BACCALAUREAT GENERAL

Session 2024

Épreuve : **Mathématiques**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice 1

- **Affirmation 1 : VRAIE**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $f(x) = 5 \times \frac{x}{e^x}$ et par le théorème de croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
Donc la droite d'équation $y = 0$ c'est-à-dire l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de f.

- **Affirmation 2 : VRAIE**

$f'(x) = 5 \times e^{-x} + 5x \times (-e^{-x})$ donc $f'(x) + f(x) = 5e^{-x}$ et f est solution de l'équation différentielle (E)

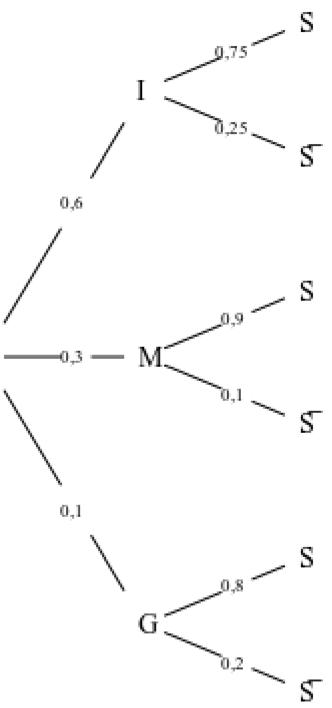
- **Affirmation 3 : FAUX**

On choisit un contre-exemple. Si (u_n) est la suite constante égale à -1, (w_n) la suite constante égale à 1 et (v_n) la suite définie pour tout entier naturel par $v_n = cos(n)$. On a $u_n \leq v_n \leq w_n$ mais (v_n) n'a pas de limite.

- **Affirmation 4 : VRAIE**

Si (u_n) est croissante pour tout $n \geq 0$ on a $u_0 \leq u_n$ et si (w_n) est décroissante pour tout $n \geq 0$ on a $w_0 \geq w_n$ donc $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$

Exercice 2



1.
2. $P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$
3. D'après la formule des probabilités totales
   $P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0{,}45 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}8$
4. $P_S(I) = \frac{P(S \cap I)}{P(S)} = \frac{0{,}45}{0{,}8} \simeq 0{,}562$
5. **a .** On répète $n = 30$ la même épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante de paramètre $p = 0{,}8$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}8$.
   b. $P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \simeq 0{,}427$ à l'aide de la calculatrice.
6. On cherche à déterminer n tel que $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \geq 0{,}99$ avec Y qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}2$
   $$1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n\, ln(0{,}8) \leq \ ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \geq \frac{ln(0{,}01)}{ln(0{,}8)}$$
   L'échantillon doit être de taille d'au moins 21 clients.
7. **a.** $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$ par linéarité de l'espérance.
   $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$ car les variables T_1 et T_2 sont indépendantes.
   b. On cherche à déterminer $P(5 \leq T \leq 9) = P(|T - 7| \leq 2)$

D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev on a :
$P(|T - 7| \geq 3) \leq \frac{3}{3^2}$ donc en passant à l'événement contraire
$1 - P(|T - 7| \leq 2) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(|T - 7| \leq 2) \geq \frac{2}{3}$

Exercice 3

1. a. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan.

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CA}=5-5+0=0$ et $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0+0+0=0$

$\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) donc est un vecteur normal au plan.

b. L'équation cartésienne du plan (CAD) s'écrit $x-y+d=0$. Les coordonnées de A vérifient cette équation cartésienne donc $5-5+d=0 \Leftrightarrow d=0$

Ainsi (CAD) a pour équation cartésienne $x-y=0$

2. a. Il s'agit de résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x=\frac{5}{2}t \\ y=5-\frac{5}{2}t \\ z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$\frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 \Leftrightarrow t=1$$

Ainsi en reportant dans la représentation paramétrique de la droite on retrouve $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$

b.

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{BH}=\frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$ donc $\overrightarrow{BH}$ est un vecteur normal au plan (CAD) et puisque H appartient au plan, H est le projeté orthogonal de B sur le plan.

3. a. $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH}=-\frac{25}{2}+\frac{25}{2}=0$ les droites (AH) et (BH) sont orthogonales donc le triangle AHB est rectangle en H.

b. $\text{Aire}_{ABH}=\frac{AH\times BH}{2}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{25}{4}$ car $AH=BH=\sqrt{2{,}5^2+2{,}5^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

4. a. On peut montrer que $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BHA).

On a $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BH}=0$. Donc (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

b. $V=\frac{1}{3}\times\frac{25}{4}\times\sqrt{(-10)^2}=\frac{125}{6}$

5. Nous pouvons écrire le volume du tétraèdre comme suit

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times h$$

Avec h la hauteur issue de H, cette hauteur est également la distance recherchée puisqu'elle est égale à la distance du point H à son projeté orthogonal sur le plan (ABC)

$$\frac{125}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times BC}{2} \times h$$

$AB = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et $BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$

Donc $h = \frac{125}{6} \times 3 \times \frac{2}{25\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

<u>Exercice 4</u>

Partie A

1. a. $\lim\limits_{x \to 0} x - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   b. $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{2x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$

   c. Pour tout $x > 0$, on a $2x > 0$ et $2x + 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

   d. $f''(x) = \frac{2\times 2x - 2\times(2x+1)}{4x^2} = -\frac{2}{4x^2}$. On a $f''(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ donc f est concave sur cet intervalle.

2. a. f est continue sur $]0, +\infty[$ car dérivable. f est strictement croissante et $0 \in f(]0; +\infty[)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$

   $f(1) = -1$ et $f(2) = \frac{1}{2} ln(2) \simeq 0{,}35$ donc $f(1) < 0 < f(2)$ et $\alpha \in [1; 2]$

   b. f s'annule en α et est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit que :

   f est strictement négative sur $]-\infty, \alpha[$ et est strictement positive sur $]\alpha; +\infty[$

   c. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 + \frac{1}{2} ln(\alpha) = 0 \Leftrightarrow ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$

Partie B

1. $g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\, ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = -2x + 1 - \frac{1}{2} x\, ln(x)$

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \times \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 - 2x - \frac{1}{2} x\, ln(x) = g'(x)$$

2. a. $0 < x < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \alpha$. On pose $\frac{1}{x} = X$, on sait d'après la question 2.b (Partie A) que

pour $X > \alpha$ on a $f(X) > 0$

b. $x \in]0; 1]$ donc $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; 1]$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	||	$+$	0	$-$	
x	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	||	$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C

1. a. $g(x) - y = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\, ln(x) + \frac{7}{8}x^2 - x = -\frac{1}{4}x^2\, ln(x)$
Sur $]0; 1]$ on a $ln(x) \leq 0$ donc $g(x) - y \geq 0$ et la courbe de g et au dessus de la parabole $\mathcal{P}$ sur $]0; 1]$.

b. On procède par intégration par parties en posant
$u(x) = ln(x) \Longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = x^2 \Longrightarrow v(x) = \frac{x^3}{3}$

$$I = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^2}{3} \mathrm{d}x$$

$$I = \frac{1}{3\alpha^3} ln(\alpha) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} = \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - y \,\mathrm{d}x$ et par linéarité de l'intégrale et d'après la question 1. a (partie C) $\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times I$