + h_i \varphi_i \right) \right]$$

DONDE

$$\mu \sim 1 - \beta^2 D = 1 - \frac{\rho}{\rho_c^{\text{MF}}}$$

NOTA: HO OTTENUTO $H_{\text{eff}}[\varphi]$ PER DISCRETIZZAZIONE; AD ESEMPIO

$$\frac{1}{\alpha} (\varphi_i - \varphi_j) \sim \partial^\mu \varphi$$

DEFINENDO

$$\Psi_i = \alpha^{\frac{D-2}{2}} \varphi_i$$

POSSIAMO RISCRIVERE

$$H_{\text{eff}}[\Psi] = \frac{1}{2} \sum_{ik} J_{ik} (\Psi_i - \Psi_k)^2 + \sum_i \left(\frac{M}{2} \dot{\Psi}_i^2 + \frac{\lambda}{4!} \Psi_i^4 \right)$$

DONDE

$$\begin{cases} M = \mu \alpha^2 \\ \lambda = g \alpha^{4-D} \end{cases}$$

^{*}NOTA: IN EFFETTI SE $\alpha \rightarrow 0$ SVANISCONO SIA IL TERMINE DI INTERAZIONE ($\lambda \rightarrow 0$, FINISCO NEL GAUSSIANO) CHE QUELLO DI MASSA ($M \rightarrow 0$, CHE PER DEFINIZIONE INDIVIDUA IL PUNTO CRITICO).

α GIOCA LO STESSO RUOLO DI λ^{-1} .

PER $D < 4$, IN QUESTO MODO RIOTROVO IL MODELLO GAUSSIANO AL PUNTO CRITICO* MANDANDO $\alpha \rightarrow 0$.

POSSIAMO QUINDI VEDERE IL LIMITE CRITICO IN DUE MODI DIVERSI.

NEL SEGUITO, IN REALTA', LAVOREREMO IN SERIE DI g .

VEDREMO CHE

MODELLO RETICOLARE ISING
AL PUNTO CRITICO T_c

~

MODELLO CONTINUO (LANDAU-
GINZBURG) AL PUNTO CRITICO

L'UNIVERSALITA' DEGLI ESPONENTI CRITICI DIPENDE DA:

- LA DIMENSIONE D ;
- LE SIMMETRIE DEL HAMILTONIANA;
- IL TIPO DI CAMPI.

* LE FLUTTUAZIONI A PICCOLE DISTANZE NON CONTERANNO VIANO
AL PUNTO CRITICO (A MENO CHE NON SIANO FORTI AL PUNTO DA
FARE DIVENGERE LA TEORIA, COSA CHE CONTROLLA CON UN CUTOFF
OPPURE LAVORANDO SU DI UN RETICOLO).

ANALISI DIMENSIONALE

$$[\text{MASSA}] \equiv 1 \equiv [\text{LUNGHEZZA}^{-1}]$$

$$[\alpha] = [\text{LUNGHEZZA}] = -1 = [\lambda^{-1}]$$

GUARDANDO A

$$\rho^2 + \frac{\rho^4}{\lambda^2}$$

\Rightarrow

$$[\lambda] = [\rho] = [l^{-1}] = 1$$

INOLTRE

$$[\psi] = [M] = [\lambda] = 0$$

$$[\mu] = 2$$

$$[g] = 4-D$$

NOTA: QUESTA PRIMA EQUAZIONE DEFINISCE L'UNICA
GRANDEZZA FISICA FONDAMENTALE. DI TUTTO IL
RESTO BASTA INDICARE L'ESPONENTE A QUI TALE
GRANDEZZA E' ELEVATA.

$$[\psi] = \frac{1}{2}(D-2)$$

COME IN QUANTUM FIELD THEORY, L'AZIONE E'
ADIMENSIONALE IN $e^{-S} \sim e^{-\beta H_{eff}}$.

PERAO' POSSIAMO INDIVIDUARE IL PARAMETRO ADIMENSIONALE

$$u = g(\mu - \mu_c)^{-\frac{(4-D)}{2}}$$

NOTA: SE $D > 4$, $u \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu_c} 0$ E CI SI ASPIRA I
SOLTI ESPONENTI CRITICI. SE $D < 4$, $u_c \rightarrow \infty$.
HO COSTRUITO IL USANDO GLI UNICI DUE
PARAMETRI A DISPOSIZIONE, g E μ .

NOTIAMO CHE LA SUSCETTIVITA' E'

$$\chi \sim (\mu - \mu_c)^{-\gamma}$$

NOTA: SAPPIAMO GI', DALLO STUDIO IN CAMPO
MEDIO, CHE LA SUSCETTIVITA' DIVERGE CON UNA
QUALCHE POTENZA DEL PARAMETRO CRITICO.

PERAO' POSSO ESPRIMERE

$$\gamma(g; \mu - \mu_c) = -\frac{d \ln \chi}{d \ln(\mu - \mu_c)} \Rightarrow \ln \chi \sim -\gamma \ln(\mu - \mu_c)$$

AL PUNTO CRITICO,

$$\gamma_c = \gamma(g, 0)$$

ESPANSIONE PERTURBATIVA

INIZIAMO CERCANDO DI ESPANDERE, IN TERMINI DELLA COSTANTE DI ACCOGLIAMENTO g_j , LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI

$$G(x) = \langle \psi(0)\psi(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int d[\psi] e^{-H[\psi]} \psi(0)\psi(x)$$

DONDE SI E' POSTO $\beta = 1$ E SI E' CHIAMATA

$$Z = \int d[\psi] e^{-H[\psi]}$$

NOTA: $e^{-H[\psi]} = e^{-H[\psi]|_{g=0}} - \frac{g}{4!} \int d^D x \psi^4(x)$.
MOLTIPLICA E DIVIDI PER $Z|_{g=0}$ (GAUSSIANO).

ESPANDENDO IN g_j ,

$$G(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_m \left(-\frac{g}{4!}\right)^m \frac{1}{m!} \langle \left[\int_V d\gamma \psi^4(\gamma) \right]^m \psi(x)\psi(0) \rangle}{\sum_m \left(-\frac{g}{4!}\right)^m \frac{1}{m!} \langle \left[\int_V d\gamma \psi^4(\gamma) \right]^m \rangle}. \quad (I)$$

DONDE $\langle \cdot \rangle_0$ INDICA IL VALORE DI ASPETTATORE A $g_j = 0$, OHE' NEL MODELLO GAUSSIANO.

SI RICORDA CHE, A $g_j = 0$ NEL CONTINUO, SI AVEVA

$$\langle \psi(0)\psi(x) \rangle_0 \equiv G_0(x, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \cdot \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + \mu}$$

E OHE' LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE A PIU' PUNTI SI SCRIVONO IN TERMINI DI QUELLI A DUE PUNTI (TEOREMA DI WICK). VALGONO RELAZIONI DEL TIPO

$$\langle \psi(x_0)\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3) \rangle = G_0(x_0 - x_1)G_0(x_2 - x_3) + 2 \text{ PERMUTAZIONI}.$$

AL PRIMO ORDINE IN γ ANREMO

$$\langle \psi(0) \psi(x) \rangle_{G_1} = \frac{\langle \psi(0) \psi(x) \rangle_{G_0} - \frac{g}{4!} \int_Y d^4 \gamma \langle \psi^4(\gamma) \psi(0) \psi(x) \rangle_0}{1 - \frac{g}{4!} \int_Y d^4 \gamma \langle \psi^4(\gamma) \rangle_0}. \quad (\text{II})$$

E IL PROBLEMA SI E' RIDOTTO AL CALCOLO DI INTEGRALI GAUSSIANI (TANTI).

AD ESEMPIO AL DENOMINATORE HO

$$\underbrace{\langle \psi(Y) \psi(Y) \psi(Y) \psi(Y) \rangle}_\text{1} \rightarrow 3 G_0(Y-Y)^2 = 3 G_0(0)^2$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_\text{2}$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_\text{3}$

AL NUMERATORE HO (APPLICANDO LE CONTRAZIONI PREVISTE NEL MODELLO GAUSSIANO)

$$\langle \psi(x) \psi(0) \psi^4(\gamma) \rangle = G_0(x) \langle \psi^4(\gamma) \rangle_0 + 4 G_0(x-\gamma) \langle \psi(0) \psi^3(\gamma) \rangle_0$$

CHE IN LINEA DI PRINCIPIO DA'

$$(6-1)!! = 5!! = 15 \quad \text{CONTRIBUTI}$$

CONTRAENDO, \swarrow INFATTI HO 6 MODI PER FARE QUESTA CONTRAZIONE

$$G_0(x) \langle \psi^4(\gamma) \rangle_0 + 4 G_0(x-\gamma) \langle \psi(0) \psi(\gamma) \psi(\gamma) \psi(\gamma) \rangle_0$$

$$= 3 G_0(x) G_0(0)^2 + 4 G_0(x-\gamma) 3 G_0(\gamma) G_0(0)$$

QUINDI ARHO' IN TOTALE

$$G_1(x) = \frac{G_0(x) - \frac{g}{4!} \int_Y d^4 \gamma [3 G_0(x) G_0(0)^2 + 12 G_0(x-\gamma) G_0(\gamma) G_0(0)]}{1 - \frac{g}{4!} \int_Y d^4 \gamma 3 G_0^2(0)}$$

DAL PUNTO DI VISTA DIAGRAMMATICO,

$$G_0(x) \rightarrow \overset{\circ}{\underset{x}{\longrightarrow}}$$

$$G_0(0) \rightarrow \underset{z}{\textcircled{z}} \quad G_0(z-z) = G_0(0)$$

$$G_0^2(0) \rightarrow \textcircled{8}$$

$$G_0(\gamma) G_0(x-\gamma) G_0(0) \rightarrow \overset{\circ}{\underset{\gamma}{\longrightarrow}}$$

$$G_0(x) G_0(0)^2 \rightarrow \overset{\circ}{\underset{x}{\longrightarrow}}$$

LA BOLLA E' SCESA CON $\psi^4(\gamma)$, QUINDI STA IN γ .
LA SUA POSIZIONE E' INTEGRAATA SU TUTTO LO SPAZIO γ .



ANCHE QUI LA DOPPIA BOLLA PROVIENE DA $\psi^4(\gamma)$, CON $\gamma \neq x$.

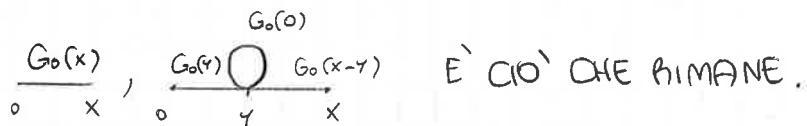
COME GIÀ ABBIAMO VISTO, I DIAGRAMMI DISCONNESSI DANNO CONTRIBUTI CHE CRESCONO COME N^α , $\alpha > 1$: CI ASPETTIAMO CHE SI CANCELLINO*.

ABBIAMO (Sviluppando e troncando al primo ordine in γ la (II))

$$G_1(x) = G_0(x) - \frac{\gamma}{4!} \int d^D y [3G_0(x)G_0(0)^2 + 12G_0(x-y)G_0(y)G_0(0)] + \frac{\gamma}{4!} \int d^D y 3G_0(x)G_0^2(0)$$

$$= G_0(x) - \frac{\gamma}{2} \int d^D y G_0(x-y)G_0(y)G_0(0)$$

E IN EFFETTI, A QUEST'ORDINE, UN CONTRIBUTO SI È CANCELLATO:



SU UN SISTEMA CHE AMMETTE UN BUON LIMITE DI \sqrt{N} INFINTO, NECESSARIAMENTE I TERMINI AL DENOMINATORE SERVONO A CANCELLARE I DIAGRAMMI DISCONNESSI AL NUMERATORE.
IN TEORIA DELLE PERTURBAZIONI, CI BASTERÀ GUARDARE AI DIAGRAMMI CONNESSI AL SOLO NUMERATORE.

* ALL'ORDINE γ^2 ,

$$\langle \psi(0)\psi(x) \rangle = \frac{N}{D}$$

Dove

$$N = G_0(x) - \frac{\gamma}{4!} \int d^D y \langle \psi(0)\psi(x)\psi^4(y) \rangle_0 + \frac{\gamma^2}{2(4!)^2} \int d^D y_1 d^D y_2 \langle \psi^4(y_1)\psi^4(y_2)\psi(x)\psi(0) \rangle_0$$

$$D = 1 - \gamma \int d^D y \langle \psi^4(y) \rangle_0 + \frac{\gamma^2}{2} \int d^D y_1 d^D y_2 \langle \psi^4(y_1)\psi^4(y_2) \rangle_0.$$

IL TERMINE A 10 PUNTI

$$\frac{1}{2} \langle \psi^4(y_1)\psi^4(y_2)\psi(x)\psi(0) \rangle_0$$

SI FATTORIZZA IN

$$(10-1)!! = 9!! = 945 \text{ TERMINI.}$$

CHE SI FA?

NOTA: COME SEMPRE, $(m-1)!!$ SONO I MODI DI DISTRIBUIRE m ELEMENTI IN COPPIE.

*NOTA: ANCHE SE QUI NON LO DIMOSTRIAMO IN GENERALE, UNO PUÒ VEDERLO CASO PER CASO.
INOLTRE ANCHE NOI VEDIAMO VISTO, PARLANDO DI CLUSTER NELL'ESPANSIONE A BASSE T , COME f DOVESSE RIMANERIE INTENDERE. L'ARGOMENTO PREGGE ANCHE SE PARLIAMO DI DIAGRAMMI INVECE CHE DI CLUSTER.

SE INIZIO CONTRAENDO $\varphi(x)\varphi(0)$, OTTENGO SOLO DIAGRAMMI DISCONNESSI (NON HO PIÙ MODO DI RICOLLEGARE γ_1 E γ_2 A $x \in 0$). POSSO ALLORA CONTRARRE:

$$x \sim \gamma_1 \quad x \sim$$

$$x \sim \gamma_2 \quad x \sim$$

MA SONO UGUALI: γ_1 E γ_2 SONO VARIABILI MUTE, CONTRAGGO QUINDI

$$x \sim \gamma_1$$

E MOLTIPLICO PER 2. SOLO VO

$$\frac{1}{2} \langle \varphi^4(\gamma_1) \varphi^4(\gamma_2) \varphi(x) \varphi(0) \rangle_0 = h G_0(x - \gamma_1) \langle \varphi^3(\gamma_1) \varphi^4(\gamma_2) \varphi(0) \rangle_0 = \textcircled{*}$$

IN GENERALE, VEDREMO CHE IL FATTORE $\frac{1}{m!}$ È SEMPRE OATO DALLE SIMMETRIE DELLE POSSIBILI PERMUTAZIONI DELLE γ_i .

GIA' COSÌ SONO PASSATO A $7! = 105$ TERMINI. CONTRAENDO $\varphi(0)$,

$$\textcircled{*} = h G_0(x - \gamma_1) \left\{ \underbrace{3 G_0(\gamma_1) \langle \varphi^2(\gamma_1) \varphi^4(\gamma_2) \rangle_0}_A + \underbrace{4 G_0(\gamma_2) \langle \varphi^3(\gamma_1) \varphi^3(\gamma_2) \rangle_0}_B \right\}$$

IN \textcircled{A} , SE ATTACCO $\underline{\gamma_1} \gamma_1$ HO UN TERMINE DISCONNESSO CON IL RESTO*. POSSO SOLO ATTACCARNE UN γ_1 A UN γ_2 ; SCEGLIO UN $\varphi(\gamma_1)$ IN $\langle \varphi_1 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2 \rangle$

E LO CONTRAGGO CON OASCUNO DEI 6 $\varphi(\gamma_2)$. THOVO

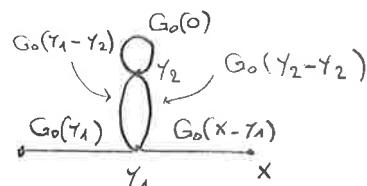
$$\textcircled{A} = h G_0(\gamma_1 - \gamma_2) \langle \varphi(\gamma_1) \varphi^3(\gamma_2) \rangle_0$$

$$= 12 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^2 G_0(0)$$

IL TERMINE \textcircled{A} CONTRIBUISCE A $\textcircled{*}$ CON PESO 144,

$$12 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_1) 12 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^2 G_0(0)$$

*NOTA: BEH, POTREI ATTACCARNE $\underline{\gamma_2} \gamma_2$, NO?
PER EVITARE CONTEGGI MULTIPI, SE SCEGLI DI INIZIARE PORTANDO FUORI γ_1 POI DEVI PROCEDERE USANDO SOLTANTO LEI.



HO SEMPRE VERTICI A h (È UNA TEORIA gq) E SONO IN TUTTO m.

INFATTI STO ESPANDENDO IN SERIE

$$e^{\frac{g}{4!} \int d^D \gamma \varphi^4(\gamma)}$$

OGNI LINEA (PROLATORIO) PROVIENE DA UNO DI QUESTI $\varphi(\gamma)$.

IL TERMINE \textcircled{B} DA

NOTA: STAVOLTA I $\psi(\gamma_i)$ SONO 3, NE POSSO CONTRAPPARE 2.

$$\langle \psi^3(\gamma_1) \psi^3(\gamma_2) \rangle_0 = 3 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) \langle \psi^2(\gamma_1) \psi^2(\gamma_2) \rangle_0 + 2 \underset{*}{G_0(0)} \langle \psi(\gamma_1) \psi(\gamma_2)^3 \rangle_0.$$

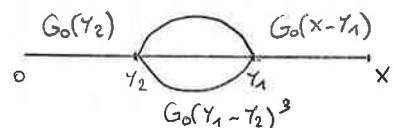
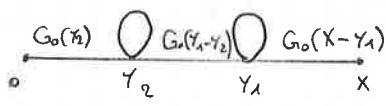
$$= [3 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) G_0(0)]^2 + 6 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^3 + 6 G_0(0)^2 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)$$

IL CONTRIBUTO DI \textcircled{B} A $\textcircled{*}$ E' PERATO'

$$16 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_2) [3 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) G_0(0)^2 + 6 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^3 + 6 G_0(0)^2 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)]$$

$$= 16 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_2) [9 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) G_0(0)^2 + 6 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^3]$$

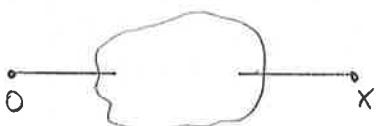
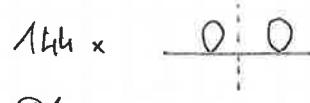
$$= 144 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_2) G_0(\gamma_1 - \gamma_2) G_0(0)^2 + 96 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_2) G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^3$$



NOTA CHE LE VARIABILI DI INTEGRAZIONE (I VERTICI) SONO γ_1 E γ_2 , MENTRE 0 E X SONO I PUNTI DI PARTENZA E ARRIVO; DA LORO ESCE SEMPRE UNA SOLA LINEA (DAI VERTICI, INVECE, 4). IL NUMERO DI VERTICI E' pari all'ORDINE DELLO SVILUPPO.

AL SECONDO ORDINE ABBIAMO

QUINDI TROVATO 3 CONTRIBUTI:



** NOTA: IN $\langle \psi^2(\gamma_1) \psi^2(\gamma_2) \rangle$ POSSO LASCIARE DA SOLO $\psi^2(\gamma_2)$ PERCHÉ C'E' $G_0(\gamma_1 - \gamma_2)$ A MOLTIPLICATORE.

QUESTO PUO' ESSERE DIVISO IN 2 TAGLIANDO UNA SOLA LINEA INTERNA (RIDUCIBILE).

VANNO TUTTI MOLTIPLICATI PER $\left(\frac{1}{4!}\right)^2 = \frac{1}{(2!)^2}$. IN SINTESI,

G_0 _____

1 LINEA

G_1 _____

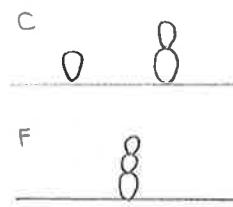
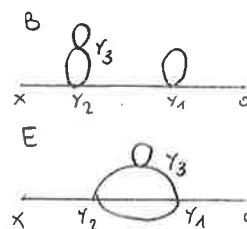
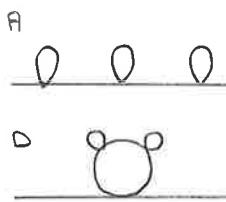
3 LINEE

G_2 _____

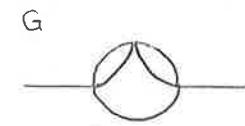
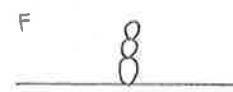
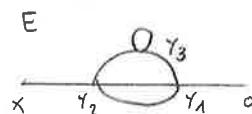
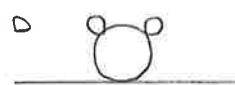
5 LINEE

QUESTI SONO DIAGRAMMI DI FEYNMAN DI QUESTA TEORIA. I VERTICI IN UNA TEORIA ψ^4 SONO TUTTI FATTI COSI':

* ALL'ORDINE DI α^3 AVRA' 7 LINEE E TROVERO' I DIAGRAMMI



(RIDUABILI)



(SE NE SONO DISEGNATI ALCUNI). SOTTINTENDENDO LO ZERO IN G.
(SONO TUTTE FUNZIONI DI GREEN LIBERE), AD ESEMPIO 'B' SIGNIFICA
 $G(x-y_2)G(y_2-y_1)G(y_1)G(y_2-y_3)^2G(0)^2$

MENTRE 'E' SIGNIFICA

$$G(x-y_2)G(y_2-y_1)^2G(y_1-y_3)G(y_3-y_2)G(0)G(y_1)$$

E IN TUTTI I CASI DOVRO' POI INTEGRARE IN $d^D y_1 \dots d^D y_m$.

* SCRIVEREMO, IN GENERALE,

$$\langle \psi(x)\psi(0) \rangle = \sum_m \left(-\frac{g}{4!}\right)^m \frac{1}{m!} \int d^D y_1 \dots d^D y_m \langle \psi(x)\psi(0)\psi^4(y_1) \dots \psi^4(y_m) \rangle^{\text{CONNESSI}}$$

SI NOTI CHE VI E' UNA SIMMETRIA NELLE VARIABILI MUTE, CHE POSSONO ESSERE PERMUTATE IN $m!$ MODI. QUINDI

$$\langle \psi(x)\psi(0) \rangle = \sum_m \left(-\frac{g}{4!}\right)^m \int d^D y_1 \dots d^D y_m \langle \psi(x)\psi(0)\psi^4(y_1) \dots \psi^4(y_m) \rangle^{\text{CONNESSI DI PERMUTAZIONI}}$$

QUINDI LE REGOLE SONO:

1) DISEGNO TUTTI I DIAGRAMMI CONNESSI CON m VERTICI, OGNIUNO CON 4 LINEE INTERNE ($\psi^4(y)$) E 2 LINEE ESTERNE.

2) CONSIDERO UN SOLO DIAGRAMMA PER OGNI GRUPPO DI DIAGRAMMI EQUIVALENTI PER UNO SCAMBIO DI VERTICI (ELIMINO COSÌ L' $m!$).

3) AD OGNI DIAGRAMMA ASSOCIO UN INTEGRANDO CHE E' IL PRODOTTO DELLE G_0 ASSOCIATE ALLE LINEE.

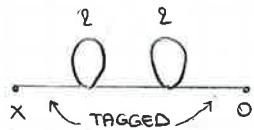
4) INTEGRO SULLE COORDINATE DEI VERTICI INTERNI.

5) MOLTIPLICO IL RISULTATO PER $\left(-\frac{g}{24}\right)^m$ PER LA MOLTEPLICITA' DEL DIAGRAMMA.

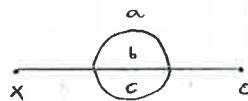
IN GENERE L'ULTIMO PASSAGGIO E' IL PIU' DELICATO.

IN UNA TEORIA ψ^4 (VERITÀ A 4 LINEE), LA MOLTEPLICATA' DI UN DIAGRAMMA DI ORDINE m È FERMI A $(24)^m$ DIVISO PER IL NUMERO DI PERMUTAZIONI DELLE LINEE INTERNE CHE LASCIANO IL DIAGRAMMA INVARIATO.

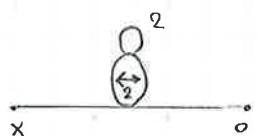
ESEMPI $\rightarrow O(q^2) : \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$



$$2 \cdot 2 = 4$$



$$2 \cdot 3 = 6$$



$$2 \cdot 2 = 4$$

$$\alpha \leftrightarrow b, \alpha \leftrightarrow c, b \leftrightarrow c$$

NOTA: VALE LA REGOLA DELLA SOMMA (VEDI OLTRÉ).

CALCOLO DEGLI INTEGRALI

PER FARLO, PASSIAMO NELLO SPAZIO DEI MOMENTI p . RICORDIAMO CHE

$$\tilde{G}_o(p) = \frac{1}{\mu + 2 \sum_v (1 - \cos p_v)}$$

OVVERO, NEL LIMITE CONTINUO,

$$\tilde{G}_o(p) = \frac{1}{\mu + p^2}$$

E VALGONO LE FORMULE DI INVERSIONE

$$G_o(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^\Delta p}{(2\pi)^\Delta} e^{ip \cdot x} \tilde{G}_o(p)$$

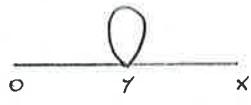
$$\tilde{G}_o(p) = \int_V d^\Delta x e^{-ip \cdot x} G_o(x)$$

INOLTRE POSSO ESPRIMERE

$$\delta(x) = \int \frac{d^\Delta p}{(2\pi)^\Delta} e^{ip \cdot x}$$

ESEMPIO (1)

$$\Delta_1 \equiv \int d^\Delta r G_o(x-r) G_o(r) G_o(0)$$



POLICHÉ

$$G_o(0) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}_o(q) \frac{d^D q}{(2\pi)^D}$$

POSSIAMO RI-SCHIVERE, TIRANDO FUORI LA "BOCCA",

$$D_1 = (2\pi)^{-D} \int d^D q \tilde{G}_o(q) \int_{\mathbb{R}} d^D \gamma G_o(x-\gamma) G_o(\gamma)$$

L'ULTIMO È UN INTEGRALE DI CONVOLUZIONE. VALE LA PROPRIETÀ

$$F\{f(x) * g(x)\} = F\{f(x)\} \cdot F\{g(x)\}$$

INFATTI

$$\int d^D \gamma G_o(x-\gamma) G_o(\gamma) = \int d^D \gamma \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_o(p) e^{ip \cdot (x-\gamma)} \tilde{G}_o(q) e^{iq \cdot \gamma} = \textcircled{*}$$

MA

$$\int d^D \gamma e^{i(p-q) \cdot \gamma} = \delta^{(D)}(p-q)$$

QUINDI

*NOTA: OVVIAMENTE IL $(2\pi)^D$ NON CI VÀ. PERÒ NELLO SPAZIO P LA MISURA DI INTEGRAZIONE CONTIENE IL $(2\pi)^D$, cioè

$$\int_{(2\pi)^D} d^D q \delta(p-q) f(q) = f(p)$$

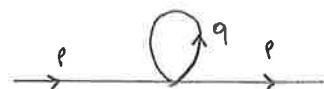
$$\begin{aligned} \textcircled{*} &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \delta^{(D)}(p-q) e^{ip \cdot x} \tilde{G}_o(p) \tilde{G}_o(q) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \tilde{G}_o(p)^2 \\ &= F^{-1}[\tilde{G}_o(p)^2] \end{aligned}$$

ONERO, APPLICANDO LA TRANSFORMATA DIRETTA AI DUE MEMBRI,

$$F\left[\int d^D \gamma G_o(x-\gamma) G_o(\gamma) \right] = F[G_o] F[G_o]$$

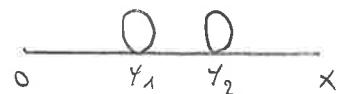
NEL NOSTRO CASO,

$$\tilde{D}_1(p) = \frac{1}{(2\pi)^D} \tilde{G}_o(p)^2 \int d^D q \tilde{G}_o(q)$$



ESEMPIO (2)

$$D_2 = \int d^D \gamma_1 \int d^D \gamma_2 G_o(x-\gamma_2) G_o(\gamma_2 - \gamma_1) G_o(\gamma_1) G_o(0)^2$$



$$D_2^{(0)} = \left\{ (2\pi)^{-D} \int \tilde{G}_0(\rho) d^D \rho \right\}^2 \int d^D \gamma_2 \int d^D \gamma_1 \underbrace{\left(G_0(x - \gamma_2) G_0(\gamma_2 - \gamma_1) \right) G_0(\gamma_1)}_{*(\gamma_1)}$$

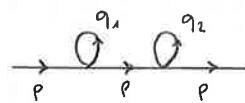
GUARDANDO PRIMA ALLA CONVOLZIONE IN γ_1 ,

$$\begin{aligned} & \int d^D \gamma_2 F^{-1} \left\{ F \left(G_0(x - \gamma_2) G_0(\gamma_2 - \gamma_1) \right) F(G_0(\gamma_1)) \right\} \\ &= F^{-1} \left\{ F \left[\int d^D \gamma_2 G_0(x - \gamma_2) G_0(\gamma_2 - \gamma_1) \right] F[G_0(\gamma_1)] \right\} \\ &= F^{-1} \left\{ F[G_0]^3 \right\} \end{aligned}$$

QUINDI

$$\tilde{D}_2^{(0)}(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \left(\int \tilde{G}_0(q) d^D q \right)^2 \tilde{G}_0(\rho)^3$$

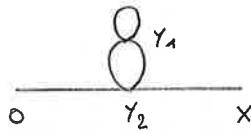
NOTA: VOLERÀ ESSERE UNA DEMOSTRAZIONE CHEDO, MA
SECONDO ME QUESTA
NOTAZIONE NON HA ALCUN SENSO.
LO RIFACCIO IN UN FOCUS
TRA UN PAIO DI PAGINE.
CONSIDERA PERÒ' CHE
 $\int d\gamma_2 G(x - \gamma_2) G(\gamma_2 - \gamma_1)$
 $= \int d\gamma_2 G(x - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1) G(\underbrace{\gamma_1 - \gamma_2}_{z})$
 $= \int dz G(x - \gamma_1 + z) G(z)$



ESEMPIO (3)

COMPATTANDO LA NOTAZIONE,

$$D_2 = \int d^D \gamma_1 \int d^D \gamma_2 G_{x2} G_2 G_{21}^2 G_0$$



$$= (2\pi)^{-D} \int \tilde{G}_0(q) d^D q \underbrace{\int d^D \gamma_1 \int d^D \gamma_2 G_{x2} G_2 G_{21}^2}_{A}$$

$$A = \int d^D \gamma_1 \int d^D \gamma_2 \int d^D p_1 d^D p_2 d^D p_3 d^D p_4 e^{i \frac{p_1 \cdot (x - \gamma_2)}{2\pi}} \tilde{G}_0(p_1) e^{i \frac{p_2 \cdot \gamma_2}{2\pi}} \tilde{G}_0(p_2)$$

$$\cdot e^{i \frac{p_3 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)}{2\pi}} \tilde{G}_0(p_3) e^{i \frac{p_4 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)}{2\pi}} \tilde{G}_0(p_4) (2\pi)^{-4D}$$

OTTENGO DEI CONTRIBUTI

$$\int d^D \gamma_1() \rightarrow \delta^{(D)}(p_4 + p_3) \rightarrow p_3 + p_4 = 0$$

$$\int d^D \gamma_2() \rightarrow \delta^{(D)}(-p_1 + \gamma_2 + p_3 + p_4) \rightarrow \delta^{(D)}(-p_1 + p_2)$$

USANDO LE DUE δ PER FARLE GLI INTEGRALI IN $d^D p_2 \in d^D p_4$, RIMANE

$$A = (2\pi)^{-2D} \int d^D p_1 \int d^D p_3 e^{i \frac{p_1 \cdot x}{2\pi}} \tilde{G}_0(p_1)^2 \tilde{G}_0(p_3)^2$$

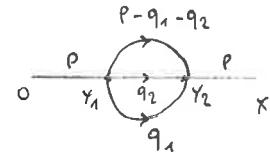
NOTA: INFATI LE G SONO PARTI.
VEDI FOCUS ANCHE QUI.

QUINDI IL PESO DA ASSOCIARE A QUESTO DIAGRAMMA SARÀ

$$\tilde{D}_2^{\frac{3}{2}} = F^{-1}(\tilde{D}_2^{\frac{1}{2}}(p)) = F^{-1}\left\{\tilde{G}_o(p)^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{G}_o(q) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{G}_o(k)^2\right\}$$

ESEMPIO (1)

CALCOLA IL DIAGRAMMA A FIANCO.



NOTA CHE IL MOMENTO CHE SCORRE DA O A X È SEMPRE p , MENTRE SULLA BOLLA POSSO FAR SCORRIERE TUTTI I MOMENTI CHE VOGLIO A PATTO CHE

$$p = \sum_{i=1}^3 q_i;$$

NOTA: AD OGNI VERTICE SI CONSERVA IL MOMENTO.
VEDI FOCUS PER IL CONTO ESPLICATO.

PUOI VERIFICARE CHE SI OTTIENE, IN QUESTO CASO,

$$\tilde{D}_2(p) = \tilde{G}_o(p)^2 \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \tilde{G}_o(q_1) \tilde{G}_o(q_2) \tilde{G}_o(p - q_1 - q_2)$$

REGOLE GENERALI (CALCOLO DEGLI INTEGRALI NELLO SPAZIO DI FOURIER)

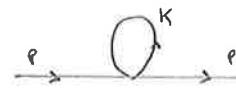
1) C'È UN MOMENTO p PER OGNI LINEA ESTERNA, QUINDI ESSE DANNO $\tilde{G}_o(p)^2$



2) AD OGNI LINEA INTERNA α ASSOCIO UN MOMENTO q_α CON UNA DIREZIONE.

3) SU OGNI VERTICE,

$$\sum_i (\text{MOMENTI ENTRANTI}) - \sum_i (\text{MOMENTI USCENDENTI}) = 0$$



4) ALL'ORDINE q^m RESTANO m MOMENTI LIBERI E m INTEGRAZIONI DEI PRODOTTI DELLE $\tilde{G}_o(q_\alpha)$ RELATIVE A QUESTI MOMENTI.

NOTA: OCCHIO, QUESTA ULTIMA È VERA SOLO PER LE CORRELAZIONI A 2 PUNTI (2 LINEE ESTERNE), PER CUI IL NUMERO DI LOOP È PARIGI AL NUMERO DI VERTICI.

• FOCUS : CALCOLO DEGLI INTEGRALI

• ESEMPIO (2)

$$\int d\gamma_2 \int d\gamma_1 G_o(x-\gamma_2) G_o(\gamma_2 - \gamma_1) G_o(\gamma_1) = \int d\gamma_2 (G_o * G_o)(\gamma_2) G_o(x-\gamma_2) = (G_o * G_o * G_o)(x)$$

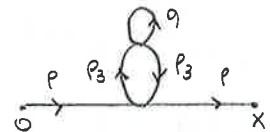
$$= \int d\gamma_2 G_o(x-\gamma_2) F^{-1} \{ F[G_o] F[G_o] \} (\gamma_2) \quad \text{(ESPUATO SOLO LA DIPENDENZA DALLA VARIABILE CHE NON USO PER CALCOLARE F)}$$

$$= F^{-1} \{ F[G_o] \cdot F \circ F^{-1} \{ F[G_o] F[G_o] \} \} (x)$$

$$= F^{-1} \{ F[G_o]^3 \} (x)$$

• ESEMPIO (3)

$$A = (2\pi)^{-20} \int d^D p_1 d^D p_3 e^{i \underline{p}_1 \cdot \underline{x}} \tilde{G}_o(p_1)^2 \tilde{G}_o(p_3)^2$$



QUINDI (CHIAMANDO $\underline{p} = \underline{p}_1$)

$$\Delta_2(x) = (2\pi)^{-D} \int \tilde{G}_o(q) d^D q \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}} \tilde{G}_o(p)^2 \int \frac{d^D p_3}{(2\pi)^D} \tilde{G}_o(p_3)^2$$

$$\tilde{\Delta}_2(p) = F\{\Delta_2(x)\} = \tilde{G}_o(p)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_o(q) \int \frac{d^D p_3}{(2\pi)^D} \tilde{G}_o(p_3)^2$$

VOLENDO, CONCLUDO PRENDENDO L'ANTITRASFORMATTA DEI DUE MEMBRI.

• ESEMPIO (4)

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \int d^D \gamma_1 d^D \gamma_2 G_o(\gamma_1) G_o(\gamma_2 - \gamma_1)^3 G_o(x - \gamma_2) \\ &= \int d\gamma_2 G_o(x - \gamma_2) \int d\gamma_1 G_o(\gamma_1) G_o^3(\gamma_2 - \gamma_1) \\ &= \int d\gamma_2 G_o(x - \gamma_2) F^{-1} \{ F[G_o] F[G_o^3] \} (\gamma_2) \\ &= F^{-1} \{ F[G_o] \cdot F \circ F^{-1} \{ F[G_o] F[G_o^3] \} \} (x) \\ &= F^{-1} \{ F[G_o]^2 \cdot F[G_o^3] \} (x) \end{aligned}$$

NON SAPREI BENE CHE COSA FAR MENE, PERO'. CAMBIAMO TATTICA:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \int d\gamma_1 d\gamma_2 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4 d\rho_5 (2\pi)^{-5D} e^{i \underline{p}_1 \cdot \underline{\gamma}_1} e^{i (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)} e^{i \rho_5 \cdot (x - \gamma_2)} \tilde{G}_o(\rho_1) \dots \tilde{G}_o(\rho_5) \\ &= \int (2\pi)^{-5D} d\rho_1 \dots d\rho_5 d\gamma_1 d\gamma_2 e^{i \underline{\gamma}_1 \cdot (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 - \rho_4)} e^{i \underline{\gamma}_2 \cdot (\rho_2 + \rho_3 + \rho_4 - \rho_5)} e^{i \rho_5 \cdot \underline{x}} \tilde{G}_o(\rho_1) \dots \tilde{G}_o(\rho_5) \\ &= \int (2\pi)^{-5D} d\rho_1 \dots d\rho_5 \delta(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 - \rho_5) \delta(\rho_2 + \rho_3 + \rho_4 - \rho_5) e^{i \rho_5 \cdot \underline{x}} \tilde{G}_o(\rho_1) \dots \tilde{G}_o(\rho_5) \end{aligned}$$

MI ACCORDO CHE p_5 NON SE NE ANDRA', QUINDI TRA POCO CHIAMO $p = p_5$. ALLORA'

$$D_2 = \int (2\pi)^{-50} dp_1 \dots dp_5 \delta(p_5 - p) \delta(p_2 + p_3 + p_4 - p_5) e^{i \frac{p_5}{2} \cdot x} \tilde{G}_o(p_1) \dots \tilde{G}_o(p_5)$$

$$= \int (2\pi)^{-40} dp_2 dp_3 dp_4 dp \delta(p_2 + p_3 + p_4 - p) \tilde{G}_o(p)^2 \tilde{G}_o(p_2) \tilde{G}_o(p_3) \tilde{G}_o(p_4) e^{i \frac{p}{2} \cdot x}$$

DI QUESTI 4 MOMENTI, UNO E' FISSATO DALLA CONDIZIONE (DATA DAULÀ 5)

$$p_2 + p_3 + p_4 = p$$

CHIAMANDO $p_2 \equiv q_2$, $p_3 \equiv q_1$, QUESTA DIVENTA

$$p_4 = p - q_1 - q_2$$

INTEGRANDO PERÒ IN dp_4 E RINOMINANDO p_2, p_3 COME SOPRA,

$$D_2(x) = \int (2\pi)^{-30} dq_1 dq_2 dp \tilde{G}_o(p)^2 \tilde{G}_o(q_1) \tilde{G}_o(q_2) \tilde{G}_o(p - q_1 - q_2) e^{i \frac{p}{2} \cdot x}$$

PRENDENDO LA TRASFORMATA DEI DUE MEMBRI,

$$\tilde{D}_2(p) = \tilde{G}_o(p)^2 \int_{(2\pi)^0} \int_{(2\pi)^0} e^{-p q_1} \int_{(2\pi)^0} e^{-p q_2} \tilde{G}_o(q_1) \tilde{G}_o(q_2) \tilde{G}_o(p - q_1 - q_2)$$

REGOLA DI SOMMA

$$\text{CHIAMANDO } \lambda = \frac{\partial}{4!},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\lambda z^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} z^{4m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dz z^{4m+2} e^{-\frac{z^2}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} (4m+1)!!$$

RAGIONANDO IN MODO ANALOGO PER IL DENOMINATORE, TROVO

$$m = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dz z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\lambda z^4} \right) : \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\lambda z^4} \right) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-\lambda)^m (4m+1)!!}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-\lambda)^m (4m-1)!!}$$

$$= \frac{1 - \lambda 5!! + \frac{1}{2} \lambda^2 3!! - \lambda^3 \cdot \frac{1}{6} 13!! + O(\lambda^4)}{1 - (\lambda 3!! - \frac{1}{2} \lambda^2 7!! + \frac{1}{6} \lambda^3 11!!) + O(\lambda^4)} \approx (1 - \lambda 6!! + \frac{3!!}{2} \lambda^2 - \frac{13!!}{6} \lambda^3) (1 + \lambda 3!! - \frac{7!!}{2} \lambda^4 + \frac{11!!}{6} \lambda^5 + \lambda^6 (3!!)^2 - (7!!)(3!!) \lambda^7 + (3!!)^3 \lambda^8)$$

$$= 1 + \lambda [3!! - 5!!] + \lambda^2 \left[\frac{9!!}{2} - (3!!)(5!!) - \frac{7!!}{2} + (3!!)^2 \right] + \lambda^3 \left[-\frac{(13)!!}{6} + \frac{(11)!!}{6} - (7!!)(3!!) + (3!!)^3 + \frac{5!! 7!!}{2} - (5!!)(3!!)^2 + \frac{(9!!)(3!!)}{2} \right] + O(\lambda^4)$$

$$= 1 - 12 \lambda + 384 \lambda^2 - 19008 \lambda^3 + O(\lambda^4) = 1 - \frac{1}{2} \gamma + \frac{2}{3} \gamma^2 - \frac{11}{8} \gamma^3 + O(\gamma^4)$$

- ANCORA SULLA MOLTEPLIATA': REGOLA DI SOMMA
LA SOMMA DELLE MOLTEPLIATA' DEI DIAGRAMMI A UN DATO ORDINE E'
DATA DA UN INTEGRALE (UNA TEORIA DI CAMPO ZERO-DIMENSIONALE)
OTTENUTO ELIMINANDO L'ARGOMENTO DI $\varphi(x)$ ED ELIMINANDO LE SUE
DERIVATE. PER NOI

$$S_{D=0}(\varphi) = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{g}{4!} \varphi^4$$

Dove ho tolto la dipendenza da x e le derivate dei campi.
CALCOLO QUINDI

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dz z^2 e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{g}{4!} z^4}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{g}{4!} z^4}} = \langle z^2 \rangle_S$$

All' $O(g^2)$, si ottiene $\frac{g}{3}$.

- ESEMPIO: CALCOLA L' $O(g^3)$.

NOTA:

$$= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{g}{4!}\right)^m (4m+1)!!}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{g}{4!}\right)^m (4m-1)!!}$$

VEDI FOCUS UNA PAGINA INDIETRO PER LA
DIMOSTRAZIONE E IL CALCOLO DEI PRIMI ORDINI
IN g .

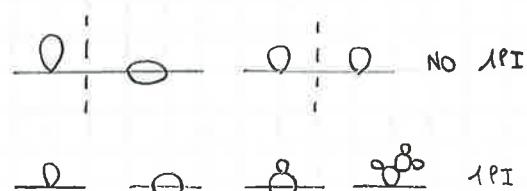
- 1 PI: DIAGRAMMI IRREDUCIBILI A UNA PARTICELLA

SONO QUEI DIAGRAMMI CHE NON POSSONO ESSERE DIVISI IN DUE PARTI DISCONNESSE TAGLIANDO SOLO UNA LINEA INTERNA.

QUI A FRANCO ALCUNI ESEMPI.

RICORDIAMO INTANTO CHE ABBIAMO
CALCOLATO *

$$\langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle = \overline{1} + \frac{0}{-12g} + \frac{00}{+144g^2} + \frac{0}{+144g^2} + \frac{0}{+96g^2} + O(g^3)$$



0 0 NO 1PI

0 0 0 0 1PI

VOGLIAMO RISOMMARE PARZIALMENTE QUESTA SERIE PERTURBATIVA.

- ★ INIZIAMO CONSIDERANDO LA BOLLA, CHE

HA PESO $12g$, E RISOMMIAMO LA SERIE
DI QUESTI SOLI
DIAGRAMMI ("GIRINI").



DI QUESTI SOLI

* NOTA: VANNNO TUTTI DIVISI PER $(4!)^m$.

SORI VIAMO AOE

$$\tilde{G}_e(p) = \frac{0}{1} + \frac{0}{-12g} + \frac{0 \cdot 0}{(-12g)^2} + \frac{0 \cdot 0 \cdot 0}{(-12g)^3} + \dots$$

CIASCUNO VALE, NELLO SPAZIO DI FOURIER,

$$\underline{0} = -12g \tilde{G}_o(p)^2 \int d\tilde{q} \tilde{G}_o(q) \quad d\tilde{q} := \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

$$\frac{\tilde{G}_o(p)}{0!} = (-12g)^2 \tilde{G}_o(p)^2 \tilde{G}_o(p) \left(\int d\tilde{q} \tilde{G}_o(q) \right)^2$$

$$\underline{000} = (-12g)^3 \tilde{G}_o(p)^2 \tilde{G}_o(p)^2 \left(\int d\tilde{q} \tilde{G}_o(q) \right)^3$$

DEFINIAMO DIAGRAMMA AMPUTATO UNO IN CUI NON CONSIDERIAMO LE LINEE ESTERNE.

AD ESEMPIO

$$\dots 0 \dots = \Sigma_1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{G}_o(q)$$

E NOTIAMO CHE Σ_1 NON DIPENDE DAL MOMENTO: È UN NUMERO.

RI SOMMANDO TUTTA LA SERIE DI BOLLICINE,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_e(p) &= \tilde{G}_o(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{G}_o(p) \left[-12g \tilde{G}(p) \Sigma_1 \right]^k \\ &= \tilde{G}_o(p) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-12g \tilde{G}_o(p) \Sigma_1 \right)^k \right] = \frac{\tilde{G}_o(p)}{1 + 12g \tilde{G}_o(p) \Sigma_1} \end{aligned}$$

(SUPPONENDO CHE QUESTA SERIE CONVERGA). ABBIANO TROVATO

$$\tilde{G}_e(p) = \left(\tilde{G}_o(p)^{-1} + 12g \Sigma_1 \right)^{-1} = \frac{1}{\mu + p^2 + 12g \Sigma_1}$$

ALL'ORDINE g^0 ,

$$\tilde{G}_e(p) = \tilde{G}_o(p)$$

MENTRE agli ordini successivi la massa nuda (BARE MASS) È SOSTITUITA DALLA MASSA RINORMALIZZATA: COME AVEMMO ANTICIPATO, NELLA TEORIA INTERAGENTE SI SOSTA IL PUNTO CRITICO.

IN QUESTA APPROSSIMAZIONE*, $\mu_c = -12g \Sigma_1$.

*NOTA: SECONDO ME È FALSO. INFATTI $\Sigma_1 = \Sigma_1(\mu)$ È IL PUNTO CRITICO QUI È DEFINITO (IMPPLICATAMENTE!) DA $\mu + 12g \Sigma_1(\mu) = 0$

* RIPETIAMO IL RAGIONAMENTO CON L'HAMBURGER:

$$\tilde{G}_0(p) = 1 + \frac{p - q_1 - q_2}{p} + \text{---} + \dots = \frac{1}{\mu + p^2 - \Sigma_2(p)}$$

$+ g^2$ $(+ g^2)^2$

* NOTA: E NON SOLO DALLE VARIABILI MUTE. IN EFFETTO LA CONSEGUENZA DEI MOMENTI FA COMPARE p NEL LOOP.

QUINDI IN QUESTO CASO $\Sigma_2 = \Sigma_2(p)$, OSSIA DIPENDE DAI MOMENTI.*

SE INCLUDESSE I TUTTI I DIAGRAMMI 1PI, OTTERREI UNA FORMULA ESATTA:

$$\Sigma(p) = \sum_{1\dots} + \sum_{2\dots} + \dots$$

NOTA: ANCHE IL SEGNO '-' DI $-g^2$ ORA LO MANDO NELLE Σ_i .

(STO INCUDENDO LA DIPENDENZA DA g^2 NELLE Σ). SE AD ESEMPIO DEFINISCO

$$\Sigma_{1+2} = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

** NOTA:
 $= \tilde{G}_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{G}_0 \Sigma_{1+2})^k \right)$.

TRONO

$$\tilde{G}_{1+2}(p) = \frac{\tilde{G}_0}{1 + \tilde{G}_0 \Sigma_{1+2}} \stackrel{**}{=} \tilde{G}_0 + \tilde{G}_0 (\Sigma_1 + \Sigma_2) \tilde{G}_0 + \tilde{G}_0 (\Sigma_1 + \Sigma_2) \tilde{G}_0 (\Sigma_1 + \Sigma_2) \tilde{G}_0 + \dots$$

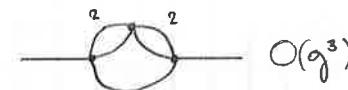
$$= \tilde{G}_0 \text{---} + \tilde{G}_0 \Sigma_1 \tilde{G}_0 \text{---} + \tilde{G}_0 \Sigma_2 \tilde{G}_0 \text{---} +$$

$$+ \tilde{G}_0 \Sigma_1 \tilde{G}_0 \Sigma_1 \tilde{G}_0 \text{---} + \tilde{G}_0 \Sigma_2 \tilde{G}_0 \Sigma_2 \tilde{G}_0 \text{---} +$$

$$+ 2 \tilde{G}_0 \Sigma_1 \tilde{G}_0 \Sigma_2 \tilde{G}_0 \left(\text{---} + \text{---} \right) + \dots$$

NOTA: SI PREGONANO, OBE', IN QUESTO SVILUPPO, ANCHE I DIAGRAMMI NON 1PI.

POTREI PROSEGUIRE DANDO Σ_3 ; TRONEREMI, USANDO Σ_{1+2+3} ,



UN TERMINE $6 \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \tilde{G}_0^6$ (6 SONO LE PERMUTAZIONI, SVILUPPO MULTINOMIALE).

OGNI $\Sigma_i(p)$ CONTIENE LA SOMMA DI TUTTE LE POSSIBILI RIPETIZIONI DI UN DIAGRAMMA 1PI, COPIATO DA 0 A ∞ VOLTE.

SE CHIAMO $\Sigma(p)$ LA SOMMA DI TUTTI I DIAGRAMMI 1PI, OTTENGO

$$\tilde{G}(p) = \tilde{G}_0(p) + \tilde{G}_0(p) \sum \tilde{G}_0(p) + \tilde{G}_0(p) \sum \tilde{G}_0(p) \sum \tilde{G}_0(p) + \dots$$

$$= (\tilde{G}_0(p))^{-1} - \Sigma(p) \stackrel{-1}{=} \frac{1}{\mu + p^2 - \Sigma(p)}$$

NOTA: $\Sigma(p)$ SI DICE SELF-ENERGY E SOMMA I CONTRIBUTI DI TUTTI I DIAGRAMMI AMPUTATI. IL SUO EQUIVALENTE PER LE FUNZIONI A 4 PUNTI SARÀ Γ . DEFINIREMO $m^2 = \mu - \Sigma(0)$.

QUINDI LE Σ_i , $i > 1$, AIORNAZZANO NON SOLTANTO LA MASSA.

E' A PARTIRE DA QUESTO $\tilde{G}(p)$ CHE DEFINIAMO μ_c t.c.

$$\tilde{G}(p=0, \mu=\mu_c) = \infty$$

INDICHIAMO LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI ESATTA CON IL SIMBOLO

$$\text{---} = \tilde{G}(p)$$

SIA INVECE

$$\text{---} = \text{SOMMA DEGLI API AMPUTATI}$$

$$= \dots 0 \dots + \dots 0 \dots + \dots \ominus \dots$$

IN QUESTI TERMINI, ABBIAMO TROVATO

$$\text{---} = \frac{1}{(-)^{-1} - (\text{---})}$$

NOTA: OCCHIO CHE IN GENERALE LA SELF-ENERGY SI DENOTA CON Σ , SENZA LE GAMBE ESTERNE.
L'EQUAZIONE DIVENTA

$$\text{---} = \frac{1}{(-)^{-1} - \Sigma}$$

NOTA:
 $\tilde{G}_c^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + \mu - \Sigma(p)} = \frac{1}{m^{(2)}(p)}$

DI NORMA SI DEFINISCE
 $m^2 \equiv \mu - \Sigma(0) = \mu - \Sigma(p) + O(\gamma^2)$
(INFATTI $\Sigma(p)$ A UN LOOP NON DIPENDE DA p).

FUNZIONE DI CORRELAZIONE A 4 PUNTI

$$\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \rangle$$

NELLA TEORIA NON INTERAGENTE, ESSA SI ESPRIME IN TERMINI DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI

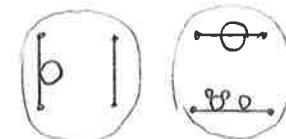


Ora abbiamo invece 3 classi di DIAGRAMMI:

1) COMPLETAMENTE DISCONNESSI: CI SONO VERTICI NON CONNESSI AD ALCUN PUNTO ESTERNO.
VENGONO TUTTI CANCELLATI DAL DENOMINATORE.



2) DIAGRAMMI RIDUABILI IN DUE PARTI TRA LORO DISCONNESSE.

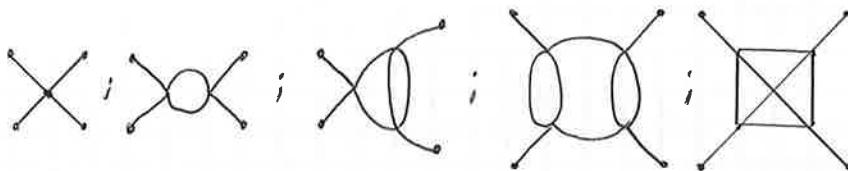


SI CANCELLANO DEFINENDO LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE CONNESSA

$$\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \rangle_C = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \rangle - \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \times \varphi(x_3) \varphi(x_4) \rangle + 2 \text{ PERM.}$$

3) DIAGRAMMI COMPLETAMENTE CONNESSI

Sono i soli che rimangono e che useremo. Ad esempio (a vari ordini),

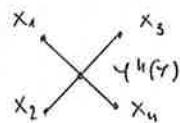


NOTA: A g^0 HO SOLO
DIAGRAMMI DISCONNESSI.

* ALL'ORDINE ZERO, QUINDI, QUESTA FUNZIONE DI CORRELAZIONE E' NULLA.

AL PRIMO ORDINE IN g ,

$$\text{Diagram with a circle at vertex } x_1 \sim -\frac{g}{4!} \langle \psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\psi(x_4) \int d^\Delta y \psi^4(y) \rangle_{cc} = \textcircled{*}$$



ATTACCO x_1 AD UNA γ IN 4 MODI, POI $x_2-\gamma$ IN 3 MODI, $x_3-\gamma$ IN 2 MODI,
 $x_4-\gamma$ IN UN MODO SOLO: IN TOTALE 24 . QUESTO 24 CANCELLA L' $\frac{1}{4!}$.

A QUEST'ORDINE NON POSSO AVERE BOLLE O DISCONNETTO IL
DIAGRAMMA. OTTENGO

$$\textcircled{*} = -g \int d^\Delta y G_0(x_1-y) G_0(x_2-y) G_0(x_3-y) G_0(x_4-y)$$

PASSANDO ALLO SPAZIO DI FOURIER,

$$\tilde{G}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g \int d^\Delta y \left(\prod_{i=1}^4 d^\Delta x_i \right) \left(\prod_{i=1}^4 G_0(x_i-y) \right) e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4)}$$

NEL VERTICE SI HA LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO. PER VEDERLO
IN MODO ESPUATO, ADOTTIAMO IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$z_1 = x_1 - y$$

$$z_2 = x_2 - y$$

$$z_3 = x_3 - y$$

$$z_4 = x_4 - y$$

E y INVARIATA. LO JACOBIANO VALE

$$J = \left| \frac{\partial z^i}{\partial x} \right| = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4}}^y = 1$$

NUOVE NUOVE VARIABILI,

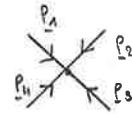
$$\tilde{G} = -g \int d^D \gamma \left(\prod_{i=1}^4 d^D z_i \right) \left(\prod_{i=1}^4 G_0(z_i) \right) e^{i \gamma \sum_i p_i} e^{i \sum_i 2_i p_i}$$

MA

$$\int d^D \gamma e^{i \gamma \sum_i p_i} \sim \delta^{(D)}(\sum_i p_i)$$

QUINDI

$$\tilde{G} = -g \delta^{(D)}\left(\sum_i p_i\right) \prod_{i=1}^4 \underbrace{\left(p_i^2 + \mu\right)^{-1}}_{\tilde{G}_0(p_i)}$$

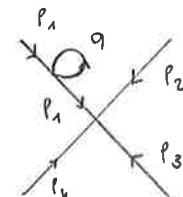


* AD ORDINI SUCCESSIVI SUBENTRANO NUOVI VERTICI.

CONSIDERIAMO I DIAGRAMMI COMPLETAMENTE CONNESSI

COME QUELLO A FIANCO, CHE VALE

$$g^2 \delta^{(D)}\left(\sum_i p_i\right) \left(\tilde{G}_0(p_1) \sum_i \tilde{G}_0(p_1) \right) \tilde{G}_0(p_2) \tilde{G}_0(p_3) \tilde{G}_0(p_4)$$



Dove per definizione

$$\sum_{1,0} = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q)$$

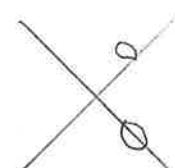
IN GENERALE, AVREMO DAI DIAGRAMMI DI QUESTO TIPO UN CONTRIBUTO

$$-g^m \delta^{(D)}\left(\sum_i p_i\right) \left(\prod_i \tilde{G}(p_i) \right)$$

DOVE $\tilde{G}(p_i)$ E' LA FUNZIONE A 2 PUNTI RINORMALIZZATA

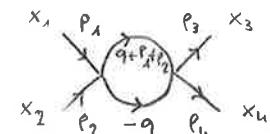
$$\tilde{G}(p_i) = (\mu + p^2 - \sum(p))^{-1}$$

G TUTTI I DIAGRAMMI 1PI AMPUTATI, A TUTTI GLI ORDINI, A 2 PUNTI
(SELF-ENERGY)



COMPARA ALL'OGGI UN DIAGRAMMA COME QUELLO A

DESTRA, CHE E' NUOVO; IN OGNI SUO VERTICE, $\sum_i p_i = 0$.



* IN GENERALE, PERCIO'

$$\tilde{G}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{cc} = \delta^{(D)}\left(\sum_i p_i\right) \prod_{i=1}^4 \tilde{G}(p_i) \cdot \Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

CONTRIBUTO DELLE 4 LINEE ESTERNE

DOVE Γ SOMMA I DIAGRAMMI 1PI AMPUTATI*. CHIARAMENTE SI ANNA'

$$\Gamma = -g + O(g^2)$$

*NOTA: A 4 PUNTI. VEDI
FOCUS TRA 5 PAGINE: $\Gamma = -\Gamma^{(4)}$

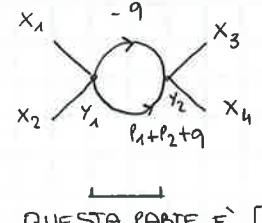
NOTA: E' IL CONTRIBUTO DEL VERTICE X.

All' $O(q^2)$ HO UN SOLO DIAGRAMMA CHE VALE, NELLO SPAZIO X,

$$+ q^2 G_0(x_1 - \gamma_1) G_0(x_2 - \gamma_1) G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^2 G_0(x_3 - \gamma_2) G_0(x_4 - \gamma_2)$$

QUINDI CONTRIBUISCE A Γ CON UN TERMINE

$$\sim \frac{1}{2} q^2 \int \frac{d^D q}{[\mu + (q + p_1 + p_2)^2][\mu + q^2]}$$



QUESTA PARTE E' Γ

$$\text{NOTA: } \Gamma^{(m)} = (-1) \left[\sum_m \left(-\frac{q}{4!} \right)^m \cdot \text{(DIAGRAMMA IN } p\text{)}$$

MANIPOLAZIONE DEGLI INTEGRALI NELLO SPAZIO DEI MOMENTI

VALE LA RELAZIONE

$$\Gamma^{-m} = \Gamma(m)^{-1} \int_0^\infty dy y^{m-1} e^{-ya}$$

NOTA: $\Gamma(m) = \int_0^\infty dx x^{m-1} e^{-x}$.
CHIAMA $x = ay \dots$

$m > 0$

DOVE $\Gamma(m)$ E' LA FUNZIONE GAMMA DI EULERO, CHE SUGLI INTERI VALE

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

APPLICHIAMO AL PROPAGATORE, CHE RISCRIVIAMO COME

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2 + m^2)}$$

NOTA: SE $m=1$, USA LA SOLUTA
 $T = \int_0^\infty dt e^{-t/k}$

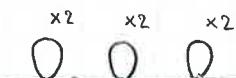
DOVE GLI α_i (UNO PER CIASCUN PROPAGATORE CHE INTRODUCO) SI DICONO PARAMETRI DI FEYNMAN.

RICORDIAMO CHE PER INTEGRALI GAUSSIANI

$$\int d^D k e^{-\alpha k^2 + \frac{k \cdot p}{\alpha}} = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{D}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}}$$

SE CONSIDERO IL DIAGRAMMA A FIANCO,

$$- \left(\frac{q}{(2\pi)^D} \right)^3 \frac{1}{8} \tilde{G}_0(p)^4 \left(\int d^D k \tilde{G}_0(k) \right)^3$$



$$\int d^D k (k^2 + m^2)^{-1} = \int_0^\infty d\alpha \int d^D k e^{-\alpha(k^2 + m^2)} = \pi^{+\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-\frac{D}{2}} e^{-\alpha m^2}$$

$$= \pi^{+\frac{D}{2}} \prod \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) m^{D-2}$$

NOTA: POSTO $\mu = m^2$,

$$\int_0^\infty d\alpha \alpha^{-\frac{D}{2}} e^{-\alpha \mu} = \mu^{\frac{D}{2}-1} \int_0^\infty dr r^{-\frac{D}{2}} e^{-r \mu} = \mu^{\frac{D}{2}-1} \prod \left(1 - \frac{\mu}{r} \right)$$

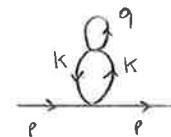
NOTA: PER INTEGRALI GAUSSIANI IN PIU' DIMENSIONI,

$$\int d^D k e^{-\alpha k^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^D}$$

IN QUEST'ALTRÒ DIAGRAMMA COMPARÈ

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 + m^2)^{\frac{D}{2}}} = \pi^{+\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-\frac{D}{2}-1} e^{-\alpha m^2}$$

$$= \pi^{+\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) m^{D-4}$$



NOTA: $D \sim \tilde{G}_0(p)^2 \int d^D q \tilde{G}_0(q) \int d^D k \tilde{G}_0(k)$

QUINDI QUESTO INTEGRALE PUÒ DIVERGERE.

PER ESEMPIO, CALCOLA QUALCHE DIAGRAMMA DALL'APPENDICE 5 DEL PARISI.

NOTIAMO CHE LA FUNZIONE

$$\Gamma(x) \sim \frac{1}{x} \text{ PER } x \rightarrow 0.$$

NEL GIBINO L' COMPARÈ $\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$, CHE DIVERGE* PER $D \geq 2$.

INVECE L' CONTIENE $\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)$ CHE HA PROBLEMI PER $D \geq 4$.

*NOTA: PERCHÉ NON SOLO PER $D=2$? SI PUÒ VEDERE, DA $\Gamma(-x) = \pi [\sin(\pi x) \Gamma(x+1)]^{-1}$, CHE $\Gamma(x)$ HA ZERI SEMPLICI IN TUTTI GLI INTERI NEGATIVI.

* QUESTI INTEGRALI POSSONO ESSERE REGOLARIZZATI PONENDO UNA SPAZIATURA RETTICOLARE $a > 0$ O UN CUTOFF $\Lambda < \infty$. MA COSA SUCCIDE SE VOGLIO RIMUOVERE IL CUTOFF, DIOÈ SE $a \rightarrow 0$ o $\Lambda \rightarrow \infty$? POSSO AVERE DUE DIVERGENZE UV, CHE DOVRO' CORREGGERE.

CONSIDERIAMO UN DIAGRAMMA NELLA FORMA GENERALE

$$\int \left(\prod_{\alpha=1}^L d^D k_\alpha \right) \left(\prod_{\alpha=1}^N \tilde{G}_0(q_\alpha(k)) \right)$$

NOTA: L' È IL NUMERO DI LOOP, N' IL NUMERO DI LINEE INTERNE (TOTALI).

DOVE LE $q_\alpha(k)$ SONO FUNZIONI LINEARI DEI K; HO DL INTEGRAZIONI SUI MOMENTI INTERNI E N PROPAGATORI, OGUNO DEGLI N PROPAGATORI PORTA UN k^{-2} .

PER $a \rightarrow 0$, AVRO' QUINDI UNA DIVERGENZA COME

$$(k)^{DL-2N} = k^D$$

DONDE SI E' CHIAMATO D' IL GRADO DI DIVERGENZA. SE $D = DL - 2N \geq 0$

AUORA IL DIAGRAMMA E' DIVERGENTE (UV), ALTRIMENTI SI DICE CHE IL DIAGRAMMA E' SUPERFICIALMENTE CONVERGENTE.

IN QUESTO CASO, IL GRADO GLOBALE E' TALE DA FARLO CONVERGERE, MA NON POSSO ESCUDERE CHE VI SIA UN SOTTODIAGRAMMA DIVERGENTE.

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UN DIAGRAMMA E' CHE SIA WI CHE I SUOI SOTTODIAGRAMMI SIANO SUPERFICIALMENTE CONVERGENTI. (WEINBERG 1960).

CLASSIFICAZIONE DEI DIAGRAMMI DIVERGENTI

CHIAMANDO

$E = \#$ LINEE ESTERNE

$N = \#$ LINEE INTERNE

$V = \#$ VERTICI

$L = \#$ LOOP

NOTA: PUOI DIMOSTRARE LE 2 RELAZIONI COSÌ.

DEUE HV LINEE CHE ESCONO DA VERTICI, E' E'

DIVENTANO LINEE ESTERNE E LE ALTRE SI ACCOPPIANO.

$$N = \frac{1}{2}(4V - E)$$

METTO UN MOMENTO SU CIASCUNA LINEA ($E+N$),

MA IN OGNI VERTICE HU LA CONSERVAZIONE DI ϵ_{tot}

QUINDI IN TUTTO V EQUAZIONI CHE LI ACCOPPIANO. ($E-N$

SONO FISSATI SULLE LINEE ESTERNE; NE RESTANO LIBERI

$$L = (E+N) - V - (E-1) = V + 1 - \frac{E}{2}$$

VALE LA RELAZIONE TOPOLOGICA (GRAFO CON VERTICI A 4 LINEE)

$$\underline{E+2N=4V}$$

NOTA: V E' ANCHE L'ORDINE DELLO SVILUPPO PERTURBAZIONE.

*NOTA: $(E-1)$ PER INVARIANZA TRASLAZIONALE.

ESEMPI

0 $E=2, N=1, V=1, L=1$

8 $E=2, N=3, V=2, L=2$

-0- $E=2, N=3, V=2, L=2$

NOTA: UN LOOP E' UN CAMMINO SEMPLICE FATTO DI LINEE INTERNE. L'HAMBURGER NON HA 1 LOOP CON 3 LINEE, BENSI' 2 LOOP. NON E' UN CASO CHE PER $E=2$ SIA SEMPRE $V=L$ (PER LA TEORIA $\lambda\psi^4$). IN EFFETTI UN DIAGRAMMA COME



NON ESISTE IN $\lambda\psi^4$, PERCHÉ DA OGNI VERTICE DEVONO USCIRE 4 GAMBE.

VALE INOLTRE LA RELAZIONE

$$\underline{V = L + \frac{E-2}{2}}$$

QUINDI IL GRADO DI DIVERGENZA DI UN DIAGRAMMA SI PUO' SCRIVERE COME

$$\begin{aligned} D &= DL - 2N = DL + E - 4V = DL + E - 4L - 2E + 4 \\ &= (D-4)L + (4-E) \end{aligned}$$

QUINDI:

i) $D < 2$: NON CI SONO DIVERGENZE.

$$D=1 \rightarrow D = -3L + 4 - E$$

NOTA: $D = (4-E) - \varepsilon L$
DOVE $\varepsilon = (4-D)$. LO SCOPO E'
COMUNQUE ELIMINARE N E V .

NELLA FUNZIONE A 2 PUNTI ($E=2$) HO $D = -3L+2$ E, MANO A MANO CHE CRESCHE 'E', D DIVENTA PIÙ NEGATIVO.

ii) $D=2$

POSSO AVERE PROBLEMI SE $E=2$, $D = -2L+2$.

SE $E > 2$, $-2L+1-E \leq -2L+1 < 0$, NON DIVERGENTE.

QUINDI IN $D=2$ IL SOLO DIAGRAMMA CHE DIVERGE È LA SELF-ENERGY AD UN LOOP ... QUESTA VALE

$$\Sigma_{(0)} = -\frac{g}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \int \frac{d^D K}{\mu + \sum \frac{g}{\Lambda^2} (1 - \cos(K_\nu \alpha_\nu))} = \Sigma(p, \mu) + O(g^2)$$

NON È UN PROBLEMA SE DIVERGE, PERCHÉ L'ENERGIA È DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE. VA PERO' RINORMALIZZATO SCEGLIENDO

$$\Sigma_{(p)}(p, \mu) = \Sigma(p, \mu) - \Sigma(0, \mu_0)$$

DOVE μ_0 È DETTO PUNTO DI RINORMALIZZAZIONE.

CIO' EQUIVALE AD AGGIUNGERE AD H UN CONTACTTERMINE

$$H \rightarrow H' = H + c \int d^D x \psi^2(x)$$

iii) $D=3$

C'È UN SOLO NUOVO DIAGRAMMA DIVERGENTE:

$$\frac{1}{6} \left(\frac{g}{(2\pi)^3}\right)^2 \int d^3 k_1 d^3 k_2 \tilde{G}_0(k_1) \tilde{G}_0(k_2) \tilde{G}_0(p - k_1 - k_2) \sim \log \Lambda^{-2} \sim \log \Lambda$$

MA SI PUÒ MOSTRARE CHE LA SUA PARTE DIVERGENTE IN Λ NON DIPENDE DA p .

iv) $D=4$

HO DIVERGENZE POLINOMIALI NEI MOMENTI ESTERNI. AGGIUNGO AD H

$$\int d^D x (\partial_\mu \psi)^2$$

O COMUNQUE DEI CONTACTTERMINI CHE CONTENGANO LE DERIVATE DI ψ .

NOTA: TUTTO VERO, PERO' SENZA VEDERE I CONTI SECONDO ME SA MOLTO DI ARIA FRITTA. VEDI AD ESEMPIO BINNEY, 9.1 ÷ 9.3.

NOTA: IL CASO $L=0$ NON È CONSIDERATO, NON C'È NULLA CHE POSSA DIVERGIRE.

PARTIRE DA $E=2$ E ANDARE A SALIRE EQUIVALE A CONSIDERARE I VARI SOTTO-DIAGRAMMI.

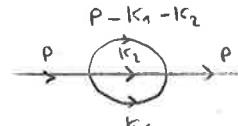
NOTA:

$$\Sigma_{(0)} = -\frac{g}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \int \frac{d^D K}{K^2 + \mu + \frac{K^2}{\Lambda^2}}$$

A QUEST'ORDINE (1 LOOP), IN EFFETTI LA SELF-ENERGY $\Sigma(p, \mu)$ NON DIPENDE DA p .

NOTA: CIÒ RIMUOVE LA DIVERGENZA PERCHÉ $\Sigma_{(0)}$, CHE DIVERGE COME $\log \Lambda$, NON DIPENDE DA p .

NOTA: AGGIUNGERE UNA COSTANTE c A Σ EQUIVALE A MODIFICARE $G(p) \rightarrow [G(p)^{-1} - c]^{-1}$
OPERO' A CAMBIARE IL VALORE DI μ .
CIO' SI OTTIENE AGGIUNGENDO IN H $\frac{c}{2} \int d^D x \psi^2(x)$



NOTA: QUINDI SOTTRAIGLI IL SUO VALORE IN $p=0$ RIMUOVE LA DIVERGENZA.

NOTA: SIGNIFICA RISCALDARE I CAMPI!

APPENOCCHIO COSTRUTTIVO HIGOROSO

COME COSTRUISSO UNA TEORIA DI CAMPO BEN DEFINITA NEL LIMITE CRITICO?

E' STATO PROVATO MATEMATICAMENTE CHE, PER $D \leq 4$, DOPO AVER INTRODOTTO I CONTROTERMINI ESISTE IL LIMITE $\alpha \rightarrow 0$.

FOCUS: VERTEX FUNCTIONS

(BINNEY 8.4)

DIAMO GIUSTO UN'INFARINATURA. ABBIAMO SEMPRE CALCOLATO L'ENERGIA LIBERA DI HELMOTZ $F[h]$, CON

$$\langle \phi(x) \rangle = \frac{\delta \log Z[h]}{\delta h(x)} \equiv \bar{\phi}(x) \quad F[h] = -\frac{1}{\beta} \log Z[h]$$

MEDIANTE TRASFORMATA DI LEGENDRE, DEFINIAMO L'ENERGIA LIBERA DI GIBBS

$$\Gamma[\bar{\phi}] \equiv \int d^D x h(x) \bar{\phi}(x) - \log Z[h] = \beta G[\bar{\phi}]$$

CHE NON E' PIU' UN FUNZIONALE DI h , MA DEL CAMPO MEDIO. PASSANDO IN TRASFORMATA DI FOURIER

$$\tilde{\Psi}(\underline{k}) = \int d^D x e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \bar{\phi}(x) = \int d\underline{x} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \frac{\delta \log Z[h]}{\delta h(\underline{q})} \frac{\delta h(\underline{q})}{\delta h(\underline{x})}$$

$$= \int d\underline{x} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \frac{\delta \log Z[\tilde{h}]}{\delta h(\underline{q})} \int d\underline{y} e^{-i\underline{q} \cdot \underline{y}} \frac{\delta h(\underline{y})}{\delta h(\underline{x})} = \frac{\int d\underline{x} e^{-i(\underline{k}+\underline{q}) \cdot \underline{x}} \frac{\delta \log Z[\tilde{h}]}{\delta h(\underline{q})}}{\delta(\underline{y}-\underline{x})} = \frac{\delta \log Z[\tilde{h}]}{\delta h(-\underline{k})}$$

$$\Gamma[\tilde{\Psi}] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\Psi}(\underline{k}) \tilde{h}(-\underline{k}) - \log Z[\tilde{h}]$$

SI PUO' MOSTRARE CHE $\Gamma''[h] \hat{\Psi}=0$ SVANISCE AL PUNTO CRITICO (SISTEMA A $V=\infty$) E CHE,

PER $T < T_c$, IL PIU' GRANDE VALORE DI $\hat{\Psi}$ PER CUI $\Gamma'=0$ E' LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA.

PER $T > T_c$, SE ESPANDO

$$\Gamma[\tilde{\Psi}] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \frac{d^D q_1 \dots d^D q_m}{(2\pi)^{mD}} \tilde{\Psi}(-\underline{q}_1) \dots \tilde{\Psi}(-\underline{q}_m) \Gamma^{(m)}(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_m)$$

LE $\Gamma^{(m)}$ SI DICONO VERTEX FUNCTIONS. Γ E' IL FUNZIONALE GENERATORE DEI DIAGRAMMI

AMPUTATI API: SI PUO' MOSTRARE CHE

$$\Gamma^{(2)}(\underline{k}) = \tilde{G}_c^{-1}(\underline{k}) - \Sigma(\underline{k}) = \frac{1}{\tilde{G}_c^{(2)}(\underline{k})}$$

$$\Gamma^{(4)}(\dots) = -\Gamma^{(2)}(\dots)$$

$$(\Gamma^{(2)}(\underline{k}_1, \underline{k}_2) = \delta(\underline{k}_1 + \underline{k}_2) \Gamma^{(2)}(\underline{k}_1))$$

$$\tilde{G}_c^{(4)}(\underline{k}_1 \dots \underline{k}_4) = -\delta^D \left(\sum_{i=1}^4 \underline{k}_i \right) \prod_{i=1}^4 \tilde{G}_c^{(2)}(\underline{k}_i) \cdot \Gamma^{(4)}(\underline{k}_1 \dots \underline{k}_4)$$

DOVE Σ E' "PI" SONO I SIMBOLI CHE NOI ABBIAMO ADOTTATO PER INDICARE LA SOMMA DEI DIAGRAMMI API A TUTTI GLI ORDINI, RISPECTIVAMENTE A 2 E A 4 PUNTI.

VIANO ALLA TRANSIZIONE

LE DIVERGENZE UN ERANO PIÙ UN INCONVENIENTE TECNICO; ORA APPARISCONO DIVERGENZE IR, CHE SONO FISICAMENTE INTERESSANTI (LIMITE DI GRANDI DISTANZE).

DISCUTEREMO IL LIMITE A MOLTE COMPONENTI, $m \rightarrow \infty$, DI

$$\psi_{\alpha}(x) \quad \alpha = 1, \dots, m$$

E INTRODUCEREMO LA RI-SOMMAZIONE DI HARTREE-FOCK.

DIVERGENZE IR

A METTIAMO NEL CASO

$$\rho \rightarrow 0$$

$$\mu \rightarrow \mu_c$$

STIAMO ESPANDENDO LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE IN POTENZE DI η A $(\mu - \mu_c(\eta))$ ASSO. NEL LIMITE CRITICO,

$$\mu \rightarrow \mu_c(\eta)$$

A TUTTI GLI EFFETTI, NOI STIAMO ESPANDENDO NEL PARAMETRO

$$u = \frac{\eta}{(\mu - \mu_c(\eta))^{(4-d)/2}}$$

CHE È DELICATO, PERCHÉ DIVERGE QUANDO CI AVVICINIAMO ALLA REGIONE CRITICA (COSA CHE QUINDI, ORA COME ORA, NON POSSIAMO FARE).

NOTA: IN $d < 4$.

L'ANALISI DIMENSIONALE CI DICE INFATTI CHE

$$\begin{cases} \lambda = \eta \alpha^{4-d} \\ M = \mu \alpha^2 \\ [\mu] = [\alpha^{-2}] = L^{-2} \\ [\eta] = [\alpha^{-(4-d)}] \end{cases}$$

μ È UNA MASSA QUADRA (È CHE M ERA LA MAGNETIZZAZIONE).

$$[\mu^{(4-d)/2}] = [\alpha^{-(4-d)}] = [\eta]$$

NOTA: CON QUESTE DEFINIZIONI SI ERA RISCHIATA
 $H_{\text{eff}}[\Psi] = \sum_{i,m} \frac{1}{2} J_{i,m} (\Psi_i - \Psi_m)^2 + \sum_i \left(\frac{M}{2} \Psi_i^2 + \frac{\lambda}{4!} \Psi_i^4 \right)$
 CON
 $\Psi_i = \alpha^{(d-2)/2} \psi_i, \quad [\Psi_i] = 0 = [\lambda] = [M]$
 QUI È PALESE CHE SI ESPANDA PERTURBATIVAMENTE
 IN λ , E RITROVO IL MODELLO GAUSSIANO SE $\alpha \rightarrow 0$.

NOTA: AL MOMENTO NON È UN ARGOMENTO MOLTO CONVINCENTE, MA VEREMO CHE IN EFFETTI SI ESPANDE IN λ (SIENE FUORI DA SOLO) QUANDO AFFRONTIEMO LA RINORMALIZZAZIONE NELL' SPAZIO DEGLI IMPULSI.

LA QUANTITA' ADIMENSIONALE NATURALE CHE POSSIAMO OTTENERE COME RAPPORTO TRA POTENZE DI g E $(\mu - \mu_c(g))$ E' APPUNTO μ .

QUINDI, SE ESPANDO QUANTITA' ADIMENSIONALI, ESPANDO IN EFFETTI IN FUNZIONE DI QUESTO PARAMETRO.

L'ESPANSIONE NON PUO' FUNZIONARE A μ_c , DEFINITO COME

$$\mu_c : |\tilde{G}(p, \mu_c)|_{p=0} = \infty$$

INVECE DI METTERMI SUL PUNTO CRITICO, ALLORA, NOTO CHE

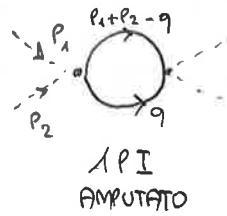
$$[\mu - \mu_c] = [p^2]$$

POTHEI PROVARE A CALCOLARE LE CORRELAZIONI IN FUNZIONE DI p A $\mu = \mu_c$; AD ESEMPIO, PER LA FUNZIONE A 2 PUNTI TROVEREI

$$\tilde{G}(q, p) = \frac{1}{p^2} f\left(\frac{q}{p^{4-\Delta}}\right)$$

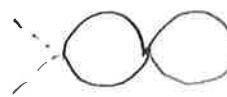
NOTA: $q p^{D-4}$ E' UNA QUANTITA' ADIMENSIONALE, QUINDI LO E' f . SI STA DICENDO CHE \tilde{G} DIVERGE, PER p PICCOLI, COME p^{-2} .

PER QUELLA A 4 PUNTI, CONTRIBUISCONO A Γ DIAGRAMMI COME



$$\sim g^2 \int \frac{d^D q}{[(-q + p_1 + p_2)^2 + \mu][\mu + q^2]} \sim g^2 \int \frac{d^D q}{q^4} \sim g^2 q^{-(4-\Delta)}$$

IN GENERALE, OGNI BOLLA DA' UN $q^{-(4-\Delta)}$. AD ESEMPIO



$$\sim g^3 q^{-2(4-\Delta)}$$

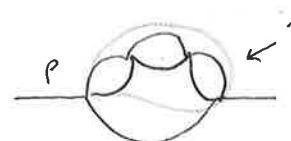
SE HO m BOLLE,

$$g^{m+1} q^{-m(4-\Delta)}$$

NOTA: $\overbrace{\dots}^m \propto \dots$

ESEMPIO

$D=3$, 2 PUNTI



$$\sim \int \frac{d^3 k}{k^3} f((p+k)^{-1})$$

NOTA: LE 3 BOLLE NEL COMPLESSO DANNO
 $g^4 q^{-3(4-3)} \sim \frac{1}{q^3}$

E' INFAROSSO DIVERGENTE (DIVERGE PER $K \rightarrow 0$).

PIU' AGGIUNGO BOLLE E PIU' I DIAGRAMMI DIVERGONO:

L'ESPANSIONE PERTURBATIVA SEMBRA INUTILE.

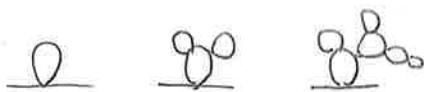
APPROXIMAZIONE DI HARTREE - FOCK

UN PASSO "FURBO" E' LA COSIDDETTA

RPA (RANDOM PHASE APPROXIMATION)

C^oPA (COHERENT POTENTIAL APPROXIMATION)

PRENDIAMO TUTTI I DIAGRAMMI CON DEI CACTUS DI g,



NOTA: STO FACENDO UNA PARTICOLARE SELEZIONE TRA TUTTI GLI INFINITI DIAGRAMMI.

E RISOMMIAMO PER COSTRUIRE Σ , LA SELF-ENERGY.

SI ERA VISTO COME, RISOMMANDO I DIAGRAMMI DEL TIPO

$$\Sigma_1 \rightarrow \text{---} + \underline{\text{Q}} + \underline{\underline{\text{Q}}} + \dots$$

NOTA: IN QUEL CASO I CACTUS NON C'ERANO!

SI ERA OTTENUTA UNA CORREZIONE INDEPENDENTE DA p, MENTRE $\Sigma(p) = \Sigma_{1+2+3+\dots}$.

INDICHIAMO CON I SIMBOLI

-

: SOMMA DEI DIAGRAMMI API AMPUTATI NELLA CLASSE CONSIDERATA.

-

: TUTTA LA CORRELAZIONE COMPLETA NELLA NOSTRA APPROSSIMAZIONE

OSSIA

$$-\square- = \text{---} + \dots \underline{\text{Q}} + \dots \underline{\underline{\text{Q}}} + \dots \underline{\underline{\underline{\text{Q}}}} + \dots$$

$$-\circ- = \underline{\text{Q}} + \underline{\underline{\text{Q}}} + \underline{\underline{\underline{\text{Q}}}} + \dots$$

CON LE GAMBE ESTerne E NON NECESSARIAMENTE API. PONIAMO*

$$-\square- = \underline{\circ}$$

(EQUAZIONE RIORDINATA)

HARTREE-FOCK RI SOMMA I DIAGRAMMI CHE SIAMO CONSIDERANDO.

POSso COSÌ CALCOLARE ITERATIVAMENTE

$$\text{---} \circ = \text{---}$$

$$-\square- = \dots \underline{\text{Q}} \dots$$

$$-\circ- = \text{---} + \underline{\text{Q}} + \underline{\underline{\text{Q}}} + (\text{COPIE})$$

$$-\square- = \dots \underline{\text{Q}} \dots + \dots \underline{\underline{\text{Q}}} \dots$$

$$\underline{\circ} = \underline{\text{Q}} + \underline{\underline{\text{Q}}}$$

* NOTA: STANDO ALLE DEFINIZIONI DATE, L'EQUAZIONE SI SCRIVE COSÌ: $-\square- = \dots \circ \dots$

CIOÈ SENZA LE GAMBE. IL FATTO È CHE STA USANDO MALE LA SELF-ENERGY, CHE IN GENERE SI DENOTA CON IL SOLO QUADRATINO, \square . VEDI FOGLIO TRA 5 PAGINE.

DEFINIAMO UNA Σ_B RINORMALIZZATA

$$\Sigma_B(p, \mu) = \Sigma(p, \mu) - \Sigma(0, \mu_N)$$

Dove μ_N è detto punto di rinormalizzazione (in generale si sceglie $p=0$, ma non è necessario). In termini di Σ_B , l'equazione ricorda

$$\Sigma_B = -\frac{g/2}{(2\pi)^D} \left[\int \frac{d^D q}{q^2 + \mu - \Sigma_B} - \int \frac{d^D q}{q^2 + \mu_N} \right]$$

DEFINENDO

$$m^2 \equiv \mu - \Sigma_B$$

LA (I) DIVENTA

$$\begin{aligned} \Sigma_B &= -\frac{g}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[(q^2 + m^2)^{-1} - (q^2 + \mu_N)^{-1} \right] \\ &\stackrel{D \neq 2}{=} -\frac{g}{2} (2\pi)^{-D} \pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left[(m^2)^{\frac{D-2}{2}} - \mu_N^{\frac{D-2}{2}} \right] \end{aligned}$$

IN $D=2$, SI PONE INVECE

$$\Sigma_B = -\frac{g}{2} \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{\mu_N}{m^2}\right)$$

NOTA: SI USA
 $\frac{1}{q^2+m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(q^2+m^2)}$

E CI SI RICONDUCE ALLA $\Gamma(x)$. IN $D=2$ AVREI $\Gamma(0)$, CHE VA PRESA CON LE MANI.

NOTA: Σ_B COSÌ OTTENUTA È INDEPENDENTE DALL'IMPULSO, COME Σ_A .

IN $D \neq 2$ SI TROVA QUINDI, SOSTITUENDO A Σ_B LA DEFINIZIONE SOPRA,

$$m^2 = \mu + \underbrace{\frac{g}{2} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)}_{\equiv A} \left[(m^2)^{\frac{D-2}{2}} - \mu_N^{\frac{D-2}{2}} \right] \quad (\text{II})$$

IN $D=3$, USANDO $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$,

$$m^2 = \mu + \frac{g}{2} \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi}} (-\sqrt{\pi})(m - \mu_N^{1/2})$$

$$m^2 + \frac{g}{8\pi} m = \mu + \frac{g}{8\pi} \sqrt{\mu_N}$$

SE IN $D=3$ RICHIEDO $m=0$, OTTENGO

$$\mu_c = -\frac{g}{8\pi} \sqrt{\mu_N}$$

IN GENERALE*, PER $D>2$ E $D \leq 4$,

$$\mu_c \sim -g \mu_N^{\frac{D-2}{2}}$$

NOTA: AUMENTICA IL SOTTO $m^2 \equiv \mu - \Sigma(0)$. QUESTO METODO È AUTOCONSISTENTE E HA LE SUE CONVENZIONI.

HARTREE-FOCK

(I)

NOTA: LA (II) SI DICE "GAP EQUATION".

** NOTA: SCARICO, IN GENERALE,
 $m^2 \sim (\mu - \mu_c)^2$

COME SI ACCORDA QUESTO CON
 $m^2 \equiv \mu - \Sigma_B$?

BASTA RICORDARE CHE $\Sigma_B = \Sigma_B(\mu)$.

* NOTA: NEGLIA (II), $m=0 \Rightarrow \mu_c = A \mu_N^{\frac{D-2}{2}-1}$. INOLTRE
 $(\mu - \mu_c) = m^2 - A m^{\frac{D-2}{2}}$

DOVE m^2 SI IGNORA SE $2 < D \leq 4$.

NOTA: LA SELF-ENERGY Σ_B CORREGGE IL PROPAGATORE RENDENDOLO

$$\frac{1}{q^2 + \mu - \Sigma_B} = \frac{1}{q^2 + m^2}$$

QUINDI PER DEFINIZIONE SI HA IL PUNTO CRITICO **
 PER $m=0$.

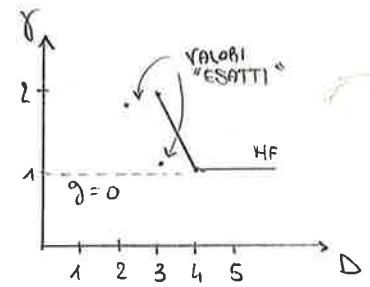
$$m \sim (\mu - \mu_c)^{\frac{1}{D-2}}$$

AUORA*

$$\chi = m^{-2} = (\mu - \mu_c)^{-\frac{2}{D-2}} = (\mu - \mu_c)^{-\frac{2}{D-2}}$$

IN QUESTA APPROSSIMAZIONE (H-F), $D > 2$ E $D \leq 4$,

$$\gamma_{HF} = \frac{2}{D-2}$$



QUESTO PUO' APPARIRE INSENATO: PERCHÉ SCEGLIERE PROPRIO QUELLA CLASSE DI DIAGRAMMI?

IN REALTA' ESSI SONO I PRIMI DIAGRAMMI NON BANALI NELL'ESPANSIONE

$$\frac{1}{m}, \psi_\alpha \quad \alpha = 1, \dots, m$$

QUINDI UN MOTIVO C'E' (LO DISCUTEREMO).

* NOTA: QUESTO E' VERO ANCHE AL DI FUORI DI H-F, PERCHÉ (CONTINUA IN *+*)

$$m^2 = P^{(2)}(0) = \tilde{G}^{-1}(0)$$

$$= (\mu + p^2 \tilde{Z}(p))|_{p=0} = \mu - \tilde{\Sigma}(0)$$

NOTIAMO CHE IL RISULTATO DI H-F NON DIPENDE DA γ : HO UNA SORTA DI "SALTO" TRA IL CASO $\gamma=0$ E QUELLO $\gamma \neq 0$.

L'ESPANSIONE IN $\frac{1}{m}$

** NOTA: QUINDI

$$m^{-2} = \tilde{G}(0) = \int d^D x G(x)$$

$$= \int d^D x \frac{1}{\mu} \chi(x) = \frac{1}{\mu} \chi$$

SIA m IL NUMERO DI COMPONENTI DEI CAMPI. QUANDO $m \rightarrow \infty$, H-F E' PROPRIO LA SOMMA DEI DIAGRAMMI DOMINANTI IN QUESTA APPROSSIMAZIONE.

CONSIDERIAMO QUINDI m COMPONENTI IN UNO SPAZIO INTERNO (NON E' LO SPAZIO REALE, ANCHE CON UN SITO SOLO HO INFINTI γ , o.l.l.)

$$\psi_\alpha(x), \quad \alpha = 1, \dots, m$$

SCEGUAMO UN' HAMILTONIANA H INVARIANTE SOTTO ROTAZIONI IN m DIMENSIONI (INTERNE), OSSIA SOTTO IL GRUPPO DI SIMMETRIA $O(m)$:

$$H[\psi] = \underbrace{\int d^D x \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^D \sum_{\alpha=1}^m (\partial_j \psi_\alpha)^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{\alpha=1}^m \psi_\alpha^2 + \frac{g}{4m} \left(\sum_{\alpha=1}^m \psi_\alpha^2 \right)^2 \right]}_{\text{TERMINI CINETICO}} \quad \underbrace{\text{TERMINI DI MASSA}}_{\text{INVARIANTE QUADRATICO}} \quad (1)$$

NEL CASO AD ALTE T, SO CHE IL SISTEMA E' ISOTROPO E INVARIANTE PER TRASLAZIONI:

$$\langle \psi_\alpha(0) \psi_\beta(x) \rangle = \delta_{ab} G(x)$$

NOTA: IL δ_{ab} VIENE DALLA SIMMETRIA PER ROTAZIONI.

POSSO ALLORA PENSARE A UNO SVILUPPO IN α : AVREI GU STESSI DIAGRAMMI CHE NELLA TEORIA SCALARE, MA MOLTEPLICITA' DIVERSE. PER VEDERLO, INTRODUCIAMO DEI CAMPI

$$\alpha(x) \rightarrow \int d[\alpha(x)]$$

NOTA: VOGLIO RISCHIARE IL TERMINE IN ψ^4 MEDIANTE UN CAMPO AUSTRARIO.

CHE NON HANNO IL TERMINE CINETICO, MA CHE CI SERVONO PER IL SOUTO TRUCCO DELL'INTEGRAZIONE GAUSSIANA:

$$\begin{aligned} & \int d[\alpha(x)] \exp \left\{ - \int d^D x \left(\frac{1}{2g} \alpha^2(x) + \frac{1}{\sqrt{12m}} i \alpha(x) \sum_{\alpha=1}^m \psi_{\alpha}^2(x) \right) \right\} \\ & \approx \exp \left\{ - \int d^D x \frac{1}{12m} \left(\sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^2(x) \right)^2 \frac{2g}{4!} \right\} = \exp \left\{ - \int d^D x \frac{g}{24m} \left(\sum_{\alpha=1}^m \psi_{\alpha}^2(x) \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Dove si è usato

$$\int dx e^{-Ax^2 \pm Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}$$

NOTA: CAITO? METTICI $m=1$ E HA

$$e^{- \int d^D x \frac{g}{4!} \psi(x)^4}$$

VEDI FOCUS QUI SOTTO, CAMBIO
QUALCHE TERMINE, THOVO

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \\ B &= i \sqrt{\frac{g}{12m}} \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^2(x) \end{aligned}$$

POSSO IN QUESTO MODO SCRIVERE

$$Z = \int d[\alpha] d[\psi] e^{-H[\alpha(x), \psi(x)]}$$

CON

$$H[\alpha(x), \psi(x)] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^D \sum_{\alpha=1}^m (\partial_{\nu} \psi_{\alpha}(x))^2 + \left(\frac{\mu}{2} + i \frac{\alpha(x)}{\sqrt{12m}} \right) \sum_{\alpha=1}^m \psi_{\alpha}^2(x) + \frac{1}{2g} \alpha^2(x) \right]$$

DOVE $\alpha(x)$ NON HA IL TERMINE CINETICO E INTERAGISCE CON

$$\sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^2(x)$$

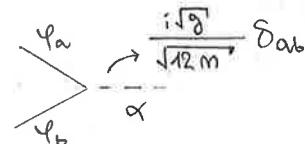
HO COSÌ TRASFORMATO UN VERTICE QUARTICO IN UN VERTICE QUADRATICO IN CUI PERO' HO L'INTERAZIONE CON UN NUOVO CAMPO $\alpha(x)$.

FOCUS: SECONDO ME COSÌ NON HA ALCUN SENSO. DEFINISCI INVECE, SEMPRE IN ACCORDO CON LA (I),

$$H[\alpha(x), \psi(x)] = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^D \sum_{\alpha=1}^m (\partial_{\nu} \psi_{\alpha}(x))^2 + \left(\frac{\mu}{2} + i \sqrt{\frac{g}{12m}} \alpha(x) \right) \sum_{\alpha=1}^m \psi_{\alpha}^2(x) + \frac{1}{2} \alpha^2(x) \right\}, \quad \text{i.e. } \alpha(x) \rightarrow \sqrt{g} \alpha(x).$$

AVREMO PROPAGATORI DEL TIPO

$$\psi_a(x) \quad \text{---}, \quad \alpha(x) \quad \text{---}$$



E ψ_a, ψ_b, α FORMANO VERTICI A 3 NELLO SPAZIO DEI MOMENTI.

SICCOME α NON HA IL TERMINE CINETICO (NON PARLA CIOÈ CON GLI ALTRI α NELLO SPAZIO),

$$\langle \alpha(x) \alpha(0) \rangle = g \delta(x)$$

NOTA: $\int d^d x \alpha(x) \alpha(y) \alpha(z) e^{i \frac{g}{2m} \sum_i \alpha^2(x)} = \sqrt{\frac{g}{2m}} \alpha(x) \alpha(y) \alpha(z) e^{i \frac{g}{2} \alpha^2(x)}$
 FA SENSO PER FORZA SE $g \neq 2$, IN EFFETTI IN ISING
 $\sum \sigma_i J_{ij} \sigma_j \rightarrow$ PEZZO CON LE DERIVATE \rightarrow INTERAZIONE.

IN QUESTA RISCHIUTURA E' EVIDENTE QUALI SIANO I DIAGRAMMI DOMINANTI A GRANDI m .

LA FUNZIONE A h PUNTI AMPLIATA A PI' SARÀ (AL' ORG) E' IL VERTICE

$$\Gamma_{abcd} = (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \frac{g}{3m} + O(g^2)$$



I DIAGRAMMI POSSONO ESSERE RISCHIUTI IN TERMINI DEI NUOVI CAMPI E DEI NUOVI VERTICI. AD ESEMPIO,

$$\begin{array}{c} \times \\ \square \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} > \dots < \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

*NOTA: CON LA MIA CONVENZIONE (VEDI FOGLIO), IL TERMINE DI MASSA E' $\frac{1}{2} \alpha^2(x)$ E $\langle \alpha(x) \alpha(0) \rangle = \delta(x)$.

CHE SONO DEL PRIMO ORDINE IN g , O DEL SECONDO ORDINE IN \sqrt{g} NELLA NUOVA TEORIA (OGNI INTERAZIONE CON α , $\sqrt{g} \alpha \psi \psi$, SI PORTA DIETRO UN \sqrt{g}). O ANCORA

$$\begin{array}{c} \square \\ \text{---} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\alpha} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} > \dots \\ \text{---} \end{array}$$

DONE SI VIDE CHE COMPAGNO SEMPRE SOLO VERTICE A 3.

IN QUESTA RAPPRESENTAZIONE E' POSSIBILE CONTROLLARE CHE COSA SUCCIDE NEL LIMITE $m \rightarrow \infty$:

- 1) PERDIAMO UN FATTORE m PER OGNI VERTICE g (INFATTI OGNI NUOVO VERTICE HA $\sqrt{\frac{g}{m}}$).
- 2) PER OGNI LOOP CHIUSO DI LINEE ψ GUADAGNO UN m . POSSO VEDERE OGNI LINEA ψ COME m LINEE (LE SUE COMPONENTI): SUBENTRA UN FATTORE COMBINATORIO (DI MOLTEPLICITA') $\propto m$.

PER $m \rightarrow \infty$ A g FISSO I SOLI DIAGRAMMI CHE sopravvivono SONO

$$\langle \psi \psi \rangle: \square = \square$$

IL TERMINE CHE DOMINA È PROPRIO LA RIASSOMMAZIONE DELLA BOLLA, AOÉ H-F, PER LE FUNZIONI $\langle\alpha\alpha\rangle$ SOPRAVVIVONO INVECE

$$\langle\alpha\alpha\rangle = \dots + \text{---} \circ \dots + \text{---} \circ \text{---} \circ \dots +$$

(MA È POCO INTERESSANTE).

NELLA RAPPRESENTAZIONE α, γ , AD OGNI ORDINE SOPRAVVIVE SOLO UN NUMERO FINITO DI DIAGRAMMI. È POSSIBILE CALCOLARE GLI ESPOVENTI CRITICI COME SOMMA DI POTENZE DI $\frac{1}{m}$.

L'ESPANSIONE $\frac{1}{m}$ (È QUINDI H-F) È UTILE PER CAPIRE DALLE COSE SUL COMPORTAMENTO CRITICO, MA NON MOLTO PER CALCOLARE GLI ESPOVENTI CRITICI.

FOCUS: HARTREE - FOCK

RICORDIAMO CHE $\Sigma(p, \mu)$ È LA SELF-ENERGY, OSSIA IL CONTRIBUTO DEI DIAGRAMMI AMPUTATI. AL PRIMO ORDINE IN g , DOVE L'UNICO DIAGRAMMA PRESENTE È \square ,

$$\Sigma(p, \mu) \underset{\substack{\uparrow \\ O(g)}}{\approx} -\frac{g}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q) = -\frac{g}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + \mu} = \dots \circ \dots \quad (I)$$

(A QUEST'ORDINE, LA SELF-ENERGY NON DIPENDE DA p). SEGUE LA CORREZIONE AL PROPAGATORE

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 + \mu - \Sigma(p, \mu)} = \text{---} \circ \text{---} \quad (II)$$

H-F PRESCRIVE DI SOSTituIRE $\tilde{G}(p)$ A $\tilde{G}_0(p)$ PER CALCOLARE LA SELF-ENERGY, OVVERO

$$\dots \square \dots = \Sigma(p, \mu) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TUTTI GLI ORDINI}, \\ \text{H-F}}}{\equiv} -\frac{g}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{G}(p) = -\frac{g}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + \mu - \Sigma(p, \mu)} = \dots \circ \dots \quad (III)$$

IN QUESTO MODO NON SI OTTENGONO TUTTI I DIAGRAMMI AMPUTATI CHE DOVREI METTERE IN \square , MA SOLO QUELLI FATI DI CACTUS, COME VISTO A LEZIONE. AD ESEMPIO, CALCOLANDO $\tilde{G}(p)$ CON LA (II) USANDO LA STIMA (I) DI $\Sigma(p, \mu)$,

$$\tilde{G}(p) = \left[p^2 + \mu + \frac{g}{2} \int dk \frac{1}{k^2 + \mu} \right]^{-1} = \left[(p^2 + \mu) \left(1 + \frac{1}{p^2 + \mu} \frac{g}{2} \int dk \frac{1}{k^2 + \mu} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{p^2 + \mu} \left[1 - \frac{g}{2} \cdot \frac{1}{p^2 + \mu} \int \frac{dk}{k^2 + \mu} \right] + O(g^2)$$

QUINDI

$$\Sigma(p, \mu) = -\frac{g}{2} \int \frac{dp}{p^2 + \mu} \left[1 - \frac{g}{2} \frac{1}{p^2 + \mu} \int \frac{dk}{k^2 + \mu} \right] = -\frac{g}{2} \int \frac{dp}{p^2 + \mu} + \frac{g^2}{4} \int \frac{dp}{(p^2 + \mu)^2} \int \frac{dk}{k^2 + \mu} + O(g^3) = \dots \circ \dots + \dots \square \dots + O(g^3)$$

E COSÌ VIA.

L'ULTIMO PASSAGGIO È SOTTRAERE ALLA $\Sigma(p, \mu)$ CHE ABBIANO OTTENUTO RICORSIVAMENTE NELLA (III) IL SUO VALORE CALCOLATO IN UN PUNTO DI SOTTRAZIONE $m^2 = \mu_N$ (IN QUESTO MODO LA SI RINORMAIZZA) E A IMPULSO NULLO. SI OTTIENE

$$\Sigma_R(p, \mu) = -\frac{g}{2} \frac{1}{(2\pi)^D} \left[\int \frac{d^D p}{p^2 + \mu - \Sigma_R(p, \mu)} - \int \frac{d^D p}{p^2 + \mu_N} \right]$$

NOTA CHE $\dots \square \dots$ È UN LOOP CHE HO COSTITUITO RIPETENDO SU SÉ STESSO ($\text{---} = \tilde{G}(p)$) INVECE CHE ($\text{---} = \tilde{G}_0(p)$).

GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE NELLO SPAZIO P

PARTIAMO DALLO SVILUPPO PERTURBATIVO IN η DEL MODELLO DI LANDAU - GINSBURG. NE ABBIAMO GIÀ OSSERVATO ALCUNE PATOLOGIE, TRA CUI LA DIVERGENZA DI η AL PUNTO CRITICO.
MA IL PUNTO CRITICO ESISTE: È BEN DEFINITO, VI SONO DELLE PROPRIETÀ CHE POSSO MISURARE E A CUI POSSO FAR CORRISPONDERE UN VALORE FINITO.

RINORMALIZZEREMO LA TEORIA BASANDO L'ESPANSIONE SU QUANTITÀ FISICA DELLE QUALI HA SENSO FARE IL LIMITE.
UN MODO È ESPANDERE IN POTENZE DI

$$\epsilon = h - D = D_c^m - D$$

PERCHÉ SAPPIAMO CHE A $D = D_c^m$ IL CONTO ESATTO CI DA' $\eta = 0$, LA TEORIA LIBERA: NON CI SONO CORRELAZIONI.

UN ARGOMENTO EURISTICO PER VEDERLO È IL SEGUENTE:

- 1) CAMPO $\eta \sim R.W.$ (INTEGRALE SUI CAMMINI)
- 2) $R.W. \sim$ DIMENSIONE 2 ($t \sim d^2$; PERCONE $d \sim \sqrt{t}$)

DUE CAMPI INTERAGISCONO QUANDO... I LORO CAMMINI SI INCONTRANO.
4 DIMENSIONI È IL PUNTO IN CUI GENERICAEMENTE DUE RW SMETTONO DI INCONTRARSI.

PARISI, NEL 1973, TROVA INVECE UN MODO PER CALCOLARE GLI ESPOVENTI CRITICI IN DIMENSIONE FISSA (A 25 ANNI).

* METTIAMO AL PUNTO CRITICO, DOVE

$$\mu \rightarrow \mu_c$$

$$\eta \rightarrow 0, T \rightarrow T_c$$

$$\xi \rightarrow \infty$$

=> UNIVERSALITÀ

VOGLIAMO ORGANIZZARE L'ESPANSIONE PERTURBATIVA IN MODO CHE CONTINUI AD AVERE SENSO VICINO AL PUNTO CRITICO.

SO CHE IN $D=4 = D_c^u$ FUNZIONA LA TEORIA GAUSSIANA, $\tilde{g}=0$.
E' PLAVSIBILE PENSARE CHE IN DIMENSIONE VIANA A 4 ESPANDERE SIA PIÙ SEMPUCE.

IL PARAMETRO EFFETTIVO DELLO SVILUPPO PERTURBATIVO*

$$\tilde{g} = \frac{\tilde{g}}{m^{4-D}} = g \xi^{4-D}$$

NOTA: $\xi \equiv m^{-1}$ (VEDI NOTA *). IN EFFETTI,

$$\hat{G}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \xrightarrow{(D=4)} G(x) = \frac{\pi}{m} e^{-mx}.$$

(COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO EFFETTIVA, ADIMENSIONALE) DIVERGE AL PUNTO CRITICO.

RIPARTIAMO DALLA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A 2 PUNTI**

$$G(p) = \frac{z_1}{p^2 + m^2 + O(p^4)}$$

PER $\tilde{g}=0$,

$$z_1 = 1$$

$$m^2 = \xi^{-2}$$

SE $\tilde{g} \neq 0$,

$$z_1 \sim \xi^{-\eta}$$

$$m^2 \sim \xi^{-2} \text{ PER } \xi \rightarrow \infty$$

DOVE η E' LA DIMENSIONE ANOMALA.

POSSO DEFINIRE DEI CAMPI BINORMALIZZATI

$$\varphi_h(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{z_1}}$$

COSÌ DA SOLVETE

$$G_h(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 + O(p^4)}$$

**NOTA: SPOILER ALERT. L'IPOTESI DI SCALING, CHE GIUSTIFICAVEREMO CON IL GdR NELLO SPAZIO FISICO, E' CHE ξ SIA L'UNICA LUNGHEZZA RILATIVAMENTE AL PUNTO CRITICO. SEGUE CHE

$$G(r, \theta) = r^{-(D-2+\eta)} g(r/\xi(0)), \quad g(x) \sim \begin{cases} \text{O}(1), & x \ll 1 \\ e^{-x}, & x \gg 1 \end{cases}$$

MA

$$G(x) = \int d^D p e^{ipx} \frac{1}{p^2 + m^2} \sim p^{(D-2)} \sim x^{-(D-2)}$$

E IN EFFETTI NELLA TEORIA LIBERA $\eta=0$.

QUELLO Z1 SERVE A RICOSTRUIRE LA LEGGE DI SCALING GIUSTA NELLA TEORIA INTERAGENTE.

SIA PER IL GAUSSIANO CHE PER $\tilde{g} \neq 0$ PER $\xi \rightarrow \infty$.

DEFINIAMO ANALOGAMENTE UNA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A 4 PUNTI CONNESSA AMPUTATA BINORMALIZZATA Γ_4^A .

IL CONTO A D FISSATA

METTIAMOCI IN $D=3$. UNA GENERICA FUNZIONE

$$F\left(\frac{g}{m}\right) = F_0 + F_1 \frac{g}{m} + F_2 \left(\frac{g}{m}\right)^2 + \dots$$

SE $\frac{g}{m} \rightarrow 0$, CONOSCERE MOLTI TERMINI DELL'ESPANSIONE NON SERVE.

MA ANCHE SE $\frac{g}{m}$ DIVERGE, LE PROPRIETA' FISICHE DELLA TEORIA

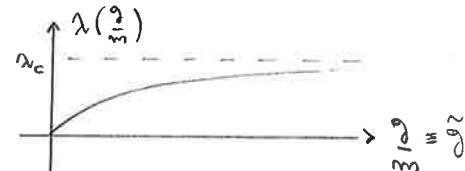
POSSENDO TENDERE A VALORI COSTANTI. POSSO DEFINIRE UNA NUOVA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO λ t.c.

$$\begin{cases} \lambda = \frac{g}{m} \text{ PER } \frac{g}{m} \text{ PICCOLI} \\ \lambda \rightarrow \lambda_c \text{ FINITO PER } \frac{g}{m} \rightarrow \infty \end{cases}$$

DEFINISCO DIOE' UN MAPPING CONFORME CHE MANDI

$$\infty \rightarrow \lambda_c$$

$$\frac{g}{m} = \infty \rightarrow \lambda = \lambda_c$$



SCEGLIEREMO PER λ UNA PROPRIETA' DEL SISTEMA t.c.

$$\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \lambda$$

TRASFORMEREMO L'ESPANSIONE PERTURBATIVA IN POTENZE DI $\frac{g}{m}$
IN UNA IN POTENZE DI λ .

OSSERVIAMO CHE

$$m^2 \sim (\mu - \mu_c)^{\frac{2}{2\beta}}$$

$$(m^2)^{1/2\beta} \sim (\mu - \mu_c)$$

$$\frac{d\mu}{dm^2} \sim \frac{1}{2\beta} (m^2)^{\frac{1}{2\beta} - 1}$$

NOTA: ANCORA, PERCHÉ $\xi = m^{-1}$ E
 $\xi \sim (\mu - \mu_c)^{-\nu}$

NOTA: DEVO IN $d\ln m^2$ PER FAR SPARIRE μ_c .

QUINDI

$$\ln\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \simeq \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ln(m^2) + \text{cost.}$$

$$m^2 \frac{d}{dm^2} \ln\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \xrightarrow{m^2 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)$$

QUESTA E' UNA BUONA SCELTA* PER LA FUNZIONE DI \tilde{g} CERCATA.

*Nota: E' UNA BUONA SCELTA PERCHÉ LA POSSIAMO USARE PER RICAVARCI λ .

E' DAVVERO UNA FUNZIONE DI \tilde{g} , PERCHÉ
 $m^2 = \mu - \sum_i (m, p)$

E LA SELF-ENERGY E' UNA SERIE IN g .

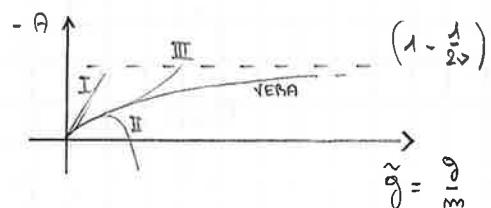
QUANTO ABBIAMO TROVATO E' VERO
PER SOLO SE $m^2 \neq 0$, I.E., $\tilde{g} \neq \infty$.

DEFINIAMO ALLORA LA FUNZIONE

$$A(\tilde{g}) = A\left(\frac{g}{m}\right) = \sum_k A_k \tilde{g}^k = m^2 \frac{d}{dm^2} \ln\left(\frac{d^m}{dm^2}\right) \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma} - 1$$

$$A(\tilde{g} \rightarrow \infty) \rightarrow \text{cost.}$$

NEL GRAMICO SI MOSTRANO $A(\tilde{g})$ E LE SUE APPOSSIMAZIONI AI PRIMI 3 ORDINI, CON CUI CHIARAMENTE NON DESCRIVONO IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO.



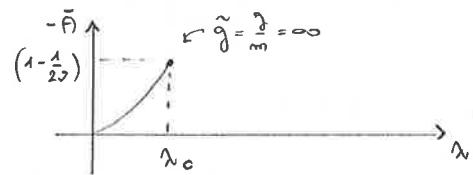
PONCHÉ È DIFFICILE CONTROLLARE $A(\tilde{g})$ CON UN'ESPANSIONE IN \tilde{g} , DEFINIAMO

$$\bar{A}(\lambda) = A(\tilde{g}(\lambda))$$

CON LA PROPRIETÀ CHE

$$\bar{A}(\lambda_c) = A(\tilde{g} = \infty) = \frac{1}{2\gamma} - 1$$

DONDE λ È LA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA,



* CALCOLIAMO INNANZITUTTO I COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO IN SERIE DI λ IN \tilde{g} . SAPENDO GIÀ CHE $B_1 = 1$,

$$\lambda = \tilde{g} + B_2 \tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3)$$

All'ORDINE \tilde{g}^2 , AVREMO

$$\lambda = \tilde{g} + B_2 \tilde{g}^2 = \tilde{g}(1 + B_2 \tilde{g}) \approx \frac{\tilde{g}}{1 - B_2 \tilde{g}}$$

$$\lambda(1 - B_2 \tilde{g}) \approx \tilde{g}$$

QUESTA RELAZIONE PUÒ ESSERE INVERTITA:

$$\lambda - B_2 \tilde{g} \lambda \approx \tilde{g}$$

$$\tilde{g} + B_2 \tilde{g} \lambda \approx \lambda$$

$$\tilde{g} \approx \frac{\lambda}{1 + B_2 \lambda} \approx \lambda(1 - B_2 \lambda)$$

$$\Rightarrow \tilde{g} = \lambda - B_2 \lambda^2 + O(\lambda^3)$$

SICCOME SO SVILUPPARE λ (LA GRANDEZZA FISICA CHE DEFINISCE LA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA) IN SERIE DI \tilde{g} , SO INVERTIRE ED ESPRIMERE \tilde{g} IN FUNZIONE DI λ .

NOTA: STIAMO COSTRUENDO λ IN MODO CHE CONCIDA CON \tilde{g} PER \tilde{g} PICCOLI (QUINDI PER λ PICCOLI).

QUI NON CALCOLIAMO DANNERO I B_k , MA LO FATTEMO A BREVE E CI MUOVEMO COME QUI PRESENTATO.

PERHÒ

$$A(\tilde{g}) = A_1 \tilde{g} + A_2 \tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3)$$

$$\bar{A}(\lambda) = A_1 \cdot (\lambda - B_2 \lambda^2) + A_2 (\lambda - B_2 \lambda^2)^2 + O(\lambda^3)$$

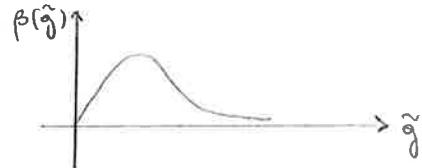
$$= A_1 \lambda + (-A_1 B_2 + A_2) \lambda^2 + O(\lambda^3)$$

NOTA: $\tilde{g} \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} \lambda_c$, QUINDI È PIANTATA A TUTTI GLI ORDINI. LA DOMANDA È: QUI È λ_c ?

CI SERVONO DIOE' I COEFFICIENTI A_k DELLO SVILUPPO IN \tilde{g} DI A (LA GRANDEZZA DI CUI STUDIAMO IL COMPORTAMENTO CRITICO) E B_k DELLO SVILUPPO DI $\bar{A}(\tilde{g})$.

* DEFINIAMO UNA TERZA FUNZIONE* (BETA-FUNCTION)

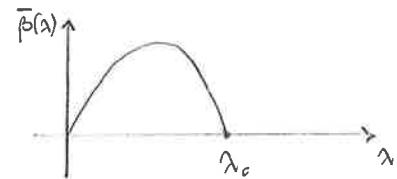
$$\beta(\tilde{g}) = \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \bar{A}(\tilde{g}) \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} 0$$



SIMILMENTE,

$$\bar{\beta}(\lambda) = \beta(\tilde{g}(\lambda))$$

$$\bar{\beta}(\lambda_c) = 0$$



CALCOLO QUINDI λ_c COME QUEL VALORE PER CUI

$$\bar{\beta}(\lambda_c) = 0$$

E A QUEL PUNTO \bar{A} MI PERMETTERÀ DI CALCOLARE L'ESPOLENTE CRITICO ν :

$$\bar{A}(\lambda_c) = \frac{1}{2\nu} - 1$$

NOTA: SOTTO LE IPOTESI DI SCALING E HYPERSCALING, DATI ν E η RICOSTRUISCO $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

SI TRATTA PERHÒ DI DETERMINARE LO ZERO DELLA FUNZIONE $\bar{\beta}$.

PERHÒ LE COSE FUNZIONANO, SERVE CHE λ_c SIA PICCOLO (ABBASTANZA PERHÒ L'ESTRAZIONE FUNZIONI).

* CHE GRANDEZZA SCEGLIAMO PER λ ?

$$\lambda = m^{\Delta-\eta} \Gamma_\eta^\eta$$

NOTA: GUANDACASO,

$$\Gamma_\eta^\eta = \tilde{g} + O(\tilde{g}^2)$$

$$\lambda = \frac{3}{m^{\Delta-\eta}} + O(\tilde{g}^2) = \tilde{g} + O(\tilde{g}^2)$$

DONDE Γ_η^η È LA FDC A LI PUNTI COMPLETAMENTE CONNESSA, AMPUTATA, DI CAMPI RINORMALIZZATI E A MOMENTO ESTERNO NULLO.

SI RICORDI CHE LE FUNZIONI A 2 PUNTI RINORMALIZZATE, SU $\psi_a(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{2}}$,

$$\tilde{G}_B(p) = (p^2 + m^2 + O(p^4))^{-1}$$

SI COMPORTANO IN MODO SEMPLICE (SENZA LO $\xi^{-\eta}$) PER

$$m \rightarrow 0, \frac{p}{m} \text{ ASSO}$$

NOTA: OSSIA $m \times \text{ASSO}$.

PER LE FUNZIONI A N PUNTI, APPARIRÀ UN FATTORE MOLTIPLICATIVO

$$m^{-(N(1+\frac{\alpha}{2}) - \Delta)}$$

NUOVO SPAZIO DEI MOMENTI.

SE MISUO TUTTO IN UNITÀ DI m , LE FOLC DEI CAMPI RINORMALIZZATI HANNO UN LIMITE FINITO PER

$$\frac{\gamma}{m^{4-\Delta}} \rightarrow \infty$$

DEFINIAMO QUINDI

$$\lambda = m^{\Delta-4} Z_1^2 \Gamma_h^A = m^{\Delta-4} \Gamma_h^A$$

COSÌ CHE

$$\lambda = \tilde{\gamma} + O(\tilde{\gamma}^2) \quad \text{PER } \tilde{\gamma} \approx 0$$

$$\lambda \rightarrow \lambda_c$$

(INFATTI LE FOLC SONO BEN DEFINITE NEL LIMITE CRITICO). CI ASPETTIAMO

$$\lambda_c \xrightarrow{\Delta \rightarrow 4} 0$$

INFATTI IN $\Delta = 4$ LA TEORIA DIVENTA GAUSSIANA.

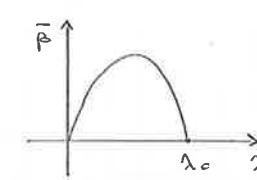
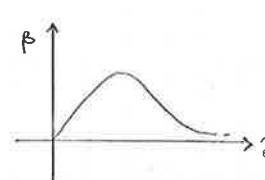
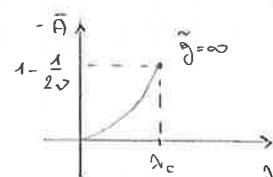
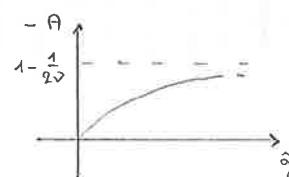
CALCOLO DI $\sqrt{\lambda}$ A 1 LOOP

ABBIAMO CHIAMATO ' A ' LA GRANDEZZA

$$A(\tilde{\gamma}) = m^2 \frac{d}{dm^2} \ln \left(\frac{dm}{dm^2} \right) \xrightarrow{\tilde{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma} - 1$$

CON CUI È POSSIBILE CALCOLARE λ . UNA GRANDEZZA ANALOGA A PERMETTEREBBE DI CALCOLARE η . INVECE

$$\beta(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma} \frac{d}{d\tilde{\gamma}} \lambda(\tilde{\gamma}) \xrightarrow{\tilde{\gamma} \rightarrow \infty} 0$$



RICAVIAMO QUINDI

$$\lambda_c : \bar{\beta}(\lambda_c) = 0$$

INFINE, SI E' DEFINITA

$$\lambda = m^{\Delta-4} \Gamma_4^{\alpha}$$

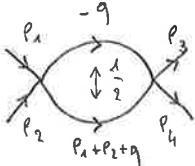
** NOTA:
 $\Gamma_4 \leftarrow X + \cancel{X} + \cancel{X} + \cancel{X}$.

* NOTA: OVVERO PER LA SELF-ENERGIA
E PER IL VERTICE, LE GAMBE NON LE CALCOLO.

FACCIA MO IL CALCOLO ESATTO FINO A 1 LOOP, CONTANO I DIAGRAMMI

0 ~~XOX~~ PER LE FUNZIONI RISPECTIVAMENTE A 2 E A 4 PUNTI.*

COMINCIA MO DALLA FUNZIONE A 4P, PER CUI AVEMMO CALCOLATO



$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{matrix}$$

NOTA: A QUEST'ORDINE LA SELF-ENERGIA
NON DIPENDE DAI MOMENTI. IL FATTORE 3
E' TOPOLOGICO: NON VIENE DA COME DISTRIBUISCO
I MOMENTI, MA DA COME CONNETTO TRA LORO LE LINEE.

C'E' UN FATTORE $\frac{1}{2}$ PER LO SCAMBIO DELLE LINEE INTERNE E UN FATTORE
3 PER LE PERMUTAZIONI DEI MOMENTI ESTERNI: IN TOTALE $\frac{3}{2} g^2$. QUINDI

$$\Gamma_4(0,0,0,0) = g - \frac{3}{2} g^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \cdot \frac{1}{(q^2 + m^2)^2}, = I$$

NOTA: g E' IL VERTICE DA SOLO...

ABBIAMO GIÀ CALCOLATO QUESTO INTEGRALE USANDO I PARAMETRI DI
FEYNMAN: VALE

$$I = (4\pi^2)^{-\frac{D}{2}} \pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) m^{\Delta-4}$$

NOTA: CHIAMA FIN DA ORA

$$\alpha \equiv \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}}$$

AU A FINE SI SEMPLIFICA!

QUINDI

$$\Gamma_4(0,0,0,0) = \left(\frac{g}{m^{4-\Delta}}\right) m^{4-\Delta} - \frac{3}{2} \left(\frac{g}{m^{4-\Delta}}\right)^2 m^{4-\Delta} (4\pi)^{-\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)$$

QUI SI VEDA CHE L'ESPANSIONE NON E' IN g , MA IN $\frac{g}{m^{4-\Delta}}$. SE
CONTINUASSI ANDANDO AL 3° ORDINE (2 LOOP), THOVEREI

$$\left(\frac{g}{m^{4-\Delta}}\right)^3 = \tilde{g}^3$$

ABBIAMO TROVATO

$$\Gamma_4(0,0,0,0) = \tilde{g} \cdot (m^2)^{2 - \frac{\Delta}{2}} \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{2} \tilde{g} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} \right\}$$

QUESTO E' IL RISULTATO DEL CALCOLO AD 1 LOOP, CHE CI PERMETTE
DI RICAVARE λ .

I PROSSIMI STEP SONO QUINTO:

- 1) A COME FUNZIONE DI \tilde{g}
- 2) ESPRIMERLO COME $\bar{A}(x)$
- 3) λ_c t.c. $\bar{\beta}(\lambda_c) = 0$

*NBTA: RICORDIAMO ANCHE CHE PIÙ IN GENERALE

$$\tilde{G}(p) = (p^2 + m^2)^{-1}$$

$$m^2 \equiv \mu - \Sigma(0)$$

MA CHE LA SELF-ENERGY (SOMMA DEGLI 1PI AMPUTATI) VALE

$$\Sigma(p) = \Sigma_{\text{loop}} + O(g^2)$$

QUINDI NEL SEGUITO, VISTO CHE IL CALCOLO È A 1 LOOP, SCARINIAMO Σ E BASTA.

RICORDIAMO* CHE LA $G(p)$ RINORMALIZZATA È

$$\tilde{G}(p) = (p^2 + \mu - \Sigma)^{-1}$$

Dove al primo ordine

$$\Sigma \equiv -\frac{1}{2} g \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2}$$

NOTA: PERCHÉ IN Σ ABBIAMO SOSTITUITO μ CON m^2 ? COME DISCUSSO IN BINNEY 9.1, L'EFFETTO È QUELLO DI INCLUDERE I CONTRIBUTI DEI DIAGRAMMI p -INDEPENDENT (LE BOLLE, COME IN H-F) ($__\leftarrow$ inserire volgarità a piacere).

...O...

(L'AUTOENERGIA A UNA BOLLA NON DIPENDE DAL MOMENTO), CON

$$m^2 = \mu - \Sigma = \mu + \frac{1}{2} g \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + m^2}$$

$$= \mu + \frac{1}{2} \frac{g}{(4\pi)^{D/2}} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$$

$$\mu = m^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{(4\pi)^{D/2}} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$$

PERCIO', (USANDO $m\Gamma(m) = \Gamma(m+1)$),

$$\frac{d\mu}{dm^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{g}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-2} \left(\frac{D}{2} - 1\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{g}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(1 - \frac{D}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} \tilde{g}$$

E

$$\ln\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} \tilde{g}$$

NOTA: NON È BANALE QUESTO PASSAGGIO. IN QUESTA REGIONE \tilde{g} È PICCOLO E IN EFFETTI POSSIAMO SVILUPPARE IL \log .

$$A(\tilde{g}) = m^2 \frac{d}{dm^2} \ln \frac{d\mu}{dm^2} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} \tilde{g} \left(m^2 \frac{d}{dm^2} (m^2)^{-\frac{D-2}{2}} \right)$$

$$A(\tilde{g}) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}} g^{(m+2)} \frac{-\frac{(\Delta-4)}{2}}{2} \left(\frac{4-\Delta}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}} \tilde{g} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(3-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}} \tilde{g}$$
(I)

Dove si è usata

$$m\Gamma(m) = \Gamma(m+1)$$

All' $O(\tilde{g})$, posso sostituire $\tilde{g} \leftrightarrow \lambda$ e scrivere la (I) come

$$\bar{A}(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(3-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}} \lambda$$

Nota: volendo lo si vede dalla (III).
Poiché il calcolo è a 1 loop, non ha senso che ci metta anche il termine in λ^2 .

(II)

* NON A RESTA CHE CERCARE GLI ZERI DI

$$\beta(\tilde{g}) = \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \lambda(\tilde{g})$$

NOI ABBIAMO TROVATO

$$\lambda = m^{\Delta-4} \Gamma_4^4(0,0,0,0) = \tilde{g} \left(1 - \frac{3}{2} \tilde{g} \frac{\Gamma\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}} \right)$$
(III)

QUINDI

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{g}) &= \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \left(\tilde{g} - \frac{3}{2} \tilde{g}^2 \frac{\Gamma\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}} + O(\tilde{g}^3) \right) \\ &= \tilde{g} - 3 \tilde{g}^2 \frac{\Gamma\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}} + O(\tilde{g}^3) \end{aligned}$$

POSSIAMO CALCOLARE $\bar{\beta}(\lambda)$ USANDO

$$\lambda = \tilde{g} - \frac{3}{2} \tilde{g}^2 \frac{\Gamma\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}} \Rightarrow \tilde{g} = \lambda + \frac{3}{2} \lambda^2 \frac{\Gamma\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}}$$

QUINDI

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(\lambda) &= \tilde{g}(\lambda) - 3 \underbrace{\frac{\Gamma\left(2-\frac{\Delta}{2}\right)}{(4\pi)^{\Delta/2}}}_{=\alpha} (\tilde{g}(\lambda))^2 \\ &\approx \left(\lambda + \frac{3}{2} \lambda^2 \alpha \right) - 3 \alpha \left(\lambda + \frac{3}{2} \lambda^2 \alpha \right)^2 + O(\lambda^3) \\ &\approx \lambda \left(1 - \frac{3}{2} \alpha \lambda \right) + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

RICHIESTA $\bar{p}(\lambda_c) = 0$ IMPLICA

NOTA: CHIARAMENTE L'ALTRA POSSIBILITÀ È $\lambda=0$.

$$\lambda_c = \frac{2}{3} \frac{(4\pi)^{\Delta/2}}{\Gamma(2-\frac{\Delta}{2})} = \frac{1}{3} \frac{(4\pi)^{\Delta/2} (4-\Delta)}{\Gamma(3-\frac{\Delta}{2})}$$

DOVE SI È USATO

$$\Gamma(2-\frac{\Delta}{2}) = \frac{\Gamma(3-\frac{\Delta}{2})}{2-\frac{\Delta}{2}}$$

DALLA (IV) SI Vede CHIARAMENTE CHE

$$\lambda_c|_{\Delta=4} = 0$$

NOTA: IN $\Delta=4$,
PERCIO' $\lambda=0$ È
L'UNICO PUNTO FISSO.

USANDO ORA IL FATTO CHE

$$\bar{A}(\lambda_c) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(3-\frac{\Delta}{2})}{(4\pi)^{\Delta/2}} \lambda_c = -\frac{4-\Delta}{6} = \frac{1}{2\Delta} - 1$$

POSSIAMO INFINE RICAVARE IL COEFFICIENTE (PER $\Delta \leq 4$)

$$2\bar{J}_{1\text{loop}} = \frac{1}{1 - \frac{4-\Delta}{6}} \Rightarrow \bar{J}_{1\text{loop}} = \frac{3}{\Delta+2}$$

PER $\Delta \geq 4$ HO IL RISULTATO DEL M-F PERCHÉ SPARISCONO LE CORTELLAZIONI,

$$\bar{J} = \bar{J}_F = \frac{1}{2}$$

IN $\Delta=3$ SI TROVA $\bar{J}_{1\text{loop}} = 0.6$, DA CONFRONTARSI CON $\bar{J}_{\text{exp}} \sim 0.63$.

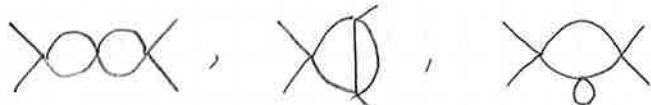
IN $\Delta=2$, $\bar{J}_{1\text{loop}} = 0.75$ MENTRE $\bar{J}_{\text{vero}} = 1$ (DALLA SOLUZIONE ESATTA DI ONSAGER).

IL CALCOLO A 2 LOOP

I NUOVI DIAGRAMMI 1PI SONO



PER LA FUNZIONE A 2 PUNTI, MENTRE PER QUELLA A 4 PUNTI HO



IN GENERE UNO FA IL CALCOLO AD m COMPONENTI.

PER $m \rightarrow \infty$, IL CONTO A 1 LOOP DIVENTA ESATTO (NON SOLO IN $D=4$, DOVE E' ESATTO PER QUALSIASI m).

NEL 1968 IL MEGLIO ERA UN CALCOLO A 6 LOOP (~ 1000 DIAGRAMMI INDIPENDENTI). SI TROVANO

$$\gamma_{D=3}^{(6 \text{ loop})} = .630(15)$$

$$\eta_{D=3}^{(6 \text{ loop})} = .031(4)$$

IL PROBLEMA DEL CALCOLO DEGLI ESPOVENTI CHITTA IN $D=3$ OGGI SI CONSIDERA RISOLTO (RG, MC, SVILUPPI AD ALTE T). IN $D=2$ I RISULTATI SONO MENO PRECISI.

GLOSSARIO (MARIKARI \leftrightarrow PARISI)

$$A(\tilde{g}) = m^2 \frac{d}{dm^2} \ln \left(\frac{d\mu}{dm^2} \right) \xrightarrow{z_2}$$

$$C_2(\lambda) \equiv \tilde{A}(\lambda)$$

$$b(\lambda) \equiv m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \Big|_{\tilde{g} \text{ fisso}} \lambda = \frac{1}{2} (D-4) u \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{m^2 \text{ fisso}} \lambda , \quad u = \tilde{g}$$

Focus: GLOSSARIO (MARIKARI/PARISI \leftrightarrow RESTO DEL MONDO) (IZYKSON-DRAFFE)

QUANTITA'	M/P	R.D.M.	NOTE
COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO (BARE)	\tilde{g}	g_0	DIMENSIONALE
COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA	λ	g	ADIMENSIONALE
MASSA NUDA (BARE MASS)	$\mu^{1/2}$	m_0	
MASSA RINORMALIZZATA (FISICA)	m	m	$m \equiv g^{-1}$

NOTA CHE NOI ABBIAMO USATO $\tilde{g} = \frac{g}{m^{4-D}}$ COME VARIABILE D'ALLOGGIO, MA E' SUPERFLUO.

NEL CASO $D=3$, DOVE $\tilde{g} = \frac{g}{m}$, LA DEFINIZIONE DA NOI ADOTTATA DELLA β -FUNCTION E'

$$\beta = \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \lambda = \tilde{g} \frac{d\lambda}{dm} \frac{dm}{d\tilde{g}} = \frac{m}{(D-4)} \frac{d\lambda}{dm} \stackrel{D=3}{=} -m \frac{d\lambda}{dm} \quad \left(m \frac{d\lambda}{dm} = 2m^2 \frac{d\lambda}{dm^2} \right)$$

DA QUI L'ANALOGIA (A MENO DI UN SEGNO) CON $\beta = m \frac{d\lambda}{dm} \Big|_{\tilde{g}_0, \lambda}$ CHE SI TROVA NEI LIBRI DI TEORIA DEI CAMPI.

VICINO A 4 DIMENSIONI

ABBIAMO VISTO CHE IL PUNTO FISSO GAUSSIANO È STABILE* PER $D \geq 4$. NON APPENA $D < 4$, ESSO SI BIFORCA E

$$\lambda_c = \frac{1}{3} \frac{(4\pi)^{D/2}}{\Gamma(3 - \frac{D}{2})} (4 - D)$$

*NOTA: DELLA SUA STABILITÀ DISCUTEREMO PIÙ AVANTI, ANCORA NON SI È VISTO.

È UN PUNTO FISSO STABILE 1R. IL VALORE DELLA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO È NORMALIZZATA, PER $m^2 \rightarrow 0$, VALE CIOE'

$$\lambda_c \sim (4 - D) \quad D < 4$$

$$\lambda_c = 0 \quad D \geq 4$$

VOGLIAMO COSTRUIRE UN'ESPANSIONE IN

$$\varepsilon = D_c^0 - D = 4 - D$$

PER GLI ESPONENTI CRITICI.

MA CHE COS'E' UNA DIMENSIONE NON INTERA? POSSO PENSARE A UNA ESTENSIONE NATURALE DEGLI SPAZI A DIMENSIONE INTERA. I COEFFICIENTI DELL'ESPANSIONE A ALTE T SONO POLINOMI IN D, QUINDI È DIRETTO VALUTARLI PER QUALSIASI D CHE CI INTERESSI.

IN TERMINI DI DIAGRAMMI, UN DIAGRAMMA A λ LOOP HA LA FORMA

$$\int \left(\prod_{i \text{ SULLE LINEE INTERNE}} d\alpha_i \right) \frac{1}{(4\pi D(\alpha))^{D/2}} \exp \left\{ - \frac{N(\alpha, p)}{D(\alpha)} - m^2 \sum_i \alpha_i \right\}$$

DOVE $D(\alpha)$ È IL DENOMINATORE E GLI α_i SONO PARAMETRI DI FEYNMAN. ALLORA:

i) 1 α_i PER OGNI LINEA INTERNA

NOTA: CHE È $N(\alpha, p)$? NOI ABBIAMO ANALIZZATO SOLO CASI PIÙ SEMPLICI, MA GIÀ SE AVESSESI $[(q-q_1)^2 + m^2]^{-1} \rightarrow q^2 + q^2 - 2q \cdot q_1$, PER FARLA UN'IDEA, GUARDA L'APPENDICE AL CAP. 5 DEL PARISI.

ii) $D(\alpha)$ È UN POLINOMIO DI $O(\alpha)$

iii) $N(\alpha, p)$ È UN POLINOMIO DI $O(\alpha^{n+1})$ CHE DIPENDE LINEARMENTE DA

$$P_{ik} = p_i \cdot p_k \text{ (INVARIANTE)}$$

DOVE p_1, \dots, p_n SONO I MOMENTI ESTERNI DEL DIAGRAMMA.

NOTA: ANCHE IN QUESTO CASO, QUINDI, HO OTTENUTO UNA FUNZIONE DI D.

C'E' UNA SOLA FUNZIONE REGOLARE CHE INTERPOLA TRA LE D INTERE.

TEOREMA DI CARLSON (TITCHMARCH, OXFORD 1939)

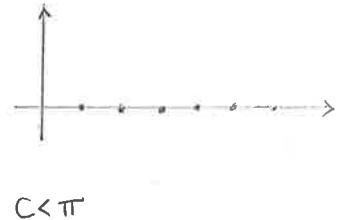
SE DUE FUNZIONI ANALITICHE $f(D)$ E $g(D)$ SONO TALI CHE, $\forall D$ INTERO,

$$f(D) = g(D)$$

E SE ENTRAMBE SONO LIMITATE DA

$$|f(D)| < e^{c|D|}$$

$$|g(D)| < e^{c|D|}$$



NELLA PARTE DESTRA DEL PIANO COMPLESSO D , ALLORA

$$f(D) = g(D) \quad \forall D.$$

* CONSIDERIAMO DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \dots \varphi(z) \rangle$$

ESSE SONO FUNZIONI DI INVARIANTI DEL TIPO $x \cdot y$.

NOTA: PRESENTIAMO UN ALTRO MODO DI VEDERE LE DIMENSIONI D NON INTERE. SI PARLA DI INVARIANTI ROTAZIONALI.

STUDIAMO DELLE IDENTITA' CHE LEGANO FOLC DI ORDINE DIVERSO:

SONO Dette "EQUAZIONI DEL MOTO".

L'INTEGRALE DI UNA DERIVATA TOTALE È ZERO A MENO DI UN TERMINE DI BORDO CHE POSSO METTERE A ZERO. ALLORA

$$0 = \int d[\varphi] \frac{\delta}{\delta \varphi(\gamma)} \left[(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N)) e^{-H[\varphi]} \right]$$

$$= \int d[\varphi] \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\prod_{k \neq i} \varphi(x_k) \right) \delta(\gamma - x_i) - \left(\prod_{k=1}^N \varphi(x_k) \right) \frac{\delta H}{\delta \varphi(\gamma)} \right\} e^{-H[\varphi]}$$

cioè

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^N \left[\prod_{k \neq i} \varphi(x_k) \right] \delta(\gamma - x_i) - \left(\prod_{k=1}^N \varphi(x_k) \right) \frac{\delta H}{\delta \varphi(\gamma)} \right\rangle \quad (I)$$

CHE È UN SET DI INFINITE EQUAZIONI.

PER ESEMPIO, NEL CASO DI L-G (MASSA E CINETICO $\sim \varphi^2$, INTERAZIONE $\sim \varphi^4$), LA (I) CONNETTE LE FOLC A $(N-1), (N+1)$ E $(N+3)$ PUNTI.

NOTA: $\frac{\delta H[\varphi]}{\delta \varphi(\gamma)} = \frac{\delta}{\delta \varphi(\gamma)} \int d^3x \left[\frac{m^2}{2} \varphi^2(x) + \frac{g}{4!} \varphi^4(x) + \frac{1}{2} (\partial_\gamma \varphi)(\partial^\gamma \varphi) \right] = m^2 \varphi(\gamma) + \frac{g}{3!} \varphi^3(\gamma) - 2 \partial^\gamma \varphi(\gamma)$, VEDI OLTRA

SE $N=1$,

$$(-\Delta_y + m^2) \langle \varphi(y) \varphi(x) \rangle + \frac{g}{3!} \langle \varphi^3(y) \varphi(x) \rangle = \delta^{(\square)}(x-y)$$

SE $N=3$,

$$(-\Delta_y + m^2) \langle \varphi(y) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \rangle + \frac{g}{3!} \langle \varphi^3(y) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \rangle = \delta^{(\square)}(x_1-y) \langle \varphi(x_2) \varphi(x_3) \rangle + (*)$$

DOVE $(*)$ CONTIENE LE ALTRE 2 PERMUTAZIONI.

SI SONO USATE

$$\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \delta^{(\square)}(x-y)$$

$$(\partial_\mu \varphi)^2 \rightarrow \varphi \Delta \varphi$$

NOTA: L'IDEA È CHE UNO COSÌ POTREBBE ESTENDERE LA DEFINIZIONE DELLE FDC IN DIMENSIONE D NON INTERA CONSIDERANDO FUNZIONI DEGLI INFANZANTI (TIPO $x \cdot y$), SENZA RIFERIMENTO ALLO SPAZIO DA CUI PROVENGONO (PARISI).

CHIARIFICO IL CONTO DELL'ULTIMA NOTA:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi(y)} \int d^D x \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x)) (\partial^\mu \varphi(x)) &= \int d^D x (\partial_\mu \varphi(x)) \left(\partial^\mu \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} \right) \\ &= - \int d^D x (\partial_\mu \varphi(x)) \cdot \delta^{(\square)}(x-y) = -\Delta \varphi(y) \end{aligned}$$

PERI PARTI

È PLANSIBILE CHE QUESTE EQUAZIONI DEL MOTO AMMETTANO UNA SOLUZIONE UNICA.

NOTA: PUOI ANCHE RICORDARE CHE IN QFT LE EQUAZIONI DEL MOTO PER UNA TEORIA $\frac{g}{6!} \varphi^6$ SONO DATE DA $\delta S = 0$ E SONO $(\square + m^2) \varphi + \frac{g}{3!} \varphi^3 = 0$.

RINORMALIZZABILITÀ

HA SENSO STUDIARE UNA TEORIA PERTURBATIVAMENTE?

CONCENTRIAMOCI SULLE DIVERGENZE UV (PICCOLE DISTANZE).

IN $D=4$, L'ESPANSIONE PERTURBATIVA DELLE FDC RINORMALIZZATE IN TERMINI DI λ (COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA) NON PRESENTA* DIVERGENZE UV. POSTO

$$m^2 > 0$$

$$\frac{1}{m^2 + p^2}$$

(MASSA RINORMALIZZATA)

* NOTA: VEDI AD ESEMPIO BINNEY §.3.

NON DIVERGE PER GRANDI p (PONGO $m^2 > 0$ PERCHÉ ORA IGNORO DIVERGENZE IR).

FACCIAMO LE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

NOTA: SONO IL CONTENUTO DEL TEOREMA BHP, CHE STIAMO ENUNCIANDO.

- 1) SE UN DIAGRAMMA NON CONTIENE SOTTODIAGRAMMI DIVERGENTI E NON DIVERGE LUI STESSO, ALLORA PER $\lambda \rightarrow \infty$, $m^2 \neq 0$, IL DIAGRAMMA (d) È FINITO.
- 2) SE INVECE d NON CONTIENE SOTTODIAGRAMMI DIVERGENTI MA DIVERGE

LUI STESSO*, ANOHA O DIVERGE NELLO SPAZIO DI FOURIER MA E' FINITO NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI.

DEFINIAMO IL VALORE RINORMALIZZATO DI UN DIAGRAMMA

$$V_R(p) = V(p) - \sum_{m=0}^{\#(D)} \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^m V(p) \cdot p^m$$

DOVE

D : GRADO DI DIVERGENZA DEL DIAGRAMMA

V(p) : NUO (BARE), CHE DIVERGE PER $\Lambda \rightarrow \infty$

$\#(D)$: L'INTERO PIU' GRANDE $\leq D$

$\left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^m$: TUTTE LE DERIVATE, FINO A ORDINE m COMPLESSIVO, NEI MOMENTI ESTERNI.

3) SE UN OLTRE CONTIENE S.O. DIVERGENTI ED E' DIVERGENTE WI STESSO, DEVO RIPETERE ANCHE PER I S.O. IL PROCEDIMENTO IN (2).

E' QUESTO IL CONTENUTO DEL TEOREMA BHP (BOGOIUBOV, HEPP, PARASIUK) : IL VALORE RINORMALIZZATO DI OGNI DIAGRAMMA E' FINITO QUANDO $\Lambda \rightarrow \infty$.

AGGIUNGERE AD H DEI CONTROTERMINI POLINOMIALI IN φ E NELLE DERivate, CHE DIPENDONO DA φ E DIVERGONO PER $\Lambda \rightarrow \infty$, COSÌ CHE

$$H \rightarrow H_A$$

NOTA : $\frac{1}{2\Lambda^2} (\dots)$ E' IL CUTOFF, NON UN CONTROTERMINO.

EQUIVALE AD APPLICARE LA PROCEDURA DESCRITA SOPRA, CON CUI SI RIMUOVE LA PARTE DIVERGENTE DAI DIAGRAMMI.

LA TEORIA E' COSÌ RIDEFINITA PERTURBATIVAMENTE ; L'HAMILTONIANA POTREBBE NON ESSERE LA STESSA.

DEFINIAMO RINORMALIZZABILI LE TEORIE NELLE QUALI H_A (CHE INCLUDE I CONTROTERMINI) HA LA STESSA FORMA DELLA HAMILTONIANA H DI PARTENZA (QUELLA NUDA).

HO UN PROBLEMA SE AD OGNI ORDINE PERTURBATIVO GENERO NUOVI CONTROTERMINI (E NUOVI PARAMETRI DA FISSARE).

PER NOI, AD ESEMPIO,

$$\mu\gamma^2 + g\gamma^4 + (\partial_\mu\gamma)^2 \rightarrow m^2\gamma^2 + g\gamma^4 + c(\partial_\mu\gamma)^2$$

SE ANCHE SALTAFFE FUORI UN NUOVO TERMINE γ^6 POCO MALE (NUOLO DIARE CHE HO SBAGLIATO IL PUNTO DI PARTENZA), MA POI SI DEVE FERMARE.

SI E' VISTO CHE IL GRADO DI DIVERGENZA DI UN DIAGRAMMA E'

$$D = (D-4)L + 4 - E$$

$L = \#$ LOOP, $E = \#$ LINEE ESTERNE

E CHE IN $D > 4$ LG NON E' RINORMALIZZABILE: IN $D > 4$, SE HO ABBASTANZA LOOP IN EFFETTI QUALESiasi DIAGRAMMA DIVERGE.

SOLO IL CASO $g=0$ E' BEN DEFINITO PER $D > 4$ (IL CAMPO MEDIO E' ESATTO).

*NOTA: NON DIPENDE DA L , QUINDI DIPENDE DA TUTTI GLI ORDINI IN g SIA L'AUTOENERGIA CHE IL VERTICE A 4 PUNTI.

IN $D=4$ LA TEORIA E' RINORMALIZZABILE: GLI UNICI DIAGRAMMI DIVERGENTI SONO L'AUTOENERGIA E IL VERTICE A 4 PUNTI. IL GRADO DI DIVERGENZA NON DIPENDE* DA g E IL CONTROTERMINE IN H_R CONTIENE TUTTE LE POTENZE DI g (MA HA SEMPRE LA STESSA FORMA: E' IL COEFFICIENTE A DIPENDERE DA g).

IN $D < 4$ LA TEORIA SI DICE SUPER-RINORMALIZZABILE: $D(g)$ E' UNA FUNZIONE DECRESCENTE DI g . SONO UN NUMERO FINITO DI DIAGRAMMI E' DIVERGENTE. I CONTROTERMINI NECESSARI SONO POLINOMI IN g DI GRADO $\leq 2/(4-D)$.

IN QUESTO CASO IL CONTROLLO MATEMATICO DELLA TEORIA E' PIU' SEMPLICE; VI SONO RISULTATI RIGOROSI SUL COMPORTAMENTO DELLE SERIE IN g (AD ESEMPIO LA RIASSOMMABILITA' DI BOREL).

E-EXPANSION

$$E = D_c^v - D = 4 - D$$

DEFINIAMO

$$b(\lambda) = \frac{D-4}{2} \bar{p}(\lambda)$$

NOTA: IN UN FOGLIO QUALCONE PAGINA FA SPIEGANO CHE IN GENERE SI DEFINISCE LA \bar{p} FUNCTION COME

$$\hat{p}(n) = m \frac{\partial^n}{\partial m^2} \Big|_g = 2m^2 \frac{\partial^n}{\partial m^2} \Big|_g$$

PARISI DEFINISCE

$$b(n) = m^2 \frac{\partial^n}{\partial m^2} = \frac{D-4}{2} \frac{\partial^n}{\partial g^n} = \frac{D-4}{2} \bar{p}(n)$$

NEL CASO $D=3$ PARISI $b(n) = -\frac{1}{2} \bar{p}(n)$, (II)
QUINDI $b(n)$ NON ME LA STO RIDEFINENDO AD HOC.

AUORA *

$$2b(\lambda, \varepsilon) = -\varepsilon \lambda + \tilde{b}(\lambda, \varepsilon)$$

$$\tilde{b}(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^k b_k(\varepsilon) \quad (\text{III})$$

DONDE I COEFFICIENTI $b_k(\varepsilon)$ HANNO UN LIMITE FINITO PER $\varepsilon \rightarrow 0$.

NELLA TEORIA CON MASSA, b E \bar{b} POSSANO ESSERE CALCOLATI A TUTTI GLI ORDINI NELLA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI IN λ .

QUANDO $m^2 \rightarrow 0$, CI SONO DIVERGENZE INFRAHOSSE ALL'ORDINE λ^{m_c} , CON

$$m_c \propto \frac{D}{\varepsilon}$$

NOTA: LA TEORIA A $m=0$ E' QUELLA AL PUNTO CRITICO.

A CAUSA DI TERMINI NON ANALITICI DELLA FORMA $\propto \lambda^{b/\varepsilon}$.

C'E' QUINDI UN ORDINE m_c NELLO SVILUPPO PERTURBATIVO PER CUI LE COSE SMETTONO DI FUNZIONARE. IN EFFETTI

$$m_c(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \infty$$

AUORA SI CALCOLA $\lambda_c(\varepsilon)$ COME SOLUZIONE DI

$$b(\lambda_c) = 0$$

SE LA DETERMINO A 'L' LOOP, L'ERRORE E' DI $O(\varepsilon^L)$.

L'ESPANSIONE E' NON CONVERGENTE, MA SI OTTIENE CHE SIA BOREL SOMMABILE.

IN $D=3$, L LOOP, $m=1$ (COMPONENTI DEI CAMPI), TRONIAMO

$$\tilde{\beta}_{D=3} = 0.628 \pm 0.002$$

ASSOLUTAMENTE COMPATIBILE CON I VALORI Sperimentali.

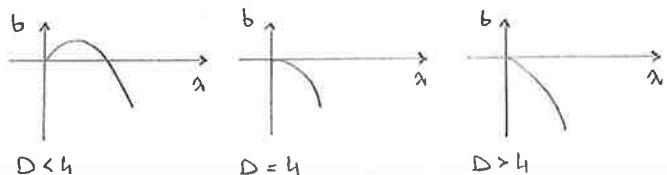
* NOTA: SI ERA RICAVATA

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda - \frac{3}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{9-D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} \lambda^2 = \lambda - \frac{3}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3-D}{2}\right)}{(4-D)} \lambda^2$$

IN EFFETTI, CON LA DEFINIZIONE (II), LA (III) DIVENTA

$$(D-4) \tilde{p}(\lambda) = -\varepsilon \lambda + \tilde{b}(\lambda, \varepsilon)$$

CHE E' UNA BANALITA', VISTO CHE $\varepsilon = 4-D$. LA COSA INTERESSANTE SONO GLI ANDAMENTI DELLA FUNZIONE $b(\lambda)$ MOSTRATI IN FIGURA (NEL CASO $b_2 > 0$; VEDI PARISI p. 175): INFATTI E' DI QUESTA (CHE GENERA ZZIA $\tilde{p}(\lambda)$ IN $D=3$) CHE ADESSO DEBONIAMO GLI ZERI. NEI GRAFICI SI MOSTRA COSA SUCCIDE APPENA SOPRA E APPENA SOTTO $D=4$: SI NOTI CHE IN $D=4$ SPARISCE IL TERMINE LINEARE IN λ .



ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA

FINORA ABBIAMO LAVORATO NEL CASO $T \rightarrow T_c^+$ (SIA IN CAMPO MEDIO, SIA ULTIMAMENTE IN TEORIA DEI CAMPI). MA SI È DETTO CHE, SE CONSIDERO $\langle \psi(0)\psi(x) \rangle_c$, IL COMPORTAMENTO NELLE DUE FASI È MOLTO SIMILE.

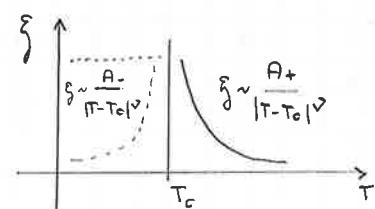
OSSERVIAMO LA loc ξ (LA DISTANZA A CUI VALE LA PENA DI FAR UNA SCOMMESSA, GUADAGNANDOCI): SO CHE

$$\langle \psi(0)\psi(x) \rangle \sim e^{-x/\xi}$$

MA, CON QUESTA DEFINIZIONE, SOTTO IL PUNTO CRITICO $\xi = \infty$ (IL SISTEMA È MAGNETIZZATO).

SE SOSTITUISCO $\langle \psi(0)\psi(x) \rangle$ CON $\langle \psi(0)\psi(x) \rangle_c$, A DESTRA DI T_c NON CAMBIA NULLA, MA A SINISTRA STO SOTTESAENDO L'EFFETTO DELLA MAGNETIZZAZIONE. OTTENGO

$$\xi \sim \frac{A \pm}{|T - T_c|^\nu}$$



NOTA: "IL LAGO TITICACA HA Onde ALTE IN MEDIA 3000 m... FINCHÉ NON SOTTRAIGO L'ALTEZZA SUL LIVELLO DEL MAR".

* METTIAMO QUINDI A $T < T_c$. SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPO MAGNETICO OMogeneo

$$h(x) = h$$

E CONSIDERIAMO

$$\beta H_{eff} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi(x))^2 + \frac{\mu}{2} \psi(x)^2 + \frac{g}{h!} \psi^h(x) - h \psi(x) \right\}$$

DETERMINIAMO UN CAMPO ψ_0 COSTANTE* t.c. H_{eff} SIA MINIMA. SCRIVEREMO

$$\psi(x) = \psi_0 + \tilde{\psi}(x)$$

$$H[\psi(x)] = H[\psi_0] + \tilde{H}[\tilde{\psi}(x)]$$

SICCOME ψ_0 È UN PUNTO DI MINIMO, $\tilde{H}[\tilde{\psi}(x)]$ NON ANNA' UN TERMINE LINEARE IN $\tilde{\psi}$. CERCO QUINDI ψ_0 t.c.

$$\mu \psi_0 + \frac{g}{6} \psi_0^3 - h = 0$$

*NOTA: POICHÉ ψ_0 È COSTANTE, DEVO MINIMIZZARE $\frac{\mu}{2} \psi_0^2 + \frac{g}{h!} \psi_0^h - h \psi_0$ SENZA IL TERMINE CINETICO. TRA L'ALTRO BASTANO LE DERIVATE ORDINARIE (NON VARIAZIONI).

SE $h=0$, $\mu>0$ THOVO $\varphi_0=0$ E SONO NEL CASO PRECEDENTE. IN GENERALE, INVECE,

$$H[\varphi(x)] = \int d^Dx \left\{ H[\varphi_0] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\varphi}(x))^2 + \frac{\tilde{\mu}}{2} \tilde{\varphi}(x)^2 + \frac{g_3}{3!} \tilde{\varphi}(x)^3 + \frac{g_4}{4!} \tilde{\varphi}(x)^4 \right\} \quad (I)$$

NELLA FASE CALDA ($\mu>0$) IL TERMINE $\tilde{\varphi}^3$ NON CI SARÀ: VUOL DIRE CHE

$$g_3 = g_3(\varphi_0) \text{ LINEARMENTE}$$

E SI ANNULLA PER $\varphi_0=0$.

SE INVECE $h \neq 0$,

$$\mu \varphi_0 + \frac{g}{6} \varphi_0^3 = h \quad \varphi_0 h > 0 \quad (II)$$

(OSSRA φ_0 SI ALLINEA AL CAMPO: LO SAPPIAMO A PRIORI).

PROVAMO LA (I):

$$H[\varphi] = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\varphi})^2 + \frac{\mu}{2} (\varphi_0 + \tilde{\varphi})^2 + \frac{g}{4!} (\varphi_0 + \tilde{\varphi})^4 - h (\varphi_0 + \tilde{\varphi}) \right] d^Dx$$

$$= \int d^Dx \left\{ \left(\frac{\mu}{2} \varphi_0^2 + \frac{g}{4!} \varphi_0^4 - h \varphi_0 \right) + \left(\mu \varphi_0 + \frac{g}{6} \varphi_0^3 - h \right) \tilde{\varphi}(x) + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{g}{6} \varphi_0^2 + \frac{g}{12} \varphi_0^2 \right) \tilde{\varphi}(x)^2 \right. \\ \left. + \frac{g}{6} \varphi_0 \tilde{\varphi}^3(x) + \frac{g}{24} \tilde{\varphi}^4(x) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\varphi})^2 \right\}$$

NOTA: SI OSSERVA CHE IL COEFFICIENTE DI $\tilde{\varphi}(x)$ È NULLO PER LA CONDIZIONE DI MINIMO SU φ_0 , COME ERA AUPLICABILE. PUOI ANCHE IMPORLO TU E SEMPLIFICARCI I CONTI.

E' SUFFICIENTE DEFINIRE

$$\begin{cases} \tilde{\mu} = \mu + \frac{1}{2} g \varphi_0^2 \\ g_3 = g \varphi_0 \\ g_4 = g \end{cases}$$

PER RIOTTENERE LA (I).

SE $g \rightarrow 0$ PER h PICCOLO, SE $\mu > 0$

$$\varphi_0 \sim \frac{h}{\mu}$$

SE $\mu < 0$,

$$\varphi_0 \sim \text{sign}(h) \cdot \sqrt{-\frac{6\mu}{g}} + O(h) \quad (III)$$

VEDIAMO PERCHÉ.

DEFINISCO ψ_1 t.c.

$$\psi_0 = \text{Sign}(h)\psi_1$$

COSÌ DA RISCRIVERE LA (II) COME

$$\mu\psi_1 + \frac{g}{6}\psi_1^3 = |h|$$

$$\mu + \frac{g}{6}\psi_1^2 = 0$$

QUINDI PER $\mu < 0$, QUANDO $g \rightarrow 0$ $\tilde{\psi}(x)$ È DISTRIBUITO GAUSSIANAMENTE.

AUORA, ALL'ORDINE DOMINANTE IN g ,

$$\langle \psi(x) \rangle = \psi_0$$

$$f(h) = -\frac{1}{\sqrt{V}} \ln Z = H[\psi_0]$$

$$(\tilde{\mu} - \Delta_x) \langle \tilde{\psi}(x) \tilde{\psi}(x') \rangle_c = \delta(x-x')$$

* PER $\mu < 0$, $h \rightarrow 0^+$

$$\psi_0 = \left[-\frac{6\mu}{g} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\mu} = \mu + \frac{1}{2} g \psi_0^2 = \mu - \frac{1}{2} g \left(\frac{6\mu}{g} \right)^{\frac{1}{2}} = -2\mu$$

$$g_3 = g\psi_0 = \sqrt{-6\mu g}$$

PER $\mu < 0$ ABBIAMO QUINDI ROTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \psi \rangle = - \lim_{h \rightarrow 0^-} \langle \psi \rangle \neq 0$$

E, COME PREANNUNCIA TEMPO FA,

$$f(h) = f(0) - |h| \left(-\frac{6\mu}{g} \right)^{\frac{1}{2}} + O(h^2)$$

QUESTO RIPRODUCE I RISULTATI DEL CAMPO MEDIO, MA ABBIAMO UNA TEORIA PER $\tilde{\psi}(x)$: POSSIAMO ANDARE OLTRE.

NOTA: DAI SU, È UNA POMODATA NÉ PIÙ E NÉ MENO. USA

$$\psi_0 = \pm \sqrt{-\frac{6\mu}{g}} + O(h)$$

E METTI IL FATTO CHE $\psi_0 h > 0$, CHE HA PERLOMENO FISICAMENTE SENSO.

NOTA:

$$\psi_1 \left(\mu + \frac{g}{6} \psi_1^2 \right) = O(h)$$

ESCLUDENDO LA SOLUZIONE BANALE $\psi_1 = 0$,

$$\mu + \frac{g}{6} \psi_1^2 = O(h)$$

(NON HA SENSO DIVIDERE PER $\psi_0 \sim \frac{h}{\mu}$, ERA UN ALTRO CASO).

NOTA: IN PRATICA ORA RIPARTO CON LA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI SU $\tilde{\psi}$. NOTA CHE

$$\langle \psi(x) \rangle = \langle \psi_0 + \tilde{\psi} \rangle_{\text{GAUSS}} = \psi_0 + \langle \tilde{\psi} \rangle_{g=0} = \psi_0$$

INOLTRE

$$\left\langle \left\{ \sum_{i=1}^N \prod_{k \neq i} \tilde{\psi}(x_k) \delta(x-x_i) - \prod_{k=1}^N \tilde{\psi}(x_k) \frac{\delta H}{\delta \tilde{\psi}(x)} \right\} \right\rangle = 0$$

SONO LE EQUAZIONI DEL MOTO.

QUI LE CALCOLIAMO AL LEADING ORDER (A $g=0$).

Poco dopo mostriamo che

$$\psi_0 = O(1/\sqrt{g})$$

$$\tilde{\mu} = O(1)$$

$$g_3 = O(\sqrt{g})$$

$$g_4 = O(g)$$

QUESTA GERARCHIA VA TENUTA A MENTE NEL CALCOLO DELLO SVILUPPO PERTURBATIVO. AD ESEMPIO IL TERMINE APPENA SUCCESSIVO NELLO SVILUPPO CONTERÀ g_3 MA NON g_4 .

INFINE SI È DETTA

$$H[\psi] = \int d^3x H[\psi(x)]$$

$$f(h) = -\frac{1}{\sqrt{V}} \ln \left\{ \int e^{-\int d^3x H[\psi_0] + O(g^0)} \right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{V}} \ln e^{-V H[\psi_0]} + O(g^0) = H[\psi_0] + O(g^0)$$

NOTA: SI STA USANDO LA (III) INSIEME A

$$f(h) = H[\psi_0] + O(g^0)$$

LA SUA H CONTIENE UN VERTICE CUBICO: AVEMMO DIAGRAMMI DI FEYNMAN CON VERTICI A 3 E 4 LINEE.

ASSUMIAMO DI AVERE UNA TEORIA REGOLARIZZATA A CORTE DISTANZE.
IN EFFETTI SYMANZIK DEMOSTRA CHE ANDARE NELLA FASE ROTTA NON AGGIUNGE NUOVE DIVERGENZE ULTRAVIOLETTE.

A UN LOOP,

$$\langle \psi(0) \rangle \sim \text{---} \circ \text{---} \bigcirc \text{---}^2$$

$$\langle \psi(0)\psi(x) \rangle \sim \text{---} \circ \text{---}_x \text{---} \circ \text{---}_x$$

NOTA: QUI SOTTO USIAMO

$$G_o(x) = \langle \tilde{\psi}(0)\tilde{\psi}(x) \rangle$$

$$\tilde{G}_o(p) = (\tilde{\mu} + p^2)^{-1} = \int d^D x e^{ipx} G_o(x)$$

INOLTRE

$$\begin{aligned} \int d^D x G_o(x) &= \int d^D x \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iqx} \tilde{G}_o(q) \\ &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \delta(q) \tilde{G}_o(q) = \frac{1}{\tilde{\mu}} \sim X \end{aligned}$$

AD ESEMPIO,

$$\begin{aligned} \langle \psi(0) \rangle &= \psi_0 - \frac{g^3}{3!} \int d^D x \langle \tilde{\psi}(0) \tilde{\psi}^3(x) \rangle_c = \psi_0 - \frac{g^3}{2} \int d^D x \langle \tilde{\psi}(0) \tilde{\psi}(x) \rangle_c \langle \tilde{\psi}^2(x) \rangle_c \\ &= \psi_0 - \frac{1}{2} g^3 \int d^D x G_o(x) G_o(0) = \psi_0 - \frac{1}{2} \frac{g^3}{\tilde{\mu}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + \tilde{\mu}} \end{aligned}$$

SIMMETRIE CONTINUE

ISING: $m=1$

$$\sigma_i = \pm 1, \quad Z_2$$

HEISENBERG: $m=3$

$$O(m)$$

IN ENTRAMBI I CASI PARLIAMO DI SIMMETRIE SU UNO SPAZIO INTERNO.

PER T ALTE NON CI SONO GRANDI DIFFERENZE NELLO SVILUPPO: I PESI SONO DIVERSI, MA HO GLI STESSI DIAGRAMMI (FASE DI SIMMETRIA REGOLARIZZATA).
PER T BASSE, INVECE, NELLA FASE DI SIMMETRIA ROTTA, CI SONO GRANDI DIFFERENZE QUANTATIVE TRA I CASI $m=1$ E $m \neq 1$.

PER $m=1$, PASSO DA UNO STATO \uparrow A \downarrow CON SALTI DISCONTINUI.

SE $m > 1$, LO STESSO PASSAGGIO E' OTTENIBILE A PICCOLI PASSI (CIASCUINO DEI QUALI RICHIESTE POCO ENERGIA): $\uparrow/\!\!\uparrow/\!\!\downarrow/\!\!\dots$

ESISTONO CONFIGURAZIONI DI SPIN LA CUI

ENERGIA E' DIVERSA DA QUELLA DEL GROUND STATE DI QUANTITA'

PICCOLE A PIACERE. SI PARLA DI ONDE DI SPIN.

RICORDIAMO CHE m È IL NUMERO DI COMPONENTI DELLO SPIN,

$$\sum_{\alpha=1}^m \psi_{\alpha}^2 = C = 1$$

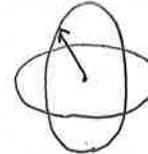
NOTA: $O(1)$ È \mathbb{Z}_2 .

OTTENGO UNA TEORIA INVARIANTE SOTTO IL GRUPPO $O(m)$.

SU DI UNA (IPER)SFERA, PER INDIVIDUARE

UNO STATO NON BASTANO

$$|+\rangle, |-\rangle$$



MA HO BISOGNO DI UN PARAMETRO CONTINUO.

ESEMPIO: $m = 2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x) = \varphi_0 \cos \theta(x) \\ \varphi_2(x) = \varphi_0 \sin \theta(x) \end{array} \right.$$

CON

$$\varphi_1(x)^2 + \varphi_2(x)^2 = \varphi_0^2 \text{ FISSO.}$$

Allora, a $h = 0$,

$$H[\theta] = H|_{\theta(x)=0} + \frac{1}{2} \varphi_0^2 \int d^D x (\partial_\mu \theta(x))^2$$

$\theta(x)$ ENTRA IN H SOLO ATTRAVERSO LE DERIVATE. CALCOLAMO

$$FT(\langle \theta(x) \theta(0) \rangle) = p^{-2} \quad \Rightarrow \quad \langle \theta(x) \theta(0) \rangle \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^{-(D-2)}$$

PER $D > 2$ (PER $D \leq 2$ SUBENTRANO DIVERGENZE INFRAROSSE). SI NOTI CHE IN $H[\theta]$ C'È SOLO IL TERMINE CINETICO E NON QUELLO DI MASSA.*

QUINDI NELLA FASE ROTTA DI UNA TEORIA INVARIANTE $O(m)$ (È VERO IN GENERALE) TROVIAMO PROBLEMI IN $D = 2$ (IL 2 VIENE DA p^{-2} , NON DA $m=2$).

*NOTA: COME LO GIUSTIFICO? CON IL POWER COUNTING. INFATTI

$$\langle \theta(x) \theta(0) \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ipx} \frac{1}{p^2} \sim p^{D-2} \quad \rightarrow \quad [x] = [p]^{-1}, \quad \langle \theta(x) \theta(0) \rangle \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{D-2}.$$

NOTA: IN PARTICOLARE, LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA PUÒ PUNTARE OVUNQUE SULL'IPERSFERA (DIPENDE DAL MODO - I.E., DALLA DIREZIONE - IN CUI HO RAGGIUNTO $h \rightarrow 0$).

OSSERVA CHE D È LA DIMENSIONE DEL SISTEMA E m QUELLA DELLO SPAZIO IN CUI SONO IMMERSI GLI SPIN. AD ESEMPIO

$$m=2, D=1 \rightarrow$$



*NOTA: IL TEOREMA DI GOLDSTONE AFFERMA INFATTI CHE LA ROTTAJA DI SIMMETRIA DEL VUOTO DI UNA TEORIA IMPLICA L'ASSENZA DI MASS GAP, CIOÈ LA PRESENZA DI STATI A MASSA NULLA (AL LIMITE LEGATI)

NOTA: IN EFFETTI TUTTI GLI ALTRI PEZZI DI H CONTENGONO $|\varphi|^2$, CHE NON DEPENDE DA $\theta(x)$. MANCA PERCIA' IL TERMINE DI MASSA, IL CHE CI DICE CHE IL PROPAGATORE $\tilde{G}(p) = p^{-2}$.

TEOREMA DI MERMIN E WAGNER

$\exists D_c^L$ t.c. $\forall H$ SHORT RANGE, CON $T > 0$

NON E' POSSIBILE CHE LA SIMMETRIA SI ROMPA SPONTANEALEMENTE.

$D_c^L = 1$ PER UNA SIMMETRIA DISCRETA,

$D_c^L = 2$ PER UNA SIMMETRIA CONTINUA.

(NON LO DIMOSTEREMO).

* NOTA: PUOI ANCHE PENSARLO COME IL PREZZO DA PAGARE PER TAGLIARE IN DUE UN DOMINIO DI TAGLIA h , FISSANDO UN SPIN LUNGO LA LINEA SECANTE.

IN ISING ($D=1$), NON POSSO AVERE UNA t_{off} PERCHÉ IL BORDO NON CRESCE AL CRESCERE DEL DOMINIO (E IL CONTRIBUTO ENERGETICO DI UN DOMINIO VIENE SOLO DAL BORDO, DOVE HO SPIN ANTI PARALLELI*: $E \sim O(R^{D-1})$). SOLO SE HO DOMINI STABILI (i.e., CHE PAGO PER ROMPERE) CI PUO' ESSERE RSS.

I BOSONI DI GOLDSTONE

ABBIAMO VISTO CHE LA ROTURA SPONTANEA DI UNA SIMMETRIA CONTINUA E' MOLTO DIVERSA DA QUELLA DI UNA SIMMETRIA DISCRETA.

PRESUMIAMO UN SISTEMA CON INVARIANZA $O(m)$,

$O(m)$, $m > 1$

$T < T_c$

$h_\alpha(x) = h_\alpha$

$\alpha = 1, \dots, m$

GRAZIE ALL' INVARIANZA $O(m)$, SO CHE f DIPIENDE DA h_α SOLTANTO ATTRAVERSO

$$|h| = \left(\sum_{\alpha=1}^m h_\alpha^2 \right)^{1/2}$$

PER LE SUSCETTIVITA', AVREMO DELLE FUNZIONI LONGITUDINALI χ_L PARALLELE AL CAMPO (IN UNA DELLE m DIMENSIONI) E ALTRE, χ_T , TRASVERSALI AL CAMPO (NELLO SPAZIO INTERNO, STANNO NEL PIANO ORTOGONALE DI DIMENSIONE $(m-1)$). ALLORA

$$f(h) = -|h|m - \frac{1}{2} \chi_L(h)|h|^2$$

$$\chi = \chi_L + \chi_T$$

$$\text{NOTA: } m = -\frac{\partial f}{\partial h}, \quad \chi = \frac{\partial m}{\partial h}.$$

Dove m è il modulo della magnetizzazione spontanea.

SCEGLIAMO, PER MOSTRARLO,

$$h_m = h$$

$$h_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m-1$$

$$h \rightarrow 0^+$$

Allora avremo semplicemente

$$\begin{cases} \langle \psi_m \rangle = m \\ \langle \psi_\alpha \rangle = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

CALCOLIAMO INVECE

$$\chi_{ab} = - \frac{\partial^2 f}{\partial h_a \partial h_b} = - \frac{\partial}{\partial h_a} \left(\frac{\partial h_b}{\partial h_b} \cdot \frac{\partial f}{\partial h_b} \right)$$

$$\frac{\partial h_b}{\partial h_b} = \frac{1}{2h_b} \cdot 2h_b = \frac{h_b}{|h|}$$

$$\chi_{ab} = - \frac{\partial}{\partial h_a} \left(\frac{h_b}{|h|} \right) \frac{\partial f}{\partial h_b} - \frac{h_b}{|h|} \frac{\partial}{\partial h_a} \left(\frac{\partial f}{\partial h_b} \right) = A + B$$

$$A = - \delta_{ab} \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h_b} + \frac{h_b}{|h|^2} \frac{\partial h_b}{\partial h_a} \frac{\partial f}{\partial h_b} = - \left(\delta_{ab} \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h_b} - \frac{h_a h_b}{|h|^3} \frac{\partial f}{\partial h_b} \right)$$

$$= - \left(\delta_{ab} - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \right) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h_b}$$

$$B = - \frac{h_b}{|h|} \frac{\partial h_b}{\partial h_a} \frac{\partial^2 f}{\partial h_b^2} = - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2}$$

$$\chi_{ab} = - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} - \left(\delta_{ab} - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \right) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h_b}$$

NOTA: ricorda che

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha \rangle &= - \frac{\partial}{\partial h_\alpha} F = - \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial h_\alpha} \int e^{-\beta H_0 - \int h_\alpha \psi^\alpha dx} dy \\ &= \frac{1}{Z} \int \psi_\alpha e^{-\beta H_0} dy \end{aligned}$$

E che la magnetizzazione spontanea è

$$m = \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \psi_m \rangle = \frac{1}{Z} \int \psi_m e^{-\beta H_0} dy$$

NOTA: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \hat{x}_i$, perché $\nabla r = \hat{r}$.

Grazie alla scelta dei campi h_α fatta sopra,

$$\chi_{ab} = - \delta_{am} \delta_{ab} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} - \left(\delta_{ab} - \delta_{am} \delta_{ab} \right) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h_b}$$

$$= \underbrace{\left(- \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \delta_{am} - (1 - \delta_{am}) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h_b} \right)}_{\sim \chi_L} \underbrace{\delta_{ab}}_{(\alpha=m)} + \underbrace{\left(\frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h_b} \right)}_{\sim \chi_T} \delta_{ab} \quad (\alpha=1, \dots, m-1)$$

SI E' COSÌ TROVATA, PER $T < T_c$,

$$\chi_{ab} = \left[\chi_L(h) \delta_{ab} + \chi_T(h) (1 - \delta_{ab}) \right] \delta_{ab} \quad (I)$$

CON

$$\begin{cases} \chi_L(h) = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \\ \chi_T(h) = -\frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial |h|} = -\frac{m}{|h|} \end{cases}$$

*Nota: ricorda che si era supposto $h \rightarrow 0^+$.

*Nota: se $m \neq 0$,

$$\chi_T = \chi_{aa}, \quad a < m$$

NEL LIMITE $|h| \rightarrow 0$, LE $(m-1)$ SUSCETTIVITÀ TRASVERSE χ_T DIVERGONO.

HO DELLE DIREZIONI DEL SISTEMA IN CUI NON PAGO UN PREZZO PER MUOVERMI. QUINDI, A CAUSA DELL' INVARIANZA $O(m)$,

$$\chi_T \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} \infty$$

Nota: ricorda che $\chi = \frac{\partial m}{\partial h}$, cioè quanto varia m in risposta ad h . Se applico un piccolo h in direzione trasversa a m , m varia molto (in questa dir.).

* SCRIVO IN GENERALE UN' HAMILTONIANA CON SIMMETRIA $O(m)$ COME

$$H[\varphi] = \int \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^m (\partial_j \varphi_\alpha)^2 \right) + \frac{\mu}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha^2 \right) + \frac{\partial}{h!} \left(\sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha^2 \right)^2 - h \varphi_m \right]$$

PER $\mu < 0$, $h \rightarrow 0^+$, DECOMPOGO (COME LA VOLTA SCORSA)

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha^{(0)} + \tilde{\varphi}_\alpha(x)$$

$$\varphi_\alpha^{(0)} = 0$$

$$\alpha = 1, \dots, m-1$$

$$\varphi_m^{(0)} = \sqrt{-\frac{6\mu}{g}} + O(h) \equiv \psi^{(0)}$$

$$\mu \varphi_0 + \frac{\partial}{3!} \varphi_0^3 = h$$

Nota: è la condizione di STAZIONARITÀ su $H[\varphi_0]$. (II)

$$H[\varphi] = H[\varphi_0] + \tilde{H}[\tilde{\varphi}(x)]$$

CON

$$\tilde{H}[\tilde{\varphi}] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^m (\partial_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha(x))^2 \right] + \frac{\mu_T}{2} \tilde{\varphi}_m(x)^2 + \frac{\partial^3}{3!} \tilde{\varphi}_m(x)^3 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^3}{3!} \tilde{\varphi}_m(x) \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{m-1} \tilde{\varphi}_\alpha^2 \right) + \frac{\partial^4}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^m \tilde{\varphi}_\alpha(x)^2 \right)^2 + \frac{\mu_L}{2} \sum_{\alpha=1}^{m-1} \tilde{\varphi}_\alpha(x)^2 \right\}$$

Dove

$$\mu_L = \mu + \frac{1}{2} g \varphi^{(0)2} = 3 \frac{h}{\varphi^{(0)}} - 2\mu$$

NOTA: DALLA (II),
 $\mu + \frac{3}{6} \varphi_0^2 = \frac{h}{\varphi_0} \rightarrow \varphi_0^2 = \frac{6}{g} \left(\frac{h}{\varphi_0} - \mu \right)$

$$\mu_T = \mu + \frac{1}{3!} g \varphi^{(0)2} = \frac{h}{\varphi^{(0)}}$$

$$g_3 = g \varphi_0, \quad g_4 = g$$

NELLO SPAZIO DEI MOMENTI, LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE HANNO LA FORMA

NOTA: SE LA CALCOLI IN $P=0$ OTTIENI LA (I).

$$\tilde{G}_{ab}(P) = \delta_{ab} [G_L(P)\delta_{avm} + G_T(P)(1-\delta_{avm})]$$

Dove

$$\begin{cases} G_L(P) = \left(P^2 - 2\mu + \frac{3h}{\varphi^{(0)}} \right)^{-1} \\ G_T(P) = \left(P^2 + \frac{h}{\varphi^{(0)}} \right)^{-1} \end{cases}$$

I MODI TRASVERSI SONO A MASSA NULLA: I LORO POI SI DICONO BOSONI DI GOLDSTONE.

NELLA FASE DI SIMMETRIA ROTTA DI UNA SIMMETRIA VI SONO MODI A MASSA NULLA CHE SI PROPAGANO.

SI DEMOSTRA CHE LE DIVERGENZE IR CHE AFFLIGGONO I DIAGRAMMI PERTURBATIVI NON AUMENTANO A CAUSA DEI BOSONI DI GOLDSTONE (QUINDI LA STRUTTURA DELLA RINORMALIZZAZIONE RESTA IN PIEGI).

LEGGI DI SCALING

PARTIAMO DAL CAMPO MEDIO, DOVE HO UN COMPORTAMENTO MOLTO SEMPLICE PER $D > D_c^u$: NON CI SONO FLUTTUAZIONI.

$$D_c^u = 4 \text{ PER } \varphi \psi(x)^4$$

CHIAMANDO

$$\theta = \frac{1}{T_c} (T - T_c)$$

AVREMO PER

$\theta > 0$: LA SIMMETRIA DI H E' REAUGGATA SUGLI STATI

$\theta < 0$: LA SIMMETRIA E' ROTTA.

DAL PUNTO DI VISTA DELLA TEORIA DEI CAMPI,

$$\mu \sim \theta$$

OSSIA θ E' UNA MASSA QUADRA NUDA.

L'IPOTESI DA CUI PARTIAMO E' CHE VI SIA UNA SCALA DI LUNGHEZZE INTERESSANTE

$$\xi \gg \alpha$$

$$\xi \xrightarrow{T \rightarrow T_c^+} \infty$$

NOTA: ξ E' L'UNICA GRANDEZZA INDEPENDENTE A DISTANZE AL PUNTO CRITICO.

E LE CORRRELazioni DIVENTANO ISOTROPE VIANO A T_c .

$$G(x) = \langle \psi(0) \psi(x) \rangle$$

MISURANDO LE LUNGHEZZE IN TERMINI DI α ,

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \gamma \left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{r_1}{\alpha} \right) \quad r = |\underline{r}|$$

SE RADDOPPIO α , r_1 E r_2 NON CAMBIA NULLA (A PATTO CHE LE ANISOTROPIE NON SIANO RILEVANTI).

PARTIAMO DALL'IPOTESI CHE, PER $\alpha \rightarrow 0$, ESISTA IL LIMITE CRITICO PER r_1 E r_2 FISSATI.

PER $r_1, r_2 \gg \alpha$, AVREMO QUINDI

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \gamma \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

SARNO ALLORA

$$\frac{G(r_3)}{G(r_1)} = \frac{G(r_3)}{G(r_2)} \cdot \frac{G(r_2)}{G(r_1)} \Rightarrow \gamma\left(\frac{r_3}{r_1}\right) = \gamma\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\gamma\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

QUESTO CI DICE CHE

$$\gamma(p) \sim p^\alpha$$

QUESTA INVARIANZA DI SCALA DERIVA DALL'IPOTESI CHE SIA UNA SOLA LUNGHEZZA (ξ) A CONTROLLARE IL COMPORTAMENTO AL PUNTO CRITICO.

PER $\theta=0$, DEFINIAMO PERCIÒ

$$G(r_2) = G(r_1) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\theta-2+\eta}$$

NOTA: L'INVARIANZA DI SCALA IMPLICA UN DECADIMENTO A POTENZA. IN EFFETTI PER AVERE UNO ESPONENZIALE MI SERVE UNA SCALA.
RICORDA CHE NELLA TEORIA LIBERA
 $[\eta] = \frac{1}{2}(\theta - 2)$

DONDE η È LA DIMENSIONE ANOMALA ($\eta_{MF} = 0$).

* PRENDIAMO INVECE $\theta > 0$ PICCOLO. PER $\xi \gg a$, $r \gg a$, DISTINGUIAMO LE REGIONI IN CUI STUDIAMO $G(r)$:

- $\xi \gg r \gg a$: REGIONE CRITICA ($\theta \approx 0$, $\xi \approx \infty$), TEORIA DEI CAMPI CONTINUA.
- $r \approx \xi \gg a$: TRANSIENTE.
- $r \gg \xi \gg a$: DECADIMENTO ESPONENZIALE DI $G(r)$ (NO INVARIANZA DI SCALA).

θ È UN PARAMETRO RILEVANTE PER IL COMPORTAMENTO IR (A GRANDI DISTANZE) DELLA TEORIA: PIÙ SONO DISTANTE E PIÙ DIVENTO SENSIBILI A UNA VARIAZIONE ANCHE MINIMA DI θ DA $\theta=0$.

PONIAMO

$$G(r, \theta) = r^{-(\theta-2+\eta)} g\left(\frac{r}{\xi(\theta)}\right)$$

CON

$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim}$ REGOLARE

$g(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-x}$

NOTA: DIMOSTREREMO LA VERIDICITÀ DI QUESTA IPOTESI TRATTANDO IL GDR NELLO SPAZIO FISICO (VEDI IL FOGLIO Legge di scala per le fdc).

NOTA: OSSIA IL CUI TERMINE LEADING È UNA COSTANTE.

PER $\theta \rightarrow 0$ MI ASPETTO (DAL CAMPO MEDIO) CHE $\xi \rightarrow \infty$ A POTENZA,

$$\xi(\theta) \sim \xi_+ \theta^{-\beta}$$

PER $\theta \rightarrow 0$.

(I)

PARTIAMO QUINDI DALLA IPOTESI DI SCALING: ξ E' LA SOLA SCALA DI LUNGHEZZA RILEVANTE VICINO AL PUNTO CRITICO.

* NOTA: $Z_{\text{TOT}} = \prod_i Z_i$, QUINDI
 $F_{\text{TOT}} = \sum_i F_i = F_i \cdot (\# \text{ blocchi})$

* INTRODUCIAMO, INOLTRE, L'IPOTESI DI HYPERSCALING.

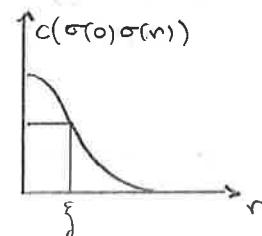
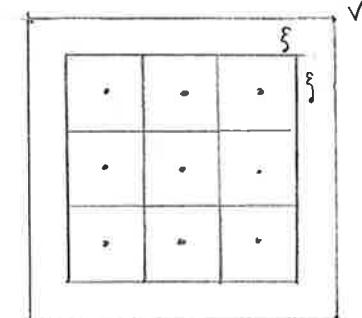
PRENDIAMO UN VOLUME V E DIVIDIAMOLO IN DEI BLOCCHETTI DI TAGLIA $\xi(\theta)^\Delta$. POSSO CONSIDERARLI COME REGIONI DI SPIN INDEPENDENTI (NON SI PARLA); LA PARTE SINGOLARE DELL' ENERGIA LIBERA SCALA ALLORA COME *

$$f_{\text{SING}}(\theta) \sim \frac{1}{\sqrt{\xi(\theta)^\Delta}} = \xi(\theta)^{-\Delta}$$

* BLOCCHETTI

USANDO LA (I),

$$f_{\text{SING}}(\theta) \sim \theta^{\Delta}$$



* NOTA: $\xi \sim$ TAGLIA DEI DOMINI, ORIENTATI, CHE ASSUMO FLUTTUANO INDEPENDENTEMENTE GLI UNI DAGLI ALTRI.

* USANDO SCALING E HYPERSCALING, IL CALORE SPECIFICO VA COME

$$C(\theta) \sim \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \sim \theta^{\Delta - 2} \sim \theta^{-\alpha}$$

* NOTA: USEREMO HYPERSCALING IN TUTTE LE RELAZIONI IN CUI FIGURA Δ .

Dove α E' PER DEFINIZIONE IL COEFFICIENTE DEL CALORE SPECIFICO, CHE VALE QUINDI

$$\alpha = 2 - \Delta \quad (II)$$

IN ISING A $\Delta = 2$, LA SOLUZIONE DI ONSAGER PREVEDE UNA SINGOLARITA' log Δ DI C_V (QUINDI $\alpha = 0$) E $\Delta = 1$, IN ACCORDO CON LA (II). ANCHE NEI MODELLI $O(m)$, $m \rightarrow \infty$ (RISOLVIBILI) L'IPOTESI DI HS FUNZIONA IN DIMENSIONE $2 < \Delta < 4$.

IN CAMPO MEDIO, L'HS NON FUNZIONA: INFATTI

$$\begin{cases} \alpha_{\text{MF}} = 0 \\ \Delta_{\text{MF}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

* NOTA: IN EFFETTI IN CAMPO MEDIO SI TRASCURANO LE FLUTTUAZIONI, MA E' PROPRIO SULLA BASE DI QUELLA CHE SI E' RICAVATA $f_{\text{SING}} \sim \theta^{\Delta}$.

POSSIAMO USARE QUESTO FATTO PER DEFINIRE D_c^u COME L'ULTIMA A CUI VALGONO ENTRAMBE LE LEGGI:

$$\alpha_{MF} = 2 - \nabla_{MF} D_c^u \Rightarrow D_c^u = 4$$

NOTA: IN EFFETTI $\chi_{\mu\nu}(x, z) = \beta \langle S_\mu(x) S_\nu(z) \rangle_c$. SE IL MEZZO È ISOTROPICO, $\chi_{\mu\nu}(x, z) = \chi_{\mu\nu}(|x-z|)$ E PERTO $\chi_{\mu\nu} = \int dx \chi_{\mu\nu}(x)$.

* CONSIDERIAMO LA SUSCETTIVITÀ

$$\chi = \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \Big|_{h=0} \propto \int d^D x G(x)$$

$$G(r) \sim r^{-(D-2+\eta)} \propto \left(\frac{r}{\xi(\theta)}\right)^{\gamma}$$

POICHÉ, PER GRANDI r , $G(r)$ DECADE ESPOENZIALMENTE, POSSO LIMITARMI A INTEGRARE NELLA REGIONE

$$\chi \sim \int_{|x| < \xi(\theta)} d^D x |x|^{-(D-2+\eta)} \sim \xi(\theta)^{2-\eta} \sim \theta^{-\gamma(2-\eta)}$$

POICHÉ PER DEFINIZIONE

$$\chi(\theta) \sim \theta^{-\gamma} \Rightarrow \underline{\gamma = \gamma(2-\eta)}$$

* STUDIARE LE TOLFI SIGNIFICA STUDIARE LE SINGOLARITÀ DI ALCUNE FUNZIONI TERMODINAMICHE (COME f). PER FARLO USO IL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE O RISCALO ξ , MA LO FACCIO SEMPRE ATTRAVERSO TRASFORMAZIONI REGOLARI: LA SINGOLARITÀ È SOLO NELLE FUNZIONI TERMODINAMICHE.

* PER LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA

$$m(\theta) \sim (-\theta)^\beta = 10^{\beta} \quad \text{per } \theta \rightarrow 0^-$$

$$m(\theta) = \chi(\theta) h \quad \text{per } \theta \rightarrow 0^+ \quad (\text{III})$$

$$m(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0^+} m(h, \theta) \quad \beta_{MF} = \frac{1}{2}$$

A $\theta=0$, SE GUARDO COME LA MAGNETIZZAZIONE CRESCHE CON IL CAMPO HO

$$m(h, \theta=0) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} h^{1/\delta}$$

* NOTA: DIMENSIONALMENTE PROPRIO NO. IL LORO RAPPORTO È UNA FUNZIONE REGOLARE, $\sim O(1)$, MA NON ADIMENSIONALE.

QUESTO MI DICE CHE h , m^δ , $(-\theta)^{\beta\delta}$ SONO DIMENSIONALMENTE* ANALOGHE: SCALANO NELLO STESSO MODO.

LE POSSO COLLEGARE CON UN' EQUAZIONE DI STATO COME

$$h = m^\delta f_H(\theta m^{-1/\beta})$$

DEFINIAMO **

$$z = \theta m^{-1/\beta}$$

$$m = z^{-\beta} \theta^\beta$$

$$m^\delta = z^{-\beta \delta} \theta^{\beta \delta}$$

NOTA: IL PRIMO ZERO DI f_H NEL SEMIASSE NEGATIVO DEL SUO DOMINIO DÀ LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA (INFATTI, È IL PRIMO PUNTO IN CUI $h=0$ BENCHE' $\theta \neq 0$). IL VALORE DI f_H IN ZERO (OSSIA PER $\theta=0$) DÀ INVECE IL COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITÀ DELLA (IV). IL PARAMETRO $\theta m^{-1/\beta}$ È ADIMENSIONALE E REGOLARE, I.E. $O(1)$, VICINO A $\theta=0$.

NEL SEGUITO, IL PIANO È ELIMINARE h E TROVARE γ .

$$\Rightarrow h = z^{-\beta \delta} \theta^{\beta \delta} f_H(z) \quad (\text{VII})$$

USANDO LA (III),

$$h = X^{-1}(\theta)m = X^{-1}(\theta)z^{-\beta} \theta^\beta \quad (\text{VI})$$

$$\tilde{f}_H(z) X^{-1}(\theta) = z^{-\beta(\delta-1)} \theta^{\beta(\delta-1)} \Rightarrow$$

$$\tilde{f}_H(z) = (f_H(z))^{-1}$$

$$\tilde{f}_H(z) = z^{-\beta(\delta-1)}$$

Dove si sono confrontate* la (V) e la (VI). Si ottiene

$$X^{-1}(\theta) = \theta^\gamma = \theta^{\beta(\delta-1)} \Rightarrow \gamma = \beta(\delta-1)$$

* UN CONTO ANALOGO PER IL CALORE SPECIFICO DA'

$$2-\alpha - 2\beta\delta = -\gamma$$

ABBIAMO COSÌ RICAVATO 4 RELAZIONI PER I 6 ESPONENTI CRITICI:

$$\begin{cases} \alpha = 2-\gamma\beta \\ \gamma = \beta(2-\eta) \\ \gamma = \beta(\delta-1) \\ \gamma = 2\beta\delta + \alpha - 2 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \alpha = 2-\gamma\beta \\ \beta = \frac{\gamma}{2}(\Delta-2+\eta) \\ \gamma = \beta(2-\eta) \\ \delta = \frac{\Delta+2-\eta}{\Delta-2+\eta} \end{cases}$$

Dove abbiamo espresso tutti i coefficienti in funzione di γ (LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE) E η (FUNZIONE DI GREEN).

* NOTA: ESSE SONO CALCOLATE RISPECTIVAMENTE PER $\theta > 0$ E $\theta < 0$, MA IL COMPORTAMENTO DEVE ESSERE LO STESSO AL PUNTO CRITICO. È QUESTO CHE SI INTENDEVA PRIMA PARLANDO DI REGOLARITÀ.

** NOTA: THOPPI CONTI, SI FA IN MENO PASSAGGI.

$$z = \theta m^{-1/\beta} \rightarrow m = \left(\frac{\theta}{z}\right)^\beta$$

$$m = X \cdot h = X m^\delta f(z)$$

$$X f(z) = m^{1-\delta} = \left(\frac{\theta}{z}\right)^{\beta(1-\delta)}$$

$$\theta^{-\gamma} f(z)$$

GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE NELLO SPAZIO REALE

(RELAZIONI DI RICORRENZA NELLO SPAZIO REALE)

VOGLIAMO STUDIARE IL COMPORTAMENTO DEL SISTEMA VIANO AL PUNTO CRITICO ($\theta \rightarrow 0$, $m^2 \rightarrow 0$). VOGLIAMO CAPIRE CHE COSA SUCCIDE SOTTO DELLE TRASFORMAZIONI DI SCALA (DILATAZIONI) O SE, CON DEGLI "ISPESSIMENTI", PORTO UN LINK SULL'ALTRO.



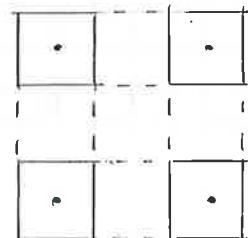
TECNICA DEI BLOCK SPIN (SPIN DI BLOCCO)

DATO UN LATTICE SPACING a , APPLICO LA TRASFORMAZIONE

$$a \rightarrow a' = \lambda a$$

λ INTERO

VOGLIO ASSOCIARE UNA VARIABILE A CIASCUNO DEI BLOCCHI IN FIGURA. UNA REGOLA POSSIBILE E' QUELLA DELLA MAGGIORANZA:



$$\sigma_b = \text{sign} \left(\sum_{i \in b} \sigma_i \right)$$

SE $\lambda a \ll \xi$, MI ASPETTO CHE LE FLUTTUAZIONI ALL'INTERNO DI CIASCUN BLOCCO SIANO IRRELEVANTI. ABBIAMO

$$P_{(a)} \sim e^{S(a)}$$

$$S(a) = -\beta H(a) = \beta \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i$$

METTIAMO AD h PICCOLO E $\beta \sim \beta_c$. CERCHIAMO UNA NUOVA HAMILTONIANA PER DESCRIVERE I BLOCCHI ($a \rightarrow \lambda a$): IN TERMINI DI QUESTA, LA FUNZIONE DI PARTIZIONE SI SCRIVE

$$Z = \sum_{\{\sigma_b = \pm 1\}} e^{S_{(\lambda a)} [\sigma_b]}$$

$$= \sum_{\{\sigma_b = \pm 1\}} \left\{ \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \left[\prod_{\text{BLOCCHI}} \delta \left(\sigma_b - \text{sign} \left(\sum_{i \in b} \sigma_i \right) \right) \right] e^{S_{(\lambda a)} [\sigma_i]} \right\}$$

NOTA: E' SOLO UN CAMBIO DI VARIABILI, E INFATTI $S_{(\lambda a)}$ NON SEMPLIFICA IL PROBLEMA ORIGINALE.

DONE STO FISSANDO $\{\sigma_b\}$ E SOMMANDO SU TUTTE LE VARIABILI $\{\sigma_i\}$ CHE DANNO QUEL RISULTATO; FACCI QUESTO PER OGNI SCELTA DEGLI $\{\sigma_b\}$.

PER COME L'HO COSTRUITA, $S_{(n)}$ HA LE STESSE SIMMETRIE GLOBALI DI $S(a)$.

λ E' INTERO, MA SE ASSUMO CHE POSSA VARIARE CON CONTINUITA' MI ASPETTO

$$S_{(n)} \underset{\lambda \approx 1}{\sim} S(a)$$

PROVIAMO AD APPROSSIMARE (VISTO CHE IL PROBLEMA VERO NON LO SO TRATTARE)

$$S_{(n)} \approx \beta_n \sum_{b,b'} \sigma_b \sigma_{b'} + h_n \sum_b \sigma_b + S_0$$

NOTA: VEDREMO CHE EVENTUALI CORREZIONI AGGIUNTIVE SARANNO INSIGNIFICANTI.

(S_0 NON CONTERA', QUINDI LA IGNORO). PONIAMO PER IL MOMENTO $h=0$.

RITROVO UN NUOVO MODELLO DI ISING, CON INTERAZIONI A PRIMI VICINI E CON

$$x \rightarrow x_{(n)} = \frac{1}{\lambda} x$$

CALCOLO DIOE' LE LUNGHEZZE IN UNITA' DI λ . ALLORA θ VA IN

$$\theta \rightarrow \theta_n = g(\lambda, \theta)$$

DOVE θ E' LA TEMPERATURA RIDOTTA. ASSUMIAMO CHE θ_n SIA UNA FUNZIONE REGOLARE: TUTTE LE TRASFORMAZIONI CHE EFFETTUAMO SUI PARAMETRI DEL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE SONO REGOLARI (CI PERMETTONO DI SEGUIRE LE TRAIETTORIE DEL GRUPPO), MENTRE LE SINGOLARITA' PROVENGONO SOLO DALE FUNZIONI TERMODINAMICHE.

AUOPIA

$$Z = \sum_{\{\sigma_b\}} e^{S_{(n)}} \approx \sum_{\{\sigma_b\}} e^{S(a)}$$

$$\tilde{\int}_{\text{REGOLARE}} e^{\int(\theta_n) \frac{V}{\lambda}} \approx e^{\int(\theta) V}$$

NOTA: STIAMO CERCANDO L'ENERGIA LIBERA PER SITO.
 $f \approx \frac{1}{V} \ln Z \rightarrow Z \sim e^{-f \cdot V}$

DALL'UGUAGLIANZA DELLE Z CALCOLATE NEI DUE MODI RICAVIAMO UNA RELAZIONE TRA LE ENERGIE LIBERE.
 HO POSTO $h=0$, QUINDI f E' SOLO FUNZIONE DI θ .

DOVE $\tilde{\int}_{\text{REGOLARE}}$ CONTIENE LA SOMMA DI TUTTE LE σ CHE UCCIDO. QUINDI

$$\lambda^\Delta f(\theta) \approx f(\theta_n) + \tilde{\int}_{\text{REGOLARE}}$$

INVECE

$$S_{(n,a)}^{\text{COMPLETA}} = -\beta \left\{ \alpha' \sum' \sigma \sigma + \alpha'' \sum'' \sigma \sigma + \dots + \gamma' \sum' \sigma \sigma \sigma + \dots \right\}$$

DOVE DOVREI INSERIRE INTERAZIONI A PRIMI, SECONDI... VICINI E A PIU' CORPI.

* COSA SUCCIDE SE IERO IL PROCEDIMENTO?

METTIAMO A $T \neq T_c$, $\theta \neq 0$. ITERANDO, I BLOCCI CRESCONO E Dopo K PASSI (per un certo k) troverò

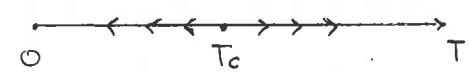
$$\lambda^k a \sim \xi$$

In unità di $a_k = \lambda^k a$, ξ STA DECRESCEndo E AD UN CERTO PUNTO ANHO' UNO SPIN IN UN VOLUME ξ^d . Ciò significa che ho DEVIAZIONI VIA VIA MAGGIORI DAL COMPORTAMENTO CRITICO (che avrei a $\theta=0$).

NOTA: LE H CHE DESCRIVONO COMPLETO ORDINE ($T=0$) O DISORDINE ($T=\infty$) RESTANO LE STESE SE GUARDO I BLOCCI: PER QUESTO SONO PUNTI FISSI!

SE $\beta < \beta_c$, $\beta_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ($T \rightarrow \infty$).

IL SISTEMA SI DISORDINA E HO UN PUNTO ASSO ATTRATTIVO DI ALTE T. IL SISTEMA SI RIORDINA, INVECE,



SE $\beta > \beta_c$, $\beta_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ ($T \rightarrow 0$)

OSSIA LA RINORMALIZZAZIONE AMPLIFICA LE DEVIAZIONI DA T_c .

T_c E' UN PUNTO ASSO IN INSTABILE NON BANALE.

SI NOTI CHE LA REGOLA DELLA MAGGIORANZA AMPLIFICA L'ORDINE O IL DISORDINE GIÀ PRESENTI.

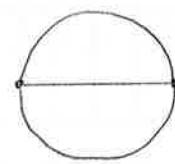
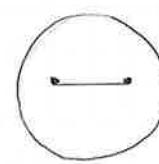
PRENDENDO λ CONTINUO, NELLA REGIONE CRITICA MI ASPETTO

$$\theta_n = \lambda^{\gamma_0} \theta$$

$$\gamma_0 > 0, \lambda \sim 1$$

Dove γ_0 si dice ESPOLENTE TERMICO E MI DICE COME REAGISCE LA TEMPERATURA A UNA DILATAZIONE DEL LATICE SPACING. PER UNA LUNGHEZZA, SO CHE

$$\xi(\theta_n) = \frac{\xi(\theta)}{\lambda}$$



$$\xi \sim 2 \quad \xi \sim 1$$

SE IERO FINO A QUANDO $\xi(\theta_n)$, $\theta_n \sim O(1)$, TROVO $\lambda \sim \theta^{-\frac{1}{\gamma_0}}$ E

$$\xi(\theta) \sim \lambda \sim |\theta|^{-\frac{1}{\gamma_0}} \simeq |\theta|^{-\nu}$$

ABBIAMO COSÌ CONLEGATO

$$\nu = \frac{1}{\gamma_0}$$

NOTA: SECONDO ME E' MOLTO IMPORTANTE, NEL LIMITE CRITICO, $\theta=0$ E $\xi \rightarrow \infty$; IO MI DEFINISCO θ_n COSÌ CHE LUI E $\xi(\theta_n)$ RESTINO FINITI E CIÒ IDENTIFICA IL REGIME $\theta \rightarrow 0^+$. PERCHÉ SCEGLIO $\lambda \sim 1$ E POI IERO, INVECE DI PRENDERE λ GIÀ GASSO? E COME QUANDO PRENDO TRASFORMAZIONI INFINITESIMAMENTE VICINE ALL'IDENTITÀ E POI IERO:

$$U(E) \approx U(N) = (U(E))^N = (1 - i \frac{E}{N} G)^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} e^{-i E G}$$

CONTANOTA: ERA DAVVERO MOLTO IMPORTANTE. VEDI BINNEY 5.3.2.

L'ESPOLENTE γ_0 SI DETERMINA NOTANDO CHE

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda = \gamma_0 \lambda^{\gamma_0 - 1} \theta = \gamma_0 \frac{1}{\lambda} \theta_\lambda$$

NOTA: ANCORA MEGLIO, $\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \ln \lambda}$
E TI PUOI RISCRIVERE

$$\theta_\lambda = \lambda^{\gamma_0} \theta = \theta e^{\gamma_0 \ln \lambda}$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda = \gamma_0 \cdot \theta_\lambda$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\theta_\lambda} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda \right|_{\lambda=1}$$

ASSUMENDO LA REGOLARITÀ DELLE TRANSFORMAZIONI DEL gdr, A T=Tc
DOVRA' AVERE

$$\gamma_{\text{DESTRO}} = \gamma_{\text{SINISTRO}}$$

SI E' VISTO CHE, A MENO DI CONTRIBUTI REGOLARI,

$$\lambda^\Delta f_{\text{sing}}(\theta) = f_{\text{sing}}(\theta_\lambda)$$

USANDO PERCIA' ANCORA $\lambda \sim |\theta|^{-1/\gamma_0} \sim |\theta|^{-\alpha}$, SI OTTENE*

$$f_{\text{sing}} \sim f_\pm |\theta|^{+\Delta} = f_\pm |\theta|^{2-\alpha}$$

NOTA: PER DEFINIZIONE, ESSENDO $C_V = \frac{\partial U}{\partial \theta} \sim \theta^{-\alpha}$.

ABBIAMO COSÌ RIETRIVATO, PER L'ESPOLENTE α DEL CALORE SPECIFICO,

$$\beta - \alpha = \gamma_D$$

*NOTA: AD DIMOSTRA, EN PASSANT, L'IPOTESI DI HYPERSCALING.

* GENERALIZZIAMO AL CASO CON $h \neq 0$. AVREMO

$$\beta_\lambda(\beta, h), \quad h_\lambda(\beta, h)$$

PER $\theta \sim 0$, $h \neq 0$. INTRODUCENDO L'ESPOLENTE MAGNETICO χ_h ,

$$\begin{cases} \theta_\lambda = \lambda^{\gamma_0} \theta \\ h_\lambda = \lambda^{\gamma_h} h \end{cases}$$

NOTA: AL PUNTO CRITICO STANNO SVANENDO SIA θ CHE h .

E POSSO RISCRIVERE

$$f_{\text{sing}}(\theta, h) \sim \lambda^{-\Delta} f_{\text{sing}}(\lambda^{\gamma_0} \theta, \lambda^{\gamma_h} h) \approx |\theta|^{\Delta} f_{\text{sing}}(1, h|\theta|^{-\gamma_h})$$

DOVE HO PRESO NUOVAMENTE

$$\lambda^{\gamma_0} \cdot \theta \sim 1$$

$$\Rightarrow \lambda \sim \theta^{-\frac{1}{\gamma_0}} \sim \theta^{-\Delta}$$

DERIVANDOLA RISPETTO AD h ,

$$\text{NOTA: } \partial_h = \lambda^{\gamma_h} \partial_{h_\lambda} \sim \theta^{-\gamma_h} \partial_{h_\lambda}.$$

$$\frac{\partial f_{\text{sing}}}{\partial h} = m \sim |\theta|^{\Delta - \gamma_h} = |\theta|^\beta \Rightarrow \beta = \Delta - \gamma_h$$

E RIDERIVANDOLA DI NUOVO SI TROVA

$$\chi = \theta^{+\gamma(D-2\gamma_h)} = \theta^{-\gamma} \Rightarrow \gamma = \gamma(2\gamma_h - D)$$

TUTTI GLI ESPONENTI CRITICI SI POSSONO COSÌ ESPRIMERE IN TERMINI DI

$$\gamma_0 = \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma_h = \frac{1}{2} \left(D + \frac{\gamma}{\gamma} \right)$$

* CONSIDERIAMO UNA GENERICA HAMILTONIANA CON ACCOPPIAMENTI $\{K_i\}$,

$$K_1 \sum' \sigma_i \sigma_{i+\hat{n}} + K_2 \sum'' \sigma_i \sigma_{i+2\hat{n}} + \dots + \tilde{K}_1 \sum' \sigma \sigma \sigma + \dots$$

TUTTI QUESTI ACCOPPIAMENTI SARANNO SOGGETTI ALLE LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL GOFB; LINEARIZZANDO ATTORNO A $\lambda = 1$,

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} K_i(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \gamma_{ij} K_j$$

NOTA: IL PUNTO CRITICO È QUELLO IN CUI $K_i = 0$.
IN TERMINI DI SISTEMI DINAMICI, ATTORNO A $K=0$ ESPANDO
 $\lambda \tilde{K}|_{\lambda=1} = f(K) \approx \nabla_K f(K) \cdot K \rightarrow \gamma_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial K_j}$.

Dove γ_{ij} È UNA MATRICE, λ È IL PARAMETRO DI SCALA E

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} = \frac{d}{d \ln \lambda}$$

NOTA: CONFRONTA QUANTO APPENA DETTO CON
 $\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda = \gamma_0 \cdot \theta_\lambda$
TROVATA NEL CASO DI UN SOLO ACCOPPIAMENTO.

IN ACCORDO CON IL CARATTERE MOLTIPLICATIVO DELLE DILATAZIONI,

$$\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

(È IL \log CHE È ADDITIVO).

NOTA: SE \tilde{K} È AUTOVETTORE CON AUTOVALORE α ,
 $\frac{d}{d\lambda} \tilde{K}(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \alpha \tilde{K} \rightarrow \tilde{K} \sim \lambda^\alpha$
SE $\alpha < 0$, \tilde{K} VA A ZERO CON LA RINORMALIZZAZIONE.

GLI AUTOVETTORI DI γ_{ij} DEFINISCONO DELLE COMBINAZIONI LINEARI DEI K_i DETTI * SCALING FIELDS. ESSI SI DIVIDONO IN

- 1) RILEVANTI: $\lambda_i > 0$
- 2) IRRILEVANTI: $\lambda_i < 0$
- 3) MARGINALI: $\lambda_i = 0$

* NOTA: SONO LE COMBINAZIONI LINEARI DELLE INTERAZIONI A ESSERE CHIAMATE SCALING FIELDS, O OPERATOR FIELDS. I K_i NON SONO FIELDS.
OCORRE CHE QUI λ_i RICORDA INFELCITEMENTE λ .

I NOSTRI θ_h SONO OPERATORI RILEVANTI.

QUESTO GIUSTIFICA IL SUPPORRE UN NUMERO FINITO DI OPERATORI NELL'HAMILTONIANA: GLI ALTRI GENERANO SOLAMENTE CORREZIONI AI TERMINI DOMINANTI NEL LIMITE CRITICO.

NEL CASO MARGINALE L'APPROXIMAZIONE LINEARE È INSUFFICIENTE.

AVREMO UN LUOGO DI PUNTI CHE CHIAMEREMO VARIETÀ CRITICA;

SU DI ESSA, DISTINGUIAMO DIREZIONI STABILI O INSTABILI*.

PER I PUNTI ASSI CHE DESCRIVONO UNA TOLFA DEL

II° ORDINE, I PARAMETRI RILEVANTI SONO T E h .



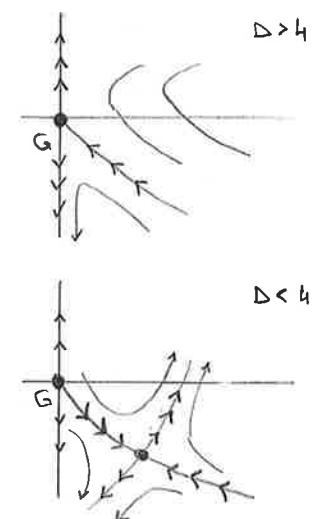
CIO' SPIEGA L'UNIVERSALITÀ: HAMILTONIANE CHE

APPARISCONO MOLTO DIVERSE POSSONO TALVOLTA DIFFERIRE TRA LORO
PER OPERATORI IRRELLEVANTI.

NOTA: I PUNTI FISSI SONO PUNTI
DI SELVA DELLA DINAMICA.

NELLA TEORIA DI L-G, IN $D > h$ IL PUNTO ASSO GAUSSIANO È
ATTRATTIVO IN UNA PARTICOLARE DIREZIONE SOLTANTO.

IN $D < h$, QUELLA STESSA LINEA È REPULSIVA
E MI PORTA SULL'ALTRO PUNTO ASSO NON
BANALE, QUELLO INTERAGENTE (GENERICAMENTE
REPULSIVO, MA CON UNA LINEA ATTRATTIVA).



* LA LEGGE DI SCALA PER LA fOLG A M PUNTI È

$$G(x_1, x_2, \dots, x_m; \theta, h) = \lambda^{-m(D-\gamma_h)} G\left(\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_2}{\lambda}, \dots, \frac{x_m}{\lambda}; \theta_\lambda, h_\lambda\right)$$

\uparrow
 $\lambda^{-m(D-2+\gamma)/2}$

PER LA TEORIA LIBERA, SI ERA VISTO CHE

$$[\psi] = \frac{D-2}{2}$$

MA IN QUELLA INTERAGENTE

$$[\psi] = D - \gamma_h = \frac{D-2}{2} + \frac{\gamma}{2}$$

Ogni campo viene rinormalizzato da

$$(\lambda^{-(D-\gamma_h)}) = Z(\lambda)^{1/2}$$

NOTA: LA DIMOSTRO NELL'
FOCUS QUI A FIANCO.

* NOTA: OCCHIO CHE IN REALTÀ LA
VARIETÀ CRITICA NON È LO SPAZIO
DEI PARAMETRI, MA IL BACINO DI
ATTRAZIONE DEL PUNTO CRITICO,
SU DI ESSA NON CI SONO DIREZIONI
INSTABILI. VEDI FOCUS QUI SOTTO.

NOTA: DETTA COSÌ SEMBRA
PIONUTA DAL CIELO. VEDI FOCUS,
DIMOSTRO ANCHE QUESTA NELLA
PROSSIMA PAGINA.

NOTA: IN QUESTO MODO SI RICANA,
CON IL GDR, CIO' CHE SI ERA SUPPOSTO
CON L'IPOTESI DI SCALING.

• FOCUS: VARIETÀ CRITICA. CHE COSA C'ENTRA IL PUNTO FISSO DELLA RINORMALIZZAZIONE CON IL PUNTO
CRITICO DELLA TEORIA? ABBIAMO VISTO CHE SE $T > T_c$ LA RINORMALIZZAZIONE MI PORTA A $T = \infty$ E SE $T < T_c$
MI PORTA A $T = 0$. NELLO "SPAZIO DELLE HAMILTONIANE" C'È UN IPERPIANO CHE SEPARA QUESTI DUE DIVERSI
COMPORTAMENTI ED È LA VARIETÀ CRITICA (Y. BINNEY 5.3.1),

FOCUS: LEGGE DI SCALA PER LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE (DUPAPE-ITZYKSON, BINNEY)

RICORDIAMO CHE*

$$G(x, \gamma) = \frac{\partial}{\partial h(x)} \frac{\partial}{\partial h(\gamma)} \ln \left\{ \sum_{\{\sigma_i\}} e^{S(a)[\sigma, h]} \right\} \approx \frac{\partial}{\partial h(x)} \frac{\partial}{\partial h(\gamma)} \ln \int d\sigma_i e^{S(a)[\sigma, h]}$$

PARTIAMO DALL'EQUIVALENZA TRA LA Z INIZIALE E QUELLA COSTRUITA CON LE VARIABILI DI BLOCCO

$$\sum_{\{\sigma_i\}} e^{S(a)} = \sum_{\{\sigma'_i\}} e^{S(a') \equiv Z} \quad (I)$$

$$G(x_1, \dots, x_m; \theta, h) = \frac{\delta^m}{\delta h(x_1) \dots \delta h(x_m)} \ln \int d\sigma_i e^{S(a)[h]} \quad (II)$$

$$G(x'_1, \dots, x'_m; \theta_\lambda, h_\lambda) = \frac{\delta^m}{\delta h_\lambda(x'_1) \dots \delta h_\lambda(x'_m)} \ln \int d\sigma_i e^{S(a)[h_\lambda]}$$

Dove

$$h_\lambda = \lambda^{\gamma_h} \cdot h$$

$$x' = \frac{x}{\lambda}$$

FORMALMENTE, DEVE VALERE

$$\frac{\partial}{\partial h_\lambda(z)} = \lambda^{-\gamma_h} \frac{\partial}{\partial h(z)}$$

*NOTA: MANCA, RISETTO AL SOTTO, IL FATTORE $(\frac{1}{\lambda})^m$,
MA IL MOTIVO È CHE QUI
 $S = \theta \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i$ (INVECE DI $\theta h \sum_i \sigma_i$).

Ora osserviamo che

$$\frac{\delta h(x')}{\delta h(\gamma')} = \delta^\Delta(x' - \gamma') = \delta^\Delta\left(\frac{1}{\lambda}(x - \gamma)\right) = |\lambda|^\Delta \delta^\Delta(x - \gamma) = \lambda^\Delta \frac{\delta h(x)}{\delta h(\gamma)}$$

USANDO QUESTI CAMBI DI VARIABILE NELLA (II) E RICORDANDO LA (I),

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_m; \theta, h) &= (\lambda^{\gamma_h} \lambda^{-\Delta})^m \frac{\delta^m}{\delta h_\lambda(x'_1) \dots \delta h_\lambda(x'_m)} \ln \int d\sigma'_i e^{S(a)[h_\lambda]} \\ &= \lambda^{m(\gamma_h - \Delta)} G(x'_1, \dots, x'_m; \theta_\lambda, h_\lambda) \end{aligned} \quad (III)$$

RICORDIAMO ORA L'IPOTESI DI SCALING (CHE, DI FATTO, ABBIAMO APPENA DEMOSTRATO!):

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-(\Delta - 2 + \gamma)}$$

AMMETTENDO CHE LE 'G' AI DUE MEMBRI DELLA (III) DESCRIVANO LO STESSO

SISTEMA FISICO (COME D'ALTRONDE GIÀ FACCIAMO NELLA (I)),

$$\frac{G(x' = \frac{x}{\lambda}, \theta_\lambda, h_\lambda)}{G(x, \theta, h)} = \lambda^{(\Delta - 2 + \gamma)} \stackrel{\uparrow}{=} \lambda^{2(\Delta - \gamma_h)} \quad (IV)$$

(III) CON $m=2$

OCCORRE CHE HO USATO $m=2$ ANCHE SE SI TRATTA DI UNA $G(x)$: IL MOTIVO E' CHE,
PER INVARIANZA TRANSLAZIONALE,

$$G(x_1, x_2) = G(|x_1 - x_2|) \approx G(x)$$

DALLA (IV) SI DEDUCE LA RELAZIONE CHE DEFINISCE m IN TERMINI DI γ_n :

$$\Delta - \gamma_n = \frac{1}{2} (\Delta - 2 + \gamma)$$

FOCUS: MATRICE DI TRASFERIMENTO

$$q^L Z_L = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{m=1}^L e^{p(2\delta_{\sigma_m, \sigma_{m+1}} - 1)} = \sum_{\sigma_1=1}^q \sum_{\sigma_2=1}^q \dots \sum_{\sigma_L=1}^q \underbrace{\prod_{m=1}^L T_{\sigma_m, \sigma_{m+1}}}_{\text{MATRICE } q \times q}$$

$$= \prod_{m=1}^L \sum_{\sigma_{m+1}=1}^q T_{\sigma_m, \sigma_{m+1}} = \sum_{\sigma_1=1}^q \dots \sum_{\sigma_L=1}^q T_{\sigma_1, \sigma_2} T_{\sigma_2, \sigma_3} \dots T_{\sigma_L, \sigma_{L+1}} \xrightarrow{\sigma_{L+1} = \sigma_1}$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^q \sum_{\sigma_2=1}^q \dots \sum_{\sigma_L=1}^q \left(\sum_{\sigma_2=1}^q T_{\sigma_1, \sigma_2} T_{\sigma_2, \sigma_3} \right) T_{\sigma_3, \sigma_4} \dots T_{\sigma_L, \sigma_1}$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^q \sum_{\sigma_3=1}^q (T^2)_{\sigma_1, \sigma_3} T_{\sigma_3, \sigma_4} \dots T_{\sigma_L, \sigma_1} = \dots = \sum_{\sigma_1=1}^q (T^L)_{\sigma_1, \sigma_1} = \text{Tr } T^L$$

MODELLO DI POTTS

NELLA FASE DI SIMMETRIA ROTTATA, HO q STATI INVECE DEI 2 DI ISING.

$$H_{\text{POTTS}}^{(q)} = - \sum_{\langle ij \rangle} (2\delta_{\sigma_i \sigma_j} - 1) \quad \sigma_i = 1, 2, \dots, q$$

HO DUE DIVERSE PESI A SECONDA SE I DUE SMI SONO UGUALI O DIVERSSI:

$$\begin{aligned} \sigma_i = \sigma_j &\Rightarrow -(2-1) = -1 \quad (\text{caso favorito}) \\ \sigma_i \neq \sigma_j &\Rightarrow -(-1) = 1 \end{aligned}$$

PER $q=2$ RITROVO IL MODELLO DI ISING.

IN $D=1$, DEFINISCO PER LA CATENA

$$Z_L = q^{-L} \sum_{\{\sigma=1,2,\dots,q\}} e^{\beta \sum_{m=1}^L (2\delta_{\sigma_m \sigma_{m+1}} - 1)}$$

IN CUI q^{-L} SERVE A RENDERE $Z_L(\beta=0)=1$. SI NOTI CHE HO UN SOLO LEGAME PER OGNI SITO.

DECOMPONGO

NOTA: PUOI VERIFICARE IL PRIMO PASSAGGIO SEMPLICEMENTE PROTAGONDO PER CASI.

$$e^{\beta(2\delta_{\sigma\sigma'} - 1)} = e^{\beta} \delta_{\sigma\sigma'} + e^{-\beta} (1 - \delta_{\sigma\sigma'})$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{q} e^{\beta} (q \delta_{\sigma\sigma'}) - \frac{1}{q} e^{-\beta} (q \delta_{\sigma\sigma'}) \right] + \left[\frac{e^{-\beta}}{q} (q-1) + \frac{e^{-\beta}}{q} \right] + \left[\frac{e^{\beta}}{q} - \frac{e^{\beta}}{q} \right] \\ &= \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} (q \delta_{\sigma\sigma'}) - \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} + \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \\ &= \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \cdot 1 + \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} (q \delta_{\sigma\sigma'} - 1) = T_{\sigma\sigma'} \quad (I) \end{aligned}$$

SI TRATTA DI UNA DECOMPOSIZIONE ORTONORMALE: SE MOLTIPLICO TUTTO LOPO DUE DI QUESTI PEZZI OTTENGO LA SOMMA DEI DUE QUADRATI, CIASCUNO MOLTIPLIATO PER IL SUO ELEMENTO DELLA BASE. AD ESEMPIO,

$$\sigma, \sigma', \tau = 1, 2, \dots, q$$

NOTA: PUOI ANCHE VEDERLA COME

$$\hat{A} = \alpha \hat{x} + \tilde{\alpha} \hat{y}$$

$$A_{\sigma,\sigma'} = \alpha + \tilde{\alpha} (q \delta_{\sigma\sigma'} - 1)$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \{q\}, \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} (q-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (q-1) & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & (q-1) \end{pmatrix}$$

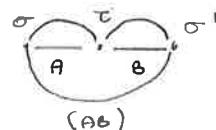
$$B_{\sigma,\sigma'} = b + \tilde{b} (q \delta_{\sigma\sigma'} - 1)$$

IN EFFETTI (MA E' SCOMODO FARCI I CONTI)

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = q \hat{x}, \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = 0, \quad \hat{y} \cdot \hat{y} = q \hat{y}.$$

AUORA

$$\begin{aligned}
 (AB)_{\sigma\sigma'} &= \sum_{\tau} A_{\sigma\tau} B_{\tau\sigma'} = \sum_{\tau=1}^q [\alpha + \tilde{\alpha}(q\delta_{\sigma\tau} - 1)][\beta + \tilde{\beta}(q\delta_{\tau\sigma'} - 1)] \\
 &= q\alpha\beta + (\alpha\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\beta) \sum_{\substack{\tau=1 \\ (\delta_{\sigma\tau})}}^q (q\delta_{\sigma\tau} - 1) + \tilde{\alpha}\tilde{\beta} \sum_{\tau=1}^q (q^2\delta_{\sigma\tau}\delta_{\tau\sigma'} - q\delta_{\sigma\tau} - q\delta_{\tau\sigma'} + 1) \\
 &= q\alpha\beta + \tilde{\alpha}\tilde{\beta} \left[q^2 \sum_{\tau=1}^q \delta_{\sigma\tau}\delta_{\tau\sigma'} - 2q + q \right] \\
 &= q \left\{ \alpha\beta + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \right\}
 \end{aligned}$$



LA (I) SI DICE MATEICE DI TRASFERIMENTO.

SU UNA CATENA DI L SPIN,

NOTA:
 $Z_L^{(1)} = \text{Tr } Z_L^{(1)} = q^{-L} \text{Tr}(T^L)$.
 VEDI FOCUS DUE PAGINE ADDIETRO.

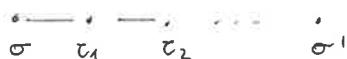
$$\begin{aligned}
 Z_L^{(1)} &= \left[\frac{e^\beta + (q-1)e^{-\beta}}{q} \cdot 1 + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{q} (q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \right]^L \cdot \frac{1}{q^L} \\
 &= q^L \left[\left(\frac{e^\beta + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right)^L \cdot 1 + \left(\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{q} \right)^L (q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \right] \cdot \frac{1}{q^L}
 \end{aligned}$$

SI NOTI CHE NON MI SERVE CERCARE GLI AUTOVALORI IN QUESTA BASE.
 INOLTRÉ, SE HO CONDIZIONI PERIODICHE AL BORDO (CATENA CHIUSA), IL
 PRIMO SPIN È UGUALE ALL'ULTIMO, PRENDO ALLORA LA TRACCIA DELLA
 MATEICE, CHE COINCIDE CON IL SOMMARE SUI SOLI ELEMENTI
 DIAGONALI.

NOTA: GUARDA MOLTO IL FOCUS DI QUI SOPRA.

SI TROVA COSÌ

$$Z_L^{(1)} = \alpha^L + \tilde{\alpha}^L (q\delta_{\sigma\sigma'} - 1)$$



E LA MATEICE HA LA FORMA

$$\begin{pmatrix} \alpha^L + (q-1)\tilde{\alpha}^L & \alpha^L - \tilde{\alpha}^L \\ \alpha^L - \tilde{\alpha}^L & \alpha^L + (q-1)\tilde{\alpha}^L \end{pmatrix} = Z_L^{(1)}$$

$$\text{Tr } Z_L^{(1)} = q(\alpha^L + (q-1)\tilde{\alpha}^L) = q \left[\left(\frac{e^\beta + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right)^L + (q-1) \left(\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{q} \right)^L \right]$$

PER $L \rightarrow \infty$, FACCO UN PUNTO DI SELLA E TRASCURO IL SECONDO

TERMINALE:

$$f = \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta L} \ln \text{Tr} Z_L^{\alpha} = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q}$$

PER $q=2$ (ISING), OTTOVO

$$f = -\frac{1}{\beta} \ln \cosh \beta$$

NOTA:
 $\frac{1}{q} (e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}) = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} + e^{-\beta}$

QUINDI È PIÙ GRANDE DEL SECONDO TERMINE.
 IN GENERALE, SE $\alpha > \beta$,

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta L} \ln [\alpha^L + \beta^L] \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta L} \{ \ln \alpha^L + \ln [1 + (\frac{\beta}{\alpha})^L] \} \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln \alpha - \frac{1}{\beta} \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^L}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

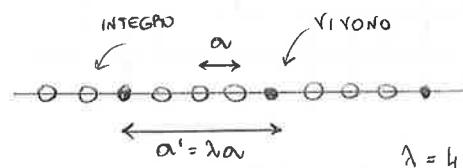
PROCESSO DI DECIMAZIONE ESATTA

METTIAMO IN $D=1$: IN TAL CASO, INFATTI,
 L'INTERAZIONE NON CAMBIA FORMA (RIMANE
 A PRIMI VICINI A 2 PUNTI). È SUFFICIENTE RINORMALIZZARE

$$\beta \rightarrow \beta_n$$

NEL MODELLO DI ISING, DEFINIVAMO

$$t = \tanh(\beta)$$



$$t_n = \tanh(\beta_n)$$

SOMMANDO SU t ,

$$\sum_{\sigma=1}^q [(a + \tilde{a}(\delta_{\sigma\sigma'} - 1)) [b + \tilde{b}(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1)]]$$

$$\begin{array}{c} 2a \\ \hline \sigma \quad t \quad \sigma' \end{array}$$

$$= [ab + \tilde{a}\tilde{b}(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1)] q$$

ONVERO (COME ABBIAMO VISTO CON LA MATEMATICA DI TRASFERIMENTO)

$$\begin{cases} \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \\ \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \\ \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} \end{pmatrix}^{\lambda}$$

NOTA: DA QUI, RACCOGLI IL PRIMO TERMINE,
 OVVERO MOLTIPLICA Z_L PER
 $\left(\frac{q}{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}\right)^L$
 E SALTA DIPIETTAMENTE ALLA (II).

METTIAMO IN EVIDENZA UN FATTORE e^{β} (CHE VI RIMESSO DAVANTI
 A Z).

TROVIAMO

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + (q-1)e^{-2\beta}}{q} \rightarrow (\cdot)^\lambda \\ \frac{1 - e^{-2\beta}}{q} \rightarrow (\cdot)^\lambda \end{array} \right.$$

METTENDO IN EVIDENZA

$$\frac{1 + (q-1)e^{-2\beta}}{q}$$

TROVIAMO

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 - e^{-2\beta}} \rightarrow 1^\lambda = 1 \\ \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + (q-1)e^{-2\beta}} \rightarrow (\cdot)^\lambda \end{array} \right. \quad (II)$$

DEFINIAMO (GENERALIZZANDO QUELLO DI ISING, $t = \tanh(\beta)$, $q = 2$)

$$t = \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + (q-1)e^{-2\beta}} \quad (III)$$

LA (II) CI DICE ALLORA CHE, QUANDO APPLICO LA DECIMAZIONE DI λ ,

$$t(q\delta_{001} - 1) \rightarrow t^\lambda(q\delta_{001} - 1) \equiv t_\lambda(q\delta_{001} - 1)$$

DONDE SI E' DEFINITO

$$t_\lambda = t(\beta_\lambda) = t^\lambda \quad (IV)$$

ABBIAMO TROVATO

NOTA: SI TRATTA DEL FATTORE CHE HO RACCOLTO PER SCRIVERE LA (II). β_λ E' DEFINITA IMPLICATAMENTE DALLA (IV).

$$Z_L(\beta) \left(\frac{e^\beta + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right)^{-L} = Z_{L/\lambda}(\beta_\lambda) \left(\frac{e^{\beta_\lambda} + (q-1)e^{-\beta_\lambda}}{q} \right)^{-L/\lambda}$$

QUESTA TRASFORMAZIONE* AMMETTE UN PUNTO FISSO ATTRATTIVO

DI ALTE T A $t=0, \beta=0$, E UN PUNTO FISSO REPULSIVO DI

BASSE T A $t=1, \beta=\infty$.

*NOTA: OVVERO LA (IV). β E' DATO DALLA (III).

IN $D=1$, $(T=0) \cong (T=T_c)$, cioe' HA A CHE FARLE CON UNA T_c ; LI S

DIVERGE E HO IN EFFETTI UN PUNTO FISSO. PER VEDERLO MEGLIO,

METTIAMO A FIANO A $t=1$, $\beta=\infty$. ALLORA

$$t = \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + (q-1)e^{-2\beta}} \sim (1 - e^{-2\beta})[1 - (q-1)e^{-2\beta}] \simeq (1 - e^{-2\beta}) - (q-1)e^{-2\beta}$$

$$= 1 - qe^{-2\beta} + O(e^{-4\beta}) \quad (\text{V})$$

PERATO'

$$t_\lambda \simeq (1 - qe^{-2\beta})^\lambda \simeq 1 - \lambda q e^{-2\beta}$$

$$1 - t_\lambda \simeq \lambda q e^{-2\beta} \stackrel{\uparrow}{\simeq} \lambda(1-t) \quad (\text{VI})$$

$$(1-t) \leftrightarrow \theta$$

OSSIA, $(1-t)$ GIRO IL RUOLO DI θ NELLA DISCUSSIONE GENERALE*. SE ITERO FINO A CHE $(1-t_\lambda) \sim O(1)$, TROVO

$$\lambda \sim (1-t)^{-1}$$

$$\xi \sim (1-t)^{-1} \sim \frac{e^{2\beta}}{q}$$

CHE DIVERGE PER $\beta \rightarrow \infty$.

* NOTA: PUOI VEDERLO COSÌ.
 $1-t \simeq qe^{-2\beta} = qe^{-2\beta} e^{-2(\beta-\beta_c)} \simeq qe^{-2\beta_c}(1-2(\beta-\beta_c))$
 QUINDI
 $(1-t) - (1-t)_c \simeq \underbrace{-2qe^{-2\beta_c}}_{\text{cost.}} (\beta-\beta_c)$

NOTA: EHANO
 $\theta_\lambda = \lambda^{\gamma_0} \cdot \theta$
 $\xi(\theta_\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot \xi(\theta)$
 E SE ITERO FINCHÉ $\xi(\theta_\lambda), \theta_\lambda \sim O(1)$ TROVO

$$\xi(\theta) \sim \lambda \sim \theta^{-1/\gamma_0} \equiv \theta^{-\gamma} \quad \text{qui } \gamma = 1.$$

APPROSSIMAZIONE DI MIGDAL - KADANOFF

IN $D > 1$, LA DECIMAZIONE GENERA NUOVE INTERAZIONI.

CONSIDERIAMO

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{S[\sigma]}$$

** NOTA: VALE SEMPRE, NON SOLO SE $\langle \Delta \rangle = 0$. TRA L'ALTRO
 IN QUESTO CASO E' BANALE, BASTA GUARDARE LO SVILUPPO
 IN CUMULANTI:
 $1 + \frac{1}{2} \langle \Delta^2 \rangle + \dots \geq 1$.

E UN FUNZIONALE $\Delta[\sigma]$ DEGLI SPIN CON VALORE DI ASPETTATIONE NULLO,

$$\langle \Delta[\sigma] \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \Delta[\sigma] e^{S[\sigma]} = 0$$

VALE** PER $\Delta[\sigma]$ LA DISUAGLIANZA DI CONNESSIONE

$$\langle e^{\Delta[\sigma]} \rangle \leq e^{\langle \Delta[\sigma] \rangle}$$

(NON LA DEMOSTRAREMOSMO).

NOTA: PARLANDO DI CAMPO MEDIO, SI ERA MOSTRATO CHE

$$\int d\mu e^{-\beta H} \geq \int d\mu e^{-\beta H_0} \cdot e^{-\beta \langle H - H_0 \rangle}$$

BASTA MANDARE $\mu \rightarrow -\mu$ E SCEGLIERE $H = S + \Delta$, $H_0 = S$.

INDI CHIAMO CON

$$Z_\Delta = \sum_{\{\sigma\}} e^{S[\sigma] + \Delta[\sigma]}$$

$$Z_\Delta \stackrel{*}{=} Z_{(s)} \langle e^{\Delta[\sigma]} \rangle_s \geq Z_{(s)} e^{\langle \Delta[\sigma] \rangle_s} = Z_{(s)} e^0 = Z_{(s)}$$

IN \otimes SI E' MOLTIPLICATO E DIVISO PER $Z_{(s)}$ ($= Z$). SI E' TROVATO
 $Z_\Delta \geq Z$ (I)

* LAVORIAMO SUL MODELLO DI POTS IN DIMENSIONE D, IPERCUBICO.
 INTRODUCIAMO UNA TRASFORMAZIONE CHE TRATTI SEPARATAMENTE
 LE VARIE DIMENSIONI

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$$

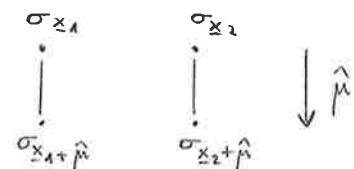
L'AZIONE E'

$$S[\sigma] = \sum_x \sum_{\mu=1}^D \beta_\mu (2\delta_{\sigma_x, \sigma_{x+\hat{\mu}}} - 1)$$

NOTA: AMMETTIAMO, CIOÈ,
 ACCOPPIAMENTI DIVERSI NELLE
 VARIE DIREZIONI. ECCO CHE
 QUI β_μ NON E' LA TEMPERATURA;
 E' L'ACCOPPIAMENTO, CIOÈ LA
 "FORZA" DI Ogni LEGAME (LINK)
 PARALLELO ALLA DIREZIONE $\hat{\mu}$.

USIAMO Δ PER "SPOSTARE" DEI LEGAMI: S' CONTERRA' MENO LEGAMI,
 MA AFFORZATI. DEFINIAMOLO COSÌ:

$$\begin{aligned} \Delta &\propto (2\delta_{\sigma_{x_1}, \sigma_{x_1+\hat{\mu}}} - 1) - (2\delta_{\sigma_{x_2}, \sigma_{x_2+\hat{\mu}}} - 1) \\ &\leq (2\delta_{\sigma_{x_1}, \sigma_{x_1+\hat{\mu}}} - 1) - (2\delta_{\sigma_{x_2}, \sigma_{x_2+\hat{\mu}}} - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

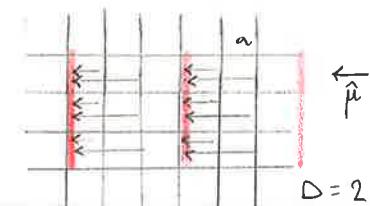


(DISCENDE DALLA INVARIANZA PER TRASLAZIONI). PROCEDIAMO IN QUESTO MODO:

1) SCELGO μ E SOSTO I LINK PARALLELI A TUTTE LE $\hat{\nu} \neq \mu$ PER
 CAMBIARE IL LATTICE SPACING DA a_μ A (λa_μ) IN DIREZIONE $\hat{\mu}$.
 USANDO LUNGO $\hat{\mu}$ LA DECIMAZIONE ESATTA OTENGO*

$$t(\beta_\mu^{(\lambda)}) = t(\beta_\mu)^\lambda \quad (\text{DECIMAZIONE ESATTA}) \quad \text{PER LA DIREZIONE } \mu.$$

$$\beta_\nu^{(\lambda)} = \lambda \beta_\nu \rightarrow t(\beta_\nu^{(\lambda)}) = t(\lambda \beta_\nu) \quad \text{PER } \hat{\nu} \neq \mu.$$



2) RIETO IN TUTTE LE DIREZIONI PER AVERE $a \rightarrow (\lambda a)$.

ALLA FINE DEL PROCESSO AVRO' ANCORA UN RETICOLO IPERCUBICO, MA
 CON ACCOPPIAMENTI DIVERSI. E' UNA TRASFORMAZIONE ASIMMETRICA:

TRATTATA IN MODO DIFFERITO LE VARIE DIREZIONI (MA NON LE MISCHIA).

SI DICONO RELAZIONI DI MIGDAL-KADANOFF*

$$\underline{t(\lambda^{D-\mu} \beta_\mu(\lambda)) = [t(\lambda^{D-\mu} \beta_\mu)]^\lambda} \quad 1 \leq \mu \leq D \quad (II)$$

VEDIAMO PERCHÉ. SE $\mu=1$, LA PRIMA VOLTA TRASFORMO t ,

$$t(\beta_1(\lambda)) = t(\beta_1)^\lambda \quad (III)$$

E POI TRASFORMO β PER $(D-1)$ VOLTE:

$$\beta_1' = \lambda \beta_1^{(0)}(\lambda)$$

(III)

$$\Rightarrow t(\lambda^{-1} \beta_1') = t(\beta_1)^\lambda$$

$$\beta_1'' = \lambda \beta_1'(\lambda) = \lambda^2 \beta_1^{(0)}(\lambda)$$

$$\Rightarrow t(\lambda^{-2} \beta_1'') = t(\beta_1)^\lambda$$

...

$$\Rightarrow t(\lambda^{1-D} \beta_1(\lambda)) = t(\beta_1)^\lambda$$

SE PRENDO INVECE $\mu=2$, NEL PRIMO PASSO TRASFORMO β ,

$$t(\beta_2(\lambda)) = t(\lambda \beta_2)$$

E NEL SECONDO USO LA DECIMAZIONE,

$$t(\beta_2(\lambda)) = t(\lambda \beta_2)^\lambda$$

*NOTA: SI TRATTÀ DI RELAZIONI APPROSSIMATE PERCHÉ ABBIAMO IDENTIFICATO Z CON Z_D , QUANDO LE DUE ERANO INVECE LEGATE DALLA DISUGUAGLIANZA (I). L'ORDINE $\mu=1 \dots D$ È QUELLO CON QUI HO APPLICATO L'ALGORITMO.

NEI SUCCESSIVI $(D-2)$ PASSI METTO UN λ^{-1} NELL'ESPOLENTE A SINISTRA.

MIGDAL-KADANOFF SUL MODELLO DI ISING

METTIAMO NEL MODELLO DI ISING

$$D=2, q=2, \lambda=2$$

E CHIAMIAMO

$$\gamma_1 = e^{-2\beta_1}$$

$$\gamma_2 = t(\beta_2) = \frac{1 - e^{-2\beta_2}}{1 + e^{-2\beta_2}}$$

LE RELAZIONI (II) DI M-K CI DICONO ALLORA CHE

$$\begin{cases} t\left(\frac{\beta_1}{2}\right) = t(\beta_1)^2 \\ t(\beta_2) = t(2\beta_2)^2 \end{cases}$$

OVVERO

$$\begin{cases} \frac{1-e^{-\beta_1}}{1+e^{-\beta_1}} = \left(\frac{1-e^{-2\beta_1}}{1+e^{-2\beta_1}} \right)^2 \\ \frac{1-e^{-2\beta_2}}{1+e^{-2\beta_2}} = \left(\frac{1-e^{-4\beta_2}}{1+e^{-4\beta_2}} \right)^2 \end{cases} \quad (\text{Ia})$$

(Ib)

VERIFICA CHIAMO CHE LA TRASFORMAZIONE DI M-K SI PUO' ESPRIMERE COME

$$\begin{cases} \gamma_\mu (\lambda=2) = F_{\lambda=2}(\gamma_\mu) & \mu = 1, 2 \\ F_{\lambda=2}(\gamma)_{\lambda=2} = \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2} \right)^2 \end{cases}$$

OVVERO CHE QUESTI DUE OGGETTI SODDISFANO LA STESSA RELAZIONE.

VEDIAMO: SE $\mu=2$, CHIAMANDO $t = \gamma_2 = t(\beta_2)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 &= \left\{ 2 \cdot \frac{1-e^{-2\beta}}{1+e^{-2\beta}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1-e^{-2\beta}}{1+e^{-2\beta}} \right)^2 \right]^{-1} \right\}^2 \\ &= 4 \left\{ \frac{1-e^{-2\beta}}{1+e^{-2\beta}} \cdot (1+e^{-2\beta})^2 \cdot \left[(1+e^{-2\beta})^2 + (1-e^{-2\beta})^2 \right]^{-1} \right\}^2 \\ &= 4 \left\{ \frac{(1-e^{-2\beta})(1+e^{-2\beta})}{2(1+e^{-2\beta})} \right\}^2 = \left(\frac{1-e^{-4\beta}}{1+e^{-4\beta}} \right)^2 \end{aligned}$$

QUINDI ABBIAMO TROVATO, PER LA SECONDA COMPONENTE,

$$\gamma_2 = t(\beta_2) \stackrel{(\text{Ib})}{=} \left(\frac{1-e^{-4\beta_2}}{1+e^{-4\beta_2}} \right)^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 = F_{\lambda=2}(\gamma_2)$$

PER LA PRIMA COMPONENTE, $\mu=1$, VOGLIAMO

$$t\left(\frac{\beta_1}{2}\right) = t(\beta_1)^2 \quad \gamma_1 = e^{-2\beta_1} \equiv \gamma$$

$$\frac{1-\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} = \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2$$

NOTA: HO USATO LA (Ia).

$$(1-\sqrt{\gamma}) = (1+\sqrt{\gamma}) \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2$$

$$1 - \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2 = \sqrt{\gamma} \left[1 + \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2 \right]$$

$$\frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} = \sqrt{2\gamma} \frac{1+\gamma^2}{(1+\gamma)^2}$$

$$16\gamma^2 = 4\gamma (1+\gamma^2)^2 \Rightarrow \gamma = \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2}\right)^2$$

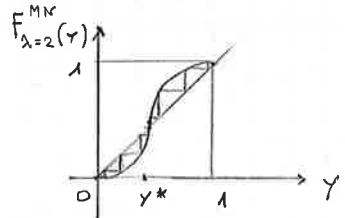
L' EQUAZIONE CHE DETERMINA γ_1 HA CIOE' LA STESSA FORMA (E GLI STESSI PUNTI FISSI) DI QUELLA CHE DETERMINA γ_2 .

* CERCHIAMO QUINDI IL PUNTO FISSO

$$\gamma^* = F_{\lambda=2}^{MK}(\gamma^*)$$

IN $0 < \lambda < 1$ HO DUE PUNTI ASSI ATTRATTIVI ($T=0$ E $T=\infty$); NE HO POI UNO REPULSIVO IN

$$\gamma^* = 0.2956$$



VIANO AL PUNTO FISSO, POSSO LINEARIZZARE

$$(\gamma_\lambda - \gamma^*) \approx F'_\lambda(\gamma^*)(\gamma - \gamma^*)$$

RICORDIAMO CHE, VIANO A $\lambda = 1$,

$$\theta_\lambda = \lambda^{\gamma_0 \theta} = \lambda^{1/\lambda} \theta$$

QUINDI

$$F'_\lambda(\gamma^*) = \lambda^{1/\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\log \lambda}{\log F'_\lambda(\gamma^*)}$$

CHE POSSO MISURARE NUMERICAMENTE. SI TROVANO, IN SINTESI,

$$q=2, D=2, \lambda=2$$

$$\gamma^* \approx 0.2956$$

$$F'_2(\gamma^*) \approx 1.6786$$

$$\lambda \approx 1.3383$$

CHE NON E' UN GRANONE CONFRONTATO CON LA SOLUZIONE DI ONSAGER

$$\lambda_{\text{ONSA}} = 1$$

ANCHE MANDANDO $\lambda \rightarrow 1$, NON FA MOLTO MEGLIO :

$$\lambda \approx 1.327$$

RESTA COMUNQUE UN' APPROXIMAZIONE UTILE.

NOTA: E QUESTO CHE CI AZZECCA CON IL COEFFICIENTE DI $\theta \sim (T-T_c)$? BASTA SVILUPPARE LA $\gamma(\theta)$ FINO A $\theta=0$ (LE $\gamma(\theta)$ DEVONO AVERE IL TERMINE LINEARE IN θ NELLO SVILUPPO). AD ESEMPIO

$$\gamma_1 = e^{-2\beta_1} = e^{-2\beta_C} e^{-2(\beta_1 - \beta_C)} \approx e^{-2\beta_C} [1 - 2(\beta_1 - \beta_C)]$$

$$\gamma_1 - \gamma_1^* \approx 2e^{-2\beta_C} (\beta_C - \beta_1)$$

L' IMPORTANTE E' CHE NON CAMBI L' ESponente DI $\theta \sim (\beta_C - \beta_1)$

REGOLA DELLA MAGGIORANZA, PT.1

ISING $q=2, D=2$. RETICOLO TRIANGOLARE.

OGNI SITO HA 6 VIANI. È UN RETICOLO NON SELF-DUALE: IL SUO DUALE È UN RETICOLO ESAGONALE CON TAE PRIMI VIANI PER SITO.

CHIAMANDO

$$C_2 = \cosh(2\beta)$$

$$S_2 = \sinh(2\beta)$$

SI TROVA (MA NOI NON LO FAREMO)

$$F(\beta) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2\theta}{(2\pi)^2} \ln \left\{ C_2^3 + S_2^3 - S_2 [\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2)] \right\}$$

$$\beta_c = \frac{1}{h} \ln 3 \approx 0.2747$$

MI ASPETTO CHE GLI ESPONENTI CRITICI SIANO GLI STESSI CHE IN UN RETICOLO QUADRATO (UNIVERSALITA').

VI È UNA DUALITA' TRA TRIANGOLARE/ESAGONALE (CHE NON APPROFONDIREMO) t.c.

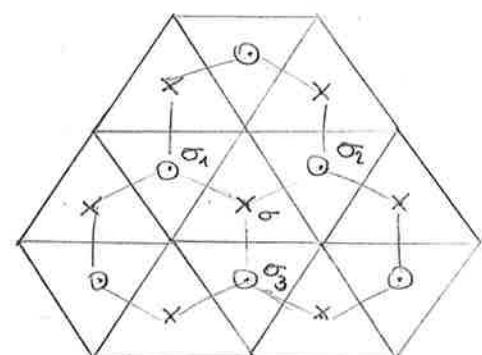
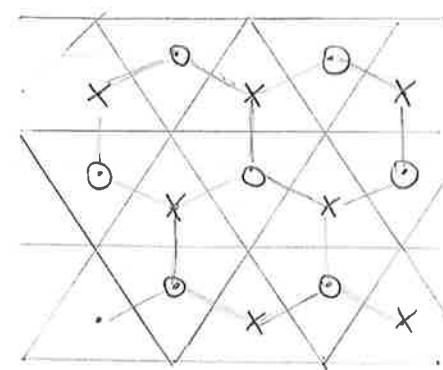
$$e^{-2\beta'} = \tanh(\beta)$$

$$\beta'_{cs} = -\frac{1}{2} \ln \tanh(\beta_{th})$$

USEMENO, SUL RETICOLO ESAGONALE, LA DECIMAZIONE ESATTA STAR TRIANGLE: LO DIVIDO COSÌ IN DUE SOTTORETICOLI TRIANGOLARI 'O' E 'X'.

LE 'X' INTERAGISCONO SOLO TRA LORO E COSÌ LE 'O'. POSSO ELIMINARE UNO DEI DUE SOTTORETICOLI SOMMANDO SUGLI SPIN CHE VIVONO SU QUEL RETICOLO:

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta' \sigma (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}$$



SE SOMMO SU σ , DORREI RICORDARE IL MODELLO TRIANGOLARE INIZIALE:

$$A e^{\beta''(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}$$

NOTA: QUESTA È LA FORMA CHE AVREBBE IL PEZZO DI Z RIFERITO A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
 β'' È IL COUPLING SUL RETICOLO TRIANGOLARE FINALE.

RICORDANDO CHE

$$e^{\beta' \sigma'} = C'(1 + t' \sigma')$$

CALCOLIAMO

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta' \sigma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} = \frac{C'^3}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} (1 + t' \sigma \sigma_1)(1 + t' \sigma \sigma_2)(1 + t' \sigma \sigma_3)$$

$$= C'^3 [1 + t'^2 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)] = C'^3 + C'^2 S'^2 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)$$

PERCHÉ LA SOMMA AMMAZZA LE POTENZE DISPARI DI σ_i .

INVECE

$$\begin{aligned} e^{\beta''(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} &= C''^3 (1 + t'' \sigma_1 \sigma_2)(1 + t'' \sigma_1 \sigma_3)(1 + t'' \sigma_2 \sigma_3) \\ &= C''^3 [1 + (t'' + t''^2)(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) + t''^3] \\ &= (C''^3 + S''^3) + (C''^2 S'' + C'' S''^2)(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \end{aligned}$$

ABBIAMO COSÌ TROVATO

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta' \sigma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} = C'^3 [1 + t'^2 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]$$

$$A e^{\beta'' \sigma(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)} = A (C''^3 + S''^3) \left[1 + \frac{C''^2 S'' + C'' S''^2}{C''^3 + S''^3} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right]$$

RICHIEDO CHE SIANO UGUALI, AOE' CHE

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta' \sigma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} = A e^{\beta'' \sigma(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)}$$

CON UN PO' DI CONTI, USANDO LA RELAZIONE DI DUAUTA'

$$e^{-2\beta'} = \tanh(\beta)$$

TIRO

$$\left\{ \begin{aligned} e^{4\beta''} &= \frac{\cosh 3\beta'}{\cosh \beta'} = 2\cosh(2\beta') - 1 = 2 \frac{\cosh(2\beta)}{\sinh(2\beta)} - 1 \\ A^4 &= \cosh(3\beta') (\cosh \beta')^3 \end{aligned} \right. \quad (I_a)$$

$$(I_b)$$

LA (Ia) SI PUO' RISCRIVERE COME

$$(e^{4\beta} - 1)(e^{4\beta''} - 1) = 4 \quad (\text{Ia})$$

$$\beta_c = \beta_c'' = \frac{1}{4} \ln 3$$

$\beta \rightarrow$ TRIANGOLARE

$\beta' \rightarrow$ ESAGONALE (DUALITA')

$\beta'' \rightarrow$ TRIANGOLARE (DECAMAZIONE)

NOTA: QUESTO E' IL PUNTO FISSO DELLA
TRANSFORMAZIONE APPENA TROVATA, LA (Ia).
COINCIDE CON IL PUNTO CRITICO DEL MODELLO
DI FRATTURA (SONO LO STESSO MODELLO!).

$$\begin{array}{ccc} \beta & \longrightarrow & \beta' \\ \Delta & & \textcircled{+} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \beta' & \longrightarrow & \beta'' \\ \textcircled{+} & & \Delta \end{array}$$

SONO PASSATO DALLA (Ia) ALLA (Ic) COSÌ:

$$(\tanh \beta')^2 = \frac{C''^2 S'' + C'' S''^2}{C''^3 + S''^3}$$

$$\frac{1 - 2e^{-2\beta'} + (e^{-2\beta'})^2}{1 + 2e^{-2\beta'} + (e^{-2\beta'})^2} = \frac{e^{4\beta''} - 1}{e^{4\beta''} + 3}$$

USANDO ORA

$$e^{-2\beta'} = \tanh \beta$$

TROVO

$$e^{4\beta} = \frac{e^{4\beta''} + 3}{e^{4\beta''} - 1}$$

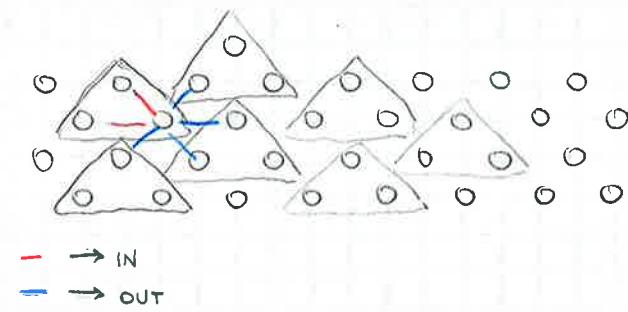
E OTTENGO LA (I) SOTTRAENDO 1 IN ENTRAMBI I MEMBRI.

NOTA: SONO CONTI BRUTTI E PAIVI DI ANIMA,
FARMI SE PROPRIO VOI; RICORDA CHE
 $(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

• REGOLA DELLA MAGGIORANZA, PT.2

USIAMO ANCORA LA REGOLA DELLA MAGGIORANZA SU DI UN RETICOLO TRIANGOLARE; PER OGNI GRUPPO DI 3 SPIN, NE CREO UNO NUOVO

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow \mu_b$$



$$\mu = \text{Sign}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \pm 1$$

CHE E` ANCORA UNA VARIABILE DI 1 DING. QUI

$$\lambda = \sqrt{3}$$

E DATA

$$S[\sigma] \rightarrow Z$$

VOGLIAMO PASSARE A $S'[\mu]$ CON QUESTA TRASFORMAZIONE APPROSSIMATA:

$$Z = \sum_{\{\mu_b = \pm 1\}} e^{S'[\mu]}$$

$$= \sum_{\{\mu_b = \pm 1\}} \left\{ \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \left(\prod_b S \text{Sign}(\sigma_1^b + \sigma_2^b + \sigma_3^b), \mu_b \right) \cdot e^{S[\sigma]} \right\}$$

FIN QUI ESATTO, MA DOVREMO APPROSSIMARE SE VOGLIAMO SAPERLO CALCOLARE.

* PRENDIAMO UN BLOCCO CON 3 SPIN (UN SOLO μ), CON UN TOTALE DI $2^3 = 8$

CONTRIBUTI IN Z :

$$4 \text{ TRIPLE} \rightarrow \mu = +1$$

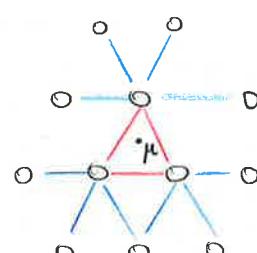
$$4 \text{ TRIPLE} \rightarrow \mu = -1$$

μ E` UGUALE AL VALORE DELLA MAGGIORANZA DELLE σ NEL BLOCCO.

APPROSSIMIAMO $S[\sigma]$ DIVIDENDOLA INNANZITUTTO NELLE SUE PARTI DI INTERAZIONE NEL BLOCCO "IN" O "OUT":

$$S[\sigma] = S_{\text{(in)}}[\sigma] + S_{\text{(out)}}[\sigma]$$

TRATTEREMO $S_{\text{(out)}}[\sigma]$ PERTURBATIVAMENTE.



INIZIAMO CALCOLANDO $Z_0[\mu]$, DEFINITA COME

$$S_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \beta (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)$$

NOTA: BASTA OSSERVARE CHE
 $\sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} (\cdot) = \prod_{\alpha} \sum_{\{\sigma-\alpha\}} (\cdot)$.

$$Z_0[\mu] = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} S_{\text{Sign}(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha + \sigma_3^\alpha), \mu_\alpha} e^{-S_0[\sigma]}$$

$$= \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} \left\{ S_{\mu_{\alpha}, 1} e^{\beta(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)} + S_{\mu_{\alpha}, -1} e^{\beta(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)} \right\}_{(\alpha)}$$

GUARDAVAMOLO PER CASI:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = +1 \rightarrow e^{3\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = +1 + (2 \text{ PERM.}) \rightarrow e^{-\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1 \rightarrow e^{3\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = -1 + (2 \text{ PERM.}) \rightarrow e^{-\beta}$$

PERCIO'

$$\begin{aligned} Z_0[\mu] &= \prod_{\alpha} \left[S_{\mu_{\alpha}, 1} (e^{3\beta} + 3e^{-\beta}) + S_{\mu_{\alpha}, -1} (e^{3\beta} + 3e^{-\beta}) \right] \\ &= \prod_{\alpha} (e^{3\beta} + 3e^{-\beta}) = (e^{3\beta} + 3e^{-\beta})^{N/3} \end{aligned}$$

DOVE N E' IL NUMERO DI SPIN DEL RETICOLO.

SCHIVEREMO

$$\langle \cdot \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} S_{\mu_{\alpha}, \text{Sign}(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha + \sigma_3^\alpha)} e^{S_0[\sigma]} (\cdot)$$

NOI STIAMO CERCANDO DI CALCOLARE $S'_0[\mu]$ CHE E' DEFINITA DA

$$\begin{aligned} e^{S'_0[\mu]} &= \sum_{\{\sigma\}} \left(\prod_{\alpha} S_{\mu_{\alpha}, \text{Sign}(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha + \sigma_3^\alpha)} e^{S_0[\sigma]} \right) = Z_0 \frac{1}{Z_0} \sum_{\{\sigma\}} \left(\prod_{\alpha} S_{\mu_{\alpha}, \text{Sign}(\cdot)} e^{S_0[\sigma]} e^{S_1[\sigma]} \right) \\ &= Z_0 \langle e^{S_1[\sigma]} \rangle_0 \end{aligned}$$

DOVE

$$Z_0 = (e^{3\beta} + 3e^{-\beta})^{N/3}$$

APPROSSIMIAMO ANORA

$$\log \langle e^{S_1} \rangle \approx \log \left(1 + \langle S_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle S_1^2 \rangle + \dots \right)$$

$$\approx \langle S_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle S_1^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle S_1 \rangle^2 + \dots \approx \langle S_1 \rangle + \frac{1}{2} (\langle S_1^2 \rangle - \langle S_1 \rangle^2)$$

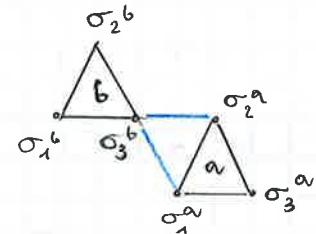
SE TENIAMO SOLO IL PRIMO TERMINE DEI' ESPANSIONI IN CUMULANTI,

$$\langle e^{\delta_1} \rangle_0 \approx e^{\langle \delta_1 \rangle_0}$$

I BLOCCHI AVRANNO SOLO INTERAZIONI A PRIMI VIANI.

NEL DISEGNO A FIANCO, HO GIÀ USATO LE

INTERAZIONI INTERNE PER CALCOLARE Z_0 .



L'INTERAZIONE TRA I DUE BLOCCHI FATTOPIZZA NEL PRODOTTO DI TERMINI

$$\beta \langle (\sigma_1^a + \sigma_2^a) \sigma_3^b \rangle_0 = \beta (\langle \sigma_1^a \rangle_0 + \langle \sigma_2^a \rangle_0) \langle \sigma_3^b \rangle_0 \quad (I)$$

PERCHÉ Z_0 È FATTOPIZZATA SUI BLOCCHI. CALCOLIAMOCI ALLORA

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1^a \rangle_0 &= \frac{1}{Z_0^{(a)}} \sum_{\{\sigma^a\}} \delta_{\mu a}, \text{sign}(\sigma_1^a + \sigma_2^a + \sigma_3^a) e^{\text{So}[\sigma]} \cdot \sigma_1^a \\ &= (e^{3\beta} + 3e^{-\beta})^{-1} \sum_{\{\sigma^a\}} \delta_{\mu a}, \text{sign}(\sigma_1^a + \sigma_2^a + \sigma_3^a) e^{\text{So}[\sigma]} \cdot \sigma_1^a \end{aligned} \quad (II)$$

(LA $Z_0^{(a)}$ È SOLO QUELLA DEL PEZZETTO CHE HO DISEGNATO, POI NE PRENDEREHO' IL PRODOTTO PER AVERE IL SISTEMA TOTALE*). STUDIANDO ANCORA PER CASI,

$$e^{3\beta} \rightarrow \mu e^{3\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = +1$$

$$e^{-\beta} \rightarrow 2\mu e^{-\beta} - \mu e^{-\beta} = \mu e^{-\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = +1$$

PERDO'

$$\langle \sigma_1^a \rangle_0 = \frac{e^{3\beta} + e^{-\beta}}{e^{3\beta} + 3e^{-\beta}} \mu_a$$

NEI 4 CASI POSITIVI, TROVO CIOE'

$$e^{3\beta} + e^{-\beta}$$

CHE SONO COME $(e^{3\beta} + e^{-\beta})\mu$. NEI 4 CASI NEGATIVI HO

$$-e^{3\beta} - e^{-\beta}$$

CHE SONO COME $(e^{3\beta} + e^{-\beta})\mu$, CON $\mu = -1$.

LA NUOVA AZIONE CONTERRA' IL NUOVO ACCOPPIAMENTO

$$\beta_N \mu_a \mu_b$$

$$\beta_{N=13} = 2 \left(\frac{e^{3\beta} + e^{-\beta}}{e^{3\beta} + 3e^{-\beta}} \right)^2 \beta$$

(IL FATTORE 2 SEGNA DAUNA (I)).

*NOTA: INFATTI NELLA (II) NON HO MESSO LA \prod . TRA L'ALTRO QUANDO β FATTOPIZZA NON SE NE NEMMENO MEDARE SU TUTTO IL SISTEMA (VEDI CAMPO MEDIO).

β_c COSÌ TORNATO È IL FLUSSO DELL'ACCOGLIIMENTO PER IL MODELLO DI ISING TRIANGOLARE.

CERCHIAMONE IL PUNTO ASSO, t.c.

$$\beta_{\lambda=\sqrt{3}} = \beta \equiv \beta^*$$

DOE'

$$\beta^* = 2\beta^* \left(\frac{e^{3\beta^*} + e^{-\beta^*}}{e^{3\beta^*} + 3e^{-\beta^*}} \right)^2$$

NOTA: NON SERVONO TUTTI QUESTI PASSAGGI.

$$\frac{e^{3\beta^*} + e^{-\beta^*}}{e^{3\beta^*} + 3e^{-\beta^*}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e^{3\beta^*} + e^{-\beta^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{3\beta^*} + 3e^{-\beta^*})$$

$$(e^{2\beta^*})^2 + 1 = \sqrt{\frac{1}{2}} [(e^{2\beta^*})^2 + 3]$$

$$(e^{2\beta^*})^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1$$

$$e^{2\beta^*} = \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right)^{1/2}$$

$$\beta^* = \frac{1}{4} \log \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{4} \log (1 + 2\sqrt{2}) \approx 0.336$$

MENTRE SAPPIAMO CHE

$$\beta_c^{(\text{EXACT})} \approx 0.275$$

* PER CALCOLARE λ , ESPANDO ATTORNO AL PUNTO CRITICO (CHE ORA CONOSCO) LA RELAZIONE

$$\beta_{\lambda=\sqrt{3}} = 2\beta \left(\frac{e^{3\beta} + e^{-\beta}}{e^{3\beta} + 3e^{-\beta}} \right)^2 = 2((\beta - \beta^*) + \beta^*) \left(\frac{e^{3(\beta-\beta^*)+3\beta^*} + e^{-(\beta-\beta^*)-\beta^*}}{\dots} \right)^2$$

COSÌ DA LINEARIZZARLA. SI TROVA

$$(\beta_{\lambda} - \beta^*) \approx (\beta - \beta^*) [1 + 2\beta^*(8 - 5\sqrt{2})] + \dots$$

RICORDANDO CHE

$$\theta_{\lambda=\sqrt{3}} = \lambda^{\gamma_0} \cdot \theta \Big|_{\lambda=\sqrt{3}} = \lambda^{1/\gamma} \theta \Big|_{\lambda=\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^{1/\gamma} \cdot \theta$$

BASTA PORRE

$$(\sqrt{3})^{1/\gamma} \theta = \theta [1 + 2\beta^*(8 - 5\sqrt{2})]$$

DA CUI

$$\gamma \approx 1.134$$

DA CONFRONTARSI CON $\gamma^{(\text{exact})} = 1$.

FOCUS: FUNZIONE DI PARTIZIONE DEL MODELLO GAUSSIANO (TESTA, BINNEY)

VOGLIAMO CALCOLARE

$$Z[h] = \int d\varphi e^{-S[\varphi]} = \int d\varphi e^{-S[\varphi] + \int d^3x h(x)\varphi(x)} \quad (I)$$

$$S[\varphi] = \int d^3x \left\{ \frac{\mu}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2\Lambda^2} (\partial^2\varphi)^2 \right\} \quad (II)$$

COMINCIAMO FATTOORIZZANDO LA DIPENDENZA DALLA SORGENTE h : USO UN METODO STANDARD IN TEORIA DEI CAMPI. DALLA (II), RICANZO LE EQUAZIONI DEL MOTO TRAMITE LE EQUAZIONI DI EULEO - LAGRANGE

$$\partial_\nu \frac{\delta S}{\delta(\partial_\nu\varphi)} = \frac{\delta S}{\delta\varphi} \Rightarrow \left(-\partial_x^2 + \mu + \frac{1}{\Lambda^2} \partial_x^4 \right) \varphi = 0 \quad (III)$$

DOVE HO INTEGRATO PER PARTI SUL VOLUME INFINTO, NOTANDO CHE

$$\int \partial^2\varphi \partial^2\varphi = - \int \partial^3\varphi \partial\varphi = \int (\partial^4\varphi) \cdot \varphi$$

PRIMA DI PRENDERE LA VARIAZIONE DI $S[\varphi]$. ORA CERCO IL PROPAGATORE:

$$\left(-\partial_x^2 + \mu + \frac{1}{\Lambda^2} \partial_x^4 \right) G_\Lambda(x-y) = \delta^\mu(x-y) \quad (IV)$$

TIROVO LA SOLUZIONE PASSANDO IN TRANSFORMATA DI FOURIER,

$$G_\Lambda(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{G}_\Lambda(p) e^{-ip(x-y)} \\ \left(p^2 + \mu + \frac{1}{\Lambda^2} p^4 \right) \tilde{G}_\Lambda(p) = 1 \Rightarrow \tilde{G}_\Lambda(p) = \frac{1}{p^2 + \mu + \frac{(p^2)^2}{\Lambda^2}} \quad (V)$$

Ora APPLICO ALL'INTEGRALE (I) IL METODO DEL PUNTO DI SECCA. SIA $\tilde{\varphi}$ IL CAMPO CHE SODDISFA

$$\left(-\partial_x^2 + \mu + \frac{1}{\Lambda^2} \partial_x^4 \right) \tilde{\varphi} = h \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \int d^3y G_\Lambda(x-y) h(y) \quad (VI)$$

CHE HO RISOLTO CON LA TECNICA DELLA FUNZIONE DI GREEN. PONGO QUINDI

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \eta$$

COSÌ DA CAMBIARE VARIABILI E RISCRIVERE $Z[h]$ IN TERMINI DI

$$Z[h] = \int d\eta e^{-S[\tilde{\varphi}+\eta] + \int d^3x h(x)[\tilde{\varphi}(x)+\eta(x)]} \\ = \underbrace{\int d\eta e^{-S[\eta]}}_{\equiv Z[h=0]} \cdot e^{+ \frac{1}{2} \int d^3x h(x) \tilde{\varphi}(x)} = Z[0] e^{\frac{1}{2} \int d^3x d^3y h(x) G_\Lambda(x-y) h(y)} \quad (VII)$$

LA (VII) SI OTTIENE CON QUALCHE PASSAGGIO IN CUI BASTA APPLICARE LA DEFINIZIONE DI $\hat{\Psi}$.

AI FINI DEL CALCOLO DI VALORI MEDI, HO FINITO: $Z[0]$ SARÀ UN SEMPLICE FATTORE DI NORMALIZZAZIONE CHE SI SEMPLIFICA QUANDO CI ESSO

$$\langle A \rangle = \frac{\int \delta y e^{-S} A[y]}{\int \delta y e^{-S}}$$

$Z[0]$ NON È, DEDÌ, FISICAMENTE OSSERVABILE. TUTTAVIA ESSA CONTRIBUISCE A

$$F[h] = -\frac{1}{\beta} \ln Z[h] = -\frac{1}{2\beta} \int d^Dx d^Dy h(x) G_\lambda(x-z) h(z) - \frac{1}{\beta} \ln Z[0] \quad (\text{VIII})$$

CHE CI STA, PERCHÉ COME SAPPIAMO L'ENERGIA È DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE. VEDREMO CHE È LEI A DIVERGERE; IL SUO CALCOLO È ISTRUTTIVO E UN PO' DELICATO.

• TECNICA DEL DETERMINANTE FUNZIONALE

(BINNEY, APPENDICE L)

SIA DATO L'INTEGRALE FUNZIONALE GAUSSIANO

$$G = \int \delta \phi e^{-\int d^Dx d^Dy \phi(x) M(x,z) \phi(z)} \quad (\text{IX})$$

$M(x,z)$ È L'ANALOGO, IN DIMENSIONE INFINTA, DI UNA FORMA BILINEARE CHE AGISCE SUI VETTORI $\phi(x), \phi(z)$. SUPPOSTO CHE ESSA SIA REALE E SIMMETRICA, E RESTRIGNENDO L'INTEGRAZIONE IN $d^Dx \in d^Dy$ NELLA (IX) A UNA REGIONE FINITA L^D DELLO SPAZIO, POSSO TROVARNE UN SET DISCRETO DI AUTOFUNZIONI

$$\int d^Dy M(x,y) \Psi_m(y) = \lambda_m \Psi_m(x) \quad \hat{M} \underline{\Psi}_m = \lambda_m \underline{\Psi}_m, \quad \lambda_m \in \mathbb{R}$$

ESPANDENDO $\phi(x)$ IN QUESTA BASE ORTHONORMALE,

$$\underline{\phi} = \sum_m \phi_m \underline{\Psi}_m \quad \phi_m = \int d^Dx \Psi_m^*(x) \phi(x) \equiv (\underline{\Psi}_m, \underline{\phi})$$

POSSIAMO RISCRIVERE

$$\int d^Dx d^Dy \phi(x) M(x,z) \phi(z) = (\underline{\phi}, \hat{M} \underline{\phi}) = \sum_{\alpha\beta} (\phi_\alpha \Psi_\alpha, \phi_\beta \hat{M} \Psi_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \phi_\alpha^* \phi_\beta \lambda_\beta (\Psi_\alpha, \Psi_\beta) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \phi_\alpha^2 \quad (\text{X})$$

RESTA DA SPECIFICARE SU CHE FUNZIONI STIAMO INTEGRANDO QUANDO PRENDIAMO $\int \delta\phi$:

SE INTEGRO SU TUTTE LE FUNZIONI OVVIAMENTE DIVERSE TUTTO, INVECE FERMIAMO A

$$\Phi(\underline{x}) = \sum_{m=1}^N \phi_m \Psi_m(\underline{x})$$

E CALCOLIAMO L'INTEGRALE (NUMERICO)

$$G_N = \int d\phi_1 \dots d\phi_N \exp \left[- \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \phi_\alpha^2 \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} G$$

$$= \frac{\pi^{N/2}}{\left(\prod_{m=1}^N \lambda_m \right)^{1/2}} = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{(\det \hat{M})_N}} \quad (\text{XII})$$

CON PROCEDIMENTI DEL TUTTO ANALOGHI, POTREI VERIFICARE CHE INSERENDO UN CAMPO h

$$G[h] = \int \delta\phi e^{- \int d^D x d^D y \phi(\underline{x}) M(\underline{x}, \underline{y}) \phi(\underline{y}) + \int d^D x h(\underline{x}) \phi(\underline{x})}$$

$$G_N[h] = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{(\det \hat{M})_N}} e^{\sum_{\alpha=1}^N \frac{h_\alpha^2}{4\lambda_\alpha}} = G_N[0] e^{\sum_{\alpha=1}^N \frac{h_\alpha^2}{4\lambda_\alpha}}$$

OSSIA CHE LA DIPENDENZA DAL CAMPO ESTERNO h FATTORIZZA. SI APPLICA QUANTO OSSERVATO PRIMA: I VALORI MEDI DELLE OSSERVABILI SONO BEN DEFINITI ANCHE PER $N \rightarrow \infty$ (A PATTO CHE I COEFFICIENTI DI FOURIER $h_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, IL CHE È VERO PER CAMPI FISICI), PERCHÉ LO È IL RAPPORTO $G_N[h]/G_N[0]$.

CALCOLO DI $Z[0]$

VOGLIAMO CALCOLARLE

$$Z[0] = \int \delta\psi e^{-S[\psi]} = \int \delta\psi e^{- \int d^D x \cdot \frac{1}{2} \{ \mu \psi^2 + (\partial\psi)^2 + \frac{1}{\lambda^2} (\partial^2 \psi)^2 \}} \quad (\text{XIII})$$

PRIMA DI TUTTO LO PORTIAMO NELLA FORMA DI UN INTEGRALE GAUSSIANO:

$$Z[0] = \int \delta\psi e^{- \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \psi(\underline{y}) [S(\underline{x}-\underline{y}) \cdot (\mu - \partial_x^2 + \frac{1}{\lambda^2} \partial_x^4)] \psi(\underline{x})} = \int \delta\psi e^{- \frac{1}{2} (\psi, \hat{M} \psi)}$$

DOVE HO INTEGRATO PER PARTI QUA E LA' RICONOSCIAMO COSÌ

$$M(\underline{x}, \underline{y}) = S(\underline{x}-\underline{y}) \left(\mu - \partial_x^2 + \frac{1}{\lambda^2} \partial_x^4 \right)$$

SI NOTI CHE E' LO STESSO OPERATORE DIFFERENZIALE TROVATO NELLA (III)

DALLE EQUAZIONI DI EULERO - LAGRANGE: SAPPIAMO TUTTO DI LUI. TRA L'ALTRO E'

UN OPERATORE LINEARE, QUINDI E' IMMEDIATO TROVARE IL SUO SPETTRO:

$$\Psi_K(\underline{x}) = e^{i K \cdot \underline{x}}$$

$$\lambda_K = \mu + K^2 + \frac{K^4}{\lambda^2} = [\tilde{G}_\lambda(K)]^{-1} \quad (\text{XIV})$$

(MOLTIPLICARE UN OPERATORE \hat{L}_x PER $S(x-y)$ IN GENERE E' UN BUON MODO PER RENDERLO MATEMATICO)

LANOARARE SUL VOLUME FINITO L^d (CON CONDIZIONI PERIODICHE) PRENDE DISCRETO LO SPETTRO: LE COMPONENTI DI \underline{k} SONO MULUPI INTEHI DI $2\pi/L$ (MA AD' NON VUOL DIRE CHE SONO IN NUMERO FINITO). INVECE DI PRENDERE N, FISSO UN CUTOFF:

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{L^d} \sum_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \tilde{\Phi}(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sum_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \tilde{\Phi}(\underline{k}) \Psi_{\underline{k}}(\underline{x})$$

FISSARE COSÌ UN CUTOFF ENERGETICO Λ È EQUIVALENTE A INSERIRE IL REGOLATORE $\frac{1}{\lambda^2} (\partial^2 \psi)^2$ NELLA LAGRANGIANA, COME NOI ABBIAMO FATTO ALL'INIZIO. DALLA (X),

$$\int d\underline{x} d\underline{z} \phi(\underline{z}) M(\underline{x}, \underline{z}) \phi(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\underline{k}, \underline{q}} \tilde{\Phi}^*(\underline{k}) \hat{\phi}(\underline{q}) \lambda_{\underline{q}} \underbrace{(\Psi_{\underline{k}}, \Psi_{\underline{q}})}_{= \sqrt{\delta_{\underline{k}, \underline{q}}}} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sum_{\underline{k}} |\tilde{\Phi}(\underline{k})|^2 \lambda_{\underline{k}} \quad (\text{XII})$$

IN ANALOGIA ALLA (XII), POSSIAMO CALCOLARE

$$Z[0] = \int d\psi e^{-S[\psi]} \rightarrow Z_{\Lambda}[0] = \prod_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \int d\tilde{\psi}(\underline{k}) e^{-S[\tilde{\psi}]}$$

L'UNICO INGHIPPO È CHE $\psi(\underline{x})$ È REALE, QUINDI $\tilde{\psi}(-\underline{k}) = \tilde{\psi}^*(\underline{k})$ E SE FACCIOSI STO INTEGRANDO SU SOLTANTO META' DEI GRADI DI LIBERTÀ. DIVIDENDO PERO'

$$\tilde{\psi}(\underline{k}) = \tilde{\psi}_R(\underline{k}) + i \tilde{\psi}_I(\underline{k}) \Rightarrow |\tilde{\psi}(\underline{k})|^2 = \tilde{\psi}_R^2(\underline{k}) + \tilde{\psi}_I^2(\underline{k})$$

OSSERVO CHE PARTE REALE E IMMAGINARIA SONO VARIABILI INDEPENDENTI, QUINDI SE INTEGRO SU TUTTE E DUE (SEPARATAMENTE) RIPRISTINO IL NUMERO CORRETTO DI MODI. POSSO ANCHE VEDERLA AL CONTRARIO: PASSO DA $\psi(\underline{x})$ REALE ALLA SUA TRASFORMATA $\tilde{\psi}(\underline{k})$ COMPLESSA; COSÌ FACENDO RADDOPPIEREI I MODI ARBITRARIALMENTE SE NON FOSSE CHE $\tilde{\psi}(-\underline{k}) = \tilde{\psi}^*(\underline{k})$.

USANDO INFINE LA (XII),

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda}[0] &= \prod_{\substack{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda}} \int d\tilde{\psi}_R(\underline{k}) d\tilde{\psi}_I(\underline{k}) e^{-\frac{1}{2} (\underline{q}, \hat{M} \underline{q})} \\ &= \prod_{\substack{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda}} \int d\tilde{\psi}_R(\underline{k}) d\tilde{\psi}_I(\underline{k}) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\substack{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda}} \lambda_{\underline{k}} (\tilde{\psi}_R^2(\underline{k}) + \tilde{\psi}_I^2(\underline{k}))} \\ &= \prod_{\substack{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda}} \frac{2\pi\sqrt{\lambda_{\underline{k}}}}{\lambda_{\underline{k}}} = e^{\sum_{\substack{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda}} \ln\left(\frac{2\pi\sqrt{\lambda_{\underline{k}}}}{\lambda_{\underline{k}}}\right)} = e^{\frac{1}{2} \sum_{\substack{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda}} (\ln 2\pi\sqrt{\lambda_{\underline{k}}} - \ln \lambda_{\underline{k}})} \end{aligned}$$

NEELLE \sum' E \prod' SI SONO PRESI SOLTANTO META' DEI MODI, QUELLI INDEPENDENTI, PERO' POI USARE GLI INTEGRALI GAUSSIANI.

IL FATTORE $\ln 2\pi\sqrt{\lambda}$ È DAVERO UNA COSTANTE E LA TRASCURRIAMO.

PASSANDO AL CONTINUO NUOVO SPAZIO DEI MOMENTI,

$$Z[\alpha] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{L^2}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d^D k \ln(\lambda_k) \right\}$$

I λ_k SONO DATI DALLA $(\underline{\text{XIII}})$ A MENO DEL TERMINE $\frac{k^4}{\lambda^2}$. INFATTI INTRODURRE UN REGOLATORE IN $\mathcal{G}[y]$ E' UN MODO ALTERNATIVO DI SVOLGERE IL CALCOLO PRESENTATO; POSSO PENSARE DI ESTENDERE L'INTEGRAZIONE IN $d^D k$ A TUTTO LO SPAZIO E INTRODURRE IL REGOLATORE. SI TROVA

$$Z[\alpha] = \exp \left\{ +\frac{1}{2} \frac{L^2}{(2\pi)^D} \int d^D k \ln \tilde{G}_n(k) \right\}$$

* IN CONCLUSIONE,

$$F = -\frac{\sqrt{V}}{\beta^2 (2\pi)^D} \int d^D k \ln \tilde{G}_n(k) - \frac{1}{2} \int d^D x d^D y h(x) G_n(x-y) h(y) \quad (\underline{\text{XIV}})$$

COME VOLEVAMO DIMOSTRARE. CHE $G_n(x)$, IL PROPAGATORE, SIA ANCHE LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI NON E' OVVIO A PRIORI, MA LO SI VIDE USANDO LE DUE DEFINIZIONI (I) E (VII) DI $Z[h]$:

$$G_n(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \frac{1}{Z[h]} \frac{\delta^2 Z[h]}{\delta h(\underline{x}_1) \delta h(\underline{x}_2)} \Big|_{h=0} = \frac{1}{Z[h=0]} \int dy \psi(\underline{x}_1) \psi(\underline{x}_2) e^{-S[y]} = \langle \psi(\underline{x}_1) \psi(\underline{x}_2) \rangle$$

SE C'E' UN CAMPO h ACCESO, I VALORI $\langle \psi(x) \rangle$ NON SONO NULLI: LI DEVO SOTTRAEREE'. LA STESSA G_n ASSUME IL SIGNIFICATO DI FUNZIONE DI CORRELAZIONE CONNESSA,

$$G_n(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \frac{\delta^2 \ln Z[h]}{\delta h(\underline{x}_1) \delta h(\underline{x}_2)} = \frac{\delta}{\delta h(\underline{x}_1)} \frac{1}{Z[h]} \int dy \psi(\underline{x}_2) e^{-S[y] + \int h y} = \langle \psi(\underline{x}_1) \psi(\underline{x}_2) \rangle_c$$

(VOLENDO, HO USATO IL TEOREMA DI FLUTTUAZIONE-DISSIPAZIONE).

CONFRONTO CON IL MODELLO GAUSSIANO DISCRETO

$$Z[h] = (\det \hat{A})^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \beta^2 (\underline{b}, \hat{A}^{-1} \underline{b})} \quad \hat{A} = -\beta \hat{J} + \Pi, \quad \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = A_{ij}^{-1}$$

USANDO $\det \hat{A}^{-1} = (\det \hat{A})^{-1}$ E $\det A = e^{\text{Tr} \ln A}$, SI TROVA (CONFRONTALA CON $(\underline{\text{XIV}})$)

$$F[h] = -\frac{1}{2\beta} \text{Tr} (\ln \hat{A}^{-1}) - \frac{\beta}{2} \sum_{ij} h_i A_{ij}^{-1} h_j$$